



**HAL**  
open science

**Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction**

Rossana Falcade

► **To cite this version:**

Rossana Falcade. Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT: . tel-00085202

**HAL Id: tel-00085202**

**<https://theses.hal.science/tel-00085202>**

Submitted on 12 Jul 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE JOSEPH FOURIER**  
Ecole doctorale des Mathématiques,  
Sciences et Technologies de l'information, Informatique  
et  
**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO**

**THÈSE EN CO-TUTELLE**  
pour l'obtention du Diplôme de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER**  
Spécialité : **Mathématiques et Informatique**  
et  
**DOTTORE DI RICERCA IN MATEMATICA**  
**DELL'UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TORINO**  
S. S. D. : **MAT/04**

présentée et soutenue publiquement par  
Rossana FALCADE  
le 8 Juillet 2006

**Théorie des Situations, médiation sémiotique et  
discussions collectives, dans des séquences  
d'enseignement avec Cabri-géomètre pour la construction  
des notions de fonction et graphe de fonction**

Directeurs de Thèse  
Mme Colette LABORDE  
Mme Maria Alessandra MARIOTTI  
M. Ferdinando ARZARELLO

*Membres du Jury*

M. me Maria Grazia BARTOLINI BUSSI	Professeur, Université de Modena et Reggio Emilia	Rapporteur
M. me Marie-Jeanne PERRIN- GLORIAN	Professeur, IUFM Nord-Pas de Calais	Rapporteur
M. me Maria Alessandra MARIOTTI	Professeur, Université de Siena	Directeur
M. me Colette LABORDE	Professeur, IUFM Grenoble	Directeur
M. Ferdinando ARZARELLO	Professeur, Université de Torino	Directeur
M. Alain MERCIER	Professeur, INRP	



*« Si tu veux construire un bateau, ne commence pas à rameuter des gens pour ramener le bois, préparer les outils, repartir les tâches, alléger le travail mais apprend-leur la nostalgie de la mer vaste et infinie ».*

*“Se vuoi costruire una nave, non radunare gli uomini per fare loro raccogliere il legno, preparare gli utensili, distribuire i compiti, suddividere il lavoro, ma insegna loro la nostalgia del mare ampio e infinito”.*

*Antoine de Saint-Exupery*

*Al mio sposo*



# Remerciements

Je me souviens... il y a cinq ans, je suis venue en France, pour faire un DEA et, éventuellement, une thèse... sans savoir extérioriser un mot de français, et en laissant à la maison, en Italie, tout ce que j'avais de plus cher.

Alors que j'arrive au bout de cette thèse et que je pars commencer une autre aventure, je laisse en France aussi un bout de mon cœur.

Je tiens tout d'abord à remercier mes deux directrices de thèse Madame Colette Laborde et Madame Maria Alessandra Mariotti qui m'ont appris le goût et la richesse du métier de chercheur, me communiquant, en même temps, toute leur humanité et leur grande profondeur intellectuelle.

Je remercie vivement Monsieur Ferdinando Arzarello, pour avoir accepté de co-diriger de Turin cette thèse et pour avoir ainsi permis la réalisation de la co-tutelle Italie-France.

Je remercie de tout cœur Madame Marie-Jeanne Perrin-Glorian et Madame Bartolini-Bussi d'avoir accepté d'être mes rapporteurs, dans des conditions de lecture du manuscrit pas tout à fait « confortables ». J'essaierai de mettre à profit leurs questions et remarques si fines et si à propos.

Je remercie aussi vivement Monsieur Alain Mercier d'avoir présidé le jury de la soutenance de cette thèse.

Je remercie tous les membres de l'équipe IAM, en particulier Bernard, Jérôme, Ruth, Sylvia, Sophie, Seden, Zilora et tous ceux qui, comme Betta, Bettina, Cécile, Christophe, Nathalie, m'ont fait rencontrer l'amitié en France et m'ont fait sentir chez moi, même si j'étais si loin de ma famille.

Merci en particulier à Cécile, Christophe, Sylvia et à Sophie pour leur soutien morale et matériel essentiel lors de la rédaction de thèse et de la préparation de ma soutenance.

Je remercie mes amis italiens pour leur soutien constant et sincère, bien que « à distance ».

Je remercie Madame Daniela Venturi et les étudiants de la II et III C du Lycée « Michelangelo Buonarroti » di Forte dei Marmi qui m'ont accueillie dans leur classe si exceptionnelle.

Je remercie ma mère qui m'a toujours accompagnée. Elle a commencé avec moi cette aventure et m'a permis de la terminer en assumant avec une grande passion son rôle non seulement de mère mais aussi, maintenant, de grand-mère.

Je remercie ma famille, mon père et ma grand-mère surtout, qui m'ont toujours soutenue avec leurs encouragements et leurs prières.

Je remercie enfin mon époux Giuseppe, qui a été toujours à mes côtés... surtout lors des moments les plus difficiles. Sans lui, sans son amour, je n'aurais pas osé arriver jusqu'au bout de ce chemin si fascinant.

C'est à lui et mon petit grand homme Luigi, qui dormait en toute quiétude lors de ma soutenance, que je dédie cette thèse.



# Sommaire

<b>Chapitre 1 : Problématique et cadres théoriques</b> .....	<b>1</b>
<b>1. Objet d'étude</b> .....	<b>2</b>
<b>2. Problématique et cadre théorique</b> .....	<b>3</b>
<b>3. La théorie de la Médiation Sémiotique : les liens avec l'œuvre de Vygotsky</b> .....	<b>4</b>
3.1. Introduction.....	4
3.2. Signes et outils : dualité d'un seul concept.....	5
3.3. Du plan socio-culturel au plan individuel .....	7
3.3.1. Le processus d'internalisation .....	9
3.3.2. Zone de développement proximal .....	10
3.4. La médiation sémiotique du langage et l'utilisation fonctionnelle d'un signe .....	11
3.4.1. Sens versus signification, signifié personnel versus signifié culturel	14
3.5. Les <i>discussions mathématiques</i> .....	19
3.6. La médiation sémiotique des outils.....	21
3.6.1. Artefacts versus instruments .....	21
3.6.2. Instruments versus Instruments de médiation sémiotique.....	23
3.6.3. Artefacts de première, deuxième et troisième type .....	26
3.7. Premier bilan intermédiaire : quelque critère de construction de la séquence expérimentale.....	28
3.8. Concepts scientifiques et quotidiens : le rôle de la prise de conscience et de l'écriture .....	29
3.9. Deuxième bilan intermédiaire : d'autres critères de construction de la séquence expérimentale.....	32
<b>4. Première intégration : quelques éléments de la théorie des situation de Guy Brousseau</b> .....	<b>34</b>
4.1. Le milieu adidactique facteur de déséquilibre et d'apprentissage .....	34
4.2. Quelques conséquences pour notre étude.....	37
4.3. La place des situations fondamentales dans cet étude .....	38
4.4. Situations de formulation, institutionnalisation, phases de conclusions et discussions mathématiques.....	42
4.5. Le contrat didactique .....	44
4.6. Deuxième bilan intermédiaire .....	46
<b>5. Deuxième intégration : quelques éléments de sémiotique peircienne</b> .....	<b>47</b>
5.1.1. Trois principes généraux .....	48
5.1.2. Les catégories à la base de la sémiotique peircienne .....	48
5.1.3. Les caractéristiques du signe peircien .....	49
5.1.4. Le processus de sémosis ou sémiotique : triadique et illimité .....	51
5.1.5. Autres caractéristiques du processus de sémosis : inférence et croissance en complexité.....	52
5.1.6. Une articulation trichotomique .....	54



5.1.6.1. La trichotomie de l'objet.....	54
<b>6. Conclusions et premières questions .....</b>	<b>56</b>

**Chapitre 2 : Fonctions et graphes de fonction, une approche alternative..... 61**

<b>1. Introduction .....</b>	<b>61</b>
<b>2. Plusieurs approches à la notion de fonction.....</b>	<b>63</b>
2.1. L'opposition « concept image / concept définition ».....	63
2.2. La dualité dialectique « processus/objet » .....	65
2.3. Centralité des représentations multiples .....	69
2.4. Premières considérations épistémologiques.....	70
2.5. Genèse historique des fonctions.....	71
<b>3. Première hypothèse : fonction comme co-variation.....</b>	<b>76</b>
3.1. Corollaire important : Interprétation dynamique du graphe.....	78
<b>4. Brèves observations cognitives.....</b>	<b>79</b>
<b>5. Critères de construction de la séquence expérimentale associés .....</b>	<b>79</b>
5.1. Avoir à faire avec des changements et des régularités.....	80
5.2. Identifier ce qui change : inconnues et connues versus variables et constantes.....	80
5.3. Asymétrie des variables indépendantes versus variables dépendantes .	82
5.4. Discriminer entre la fonction et ses représentations diverses .....	83
<b>6. Le signifié de co-variation et les difficultés des élèves .....</b>	<b>86</b>
<b>7. Deuxième hypothèse : une approche alternative, les fonctions géométriques dans Cabri-géomètre.....</b>	<b>90</b>
<b>8. Conclusions.....</b>	<b>91</b>

**Chapitre 3 : Cabri-géomètre, instrument de médiation sémiotique et source de rétroactions du milieu ..... 95**

<b>1. Introduction .....</b>	<b>95</b>
<b>2. Instruments de médiation sémiotique dans Cabri .....</b>	<b>96</b>
2.1. Déplacement ou Drag mode .....	96
2.2. Trace.....	97
2.3. Macro.....	100
<b>3. Cabri source de rétroactions du milieu .....</b>	<b>102</b>
<b>4. Conclusions.....</b>	<b>105</b>

**Chapitre 4 : La séquence expérimentale ..... 107**

<b>1. Introduction .....</b>	<b>108</b>
<b>2. Contexte .....</b>	<b>109</b>
<b>3. Présentation générale de la séquence.....</b>	<b>110</b>
3.1. Présentation générale de la séquence du point de vue de la progression du savoir mathématique .....	111
3.1.1. Première partie .....	111
3.1.2. Deuxième partie.....	112
3.1.3. Troisième partie .....	112
3.1.4. Quatrième partie .....	113

3.1.5.	Cinquième partie .....	115
3.1.6.	Sixième partie.....	115
3.2.	Présentation générale de la séquence du point de vue de l'organisation du travail .....	115
3.3.	Présentation générale de la séquence du point de vue de l'articulation TdS/TMS au niveau macro .....	119
<b>4.</b>	<b>Zoom sur la première partie .....</b>	<b>122</b>
4.1.	Variables didactiques liées à la première partie de la séquence expérimentale .....	122
<b>5.</b>	<b>Présentation des fiches relatives à la première partie.....</b>	<b>124</b>
5.1.	Analyse a priori Fiche n°1 « Effet 1 » .....	124
5.1.1.	Choix globaux.....	124
5.1.2.	Question n. 1 .....	125
5.1.3.	Question n. 2.....	126
5.1.4.	Question n. 3.....	127
5.1.5.	Question n. 4.....	128
5.1.6.	Question n. 5.....	128
5.1.7.	Question n. 6.....	129
5.1.8.	Question supplémentaire .....	130
5.2.	Analyse a priori Fiche n°2 « Effet 2 » .....	130
5.2.1.	Choix globaux.....	130
5.2.2.	Question n. 1 .....	131
5.2.3.	Question n. 2.....	132
5.2.4.	Question n. 3.....	132
5.2.5.	Question n. 4.....	133
5.3.	Analyse a priori Fiche n°3 « Invente tu une fonction ».....	135
5.3.1.	Choix globaux.....	135
5.3.2.	Question n. 1 .....	135
5.3.3.	Question n. 2.....	136
<b>6.</b>	<b>Zoom sur la deuxième partie .....</b>	<b>137</b>
6.1.	Analyse a priori Fiche n°4 « Un rectangle bizarre » .....	137
6.1.1.	Choix globaux.....	137
6.1.2.	Question 1 .....	138
6.1.3.	Question 2.....	139
6.1.4.	Question 3.....	140
6.1.5.	Question 4.....	141
<b>7.</b>	<b>Troisième partie.....</b>	<b>141</b>
<b>8.</b>	<b>Zoom sur la quatrième partie .....</b>	<b>142</b>
8.1.	Analyse a priori de la Fiche n°5 « Les représentations possibles d'une fonction numérique » .....	142
8.1.1.	Choix globaux.....	142
8.1.2.	Question 1 .....	143
8.1.3.	Question 2.....	144
8.2.	Analyse a priori de la Fiche n°6 « Lecture et compréhension du texte d'Euler » .....	148
8.2.1.	Choix globaux.....	149
8.3.	Analyse a priori de la Fiche n°7 « Euler dans Cabri » .....	151
8.3.1.	Choix globaux.....	151
8.3.2.	Question 1 .....	152
8.3.3.	Question 2.....	154

8.3.4. Question 3 .....	154
<b>9. Cinquième partie .....</b>	<b>155</b>
9.1. Analyse a priori de la Fiche n°8 « La ficelle élastique, première partie »	156
9.1.1. Question 1 .....	156
9.1.2. Question 2 .....	157
9.1.3. Question 3 .....	157
9.1.4. Question 4 .....	159
9.1.5. Question 5 .....	160
9.2. Analyse a priori de la Fiche n°9 « La ficelle élastique, deuxième partie »	160
9.2.1. Choix globaux .....	160
9.2.2. Question 1 .....	161
9.2.3. Question 2 .....	161
<b>10. Zoom sur la sixième partie .....</b>	<b>163</b>
10.1. Analyse a priori de la Fiche n°10 : « Deux fonctions numériques à confronter » .....	163
10.1.1. Question 1 .....	163
10.1.2. Question 2 .....	164
10.1.3. Question 3 .....	165
10.1.4. Question 4 .....	169
<b>11. Tableau synthétique .....</b>	<b>170</b>
<b>12. Conclusions .....</b>	<b>173</b>

## **Chapitre 5 : Méthodologie d'analyse des discussions collectives** 175

<b>1. Questionnement .....</b>	<b>176</b>
<b>2. Considérations méthodologiques générales .....</b>	<b>177</b>
<b>3. Méthodologie d'analyse des actions de l'enseignante .....</b>	<b>179</b>
<b>4. Méthodologie d'analyses a priori des actions de l'enseignante, premier niveau d'analyse (à dominante descriptive)</b>	<b>181</b>
4.1. Catégories d'analyse de l'action professorale dérivées des travaux de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (à dominante descriptive) .....	181
4.2. Catégories d'analyse de l'action professorale dérivées des travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (à dominante descriptive) .....	186
<b>5. Méthodologie d'analyse a priori des actions de l'enseignante, deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative) .....</b>	<b>187</b>
5.1. Résonance et d'autres catégories d'analyse des actions de l'enseignante dérivées de la TdS .....	189
<b>6. Méthodologie d'analyse a priori des actions des élèves lors des discussions collectives .....</b>	<b>190</b>
6.1. Catégories d'analyse a priori des actions des élèves .....	191
<b>7. Méthodologie d'analyse a priori de l'évolution des signes et signifiés .....</b>	<b>192</b>
<b>8. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions de l'enseignante .....</b>	<b>194</b>
8.1. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions de l'enseignante, premier niveau d'analyse (descriptif) .....	194
8.2. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions de l'enseignante, deuxième niveau d'analyse (interprétatif) .....	196

8.3. Exemple d'analyse des actions de l'enseignante : premier niveau d'analyse (descriptif) versus deuxième niveau d'analyse (interprétatif) .....	198
8.4. Analyse dans Atlas.ti .....	199
<b>9. Méthodologie d'analyse <i>a posteriori</i> des actions des élèves lors des discussions collectives.....</b>	<b>199</b>
<b>10. Méthodologie d'analyse <i>a posteriori</i> de l'évolution des signes .....</b>	<b>202</b>
10.1. Premier plan d'analyse : les signes « simples » .....	203
10.1.1. Signes-artefact .....	203
10.1.2. Signes-pivot.....	204
10.2. Deuxième plan d'analyse : les signes « complexes » .....	205
10.2.1. Définitions.....	206
10.2.2. Caractérisations .....	207
10.2.3. Interprétations .....	209
10.2.4. Instanciations .....	210
10.3. Etat des signifiés .....	211
10.4. Instruments de médiation sémiotique.....	211
10.5. Méthodologie de synthèse sur l'évolution des signes.....	211
10.6. Encore dans Atlas.ti.....	213
<b>Chapitre 6 : Analyse <i>a posteriori</i> des actions de l'enseignante lors des discussions collectives .....</b>	<b>215</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>216</b>
<b>2. Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique.....</b>	<b>217</b>
2.1. Actions génériques de l'enseignante à dominante mésogénétique intervenants dans le processus de médiation sémiotique, identifiées <i>a priori</i> .....	218
2.1.1. Analyse des actions à dominante mésogénétique issue du paradigme de la TdS.....	218
2.1.1.1. Premier groupe : mise en place du milieu commun attendu .....	222
2.1.1.2. Deuxième groupe : modification du milieu commun.....	225
2.1.1.2.1. Premier extrait : exemple de modification d'un milieu insuffisant .....	228
2.1.1.2.2. Deuxième extrait : exemple de modification d'un milieu plus riche que prévu.....	229
2.1.1.2.3. Troisième extrait : exemple de modification d'un milieu par l'introduction d'une nouvelle tâche.....	231
2.1.1.3. Complémentarité des deux processus.....	233
2.1.2. Analyse des actions à dominante mésogénétique issue du paradigme de la TMS .....	235
2.1.2.1. Troisième groupe : Reflet et Paraphrase .....	235
2.1.2.1.1. Le Reflet.....	235
2.1.2.1.2. La Paraphrase.....	238
2.1.2.2. Quatrième groupe : Spécification / Généralisation.....	241
2.1.2.2.1. (Demande de) Généralisation .....	242
2.1.2.2.2. (Demande de) Spécification et (Demande de) Particularisation.....	243
2.2. Première synthèse intermédiaire.....	245
2.3. Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis identifiées <i>a posteriori</i> .....	246

2.3.1. Premier groupe : Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné : Demande d'explicitation des signifiés construits (lors de la résolution d'une tâche) : Référence indirecte au travail de sémiotique .....	246
2.3.2. Deuxième groupe : (Demande d') Interprétation (dans l'artefact « Cabri », dans l'artefact « texte d'Euler », dans les mathématiques) .....	249
2.4. Deuxième synthèse intermédiaire.....	256
<b>3. Phénomènes remarquables liés au processus de sémiotique</b>	<b>258</b>
3.1. « Structure verbale » et processus de sémiotique.....	258
3.2. Mélange sémiotique.....	260
<b>4. Actions à dominante mésogénétique et processus de médiation sémiotique</b> .....	<b>261</b>
4.1. Actions à dominante mésogénétique et processus de constitution d'icônes : Icônisation .....	261
4.1.1. Actions à dominante mésogénétique et processus d'affranchissement/complexification des signes mathématiques.....	268
<b>5. Actions de l'enseignante à dominante chronogénétique ..</b>	<b>271</b>
5.1.1. Résonance (faible ou forte ou nulle) .....	272
5.1.2. Actions chronogénétiques et médiation sémiotique .....	276
<b>6. Actions de l'enseignante à dominante topogénétique .....</b>	<b>277</b>
6.1.1. Déplacement topogénétique (« vers la classe » : « vers les mathématiques » : « vers un binôme » : « vers un élève particulier ») : Fusion et Réduction topogénétique.....	277
6.1.2. Mouvement topogénétique (ascendant et descendant) .....	281
6.2. Actions topogénétiques et construction intersubjective des signes.....	283
<b>7. Actions de l'enseignante à dominante mixte.....</b>	<b>283</b>
<b>8. Contrat didactique et processus de médiation sémiotique</b>	<b>284</b>
8.1. Règles relatives à l'utilisation d'un artefact .....	285
8.2. Règles relatives à la culture mathématique particulière de la classe ...	286
8.3. Règles relatives aux rapports interpersonnels .....	287
8.4. Phénomènes de contrat locaux.....	288
8.5. Quelques observations sur la règle fondamentale.....	289
<b>9. Résultats au niveau macro .....</b>	<b>292</b>
9.1. Résultats généraux au niveau méthodologique .....	295
<b>10. Tableau de synthèse sur les actions de l'enseignante .....</b>	<b>295</b>
<b>Chapitre 7 : Analyse a posteriori des actions des élèves lors des discussions collectives</b> .....	<b>299</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>299</b>
<b>2. Actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité d'élève .....</b>	<b>302</b>
2.1. Premier groupe d'actions : mise en place du milieu commun attendu ..	302
2.1.1. Coresponsabilité des élèves dans la mise en place du milieu commun : « La disparition de H dans l'artefact Cabri » .....	304
2.1.2. Coresponsabilité des élèves dans la mise en place du milieu commun : Confrontation entre sa propre méthode et la méthode d'Euler.....	306
2.2. Deuxième groupe d'actions : modification du milieu commun.....	308
2.2.1. Coresponsabilité des élèves dans la modification du milieu commun : « La composition de fonction » .....	309

2.2.2. Coresponsabilité des élèves dans la modification du milieu commun : « L'allure du graphe ».....	312
2.3. Troisième groupe d'actions : actions à dominante mésogénétique de type langagier.....	315
<b>3. Première synthèse intermédiaire .....</b>	<b>318</b>
<b>4. Actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis.....</b>	<b>319</b>
4.1. Les questions de sémosis potentielle .....	320
4.2. Les interprétations.....	321
<b>5. Phénomènes remarquables.....</b>	<b>322</b>
<b>6. Deuxième synthèse intermédiaire.....</b>	<b>323</b>
<b>7. Actions des élèves à dominante chronogénétique.....</b>	<b>324</b>
<b>8. Actions des élèves à dominante topogénétique.....</b>	<b>326</b>
8.1. Fusion et Réduction topogénétique.....	328
<b>9. Résultats au niveau macro : apports respectifs de la Théorie des situations et de la Théorie de la médiation sémiotique .....</b>	<b>330</b>
<b>10. Tableau de synthèse sur les actions des élèves.....</b>	<b>332</b>
<b>Chapitre 8 : Analyse a posteriori de l'évolution des signes .....</b>	<b>335</b>
<b>1. Introduction .....</b>	<b>335</b>
<b>2. Contexte.....</b>	<b>336</b>
<b>3. Observations méthodologiques et questions de recherche.....</b>	<b>337</b>
<b>4. Première discussion collective analysée (DC 1) : « Effet1 ».....</b>	<b>339</b>
4.1. Variable .....	339
4.2. Variable indépendante.....	342
4.3. Variable dépendante .....	346
4.4. Domaine et image .....	350
4.4.1. Image et trajectoire.....	355
4.5. Paramètre.....	357
4.6. Fonction.....	360
4.6.1. Le signe de fonction et la famille de signes issue de l'IMS Macro..	365
4.6.1.1.1. Premiers liens interprétatifs entre les signes de fonction, relation et construction géométrique.....	365
4.6.1.1.2. Liens interprétatifs entre les signes de la « macro Effet1 », des macros de Cabri, des constructions géométriques et de la « chose magique » .....	366
4.6.1.1.3. Liens interprétatifs entre les macros en général de Cabri, les fonctions, et les relations. ....	369
4.6.1.1.4. Liens interprétatifs entre les fonctions, les opérations et les fonctions géométriques .....	371
4.6.2. Le signe de fonction et la famille des signes issus des IMS Déplacement+Trace.....	372
4.6.3. Synthèse sur l'évolution du signe de fonction .....	375
<b>5. Deuxième discussion collective analysée (DC 13) : « Euler dans Cabri » .....</b>	<b>376</b>
<b>6. Résultats généraux .....</b>	<b>381</b>
<b>Chapitre 9 : Conclusions et perspectives .....</b>	<b>383</b>

<b>1. Conclusions</b> .....	<b>383</b>
1.1. Articulation TdS/TMS .....	384
1.1.1. La séquence expérimentale.....	384
1.1.2. Le rôle de l'artefact .....	385
1.1.3. Le rôle de l'enseignante.....	385
1.2. Méthodologie d'analyse .....	387
1.3. Mise au points de critères historico- épistémologiques et cognitifs.....	387
1.3.1. La séquence expérimentale.....	387
1.3.2. Le rôle de l'artefact .....	389
<b>2. Perspectives</b> .....	<b>389</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>393</b>
<b>Annexe 1</b> .....	<b>407</b>
<b>Annexe 2</b> .....	<b>409</b>
<b>Annexe 3</b> .....	<b>411</b>
<b>Annexe 4</b> .....	<b>417</b>

# Chapitre 1 : Problématique et cadres théoriques

<b>1. Objet d'étude .....</b>	<b>2</b>
<b>2. Problématique et cadre théorique.....</b>	<b>3</b>
<b>3. La théorie de la Médiation Sémiotique : les liens avec l'œuvre de Vygotsky .....</b>	<b>4</b>
3.1. Introduction.....	4
3.2. Signes et outils : dualité d'un seul concept.....	5
3.3. Du plan socio-culturel au plan individuel .....	7
3.3.1. Le processus d'internalisation .....	9
3.3.2. Zone de développement proximal .....	10
3.4. La médiation sémiotique du langage et l'utilisation fonctionnelle d'un signe .....	11
3.4.1. Sens versus signification, signifié personnel versus signifié culturel	14
3.5. Les <i>discussions mathématiques</i> .....	19
3.6. La médiation sémiotique des outils.....	21
3.6.1. Artefacts versus instruments .....	21
3.6.2. Instruments versus Instruments de médiation sémiotique.....	23
3.6.3. Artefacts de première, deuxième et troisième type .....	26
3.7. Premier bilan intermédiaire : quelque critère de construction de la séquence expérimentale.....	28
3.8. Concepts scientifiques et quotidiens : le rôle de la prise de conscience et de l'écriture .....	29
3.9. Deuxième bilan intermédiaire : d'autres critères de construction de la séquence expérimentale.....	32
<b>4. Première intégration : quelques éléments de la théorie des situation de Guy Brousseau .....</b>	<b>34</b>
4.1. Le milieu adidactique facteur de déséquilibre et d'apprentissage .....	34
4.2. Quelques conséquences pour notre étude.....	37
4.3. La place des situations fondamentales dans cet étude .....	38
4.4. Situations de formulation, institutionnalisation, phases de conclusions et discussions mathématiques.....	42
4.5. Le contrat didactique .....	44
4.6. Deuxième bilan intermédiaire .....	46
<b>5. Deuxième intégration : quelques éléments de sémiotique peircienne .....</b>	<b>47</b>
5.1.1. Trois principes généraux .....	48
5.1.2. Les catégories à la base de la sémiotique peircienne .....	48
5.1.3. Les caractéristiques du signe peircien .....	49
5.1.4. Le processus de sémiosi ou sémiotique : triadique et illimité .....	51
5.1.5. Autres caractéristiques du processus de sémiosi : inférence et croissance en complexité .....	52



---

5.1.6. Une articulation trichotomique .....	54
5.1.6.1. La trichotomie de l'objet.....	54
<b>6. Conclusions et premières questions .....</b>	<b>56</b>

## 1. Objet d'étude

Les processus de médiation sémiotique, auxquels Vygotsky<sup>1</sup> s'est longuement intéressé, ont connu un certain temps d'oubli. Récemment, les potentialités ouvertes par l'introduction dans l'enseignement des nouvelles technologies ont produit un renouveau d'intérêt. Ainsi une des directions actuelles les plus fécondes de la recherche en didactiques des mathématiques cherche à d'étudier l'apprentissage des mathématiques comme l'initiation et une internalisation de certains signes au sein de l'apprentissage.

Notre thèse visera à développer une analyse du processus de médiation sémiotique dans le cas de l'enseignement- apprentissage de notions mathématiques particulières, les notions (embryonnaires) de fonctions et graphe de fonction, pour essayer d'en dégager les mécanismes saillantes. Nous nous placerons donc au sein d'un cadre théorique qui considère comme centrales l'émergence, l'évolution et l'internalisation de certaines signes, socialement partagés et fabriqués à partir de l'usage d'un artefact technologique.

A partir d'une analyse *a priori*, nous élaborerons donc une ingénierie didactique susceptible de favoriser cette émergence. Il s'agira de construire donc une séquence expérimentale qui demande la résolution de problèmes et de tâches spécifiques, capables de mobiliser d'une certaine façon les outils mis à disposition par cet artefact en fonction d'une dimension sociale incontournable. L'écriture de rapports individuels, le travail en binômes, et, surtout, les discussions collectives supporteront l'activation et la catalyse des enjeux entre processus inter-psychologiques et intra- psychologiques.

Puisque le processus de Médiation Sémiotique (MS) nécessite toujours du long terme, il ne s'agira pas de pratiquer une expérience de laboratoire, épisodique et circonscrite dans le temps, mais de mener l'étude sur une classe réelle durant une période de temps suffisamment longue.

Dans l'élaboration de cette ingénierie nous aurons recours à deux paradigmes théoriques différentes : la Théorie de la Médiation Sémiotique (abrégée par l'acronyme TMS) et la Théorie des Situations (TdS).

La place de ces deux cadres théoriques ne sera pas « symétrique ». L'objet central de ce travail de thèse étant celui d'approfondir, préciser, étendre, l'analyse du fonctionnement du processus de MS, au sein de la TMS, cela va se faire en prenant d'abord, comme outils d'investigation et modélisation, les notions dérivées de ce premier cadre théorique. Successivement, dans une approche intégrée, nous aurons recours aussi aux notions dérivées la TdS.

La TMS guidera globalement la conception de la séquence. Elle permettra d'identifier le potentiel sémiotique des outils disponibles dans l'artefact et de l'exploiter et par la conception de tâches spécifiques et par une mise en scène sociale opportune dans la classe. Cependant, même en comptant sur une tradition d'implémentations expérimentales assez longue et robuste, elle est encore

---

<sup>1</sup> En littérature, on trouve plusieurs façons d'écrire en caractères occidentaux le nom de ce psychologue russe. Ainsi, en Italie, par exemple, on préfère plutôt « Vygotskij ». Puisque la rédaction est faite en français et que, en France, l'écriture la plus répandue est « Vygotsky », nous adopterons cette dernière option.

relativement « jeune » et nécessitera, aussi d'un approfondissement théorique ultérieur.<sup>2</sup>

Le deuxième paradigme (la TdS) interviendra, de manière orthogonale, à deux niveaux : d'une part, lors de la conception de la séquence, permettant une analyse *a priori* de certaines tâches et de l'artefact en tant que composant du milieu, d'autre part, lors de l'analyse *a posteriori*, en fournissant d'autres outils de modélisation adaptés à prendre en compte et décrire les mêmes constituants fondamentaux (enseignant, élèves, outils de médiation sémiotique, ...) du processus de MS. Le niveau de réflexion et de maturité de ces deux cadres théoriques n'étant pas le même, nous nous attendons à que cette approche double puisse ainsi apporter un enrichissement réciproque.

A l'intérieur du processus de MS, l'enseignant occupe une place critique puisque, par la proposition de tâches spécifiques, elle organise l'accès aux signes et, par une orchestration opportune des discussions collectives, elle soutient leur internalisation éventuelle de la part des élèves. La dernière partie de cette thèse sera donc centrée, sur le rôle de l'enseignant, en particulier, lors de l'orchestration de discussions collectives (DC).

## 2. Problématique et cadre théorique

On a pu observer récemment un intérêt croissant de communauté des chercheurs en didactique des mathématiques sur l'utilisation des notions sémiotiques dans l'étude des processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. Cet intérêt est une conséquence naturelle du rôle essentiel accordé aux *media* d'expression dans les processus cognitifs, comme déjà longuement développé par Vygotsky.

Ainsi, seulement pour en citer quelques unes, nous pouvons identifier des nombreuses recherches, réalisées selon des perspectives très différentes, comme celle de l'interactionnisme symbolique, par Bauersfeld et Cobb (1995) qui mettent l'accent sur la notion de signifié et de négociation des signifiés comme éléments centrales dans l'enseignement des mathématiques, ou celle de Steinbring (1997), reprise du point de vue de l'intégration de certains artefacts technologiques par Wisløw (2003), qui ont développé une position épistémologique précise selon laquelle les signifiés mathématiques émergent de l'enjeu entre systèmes de signes/symboles et contextes de référence ou domaines d'objets.

De manière analogue, il ne faut pas oublier aussi tous les travaux de recherche autour des problématiques de l'influence des systèmes de représentation sémiotique (Duval 1995, 1998, 2000), de la symbolisation (Pimm, 1995), des ostensifs (Bosch et Chevallard, 1999) et en général du langage (Ellerton et Clarkson, 1996 ; Sfard, 2000a et 2000b ; Dörfler 2000) sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ou encore les travaux sur la compréhension des mathématiques (Sierpiska 1994, Godino et Batanero, 1994 et 1998), qui ne peuvent pas éluder les questions sur le signifié.

Les positions différentes, autour du rapport entre mathématiques et sémiotique, investissent des questions d'ordre épistémologique, cognitif et socioculturel. Questionner le rôle et la nature des signes, leur production, appréhension et

---

<sup>2</sup> En réalité, ceci peut être dit de toute théorie didactique, TdS incluse. Ce que nous voulons souligner ici c'est que, par rapport à ce dernier cadre théorique, le processus de réflexion théorique sur la TMS est relativement plus récent.

signification, en mathématiques, revient, en fait, à étudier la nature des objets<sup>3</sup> mathématiques, du processus de conceptualisation et, finalement, de l'enseignement- apprentissage des mathématiques.

Les enjeux sont donc assez vastes et cette thèse ne vise pas à développer une réflexion théorique à ce sujet. En revanche, notre objectif sera celui d'approfondir le processus de médiation sémiotique, dans le cadre de la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS), pour le cas particulier de l'enseignement des notions (embryonnaires<sup>4</sup>) de fonction et graphe de fonction.

Ce chapitre sera donc divisé en trois grandes parties.

La première partie sera consacrée à délimiter notre champ d'analyse, à introduire notre vocabulaire et à préciser les différentes façons dont les termes seront utilisés dans le cadre de cette thèse. Puisque elle se situe au sein de la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS) et que ce paradigme didactique s'est développé à partir des travaux de Vygotsky, il s'agira d'abord d'en parcourir les traits les plus saillantes, en essayant surtout de mettre en valeur les liens avec l'œuvre du psychologue russe. Nous terminerons par un approfondissement du rôle et de la place des *discussions mathématiques*, qui sont un type particulier de discussions collectives, élaboré à partir d'hypothèses Vygotskiennes, au sein de ce même cadre théorique, et qui constitueront notre objet d'étude dans la partie finale de cette thèse.

Dans la deuxième partie, nous esquissons très brièvement certains éléments de la Théorie des Situations, dans le but surtout d'explicitier les raisons qui nous ont conduite à adopter dans l'élaboration et l'analyse de notre séquence expérimentale cette perspective théorique double.

Finalement, la troisième partie visera à développer une brève synthèse sur la sémiotique de C. S. Peirce, puisque, là où il sera nécessaire, nous nous référerons aussi à cette tradition d'études en sémiotique.

### **3. La théorie de la Médiation Sémiotique : les liens avec l'œuvre de Vygotsky**

#### **3.1. Introduction**

En se fondant principalement sur les travaux en psychologie cognitive développés par Vygotsky, la Théorie de la médiation sémiotique se présente comme un paradigme à spécifique vocation didactique, visant à une implémentation, dans l'enseignement -apprentissage des mathématiques, des concepts principaux élaborés par le psychologue russe, notamment celui de la médiation sémiotique (MS).

Ce cadre théorique a été développée à partir des années quatre-vingt en particulier par Maria Grazia Bartolini Bussi et Maria Alessandra Mariotti. Même étant relativement récente, il a connu des nombreuses implémentations expérimentales et un processus intense de réflexion et d'approfondissements théoriques (Bartolini Bussi 1996, 2000, 2001, Bartolini Bussi, et Mariotti. 1998, 1999a, 1999b ; Bartolini Bussi, et al. 1999c, Mariotti 1997, 1998, 2000). Il a été élaborée au sein d'une approche qui se définit comme « Recherche pour l'innovation » (Arzarello et Bartolini

---

<sup>3</sup> Nous utilisons le terme « objet mathématique » dans un sens totalement métaphorique, comme « référent », comme « ce dont on parle », et surtout pas ontologique. Autrement dit nous postulons que les objets mathématiques ne sont pas des abstractions *a-historiques* mais qu'ils existent seulement dans la pensée et la culture humaine.

<sup>4</sup> Cette thèse vise en fait à prendre en compte seulement le début de l'apprentissage de ces notions, comme l'on pourrait les retrouver dans un curriculum scolaire du début du secondaire.

Bussi, 1998) dont la caractéristique saillante est celle d'une dialectique étroite entre théorie et pratique, c'est-à-dire d'un aller-retour continu et critique entre élaborations théoriques et expérimentations en classe.

Dans les processus des formations des concepts, et par conséquent, dans l'enseignement - apprentissage des mathématiques, la TMS accorde une place centrale :

- au langage et à l'usage de signes ;
- à l'utilisation d'outils, impliqués dans activités didactiques à finalités spécifiques ;
- aux dynamiques sociales, qui relie étroitement les plans intersubjectif et intra-subjectif.

Du point de vue plus proprement didactique, ses caractères constitutifs sont :

- la manipulations directe d'outils, que ce soit sous la forme d'objets concrets issus de l'histoire des mathématiques ou sous la forme d'artefacts technologiques (Bartolini Bussi et Mariotti, 1998, 1999a, 1999b ; Bartolini Bussi et al. 1999c et à paraître a, Bartolini Bussi 2000 et 2001) ;
- une organisation précise du travail en classe, où les rapports entre dimension individuelle, travail en binôme et dimension collective sont partie prenante du dispositif et où les activités orales et écrites s'articulent mutuellement ;
- le travail de lecture et d'interprétation de sources historiques primaires avec l'aide de l'enseignant ;
- la pratique d'une forme spéciale de discussion collective, appelée « *Discussion Mathématique* », orchestrée par l'enseignant (Bartolini Bussi et al. 1995a, 1995b, Bartolini Bussi, 1996, 1998a) ;

Dans la partie qui suit nous développerons un approfondissement de ce cadre théorique, en essayant de décrire l'état actuel de la réflexion et en gardant le plus possible à l'esprit, le lien avec les travaux de Vygotsky.

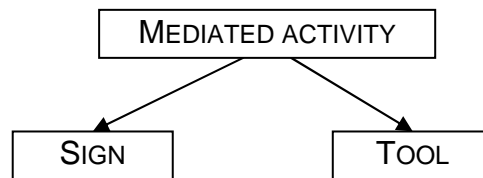
Là où les objectifs de notre thèse le rendront nécessaire, nous proposerons des compléments éventuels.

### 3.2. Signes et outils : dualité d'un seul concept

Dans la TMS les **signes** ne sont pas définis par eux-mêmes mais toujours dans un rapport d'analogie - différence à l'égard des **outils**. Cette position est propre aussi à Vygotsky, auquel, notre cadre théorique emprunte, en fait, ces notions. **Signes** et **outils** font partie de l'héritage culturel de l'humanité, ils ont été produits et utilisés par les êtres humains, ils ont évolué pendant des siècles, tout en gardant souvent leur fonction.

Bien que clairement distingués, **signes** et **outils** sont considérés par Vygotsky dans la même catégorie de médiateurs :

The basic analogy between sign and tools rests on the mediating function that characterises each of them. They may, therefore, from the psychological perspective, be subsumed under the same category. We can express the logical relationship between the use of signs and tools using the schema in figure below, which shows each concept subsumed under the more general concept of indirect (mediated) activity [Vygotsky, 1931/1978 p. 54] :



**Figure 1.1 - L'activité médiatisée, une caractéristique commune du signe et de l'outil**

En effet, dans toute l'œuvre de Vygotsky, l'essence commune aux **signes** et aux **outils** réside en ce que, les deux, contribuent à l'activité médiatisée (Figure 1.1).

Dans *Mind in society* (1931/1978) Vygotsky affirme leur lien profond et indique que leur articulation constitue le cœur de toute activité psychologique supérieure, en la conditionnant profondément :

The mastering of nature and the mastering of behaviour are mutually linked, just as man's alteration of nature alters man's own nature [...]

The use of artificial means, the transition to mediated activity, fundamentally changes all psychological operations just as the use of tools limitlessly broadens the range of activities within which the new psychological function may operate. In this context, we can use the term *higher psychological function*, or *higher behaviour* as referring to the combination of tool and sign in psychological activity. [Vygotsky, 1931/1978, p. 55]

Cette idée selon laquelle notre fonctionnement cognitif est profondément affecté par l'utilisation d'outils et de signes, est à la base de la TMS et de tout notre cadre théorique.

Vygotsky même, met en garde contre toute approche simpliste de réduction du **signe** à l'**outil** et vice versa. Il critique la position du philosophe et psychologue pragmatiste Dewey, dans laquelle, il lit la tentative d'attribuer un signifié littéral à l'analogie entre signe et outil :

By erasing the fundamental distinction between them [signs and tools], this approach loses the specific characteristic of each type of activity and leaves us with one general psychological form of determination. [Vygotsky, 1931/1978, p. 53]

Mariotti et Bartolini Bussi (Mariotti, 2000 ; Bartolini Bussi et al, à paraître a), en reprenant Vygotsky, distinguent entre la fonction de médiation qui est exercée par les **outils** (appelés aussi « technical tools ») de celle qui est jouée par les **signes** (appelés aussi « psychological tools » ou « tools of semiotic mediation ») :

The invention and use of signs as auxiliary means of solving a given psychological problem (to remember, compare something, report, choose, and so on) is analogous to the invention and use of tools in one psychological respect. The sign acts as an instrument of psychological activity in a manner analogous to the role of a tool in labor. [Vygotsky, Mind in Society, 1931/78, p. 52]

Leur différence substantielle réside essentiellement dans la modalité qu'ils ont d'affecter le comportement humain. Les **outils** ont une finalité externe, ils sont au service de l'activité humaine et visent à la maîtrise de la nature. Les **signes**, au contraire, ont une finalité interne, ils sont un moyen interne de contrôle. Cependant, ces deux fonctions ne sont pas mutuellement exclusives. Elles peuvent concerner le même outil et expriment la dualité de la relation qui lie l'usage extérieurement orienté à sa contre - partie intérieure.

Dans *Pensée et langage*, en critiquant ceux qui voient l'origine du développement de l'activité psychique dans la résolution de problèmes et dans la mise en place des objectifs qu'elle implique, Vygotsky développe ultérieurement et à plusieurs reprises, la relation entre les **signes** et les **outils** :

« ... pour expliquer de manière satisfaisante le travail en tant qu'activité de l'homme appropriée à une fin, nous ne pouvons nous contenter de dire qu'il a pour origine les buts, les problèmes qui se posent à l'homme mais nous devons l'expliquer par l'emploi des outils, par l'application de moyens originaux sans lesquels le travail n'aurait pu apparaître; de même encore la question centrale pour expliquer les formes supérieures de comportement est celle des moyens qui permettent à l'homme de maîtriser le processus de son propre comportement [...]

Toutes les fonctions psychiques supérieures sont unies par une caractéristique commune, celle d'être des processus médiatisés, c'est-à-dire d'inclure dans leur structure, en tant que partie centrale et essentielle du processus dans son ensemble, l'emploi du signe comme moyen fondamental d'orientation et de maîtrise des processus psychiques.

Dans la formation des concepts, ce signe est le mot, qui sert de moyen de formation des concepts et devient par la suite leur symbole. Seule l'étude de l'utilisation fonctionnelle du mot et de son développement, de ses diverses formes d'application [...] peut fournir la clef permettant d'analyser la formation des concepts ». [Vygotsky, 1934/1997, p. 199].

Vygotsky pose ici comme problème central celui des moyens grâce auxquels l'homme contrôle et oriente son propre comportement. A ce propos, il identifie une classe d'outils fonctionnellement omniprésente dans les fonctions psychiques supérieures : celle des signes. Puis il évoque les évolutions fonctionnelles du mot pour le sujet : à l'origine moyen de formation des concepts, il devient moyen de leur symbolisation. Enfin, il affirme à la fois qu'il s'agit d'un processus développemental et que seule son étude peut apporter une réelle compréhension des processus de formation des concepts.

### 3.3. Du plan socio-culturel au plan individuel

Dans la TMS, comme pour Vygotsky, les phénomènes sociaux revêtent une importance cruciale. En fait, pour ce psychologue russe, la dimension sociale est primaire dans le temps, tant philogénétiquement, qu'ontogénétiquement et toute fonction mentale supérieure est engendrée par une **activité médiée, socialement significative**. Comme ils le soulignent Wertch et Bivens (1992) :

In Vygotsky's view « the social dimension of consciousness is primary in time and in fact. The individual dimension of consciousness is derivative and secondary ».

Peut-être la formulation la plus synthétique et incisive d'une telle primauté peut-elle être reconnue dans ce que Vygotsky appelle *la loi génétique générale du développement culturel* :

Every function in the child's cultural development appears twice : first, on the social level, and later, on the individual level ; first, between people (interpsychological), and then inside the child (intrapyschological). This applies equally to voluntary attention, to logical memory, and to the formation of concepts. All the higher functions originate as actual relations between human individuals... Social relations or relations among people genetically underlie all higher functions and their relationships. [Vygotsky, 1931/1978, p. 57]

Ce qui est devenu mental et interne a été précédé par une phase externe et sociale. Considérons par exemple la reconstruction du développement d'un geste indicateur d'un enfant. Au début, il est simplement une tentative sans succès de saisir l'objet désiré. Vygotsky désigne ce geste comme « geste-en-soi ». Le mouvement de saisir est le résultat d'une impulsion naturelle et non médiée. Quand la mère vient en aide à l'enfant, le « geste-pour-soi-même » devient un « geste-pour-un-autre ». L'autre, la mère dans ce cas, interprète la tentative de l'enfant comme en geste indicateur. Ce qui a commencé comme un acte simple de saisie, est devenu,

par la **médiation** de la mère, un acte communicatif socialement significatif. L'enfant commence à adresser ce geste à la mère plutôt que à l'objet désiré.

Il est important de souligner que l'enfant est la dernière personne qui prend conscience du signifié réel de ce geste. Le développement n'est donc pas la maturation d'une idée préexistante, mais, au contraire, c'est la formation de cette idée, qui n'était à l'origine pas même une idée, lors d'une activité socialement significative. Ainsi, pour ce qui concerne les fonctions qui requièrent un contrôle conscient, elles doivent être employées et pratiquées inconsciemment dans une interaction sociale, avant qu'on puisse voir l'apparition chez le seul sujet, à un niveau supérieur de développement, du contrôle et de la conscience.

Cette hypothèse a des conséquences fortes lorsque l'on considère le cas particulier de la relation didactique. L'apprentissage avec autrui crée les conditions chez l'enfant de tout une série de processus de développement, qui ne se produisent que dans le cadre de la communication et de la collaboration. Comme nous l'avons vu, pour Vygotsky, la source de cette médiation peut être tant dans le comportement d'un autre être humain que dans un outil matériel ou dans un système des symboles.

Par conséquent, nous comprenons pourquoi dans le cadre de la TMS, cette thèse accorde une grande attention et une place centrale, d'une part aux médiateurs sémiotiques (signes et outils), d'autre part aux interactions sociales, en particulier à celles avec l'enseignant. Nous verrons même que l'ingénierie que nous développerons se caractérisera par une véritable organisation du travail autour de la production et de l'usage de signes/outils au sein de différents dynamiques sociales : travail individuel, en binômes, discussions collectives.

En fait, comme il l'explique bien Radford, les signes par lesquels un individu agit, pense et parle ont une vie double :

« Signs hence have a double life. On the one hand they function as tools allowing the individual to engage in cognitive praxis. On the other hand, they are part of those systems transcending the individual and through which a social reality is objectified. The sign-tools with which the individual thinks appear then as framed by social meanings and rules of use and provide the individual with social means of objectification » [Radford, 2000, p. 241]

Autrement dit, d'une part, en agissant comme « outils psychologiques » ils sont capables d'affecter le fonctionnement cognitif ; d'autre part, puisque ils vivent et appartiennent déjà à une culture, qui transcende l'individu-même, ils sont susceptibles *d'objectiver*<sup>5</sup> d'une certaine façon la réalité et donc de médier la construction de signifiés socialement partagés, culturellement déjà existants.

Dans cette perspective, en généralisant une affirmation de Radford (2000, p. 241), nous pourrions ainsi dire que nous considérons l'apprentissage des mathématiques comme l'appropriation d'une certaine forme d'agir et de penser, nouvelle et culturellement spécifique, qui est dialectiquement interconnectée avec l'utilisation et la production de signes, dont les signifiés sont acquis par les élèves comme résultat de leur immersion sociale dans des activités mathématiques.

---

<sup>5</sup> Le processus d'objectivation, en étymologiquement parlant, est défini par Radford (2002) comme « *a process aimed at bringing something in front of someone's attention or view* ». Ainsi, ce sont des « *semiotics means of objectification* » tous les objets, les artefacts, les dispositifs linguistiques et les signes qui sont utilisés intentionnellement par les individus dans un processus social de production d'un signifié « *in order to achieve a stable form of awareness, to make apparent their intention and to carry out their actions* » c'est-à-dire « dans le but de obtenir une forme stable de conscience, de rendre apparents ses intentions et de conduire ses propres actions ». Au cours de cette thèse nous nous référerons aux termes « objectivation » et « objectiver » dans ce sens.

Si l'apprentissage consiste en ce type d'appropriation, ceci sera toujours caractérisé par une tension :

As we see it, knowledge appropriation is achieved through the tension between student's subjectivity and the social means of semiotic objectification. [Radford, 2000, p. 241].

Cette tension explique pourquoi notre cadre théorique attribue un rôle central à l'enseignant. Celui-ci est en fait le médiateur entre l'individu et la culture mathématique. Il intervient dans le passage du plan inter- psychologique au plan intra- psychologique en créant un espace inter- subjectif où, comme pour l'exemple du geste indicateur de la mère et puis de l'enfant, par une activité socialement significative, et en accord avec la communauté de praxis de référence, il obtient la production, la maturation et la transformation des signes-outils en outils psychologiques.

Pour Vygotsky les deux concepts qui peuvent expliquer la modalité par laquelle il prend place le passage du plan intersubjectif ou plan intra subjectif sont le mécanisme ou processus **d'internalisation** et la présence d'une **zone de développement proximal**. A ces deux concepts, centraux dans la TMS et dans notre étude, nous dédierons les paragraphes suivants.

### 3.3.1. Le processus d'internalisation

Le mécanisme essentiel, sollicité par l'interaction sociale, qui permet la formation des signes est celui de **l'internalisation** des fonctions cognitives. Celles-ci sont d'abord activées vers l'extérieur par et vers les autres individus, et, successivement, opèrent aussi vers l'intérieur du sujet même. Pontecorvo et al. (1991) soulignent qu'il s'agit d'un processus, au travers duquel un certain fonctionnement inter- psychique devient intra- psychique, en transformant aussi structure et fonctions.

Vygotsky n'est pas le seul à parler *d'internalisation* de processus ou d'opérations externes. Piaget aussi parle *d'intériorisation*. Cependant il y a entre ces deux positions une différence substantielle par rapport à ce qui est internalisé. Dans, Piaget, c'est l'action du sujet sur le monde physique qui est internalisée, par rapport à ses aspects logiques et abstraits, et qui se transforme en *opération*. Dans Vygotsky, en revanche, ce qui est internalisé est plutôt la *relation*, comme action interactive de l'un vers l'autre, ou, comme il le dit Wertsch (1979), ce qui est internalisé ce sont « les activités de nature sociale et culturelle ».

Ainsi, même si l'idée du processus d'internalisation n'est certainement pas une invention de Vygotsky, Kozulin (1990) en met en évidence, des éléments originaux :

- le caractère social d'une fonction « externe » est préservé quand cette fonction a été internalisée ;
- lors de l'internalisation d'une fonction supérieure, comme le processus mnémorique basé sur des aides ou des supports externes, le processus naturel est remplacé par une typologie médiée d'activités de classification et stockage ;
- le processus naturel ne disparaît pas mais il n'a plus une place centrale, il devient subordonné aux processus supérieurs,
- les formes supérieures d'activité représentent un système fonctionnel, plutôt que une fonction seule, un système qui peut impliquer la pensée conceptuelle et l'analyse verbale.

Dans *Mind in Society*, Vygotsky décrit ce **processus d'internalisation**, comme *la reconstruction interne d'une opération externe*. Il consiste en une longue série de transformations et d'événements évolutifs par lesquelles une opération qui initialement représente une activité externe est reconstruite et commence à se



produire intérieurement et un processus inter- personnel est transformé en un processus intra- personnel :

(a) *An operation that initially represents an external activity is reconstructed and begins to occur internally. Of particular importance to the development of higher mental processes is the transformation of sign-using activity, the history and characteristics of which are illustrated by the development of practical intelligence, voluntary attention, and memory.*

(b) An interpersonal process is transformed into an intrapersonal one.

© The transformation of an interpersonal process into an intrapersonal one is the result of a long series of developmental events. The process being transformed continues to exist and to change as an external form of activity for a long time before definitively turning inward. For many functions, the stage of external signs lasts forever, that is, it is their final stage of development. Other functions develop further and gradually become inner functions. However, they take on the character of inner processes only as a result of a prolonged development. Their transfer inward is linked with changes in the laws governing their activity ; they are incorporated into a new system with its own laws. [Vygotsky, 1931/1978, p. 57]

Et, en soulignant le caractère socialement enraciné et historiquement développé des activités internalisées, Vygotsky ajoute :

The internalization of socially rooted and historically developed activities is the distinguishing feature of human psychology, the basis of the qualitative leap from animal to human psychology. [Vygotsky, 1931/1978, p. 57]

Si l'on considère l'apprentissage comme l'appropriation de certaines formes culturelles spécifiques d'agir et de penser, étroitement interreliées à l'usage de certains outils, cette notion de **processus d'internalisation** (qui permet justement d'opérer une transformation qualitative de l'outil, extérieurement orienté, en un signe, intérieurement orienté, et l'appropriation d'activités et d'opérations de nature sociale et culturelle) est un élément central de notre étude.

Nous chercherons donc à dégager et à mettre en place des conditions didactiques pour que cela se produise.

C'est ce que nous allons faire dans les paragraphes qui suivent.

### 3.3.2. Zone de développement proximal

La prééminence des processus sociaux sur les processus individuels, c'est-à-dire, l'émergence des fonctions psychiques de l'enfant par l'interaction avec les adultes ou les pairs plus compétents, se manifeste dans le rôle de la **zone de développement proximal**.

Dans *Mind in Society*, p. 78, Vygotsky définit métaphoriquement cette **zone de développement proximal** comme une distance « atteignable » entre le niveau actuel du développement de l'enfant et son niveau potentiel :

The distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers. [Vygotsky, 1931/1978, p. 86].

Voici, en revanche, comment Vygotsky introduit cette notion dans *Pensée et Langage* :

« Nos recherches ont montré qu'à l'aide de l'imitation l'enfant ne résout nullement tous les problèmes restés sans solution. Il atteint une certaine limite, qui varie selon les enfants. Dans notre exemple cette limite était très basse pour l'un des enfants et ne dépassait que d'un an le niveau de son développement. Pour l'autre elle était de quatre ans. Si l'on pouvait imiter tout ce qu'on veut indépendamment de l'état du développement, les deux enfants auraient résolu avec

une égale facilité tous les problèmes destinés à tous les âges de l'enfance. En fait non seulement ce n'est pas le cas mais il se trouve que même en collaboration avec quelqu'un l'enfant résout plus facilement les problèmes proches de son niveau de développement, au-delà la difficulté augmente et enfin devient insurmontable même en collaboration. La possibilité plus ou moins grande qu'a l'enfant de passer de ce qu'il sait faire tout seul à ce qu'il sait faire en collaboration avec quelqu'un est précisément le symptôme le plus notable qui caractérise la dynamique de son développement et de la réussite de son activité intellectuelle. Elle coïncide entièrement avec sa zone proximale de développement. » [Vygotsky, 1934/1997, p. 353]

En commentant cette citation, Vergnaud (2000) en tire la considération suivante :

L'apprentissage doit donc viser non pas les fonctions psychiques déjà venues à maturité, mais celles en maturation avec cette contrainte qu'il existe un seuil supérieur d'apprentissage. Il n'est pas nécessaire d'attendre que l'enfant soit mûr pour lui apprendre à lire ou à compter. Mais cela ne signifie pas qu'on puisse lui apprendre n'importe quoi. [Vergnaud, 2000].

Cette notion de **zone de développement proximal** importe des implications didactiques assez importantes, que la TMS met à l'origine des ces ingénieries didactiques, et qui donc conditionnera aussi la conception de notre séquence expérimentale. Pour Vygotsky, lorsque l'enfant interagit, d'une certaine manière, avec les adultes (mais aussi avec les pairs), il est amené dans une « zone » d'apprentissage potentiel où il peut opérer au de là de son niveau de compétences et connaissances actuelles. En particulier, dans le contexte scolaire, l'enseignant peut agir activement sur cette « zone », organiser des interactions qui, évidemment, dépendent du contenu de l'apprentissage visé, et éventuellement en créer une nouvelle, où le niveau potentiel soit élevé.

Pour que cela se produise, il est nécessaire, la création, voir négociation et renégociation progressive d'un espace intersubjectif partagé, de manière à ce que l'enseignant et les élèves puissent, en quelque mesure, se rencontrer sur le plan inter psychologique. Comme le dit Wertsch (1984) :

« L'adulte et l'enfant peuvent négocier une définition intersubjective de la situation qui, néanmoins, diffère de leur modalités respectives de la comprendre sur le plan intrasubjectif » [Wertsch, 1984, p. 13].

Ainsi, dans notre séquence expérimentale, Ceci sera donc aussi un des objectifs de l'action didactique.

Pour Mariotti et Bartolini Bussi (Mariotti, 2003 ; Bartolini Bussi, 2000), les modalités à disposition de l'enseignant pour intervenir sur la zone de développement proximal des élèves, et même « l'étendre », sont multiples. Nous avons vu qu'elles sont tout particulièrement liées à l'usage, dans des activités didactiques spécifiques socialement significatives, de médiateurs sémiotiques (signes et outils).

Les paragraphes suivants seront consacrés respectivement à deux types de médiateurs sémiotiques particuliers : les signes langagiers et les artefacts. Nous verrons que la position théorique élaborée par Vygotsky implique des conséquences importantes pour ce cadre théorique et pour notre étude.

### **3.4. La médiation sémiotique du langage et l'utilisation fonctionnelle d'un signe**

Comme le rappellent Pontecorvo et al. (1991), le langage est l'outil de médiation sémiotique le plus important pour le passage du plan inter- psychologique au plan intra- psychologique.

Ainsi, pour Vygotsky, l'évolution du langage enfantin a lieu du « langage social » au « langage interne », passant par le « langage privé ». Cette position diffère

profondément de la position de Piaget, pour laquelle, ce que Vygotsky appelle « langage privé », correspond au langage « égocentrique ». Dans Piaget, la direction du développement procède de l'individuel au social et cette phase du langage enfantin serait justement surmontée par l'interaction sociale successive avec pairs. Au contraire, pour Vygotsky, ce sont les relations sociales qui sont primaires et qui sont internalisées et transformées en fonctions psychiques. Le langage est expérimenté par les enfants, d'abord sur le plan intersubjectif, puisqu'il est utilisé par les adultes pour diriger l'attention et l'activité des enfants. Successivement ce même langage commence à être utilisé par l'enfant pour diriger l'activité des autres et puis de lui-même. A ce stade nous retrouvons le langage « privé », qui ne serait alors pas, vraiment, un langage « égocentrique » mais un langage utilisé pour manifester et guider ses propres intentions et plans.

Pontecorvo et al. (1991) soulignent que la médiation sémiotique offerte par le langage est, au début, strictement liée au contexte extralinguistique, à cause de la suprématie de la fonction déictique et de la distinction entre « signifié »/ « signification »<sup>6</sup> et « référence à l'objet ». L'accord sur « la référence à l'objet » est le point d'entrée de signifiés nouveaux possibles pour les enfants qui participent à une interaction sociale (Wertsch, 1985). La référence commune constitue la base pour la construction subséquente d'un signifié partagé :

Il peut y avoir une signification unique et des objets différents ou au contraire des significations différentes et un objet unique. Que nous disions « le vainqueur d'Iéna » ou « le vaincu de Waterloo », le personnage que nous indiquons par là (Napoléon) est le même dans les deux cas. Mais la signification des deux expressions est différente. Il y a des mots, les noms propres, dont toute la fonction est d'indiquer un objet. Ainsi la linguistique moderne distingue la signification et la référence concrète du mot. Si nous appliquons cette distinction à notre problème de la pensée enfantine par complexes, nous pourrions dire que les mots de l'enfant coïncident avec ceux de l'adulte dans leur référence concrète, c'est-à-dire qu'ils indiquent les mêmes objets, qu'ils se réfèrent au même cercle de phénomènes mais qu'ils ne coïncident pas dans leur signification. Cette coïncidence dans la référence concrète et cette non-coïncidence dans la signification du mot, qui nous sont apparues comme la particularité essentielle de la pensée enfantine par complexes, sont non pas l'exception mais la règle dans le développement du langage. Nous avons dit, en présentant le résultat le plus important de nos recherches, que l'enfant pense à titre de signification du mot la même chose que l'adulte, c'est-à-dire les mêmes objets, ce qui leur permet de se comprendre, mais il pense ce même contenu autrement, selon un autre procédé, à l'aide d'autres opérations intellectuelles [Vygotsky, 1934/1997, p. 243]

[...] On peut donc dire que les mots de l'enfant et ceux de l'adulte sont synonymes en ce sens qu'ils indiquent le même objet. Ils désignent les mêmes choses, ils coïncident dans leur fonction dénominateur mais les opérations de la pensée sur lesquelles ils reposent sont différentes [Vygotsky, 1934/1997, p. 244].

[...] Ainsi dans ce qu'il est convenu d'appeler la signification d'un mot il faut distinguer deux éléments : la signification de l'expression, au sens propre, et sa fonction - qui est à titre de dénomination de se rapporter à tel ou tel autre objet- sa référence à l'objet [Vygotsky, 1934/1997, p. 245].

Autrement dit, la compréhension réciproque se produit à travers les mots, même si les adultes en entendent la signification, à l'intérieur d'un système lexical et conceptuel articulé bien plus complexe. Ainsi les mots de l'enfant peuvent coïncider

---

<sup>6</sup> Etant donné les traductions différentes de Vygotski et le fait que par exemple en anglais (Vygotskij, 1934/1986) ou en italien ce même passage (Vygotskij, 1934/1992) a été traduit respectivement en utilisant les termes « meaning » et « significato », nous considérerons dorénavant les termes « signification » et « signifié » comme synonymes.

avec ceux des adultes dans leur référence à l'objet, *dans leur fonction dénominative* et ne pas coïncider dans leur *signification*.

Sur cette différence entre **signification** et **référence à l'objet** nous ancrons notre **première hypothèse** selon laquelle la construction d'une signification mathématique associée à un mot mathématique soit possible, au début, par les élèves, grâce, justement, à la possibilité de se référer au même objet, dont l'enseignant parle. En particulier, étant l'objet en question, non pas un référent concret mais, lui-même un référent en voie de construction, issue d'une précise culture, la signification accordée par les élèves sera sensiblement différente de celle de l'enseignant et aura la tendance à évoluer pendant le temps. D'autre part, l'artefact, en fonctionnant comme outil de médiation, permettra dès le début un appuy extralinguistique par lequel commencer à discuter.

Le passage de Vygotsky cité ci-dessus met en évidence un autre élément fondamental : celui des significations différentes qu'un même mot peut avoir à l'égard d'un même objet, autrement dit de la **polysémie** d'un mot.

Dans notre thèse, nous verrons que cet aspect joue un rôle crucial dans les discussions en classe, là où, justement, le discours peut se référer à plusieurs objets (concrets ou non, construits ou à construire) et là où les différentes significations des élèves et de l'enseignant se articulent dialectiquement.

La distinction entre **signification** et **référence à l'objet** ne constitue que la clef d'entrée dans le processus de communication. Cependant, pour Vygotsky, la formation d'une signification, à laquelle est associé la formation d'un concept, est un processus bien plus complexe, qui trouve dans **l'utilisation fonctionnelle d'un signe** un élément clé. En fait, comme il le dit :

Dans la formation des concepts, ce signe est le mot, qui sert de moyen de formation des concepts et devient par la suite leur symbole. Seule l'étude de l'utilisation fonctionnelle du mot et de son développement, de ses diverses formes d'application [...] peut fournir la clef permettant d'analyser la formation des concepts ». [Vygotsky, 1934/1997, p. 199].

Et, quelques pages plus loin, il continue<sup>7</sup> :

L'étude expérimentale a montré que **l'utilisation fonctionnelle du mot ou d'un autre signe** comme moyen de diriger activement l'attention, de différencier et de dégager les traits caractéristiques, de les abstraire et d'en faire une synthèse est une partie fondamentale et indispensable du processus de formation des concepts dans son ensemble. La formation du concept ou le fait qu'un mot acquiert une signification est le résultat d'une activité complexe (maniement du mot ou du signe) à laquelle participent toutes les fonctions intellectuelles essentielles dans une combinaison spécifique.

[...] Le processus de formation des concepts n'est pas réductible aux associations, à l'attention, à la représentation, au jugement, aux tendances déterminantes, bien que toutes ces fonctions participent inmanquablement à cette synthèse complexe que représente en fait ce processus. L'élément central en est, comme le montre l'étude, **l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot**, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours de ses propres processus psychiques et d'orienter leur activité vers la résolution du problème auquel il est confronté.

Le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale ; l'élément nouveau, l'élément central de tout ce processus, qu'on est fondé à considérer comme la cause productive de la maturation des concepts, est l'emploi spécifique du mot, l'utilisation fonctionnelle du signe comme moyen de formation des concepts. [Vygotsky, 1934/1997, pp. 206 - 207].

<sup>7</sup> C'est nous qui soulignons.

Dans Vygotsky (1994), il explique que l'enfant utilise un mot pour communiquer et pour organiser sa propre activité, avant d'en posséder une signification complète. En outre, il ne développe pas cette signification indépendamment de la signification que ce même mot revêt déjà dans le contexte social. Au contraire, la signification est donnée à l'enfant par son utilisation dans un discours socialement et historiquement déterminé. Ainsi, l'utilisation par l'enfant de ce signe, au sein d'une réalité sociale et culturelle (qui inclut d'autres individus et des textes) en permet le développement, de manière à être compatible avec celle de la communauté.

Etant donné que, pour Vygotsky le mot, n'est qu'un signe particulier, privilégié parmi d'autres, mais que son discours s'adresse potentiellement à tout signe, du point de vue didactique, ce postulat a des conséquences importantes à l'égard de deux autres hypothèses de travail sous-jacentes à notre étude.

En fait, notre **deuxième hypothèse** affirme que :

*Tout signe (mot, symbole mathématique, mais aussi outil psychologique) peut posséder un caractère polysémique et son utilisation fonctionnelle est cause productive de la maturation des concepts.*

Par conséquent, notre **troisième hypothèse** se résume de la façon suivante : *quand un élève rencontre pour la première fois un signe issu de la culture mathématique, ce signe n'a pas pour lui aucune signification. Cependant, à l'issue d'interventions pédagogiques et sociales opportunes dans la zone du développement proximal, il commence à l'utiliser : il l'emploie dans la communication avec les autres et, en particulier, dans des activités mathématiques spécifiques. Ainsi, même si ce signe continue à avoir une signification instable et immature, son **utilisation fonctionnelle** dans des tâches spécifiques, médiée par les interventions de l'enseignant et des autres élèves, en permet l'évolution vers une signification compatible avec la signification qu'il possède déjà, de façon stable dans la communauté de référence.*

Au cours de cette thèse, nous verrons que l'ingénierie développée à partir de telles hypothèses, prévoit l'utilisation de signes mathématiques, tels que fonction, variable, domaine ou image, dès le début de la première discussion collective. Ce choix repose justement sur le postulat que leurs utilisations fonctionnelles, au sein d'activités socialement et culturellement significatives, peuvent contribuer à leur évolution vers l'appréhension et l'utilisation que l'on retrouve dans la communauté de référence.

Nous verrons de plus que notre ingénierie impliquera aussi l'utilisation fonctionnelle non seulement de signes langagiers mais aussi d'outils internalisés, devenus signes et capables de renvoyer aussi à des signifiés mathématiques spécifiques.

Cette position est en consonance avec les travaux de Berger (2004). En fait, en se fondant sur cette même notion Vygotskyenne d'utilisation fonctionnelle du signe mathématique, cet auteur a développé un protocole expérimental qui lui a permis d'identifier des différences significatives dans l'utilisation fonctionnelle du signe d'intégrale indéfinie, par rapport aux différents ZDP dans lesquelles ce signe avait été employé.

### **3.4.1. Sens versus signification, signifié personnel versus signifié culturel**

Nous avons vu comment Vygotsky emploie le terme de « signe » de façon générale et sans jamais le définir en tant que tel. Par rapport au signe langagier, il différencie le **signal** du **signe** et il déclare que « l'enfant passe de la fonction de signalisation du langage à la fonction significative, de l'utilisation de signaux sonores

à la formation et à l'emploi actif de sons » (Vygotsky, 1934/1997, p. 105) et c'est, au moment où l'enfant se met à poser des questions sur les noms des choses et où de manière concomitante son vocabulaire s'accroît brusquement, « c'est à ce moment justement que le « grandiose moyen de signalisation qu'est le langage [...] se dégage pour l'enfant de toute la masse des autres stimuli — signaux, acquérant une fonction toute spéciale dans le comportement — la fonction de signe » (Vygotsky, 1934/1997, p. 105).

Le **signe** est ainsi défini par sa fonction qui est une fonction sémiologique, c'est-à-dire une fonction d'attribution de sens et signification.

Plus loin, Vygotsky trace une distinction forte entre **signification** et **sens**. Ce sont là encore « les particularités fondamentales » du langage intérieur qui sont en cause. « La première de ces particularités — nous dit Vygotsky — est la prédominance du **sens** du mot sur sa **signification** » (Vygotsky, 1934/1997, p. 370). Pour lui<sup>8</sup> :

Le mot, pris isolément dans le dictionnaire n'a qu'une seule **signification**. Mais cette **signification** n'est rien de plus qu'une potentialité qui se réalise dans le langage vivant où elle n'est qu'une pierre dans l'édifice du sens. Le **sens** d'un mot représente l'ensemble de tous les faits psychologiques que ce mot fait apparaître dans la conscience. C'est une formation toujours dynamique, fluctuante. La signification n'est qu'une des zones du sens : la plus stable. Le mot change aisément de **sens** selon les contextes tandis que la **signification** est un point immobile, immuable qui reste stable en dépit de toutes les modifications qui affectent le sens du mot selon le contexte. L'insertion de **sens** divers dans un mot unique représente à chaque fois la formation d'une signification individuelle intraduisible, c'est-à-dire d'un idiotisme. [Vygotsky, 1934/1997, p. 480 sq].

Et encore :

« Le **sens** d'un mot est inépuisable... Le **sens** véritable de chaque mot est déterminé, en fin de compte, par toute la richesse des éléments existant dans la conscience qui se rapportent à ce qu'exprime le mot » [Vygotsky, 1934/1997, p 371].

Cette position de Vygotsky est très voisine à celle de Bachtine (Bachtin, 1979), critique littéraire très original, qui soutient le caractère intrinsèquement **polyphonique** et **hétéroglossie** inévitables des mots que nous utilisons et qui sont chargées de toutes leur utilisations présentes et passées, historiquement sédimentées, même si tout cela n'est pas consciemment présent pour le locuteur.

La distinction vigotskijenne entre **signification** et **sens** a été reprise et développée par Leont'ev (1959/1976) et c'est sous cette nouvelle forme que nous la retrouvons à l'état actuel dans la TMS développée par Bartolini Bussi et Mariotti. Ainsi, pour Leont'ev le **signifié/signification** est ce qui constitue le contenu de conscience sociale ; c'est une généralisation de la réalité qui a été cristallisée, fixée dans sont porteur sensible qui est la parole ou l'association des paroles. Le signifié est la réflexion de la réalité indépendamment du rapport individuel, personnel que l'homme établis avec elle. L'homme, pour Lent'ev, trouve déjà prêt un système de signifiés formés historiquement et il s'empare comme on s'empare d'un outil. Ainsi, le signifié appartient avant tout au monde des phénomènes historiques objectifs même s'il existe aussi, après, comme un fait de la conscience. Psychologiquement, pour Leon'ev, le signifié est la réflexion généralisée de la réalité, devenue patrimoine de la conscience de l'individu. Cette appropriation, cette assimilation dépend du sens subjectif, que ce signifié a pour l'individu même, là où le **sens** exprime le rapport entre motivation et but, entre conditions motivantes subjectives et objectif conscient. Leon'ev ajoute, en outre, que **sens** et **signifié** sont étroitement liés dans la

<sup>8</sup> C'est nous qui soulignons.

conscience et que c'est le **sens** qui s'exprime dans les **signifiés** (comme la motivations dans les buts), et non pas, inversement, le **signifié** dans le **sens**.

En reprenant Leont'ev, pour Bartolini Bussi (1998a) le **sens personnel** est créé par chaque individu au cours de son activité, tandis que le **signifié** est cristallisé dans un produit sémiotique précis et décrit les propriétés d'un concept, au sein d'un système donné de savoirs.

« The terms *meaning* and *personal sense* are used according to Leont'ev (1981). Meaning is crystallized and fixed in some medium (e.g., in a text such as « point of view is the fixed position from which somebody looks at some part of the visible world without moving the head ») that describes the properties of the concept under scrutiny inside a system of theoretical knowledge (in this case, plane representation of three-dimensional space by means of linear perspective). Personal sense is the conscious sense created by each individual pupil to express the direction of his or her action. The explicit goal of the discussion for the teacher is precisely to encourage each pupil to express his or her personal sense through meaning ».[Bartolini Bussi, 1998a].

Dans un autre texte, elle explique encore que la discussion mathématique collective a comme but celui de :

« [...] favorire l'espressione dei sensi personali dati dai singoli allievi alle loro esperienze, ai loro prodotti ed ai loro processi (richiamati dalla parola o dalla locuzione in oggetto) nel significato, così come esso è stato cristallizzato nel suo portatore sensibile (una parola o un'associazione di parole) attraverso l'esperienza sociale dell'umanità »<sup>9</sup>[Bartolini Bussi et al., 1995b, p. 12].

Nous voyons donc ici que, pour Bartolini Bussi, la distinction entre **signifié** et **sens personnel** acquiert une nuance particulière et devient un trait caractéristique des *discussions mathématiques*. Dans le **signifié** exprimé par Bartolini Bussi, nous pouvons identifier le signifié mathématique tel qu'on le retrouve, stabilisé et codifié, dans la communauté de référence, tandis que dans les **sens personnels**, nous retrouvons la dimension subjective, personnelle de ce signifié, avant qu'il soit exprimé dans une forme sémiotique sensible quelconque.

Il faut donc observer que le signifié existe tant dans la culture de référence que comme un fait de la conscience et que, d'autre part, dans sa dimension personnelle, il se charge et se colorie de milliers de sens différents, liés aux motifs différents et difficiles à saisir. Pour cette raison, c'est-à-dire afin de garder la distinction introduite par Bartolini Bussi entre sens personnels et signifié, mais aussi afin de souligner une certaine symétrie des signifiés, tant dans la culture comme dans la conscience individuelle, nous avons choisi d'adopter une terminologie légèrement différente de celle utilisée par Bartolini Bussi.

Nous avons ainsi reformulé la distinction entre **signifié mathématique** et **sens personnels relatif à un signifié mathématique donné** adoptée par Bartolini Bussi en termes de distinction entre **signifiés mathématique culturels** et **signifiés mathématique personnels**.

Ce choix vise, à mettre en évidence, d'une part, que les sens personnels sont finalement inaccessibles (ils appartiennent entièrement à la dimension psychologique de l'individu) et que, d'autre part, dès qu'ils ont trouvé, par le langage, une expression sensible et cristallisée, dans des signes accessibles aux autres, en tant que contenu de la conscience collective, ils sont devenus des signifiés selon Leontief. Ces signifiés pourront alors contenir déjà en germe, au niveau embryonnaire, certains traits des signifiés mathématiques de la communauté de

---

<sup>9</sup> C'est-à-dire : « favoriser l'expression des sens personnels donnés par chaque élève aux propres expériences, aux propres produits et aux propres processus (évoqués par le mot ou la locution en objet) dans le signifié, tel comme il a été cristallisé dans son porteur sensible (un mot ou une association de mots) à travers l'expérience sociale de l'humanité ».

référence, même si, à ce stade, peut-être, ils ne peuvent pas encore se dire totalement congruents.

Ce choix vise aussi à accentuer le fait que, même pour les sens personnels explicites, il s'agit pour les élèves de les référer à la culture mathématique de référence de la classe. Cette intention, parfois implicite, est toujours présente puisque elle fait partie du contrat didactique relatif à ce type de discussions collectives. D'ailleurs, c'est à partir de ce trait caractéristique que Bartolini Bussi définit plus précisément ces discussions collectives comme *discussions mathématiques*. Le but de « favoriser l'expression des sens personnels au travers le signifié » exige, en fait, explicitement une confrontation personnelle avec la culture mathématique de référence de la classe. Notre tentative de mettre en évidence cet aspect est justement représentée par l'emploi explicite de l'adjectif « mathématiques », aussi pour les signifiés personnels.

Nous dirons donc que un signe issu de la culture mathématique possède un *signifié mathématique culturel* lorsque son usage est congruent avec l'usage qu'on retrouve dans la communauté de référence. En revanche, nous dirons qu'un signe possède un *signifié mathématique personnel*, pour nous référer à la manière dont l'individu, lui-même, perçoit et conçoit le *signifié mathématique culturel* associé.

Bien évidemment les signifiés mathématiques, tant personnels que culturelles, sont en quelque sorte « virtuelles », c'est-à-dire qu'ils sont, dans une certaine mesure, insaisissables : on peut les reconnaître par un certain nombre de formes culturelles codifiées (actions, formulations, textes, définitions, etc), liés à une certaine praxis, à des type de tâches particulières ou à des activités caractérisées par des buts particuliers, qui, cependant, ne peuvent pas les identifier complètement. De plus, il faut bien considérer que l'on peut placer la culture de référence à différents niveaux. Ainsi, dans notre cas particulier, elle sera relative à l'ensemble des classes de seconde, assujetties aux mêmes contraintes institutionnelles que la classe, objet de cette thèse.

Nous avons décidé d'introduire aussi la dimension des « *signifiés mathématiques socialement partagés* » qui permet de photographier la dimension d'une collectivité, comme un groupe d'élève ou la classe. Celle-ci, en fait, est en train d'élaborer, individuellement des signifiés mathématiques personnels, vers les correspondant signifiés culturels, mais au travers la productions de signifiés mathématiques intermédiaires, socialement partagés. Bien sûr, les *signifiés mathématiques culturels* sont des *signifiés mathématiques socialement partagés* particuliers, dont l'accord ne concerne pas, par exemple, seulement cette classe particulière, mais la communauté de référence, c'est-à-dire, comme nous l'avons dit, l'ensembles des classes de seconde assujetties aux mêmes contraintes institutionnels.

En fin, il faut remarquer que dans le signifié nous situons tant le *signifié stabilisé* que les sens *inépuisables, toujours dynamiques et fluctuantes*, dont parle Vygotsky.

Le choix de cette reformulation permet aussi de traiter différemment les trois types des signifiés en leur accordant, une certaine objectivité, qui leur dérive, dans les trois cas, d'un certain usage de signes issus de la culture mathématique. En fait, au cours de notre analyse, et dès le début, nous observerons les élèves utiliser consciemment des signes issus de culture mathématique, et par cela renvoyer déjà à des objets théoriques, d'une manière plus ou moins embryonnaire et compatible avec l'utilisation et le signifié culturel correspondant.

A partir du même type d'hypothèses Vygotskyennes, Berger (2002, 2004), dans ses travaux, a adopté une position analogue à la notre et a soutenu la thèse que,



justement, l'*utilisation fonctionnelle d'un signe* dans un contexte sociale opportun peut conduire à la construction d'un **signifié personnel** qui aussi congruent avec le **signifié culturel** de ce signe, c'est-à-dire avec le signifié accordé par la communauté des mathématiciens. A la différence de Berger, notre acception de **signifié culturel** est relativisé à la communauté de référence, c'est-à-dire, dans notre cas spécifique, aux classes de seconde sous les contraintes des programmes actuels. En outre, toujours à la différence de Berger, nous préférons parler de **signifiés personnels** ou **culturels**, ou *pluriel*, puisque, suivant les activités et les situations proposées, ces signifiés relatif à un même objet mathématique peuvent être différents, mais également pertinents.

D'autre part, ce choix nous permet de parler d'évolution des signifiés et de reconnaître parmi tous les **signifiés mathématiques culturelles** éventuels, les **signifiés mathématiques (culturelles) cible**, c'est à dire ces signifiés que au cours de la conception de la séquence nous avons indiqués comme des objectifs de l'apprentissage ou que, à un moment donné, lors de l'implémentation de la séquence, l'enseignant a reconnus ou décidés être les objectifs à poursuivre. La notion de **signifié cible** nous permet ainsi de récupérer une certaine dimension intentionnelle : à un certain moment, l'enseignant pourra décider que le signifié mathématique cible sera la signifié co-variationnel de fonction, à un autre moment, qu'il sera le signifié de correspondance, etc. De même, l'on pourra aussi observer la poursuite de signifiés mathématiques cible, de la part de l'enseignant, qui ne sont pas des signifiés mathématiques culturelles atteignables, dans le sens où il n'appartiennent pas, de droit, à la culture de référence d'une classe de seconde. En fin, nous nous attendons aussi à voir une interaction entre les **signifiés mathématiques culturelles** et les **signifiés mathématiques personnels** de l'enseignant. Cette interaction se traduira, justement, dans la façon dont l'enseignant gèrera la séquence et, en particulier, dans le choix des **signifiés mathématiques cible** à atteindre à un moment donné.

Sans nous placer dans une approche anthropologique, notre distinction s'inspire aussi des travaux de Chevallard (1992). Ainsi, nous mettons respectivement, du côté des **signifiés mathématiques personnels** relativement à un objet mathématique O, les **rapports personnels d'une personne** à cet objet O et, du coté des **signifiés mathématiques culturels**, les **rapports institutionnels de l'institution de référence** à cet objet.

Ainsi, si Chevallard dit que « Il y a donc apprentissage, pour la personne X, relativement à l'objet O, lorsque le rapport personnel de X à O change », (Chevallard, 1992, p. 90) de manière parallèle, nous affirmerons qu'il y a apprentissage pour cette personne, lorsque les signifiés personnels, relatifs à cet objet O, évoluent. En particulier, si la personne est un sujet d'une institution didactique I, son apprentissage relativement à un objet O de cette institution, correspondra à une adéquation de son rapport personnel au rapport institutionnel. Le travail de l'enseignant consistera, donc, à intervenir sur ce rapport personnel de façon à créer les conditions pour son évolution et sa conformité au rapport institutionnel, ou, autrement dit, pour que les signifiés mathématiques personnels évoluent vers les signifiés culturels correspondants.

Avant de conclure cette partie, il faut ajouter un **Nota Bene** important. Tout le discours que nous venons de faire sur les signifiés et sur l'opposition sens/signifié, a été développé à partir de l'idée vygotksyenne de signe langagier. Cependant, de manière cohérente avec notre **deuxième hypothèse** de travail (cf. Chapitre 1, § 3.4), afin aussi de garder une certaine uniformité, il nous semble pertinent de considérer que sa validité s'applique à toutes les expressions sémiotiques diverses. *Ainsi,*

même en ne négligeant pas la spécificité de chaque type de signe, nous considérons que les **signifiés mathématiques personnels** ou **culturels** sont associés non seulement à un signe langagier, mais aussi, par exemple, à un symbole, ou encore, à un geste ou à un signe graphique. Cela constitue, finalement notre **quatrième hypothèse** de travail.

### 3.5. Les discussions mathématiques

La centralité des interactions sociales et l'importance du langage dans la formation des signifiés trouve, du point de vue didactique, dans la TMS, une instanciation et un développement ultérieurs. En fait, s'il accorde, d'une part, une place fondamentale aux activités socialement significatives menées avec des outils spécifiques, ce paradigme théorique, met, d'autre part, au centre de l'action didactique la pratique d'une forme particulière de discussion collective, appelée *Discussion mathématique*.

L'étude et l'élaboration de ce modèle de discussions collectives se sont déroulées sur plusieurs années, dans un projet de recherche caractérisé par une participation particulière des enseignants (Bartolini Bussi, 1991, 1993). Comme l'explique Boero (1994) :

Dans ce projet, l'enseignant est co-responsable de la recherche et « observateur participant » (Eisenhart, 1988) du travail en classe : il participe à la planification du travail à réaliser en classe, il le gère en l'adaptant au fur et à mesure aux réactions de la classe (l'enseignant est le garant de la construction des significations par rapport à l'histoire interne de la classe, qui peut se détacher de la planification préliminaire de la séquence des situations didactiques) et recueille les informations nécessaires afin d'étudier *a posteriori* sa marche. [Boero, 1994]

La discussion mathématique est décrite métaphoriquement par Bartolini Bussi (1998a) comme *une polyphonie de voix articulées sur un objet mathématique* (concept, procédure, théorie, etc.) *qui constitue un des motifs de l'activité d'enseignement-apprentissage*.

Le terme *objet-motif* est utilisé dans le sens de Leont'ev (1977). Le terme *voix* est utilisé dans le sens de Bachtine (Bachtin, 1988) d'après Wertsch (1991) pour indiquer une forme de discours et de pensée qui représente un point de vue du sujet, son horizon conceptuel, ses intentions et sa vision du monde. Comme telle, une voix représente l'appartenance à une catégorie particulière sociale et culturelle. Une forme de discussion mathématique est le débat qui est introduit et orchestré par l'enseignant sur un objet mathématique commun afin de parvenir à une conclusion partagée. Dans cette situation, l'enseignant exprime, souvent, *la voix du savoir mathématique* (tel qu'il s'est constitué socialement en tant que savoir à enseigner). Cependant, dans cette *discussion mathématique*, elle réserve aussi une place importante, pour un temps suffisant, à d'autres voix (habituellement exprimées par les élèves). Cela est fait afin d'amener sur la scène des points de vue caractéristiques d'autres catégories sociales et culturelles, comme, par exemple, celui de la pratique extrascolaire et de permettre le lien avec le savoir exprimé par l'enseignant lui-même.

Le processus d'apprentissage de l'élève est conçu non seulement comme la construction d'une relation individuelle avec les objets de savoir mais surtout comme l'appropriation de formes culturelles d'action et de pensée, grâce au guidage d'un membre adulte de la société. Ainsi, en se fondant sur la loi génétique du développement culturel (cf. Chapitre 1, § 3.3) et sur la primauté du plan inter-psychologique sur le plan intra-psychologique, le modèle de la « discussion mathématique » accorde un rôle centrale à l'enseignant, en tant que guide dans la zone métaphorique du développement proximal (cf. Chapitre 1, § 3.3.2). Ce

processus d'apprentissage ne peut pas être considéré comme isolé du processus d'enseignement mis en œuvre par l'adulte mais, il doit être étudié et planifié ensemble. A ce propos, Bartolini Bussi (1998a) rappelle que, en fait, le terme employé par Vygotsky dans sa production est *Oboutchenie*, qui signifie « le processus de transmission et appropriation du savoir, des capacités, habilités et des méthodes de l'activité cognitive de l'homme » ; comme tel, c'est un processus bilatéral réalisé, en même temps, et par l'enseignant et par l'apprenant.

Une caractéristique fondamentale de ce processus d'enseignement-apprentissage est le « long terme », qui permet d'éviter la simple juxtaposition d'un savoir déjà pré-constitué et de celui en cours d'élaboration.

L'analyse de ces processus à long terme a requis le recours à des outils méthodologiques spécifiques. A cette fin, dans le projet, Bartolini Bussi et ses collaborateurs ont adopté la distinction proposée par Leont'ev (1977) entre les niveaux des *activités*, des *actions* et des *opérations*. Le premier niveau c'est le niveau global et correspond aux *motifs* (les objectifs de enseignement-apprentissage au sens large, qui comprennent non seulement la maîtrise des concepts et procédures mais aussi les attitudes par rapport aux mathématiques). Ensuite, l'activité se réalise par des *actions*, définies par des *objectifs* conscients et explicites (qui incluent, par exemple, les consignes résolues et individuellement et collectivement) ; les actions, à leur tour, sont réalisées par des *opérations* (par exemple les stratégies communicatives mises en œuvre par l'enseignant dans des moments précis de la DC) qui dépendent des conditions concrètes dans lesquelles il faut atteindre ces objectifs.

Le projet sur les « s (Bartolini Bussi, 1996, 1998a, Bartolini Bussi et al. 1995a, 1995b et à paraître a) a dès le début distingué et pris en compte trois classes particulières de discussions :

- 1) **Discussion d'un problème**, vue comme une partie de l'activité plus globale de résolution d'un problème, dans les deux aspects de :
  - a) **Discussion de solution**, considérée comme le processus de toute la classe qui résout oralement un problème donné, avec le support éventuel d'objets et d'images,
  - b) **Discussion de bilan**, considérée comme le processus d'information, analyse et évaluation orale (par petits groupes ou par la classe entière) des solutions individuelles élaborées face à un problème donné, avec le support éventuel d'objets et images
- 2) **Discussion de conceptualisation**, considéré comme le processus de construction ; au travers du langage, des liens entre expériences vécues et termes particuliers des mathématiques ; elle peut être introduite par des questions directes (de type « qu'est-ce que cet objet ? » ou « que est-ce que cela signifie ? ») ou indirectes (comme « pourquoi avez-vous décrit ce problème en termes géométriques ? »)

La dénomination **Discussion de conceptualisation** nous apparaît quelque peu ambiguë, surtout en comparaison à celle de « discussion de bilan ». Cette dernière, en fait, rend bien compte de l'objectif de la phase de bilan par rapport à la gestion de classe. Or, « conceptualisation » décrit normalement un processus cognitif individuel. En revanche, pour Bartolini Bussi, les « discussions collectives de conceptualisation » portent explicitement sur la construction d'un signifié socialement partagé (là où les signifiés sont en quelque part assimilés aux concepts). Pour exprimer cette même idée, sans le même risque d'ambiguïté, nous avons décidé de préférer à l'expression **Discussion collective de Conceptualisation** celle de **Discussion collective de construction d'un signifié socialement partagé**.

Notre thèse s'intéressera de préférence à ce dernier type de discussion mathématique. Comme déjà anticipé (cf. Chapitre 1, § 3.4.1), dans ces situations, l'un des problèmes principaux de l'enseignant est celui de favoriser l'explicitation d'un lien (ou éventuellement de l'impossibilité d'un lien) entre *sens personnels et signifié*. Nous avons déjà détaillé les raisons qui nous ont conduit à préférer une terminologie différente et à parler plutôt que de la dialectique *sens personnels et signifié*, celle de *signifiés personnels et signifiés culturels* (cf. Chapitre 1, § 3.4.1). Ainsi, en reprenant cette même idée, par cette autre terminologie, nous pouvons expliciter notre **cinquième hypothèse de travail** :

*Les moments de discussion mathématique de construction de signifiés ont comme caractéristique principale celle de permettre, d'une part, l'élaboration consciente et l'explicitation des signifiés mathématiques personnels, d'autre part, leur évolution vers les signifiés mathématiques culturels visés.*

En fin, Bartolini Bussi et ses collaborateurs ont distingués un troisième type de discussion mathématique :

- 3) **Métadiscussion**, considérée comme moment de la définition des valeurs et des attitudes face au savoir mathématique. Ici la caractérisation donnée est beaucoup plus imprécise, et les auteurs en sont parfaitement conscientes. Cependant elles déclarent d'un ressentir le besoin de les distinguer des autres et de lui réserver une fonction importante dans l'activité didactique.

Au cours de notre thèse nous questionnerons partiellement ce type de classification. En effet, nous avançons l'hypothèse qu'il s'agit de caractérisations différentes qu'on peut retrouver aussi, dans une certaine mesure mélangées, au sein d'une même DC. Pour cela, plutôt que de parler, par exemple, de **Discussion de bilan** ou de **solution** tout court, nous préférons dire de **Moments de discussion de bilan** ou de **solution**, etc. selon l'objectif et le caractère que nous pourrions reconnaître comme prédominant.

### 3.6. La médiation sémiotique des outils

Nous avons déjà souligné que pour Mariotti (2003) et Bartolini Bussi (2000), les modalités à disposition de l'enseignant pour intervenir sur la zone de développement proximal des élèves, sont différentes et tout particulièrement liées à l'usage, dans des activités didactiques spécifiques socialement significatives, de signes et outils.

Nous avons aussi observé que, ce qui différencie les outils des signes c'est leur fonction : les premiers sont orientés extérieurement, les deuxièmes intérieurement. Nous avons aussi vu que ce qui permet un changement qualitatif d'outil à signe, appelé aussi outil psychologique, c'est le processus d'internalisation.

Les paragraphes suivants seront dédiés en particulier à développer le statut et le rôle de ces outils dans la TMS et dans le processus de médiation sémiotique.

#### 3.6.1. Artefacts versus instruments

En se centrant sur la notion d'outil psychologique, Rabardel a repris les travaux de Vygotsky et développé ce qu'il appelle une *théorie instrumentale étendue* (Rabardel, 1999a). Certains éléments de cette théorie ont été adoptés aussi par la TMS. En particulier, nous y retrouvons la différence entre **artefact** et **instrument** et la notion de **genèse instrumentale**. Ces notions constituent une sorte d'intégration au cadre théorique de la TMS. Ils permettent de décliner de deux façons différentes, le terme **outil** qui, dans Vygotsky, possède une acception neutre et générique, et, ainsi, de saisir, entre autre, le fait qu'un artefact peut avoir différents statuts pour le sujet et notamment, celui d'instrument lorsqu'il est moyen de l'action.

Cependant, comme nous le verrons, ces notions n'épuisent pas toute la complexité des éléments en jeu dans une relation didactique de classe.

Selon Rabardel (1995), *l'artefact est l'objet matériel ou symbolique en soi*, parfois considéré seulement en une portion bien délimitée, qui a été construit selon une connaissance spécifique et qui assure l'accomplissement de certains buts, comme par exemple, le dispositif de pilotage d'un bras manipulateur d'un petit robot qui déplace des objets dans l'espace. *L'instrument* est, au contraire, défini par Rabardel (1995) comme *une entité mixte qui comprend d'une part, l'artefact, et d'autre part, ses schèmes (sociaux) d'utilisation (S(SU))*. Ces derniers sont les représentations relatives à l'artefact, toujours évolutives, que le sujet lui-même a élaborées et qui lui sont nécessaires pour l'utilisation de l'artefact. L'instrument est donc une construction faite par l'individu, il a un caractère psychologique, individuel et, souvent, contextualisé, bien qu'il est marqué socialement par les interactions avec autrui :

Les schèmes d'utilisation ont une dimension « privée » au sens où ils sont les schèmes d'un sujet singulier. Mais ils ont également une dimension « sociale » essentielle. Elle tient à ce que leur émergence résulte, pour une part, d'un processus collectif auquel contribuent les utilisateurs mais aussi les concepteurs des artefacts. Elle tient aussi à ce qu'ils font l'objet de processus de transmission sociaux (depuis les notices jusqu'aux formateurs). C'est pourquoi les SU doivent être non seulement considérés dans leur dimensions privées, mais également en tant que schèmes sociaux d'utilisation (SSU), cette dimension étant particulièrement importante dans une perspective éducative [Rabardel, 1999b. p. 209].

Les processus qui accompagnent l'élaboration et l'évolution des instruments et des schèmes pour le sujet, font partie de ce que Rabardel appelle **genèse instrumentale**. Plus précisément, cette genèse se compose de deux processus : le processus de **instrumentalisation**, relatif à l'émergence et à l'évolution des composantes de l'artefact, et le processus **d'instrumentation**, portant sur l'émergence et l'évolution des schèmes (sociaux) d'utilisation (SSU) relativement au sujet :

Les genèses instrumentales portent à la fois sur les artefacts tant au plan structurel que fonctionnel, que sur le sujet lui-même (les objets de l'activité, les formes de l'activité et leurs organisateurs que sont les représentations et les schèmes (SSU)). Les processus de genèses instrumentales apparaissent ainsi conjointement dirigés vers l'artefact, c'est la dimension **instrumentalisation** des processus, et vers le sujet, c'est la dimension **instrumentation** des processus. Instrumentalisation et instrumentation constituent les deux faces indissociables des processus de genèse instrumentales. Ces deux dimensions diffèrent dans leur orientation mais sont, solidairement, le fait du sujet [Rabardel, 1995].

Il faut noter que les schèmes d'utilisation ne gardent pas nécessairement tous les liens avec les objectifs pragmatiques ou culturels pour lesquels l'artefact en question a été produit, ou a évolué au cours du temps. Au contraire, ils sont liés à l'expérience phénoménologique personnelle et ils sont susceptibles de modifications et intégrations.

En rappelant Vygotsky, Rabardel souligne que l'impact de l'usage des instruments sur l'activité cognitive du sujet n'est jamais neutre : il implique des réorganisations et des mobilisations parfois profondes. Dans l'exemple, qu'il propose (Rabardel, 1995), le fait d'utiliser deux dispositifs de pilotage différents conduit deux groupes d'élèves, à des façons de se représenter l'espace tridimensionnel très différentes.

Considérées d'un point de vue didactique, la fonction et l'incidence d'un **instrument** sur la conceptualisation et l'activité cognitive du sujet, acquièrent une dimension de complexité ultérieure. Les processus d'instrumentation et d'instrumentalisation, mis en lumière et décrits par Rabardel, n'en prennent en

compte que certains aspects. En fait, Rabardel, n'a pas comme objectif celui de développer une théorie didactique, mais cognitive ; il s'occupe principalement du rapport particulier « sujet-artefact » où le sujet, auquel il se réfère, n'est pas nécessairement un apprenant. En revanche, dans une classe, il ne s'agit pas seulement d'utiliser un artefact donné, de manière à développer des schèmes opportuns d'utilisation. L'instrument, consciemment et délibérément inséré dans un rapport apprenant – enseignant et enseignant – classe, c'est-à-dire construit et développé par des activités didactiques spécifique socialement significatives, peut devenir un véritable médiateur sémiotique des signifiés embarqués, et permettre l'apprentissage des notions mathématiques visées. Cependant l'émergence et l'évolution de ces signifiés, ainsi que l'explicitation de leur statut mathématique, font appel à beaucoup d'autres éléments, en particulier à la prise ne compte d'une organisation didactique des interactions « élèves/artefact », de la part de l'enseignant. La TMS en particulier vise à prendre en compte cet autrui plus expérimenté ou qui cherche à transmettre un savoir, qui organise la rencontre avec l'artefact et le processus d'internalisation.

Nous verrons que c'est justement cette prise en compte de cet autrui plus expérimenté qui marque la différence de la TMS, par rapport à d'autres élaborations didactiques développées en conséquence de la théorie instrumentale de Rabardel (Gomes, 1999).

### 3.6.2. Instruments versus Instruments de médiation sémiotique

Dans la perspective didactique adoptée par la TMS, le processus d'internalisation joue un rôle crucial puisque il permet la transformation d'un « outil technique » extérieurement orienté en « signe », ou, plus précisément, en « outil psychologique », intérieurement orienté, susceptible de renvoyer aux signifiés mathématiques visés. Dans ce sens, un outil peut fonctionner comme *médiateur sémiotique*, ou, comme *instrument de médiation sémiotique* :

The process of internalisation as described by Vygotsky may transform tools into psychological tools : when internally oriented a « psychological tool » will shape new meanings ; in this sense a tool may function as a semiotic mediator [Mariotti, 2002]

Et encore, Mariotti (2003) :

Dans ce passage (d'outil à signe qui en dérive) des aspects de l'outil sont maintenus mais, en même temps, les signes acquièrent l'autonomie nécessaire pour être utilisés dans des activités différentes de celles où ils ont eu se trouve leur origine. En bref, ils peuvent devenir de véritables « moyens de penser » et contribuer à la construction de signifiés relatifs au savoir mathématique. [...]

La notion de médiation sémiotique, telle qu'elle est décrite par Vygotsky, semble fournir un moyen très convenable et très puissant pour interpréter le processus cognitif relatif au lien entre l'usage des outils et la construction de signifiés. [Mariotti, 2003].

Pour expliquer ce changement d'orientation, d'outil extérieurement orienté en signe, intérieurement orienté, Mariotti (2000) évoque l'exemple donné déjà par Vygotsky, de l'élaboration historique des systèmes de numération. Ces systèmes, originellement produits et employés pour évaluer une quantité, une fois internalisés, ont pu fonctionner comme moyens de contrôle et d'organisation du comportement mental et, ainsi, de solution de problèmes. On peut trouver d'autres exemples éclairants de description de ce processus d'internalisation et ce changement de signification des outils employés, respectivement, dans la cas de la règle et de l'abaque (Bartolini Bussi, 2000), des roues dentées (Bartolini Bussi et al., 1999c), du

compas (Bartolini Bussi, 2001) et du prospectographe (Bartolini Bussi et Mariotti, 1999a, Mariotti, 2000, Bartolini Bussi et al., à paraître a), aussi comme des certains commands d'un logiciel d'apprentissage de l'algèbre, l'Algebrista, spécifiquement conçu pour fonctionner comme médiateur pour l'apprentissage de la notion de théorème (Cerulli et Mariotti, 2000, Cerulli, 2002).

Mariotti met en garde contre le risque d'identifier toute la complexité d'un tel processus de médiation sémiotique avec les processus d'instrumentalisation et d'instrumentation (cf. Chapitre 1, § 3.6.1), qui, pourtant, en constituent une composante fondamentale :

The analysis of utilisation schemes and the evolution of instrumental genesis may highlight interesting aspects useful to explain why so often students do not behave as they were expected : the ideal constructivist approach may be usefully integrated by an instrumental approach, but still does not solve the crucial problem : how to bridge the inevitable gap between mathematical meanings and computer phenomenology.

[...]

The artefact, although incorporating a mathematical knowledge, although integrated by appropriate utilisation schemes, did not function in generating mathematical meanings ; through its use, the user did not access that meaning which was incorporated in the artefact. This is a very common phenomenon, the process of construction of meanings is not directly and simply related to practice.

[...]

In conclusion, from the didactic point of view mathematical meaning, incorporated in an artefact, might be accessible through the process of the instrument genesis, but this cannot be taken for grant. A more accurate analysis of the relationship between instruments and meanings is required, and that is what is going to be done in the following section. [Mariotti 2002]

Ainsi, en reprenant l'approche instrumentale de Rabardel et en adoptant la distinction entre **artefact** et **instrument**, Mariotti (2002) explique la différence entre **instrument** et **instrument de médiation sémiotique** :

On the one hand, in the process of instrumental genesis the artefact becomes an **instrument** : in acting the subject develops the potential utilisation schemes, and then the artefact, become an instrument, may support the construction of meanings related to those utilisation schemes.

On the other hand the artefact, inserted between the learners and the teacher, may be used by the teacher to exploit communication strategies aiming at guiding the evolution of meanings within the class community. In other terms the artefact may function as an « **instrument of semiotic mediation** ».

[...]

In other terms, as far as the computer is concerned, it intervenes in the activity, but it participates to it in different ways, according to the actors involved in that activity :

- as an **instrument** (the artefact is used according to utilisation schemes) ; and in that case meanings, if any, may emerge, but the *mathematical* meaning, incorporated in it, may remain inaccessible to the user.

- as an **instrument of semiotic mediation** ; as the teacher utilises it in order to accomplish communication strategies aimed to develop a specific meaning, related to the mathematics content which constitute the motive of the teaching/learning activity. The mathematical meaning, related to the knowledge incorporated in the artefact, become accessible to the learner by its use,

but the construction of meanings is fostered by the guidance of the teacher, as long as specific activities are organised, the motive of which is the evolution/construction of meanings recognisable and acceptable mathematically. [Mariotti 2002].

Autrement dit, l'artefact intervient dans l'activité de manière différente, en tant que **instrument** ou **instrument de médiation sémiotique**, suivant le type d'acteur concerné et le type de signifiés qui sont construits (des signifiés relatifs aux schèmes sociaux d'utilisation de l'instrument ou des signifiés mathématiques).

Il s'agit de fonctionnements différents, qui en partie se recouvrent, en partie sont complémentaires. D'une part nous avons **l'instrument** (artefact et ses schèmes d'utilisation) qui donne suite à l'apprentissage de certaines connaissances, mais qui souvent ne permet pas l'accès explicite aux connaissances mathématiques embarquées dans l'artefact et potentiellement accessibles. D'autre part, nous avons **l'instrument de médiation sémiotique**, consciemment inséré dans un processus d'enseignement - apprentissage, qui a été spécifiquement organisé par l'enseignant, afin de permettre l'appropriation de ces connaissances (processus de internalisation) et de les rendre explicitement reconnues et acceptées.

C'est, en particulier, à ce deuxième fonctionnement que nous faisons référence lorsque nous parlons du processus de médiation sémiotique dans une situation d'enseignement - apprentissage.

Voici comment Mariotti (2002) décrit les différents niveaux auxquels ce processus de médiation sémiotique s'exprime :

The process of semiotic mediation develops on different levels :

- The pupil uses the instrument, according to certain utilisation schemes, in order to accomplish the goal given by the task. In so doing the instrument may function as a semiotic mediator, i.e. meanings emerge from subject's involvement in the activity.

- The teacher uses the instrument according to specific utilisation schemes related to the educational motive. In this case, as explained in the following examples, the utilisation schemes may consist in the particular communication strategies centred on the artefact.

In the dialectics between these two levels the construction of meanings occurs, as the product of a *process of internalisation guided by the teacher*. [Mariotti 2002].

Elle explique, ainsi, que l'artefact est exploité dans une dimension double, par rapport à la quelle il peut fonctionner comme médiateur sémiotique. D'une part, l'apprenant utilise l'artefact pour atteindre un certain objectif, de manière à que des signifiés émergent de l'activité ; d'autre part l'enseignant utilise ce même artefact et dirige l'apprenant dans la construction de ces signifiés vers des signifiés mathématiquement consistantes.

La connaissance embarquée dans l'instrument (grâce à sa conception et à une certaine utilisation particulière possible) peut devenir, par son usage, partiellement accessible au sujet. Cependant, elle en résulte explicitement, que après des activités spécifiquement portées sur l'évolution de ces signifiés, en termes mathématiquement acceptables. Or, si le sens est construit à partir d'une expérience phénoménologique (dans une interaction entre action et activité cognitive du sujet et rétroaction du milieu), son évolution et son accession à un statut mathématique sont possibles seulement au sein d'une dynamique sociale guidée par l'enseignant.

Ce n'est pas que l'élève utilise d'emblée l'artefact comme médiateur sémiotique. L'intervention de l'enseignant à ce propos est nécessaire pour guider le développement de certains schèmes d'utilisation de l'artefact en fonction de bien spécifiques intentions didactiques :



À travers l'action de l'enseignant, le savoir peut émerger et franchir l'opacité de la représentation donnée par l'artefact. En particulier, l'émergence arrive par un processus d'explicitation, qui passe par l'usage de signes dérivés de l'outil/artefact, signes comme les mots du langage naturel, les gestes ou des formes différentes de représentation. C'est par l'usage de ces signes que le savoir peut être internalisé par l'élève [Mariotti, 2003].

Dans cette perspective, le rôle de l'enseignant diffère de celui qu'il a dans les situations didactiques de Brousseau (1998). D'une part, l'enseignant, au sommet du processus de dévolution, est supposé « disparaître », tandis qu'ici, elle participe de manière active et substantielle au processus de médiation sémiotique.

En accord avec la perspective décrite auparavant, Mariotti formule celle qu'on peut considérer comme une des hypothèses fondantes la TMS et notre thèse particulière (**sixième hypothèse**) :

Meanings are rooted in the phenomenological experience (actions of the user and feedback of the environment, of which the artefact is a component) but their evolution is achieved by means of social construction in the classroom, under the guidance of the teacher. [Mariotti, 2002]

Liée à cette hypothèse nous postulons que l'artefact que nous avons choisi, Cabri-géomètre est susceptible de fonctionner comme Instrument de Médiation Sémiotique pour les notions de variable, fonction et graphe de fonction. Nous aurons l'occasion de détailler plus avant les raisons de cette hypothèse et le sens précis de notre affirmation.

Etant donné le rôle crucial joué par l'enseignant, nous verrons aussi par la suite, que notre recherche visera plus particulièrement à étudier son apport spécifique dans le processus de médiation sémiotique.

### 3.6.3. Artefacts de première, deuxième et troisième type

En accord avec Engestroem (1987, p. 62) Bartolini Bussi et Mariotti soulignent que "the exciting relations between technical and psychological tools were not elaborated concretely by Vygotsky". En outre, elles affirment aussi que, lors du renouveau récent autour des études Vygotskiennes, les signes sont encore trop traités en eux-mêmes, séparés du spectre des outils psychologiques et de leurs relations avec les outils techniques. Ainsi, afin d'approfondir cet aspect, en consonance avec Engestroem, Bartolini Bussi, Mariotti et Ferri (à paraître a), ont repris la discussion de Wartofsky's (1979) sur les artefacts culturels (et sa distinction entre artefacts primaires, secondaires et tertiaires), en identifiant explicitement les outils techniques avec les artefacts primaires et les outils psychologiques avec les artefacts secondaires :

What constitutes a distinctively human form of action is the creation and use of artifacts, as tools, in the production of the means of existence and in the reproduction of the species. *Primary artifacts* are those directly used in this production ; *secondary artifacts* are those used in the preservation and transmission of the acquired skills or modes of action or praxis by which this production is carried out. Secondary artifacts are therefore representations of such modes of actions [Wartofsky, 1979, p. 202].

Wartofsky's (1979) fait aussi référence explicite à un troisième type d'artefacts, les artefacts tertiaires :

[...] which can come to constitute a relatively autonomous « world », in which the rules, conventions and outcomes no longer appear directly practical, or which, indeed, seem to constitute an arena of non-practical, or « free » play or game activity. This is particularly true ... when the relation to direct productive or communicative praxis is so weakened, that the formal structures of the representation are taken in their own right as primary, and are abstracted from their use in productive praxis [Wartofsky, 1979].

Pour Bartolini Bussi, Mariotti et Ferri, des exemples d'artefacts tertiaires sont les théories mathématiques qui permettent l'organisation des modèles, construits en tant qu'artefacts secondaires ; de plus, ces artefacts tertiaires possèdent les potentialités pour être étendus et créer quelque chose de nouveau, qui maintient seulement des liens faibles avec l'activité pratique et représentative :

Mathematical theories are examples of tertiary artifacts, organizing the models constructed as secondary artifacts. Mathematical theories have the potential of being expanded to create something new that maintains links with practical and representative activities. Cartesian Geometry and Desarguesian Geometry are examples of tertiary artifacts which, as Otte clearly discussed (1997), because of their origins, constituted two mutually exclusive theoretical systems for nearly two centuries [Bartolini Bussi et al., à paraître a].

Les analyses historiques montrent que les développements des artefacts primaires et secondaires sont rarement séparés les uns des autres et que, ensemble, ils constituent la base du développement des artefacts tertiaires.

Dans le cas de la géométrie, par exemple, (mais une analyse similaire peut être faite pour l'analyse ou l'algèbre), Bartolini Bussi et Mariotti observent que les origines sont souvent données par l'action d'un artefact primaire ou secondaire spécifique, comme, par exemple, le compas avec les textes d'Héron et d'Euclide ; les instruments mécaniques avec les textes de Cavalieri, Descartes, Newton et des autres ; les prospectographes (instruments pour la perspective) avec les traités sur la perspective de Piero Della Francesca ou d'autres auteurs (Bartolini Bussi et Mariotti, 1999a ; Bartolini Bussi, Mariotti, et al. à paraître a ; Bartolini Bussi et al. à paraître b).

Dans cette perspective, chaque composante du système (artefact primaire, secondaire et tertiaire) peut évoquer les autres et les trois peuvent se confondre dans le même artefact. Les objectifs pratiques, représentatifs et théoriques, sont supposés être (au moins potentiellement) incorporés dans l'activité avec le même artefact, qui de cette manière, acquiert un caractère « polysémique » (Engestroem, 1990).

Du point de vue didactique, comme le disent Bartolini Bussi et Mariotti, si l'objectif de l'éducation mathématique n'est pas un apprentissage trivial mais la construction ou l'appropriation, par les étudiants, des signifiés mathématiques et des styles de raisonnement, ce système, constitué à la fois par les artefacts primaires, secondaires et tertiaires, doit être nécessairement impliqué dans l'enseignement, spécialement dans le cas des élèves plus jeunes :

If the aim of mathematics education is not rote learning but the students' construction or appropriation of mathematical meanings and styles of reasoning, the whole system of primary, secondary and tertiary artifacts must be involved in teaching. Especially with younger pupils the starting point is likely to be the 'subsystem' given by primary and secondary artifacts, whilst tertiary artifacts act as a long term aim [Bartolini Bussi, Mariotti et Ferri, à paraître a].

Cette position amène Bartolini Bussi, Mariotti et Ferri (à paraître a) à mettre en évidence au moins deux conséquences importantes pour le processus d'enseignement - apprentissage basé sur l'utilisation d'un artefact :

- d'une part, la présence d'un artefact dans la classe, ne détermine pas mécaniquement la façon dont il est actuellement utilisé et conçu par les étudiants (il pourrait fonctionner pour quelqu'un comme un artefact primaire tandis qu'il serait pour quelqu'un d'autre un artefact secondaire),
- d'autre part, cette présence peut impliquer plusieurs objectifs d'activité, avec des tâches et une guide spécifiques (suivant le type d'artefact sollicité).

En ce qui concerne notre étude nous verrons mieux dans les prochains chapitres que notre séquence expérimentale sera bâtie non seulement sur l'utilisation d'un artefact de premier et deuxième type, tel comme Cabri, mais aussi sur un artefact de deuxième et troisième type comme un extrait d'un texte historique issu de l'*Intoductio in analysis infinitorum* d'Euler (1748). En fait comme artefact de deuxième type ce texte fournit une description assez opérationnelle d'une méthode de représentation d'une fonction numérique par l'intermédiaire d'une fonction géométrique, comme artefact tertiaire, il nous permet l'accès au signifié de graphe de fonction.

### 3.7. Premier bilan intermédiaire : quelque critère de construction de la séquence expérimentale

Les considérations que nous venons de faire sur la TMS et sur ses liens avec la théorie psychologique de Vygotsky entraînent des conséquences importantes en particulier au niveau des critères de construction de la séquence expérimentale (c'est-à-dire à la façon dont nous avons décidé d'élaborer et puis de d'analyser notre ingénierie didactique) et de l'étude conséquent du fonctionnement du processus de MS.

Puisque Vygotsky affirme que toute fonction mentale supérieure est engendrée par une **activité médiée, socialement significative**, il s'agira de concevoir des d'activités socialement significatives pour la création, la négociations et renégociation de ZDP opportunes (cf. Chapitre 1, § 3.3.2). En outre, étant donné l'importance accordée par Vygotsky aux signes et aux outils, considérés à l'origine de tout activité médiée, il s'agira aussi d'impliquer dans telles activités, des artefacts et de signes langagiers particuliers. En fait, comme nous avons vu, ceux-ci :

- sont le produit sophistiqué du développement historique et de l'activité sociale et culturelle humaine et véhiculent des formes culturelles particulières de production des savoirs ;
- ils ne se limitent pas à agir sur le monde externe mais ils induisent des transformations profondes sur le plan cognitif du sujet actant (cf. Chapitre 1, § 3.3) ;
- en incorporant (de façon plus ou moins opaque) des éléments du savoir à enseigner, ils sont susceptibles de fonctionner comme Instruments de Médiation Sémiotique (cf. Chapitre 1, § 3.6.2) ;
- par leur utilisation fonctionnelle, ils participent activement à la formation des concepts (cf. Chapitre 1, § 3.4) ;
- ils sont des moyens sociaux d'objectivation (cf. Chapitre 1, § 3.3).

Par conséquent,

- le type d'artefacts impliqués devra toujours comporter une dimension culturellement ou historiquement significative (objets concrets issus de l'histoire des mathématiques, artefacts technologiques, textes historiques, etc.) Cela explique pourquoi dans la TMS nous retrouvons l'utilisation de différents artefacts (cf. Chapitre 1, § 3.2, 3.3 et 3.6.3)
- Le type de tâches devra favoriser *le processus d'internalisation* des opérations avec tels artefacts en vue de leur transformation en Instruments de Médiation Sémiotique (cf. Chapitre 1, § 3.3.1 et 3.6.2).
- Les type de tâches doivent permettre l'utilisation fonctionnelle de certains signes et soutenir, ainsi, l'élaboration de certains signifiés mathématiques personnels (cf. Chapitre 1, § 3.4 et 3.4.1).
- En fin, les activités avec l'artefact doivent s'articuler à d'autres activités d'ordre sémiotique, comme les *discussions mathématiques* (cf. Chapitre 1, § 3.5). Cette articulation sera ainsi susceptibles d'engendrer la production

et la maturation de signifiés mathématiques personnels vers les signifiés mathématiques culturels visés.

### 3.8. Concepts scientifiques et quotidiens : le rôle de la prise de conscience et de l'écriture

Comme nous l'avons déjà vu, pour Vygotsky, l'élaboration et l'évolution de la signification d'un mot correspondent, au niveau psychologique, à la formation des concepts :

« ... le développement des concepts tant spontanés que scientifiques n'est au fond qu'une partie ou un aspect du développement verbal, plus précisément son aspect sémantique, car du point de vue psychologique le développement des concepts et celui des significations de mots sont un seul et même processus, qui ne diffère que par la dénomination » [Vygotsky 1934/1997, p. 297].

Cependant, comme pour un mot, lié à une signification déterminée, au moment où il est pour la première fois assimilé par l'enfant, « *son développement est loin d'être achevé et ne fait que commencer* », de même, le développement d'un concept (assimilé au développement de la signification des mots relatives) ne peut pas se réduire à un « *simple ensemble de liaisons associatives, ni à une habilité mentale automatique* ». Au contraire, Vygotsky (1934/1997, p. 275), définit le concept comme « *un véritable et complexe acte de la pensée* » et, du point de vue psychologique, « *un acte de généralisation* ». Il ajoute :

« C'est pourquoi sous l'angle théorique aucun doute n'est vraiment permis : la thèse selon laquelle l'enfant acquiert dans le processus d'apprentissage scolaire les concepts tout prêts et assimile n'importe quelle habilité intellectuelle est totalement dénuée de fondement » [Vygotskij, 1934/1997, p. 275].

Vygotsky distingue entre concepts scientifiques et concepts quotidiens ou spontanés<sup>10</sup> et il postule que « *les concepts scientifiques ne se développent pas du tout comme les concepts quotidiens* », même s'ils ne s'opposent pas autant que cette affirmation semble le déclarer. Pour expliquer la différence qui existe entre ces deux types de concepts, il fait recours à une analogie avec l'apprentissage d'une nouvelle langue par rapport à la langue maternelle (Vygotsky, 1934/1997, p. 378).

Ainsi, entre ces deux types de concepts de nature différente il y a, une liaison profonde et une interaction constante. Le concept scientifique, étant un concept médiatisé, prend appui sur un concept quotidien, mais le concept quotidien doit atteindre un certain niveau pour que l'enfant puisse assimiler un concept de nature scientifique. Il y a donc *dépendance* du concept scientifique à l'égard du concept quotidien. En outre, Vygotsky postule que le concept scientifique déclenche obligatoirement des modifications dans la structuration des concepts quotidiens. Il y a donc *influence* du concept scientifique sur le concept quotidien.

Les concepts scientifiques et spontanés/quotidiens, selon Vygotsky, diffèrent essentiellement pour les raisons suivantes :

1. *L'établissement d'un rapport autre avec les objets*. Dans les concepts quotidiens le point de départ est le contenu empirique concret tandis que,

<sup>10</sup> Dans une note à page 276 de Vygotsky (1934/1997) l'on trouve le soulignement suivant : « Par pensée «spontanée» ou concepts «spontanés» Vygotsky entend les formes de pensée ou concepts quotidiens qui ne se développent pas dans le processus d'assimilation d'un système de connaissances, apporté à l'enfant par l'enseignement, mais se forment dans le processus de son activité pratique et de sa communication immédiate avec son entourage (Note de l'édition soviétique, 1956) ». Il semblerait, donc, que Vygotsky lui-même employait ces deux adjectifs (« quotidien » et « spontanée ») en tant que synonymes. En tout cas, c'est dans ce sens que nous les utiliserons.

dans le concept scientifique, le démarrage se fait à partir d'une explication ou d'une définition donnée par le maître :

Les matériaux obtenus nous amènent à émettre l'hypothèse que les concepts scientifiques se développent selon une voie un peu particulière par rapport à celle des concepts quotidiens. Cela tient à ce que l'élément principal dans leur développement est la **définition verbale initiale**, qui dans les conditions d'un système organisé descend jusqu'au concret, jusqu'au phénomène, alors que la tendance des concepts quotidiens est de se développer en dehors d'un système déterminé et de s'élever, d'aller vers les généralisations [Vygotsky, 1934/1997, p. 276].

A un même niveau de développement chez un même enfant, Vygotsky souligne que les concepts quotidiens et les concepts scientifiques ont des côtés faibles et des côtés forts différents :

La faiblesse des concepts **quotidiens** se manifeste, selon les données de notre étude, par une **incapacité à l'abstraction**, une inaptitude au maniement volontaire ; ce qui domine dans ces conditions c'est leur utilisation incorrecte. La faiblesse du concept **scientifique** c'est son **verbalisme**, qui constitue le principal danger pour son développement, c'est son insuffisante saturation en concret ; sa force est dans la capacité qu'a l'enfant d'utiliser volontairement sa « disponibilité à l'action ».

2. *Le type de médiation offert.* Si dans les concepts quotidiens les rapports de médiation sont établis à partir des objets, les concepts scientifiques, quant à eux, « supposent un tissu conceptuel déjà développé grâce à l'activité spontanée ». La médiation se fait donc à partir d'autres concepts.

Le développement des concepts scientifiques implique une « généralisation sur des généralisations déjà formées et un maniement plus conscient et volontaire des anciens concepts ». La « prise de conscience » équivaut à une généralisation, c'est à dire à la formation d'un concept d'ordre supérieur qui inclut :

- une série de concepts subordonnés
  - une systématisation hiérarchique des concepts de rang inférieur au concept donné.
3. *La présence ou absence de la notion de système.* Les concepts spontanés se constituent en dehors d'un système, car les liaisons possibles entre les concepts sont des « liaisons empiriques établies entre les objets eux-mêmes ». A l'inverse, les concepts scientifiques supposent un *système organisé*. C'est cette notion de système qui permet l'établissement des rapports de concept à concept ou entre concepts et objets médiatisés ainsi que l'établissement de liaisons supra- empiriques entre les concepts. Le caractère non-conscient des concepts spontanés est dû à la non-systématisation de la pensée, c'est à dire à l'absence de généralisation, car généralisation signifie tout à la fois *prise de conscience et systématisation des concepts*.

Finalement, ce qui marque de manière substantielle la différence entre concepts scientifiques et concepts spontanés c'est :

4. *La présence ou absence du caractère conscient et volontaire.* En particulier, les concepts spontanés sont caractérisés par *l'absence de prise de conscience, le caractère non volontaire, la compréhension inconsciente et l'utilisation spontanée*. Au contraire, la force des concepts scientifiques se manifeste dans *le caractère conscient et le caractère volontaire*. On voit ici que c'est justement à ce niveau que l'action de l'enseignant peut se révéler très efficace, par la proposition de tâches ayant comme but celui de développer ce caractère conscient et volontaire.

Etant donné que nous travaillons avec un artefact, nous faisons l'hypothèse que nous retrouverons ce même type de distinction entre « concepts quotidiens » versus « concepts scientifiques » dans l'apprentissage des mathématiques.

Il s'agit bien évidemment d'une véritable transposition qui s'inspire de Vygotsky mais prend toute son autonomie. Du côté des « concepts quotidiens » nous situons « l'expérience sensible dans un artefact, qui met en jeu la perception et le geste, (même si cet artefact est déjà mathématisé) » ; en revanche, du côté des « concepts scientifiques » nous mettons le « fonctionnement théorique » des élèves.

En effet, en ce qui concerne l'expérience sensible, l'apprentissage est moins formalisé, il n'y a pas, par exemple, une véritable théorisation de la manipulation (même s'il faut apprendre aux élèves à bouger la souris), tandis que du côté des connaissances mathématiques au sein d'une théorie, l'apport d'un adulte ou d'un enseignant se révèle indispensable.

Dans notre transposition, la différence entre ces deux concepts relève donc principalement du type des contrôles activés : dans l'expérience concrète, les contrôles sont pragmatiques et liés à la perception, tandis que dans le fonctionnement théorique les contrôles sont de type théorique, liés à une théorie mathématique.

Une autre différence importante porte sur la formulation : alors qu'on peut très bien manipuler un artefact sans formuler (ou bien en restant dans le registre du langage quotidien), dans le cas du fonctionnement théorique, il est nécessaire d'adopter un registre langagier opportun, qui relève explicitement de la théorie à laquelle on fait référence.

Par rapport à ces deux types de concepts, Vygotsky parle d'un processus de germination ayant deux directions opposées qui convergent vers une zone de jonction commune :

« Les concepts scientifiques germent vers le bas par l'intermédiaire des concepts quotidiens. Ceux-ci germent vers le haut par l'intermédiaire des concepts scientifiques ».

« [...] La véritable nature du lien qui unit dans leur développement ces deux lignes de sens opposé se manifeste dans toute son évidence : c'est celui qui unit la zone prochaine de développement et le niveau présent du développement » [Vygotsky, 1934/1997, pp. 372-373].

Cette position entraîne une conséquence importante pour notre étude. En effet, nous considérerons que les activités élaborées au sein d'un artefact puissent justement se situer dans cette « zone de jonction » entre concepts scientifiques et spontanés. D'une part, Cabri-géomètre réifie des signifiés mathématiques en termes d'objets à l'écran et fournit à l'enseignant les IMS opportuns pour y accéder ; d'autre part, il permet une manipulation directe de ces objets, en donnant la possibilité d'enraciner l'élaboration de ces signifiés dans le concret de l'expérience phénoménologique.

Pour Vygotsky, l'enfant parvient lentement à la prise de conscience et à la maîtrise de sa propre pensée tout d'abord à partir de ce qu'il appelle la « loi de la prise conscience » et la « loi du décalage ». Cependant il argumente, avec force, que ces deux lois, toutes seules ne suffisent pas à expliquer la prise de conscience des concepts, leur utilisation intentionnelle et volontaire.

La première loi est dérivée de Claparède et met en évidence le rôle potentiel des déséquilibres sur l'apprentissage :

« Plus nous nous servons d'une relation, moins nous en prenons conscience. [...] Nous ne prenons conscience que dans la mesure de notre désadaptation » [Vygotsky, 1934/1997, p. 302]

La deuxième, souligne l'importance du passage de l'action à la formulation :

« Prendre conscience d'une opération c'est en effet la faire passer du plan de l'action sur celui du langage, c'est donc le réinventer en imagination pour pouvoir l'exprimer en « mots » Ce décalage de l'opération du plan de l'action sur celui de la pensée se conjuguera avec la réapparition des difficultés et des péripéties qui avaient accompagné l'assimilation de cette opération sur le plan de l'action. [Vygotsky, 1934/1997, p. 303]

Il ajoute, ensuite, que la formation donc des concepts scientifiques nécessite préalablement une forme d'activité de la conscience, non consciente et volontaire, qui puisse, néanmoins, donner le contenu d'une prise de conscience subséquente :

« La loi générale de développement est que la prise de conscience et la maîtrise ne sont propres qu'au stade supérieur de développement d'une fonction. Elles apparaissent tard. Elles doivent être nécessairement précédées d'un stade où le fonctionnement d'une forme donnée d'activité de la conscience est non conscient et involontaire. Pour prendre conscience, il faut posséder ce dont on doit prendre conscience. Pour maîtriser, il faut disposer de ce qui doit être soumis à notre volonté ». [Vygotsky, 1934/1997, p. 313]

A nouveau, nous situons ici le rôle potentiel de certaines activités avec l'artefact, qui peuvent justement constituer le contenu éventuellement non conscient et volontaire, d'une prise de conscience subséquente.

Cependant, il ne donne pas de critères pour la conception de ce type d'activités. Finalement ce qui l'intéresse est le moment de la prise de conscience. Il dit, alors, que ce qui permet le passage conscient et volontaire est le recours au langage écrit :

[...] l'utilisation du langage écrit suppose un rapport avec la situation fondamentalement différent de celui qui existe dans le cas du langage oral, elle requiert un rapport plus indépendant, plus volontaire, plus libre. [Vygotsky, 1934/1997, p. 341]

Il explique en fait que le langage écrit contraint l'élève à une activité plus intellectuelle et que *les motifs du langage écrit sont plus abstraits, plus intellectuels, moins directement liés à un besoin*. Les signes du langage écrit et leur utilisation sont assimilés *consciemment et volontairement* à la différence de l'utilisation et de l'assimilation inconscientes de l'aspect phonique du langage.

Nous verrons dans le paragraphe suivant, que cette brève réflexion autour des différences entre concepts scientifiques et spontanés, conduit à des considérations ultérieures sur les critères d'élaboration de notre ingénierie. En particulier, l'accent, mis par Vygotsky sur le rôle nécessaire mais insuffisant des déséquilibres dans le processus d'apprentissage et la nécessité d'un travail explicite sur la prise de conscience, amènera à l'élaboration d'une organisation bien précise des activités à proposer aux élèves.

### **3.9. Deuxième bilan intermédiaire : d'autres critères de construction de la séquence expérimentale**

Ce que nous venons de dire à propos des différences entre concepts scientifiques et spontanés permet d'intégrer les critères d'élaboration de notre ingénierie déjà dégagés précédemment par trois considérations ultérieures :

La première considération porte sur le type de tâche à choisir.

En fait, nous verrons que l'un des objectifs des activités avec l'artefact, élaborées par notre ingénierie, sera, justement, celle de développer suffisamment une « saturation en concret » des concepts scientifiques pour éviter le danger, dont Vygotsky parle, d'un verbalisme excessif. Ainsi, il s'agira de exploiter le potentiel sémiotique des outils de Cabri par des activités finalisées. Des tâches d'anticipation ou de description, par exemple, permettront de prendre conscience et d'approfondir

certains comportements « mathématiques » de certains objets et outils de Cabri (c'est-à-dire correspondants à des propriétés mathématiques des objets représentés). Nous supposons que la manipulation des signes- outils dans Cabri-géomètre selon ce type d'activités peut permettre de tisser un réseau de concepts, au début éventuellement spontanés, sur lequel développer les concepts scientifiques. Plus encore, nous supposons que Cabri, en mobilisant certains types de connaissances, peut se positionner métaphoriquement dans la zone de conjonction entre concepts spontanés et scientifiques.

La deuxième considération porte sur le type d'articulation que nous adopterons entre les activités à proposer aux élèves.

En fait, l'accent sur le rôle de l'écriture et sur la prise de conscience conduira à une organisation bien précise d'activités sémiotiques différentes (activités dans l'artefact, activités de DCs, activités de rédaction de fiches de travail et activités d'écriture de rapports individuels). Ainsi, par les DC et l'écriture des fiches et des rapports individuels, nous nous attendons à pouvoir passer de l'action spontanée et inconsciente au niveau conscient. Les allers-retours continus entre ces différents types d'activités sémiotiques doivent pouvoir conduire à élaborer explicitement, de manière volontaire et consciente, les liens et la systématisation entre les différents concepts.

La troisième considération, liée à la précédente, porte sur le rôle potentiel des déséquilibres sur l'apprentissage et sur la nécessité du passage de l'action à la formulation. Ces deux hypothèses sont critiquées par Vygotsky non pas dans leur validité absolue mais dans leur prétention d'expliquer complètement le développement de la pensée consciente et volontaire.

Ainsi Vygotsky ne nie pas la validité et la nécessité pour la formation des concepts d'une forme préalable d'activité, non consciente et volontaire, qui puisse, néanmoins, donner le sens d'une prise de conscience subséquente. Cependant, il ne détaille pas des critères de construction de ce type d'activités. Cela est probablement dû au fait que son intérêt est de type psychologique et non pas didactique. D'autre part, nous avons vu (cf. Chapitre 1, § 3.7), comment la TMS, à partir d'une perspective proprement didactique, a en partie élaboré des critères de construction de ce type d'activités. Elle a ainsi surtout mis l'accent sur l'utilisation d'outils et la nécessité d'immerger les élèves dans des activités socialement significatives. Néanmoins, finalement nous pouvons encore affirmer que la question reste ouverte. Ainsi, nous estimons que le recours à des éléments de la TdS doit permettre de repérer d'autres critères.

Cette dernière considération ouvre ainsi à la possibilité d'intégrer dans notre cadre, de manière compatible avec la théorie Vygotskyenne, des éléments nouveaux, qui trouvent leur racines ailleurs, en particulier dans la théorie des situations élaborée en premier par Guy Brousseau et, encore plus en amont chez Piaget, le grand « antagoniste » de Vygotsky. Nous nous référons en particulier à la place que nous accorderons à la notion de *problème*, considéré comme situation d'apprentissage source de désadaptation et déséquilibre. Associé à cette notion de *problème* nous verrons que d'autres concepts issus de la Tds comme celui de *milieu* et de *contrat didactique*, permettront non seulement d'élaborer des situations didactiques opportunes mais surtout de modéliser *a posteriori* le fonctionnement de ces situations d'apprentissage proprement conçues en fonction du processus de MS.

Ainsi, même si ces concepts ont été dérivés en partie d'une position psychologique et épistémologique différente de celle de Vygotsky, nous prétendons qu'ils ne soient pas contradictoires avec cet approche. Nous affirmons, au contraire, qu'il existe à ce niveau, la possibilité d'une complémentarité de perspective.

---



Nous verrons dans les paragraphes suivants en détail comment nous y appuierons pour intégrer notre cadre théorique.

## **4. Première intégration : quelques éléments de la théorie des situation de Guy Brousseau**

Nous présentons dans ce qui suit une synthèse de la théorie des situations qui doit beaucoup respectivement aux cours de DEA tenu par Annie Bessot (2003) et à l'exposé de Marie-Hélène Salin à l'école d'été (2002). Nous n'avons retenu de ces cours que les éléments qui concernent notre travail de thèse. En annexe (Annexe 1), on pourra trouver un approfondissement ultérieur de certains concepts de la Théorie des situations, qui sont ici seulement évoqués.

### **4.1. Le milieu adidactique facteur de déséquilibre et d'apprentissage**

A la différence de Vygotsky, dans la théorie psychogénétique piagétienne, le sujet apprend essentiellement par assimilation et accommodation, en s'adaptant à un milieu qui est producteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres.

Piaget ne spécifie pas le type de milieu, finalement considéré de manière très globale. L'adaptation, dont Piaget parle, permet ainsi le développement de notions constitutives comme l'espace, le temps, la causalité, etc, mais n'est pas suffisant pour fonder l'action didactique du professeur. Sur cette première hypothèse psychologique, se greffe la théorie des situations élaborée par Guy Brousseau (1997, 1998). Cet auteur, a d'abord observé qu'un milieu dénoué d'intentions didactiques, c'est-à-dire non volontairement organisé pour enseigner un savoir, est insuffisant à induire chez un sujet toutes les connaissances que la société souhaite qu'il acquière. Ainsi, le rôle du maître serait celui de organiser la rencontre avec ce savoir par un choix judicieux des « problèmes » à proposer :

La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez les élèves les adaptations souhaitées par un choix judicieux des « problèmes » qu'il lui propose [Brousseau, 1998]

Les problèmes sont pris par Brousseau dans le sens de « situations problématiques », où les interactions élève/milieu sont finalisées par une question ou un but à atteindre. Choisir les « bons problèmes », c'est-à-dire les « bonnes situations problématiques », pour Brousseau, c'est alors déterminer des milieux avec lesquels l'élève doit interagir pour pouvoir apprendre des mathématiques. Dans ces milieux, les connaissances souhaitées doivent ainsi pouvoir se construire et se manifester essentiellement comme des outils de solution et de contrôle de problèmes dont l'élève accepte la responsabilité.

A partir de cette hypothèse de nature didactique, Brousseau a introduit un modèle de la *situation didactique* où l'apprentissage de l'élève est modélisé par une *situation adidactique* dans la situation didactique gérée par l'enseignant. Dans ce modèle, le *milieu* est défini comme le *système antagoniste (de l'élève) [...] qui modifie les états du connaissance de façon non contrôlée par l'élève : le milieu se comporte comme un système non finalisé. Il a un caractère relatif. (Brousseau, 1998) :*

Comme le rappelle Salin (2002), pour que le milieu puisse jouer convenablement son rôle, il doit remplir trois conditions principales :

Il doit être facteur de contradictions, de difficultés et de déséquilibres donc d'adaptation pour l'élève.

Il doit permettre le « fonctionnement autonome » de l'élève.

Dans des phases adidactiques (c'est-à-dire modélisables par une situation adidactique), l'élève doit ainsi avoir à résoudre un problème dont il a la responsabilité. Le processus de déplacement de responsabilité, de l'enseignant vers l'élève, qui marque en particulier l'entrée de ce dernier dans la phase adidactique, est appelé par Brousseau, *dévolution*.

L'apprentissage doit conduire à la maîtrise des savoirs mathématiques identifiés comme tels, et pas seulement aux connaissances<sup>11</sup>. [...] Il s'agit donc d'associer un savoir correspondant aux connaissances, sources de décision à l'intérieur de la situation et de déterminer quelle(s) situation(s) représentent convenablement le savoir visé.

Par conséquent, une *situation didactique*, pour Brousseau, se caractérise par un double processus : celui de la *dévolution* et celui de *l'institutionnalisation*. Comme l'explique Bessot (2003), dans le processus dévolution, l'enseignant fait le travail inverse du chercheur :

Il [l'enseignant] cherche à recontextualiser et repersonnaliser le savoir à enseigner, il désigne des problèmes qui vont donner du sens aux connaissances à enseigner pour que l'activité de l'élève « ressemble » par moment à celle du chercheur, il cherche à obtenir la dévolution à l'élève d'une responsabilité vis à vis du savoir.

Le processus de *dévolution* (d'une *situation adidactique*) est justement décrit par A. Rouchier (1991) dans sa thèse comme un processus qui permet de convertir un *savoir* à enseigner en *connaissance* chez l'élève (personnalisée, contextualisée, temporalisée). En revanche, dans le processus *d'institutionnalisation*, l'on observe l'opération inverse : des *connaissances* au *savoir*. En fait, une fois que le processus de dévolution s'est bien installé et que les élèves ont pu trouver les solutions souhaitées aux problèmes posés, il est nécessaire de les rendre conscients des connaissances acquises et du statut officiel de ces connaissances au sein de l'institution de référence. Pour transformer les réponses et les connaissances en savoir, les élèves devront à nouveau décontextualiser, dépersonnaliser la connaissance qu'ils ont élaborée afin de reconnaître, dans ce qu'ils ont fait, ce qui a un caractère universel, un *savoir* culturel réutilisable. Bien évidemment ce travail ne peut pas se faire que grâce à l'aide du professeur qui est le garant de l'institution et de la culture de référence.

Ces deux processus, symétriques et complémentaires (Margolinas 1992), principalement dépendants de l'action de l'enseignant, sont souvent marqués par des phases spécifiques (phases de dévolution et d'institutionnalisation) qui ont lieu, de préférence, respectivement, au début et à la fin d'une situation didactique. Cependant, comme le souligne Margolinas (1992), il n'y a pas de cloisonnement respectif et ces deux processus *durent tout au long de la situation didactique*.

Margolinas a proposé comme élément charnière entre ces deux processus, *les phases de conclusions*, c'est-à-dire, les phases au cours de lesquelles *l'élève accède à une information sur la validité de sa réponse*. Elle a souligné que *cette information doit être pertinente du point de vue du problème et du savoir* et que *ces phases sont sous la responsabilité du maître* (Margolinas 1992, 2004). Déjà dans sa

<sup>11</sup> Le savoir est défini par Brousseau comme le produit culturel d'une institution. Les connaissances, sont les moyens, à disposition d'un individu, transmissibles mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation et d'y obtenir un certain résultat conformément à une attente et à une exigence sociale. (Brousseau et Centeno, 1991, p. 176).

thèse (Margolinas, 1989) elle a indiqué deux modalités particulières et alternatives d'actualisation de ces phases, celle de l'*évaluation* et celle de la *validation* :

La phase de conclusion est une phase d'évaluation quand la responsabilité du maître s'exerce sous forme d'un travail public pour l'élève, relativement au problème et au savoir. [...] La phase d'évaluation est une modalité qui ne peut pas être adidactique.

*La phase de conclusion est une phase de validation si l'élève décide lui-même de la validité de sa réponse.* [...] La phase de validation est donc la modalité adidactique de la phase de conclusion. [Margolinas, 1992]

Brousseau a identifié des conditions « minimales » pour que une situation puisse réellement fonctionner comme situation *adidactique* d'apprentissage pour l'élève. En reprenant une terminologie issue de la théorie des jeux, voici comment Salin (2002) synthétise ces conditions :

L'élève doit disposer d'un modèle de contrôle, c'est-à-dire un ensemble de connaissances qui lui assurent la régulation de la situation et lui permettent de distinguer l'état terminal d'un état intermédiaire et l'état terminal gagnante de l'état terminale perdante.

L'élève doit disposer d'une stratégie de base ou, au moins, de la possibilité d'envisager un état successeur à l'état initial. Celle-ci est une condition indispensable à toute *dévolution* du problème :

Sans stratégie de base l'élève ne comprend pas le jeu, même si la consigne est claire. [Brousseau, 1988, p. 61]

Cette procédure initiale, relative aux savoirs et connaissances antérieurs, ne peut pas être celle que l'on veut enseigner. En fait, si la réponse est déjà connue, ce ne serait pas une situation d'apprentissage.

En outre, elle doit se révéler très vite insuffisante ou inefficace pour que l'élève soit contraint de faire des accommodations, des modifications de son système de connaissances et il puisse ainsi apprendre.

L'élève doit pouvoir recommencer. La répétition du jeu doit lui permettre d'élaborer la stratégie gagnante.

Il existe un milieu pour la validation qui permet des rétroactions.

La connaissance visée est a priori requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie gagnante ou optimale.

Dans le modèle de situation adidactique proposée par Brousseau, l'apprentissage se définit alors comme une *modification* de la connaissance élaborée par l'élève lui-même, que l'enseignant peut seulement provoquer par des choix, volontaires ou involontaires, de valeurs de *variables* de la situation adidactique. Ces variables sont appelées par Brousseau *variables didactiques* :

Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations et des régulations : des apprentissages. [Brousseau, 1982b]

Ainsi cette modélisation permet la conception d'ingénieries didactiques où les conditions pour provoquer l'apprentissage de l'élève peuvent être, d'une certaine mesure, calculées et anticipées :

« Un champ de problèmes peut être engendré à partir d'une situation par la modification des valeurs de certaines variables qui, à leur tour, font changer les caractéristiques des stratégies de solution (coût, validité, complexité...etc.) »

[...]

« Seules les modifications qui affectent la hiérarchie des stratégies sont à considérer (variables pertinentes) et parmi les variables pertinentes, celles que peut manipuler un professeur sont particulièrement intéressantes : ce sont les variables didactiques. » [Brousseau, 1982a].

## 4.2. Quelques conséquences pour notre étude

Comme nous l'avons déjà anticipé, nous portons attention aux notions de problème, de situation adidactique, de milieu, de variable didactique car ces concepts, ne sont pas seulement des outils de construction d'ingénieries spécifiques, mais ils sont aussi un modèle efficace d'analyse de situations didactiques non spécifiquement conçues pour constituer une situation adidactique d'apprentissage<sup>12</sup>.

Dans le cadre de notre travail, nous implémenterons une séquence d'enseignement - apprentissage fondamentalement conçue en fonction du processus de Médiation Sémiotique. Même si cette séquence n'est pas construite de manière à garantir toujours des phases adidactiques, l'analyse de certaines variables didactiques permettra de calculer le *potentiel sémiotique*<sup>13</sup> des outils et des activités impliquées. En fait, puisque il s'agira de concevoir des activités favorisant l'internalisation de certains outils, la création de certains signes, la formation et l'évolutions des signifiés mathématiques personnels vers les signifiés mathématiques visés, l'analyse en termes de variables didactiques servira à anticiper les stratégies de résolution des élèves, les rétroactions et les validations possibles, attendues par le milieu.

Les critères de choix et de construction des tâches à proposer aux élèves en fonction du processus de MS à mettre en place, sont parfois assez généraux (cf. Chapitre 1, § 3.7). Grâce aux outils fournis par la TdS, nous nous attendons à mieux expliciter la façon dont ces tâches doivent être conçues et comment elles sont censées fonctionner. Par exemple, lors du processus de médiation sémiotique, un rôle important est joué par les « tâches de prédiction »<sup>14</sup>. Or, du point de vue de la TdS, dans ces tâches nous pouvons reconnaître le rôle joué par ceux que

<sup>12</sup> Ainsi, par exemple, comme le rappelle Bessot (2003), A. Mercier (1992) dans sa thèse a montré que l'introduction officielle d'objets de savoir nouveaux modifie le rapport à des objets déjà construits, naturalisés, transparents. Par rapport à ces objets de savoirs, il y a dévolution à l'élève d'une responsabilité. En tant qu'objets anciens, l'élève a, en fait, la responsabilité de les savoir et pour eux, donc, cette situation peut constituer une phase adidactique.

En général dans ces dernières années, nous avons assisté à une utilisation de plus en plus répandue de la théorie des situations pour la modélisation des situations de classe ordinaires (Perrin-Glorian, 1999b, Perrin-Glorian et Hersant, 2003, Comiti et al., 1995). Ces recherches ont ainsi démontré la validité et la richesse d'une telle approche théorique.

<sup>13</sup> C'est-à-dire le potentiel d'un outil ou d'une activité de devenir, sous certaines conditions, signe ou outil psychologique.

<sup>14</sup> En fait, Bartolini Bussi et Mariotti (1998) ont identifié deux stratégies communicatives importantes de la part de l'enseignant lors du processus de médiation sémiotique. Il s'agit du « jeu d'interprétation » et du « jeu de prédiction », employées en particulier lors de l'activité de reconstruction d'une construction géométrique dans Cabri, s'appuyant sur l'outil « Revoir la construction ». Ces deux stratégies sont liées à deux types de tâches diverses, ayant justement comme objectifs, respectivement, d'une part de conduire les élèves à détecter et à réfléchir sur les « motivations » pour qu'après un pas il en a eu un autre, d'autre part de prévoir le pas successif et puis de le comparer avec celui réellement sauvegardé par l'outil « Revoir la construction ».

Margolinas (1989) appelle « les critères de validité » : l'élève prédit en fonction de ses connaissances et si le milieu est bien organisé il obtiendra des rétroactions qui montreront éventuellement que ce qu'il a anticipé ne s'avère pas et qu'il y a donc une contradiction. L'on retrouve ainsi le rôle de déséquilibres et des rétroactions du milieu comme outils théoriques de modélisation du fonctionnement des élèves.

En outre, les « critères minimaux » permettront d'identifier des phases « d'adidacticité » possibles où la responsabilité du rapport aux objets de savoir est à la charge exclusive des élèves.

La notion de milieu consentira de décrire le rôle de l'artefact choisi, Cabri-géomètre par une deuxième perspective complémentaire. Nous avons vu, en fait, comment du point de vue de la TMS, Cabri est supposé fonctionner comme IMS. Le point de vue de la TdS nous amènera à l'analyser et à l'impliquer dans le processus d'enseignement - apprentissage aussi comme composante fondamentale d'un milieu didactique organisé :

C'est par les actions sur le milieu, par l'interprétation de rétroactions du milieu susceptibles de fournir des éléments de validation de sa solution, dans la répétition d'essais de résolution d'un même problème, que l'élève élabore des adaptations nouvelles à la situation qui lui pose problème. Ces adaptations peuvent être la source de connaissances nouvelles. [...] Les EIAO (environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur) peuvent servir à la constitution de milieux organisés pour l'apprentissage et être analysés de ce point de vue. En effet, ils offrent en particulier cette possibilité de confrontation longue et répétée à une situation problème et cette dualité d'action et de retours du dispositif aux productions des élèves. [Laborde et Capponi, 1994].

Lors de la conception de la séquence expérimentale, il s'agira donc de prévoir et organiser les « bonnes » rétroactions de la part du milieu, susceptibles de favoriser l'apprentissage des notions mathématiques visées.

Enfin, toujours grâce à la notion de milieu, nous nous attendons aussi à modéliser certaines notions qui, dans la TMS sont exprimées en termes métaphoriques et qui peuvent trouver dans la TdS des outils efficaces de description, comme celle de « zone de développement proximal » et de « constitution d'un espace intersubjectif » (cf. Chapitre 1, § 3.3.2).

### **4.3. La place des situations fondamentales dans cet étude**

La théorie des situations de Brousseau a été développée autour d'une hypothèse épistémologique très forte :

Il existe pour tout savoir une famille de *situations* susceptibles de lui donner un sens *correct* [Brousseau, 1986].

Brousseau explique que ce sens est « *correct par rapport à l'histoire de ce concept, par rapport au contexte social, par rapport à la communauté scientifique* ».

Associé à cette hypothèse, en se fondant sur la théorie des jeux, Brousseau a développé l'hypothèse didactique suivante :

Pour toute connaissance, il est possible de construire un jeu formel, communicable sans utiliser cette connaissance, et dont elle détermine pourtant la stratégie optimale [Brousseau, 1998]

Comme le rappelle Bessot (2003), une *situation fondamentale* d'une connaissance est ainsi une *modélisation* de cette famille de *situations non didactiques* spécifiques du savoir visé. Elle est fondamentale :

- par rapport à la connaissance, puisque la situation « *doit être telle que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale.* »

- Par rapport à l'activité d'enseignement, puisque la situation doit permettre de représenter le plus possible de « *situations observées dans les classes, même les moins satisfaisantes, dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé. [...] Elles seront obtenues par le choix de certaines variables caractéristiques de cette situation.* » (Brousseau 1986)

Brousseau ajoute que, par un jeu sur les valeurs des variables didactiques, une situation fondamentale doit au moins permettre :

- -une genèse effective du savoir, c'est-à-dire une genèse de situations représentatives des différents sens d'un savoir (des différentes occasions d'utilisation de ce savoir)
- -une « relecture » de cette genèse suivant la logique de l'organisation du savoir.

Pour Brousseau, ce sont ces types de situations qui donnent véritablement du sens aux objets mathématiques à apprendre et tout apprentissage véritable se réalise seulement par adaptation à ce type de situations fondamentales.

Cependant, même si l'on peut admettre, avec Brousseau, qu'il existe une situation fondamentale pour représenter n'importe quel savoir, comme le souligne aussi Perrin-Glorian (1999a), il faut aussi considérer l'éventualité que cette situation fondamentale ne soit pas concrètement proposable dans une institution ou dans une classe donnée :

[...] il se peut qu'il n'existe pas, dans une institution donnée ou à un niveau scolaire donné, des milieux permettant de construire une situation adidactique d'introduction de ce savoir [Perrin-Glorian, 1999a, p. 298].

Brousseau a lui-même posé ce problème de la impossibilité éventuelle de repérer des situations fondamentales adéquates. Il a même relevé le paradoxe auquel l'enseignant est confronté face à une telle éventualité : soit il doit renoncer à un enseignement par adaptation (chargé de sens), soit il doit accepter la mise en place d'un processus d'apprentissage où le savoir enseigné est nécessairement faux et inadéquat :

Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux et inadéquat.

[...]

L'alternative est d'enseigner directement un savoir conforme aux exigences de la communauté scientifique c'est-à-dire le texte du savoir. De ce fait, on renonce à ce que l'élève donne du sens au savoir : le savoir n'est pas une réponse à un problème incertain dont l'élève accepte la responsabilité. [Brousseau, 1986]

Comme le rappelle Perrin-Glorian (1999a), plusieurs chercheurs, comme Robert et Robinet (Robert et Robinet, 1996 ; Robert, 1998), qui travaillent sur dans l'enseignement supérieur, ont soulevé, depuis longtemps, la question de l'impossibilité de repérer des milieux adidactiques pertinents pour l'apprentissage de toute notion. En particulier, parmi les différentes notions ne se prêtant pas à « un apprentissage par adaptation sur un temps raisonnable » (Perrin-Glorian, 1999a, p.

300), Perrin-Glorian cite justement le cas de l'algèbre linéaire, celui de la valeur absolue et celui de la notion de fonction.

Cet auteur a même souligné, dans cette impossibilité d'identifier des milieux adéquats pour l'apprentissage, une raison pour une approche à l'enseignement de ces notions, intégrant plusieurs paradigmes théoriques. En se référant en particulier, à l'intégration de la TdS et de l'approche proposée par Robert et Robinet (1996), elle a, néanmoins, soulevé la question des risques de ce type d'articulation et des difficultés dues à une compatibilité effective entre ces cadres théoriques différents.

D'une manière analogue mais à partir d'une perspective différente, le problème de la compatibilité entre approches différentes a été soulevé aussi par Boero (1994). En particulier, à l'égard des approches Vygotskyenne et Piagétienne, il questionne la viabilité et la pertinence d'un « principe de complémentarité », surtout en ce qui concerne le rôle des interactions sociales dans la classe et de l'enseignant :

La première question qui se pose est : de quelle façon, et dans quelles limites, est-il possible d'appliquer un « principe de complémentarité » (voire même de réaliser une intégration de références théoriques) entre Piaget et Vygotsky dans le domaine spécifique de l'enseignement-apprentissage des mathématiques ? En ce qui concerne le rôle du langage verbal (comme instrument de communication, ou également comme instrument de pensée en mathématique) une intégration est évidemment possible (le sens étant de reconnaître au langage verbal un rôle plus profond et plus incisif que celui que suppose Piaget dans la plupart de ses œuvres). L'intégration entre les deux cadres théoriques semble au contraire plus délicate si nous considérons le rôle de l'interaction sociale dans la classe et également les problèmes de l'action de l'enseignant dans la zone de développement proximal des élèves (en particulier la fonction de l'imitation). Dans ce cas, des prémisses philosophiques très différentes sont en jeu (ces prémisses concernent le caractère « individuel » et/ou « social » de la construction historique et personnelle du savoir, l'éducation comme formation de l'individu libre ou comme construction du lien entre le groupe en formation et l'histoire culturelle des générations précédentes). Ces prémisses intéressent de même profondément le rôle de l'enseignant dans la classe (solliciteur d'une construction individuelle « canalisée » du savoir – à travers le travail au sein du groupe et le conflit socio-cognitif – vers la convergence avec le savoir officiel, ou médiateur sélectif d'un savoir historiquement accumulé). [Boero, 1994]

Cependant, Boero lui-même conclut que dans l'enseignement- apprentissage des mathématiques, il est impératif, au moins dans le long terme, de prendre en compte cette double perspective théorique :

Et il me semble que la modélisation des situations didactiques et la modélisation des processus d'enseignement- apprentissage à long terme ne peuvent pas ne pas tenir compte de ces différents cadres de référence [Boero, 1994]

En effet, cela c'est justement ce que le travail présent essaie de faire, par l'articulation de deux paradigmes théoriques, l'un d'inspiration vygotskyenne (TMS), l'autre en partie d'inspiration piagetienne (TdS)<sup>15</sup>. Plus précisément, notre thèse visera à élaborer et à étudier une séquence expérimentale qui réalise cette, *en acte*, articulation.

Une raison fondamentale de la spécificité de l'apprentissage de la notion de fonction et l'impossibilité de repérer des « situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée, par adaptation, à une forme de savoir que

---

<sup>15</sup> En effet l'hypothèse didactique de Brousseau questionne le rôle des seules adaptations spontanées à un milieu dénué d'intentions didactiques. Dans ce sens la TdS même en reprenant l'idée piagetienne de l'interaction sujet-milieu, ne se situe pas totalement dans une continuité avec cette approche. Pour Brousseau un milieu, pour être susceptible de provoquer les adaptations souhaitées, c'est-à-dire d'engendrer l'apprentissage visé, doit être organisé de manière opportune.

l'on puisse considérer comme correcte et définitive » réside pour nous, comme pour Perrin-Glorian, dans le caractère *généralisateur*, *unificateur* et *porteur d'un nouveau formalisme* de cette notion. Ce type de caractérisation, développée par Robert, Robinet (1996) et Dorier (1997), s'applique aux notions qui ont été introduites, en mathématiques, expressément, pour unifier, rendre cohérente et généraliser une théorie. Il s'agit de notions dont le caractère nécessaire dérive aussi des exigences culturelles du contexte social dans lequel elles ont été forgées.

Or, si l'on s'interroge sur la notion de fonction, l'on peut s'apercevoir que de par sa centralité, sa transversalité et les différents registres de représentations qu'elle nécessite, elle peut être à juste titre étiquetée de telle manière. Nous verrons, lors du chapitre prochain, que les analyses épistémologiques, menées autour de cette notion, montrent que son évolution au sein de la genèse historique a été, pour utiliser une expression empruntée à Dorier (1997), « très lent, compliqué et sinueux ».

Ainsi, d'une part, en accord avec les positions citées ci-dessus, nous faisons l'hypothèse que pour certaines notions, comme celle de fonction, il n'existe pas une suite de situations fondamentales capables, toutes seules, de façon opérationnelle, de les faire émerger, dans toute leur complexité comme outil de solution d'un problème, au moins, dans un temps raisonnable, dans l'institution scolaire concernée. D'ailleurs, nous voyons bien que cette position reprend partiellement celle de Vygotsky, qui relativise la nécessité de confronter l'apprenant à une phase de déséquilibre (où la connaissance serait justement construite comme outil de solution d'un problème) et qui met plutôt l'accent sur la nécessité d'un travail de type sémiotique (à partir d'outils/signes) et sur la prise de conscience d'activités socialement significatives.

D'autre part nous avançons aussi l'hypothèse d'une complémentarité possible et fructueuse entre ces deux approches. Ainsi, dans la construction de cette notion, nous supposons que certains de ses éléments constitutifs peuvent émerger, se construire et s'articuler comme réponse nécessaire à un problème, d'autres, comme constituants d'un discours mathématique qui se met en place dans la classe, lors de des activités de discussion collectives. Autrement dit, des éléments de la notion de fonction pourront jouer le rôle de « concepts en acte » dans la solution d'une situation problématique, tandis que le processus de médiation sémiotique pourra permettre et le passage du niveau « outil implicite de solution » au niveau « objet explicite » et l'internalisation des signifiés visés.

Rappelons que notre recherche prend justement pour objet d'étude l'interaction entre les deux cadres théoriques.

Par conséquent, lors de la conception de notre séquence expérimentale nous avons nuancé l'hypothèse épistémologique forte avancée par Brousseau et nous avons adopté un point de vue hybride. D'une part, en reprenant Brousseau, et, en estimant qu'effectivement, la rencontre avec des problèmes permet de donner du sens aux objets en jeu, nous avons organisé des situations problématiques. D'autre part, en retenant aussi le point de vue de Vygotsky, notre organisation de la séquence a été guidée par l'exigence de créer des activités socialement significatives permettant le fonctionnement de certains outils et leur réinterprétation comme instruments de médiation sémiotique. Nous verrons que cette organisation n'a pas, pourtant, signifié l'absence de toute phase adidactique d'apprentissage.



#### 4.4. Situations de formulation, institutionnalisation, phases de conclusions et discussions mathématiques

Suivant le type de fonction que la connaissance est appelée à remplir, Brousseau<sup>16</sup> (1998) distingue entre trois types de situations adidactiques : **les situations d'action, de formulation et de validation**.

Comme le rappelle Bessot (2003) :

Dans les **situations** (adidactiques) **d'action**, un sujet, un élève, élabore des connaissances implicites comme moyen d'action sur un milieu (pour l'action) : ce milieu lui apporte des informations et des rétroactions en retour de ses actions.

Dans les **situations** (adidactiques) **de formulation**, le sujet, l'élève, explicite lui-même le modèle implicite de ses actions. Pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut que cette formulation soit elle-même un moyen d'action sur un milieu qui lui apporte informations et rétroactions : cette formulation doit permettre d'obtenir ou de faire obtenir à d'autres un résultat. Les *situations de communications* entre groupe d'élèves peuvent être un exemple de telles situations<sup>17</sup>.

Enfin dans les **situations** (adidactiques) **de validation**, la validation empirique venant du milieu devient insuffisante : le sujet, pour convaincre un opposant, doit élaborer des preuves intellectuelles. Par exemple en mathématique, les déclarations explicites à propos de la situation deviennent des assertions dont il faut prouver l'exactitude et la pertinence selon des règles communes pour en faire un théorème connu de tous.

Si l'on confronte le modèle des *discussions mathématiques* avec celui des situations adidactiques élaboré par Brousseau, l'on peut s'apercevoir qu'elles diffèrent profondément non seulement des **situations d'action**, mais aussi des **situations de formulation et de validation**. En fait, non seulement les *discussions mathématiques* se configurent explicitement comme des situations didactiques, mais, même étant des activités qui portent sur un travail de formulation, elles n'exigent pas, par exemple, que la formulation d'un élève (ou d'un groupe d'élèves) ait un effet déterminé, permettant de lui faire obtenir ou de faire obtenir à d'autres un résultat. Autrement dit, même si les situations adidactiques décrites par Brousseau, peuvent être interprétées comme des activités (dans la mesure où elles sont caractérisées par un motif et des opérations) elles requièrent la mise en œuvre de conditions bien spécifiques, pas explicitement requises par les *discussions mathématiques*.

En revanche, lors d'une discussion mathématique il y a plus que l'explicitation des modèles implicites d'actions et l'élaboration de preuves intellectuelles valables pour tout le monde, même si ces aspects y sont compris, il y a un véritable travail orchestré

---

<sup>16</sup> Dans cette distinction de Brousseau, nous voyons jouer la composante plutôt vygotkienne de la Théorie des Situations. En fait, les situations de formulation et de validation visent à créer une dimension sociale. Elles s'appuient sur cette dimension comme en levier, en soulignant le rôle important de « l'inter - subjectif » dans l'apprentissage.

<sup>17</sup> Margolinas (1992), en reprenant Grenier (1988), et Laborde (1991) ont montré les limitations que les situations de formulations possèdent à cause de l'organisation et de la gestion difficiles de la dimension sociale (messages performantes mais pas pertinents du point de vue mathématiques, messages ambigus ou contenant des implicites mais bien décodés, le risque que la situation soit mal interprétée et vécue comme un « jeu de pistes », etc.). Margolinas (1992) a même observé que chez la plus part des auteurs qui ont utilisé les situations de formulation dans des séquences d'apprentissage, on voit apparaître des phases de bilan, ou de débat collectif, qui traduisent la nécessité pour le maître de rester responsable d'une phase de conclusion problématique.

En effet, l'on voit dans ce choix de faire ou de ne pas faire intervenir directement l'enseignant, le poids déterminant qu'ils jouent les hypothèses psychologiques et épistémologiques sous-jacentes respectivement à la TMS et à la TdS.

par l'enseignant pour exploiter le potentiel sémiotique des outils utilisés et pour dépasser la subjectivité de la connaissance mathématique élaborée dans le contexte du problème :

la discussion constitue une modalité de travail en classe adaptée pour dépasser le lien avec le contexte particulier et la subjectivité de la connaissance mathématique, pour mettre en évidence la nature systémique des idées mathématiques, pour introduire et explorer la fonctionnalité des outils psychologiques (en premier lieu, le langage verbal) dans l'apprentissage des mathématiques, pour alimenter la métacognition et pour modifier des conceptions stéréotypées (des enseignants et des élèves) de la nature des mathématiques [Boero, 1994]

D'un certain point de vu les *discussions mathématiques* pourraient plutôt être mises en relation avec le processus de institutionnalisation. En fait les deux participent du même processus de *conversion didactique*. Brousseau explique que, en général, l'élève n'est pas capable tout seul d'interpréter les connaissances, élaborés comme moyen de action et de contrôle du milieu, de les interpréter en termes de raisons et de transformer son histoire propre en genèse du savoir. Le professeur doit l'aider, en reprenant la situation d'apprentissage et en la rationalisant, en montrant l'enjeu des savoirs anciens et l'intérêt du savoir nouveau

La situation didactique agit comme cause (ou ensemble de causes) de l'apprentissage de l'élève, (par des conditions qu'il n'a ni choisi ni même repérés), elle lui procure une connaissance ou même un savoir, contextualisé et non institutionnalisé.

Pour intégrer cette connaissance en savoir, l'élève doit la placer par rapport à son système propre de savoir (qui est peut-être conforme à la culture) et par rapport aux savoirs institutionnalisés. Il lui faut donc la traduction d'une filiation ou d'une genèse légitime de ce savoir. Il doit donc identifier des « raisons » (par exemple une démonstration) pour accepter cette connaissance qui va se substituer aux causes. Il y a donc conversion d'un phénomène psychologique en un phénomène épistémologique (au sens de Chevallard).

Cette opération change la signification des connaissances et participe de la transposition didactique. [Brousseau et Centeno, 1991]

Cependant, au fond, ce processus d'institutionnalisation, diffère du processus de médiation sémiotique orchestré lors d'une discussion mathématique, et cela pour, au moins, deux caractéristiques fondamentales. D'abord, dans institutionnalisation, la conversion porte sur la transformation des connaissances en savoir, et elle ne s'arrête que lorsque le savoir visé trouve effectivement dans la classe une forme publique et reconnaissable. En revanche, dans *discussions mathématiques*, la transformation concerne les signifiés mathématiques personnels et vise à leur évolution vers les signifiés mathématiques culturels attendus. Cependant, cette transformation peut finalement s'arrêter aussi à des signifiés (mathématiques) socialement partagés différents des signifiés visés, là où, la classe y parvienne avec un accord unanime et l'enseignant les estime posséder une consistance mathématique suffisante pour l'instant.

En outre, dans le processus de institutionnalisation théorisé par Brousseau, à la différence des *discussions mathématiques*, l'on ne fait aucune référence directe aux aspects métacognitifs.

D'un autre point de vu, les *discussions mathématiques* pourraient être rapprochées à des phases de conclusion comme les **phases de bilan** (Grenier,

1988) ou à des **situations de rappel** (Perrin-Glorian, 1994), puisque elles obéissent, en partie, aux mêmes objectifs<sup>18</sup>.

En fait, comme les **phases des bilan**, les *discussions mathématiques* aussi permettent *la formulation publique et la diffusion des méthodes de résolution par les élèves ; elles permettent au maître de se tenir prêt à organiser une phase d'évaluation, au cas où la phase de validation ne présenterait pas les caractéristiques que doit revêtir, pour lui, une phase de conclusion* (Margolinas 1992).

De même, comme pour les **situations de rappel**, elles aussi remplissent *les fonctions de dévolution après-coup, donc, d'homogénéisation de la classe et de dépersonnalisation locale, de décontextualisation et d'ancrage des savoirs nouveaux dans les savoirs anciens avec l'institution de diverses relations* (Perrin- Glorian, 1994)

Ainsi, nous nous attendons à que une modélisation des *discussions mathématiques* en termes de phases de conclusion, avec la distinction entre **évaluation** et **validation** (Margolinas, 2004) puisse apporter des éléments de compréhension majeure mêmes de dynamiques de fonctionnement propres aux *discussions mathématiques*.

Cependant, il faut à nouveau souligner que cette mise en parallèle est seulement partielle et ne tient pas compte de toute la complexité des *discussions mathématiques*. En fait, à la différence des phases de conclusions, les *discussions mathématiques* sont explicitement centrées sur la production, la transformation et l'internalisation de signes (et signifiés) spécifiques. Pour les analyser, il faudra donc imaginer de recourir aussi à d'autres outils, issus d'autres cadres théoriques.

#### 4.5. Le contrat didactique

D'une part, nous avons vu que, dans une « bonne situation problématique » l'enseignant va chercher à créer les conditions pour que les élèves construisent leur rapport à l'objet de connaissance ou modifient ce rapport comme réponse aux exigences du milieu et non aux attentes de l'enseignant lui-même. Une telle situation, comme le dit Bessot (2003), est :

[...] une situation dans laquelle ce qu'on fait a un caractère de nécessité par rapport à des obligations qui ne sont ni arbitraires, ni didactiques, mais de l'ordre du savoir. Il faut que l'enseignant parvienne à ce que l'élève enlève de la situation les présupposés didactiques, que la résolution du problème devienne pour l'élève indépendante du désir de l'enseignant : la dévolution que cherche à faire l'enseignant pour que l'élève apprenne est donc celle d'une situation non didactique.

D'autre part,

Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (*situation didactique*), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. [Brousseau, 1980].

Les contraintes et les obligations, auxquelles l'enseignant et les élèves doivent répondre, jouent donc un rôle crucial dans la situation didactique. Ce que chacun a le

---

<sup>18</sup> « Phases », « situations » son les termes utilisés par leurs auteurs. Il se peut qu'actuellement, ces mêmes termes ne soient pas employées de la même façon : le terme « situation » renvoyant précisément à la théorie des situations, le terme « phase » rendant compte soit, d'un fonctionnement non organisé au préalable, soit d'un moment didactique non organisé en termes de la Théorie des Situation.

droit de faire ou de ne pas faire à propos d'un savoir repose sur un ensemble de règles explicites mais surtout implicites. G. Brousseau a appelé *contrat didactique* l'ensemble de ces règles qui partage et limite les responsabilités de chacun, élèves et professeur, vis à vis d'un savoir mathématique enseigné.

Bessot (2003) rappelle que :

au cours de l'enseignement d'un savoir, les règles de communication, entre les élèves et l'enseignant, à propos d'objets de savoir, s'établissent, changent, se rompent et se renouent au fur et à mesure des acquisitions, de leur évolution et de l'histoire produite. Ces règles ne se présentent pas sous une forme unique et figée dans le temps, mais au contraire sont le fruit d'une négociation toujours renouvelée.

D'une part, les interactions entre l'enseignant et les élèves obéissent à des règles provisoirement stables et d'autre part celles-ci ne sont pas immuables :

Cette négociation produit une sorte de jeu dont les règles provisoirement stables permettent aux protagonistes et notamment à l'élève de prendre des décisions dans une certaine sécurité, nécessaire pour lui assurer l'indépendance caractéristique de l'appropriation. [Brousseau, 1986]

Ce processus de négociation est soumis à un certain nombre de paradoxes. Par exemple, Bessot (2003) rappelle que l'enseignant n'a pas le droit de dire à l'élève ce qu'il veut que l'élève fasse, (sinon il ne joue pas son rôle d'enseignant) et pourtant il faut qu'il fasse en sorte que l'élève produise la réponse attendue (sinon il n'a pas réussi son enseignement).

Parallèlement, si l'élève accepte que l'enseignant lui enseigne les résultats, il n'aura pas les établis lui-même et donc il n'aura pas appris. Si, au contraire, il refuse toute information de la part de l'enseignant, il rompra la relation didactique.

Brousseau a caractérisé différents procédés de négociation pour obtenir des élèves la réponse attendue. L'effet Topaze<sup>19</sup> est l'une de ces formes. Comme l'explique Bessot (2003), au début l'enseignant essaie de faire en sorte que le sens de la réponse attendu soit le plus riche possible. En cas d'échec, il ajoute des informations réductrices du sens, jusqu'à introduire des conditions qui provoquent la réponse de l'élève sans que ce dernier ait pu investir le moindre sens.

Dans sa déclinaison plus radicale, l'effet Topaze conduit à une évacuation totale du sens de l'objet de l'apprentissage. Cependant, dans certains cas, nous montrerons que, lors par exemple de DCs, le recours à des Effets Topaze permettra à l'enseignant de greffer un signifié mathématique sur un signe ayant déjà un signifié dans le langage courant. Pour ainsi faire l'enseignant restreindra les conditions de production de la réponse en diminuant l'incertitude de l'élève, jusqu'à obtenir la réponse attendue des élèves. Cependant la signification de cette réponse, en partie « imposée » aux élèves et donc potentiellement limitée, sera opérationnelle pour le développement à venir du signe mathématique associé. Par exemple, au cours de la première discussion collective, nous verrons que l'enseignant, après avoir introduit une première définition des variables indépendantes, obtiendra, en jouant sur les mots « dépendante » / « dépendre », que les élèves fassent le lien avec les variables dépendantes. Cet effet Topaze, loin d'avoir seulement une signification négative, permettra d'ancrer le signifié de « dépendance logique » sur celui de dépendance causale.

La notion de contrat didactique se révèle importante non seulement du point de vue de la régulation de la situation didactique. L'ensemble de règles et des attentes

---

<sup>19</sup> En référence à la pièce de théâtre « Topaze » de l'écrivain Marcel Pagnol dans lequel un enseignant rajoute de plus en plus d'informations pour que l'élève ne fasse pas d'erreurs d'orthographe jusqu'à la caricature : « des moutonsses étai-hunt réunisse... » (Bessot, 2003).

réciroques, en fait, conditionne la signification à attribuer au problème (puisque il permet la négociation du sens des activités en jeu) et, finalement, constitue pour l'enseignant un des moyens de gestion des processus de dévolution et d'institutionnalisation.

Elle est centrale aussi du point de vue de l'apprentissage : tout enseignement d'un nouvel objet de savoir provoque, en fait, des ruptures de contrat par rapport à des objets de savoir anciens et la re-négociation de nouveaux contrats.

Ainsi, nous faisons l'hypothèse que, même dans le cas de situations non nécessairement adidactiques, comme c'est le cas pour notre séquence expérimentale, afin que le processus de MS puisse se mettre en place et fonctionner convenablement, il sera nécessaire l'établissement d'un contrat didactique spécifique. En effet, cette thèse se pose, entre autre, comme objectif celui de dégager certaines de ces règles. Une telle identification devra fournir des éléments de viabilité et de reproductibilité de ce processus.

#### 4.6. Deuxième bilan intermédiaire

Nous avons vu comme dans la TMS, le problème centrale est celui d'élaborer des activités susceptibles d'intervenir dans la ZDP des élèves pour permettre la fabrication de certains signes et l'émergence et l'évolution des certaines signifiés.

Au sein de la TMS, nous avons aussi pu identifier des critères de construction de ces activités, tout particulièrement liés à favoriser une certaine mise en scène sociale et à l'usage de certains artefacts. A partir de la TdS, nous en avons retenus d'autres, comme celui du rôle d'un milieu problématique, de la nécessité de la prise en compte d'un processus de dévolution et de l'organisation de validations par le milieu.

Nous avons aussi observé comme la TdS peut fournir des éléments, non seulement de construction d'une ingénierie didactique, mais aussi de modélisation *a posteriori* d'un processus d'enseignement-apprentissage non expressément organisé pour constituer un milieu adidactique. Ceci est justement le cas de cette thèse où nous visons organiser un processus de médiation sémiotique à partir d'un artefact et orchestrée par l'enseignant lors des *discussions mathématiques*.

Finalement, nous nous attendons à que le recours à ces deux cadres théoriques, même si leur position réciproque n'est pas symétrique, puisse permettre d'interpréter de deux points de vue le fonctionnement de l'artefact (et comme composante fondamentale d'un milieu source de rétroactions, et comme Instrument de Médiation Sémiotique). Ce regard double pourra conduire à une analyse plus fine de la manière de l'impliquer dans la fabrication de la séquence expérimentale.

Au sein de ce double cadre théorique, notre thèse se pose aussi l'objectif de dégager des éléments de modélisation du processus d'élaboration et de transformation de ces signes.

Cependant, ces cadres théoriques, ne nous semblent pas fournir des caractères définitoires des signes suffisamment détaillés. En fait, même la TMS, à la suite de Vygotsky, met en valeur les relations étroites, mutuellement vitales et constitutives, pour tout processus psychologique supérieurs, des signes avec les artefacts mais ne donne pas des outils très fins d'analyse.

Or, s'agissant de concevoir et interpréter des séquences d'enseignement-apprentissage assez longues, probablement ce niveau de détail n'a pas été, jusqu'à maintenant, suffisamment développé car il n'était pas le plus adapté pour répondre aux objectifs fixés. Même pour nous, il s'est posé le problème de devoir décider si et comment gérer ces différents niveaux de granularité. Dans la deuxième partie de notre étude, nous verrons que nous avons résolu la question par une analyse à deux niveaux : un niveau macro, en nous centrant sur une présentation assez large de la

séquence expérimentale, et au niveau micro en décidant de prendre en compte seulement deux discussions collectives.

Pour le niveau micro, nous avons donc ressenti la nécessité, d'un point de vue essentiellement méthodologique, de nous doter d'autres outils d'analyse. Nous avons interrogé les recherches en sémiotique pour voir si des outils de réponse pouvaient venir, en particulier par les travaux de Peirce. Etant donné sa tractation assez minutieuse et riche, nous y avons recherché les éléments mieux se prêtant à cet objectif. En même temps, nous avons essayé de ne pas dénaturer l'idée de signe contenue dans les travaux de Vygotsky.

Ainsi, nous avons élaboré une sorte d'intégration, de « prolongement par continuité » possible. Celle-ci ne signifie surtout pas la prétention d'un complètement au niveau théorique du cadre proposé par le psychologue russe. Au contraire, au cours de ce bref excursus sur Peirce, nous verrons que des éléments dérivés de sa théorie sémiotique se prêteront à bien décrire certains aspects du processus de MS, sans pourtant pouvoir être considérés totalement consistants avec les hypothèses fondant l'œuvre de Vygotsky.

Il sera alors comme si l'on aura à disposition plusieurs loups ou microscopes, permettant, là où il sera nécessaire, de descendre à un niveau différent pour d'observer des phénomènes particuliers.

Le recours à la sémiotique peircienne, qui, d'ailleurs ne constitue pas notre champ de recherche, servira aussi pour avoir une aperçue, même très limitée, des multiples implications théoriques qui résident derrière une tractation spécifiquement centrée sur le signe.

## **5. Deuxième intégration : quelques éléments de sémiotique peircienne**

Les thèmes du signe et de la signification ont parcouru longuement, de manière tangente ou centrale, la réflexion philosophique occidentale. Ils ont été ainsi au cœur de nombreuses recherches, non seulement en linguistiques ou en philosophie du langage, mais aussi en épistémologie. La description de cet impact dépasse largement les objectifs de cette thèse. Nous nous limiterons donc, à prendre brièvement en compte, seulement, le point de vue de Charles Sanders Peirce, considéré avec Saussure, un des fondateurs de la sémiotique moderne.

Ce choix ne signifie surtout pas la mise en deuxième plan d'autres auteurs qui, seulement dans le siècle passé (Saussure, Frege, Husserl, Wittgenstein, etc.), en approchant le problème d'un point de vue soit linguistique soit épistémologique, ont également contribué à ce type de réflexions et exercent, encore aujourd'hui, une influence très forte même dans les champs de la didactique des mathématiques.

Notre synthèse reprend essentiellement les travaux de Everaert-Desmedt (1990). Elle s'appuie également sur les recherches de Marty (1990, 1992, 1996) et Deledalle (Peirce, 1978). Où il sera possible, nous essayerons de souligner des liens éventuels qu'il nous semble d'avoir pu trouver entre l'approche de Peirce et celui de Vygotsky. Nous sommes bien conscients qu'il s'agit d'une opération assez délicate et insidieuse qui nécessiterait d'une étude à part et d'outils théoriques qui dépassent largement cette thèse. Notre mise en parallèle entre la position de Peirce et celle de Vygotsky méritera, donc, à plein droit, le conditionnel et une certaine dose de bienveillance. Nous chercherons aussi à expliciter notre propre façon d'interpréter ces liens dans le cas particulier de cette thèse.

### 5.1.1. Trois principes généraux

Pour C. S. Peirce (1839-1914), fondateur en particulier de la tradition anglo-saxonne, la sémiotique est la « *doctrine quasi nécessaire ou formelle des signes* » et « *la logique, dans son sens général, n'est qu'un autre nom de la sémiotique* ». (Marty, 1992)

Il a élaboré une théorie sémiotique à la fois **générale**, **triadique** et **pragmatique** :

- **générale** car elle envisage à la fois la vie émotionnelle, pratique et intellectuelle, prend en compte toutes les composantes de la sémiotique et généralise la notion de signe. Ainsi, contrairement à Saussure, toute chose, tout phénomène, aussi complexe soit-il, peut être considéré comme signe dès qu'il entre dans un processus sémiotique.
- **triadique** car elle repose sur trois catégories philosophiques : la *priméité*, la *secondéité* et la *tiércéité* et met en relation trois termes, *le signe* ou *representamen*, *l'objet* et *l'interprétant* ;
- **pragmatique** car elle prend en considération le contexte de production et de réception des signes et définit le signe par son action sur l'interprète.

La généralité de la théorie peircienne c'est une des raisons qui nous ont amené à préférer cette approche à celle de Ferdinand Saussure. Pour ce dernier auteur, en fait, le signe est seulement le signe linguistique. En revanche pour Peirce tout ce qui est impliqué dans un processus sémiotique est signe. Cela nous permet de considérer et traiter comme signes aussi les outils et de pouvoir ainsi maintenir une compatibilité avec l'approche Vygotskyenne, qui, dans cette thèse est prioritaire. L'intégration par des éléments de la théorie peircienne permet donc de garder à l'esprit le point de vue Vygotskyen en nous douant, du point de vue méthodologique, d'outils plus fins d'analyse.

### 5.1.2. Les catégories à la base de la sémiotique peircienne

Selon Peirce, trois catégories sont nécessaires et suffisantes pour rendre compte de toute l'expérience humaine : elles sont désignées comme *priméité*, *secondéité* et *tiércéité* (*firstness*, *secondness*, *thirdness*).

La *priméité* est une conception de l'être indépendamment de toute autre chose. Everaert-Desmedt (1990), l'explique ainsi :

[...] ce serait, par exemple, le mode d'être d'une « rougeté » avant que quelque chose dans l'univers fût rouge ; ou une impression générale de peine, avant qu'on ne se demande si cette impression provient d'un mal à la tête, d'une brûlure ou d'une douleur morale. [Everaert-Desmedt, 1990]

Une qualité est une pure potentialité abstraite, elle est de l'ordre du possible, elle est vécue dans une sorte d'instant intemporel et correspond à la vie émotionnelle.

La *secondéité* est la conception de l'être relatif à quelque chose d'autre. C'est la catégorie de l'individuel, de l'expérience, du fait, de l'existence, de l'action- réaction.

A ce propos, Everaert-Desmedt (1990), évoque comme exemples, la pierre qu'on lâche tomber sur le sol ; la girouette qui s'oriente en fonction de la direction du vent ; une douleur éprouvée à un instant donné, à cause d'un mal de dents :

La *secondéité* s'inscrit dans un temps discontinu, où s'impose la dimension du passé : tel fait a lieu à tel moment, avant tel autre, qui en est la conséquence. La *secondéité* correspond à la vie pratique. [Everaert-Desmedt, 1990]

La *tiércéité* est la médiation par laquelle un premier et un second sont mis en relation. La *tiércéité* est le régime de la règle, de la loi ; mais une loi ne se manifeste

qu'à travers des faits qui l'appliquent, donc dans la secondéité ; et ces faits eux-mêmes actualisent des qualités, donc de la priméité.

Tandis que la secondéité est une catégorie de l'individuel, la tiercéité et la priméité sont des catégories du général ; mais la généralité de la priméité est de l'ordre du possible, et celle de la tiercéité est de l'ordre du nécessaire et, par conséquent, de la prédiction. La loi de la pesanteur, par exemple, nous permet de prédire que chaque fois que nous lâcherons une pomme, elle tombera sur le sol. Everaert-Desmedt (1990) ajoute :

La tiercéité est la catégorie de la pensée, du langage, de la représentation, du processus sémiotique ; elle permet la communication sociale et correspond à la vie intellectuelle. [Everaert-Desmedt, 1990]

### 5.1.3. Les caractéristiques du signe peircien

Pour Peirce, toute pensée s'effectue à l'aide de signes. Marty (1996) a pu relever dans les manuscrits de cet auteur au moins 76 textes plus ou moins définitoires du signe<sup>20</sup>. Nous en rappelons ici quelques-unes des plus courantes :

Un signe est quelque chose qui représente une autre chose pour un esprit. Pour son existence comme tel trois choses sont requises. En premier lieu, il doit avoir des caractères qui nous permettront de le distinguer des autres objets. En second lieu, il doit être affecté d'une façon ou d'une autre par l'objet qui est signifié ou au moins quelque chose le concernant doit varier comme conséquence d'une cause réelle avec quelque variation de son objet. [Peirce, 1873 - MS 380, cité par Marty, 1996].

Un signe, ou *representamen*, est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe tient lieu de quelque chose : son objet. Il tient lieu de cet objet, non sous tous rapports, mais par référence à une sorte d'idée que j'ai appelée quelquefois le fondement du *representamen*. [Peirce, 1897 - C.P. 2-228, cité par Marty, 1996].

[...] La médiation authentique est le caractère d'un signe. Un *signe* est toute chose qui est reliée à une Seconde chose, son *Objet*, eu égard à une Qualité, de telle manière qu'il amène une Troisième chose, son *Interprétant*, en relation avec le même *Objet*, et de telle manière qu'il amène un Quatrième en relation avec cet *Objet* dans la même forme, *ad infinitum*. Si la série est arrêtée, le *Signe*, pour le moins, se retrouve dépourvu du caractère signifiant parfait. Il n'est pas nécessaire que l'interprétant doive effectivement exister Un être *in futuro* suffira [...] [Peirce, 1902 - C.P. 2.92, cité par Marty, 1996].

Un signe ou *representamen* est un *Premier* qui est dans une relation *triadique* si authentique avec un *Second* appelé son *objet* qu'il peut déterminer un *troisième*, appelé son *interprétant*, à être dans la même relation triadique avec son objet que celle dans laquelle il est lui-même avec ce même objet. Cette relation triadique est authentique, c'est-à-dire que ces trois membres sont liés ensemble par elle de telle façon qu'elle ne se ramène pas à un quelconque complexe de relations dyadiques [...]. [Peirce, 1902 - C.P. 2-274, cité par Marty, 1996].

---

<sup>20</sup> Comme le souligne aussi Marty (1996), les écrits sémiotiques de Peirce sont aussi foisonnants que fragmentaires. Il n'a pas laissé de synthèse résumant l'état définitif de sa doctrine On ne peut qu'essayer d'extraire, de ses esquisses successives à la terminologie sophistiquée, une sorte d'invariant.



Ainsi, le *triangle sémiotique* de Peirce représente dans sa dynamique une relation irréductiblement triadique qui relie un *Signe S* ou *Représentamen*, son *Objet O* et un second *Signe I*, déterminé par le premier, un signe *Interprétant*, c'est-à-dire plus développé (synonyme, paraphrase, traduction, commentaire, glose, etc.).

Marty (1996) résume ce qui précède par le schéma suivant (Figure 1.2) :

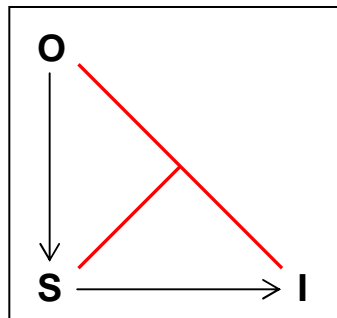



Figure 1.2 - Schéma donné par Marty (1996) relatif au triangle sémiotique peircien

Les flèches noires représentent les deux déterminations successives du signe **S** par l'objet **O** et de l'interprétant **I** par le signe **S** de façon que **I** soit déterminé par **O** à travers **S**.

En revanche, le signe rouge est une relation  triadique liant **S**, **O** et **I**.

Le *representamen* ou signe est une chose qui représente une autre chose : son objet. Avant d'être interprété, le representamen est une pure potentialité : un premier. L'*objet* est ce que le signe représente. Le signe ne peut que représenter l'objet, il ne peut pas le faire connaître ; il peut exprimer quelque chose à propos de l'objet, à condition que cet objet soit déjà connu de l'interprète, par expérience collatérale (expérience formée par d'autres signes, toujours antécédents). Par exemple, un morceau de papier rouge, considéré comme échantillon (= representamen) d'un pot de peinture (= objet), n'indique que la couleur rouge de cet objet, l'objet étant supposé connu sous tous ses autres aspects (conditionnement, matière, usage, etc.). Le morceau de papier exprime que le pot de peinture est de couleur rouge, mais il ne dit rien des autres aspects de l'objet. Si l'interprète sait, par ailleurs, qu'il s'agit d'un pot de peinture, alors - alors seulement - l'échantillon lui donne l'information que le pot de peinture en question doit être de couleur rouge. Plus précisément, Peirce distingue l'*objet dynamique* (l'objet tel qu'il est dans la réalité) et l'*objet immédiat* (l'objet tel que le signe le représente). Dans notre exemple, le pot de peinture est l'objet dynamique, et la couleur rouge (du pot de peinture) est l'objet immédiat.

Comme Peirce, Vygotsky aussi parle d'objet. Il nous semble que, dans les deux cas, il s'agit de « ce auquel le signe fait référence », autrement dit du référent.

Pour Peirce, l'objet n'est jamais accessible directement, mais seulement par la médiation d'un signe. Dans Vygotsky, au contraire, cet aspect n'est pas explicitement développé. Quand Vygotsky trace les différences entre concepts spontanés et scientifiques, il souligne que ce sont ces derniers concepts à avoir un rapport médiatisé à l'objet. En revanche, il semblerait que les concepts spontanés entraînent

un rapport direct à l'objet. Cette position marquerait donc une différence avec Peirce<sup>21</sup>.

Le *representamen*, pris en considération par un interprète, a le pouvoir de déclencher un interprétant, qui est un *representamen* à son tour et qui renvoie, par l'intermédiaire d'un autre interprétant, au même objet que le premier *representamen*, permettant ainsi à ce premier de renvoyer à l'objet. Et ainsi de suite, à l'infini. Par exemple, la définition d'un mot dans le dictionnaire est un interprétant de ce mot, parce que la définition renvoie à l'objet (= ce que représente ce mot) et permet donc au *representamen* (= le mot) de renvoyer à cet objet. Mais la définition elle-même, pour être comprise, nécessite une série ou, plus exactement, un faisceau d'autres interprétants (d'autres définitions)... Ainsi, le processus sémiotique est, théoriquement, illimité. Pour Peirce nous sommes engagés dans un processus de pensée, toujours inachevé, et toujours déjà commencé.

Pour continuer notre parallèle entre Vygotsky et Peirce, donc, quand le premier parle de signification/signifié, puisque il se réfère à ce qui est suscité dans l'esprit de l'interprète par le signe, il nous semble de pouvoir lui relier la notion peircienne d'Interprétant. Bien sûr ces deux concepts sont très différents et il s'agit seulement d'un possible point de jonction. Cependant, cette compatibilité minimale, nous autorise à traiter les deux cadres théoriques, séparément, mais dans une perspective commune.

Un signe pour Peirce est par essence fait pour être interprété ; toute émission de signes est un dialogue au moins virtuel.

En outre il affirme que *la médiation authentique est le caractère d'un signe*. (Peirce 1902, C.P. 2.92, cité par Marty, 1996).

Ces deux considérations dernières constituent deux autres raisons que nous conduisent à considérer l'approche peircienne compatible avec l'approche Vygotskyenne.

#### 5.1.4. Le processus de sémiosis ou sémiotique : triadique et illimité

Le processus sémiotique est un processus qui se déroule dans l'esprit de l'interprète : il débute avec la perception du signe et il se termine avec la présence à son esprit de l'objet du signe. C'est un processus triadique (entre un signe ou *representamen*, un objet et un interprétant) est théoriquement **illimité**.

Dans la pratique, cependant, il est limité, court-circuité par l'habitude, que Peirce appelle *l'interprétant logique final*. Il s'agit de l'habitude que nous avons d'attribuer telle signification à tel signe dans tel contexte qui nous est familier. L'habitude fige provisoirement le renvoi infini d'un signe à d'autres signes, c'est-à-dire *son caractère signifiant parfait*, permettant à des interlocuteurs de se mettre rapidement d'accord sur la réalité dans un contexte donné de communication. Mais l'habitude résulte de l'action de signes antérieurs. Ce sont les signes qui provoquent le renforcement ou la modification des habitudes.

Ce caractère illimité du processus de sémiosis peircien nous rappelle le développement continu auquel est soumise, pour Vygotsky, la formation d'un

---

<sup>21</sup> Cependant, ces deux positions ne sont pas (peut-être) autant distantes que ça. En fait, pour Peirce, la sensation même, produite par l'appréhension d'un objet sur le sujet, est un signe, ce qui pourrait correspondre au niveau « direct » d'accès à l'objet, représenté, dans Vygotsky, par le cas des concepts quotidiens. En adoptant donc la perspective peircienne, ce qui changerait dans le cas des concepts quotidiens, à l'égard des concepts scientifiques, serait le type de médiation offerte, c'est-à-dire le type d'interprétants impliqués. Il s'agit d'une question qui reste ouverte et qui mériterait un approfondissement dont nous n'avons pas, au moment actuel, les outils suffisant de y répondre.

concept<sup>22</sup>. Dans Peirce comme dans Vygotsky, alors, le processus de sémiotique est un processus toujours en évolution, avec des zones de stabilité temporaire. La contraposition Vygotskyenne entre sens et signifié rend bien l'idée de ce processus à double facettes. D'une part Vygotsky parle d'une évolution vers un signifié stabilisé, d'autre part il rappelle l'ensemble de sens fluctuants, dynamiques et finalement inépuisables associés à cet signifié (cf. Chapitre 1, §3.4.1). Bien évidemment, à nouveau les points de vue des deux auteurs ne sont pas les mêmes. Vygotsky adopte une perspective psychologique : le développement du signifié correspond au développement de la signification d'un mot, et, du point de vue cognitif à la formation des concepts. Peirce, au contraire, aborde la question d'un point de vue pragmatique : ce qu'il appelle *Interprétant logique final* est un « effet mental », un changement « *d'habitus* » (c'est-à-dire de comportement) qui a perdu son caractère de signe. Cependant, quand Vygotsky parle de signification/signifié stable, il nous semble de pouvoir lui relier cette notion peircienne d'*Interprétant logique, éventuellement final*.<sup>23</sup>.

### 5.1.5. Autres caractéristiques du processus de sémiotique : inférence et croissance en complexité

Le processus de sémiotique est un processus **inférentiel** puisque l'objet du signe est à reconstituer à partir du *représentamen* donné. Pour l'expliquer Marty (1992) utilise une métaphore, celle de la « molécule phénoménologique » :

La base de notre modélisation consiste dans l'idée selon laquelle une partie de la « molécule phénoménologique » de l'objet se retrouve dans la « molécule » du signe et que c'est en cela que consiste leur connexion ». Cela peut être une très petite partie de la forme de l'objet qui est ainsi communiqué, une partie qui peut être réduite à une seule qualité de sentiment (c'est le cas par exemple d'une tâche de peinture accidentelle sur un vêtement dont on se demande de quel objet elle peut provenir). Au terme du processus d'interprétation c'est un objet nettement plus complexe qui est présent à l'esprit ; sa « molécule » incorpore la partie qui a été communiquée. Le processus de la signification consiste alors à reconstituer la molécule de l'objet qui est (ou a été) connectée à celle du signe à partir de l'un de ses fragments. Il s'agit d'une sorte d'enquête dont nous sommes le plus souvent inconscients dans la vie quotidienne car sa répétition à tout instant a créé en nous des habitudes d'interprétation quasiment instantanées [Marty, 1992].

Cette « enquête sur l'objet », dont nous parle Marty, amène à une autre des caractéristiques saillantes du processus de sémiotique, sa **croissance en complexité** :

Tout signe étant un objet d'expérience, la perception de ses différents éléments bénéficie de l'évidence du perçu. Au départ du processus l'interprète est donc assuré de la réalité de la représentation. Tout le processus inférentiel qui suit consistera à produire une série de signes plus développés. L'objet du signe devient alors un sujet d'enquête. Les arguments mis en oeuvre doivent à chaque pas assurer le passage d'une représentation réelle à une autre représentation réelle d'un objet qui n'est pas encore déterminé. Ils sont donc nécessairement tenus pour valides par l'interprète du signe, même si leur validité ne peut être prouvée ou si leur probabilité ne peut être évaluée. La règle est celle de la croissance en complexité de la représentation puisqu'il faut

---

<sup>22</sup> Rappelons que formation d'un concept correspond pour Vygotsky à l'élaboration de la signification d'un mot.

<sup>23</sup> En réalité Peirce propose des classifications différentes de *l'Interprétant* : *l'Interprétant Immédiat*, *l'Interprétant Dynamique*, *l'Interprétant Signifié* ou *Normal* (qui correspond à l'effet qui serait produit sur l'esprit par le Signe après un développement suffisant de la pensée), défini dans un deuxième temps *Interprétant Logique*, et, en fin, *l'Interprétant Logique Final*. Peut-être ce qui correspond le mieux à l'idée vygotkienne de signifié, c'est donc, plutôt que *l'Interprétant Logique final*, *l'Interprétant Signifié* ou *Logique* tout court.

passer d'une représentation partielle de la « molécule phénoménologique » à sa représentation totale qui seule produira la présence à l'esprit de l'interprète de l'objet du signe.

Cependant à chaque pas la nouvelle représentation est corrélative de la présence à l'esprit d'un certain objet fugace, incomplet et provisoire et c'est la convergence de ces objets vers un objet stable qui seule peut indiquer que l'enquête a atteint son but. La règle est donc que l'enquête s'arrête lorsque aucune inférence possible ne transforme la représentation à un certain stade de son développement et que c'est l'objet construit à cet instant qui est tenu pour l'objet du signe. Il est clair que cet objet peut ne pas être celui que a déterminé le signe et que la description des processus sémiotiques ouvre aussi à celle des difficultés de la communication. Elle fait éclater la dissymétrie entre *production* et *interprétation* : la première est un choix de représentation, la seconde est une enquête sur ce choix [Marty, 1992].

Ces deux caractéristiques nous semblent très intéressantes et, à nouveau, en quelque sorte, compatibles, avec la notion de signe Vygotskien.

Elles sont intéressantes car mettent en évidence un aspect fondamental de notre étude : le fait que l'objet est lui aussi à (re)constituer, c'est à dire qu'il n'existe pas, déjà dans la conscience des élèves mais qu'il se construit, par un processus de sémiosis continu, en même temps qu'il se développe et se complexifie la série des représentations/interprétants associés. Nous verrons en particulier s'installer ce type de dynamique lors de l'analyse des DC.

Elles sont compatibles avec le point de vue Vygotskyen car dans le processus de constitution d'un signe, c'est-à-dire dans le processus d'internalisation, nous y retrouvons aussi un procédé en quelque sorte inférentiel constitué par toute une longue série d'événements développementaux et de transformations qui amènent à des changements dans l'activité du sujet et à une incorporation au niveau intellectuel, d'un signe dans un nouveau système, avec ses propres lois.

Cependant le processus de sémiosis dont Peirce parle, diffère profondément du processus d'internalisation Vygotskyen. En fait, Peirce n'explique pas comment pour un interprète potentiel<sup>24</sup>, le représentamen a le pouvoir de déclencher un interprétant, qui est, à son tour, par l'intermédiaire d'un autre interprétant, capable de renvoyer au même objet que le premier représentamen. Peirce ne parle pas finalement des dynamiques psychologiques et socio-culturelles pour lesquelles un signe se constitue comme tel pour un interprète potentiel. Finalement les notions d'internalisation et de la primauté du plan inter- subjectif sont absentes. Ici nous pouvons donc identifier un apport fondamental de la théorie élaboré par Vygotsky et, par rapport à Peirce, une différence discriminante.

Peirce parle exclusivement de production/ interprétation d'un signe. Ainsi même si Marty, en commentant ces processus, observe que, quelque part, ils sont liés à une dimension socio-culturelle, puisque « la production est une interprétation anticipée incorporée dans une configuration d'existants », cette question n'est pas du tout développée :

Ce qu'il faut remarquer avant toute chose c'est que toute production est en quelque sorte une interprétation *a priori* effectuée dans le temps même de la production. [...] En d'autres termes la production est un processus d'incorporation d'une pensée dans une configuration d'existants qui se passe tout entier sous la dépendance d'une interprétation anticipée par rapport à laquelle le producteur redevient un interprète comme un autre et à ce titre, participe à un processus collectif d'interprétation que nous décrivons comme une institution sociale [Marty, 1992].

Il s'agit d'une différence d'ordre épistémologique.

<sup>24</sup> C'est-à-dire, pour un sujet auquel potentiellement s'adresse la production d'un signe.

Radford (à paraître), en citant Smith (1983) souligne bien cette position peircienne :

« Despite the emphasis on practice, Peirce's pragmatism « is quite rationalist », and so his concept of meaning » [Smith, 1983, pg. 49 cité par Radford, à paraître ]

En fait il explique que, dans l'approche peircienne :

The individual remains an abstract construct and his subjectivity takes shape in his reaction to the non-Ego. . Man, for Peirce, is a natural entity carried out, as Nature itself, by the laws of evolution. Man is not a cultural historical product and neither is his knowledge of the world. Human reality appears as something abstract directed at most by a logicized community. [Radford, à paraître]

Dans sa sémiotique, Peirce semble modéliser la relation sujet - signe, abstraction faite du contexte socio-culturel et historique où ces signes ont été élaborés. Cette deuxième dimension manquante est, en revanche, centrale dans une approche socio-culturelle et vygostkyenne. Elle est fondamentale aussi pour notre travail, où, en effet, comme nous l'avons vu, nous faisons l'hypothèse que l'internalisation d'activités socialement enracinées et historiquement développées est la caractéristique distinctive de la psychologie humaine (Vygotsky, 1931/1978).

Cela explique pourquoi nous avons, dès le début, affirmé que notre recours à Peirce n'était pas une tentative d'intégrer les deux cadres théoriques mais répondait seulement à l'exigence de nous doter d'autres outils, plus fins, d'analyse des signes. De ce point de vue, il s'agira de gérer différents niveaux d'analyse : nous pourrons rester au niveau de la tractation de Vygotsky, mais aussi, dès que l'on aura besoin, nous pourrons descendre à un niveau plus fine, en adoptant la terminologie de Peirce pour décrire le développement des signes.

### 5.1.6. Une articulation trichotomique

Chacun des trois termes du processus sémiotique se subdivise à son tour selon les trois catégories. Peirce distingue, donc, la *priméité*, la *secondéité* et la *tiércéité* dans le *representamen*, dans le mode de renvoi du *representamen* à l'*objet*, et dans la façon dont l'*interprétant* opère la relation entre le *representamen* et l'*objet*.

Nous aborderons ici seulement la trichotomie de l'*objet*, puisque c'est surtout cette distinction que nous utiliserons dans notre étude. En annexe (Annexe 2), on pourra trouver un complètement se référant à la trichotomie du *representament* et à celle de l'*interprétant*.

#### 5.1.6.1. La trichotomie de l'objet

Un *representamen* peut renvoyer à son *objet* selon la *priméité*, la *secondéité* ou la *tiércéité*, c'est-à-dire par un rapport de similarité, de contiguïté contextuelle ou de loi. Suivant cette trichotomie, le signe est appelé respectivement :

- une *icône* (*priméité*),
- un *indice* (*secondéité*),
- un *symbole* (*tiércéité*).

En reprenant des extraits de C. S. Peirce, traduits et commentés par Gérard Deledalle (Peirce, 1978) :

(2.247) Une *icône* est un signe qui réfère à l'objet qu'il dénote principalement grâce à des caractères qui sont propres à cet objet, et que ce signe possède, exactement de la même façon, qu'un tel objet existe réellement ou non.


(2.247 suite) Une *icône* est un signe qui renvoie à l'objet qu'il dénote simplement en vertu des caractères qu'il possède, que cet objet existe réellement ou non. Il est vrai que si cet objet n'existe

vraiment pas, l'icône n'agit pas comme signe; mais cela n'a rien à voir avec son caractère de signe. N'importe quoi, qualité, individu existant ou loi, est l'icône de quelque chose, pourvu qu'il ressemble à cette chose et soit utilisé comme signe de cette chose.

(2.304) [...] Une *icône* est un signe qui posséderait le caractère qui le rend signifiant, même si son objet n'existait pas. Exemple : un trait au crayon représentant une ligne géométrique. [Peirce, 1978].

Un signe renvoie donc à son objet de *façon iconique* lorsqu'il ressemble à son objet. Selon les catégories trichotomiques du *representamen*, présentées en annexe, le *representamen* d'une icône peut être un *qualisigne*, un *sinsigne* ou un *légisigne* (c'est-à-dire une qualité qui fonctionne comme signe (qualisigne, priméité) ; une chose ou un événement spatio - temporellement déterminé qui fonctionne comme signe (sinsigne, secondéité) ; un signe conventionnel (légisigne, tiercéité). Par exemple, la sensation (qualisigne) produite par le déplacement à l'écran d'un point est l'icône de la variabilité de ce point. L'image fournie à l'écran d'un point (sinsigne) est l'icône de ce point.

Le dessin de deux traits l'un perpendiculaire à l'autre (sinsigne), est l'icône de deux droites données, l'une perpendiculaire à l'autre.

En revanche, ce signe  placé, par exemple, au sein d'une démonstration, entre deux lettres minuscules, il entre dans le codage symbolique de la géométrie et devient une réplique du légisigne qui signifie «perpendiculaire», en représentant icôniquement une espèce (les droites) du genre (perpendiculaires).

L'indice est ainsi défini :

(2.248) Un *indice* est un signe qui renvoie à l'objet qu'il dénote parce qu'il est réellement affecté par cet objet. Il ne peut donc pas être un qualisigne, puisque les qualités sont ce qu'elles sont indépendamment de toute autre chose. Dans la mesure où l'indice est affecté par l'objet, il a nécessairement quelque qualité en commun avec l'objet, et c'est eu égard aux qualités qu'il peut avoir en commun avec l'objet, qu'il renvoie à cet objet. Il implique<sup>25</sup> donc une sorte d'icône, bien que ce soit une icône d'un genre particulier, et ce n'est pas la simple ressemblance qu'il a avec l'objet, même à cet égard, qui en fait un signe, mais sa modification réelle par l'objet.

(2.304 suite )Un *indice* est un signe qui perdrait immédiatement le caractère qui en fait un signe si son objet était supprimé, mais ne perdrait pas ce caractère s'il n'y avait pas d'interprétant. Exemple : un moulage avec un trou de balle dedans comme signe d'un coup de feu ; car sans le coup de feu il n'y aurait pas eu de trou ; mais il y a un trou la, que quelqu'un ait l'idée de l'attribuer a un coup de feu ou non. [Peirce, 1978].

Un signe renvoie donc à son objet *de manière indicielle* lorsqu'il est réellement affecté par cet objet. Ainsi, dans Cabri, le déplacement indirect d'un point, à l'écran, par l'intermédiaire du déplacement d'un autre dont le premier est dépendant, est causé par la manière dont cela a été construit : il est donc l'indice de la construction géométrique sous-jacente. Ce même déplacement est aussi causé par la manière dont le logiciel a été conçu et par la manière dont l'utilisateur a bougé la souris : il est donc aussi l'indice du principe de construction dit « de manipulation directe » et du mouvement de la main de l'utilisateur.

Et enfin :

(2.304 suite ) Un *symbole* est un signe qui perdrait le caractère qui en fait un signe s'il n'y avait pas d'interprétant. Exemple : tout discours qui signifie ce qu'il signifie par le seul fait que l'on comprenne qu'il a cette signification.

<sup>25</sup> Au sens de comporter, Peirce dit : « involve ».

(2.249) Un *symbole* est un signe qui renvoie à l'objet qu'il dénote en vertu d'une loi, d'ordinaire une association d'idées générales, qui détermine l'interprétation du symbole par référence à cet objet. Il est donc lui-même un type général ou une loi, c'est-à-dire un legisigne. A ce titre, il agit par l'intermédiaire d'une réplique. Non seulement il est général lui-même, mais l'objet auquel il renvoie est d'une nature générale. Or ce qui est général a son être dans les cas particuliers qu'il détermine. Il doit donc y avoir des cas existants de ce que le symbole dénote, bien qu'il faille comprendre ici par « existant », existant dans l'univers, qui peut être imaginaire, auquel le symbole renvoie. Le symbole sera, indirectement, par l'association ou une autre loi, affecté par ces cas particuliers ; et par conséquent le symbole impliquera une sorte d'indice, bien que ce soit un indice d'un genre particulier. Il ne sera cependant absolument pas vrai que la faible action exercée par ces cas particuliers sur le symbole explique le caractère signifiant du symbole. [Peirce, 1978]

Un signe est donc un *symbole* lorsqu'il renvoie à son objet en vertu d'une loi. Le mot « fonction » ou le signe «  $f(x)$  » sont des symboles. La règle symbolique peut avoir été formulée *a priori*, par convention, ou s'être constituée *a posteriori*, par habitude culturelle<sup>26</sup>.

Dans les chapitres suivants, nous verrons que cette analyse en termes peirciens nous permettra de mieux décrire le fonctionnement de certains signes impliqués dans le processus de médiation sémiotique. D'une part, les caractéristiques d'une sémosis illimitée, inférentielle et croissante en complexité modélisent bien l'évolution du réseau sémiotique mis en place et développé, en particulier, par les *discussions mathématiques*. D'autre part, les distinctions introduites par Peirce, suivant la nature des *representamen* en jeu, permettent de distinguer entre des types différents de fonctionnement d'un même signe. Elles seront donc des outils d'analyse du processus de médiation sémiotique dans des discussions collectives.

## 6. Conclusions et premières questions

Comme déjà anticipé, notre recherche s'intéresse à étudier le processus de médiation sémiotique et son organisation didactique, dans le cadre de l'utilisation d'un artefact technologique. En particulier, nous avons choisi d'organiser et d'analyser ce processus, au sein du paradigme théorique et didactique, dit de Théorie de la Médiation Sémiotique, élaboré par Bartolini Bussi et Mariotti.

Par conséquent, nous avons d'abord, essayé d'explicitier les liens entre ce cadre théorique et le travail de Vygotsky auquel il s'inspire. Cela a amené à identifier, d'une part, nos **premières hypothèses de travail**, d'autre part, un certain nombre de critères de construction de la séquence expérimentale.

Nous pouvons résumer nos hypothèses de la manière suivante :

- I. la construction d'un signifié mathématique associée à un mot mathématique est possible, au début, par les élèves, grâce à la possibilité de se référer au même objet, dont l'enseignant parle. En effet, l'artefact, en fonctionnant comme outil de médiation sémiotique, garanti un appui extralinguistique par lequel commencer à discuter. D'autre part, l'objet en question, n'est pas un référent concret mais, lui-même, un référent en voie de construction.

---

<sup>26</sup> Le *representamen* d'un symbole est nécessairement un legisigne, mais celui-ci ne peut réellement agir qu'en se matérialisant dans une réplique, et le symbole implique dès lors un indice. Ainsi, en mathématiques, le « = » est, en général, un legisigne symbolique, mais chacune de ses répliques dans un contexte donné constitue un sinsigne indiciel

- II. Tout signe (mot, symbole mathématique, mais aussi outil psychologique) possède un caractère polysémique.
- III. Tout signe issu de la culture mathématique et originairement dépourvu de sens pour les élèves, peut acquérir, à l'issue d'interventions pédagogiques et sociales opportunes dans la zone du développement proximal, une signification stable et mathématiquement consistante. En particulier, même si au début ce signe aura une signification instable et immature, son *utilisation fonctionnelle* dans des tâches spécifiques, médiée par les interventions de l'enseignant et par l'interaction avec les autres élèves, permettra son évolution vers une signification compatible avec la signification qu'il possède déjà dans la communauté de référence.
- IV. Même en ne négligeant pas la spécificité de chaque type de signe, tout type de signe, que ce soit de type langagier, ou que ce soit issu de l'utilisation de certains outils, possède une nature commune (puisque il participe à l'activité médiée du sujet) et doit être traité dans une perspective commune.
- V. Tout signifié à construire est enraciné dans l'expérience phénoménologique, c'est-à-dire dans l'activité du sujet et dans les rétroactions du milieu dont l'artefact est une composante fondamentale. Cependant son évolution ne peut être obtenue que par des moyens de construction sociale de la connaissance en classe, sous la guide de l'enseignant.
- VI. Toute discussion collective pour se dire une « *discussion mathématique de construction de signifiés* » doit posséder comme caractéristique principale celle de permettre, d'une part, l'élaboration consciente et l'explicitation des signifiés mathématiques personnels, d'autre part, leur évolution vers les signifiés mathématiques culturels visés.

A partir de ces hypothèses de travail, notre étude vise, donc, à analyser, plus précisément, lors d'un processus d'enseignement - apprentissage quels sont l'apport respectif et l'articulation réciproque entre l'expérience phénoménologique dans l'artefact et l'action de l'enseignant. En particulier, nous nous sommes posées les questions suivantes : comment est-il possible d'exploiter le potentiel sémiotique des outils de l'artefact ? Comment mettre en place des conditions susceptibles d'obtenir leur *internalisation* ? Comment l'enseignant peut-elle choisir ou construire des tâches opportunes afin de permettre l'exploitation de ce potentiel sémiotique, surtout lors des moments de discussions collectives ? C'est-à-dire, comment peut-elle favoriser leur transformation en outils psychologiques, de la part des élèves ? Comment peut-elle s'appuyer sur ces outils et soutenir la construction des signifiés mathématiques visés ?

Et, en fin, quelles sont les conditions qui permettent à ces moments de se constituer et fonctionner comme « *discussions mathématiques de construction de signifiés* » ?

Afin de répondre aux questions citées ci-dessous, et, en général afin d'approfondir notre recherche, nous avons décidé d'étudier la mise en place de ce processus de médiation sémiotique et sa gestion par l'enseignant, dans le cas particulier d'une notion mathématique donnée. Ce pourquoi nous avons décidé d'adopter comme ingénierie didactique celle de la construction une séquence expérimentale opportune. Nous aurions pu nous rendre dans une classe ordinaire, impliquant l'utilisation d'un artefact, et observer s'il avait des processus de médiation mis en œuvre par l'enseignant, et comment ceux-là étaient organisés. Cependant, d'une part il aurait été difficile de trouver une classe dans la quelle les phénomènes liés à



la médiation sémiotique étaient suffisamment nombreux pour un étude riche. D'autre part, il nous semble que l'analyse des classes ordinaires nécessite au préalable d'avoir déjà un bagage suffisant de réalisations expérimentales explicitement conçues dans le cadre de la TMS. D'ailleurs, la TdS aussi en est devenue un outils d'analyse de classes ordinaires que après vingt ans de constructions d'ingénieries didactiques expérimentales. En outre, l'organisation de ce processus, au sein d'une séquence expérimentale spécifique, devrait nous permettre de mieux comprendre son fonctionnement. Comme le rappelle Artigue (1998) cela va se faire principalement par la prise en compte du décalage entre ce qui est prévu et ne se passe pas et *vice versa* :

L'anticipation de l'analyse a priori est là pour garantir la réalité du jeu scientifique joué et pour limiter les reconstructions et rationalisations a posteriori. Dans la confrontation aux attentes, l'accent est mis sur les décalages entre analyse a priori et a posteriori (phénomènes prévisibles qui ne se sont pas produits et phénomènes non prévus qui se sont produits) car c'est travers eux qu'en est testée indirectement la validité des hypothèses qui ont conduit à l'analyse a priori. [Artigue, 1998]

Ce pourquoi par l'analyse des l'œuvre de Vygotsky et des liens avec la TMS élaborée par Bartolini Bussi et Mariotti nous avons recherché à identifier aussi des critères généraux de construction de la séquence expérimentale.

Parmi ces critères, rappelons :

- la nécessité de concevoir des d'activités socialement significatives pour la création, la négociations et renégociation de ZDP opportunes.
- Ces activités doivent comporter l'utilisation d'artefacts et de signes langagiers particuliers. Ces artefacts devront avoir toujours une dimension culturellement ou historiquement significative (objets concrets issus de l'histoire des mathématiques, artefacts technologiques, textes historiques, etc.).
- Les activités avec l'artefact devront s'articuler à d'autres activités de type sémiotique, comme les *discussions mathématiques* afin de permettre la production et la maturation de signifiés mathématiques personnels vers les signifiés mathématiques culturels visés.
- Enfin, les tâches menées avec un artefact doivent comporter une « saturation en concret » suffisante des concepts scientifiques. Cela aura pour but d'éviter le danger, dont Vygotsky parle, d'un verbalisme excessif. Ainsi, par exemple, des tâches d'anticipation ou de description, permettront de prendre conscience et d'approfondir certains comportements « mathématiques » des objets et des outils à l'écran.

Puisque, par la mise en œuvre de ces critères, nous nous attendons, justement, à pouvoir exploiter le potentiel sémiotique des outils de l'artefact choisi, Cabri-géomètre, notre recherche visera aussi à répondre aux questions suivantes :

Comment, l'interaction avec ces signes et ces outils dans Cabri-géomètre, au sein de ce type d'activités, permet, *de facto*, de tisser un réseau de concepts, au début éventuellement spontanés, sur lequel développer les concepts scientifiques ?

Plus encore, comment l'enseignant peut s'emparer d'une telle potentialité de Cabri, pour favoriser la constructions des signifiés mathématiques attendus ?<sup>27</sup>

En fin, en ce qui concerne l'organisation générale de la séquence expérimentale, nous avons identifié la nécessité d'une organisation spécifique des activités

---

<sup>27</sup> Au cours de ce travail de thèse les questions surgies dan ce chapitre présent pourront d'avantage se préciser.

sémiotiques différentes (activités dans l'artefact, activités de DCs, activités de rédaction de fiches de travail et activités d'écriture de rapports individuels). Nous avons vu que cette nécessité répond à l'objectif didactique incontournable, mis en lumière par Vygotsky, d'un travail explicite sur la prise de conscience et sur le rôle de l'écriture. Ainsi, par exemple, par les discussions collectives et l'écriture de fiches et de rapports individuels, nous nous attendons à pouvoir passer de l'action spontanée et inconsciente au niveau conscient.

Notre étude visera aussi à questionner ce type de passage.

Notre étude du processus de médiation sémiotique et de son organisation didactique se positionne à l'intérieur de la Théorie de la Médiation Sémiotique. Cependant, afin de mettre en œuvre notre ingénierie nous avons fait recours aussi à des éléments de la Théorie de Situation. En effet, dans ces dernières années, ce cadre théorique s'est révélé être non seulement un outil efficace de construction d'un certain type d'ingénierie didactique, mais aussi de modélisation *a posteriori* de processus d'enseignement- apprentissage non expressément organisés autour d'un milieu adidactique. Nous avons donc estimé que ce paradigme pouvait, d'une part, permettre de repérer d'autres critères de construction de la séquence, d'autre part, à l'aide de ces propres outils didactiques, de modéliser le processus de médiation sémiotique mis en place par l'enseignant. Dans notre travail, nous avons donc décidé d'accorder une place centrale aux concepts de *problème*, considéré comme situation d'apprentissage source de désadaptation et déséquilibre, de *milieu*, de *contrat didactique*, de *validation* et de *variable didactique*.

Même si ces notions ont été dérivées en partie d'une position psychologique et épistémologique différente de celle de Vygotsky, nous prétendons qu'elles ne soient pas contradictoires avec cet approche, mais, au contraire complémentaires. Par exemple, grâce à la notion de milieu, nous nous attendons à modéliser certaines notions qui, dans la TMS sont exprimées en termes métaphoriques comme celle de « zone de développement proximal » ou celle de « constitution d'un espace intersubjectif ». En revanche, la notion de contrat nous devrait permettre de repérer des conditions de fonctionnement des discussions collectives. Nous nous attendons aussi à ce que le recours à ces deux cadres théoriques, même si leur position réciproque n'est pas symétrique, pourra permettre d'interpréter de deux points de vue le fonctionnement de l'artefact (et comme composante fondamentale d'un milieu source de rétroactions, et comme Instrument de Médiation Sémiotique). Ce regard double pourra conduire à une analyse plus fine de la manière de l'impliquer dans la fabrication de la séquence expérimentale.

Notre travail cherchera donc aussi à étudier cette articulation supposée possible. En particulier, nous nous demandons : comment construire effectivement une séquence qui articule ces deux cadres théoriques ?

L'élaboration de la séquence, constituera ainsi une sorte de théorème d'existence de cette articulation, permettant de dégager des éléments de reproductibilité et de constructibilité.

Dans le cadre des objectifs de notre étude, il se pose évidemment la nécessité de dégager des éléments de modélisation du processus d'élaboration et de transformation des signes. Etant donné que tant la TMS que la TdS, ne nous semblent pas fournir des caractères définitoires des signes suffisamment détaillés pour permettre une analyse au niveau micro, nous avons donc décidé d'avoir recours à des éléments de la sémiotique peircienne. Nous avons élaboré une sorte d'intégration méthodologique, qui n'a pas la prétention d'être un complètement théorique des la TMS ou de la TdS.

Nous nous attendons à que cette intégration puisse permettre de mieux décrire le fonctionnement de certains signes impliqués dans le processus de médiation sémiotique, ainsi que, l'évolution du réseau sémiotique mis en place et développé, en particulier, par les *discussions mathématiques*.

Au cours de ce chapitre nous avons aussi brièvement abordé la question de la nature du contenu d'apprentissage visé, c'est-à-dire de la notion de fonction. Nous avons identifié dans cette notion un caractère spécifique, *généralisateur, unificateur et porteur d'un nouveau formalisme*, propre des notions mathématiques qui ont eu une genèse historique longue et difficile.

Ce caractère nous a fait supposer l'impossibilité de repérer une suite de situations fondamentales capables, toutes seules, de façon opérationnelle, de faire émerger cette notion, dans toute sa complexité comme outil de solution de problèmes, au moins, dans un temps raisonnable, dans l'institution scolaire concernée. Nous avons lié cette hypothèse d'impossibilité justement à la nécessité d'articuler le cadre théorique de la médiation sémiotique avec celui de la Théorie des Situation.

Lors du prochain chapitre, nous visons montrer, par une brève analyse épistémologique, combien l'évolution au sein de la genèse historique d'une telle notion a été « très lente, compliquée et sinueuse ».

Par cette analyse épistémologique et par un étude des recherches consacrées à l'apprentissage de cette notion, nous identifierons aussi les hypothèses épistémologiques, didactiques et cognitives sur lesquelles bâtir notre séquence d'enseignement - apprentissage. Ces analyses nous fourniront donc des critères ultérieurs de construction de la séquence qui s'ajouteront à ceux déjà dégagés lors du chapitre présent.

# Chapitre 2 : Fonctions et graphes de fonction, une approche alternative

<b>1. Introduction .....</b>	<b>61</b>
<b>2. Plusieurs approches à la notion de fonction .....</b>	<b>63</b>
2.1. L'opposition « concept image / concept definition » .....	63
2.2. La dualité dialectique « processus/objet » .....	65
2.3. Centralité des représentations multiples.....	69
2.4. Premières considérations épistémologiques .....	70
2.5. Genèse historique des fonctions .....	71
<b>3. Première hypothèse : fonction comme co-variation.....</b>	<b>76</b>
3.1. Corollaire important : Interprétation dynamique du graphe.....	78
<b>4. Brèves observations cognitives.....</b>	<b>79</b>
<b>5. Critères de construction de la séquence expérimentale associés .....</b>	<b>79</b>
5.1. Avoir à faire avec des changements et des régularités. ....	80
5.2. Identifier ce qui change : inconnues et connues versus variables et constantes. ....	80
5.3. Asymétrie des variables indépendantes versus variables dépendantes..	82
5.4. Discriminer entre la fonction et ses représentations diverses.....	83
<b>6. Le signifié de co-variation et les difficultés des élèves.....</b>	<b>86</b>
<b>7. Deuxième hypothèse : une approche alternative, les fonctions géométriques dans Cabri-géomètre.....</b>	<b>90</b>
<b>8. Conclusions.....</b>	<b>91</b>

## 1. Introduction

Notre recherche vise à étudier le processus de médiation sémiotique lors de l'apprentissage d'une notion mathématique dans une situation de classe. A cette fin, nous avons conçu et réalisé une expérimentation susceptible de créer les conditions pour la constitution de ce processus et nous nous sommes attaqué à l'apprentissage, au niveau du début du lycée (14/15 ans), des deux notions : celle de fonction et de graphe de fonction.

Usuellement le terme « graphe » en France, se réfère à la notion algébrique d'ensemble de couples de nombres, tandis que l'expression « représentation graphique » désigne la courbe représentative de la fonction dans un repère donné. Chauvat (1997) dans sa thèse a mis en évidence que les objets impliqués dans la manipulation d'une représentation graphique sont, en effet, en plus grand nombre. Il a ainsi distingué : une fonction numérique  $f$ , son graphe (fonctionnel et ensembliste), un repère cartésien du plan affine  $R$ , un graphe géométrique de  $f$  relatif au repère  $R$  (c'est-à-dire l'objet géométrique défini lui - aussi de manière ensembliste), le graphe figural contenant le graphe géométrique (c'est-à-dire l'ensemble des graphes géométriques équivalents), la courbe représentative de  $f$  dans  $R$  (c'est-à-dire le

tracé), la courbe figurale contenant toutes les courbes représentatives équivalentes à la courbe représentative donnée.

Au cours de notre travail, nous utiliserons le mot « graphe » dans un sens général, sans appliquer ces distinctions. Cela signifie que nous faisons référence à la fois à l'objet graphique susceptible de rendre visible (ou non) les objets mathématiques sous-jacents et aux objets mathématiques représentés. En revanche, nous emploierons le terme « représentation graphique » dans le cas où nous voudrions souligner le fait qu'il s'agit bien d'un certain type de représentation, à savoir une représentation dans le registre graphique, de la fonction.

Le chapitre présent est consacré à illustrer les hypothèses épistémologiques et didactiques sur lesquelles nous avons bâti notre expérimentation, et à situer, brièvement, notre recherche dans le cadre des autres recherches déjà menées.

La notion de fonction a été à l'origine d'un grand nombre d'études et de recherches en didactique des mathématiques. Cet intérêt n'est pas surprenant si l'on considère la centralité et la transversalité de ce concept, tant dans plusieurs branches des mathématiques, que dans les sciences expérimentales, comme moyen puissant de modélisation des phénomènes réels.

Comme l'a bien expliqué Sierpiska (1992), la notion de fonction peut être définie de manière formelle, sans quasiment utiliser de mots. Le sens logique de cette notion est confiné à ce que statue la seule définition, à savoir, aux éléments entrant en jeu dans son énoncé définitoire. Cependant, dès lorsque cette définition est utilisée dans un contexte particulier, le langage qui l'accompagne, plus ou moins mathématisé, plus ou moins formel, apporte avec lui toute une panoplie de signifiés qui transcende la seule logique formelle.

Par exemple, Sierpiska observe que, quand nous pensons aux grandeurs variables en science ou en économie, nous concevons plutôt les fonctions comme *relations entre ces grandeurs variables* et nous parlons plus facilement de *lois du marché ou lois de la physique*. En revanche, en mathématiques, il est plus immédiat l'association aux courbes représentées dans un système d'axes cartésiens. Dans ce cas, nous concevons plutôt les fonctions comme *relations entre les coordonnées des points* appartenant à ces courbes, qui, sous des conditions particulières, obéissent à la condition de la valeur unique et peuvent ainsi se dire des représentations graphiques d'une fonction.

Parfois cette relation est donnée par une *équation*, qui décrit les conditions pour lesquelles un point appartient à la courbe représentative. Si la courbe est déjà-là, cette équation « dévoile » la relation préexistante entre les coordonnées. Dans ce cas, la perception que nous en avons est plutôt « statique », c'est-à-dire que le procédé de construction n'est plus directement accessible. En revanche, cette perception s'avère différente si la « loi sous-jacente » a été découverte *a posteriori* par nous-mêmes ou si c'est nous qui avons construit le graphe.

Le sens de la définition de fonction est encore différent en géométrie ou en algèbre, où l'on préfère parler d'applications, de transformations, de projections, d'homomorphismes, etc. Ici, les signifiés auxquels l'on se réfère sont plus « dynamiques » : en fait, dans tous les cas, il s'agit de transformer certains objets (ou ensembles d'objets) pour en obtenir d'autres, comme de considérer, de manière conjointe, la variation des premiers en relation aux deuxièmes. Cette même appréhension « dynamique », peut être présente au moment de la création d'un graphe de fonction par un logiciel, précédemment programmé : les variables indépendantes sont au fur et à mesure entrées pour en calculer et en afficher les variables dépendantes relatives.

A cette liste encore très partielle, nous pouvons ajouter le fait que, comme l'a observé Mac Lane (1986), le signifié de fonction est aussi profondément marqué par le type de représentation que nous considérons prédominante (fonction comme formule, comme loi, comme graphe, comme table de valeur, etc.).

Ainsi, si nous nous demandons avec Sierpinska « qu'est-ce que la définition d'une fonction énonce ? » une réponse pourrait être celle d'un triplet  $(A, B, f)$ , où  $A$  et  $B$  sont des ensembles et  $f$  un sous-ensemble de  $A \times B$ , telle que, si  $(x, y)$  et  $(x, y')$  appartiennent à  $f$ , alors  $y=y'$ .

Mais si, nous nous demandons « qu'est-ce que cela signifie ? », cette même définition se charge et se colorie de signifiés et d'implications diverses suivant les contextes et les institutions diverses dans lesquelles cette définition est employée ou suivant les problèmes spécifiques auxquels elle s'attaque, C'est pour cette raison, que nous emploierons volontairement le mot « signifiés » de fonction, au pluriel.

De manière duale, nous pourrions aussi parler de « composantes diverses du signifié de fonction », au singulier. Nous entendons par cela qu'il s'agit d'un réseau des signifiés qui participe, quelque part, d'une seule unité et qui nécessite, donc, d'être toujours recomposé dans un système cohérent.

## 2. Plusieurs approches à la notion de fonction

Afin d'expliquer la complexité de l'apprentissage de cette notion et les difficultés souvent rencontrées par les élèves, plusieurs perspectives ont été adoptées. Certains auteurs ont surtout pris un point de vue cognitif (Dubinsky, 1991 ; Tall et Vinner, 1981, Vinner et Dreyfus, 1989, etc.), d'autres ont privilégié plutôt une réflexion mixte, historique et épistémologique (Sierpinska, 1992 ; Sfard, 1991, 1992 etc). Certaines des études cités ci-dessus se sont surtout concentré sur la nature de cette notion, en explorant l'opposition existante entre la définition et l'image du concept (Gray et Tall, 1994 ; Tall et Vinner, 1981, Vinner et Dreyfus, 1989), d'autres se sont attaqués à la dualité dialectique entre processus et objets, (Dubinsky, 1991 ; Sfard, 1992, Sajka, 2003). D'autres études encore, ont surtout travaillé les liens entre les différents systèmes de représentation sémiotique (Duval, 1993, 1995 ; Chevallard 1992 ; Bosch et Chevallard, 1998 ; Lacasta, 1995). et les problèmes liés à la visualisation (Eisenberg et Dreyfus, 1994 ; Monk et Nemirovsky, 1994, Goldenberg, 1995), en élaborant parfois des scénarios didactiques et des logiciels d'apprentissage spécifiques (Chauvat, 1997 ; Goldenberg et al., 1992 ; Confrey, 1992 ; Schwarz et al., 1990 ; Schwarz et Dreyfus, 1995 ; Schoenfeld, 1990, Arcavi et Schoenfeld, 1993 ; Slavit, 1997).

Lors des paragraphes suivantes, nous reprendrons certaines de ces recherches, afin de nous placer par rapport à elles.

### 2.1. L'opposition « concept image / concept definition »

Vinner, Dreyfus et Tall (Tall et Vinner, 1981, Vinner et Dreyfus, 1989), ont présenté un modèle de processus cognitif basé sur la relation/différence entre la définition du concept de fonction et son image.

Pour eux, la définition du concept (« *concept definition* ») est une formulation linguistique conventionnelle qui assure les domaines de validité et d'application d'un énoncé. En revanche, l'image d'un concept, « *concept image* », comprend les représentations visuelles, les images mentales, les expériences et les impressions évoquées par le nom de ce concept.

Ainsi dans le cas de la définition de fonction, en examinant les réponses à un questionnaire proposé à un groupe de 236 étudiants et 36 enseignants, Vinner et Dreyfus ont identifié et distingué six catégories de définitions :

- fonction comme « *correspondance* » (au sens *bourbakiste*),
- comme « *relation de dépendance* » (avec mention du domaine et image),
- comme « *loi* » (sans mention du domaine et image),
- comme « *opération ou manipulation de nombres* »,
- comme « *formule ou expression algébrique* »
- ou comme « *représentation* » (Vinner et Dreyfus, 1989).

En outre, ils ont trouvé que, même les étudiants qui étaient capables de donner une définition de fonction de type ensembliste correcte (« correspondance »), préféraient utiliser des images intuitives, portant sur d'autres définitions, pour répondre aux questions posées. Par exemple, environ 40 % des étudiants examinés, pensaient que le graphe de fonction pour être conçu comme tel devait posséder des caractéristiques comme la continuité, la régularité, un caractère stable sur le domaine entier (en rejetant ainsi les fonctions définies différemment sur deux intervalles divers).

Markovits et al. (1988), ont montré que si l'on posait aux étudiants la question suivante : « Dans les deux cas suivants (Figure 2.1), combien de graphes de fonctions est-il possible de tracer par les points donnés ? »

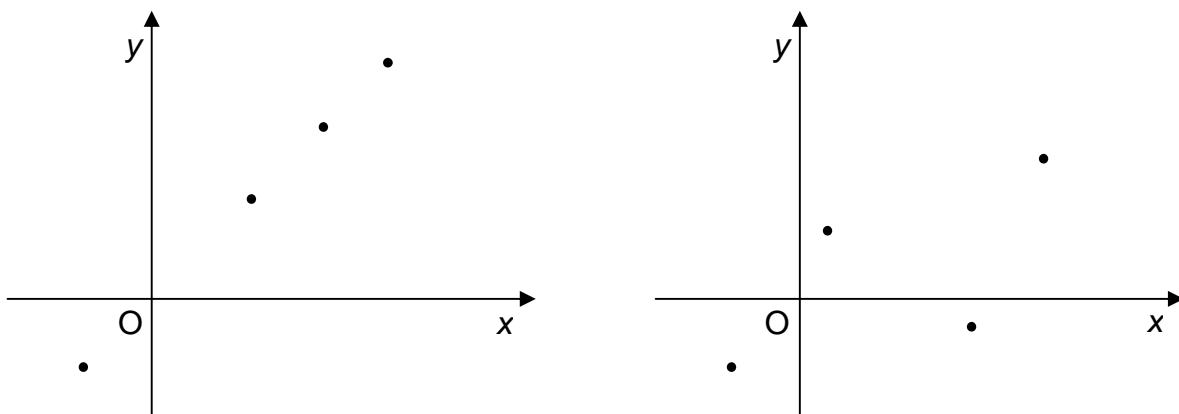


Figure 2.1 – Problème proposé par Markovits et al. (1988) : « dans ces deux repères, combien de graphes de fonctions est-il possible de tracer par les points donnés ? »

Pour le premier système d'axes, souvent les élèves répondaient en évoquant seulement le graphe d'une droite ; tandis que, pour le deuxième, ils considéraient qu'il était impossible, car il leur semblait qu'il y avait deux ensembles de points sur des droites diverses.

De manière analogue, Barnes (1988) a trouvé que la majorité d'un groupe d'élèves du secondaire et du début d'université, ne considéraient pas  $y=4$  comme l'expression d'une fonction, car  $y$  ne dépendait pas explicitement de  $x$ , et cela, à la différence de  $x^2 + y^2=1$ , qui, à cause de sa familiarité majeure et de la présence explicite dans l'expressions de  $x$  et  $y$ , était retenue une fonction.

Enfin, Thompson (1994) a mis en évidence que, parmi les images de fonction les plus répandues chez les élèves, il y avait celle d'une expression écrite séparée par un signe d'égalité, et cela, parfois, sans un contrôle réel du sens de cette écriture.

Toutes ces recherches révèlent que, si, d'une part, les images malformées ne sont pas sans conséquences négatives, d'autre part, l'on ne peut pas fonctionner sans elles. Au contraire, dans le cas de l'usage par un « mathématicien expert », elles s'avèrent en accord avec leur définition formelle, soutiennent l'intuition et guident le

raisonnement. Ainsi, en utilisant la terminologie introduite par ces auteurs, l'image qu'on possède d'un concept peut être idiosyncrasique et dépasse largement sa définition formelle. Cependant elle est nécessaire.

Notre recherche n'adoptera pas l'opposition, telle qu'elle est proposée par ces auteurs : « *concept définition/ concept image* ». En fait, plutôt que de parler de concepts, nous préférons parler de signifiés<sup>28</sup>. Cependant, toute la richesse et l'indétermination, que ces auteurs associent à l'image d'un concept, dans notre cadre théorique, se retrouve dans le caractère finalement inépuisable des signifiés mathématiques personnels que les élèves attribuent aux signes mathématiques associés. Notre séquence expérimentale visera en particulier à organiser des activités, susceptibles, d'une part d'engendrer ou favoriser l'élaboration de ces signifiés personnels, d'autre part, de permettre leur évolution vers les signifiés mathématiques culturels de référence.

## 2.2. La dualité dialectique « processus/objet »

De nombreuses autres recherches ont mis en évidence la nature à la fois opérationnelle et structurelle de la notion de fonction. Les distinctions entre procédures de raisonnement et entités conceptuelles de Harel et Kaput (1991), les interprétations dynamiques et statiques de Goldenberg, Lewis et O'Keefe (1992), la différence entre processus et objet de Sfard (1992), Schwartz et Yerushalmy (1992) ou Dubinsky (1989, 1991) (reprise dans une forme sensiblement renouvelée par Tall 1991, 1994, 1996) semblent se référer, bien que colorés de nuances parfois assez différentes, à la même dualité fondamentale.

Parmi tous ces auteurs différents, aux accents et soulignages différents, il y a l'affirmation forte qu'une telle dualité processus/objet, loin d'être une dichotomie radicale, si elle est bien maîtrisée, réalise une complémentarité des points de vue nécessaire à la compréhension profonde des fonctions et des graphes de fonction. Par exemple, cette dialectique pourrait permettre de surmonter le hiatus, parfois aperçu par les élèves, entre la représentation symbolique ou algébrique, portant plutôt sur le processus, et la représentation graphique, se référant plutôt à l'objet :

Consider now the two functions

$x + 3$  and  $4 + x - 1$ .

From the point of view of the process that is carried out with the recipe, these are two different recipes. If, however, one were to plot the output of each of these recipes against its input on a Cartesian plane then the two recipes would be indistinguishable. We see that the symbolic representation of function makes its process nature salient, while the graphical representation suppresses the process nature of the function and thus helps to make the function more entity-like. A proper understanding of algebra requires that students be comfortable with both of these aspects of function. [Schwartz et Yerushalmy, 1992, p. 265]

En outre, toutes ces recherches convergent pour affirmer que les étudiants, acquièrent un point de vue opérationnel sur les fonctions, en tant que processus, tandis que le passage, à un point de vue structurel, en tant qu'objet, n'est pas toujours facile.

<sup>28</sup> Vygotsky aussi parle de développement de concepts et il associe ceci au développement des signifiés des mots correspondants. Cependant, pour ne pas entraîner d'ambiguïtés, dans une perspective sémiotique, nous utiliserons de préférence le terme de signifié et nous référerons à l'apprentissage comme l'élaboration d'un réseau de signifiés mathématiques personnels, compatibles avec les signifiés mathématiques culturels.



Chez Dubinsky (1991) le processus d'abstraction désigne plutôt une construction hiérarchique qui va de *l'action* à *l'objet*, en passant, grâce au mécanisme « *d'encapsulation* », par l'état du *processus*. Cet objet peut être, à son tour, engagé, par *coordination*, *inversion* ou *généralisation*, dans de nouveaux *processus*, ou articulé à d'autres processus et objets dans le cadre de *schèmes* plus complexes.

Dubinsky et Harel (1992) considèrent que les élèves ont acquis une « *action conception* » de fonction, s'ils sont capables de calculer le résultat de son expression algébrique, pour une valeur donnée. Cette conception, qualifiée de « statique » par Dubinsky et Harel (1992) est décrite métaphoriquement par Thompson (1994) comme une recette à appliquer à des nombres. Les étudiants, ayant cette conception, imaginent que la recette reste la même au travers les nombres, mais qu'il faut toujours l'appliquer à quelque chose pour qu'elle puisse produire quelque chose d'autre. Ils ne voient pas la recette comme susceptible de représenter le résultat de son application.

En revanche, dans une conception procédurale (« *process conception* », Dubinsky et Harel (1992)) de fonction, l'expression de la fonction désigne non seulement un moyen de calculer  $f(x)$  pour une valeur donnée de  $x$  mais aussi le résultat de ce calcul. Une telle conception implique la possibilité du calcul pour toute valeurs de  $x$  en répétant ce même procédé de calcul. Dubinsky et ses collègues ont observé qu'il n'est pas trivial d'acquérir cette conception et ils ont développé une approche didactique qui utilise un langage de programmation spécifiquement conçu, le ISETL.

Enfin, pour Dubinsky et ses collègues, on peut dire que les élèves ont acquis une conception structurelle (« *object conception* », Dubinsky et Harel (1992)) des fonctions, seulement lorsqu'ils sont capables d'opérer dessus, en les traitant et en les concevant comme objets en eux mêmes.

Ce qui nous intéresse de souligner ici c'est qu'afin de classer les réponses d'un groupe d'élèves en fonction de ces types différents de conceptions, Breidenbach, Dubinsky et al. (1992), ont utilisé comme critères de classification, la référence explicite aux « *inputs* », à la « *transformation* » et aux « *outputs* ». Les réponses où « *the input, the transformation and the output were integrated and fairly general* » (Breidenbach, Dubinsky et al., 1992, p. 252) ont été considérées comme relevant d'une « *process conception* » de fonction. En revanche, si l'un de ces éléments n'était pas explicité, ou si la procédure évoquée était exclusivement reliée à une expression ou à une équation particulières, ou si l'input et l'output étaient des objets strictement limités, comme certains nombres entiers, la conception associée a été encore considérée comme de type « *action conception* ». On voit alors, ici que, pour Breidenbach et al, un des signifiés possibles de fonction est la possibilité de concevoir un tel objet théorique de manière déterministe, en tant qu'élément de transformation, capable de produire à partir d'un objet initial donné (ou d'un ensemble donné d'objets initiaux) toujours le (les) même(s) objet(s) final (finaux). En reprenant une métaphore assez répandue, nous avons nommé ce signifié de fonction, « ***machine à input/output*** ». En effet, l'on trouve des références à ce type de métaphore et de signifié, dans des nombreux textes scolaires. Cela s'accorde bien avec l'introduction des fonctions à partir d'une approche numérique, éventuellement informatisée, ou par des langages de programmation, comme c'est le cas pour Dubinsky, Breidenbach et ses collègues. Nous verrons que ce signifié de fonction constituera un élément important aussi de notre expérimentation.

Chez Sfard (1991, 1992), à la différence de Dubinsky, on peut repérer un passage similaire du *processus* à *l'objet*, que l'on pourrait qualifier de plutôt horizontal : l'accent est mis surtout sur la dialectique et la complémentarité, qui existent entre

ces deux aspects. En outre, dans cette recherche, la perspective adoptée est à la fois épistémologique et cognitive.

En citant deux mathématiciens célèbres, nous pourrions affirmer que la fonction est, d'un point de vue structurel, un ensemble de couples (Kuratowski et Mostowski, 1966, p. 73), d'un point de vue opérationnel, un processus computationnel ou un « *well defined method for getting from one system to another* » (Skemp, 1971, p. 246)<sup>29</sup>.

Sfard nous prévient que, ces deux manières de comprendre les fonctions, apparemment contradictoires et distantes, se complètent l'une l'autre et constituent une unité cohérente, comme les deux faces d'une même médaille :

[...] It is important to emphasize that the terms process and object are to be understood here as different facets of the same thing rather than as totally distinct, separate components of the mathematical universe. In other words, the operational and structural modes of thinking, although ostensibly incompatible, are in fact complementary. [Sfard, 1992, p. 60]

Comme pour plusieurs autres notions mathématiques, Sfard montre que la longue histoire de la notion de fonction est une illustration de la prééminence de ce qu'elle appelle conception opérationnelle, sur la conception structurelle et une longue bataille pour sa réification et son affranchissement d'une part de son caractère variable et, d'autre part, de son aspect opérationnel :

[...] function's turbulent biography can be viewed as a three-centuries long struggle for reification. [...] Initially, the concept was tightly connected to computational processes. [Sfard, 1992, p. 62]

Les premières descriptions fournies par le nouveau langage algébrique, au XIII<sup>e</sup> siècle, ainsi que le traitement des fonctions par l'intermédiaire des courbes représentatives, étaient tous des moyens pour donner une forme stable et permanente à ce qui était à l'origine conçu intuitivement comme « *a way of finding one changing magnitude with the help of another* » [Sfard, 1992, p. 62] :

Jean Bernoulli's "quantity composed in any manner whatsoever of [a] variable and constants" (1718), and Euler's "analytic expression" (1747), both intended as definitions of function, used algebraic entities to impose object-like permanence and stability on varying quantities. Identifying functions with two-dimensional curves was another way of endowing computational processes with a physiognomy [...] of a real thing. [Sfard, 1992, p. 62]

De manière parallèle, le même processus difficile de réification a caractérisé le développement de la notion associée de variable. Sfard rappelle qu'au début du vingtième siècle, le débat autour de la nature des variables et des fonctions était encore très animé. L'opinion exprimée, en 1904 par Frege dans son article « *What is a function* » est, à ce propos, très éclairante :

It is even now not beyond all doubt what the word 'function' stands for in Analysis, although it has been in continual use for a long time. In definitions, we find two expressions constantly recurring, sometimes in combination and sometimes separately : 'mathematical expression' and 'variable'. We also notice a fluctuating usage : the name 'function' is given sometimes to what determines the mode of dependence, or perhaps to the mode of dependence itself, and sometimes to the dependent variable [...] Are variables of Analysis variable numbers ? [...] What remains the same when a number varies ? Nothing! [...] Thus there are no variable numbers. [Frege, 1904/1980, pp. 107-9, cité par Sfard, 1992, p. 63]

Et Frege concluait en disant :

The word 'variable' thus has no justification in pure analysis [ibid. p. 111]

<sup>29</sup> C'est-à-dire « une méthode bien définie pour passer d'un système à un autre ».

Sfard, observe que la raison primaire pour le rejet éventuel de cette notion par Frege consiste dans le fait que, du moment que nous essayons de mentionner une variation, nous sommes confronté à quelque chose qui, au moins psychologiquement, varie dans un temps donné, et donc à quelque chose qui n'appartient pas à l'analyse pure. En fait, pour Frege, tout ce qui implique le temps est étranger à l'arithmétique et ne peut pas être considéré comme un « objet d'analyse » au sens propre. Ainsi, pour une notion mathématique, être dépendant de façon inhérente du temps, signifié être « *in-réifiable* ». Il est intéressant de remarquer que pour Frege (et probablement pour beaucoup d'autres mathématiciens) la « *réfiabilité* » d'une notion apparaisse comme une condition nécessaire pour son acceptation.

Sfard observe que lorsque les pistes naïves de réification, algébriques et géométriques ont été rejetées, le monde mathématique s'est retrouvé avec une notion devenue indispensable de fonction basée sur une notion « *in-réifiée* » et purement opérationnelle de changement de grandeur ou quantité. L'idée mathématique importante était sérieusement en danger et la solution définitive a été celle, d'une part d'éliminer la notion de variable, d'autre part, dans les définitions données, de se priver de toute référence aux représentations algébriques et graphiques. L'approche ensembliste résultante a été ainsi initiée par l'idée de correspondance arbitraire de Dirichlet (1837), c'est-à-dire une correspondance non nécessairement basée sur une dépendance algorithmique entre  $x$  et  $y$ . Elle s'est terminée par la définition en termes de couples de Bourbaki (1939).

Cette analyse historique des notions de fonction et variable, conduit Sfard, d'une part à élaborer un modèle psychologique d'apprentissage basé sur le parallélisme entre phylogenèse et ontogenèse d'un concept, d'autre part à critiquer l'approche scolaire actuelle qui, trop souvent, préfère une approche structurelle, basée sur la définition bourbakiste de fonction, au détriment de son origine computationnelle.

Ainsi, comme elle l'a été historiquement, du point de vue psychologique, la fonction est pour Sfard un concept qu'on acquiert d'abord opérationnellement puis structurellement. La transition à sa forme structurelle, à l'objet mathématique, se développe en passant par trois niveaux : par *intérieurisation*, *condensation* et *réification*.

Nous ne prendrons pas les mêmes perspectives psychologiques de Sfard, Vinner, Dubinsky et Tall. Cependant nous considérons qu'il est important de respecter ontogénétiquement, le même développement phylogénétique du concept. Ainsi, nous considérons qu'il est, en effet, nécessaire de procéder d'abord par d'une approche opérationnelle et puis, seulement ensuite structurelle. Dans notre cas, l'approche opérationnelle ne signifie pas seulement la nécessité de concevoir une fonction « *as a computational process rather than as a static construct* » (Sfard, 1992, p. 60). Elle signifie surtout, en intégrant les racines qui lui ont donné du sens, de bâtir l'apprentissage des fonctions, des variables et du graphe de fonction, explicitement sur l'idée de mouvement tel qu'il l'a été historiquement. Par conséquent la notion de variable devient centrale et, avec elle, le signifié co-variationnel de fonction. Cela signifie quelque part faire le parcours inverse à celui qui posait tant de problèmes à Frege, en réintroduisant, le temps, au moins au début du processus d'enseignement - apprentissage. Nous expliquerons aux paragraphes 6 et 7 de ce chapitre, pourquoi nous considérons indispensable de démarrer cet apprentissage dans un contexte qui soit d'abord qualitatif et fondé sur une expérience co-variationnelle de dépendance fonctionnelle.

### 2.3. Centralité des représentations multiples

Concernant en particulier la fonctionnalité des représentations graphiques dans le travail mathématique en analyse et les rapports des élèves à ces représentations, nous retrouvons en littérature, le développement de plusieurs lignes de recherches.

Certaines recherches se sont intéressées à étudier surtout les caractéristiques des divers registres de représentation et des modes de traitement sémiotiques associés, les problèmes cognitifs et didactiques posées par la conversion entre ces registres ou les différents types de fonctionnements, en particulier, des représentations graphiques, (Duval, 1993, 1995 ; Chevallard 1992 ; Bosch et Chevallard, 1998 ; Lacasta, 1995). D'autres recherches ont surtout développées des ingénieries didactiques adaptées à surmonter ces problèmes (Bloch, 2000 ; Chauvat, 1997)

D'autres recherches encore ont visé le développement ou l'utilisation de logiciels spécifiques ou de langages de programmation particuliers. A ce propos, nous avons déjà fait allusion au langage ISTEEL élaboré par Breidenbach, Dubinsky et leurs collègues (1992). Parallèlement, nous citons les travaux de Cuoco (1994) qui a montré qu'une approche aux fonctions par la programmation en Logo donnait des résultats d'apprentissage sensiblement différents d'une approche traditionnelle. En ce qui concerne, l'emploi de représentations diverses, associées en particulier à l'usage de logiciels graphiques et symboliques, il faut en particulier rappeler les travaux de Gray et Tall (1994). Pour ces chercheurs, « *functions, derivatives, integral and the fundamental limit notation are all examples of procepts* » c'est-à-dire qu'ils sont tous des exemples d'un amalgame entre « processus » et « concept produit par ce processus » (évocable par le même symbole mathématique). Les représentations diverses auraient alors chacune des caractéristiques propres susceptibles d'offrir des avantages et désavantages cognitifs potentiels et dans la représentation des *procepts* sous-jacents, et dans leur apprentissage. Tall, cite à ce propos l'exemple de deux logiciels, le *Random-Grapher*, développé par Goldenberg et al. (1992) qui produit le graphe d'une fonction en dessinant les points constitutifs, de manière aléatoire, et le *Function Probe*, développé par Confrey (Confrey, 1992 ; Borba et Confrey, 1992) qui permet de modifier le graphe d'une fonction (par translation, déformation, réflexion), par simple utilisation de la souris. Tall observe que grâce à leurs façons particulières de représenter les fonctions, chacun de ces logiciels amène à une construction du concept de fonction différente, le premier accentuant le fait que le graphe est constitué d'un ensemble de points, le deuxième, le fait qu'il s'agit d'un objet unique.

La liste des environnements informatiques et des scénarios didactiques associés, créés à fin de développer les liens entre les représentations différentes des fonctions (algébrique, graphique) est très vaste. Schwarz et Dreyfus, ont analysé l'acquisition de la part des étudiants de la notion de fonction en adoptant un logiciel spécifique et une approche appelée Modèle de Triple Représentation (*Triple Representation Model*) (Schwarz et al., 1990, Schwarz et Dreyfus, 1995). Ce logiciel permet une étroite interrelation dynamique entre registres graphique, numérique et algébrique. En outre, dans cet environnement, les étudiants sont amenés à opérer deux différents types d'actions, la première permettant de changer la fonction elle-même (par exemple, par une translation), la deuxième changeant les conditions de représentation de la fonction (par exemple, par changement d'échelle de son image sur une calculatrice graphique). Schwarz et Dreyfus (1995) suggèrent que ces types d'action conduisent les étudiants à identifier des propriétés invariantes caractéristiques de la fonction examinée et permettent ainsi un apprentissage assez approfondi des fonctions et du graphe. Schoenfeld, Arcavi et ses collègues

(Schoenfeld, 1990, Arcavi et Schoenfeld, 1993, Moschkovich, Schoenfeld et Arcavi, 1993) ont conduit des recherches similaires avec le logiciel *Grapher*. ainsi que Slavit (1997).

Dans une approche, un partie similaire, Chauvat (1997, 1999a) a développé un logiciel, ORGE, dont l'objectif, dans le cas de l'enseignement des mathématiques dans un département de Génie Electrique et Informatique Industrielle, est « *de favoriser l'installation de rapports aux graphiques de type professionnel où la production des graphiques n'est pas une fin en soi et pour lesquels certains traitements graphiques peuvent être légitimes voire nécessaires* » (Chauvat, 1999b).

D'autres recherches encore, en s'attaquant en particulier aux difficultés liées à l'interprétation de graphes de fonctions, ont surtout travaillé sur la visualisation, c'est-à-dire sur l'interprétation et manipulation d'images (Eisenberg et Dreyfus, 1994 ; Monk et Nemirovsky, 1994, Goldenberg, 1995). Pour ces auteurs, les aspects visuels d'un graphe de fonctions, loin d'être seulement une source d'erreurs, jouent un rôle important dans la compréhension des concepts de fonction et graphe et sont une ressource pour leur apprentissage. Cependant l'habilité de lire et donner du sens aux propriétés du graphe, n'est pas innée mais doit être développée de manière opportune. Ces recherches proposent alors des activités qui, parfois, lient l'utilisation de logiciels graphiques à des expériences de type physique ou pseudo- concret. La description de toutes ces études dépasse largement les objectifs de cette thèse. Ce qui nous intéresse ici de souligner, c'est qu'en obéissant aussi aux indications des curricula de plusieurs pays, tous ces travaux ont surtout focalisé leur attention et leurs efforts sur l'apprentissage des fonctions numériques, en essayant de développer, par l'utilisation de systèmes de calcul formel ou d'environnements de calculatrice graphiques et symboliques spécifiques, les liens entre les différents registres de représentation. En outre, leur accent est mis tout d'abord sur les graphes de fonction, comme objet d'étude privilégié pour accéder à la compréhension des fonctions.

Nous verrons que notre approche, même s'elle considère comme central de travailler l'articulation entre plusieurs registres de représentation et si elle a comme objectif d'apprentissage la construction des notions de fonctions et de graphe, se pose de manière différente en adoptant, une perspective assez originale. En effet, nous questionnerons la prédominance des fonctions numériques et, même en nous situant dans un environnement informatique, nous choisirons de ne pas nous servir d'un système de calcul formel ou d'un environnement de calculatrice graphiques et symboliques (CAS).

## **2.4. Premières considérations épistémologiques**

Il est intéressant de remarquer que plusieurs études adoptent une perspective qui relie des analyses cognitives à des considérations de type historique ou épistémologique.

En particulier, nous avons vu que, dans Sfard, c'est justement le recours à l'histoire du développement de la notion de fonction qui fonde son modèle cognitif d'apprentissage et qui justifie, pour elle, la nécessité d'une approche préalablement opérationnelle et ensuite structurelle.

Un discours différent peut être trouvé dans Sierpiska (1992). Cet auteur afin de définir des conditions de base pour la compréhension et l'apprentissage des fonctions, à partir de la définition actuelle de fonction, a relu l'histoire et a identifié des obstacles épistémologiques. Elle a montré que ces obstacles peuvent, souvent, au moins partiellement, expliquer les difficultés rencontrées par les élèves. A ce propos, dans les paragraphes suivants, nous verrons comment l'analyse

épistémologique et didactique de Sierpinska nous a servi pour en tirer des critères de construction de la séquence expérimentale. Il s'agit donc d'autres considérations épistémologiques qui s'ajoutent à celle du prochain paragraphe.

Les recherches citées ci-dessus, en particulier celles de Sfard et Sierpinska, mettent plutôt l'accent sur la dualité processus/objet, sur les processus cognitifs associés, ou sur les obstacles épistémologiques associés à la compréhension de cette notion. En outre, ces études en développant le lien entre cognitif et épistémologique, soulignent surtout la nécessité de tenir compte de phylogenèse de cette notion, par rapport à l'ontogenèse de sa construction par le sujet.

Notre approche se situe en continuité avec cette ligne de recherches, mais, néanmoins s'en distingue.

En fait, d'une part, comme ces auteurs, nous considérons très important de respecter le point de vue phylogénétique dans l'enseignement apprentissage des signifiés de fonction et d'ancrer, ainsi, la construction des tâches de notre séquence expérimentale sur des considérations épistémologiques et historiques.

D'autre part, notre approche ne prend pas en compte les mêmes modèles psychologiques et à partir d'une réflexion épistémologique similaire développe des implications didactiques différentes.

## 2.5. Genèse historique des fonctions

De manière similaire à ce qui s'est avéré pour d'autres notions mathématiques fondamentales, la définition formelle de fonction a été plutôt tardive et remonte au début du dix-neuvième siècle. En fait, au sein de la théorie des ensembles, la définition de fonction comme triplette particulière  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, f)$ , dans laquelle  $f$  est un sous-ensemble particulier de  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ , a été formulé seulement en 1939 (Bourbaki 1939). Dans cette définition, ce qui prédomine c'est l'idée de « correspondance arbitraire » ; ou, éventuellement de « règle de correspondance ». En revanche, les idées de variation, de co-variation et de mouvement y sont absentes. Cependant, si l'on examine, même de manière assez synthétique, l'histoire des notions de fonction et de variable nous pouvons remarquer qu'elles sont, au contraire, étroitement liées à ces idées. D'autre part, plus on analyse les définitions anciennes, plus on remarque que, la correspondance est éventuellement présente, mais de façon implicite.

Quelques historiens situe les origines de cette notion dans l'ancienne Mésopotamie, la liant aux « fonctions linéaires zigzagant », imprimées dans des tables d'argile et susceptibles de donner la variation de la vitesse du soleil en fonction du temps (Neugebauer, 1993). D'autres rappellent les tabulations de cordes d'arc de Ptolémée (Katz, 1993). Cependant, la position la plus universellement acceptée identifie les origines de cette notion, à la fin du Moyen Age, lors de l'étude du mouvement local :

From the study of motion mathematics derived a fundamental concept that was central practically all of the work of the next two hundred years- the concept of function [Kline, p. 338]

Jusqu'à la fin du Moyen Age, les mouvements étaient étudiés soit de façon qualitative, en donnant une description du sens de variation, directement ou inversement proportionnel, mais sans arriver à des relations numériques précises ; soit en étudiant de façon numérique (quantitative) certaines valeurs isolées du phénomène, ce qui avait tendance à voiler l'aspect de variation continue. On ne considérait que certaines valeurs sans intégrer ces valeurs dans la notion de variable. Cela pour plusieurs raisons que nous ne ferons que mentionner, à savoir : l'incommensurabilité, l'homogénéité entre grandeurs et la coupure très nette entre

nombres et grandeurs. C'est par l'intermédiaire des représentations graphiques que ces deux types d'étude ont pu se regrouper pour donner naissance à une première idée embryonnaire de fonction. En particulier, par les études d'Oresme (1323-1382), en France, au milieu du XIV<sup>ème</sup> siècle se développent ces premières formes de représentations. Le but d'Oresme était de représenter par une figure géométrique les intensités d'une qualité d'un sujet. Ces intensités étaient représentées par des segments.

Dans son traité « *De configurationibus qualitatum et motuum* » Oresme nous fournit une méthode permettant de représenter les *qualités* (chaleur, densité, distance, vitesse, etc) changeantes au sein d'un *sujet* (temps, espace, etc) (Clagett, 1968). Les intensités de ces *qualités* (par exemple des vitesses), sont représentées par des segments érigés perpendiculairement à un autre segment représentant, lui, le *sujet* (par exemple, le temps). On obtient ainsi un graphique illustrant les intensités d'une *qualité* à différents points du *sujet*. En considérant, alors, par exemple, la vitesse par rapport au temps, la figure ainsi construite représente la distribution totale des intensités de cette qualité et permet de caractériser différents types de mouvement (uniforme, uniformément accéléré et accéléré). On peut dire que un des buts visés par Oresme avec sa méthode, était effectivement de permettre de comprendre plus facilement et plus rapidement la nature des changements :

But it is apparent that we ought to imagine a quality in this way in order to recognize its disposition more easily, for its uniformity and difformity are examined more quickly, more easily, and more clearly when something similar to it is described in a sensible figure. (This is true) because something is quickly and perfectly understood when it is explained by a visible example. Thus it seems quite difficult for certain people to understand the nature of a quality that is uniformly difform. But what is easier to understand than that the altitude of a right triangle is uniformly difform ? For that is surely apparent to the senses. [Clagett, 1968, p. 175]<sup>30</sup>

Ces représentations d'Oresme marquent un pas en avant vers les notions de fonction et de graphe de fonction. Cependant, on ne peut dire qu'il s'agit déjà de fonctions et de graphes. En effet, Oresme ne s'intéresse pas à la façon dont la qualité varie par rapport au sujet, mais plutôt à la configuration globale de la qualité du sujet. De plus, ses représentations étaient totalement imaginaires et qualitatives, jamais vérifiées par des mesures. En tout cas, il faut au moins reconnaître que l'idée en germe de fonction y apparaît et cela dans le but surtout de modéliser le mouvement. En outre, dans cette idée, la perception du changement en fonction du temps joue, dès le début, un rôle central.

La majorité des historiens fait remonter à Galilée l'introduction du quantitatif dans les représentations graphiques et la naissance de la notion de fonction. En fait, on trouve dans Malik (1980) :

The function concept originated when Galileo (1564-1642) proposed a program for the study of motion.

En réalité, des études récentes (Groetsch, 2004) montrent que déjà presque un siècle avant Galilée, Tartaglia avait élaboré des concepts qu'on pourrait définir proto-

---

30 Nous pouvons traduire ce passage de la manière suivante : « Mais, il apparaît que nous devrions imaginer une qualité de cette manière afin de reconnaître sa nature plus facilement, car ses uniformités et ses difformités sont examinées plus rapidement, plus facilement et plus clairement lorsqu'une chose, lui étant semblable, est décrite par une figure sensible. Cela est vrai parce qu'une chose est rapidement et parfaitement comprise quand elle est expliquée par un exemple visible. Il semble plutôt difficile pour certaines personnes de comprendre la nature d'une qualité uniformément difforme. Mais qu'y a-t-il de plus facile à comprendre que : la hauteur d'un triangle rectangle est uniformément difforme ».

fonctionnels, dans son traité de balistique, la *Nova Scientia* (Venise, 1537). En fait, sans donner des définitions claires ou explicites, il emploie explicitement les concepts de valeur unique, de fonction bijective, de la multiplicité des valeurs de la relation inverse et une version primitive mais erronée du théorème de la valeur intermédiaire. Son étude déjà quantitative était cependant liée à des variables statiques non temporelles (angle d'élévation et pente des portées) et par conséquent :

[...] Hence he [Tartaglia] was not faced with the formidable challenges of measuring time or dynamic variables like velocity [Groetsch, 2004, p. 868]

Pour Galilée, l'expérimentation était facilitée par l'avènement d'instruments de mesure et l'intrusion du quantitatif dans des domaines dont on ne pouvait parler auparavant que de façon qualitative, comme par exemple, le chaud et le froid. C'est pourquoi, à la différence d'Oresme, les graphiques de Galilée, bien qu'ils soient parfois très semblables, sont issus de l'expérience et de la mesure. Les liens de cause à effet sont exprimés de façon quantitative vérifiable et vérifiée.

Comme pour Oresme, le principal champ d'étude de Galilée était le mouvement et donc la vitesse, l'accélération, la distance parcourue. Il cherchait à relier ces différentes notions à l'aide de lois qui lui étaient inspirées de l'expérience et de l'observation. Il effectuait plusieurs mesures, en reprenant plusieurs fois ses expériences afin d'obtenir les résultats de plus en plus justes et « vrais ». Cette insistance de Galilée à vouloir étudier les mouvements de façon quantitative, par l'entremise de l'expérimentation, a grandement contribué à l'évolution de la notion de fonction. Son désir de lier de façon fonctionnelle les causes et les effets a été à nouveau un facteur essentiel dans la genèse de cette notion :

The investigation of a relation of between two varying quantities had been fundamental in arriving at the concept of function [Malik, 1980, p. 490]

Avec la géométrie analytique de Descartes (1596-1650), des courbes décrites par des mouvements ou par des formules se référant à des mouvements, ont été incluses dans les recherches mathématiques et une relation représentable par une expression et par son graphe ont été, dès alors, acceptées comme des objets mathématiques.

Ainsi, tel que l'indique ce passage de « La Géométrie » (1637), nous voyons apparaître clairement l'expression de dépendance générale entre deux quantités variables :

Même prenant successivement infinies diverses grandeurs pour la ligne y, on en trouvera aussi infinies pour la ligne x, et ainsi on aura une infinité de divers points, tels que celui qui est marqué C, par le moyen desquels on décrira la ligne courbe demandée. [Descartes, 1637, cité par Youschkevitch, 1976]

Certains historiens situent dans l'œuvre de Descartes la naissance du graphe de fonction. Cependant il n'y a pas de consensus unanime à ce sujet et la question est bien plus complexe et délicate.

Seulement un siècle après, Euler a eu le génie de sortir du cadre de la géométrie analytique pour associer le cadre fonctionnel au cadre graphique. A partir de la relation de dépendance fonctionnelle, il a relié les fonctions numériques aux lieux géométriques déjà existants depuis longtemps.

Comme l'écrit Boyer (1990), *l'Introductio in Analysin infinitorum* d'Euler (1748) peut être considérée comme la clé de voûte de l'analyse. Ce traité important sorti en deux volumes en 1748 a constitué la source de développements vigoureux pour les mathématiques pour toute la deuxième moitié du XVIII<sup>ème</sup> siècle. Dès maintenant la



notion de fonction est devenue fondamentale pour l'analyse.

Au cours du XVIII<sup>ème</sup> et XIX<sup>ème</sup> siècles, dans les diverses définitions de fonction proposées, l'on voit ainsi se développer conjointement deux âmes (idéalement représentées par les deux définitions d'Euler, celle du 1748 et celle de 1755). D'une part nous constatons l'élaboration de définitions qui décrivent les fonctions comme des expressions algébriques, et qui marquent la prise progressive d'autonomie de l'Algèbre et puis de l'Analyse de la Géométrie. D'autre part, nous remarquons une référence explicite à la dépendance entre variables et une formulation qui s'appuie sur une description géométrique ou graphique et qui sous-entend une perception dynamique, co-variationnelle. Voici une définition :

**Fermat (1679) :**

Dès que deux quantités continues apparaissent dans une égalité finale, il y a un lieu, et le point terminal de l'une des deux quantités décrit une ligne droite ou courbe (*Quoties in ultima æqualitate duæ quantitates ignotæ reperiuntur, sit locus loco et terminus alterius ex illis describet lineam rectam aut curvam*) [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 13]

**Bernoulli (1718) :**

Une fonction d'une grandeur variable est « une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. » [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 17]

**Euler (1748, *Introductio in Analysin infinitorum*) :**

Une quantité variable est une quantité indéterminée ou universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées. Ainsi, une telle quantité variable comprend tous les nombres en elle-même, tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, transcendants, irrationnels. On ne doit même pas exclure zéro ni les nombres imaginaires.

Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée de quelque manière que ce soit, de cette quantité et de nombres ou de quantités constantes. [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 19]

**Euler (1755, *Institutiones calculi differentialis*) :**

Si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si ces dernières sont changées, les premières changent aussi, alors les premières quantités sont appelées fonctions des dernières. Cette désignation a un caractère très large et comprend en elle-même toutes les façons dont une quantité peut être déterminée par d'autres. Si, par conséquent,  $x$  désigne une quantité variable, alors toutes les autres quantités qui dépendent de  $x$  d'une façon quelconque ou qui sont déterminées par  $x$ , sont appelées fonctions de  $x$ . [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 25]

**Lagrange (1797) :**

On appelle fonction d'une ou plusieurs quantités toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles. Ainsi dans les fonctions, on ne considère que les quantités qu'on suppose variables sans aucun égard aux constantes qui peuvent y être mêlées [Lagrange, 1797]

**Lacroix (1797) :**

Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou de plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première. [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 31]

**Cauchy (1821) :**

« Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que la valeur de l'une d'elles étant donnée on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. » [Cauchy, 1821]

Au cours du XVIII<sup>ème</sup> et du XIX<sup>ème</sup> siècle, pour les mathématiciens, une fonction était une expression analytique qui représentait une relation entre variables. Toute tentative de élargir la classe des fonctions, aux fonctions non continues, par exemple, n'était pas promptement acceptée. Il faut attendre jusqu'à au milieu du XIX<sup>ème</sup> siècle avec les contributions fondamentales de Fourier, Lobatchevsky, Dirichlet et d'autres mathématiciens, pour parvenir à une formulation et à une définition assez voisine de la définition moderne de fonction. On voit alors l'explicitation et l'installation progressive du caractère arbitraire de la règle de correspondance.

Comme Malik (1980) le fait remarquer, ce caractère de la définition moderne de fonction a commencé à se constituer avec l'objectif de prendre en compte des problèmes et des objets théoriques qui n'étaient pas ceux dont s'était occupé jusqu'à ce moment l'analyse classique. Il évoque en particulier, le problème de la convergence des « Séries de Fourier », inspiré par le problème de la conduction de la chaleur dans un métal. Ce problème amenait à la recherche de la solution d'une équation différentielle qui était finalement au son tout une fonction.

Ainsi nous retrouvons les définitions de :

**Fourier (1821) :**

En général la fonction  $f(x)$  représente une suite de valeurs ou ordonnées, dont chacune est arbitraire. [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 31]

**Lobatchevsky (1834) :**

Une notion générale nécessite que par une fonction de  $x$ , on entende le nombre associé à chaque  $x$  et qui varie graduellement quand  $x$  varie. La valeur de la fonction peut être donnée soit par une expression analytique, soit par une condition qui donne le moyen d'essayer tous les nombres et choisir l'un d'entre eux ; ou, finalement, la dépendance peut exister et rester inconnue. [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 32]

**Dirichlet (1837) :**

Soient  $a$  et  $b$ , deux nombres fixes et soit  $x$ , une grandeur variable, qui prend successivement toutes les valeurs comprises entre  $a$  et  $b$ . Si à chaque  $x$  correspond un  $y$  fini unique de façon que, quand  $x$  parcourt continûment l'intervalle entre  $a$  et  $b$ ,  $y=f(x)$  varie aussi progressivement, alors  $y$  est dite fonction continue de  $x$  sur cette intervalle. Pour cela, il n'est pas du tout obligatoire que  $y$ , sur tout l'intervalle, dépend de  $x$  par une seule et même loi, ni qu'elle soit représentable par une relation exprimée à l'aide d'opérations mathématiques. [Cité par Youschkevitch, 1976, p. 32]

Il est intéressant d'observer que des traces du lien fertile de cette notion avec les idée de co-variation et de mouvement peuvent être identifiées même dans ces deux dernières définitions, et, en particulier, dans celle du mathématicien qui principalement a contribué à l'élaboration de la définition moderne, Dirichlet. En fait, comme le souligné aussi Youschkevitch, dans cette définition de fonction continue, à coté du caractère évidemment général (et généralisable aux fonctions discontinues), le point de vue dynamique demeure présent et Dirichlet lui-même trouve nécessaire d'y ajouter une explication géométrique.

Ce n'est qu'en 1917, que Caratherdory a défini explicitement la fonction comme une loi de correspondance d'un ensemble  $A$  aux nombres réels et qu'en 1939 que

Bourbaki a introduit la définition de fonction, d'abord, comme une loi de correspondance entre deux ensembles et, puis, dans le dernier chapitre, comme sous-ensemble d'un produit cartésien. (Malik, 1980, Bourbaki, 1939).

### 3. Première hypothèse : fonction comme co-variation

Evidemment, nous n'avons exposé ici que très grossièrement seulement quelques étapes principales du développement de la notion de fonction. Le processus fut en réalité beaucoup plus complexe et plus subtil.

Cependant, ce n'est pas sans fondement que l'on peut lire la genèse historique de cette notion comme une longue tentative, d'abord de maîtriser, puis d'évacuer l'idée de mouvement et de variabilité. La solution finale adoptée a consisté à substituer la métaphore complexe du mouvement par une métaphore plus adaptée, n'impliquant pas le temps. Nous avons vu, que Sfard (1992), parle, à ce propos de « *three-centuries long struggle for reification* » (cf. Chapitre 2 § 2.2). En fait, pour elle, en observant le parcours historique, ce processus de réification s'est décliné en une suite de tentatives d'élimination du temps. Pendant plusieurs siècles, on a essayé d'enfermer le statut élusif de la notion de variable, trop fortement relié à une dimension temporelle intuitive, dans une définition structurelle. Le point nodal a été, justement, résolu par Bourbaki à partir du moment où il a éliminé cette notion « inréifiable » de variable, en fondant la notion de fonction sur une théorie purement ensembliste.

Ainsi, la définition moderne de fonction se réfère à une notion statique qui a finalement perdu toute relation avec l'intuition dynamique primitive :

[...] a deep gap separates early notions of function, based on an implicit sense of motion, and the modern definition of function, that is "algebraic" in spirit, appeals to discrete approach and lacks a feel for variable. [Malik, 1980]

Or, du point de vue didactique, si la définition bourbakiste représente une véritable conquête, elle a cependant été élaborée dans le but de répondre à un certain nombre de problèmes spécifiques, qui ne sont pas ceux auxquels sont confrontés les élèves du secondaire.

Ainsi, en paraphrasant Poincaré (1916) (cité par Thompson, 1994), le risque de présenter aux élèves une notion de fonction totalement dégagée de son aspect temporel et variationnel, de sa genèse historique, est comparable au comportement de celui, qui veut comprendre l'origine d'une merveilleuse concrétion coralline, sans rien avoir connu de l'organisme vivant qui un jour l'a habité. En fait, même si on peut envisager, dans le curriculum scolaire, d'atteindre à tel niveau final d'abstraction, l'introduction précoce d'une définition ensembliste de fonction ou une sous-estimation des aspects variationnels peuvent empêcher la construction réelle du sens. En revanche, comme montré par A. Sfard, ils peuvent engendrer la formation d'une conception « *pseudostructurelle* » de fonction, c'est-à-dire dépourvue des nécessaires flexibilité et interactivité avec le niveau opérationnel qui la soutient.

C'est pour ces raisons que nous prenons l'hypothèse épistémologique forte que l'un des signifiés fondamentaux de la notion de fonction est celui de co-variation<sup>31</sup>,

<sup>31</sup> Dans notre travail, nous utilisons donc le terme "co-variation" dans une acception différente de Confrey (Confrey et al. 1994). En effet, pour cet auteur, ce terme se réfère à une approche didactique particulière qui accentue le taux de variation, et qui demande aux élèves, dans un contexte numérique problématique, de construire une table de valeurs et d'identifier et décrire même de manière quantitative, la relation qui lie la variation de la variable dépendante à la variation de la variable indépendante. Ce terme possède donc un sens qui, même s'il est en lien au nôtre, s'en distingue fortement.

c'est-à-dire *d'une relation dynamique et asymétrique entre deux variations (entre deux variables qui varient dans deux ensembles) l'une dépendante de l'autre.* Surtout, nous considérons que celui-ci constitue le signifié principale sur lequel fonder, au moins dans ses débuts, l'apprentissage des fonctions et du graphe.

Nous sommes consciente que cette approche, en accentuant la variation, véhicule le risque de ne pas considérer comme fonction, par exemple, les fonctions constantes ou les fonctions ayant comme domaine et image un seul point. D'autre part, concevoir les fonctions d'abord comme co-variation, n'exclut pas la possibilité d'imaginer le cas limite d'une variation sur un domaine ponctuel. En tout cas, nous verrons mieux, dans les paragraphes suivants, que la prise en compte de ce risque nous a amené à prévoir justement dans notre séquence expérimentale des activités portant, de manière spécifique, sur les fonctions constantes

Nous ne sommes pas les seules à soutenir ce type d'arguments : plusieurs chercheurs ont souligné la même nécessité de bâtir, au moins au début, l'apprentissage de la notion de fonction sur le signifié de co-variation. Nous avons déjà cité Sfard (1992) et Malik (1980) qui, par exemple ont souligné que les deux types de définition de fonction (comme co-variation et comme correspondance) représentent deux modalités de pensée très différentes et qu'il n'est pas évident que la compréhension de l'une peut aider à comprendre la deuxième, surtout au niveau élémentaire :

In conclusion, we note that the definition of function as an expression or formula representing a relation between variables is for calculus or a pre-calculus course ; is a rule of correspondence between reals for analysis, and a set theoretic definition with domain and range is required in the study of topology. Since only a small percentage of school students eventually study analysis and topology, the set theoretic definition could be postponed to the beginning of these courses and a simple and easily understandable definition should be taught at the elementary level. One should also note that there is not yet any convincing evidence that a student introduced to an idea with a level of rigor and generality will develop a stronger liking for the subject or will be better trained for assimilating the techniques and concepts where only a particular form of ideas is in use. [Malik, 1980]

D'autres études classiques (Janvier, 1983, Herscovics, 1982 ; Malik, 1980 ; Markovits et al. 1986, Marnyanskii, 1965/1975) suggèrent même que l'exposition à cette définition ensembliste et formelle empêche toute compréhension intuitive que les élèves pourraient avoir relativement aux fonctions.

Galluzzi (1979), dans une analyse de la genèse historique de fonction, soutient la même thèse. Il explique que dans la définition moderne de fonction toute référence à la variabilité, comme les termes « parcourir » ou « changer », a été éliminée. A la limite on accepte ces expressions seulement comme de simples « suggestions psychologiques » :

Una tesi che s'intende sostenere in questo articolo è che questa [la définition bourbakiste de fonction], od altre, analoghe definizioni "statiche" non colgono l'intero sviluppo del concetto di funzione, e relegano a livello di "suggerimenti psicologiche" caratteri concettuali insopprimibili. Infatti, come si tenterà di dimostrare, è essenziale per il concetto di funzione che si tragga partito dalla variazione della variabile  $x$ . [Galluzzi, 1979 p. 432]

De même, Tall, dans son introduction au chapitre « Function and Calculus » rappelle que :

One purpose of the function is to present how things change [Tall, 1996, p. 288].

Enfin, en consonance avec notre point de vue, Sierpiska, aussi considère que même dans la définition de fonction par une triplette (**A**, **B**, **f**) (cf. Chapitre 2 § 1), finalement les ensembles **A** et **B** se réfèrent au monde des changements et des objets qui changent. Elle ajoute ensuite que les deux premières et fondamentales

conditions pour une compréhension réelle de la notion de fonction ce sont l'identification de certains changements et des éventuelles régularités associées :

[...] The notion of function can be regarded as a result of the human endeavor to come to terms with changes observed and experienced in the surrounding world. And thus we come to the first and most fundamental acts of understanding functions :

U(f)-1 : Identification of changes observed in the surrounding world as a practical problem to solve.

U(f)-2 : Identification of regularities in relationships between changes as a way to deal with the changes [Sierpiska, 1992, pg. 31]

Elle suggère que négliger ces deux conditions fondamentales peut être même un signe d'un premier obstacle épistémologique à surmonter.

### 3.1. Corollaire important : Interprétation dynamique du graphe

Notre hypothèse épistémologique a trait aussi à la notion du graphe. En effet, l'absence du signifié co-variationnel de fonction se reflète aussi dans la perception que souvent les élèves ont du graphe. En corollaire de notre première hypothèse de travail, nous postulons donc que le signifié co-variationnel de fonction est aussi fondamental pour la compréhension et l'apprentissage du graphe.

Goldenberg (1987) a été un des premiers à soutenir la nécessité d'une appréhension co-variationnelle du graphe :

[...] students should be encouraged to attend to the entire graph as an expression of the relationship between two simultaneously changing variables and to express that relationship in words as opposed to using numbers. This more qualitative approach has the clear advantage of recruiting students' common sense, intuitions, and reality-checking strategies [Goldenberg, 1987].

Pour conceptualiser le graphe en termes co-variationnels, il faut le considérer comme la trajectoire d'un point P qui bouge, représentant la variable dépendante, en fonction de la variation d'un autre point M variable sur l'axe des abscisses, qui représente la variable indépendante (Laborde 1999, p.170). Cette interprétation complexe requiert la réintroduction du temps et la prise en compte de la co-variation conjointe de P et de M comme une relation entre deux variations temporellement inter-reliées. Nous avons appelé cette interprétation, **interprétation dynamique du graphe**. Malheureusement, une telle interprétation dynamique reste souvent négligée dans les textes scolaires. Elle ne peut pas être expérimentée concrètement et demeure comme une sorte d'expérience mentale, peu souvent socialement partagée.

Nous verrons mieux dans un prochain paragraphe (cf. Chapitre 2 § 6) que c'est justement le manque de ce type d'interprétation qui peut expliquer plusieurs difficultés rencontrées par les élèves face à la lecture et à l'interprétation d'un graphe. Ainsi, par exemple, comme, pour certains élèves, la fonction peut se réduire à une formule qui permet de calculer des  $y(x)$  pour un ensemble discret et fini de valeurs de  $x$ , de même, le graphe d'une fonction peut être perçu simplement en termes de dessin ou d'objet géométrique statique. Il serait alors doué de certaines propriétés spatiales ou géométriques, éventuellement constitué d'un nombre fini de points par lesquels il est contraint de passer, mais la relation dynamique entre les deux variables l'une dépendante de l'autre, qui changent simultanément, leur reste totalement opaque.

Nous verrons aussi qu'il sera opportun d'enraciner l'apprentissage du graphe (comme celui de fonction) dans un environnement de géométrie dynamique,

susceptible de fournir un domaine sémantique de l'espace et du temps, où l'on peut expérimenter la variation comme mouvement.

#### 4. Brèves observations cognitives

La co-variation est liée à la perception et à l'expérience du changement. Parmi tous les types de changements, le changement de l'espace en fonction du temps, c'est-à-dire du mouvement, peut être considéré l'une des expériences les plus primitives du « *dynamic and continuous variation* », en utilisant les termes de Malik, (1980).

Plusieurs chercheurs soutiennent cette hypothèse. Lakoff et Núñez, par exemple affirment que l'être humain conceptualise le temps (target domain) premièrement en termes de mouvement unidimensionnel (source domain), deuxièmement en termes de mouvement de temps futurs vers l'observateur et, enfin, de mouvement de l'observateur sur tout le panorama temporel.

En général, ils affirment :

In our everyday conceptual system, change is understood metaphorically in terms of motion.  
[Lakoff et Núñez 2000, p.406]

A partir, d'autres perspectives, Longo (1997), en commentant Berthoz (1997) explique que :

Mon idée c'est que nos constructions conceptuelles (mathématiques en particulier) non seulement trouvent leur genèse dans ces phénomènes [certaines régularités de la physique, de la chimie, de la vie, comme les symétries, les réflexions de la lumière ou les trajectoires minimales que le monde nous impose] mais aussi obéissent au même paradigme : suite à notre action dans le monde, nous faisons des paris de représentation explicite, qui ne sont pas arbitraires, car ils sont riches de mémoire [la mémoire qui distille les invariants, mais aussi la mémoire commune, historique], et on construit sur ces mêmes paris, par des analogies, des métaphores, qui relient une structure mathématique et/ou une méthode de travail, à une autre.

Sans développer ultérieurement le point de vue de l'« *embodied cognitive science* » (Lakoff et Núñez 1998, 2000), ni d'autres analyses cognitives plus fines, nous aussi faisons ici l'hypothèse cognitive que les mathématiques sont le résultat socio-culturel d'une élaboration collective étroitement dépendante des certaines structures cognitives profondes et de certaines expériences humaines et corporelles fondamentales.

Faire une telle hypothèse implique alors que les signifiés cruciaux de co-variation et de dépendance fonctionnelle, indispensables pour la l'apprentissage des notions de fonction et de graphe de fonction, sont susceptibles d'être mieux compris si l'apprentissage porte sur des métaphores conceptuelles adéquates, en premier celles du mouvement et du temps.

#### 5. Critères de construction de la séquence expérimentale associés

Nous avons déjà fait référence aux travaux de Sierpiska et nous avons vu, par exemple que, pour elle les deux premiers actes fondamentaux pour la compréhension des fonctions sont l'identification de changements et régularités (cf. Chapitre 2 § 3). En développant une analyse épistémologique, elle a identifié d'autres conditions essentielles pour cette compréhension. Parmi elles, nous en avons retenu certaines, à partir desquelles nous avons élaboré des critères généraux de construction de la séquence expérimentale. Il ne s'agit pas de critères proposés

par Sierpinska mais de critères que nous avons conçus de manière originale, en partie inspirés par son analyse épistémologique, en partie suggérés par la nécessité de tenir compte des difficultés rencontrés par les élèves. Ils se lient avec l'hypothèse forte que nous avons adoptée de bâtir l'apprentissage des fonctions et de graphe de fonction sur le signifié de co-variation.

### **5.1. Avoir à faire avec des changements et des régularités.**

Lié aux deux conditions fondamentales pour la compréhension des fonctions, déjà citées (cf. Chapitre 2 § 3), le premier critère essentiel pour la construction de la séquence a été celui de confronter les élèves à la nécessité d'identifier, de maîtriser et de coordonner des changements qui soient en quelque sorte une source de problèmes pour eux (**critère I**).

Associée à cette condition, nous avons aussi décidé de conduire les élèves à identifier, parmi ces changements, des régularités, des invariants, capables ainsi, de constituer un moyen de contrôle des situations problématiques proposées (**critère II**).

Si, d'une part nous considérons fondamental de fonder l'apprentissage des fonctions et du graphe sur ces deux critères, d'autre part, nous avons aussi décidé de tenir compte des recherches de Leihardt et al (1990) de Markovits et al (1986) et de Marnyanskii (1965/1975). Ces auteurs, en fait, nous ont prévenu d'une autre difficulté possible (et d'un autre risque didactique possible associé), celle pour laquelle seulement des relations qui portent sur des quantités qui changent seraient des fonctions. Dans cette perspective, les fonctions constantes ne seraient pas légitimes.

Marnyanskii, à propos de ce phénomène parle de « Variable hypnosis ». Cette difficulté pourrait aussi être mise en relation avec d'autres études (Lovell, 1971, Vinner, 1983, Vinner et Dreyfus, 1989) qui soulignent combien les élèves ont du mal à imaginer aussi des fonctions surjectives. En effet, la fonction constante est la forme la plus extrême de fonction surjective.

Cette dernière considération nous amène aussi à prévoir, dans l'élaboration de la séquence expérimentale, des tâches qui portent aussi sur des fonctions constantes, et qui jouent sur le contraste avec des fonctions non constantes, éventuellement injectives ou bijectives (**critère III**). Nous croyons que ces activités devraient pouvoir aussi permettre d'approfondir les signifiés de domaine et image d'une fonction (**critère IV**).

### **5.2. Identifier ce qui change : inconnues et connues versus variables et constantes.**

Sierpinska (1992) rappelle que, très souvent, lors de l'observation et de l'identification des changements, les étudiants ont des difficultés à identifier quels sont les objets qui changent dans le processus : ils n'analysent pas la situation mais ils la prennent comme un tout un, comme un phénomène tel comme la pluie ou la neige.

Elle évoque le cas d'un groupe d'étudiants qui, par l'analyse d'un graphe donné, devaient identifier le processus d'itération grâce auquel une fonction avait été dynamiquement construite. Dans le graphe donné, les élèves observaient le déplacement d'un point, en focalisant leur attention sur le déplacement en soi, sur les changements, sans prêter attention à ce qui était déplacé en fonction de quoi. Ils étaient simplement intéressés à la forme du parcours du déplacement (« à spirale » ou « à étages »).

Monk (1992) aussi a mis en évidence un problème analogue et a souligné que une source de difficultés des élèves réside justement la non reconnaissance des variables pertinentes.

Pour Schoenfeld et Arcavi (1988), la notion de variable joue un rôle central dans l'apprentissage des mathématiques, où la compréhension du signifié de variable fournit les bases pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre et où elle est nécessaire pour «un usage plein de sens dans toutes les mathématiques avancées».

Une première cause didactique à l'origine des difficultés des élèves face aux variables peut être identifiée dans l'expérience que les élèves ont de cette notion avant d'aborder les fonctions : souvent ils ont travaillé exclusivement sur la distinction entre quantités connues et inconnues. Ainsi, au moment où ils sont confrontés pour la première fois aux fonctions, ils doivent passer de cette distinction à celle entre quantités constantes et variables. Il s'agit d'un véritable changement de mentalité. Être capable de discriminer entre ces deux façon de penser (l'une en termes de connue/inconnue, l'autre en termes de constants et variables) et être familier à raisonner en termes de variables et de constantes, c'est-à-dire en termes fonctionnels, devient alors une condition nécessaire à tout apprentissage consécutif, non seulement des fonctions.

Même historiquement, Sierpiska montre que cette différence a été tellement importante qu'elle a été considérée comme une ligne de démarcation entre deux domaines distincts des mathématiques, l'Analyse et l'Algèbre :

Starting from at least Euler, presentations of Analysis would begin with a sharp discrimination between the "variable" and the "constant" quantities, and between this aspect of magnitudes and the one common in Algebra (or "ordinary Analysis") where the main discrimination was between the known and the unknown quantities [Sierpiska, 1992, pg. 37]

Et, en effet, si on reprend l'introduction à l'analyse infinitésimale d'Euler, on trouve :

Une quantité constante est une quantité déterminée qui conserve toujours la même valeur. A la vérité, dans l'Analyse ordinaire [c'est-à-dire dans l'Algèbre actuelle] qui n'a pour objet que des quantités déterminées, on désigne ordinairement celles qui sont connues par les premières lettres de l'Alphabet, et celles qui ne le sont pas, par les dernières ; mais c'est une distinction à laquelle on a moins égard dans la haute Géométrie [c'est-à-dire dans la Géométrie Analytique et dans l'Analyse actuelle]; on y envisage les quantités sous un autre aspect, les unes étant considérées comme constantes, les autres comme variables [Euler, 1748].

Ces considérations nous amènent à formuler notre quatrième critère de construction de la séquence expérimentale, à savoir la nécessité d'organiser des activités qui focalisent non seulement sur des changements et des régularités, mais qui portent surtout sur l'identification et l'observation de ce qui change, autrement dit sur la variation et le rôle des variables (**Critère V**).

Une deuxième cause à l'origine des difficultés des élèves à identifier ce qui change, c'est-à-dire face aux variables, peut être identifiée dans leur incapacité à percevoir les variables en termes dynamiques. Tout comme la définition de fonction a évolué au cours du temps, en connaissant un « affranchissement » progressif de l'idée de variation dans le temps, aussi celle de variable, de plus en plus liée à la notion ensembliste de domaine et de plus en plus liée au cadre numérique, en gagnant en généralité, a perdu son caractère changeant et ses liens vitaux et originaux avec la géométrie.

En effet, même historiquement, l'introduction d'un nouveau système de signes, en particulier par Viète et Descartes, a fourni un moyen puissant de traitement indirect des relations entre variables. Les représentations figurales de variables



géométriques, en d'autres termes les dessins de figures géométriques, ne permettent pas un tel type de représentation, où, en particulier, le traitement d'un cas général est soumis à l'élaboration d'une instance particulière. Or, l'usage des lettres a permis de dépasser la difficulté de traiter directement la généralité des cas. Cependant, du même coup, cet usage a figé la représentation d'une idée dynamique en un signe statique, justement élaboré pour la perte de référence à une telle signification, qu'il occasionnait.

L'introduction des lettres et des symboles a constitué une contribution importante à l'idée de variable mais a du coup été à l'origine de la séparation entre algèbre et géométrie. En fait, depuis l'introduction des symboles pour représenter des variables, algèbre et géométrie ont gagné en autonomie mutuelle.

La plupart des mathématiciens n'a pas perdu de vue les liens sémantiques qui ont nourri l'évolution et la systématisation de l'idée de nombre réel. Par exemple, dans son travail, Dedekind (1872) explique clairement comment l'intuition géométrique attachée à la continuité de la droite inspire la nouvelle définition des nombres réels en tant que sections de rationnels. Cependant, une fois la séparation entre algèbre et géométrie réalisée, la puissance des liens entre les deux sources d'idées a été négligée.

Du point de vue didactique, le mouvement de réforme des mathématiques des années 50 et 60 du vingtième siècle, a amené à un changement substantiel de la définition de variable, qui continue à prédominer encore aujourd'hui. Elle a commencé à être enseignée dans sa forme la plus générale possible, avec la conséquence que toute symbole littéral a été introduit comme variable (Kieran, 1989).

Cela a conduit à accentuer une appréhension relativement « statique » et discrète, tendent à considérer la variable comme un outil de généralisation ou de modélisation. Cette approche, souvent associée à l'usage et à la manipulation de symboles algébriques (lettres, inconnues) dans la résolution d'équations ou de problèmes lié au cadre exclusivement numérique a contribué à la perte ou la non construction même, d'un signifié dynamique de variable.

Au contraire, nous estimons que un accès aux variables par le biais des variables géométriques (par exemple en tant qu'objets qui changent au fur et à mesure leur position dans un domaine donné, comme un point qui varie sur un figure ou une figure qui varie dans le plan) pourrait capturer d'avantage la variabilité au sein d'un domaine et, dans le cas d'une fonction, du changement simultané et conditionné d'une variable par rapport à l'autre. Nous avons donc élaboré notre sixième critère de construction de la séquence, qui a consisté à travailler avec des variables géométriques où une certaine appréhension, même spatiale et spatio-temporelle de la variation, peut être développée (**critère VI**).

### **5.3. Asymétrie des variables indépendantes versus variables dépendantes**

Dans la définition de fonction (cf. Chapitre 2 § 1), le rôle des ensembles **A** et **B** n'est pas symétrique. Sierpinski observe que si cette considération ne semble pas poser des problèmes pour nous aujourd'hui, il a fallu beaucoup de temps pour qu'historiquement, cela puisse se clarifier convenablement.

Une raison, en est due au fait que la notion de fonction s'est développée pour longtemps au sein de la géométrie analytique, où les relations entre les différents éléments d'une courbe étaient prédominants et où le rôle des variables était finalement interchangeable. En fait, après tout si nous analysons l'équation d'une ellipse, l'ordre des variables importe peu.

---

Les historiens attribuent la discrimination entre variables indépendantes et dépendante à Descartes. Cependant, comme Sierpiska et d'autres auteurs, nous questionnons, au moins partiellement, cette hypothèse. Le rôle des coordonnées dans la *Géométrie* reste, en fait, assez symétrique, le point de vue étant encore lié aux inconnues et au problème de représenter les solutions d'équations comme courbes.

Cette discrimination ne semble pas claire même dans Newton, où les grandeurs varient encore avec le temps, bien que, ce dernier soit considéré par Newton, comme une notion purement conventionnelle.

A nouveau, Sierpiska lie cet obstacle aux difficultés que les élèves rencontrent encore aujourd'hui. Elle reporte le cas d'un élève qui avait à faire avec des fonctions dans un contexte analytique (Sierpiska, 1992). Elle a remarqué que, pour lui, les courbes n'étaient pas des représentations de certaines relations entre variables. Plutôt les courbes étaient déjà là en premier et les relations servaient seulement pour les décrire ou les représenter. La formule de la fonction permettait simplement de calculer une coordonnée quand l'autre était donnée. Le fait que la deuxième coordonnée était toujours à être univoquement déterminée par la première, et jamais dans l'autre sens, n'était pas perçu par l'étudiant.

Plusieurs autres études mentionnent cette même difficulté (Carlson, 1998, Leinhardt et al. 1990). Nous avons donc décidé de concevoir une séquence expérimentale qui non seulement développe au fond le signifié de variable (en jouant sur l'opposition variable/constante) mais qui soit susceptible de confronter de manière problématique les élèves à la dissymétrie fondamentale entre variables indépendantes et dépendantes (**critère VII**).

#### **5.4. Discriminer entre la fonction et ses représentations diverses**

Lors de son analyse, Sierpiska (1992) met en lumière, de manière spécifique, des obstacles épistémologiques liés aux différentes formes de représentation d'une fonction. Ces obstacles constituent pour elles d'autres sources d'erreurs pour les élèves et suggèrent d'autres conditions nécessaires pour la compréhension des fonctions.

A nouveau, nous en avons retenu certaines qui sont servi comme des critères ultérieurs de construction de la séquence.

##### **I. Fonctions et tables de valeurs ou successions de nombres**

Sierpiska (1992) rappelle que les tables de valeurs sont la forme la plus ancienne de représentations de relations ou fonctions. Certains historiens en fait situent déjà dans des tables de mesures babyloniennes 2000 ans avant J. C., le germe de l'idée de fonctionnalité.

Cependant Sierpiska, nous prévient que si les fonctions sont par erreur identifiées aux les tables de valeurs, il y a le risque de percevoir les fonctions comme des successions de nombres. Ainsi, une des conséquences possibles serait alors celle de croire que les méthodes d'interpolation donnent la valeur exacte de la fonction dans les points intermédiaires.

La solution pour éviter ce risque consisterait dans une approche didactique intégrant plusieurs formes de représentations ; ajoutons qu'il s'agit aussi de permettre la mise en lumière des limites de toutes ses formes, en particulier le caractère partiel d'une table de valeurs. En outre, à nouveau, nous croyons qu'une approche co-variationnelle, où l'on travaille explicitement sur la relation de dépendance fonctionnelle entre variables devrait empêcher de concevoir le graphe comme constitué seulement de quelques points donnés et, pour le reste, « vide ».

Autrement dit, une **interprétation dynamique du graphe** devrait, au moins en partie, permettre de minorer ce risque. Nous verrons que toute la deuxième partie de notre séquence expérimentale visera justement à développer ce type d'interprétation (**critère VIII**).

## II. Fonctions, graphes et courbes

L'étude des courbes a joué un rôle crucial dans l'histoire des fonctions. Elles ont fourni le contexte où les outils analytiques ont pu se développer. La genèse de l'Analyse est, en fait, étroitement liée à la recherche de tangentes, normales et aires sous-entendues par des courbes. C'est dans ce contexte que Jean Bernoulli a forgé le terme « fonction », en parvenant à formuler sa première définition.

La recherche de relations et des conditions géométriques et numériques minimales susceptibles de définir des courbes données mécaniquement (comme trajectoire d'un point variable ou comme intersection de deux surfaces dans l'espace) a fourni les expériences mathématiques qui, successivement ont abouti aux notions de système de coordonnées, d'équation d'une courbe dans un système de coordonnées et, finalement, à celle de graphe. L'équation d'une courbe décrit la relation entre les coordonnées d'un point arbitraire de la courbe, relation qui pour certains domaines des variables, est une relation fonctionnelle.

Cependant, les courbes, si importantes pour le développement de l'Analyse dans le XVII<sup>ème</sup> siècle, n'étaient pas conçues comme des graphes de relations données, par exemple, par des équations. Les courbes étaient avant tout des objets géométriques : lieux ou trajectoires de points qui bougent. Les équations étaient seulement les *symptômes* de ces courbes, ou, comme disait Newton, leur nature. Analogiquement, les coordonnées n'étaient pas des nombres déterminés par un système d'axes préalablement fixé, mais des segments, c'est-à-dire des objets géométriques, choisis de manière opportune et séparément pour chaque classe de courbes à fin de les décrire par des rapports.

Cela ne signifie pas que des graphes portant sur des relations entre grandeurs variables n'existaient pas. Sierpiska cite le cas d'un graphe du XI<sup>ème</sup> siècle qui, illustre le changement de la latitude (sur l'axe vertical) de la position d'un planète en fonction de la longitude (sur l'axe horizontal). Cependant, les notions de graphe et de courbe se sont développées séparément pour longtemps, pour converger lors de l'introduction du développement de la géométrie analytique d'abord par Descartes, puis par Euler. Les mathématiciens utilisaient des courbes comme des modèles géométriques très utiles pour décrire des relations. Cependant, ces modèles ne nécessitaient pas d'être très fidèles quantitativement. Nous avons, en fait, déjà rappelé que les représentations d'Oresme étaient plutôt qualitatives que quantitatives.

A partir de ces considérations épistémologiques, Sierpiska a identifié une nouvelle condition pour la compréhension des fonctions, c'est-à-dire la nécessité de ne pas confondre le graphe d'une fonction avec son modèle géométrique. Les conséquences de cette identification seraient, d'une part, de ne pas considérer les coordonnées comme des nombres, d'autre part, de considérer le graphe de fonction comme un objet géométrique qui ne nécessite pas d'être quantitativement fidèle à la relation fonctionnelle qui représente ou qui peut contenir des points  $(x, y)$  pour lesquels la fonction n'est pas définie en  $x$ .

A partir d'une analyse historique et épistémologique similaire, Chauvat (1997, 1999a), a mis en évidence le même type d'obstacle. En citant Parmentier (1989) pour lequel « *l'idée de fonction [et nous ajoutons de graphe] s'est construite historiquement contre celle de courbe* », Chauvat a même montré comment une

certaine approche didactique est susceptible de renforcer un tel obstacle, en particulier, à partir du moment où il y a l'établissement d'une équivalence systématique entre fonction et courbe.

Cette analyse ne signifie pas, pour, nous, d'éviter tout recours à la géométrie et de renoncer ainsi à toute la richesse des liens épistémologiques et de sens qui ont nourri mutuellement le développement des signifiés de graphe et courbe géométrique. Au contraire, nous croyons que le rapport étroit entre ces signifiés soit à exploiter. Cela nous amène à formuler notre neuvième critère (**critère IX**) de construction de la séquence : fonder l'apprentissage du graphe sur le signifié de courbe géométrique, en faisant bien attention à développer de manière explicite les relations (et les différences) respectives entre ces deux objets.

### III. Fonctions et expressions algébriques

L'absence d'une conscience algébrique rend l'apprentissage des fonctions assez difficile. D'autre part, les compétences algébriques accompagnées de la croyance du pouvoir de l'algèbre à résoudre presque automatiquement tout type de problèmes, peut constituer un obstacle nouveau à la compréhension des fonctions. Sierpiska (1992) a montré, à nouveau, comment ce type de phénomène s'est produit aussi historiquement

History has known this kind of phenomenon. In the XVIIth and XVIIIth centuries, even if, at the beginning of solving a problem, proportions and equalities were used to represent some functional relationship, in the course of solution, they would gradually lose this meaning and become mere algebraic expressions on which formal operations were performed. In Newton, at least in his first works, the operation of derivative was a formal operation on monomials [...].

Nous avons déjà vu que, même les premières définitions de fonction (cf. Chapitre 2 § 2.5) portaient fortement sur la forme de l'expressions algébrique associée .

Cet attachement aux moyens algébriques a conduit à un obstacle pour le développement de cette notion très difficile à surmonter : celui pour lequel seulement des relations exprimables par des formules analytiques avaient le droit d'être appelées fonctions.

Seulement l'étude des séries de Fourier et des conditions pour leur convergence a conduit Dirichlet, en 1837, à formuler sa définition générale qui comprendrait aussi des fonctions assez bizarres, difficiles à accepter du premier coup. Certaines d'elles n'étaient pas représentables par une courbe à main levée, d'autres étaient continues mais nulle part différentiables. Pour les accepter, il a fallu une culture mathématique assez mature et la nécessité de faire face à des problèmes nouveaux, qu'on ne pouvait pas résoudre à partir des anciennes définitions.

Cette résistance peut être aisément observée aussi chez les élèves. Nous avons vu que, dû aussi probablement à une certaine pratique scolaire, pour la majorité des étudiants, l'image associée aux fonctions se réduit facilement aux fonctions continues ou non différentiables en un nombre fini de points, donnés par une seule formule et ayant un graphe constituées d'un seul morceau de courbe (éventuellement assez familier) (Lovell, 1971 ; Vinner 1983 ; Vinner et Dreyfus, 1989).

Si d'une part, faire coïncider la fonction avec son expression analytique peut comporter le développement de ce type de signifiés personnels, d'autre part, on peut aussi constater le risque opposé. Pour certains élèves, l'expression analytique constituerait seulement l'étiquette, le nom de la fonction, tandis que la fonction elle-même coïnciderait avec son graphe. Sierpiska attribue cette difficulté au fait que ces élèves ne conçoivent pas l'expression algébrique en termes analytiques, c'est-à-

dire que, pour ces élèves, une telle expression n'exprimerait pas la relation entre les coordonnées des points de la courbe représentative.

Nous ajoutons que cette difficulté peut aussi s'expliquer par d'autres raisons comme :

- l'absence du signifié co-variationnel de fonction dans l'écriture algébrique (où les variables dépendantes ne seraient pas liées de manière simultanée aux variables indépendantes)
- l'absence du signifié co-variationnel de fonction dans le graphe (qui serait perçu seulement globalement comme un objet doué d'une certaine forme ou de certaines propriétés spatio- géométriques)
- ou, encore, l'incapacité de retrouver dans l'expression algébrique sous une nouvelle forme, la même relation de co-variation caractérisant le graphe.

Cette dernière difficulté se lie à la nécessité de savoir articuler d'une façon adéquate la représentation graphique d'une fonction avec son expression algébrique. Duval (1993) explique que la maîtrise de cette articulation (en réalité Duval parle d'apprentissage des règles de correspondance sémiotiques) n'est nullement favorisé par *l'approche point par point* (c'est-à-dire par la pratique qui tient au passage d'une équation à sa représentation avec construction point par point). Au contraire, il affirme que « *l'approche point par point* non seulement est inadéquat mais *constitue un obstacle* » (Duval, 1993, p.37). Ce qui en revanche est nécessaire c'est une *démarche d'interprétation globale des propriétés figurales*. Cette dernière repose sur la capacité de relier les modifications pertinentes de l'image (tracé plus axes) de la représentation graphique avec les modifications correspondantes dans l'écriture algébrique et requiert donc l'identification des *variables visuelles pertinentes* et des *unités d'écriture symboliques qui y correspondent* :

La lecture des représentations graphiques présuppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations correspondantes de l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple des nombres [Duval, 1993].

Ainsi par exemple, par rapport à l'écriture  $y=ax+b$ , la valeur « trait montant » de la variable visuelle « sens de l'inclinaison » de l'image de la représentation graphique, doit être reliée à l'unité symbolique correspondante « coefficient  $>0$  plus absence du symbole ».

Nous croyons qu'une telle démarche nécessite préalablement la capacité de concevoir en termes co-variationnels, et la représentation graphique, et l'expression algébrique conjointe. Si les élèves ne perçoivent pas la variation des variables ou s'ils perçoivent séparément la variation de la variable indépendante de la variation de la variable dépendante, la discrimination des *variables visuelles pertinentes* par rapport aux *unités symboliques correspondantes* ne serait qu'un exercice mnémorique dépourvu de sens .

Les considérations que nous venons de faire, nous amènent à formuler notre dixième critère (**critère X**) de construction de la séquence : la nécessité de travailler l'articulation entre plusieurs registres (algébrique, numérique et graphique) (Duval, 1993), dans le but, d'une part, d'y retrouver le signifié co-variationnel de fonction exprimé sous des formes différentes, d'autre par d'articuler les différents signifiés.

## 6. Le signifié de co-variation et les difficultés des élèves

Une vaste littérature reporte sur les difficultés liées à la notion de fonction. Nous en avons déjà mentionné certaines lors des paragraphes précédents.

Carlson (1998) les a synthétisées :

- incapacité de donner du sens au langage et aux notations spécifiques ;
- incapacité d'exprimer les relations de dépendance fonctionnelle du monde réel en termes de représentation algébrique ou graphique (en particulier incapacité de représenter graphiquement les aspects de co-variation entre phénomènes) ; (une modélisation préalable est nécessaire)
- incapacité d'interpréter dynamiquement les informations graphiques ;
- n'être pas capable de distinguer entre zéros des fonctions et solutions des équations ;
- incapacité de comprendre la nature générale des fonctions (pour les élèves, une fonction est toujours donnée par une formule algébrique unique et elle est toujours continue) ;
- incapacité de reconnaître le rôle dissymétrique des variables dépendante et indépendante dans la représentation algébrique ;
- incapacité de passer d'une représentation algébrique à une représentation graphique.

Carlson, comme d'ailleurs Thompson (1994), fait visible dans cette liste, la majorité des difficultés citées est étroitement reliée à la nécessité de concevoir la fonction comme une relation asymétrique entre deux variables, l'une dépendante de l'autre.

En revanche, une grande partie des études sur les difficultés des élèves ne prend pas explicitement en compte ces aspects co-variationnels mais se focalise directement sur les problèmes rencontrés par les élèves face aux graphes de fonction. (Dreyfus et Eisenberg, 1983, Vinner and Dreyfus 1989, Tall 1991) Nous avons vu (cf. Chapitre 2 § 2.1, 2.2 et 2.3) que, dans le but de résoudre ces difficultés, ils proposent plusieurs approches, dont la majorité est basée sur l'utilisation d'environnements informatiques, parfois spécialement conçus à cette fin.

Cependant, en lisant l'oeuvre de Leinhardt et ses collègues (Leinhardt, Zaslavky et Stein 1990), qui représente une synthèse très complète et approfondie des types divers de difficultés mentionnées en littérature, nous avons pu remarquer que même pour ce qui concerne les difficultés liées au graphe, un grand nombre d'entre elles s'explique par le manque de ce que nous avons appelé une **interprétation dynamique du graphe**. Ce manque, à nouveau, est lié à l'absence du signifié co-variationnel de fonction.

Par exemple, Leinhardt et ses collègues rendent compte des études de Kerslake (1981), Janvier (1983) et Mansfield (1985). Les résultats s'accordent à montrer que les élèves ont du mal à concevoir tous les points d'un graphe d'une fonction continue, comme la représentation d'une relation qui lie simultanément et de manière permanente deux variables. En particulier, Kerslake (1981) a donné à un group d'élèves un ensemble de couples de nombres. Ensuite, elle leur a demandé de les dessiner dans un repère cartésien et de connecter les points identifiés par des segments. Ensuite, elle leur a posé un certain nombre de questions sur les points « non marqués » du graphe ainsi obtenu. Plusieurs élèves ont affirmé qu'il n'existait pas de points entre deux points marqués. D'autres qu'il y en avait seulement un, probablement au milieu. Quand il a demandé combien de points il y avait, plusieurs élèves ont donné le nombre des points dessinés initialement, d'autres ont ajouté aux points initiaux, les points d'intersection du graphe avec les axes.

Markovits et al. (1986) dans une étude complémentaire sur les fonctions discrètes, ont montré que les élèves avaient toujours la tendance à relier des points discrets, même quand le graphe en question représentait le poids de quatre enfants.

Dans ces deux derniers exemples, on voit bien comment le graphe est perçu en termes statiques, comme dessin constitué d'un certain nombre de points

« spéciaux » et éventuellement de lignes et non comme représentation d'une relation co-variationnelle et dynamique.

En fait, en général, ces recherches mettent en lumière la tendance des étudiants à concentrer leur attention surtout sur des points particuliers, sans tenir compte du fait que ces points soient reliés ou non. Ainsi, mêmes si des « lignes » sont acceptées comme une partie légitime du graphe, elles semblent fonctionner comme un trait de liaison plutôt que avoir un sens en soi.

Cette tendance à ce qu'on pourrait aussi définir « un point de vue exclusivement ponctuel sur le graphe », peut être attribuée, non seulement à un manque relatif aux signifiés co-variationnel de fonction, de domaine et d'ensemble image, mais aussi à une pratique didactique qui porte, quasi-exclusivement, sur une approche quantitative. Bell et Janvier (1981) ont été les premiers à soutenir qu'une telle approche, où la majorité des tâches relève de la construction d'un graphe de fonction à partir d'une table de valeurs données ou sur la résolution quasi exclusive des questions ponctuelles et quantitatives, était mal adaptée. Ils suggèrent que, plutôt que de commencer avec des tâches qui demandent aux étudiants de lire ou dessiner des points dans un système d'axes cartésien, les élèves soient d'abord introduits aux graphes, à partir d'une approche qualitative, susceptible de développer plutôt une appréhension globale.

Parallèlement, pour ce qui concerne la notion de variable, plusieurs autres études ont analysé la complexité de cette notion et ont montré comment certaines approches ont une influence déterminante sur les notions associées de fonction et de graphe. Ainsi, par exemple l'étude de Wagner (1981), cité par Leinhardt et ses collègues (Leinhardt, Zaslavky et Stein 1990), montre que pour beaucoup d'élèves le changement de symbole pour la variable dans une expression, entraîne des changements critiques sur la façon de considérer la fonction associée. Les étudiants semblent se focaliser seulement sur le changement de symbole, sans saisir l'idée centrale de la dépendance fonctionnelle entre ces variables. Ces résultats sont en accord avec ceux reportés par Marnyanskii (1965/1975) (toujours cités par Leinhardt, Zaslavky et Stein (1990)) qui a relevé que avant d'étudier les fonctions, les étudiants conçoivent les variables comme des « objets uniques », susceptibles d'avoir une seule valeur éventuellement inconnue. Cette manière de voir expliquerait pourquoi, dès que les élèves abordent les fonctions, si les lettres dans une équation représentent chacune un « objet unique », changer les lettres reviendrait à changer les objets. Cet auteur ajoute que seules des activités portant sur la dépendance fonctionnelle peuvent rendre les élèves conscients de « l'ensemble de nombres cachés derrière chaque seule variable » :

Only as the work with variables in a functional relationship do they become aware of the set of numbers (as a rule, an infinite set) concealed behind it [Marnyanskii (1965/1975)]

Une étude récente (Trigueiros & Ursini 1999) montre que les conceptions des élèves de la notion de variable ne sont pas fondamentalement améliorées par une augmentation du nombre de leçons d'algèbre. Les auteurs interprètent de manière général ces résultats comme dus aux approches actuelles en cours dans l'enseignement, approches qui sont de type essentiellement numérique et discret :

It seems that students are more able to use their imagination and other resources when they have not been exposed to formal algebra courses [Trigueiros et Ursini 1999, p. 275].

En fait, une des difficultés principales est relative au fait que les premières variables rencontrées par les élèves ont des valeurs discrètes, puisque ces variables sont des entiers naturels ; cette difficulté bien que fluctuante persiste à tous les niveaux scolaires (Trigueiros et Ursini, 1999). En particulier Trigueiros et Ursini

(1999), comme déjà Carlson (1998), mettent en évidence la difficulté d'identifier la variation corrélée de deux variables. Ils affirment que cela peut constituer même un obstacle à la symbolisation d'une relation.

Nous avons pu observer que, dans le domaine des recherches en didactique des mathématiques, un grand nombre de projets de recherche se sont attaqués à la notion de variable, tant du point de vue des conceptions des élèves que des pratiques d'enseignement, mais presque tous concernent le domaine algébrique. Cette notion semble donc ne pas relever beaucoup du domaine géométrique, du moins en tant qu'objet de recherche.

Ainsi, en commentant les recherches classiques sur les variables (Arcavi et Schoenfeld, 1987 ; Usiskin, 1988 ; Wagner, 1981), Thompson (1994) se montre très surpris qu'elles se soient concentrées quasi-exclusivement sur les variables numériques, en négligeant les autres grandeurs variables, sur lesquelles, au contraire, il considère important de bâtir le signifié de co-variation :

I am surprised that so little has been investigated in regard to students' concepts of variable magnitude - the focus instead being on variable as literal representation of number. It seems, to me anyway, that a progressively more abstract notion of covariation rests upon a progressively more abstract image of variable magnitude [Thompson, 1994].

Dans l'enseignement secondaire, bien que l'on renvoie à la définition moderne de fonction, les notions de variable et de fonction restent souvent confinées au domaine des nombres réels. Points, droites, ou cercles sont rarement considérés comme des variables en eux-mêmes, ou plutôt leur variabilité est immédiatement aspirée par la variabilité des mesures qui leur sont attachées — coordonnées, équations, longueurs — et s'y confond. Ainsi, malgré l'approche plus récente de la géométrie par les transformations, une conception purement géométrique d'une relation fonctionnelle est encore inhabituelle de nos jours. Plus encore, comme nous l'avons vu, la fonction en tant que correspondance entre deux ensembles renvoie à une notion statique qui a perdu toute relation avec l'intuition primitive reliée au mouvement telle qu'elle apparaît historiquement. Le recours à la représentation graphique d'une fonction ne permet pas de faire face à ce problème. En fait, comme tout diagramme, cela reste essentiellement statique. Une appréhension dynamique réside dans les yeux de celui qui observe le graphe et cette interprétation n'est ni spontanée ni donnée; surtout à partir d'une définition qui a abandonné définitivement la métaphore du mouvement :

I wish to mention quickly that in today's K-14 mathematics curriculum there is no emphasis on function as covariation. In fact, there is no emphasis on variation. [Thompson, 1994]

Goldenberg aussi critique la primauté de l'approche numérique (Goldenberg et al., 1992). Cette dernière associée au manque d'une expérience de dépendance fonctionnelle d'une manière qualitative, peuvent donc être considérée par comme une des principales sources des difficultés des élèves.

En effet, par une approche de type algébrique ou numérique, les élèves acquièrent une appréhension assez discrète des fonctions, dans laquelle l'on met en relation des couples séparées de nombres, où chaque nombre peut être considéré comme une entrée (« Input ») qui donne comme résultat un autre nombre. Les élèves considèrent cette relation mais, néanmoins, cette relation demeure séparée pour chaque couple de points. (Laborde et Mariotti, 2001).

Dans un autre travail, Hazzan et Goldenberg (1997) ont ainsi proposé une approche alternative à l'approche numérique, basée sur la géométrie dynamique. Ils ont analysé des constructions géométriques en termes de dépendance fonctionnelle et ils ont interviewé des étudiants en observant s'ils semblaient ou non reconnaître la dépendance fonctionnelle parmi les éléments géométriques (points, droites...). Ils



ont observé effectivement le recours aux signifiés de dépendance fonctionnelle. Même si l'utilisation de certains termes, comme « dépendre » ou « dépendant », employés au sens courant, n'étaient pas toujours consistants avec l'usage en mathématiques.

Il n'y a pas des preuves irréfutables en faveur d'une seule approche optimale des notions de fonctions et graphe de fonctions (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990) : chaque choix didactique particulier amène des risques et des difficultés associées. Par exemple, comme l'ont suggéré Grugnetti, Marchini, et Maffini (1999) une idée dynamique de fonction pourrait engendrer des problèmes liés à la notion de continuité (comme par exemple la conviction que toute fonction est continue).

Cependant, en accord avec la perspective de Hazzan et Goldenberg (1997), dans notre étude, nous considérons qu'un premier accès aux fonctions par le biais du cadre algébrique ou numérique, risque de voiler le caractère dynamique et variationnel des variables et des fonctions.

Par conséquent, nous avons décidé de situer l'apprentissage des fonctions dans un environnement susceptible de fournir une expérience qualitative de dépendance fonctionnelle, qui ne soit pas principalement basée sur une approche numérique et quantitative. Notre séquence expérimentale, a été ainsi conçue et implémentée dans le but d'introduire les étudiants au signifié de fonction comme co-variation, à partir des fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique (EGD).

Les potentialités de cet EGD ont été exploitées en accord avec la double perspective de la médiation sémiotique, puisque cet environnement offre des instruments de médiation sémiotique potentiels, (cf. Chapitre 1 § 3.6.2) et de la théorie des situations, puisqu'il peut participer la constitution d'un milieu riche et problématique (cf. Chapitre 1 § 4.1).

Il s'agit de notre deuxième hypothèse de travail, que nous expliquerons au paragraphe suivant.

## **7. Deuxième hypothèse : une approche alternative, les fonctions géométriques dans Cabri-géomètre**

L'exigence didactique d'engendrer et de soutenir des expériences qualitatives de dépendance fonctionnelle fondées sur les métaphores fondamentales du mouvement et du temps, pour le développement du signifié co-variationnel de fonction et une interprétation dynamique du graphe, nous a conduit à postuler le rôle décisif d'un environnement de géométrie dynamique, tel que Cabri-géomètre.

En effet, ce qui premièrement caractérise et définit cet environnement de géométrie dynamique (EGD) c'est le mouvement, et le fait que ce mouvement préserve les relations construites entre les éléments. Ainsi, à la différence des environnements papier-crayon, où l'on ne peut représenter directement la variation, dans Cabri, il est possible de l'expérimenter sous la forme du mouvement. L'idée de la variation est enracinée dans le mouvement, en ce que les points peuvent être déplacés à l'écran et représenter des variables basiques. Par conséquent, Cabri, et en général les EGD, incorpore et relie de façon puissante les idées de variation et de dépendance fonctionnelle (Laborde et Mariotti 2001).

Plus précisément, Cabri en constituant un environnement qui intègre le domaine sémantique de l'espace et du temps, peut fournir l'accès aux fonctions par le biais des fonctions géométriques. Nous appelons cette instance particulière de fonction « fonction géométrique dynamique ».

Du point de vue des difficultés des élèves relativement à la notion de variable, nous avons vu qu'elles peuvent être attachées au passage rapide et artificiel des grandeurs (espace, temps et vitesse) aux nombres purs. En effet, même une perception intuitive de la continuité du temps peut disparaître dans l'activité de construction d'une table où le temps est repéré par des valeurs discrètes.

En revanche, la construction du signifié de variable dans le domaine de la géométrie (et en particulier de la géométrie dynamique) permet la construction d'un signifié de la variation (variation de chaque élément et variation conjointe) indépendamment de la notion de nombre. Cette construction serait alors complémentaire de l'approche algébrique par les nombres. Les intuitions attachées aux notions de variable et de fonctions issues du domaine géométrique pourraient ainsi contribuer au passage du discret au continu. Le travail sur le point variable d'une droite, d'un cercle ou d'un lieu de points, sur une droite variable de direction donnée serait susceptible de favoriser le développement d'un signifié de variable, alternatif et complémentaire aux signifiés élaborés dans le cadre algébrique et fondés sur la variation de nombres.

Les environnements les plus connus, conçus pour l'introduction à l'algèbre, donnent une place secondaire aux variables géométriques, telles points, droites, lignes courbes qui sont présentés comme des systèmes de représentation alternatifs, censés fournir un support pour développer l'idée de variable dans le domaine algébrique. Les EGD, au contraire, accordent une place centrale à ce type de variables.

Du point de vue des difficultés des élèves relativement à la notion de graphe, nous avons déjà observé que, l'interprétation dynamique du graphe d'une fonction est une expérience mentale assez complexe. Il faut d'abord conceptualiser le graphe comme issue de la variation d'un point  $P$  qui représente la variable dépendante, et qui bouge en fonction d'un autre point  $M$  variable, représentant la variable indépendante. Sous-jacente à ces deux variations corrélées, il y a la perception d'une deuxième relation de dépendance fonctionnelle, invisible dans le graphe, celle que chaque point bouge dans le temps. Une telle interprétation exige donc la réintroduction du temps et la prise en compte de la relation de co-variation de  $M(t)$  et de  $P(M(t))$ .

Ce qui permet la construction du signifié de graphe sur celui de courbe géométrique, tout en intégrant en même temps les deux dimensions temporelle et co-variationnelle, c'est le signifié de trajectoire (**critère XI**). En fait, la trajectoire incorpore un double signifié, à la fois ponctuel et global, puisque elle est en même temps « une succession de positions d'un point qui bouge dans le temps » et « un objet en soi ».

Ainsi, par ce double signifié, un EGD comme Cabri-géomètre permet d'accéder au signifié de fonction (non seulement géométrique mais aussi numérique) comme objet qui incorpore une relation asymétrique de co-variation entre deux trajectoires l'une dépendante de l'autre et, par conséquent, entre deux variables l'une dépendante de l'autre et entre deux ensembles, l'image et le domaine, l'un dépendant de l'autre. (Laborde et Mariotti, 2001, Falcade, 2002).

## 8. Conclusions

Les recherches sur les notions de fonction, de variable et de graphes, sont innombrables et leur description dépasse largement les objectifs de cette thèse. Nous avons vu comment certaines recherches développent une approche à ces notions qui est plutôt cognitif et qui vise surtout à la compréhension et à la modélisation des processus de construction de ces notions. D'autres recherches

prennent une perspective qui lie les aspects cognitifs à des considérations historico-épistémologiques ou didactiques. D'autres encore développent surtout des problématiques liées aux représentations graphiques en se centrant sur les problèmes dues à la visualisation et à la conversion entre différents registres sémiotiques, surtout dans des environnements informatiques.

Notre étude se situe en continuité avec ces perspectives, puisqu'elle se fonde aussi sur des considérations épistémologiques et prend en compte les environnements informatiques. Toutefois elle s'en distingue aussi. En fait, elle ne prend pas en compte les mêmes modèles psychologiques et cognitifs et ne s'attaque pas aux mêmes problématiques de visualisation ou de conversion.

En particulier, nous avons vu comme notre brève analyse épistémologique nous a conduit à postuler notre première hypothèse de travail, c'est-à-dire la nécessité de fonder l'apprentissage de la notion de fonction, telle qu'elle l'a été historiquement, sur le signifié de co-variation.

L'analyse des difficultés des élèves associées surtout aux notions de graphe et de variable nous a conduit à observer qu'une approche fortement quantitative, exclusivement numérique ou algébrique, peut constituer un obstacle didactique. Cela nous a conduit à formuler notre deuxième hypothèse de travail, c'est-à-dire la nécessité didactique d'introduire les fonctions par une approche alternative, celle des fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique (EGD), tel que Cabri-géomètre.

D'autres considérations épistémologiques et didactiques, tirées surtout de l'étude de Sierpiska, mais aussi de notre analyse épistémologique et de la vaste littérature sur les difficultés des élèves, nous ont amené à élaborer des critères de construction de la séquence expérimentale.

Ainsi, par exemple, nous avons identifié la nécessité de confronter les élèves à des situations problématiques fondées sur une dualité entre changements et régularités (**critère I et II**). Nous avons décidé proposer des tâches qui jouent sur le contraste entre fonctions non constantes, éventuellement injectives ou bijectives et fonctions constantes (**critère III**). Ces activités devront pouvoir aussi permettre d'approfondir les signifiés de domaine et image d'une fonction (**critère IV**). Les tâches choisies porteront non seulement sur des changements et des régularités, mais surtout sur l'identification de ce qui change, autrement dit sur le rôle des variables (**critère V**). En particulier, nous avons identifié la pertinence didactique de proposer des activités portant d'abord sur des variables géométriques. D'une part, ces activités seront susceptibles de mieux capturer la variabilité au sein du domaine et, dans le cas d'une fonction, du changement simultané et conditionné d'une variable par rapport à l'autre (**critère VI**). D'autre part elles permettront de confronter de manière problématique les élèves à la dissymétrie fondamentale entre variables indépendantes et dépendantes (**critère VII**). Pour ce qui concerne le graphe de fonction, notre séquence expérimentale visera à développer ce que nous avons appelé une interprétation dynamique du graphe (**critère VIII**). Cela se fera en fondant son apprentissage sur les signifiés de variable géométrique, de courbe dans un environnement de géométrie dynamique et de trajectoire (**critères IX et XI**), en faisant bien attention à développer de manière explicite les relations (et les différences) respectives entre ces éléments et le graphe de fonction lui-même. En fin, nous envisageons la nécessité de travailler sur l'articulation entre plusieurs registres (algébrique, numérique et graphique) (Duval, 1993), pour y retrouver le signifié co-variationnel de fonction exprimé sous des formes différentes (**critère X**).

Les potentialités de l'EGD choisi seront exploitées en accord avec la double perspective de la médiation sémiotique et de la théorie des situations. La mise en œuvre de ce double point de vue sera présentée au prochain chapitre.



# Chapitre 3 : Cabri-géomètre, instrument de médiation sémiotique et source de rétroactions du milieu

<b>1. Introduction .....</b>	<b>95</b>
<b>2. Instruments de médiation sémiotique dans Cabri .....</b>	<b>96</b>
2.1. Déplacement ou Drag mode.....	96
2.2. Trace .....	97
2.3. Macro .....	100
<b>3. Cabri source de rétroactions du milieu .....</b>	<b>102</b>
<b>4. Conclusions.....</b>	<b>105</b>

## 1. Introduction

Dans le cadre d'une approche vygotkijenne, le processus d'internalisation (cf. Chapitre 1 § 3.3.1) pourrait se définir comme le processus par lequel un outil extérieurement orienté, (éventuellement grâce aussi à l'intervention d'un sujet externe, souvent plus expert), est intériorisé par le sujet et devient un outil psychologique, susceptible d'influer sur les activités cognitives du sujet. Dans le cadre spécifique de la TMS, ce processus se lie à des objectifs d'enseignement - apprentissage spécifiques et prend une connotation toute particulière. En fait, puisque la médiation offerte par l'outil est organisée et soutenue par l'enseignant, lors d'un processus d'enseignement - apprentissage, ce même outil, internalisé, peut participer à la construction de signifiés<sup>32</sup> mathématiques visés. Un tel fonctionnement spécifique, fondé sur l'action de l'enseignant qui guide à la construction des relations entre les signifiés disponibles auxquels l'outil internalisé donne accès et les signifiés mathématiques visés, est alors défini comme un instrument de médiation sémiotique (IMS) (cf. Chapitre 1 § 3.6.2).

Si de la part de l'élève, donc, l'outil est simplement impliqué dans l'activité pour accomplir des tâches, de la part de l'enseignant ce même outil, est censé fonctionner comme IMS.

Une conséquence intéressante à noter réside dans le fait que ce type de fonctionnement n'est ni exclusif ni une caractéristique donnée *a priori* d'un artefact. Il est issu de l'interaction de ses caractéristiques de conception et d'implémentation avec l'usage particulier que l'enseignant peut en faire. Dans notre étude, par exemple, nous avons choisi de nous servir d'un logiciel, Cabri-géomètre, où la correspondance entre l'artefact et le signifié à construire pourrait sembler *a priori* « non immédiate », bien qu'au fond, au contraire, parfaitement légitime. En fait, nous

<sup>32</sup> Bien que dans une perspective vygotkijenne, pour une certaine uniformité du discours, outre que pour souligner la perspective sémiotique adoptée, dorénavant nous parlerons toujours en termes de « signifiés » ou de « signification » en non plus en termes de « concepts ».

avons utilisé ici les possibilités de cet environnement de géométrie dynamique pour la construction de significées typiquement analytiques (fonction et de graphe de fonctions), ce qui n'est pas habituel<sup>33</sup>.

Nous avons vu, lors du chapitre précédent, que notre séquence expérimentale, sera conçue et implémentée dans le but d'introduire les étudiants au signifié covariationnel de fonction, (première hypothèse de travail), à partir des fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique (deuxième hypothèse de travail).

A cette fin, lors du chapitre présent nous analyserons les potentialités de Cabri-géomètre en accord avec la double perspective de la médiation sémiotique, en tant qu'instrument de médiation sémiotique, (cf. Chapitre 1 § 3.6.2) et de la théorie des situations, en tant composante du milieu et source de rétroactions (cf. Chapitre 1 § 4.1). A partir du point de vue épistémologique, cognitif et didactique, adopté au cours du deuxième chapitre, nous visons donc à instancier les hypothèses théoriques, dégagées lors du premier chapitre et relatives à l'utilisation d'un artefact, dans le cas particulier de la construction des notions embryonnaires de fonction et de graphe de fonction. Nous ferons cela en présentant brièvement en quoi consiste ce double fonctionnement.

## 2. Instruments de médiation sémiotique dans Cabri

Notre étude est fondée, en particulier, sur le fonctionnement en tant qu'instruments de Médiation Sémiotique des outils de Cabri : « Déplacement ou Drag Mode », « Macro », et « Trace ». Afin de mieux décrire ce fonctionnement, nous nous sommes servi de la modélisation proposée par Rabardel (1995) en termes d'instruments (cf. Chapitre 1 § 3.6.1). Ainsi, pour chacun de ces outils, nous avons essayé de repérer les schèmes (sociaux) d'utilisation associables, qui pouvaient les caractériser comme instruments. D'autre part, en référence à notre propre projet didactique, nous avons identifié, ce que nous avons appelé, « le potentiel sémiotique » associable, c'est-à-dire le rôle potentiel de médiation sémiotique, qu'ils pouvaient exercer relativement au contenu mathématique d'apprentissage visé. Une telle étude a déjà été menée dans le cadre de notre mémoire de DEA (Falcade, 2001, 2002). Nous en retenons les éléments principaux suivants.

### 2.1. Déplacement ou Drag mode

Le déplacement, ou Drag mode, d'un objet quelconque sur l'écran peut être indiqué comme l'outil qui d'emblée marque et détermine le caractère dynamique de Cabri.

La composante matérielle et symbolique, c'est-à-dire, l'artefact, est constituée par la possibilité, offerte à l'utilisateur, de saisir et de bouger un objet à l'écran par le curseur, à son tour actionné par le déplacement de la souris

En revanche, plusieurs schèmes d'utilisation lui sont associables, tous liés à l'action de déplacer : déplacer un seul point ou un objet plus complexe, le déplacer directement ou indirectement, le déplacer au hasard ou selon une trajectoire précise, etc. Au cours de notre travail nous ne livrerons pas à une analyse aussi fine de ces SSU, mais nous nous contenterons de parler de manière générale de **Déplacement**, en distinguant éventuellement entre déplacement direct et indirect.

---

<sup>33</sup> D'autre part, il faut aussi remarquer que l'utilisation de Cabri pour l'apprentissage de notions géométriques n'implique absolument pas le fait qu'il soit utilisé comme médiateur sémiotique.

- De notre point de vue, un tel instrument possède quatre potentialités sémiotiques :
1. En attribuant une position quelconque à un objet dans l'écran, il matérialise un des aspects les plus saillants de la notion de variable : sa « généralité » ;
  2. Il évoque, de façon naturelle mais implicite, le temps et la variation pendant le temps.
  3. Grâce à la nature « instinctive » du schème d'usage associé, l'empêchement d'utiliser cet instrument produit, chez le sujet agissant, la perception nette et de l'absence de liberté et de la présence de contraintes.
  4. Le déplacement indirect d'un point, par déplacement direct d'un autre point dont le premier dépend, matérialise la dépendance fonctionnelle en termes de co-variation et, éventuellement de dépendance causale.

Outil de Cabri	Schémas (Sociaux) d'Utilisation	Instrument (Rabardel)	Potentialités sémiotiques
Déplacement	déplacement direct	<b>Déplacement (direct)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ « généralité » de la variable</li> <li>▪ variation pendant le temps</li> </ul>
	déplacement indirect	<b>Déplacement (indirect)</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ absence de liberté /présence de contraintes</li> <li>▪ co-variation</li> <li>▪ dépendance causale</li> </ul>

## 2.2. Trace

L'artefact consiste en l'affichage à l'écran de la trajectoire suivie par un objet pendant son déplacement. Du point de vue graphique, la commande Trace conserve aussi une mémoire de la vitesse du déplacement, en dessinant une suite de points plus ou moins dense.

On peut lui associer trois schèmes d'utilisation :

- Schème 1 : déplacer un point qui laisse sa trace (Figure 3.1).

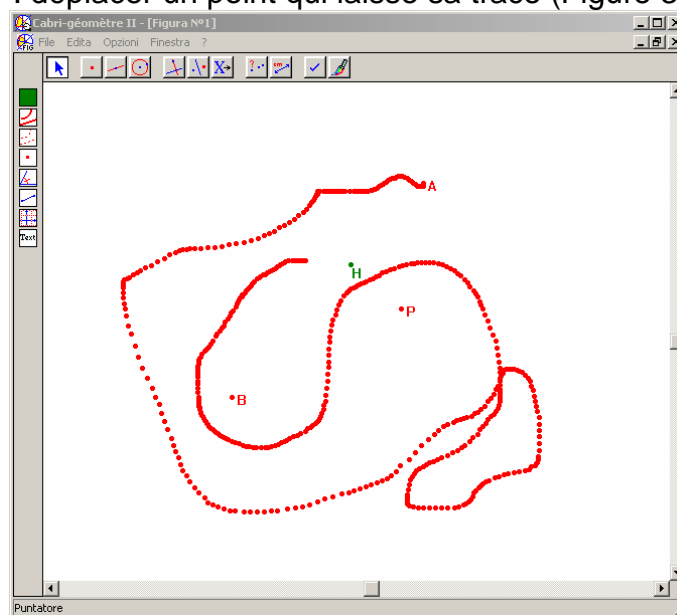


Figure 3.1 - Schème (Social) d'Utilisation 1 associé à l'outil Trace : l'utilisateur déplace le point libre A, qui laisse une trace rouge



- Schème 2 : déplacer un point et d'obtenir la trace d'un autre point qui en dépend (Figure 3.2).

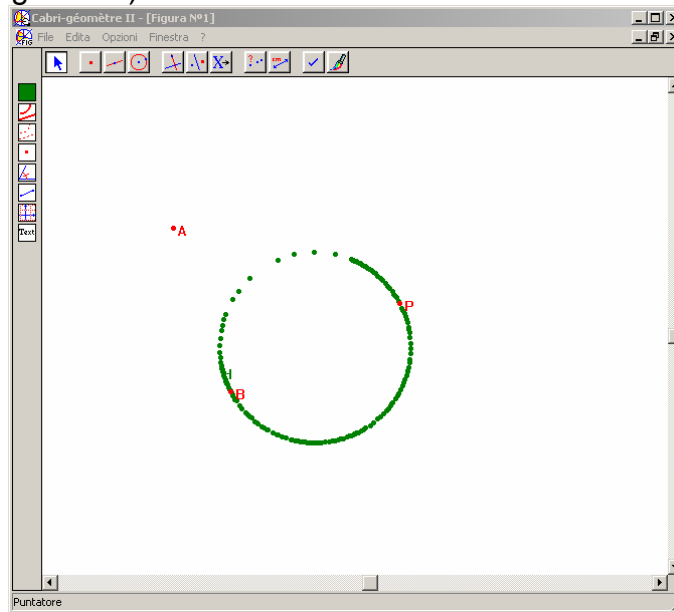


Figure 3.2 - Schème (Social) d'Utilisation 2 associé à l'outil Trace : l'utilisateur déplace le point libre A et bouge ainsi indirectement le point dépendant H, qui laisse une trace verte

- Schème 3 : déplacer un point, qui laisse sa trace, et obtenir, aussi, la trace, d'une couleur différente, d'un autre point qui en dépend (Figure 3.3).

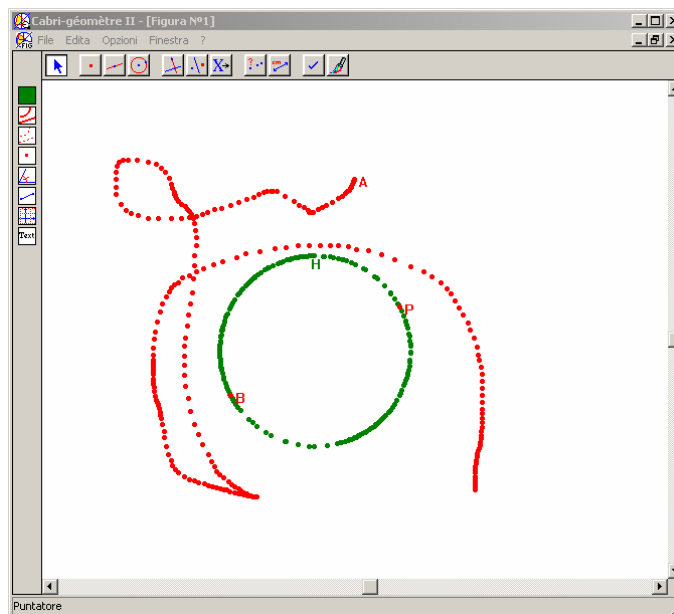


Figure 3.3 - Schème (Social) d'Utilisation 3 associé à l'outil Trace : l'utilisateur déplace le point libre A, qui laisse une trace rouge et bouge ainsi indirectement le point dépendant H, qui laisse une trace verte

Comme on peut remarquer, les S(S)U (Schèmes (Sociaux) d'Utilisation) de Trace sont toujours combinés avec ceux du déplacement. Il s'agit d'une caractéristique d'implémentation de Cabri, qui en fait un domaine phénoménologique et sémantique pertinent pour travailler sur les métaphores fondamentales du mouvement et du temps. De tels instruments nous permettent d'accéder, à travers le signifié de

trajectoire, aux signifiés cruciales de variation et de co-variation inhérentes à la notion de fonction. Par une amplification visuelle, l'activation de la Trace catalyse la construction de signifiés déjà présents dans le seul usage de l'instrument **Déplacement**. En effet, le signe graphique produit par cet outil, d'une part, permet la prise de distance par rapport à la simple action de déplacer et, d'autre part, favorise une prise de conscience des causes et des effets de cette même action.

Même si le produit final de l'outil Trace combiné avec le Déplacement est une image statique, constitué par un ensemble de points, son utilisation implique fortement le temps. En fait, l'utilisateur peut prendre conscience du temps qui passe lors de l'action du déplacement à deux niveaux : lors de la variation d'un point (variable indépendante) et lors de la co-variation simultanée d'un autre point, déplace indirectement par l'intermédiaire du premier (variable dépendante).

Par conséquent, cet outil (combiné avec le Déplacement) garde à la fois un caractère ponctuel et globale, et par cela constitue un IMS pour le signifié, à la fois ponctuel et global, de trajectoire.

L'instrument **Trace1** (Trace+schème 1) extériorise graphiquement la notion de variation en termes d'une suite de changements d'état au cours du temps, et donc peut objectiver la dépendance fonctionnelle primitive : celle de l'espace par rapport au temps. En outre, **Trace1** combiné avec **Déplacement (direct)**, grâce à la possibilité offerte de voir apparaître sur tout le plan, où l'on veut, la trace du point variable indépendante déplacé, met en évidence la liberté totale de cette dernière.

En fin, **Trace1** combiné avec **Déplacement (direct)**, grâce au développement du signifié associé de trajectoire, peut soutenir la construction du signifié de Domaine.

L'instrument **Trace2** (Trace+schème 2) porte sur la notion cruciale de variable dépendante. Au contraire de **Trace1**, il explicite graphiquement le manque de degré de liberté de cette dernière variable. Malgré cela, le signifié de variable dépendante qui en peut émerger, peut être encore très partiel. En effet, d'une part, l'absence à l'écran de la trace de la variable indépendante, et, d'autre part, le caractère parfois inconscient du déplacement, peuvent donner lieu à deux fausses interprétations concernant la variable dépendante :

- soit la limitation du déplacement arbitraire de la variable dépendante pourrait être simplement perçue comme un ensemble de contraintes géométriques qui pèsent sur cette variable ;
- soit une vague dépendance spatio-temporelle entre l'action du sujet et le déplacement de la variable dépendante caractériserait cette dernière, tandis que l'existence d'une relation entre variable dépendante et indépendante ne serait pas encore bien présente à l'esprit.

Au contraire, si **Trace2** est impliqué dans des activités qui permettent de développer le signifié de trajectoire, cet instrument peut participer à la construction du signifié de image.

Par l'instrument **Trace3** (Trace+schème 3) le domaine et l'ensemble image d'une fonction peuvent être « réifiées » et expérimentés comme trajectoires de points corrélés qui varient. En effet, cet instrument, combiné avec le Déplacement et impliqué dans des activités spécifiques sous la guide de l'enseignant, peut contribuer à rendre conscient le double rôle du temps incorporé dans le signifié de trajectoire (outre que la double nature de ce même signifié). Ainsi, l'élaboration de l'instrument **Trace3** par l'élève peut participer à la construction des signifiés de co-variation entre deux variables (var indép et dép) et entre deux ensembles (domaine et image).

Outil de Cabri	Schèmes (Sociaux) d'utilisation	Instrument (Rabardel)	Potentialités sémiotiques
Trace (+Déplacement)	Schème 1 : déplacer un point qui laisse sa trace.	<i>Trace1</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ dépendance fonctionnelle primitive</li> <li>▪ variable indépendante (liberté totale)</li> <li>▪ trajectoire/domaine</li> </ul>
	Schème 2 : déplacer un point et d'obtenir la trace d'un autre point qui en dépend.	<i>Trace2</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ dépendance fonctionnelle primitive</li> <li>▪ variable dépendante (manque de liberté)</li> <li>▪ trajectoire/image</li> </ul>
	Schème 3 : déplacer un point, qui laisse sa trace, et obtenir, aussi, la trace, d'une couleur différente, d'un autre point qui en dépend.	<i>Trace3</i>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ co-variation var indép / var dép</li> <li>▪ double nature de la trajectoire</li> <li>▪ co-variation domaine / image</li> </ul>

## 2.3. Macro

L'artefact est constitué par une « boîte à outils » (Figure 3.4), qui permet soit la création, soit l'utilisation d'une macro construction, c'est-à-dire d'une construction géométrique définie par l'utilisateur et légitime pour Cabri.

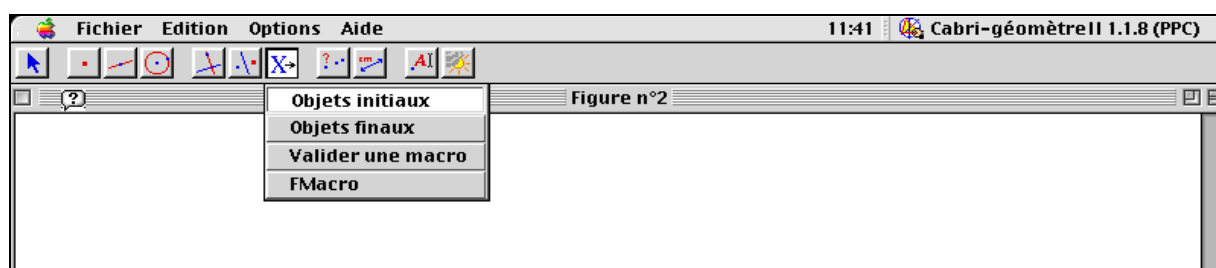


Figure 3.4 - L'outil Macro-construction tel comme il apparaît dans Cabri

Nous distinguons trois schèmes d'utilisation impliquant l'outil macro :

Schème 1 : l'utilisateur applique une macro inconnue.

Schème 2 : l'utilisateur applique une macro connue.

Schème 3 : l'utilisateur crée une macro.

L'instrument **Macro1** (Macro+schème 1), comme l'instrument **Macro2** (Macro+schème 2) nécessitent l'explicitation des objets initiaux, tandis que les objets finaux sont créés par le logiciel, en appliquant une construction donnée. Les deux peuvent très bien signifier « l'instanciation » d'une fonction à une valeur particulière ;

en revanche, seule l'utilisation combinée de tels ces instruments avec le **Déplacement** peut montrer la « généralité » de la fonction.

L'instrument **Macro1** porte principalement sur le signifié de fonction comme machine à « Input/Output », c'est-à-dire comme une « boîte noire » qui crée un objet à partir d'objets donnés.

En revanche l'usage de l'instrument **Macro2** développe davantage le signifié de fonction en termes de fonction géométrique (où certains éléments géométriques dépendent d'autres éléments géométriques par une construction particulière).

Ce qui peut différencier **Macro1** et **Macro2**, c'est aussi la tâche à accomplir, qui peut leur être associée.

Dans le cas de la macro inconnue, très souvent, **Macro1** est combinée avec **Trace2** ou **Trace3**, pour retrouver la macro cachée. La (les) trajectoire(s) doit (doivent) être, alors, conçue(s) comme l'ensemble de tous les points (ou le support de ces points) sur lesquels la macro agit et dont on veut identifier l'action. On part, donc, d'une appréhension globale de la fonction, en termes de courbe géométrique, pour parvenir à une signification ponctuelle.

Au contraire, dans le cas d'une macro connue (**Macro2**), dont on connaît l'action point par point, ce qui est habituellement demandé c'est d'en étudier l'effet sur tous les points d'un ensemble donné. La démarche est alors opposée : du ponctuel au général. **Macro2** associé à **Trace2** ou **Trace3** contribue à construire le signifié d'une fonction en termes d'une relation de co-variation entre variables, reliées par une certaine loi. Justement par le fait qu'on connaît le « processus générateur » de la variable dépendante, le statut de cette variable devient, par rapport à la simple utilisation de **Trace2** ou **Trace3**, mieux défini. **Macro2** associé à **Trace2** ou **Trace3** permet donc d'identifier les domaines de variation de la variable dépendante et indépendante et peut contribuer donc à la construction des signifiés de domaine et image.

L'instrument **Macro3** (Macro+schème 3) implique qu'à partir d'une construction faite par l'utilisateur, celui-ci définit des objets dépendant d'autres objets. En exigeant la désignation stricte des objets initiaux et finaux, **Macro3** rend explicite la distinction entre variables indépendante et dépendante. Il renvoie aussi à un aspect particulier de la notion de fonction : celle d'être une relation fonctionnelle entre variable(s) indépendante(s) et dépendante(s), qui est définie sur un objet particulier mais générique et qui, pour cette raison, est potentiellement applicable à tous les objets du même type.

En conséquence, **Macro3** peut contribuer à la construction du signifié de fonction en marquant les éléments constitutifs et en condensant le processus en un objet. Il est important, à ce propos, de souligner que, comme dans le cas de la définition d'une fonction, pour valider une macro, il est exigé de lui assigner un nom.

Outil de Cabri	Schémas (Sociaux) d'utilisation	Instrument (Rabardel)	Potentialités sémiotiques
Macro-construction (+Trace)	Schéme 1 : appliquer une macro-construction inconnue.	<b>Macro1</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ fonction comme « machine à Input/output »</li> <li>▪ appréhension du global au ponctuel</li> </ul>

	Schème 2 : appliquer une macro-construction connue.	<b>Macro2</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ appréhension du ponctuel au global</li> <li>▪ domaine</li> <li>▪ image</li> <li>▪ fonction comme « co-variation »</li> <li>▪ fonction comme « construction géométrique »</li> </ul>
	Schème 3 : créer une macro- construction	<b>Macro3</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ condensation de la fonction comme processus en la fonction comme objet</li> <li>▪ fonction comme « construction géométrique »</li> </ul>

### 3. Cabri source de rétroactions du milieu

Afin de mieux modéliser, du point de vue didactique, l'interaction sujet - artefact en particulier lors d'un processus organisé de médiation sémiotique, nous avons décidé d'avoir aussi recours à la TdS. Ce recours, grâce notamment à la notion de milieu, devrait permettre d'acquérir un regard complémentaire sur le fonctionnement de l'artefact et sur la manière la plus opportune de l'impliquer dans un processus d'enseignement - apprentissage. Nous nous attendons donc à un apport double de la TdS : *a priori*, lors de la conception de la séquence, et *a posteriori*, lors de son analyse.

Rappelons que notre recherche se fonde sur l'articulation de deux cadres théoriques, la TMS et la TdS, et que leur place respective n'est pas symétrique. L'un des objectifs de notre travail est justement celui d'étudier cette articulation, grâce à la mise en place, et à l'analyse subséquente, d'une séquence expérimentale qui réalise *en acte* cette articulation. Rappelons aussi que cette séquence expérimentale porte en particulier sur la construction des notions de fonction et graphe.

Dans ce but, la prise en compte de Cabri, par le point de vue de TdS, devra permettre, d'une part, une meilleure organisation didactique des rétroactions susceptibles d'engendrer l'apprentissage souhaité, d'autre part, un éclairage ultérieur sur les mécanismes propres au processus de MS. Si cette hypothèse se révèle fondée, il signifiera que l'intégration des ces deux paradigmes théoriques est au moins opportune puisque elle a conduit à une meilleure compréhension du fonctionnement de l'une de ces deux théories, à savoir la TMS.

Laborde et Capponi (1994) ont souligné l'incidence des environnements informatiques d'apprentissage (EIAO) tels comme Cabri-géomètre, dans le processus d'apprentissage.

Ces auteurs ont aussi détaillé deux spécificités fondamentales de ces EIAO :

un EIAO contient des connaissances (mathématiques en l'occurrence) ;

ces connaissances en raisons de contraintes de représentations en machine et à l'interface peuvent avoir un fonctionnement particulier, différent en certains aspects de celui des connaissances de référence. [Laborde et Capponi, 1994]

Ainsi, comme le rappellent aussi ces auteurs, nous nous attendons à que Cabri puisse constituer une composante fondamentale d'un milieu efficacement organisé pour l'apprentissage, pour plusieurs raisons :

- il fournit des rétroactions consistantes avec les connaissances mathématiques embarquées dans l'artefact :

la machine est susceptible d'offrir des rétroactions fondées sur des connaissances. [Laborde et Capponi, 1994]

- il donne accès direct à des actions conceptuellement complexes :

des actions conceptuellement complexes peuvent être rendues directement possibles à l'utilisateur du dispositif [Laborde et Capponi, 1994]

En outre :

- Il permet des éléments de (in)validation de la solution élaborée
- il garantit la possibilité de répéter les essais de résolution d'un problème.

Laborde (1999b) explique, en particulier qu'on peut caractériser les logiciels de géométrie dynamique par l'imbrication forte dans leur constitution et leur fonctionnement de connaissances mathématiques :

[...] Ils offrent à l'utilisateur des outils qui ne fournissent pas un simple tracé inerte à l'écran de l'ordinateur, mais un tracé qui se comporte comme s'il était le tracé d'objets théoriques.

[...]

Les propriétés caractéristiques de ces objets sont satisfaites, même si elles n'ont pas été utilisées pour leur construction. [Laborde, 1999b, p. 236]

Par conséquent :

[...] il est possible pour l'utilisateur de déplacer les tracés des objets ainsi construits et le déplacement respecte les relations théoriques de la construction. Tout se passe comme si les objets spatio-graphiques à l'écran **résistaient** aux actions de l'utilisateur en **suivant les lois d'une certaine géométrie**. [Laborde, 1999b, p. 237]

Ainsi, par rapport à l'objectif de notre thèse, qui vise à étudier le processus de médiation sémiotique dans le cas particulier de l'apprentissage des notions de fonction et de graphe de fonctions, Cabri, en tant que composante fondamentale du milieu et source de rétroactions, intervient à des niveaux différents. Comme nous l'avons vu aussi lors du deuxième chapitre :

- I Par la possibilité d'une manipulation directe des tracés des objets à l'écran, Cabri permet une instanciation très particulière de la notion de fonction, différente d'une fonction numérique, qui relie des éléments spatiaux (points, segments,...) et que nous avons désignée du nom de fonction géométrique.

L'exploration directe et organisée du comportement de ces tracés devra conduire à la mise en lumière de certaines propriétés qui relèvent des objets théoriques représentés et qui ne sont pas seulement caractéristiques des fonctions géométriques. Cela s'avère intéressant justement dans le cas où les élèves ne sont pas encore conscients des propriétés constitutives des objets à explorer et ces objets « **résistent** » à leurs actions « **en suivant les lois** » selon lesquelles ils ont été construits.

Par exemple, l'exploration, grâce au déplacement, des relations hiérarchiques « père/fils » de construction des objets divers à l'écran, peut permettre d'investiguer la dissymétrie existante entre les objets libres et les objets dépendants. En outre,

l'activation de l'outil *Trace* sur ces objets (éventuellement coloriés différemment), pourra amplifier visuellement cette dissymétrie. En reliant le comportement de ces tracés à l'écran aux variables indépendantes et dépendantes et en jouant sur la double nature des trajectoires, il sera donc possible d'étudier le rôle respectif du domaine par rapport à l'image.

Le comportement différent des fonctions constantes par rapport à d'autres types de fonctions, pourra être mis en lumière grâce à l'exploration du comportement des macro-constructions associées. Par exemple, on pourra donner à étudier aux élèves une macro-construction inconnue qui pour tout point du plan construit un autre point, obtenu comme projection orthogonale sur une droite donnée. La trace du point libre se présentera alors comme erratique sur tout le plan, tandis que la trace relative au point construit par la macro-construction coïncidera avec la droite donnée. L'exploration ultérieure des propriétés de cette macro-construction pourra ensuite montrer que la restriction du domaine de la fonction associé à une droite perpendiculaire à la droite donnée, conduira à une fonction constante : la trace du point construit se réduira alors à un seul point.

En revanche, le passage aux fonctions numériques pourra se faire en passant de la variation géométrique à la variation au sein d'un ensemble numérique, qui dans Cabri est matérialisable par une fenêtre où des nombres varient.

II Par l'organisation de rétroactions opportunes, il peut participer à la constitution d'un milieu pour la validation de conjectures, sollicitant ainsi le passage vers une démarche démonstrative. Cette potentialité pourrait être ensuite exploitée lors des moments de discussions collectives.

Par exemple, nous pourrions demander aux élèves si le domaine d'une fonction géométrique donnée est constitué par tout le plan ou par une partie du plan ou s'il existe un domaine particulier pour lequel la fonction donnée résulte surjective. L'anticipation sur le comportement des tracés des objets à l'écran et puis la validation perceptive et expérimentale dans Cabri permettra de ouvrir la question de la validité et la généralité de ces propriétés au niveau des objets théoriques.

III Par l'organisation de tâches problématiques spécifiques qui ne prennent sens que parce qu'il y a un environnement de géométrie dynamique.

Par exemple, nous pourrions demander la construction d'une fonction comme macro-construction : si les objets initiaux (variables indépendantes) et finaux (variables dépendantes) ne sont pas bien saisis par les élèves, Cabri apportera une rétroaction négative.

Ainsi, pour synthétiser, Cabri :

➤ fournit un champ d'expérimentation dynamique et temporel, où le domaine sémantique de l'espace et du temps peut être exploité et réintroduit dans les notions de fonction et de graphe de fonction.

Cela peut permettre :

- de fonder la notion de dépendance logique sur celle de dépendance causale (car les objets construits respectent la hiérarchie père/fils),
- d'introduire les élèves au signifié co-variationnel de fonction (car Cabri permet le déplacement des objets construits, et ce déplacement garde toutes les relations constructives entre ces objets)
- et de contribuer à une interprétation dynamique du graphe (car, comme nous le verrons, il sera possible de fonder la construction du

graphe d'une fonction numérique sur la construction d'une fonction géométrique adéquate et sur le signifié de trajectoire). Par cela, Cabri permet d'aborder et de construire une telle notion de graphe de fonction, d'une façon qualitativement différente d'autres environnements, comme les CAS (Computer Algebra System).

## 4. Conclusions

Dans le premier chapitre, nous avons introduit et analysé le rôle potentiel de l'artefact selon deux perspectives complémentaires, celle de la TdS et de la TMS. Le deuxième chapitre a cherché à dégager les hypothèses épistémologiques, cognitives et didactiques fondamentales à partir desquelles bâtir l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction. Au cours de ce chapitre nous avons identifié comme crucial le signifié co-variationnel de fonction et la nécessité de pouvoir interpréter dynamiquement le graphe d'une fonction.

Le chapitre présent a visé instancier ce rôle supposé de l'artefact, en tant que IMS et en tant que composante du milieu, relativement à notre séquence expérimentale et aux notions visées.

D'une part, nous avons donc examiné les SSU et le potentiel sémiotique associé aux outils de Cabri : Déplacement, Trace et Macro. D'autre part, nous avons pris en compte le fonctionnement de ces outils en tant que composante d'un milieu organisé pour l'apprentissage des notions de fonctions et graphe de fonction et fondé sur les métaphores fondamentales du mouvement et du temps.

Le prochain chapitre sera consacré à la présentation de la séquence expérimentale. Nous ne présenterons que une analyse *a priori* globale (et pas d'analyse *a posteriori* de la séquence), car l'objectif principal de notre étude sera finalement d'étudier le processus de médiation sémiotique du point de vue de son organisation et de sa gestion de la part de l'enseignant, lors des discussions collectives. Cependant, nous questionnerons quand même le rôle effectivement joué par Cabri dans l'élaboration et la mise en œuvre générale de la séquence. Ainsi, au cours de notre analyse *a priori* nous chercherons à mettre en évidence comment (et pour quelles raisons) nous avons entendu impliquer l'artefact dans l'organisation d'un milieu favorable au processus de médiation sémiotique à mettre en place.

Cela reviendra finalement à répondre aux questions suivantes : Quelle contribution dans le processus d'enseignement - apprentissage est-elle prévue de la part de Cabri en tant que IMS ? Est-ce que le potentiel sémiotique par rapport aux notions de variable indépendante, dépendante, domaine et image a-t-il véritablement permis un apprentissage de ces notions ? Quelle contribution est-elle attendue en tant que composante du milieu ? Par exemple : Quel est le rôle des rétroactions et des validations fournies par Cabri, grâce aux outils Déplacement, Trace et Macro, relativement aux notions citées ci-dessus ? Comment ces contributions sont censées être exploitées subséquentement de la part de l'enseignant, lors des moments de discussions collectives ?

Dans la deuxième partie de ce travail de thèse, nous aborderons de manière plus approfondie le rôle de l'enseignant dans la gestion du processus de médiation sémiotique lors du moment de discussion collective. Là aussi nous nous questionnerons le fonctionnement attendu et puis effectif de Cabri, selon les deux perspectives complémentaires de la TdS et de la TMS. En particulier, nous chercherons à répondre aux questions suivantes : Comment, lors d'une discussion collective, l'enseignant exploite le potentiel sémiotique des outils *Déplacement Trace* et *Macro* ? Comment, en suivant le schéma de la séquence, elle gère et organise



effectivement le milieu, afin de favoriser leur internalisation ? Comment l'utilisation de ces outils, au sein de tâches adéquates, favorise la construction de certains signifiés personnels et, par l'intervention de l'enseignant, conduit ensuite à la construction des signifiés mathématiques visés ?

Enfin, puisque notre recherche s'intéresse aussi à l'articulation entre Théorie de la Médiation sémiotique et Théorie des Situations, nous chercherons à répondre aussi aux questions suivantes : comment l'interprétation de Cabri en termes de source de rétroactions et de composante d'un milieu peut permettre de mieux expliquer les mécanismes propres au processus de MS ? Inversement, quels sont les apports éventuels pour la TdS, d'une interprétation de l'artefact en terme d'Instrument de Médiation Sémiotique ?

# Chapitre 4 : La séquence expérimentale

<b>1. Introduction .....</b>	<b>108</b>
<b>2. Contexte.....</b>	<b>109</b>
<b>3. Présentation générale de la séquence.....</b>	<b>110</b>
3.1. Présentation générale de la séquence du point de vue de la progression du savoir mathématique .....	111
3.1.1. Première partie.....	111
3.1.2. Deuxième partie .....	112
3.1.3. Troisième partie.....	112
3.1.4. Quatrième partie.....	113
3.1.5. Cinquième partie .....	115
3.1.6. Sixième partie.....	115
3.2. Présentation générale de la séquence du point de vue de l'organisation du travail .....	115
3.3. Présentation générale de la séquence du point de vue de l'articulation TdS/TMS au niveau macro .....	119
<b>4. Zoom sur la première partie .....</b>	<b>122</b>
4.1. Variables didactiques liées à la première partie de la séquence expérimentale .....	122
<b>5. Présentation des fiches relatives à la première partie.....</b>	<b>124</b>
5.1. Analyse a priori Fiche n°1 « Effet 1 » .....	124
5.1.1. Choix globaux.....	124
5.1.2. Question n. 1 .....	125
5.1.3. Question n. 2.....	126
5.1.4. Question n. 3.....	127
5.1.5. Question n. 4.....	128
5.1.6. Question n. 5.....	128
5.1.7. Question n. 6.....	129
5.1.8. Question supplémentaire .....	130
5.2. Analyse a priori Fiche n°2 « Effet 2 » .....	130
5.2.1. Choix globaux.....	130
5.2.2. Question n. 1 .....	131
5.2.3. Question n. 2.....	132
5.2.4. Question n. 3.....	132
5.2.5. Question n. 4.....	133
5.3. Analyse a priori Fiche n°3 « Invente tu une fonction ».....	135
5.3.1. Choix globaux.....	135
5.3.2. Question n. 1 .....	135
5.3.3. Question n. 2.....	136
<b>6. Zoom sur la deuxième partie .....</b>	<b>137</b>
6.1. Analyse a priori Fiche n°4 « Un rectangle bizarre ».....	137
6.1.1. Choix globaux.....	137
6.1.2. Question 1 .....	138

6.1.3.	Question 2 .....	139
6.1.4.	Question 3 .....	140
6.1.5.	Question 4 .....	141
<b>7.</b>	<b>Troisième partie.....</b>	<b>141</b>
<b>8.</b>	<b>Zoom sur la quatrième partie.....</b>	<b>142</b>
8.1.	Analyse a priori de la Fiche n°5 « Les représentations possibles d'une fonction numérique » .....	142
8.1.1.	Choix globaux .....	142
8.1.2.	Question 1 .....	143
8.1.3.	Question 2 .....	144
8.2.	Analyse a priori de la Fiche n°6 « Lecture et compréhension du texte d'Euler » .....	148
8.2.1.	Choix globaux .....	149
8.3.	Analyse a priori de la Fiche n°7 « Euler dans Cabri » .....	151
8.3.1.	Choix globaux .....	151
8.3.2.	Question 1 .....	152
8.3.3.	Question 2 .....	154
8.3.4.	Question 3 .....	154
<b>9.</b>	<b>Cinquième partie .....</b>	<b>155</b>
9.1.	Analyse a priori de la Fiche n°8 « La ficelle élastique, première partie » .....	156
9.1.1.	Question 1 .....	156
9.1.2.	Question 2 .....	157
9.1.3.	Question 3 .....	157
9.1.4.	Question 4 .....	159
9.1.5.	Question 5 .....	160
9.2.	Analyse a priori de la Fiche n°9 « La ficelle élastique, deuxième partie » .....	160
9.2.1.	Choix globaux .....	160
9.2.2.	Question 1 .....	161
9.2.3.	Question 2 .....	161
<b>10.</b>	<b>Zoom sur la sixième partie .....</b>	<b>163</b>
10.1.	Analyse a priori de la Fiche n°10 : « Deux fonctions numériques à confronter » .....	163
10.1.1.	Question 1 .....	163
10.1.2.	Question 2 .....	164
10.1.3.	Question 3 .....	165
10.1.4.	Question 4 .....	169
<b>11.</b>	<b>Tableau synthétique .....</b>	<b>170</b>
<b>12.</b>	<b>Conclusions.....</b>	<b>173</b>

## 1. Introduction

Nous considérons la séquence expérimentale comme un premier résultat de notre travail de thèse. En fait, comme nous essayerons de le montrer au cours de ce chapitre, les critères dégagés au cours des premiers chapitres ont trouvé une instanciation effective dans la dernière élaboration de cette séquence expérimentale.

Le chapitre présent vise à décrire globalement la séquence, en argumentant les choix faites en fonction des hypothèses théoriques adoptées : nous nous demanderons ainsi, par exemple, pourquoi une certaine tâche, quel est son rôle attendu relativement aux objectifs généraux, quels critères sont adoptés, quels

signifiés potentiels sont visés, quels instruments de médiation sémiotique sont mobilisés et quelle articulation entre cadres théoriques différentes est mise en jeu.

Lors de cette présentation nous aurons à gérer deux niveaux : un niveau **macro** versus un niveau **micro**.

Le niveau **macro** relèvera de la constitution du processus d'apprentissage-enseignement qui a été élaboré, au sein de la TMS, en vue de la mise en place du processus de médiation sémiotique, à l'aide des outils fournis par la TdS. Il s'agit de la construction de la séquence, sur lequel portera ce chapitre présent.

En revanche, le niveau **micro**, relèvera de notre questionnement particulier et de notre analyse fine des mécanismes liés au processus de médiation sémiotique, lors de l'orchestration par l'enseignante de deux discussions collectives particulières. A ce niveau sera consacrée la dernière partie de notre travail de thèse.

En ce qui concerne ce chapitre présent, il y aura donc d'abord une présentation plutôt macroscopique, où nous introduirons la séquence expérimentale par grandes unités ou parties et où nous relierons chaque partie aux objectifs généraux. D'une part, cette présentation portera principalement sur les hypothèses théoriques développées lors du premier chapitre (Chapitre 1). D'autre part, elle se fondera sur l'analyse épistémologique élaborée au cours du deuxième chapitre (Chapitre 2). A cette occasion, nous avons en fait, déjà explicité sur quelles bases psychologiques et didactiques nous entendons bâtir le processus d'apprentissage et quels aspects de la notion de fonction nous voulons construire et pourquoi.

Ensuite nous présenterons la séquence de manière plus détaillée, même si nous nous ne livrerons pas à une analyse *a priori* approfondie de toutes les séances. En fait, nos questions de recherche successives concerneront plus spécialement le rôle de l'enseignante dans la gestion du processus de médiation sémiotique lors des discussions collectives. Par conséquent, nous chercherons surtout à approfondir les parties concernées par cette analyse *a posteriori* plus fine, ainsi que certaines parties charnières, permettant de mieux comprendre le déroulement global de la séquence.

Ainsi, lors de ce travail de thèse, nous présentons, d'abord globalement, puis de manière plus spécifique, la séquence expérimentale, du point de vue de sa conception en fonction des hypothèses théoriques, c'est-à-dire en fonction de l'articulation entre TMS et TdS, des critères liés au savoir et du rôle attendu des artefacts et de l'enseignant.

En revanche, nous ne présenterons pas d'analyse *a posteriori* de la séquence expérimentale. En fait, si certaines recherches ont déjà étudié le fondement théorique et le fonctionnement global du processus de médiation sémiotique (Bartolini Bussi 1996, 2000, 2001, Bartolini Bussi, et Mariotti. 1998, 1999a, 1999b ; Bartolini Bussi, et al. 1999c, Mariotti 1997, 1998, 2000), des études fines sur les mécanismes complexes sous-jacents sa mis en place (et, surtout, sur la façon dont l'enseignant gère et soutient ponctuellement ce processus), sont relativement plus rares. Etant liés à des phénomènes linguistiques assez fins, ces mécanismes nécessitent une approche qu'on pourrait définir plutôt microscopique. Par conséquent, nous avons décidé de nous concentrer seulement sur l'analyse approfondie de certaines discussions collectives. A cette fin seront consacrés les derniers chapitres de cette thèse.

## 2. Contexte

La séquence expérimentale que nous présenterons est l'aboutissement d'une succession de séquences qui ont été déjà expérimentées à la fois en France et en Italie, entre 2001 et 2002.

Les trois pré-expérimentations ont consisté en une suite d'environ dix/douze séances avec Cabri, mises en place dans une classe de Seconde (ou de niveau scolaire analogue en Italie) où les élèves qui avaient une certaine familiarité avec Cabri travaillaient en binômes. En revanche, lors de la dernière expérimentation, les activités se sont déroulées sur environ cinq mois, d'avril à début juin 2003 et de septembre à novembre 2003.

La classe italienne concernée par l'expérimentation définitive, comportait 13 élèves et était équivalente à une classe de Seconde française de lycée.

L'enseignante qui a géré toute la réalisation, collabore depuis dix ans avec Mariotti et possède donc une expérience significative dans l'orchestration des discussions collectives selon la perspective de la TMS<sup>34</sup>, ce qui permettra probablement d'obtenir un plus grand nombre d'observables possibles dans l'ensemble des actions de l'enseignant. En outre, les élèves avaient déjà pris partie à d'autres expérimentations du même genre, que ce soit en algèbre ou en géométrie. Le contrat didactique relatif à ce type de pratique didactique était, donc, déjà bien installé.

### 3. Présentation générale de la séquence

La séquence expérimentale se compose de six grandes unités ou parties : une première partie consacrée aux fonctions géométriques<sup>35</sup> dans Cabri, une deuxième partie qui marque le passage aux fonctions numériques, une troisième partie qui sur la base des deux premières parties porte sur l'élaboration collective d'une définition de fonction (d'abord « géométrique » puis « numérique ») ; une quatrième partie concernant l'introduction du graphe de fonction par un travail d'interprétation sur un nouvel artefact : le texte d'Euler ; une cinquième partie qui porte sur la résolution de problèmes d'interprétation du graphe, et une sixième partie, récapitulative, qui ouvre la possibilité d'introduire le deuxième axe (absent dans la méthode de construction du graphe proposé par d'Euler) du repère cartésien.

Etant donnée l'ampleur de la séquence, nous nous étendrons davantage sur la première, seconde, quatrième et sixième partie: la première partie et la quatrième partie car elles serviront à l'analyse du rôle de l'enseignante lors de l'orchestration des deux discussions collectives ; la deuxième partie, car elle constitue un passage charnière (du géométrique ou numérique) et la sixième, car elle représente la conclusion de la séquence expérimentale et constitue une activité récapitulative de tout ce qui a été fait avant. En revanche nous négligerons la partie qui concerne la construction collective de la définition de fonction (troisième partie), car, elle représente une problématique particulière qui mériterait un analyse *sui generis* ultérieure et la partie qui porte sur l'utilisation de graphes de fonction pour la modélisation de situations pseudo- concrètes (sixième partie).

Ce choix répond à notre intérêt qui concerne plus particulièrement la *construction* des notions de fonctions et de graphe et moins leur *utilisation*.

En un premier temps, nous reprendrons les choix épistémologiques élaborés au cours du deuxième chapitre pour montrer comment ils ont été effectivement

---

<sup>34</sup> Ceci peut apparaître comme une faiblesse de la TMS (comme d'ailleurs ce peut l'être pour la TdS), puisque ce cadre théorique nécessite un enseignant avec une expérience particulière dans la cette pratique d'orchestration des discussions collectives. Cependant, par rapport à notre travail de thèse, ce contexte optimal est une garantie (et même une nécessité) du fait que la modélisation qui en résultera est en quelque mesure effectivement représentative du processus que nous voulons étudier.

<sup>35</sup> Rappelons que nous entendons par fonctions géométriques, les fonctions ayant comme domaine et image des ensembles géométriques.

implémentés. Cette première présentation relèvera donc de la progression de la séquence sur le plan mathématique.

Ensuite, nous mettrons en évidence comment nos hypothèses psychologiques et didactiques ont été mises en œuvre. Cette deuxième présentation au niveau macro sera conduite par rapport à l'organisation du travail, qui est très importante du point de vue de la médiation sémiotique.

Enfin, nous chercherons à mettre en lumière au niveau macro l'articulation TdS / TMS.

### **3.1. Présentation générale de la séquence du point de vue de la progression du savoir mathématique**

La séquence expérimentale s'articule autour de six parties différentes.

On commence d'abord par des fonctions géométriques données à étudier aux élèves dans l'environnement Cabri-géomètre (première partie). Puis on passe aux fonctions « numérico-géométriques » et aux fonctions numériques (deuxième partie) pour aboutir à une définition collective de fonction et de fonctions équivalentes (troisième partie). Ensuite, on pose le problème des représentations diverses des fonctions numériques : ce problème permet l'introduction d'un deuxième artefact, le texte d'Euler, qui propose une méthode pour représenter géométriquement une fonction numérique (quatrième partie). Ensuite, on demande aux élèves de traduire dans Cabri cette méthode et de résoudre des problèmes par l'utilisation de graphes de fonctions (cinquième partie). Ces situations permettent de mettre en évidence d'une part, l'efficacité du graphe de fonction comme outil de modélisation et, d'autre part, les spécificités de ce type de représentation. Enfin, puisque la méthode de représentation proposée par Euler n'utilise pas le deuxième axe du repère cartésien, on proposera aux élèves une activité récapitulative, susceptible de l'introduire (sixième partie).

#### **3.1.1. Première partie**

La première partie est constituée de trois séances (de deux à quatre heures chacune) et des discussions collectives correspondantes.

La première et la deuxième séance demandent aux élèves d'étudier dans Cabri deux fonctions géométriques données par deux macro- constructions inconnues

En mobilisant l'utilisation des outils *Déplacement*, *Trace*, et *Macro* avec leurs Schèmes (Sociaux) d'Utilisation (cf. Chapitre 1, § 3.6.1) ces deux séances permettent d'introduire l'idée de co-variation des deux variables, l'une dépendant de l'autre, les deux en fonction du temps. En outre, en jouant sur des fonctions différentes (certaines étant surjectives et injectives, d'autres ne l'étant pas), les activités concernant les trajectoires des points impliqués, créent les conditions pour focaliser sur les aspects les plus saillants que la notion de fonction géométrique permet de saisir dans un EGD : ceux de variable indépendante et dépendante, de domaine et d'image.

La première et la deuxième séance proposent des situations très riches avec des tâches de description et d'anticipation. Cela répond à la nécessité de conduire à une « saturation en concret » (cf. Chapitre 1, § 3.8) suffisante pour permettre à l'enseignante d'introduire les signes de « fonction », « variables indépendante », « variable dépendante », « paramètre », « domaine » et « image » et aux élèves de commencer à en parler. Bien évidemment, les signifiés associés à ces signes seront développés tout au cours de la séquence expérimentale entière. Cependant, grâce

aux rétroactions de Cabri, et aux activités qui permettent une utilisation fonctionnelle (cf. Chapitre 1, § 3.4) de ces signes, il sera possible, déjà dès la première discussion collective, de commencer à les construire en s'y référant explicitement.

La troisième séance propose aux élèves une tâche très ouverte : en utilisant l'outil macro-construction de Cabri, il est demandé aux élèves de concevoir, de construire et puis d'étudier, eux-mêmes une fonction géométrique qui à un point associe un autre point. Cette situation permet en particulier de mobiliser l'Instrument de Médiation Sémiotique (IMS) **Macro3** (cf. Chapitre 3, § 2.3), en soutenant ainsi la réification du signifié de fonction géométrique.

Cette première partie joue un rôle très important dans la séquence expérimentale car elle actualise des nombreux critères élaborés au cours de notre analyse épistémologique et didactique (cf. Chapitre 2, § 5). En fait, les séances proposent aux élèves des tâches fondées sur la dualité entre changements et régularités (**critère I et II**), jouent sur le contraste entre fonctions non constantes, éventuellement injectives ou bijectives et fonctions constantes (**critère III**), travaillent le rôle et la spécificité des variables dépendantes et indépendantes (**critère IV, V et VI**) et permettent d'approfondir les signifiés de domaine et image d'une fonction géométrique (**critère X**).

En outre, ces séances cherchent à implémenter dans des tâches spécifiques les hypothèses générales de travail de construction de séquence selon une perspective vygotkienne (cf. Chapitre 1, § 3).

### 3.1.2. Deuxième partie

La deuxième partie est un élément-clé de la séquence. Elle est constituée d'une séance (de deux heures) et de la discussion collective associée.

Cette séance, la quatrième, met en jeu un problème- charnière entre le géométrique et le numérique : celui d'étudier les fonctions associées à un rectangle variable de périmètre constant, donné dans Cabri. Les fonctions qu'il est possible d'associer sont de nature différente : géométriques, « géométrico-numériques » et numériques.

Cette séance permet le passage aux fonctions numériques par le réinvestissement, la transformation et l'élargissement des signifiés de variabilité, de co-variation, de variable, de paramètre, de domaine et de image, saisis et construits initialement par rapport aux seules fonctions géométriques dans Cabri. Il est demandé aux élèves de retrouver, voire reconstruire pour le cas des fonctions numériques, le signifié co-variationnel de fonction, développé au début de la séquence pour les seules fonctions géométriques, sur les métaphores du mouvement et du changement dans le temps dans Cabri.

### 3.1.3. Troisième partie

La troisième partie est constituée exclusivement de discussions collectives. Elle est transversale puisque se situe, d'abord, entre la première et deuxième partie, avec l'élaboration collective d'une définition embryonnaire de fonction géométrique et l'amorce des définitions de fonctions équivalentes et de fonctions égales, et, ensuite, après la deuxième partie, avec la transformation et l'élargissement aux fonctions numériques, des premières définitions. En particulier, la tâche donnée de définir l'égalité et l'équivalence entre deux fonctions a pour but de favoriser l'approfondissement de la définition même de fonction : en fait, pour identifier des critères d'égalité ou d'équivalence entre deux objets mathématiques, il est préalablement nécessaire de (se) clarifier quels sont les éléments qu'on considère caractéristiques de ces objets.

### 3.1.4. Quatrième partie

La quatrième partie porte sur les différentes représentations possibles d'une fonction géométrique et sur l'introduction du graphe de fonction selon Euler. Elle est constituée de trois séances (cinquième, sixième et septième) et des discussions collectives associées.

Dans la cinquième séance, il s'agit d'explorer les potentialités des représentations de fonction diverses : tableau de valeur, écriture algébrique, représentation graphique par une fonction géométrique associée. En particulier, nous demandons aux élèves de concevoir dans Cabri, une méthode susceptible de représenter dynamiquement et géométriquement la co-variation entre deux variables numériques, l'une dépendant de l'autre.

Dans la séance six, par un travail spécifique sur un extrait de *Introductio in analysis infinitorum* d'Euler (1748), les élèves rencontrent la méthode élaborée par ce mathématicien, qui apporte donc une réponse au problème posé.

Même si Euler ne parle pas explicitement de fonctions numériques et géométriques, l'idée du célèbre mathématicien est, en fait, celle de représenter une fonction numérique  $f$  géométriquement. En termes modernes, nous pourrions dire que représenter géométriquement la fonction  $f$  pourrait s'interpréter comme représenter cette fonction par une fonction géométrique opportune. Etant donné  $x$  et  $f(x)$ , qui sont respectivement la variable indépendante et dépendante numériques à représenter, cette dernière fonction géométrique associe à un premier point variable  $P$  de l'axe des abscisses, qui est à la distance orientée  $x$  d'un point fixe nommé  $A$ , un deuxième point variable du plan  $M$ , qui constitue l'extrémité du segment  $[PM]$  orienté vers le haut, de longueur  $f(x)$  et dont l'autre extrémité est justement le premier point variable  $P$  (Figure 4.1). Si l'on considère globalement la trajectoire du deuxième point variable  $M$ , lorsque l'on bouge le premier point  $P$  sur la droite des abscisses, l'on obtient une courbe géométrique dont on peut étudier les propriétés et qui représente le graphe de la fonction numérique  $f$ . En se fondant sur le signifié de fonction géométrique, préalablement élaboré dans Cabri, et sur la nature duale de la trajectoire, ce procédé de construction du graphe permet ainsi de garder la co-variation entre les deux variables et d'incorporer l'aspect processus de la fonction. Cette méthode soutient ainsi une appréhension dynamique du graphe et en favorise une interprétation dynamique (cf. Chapitre 2, § 3.1).



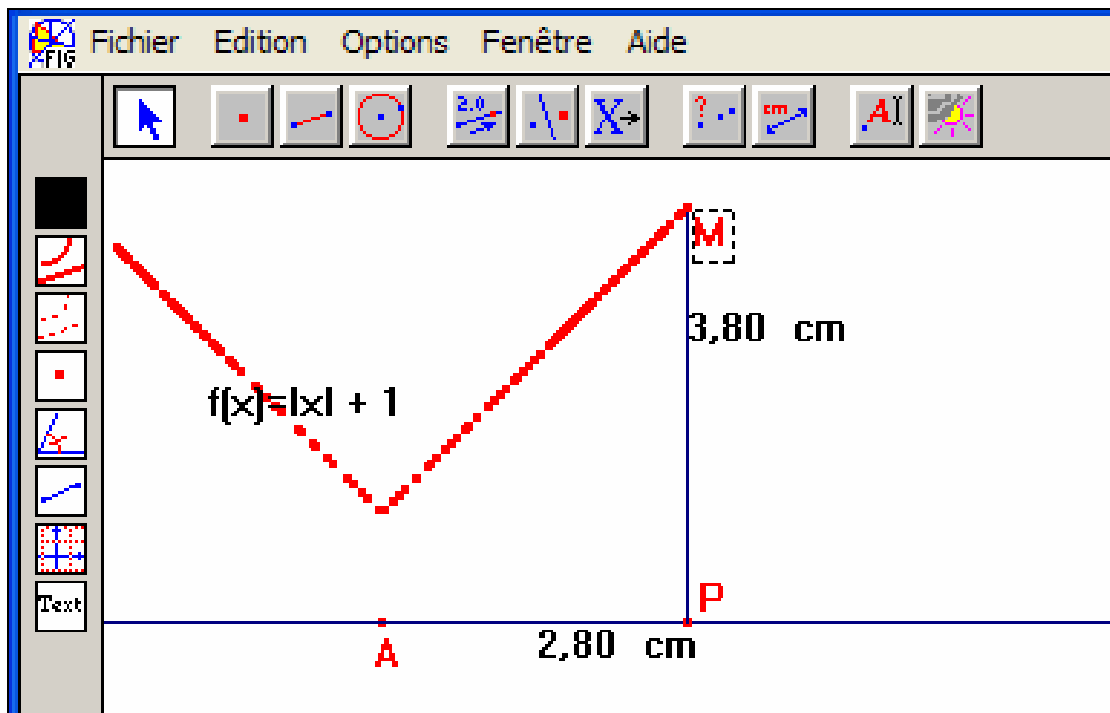


Figure 4.1 - Voici dans Cabri, la construction du graphe, selon la méthode d'Euler de la fonction  $f$ , qui à  $x$  réel associe  $f(x)=|x|+1$

La donnée du texte d'Euler aux élèves est un élément de médiation sémiotique organisée. En effet, il constitue à la fois un artefact de deuxième et de troisième type (cf. Chapitre 1, § 3.6.3) : d'abord, méthode opérationnelle de construction de la représentation graphique d'une fonction numérique (artefact du deuxième type), nous visons à ce que cela puisse permettre la construction d'invariants au sens de Vergnaud (1991) attachés au graphe d'une fonction et, par cela, au signifié même de graphe de fonction (artefact du troisième type).

Les Schèmes de Vergnaud comme les Schèmes (Sociaux) d'Utilisation de Rabardel (1995, 1999b) contiennent des invariants qui sont en partie en commun. Cependant, les invariants construits au sens de Rabardel sont directement liés à l'instrument, et par cela contextualisés, tandis que les invariants élaborés par les élèves au sens de Vergnaud, sont décontextualisés et portent directement sur les connaissances en jeu.

Dans le cas de notre étude, ces derniers invariants sont multiples :

- un graphe est la trajectoire d'un point variable, dépendant d'un autre point variable, par rapport à un repère donné ;
- à toute fonction numérique est donc associée une fonction géométrique ;
- la courbe représentative d'une fonction numérique est tout simplement l'image de cette fonction géométrique associée ;
- l'ordonnée du point du graphe d'une fonction est une variable dépendant de son abscisse.

Dans la séance sept, nous demandons aux élèves de réinvestir dans Cabri cette méthode pour construire le graphe d'une fonction donnée. Cette séance sert comme élément charnière pour les séances suivantes : ici, en fait, *a contrario* des autres séances, il y a encore une homogénéité des données à représenter graphiquement : on représentera la variation d'une longueur avec un segment de longueur  $f(x)$ .

### 3.1.5. Cinquième partie

Cette partie, constituée de deux séances (huit et neuf) et des discussions collectives associées, porte sur la construction et l'interprétation de graphes de fonction attachés à des situations de modélisation. Les problèmes de construction du graphe permettront une vérification et un réinvestissement des signifiés construits, tandis que les problèmes d'interprétation, demanderont la lecture des propriétés de la fonction sur le graphe. Le traitement des données, inhérent à la construction d'un graphe et qui transforme une grandeur quelconque en la longueur d'un segment pour Euler (ou en la coordonnée d'un point, pour nous aujourd'hui) est définitivement impliqué et exigé. Cependant, le passage vers une notion de graphe de fonction de  $\mathbb{R}$  (ou d'un intervalle en  $\mathbb{R}$ ), tel qu'il est présenté dans les manuels actuels, n'est pas encore complètement accompli, puisque dans la méthode d'Euler l'axe des ordonnées n'apparaît pas.

Il reste alors encore à associer l'extrémité du segment de longueur  $f(x)$  à l'ordonnée telle que nous la connaissons.

### 3.1.6. Sixième partie

Cette partie est constituée d'une seule séance et de la discussion collective associée. Elle vise à permettre le réinvestissement et la récapitulation de tous les signifiés construits, ainsi que la création des conditions pour accomplir le passage vers le repère cartésien orthogonal (avec l'axe des ordonnées). Nous demandons aux élèves, d'abord, de construire dans Cabri, en suivant la méthode d'Euler, le graphe de deux fonctions numériques données, ensuite, d'étudier le domaine et l'image de ces fonctions, et, enfin, de les confronter et les modifier de manière à que les deux images respectives soient respectivement disjointes ou aient intersection non vide.

Les questions posées portent à la fois sur une appréhension globale et sur une appréhension ponctuelle (avec questions respectivement de type : « Est-il possible de choisir un même domaine pour les fonctions  $f$  et  $g$ , de manière à ce que les ensembles images correspondants soient disjointes ? » et « Existe-il une valeur de  $x$  appartenant au domaine de  $f$  telle que son image par  $f$  est égale à 2 ? »).

Il s'agit de faire en sorte que les élèves gardent un double point de vue : du global au local et vice versa. En outre, ces questions, assez inhabituelles, permettent de mobiliser les signifiés déjà construits de domaine et de image, en articulant à nouveau ces signifiés par rapport aux fonctions numériques à représenter, et aux fonctions géométriques associées. Enfin, la confrontation requise entre les deux ensembles image, nécessitant une coordination des domaines respectifs, peut provoquer chez les élèves la nécessité d'introduire le deuxième axe, c'est-à-dire, l'axe des ordonnées, afin de se référer à un élément qui soit indépendant des objets variables de l'écran.

La discussion collective consécutive permettra de revisiter et capitaliser les signifiés construits ; si la classe s'avère prête pour l'introduction du deuxième axe, la discussion conduira à l'institutionnalisation du deuxième axe.

## 3.2. Présentation générale de la séquence du point de vue de l'organisation du travail

Les hypothèses théoriques dérivées de l'œuvre de Vygotsky et présentées au cours du premier chapitre (cf. Chapitre 1, § 3) ont conduit à une organisation précise du travail. En fait, afin d'obtenir la mise en place et le développement du processus sémiotique complexe, la séquence expérimentale a été articulée selon des types

différents d'activités avec une composante sémiotique spécifique, qui impliquent l'articulation d'organisations sociales différentes : par binômes, en classe entière, ou individuellement.

➤ Activités de laboratoire avec Cabri, par binômes.

Les étudiants sont confrontés, par binômes, à des tâches à accomplir dans Cabri, où l'utilisation d'outils spécifiques, est requise.

Ce type d'activité généralement proposée en début d'unité de la séquence a comme objectif de soutenir le processus d'élaboration de signes et de signifiés personnels associés aux outils de l'artefact. Elle porte donc sur le fonctionnement de ces outils comme IMS. Nous faisons l'hypothèse que le travail par binômes permet de catalyser ce processus puisqu'il favorise les échanges sociaux, la production de mots, des schèmes, des gestes, etc.

➤ Discussions collectives.

Toute la classe a été impliquée dans des discussions collectives particulières, habituellement déclanchées par l'enseignante qui formule explicitement l'objet de la discussion.

Ces activités jouent un rôle essentiel dans le processus d'enseignement-apprentissage et constituent le cœur du processus sémiotique, sur lequel l'enseignement-apprentissage se fonde. En fait, ces discussions acquièrent, parfois explicitement, le caractère de véritables *discussions mathématiques*, où, comme nous l'avons déjà vu (cf. Chapitre 1, § 3.5), leur caractéristique principale est la dialectique cognitive, soutenue par l'enseignant, entre les signifiés personnels différents élaborés par chaque élève et les signifiés mathématiques associés aux signes spécifiques (Bartolini Bussi, 1998). Ces discussions peuvent porter sur des activités sémiotiques diverses : par exemple, nous pouvons les rencontrer après une séance de résolution d'un problème avec Cabri, où les différentes solutions sont discutées et confrontées collectivement, ou après la rédaction de textes écrits par les élèves mêmes, ou, encore, à l'occasion de la lecture et de l'interprétation d'autres textes, issus de l'histoire des mathématiques. Le rôle de l'enseignant est ainsi crucial. En fait, les signifiés personnels qui émergent de l'activité avec les outils de Cabri, sont susceptibles d'évoluer mais cela devient possible seulement par l'intervention et l'aide de l'enseignant. Il est assez difficile d'expliquer exhaustivement la nature de cette « aide ». Nous avons vu que ce travail ne peut pas être complètement assimilé à ce qu'on appelle le processus d'institutionnalisation (Brousseau, 1997), même s'il n'est pas contradictoire avec ce dernier. L'objectif principal de l'action de l'enseignant dans une discussion mathématique est celui de soutenir l'évolution des signifiés personnels vers les signifiés mathématiques culturels cibles, en prenant en compte les contributions individuelles diverses et en exploitant les potentialités sémiotiques qui dérivent de l'utilisation d'outils particuliers. Jusqu'à maintenant, seules quelques d'études ont été développés pour essayer de modéliser ce processus complexe (Bartolini Bussi 1998, Mariotti et Bartolini Bussi 1998, Mariotti 2000) et une analyse plus fine des actions de l'enseignant constituera l'objet de la partie finale de notre recherche.

➤ Ecriture de rapports individuels.

Les étudiants ont été individuellement impliqués dans la production de rapports écrits, généralement à la maison. Ce type de tâche peut être proposé à la suite d'activités diverses : après les activités de laboratoire, en demandant d'écrire à la

maison un rapport individuel sur leurs propres expériences, réflexions, doutes et questions surgies, après une discussion collective, en demandant d'explicitier et expliquer leur propre version de la formulation mathématique finale issue de la discussion à laquelle ils ont pris part. Il diffère des autres types d'activités sémiotiques (activités de laboratoire et de discussions collectives) au sens où il requiert une contribution personnelle particulière : lors de l'écriture, les élèves sont contraints de reconstruire eux-mêmes et rendre « linéaire » une expérience qui ne l'était pas nécessairement, de choisir ce qui est à retenir, et d'établir et organiser les liaisons entre les différents signifiés. Ce travail conduit à la production de signes écrits, qui par leur propre nature commencent à être détachés de la contingence de l'action située. A cause de leur nature et à la différence d'autres signes, comme les gestes ou mêmes les mots, ces signes, moins volatiles, peuvent être partagés et faire l'objet explicite d'une discussion collective. Pour cette raison, grâce à l'intervention de l'enseignant, ils sont susceptibles d'évoluer consciemment et de participer à la construction d'un signifié socialement partagé.

Ce type d'activité possède donc trois objectifs principaux :

1. soutenir la production et l'élaboration de signes en relation à des activités précédentes avec les outils particuliers, censés de fonctionner comme IMS.
2. favoriser *la prise de conscience*, qui, comme nous l'avons vu (cf. Chapitre 1, § 3.8), selon la perspective vygotksyenne, est un élément fondamental de la construction des concepts scientifiques. Grâce à une prise de distance et un remaniement conscient, nous nous attendons ainsi à une transformation de ces concepts parfois élaborés au niveau inconscient (Douady, probablement parlerait d'outils implicites de solution (1986)).
3. guider, en termes vygotskiens, la *généralisation* et la *systématisation* de ces concepts en liaisons supra-empiriques, qui constituent une autre caractéristique distinctive attribuée par Vygotky aux concepts scientifiques (cf. Chapitre 1, § 3.8).

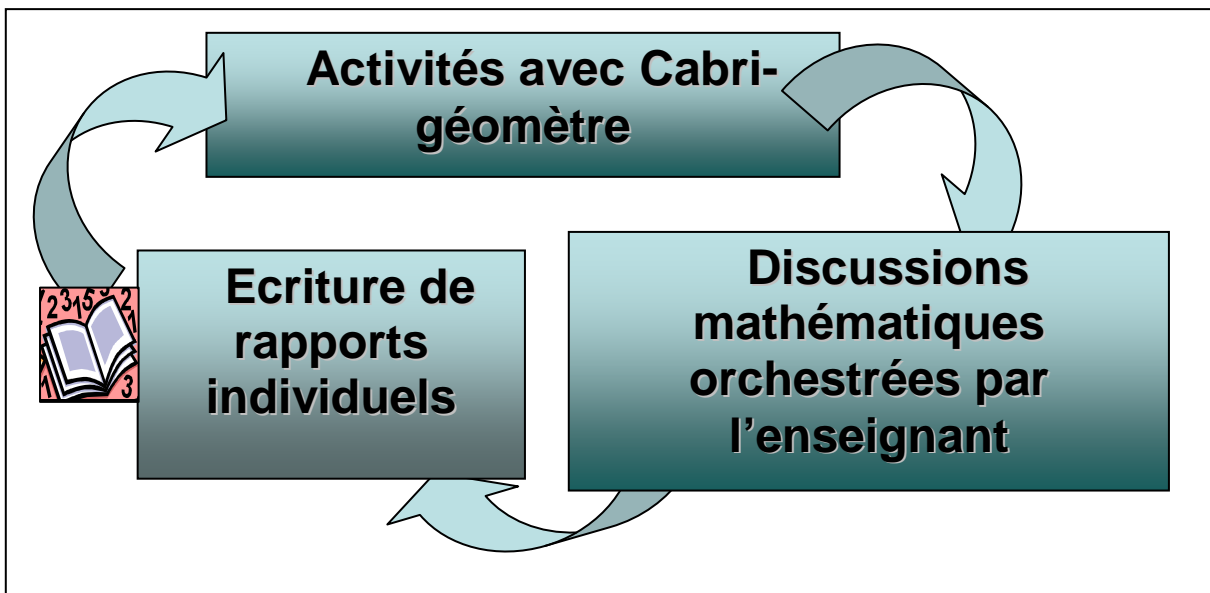
Par conséquent, les questions auxquelles les élèves sont censés répondre sont d'ordre différent suivant le moment où elles sont posées :

- Après une ou plusieurs activités dans Cabri et les discussions collectives associées. Par exemple après la première unité de la séquence expérimentale, la question à poser pourrait être « Serais-tu capable de décrire ce qu'est une fonction, en te référant aux dernières activités dans Cabri ? »
- Après une discussion collective, suite à l'introduction explicite de signes mathématiques particuliers. Par exemple, après la première activité, nous pourrions poser aux élèves la question suivante : « Après la dernière discussion collective, qu'est-ce que tu as compris des fonctions ? ». Nous nous attendons à ce que ce type d'activité puisse, d'une part, conduire l'élève lui-même à la prise de conscience de ce qu'il a effectivement retenu et compris, et d'autre part, donner quelque accès aux signes et signifiés éventuellement internalisés. Un autre type de question pourrait demander, par exemple, de revisiter des constructions déjà rencontrées par les élèves, à la lumière des nouveaux signes introduits. Elle pourrait alors se présenter de la manière suivante : « Revoyez les constructions faites en géométrie jusqu'à présent (milieu, axe du segment, etc.) et dites si elles sont des fonctions, quelles pourraient éventuellement être les variables indépendantes, dépendantes, le domaine et l'image ». Ce dernier type de tâche pourrait favoriser l'installation d'un rapport adidactique avec les objets

anciens du savoir, outre que permettre un enrichissement du réseau sémiotique en voie de construction.

- Avant une discussion collective, afin de la préparer. Ce type d'activité a comme objectif principal de faire émerger les signifiés personnels éventuellement déjà construits. Par exemple au début de la quatrième unité de la séquence expérimentale, qui porte sur l'élaboration collective d'une définition de fonction, nous pourrions d'abord demander aux élèves à quelles conditions ils considèrent que deux fonctions sont égales ou équivalentes. Nous rangeons aussi dans ce dernier type d'activité d'écriture de rapport, le cas du travail d'interprétation individuelle et préalable sur un texte, censé de fonctionner comme médiateur sémiotique lors d'une séance consécutive. C'est le cas de la quatrième partie de la séquence expérimentale, où le texte d'Euler, destiné à faire l'objet d'un travail d'interprétation collective, sera d'abord donné aux élèves individuellement pour qu'ils puissent déjà s'en emparer et commencer à donner leur propre interprétation. La discussion collective successive pourra ainsi se greffer sur les signes et les signifiés préalablement produits par les élèves.

Ces types divers d'activités s'articulent selon une sorte de cycle, que nous pouvons résumer de la manière suivante :



**Figure 4.2 - Organisation du travail dans la séquence expérimentale**

Cette organisation du travail constitue un élément caractérisant profondément non seulement notre étude mais aussi toutes les ingénieries didactiques issues de la TMS et concernant l'école secondaire (Mariotti, 2000, 2001, 2003; Cerulli et Mariotti, 2000 ; Cerulli, 2002). En revanche, il faut avouer qu'elle est assez difficile à mettre en œuvre à l'école primaire, où la maîtrise de l'écriture constitue un objectif en soi. Pour cette raison, à l'école primaire cette organisation porte de manière prépondérante sur l'articulation entre les activités avec l'artefact, les discussions collectives et, comme traces écrites, la production et l'analyse de beaucoup de dessins (Bartolini Bussi, 1996 ; Bartolini Bussi et Mariotti 1999b ; Bartolini Bussi et al. à paraître a).

Pour complétude, nous devons aussi souligner que, dans notre expérimentation, nous nous sommes basés seulement sur la production de rapports écrits et n'avons

pas demandé la rédaction d'un cahier. En revanche, cet élément constitue une autre étape importante de l'organisation citée ci-dessous et se retrouve dans un grand nombre d'expérimentations menées au sein de la TMS. En fait, elle permet de fixer les signes, auxquels la classe est parvenue, dans le travail collectif d'élaboration des signifiés mathématiques visés, et constitue la référence partagée au savoir mathématique.

### 3.3. Présentation générale de la séquence du point de vue de l'articulation TdS/TMS au niveau macro

Lors du premier chapitre nous avons déjà présenté les raisons qui nous ont conduit à envisager d'intégrer deux cadres théoriques : la TMS et la TdS (cf. Chapitre 1, § 4.2).

Premièrement, comme Brousseau l'a mis en évidence, nous soutenons l'hypothèse qu'il n'est pas toujours possible d'organiser, dans un temps donné ou dans une institution donnée, des milieux adidactiques pertinents pour l'apprentissage de toute notion. Nous considérons que cette possibilité s'applique en particulier pour ces notions mathématiques, qualifiées par Robert et Robinet (1996), de *généralisatrices, unificatrices et porteuses d'un nouveau formalisme*, c'est-à-dire introduites et élaborées, par les mathématiciens, afin non seulement de résoudre des problèmes, mais aussi de répondre à une exigence de systématisation, de structuration cohérente, internes à une théorie. Parmi ces notions nous situons celle de fonction. A ce propos, les analyses épistémologiques qui la concernent et dont nous avons donné un aperçu lors du deuxième chapitre (cf. Chapitre 2), montrent que son passage dans la genèse historique a été très lent, articulé et sinueux. Et cette dynamique de maturation, comme le souligne aussi Dorier (1997), est propre de ce type de notions, généralisatrices, unificatrices et porteuses d'un nouveau formalisme. De façon analogue, en analysant son insertion et son fonctionnement dans le paysage mathématique déjà construit ou en cours de construction chez les élèves, nous avons pu remarquer (cf. Chapitre 2 § 6), que cette notion de fonction, par sa centralité, sa transversalité, et les différents registres de représentations qu'elle mobilise, pour citer Perrin-Glorian (1999a), ne semble pas se prêter à « *un apprentissage par adaptation sur un temps raisonnable* ».

En revanche, l'articulation des deux cadres théoriques, la TMS et la TdS, chacun apportant une contribution spécifique à cet apprentissage, nous a semblé une ressource à exploiter<sup>36</sup>. En fait, d'une part, à l'intérieur du signifié de fonction, on peut identifier des éléments susceptibles de jouer le rôle de « concepts en acte » dans la solution d'une situation problème (Vergnaud, 1991). D'autre part, le processus de médiation sémiotique orchestré par l'enseignant, organisé à partir d'un artefact donné, peut permettre de passer du niveau « outil implicite de solution » au niveau « objet explicite » (Douady, 1986) et, par cela conduire à la construction des signifiés visés.

Nous avons donc construit, de manière à la fois théorisée et empirique, un dispositif expérimental intégrant ces deux approches théoriques. Nous l'avons modifié, de façon interactive, au fur et à mesure de ses réalisations successives, pour aboutir à la version définitive, dont nous rendons compte ici.

<sup>36</sup> Comme déjà souligné plusieurs fois, la place de ces deux cadres théoriques n'est pas symétrique, puisque notre premier cadre théorique de référence est celui de la TMS. En outre, il faut aussi rappeler que l'articulation entre TdS et TMS, ne se joue pas seulement au niveau d'élaboration de la séquence (comme outil de construction), mais, comme nous le verrons dans les prochains chapitres, au niveau de l'analyse (outil de diagnostic) didactique après coup.

Nous avons déjà anticipé que l'articulation entre ces deux cadres théoriques a été réalisée à deux niveaux différents :

- au niveau « micro », c'est-à-dire relativement à la conception de chaque tâche à l'intérieur de chaque séance ;
- au niveau « macro » ; c'est-à-dire relativement à la construction globale de la séquence.

En ce qui concerne le niveau micro, nous chercherons à en mettre en lumière les éléments d'articulation lors des paragraphes suivants, dans la description fine des séances (des zooms sur les différentes parties de la séquence expérimentale).

En revanche, sans prétention d'exhaustivité, nous donnerons ici quelques exemples d'articulation macro.

Ces exemples portent, d'une part, sur la conception globale de la séquence et, d'autre part, sur l'utilisation de Cabri, à la fois comme composante d'un milieu riche et problématique et comme Instrument de médiation sémiotique.

➤ **Problématiser un élément de médiation sémiotique, par une activité avec l'artefact**

La première séance de la quatrième partie, c'est-à-dire la séance six, n'était pas prévue dans nos premières réalisations de la séquence expérimentale en France et en Italie en 2001. En fait, les élèves après avoir rencontré les fonctions numériques, étaient d'emblée confrontés à la tâche d'interpréter le texte d'Euler à l'aide de Cabri. Rappelons que ce texte est censé fonctionner comme médiateur sémiotique pour la construction du signifié de graphe de fonction, puisqu'il propose et décrit une méthode pour représenter une fonction numérique par l'intermédiaire d'une fonction géométrique.

En revanche, lors de la dernière réalisation de la séquence expérimentale, nous avons décidé d'introduire aussi la séance six. Cette séance demande d'abord de représenter par une expression algébrique et par une table de valeurs une fonction numérique donnée. Ensuite, elle demande aux élèves de trouver eux-mêmes une méthode susceptible de représenter dynamiquement, par une fonction géométrique adéquate, la variation conjointe des deux variables numériques, l'une dépendant de l'autre, associées à la fonction donnée.

Ce choix, dû spécifiquement à l'interaction entre TdS et TMS, a eu justement pour objectif, d'abord, de focaliser l'attention des élèves sur l'existence des plusieurs représentations sémiotiques différentes d'une fonction numérique et, ensuite, de problématiser l'arrivée du texte d'Euler, qui, au problème de comment représenter dynamiquement et géométriquement une fonction numérique, propose une solution efficace. L'introduction de cette séance est issue directement de l'hypothèse élaborée par Brousseau, concernant la nécessité de dévoluer aux élèves la responsabilité face aux connaissances à construire. En fait, le travail préalable sur la recherche d'une méthode de représentation géométrique et dynamique d'une fonction numérique dans Cabri (séance six), doit permettre aux élèves de s'emparer puis prendre en charge la question à laquelle le texte d'Euler répond ensuite (séance sept). Ce travail correspond donc partiellement à l'élaboration de ce que Brousseau appelle *la stratégie de base* (cf. Chapitre 1, § 4.1), tandis que la méthode d'Euler serait une des *stratégies optimales*. La situation que nous proposons ne permet pas de mettre en œuvre toutes les conditions minimales pour qu'elle soit vécue adidactiquement (cf. Chapitre 1, § 4.1), cependant plusieurs conditions en sont satisfaites. En fait, il est vrai que, dans la recherche et l'élaboration de cette méthode il n'y a pas de solution gagnante unique (comme le requiert la condition minimale

III) : plusieurs méthodes de représentation sont possibles, dont la méthode proposée par Euler qui est une des plus efficaces, ainsi que culturellement la plus significative. Cependant :

- cette situation pose comme centrale la nécessité d'inventer une méthode capable de représenter convenablement la co-variation des deux variables. Cette connaissance, visée *a priori*, est requise pour passer de la stratégie de base à la stratégie optimale (condition minimale VII), c'est-à-dire pour comprendre pleinement la méthode d'Euler et le signifié de graphe de fonction. En fait, si la méthode élaborée par les élèves ne lie pas dynamiquement la variation des deux variables, Cabri fournit une rétroaction négative : par le déplacement de la première variable indépendante, il met en évidence que la deuxième variable n'a pas été correctement associée et donc que la représentation n'a pas été construite en gardant la relation de co-variation requise.
- Les élèves possèdent des moyens de régulation et de contrôle de la situation (condition minimale I), et, par des rétroactions opportunes, le milieu permet la validation (condition minimale VI). En effet, par le déplacement, ils peuvent vérifier s'ils ont inventé une méthode qui préserve la co-variation.
- La situation permet d'élaborer une stratégie de base (condition minimale II), car ils ont déjà rencontré et construit des fonctions géométriques qui réalisent justement la co-variation attendue.
- La situation permet de recommencer (condition minimale V).

➤ **Intercaler des activités avec Cabri avec des discussions collectives**

Nous avons déjà vu comment la séquence expérimentale a été conçue selon une organisation précise du travail (par binômes, par travail individuel et collectif). Cette organisation ne vise pas seulement à actualiser les hypothèses d'inspiration vygotkienne de prise de conscience, concernant le rôle de l'écriture et le passage des signifiés personnels au signifié culturel partagé. Il répond aussi à la nécessité de fournir un milieu riche, susceptible de provoquer la construction de certaines connaissances en tant qu'outils de solution de problèmes. Ces connaissances opératoires, ces théorèmes en acte (Vergnaud, 1991) élaborés au cours de la résolution des problèmes posés, pourront en fait fonctionner comme éléments du monde de l'artefact sur lequel fonder, lors des discussions collectives successives, la construction des signes et des signifiés mathématiques socialement partagés visés.

Ainsi, presque chaque partie de la séquence (à l'exclusion de la troisième partie qui est entièrement composée de discussions collectives) est articulée de façon à intercaler, à chaque fois, une situation dans Cabri et une discussion collective consécutive.

C'est dans cette interaction complexe entre la situation dans Cabri, organisée pour fournir un milieu pour l'apprentissage de certaines connaissances et la discussion collective, que, par l'explicitations des connaissances construites en relation avec ce milieu, par un changement de signification des outils impliqués (processus d'internalisation), par la production de signes adéquats et par l'élaboration de signifiés personnels et collectifs associés, nous considérons qu'il pourra se produire la genèse de nouveaux signifiés mathématiques visés.



## 4. Zoom sur la première partie

### 4.1. Variables didactiques liées à la première partie de la séquence expérimentale

Dans la conception de la première partie de la séquence expérimentale, nous avons travaillé sur les valeurs différentes de quatre variables liées aux signifiés à construire.

En particulier, parmi ces variables liées aux signifiés à construire, trois ont joué le rôle de *variables (macro) didactiques* (cf. Chapitre 1, § 4.1). En fait, outre que affecter l'apprentissage des signifiés visés, en jouant sur leurs valeurs différentes, ces variables ont conduit à un changement significatif des situations proposées et à une modification substantielle des stratégies résolutives mises en place par les élèves.

La première variable liée aux signifiés à construire est la suivante :

#### **Le nombre de variables indépendantes pris en compte (VS1) .**

Dans la conception de la première partie de la séquence expérimentale (ainsi que dans le reste de la séquence), cette variable peut prendre plusieurs valeurs : soit la fonction est considérée à une seule variable indépendante et éventuellement dépendante de plusieurs paramètres, soit elle est considérée à plusieurs variables indépendantes et dépendante de plusieurs paramètres, soit elle dépend plusieurs variables indépendantes sans dépendre d'aucun paramètre. C'est-à-dire que les valeurs différentes de cette variable sont soit 1 (une seule variable indépendante), soit strictement supérieure à 1. La possibilité de jouer potentiellement sur ce choix et sur le fait que, dans Cabri, la contrainte instrumentale ne permet que le déplacement d'un seul point à la fois (si l'on n'utilise pas l'outil Animation multiple), conduit les élèves, d'une part, à rencontrer, dans la première et dans la deuxième activité, trois fonctions différentes à une variable, et d'autre part, d'introduire la notion de paramètre.

En fait, lors des activités « Effet1 » et « Effet2 », cette variable prend la valeur 1, tandis que dans les discussions consécutives les élèves sont amenés à travailler, en les évoquant, sur les autres valeurs possibles.

A partir de cette première variable liée aux signifiés à construire, nous avons défini trois autres *variables didactiques*. Puisque dans Cabri, on ne peut pas déplacer qu'un point à la fois, ces trois variables didactiques se réfèrent toutes à des fonctions géométriques à une seule variable indépendante<sup>37</sup>.

Ainsi, lors de la première partie de la séquence, pour toute fonction géométrique à une seule variable indépendante, mais dépendante de deux paramètres, la deuxième variable liée aux signifiés à construire qui joue aussi le rôle de *variable didactique* (cf. Chapitre 1, § 4.1) est la suivante :

#### **Domaine de la fonction et Ensemble image de la même fonction (VD2).**

Nous avons décidé de prendre en compte seulement deux types possibles de domaine et d'ensemble image (relativement à une même fonction géométrique dans

---

<sup>37</sup> Il existe en fait la possibilité aussi de travailler avec fonctions à plusieurs variables mais cela ne peut pas se faire en déplaçant plusieurs points à la fois mais par l'utilisation de l'outil « Animation multiple » qui ne permet pas le même contrôle du déplacement des points, garanti par l'outil « Déplacement ».

Cabri) : soit tout le plan (éventuellement privé d'un point) soit une partie précise du plan voire une figure géométrique bien identifiée.

Si on considère toutes les combinaisons possibles, pour cette variable didactique, on obtient quatre valeurs. Si, en outre, on tient en compte que la cardinalité du domaine est toujours supérieure ou égale à la cardinalité de l'ensemble image, ces valeurs possibles se réduisent à trois :

1) domaine  $\equiv$  tout le plan et ensemble image  $\equiv$  tout le plan; 2) domaine  $\equiv$  tout le plan et ensemble image  $\equiv$  partie bien définie du plan;

3) domaine  $\equiv$  partie bien définie du plan et ensemble image  $\equiv$  partie bien définie du plan.

Modifier la valeur de cette *variable didactique* non seulement induit un changement de stratégie résolutive des élèves, mais aussi a un effet sur l'apprentissage de certains signifiés visés.

En particulier, dans l'activité "Effet1", nous faisons l'hypothèse que ce sera l'opposition « domaine  $\equiv$  tout le plan et ensemble image  $\equiv$  partie bien définie du plan » qui permettra de confronter les élèves à la dissymétrie qui existe entre v. i et v. d. (**critère VII**). Nous donnerons donc aux élèves à étudier des fonctions géométriques qui à tout points du plan (moins éventuellement un point) associeront une figure géométrique précise.

En revanche, la confrontation entre deux valeurs possibles de cette *variable didactique*, à savoir, « domaine  $\equiv$  tout le plan et ensemble image  $\equiv$  partie bien définie du plan » et « domaine  $\equiv$  partie bien définie du plan et ensemble image  $\equiv$  partie bien définie du plan », permettra de mettre en lumière le rôle constitutif du domaine dans la définition/désignation d'une fonction quelconque (**critère IV**).

Même si, sur le plan strictement mathématique, avoir comme domaine, tout le plan, et comme ensemble image, une partie bien définie du plan, ne revêt pas, en soi, une grande importance, cette variable didactique joue un rôle important au niveau perceptif. En fait, elle permet d'amplifier visuellement la dissymétrie existante entre le comportement d'un point qui bouge librement partout et celui d'un autre point dépendant, soumis à des contraintes bien précises (**critère VI**). En outre, nous verrons que les valeurs différentes de cette variable affectent la stratégie résolutive des élèves adoptée par les élèves : le fait de disposer ou pas d'une trajectoire précise de la variable dépendante, amènera à deux manières différentes d'identifier la macro-construction sous-jacente à la fonction géométrique donnée.

La troisième variable macro didactique, liée aux signifiés à construire est la suivante :

**VD3 : la nature de la fonction géométrique à étudier** (injective ou non ; surjective ou non, bijective ou non).

Dans l'activité « Effet1 »,  $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \in \mathbb{P}^3$  les fonctions  $f_{\mathbf{B}, \mathbf{P}}$ ,  $f_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}$ ,  $f_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$  sont toutes non injectives et non surjectives.

Ce choix est dû au souci de confronter, pour la première fois, les élèves à des fonctions qui ne soient pas « particulières »; tout en sachant qu'ils auront l'opportunité d'en étudier d'autres avec de telles caractéristiques dans les activités suivantes. Par exemple, lors de l'activité « Effet2 »,  $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \in \mathbb{P}$  avec  $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$  la fonction  $g_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$  qui sera donné aux élèves à étudier est une fonction surjective et injective.

**VD4 : La trajectoire du point variable dépendant soit passe par les autres points donnés (valeur 1), soit ne passe pas par ces points (valeur 0).**

Dans l'activité, " Effet1" cette variable prendra la valeur 1. C'est-à-dire que:

$$\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \in \mathbb{P}^3 \quad \mathbf{B}, \mathbf{P} \in \{f_{\mathbf{B}, \mathbf{P}}(\mathbf{A})\},$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{P} \in \{f_{\mathbf{A}, \mathbf{P}}(\mathbf{B})\},$$

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \{f_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}(\mathbf{P})\}$$

Nous avons choisi d'attribuer la valeur 1 à cette variable car nous nous attendons à ce que la construction de l'image de la fonction se fasse en termes de trajectoire. Nous croyons que cela pourra se réaliser, tout d'abord, par la résolution de la question n.3, c'est-à-dire par l'identification et la reconstruction de la macro-construction cachée qui est associée à la fonction géométrique donnée à étudier. Nous faisons l'hypothèse que cette tâche s'avèrera plus facile, dans le cas où les images des fonctions à une variable, passent des points déjà présents à l'écran.

En revanche, dans l'activité « Effet2 » nous avons choisi d'attribuer la valeur 0 à cette variable. En fait,  $\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \in \mathbb{P}^3$  la fonction  $g_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$  est telle que la trajectoire du point variable dépendant ne passe pas par les autres points donnés. Cela doit permettre d'éviter aux élèves d'induire que toute fonction géométrique passe nécessairement par des points déjà présents.

## 5. Présentation des fiches relatives à la première partie

Nous présentons maintenant une analyse *a priori* approfondie des activités constituant la première partie de la séquence expérimentale. Nous chercherons à mettre en évidence les choix globaux qui ont guidé leur conception, la valeur attribuée aux *variables didactiques*, les critères liés au savoir à enseigner et l'articulation entre TdS et TMS que chaque question cherche à réaliser.

### 5.1. Analyse a priori Fiche n°1 « Effet 1 »

#### 5.1.1. Choix globaux

La macro « EFFET1 » implémente dans Cabri une fonction de trois variables : de  $\mathbb{P}^3$  dans  $\mathbb{P}$ ,  $\mathbb{P}$  étant le plan affine-euclidien. À un triplet de points  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$  du  $\mathbb{P}^3$  elle associe un point  $\mathbf{H}=f(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P})$  du plan  $\mathbb{P}$  qui est la projection orthogonale de  $\mathbb{P}$  sur la droite  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

Plus précisément :

:

$$\forall (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \in \mathbb{P}^3 \quad \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{P} \setminus \{(\mathbf{A}, \mathbf{A}, \mathbf{P})\} \rightarrow \mathbb{P}$$

$$f : (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}) \rightarrow \mathbf{H} \text{ où } \mathbf{H} \in \mathbb{P} \text{ est la projection orthogonale}$$

de  $\mathbb{P}$  sur la droite  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ .

La situation créée met donc en jeu quatre points variables, les trois points  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{P}$  indépendants et le point  $\mathbf{H}$  dépendant des trois autres<sup>38</sup>.

Les élèves peuvent faire varier chaque point  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ , et  $\mathbf{P}$ , et dans tout le plan.

En revanche, quand ils essayent de faire de même avec  $\mathbf{H}$ , ce dernier point ne peut

<sup>38</sup> *A priori*, les élèves ne connaissent pas les fonctions géométriques. Néanmoins, ce choix de trois points variables au lieu d'un seul permet de créer une rupture avec les fonctions éventuellement connues par les élèves. Nous cherchions ainsi à introduire d'abord la notion de variable géométrique sans lien avec ce qui a pu précéder dans le cours de leur scolarité, pour éviter tout recours au numérique qui aurait caché les notions de variable dépendante et indépendante que nous voulions faire appréhender. En outre, il faut avouer qu'il était assez difficile de donner aux élèves une construction géométrique significative avec un seul point de départ, qui joue le rôle de variable indépendante.

être déplacé qu'indirectement par l'intermédiaire d'autres points.

Le choix de faire varier les points **A**, **B** et **P** dans tout le plan est dû à notre souci de faire apparaître par contraste, la trajectoire de **H** comme contrainte. Les traces des déplacements de **A**, **B** et **P** sont quelconques dans tout le plan, erratiques, alors que celle de **H** se détache comme une forme bien déterminée, cercle ou ligne droite.

La contrainte instrumentale qui oblige les élèves à bouger un seul point à la fois, mène les élèves à se confronter, en réalité, avec 3 fonctions à une variable, dépendantes de deux paramètres :

- |   |                                |                          |
|---|--------------------------------|--------------------------|
| 1. $\forall A, B, P \in \mathbb{P}$ avec $A \neq B$ | $\mathbb{P} \setminus \{(B)\}$ | $\rightarrow \mathbb{P}$ |
|   | $f_{B,P}: A$                   | $\rightarrow H$          |
| 2. $\forall A, B, P \in \mathbb{P}$ avec $A \neq B$ | $\mathbb{P} \setminus \{(A)\}$ | $\rightarrow \mathbb{P}$ |
|   | $f_{A,P}: B$                   | $\rightarrow H$          |
| 3. $\forall A, B, P \in \mathbb{P}$ avec $A \neq B$ | $\mathbb{P}$                   | $\rightarrow \mathbb{P}$ |
|   | $f_{A,B}: P$                   | $\rightarrow H$          |

### 5.1.2. Question n. 1

Créez trois point A, B, et P. Appliquez la macro inconnue « Effet1 » aux points donnés dans l'ordre A, B et P : un quatrième point apparaît, appelez-le H.  
Déplacez tous les points qu'il est possible de déplacer. Observez ce qui bouge et ce qui ne bouge pas. Faites une exploration systématique, c'est-à-dire déplacez un point à la fois et notez sur votre feuille quels sont les points qui bougent et ceux qui ne bougent pas. Résumez dans un tableau les résultats de vos observations.

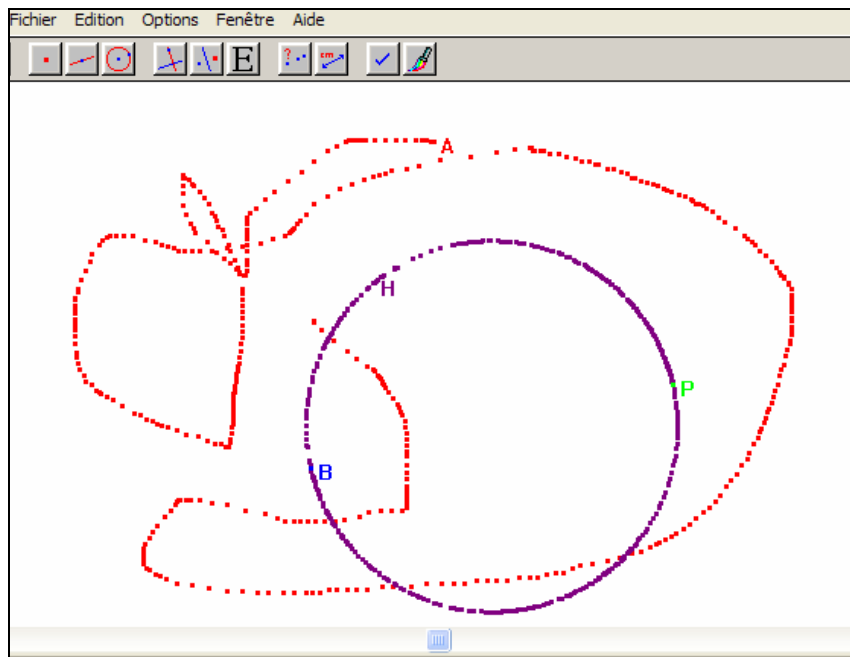
Point qu'on peut déplace	Points qui ne bougent pas	Points qui bougent

La question 1 vise à guider l'élève tout au cours d'une exploration systématique des comportements différents des points impliqués. Elle permet l'activation et une première exploitation du potentiel sémiotique de l'IMS **Déplacement (direct et indirect)**.

Même si elle se base sur la rétroaction forte de Cabri, qui ne permet pas de bouger directement le point dépendant, cette question n'est pas problématique pour les élèves : en fait, nous n'avons pas, par exemple, demandé aux élèves de conjecturer le comportement des points dans Cabri et puis de le vérifier. En revanche, en proposant de remplir ce tableau, nous avons guidé les élèves vers une analyse systématique. Cette question donc ne relève pas de la TdS mais plutôt de la TMS : la tâche à remplir n'est pas nécessairement source de déséquilibres ; en revanche elle exige une prise de conscience par rapport à l'action simple de bouger. Nous avons donc organisé un milieu riche susceptible de fonctionner comme un « amplificateur visuel et perceptif » afin de permettre la mise en lumière de la dissymétrie profonde qui existe entre les variables indépendantes et la variable dépendante (**critère VII**). D'une part, le domaine de chaque point, variable indépendante, est constitué par tout le plan  $\mathbb{P}$  (moins un point) tandis que l'ensemble image émerge clairement comme un sous-ensemble de ce dernier, ayant une forme bien précise, d'autre part, les élèves peuvent bouger directement les points variable indépendante tandis que, le point variable dépendante ne peut être déplacé qu'indirectement.

L'un des objectifs prévus de la discussion collective relative à cette première

activité, est justement celui d'exploiter cette dissymétrie perceptive, en fondant sur elle une première définition de variable indépendante et dépendante.



**Figure 4.3 - L'utilisateur peut bouger librement, par la souris, le point, variable indépendante, A partout dans l'écran de Cabri (trace rouge). En revanche, le point, variable dépendante, H, peut être déplacé seulement indirectement, en bougeant le point A, dont H dépend. En particulier, en observant la trace violette, on peut remarquer que H se déplace sur un cercle.**

L'on peut voir ici un exemple au niveau « micro » de l'articulation entre la TdS et la TMS : les élèves sont confrontés à un milieu organisé et riche, dont nous avons prévu certaines rétroactions, cependant la raison d'être didactique de l'activité est à rechercher ailleurs, elle est dans l'utilisation que l'enseignante va faire de ces rétroactions lors de la discussion collective subséquente.

Cette première question permet de confronter les élèves non seulement à un certain changement (les points bougent et changent leur position) et une certaine régularité (le comportement de ces points n'est pas aléatoire mais déterminé) (**critère I et II**). Elle conduit aussi à centrer l'attention de élèves sur la nature de ce changement simultané et conditionné (**critère VI**) et sur le rôle de ce qui bouge et change, c'est-à-dire des variables (**critère V**).

### 5.1.3. Question n. 2

Si on veut voir plus précisément comment un point se déplace, on peut utiliser l'outil « Trace ». Activez l'outil "Trace" pour les différents points à l'écran et observez ce qui passe ; utilisez des couleurs différentes pour des points différents. Pouvez-vous décrire en utilisant le vocabulaire géométrique habituel la trajectoire des différents points suivant le choix des points déplacés ? Notez vos réponses dans le cadre ci-dessous.

! Bien noter : Pour qu'un point laisse sa trace dans le mouvement, sélectionner l'outil Trace, cliquer sur le point. La combinaison Contrôle F permet d'effacer les traces de l'écran. Pour désactiver la trace d'un point (c'est-à-dire pour que le point ne laisse plus sa trace), sélectionner Trace et cliquer sur le point. L'outil Trace fonctionne comme une bascule.

Après la première question, la deuxième question vise à développer d'avantage l'exploration des régularités inhérentes la situation donnée (**critère II**) et la nature du

lien entre points variables indépendantes et dépendante (**critère V**).

La demande, de décrire géométriquement la trajectoire des points différents, répond à l'exigence d'opérer un passage du seul constat perceptif d'une trace laissée sur l'écran à une formulation en termes géométriques. Elle vise aussi à faciliter la construction chez les élèves du double signifié de trajectoire (**critère XI**) à la fois « suite des positions d'un point qui bouge » et « ensemble des points ».

En outre, en guidant les élèves dans la mise en place des S(S)U relatifs à l'outil **Trace**, cette question vise à mobiliser les différents IMS qui lui sont associés.

Cette question, donc, avec la question qui suit, ouvre aussi la possibilité d'un travail conséquent sur les signifiés de domaine et d'image : ce sera justement un des objectifs de la discussion collective consécutive.

### 5.1.4. Question n. 3

Dans la même fenêtre, créez trois points **A'**, **B'** et **P'**. Construisez vous-mêmes le point **H'** qui serait fourni par la macro-construction « Effet1 » mais sans utiliser la macro. Il s'agit pour vous de retrouver comment H est construit à partir des points A, B et P.

3a) Enregistrez votre fichier sous le nom H' suivi de vos prénoms.

3b) Quand vous avez construit H', vérifiez votre construction en appliquant la macro F aux points A', B' et P'.

3c) Décrivez ici la construction de H'

Pour résoudre la troisième question, il est préalablement nécessaire aux élèves de reconnaître le point **H** comme appartenant simultanément à deux trajectoires différentes. Ce constat peut, rester pourtant, encore au niveau du registre spatial.

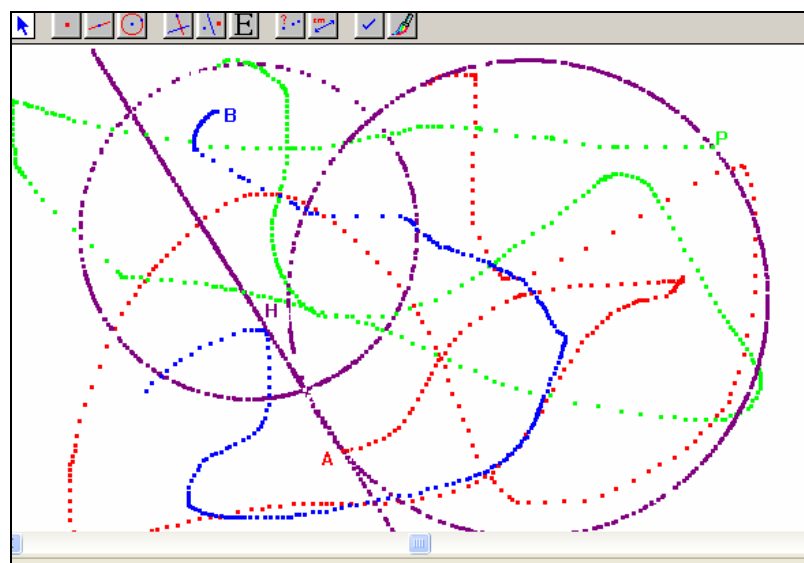


Figure 4.4 - Le point, variable dépendante, H appartient à la fois aux cercles de diamètre [A, P] et [B, P] et la droite (A, B).

Ensuite, puisque la trace est éphémère, pour pouvoir reconstruire **H**, les élèves doivent reconnaître dans ces mêmes trajectoires des figures géométriques connues et doivent mobiliser leurs connaissances à propos de leur constructibilité. Le passage au registre géométrique s'avère alors indispensable.

Les connaissances géométriques exigées dans la résolution de cette tâche et qui émergent comme outil de solution de ce problème ne sont pas nouvelles, elles ne sont donc pas en cause en tant que connaissances visées. Pour reconstruire eux-mêmes la macro cachée, les élèves doivent en fait remarquer que le point variable dépendante appartient à la fois aux cercles de diamètre [A, P] et [B, P] et la droite

(A, B). Etant donnés les trois points initiaux **A**, **B** et **P**, il suffit alors de construire  $H'$  comme intersection de deux de ces figures.

En revanche, la question 3 est là pour préparer la discussion collective suivante. En effet, elle vise à mettre en jeu le signifié d'ensemble image d'une fonction géométrique comme trajectoire (**critères IV et XI**).

L'on peut voir ici comment une analyse conceptuelle, issue de la TdS et relative aux connaissances en jeu dans la tâche (qui montre par exemple que les connaissances géométriques outils de solution de ce problème ne sont pas en cause) peut s'articuler avec les objectifs propres au processus de médiation sémiotique. En fait, à nouveau, cette activité est justement là pour récupérer les signifiés de construction géométrique déjà élaborés (dans le contexte géométrique en relation aux figures et propriétés géométriques) pour le faire fonctionner dans l'élaboration des signifiés de fonction comme macro/construction et créer ainsi le substrat sur lequel développer la construction de signifiés de domaine et image, lors de la discussion consécutive.

Cette articulation à niveau micro entre TMS et TdS et identifiable aussi en ce qui concerne les sous-questions 3b et 3c. La sous-question 3c vise à activer le potentiel sémiotique des IMS **Macro1** et **Trace2**. De ce point de vue, elle tient à la TMS. En revanche, la question 3b, qui demande de vérifier si la construction nouvelle coïncide avec la construction faite par la macro "Effet1", a comme objectif de faire rechercher une validation par rapport aux rétroactions du milieu. Elle tient donc de la TdS.

#### 5.1.5. Question n. 4

D'après votre construction à la question 3, est-ce qu'il y a, selon vous, des positions, des points **A**, **B** et **P**, pour lesquelles le point  $H$  n'apparaît pas ? Vérifiez dans Cabri et justifiez votre réponse.

Dans la question 4, nous demandons aux élèves d'anticiper d'après leur construction, s'il y a des positions de **A**, **B** et **P** par rapport auxquelles  $H$  n'apparaît pas. Il s'agit de repérer par raisonnement quand la construction de  $H'$  n'est pas univoque ou non définie. La vérification à faire dans Cabri est, à nouveau, une validation par rapport au milieu matériel. De ce point de vue la question relève de la TdS. Cependant, le sens de cette question est à rechercher dans la TMS, car elle est ici posée en raison de ses potentialités sémiotiques lors du processus de médiation sémiotique à mettre en place au moment de la discussion consécutive : les positions différentes par rapport auxquelles  $H'$  existe ou n'existe pas seront re-interprétées en termes de domaine d'une fonction et de conditions d'existence sur ce domaine (**critère IV**).

#### 5.1.6. Question n. 5

Comment déplacer **P** pour que le point **H** ne bouge pas ? Utilisez l'outil Trace pour vous aider.  
Décrivez ci-dessous ce que vous avez fait et obtenu.

La question 5 ne problématise pas vraiment le fait qu'il existe des positions de **P** pour lesquelles  $H$  ne bouge pas : déjà sa formulation semble suggérer un tel constat. En revanche, ce qui est problématique pour les élèves est l'identification des moyens par lesquels obtenir que  $H$  reste effectivement immobile. En outre, pour passer d'une pure conjecture sur la trajectoire de **P** à suivre, à une certitude expérimentale, il est nécessaire de chercher une validation par Cabri. Il faut concevoir la trajectoire de **P** comme une droite, la construire, éventuellement activer l'outil « Redéfinition d'un

objet » et vérifier par la rétroaction de Cabri, que H ne bouge effectivement pas (Figure 4.5). Cette tâche permet l'entrée dans un milieu adidactique organisé au sens de la TdS.

Cependant, l'objectif principal de cette activité réside dans la possibilité, lors de sa re-visitation pendant la discussion collective consécutive, de travailler sur les signifiés de domaine, d'image (**critère IV**), de fonction, non surjective, non injective (plusieurs points ont la même image), voire constante (**critère III**), et du double statut de la trajectoire (**critère XI**). Nous voyons donc, à nouveau, que des connaissances construites en interaction avec le milieu serviront comme éléments sur lesquels bâtir la discussion consécutive. Cette question donc relève autant de la TdS que de la TMS.

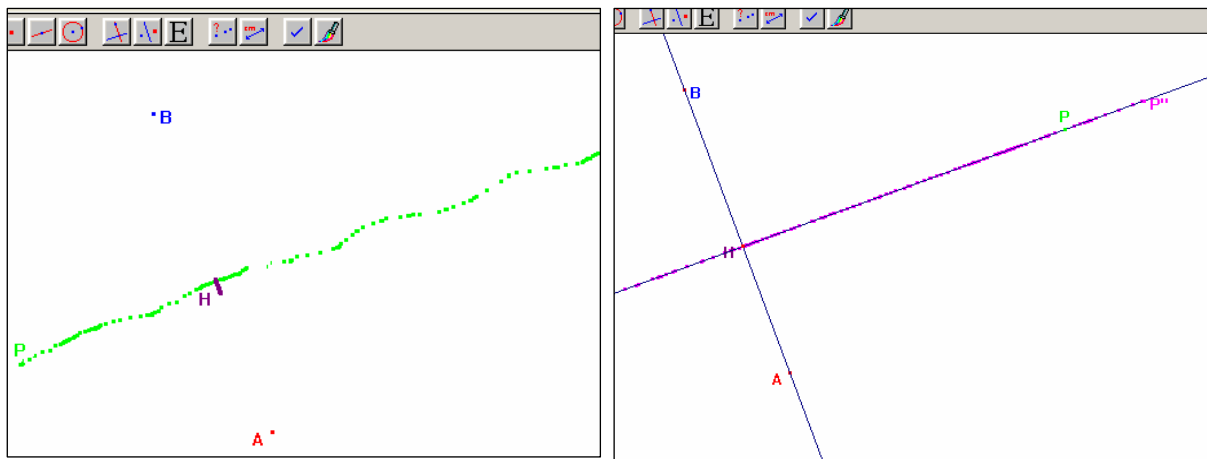


Figure 4.5 – En déplaçant P, perpendiculairement à la droite (AB) les élèves peuvent remarquer que H ne bouge pas

### 5.1.7. Question n. 6

6a) Dans une partie vide de l'écran, créez un point **O**. En déplaçant **P**, est-il possible de conduire **H** en **O**?

6b) Et si vous changez la position de **O**, est-il encore possible et/ou impossible ? Quelles sont les conditions que **O** doit satisfaire pour que cela soit possible?

Décrivez ci-dessous comment avez vous mené votre exploration et justifiez vos réponses.

La question 6 vise à renforcer l'utilisation des IMS **Déplacement** et, éventuellement par évocation, **Trace**. Elle se pose comme objectif de fournir un milieu organisé et riche susceptible, lors de la discussion collective suivante, de fournir des éléments d'approfondissement des signifiés d'image ponctuelle et de antécédent (**critère IV**). La contrainte, posée par Cabri à la trajectoire de H, peut être vécue comme une rétroaction du milieu, qui oblige les élèves, s'ils ne l'ont pas déjà fait, à concevoir en termes globaux la trajectoire de H, à focaliser l'attention sur la dépendance de H par rapport à P et à considérer la co-variation de ces deux variables. En effet<sup>39</sup>, prendre conscience qu'il existe une relation fonctionnelle entre P et H ne se réduit pas simplement à constater que H bouge lorsqu'on déplace P. Il faut aussi observer qu'à chaque fois que l'on déplace P d'une certaine manière, H se déplace de la même façon (fonction déterministe) et que le mouvement de H se *commande* par le mouvement de P. La question posée vise alors à mettre les élèves dans une situation où cette observation puisse se transformer en connaissance. La

<sup>39</sup> Comme il me l'a fait gentiment remarquer Gérard Chauvat.



résolution complète de la question 6b permettra donc d’approfondir ultérieurement le rôle asymétrique des variables indép et dép et la nature du lien entre ces deux types de variables (**critères V et VII**).

En outre, pour répondre à la question et anticiper si et dans quelles conditions la trajectoire de H passe par O, les élèves sont obligés à un changement de focalisation : la question porte sur l’image ponctuelle, tandis que, pour répondre, il faut se référer à l’ensemble image. La aussi l’on joue sur le double rôle de la trajectoire (**critère XI**).

A nouveau, dans cette question l’on peut observer l’apport intégré (prévu *a priori*), d’une part, du milieu (TdS) organisé afin de fournir des rétroactions et de validations opportunes et susceptible de provoquer la construction de certaines connaissances, d’autre part, de la discussion collective (TMS) consécutive, censée, grâce à l’action de l’enseignante, de promouvoir la genèse des signifiés mathématiques d’image et de antécédent.

### 5.1.8. Question supplémentaire

H peut être obtenu par quatre constructions géométriques différentes.

7a) Savez-vous les décrire ?

7b) Justifiez géométriquement l’équivalence des constructions trouvées.

La stratégie attendue dans la résolution de la question 3 est celle d’obtenir **H** comme intersection des deux cercles de diamètre **[AP]** et **[BP]** avec la droite **(AB)**.

En déclarant explicitement qu’il existe quatre types de constructions différentes de H, et en jouant sur le contrat didactique, cette question supplémentaire se donne les objectifs suivants :

- faire réfléchir les élèves sur la redondance éventuelle de la réponse donnée à la question 3 et, lors de la discussion consécutive, sur le signifié que cette redondance peut avoir en termes de définition d’une fonction. En effet, pour construire **H**, il suffit d’obtenir l’intersection d’un seul cercle avec la droite, ou des deux seuls cercles.
- Suggérer aux élèves, s’ils ne l’ont pas déjà fait, de chercher à aussi construire H comme projection de P sur la droite **(AB)**. En fait, cette connaissance à construire constitue la raison géométrique par laquelle toute droite quelconque qui soit perpendiculaire à la droite **(AB)** a comme image un seul point **H**.
- Faire passer les élèves d’un simple constat perceptif à une formulation en termes géométriques de l’équivalence entre constructions différentes pour pouvoir re-investir successivement cette connaissance dans le signifié de fonctions (géométriques) équivalentes.

## 5.2. Analyse *a priori* Fiche n°2 « Effet 2 »

### 5.2.1. Choix globaux

L’activité « Effet2 » met en jeu une nouvelle fonction géométrique à trois variables. En fait, étant donné  $\mathbb{P}$  le plan affine- euclidien, la macro « Effet2 » implémente dans Cabri une fonction **g** telle que

$$\forall (A, B, P) \in \mathbb{P}^3 \quad \mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{P} \setminus \{(A, A, P)\} \rightarrow \mathbb{P}$$

$$g: (A, B, P) \rightarrow K$$

où **K**  $\in \mathbb{P}$  est le milieu du segment reliant P à sa projection orthogonale, P’, sur la droite **(A, B)**.

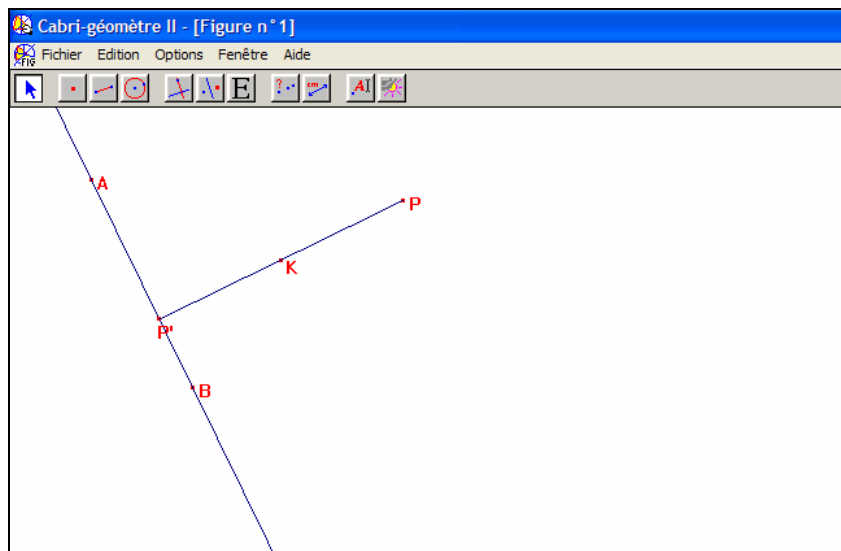


Figure 4.6 - La fonction géométrique sous-jacente à la macro « Effet2 » associe aux points A, B et P du plan, le point K obtenu comme milieu du segment [PP'], où P' est la projection orthogonale du point P sur la droite (AB).

L'activité fait varier deux macro variables didactiques :

- la VD3 « Nature de la fonction » en proposant une fonction à une variable qui, à la différence des autres fonctions déjà rencontrées lors de l'activité précédente, est injective.
- la VD4 « Domaine de la fonction versus Ensemble image de la même fonction ». Les élèves sont en fait confrontés à une fonction, où et le domaine et l'ensemble image sont constitués par tout le plan.

### 5.2.2. Question n. 1

Créez trois points A, B, et P. Appliquez la macro inconnue "Effet2" aux points donnés dans l'ordre A, B et P ; un quatrième point apparaît, appelez-le K.

Déplacez tous les points qu'il est possible de déplacer. Observez ce qui bouge et ce qui ne bouge pas.

1a) Quels sont les points que vous pouvez considérer comme variables indépendantes ? Et lesquels comme variables dépendantes ? Pourquoi ? Notez ci-dessous vos réponses.

1b) Combien de fonctions pouvez-vous repérer ? Lesquelles ?

Les premières questions de l'activité « Effet2 » se présentent aux élèves pour une grande partie comme très semblables aux questions déjà rencontrées lors de l'activité « Effet1 ». En effet, elles répondent aux mêmes critères : confronter les élèves à des changements et à des régularités (**critère I et II**), focaliser l'attention sur le rôle dissymétrique des variables (**critère V et VII**), travailler avec fonctions diverses (**critère III**).

Pourtant, les termes selon lesquels sont posées les questions 1a) et 1b) sont radicalement nouveaux : la fiche parle explicitement de variables et de fonctions.

Il s'agit donc de voir aussi si et comment les signifiés introduits lors de la discussion collective, qui a eu suite à l'activité précédente, ont été internalisés par les élèves. Nous nous attendons à ce que les élèves sachent reconnaître les points variables indépendantes et variables dépendantes et qu'ils le fassent en s'appuyant sur le déplacement direct ou indirect de ces points. Cela sera considéré comme un indice d'une première internalisation par les élèves de l'instrument **Déplacement**.

La question 1b) requiert de dénombrer et caractériser les fonctions différentes qui ont été éventuellement repérées (**critère III**). Cela devrait permettre de vérifier si les

élèves ont bien compris qu'ils sont face à des fonctions diverses selon le nombre de variables et de paramètres qu'ils ont décidé de prendre en considération.

Cette question vise aussi à dégager quels sont les éléments retenus nécessaires, à ce stade, par les élèves, pour caractériser une fonction. La résolution de cette question permettra de mettre en lumière la façon dont les élèves se serviront des instruments *Trace1*, *Trace2* ou *Trace3*. Ils pourront en fait s'en servir pour explorer le domaine et l'ensemble image des fonctions repérées. Ce type d'observations pourra donc attester du processus d'internalisation de tels instruments éventuellement *en jeu*.

### 5.2.3. Question n. 2

Y-a-t-il des positions de **P** pour lesquelles **K** reste immobile ? Utilisez l'outil « Trace » pour vous aider.  
Décrivez ci-dessous ce que vous avez fait et obtenu.

La question 2 permet de confronter les élèves à une fonction de nature différente des fonctions déjà rencontrées, et notamment de la fonction  $f_{A, B}: P \rightarrow H$ . En fait, la fonction qui :

$$\forall A, B, P \in P \text{ avec } A \neq B \quad \begin{array}{l} P \rightarrow P \\ g_{A, B}: P \rightarrow K \end{array}$$

est injective, surjective et son ensemble image est tout le plan moins un point. Les élèves sont ainsi amenés à découvrir une fonction dont l'image n'est pas constituée par une figure géométrique particulière. Cet type de fonction s'oppose à celui rencontré lors de la question 5 de l'activité précédente, où par la restriction du domaine à une droite, la fonction obtenue aurait été constante (**critère III**).

Puisque la première fonction étudiée n'était pas injective, probablement (au moins au début) les élèves s'attendent à trouver là aussi une trajectoire de **P** pour que **K** ne bouge pas. Les rétroactions du milieu invalideront cette attente. Cependant, même si nous avons organisé un milieu susceptible d'apporter ce type de rétroactions, la raison didactique de cette question est à rechercher dans le processus de médiation sémiotique à mettre en place lors de la DC subséquente. En fait, nous nous attendons à ce que cette deuxième discussion collective, portant sur les connaissances construites lors de la résolution de cette tâche, puisse reprendre et approfondir les signifiés de variable, domaine et de image (**critères IV et V**) déjà introduits lors de la première discussion collective. Voilà un nouvel exemple de articulation au niveau micro entre TMS et TdS.

### 5.2.4. Question n. 3

Si vous considérez les points **A** et **B** fixés, le point **K** peut être considéré comme l'image du point **P** par la fonction **g**.

3a) Créez un triangle, quelle est son image par la fonction **g** ?

3b) Quelle est l'image d'un cercle par la même fonction **g** ?

3c) Créez une figure géométrique de votre choix et trouvez son image par la fonction **g** ?  
Décrivez le raisonnement et le procédé que vous avez suivis pour déterminer cette image.

La question 3 semble axée principalement sur le signifié d'image. En réalité elle porte sur le signifié tant d'image que de domaine. Elle vise à approfondir ces signifiés comme éléments essentiels, constitutifs de la définition d'une fonction. Choisir différents domaines, en fait, induit différentes fonctions (**critère IV**).

En ce qui concerne le signifié d'image, il est intéressant de remarquer que la question est posée en termes mathématiques : c'est aux élèves de faire le lien entre le signe « image » et le monde de l'artefact : de rechercher dans Cabri les outils et

les signes qui peuvent convenablement correspondre au signifié mathématique mobilisé.

En revanche, en ce qui concerne le signifié de domaine, la solution de cette question permet un approfondissement de ce signifié dans le cas particulier où celui-ci correspond à tout le plan.

En fait, pour résoudre cette question, deux stratégies sont attendues :

- les élèves construisent un triangle (3a), un cercle (3b) ou une autre figure au choix (3c), choisissent un point sur cette figure (qui sera donc différent de P) et lui appliquent à chaque fois la fonction  $f$ .
- Ou bien, les élèves construisent un triangle (3a), un cercle (3b) ou une autre figure au choix (3c), utilisent l'outil « Redéfinition d'un objet » et redéfinissent la nature du point P en le contraignant à appartenir, au fur et à mesure, à chaque figure.

Suite à notre pré - expérimentation en France (2001) où les élèves ont montré des difficultés à résoudre ce problème (car ils ne considéraient pas que la fonction s'appliquait potentiellement à tous les points du plan et non pas seulement au point P) nous avons décidé de ne pas évoquer l'utilisation de l'outil « Redéfinition d'un objet ».

En fait, l'utilisation de cet outil pourrait empêcher l'émergence de l'hypothèse, mise en évidence déjà par d'autres recherches (Jahn, 1998) selon laquelle pour les élèves « le plan ne serait pas homogène ». Dans notre cas, pour les élèves, « il serait vide avec à son intérieur, seulement les points P et K qui bougent ». La redéfinition de la nature du point P, puisqu'au fond il resterait le même point, n'exigerait donc pas la prise de conscience que la fonction agit potentiellement sur tous les points du plan et non seulement sur un point particulier à la fois.

En revanche, cette prise de conscience marquerait un approfondissement du signifié de domaine, comme ensemble infini de points où la fonction agit de manière actuelle (actuelle est ici employée en opposition à potentielle) et donc simultanée.

Cette question introduit aussi une expression nouvelle « K est image de P par la fonction  $f$  ». Nous nous attendons à ce que cette expression pose problème aux élèves. Cependant nous avons choisi de ne pas l'expliquer préalablement afin d'avoir accès au signifié primitif éventuellement attribué par les élèves. En cas de blocage, l'enseignante est censé intervenir pour l'expliquer.

#### 5.2.5. Question n. 4

Dans la même fenêtre, créez trois points  $A'$ ,  $B'$  et  $P'$ . En utilisant les outils de Cabri, faites vous-même une construction qui se comporte comme la macro « Effet2 ». Appelez  $K'$ , le point obtenu.

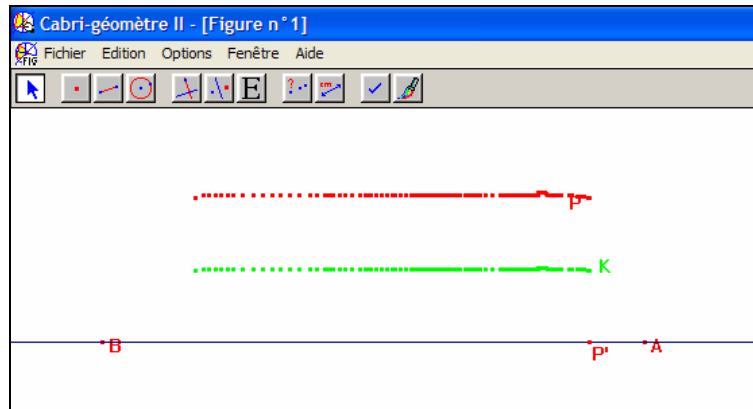
4a) Après avoir construit  $K'$ , vérifiez votre construction en appliquant la macro « Effet2 » aux points  $A'$ ,  $B'$  et  $P'$ .

4b) Enregistrez votre fichier sous le nom  $K'$  suivi de vos prénoms.

4c) Décrivez ici la construction de  $K'$  et expliquez comment vous avez fait pour arriver à la trouver.

La question 4 propose une tâche analogue à celle de la question 3 relative à première activité. Elle se présente donc comme une tâche de renforcement. Cependant, en jouant sur la valeur différente de la VD4: « trajectoire du point dépendant passant par les autres points », cette question, en réalité, confronte les élèves à une tâche différente : afin de retrouver et reconstruire la construction cachée, ils ne peuvent pas se servir directement des points donnés, mais ils doivent se fonder sur les propriétés géométriques des trajectoires du point  $K'$ , selon le déplacement des différents points variables indépendantes. Par exemple ils peuvent

observer qu'en déplaçant un point quelconque de la droite  $(A, B)$  le point  $K'$  ne bouge pas)<sup>40</sup>. Cela signifie que  $K'$  ne dépend pas des points  $A, B$ , considérés singulièrement, mais de position de la droite  $(A, B)$  considérée globalement. Par l'activation éventuelle de l'outil « Trace », ils peuvent, en outre, remarquer que, s'ils bougent  $P$ , parallèlement à la droite  $(A, B)$ ,  $K'$  aussi se déplace parallèlement à la droite  $(A, B)$ , toujours en gardant la même distance de cette droite (figure ci-dessous). En fin, les élèves peuvent mesurer cette dernière distance, la confronter avec la distance de  $P$  de la droite  $(A, B)$  et observer qu'elle demeure toujours la moitié.



**Figure 4.7 - Si on bouge  $P$ , parallèlement à la droite  $(A, B)$ ,  $K'$  aussi se déplace parallèlement à la droite  $(A, B)$ , toujours en gardant la même distance de cette droite**

Cette activité permet à nouveau d'approfondir, d'une part, le changement conditionné et simultané d'une variable en fonction de l'autre, c'est-à-dire la co-variation entre variables (**critère VI**), d'autre part la double nature de la trajectoire, à la fois comme succession temporelle de points ou positions et ensemble dans lequel tous les points sont considérés simultanément (**critère XI**).

En outre, cette question conduit ainsi les élèves à étudier une fonction géométrique qui diffère des précédentes et permet d'éviter le risque de penser que toute image d'une fonction passe nécessairement par les points qui sont servi pour la construction de l'image.

Les connaissances construites lors de la solution des trois dernières questions (n. 2, 3 et 4) (c'est-à-dire comment cette fonction géométrique a été construite, pourquoi et comment elle se comporte par rapport à des domaines différents), feront l'objet de la discussion collective consécutive. En particulier, nous chercherons à discuter la raison mathématique pour laquelle cette fonction diffère des autres déjà rencontrées, à savoir, le fait qu'elle est injective. L'articulation entre TdS et TMS se réalise donc à ce niveau : les connaissances élaborées en réponse au milieu sont censées fonctionner comme éléments sur lesquelles bâtir la construction du signifié de fonction injective.

<sup>40</sup> Les élèves peuvent obtenir perceptivement, cet effet, en déplaçant par exemple  $A$  de façon à garder la droite  $(A, B)$  toujours en la même position horizontale.

### 5.3. Analyse a priori Fiche n° 3 « Invente tu une fonction »

#### 5.3.1. Choix globaux

La tâche proposée aux élèves dans la séance 3 est très ouverte. D'abord nous demandons aux élèves d'inventer une fonction géométrique dont ils doivent établir et choisir eux-mêmes tous les éléments constitutifs. Nous leur demandons ensuite d'enregistrer cette fonction dans Cabri, comme une macro construction.

L'utilisation combinée de **Macro2** avec **Trace2** et **Trace3** (cf. Chapitre 3, § 2) se révèle indispensable pour saisir le domaine et l'image de la fonction construite. Cela doit permettre, à nouveau d'approfondir ces signifiés (**critère IV**). En fait, l'utilisation de Trace combinée à celle de Macro, s'avérera nécessaire afin d'explorer et saisir le domaine et l'image de la fonction inventée : cela permettra de réinvestir le double signifié de trajectoire dans la construction de ces signifiés (**critère XI**).

D'autre part, le recours nécessaire et conscient à l'instrument **Macro3** peut permettre la condensation du processus sous-jacent à cette fonction, en objet. L'instrument **Macro3** en effet exige non seulement la distinction très nette entre variable dépendante et variable indépendante (si les élèves choisissent les mêmes points soit comme objets initiaux soit comme objet finaux, le logiciel rétroagira en refusant de valider la macro) mais aussi la désignation d'un nom pour la macro construite.

Une autre raison pour laquelle nous proposons cette activité est liée à la possibilité d'enrichir et complexifier le ventail des fonctions géométriques rencontrées jusqu'à ce moment-là (**critère III**). En fait les fonctions différentes, qui seront construites par les élèves et qui présenteront des aspects ou des cas particuliers feront l'objet de la discussion qui suivra. Nous nous attendons, par exemple, à ce que les élèves soient confrontés à des fonctions où le domaine ou l'image soient des régions du plans différentes de ce qu'ils ont déjà pu rencontrer.

Nous voyons ici la fonction, d'une part mésogénétique de l'activité (dans ses potentialités de produire un nouveau milieu pour l'apprentissage) et, d'autre part chronogénétique (dans la responsabilité accordée aux élèves d'intervenir et conditionner directement le temps didactique).

#### 5.3.2. Question n. 1

1a) Aujourd'hui c'est vous qui allez construire une fonction  $f$  qui à un certain point  $M$  associe un autre point  $M'$ .  
Une fois terminé votre construction, complétez le tableau suivant en spécifiant dans le cas concret de votre fonction quel est ou quels sont... :

la variable indépendante :	
la variable dépendante :	
le domaine :	
la construction / procédé :	
l'ensemble des points images :	

1b) Enregistrez votre figure sous le nom  $f$  suivi de vos deux prénoms.

1c) Enregistrez la fonction  $f$  que vous avez construite comme une macro-construction. Donnez à la macro le nom  $Mf$  suivi de vos deux prénoms.

Indiquez ci-dessous

- l'objet initial ou les objets initiaux de la macro-construction,
- l'objet final ou les objets finaux de la macro-construction.
- toute autre chose que vous considérez importante.

La première question ne demande pas seulement de construire une fonction géométrique dans Cabri et de l'enregistrer comme macro, mais aussi d'en expliciter les éléments constitutifs. La question est composée de deux parties, la première formulée en termes mathématiques, la deuxième dans le langage propre au Cabri. En se fondant sur le fonctionnement des outils de Cabri, supposés être à ce stade, en quelque sorte internalisés comme signes, les élèves doivent donc faire eux même la mise en relation entre les signes issus du monde des mathématiques et les signes issus de l'artefact. Cette activité permet donc de continuer à approfondir les liens entre ces deux mondes, et, parallèlement, participe à la construction des signifiés associés. De ce point de vue, cette question porte principalement sur la TMS, même si, à nouveau, les connaissances relatives au comportement inattendu et aux singularités des fonctions inventées, sont élaborées grâce aux rétroactions d'un milieu organisé au sens de la TdS.

Deux stratégies de résolution sont attendues :

- Ou bien les élèves définiront une fonction en utilisant les outils de Cabri qui correspondent à des constructions géométriques données : le point dépendant sera alors obtenu par l'application d'une symétrie, translation, homothétie, etc. (stratégie 3.1.1),
- Ou bien ils inventeront eux-mêmes une construction qui à un point fait correspondre un autre point (stratégie 3.1.2).

Associées respectivement à ces deux catégories de résolution, nous nous attendons à ce qu'ils rencontrent les difficultés suivantes :

- pour la stratégie 3.1.1, celle de ne pas bien savoir utiliser une telle transformation de Cabri : en fait, pour appliquer une transformation géométrique, il est nécessaire d'explicitier tous les éléments qui y interviennent (par exemple, dans une rotation il faut désigner l'objet que l'on veut faire tourner, puis le centre et l'angle défini par un nombre) ;
- pour la stratégie 3.1.2, celle de ne pas dégager facilement, dans une construction faite au début un peu au hasard, le point qu'ils doivent considérer en premier comme variable indépendante et celui qui doit être désigné en seconde comme variable dépendante. Cette difficulté, si elle est surmontée, conduit directement à la résolution de la question 1c).

Au contraire, la première stratégie n'ouvre pas la voie à la résolution de la question 1c), c'est-à-dire au problème de choisir les objets initiaux et finaux.

### 5.3.3. Question n. 2

2a) Créez une droite  $d$ . Quelle est son image par la fonction  $f$  que vous avez construit ?

2b) Indiquez ci-dessous les outils de Cabri que vous avez choisi d'utiliser et comment vous avez fait pour trouver l'image de la droite  $d$ . Justifiez vos choix.

Il s'agit à nouveau d'approfondir les signifiés de domaine et d'ensemble image (**critère IV**) et de travailler la liaison entre ces signifiés et les outils de Cabri mobilisés.

Cette question pourrait sembler une simple tâche de renforcement. Cependant étant donné l'impossibilité d'anticiper a priori quelles seront les fonctions inventées par les élèves, le degré de difficulté de ces fonctions n'est pas mesurable. Et, dans certains cas, les élèves pourront se retrouver face à une fonction totalement inattendue et, par conséquent, à une question non routinière.

## 6. Zoom sur la deuxième partie

La deuxième partie est constituée d'une seule séance et porte sur le passage des fonctions géométriques aux fonctions numériques.

### 6.1. Analyse a priori Fiche n°4 « Un rectangle bizarre »

#### 6.1.1. Choix globaux

La situation met en jeu un rectangle doué d'une propriété particulière initialement inconnue aux élèves. Nous demandons d'explorer la situation donnée, en identifiant cette propriété.

A la différence des situations proposées lors de la première partie de la séquence expérimentale, afin de modifier la figure donnée, les élèves ne peuvent pas bouger directement les points qui constituent le rectangle, mais doivent changer les nombres initiaux donnés, correspondant respectivement, à la mesure de la longueur d'un côté du rectangle et à la mesure du demi périmètre.

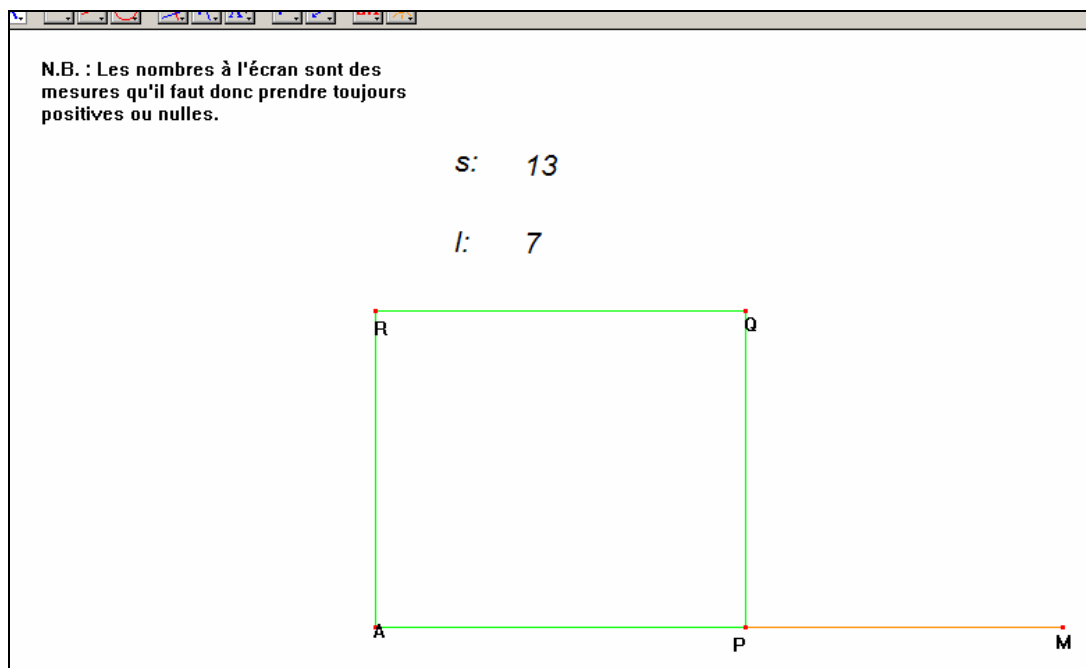


Figure 4.8 - Voilà ce qui apparaît à l'écran lors de l'ouverture du fichier donné aux élèves, au début de la séance



L'objectif principal de cette activité est donc de permettre le passage aux fonctions numériques. Il s'agit de construire et d'approfondir des correspondances sémiotiques entre les fonctions géométriques et les fonctions numériques dans Cabri ; de retrouver les signifiés de variable indépendante, dépendante, domaine, image et paramètre, sous une nouvelle forme. Dans le premier type de fonction, en fait, les variables sont généralement des points, le domaine et l'image une région du plan et la variabilité peut être saisie, dans Cabri, en termes de mouvement. En revanche, dans le deuxième type de fonction proposé, les variables sont des nombres, le domaine et l'image, un ensemble de nombres, et la variabilité est représentée dans Cabri par une variation des nombres dans une fenêtre douée de flèches.

### 6.1.2. Question 1

1a) Ouvrez le fichier de Cabri "UnRectangleBizarre.fig".

Explorez la situation donnée, en tenant en compte que les **nombres initiaux 13 et 7, appelés respectivement  $s$  et  $l$ , représentent des mesures et que, par cela, doivent être considérés pris positifs ou nuls!**

Quelle est la propriété géométrique cachée qui a été utilisée pour construire le rectangle **APQR**?

Les élèves n'ont jamais rencontré de fonctions numériques dans Cabri. Face au rectangle donné, nous nous attendons à ce que leur première réaction soit celle d'essayer de bouger directement les points donnés. Seulement dans un deuxième temps, le fait que toute la figure résiste et apparaisse figée, permettra de les amener à rechercher une manière différente de la modifier par une action sur les nombres correspondants. Si cela ne se produit pas, pour éviter tout blocage, nous nous attendons à ce que ce soit à l'enseignante de suggérer de prendre en compte ces nombres. Le « nota bene » en gras sur la nature des nombres à l'écran, peut aussi suggérer aux élèves que ceux-ci sont modifiables.

Il faut rappeler que, dans Cabri, pour pouvoir changer un nombre donné, il est nécessaire de se positionner avec le curseur sur le nombre et puis de double-cliquer : une fenêtre apparaît, avec sur le côté droit, deux petites flèches (nous avons appelé cet outil « Fenêtre des nombres »). L'on peut alors modifier le nombre soit en introduisant une valeur différente à l'intérieur de la fenêtre, soit en agissant sur les deux flèches (par incrément ou le décrétement respectifs d'une unité de la valeur affichée). En outre, si l'on veut modifier le pas de l'incrément, dans Cabri, et par exemple, augmenter le nombre donné de 0,1 unités, il faut modifier l'écriture du nombre donné, en affichant aussi, par exemple, son premier chiffre décimal, et puis agir, à nouveau, sur l'une des deux petites flèches.

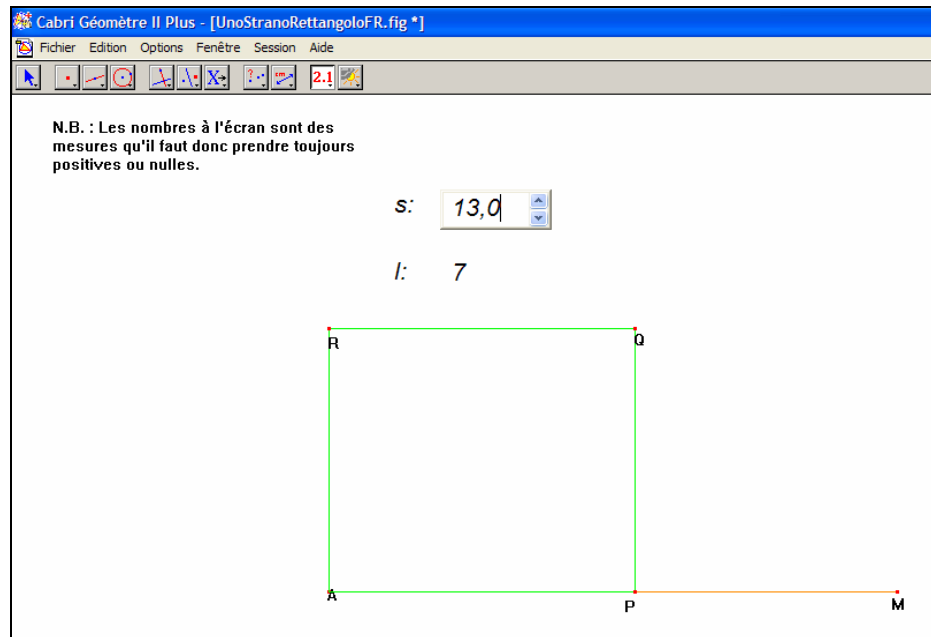


Figure 4.9 - Voici la fenêtre du nombre 13, telle comme elle apparaît aux élèves dès qu'ils y cliquent dessus

La « fenêtre des nombres » constitue un instrument de médiation sémiotique différent des ceux déjà rencontrés par les élèves et utile pour l'introduction du nouveau signe de variable numérique. En effet, elle conduit à saisir, dans Cabri, la variabilité d'une variable numérique donnée au sein d'un ensemble numérique particulier ; dans ce cas-ci, il s'agit de choisir les deux nombres,  $l$  et  $s$ , positifs avec  $l < s$ . Dans notre expérimentation, cet instrument est mis étroitement en relation avec le **Déplacement**. En fait, les élèves sont amenés à associer directement ces deux instruments : faire varier les nombres dans la fenêtre se présente comme une manière différente de bouger les points. Nous nous attendons ainsi à ce que la métaphore fondamentale du mouvement liée aux fonctions géométriques, puisse être récupérée et réinvestie aussi dans les fonctions numériques. Nous nous attendons aussi à ce que les deux signifiés de variable géométrique et de variable numérique puissent confluer dans le signifié général et plus complexe de variable tout court.

### 6.1.3. Question 2

2a) Y-a-t-il des « objets » que vous pouvez considérer comme des variables indépendantes ? Si, non, pourquoi ? Si oui, lesquels ?

2b) Y-a-t-il des « objets » que vous pouvez considérer comme des variables dépendantes ? Si, non, pourquoi ? Si oui, lesquels ?

2c) Quelles fonctions pouvez-vous définir ?

2d) Enregistrez votre construction avec le nom RECT suivi par vos prénoms.

La deuxième question demande aux élèves d'établir un premier niveau de correspondance sémiotiques : d'une part, ils doivent identifier dans les nombres affichés à l'écran, qu'ils peuvent modifier, des variables indépendantes et de paramètres, d'autre part, dans d'autres nombres (ainsi que dans les points correspondants), affichés par les élèves eux-mêmes, modifiés indirectement, les variables dépendantes. En se fondant sur ce qui change et ce qui ne change pas (**critère V**), sur le changement conditionné d'une variable par rapport à l'autre

(**critère VI**) et sur la dissymétrie entre variable indépendante et dépendante (**critère VII**), les élèves doivent donc réinterpréter les signifiés de variation, de variable et, par conséquent, de fonction, pour l'étendre au cas des fonctions numériques.

La question 2c) focalise l'attention des élèves sur la pluralité et la nature différentes des objets en jeu. Nous nous attendons à ce que les élèves identifient et indiquent des fonctions purement numériques (comme celles qui à  $l$  ou  $s$  associent le périmètre ou le demi-périmètre du rectangle), et des fonctions « mixtes », c'est-à-dire en partie numériques et partie géométriques (comme celles qui à  $l$  ou  $s$  associent respectivement les segments  $[AP]$  ou  $[AM]$ , ou qui aux segments  $[AP]$  et  $[AM]$ , associent le périmètre ou le demi-périmètre du rectangle).

Dans tout les cas il s'agit de questions ouvertes, à discuter lors de la discussion collective correspondante. Nous faisons l'hypothèse que les échanges dialogiques entre binômes et les réponses écrites permettent une structuration et une explicitation des signifiés personnels élaborés et peuvent constituer le fondement sur lequel bâtir les signifiés mathématiques culturels visés.

### 6.1.4. Question 3

3a) En vous aidant avec les outils de Cabri, complétez le tableau suivant : reportez pour des valeurs déterminées choisies pour la mesure de la longueur de  $[AP]$ <sup>41</sup>, les valeurs correspondants de l'aire du rectangle  $APQR$ .

Longueur de $[AP]$	Aire rectangle $APQR$

3b) Observez le tableau que vous avez construit, qu'est-ce que pouvez-vous dire de l'aire du rectangle  $APQR$  lorsque la longueur de  $[AP]$  varie de 0 à la longueur de  $[AM]$  ?

La question 3a) vise à l'introduction d'une fonction numérique précise : celle qui à la mesure du segment  $[AP]$ , associe l'aire du rectangle  $APQR$ . En outre, elle permet d'introduire un certain type de représentation d'une fonction numérique : celle par le tableau de valeurs.

En revanche, la question 3b) permet d'introduire le problème des propriétés et des limites de ce type de représentation. En fait, d'une part, par l'observation du tableau, les élèves peuvent se rendre compte de la symétrie de la fonction représentée : en augmentant la mesure du segment  $[AP]$ , l'aire associée augmente puis diminue de façon symétrique. D'autre part, nous nous attendons à que les élèves choisissent, au moins au début, d'augmenter la mesure du segment  $[AP]$ , à chaque pas, d'une unité. Ainsi, ce type de représentation ne permettrait pas d'identifier la valeur de la variable correspondant au maximum ; au contraire, l'aire semble augmenter, puis se stabiliser autour d'une valeur ( $42 \text{ cm}^2$  pour la longueur de  $[AP]$  égale à 6 et à 7) et, enfin, diminuer.

<sup>41</sup> Pour abrégé, lors de cette rédaction, nous utiliserons simplement « longueur de  $[AP]$  » au lieu de « mesure de la longueur de  $[AP]$  ». En revanche, l'enseignant prêtera beaucoup d'attention à souligner, au moins au début, cette distinction.

### 6.1.5. Question 4

4a) Soit  $l$  la longueur du segment  $[AP]$  et soit  $s$  la longueur du segment  $[AM]$ , exprimez par une formule, l'aire du rectangle  $APQR$ .

4b) Est-il possible de considérer l'aire du rectangle  $APQR$  comme une fonction ? Si oui, quelle pourrait être sa définition ? Si no, pourquoi ?

La question 4 permet d'aborder un nouveau type de représentation d'une fonction numérique : celle obtenue au moyen de l'écriture algébrique.

Ainsi, nous nous attendons à ce que, lors de la discussion relative, par l'analyse des cas-limites, l'enseignante puisse mettre en évidence des propriétés de ce type de représentation : par exemple, elle peut montrer que, en observant l'expression algébrique  $\text{Aire}(APQR) = l \cdot (s - l)$ , il devient évident que l'aire s'annule, non seulement pour  $l=0$ , mais aussi pour  $l=s$ .

En particulier, la question 4b) requiert des élèves de réinvestir et expliciter ce qu'ils ont compris des fonctions, en le mettant en œuvre, pour la première fois, sur une fonction numérique particulière. En fait, non seulement ils doivent expliciter comment il est possible de considérer l'aire comme une fonction, mais aussi, en demandant quelle pourrait être la définition d'une telle fonction, ils doivent exhiber tous les éléments retenus nécessaires pour l'identifier.

Comme dans le cas des autres questions posées, cette dernière est conçue de manière assez ouverte, afin de fournir des éléments de discussion lors du moment de bilan collectif.

## 7. Troisième partie

La troisième partie est constituée exclusivement de discussions collectives qui s'articulent autour des cinq questions principales :

1. donner une définition de fonctions équivalentes
2. donner une définition de fonction géométrique
3. donner une définition de fonction géométrique à une seule variable indépendante
4. donner une définition de fonction numérique
5. donner une définition de fonction numérique à une seule variable indépendante

L'enseignante pose ces questions, en demandant d'abord d'y réfléchir à la maison et d'écrire un rapport individuel. Ensuite elle demande aux élèves d'en discuter et de trouver une position commune et partagée.

Les trois premières questions sont posées après les deux premières activités et sont reprises après la troisième activité de la première partie. Les deux autres questions se situent après la deuxième partie, c'est-à-dire après l'introduction des fonctions numériques.

En particulier, la première question est posée dans le but de susciter l'exigence chez les élèves de définir par eux-mêmes les fonctions géométriques. En fait, pour convenir sur ce qu'on doit pouvoir considérer comme fonctions équivalentes, il faut d'abord se mettre d'accord sur ce qu'on considère comme fonction. Dans le cas où cette nécessité ne se manifeste pas, l'enseignante peut soulever directement la deuxième question.

L'objectif final donné aux élèves est celui d'élaborer et de raffiner une définition de fonction, qui peut trouver une forme stable par un consensus de la classe entière,

mais qui peut aussi être revisitée et ajustée tout au long de séquence expérimentale, lorsque les élèves en envisagent l'opportunité.

Le travail d'élaboration d'une définition est un travail proprement sémiotique : il s'agit d'explicitier les signifiés personnels élaborés au cours des activités et de produire des signes susceptibles d'être accueillis, partagés, modifiés et puis acceptés collectivement. Ce type de travail est propre à toute discussion mathématique, non seulement à celles qui ont par objectif de parvenir à une définition socialement partagée et mathématiquement consistante. Cependant ce travail acquiert, lors de la production d'une définition, une importance particulière, liée au statut culturel que ce type d'énoncé revêt à la fois dans le contexte scolaire, dans la perception des élèves et dans les mathématiques. Etant donné l'ampleur de notre expérimentation, nous n'approfondirons pas l'analyse *a priori* de cette deuxième partie de l'expérimentation. D'une part, ce choix est dû au fait que nous avons décidé de centrer notre attention sur d'autres types de discussions collectives, qui portent sur le début du processus de médiation sémiotique déclenché par deux médiateurs sémiotiques, Cabri et le texte d'Euler. D'autre part, cette partie présente des singularités importantes liées à l'activité de construction de définitions en mathématique et mérite l'approfondissement de problématiques spécifiques, qui ne trouvent pas un espace suffisant dans cette thèse. Néanmoins, en ce qui concerne l'analyse *a priori* de cette partie, nous estimons que la méthodologie d'analyse développée pour les deux autres discussions collectives pourra constituer une base adéquate sur laquelle développer une analyse appropriée.

## 8. Zoom sur la quatrième partie

La quatrième partie est constituée de trois séances. Elles portent sur les représentations différentes d'une fonction numérique : par une expression algébrique, par un tableau des valeurs et par une fonction géométrique associée. En particulier cette partie vise à introduire et à travailler la méthode de représentation fournie par un texte du célèbre mathématicien Euler. D'une part, il s'agit donc de continuer à développer les signifiés de variables indépendante et dépendante, de domaine et d'image (**critères IV et V**) construits dans un contexte géométrique et déjà étendus aux fonctions numériques lors des parties précédentes. D'autre part il s'agit de réinvestir et d'exploiter le signifié de trajectoire (**critère XI**), dans la construction du signifié de graphe de fonction. Enfin cette partie demande de retravailler explicitement le signifié co-variationnel (**critère VI**) de fonction dans différents cadres, en favorisant ainsi l'articulation entre plusieurs registres de représentation sémiotique (**critère X**).

### 8.1. Analyse a priori de la Fiche n°5 « Les représentations possibles d'une fonction numérique »

#### 8.1.1. Choix globaux

Cette fiche reprend et développe le travail amorcé par la fiche précédente. Au début il s'agit de représenter par une expression algébrique la fonction numérique  $g$  qui à tout nombre réel associe son carré plus 5. Ensuite nous demandons aux élèves de remplir une table des valeurs donnée. Après avoir demandé l'image de certains nombres donnés, nous leur faisons observer que ce tableau des valeurs ne permet pas de représenter tous les nombres du domaine de la fonction donnée avec leurs images correspondantes. Pour cela il s'avère opportun de rechercher une représentation différente : celle par une fonction géométrique associée. Nous

demandons de le faire dans Cabri, où, la représentation fournie doit permettre non seulement de représenter les nombres donnés, mais aussi de le représenter de manière dynamique. Les élèves doivent ainsi inventer une méthode de représentation d'une fonction numérique qui respecte la co-variation : on doit pouvoir afficher la variation des nombres du domaine et en même temps pouvoir observer la variation des valeurs numériques de l'image correspondante. Cette dernière question permet alors de problématiser l'arrivée du texte d'Euler (lors de la fiche suivante), qui apporte une solution fondamentale à ce problème de représentation et ouvre la voie au signifié de graphe de fonction. Comme déjà observé, cette fiche s'enchaîne donc avec la fiche suivante et constitue un élément fondamental d'articulation macro entre TMS et TdS.

### 8.1.2. Question 1

1a) Comment représenteriez-vous **par une formule** la fonction numérique  **$g$**  qui à chaque nombre réel  **$x$**  associe son carré augmenté de 5 ?  
 1b) En utilisant la "Calculatrice" de Cabri, complétez le "Tableau des valeurs" de la fonction  **$g$**  suivant :

$x$	$g(x)$
-2	
-1,3	
0	
1,78	
2,651	
3	

Comme déjà anticipé, les deux premières questions permettent d'introduire les élèves au problème des représentations différentes d'une fonction numérique. La première question demande d'exprimer algébriquement une fonction donnée sous forme rhétorique. La deuxième question leur demande de compléter un tableau des valeurs, déjà rempli par des valeurs particulières du domaine de la fonction. Nous avons choisi d'insérer nous-mêmes ces valeurs initiales afin de focaliser l'attention des élèves sur des nombres du domaine qui ne soient pas seulement des entiers positifs mais aussi des entiers négatifs ou des décimaux, à une, deux ou trois chiffres décimaux.

D'une part, nous nous attendons à ce que ces deux questions ne soient pas vraiment problématiques pour les élèves. En fait ils savent déjà exprimer des relations données par des formules ou remplir une table des valeurs. En revanche, ces questions sont conçues en fonction de la discussion collective consécutive, donc plus proprement selon la perspective la TMS. A l'occasion de cette discussion collective, les élèves seront en fait conduits par l'enseignante à remarquer les limites des différents types de représentation. A la différence du graphe, l'écriture algébrique ne permet pas une appréhension spatiale ou figurale de la fonction et fournit une représentation globale de la loi de transformation, sans montrer comme chaque élément particulier est transformé. En revanche, la table des valeurs ne permet en général pas de représenter toutes les valeurs de la fonction (un élément et son image) pour un domaine donné.

D'autre part, ces questions peuvent poser des difficultés du point de vue technique. En fait, dans Cabri, pour calculer une image particulière, il faut d'abord utiliser l'outil « Nombre » et afficher le nombre dont on veut calculer son image par la fonction donnée; ensuite, il faut activer l'outil « Calculatrice », montrer ce nombre et calculer le résultat; enfin, pour obtenir d'autres images, il est nécessaire de considérer ce nombre comme une variable et le modifier. En outre, dans Cabri, la gestion des tableaux n'est pas toujours très facile. Par exemple, si l'on veut afficher une valeur des  $x$  et, à côté, la valeur des  $y$  correspondante, il ne suffit pas de montrer les deux nombres dans l'ordre, mais il faut aussi modifier la dimension de la table, pour que la deuxième colonne soit, elle-même, visible. Cette dernière opération requiert une manipulation avec la souris qui, souvent, peut se confondre avec le seul déplacement de la table. Ces deux premières questions mobilisent donc des outils de Cabri, « Nombre », « Calculatrice » et « Table » moins habituels pour les élèves et relevant plus spécifiquement des fonctions numériques. Puisque toute la partie de la séquence expérimentale suivante porte sur ce dernier type de fonctions, elles servent aux questions suivantes.

### 8.1.3. Question 2

En général, un tableau de valeurs ne permet pas de représenter complètement une fonction numérique, c'est-à-dire de représenter **toutes les valeurs de  $x$**  réel et de son image. Nous voulons trouver une méthode pour représenter géométriquement dans Cabri la variation de l'image d'un nombre  $x$  quand  $x$  varie.

2a) D'abord, comment pouvez-vous représenter géométriquement dans Cabri un nombre réel  $x$  qui varie de -2 à 3 ? Décrivez ci-dessous en détail ce que vous avez fait en Cabri.

2b) En suite, comment pouvez-vous représenter géométriquement dans Cabri **la variation d'un nombre réel  $x$  qui varie de -2 à 3 et, en même temps, la variation de son image** par la fonction  $g$ ? Illustrez et décrivez en détail ci-dessous la méthode que vous avez inventée.

2c) N'oubliez pas d'enregistrer votre méthode sous le nom METHODE suivi de vos prénoms, car celle-là sera discutée collectivement lors de la prochaine séance.

Après avoir fait remarquer les limites d'une représentation par tableau des valeurs, nous demandons aux élèves d'inventer eux-mêmes une méthode pour représenter géométriquement une fonction numérique.

La question est composée de deux parties : d'abord il s'agit de réfléchir sur comment représenter géométriquement un nombre réel qui varie (question 2a), ensuite de comment représenter la co-variation entre deux nombres appartenant à deux ensembles donnés (question 2b). La première représentation requise est correcte si elle permet de voir tout nombre réel  $x$  qui varie dans son domaine. En revanche, la deuxième représentation requise est correcte si elle permet de visualiser la variation de tous les nombres du domaine et en même temps la variation des images correspondantes. Ainsi dans cette dernière question, la co-variation joue le rôle de critère pour la validation des méthodes proposées.

Au début, en raison de la fiche précédente, nous nous attendons à que les élèves fournissent une représentation dynamique d'un nombre qui varie dans son domaine, comme mesure d'un segment variable. En revanche, étant données les représentations en papier-crayon déjà rencontrées, il est plus probable que les élèves fournissent des représentations statiques du lien entre le domaine et l'image. Cette deuxième question est donc problématique pour les élèves et peut demander une intervention de l'enseignante, soulevant le problème du respect du critère co-variationnel mentionné ci-dessus. Pour que l'image soit en liaison dynamique avec le domaine, les élèves doivent proposer des représentations géométriques (par les outils « Nombre », « Calculatrice » et « Report de mesure ») où ces deux éléments soient reliés de par une construction sous-jacente. Les outils **Déplacement** et **Nombre**, éventuellement évoqués ou utilisés par l'enseignante, peuvent alors devenir des IMS utiles pour tester la validité de la représentation fournie : si en déplaçant le point variable indépendante ou en variant le nombre variable indépendante, le nombre variable dépendante se modifie, la représentation indiquée est correcte. Ce type d'activité est alors susceptible de soutenir la construction de ce que nous avons appelé une interprétation dynamique du graphe de fonction (cf. Chapitre 2, § 3.1) (**critère VIII**) : le problème du respect du critère co-variationnel est en fait central.

Les méthodes de représentations à proposer sont multiples. Il s'agit d'une question ouverte. En ce qui concerne les réponses possibles à la question 2a), on peut afficher les nombres, variables indépendantes et dépendantes, soit :

- comme mesures de la distance, à un point donné, d'un point variable sur une droite donnée (stratégie 5. 2a. 1),
- soit comme mesures d'un segment variable donné (stratégie 5. 2a. 2).

Cependant, il faut observer que la distance est positive et ne permet que de repérer des nombres réels positifs. Pour représenter des nombres négatifs il faut donc choisir d'adopter des conventions.

En outre, dans Cabri, on peut répondre à la question 2a) de deux manières substantiellement différentes :

- soit on choisit d'abord de fixer et d'afficher de manière arbitraire le nombre (avec l'outil « Nombre ») qu'on veut représenter, de construire une droite et un point sur cette dernière (considéré comme l'origine) et puis de reporter ce nombre sur la droite (avec « Report de mesure ») (stratégie 5. 2a. 3)



- soit on décide d'abord de construire la droite, d'y fixer un point (considéré comme l'origine) et puis de considérer la mesure de la distance de ce point à un autre point variable sur cette droite comme représentant du nombre variable (stratégie 5. 2a. 4).

Dans le premier cas on modifie directement le nombre et indirectement la représentation géométrique correspondante, d'autre part on modifie directement la représentation géométrique et on observe la variation conséquente du nombre associé.

Chacune des deux manières citées ci-dessus peut se décliner, dans Cabri, en de multiples variations possibles.

- Par exemple, en ce qui concerne la première manière, les élèves peuvent choisir de reporter le nombre non seulement sur une droite mais aussi sur un segment ou bien à partir d'un point donné (et ensuite construire la droite ou le segment correspondant). Dans ce cas, Cabri II42 construit le point en tenant en compte d'une certaine orientation du plan et aux nombres négatifs correspondent des points diamétralement opposés aux points relatifs aux point positifs (stratégie 5. 2a. 5).
- En revanche, si on décide de reporter le nombre sur une droite, pour que le point construit par Cabri soit bien ancré à cette-ci, il ne suffit pas simplement de l'y placer dessus. Il faut aussi choisir et fixer une des deux intersections de la même droite avec le cercle passant par le point construit par Cabri et centré sur l'origine de la droite même. Cependant, de cette façon, à cause d'un choix conceptuel de l'environnement, le point d'intersection construit demeure toujours sur la même demi-droite choisie la première fois. Ainsi tant aux nombres positifs qu'aux nombres négatifs correspondent des points placés sur la même demi-droite choisie au début. Cette représentation géométrique pose donc des problèmes si l'on veut l'utiliser pour représenter des nombres et positifs et négatifs (stratégie 5. 2a. 6).

De même il y a de multiples manières de résoudre la question 2b). En fait, on peut afficher respectivement les variables indépendante et dépendante soit :

- sur deux droites ou deux segments parallèles (respectivement stratégie 5. 2b. 1 ou stratégie 5. 2b. 1bis),
- sur deux droites ou deux segments perpendiculaires (respectivement stratégie 5. 2b. 2 ou stratégie 5. 2b. 2bis)
- sur deux droites ou deux segments obliques (respectivement stratégie 5. 2b. 3 ou stratégie 5. 2b. 3bis). Dans ce dernier cas, les segments obliques peuvent être mutuellement incidents ou non (respectivement stratégie 5. 2b. 4bis ou stratégie 5. 2b. 5bis).

Ces deux questions ouvertes constituent une occasion de discussion collective très riche. Les élèves sont invités à confronter les méthodes respectives, à focaliser sur le rôle des objets en jeu (qui joue le rôle de variable indépendante ou dépendante ?) et sur la nature des fonctions prises en compte (s'agit-il de fonctions numériques, géométriques ou mixtes ?). L'activité et la discussion collective associée

---

<sup>42</sup> Dans Cabri II plus on ne peut pas reporter un nombre avec « Report de mesure » sur une droite ou un segment, il faut utiliser « Compas ». En revanche cela est possible dans Cabri II, qui était le logiciel à disposition des élèves, à l'époque de la réalisation de la séquence expérimentale (Octobre 2002).

permettent donc de préparer de manière problématique l'introduction successive du texte d'Euler. En fait, ce texte propose et détaille une méthode de représentation d'une fonction numérique par une fonction géométrique opportune.

Si l'outil **Déplacement** tout seul peut être utilisé par l'enseignante comme IMS pour tester le critère co-variationnel, ce même outil associé à l'outil **Trace** peut, en revanche, servir pour explorer et étudier l'image de la fonction. En fait, en activant la trace des deux points, variable indépendante et dépendante, on peut mieux observer des caractéristiques de la fonction donnée, comme la parité ou le fait qu'elle possède un minimum pour  $x = 0$ . Ainsi, par exemple, si on décide d'adopter la stratégie 5. 2b. 1bis, en variant le nombre  $a$ , variable indépendante, entre -2 et 3, avec un pas de 0,1, on peut observer que la trace laissée par le résultat, c'est-à-dire par la variable indépendante, varie entre 5 et 14 et que son comportement se répète de la même manière tant pour les nombres positifs que pour les nombres négatifs.

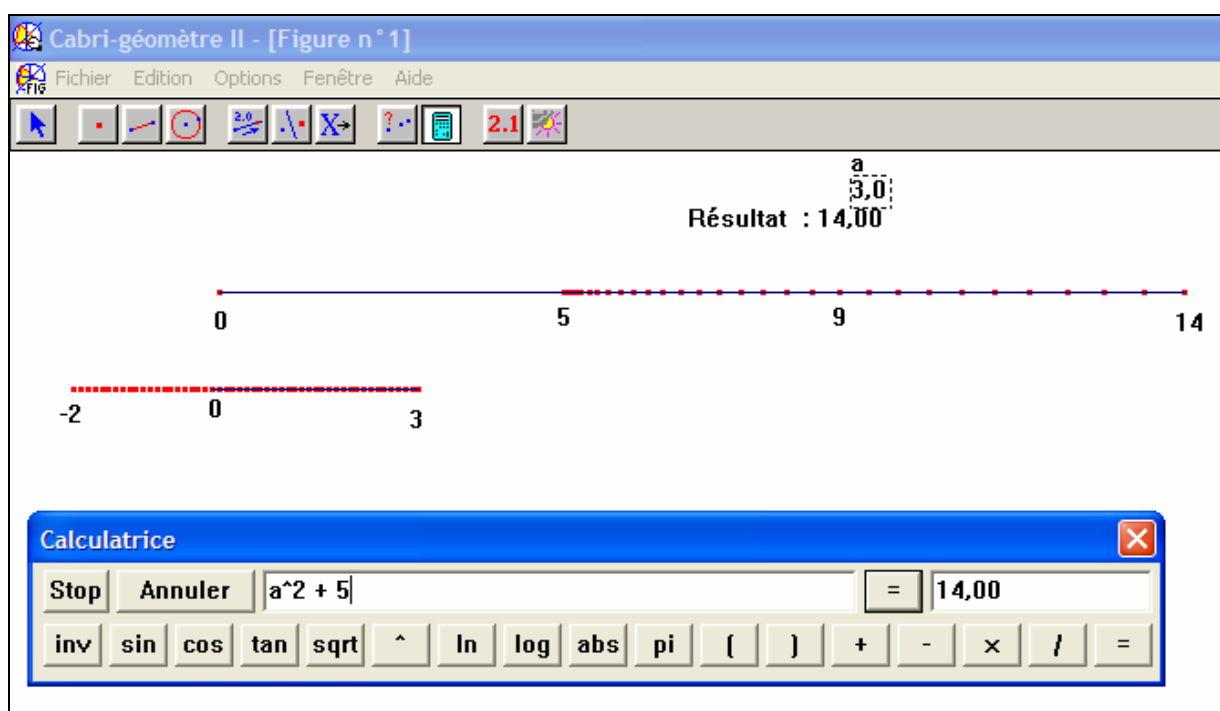


Figure 4.10 - Pour  $a$  qui varie entre -2 et 3, avec un pas de 0,1 cm, le *résultat* varie entre 5 et 14, avec un pas de croissance quadratique correspondante.

On peut voir ici le rôle joué par la trajectoire (dans son appréhension à la fois ponctuelle et globale) lors de la construction du signifié de graphe de fonction (critère IX).

Ce type d'activité développé autour de représentations d'une fonction appelées « non conventionnelles » peut être mis en relation avec les activités décrites par Arcavi et Nachmias (Arcavi et Nachmias, 1993). Ces deux chercheurs ont souligné l'importance et la nécessité de travailler sur des représentations diverses d'une fonction pour en soutenir ce qu'ils appellent « *the process of entification* », c'est-à-dire « le processus de réification du concept de fonction ». En particulier, ils ont développé l'analyse des « *Parallel Axes Representations* » (ou PAR), c'est-à-dire des représentations graphiques de fonctions numériques par deux axes parallèles verticaux<sup>43</sup>. Ce type d'étude permet l'exploration des propriétés des fonctions représentées et permet de classer des familles de fonctions linéaires différentes.

<sup>43</sup> Sur le premier axe vertical Arcavi et Nachmias (Arcavi et Nachmias, 1993) placent les valeurs de la variable indépendante, tandis que sur le deuxième axe vertical, celles de la variable dépendante.

## 8.2. Analyse a priori de la Fiche n° « Lecture et compréhension du texte d'Euler »

Euler est un mathématicien très célèbre qui a vécu longtemps (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783). Il a beaucoup voyagé et abordé de nombreux domaines des mathématiques, de la physique et de la mécanique. Il a le premier expliqué de façon moderne les notions de variable, fonction et graphe. Voici un texte qu'il a écrit à ce sujet.

Après la lecture du texte, essaie de raconter ce que tu as compris. Cherche, en outre à exprimer ce qui t'a laissé perplexe et ce qui t'a créé des difficultés.

### INTRODUCTION A L'ANALYSE INFINITESIMALE

Livre second

Contenant la Théorie des Lignes Courbes, avec un Traité abrégé des Surfaces

Chapitre Premier

Des lignes courbes en général

1. Puisque une quantité variable est une grandeur considérée en général, qui renferme toutes les valeurs déterminées, une droite indéfinie sera très propre à représenter, en géométrie, une quantité de cette nature. En effet puisqu'on peut prendre sur une droite indéfinie, une partie quelconque, qui ait une valeur déterminée, cette ligne présente à l'esprit la même idée de grandeur, que la quantité variable. Il faut donc, avant tout, fixer sur une ligne indéfinie RS un point A, qui sera censé l'origine des grandeurs déterminées, qu'on en séparera; ainsi une portion déterminée AP représentera une valeur déterminée comprise dans la quantité variable.

2. Soit  $x$  une quantité variable représentée par la droite RS ; il est clair que toutes les valeurs déterminées de  $x$  peuvent être exprimées par des portions prises sur la ligne RS. Par exemple, si le point P tombe sur le point A, l'intervalle AP, devenant nul, représentera la valeur de  $x=0$  ; mais plus le point P s'éloignera du point A, plus la valeur déterminée de  $x$  représentée par l'intervalle AP deviendra grande. On appelle ces intervalles AP, ABSCISSES. Ainsi les abscisses représentent les valeurs déterminées de la variable  $x$ .

3. [...]

4. Puisqu'une ligne droite est propre à représenter une quantité variable  $x$ , cherchons à présent une manière très commode de représenter géométriquement une fonction quelconque de  $x$ . Soit  $y$  cette fonction de  $x$  ; laquelle par conséquent recevra une valeur déterminée, si on substitue pour  $x$  une valeur donnée.

Ayant pris une droite RAS pour représenter les valeurs de  $x$ , il faudra, pour chaque valeur déterminée AP de  $x$ , élever sur cette ligne une perpendiculaire PM, égale à la valeur correspondante de  $y$  [...].

5. [...]

Ensuite ils relient les points par des segments (les « *mappings segments* ») et ils étudient les propriétés de ce type de représentation. Par exemple, en considérant le point nommé « *locus* », c'est-à-dire le point d'intersection des droites qui contiennent ces segments, ils montrent que toutes les fonctions linéaires avec un coefficient angulaire  $m$  tel que  $m > 1$ , possèdent un *locus* placé à gauche de l'axe des abscisses, celles avec un  $0 < m \leq 1$  un *locus* à droite de l'axe des ordonnées, celles avec  $m < 0$ , un *locus* entre les deux axes, etc.

6. Si donc, pour chaque valeur donnée de  $x$ , on détermine de cette manière les valeurs correspondantes de  $y$  ; on élèvera à chaque point  $P$  de la droite  $RS$  des perpendiculaires  $PM$ , qui exprimeront les valeurs de la fonction  $y$  : l'une des extrémités  $P$  tombera sur la droite  $RS$ , et l'autre  $M$  au-dessus de  $RS$ , si les valeurs de  $y$  sont positives ; ou au-dessous, si elles sont négatives ; ou même sur la ligne  $RS$ , si elles sont égales à zéro [...].

Les extrémités  $M$  de chacune des perpendiculaires (APPLIQUEES) se disposeront selon une certaine ligne droite ou courbe, qui par conséquent se trouvera déterminée par la fonction  $y$ . Ainsi chaque fonction de  $x$ , rapportée de cette manière à la géométrie, donnera une ligne droite ou courbe, dont la nature dépendra de celle de la fonction  $y$ .

7. On connaît parfaitement, en suivant ce procédé, la ligne courbe qui résulte de la fonction  $y$ , puisque c'est cette fonction qui en détermine tous les points ; en effet, pour chaque point  $P$  on a la longueur de la perpendiculaire  $PM$ , dont l'extrémité  $M$  appartient à la courbe ; et on trouve ainsi tous les points de cette ligne. Or, quelle que soit la nature de la courbe, on peut mener de chacun de ses points des perpendiculaires à la droite  $RS$  ; on a par-là les intervalles  $AP$  qui expriment les valeurs de la variable  $x$  et les longueurs des perpendiculaires  $PM$ , qui représentent les valeurs de la fonction  $y$  ; ainsi il n'y aura aucun point de la courbe, qui ne soit déterminé de cette manière par le moyen de la fonction  $y$ .

### 8.2.1. Choix globaux

Le texte, issu de l'*Introductio in analysin infinitorum liber secundus* d'Euler (Euler, 1748)<sup>44</sup>, propose de représenter une fonction numérique par une fonction géométrique associée. D'abord, étant donné une droite (**RS**), un point fixe sur cette dernière, l'origine **A**, et un autre point variable **P**, toujours appartenant à (**RS**), Euler propose de représenter une quantité variable quelconque  $x$  par la mesure du segment [**AP**] qui relie l'origine **A** au point variable **P**. Ensuite pour représenter une quantité  $y = f(x)$  dépendante de  $x$ , il construit la perpendiculaire par **P** à la droite (**RS**) et considère sur cette dernière le segment [**PM**] qui mesure  $y$ . Enfin, Euler observe que, pour chaque **P** sur la droite (**RS**), les points **M** correspondants, qui constituent l'autre extrémité du segment [**PM**] se disposeront sur une courbe dont la nature dépend de la fonction représentée.

A plusieurs reprises (par exemple au point 2 on peut lire « si le point  $P$  tombe sur le point  $A$ , l'intervalle  $AP$ , devenant nul, représentera la valeur de  $x=0$  ; mais plus le point  $P$  s'éloignera du point  $A$ , plus la valeur déterminée de  $x$  représentée par l'intervalle  $AP$  deviendra grande » et au point 6 : « Les extrémités  $M$  de chacune des perpendiculaires (appliquées) se disposeront selon une certaine ligne droite ou courbe, qui par conséquent se trouvera déterminée par la fonction  $y$  »), ce texte révèle une véritable appréhension dynamique du graphe (cf. Chapitre 2, § 3.1), qu'une implémentation dans Cabri peut bien exploiter. En particulier, comme nous avons déjà vu, nous faisons l'hypothèse que les outils **Déplacement** et **Trace** peuvent permettre de fonder la construction du signifié de graphe sur celui de trajectoire.

Par conséquent, le travail d'interprétation mené sur ce texte ne se réduit à cette séance. Il se situe en continuité avec les séances précédentes, qui ont préparé l'arrivée du texte et la séance suivante (cf. Chapitre 4, § 8.3), qui demande de transposer dans Cabri la méthode introduite par Euler. D'une part, pour interpréter le texte, les élèves doivent mobiliser tous les signifiés déjà élaborés, selon les critères

<sup>44</sup> Pour notre expérimentation en Italie, nous nous sommes servi de la traduction du texte latin d'Euler *Introduction in Analysin infinitesimorum* fournie par Marcello Pergola, que nous remercions. En revanche pour la pré- expérimentation française nous nous sommes basées sur la traduction de Euler par Labey (Euler, 1748). Ces deux textes diffèrent partiellement. Ainsi, pour la rédaction de cette thèse, nous présentons notre traduction en français du texte italien.

de construction de la séquence : les points 1 et 2 portent sur la variabilité d'une variable au sein d'un domaine donné (**critères V et VI**), le point 4 se développe autour de la dissymétrie fondamentale entre les deux variables (**critère VII**) tandis que les points 4, 6 et 7, évoquent les signifiés de fonction numérique, de fonction géométrique et de courbe (**critère IX**). D'autre part, ils sont amenés à un approfondissement et une complexification du réseau sémiotique : les signifiés déjà construits doivent en fait s'étendre et s'articuler aux nouveaux signifiés liés au graphe de fonction.

Le travail d'interprétation associée à ce texte vise principalement à l'émergence des signifiés suivants :

- mesure de la distance d'un point variable à un point donné (ou mesure d'un segment variable) comme représentations d'un nombre;
- image d'une fonction géométrique comme courbe représentative d'une fonction numérique associée ;
- graphe comme représentation de la relation de co-variation, c'est-à-dire de la relation de dépendance fonctionnelle, entre deux variables, l'une dépendante de l'autre, et entre deux ensembles, l'un dépendant de l'autre.

La construction de ces signifiés est susceptible de permettre l'élaboration de ce que nous avons appelé une appréhension dynamique du graphe. Pour ces raisons le texte constitue un artefact de deuxième type (cf. Chapitre 1, § 3.6.3) : d'une part il fournit une méthode opérationnelle de construction d'un graphe de fonction, d'autre part il soutient l'élaboration théorique des signifiés associés.

Les élèves sont invités à lire et à commenter individuellement, par écrit, à la maison, ce texte avant de le discuter ensemble en classe. A la différence du texte original, nous avons choisi de ne pas fournir de figures illustratives afin que ce soit aux élèves eux-mêmes de tracer, s'ils en ressentent la nécessité, une représentation graphique de ce qui est expliqué.

Dans la rédaction du rapport individuel l'enseignante leur demande d'expliquer, d'une part, ce qu'ils ont compris ou non, d'autre part, les différences et les ressemblances de cette méthode avec celle inventée par eux-mêmes lors de la séance précédente. Il s'agit de deux tâches différentes qui ont le même objectif : celui de provoquer chez les élèves un premier travail d'interprétation du texte, c'est-à-dire d'identification consciente et critique avec ce que ce texte véhicule. Ensuite, par la discussion collective consécutive, ce travail trouvera un approfondissement ultérieur.

En général, l'activité d'interprétation portant sur un texte susceptible de fonctionner comme médiateur sémiotique se différencie d'une activité de résolution de problèmes. La différence relève non seulement du type d'organisation du travail mais surtout du type de connaissances à construire et en jeu. En fait, les connaissances mobilisées par cette activité d'interprétation, ne sont pas des connaissances nécessaires à la résolution d'un problème au sens de Brousseau (cf. Chapitre 1, § 4.1). Dans l'interprétation d'un texte employé comme médiateur sémiotique, les connaissances sollicitées pourront se définir comme de nature « déclarative ». Elles se présentent comme des constructions, reconstructions et articulations de rationalités différentes : la rationalité de l'auteur du texte, dans notre cas Euler, la rationalité du lecteur, l'élève, la rationalité des autres interlocuteurs, élèves et l'enseignante. La tâche de devoir comprendre ce qu'un autre a écrit et puis de devoir communiquer à d'autres encore ce qu'on a compris, au travers du langage écrit et oral, contraint l'élève à s'identifier de manière consciente et critique avec les rationalités de celui dont il parle et des autres. La responsabilité de ce qu'il dit, et

encore plus de ce qu'il écrit, est la sienne. Dans une telle communication, le contrat n'admet pas l'émission de phrases ou de mots dépourvus de sens. Au contraire, la confrontation avec les autres requiert la clarification des raisons sous-jacentes les affirmations faites, leur concaténation dans une élaboration le plus possible organique et logique, la mise en parallèle avec des points de vue différents (y compris le sien). Chaque idée, en fait, en particulier, dans une *discussion mathématique* (cf. Chapitre 1, § 3.5) une fois communiquée, peut être soumise à critique et le premier interlocuteur interpellé à réagir est celui qui l'a explicitée. Comme nous avons déjà vu (cf. Chapitre 1, § 3.8), selon Vygotski, le langage, en général, et l'écriture, en particulier, jouent un rôle fondamental dans l'émergence, la structuration et l'articulation des connaissances.

Ainsi, selon nos hypothèses d'inspiration vygotskienne, l'utilisation d'un texte est un élément de médiation sémiotique crucial pour différentes raisons. Premièrement, il fournit, dans une structure déjà organisée, des signes et des signifiés associés, que les élèves sont censés s'approprier. Deuxièmement, il constitue l'objet d'un travail d'écriture et de discussion qui est une activité d'apprentissage fondamentale. Troisièmement, dans ce cas particulier, ce texte se prête à une transposition dans Cabri. Dans la perspective d'un processus de médiation sémiotique plus vaste et guidé par l'enseignante, il favorise ainsi l'exploitation du potentiel sémiotique des outils disponibles dans cet environnement et permet de mettre en relation des signes et de signifiés provenant du monde de l'artefact et du monde des mathématiques.

### 8.3. Analyse a priori de la Fiche n°7 « Euler dans Cabri »

#### 8.3.1. Choix globaux

Cette activité demande d'implémenter dans Cabri la méthode décrite par Euler. Elle comporte donc l'utilisation de deux artefacts et amène à la complexification du réseau sémiotique : il s'agit de mettre en relation une grande multiplicité de signes appartenant à des registres différentes (algébrique, numérique et géométrique) et des contextes différents, (les mathématiques, l'histoire des mathématiques, la vie ordinaire, Cabri). Par exemple le signe «  $y$  » doit être relié aux signes : « variable dépendante », « mesure du segment **[PM]** », « mesure de la distance de **P** de **M** », « *appliquée* » (car dans le texte d'Euler, l'ordonnée est appelée « *appliquée* »), «  $a^2 + 5$  » (car le nombre sur lequel on veut effectuer le calcul est étiqueté, par l'outil « Calculatrice » de Cabri, «  $a$  »), « résultat » (car le nombre issu du calcul dans Cabri est appelé « résultat »), etc.

Les outils de Cabri mobilisés, en particulier *Trace2*, *Trace3* et *Déplacement (direct et indirect)* amènent à fonder la construction du signifié de graphe de fonction sur le double signifié, à la fois ponctuel et global, de la trajectoire. Puisque le domaine et l'image, de la fonction géométrique associée à la fonction numérique à représenter, peuvent être matérialisés, dans Cabri, par deux trajectoires de points qui bougent, le graphe qui en résulte est susceptible d'embarquer et le caractère dynamique d'une relation de co-variation entre points variants et le caractère statique d'une relation de correspondance entre ensembles. Ces signifiés sont à discuter lors de la discussion collective consécutive.

Ainsi, grâce au caractère dynamique de cet environnement géométrique, cette activité non seulement permet de réinvestir, dans la construction du signifié de graphe, les signifiés déjà élaborés, de variable (géométrique et numérique) indépendante et dépendante (avec leur dissymétrie fondamentale), de domaine et d'image, mais aussi en soutient une l'appréhension dynamique.

### 8.3.2. Question 1

1a) Ouvrez un nouveau fichier dans Cabri. Créez un point **A** et une droite **d** passant par **A**, que vous considérerez l'origine. En suivant la méthode d'Euler, construisez le graphe de la fonction **g** qui au nombre réel **x** associe  $f(x) = x^2 + 5$ .

1b) Enregistrez le fichier sous le nom EULER suivi de vos deux prénoms

2) Décrivez ci-dessous la construction faite dans Cabri pour obtenir le graphe de la fonction **g**.

La première question demande aux élèves de construire dans Cabri le graphe, selon la méthode d'Euler, de la fonction **g** qui à **x** réel associe  $g(x) = x^2 + 5$ . Les élèves ont déjà rencontré cette fonction lors de la séance n°5 (cf. Chapitre 4, § 8.1) où ils ont abordé le problème de ses représentations différentes (algébrique, par tableau et géométrique). D'une part, il s'agit donc de réinvestir, après le travail d'interprétation du texte d'Euler, ce que les élèves ont retenu de ce texte, en le reliant aux autres signifiés déjà élaborés avec Cabri. D'autre part, puisque lors de la séance 5, ils ont déjà fourni une méthode de représentation de la fonction numérique par une fonction géométrique associée, cette question donne l'occasion (au moins lors de la discussion collective consécutive) de mettre en confrontation leur méthode avec la méthode proposés par le mathématicien célèbre.

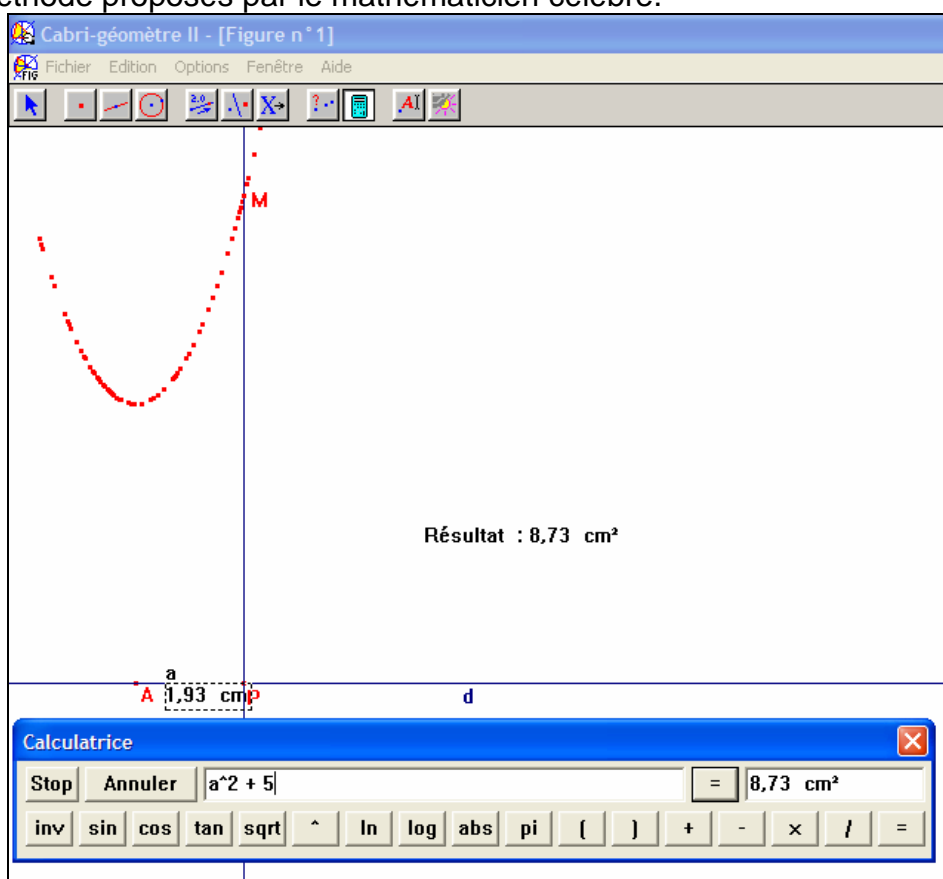


Figure 4.11 - Graphe, dans Cabri, selon la méthode d'Euler, de la fonction **g** qui à **x** réel associe  $g(x) = x^2 + 5$

Pour construire le graphe de la fonction selon la méthode d'Euler, les élèves doivent, d'abord, adopter une des stratégies 5. 2a. 1) ou 5. 2a. 2) associée à la stratégie 5. 2a. 4 (cf. Chapitre 4, § 8.1.3). Autrement dit : pour représenter géométriquement la variable indépendante, ils doivent :

- construire une droite **d** ;

- fixer un point **A** sur cette droite, qui représente l'origine, et un autre point variable **P**,
- mesurer la distance de **P** de **A** (5. 2a. 1), ou construire le segment **[AP]** et en prendre la mesure de la longueur (5. 2a. 2)),
- considérer cette mesure comme le représentant du nombre réel, variable indépendant, **x**.

Ensuite, en ce qui concerne la représentation de la variable dépendante, ils doivent mettre en place la stratégie 5. 2b. 2 (cf. Chapitre 4, § 8.1.3), c'est-à-dire :

- construire une droite **t** perpendiculaire par **P** à **d**,
- calculer, par l'outil « Calculatrice » de Cabri,  $x^2+5$ ,
- reporter, par l'outil « Report de mesure » le résultat sur **t**,
- considérer l'intersection de **t** avec le cercle centré en **P** et passant par le point créé par le « Report de mesure »<sup>45</sup>,
- appeler ce point d'intersection **M**,
- construire le segment **[PM]**,
- cacher la droite **t**,
- activer la trace de **M** et déplacer **P**, pour obtenir le graphe.

Comme nous avons déjà vu (cf. Chapitre 4, § 8.1.3) plusieurs décisions et problèmes se posent aux élèves lors de l'implémentation de la méthode d'Euler dans Cabri.

Pour la représentation géométrique de la variable indépendante les élèves peuvent :

1. soit mesurer la distance de **P** de **A** et considérer cette mesure comme le représentant du nombre variable indépendant **x** (décision associée à la stratégie 5. 2a. 3);
2. soit construire le segment **AP** et puis en prendre la mesure de sa longueur (décision associée à la stratégie 5. 2a. 4).

Dans les deux cas, à cause du fonctionnement de l'outil « Calculatrice », il se pose la nécessité de considérer cette mesure comme une variable qui est, en plus, indiquée dans Cabri par « a », ce qui amène à une complexification ultérieure du réseau sémiotique. En outre, puisqu'on prend comme représentant de **x**, une mesure, sa valeur demeure toujours positive. C'est pourquoi, nous avons assigné une fonction quadratique afin d'éviter le problème de la représentation de nombres négatifs.

Pour la représentation géométrique de la variable dépendante :

3. Soit poser simplement, par le « Rapport de mesure », le point, variable dépendante, construit sur la droite **t** et l'appeler **M** (décision associée à la stratégie 5. 2a. 5) ;
4. soit construire ensuite l'intersection de **t** avec le cercle centré en **P** et passant par le point créé par le « Rapport de mesure » (décision associée à la stratégie 5. 2a. 6).

Dans ce troisième cas, le point **M** ne résiste pas au déplacement, tandis que dans le quatrième cas, il est robuste au déplacement. Cependant dans le troisième cas, le point placé sur la perpendiculaire obéit à une orientation

---

<sup>45</sup> Dans Cabri II, qui était la version de Cabri à disposition des élèves au moment de l'expérimentation, le « Report de mesure » reporte une longueur définie par un nombre, sur une demi-droite, un axe, un vecteur ou un cercle. En particulier si l'on reporte le nombre à partir du point **P** de la droite **d**, le point créé par cet outil varie sur un cercle, centré justement en **P** et ayant comme rayon le nombre reporté. Pour appliquer la méthode d'Euler, il faut donc ensuite fixer ce point mobile sur la perpendiculaire **t** par **P** à **d**. Autrement dit, il faut prendre l'intersection du cercle, auquel le point mobile appartient, et cette perpendiculaire **t**.

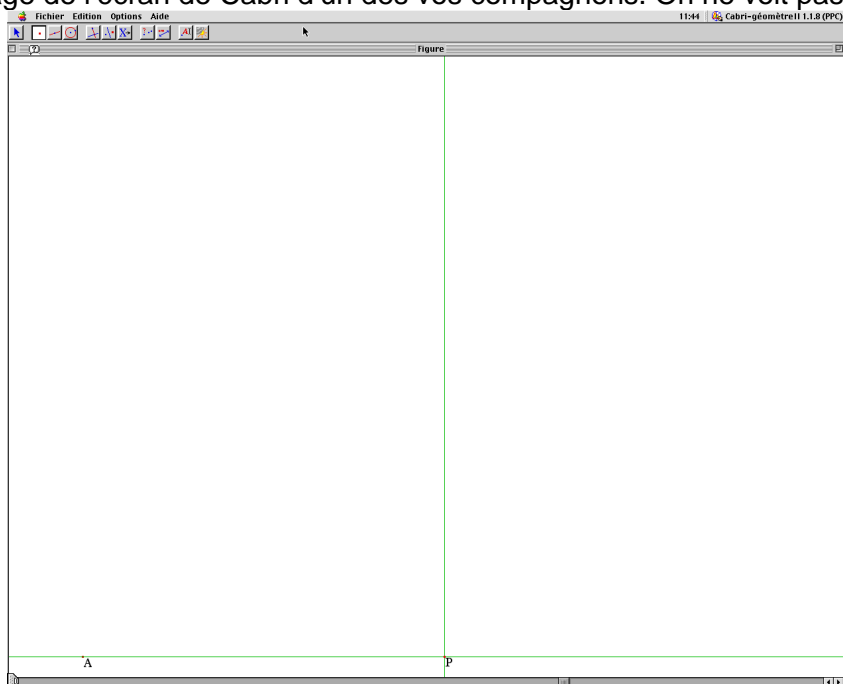


implicite du plan, qui peut permettre de représenter des fonctions ayant aussi des valeurs négatives. En revanche, dans le quatrième cas, le point d'intersection désigné, demeure toujours dans la même demi-droite choisie. Cette dernière stratégie pose alors des problèmes lorsqu'on veut tracer le graphe d'une fonction ayant des valeurs négatives. Pour cette raison, nous avons décidé de prendre une fonction ayant seulement des valeurs positives.

La demande 1c) exige une explication détaillée et ponctuelle de la construction adoptée. Ainsi, les décisions prises et les problèmes rencontrés, discutés lors de la discussion collective associée, sont susceptibles de permettre un approfondissement ultérieur de la réflexion sur la méthode d'Euler.

### 8.3.3. Question 2

Voici une image de l'écran de Cabri d'un des vos compagnons. On ne voit pas **M**.



Sans changer d'écran, qu'est-ce que pouvez vous faire pour savoir si **M** a été construit ou pas ?

Indiquez ci-dessous votre procédure, vos attentes et pourquoi.

La question 3 est une brève question de renforcement. Elle est donnée seulement en papier-crayon et demande aux élèves de mettre en œuvre une stratégie pour attester l'existence du point **M**. L'objectif est de vérifier si les outils **Déplacement** et **Trace** ont été internalisés comme IMS : d'abord, introduits comme outils nécessaires pour représenter une fonction géométrique et construire le graphe d'une fonction numérique, doivent maintenant être évoqués comme outils d'exploration d'une situation nouvelle, où le graphe, s'il existe, est déjà donné.

### 8.3.4. Question 3

Décrivez avec vos mots l'allure du graphe obtenu.

D'une part cette question permet de prendre conscience et d'explicitier les propriétés spatio- graphiques du graphe. D'autre part, la situation propose un graphe issu de la trajectoire d'un point mobile, qui bouge indirectement, grâce au déplacement direct d'un autre point, dont le premier point dépend. Ainsi, cette question favorise une appréhension et une formulation fondées sur les métaphores

fondamentales du temps et du mouvement et, par conséquent, soutient la construction d'une interprétation dynamique et co-variationnelle du graphe (**critères VIII, IX et XI**). Les élèves construisent et rendent ainsi disponibles et partageables des signes, qui seront ensuite repris (en particulier par l'enseignante), dans un travail collectif de mise en relation de ces propriétés avec les propriétés de la fonction.

Cette activité comporte donc la production de signes nécessaires au processus de médiation sémiotique à mettre en place par l'enseignante, lors de la discussion collective consécutive. Il s'agit donc d'une tâche classique et fondamentale du paradigme de la TMS : celle de l'observation consciente et critique d'un phénomène et puis de sa description, écrite et orale (cf. Chapitre 1, § 3.4).

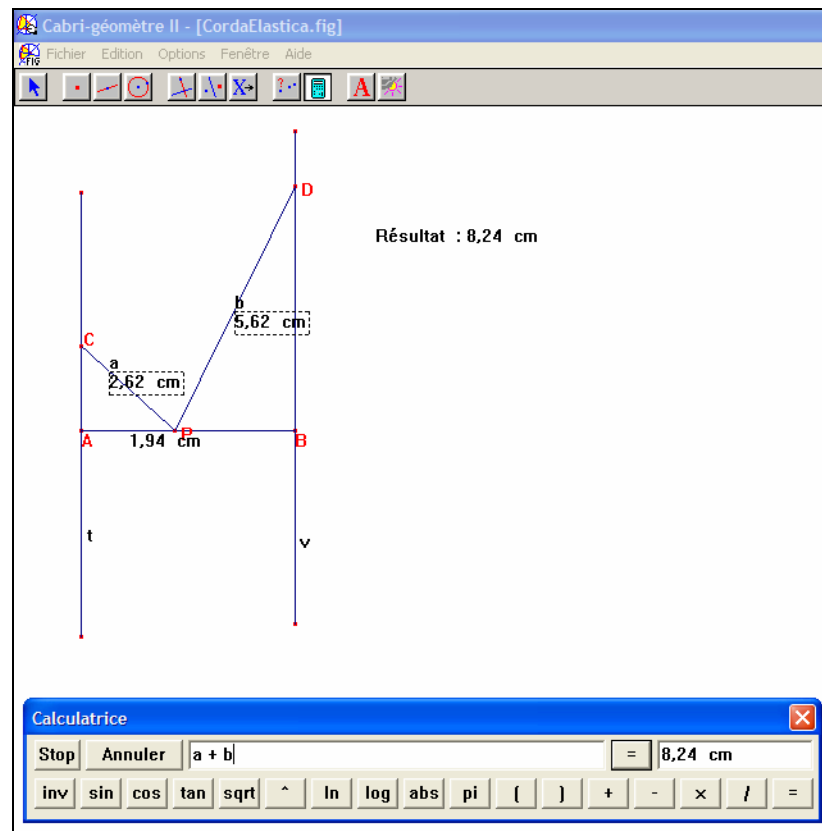
## 9. Cinquième partie

La cinquième partie se compose de deux séances et porte sur une situation pseudo - concrète. Elle vise à l'approfondissement du signifié de graphe de fonction en lien avec les signifiés de variable indépendante et dépendante, de domaine, d'image et de paramètre, dans un problème de modélisation.

Nous demandons aux élèves de modéliser dans Cabri la situation suivante :

- soient deux tiges verticales parallèles  $t$  et  $v$ , auxquelles ils sont greffés deux anneaux  $C$  et  $D$  par deux systèmes de fixation qui permettent d'en changer la position ;
- au dessous de ces anneaux, soit une tige horizontale, comprise entre  $t$  et  $v$  dont les extrémités s'appellent  $A$  et  $B$  ;
- soit  $P$  un anneau greffé sur la tige horizontale, compris entre  $A$  et  $B$  par un système de fixation qui permet d'en changer la position ;
- soit  $CPD$  la ficelle élastique ayant ses extrémités en  $C$  et  $D$  et passant par  $P$ .

En variant  $P$  sur la tige horizontale, la ficelle élastique se modifie et sa longueur varie.



**Figure 4.12 - Modélisation possible de la situation « pseudo- concrète » donnée par la fiche n°8**

La première séance de cette partie (fiche n°8) demande aux élèves d'étudier la fonction  $f$  qui à la longueur de  $[AP]$  associe la longueur de la ficelle élastique  $CPD$ . Premièrement ils doivent dire s'il s'agit d'une fonction géométrique, numérique ou mixte et quel est son domaine. Deuxièmement, ils sont invités à construire son graphe selon la méthode d'Euler. Troisièmement, nous demandons d'observer l'allure du graphe et de caractériser les positions éventuelles de  $P$  en correspondance desquelles la ficelle a une longueur minimale. Enfin, nous demandons d'indiquer s'il existe des positions différentes de  $P$  pour lesquelles la longueur de la corde est la même, quelle est l'image de la fonction dans ce cas et comment ces informations peuvent se lire sur le graphe.

Ainsi lors de la séance 8 les élèves sont invités à observer l'allure du graphe de la fonction  $f$  et à relier ses caractéristiques spatio- graphiques au comportement de la fonction. Lors de séance précédente, ils avaient déjà fait le travail d'observer et de décrire l'allure du graphe. En revanche, c'était l'enseignante, lors de la discussion collective consécutive qui avait interprété ces caractéristiques par rapport au comportement de la fonction.

Il s'agit donc ici, par un contrat d'ostension, de commencer à faire de même. Lors de la discussion collective associée, l'enseignante reprendra tous les éléments de ces différentes productions, pour revisiter collectivement ce travail d'interprétation et d'articulation entre registres divers (**critère X**).

La deuxième séance de cette partie (fiche n°9) vise à approfondir et à questionner la nature du graphe, relativement au rôle des variables indépendante et dépendante (**critères VI et VII**). En effet, si l'on bouge  $D$  et on garde  $P$  fixe (c'est-à-dire si l'on définit une nouvelle fonction  $g$  qui à la longueur de  $[AD]$  associe la longueur de la ficelle  $CPD$ ), la représentation construite lors de la séance précédente n'est plus le graphe d'une fonction (pas clair). Les élèves doivent ainsi mobiliser à nouveau les signifiés de variable indépendante et dépendante en relation à leur statut dissymétrique dans le graphe d'une fonction.

## 9.1. Analyse a priori de la Fiche n°8 « La ficelle élastique, première partie »

### 9.1.1. Question 1

1a) Représentez dans Cabri la situation suivante:

- soient  $t$  et  $v$  deux tiges verticales parallèles, auxquels ils sont greffés deux anneaux  $C$  et  $D$  par deux systèmes de fixation, qui permettent d'en changer la position sur la tige verticale;
- au dessous de ces anneaux, considérez une tige horizontale comprise entre  $t$  et  $v$  dont les extrémités sur les tiges  $t$  et  $v$  s'appellent  $A$  et  $B$  ;
- soit  $P$  un anneau, compris entre  $A$  et  $B$  et greffé sur la tige horizontale par le même système de fixation qui permet d'en changer la position ;
- soit  $CPD$  la ficelle élastique ayant ses extrémités en  $C$  et  $D$  et passant par l'anneau  $P$ .

1b) Enregistrez votre construction avec le nom « FicelleElastique » suivi par vos prénoms.

Cette situation constitue une réécriture d'une activité assez classique. Cependant, le fait de ne pas donner la construction déjà faite, mais de demander aux élèves de la modéliser eux-mêmes dans Cabri, impose de prendre des décisions :

- choisir d'approximer les différents anneaux par des points ou par des petits cercles ;

- représenter les tiges par des segments (ayant ou non la même longueur) ou par des droites ;
- choisir de placer les anneaux C et D à la même hauteur ou non.

Lors de la résolution de la tâche et avant de procéder au reste de l'activité, l'enseignant mettra en parallèle les différentes modélisations fournies et demandera de choisir collectivement celle qui se présente comme la plus possible simple. En particulier, elle demandera à la classe de préférer la construction qui approxime les anneaux par des points. Sinon il se pose aux élèves le problème de gérer la dimension des rayons des petits cercles et de choisir quels points de ces cercles sont à considérer comme les extrémités de la ficelle élastique.

Nous ne rentrerons pas dans la problématique vaste de la modélisation, même si nous estimons que ce travail de modélisation soit suffisamment abordable par les élèves. Nous voulons seulement souligner que nous considérons ce type de tâches comme fondamental pour la construction et l'approfondissement du signifié de graphe de fonction. En outre, nous considérons important de poser le problème de comment élaborer une représentation graphique qui découle directement du phénomène à représenter et non pas indirectement de la relation algébrique donnée. formule

### 9.1.2. Question 2

2a) Dans Cabri, calculez la longueur de la ficelle **CPD**. Faites bouger l'anneau **P** sur la tige horizontale et observez comment varie la longueur de la ficelle **CPD**.

Soit  $f$  la fonction qui associe à la longueur de **[AP]**, la longueur de ficelle **CPD** correspondante.

2b) S'agit-il d'une fonction géométrique numérique ou mixte ?

2c) Quel est le domaine de la fonction  $f$  ?

Pour calculer la longueur de la ficelle dans Cabri, il faut activer l'outil « Calculatrice » et sommer les longueurs des segments **[CP]** et **[PD]**. Cet outil appelle les deux nombres indiqués pour le calcul, « a » et « b ». Il comporte donc une matérialisation ultérieure du signifié de variable et une complexification du réseau sémiotique.

Les questions 2b) et 2c) sont des questions de renforcement, puisque les élèves ont déjà rencontré un certain nombre de fonctions numériques, géométriques ou mixtes. Cependant elles sont utiles pour tester si la réponse sur le type de fonction en jeu est une réponse dictée par un effet de contrat. En effet, l'énoncé semblerait indiquer une fonction géométrique, tandis qu'il s'agit d'une fonction numérique. En outre, ces questions permettent d'aborder de manière explicite, lors de la discussion collective successive, sur le statut de la mesure qui est une autre fonction mixte, sous-jacente à la fonction  $f$ , et qui permet d'associer au segment **[AP]** sa longueur, c'est-à-dire un nombre. Ces questions sont donc conçues en fonction de la TMS.

### 9.1.3. Question 3

3a) En utilisant la méthode d'Euler, représentez dans Cabri, le graphe de la fonction  $f$ .

3b) Enregistrez votre graphe avec le nom « GrapheFicelle » suivi par vos prénoms.

3b) Décrivez en détail comment avez-vous appliqué dans Cabri la méthode d'Euler pour la construction du graphe de la fonction  $f$ .

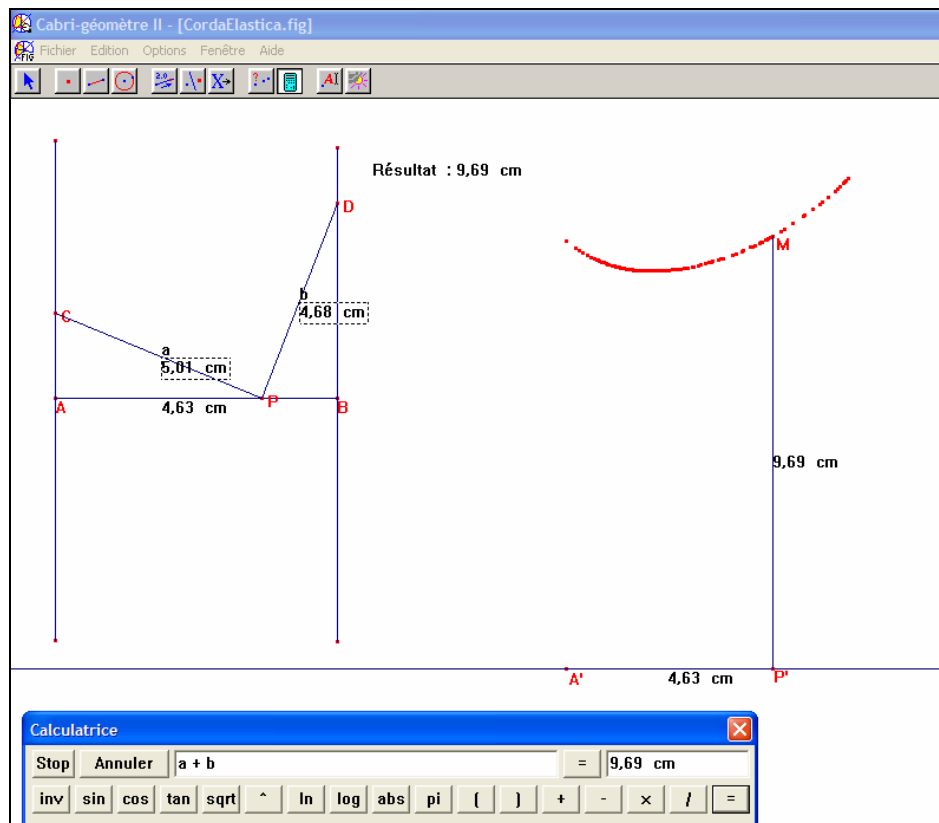
La question 3 ne propose pas de repère *a priori*. Pour construire le graphe selon la méthode d'Euler de la fonction  $f$ , les élèves sont ainsi libres soit de choisir de superposer l'axe des abscisses à la tige horizontale et de considérer le point **A** comme l'origine du repère, soit de construire le graphe à côté de la situation

modélisée. Cette activité présente donc des différences substantielles par rapport à l'activité précédente (fiche n°7) (cf. Chapitre 4, § 8.3) :

- la fonction numérique n'est pas donnée *a priori* et les élèves doivent par eux-mêmes la reconstruire à partir d'une situation modélisée dans Cabri ;
- les élèves doivent décider où et comment construire le repère du graphe de la fonction (qui, rappelons, dans la méthode d'Euler se réduit au seul axe horizontal) ;
- ils peuvent devoir gérer deux niveaux de dépendance fonctionnelle différents. S'ils choisissent de construire le graphe de  $f$  à côté de la situation modélisée, ils doivent, d'abord, reporter la mesure de **[AP]** sur l'axe des abscisses. De telle façon, que non seulement la variable dépendante (c'est-à-dire la somme des mesures de **[CP]** et **[PD]** reportée sur le segment perpendiculaire en **P** à l'axe des abscisses) soit déplaçable indirectement, mais aussi la variable indépendante. Ainsi, pour obtenir la variation de la variable indépendante représentée sur le graphe, on ne peut pas agir directement sur le graphe mais il faut déplacer le point **P**, qui est à l'extérieur du graphe et dont le point sur le graphe dépend. Nous pouvons ainsi associer au déplacement indirect deux signifiés potentiels : la dépendance du graphe de la situation représentée et la dépendance de la variable dépendante de la variable indépendante. Il sera intéressant d'observer comment les élèves gèrent ces deux niveaux lors de la construction et puis de l'interprétation du graphe.

En fin, il faut observer que, dans Cabri il y aurait la possibilité de partir d'un point **P** de l'axe **Ax**, de reporter la longueur **[AP]** sur la tige horizontale **[AB]**, d'obtenir un point **P'**, de reconstruire **[P'C]** et **[P'D]**, d'en considérer la somme des longueurs et de reporter cette somme à nouveau sur la perpendiculaire par **P** à l'axe **Ax**.

Cette dernière stratégie résolutive permet d'obtenir la variation de variable indépendante par déplacement direct du point **P**. Cependant, nous estimons qu'il soit très rare l'éventualité que des élèves, qui sont en train de modéliser une situation par un graphe de fonction pour la première fois, fassent recours à cette dernière solution.



**Figure 4.13 - En bougeant P sur le segment [AB], le point P' bouge sur l'axe des abscisses et, en même temps, le point M décrit une trajectoire, qui correspond au graphe de la fonction numérique associée**

Ce choix de difficulté pour la variable indépendante fait partie du problème de la modélisation, c'est-à-dire du passage de la situation pseudo-concrète à la représentation géométrique et à la représentation graphique<sup>46</sup>. Nous aurons pu donner directement la situation modélisée dans Cabri et demander de construire le graphe de la fonction. Cependant cela aurait pu finalement empêcher aux élèves de rentrer dans la problématique de la modélisation, que nous considérons fondamentale dans la construction du signifié de graphe de fonction.

Cette question est conçue en fonction de la discussion collective consécutive, c'est-à-dire selon la perspective de la TMS. Il n'y a pas de milieu problématique susceptible de rétroagir et d'(in)valider leurs réponses.

#### 9.1.4. Question 4

En observant l'allure du graphe, saurez vous dire s'il existe une position de P pour laquelle la ficelle a longueur minimale ? Caractérissez cette position.

Cette question est susceptible de mobiliser et le signifié de graphe comme trajectoire du point **M**, introduit lors de l'activité précédente, et de vérifier donc si ce signifié a été internalisé. En fait, pour répondre à la question 4, c'est-à-dire pour identifier la présence d'un point minimum éventuel, le recours aux instruments **Déplacement (direct et indirect)** et **Trace2** s'avère indispensable. En outre, la résolution nécessite que les élèves reconnaissent, dans la méthode d'Euler, une fonction géométrique dont on obtient l'image grâce à la trajectoire de **M**, obtenue

<sup>46</sup> La dernière stratégie résolutive évoquée, celle que nous n'attendons pas des élèves, constituerait ainsi le « symétrique » des autres solutions attendues. En fait, les premières solutions opèrent le passage de la représentation géométrique à la représentation graphique, celle-ci implémente le contraire, c'est-à-dire le passage de la représentation graphique à représentation géométrique.

dans Cabri par **Déplacement** et **Trace2**. Ils s'agit donc de coordonner plusieurs informations : ils doivent déplacer le point **P** sur la tige, qui produit le déplacement de la variable indépendante, **P'**, sur le graphe et, de manière simultanée, le déplacement du point **M**. En même temps ils doivent observer la variation de la longueur du segment **[P'M]**, et remarquer si et sous quelles conditions elle est minimale.

Cette première question sur le minimum permet aussi d'aborder pour la première fois du point de vue du graphe, la question des régularités et des changements (**critère I**) inhérentes à un phénomène modélisé par une fonction : le graphe s'avère ici comme un outil efficace d'investigation de ces régularités.

### 9.1.5. Question 5

- 5a) Existe-t-il des positions différentes de **P**, pour lesquelles la longueur de la ficelle est la même ? Si, oui, comment faites-vous pour le voir ? Sinon, pourquoi ?  
 5b) Comment est-il possible d'observer une telle possibilité sur le graphe ?  
 5c) Quel est l'ensemble image de la fonction **f** ?  
 5d) Comment est-il possible de l'observer sur le graphe ?

La cinquième question porte encore sur l'observation et l'interprétation du graphe. Il s'agit à nouveau de questions données dans la perspective du processus de médiation sémiotique guidé par l'enseignante lors de la discussion collective associée. En revanche, il n'y a pas de milieu problématique susceptible de rétroagir et d'(in)valider leurs réponses. Il s'agit de relier les informations lisibles sur le graphe, à la fois, avec le comportement de la fonction représentée et avec le comportement de la ficelle, modélisé dans Cabri. Les élèves peuvent répondre à la question 5a) simplement en observant la variation du nombre affiché par la Calculatrice de Cabri et qui représente la somme des longueurs de **[CP]** et **[PD]**, c'est-à-dire, simplement en restant dans le registre numérique. Pour cette raison, la question 5b) oblige le recours au registre graphique et l'articulation entre ces deux registres (**critère X**).

La question 5c) n'est pas simple à résoudre et est conçue en fonction de la discussion collective consécutive. Elle vise d'une part à soutenir l'articulation de registres différents (**critère X**), d'autre part à bien focaliser l'attention sur les deux différentes fonctions impliquées dans la méthode d'Euler. En fait, l'image de la fonction **f** est lisible à nouveau et dans le registre numérique (en observant comment le résultat de la « Calculatrice » varie à l'écran) et dans le registre graphique (en remarquant la variation de la longueur du segment **[P'M]**), où l'absence du deuxième axe (celui des ordonnées) rend plus difficile la tâche. En outre cette image est constituée par un ensemble numérique tandis que la trajectoire de **M** correspond à l'image de la fonction géométrique associée. Cette distinction, très importante, nécessite d'être travaillée et discutée ensemble lors de la discussion collective consécutive.

## 9.2. Analyse a priori de la Fiche n°9 « La ficelle élastique, deuxième partie »

### 9.2.1. Choix globaux

La deuxième séance de la cinquième partie de la séquence expérimentale (fiche n°9) mobilise à nouveau les signifiés de variables indépendante et dépendante (**critères VI** et **VII**) en lien avec leur rôle dissymétrique dans le graphe d'une fonction. Les élèves sont, en fait, invités à travailler avec une nouvelle fonction **g** où, à la

différence de la première partie de cette activité (fiche n°8), le point **P** est un paramètre et le point **D** la variable indépendante.

Dans cette dernière situation, la représentation construite lors de la séance précédente n'est peut plus être considérée comme le graphe de la nouvelle fonction **g** proposée.

En fait, en bougeant **D** sur la tige verticale, le point **M** correspondant se déplace sur la droite verticale par **P'** à l'axe des abscisses :

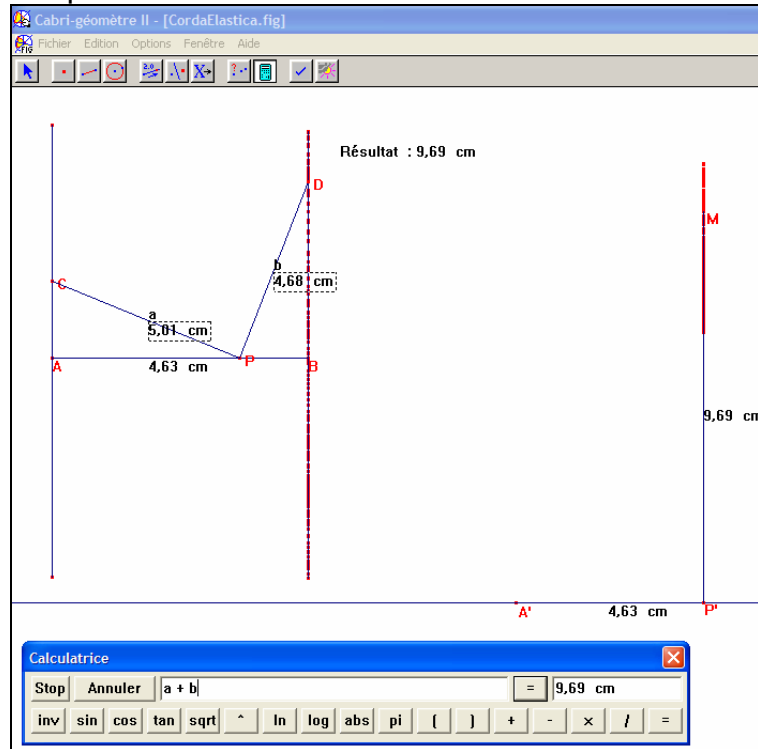


Figure 4.14 - En bougeant **D** sur la tige verticale, le point **M** correspondant se déplace sur la droite verticale par **P'** à l'axe des abscisses et ne donne pas lieu à un graphe de fonction

Cette activité amène alors à approfondir le signifié de graphe : elle permet d'explicitier certaines conditions liées au signifié de fonction et encore implicites, comme celle de la valeur unique et de focaliser sur le fait que graphe de fonction est toujours une représentation relative à une fonction particulière.

### 9.2.2. Question 1

Dans Cabri, ouvrez le fichier « GrapheFicelle » que vous avez créé la dernière fois.

1a) En considérant fixes **P** et **C**, observez comment **M** varie en variant **D**.

1b) Soit **g** la fonction géométrique qui associe **D** à **M**. Déterminez le domaine et l'image de cette fonction.

La première question requiert l'utilisation de **Trace3**. Si les élèves ont choisi de modéliser les tiges par des segments ou des droites, en activant la trace des points **D** et **M**, les élèves peuvent observer que le domaine et l'image de la fonction géométrique **g** sont respectivement deux segments ou une droite et une demi-droite.

### 9.2.3. Question 2

2a) Est-il possible d'interpréter l'ensemble des points **M** comme le « graphe selon Euler » d'une fonction qui à la distance de **D** de **B** associe la longueur de la ficelle élastique **CPD** ?



Si oui, expliquez comment un tel graphe pourrait être construit dans Cabri. Sinon, en suivant la méthode d'Euler, construisez vous-mêmes ce graphe et décrivez le ci-dessous.  
 2b) Enregistrez votre fichier avec le nom « GrapheFicelle2 » suivi par vos prénoms.

Comme déjà anticipé, lorsque les élèves déplacent **D**, la trace du point **M** de l'ancienne figure du fichier « GrapheFicelle », se réduit à un segment vertical (ou à une demi-droite, si les élèves ont modélisé la tige à laquelle **D** appartient par une droite).

En effet, en bougeant **D**, ce que les élèves obtiennent n'est plus le graphe d'une fonction. Le milieu organisé fournit une rétroaction perceptive, puisque, contre toute attente éventuelle, montre qu'effectivement **P'** ne bouge plus tandis que **M** ne se déplace plus horizontalement. Le critère co-variationnel, d'un changement simultané et conditionné d'une variable par rapport à l'autre, est ici invalidé (**critère VI**).

Pour construire le graphe de la fonction qui à la la distance de **D** de **B** associe la longueur de la ficelle **CPD**, les élèves doivent prendre en compte une nouvelle variable indépendante. A partir de celle-la, ils doivent constuire un nouvel axe des abscisses qui pourrait :

- soit être superposé à la tige verticale (et qui pourrait avoir l'origine en **B**) (stratégie 9.1.1)
- soit être placé à l'extérieur de la situation modélisée (stratégie 9.1.2).

Suivant la modélisation choisie, le graphe qui en résulte est différent. Dans le premier cas la variable indépendante que les élèves choisissent de représenter, peut prendre aussi des valeurs négatives (autrement dit ils choisissent de considérer la distance de **D** à **B** avec signe). Dans le deuxième cas, la variable indépendante prend seulement des valeurs positives. Dans les deux cas, lors de la discussion collective consécutive, les élèves pourront observer grâce à la médiation éventuelle de l'enseignante, qui revisitera collectivement l'activité, que la ficelle a une longueur minimale lorsque **D** coïncide avec **B**, et que son comportement se repète de façon symétrique pour les distances positives et négatives.

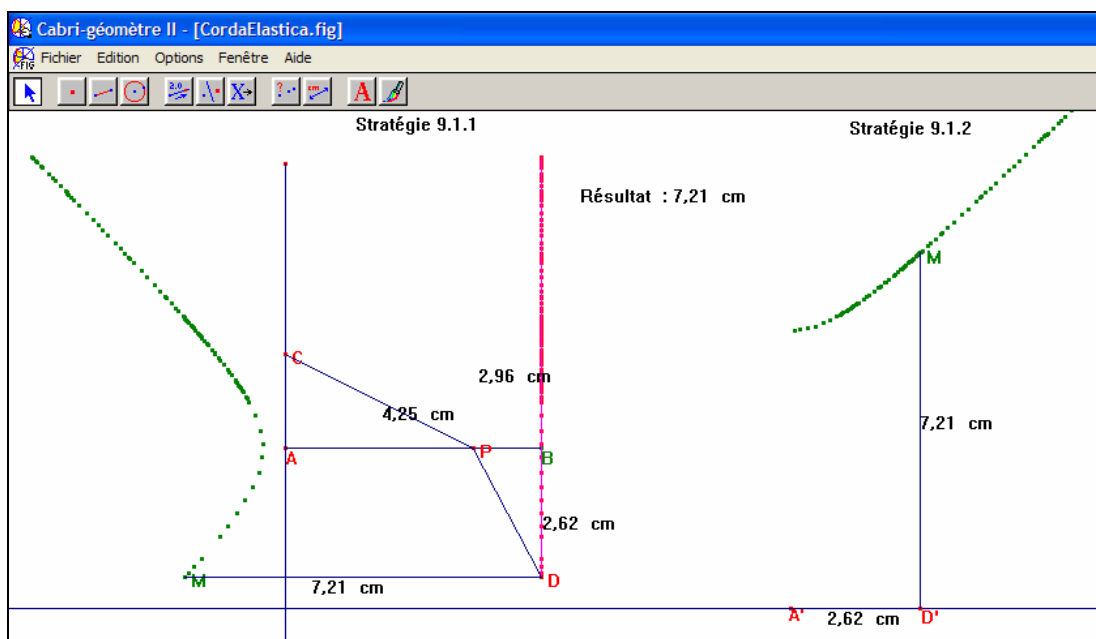


Figure 4.15 - Construction du graphe en suivant les stratégies 9.1.1 et 9.1.2

Cette activité permet de focaliser l'attention sur la nature du graphe de fonction, qui représente justement la co-variation de deux variables l'une dépendante de

l'autre (**critère VI**), sur le rôle dysimétrique des variables dans le graphe de fonction (**critère V**), sur l'importance du type de modélisation choisie et sur l'efficacité d'un graphe dans la résolution de problèmes. Ces aspects, inhérents au signifié de graphe de fonction, sont à discuter lors de la discussion collective successive. Cette question donc se sert d'un milieu organisé selon la perspective de la TdS afin d'apporter des rétractions opportunes, mais elle est conçue en fonction de la TMS. En fait, le recours et la référence à certains outils et à leur façon particulière d'utilisation peut permettre à l'enseignante de faire évoluer le signifié de graphe.

## 10. Zoom sur la sixième partie

La dernière séance se compose d'une seule séance et de la discussion collective qui a suivi. Elle met en jeu deux fonctions numériques différentes dont nous demandons de construire et puis de confronter les graphes respectifs.

Rappelons que, dans la méthode d'Euler, il n'y pas d'axe des ordonnées. C'est une différence substantielle avec la notion de graphe de fonction telle qu'on l'enseigne actuellement à l'école. Nous nous attendons à ce que le travail explicite sur les signifiés de domaine et d'image, que nous proposons lors de cette séance, soit susceptible, non seulement de permettre une récapitulation et une institutionnalisation des signifiés élaborés, mais aussi de favoriser l'introduction du deuxième axe.

### 10.1. Analyse a priori de la Fiche n°10 : « Deux fonctions numériques à confronter »

#### 10.1.1. Question 1

Considérez la fonction numérique  $f$  qui à  $x$  réel associe  $x^2 + 3/2$ , et la fonction numérique  $g$  qui à  $x$  réel associe  $|x| + 3$ .

Construisez le graphe selon Euler des fonctions numériques  $f$  et  $g$ .

Enregistrez votre figure avec le nom « graphesAConfronter » suivi par vos prénoms.

Nous nous attendons à ce que cette question ne pose désormais plus de difficultés aux élèves, même si la fonction valeur absolue a été introduite récemment et seulement du point de vue algébrique. Il s'agit donc d'une question de renforcement, préparatoire au reste de l'activité.

Même si la majorité des élèves s'est finalement appropriée la méthode d'Euler, certaines élèves pourraient encore décider de préférer leur méthode à celle d'Euler. En particulier, il est possible qu'ils choisissent de définir et fixer arbitrairement la variable indépendante, en tant que nombre, à l'extérieur du graphe et puis de la reporter sur le graphe comme mesure (stratégie 5. 2a. 3) (cf. Chapitre 4, § 8.1.3 ). Rappelons que cette stratégie diffère de celle proposée par Euler, qui choisit de représenter la variable indépendante, directement sur le graphe, en tant que la mesure de la longueur de  $[AP]$  (stratégie 5. 2a. 4). Puisque, d'emblée il n'est pas prévisible qu'il s'agira de confronter les deux graphes, il est aussi possible que les élèves décident de tracer les deux graphes séparément. Sinon, les deux segments verticaux,  $[PMg]$  et  $[PMf]$ , perpendiculaires en  $P$  à la droite  $AP$ , seraient confondus, comme dans la Figure 4.16 :

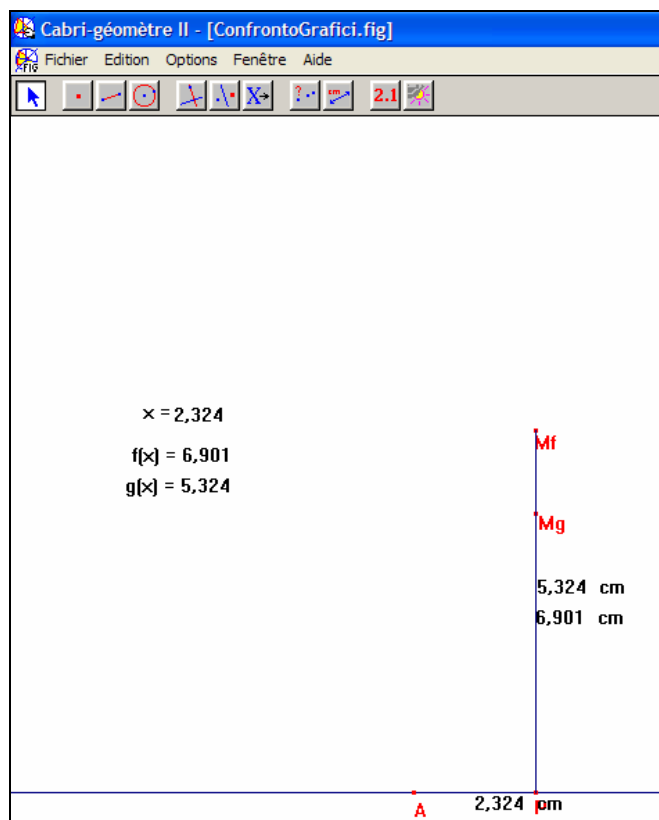


Figure 4.16 – Voilà comme [PMg] et [PMf] pourraient se présenter aux élèves

### 10.1.2. Question 2

Pour chaque fonction numériques  $f$  et  $g$  déterminez, de la manière la plus précise possible, le domaine et l'image. Expliquez comment vous êtes parvenus à la réponse.

Comme la précédente, cette tâche prépare les questions suivantes. Pour déterminer de manière précise l'image il peut s'avérer utile de mobiliser l'outil « Trace », en particulier, *Trace2*. En effet, pour repérer pour quelle valeur de  $x$  [PMg] et [PMf] ont une longueur minimale, le seul recours à l'observation de la variation des nombres  $f(x)$  et  $g(x)$  pourrait apparaître insuffisante, même si les élèves décident d'augmenter le nombre de chiffres décimales considérées. En revanche, la trace donne une appréhension globale<sup>47</sup> du graphe et permet d'inférer sur le comportement des fonctions représentées ; ainsi, par exemple, en observant l'allure des graphes (voire Figure 4.17), les élèves peuvent supposer qu'il y a un seul minimum pour chaque fonction et que ces fonctions tendent vers plus l'infini pour tant pour les  $x$  positifs et pour les  $x$  négatifs. Ces informations peuvent conforter les élèves lors de leur réponse à question donnée. Ainsi, par le déplacement de  $P$  (ou par la modification du nombre  $x$ ), et par l'observation conjointe des nombres, les élèves peuvent s'apercevoir que les fonctions prennent leur valeur minimale lorsque  $P$  est confondu avec  $A$  (c'est-à-dire, respectivement pour  $f(0)=1,5$  et  $g(0)= 3$ ) et que les images des fonctions  $f$  et  $g$  sont respectivement tous les nombres réels égaux et supérieurs à 1,5 et à 3.

<sup>47</sup> Il est toujours un peu délicat d'habituer les élèves à déduire des propriétés d'une fonction seulement par l'observation du graphe. L'échelle choisie la représentation pourrait être, en fait, trompeuse. Cependant, dans ce cas particulier, les élèves sont au début de l'apprentissage de cette notion et nous considérons d'abord nécessaire d'apprendre à lire sur le graphe des informations relatives à la fonction, avant d'apprendre à les vérifier par des moyens algébriques ou encore analytiques.

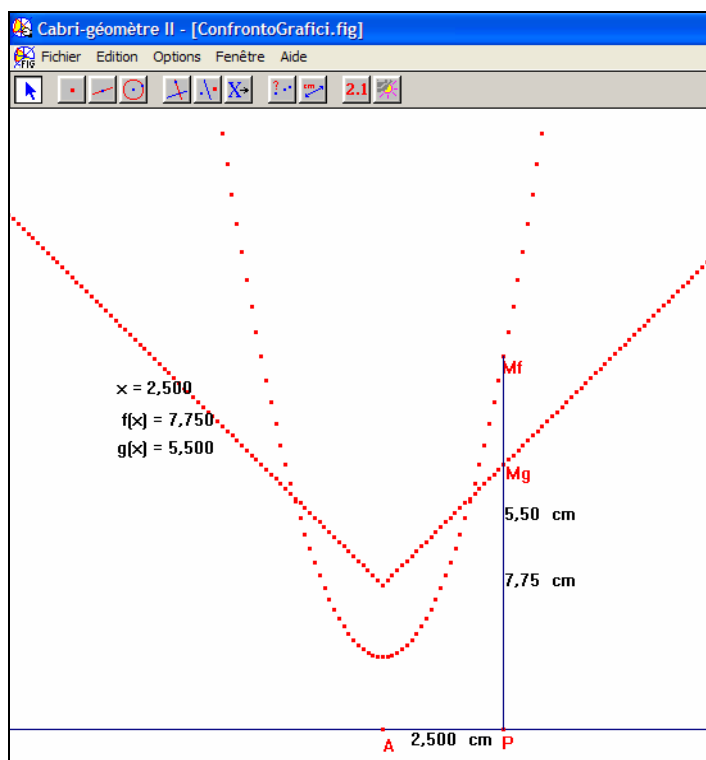


Figure 4.17 – Graphe dans Cabri, selon Euler, des fonctions  $f$  et  $g$

### 10.1.3. Question 3

En modifiant le domaine d'une fonction, on obtient une autre fonction, différente de la première, qui a une image différente.

En considérant, des domaines divers, vous étudierez maintenant les relations entre l'image de  $f$  et l'image de  $g$ .

3a) Est-il possible de choisir le même domaine pour les fonctions  $f$  et  $g$ , de manière à obtenir que les deux images correspondantes soient disjointes?

Si oui, déterminez ce domaine, de la manière la plus précise possible dans Cabri.

Sinon, expliquez pourquoi.

Dans tous les cas, expliquez comment avez-vous raisonné et enregistrez votre figure avec le nom « EnsemblesDisjoints » suivi par vos prénoms.

3b) Existe-t-il une valeur de  $x$  appartenant à votre domaine dont l'image par la fonction  $f$  est 2 ? Si oui, quelle est-elle ? Sinon, pourquoi ?

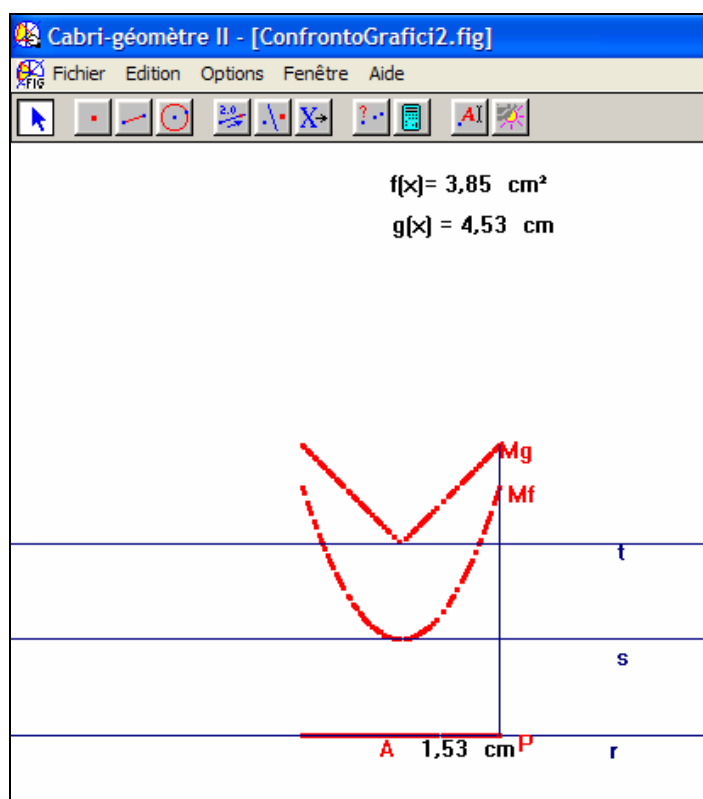
3c) Existe-t-il une valeur de  $x$  appartenant à votre domaine dont l'image par la fonction  $g$  est 2 ? Si oui, quelle est-elle ? Sinon, pourquoi ?

Du point de vue de la TdS, les connaissances outils de solution de la question posée sont celle du domaine et de l'image, élaborées au cours des activités précédentes. Cependant pour répondre de façon adéquate, il ne suffit pas seulement de mobiliser les informations qu'on possède sur le domaine et sur l'image de chaque fonction mais il faut les articuler. En outre, il faut mettre en place un aller-retour continu entre observation ponctuelle et observation globale qui favorise respectivement la dialectique entre variable indépendante et domaine et entre variable dépendante et image. Les outils « Déplacement » et « Trace » sont fondamentaux puisque c'est justement par un déplacement contrôlé de  $P$  et par une

observation conjointe de la trajectoire des points **Mf** et **Mg** et de la variation des nombres correspondants que les élèves peuvent répondre à la question posée. En outre, dans Cabri, lorsque on déplace **P**, même si les deux segments verticaux **[MfP]** et **[MgP]** restent confondus, dès que les graphes ont une intersection non vide et les segments s'inversent, les nombres correspondants s'inversent aussi. Cela constitue une rétroaction perceptive qui amplifie fortement le moment où cette intersection se produit. Il est raisonnable de supposer que les élèves identifient facilement le point de cette intersection et qu'ils relient justement cette intersection à une valeur d'un domaine possible pour lequel les deux fonctions ont la même image et donc ont les images non disjointes.

Il faut aussi rappeler que, dans la première partie de la séquence expérimentale, les élèves ont déjà rencontré des activités, où, par la modification du domaine, la fonction donnée changeait (cf. Chapitre 4, § 5.1). Cette tâche n'est donc pas complètement nouvelle. Cependant, il s'agissait de fonctions exclusivement géométriques, tandis que maintenant ils sont confrontés avec des fonctions numériques. Les connaissances construites précédemment, mobilisées et réinvesties de manière opportune, se révèlent donc nécessaires pour répondre à la question posée. Par l'activation de **Trace2**, et éventuellement de **Trace3**, sur **Mf**, **Mg** (et sur **P**), et par l'étude des fonctions géométriques associée aux fonctions numériques représentées, les élèves peuvent ainsi observer que pour un certain déplacement de **P** sur un segment suffisamment réduit, les deux graphes restent disjoints.

Ceci est seulement un passage pour parvenir à la réponse. En effet, nous supposons qu'il est facile pour des élèves de confondre la courbe représentative (c'est-à-dire l'image de la fonction géométrique associée à la fonction numérique représentée) avec l'image de la fonction numérique et de considérer donc la valeur du point d'intersection comme la valeur par rapport à laquelle définir le domaine requis. La réponse erronée à la question 3a) serait alors  $\{x^{\text{TMIR}} : -1,82 < x < 1,82\}$  (stratégie 12. 3a. 1). Cette activité permet ainsi de révéler cette confusion.



**Figure 4.18 - Observons que pour une valeur de  $x$  comprise entre 1,82 et 1,82, les images des deux fonctions ont une intersection non nulle, tandis que les courbes correspondantes ne se coupent pas**

Pour identifier un « bon » domaine, une stratégie résolutive possible peut être celle de construire deux droites  $s$  et  $t$ , parallèles à l'axe des abscisses respectivement à la distance de 1,5 et 3 de cet axe (stratégie 12. 3a. 2). Ces droites, en fait, rendent permanentes et stables les valeurs minimales des images des fonctions  $f$  et  $g$  : entre  $t$  et  $s$ , l'image de la fonction  $g$  n'existe pas (ou « plus ») tandis que celle de la fonction  $f$  existe encore. Nous nous attendons aussi à ce que certaines élèves choisissent d'abord de faire passer les deux droites par les points  $Mg$  et  $Mf$  lorsque ces points ont atteint la position de minimum du graphe (stratégie 12. 3a. 3). Ces élèves s'apercevront que, lorsqu'ils bougent  $P$ , les droites bougent aussi. Cette rétraction leur sollicitera à chercher de construire les deux droites de façon indépendante des points  $Mg$  et  $Mf$  (stratégie 12. 3a. 4).

Une autre stratégie résolutive possible peut être celle de décider de construire un deuxième axe vertical indépendant de la courbe représentative et de projeter (ou de reporter) sur lui les valeurs des images (stratégie 12. 3a. 5).

Même si les élèves ne parviennent pas à cette dernière solution, les stratégies mentionnées avant révèlent toutes une nécessité que nous considérons comme préparatoire à l'introduction de l'axe des ordonnées. En effet, même s'ils ne construisent pas ce deuxième axe, lors de la résolution de la tâche, son introduction de la part de l'enseignante lors de la discussion collective consécutive, permettra de répondre à la nécessité d'avoir un élément du graphe, indépendant de la courbe, sur lequel lire les valeurs de la variable dépendante.

En se rappelant de la résolution de l'activité n°5 (cf. Chapitre 4, § 8.1 ), une autre stratégie résolutive possible peut être celle de construire une nouvelle droite parallèle à l'axe des abscisses et reporter sur elle les valeurs des deux variables dépendantes (stratégie 12. 3a. 6). En déplaçant  $P$  et en coloriant les points représentant les deux variables indépendantes de deux couleurs différentes, cette stratégie permet, du

point de vue perceptif, de bien saisir le comportement des images des deux fonctions. Les élèves peuvent ainsi remarquer que, pour tous les sous-ensembles non vides de  $\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{1,5} < x < \sqrt{1,5}\}$  (c'est-à-dire pour environ tous les sous-ensembles de  $\{x \in \mathbb{R} : -1,22 < x < 1,22\}$ ) les deux images restent disjointes.

Comme dans le cas des stratégies 12. 3a. 4 et 12. 3a. 5, aussi cette procédure résolutive favorise l'introduction du deuxième axe comme élément constitutif du graphe, indépendant de la courbe, qui représente justement la variable dépendante.

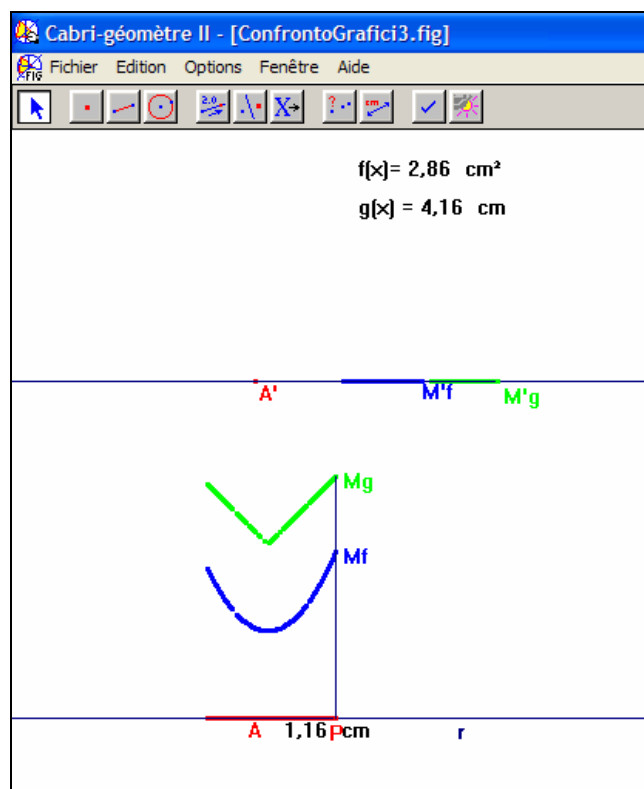


Figure 4.19 - Pour  $x = 1,16$  les deux images sont disjointes

Du point de vue de la TMS, nous pouvons observer comment la question posée amène à une *utilisation fonctionnelle* (cf. Chapitre 1, § 3.4) des signes de variable indépendante et dépendante, de domaine et d'image. En fait, ces signes, tant de la résolution de la tâche, que dans la discussion collective consécutive, sont mobilisés et employés en tant que outils pour résoudre le problème posé. Ainsi, cette activité comporte une nouvelle complexification et à un approfondissement du réseau sémiotique relatif à ces signifiés (**critère V et IV**).

En outre, en se fondant sur l'utilisation de **Trace** et du **Déplacement**, cette activité permet d'enraciner encore plus le signifié de graphe sur les signifiés de trajectoire et de variable géométrique dans un environnement de géométrie dynamique (critères **IX et XI**) et soutient ainsi une interprétation dynamique du graphe (critères **VIII**).

Les réponses aux questions 3b) et 3c) constituent un élément important de validation. En fait, il existe deux valeurs de  $x$  pour lesquelles  $f(x)$  est égale à 2 (c'est-à-dire pour  $x = \pm\sqrt{0,5} \approx \pm 0,71$ ). En revanche, il n'existe pas des valeurs de  $x$  pour lesquelles  $g(x)$  est égale à 2 (car pour tout  $x$  réel ; l'image de  $g$  est l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R} : y > 3\}$ ). Autrement dit, il existe au moins un domaine ponctuel,  $\{-\sqrt{0,5} ; +\sqrt{0,5}\}$ , pour lequel les deux images sont disjointes. Si les élèves n'ont pas répondu correctement à la question 3a, la réponse à ces nouvelles questions peut mettre en

lumière de l'erreur commise. Du point de vue de la TdS, par cette (in)validation potentielle, ces questions modifient ainsi le milieu intellectuel mis en place. Cependant, il faut que les élèves comprennent le lien entre ces différentes questions, sinon il ne sert à rien. En tout cas, la question posée permettra à l'enseignante de revenir, lors de la discussion collective consécutive, sur les réponses erronées et de corriger une « panne du milieu » par des interventions opportunes. Les questions 3b et 3c participeront ainsi à une modification du milieu, organisée par l'enseignante au moment de la discussion mais prévue *a priori*.

Nous pouvons ainsi observer, à nouveau, que la question 3 se base, elle-aussi, sur l'articulation des deux théories : la question est conçue en fonction de la médiation sémiotique (« utilisation fonctionnelle » des signes de domaine et d'image et réélaboration collective des signifiés associés) tandis que la TdS fournit une analyse conceptuelle en termes de connaissances à construire et de « panne » potentiel du milieu.

#### 10.1.4. Question 4

4a) Est-il possible de choisir le même domaine pour les fonctions  $f$  et  $g$ , de manière à obtenir que les deux images correspondantes aient une intersection non vide?

Si oui, déterminez, de la manière la plus précise possible dans Cabri, ce domaine.

Sinon, expliquez pourquoi.

Dans tous les cas, expliquez comment avez-vous raisonné et enregistrez votre figure avec le nom « EnsemblesNONDisjoints » suivi par vos prénoms.

4b) Existe-t-il une valeur de  $x$  appartenant à votre domaine dont l'image par la fonction  $f$  est 4 ? Si oui, quelle est-elle ? Sinon, pourquoi ?

4c) Existe-t-il une valeur de  $x$  appartenant à votre domaine dont l'image par la fonction  $g$  est 4 ? Si oui, quelle est-elle ? Sinon, pourquoi ?

Du point de vue des connaissances mobilisées, la question 4 est analogue à la question 3. A la différence de la question précédente, il est suffisant de prendre comme domaine l'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1,22\}$  ou l'ensemble  $B = \{x \in \mathbb{R} : x < -1,22\}$  pour que les images correspondantes des fonctions  $f$  et  $g$  soient non disjointes. Cependant, pour ces domaines, il existe une valeur de  $x$  pour laquelle  $f(x) = 4$  (c'est-à-dire respectivement pour  $x = 1,58$  ou pour  $x = -1,58$ ) mais il n'existe pas de valeur du même domaine pour laquelle  $g(x) = 4$  (car  $g(x) = 4$  pour  $x = \pm 1$ ). Pour satisfaire aussi cette dernière condition sur  $g$ , il faut élargir les ensembles A ou B de manière à considérer aussi les valeurs  $x = \pm 1$  (et prendre par exemple les ensembles  $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$  ou  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\}$ ). Cette question met en jeu à nouveau la dialectique ponctuel/global : les élèves sont amenés à des allers-retours continus entre l'observation de la variation, produite par le déplacement de  $P$ , des valeurs ponctuelles de la variable indépendante, les valeurs ponctuelles de la variable dépendante, la considération du domaine potentiel correspondant et de l'image associée. Cette tâche permet d'approfondir le rôle spécifique à chaque variable (indépendante ou dépendante) (**critère V**) et de travailler avec la variabilité au sein de domaines donnés, caractérisés par le changement simultané et conditionné des variables correspondantes (**critère VI**).



## 11. Tableau synthétique

Fiches et discussions collectives	Progression des savoirs	Signifiés abordés	Instruments de Médiation Sémiotique impliqués
Fiche n°1 : « Effet1 »	Introduction aux fonctions géométriques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image, paramètre et fonction (dans le contexte géométrique)	<b>Déplacement</b> ( <i>direct</i> et <i>indirect</i> ), <b>Trace1</b> , <b>Trace2</b> , <b>Trace3</b> et <b>Macro1</b> .
« Revisiter ensemble l'activité relative à la fiche n°1 »	Introduction aux fonctions géométriques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image, paramètre et fonction (dans le contexte géométrique)	<b>Déplacement</b> ( <i>direct</i> et <i>indirect</i> ), <b>Trace1</b> , <b>Trace2</b> , <b>Trace3</b> et <b>Macro1</b> .
Fiche n°2 : « Effet2 »	Approfondissement fonctions géométriques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image, paramètre et fonction (dans le contexte géométrique)	<b>Déplacement</b> ( <i>direct</i> et <i>indirect</i> ), <b>Trace1</b> , <b>Trace2</b> , <b>Trace3</b> et <b>Macro1</b> .
« Revisiter ensemble l'activité relative à la fiche n°2 »	Approfondissement fonctions géométriques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image, paramètre et fonction (dans le contexte géométrique)	<b>Déplacement</b> ( <i>direct</i> et <i>indirect</i> ), <b>Trace1</b> , <b>Trace2</b> , <b>Trace3</b> et <b>Macro1</b> .
Fiche n°3 : « Inventes tu une fonction »	Approfondissement fonctions géométriques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image, paramètre et fonction (dans le contexte géométrique)	<b>Déplacement</b> ( <i>direct</i> et <i>indirect</i> ), <b>Trace2</b> , <b>Trace3</b> , <b>Macro2</b> et <b>Macro3</b> .
« Revisiter ensemble l'activité relative à la fiche n°3 » ; « Donner une définition de fonctions équivalentes »	Approfondissement fonctions géométriques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image, paramètre et fonction (dans le contexte géométrique)	<b>Déplacement</b> ( <i>direct</i> et <i>indirect</i> ), <b>Trace2</b> , <b>Trace3</b> , <b>Macro2</b> et <b>Macro3</b> .

Fiche n°4 : « Un rectangle bizarre »	Passage aux fonctions numériques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image paramètre (dans le double contexte géométrique et numérique)	<b>Fenêtre des nombres, Calculatrice, Table</b>
« Revisiter ensemble l'activité relative à la fiche n°4 » ; « Donner une définition de fonction numérique, géométrique ou mixte »	Passage aux fonctions numériques	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image paramètre (dans le double contexte géométrique et numérique)	<b>Fenêtre des nombres, Calculatrice, Table</b>
Fiche n°5 : « Les représentations possibles d'une fonction numérique »	Problématisation des représentations différentes d'une fonction numérique	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et numérique) tableau des valeurs.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Fenêtre des nombres, Calculatrice, Table, Report de mesure.</b>
« Revisiter ensemble l'activité relative à la fiche n°5 »	Problématisation des représentations différentes d'une fonction numérique	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et numérique), tableau des valeurs.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Fenêtre des nombres, Calculatrice, Table, Report de mesure.</b>
Fiche n°6 : « Lecture et compréhension du texte d'Euler »	Introduction au graphe de fonction selon Euler	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Calculatrice, Report de mesure.</b>
Fiche n°7 : « Euler dans Cabri »	Transposition du graphe de fonction selon Euler dans Cabri	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2,</b>

		fonction.	<b>Trace3, Calculatrice, Report de mesure.</b>
« Revisiter ensemble l'activité relative à la fiche n°7 »	Transposition du graphe de fonction selon Euler dans Cabri	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Calculatrice, Report de mesure.</b>
Fiche n°8 : « La ficelle élastique, première partie »	Problème de modélisation à l'aide d'un graphe de fonction	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image paramètre (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Calculatrice, Report de mesure.</b>
Fiche n°9 : « La ficelle élastique, deuxième partie »	Problème de modélisation à l'aide d'un graphe de fonction	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image paramètre (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Calculatrice, Report de mesure.</b>
« Revisiter ensemble les activités relatives aux fiches n°8 et n°9 »	Problème de modélisation à l'aide d'un graphe de fonction	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image paramètre (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Calculatrice, Report de mesure.</b>
Fiche n°10 : « Deux fonctions numériques à confronter »	Introduction de l'axe des ordonnées dans le graphe de fonction	variable indépendante, variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>Déplacement (direct et indirect), Trace2, Trace3, Calculatrice, Fenêtre des nombre, Report de mesure.</b>
« Revisiter	Introduction de l'axe	variable indépendante,	<b>Déplacement</b>

ensemble l'activité relative à la fiche n°10 »	des ordonnées dans le graphe de fonction	variable dépendante, domaine, image (dans le double contexte géométrique et algébrique), graphe de fonction.	<b>(direct et indirect), Trace2, Trace3, Calculatrice, Fenêtre des nombre, Report de mesure.</b>
--	--	--	--

## 12. Conclusions

Comme nous l'avons vu, la séquence expérimentale a été construite selon un certain nombre de critères dégagés par notre analyse théorique, historique et épistémologique et en articulant deux cadres théoriques différents.

D'une part, cette articulation de la TMS avec la TdS a permis de concevoir la séquence expérimentale de deux perspectives différentes et complémentaires, d'autre part elle donne les moyens théoriques pour la modéliser *a priori* et pour la décrire et l'interpréter *a posteriori*.

Ainsi, globalement les tâches ont été conçues en fonction du processus de médiation sémiotique à mettre en place, c'est-à-dire en fonctions de la production et de l'évolution de signes susceptible de soutenir l'apprentissage de certains signifiés mathématiques. Cependant l'analyse, issue de la TdS, en termes de milieu organisé pour cet apprentissage et en termes de connaissances mobilisées comme outils de solution des problèmes posés permet de mieux expliciter certaines conditions à garantir pour que cet apprentissage se produise réellement. En fait, nous faisons l'hypothèse que la solution de certaines situations problématiques implique et mobilise des connaissances et en même temps engendre des signifiés. Par conséquent, s'il est vrai que cette mise en place du processus de médiation sémiotique a amené à une bien précise organisation du travail, néanmoins, presque la totalité des tâches relève des deux cadres théoriques.

Si l'on observe de près le tableau synthétique reporté ci-dessus, on peut remarquer que les signifiés abordés sont relativement pas très nombreux, compte tenu de l'ampleur de la séquence expérimentale. Les élèves sont, en fait, confrontés avec les (seules) signifiés de variable indépendante, de variable dépendante, de domaine, d'image, de fonction (au sens large) et de graphe de fonction. Cependant il s'agit d'enjeux d'apprentissage très importants. En outre, il faut tenir en compte que derrière chaque signifié, nous plaçons tout un réseau très articulé d'autres signifiés divers, constitutifs du signe dans sa forme la plus évoluée. Par exemple le signifié de variable indépendante pourra se constituer à partir du mouvement libre d'un point sur l'écran pour évoluer vers celui, plus général, d'élément qui varie dans un ensemble géométrique ou numérique donné. Cependant, la complexité du processus devrait assurer que les composantes originales du signifié ne disparaissent pas complètement de manière à que le signe, dans son état le plus avancé, puisse encore garder le dynamisme originaire, propre de ce point qui bougeait dans l'écran.

Conformément à une approche vygostkienne, qui soutient l'introduction et l'utilisation fonctionnelle d'un signe (cf. Chapitre 1, § 3.4), dès le début, comme première moment du processus de sémiotisation, nous avons démarré relativement tôt avec ces signes. Ensuite, nous avons essayé les enrichir au fur et à mesure, tout au long de la séquence, en commençant par les fonctions géométriques, puis en

introduisant les fonctions numériques et, finalement, en approchant le graphe de fonction.

En particulier, la séquence expérimentale porte une attention toute particulière au développement de ce dernier signe présenté lui-même comme une fonction. Nous nous intéressons à le problématiser et à en nourrir du sens chaque élément constitutif.

Ainsi, en nous fondant sur le signifié co-variationnel de fonction, nous avons voulu, non seulement en développer ce que nous avons appelé une interprétation dynamique, mais aussi, par exemple, en problématiser l'introduction du deuxième axe.

En revanche, en France et en Italie, normalement le graphe de fonction est introduit d'emblée, simplement comme une représentation conventionnelle et possible d'une fonction, sans une préoccupation réelle d'en construire une signification opportune.

Lors des prochains chapitres nous verrons si les choix faits ont été pertinents par rapport aux objectifs d'apprentissage posés. Puisque le rôle de l'enseignante dans la mise en place et dans la gestion du processus de médiation sémiotique nous intéresse plus spécifiquement, nous verrons dans quelle mesure certains choix de construction de la séquence ont été importants et comment l'enseignante s'est appuyée sur ces choix pour faire progresser les signifiés.

Compte tenu de l'ampleur du processus, nous avons ainsi décidé, avec un peu de regret et malgré notre intérêt pour l'analyse *a posteriori* des productions des élèves, de nous concentrer seulement sur l'analyse des discussions collectives. En fait, nous avons estimé que les discussions collectives constituent des moments privilégiés où ce processus se rassemble, se produit et évolue de façon assez intense. Par conséquent, en permettant de bien extérioriser certains mécanismes, nous avons réputé qu'elles fournissent un bon terrain d'analyse.

Ainsi, d'une part, la volonté d'étudier le processus de médiation sémiotique, processus qui nécessite d'une analyse linguistique très fine, d'autre part, la considération du fait que ce type d'analyse est plus nouveau par rapport à l'analyse des activités et des tâches conçues au sein de la TdS, nous a amené à préférer l'étude des discussions collectives<sup>48</sup>.

A cette étude, qui a conduit à l'élaboration d'une méthodologie d'analyse assez complexe et qui s'est révélé très riche, sont consacrés les prochains chapitres.

---

<sup>48</sup> L'analyse des discussions collectives montrera en filigrane comment les tâches ont fonctionné car les solutions et les réponses des élèves constituent, toujours, la base sur laquelle les discussions collectives sont organisées.

# Chapitre 5 : Méthodologie d'analyse des discussions collectives

<b>1. Questionnement</b> .....	<b>176</b>
<b>2. Considérations méthodologiques générales</b> .....	<b>177</b>
<b>3. Méthodologie d'analyse des actions de l'enseignante</b> .....	<b>179</b>
<b>4. Méthodologie d'analyses a priori des actions de l'enseignante, premier niveau d'analyse (à dominante descriptive)</b>	<b>181</b>
4.1. Catégories d'analyse de l'action professorale dérivées des travaux de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (à dominante descriptive).....	181
4.2. Catégories d'analyse de l'action professorale dérivées des travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (à dominante descriptive) .....	186
<b>5. Méthodologie d'analyse a priori des actions de l'enseignante, deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative)</b> .....	<b>187</b>
5.1. Résonance et d'autres catégories d'analyse des actions de l'enseignante dérivées de la TdS.....	189
<b>6. Méthodologie d'analyse a priori des actions des élèves lors des discussions collectives.</b> .....	<b>190</b>
6.1. Catégories d'analyse a priori des actions des élèves .....	191
<b>7. Méthodologie d'analyse a priori de l'évolution des signes et signifiés</b> .....	<b>192</b>
<b>8. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions de l'enseignante</b> .....	<b>194</b>
8.1. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions de l'enseignante, premier niveau d'analyse (descriptif) .....	194
8.2. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions de l'enseignante, deuxième niveau d'analyse (interprétatif) .....	196
8.3. Exemple d'analyse des actions de l'enseignante : premier niveau d'analyse (descriptif) versus deuxième niveau d'analyse (interprétatif) .....	198
8.4. Analyse dans Atlas.ti .....	199
<b>9. Méthodologie d'analyse a posteriori des actions des élèves lors des discussions collectives.</b> .....	<b>199</b>
<b>10. Méthodologie d'analyse a posteriori de l'évolution des signes</b> .....	<b>202</b>
10.1. Premier plan d'analyse : les signes « simples » .....	203
10.1.1. Signes-artefact .....	203
10.1.2. Signes-pivot.....	204
10.2. Deuxième plan d'analyse : les signes « complexes ».....	205
10.2.1. Définitions.....	206
10.2.2. Caractérisations .....	207

10.2.3. Interprétations.....	209
10.2.4. Instanciations.....	210
10.3. Etat des signifiés.....	211
10.4. Instruments de médiation sémiotique .....	211
10.5. Méthodologie de synthèse sur l'évolution des signes .....	211
10.6. Encore dans Atlas.ti .....	213

## 1. Questionnement

Les hypothèses théoriques élaborées au cours de nos premiers quatre chapitres ont conduit à concevoir et à réaliser une séquence expérimentale qui fonde l'apprentissage des signifiés de fonction et de graphe de fonction, tel comme il a été historiquement, sur le signifié de co-variation. Ces hypothèses théoriques ont aussi montré la pertinence didactique d'introduire les signifiés de fonction et le graphe de fonction par une approche qualitative, fondée sur les fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique tel que Cabri.

La séquence expérimentale a été conçue en fonction du processus de médiation sémiotique. C'est-à-dire à partir d'hypothèses vygotskiennes nous avons élaborés des tâches susceptibles de mobiliser certains outils<sup>49</sup>, à leur tour, capables de fonctionner comme outils psychologiques, c'est-à-dire comme signes, pour médier la construction des signifiés mathématiques attendus.

Afin de permettre l'élaboration et l'évolution de ces signifiés, nous avons ainsi fabriqué une ingénierie didactique, qui a consisté à articuler deux cadres théoriques différents : la TMS qui a guidé globalement la mise en place du processus de médiation sémiotique, et la TdS, qui a servi pour élaborer certaines tâches et pour analyser *a posteriori* de la séquence.

Une fois conçues les tâches en fonction du processus de médiation sémiotique (c'est-à-dire susceptibles de mobiliser d'une certaine façon les outils et les signes dérivés), le rôle de l'enseignante s'avère critique et fondamentale à plusieurs niveaux : elle organise la dévolution des tâches, elle orchestre le processus de médiation sémiotique, c'est-à-dire l'émergence et l'évolution des signifiés mathématiques, associés aux signes introduits grâce aux activités avec l'artefact et garantit l'institutionnalisation des connaissances construites avec ces outils. Rappelons, en fait, notre cinquième hypothèse de travail :

*Tout signifie à construire est enraciné dans l'expérience phénoménologique, c'est-à-dire dans l'activité du sujet et dans les rétroactions du milieu dont l'artefact est une composante fondamentale. Cependant son évolution ne peut être obtenue que par des moyens de construction sociale de la connaissance en classe, sous la guide de l'enseignant.*

Le processus de médiation sémiotique trouve alors dans l'activité de discussion collective, organisée en tant que *discussion mathématique* (cf. Chapitre 1, §3.5), un moment cruciale. Au cours de cette activité, en fait, ils sont fondamentaux : le travail d'explicitation des signifiés personnels élaborés au cours d'activités préalables avec l'artefact, la mise en place des signifiés mathématiques culturels cible et l'élaboration explicite d'un réseau sémiotique de plus en plus riche et articulé.

Notre questionnement de recherche cherchera, donc, à mieux comprendre le rôle joué par l'enseignante lors de ces moments de discussion collective, étant, la réflexion à ce sujet au sein de la TMS, encore en partie inachevée.

<sup>49</sup> Rappelons que, dans ce cas, nous entendons de façon générique par « outils », des parties ou composantes de l'artefact. Par exemple, « Trace » ou « Droite parallèle » sont des outils disponibles dans Cabri.

Voici alors les questions que nous nous posons :

Comment, dans le cadre d'un processus plus global, l'utilisation de l'artefact, de la part de l'enseignante, lors des moments de discussions collectives, peut être considéré une utilisation en termes d'instrument de médiation sémiotique ? Il faut en fait tenir compte qu'on parle utilisation d'un artefact comme instrument de médiation sémiotique toujours dans le cadre d'un processus bien plus large qui investie, aussi, par exemple, le choix de certaines tâches, la façon dont ces tâches mobilisent l'artefact, une certaine organisation sociale du travail, etc. Plus précisément alors, nous nous posons la question suivante : comment l'enseignante favorise le développement de certains signes et de certains signifiés mathématiquement pertinents ? Comment elle gère la fabrication de ces signes à partir d'activités précédentes avec l'artefact ? Comment elle contribue à évolution de ces signes, des signifiés associés, et à l'internalisation éventuelle de ces signifiés par les élèves ?

Afin de mieux décrire et modéliser ce rôle, comme dans le cas de la construction de la séquence expérimentale, nous avons choisi de nous appuyer sur des outils issus de la TdS. Nous espérons ainsi de contribuer au développement du cadre théorique même de la TMS.

Il s'agit donc d'un nouveau niveau d'articulation entre ces deux paradigmes théoriques, qui méritera d'être finalement discuté.

Ainsi, au cours de cette dernière partie de notre recherche, nous nous demanderons aussi comment une telle articulation a contribué à la modélisation du rôle de l'enseignante : comment la TdS a permis d'éclairer les mécanismes propres au processus de médiation sémiotique mis en place par l'enseignante, au sein de la TMS ? Et, inversement, comment la contrainte d'une telle modélisation en termes de médiation sémiotique, a conduit à préciser, voir modifier ou étendre ces outils dérivés de la TdS ?

## 2. Considérations méthodologiques générales

Notre analyse portera en particulier sur deux discussions collectives, temporellement assez éloignées : la première discussions collective et la treizième discussion collective.

La première discussion collective analysée concerne le début de la séquence expérimentale. Elle montre la première constitution du réseau sémiotique.

La deuxième discussion collective analysée, c'est-à-dire la discussion collective n°13, porte sur l'activité consécutive à la lecture et à l'interprétation du texte d'Euler. Elle montre la complexification « définitive » du réseau sémiotique, puisque, après avoir introduit les fonctions numériques et le graphe de la fonction par le texte d'Euler, nous avons demandé aux élèves de traduire la méthode de construction du graphe donnée par Euler, dans Cabri. Nous avons choisi ces deux discussions car elles sont à la fois très représentatives du processus de médiation sémiotique (elles se fondent sur l'utilisation d'artefacts pour la construction de signifiés mathématiques socialement partagés) et suffisamment différentes (elles portent sur deux moments divers de la séquence expérimentale et mobilisent deux artefacts différents, Cabri et le texte d'Euler, mais liés entre eux) pour permettre de tester la robustesse des outils d'analyse élaborés.

Ce chapitre a donc l'objectif d'explicitier la méthodologie adoptée pour cette analyse. Il s'agit de rendre compte d'un **double mouvement d'élaboration d'outils d'analyse : *a priori* et *a posteriori***.



Il sera composé de deux parties.

Lors de la première partie, nous mettrons en évidence les outils et les catégories choisis *a priori* qui ont guidé une première analyse des discussions.

En revanche, lors de la deuxième partie, nous montrerons et justifierons les outils élaborés *a posteriori* (au fur et à mesure de la relecture critique des discussions concernées) afin de modéliser les phénomènes, voir prévisibles, voir imprévues, caractéristiques des situations données. Ce deuxième mouvement nous a permis de raffiner et préciser les outils *a priori* (les catégories d'analyse de départ) en fonction des objectifs spécifiques de notre travail. En outre, il nous a conduit à identifier les phénomènes verbaux attendus *a priori* mais pas prévisibles dans leur modalité d'instanciation particulière.

Ainsi, nous verrons que, par exemple, si, *a priori* nous pouvions nous attendre à qu'une *action* de *reflet de l'intervention d'élève* se produisait ; en revanche, la façon dont l'enseignante a effectivement actualisé cette possibilité n'était pas prévisible *a priori* et elle a été relevé seulement *a posteriori*. De même, si nous pouvions prévoir (*a priori*) l'emploi, par exemple, des termes « fonction » ou « variable », au contraire, l'usage particulier, afin de soutenir le processus de médiation sémiotique, fait par l'enseignante, par exemple, de l'expression « chose magique » a été constaté seulement *a posteriori* lors de la relecture de la discussion.

La première partie concerne donc la méthodologie d'analyse *a priori* des discussions collectives et correspond au premier mouvement d'analyse. La deuxième partie concerne la méthodologie d'analyse *a posteriori* des discussions collectives et correspond au deuxième mouvement d'analyse.

Même si notre questionnement de recherche se centre premièrement sur l'analyse du rôle de l'enseignante dans l'orchestration des discussions collectives, puisque notre étude concerne globalement l'étude du processus de médiation sémiotique, nous ne n'avons pas pu considérer ce rôle de façon isolée, c'est-à-dire abstraction faite de l'action des élèves et du processus d'évolution des signifiés socialement partagés lors de ces mêmes discussions collectives.

Nous avons ainsi développé notre méthodologie selon trois grands axes d'analyse complémentaires :

**I. Analyse des actions de l'enseignante**

**II. Analyse des actions des élèves**

**III. Analyse de l'évolution des signifiés socialement partagés**

Ainsi :

- du point de vue de l'enseignante : il s'agira d'étudier les « actions »<sup>50</sup>, mises en œuvre par l'enseignante lors des discussions collectives, notamment en vue du processus de médiation sémiotique avec l'artefact.
- du point de vue de l'élève : il s'agira d'étudier les actions mises en place par les élèves et caractérisant le processus de constitution du réseau sémiotique ;
- du point de vue des signifiés : il s'agira d'en étudier leur évolution suite aux activités avec l'artefact (Cabri et le texte d'Euler). Plus particulièrement nous étudierons l'évolution des signifiés socialement partagés, tels comme ils émergeront lors de la discussion en classe.

---

<sup>50</sup> Nous reprenons ici la définition donnée par Bronckart (1996) et originalement inspirée par Habermas et Ricoeur. Les «actions sensées», ou tout simplement «actions» sont des «conduites orientées de façon sensées « décrites non pas au titre d'événements mais de «comportements comportant l'existence d'un motif, d'une intention et d'une responsabilité». Cette définition nous semble compatible à la fois avec la Théorie de la Médiation Sémiotique et le modèle proposé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000).

Etant donné notre objet d'étude principal, ces trois axes n'ont pas été développés de la même manière : la partie la plus importante des résultats de cette thèse concernera, en fait, le premier axe d'analyse, concernant l'action professorale.

La méthodologie d'analyse que nous avons élaborée constitue, en soi, un résultat de notre travail. En fait, grâce à elle, nous nous avons pu repérer des catégories nouvelles de modélisation de l'action professorale (catégories d'analyse élaborées *a posteriori*). En outre, toujours par cette méthodologie, nous avons pu articuler deux types d'analyses de nature très différente : l'une surtout empruntée à la TdS, l'autre issue de la TMS. Ainsi, d'une part, des grandes catégories d'analyse didactiques issues de théories autres que la TMS, ont été efficacement utilisées pour l'analyse du processus de médiation sémiotique et de sa façon spécifique de être mis en place et géré par l'enseignante. D'autre part, par cette même méthodologie, des outils issus de la TdS, mis à l'épreuve par cette modélisation nouvelle, ont pu être raffinés, voir transformés ou précisés.

Rappelons que cette articulation entre TMS et TdS, était, justement, un des objectifs de notre étude.

### 3. Méthodologie d'analyse des actions de l'enseignante

Dans l'analyse des actions de l'enseignante, le **double mouvement d'analyse (a priori et a posteriori)** dont nous avons parlé auparavant se croise avec un **double niveau d'analyse, descriptif versus interprétatif**.

Nous parlons de « caractère dominant », car la distinction entre ces deux niveaux n'est pas toujours univoque, s'agissant les plus souvent plutôt d'un continuum.

Le premier niveau d'analyse vise à l'identification des *actions* de l'enseignante, en restant le plus adhérent possible à une description de la phénoménologie du comportement. On peut définir ce type **d'analyse « à dominante descriptive »**.

A cette première « couche d'analyse » nous en avons rajouté une deuxième qui relève d'un travail d'interprétation plus proprement didactique, portant sur des grandes catégories d'analyse didactique (**deuxième niveau à dominante interprétative**).

Il faut bien souligner que, en ce qui concerne le premier niveau d'analyse, ceci ne comporte pas un certain degré d'interprétation : il est évident que, même quand nous attribuons, à un énoncé donné, le statut de « *Mise en confrontation* », nous sommes en train, quelque part, d'interpréter ce qui se passe.

De manière analogue, le fait d'être sensibilisés à des actions particulières, d'en remarquer certaines et pas d'autres, peut être la conséquence d'une approche interprétative qui est antécédente la lecture même des discussions collectives et qui peut façonner plus ou moins fortement toute l'analyse, tant le niveau à dominante interprétative que celui à dominante descriptive.

La dialectique entre ces deux niveaux n'est peut pas donc simplement se résumer en « d'abord le descriptif après l'interprétatif ». En effet, avant le descriptif nous disposons déjà d'un certain interprétatif. Il est constitué de grandes catégories d'analyse didactique qui permettent de nous focaliser sur certains aspects, d'aller repérer les éléments d'analyse *a priori* les plus adaptés pour conduire notre description.

Nous avons, en effet, **trois étages** : un premier interprétatif, un descriptif et un deuxième interprétatif. Les deux interprétatifs ne sont pas du même ordre : les catégories du premier, très larges et génériques, sont d'avantage revisitées, précisées et réinterprétées lors du deuxième.

Pour ne pas alourdir la présentation de notre méthodologie, nous avons choisi de ne pas garder distinctes ces trois étages, mais de présenter seulement deux niveaux d'analyse, l'un à dominante descriptive et l'autre à dominante interprétative. Cependant, il sera possible, lors de la présentation du premier niveau à dominante descriptive, d'entrevoir, comme en filigrane, l'apport interprétatif qui, à mont, a pu façonner ou conditionner la description-même.

Le niveau d'analyse à dominante interprétative qui suivra, donc, le premier niveau descriptif, portera sur un travail d'interprétation plus proprement didactique. Ainsi, il s'agira de reprendre les mêmes *actions* déjà identifiées par la « première couche d'analyse (à dominante descriptive) » et de les réinterpréter à la lumière des notions issues directement de la didactique. Cette « reprise » permettra, en même temps, de préciser les notions utilisées pour l'analyse.

Nous nous attendons à que ces deux niveaux puissent se recouper en renvoyant au même événement dans la classe. Dans ce cas, ils constitueront deux manières différentes d'en parler et ce que nous qualifierons alors d'« interprétatif » sera surtout le fait de reconnaître un certain événement comme faisant, justement, partie d'une grande catégorie didactique donnée.

Nous nous attendons aussi à que ces deux niveaux puissent aussi ne pas se recouper. Dans ce cas, nous aurons des actions identifiées au niveau descriptif, qui n'ont pas d'interprétation didactique. Ce qui nous montrera aussi la non exhaustivité de notre premier interprétatif.

Il peut aussi s'avérer que des actions repérées par le premier niveau d'analyse, soient interprétables de manière différente par les deux cadres théoriques de la TdS et de TMS. Cela signifiera alors que les deux théorisations prennent en compte le même phénomène, en lui accordant, probablement, un statut ou une finalité spécifiques.

Finalement nous retrouverons donc quatre types de grandes catégories d'analyse différentes : *a priori* – descriptive, *a priori* – interprétative, *a posteriori* – descriptive et *a posteriori* – interprétative.

Le deux premières grandes catégories seront développées au cours du chapitre présent, les deux autres seront prises en compte lors des chapitres dédiés à l'analyse *a posteriori* des discussions collectives.

# Première partie : Méthodologie d'analyse *a priori* des discussions collectives

## 4. Méthodologie d'analyses *a priori* des actions de l'enseignante, premier niveau d'analyse (à dominante descriptive)

Dans le but de décrire l'action professorale (premier niveau d'analyse) nous utiliserons d'abord deux grandes familles de catégories d'analyse :

1. les catégories déjà identifiées par Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni et ses collègues (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger et Mercier, 2000 ; Mercier, Schubauer-Leoni, et Sensevy, 2002 ; Sensevy et Mercier, 2003).
2. les catégories déjà développées par Bartolini Bussi, Mariotti et ses collègues (Bartolini Bussi, 1996 ; 1998a ; Bartolini Bussi et Boni, 1995a ; Bartolini Bussi, Boni, et Ferri, 1995b ; Bartolini Bussi et Mariotti, 1998) sur analyses des discussions collectives.

La première famille a ses raisons d'être dans la TdS et dans l'approche anthropologique développée par Chevallard (1992)<sup>51</sup> ; la deuxième prend son origine directement dans la TMS. Cette référence mixte dérive directement de la conception et de réalisation de notre séquence expérimentale, qui intègre les approches théoriques de la TdS et de la TMS. Elle constitue à la fois une méthodologie d'analyse et un résultat de cette méthodologie, qui demandera d'être commentée à l'issue de l'analyse *a posteriori*.

### 4.1. Catégories d'analyse de l'action professorale dérivées des travaux de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (à dominante descriptive)

Notre première famille d'outils d'analyse repose sur les travaux de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni et ses collègues (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000 ; Schubauer-Leoni, Leutenegger et Mercier, 2000 ; Mercier, Schubauer-Leoni, et Sensevy, 2002 ; Sensevy et Mercier, 2003).

En particulier dans Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), à partir d'un travail mené autour de cinq séances d'enseignements appuyées sur le jeu de la course à 20, conduites en CM2, par cinq professeurs différents, ces chercheurs ont

---

<sup>51</sup> A la différence de la Théorie des Situation et de la Théorie de la Médiation Sémiotique, le recours à la Théorie Anthropologique ne constitue pas l'objet d'une réflexion spécifique de ce travail de thèse. Ces paradigme théorique sera donc simplement utilisé et évoqué dans la mesure où il sert au modèle développé par Sensevy G., Mercier A. et Schubauer-Leoni M. L. (2000).

distingué quatre éléments structuraux fondamentaux de l'action professorale : « *définir, réguler, dévoluer et instituer* » :

*définir (référer/indiquer)* : le travail du professeur consiste (d'abord) à *poser* un certain nombre d'objets, à établir le cadre d'une situation [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 268].

Le processus de définition peut se décliner de multiples manières. En particulier, le professeur peut *référer* à une activité ou à une culture commune, ou *indiquer* ce qui dans l'activité proposée doit être retenu :

[...] le verbe *référer* est utilisé ici pour mettre en évidence la dimension référentielle du travail collaboratif dans la classe. Lorsque le professeur dit « on va jouer un jeu », il réfère à une activité précise, inscrite soit dans une culture, soit dans la mémoire didactique de la classe. Cette désignation est une référence supposée commune à une signification culturelle ou à un passé didactique censé alléger le travail de définition. Mais on peut aussi définir une situation en *indiquant* : par exemple, pour fixer les règles du jeu, le professeur peut affirmer : « On ne dit que le nombre d'arrivée », en reprenant ainsi, un comportement discursif d'un élève. Ce faisant, il *indique* ce qui, dans *l'activité présente* des élèves, peut être adopté-conservé en tant que *règle constitutive* du jeu. [...] l'indication suppose à la fois l'ostension (le professeur *montre* le « bon » comportement) et la coopération (puisque sans comportement d'élève à indiquer, il n'y aurait pas d'indication). [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 268]

En revanche, pour Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, le processus de *régulation*, porte sur la gestion de la situation didactique, une fois que les élèves sont rentrés dans l'activité. Il relève spécialement de l'aménagement du partage topogénétique :

*Réguler (désigner-indiquer, réaménager)* : lorsque les élèves sont entrés dans un certain type d'activité, lorsqu'ils jouent le jeu proposé par le professeur, celui-ci régule les rapports « fruits » de leur travail, que les élèves sont en train d'établir à la situation ; ce que nous désignons par *régulation* concerne donc *les comportements que le professeur produit en vue d'amener l'élève à élaborer des stratégies gagnantes*.

[...] C'est dans le cadre de son action de régulation que le professeur pourra garantir une forme de progression du temps didactique en jouant sur le partage des tâches initialement défini entre le professeur et les élèves : soit ce que nous nommerons la *latitude topogénétique* du professeur. [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 269]

Dans cette catégorie d'action professorale, ces auteurs situent aussi la création et la négociation de signes et significations communes :

D'une manière plus générale, en désignant par régulation ce que le professeur fait en vue de la construction, par les élèves, des stratégies gagnantes, on va référer ce qui, dans l'action du professeur, permet à la collectivité d'élaborer des signes et des significations qui vont donner la possibilité d'une action commune. [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 270]

Et, finalement ce processus de construction de signes et d'une signification communes correspond à *l'aménagement progressif du milieu* (Mercier 1995, Sensevy 1998, 2000) :

*L'aménagement coopératif d'un milieu* suppose donc des réaménagements constants, qui vont le plus souvent en directions d'une réduction de l'incertitude de l'action demandée. Le phénomène a été observé par de longue date par Guy Brousseau sous le nom d'*effets de contrat*. [...] les différents types de contrats mis en évidence (Brousseau, 1997), et les changements de contrat, notamment les contrats locaux (Comiti et Grenier, 1997), peuvent être interprétés comme des *réaménagements du milieu*. De tels réaménagements souvent suscités par le professeur en fonction de la distance perçue par lui entre l'état du « milieu pour l'élève » et celui du milieu dans lequel il veut voir l'élève évoluer, doivent permettre l'élaboration des stratégies gagnantes. [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 270]

En ce qui concerne les deux autres catégories fondamentales de l'action professorale, la dévolution et l'institutionnalisation, Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, expliquent que la dévolution comme l'institutionnalisation ne relèvent pas simplement des conditions d'entrée ou de clôture de la tâche. Ils constituent deux processus qui accompagnent, avec une intensité variable, l'ensemble du processus d'enseignement - apprentissage, et qui sont particulièrement cruciales lors de chacune des bifurcations mathématiques importantes de la leçon.

Ce modèle propose donc de généraliser les notions de dévolution et d'institutionnalisation, sous conditions, à toute situation d'enseignement :

*Dévoluer* : de manière quasi simultanée à la définition et la régulation, le professeur doit faire sorte que les élèves prennent la responsabilité « de jouer le jeu », de s'engager dans l'activité proposée. [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 270]

[...]

La dévolution n'est pas simplement – ni dans tous les cas – une condition d'entrée dans la tâche, et ne concerne donc pas le seul processus de *définition* : nous postulons qu'elle constitue en fait un processus qui accompagne, avec plus o moins d'intensité, l'ensemble du travail didactique. Par exemple, pour ce qui concerne le cas analysé dans cet article, c'est à chacune des bifurcations mathématiques importantes de la leçon que la dévolution fait à nouveau problème. [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 270]

[...]

*Instituer* : Le travail du professeur suppose également l'institutionnalisation – Guy Brousseau a mise en évidence ce processus depuis longtemps. Il commence dès premières instants de la leçon, au moment de la dévolution à chaque élève du problème [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 271]

[...]

Comme pour la notion de dévolution, le présent modèle propose de généraliser la notion d'institutionnalisation, en particulier à des objets qui ne sont pas des objets de savoir. Nous proposons alors de concevoir *l'institutionnalisation* comme une dimension fondamentale d'un travail de production d'une *institution* : le professeur et les élèves s'instituent comme collectif de pensée comptable de leur production de savoir et ils s'autorisent à évaluer cette production. Ils identifient des manières de faire, que l'institution qu'ils forment reconnaît comme légitimes : ce faisant, ils produisent une institution fondée à valider les manières de faire, dont les élèves et le professeur sont ensemble les sujets. [Sensevy, Mercier Schubauer-Leoni, 2000, p. 271]

Dans le modèle de Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M. L. (2000), ces quatre éléments structuraux fondamentaux de l'action professorale (« *définir, réguler, dévoluer et instituer* ») sont orientés selon trois objectifs principaux :

produire les lieux du professeur et de l'élève (effets de topogenèse)

produire les temps de l'enseignement et de l'apprentissage (effets de chronogenèse)

produire les objets des milieux et l'organisation des rapports à ces objets (effets de mésogenèse) [Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000, 267]

Les termes « topogénèse », « chronogénèse » et « mésogénèse », sont utilisés selon la signification introduite par Chevallard (1991)<sup>52</sup>.

Cependant, il faut souligner, que, puisque dans le modèle proposé par Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M. L. (2000) « *le postulat de la production chronogénétique, topogénétique et mésogénétique joue un rôle fondamental* », le sens de chacun de ces termes est censé évoluer ainsi que le système qu'ils constituent.

A partir de ces grandes catégories, par une *analyse ascendante* (c'est-à-dire par une *analyse clinique, indiciaire et inductive de l'action de l'enseignant vers son projet*) ces auteurs ont identifiés des *techniques* didactiques du professeur particulièrement pertinentes « *pour la compréhension de son action* » (Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M. L., 2000).

Il s'agit de *techniques*, parfois *mixtes*, de transformation du milieu, de déplacement topogénétique ou de modification chronogénétique que ces auteurs lient explicitement à une modélisation de la « *sémantique naturelle de l'action professorale* » (Sensevy G., Mercier A., Schubauer-Leoni M. L., 2000).

Comme déjà évoqué, dans notre étude, nous conduirons l'analyse du rôle de l'enseignante en nous référant à deux cadres théoriques divers.

Ce choix pose des problèmes de compatibilité non seulement terminologique. Cependant, il nous semble de pouvoir identifier un terrain commun, puisque, dans les deux cas il s'agit de modéliser l'action professorale, en termes de comportements comportant l'existence d'un motif, d'une intention et d'une responsabilité. Cette superposition, au moins partielle, nous garanti la possibilité d'une articulation entre ces deux types d'analyse.

D'une part, nous nous fonderons sur la TMS, qui, dans la modélisation des interactions langagières, s'inspire à la distinction introduite par Leont'ev entre *Activité/Actions/Opération* et qui cherche à identifier les *stratégies communicatives* adoptées par l'enseignant comme étant des révélateurs des *opérations* mises en acte.

D'autre part, nous nous appuierons sur le modèle développé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), qui, en reprenant la théorie anthropologique de Chevallard, se réfère à l'action de l'enseignant en termes de *techniques professorales*, liées à certains types de tâches. Ainsi, au cours de notre analyse nous avons décidé d'adopter une terminologie commune qui puisse ou moins partiellement recouvrir les deux significations introduites par ces deux cadres théoriques. Comme déjà dit, en reprenant la définition donnée par Bronckart (1996), *d'action* comme de « *conduite orientée de façon sensée* », « *comportant l'existence d'un motif, d'une intention et d'une responsabilité* » au lieu d'utiliser les termes *technique professorale* ou *stratégie communicative de l'enseignant*, nous nous référerons, tout simplement aux *actions de l'enseignante*.

---

<sup>52</sup> Ainsi, rappelons brièvement que dans la Théorie Anthropologique développée par Chevallard (1992), la « topogénèse » du cours désigne la partition des tâches dont respectivement le professeur et les élèves ont à la charge. Ces tâches impliquent une organisation de la spatialité symbolique et technique, comme professer magistralement depuis le bureau face aux élèves, écrire au tableau, passer dans rangs. Finalement c'est la position occupée par les différents acteurs de la relation didactique. En revanche, la « chronogénèse » du cours désigne la façon dont s'ordonne l'étude des notions du programme, c'est-à-dire le défilé des objets de savoir. La « mésogénèse » correspond au processus de fabrication du milieu dans la classe. A la fois sur le plan matériel (calcuette ou no, utilisation d'ostensifs, etc) et sur le plan symbolique et cognitif, l'enseignant doit en fait agencer un milieu dans lequel l'élève va travailler.

En nous fondant sur ce modèle, dans le cas de notre étude, les *actions* de l'enseignante seront donc identifiées et investiguées selon les trois catégories suivantes :

- « **actions à dominante chronogénétique** »
- « **actions à dominante topogénétique** »
- « **actions génériques de l'action professorale** » ou « **à dominante mésogénétique** ».

Le modèle proposé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), même s'il se réfère potentiellement à toute situation didactique, s'adresse plus particulièrement à l'analyse d'une situation adidactique. En revanche, dans notre recherche, il s'agit d'analyser des discussions collectives, qui sont des situations didactiques. En outre, dans notre cas particulier, le processus de médiation sémiotique est un facteur spécifique et fondamental. C'est pourquoi, nous nous attendons à que seulement certaines de ces catégories se actualisent.

Ainsi, relativement à la classe d'**actions à dominante chronogénétique**, nous prévoyons que, par exemple, lors des discussions collectives, ils se produisent des actions comme : *Différé-Ralentissement* ; *Incitation-Accélération*, *Début*, *Fin*, *Changement de phase*, *Gestion de la mémoire didactique (Rappels)*, etc.

En revanche, étant donné l'importance accordée, par notre étude, au partage des responsabilités lors du processus de médiation sémiotique et aux dynamiques sociales de construction inter-subjective des signifiés pendant les discussions collectives, relativement à la classe de **actions à dominante topogénétique**, nous nous attendons des actions de la part de l'enseignante visant à impliquer ou à gérer les élèves lors du processus de communication (comme par exemple, les *Demandes aux élèves d'exécution au rétroprojecteur ou de faire la synthèse* ; l'*Elargissement dialogique*, *Appel à un ou plusieurs élèves distraits etc.*)

En fin, étant donné la structure de notre séquence expérimentale (qui articule des activités en binômes dans Cabri avec des moments de travail individuel et des discussions collectives orchestrées par l'enseignante) nous nous attendons à que ces activités différentes porteront sur des milieux divers. Pour cette raison, nous nous attendons à que lors de ces moments collectifs de discussion, ils se produisent des phénomènes liés à la fabrication et à l'agencement de milieux divers, à la gestion d'ostensifs différents et à l'articulation de productions et de problèmes rencontrés par les élèves différents. Ainsi, par rapport aux **actions à dominante mésogénétique**, nous emprunterons au travail de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), en particulier, les *actions* suivantes : *Mise en œuvre de formats de communication* (comme par exemple la *Diffusion dialogique* constituée par une *Question de l'enseignant - Réponse de l'élève - Confirmation de l'enseignant - Diffusion de l'enseignant - Demande de confrontation aux autres élèves*) ; *Mise en confrontation* ; *Mise en évidence* ; *Gestion des ostensifs*, *Ostensions*, *Diffusion d'énoncés et de problèmes*.



## 4.2. Catégories d'analyse de l'action professorale dérivées des travaux de Bartolini Bussi et Mariotti (à dominante descriptive)

En ce qui concerne la seconde grande famille d'outils d'analyse, à partir d'une approche « interprétativiste », d'éléments de la théorie psychologique de Vygotsky, de celle de l'activité de Leont'ev, Bartolini Bussi et Mariotti ont élaboré un protocole très détaillé d'analyse des discussions collectives (Bartolini Bussi, 1991 ; 1996 ; 1998a ; Bartolini Bussi et Mariotti, 1998). Nous avons déjà évoqué, par exemple, que, au sein de la TMS, Bartolini Bussi et ses collègues (Bartolini Bussi et al. 1995a, ; Bartolini Bussi et al. 1995b) (cf. Chapitre 1, §3.5) ont indiqué les caractéristiques nécessaires pour que une discussion collective puisse se définir une *discussion Mathématique*. Elles ont aussi distingué des types différents de discussions : *de bilan, de conceptualisation*<sup>53</sup>, etc.

Les discussions collectives que nous analyserons, ont été, en effet, orchestrées par l'enseignante en fonction du processus de médiation sémiotique et selon des canevas bien établis (même si pour majorité des cas, implicites), censés de fonctionner comme discussions mathématiques. C'est pourquoi nous nous attendons à retrouver des traits relatifs à l'une et à l'autre type de ces discussions collectives.

Selon une méthodologie déjà indiquée par Bartolini Bussi, nous découperons les discussions collectives en épisodes et nous chercherons à identifier les phases caractérisantes. Nous rechercherons s'il y a eu des phases *d'introduction par solutions-prototypes, d'explicitation des procédés de solution, d'explicitation de l'apprentissage et de l'institutionnalisation*, comme dans le cas des *discussions collectives de bilan*, ou des phases *d'ouverture, d'explicitation des signifiés personnels, de construction des signifiés, de dialectique entre signifiés personnels et signifié collectif et d'institutionnalisation*, comme dans le cas des *discussions collectives de construction des signifiés*.

Pour chaque discussion collective, nous chercherons à reconstruire les intentions (*motifs*) de l'enseignante et les *actions* mises en œuvre. En revanche, nous ne descendrons que rarement dans l'analyse jusqu'au niveau des *opérations*. Cela constitue une différence significative par rapport à l'analyse menée par Bartolini Bussi.

Comme déjà évoque, en fait, en se fondant sur la distinction introduite par Leont'ev, cet auteur fait correspondre les *stratégies communicatives* de l'enseignant au niveau des *opérations*. En revanche, pour nous, les *stratégies communicatives* correspondent au niveau des *actions*, tandis que les *opérations* seraient les modalités d'instanciation particulière de ces *actions*. Ainsi, nous parlerons *d'action de paraphrase* au lieu de *stratégie de paraphrase*<sup>54</sup>. Ce choix nous permettra de maintenir une compatibilité entre le modèle proposé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) et la TMS. En autres termes, parler d'*actions*, toute en gardant sa polysémie, nous permettra de nous inscrire au même degré de granularité, tant dans la l'analyse développée au sein de la TMS (où Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) utilisent l'expression « action professorale »), que dans la TMS (où ce terme est employé avec une acception voisine à celle de la théorie de l'activité).

<sup>53</sup> Rappelons que pour éviter toute ambiguïté, nous avons décidé d'appeler les « *discussions de conceptualisation* », « *discussions de construction d'un signifié socialement partagé* » (cf. Chapitre 1, pars. 3.4.1 et 3.5).

<sup>54</sup> En revanche, dans notre analyse, lors d'une *action de paraphrase*, le fait que l'enseignant utilise un mot plutôt qu'en autre, correspondra à l'*opération* entreprise pour actualiser cette *action*.

Nous porterons une attention particulière aux *actions* langagières puisque la TMS, accorde un rôle fondamental au langage dans le développement de la pensée.

En particulier, nous chercherons à identifier les *actions* de *reflet* et de *paraphrase* (Bartolini Bussi et al, 1995), car elles ont été indiquées, comme des stratégies-clés, non seulement dans la gestion des discussions collectives, mais aussi dans le processus de construction collective des signifiés mathématiques.

Le *reflet* est défini par Bartolini Bussi comme la reprise par l'enseignant, d'une contribution informative présente dans l'intervention d'un élève sans lui n'ajouter aucune modification. Elle a pour but de favoriser l'explicitation et la reformulation de la part de l'élève de son intervention.

La *paraphrase* est décrite par Bartolini Bussi comme la reprise par l'enseignant d'une contribution informative présente dans l'intervention d'un élève en lui ajoutant une quelque modification. Dans l'*action de paraphrase*, souvent l'enseignant introduit explicitement des quantificateurs, substitue le connecteur temporel « quand » par le « si » hypothétique, généralise (du contextualisé au décontextualisé) ou particularise (du contextualisé au décontextualisé). Cette *action* permet donc d'élargir, de préciser ou de transformer le sens d'une intervention précédente.

En fin, nous analyserons les phénomènes verbaux de *particularisation* et de *généralisation* pour y retrouver des traces éventuelles de transformation des signifiés (de l'activité dans l'artefact vers le monde de la culture mathématique ou *vice-versa*).

Le constat de la réalisation effective des actions attendues, des modalités particulières d'actualisation, aussi comme l'identification éventuelle d'autres actions, déjà « répertoriées » par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni ou par Bartolini Bussi ferait l'objet d'une partie de l'analyse *a posteriori* des discussions collectives. (cf. Chapitre 6 et Chapitre 7).

## 5. Méthodologie d'analyse *a priori* des actions de l'enseignante, deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative)

Comme nous avons déjà vu, les actions déjà identifiées par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) (*Début, Fin, Mise en œuvre de format de communication, Mise en confrontation*, etc.), nous fournirons une grande famille d'outils d'analyse *a priori*<sup>55</sup>, par laquelle attaquer une première « description » des discussions collectives (niveau d'analyse à **dominante descriptive**).

Cependant, la façon général d'entendre et concevoir l'action professorale qui a conduit Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) à distinguer entre actions « **à dominante chronogénétique, topogénétique et mésogénétique** », ne constitue pas seulement une manière utile et systématique de bâtir une description des discussions collectives. Elle est aussi, et surtout, une grande catégorie didactique, *a priori*, pour la relecture interprétative de ces mêmes discussions collectives.

Ainsi, à partir du travail de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), nous n'avons pas seulement dérivé une première « rose » d'actions possibles par laquelle commencer à décrire le comportement de l'enseignante. Nous en avons en même temps tiré une façon de classer et, par conséquence, d'investiguer ces mêmes

---

<sup>55</sup> Nous considérons ces catégories-là, des catégories *a priori*, car nous pouvons les décrire *a priori*. En revanche, il faut rappeler que leur actualisation dans le cas d'un protocole donné ou d'une discussion particulière sera saisie seulement *a posteriori*.

actions. En fait, attribuer à une intervention, un effet chronogénétique, topogénétique ou mésogénétique relève beaucoup plus de l'interprétation didactique.

D'ailleurs, notre méthode est cohérente avec la méthode d'analyse déjà adoptée par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni eux-mêmes. En fait, à partir d'une analyse *descendante* (c'est-à-dire du modèle théorique à l'action professorale), les techniques identifiées (que dans notre analyse correspondent aux *actions*) ont été reliées par ces auteurs à des fonctions didactiques spécifiques (*Identification - reconstruction des traits pertinents de l'action, Accompagnement, changement, transition d'une phase à l'autre, Territorialisation / déterritorialisation* des acteurs divers, etc) et à des phénomènes didactiques significatifs, comme celui de *l'utilisation de pronoms et de mots comme outils, de la postulation mimétique ou de la fusion topogénétique*.

Par conséquent, au cours de notre travail, d'une part, nous prendrons en compte le modèle proposé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) en l'étendant, où possible, aux autres actions que nous identifierons. D'autre part, nous surveillerons d'avantage certaines notions didactiques identifiées par ces chercheurs, comme celle de *intervention mésogénétique, de mouvement topogénétique, de fusion topogénétique* ou de *changement (de phase) chronogénétique*, étant ces-ci des catégories *a priori* par lesquels nous espérons pouvoir mieux comprendre les dynamiques du fonctionnement global des discussions collectives.

Par exemple, les *interventions mésogénétiques* de l'enseignante, liées à *l'identification - reconstruction des traits pertinents de l'action* ou à *la reprise d'un trait pertinent ou d'une question*, ainsi que en général, toute les *actions de focalisation*, joueront un rôle fondamental dans la construction, d'un espace inter - subjectif commun et d'une signification partagée de l'activité. Nous nous attendons aussi à que ces interventions aient un rôle important dans l'explicitation des signifiés personnels et dans leur mise en relation dialectique avec le signifié socialement partagé en voie de construction dans la classe.

L'analyse des *mouvements topogénétiques ascendants et descendants* (c'est-à-dire des mouvements de l'enseignante par lesquels la distance topogénétique entre la position de l'élève et la position de l'enseignante est respectivement accrue ou réduite), du phénomène de la *fusion topogénétique* et des *actions* liées à *une utilisation particulière des pronoms* permettra de surveiller comment, l'enseignante gère le *déplacement topogénétique* des différents acteurs et orchestre leur participation à la construction collective des signifiés mathématiques.

L'identification des *changements de phase, des actions de transition et d'accompagnement* d'une phase à une autre, des *actions de suspension temporaire du jugement* permettra de modéliser, au moins partiellement, la gestion de la part de l'enseignante de la chronogenèse de la discussion collective attendue.

En fin, nous relierons le phénomène de la *posture mimétique* (Sensevy, 2000), par lequel « le professeur s'autorise à recouvrir la signification de l'élève par la sienne » car il estime que « la distance entre les deux expressions est suffisamment courte pour être aisément accomplie par l'élève » (Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000, p. 291), à la notion vygotkienne, plus générale, de *zone de développement proximal* (cf. Chapitre 1, § 3.3.2). et à notre troisième hypothèse de travail (qui se réfère à l'utilisation fonctionnelle d'un signe) (cf. Chapitre 1, § 3.4). En effet, c'est grâce à cette distance, estimée parcourable, qu'il est possible la communication, l'utilisation fonctionnelle d'un signe dans un contexte donné ainsi que son changement éventuel de signification.

Pour reprendre l'image, présentée au début de ce chapitre, des **trois étages**, nous pourrions dire que la classification des actions issue de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) fournit, à la fois, le « premier interprétatif » qui façonne, d'une certaine mesure, notre description des discussions collectives et « le deuxième interprétatif » qui nous permet d'en porter une interprétation didactique.

De manière analogue, la méthodologie d'analyse des discussions collectives développée par Bartolini-Bussi et ses collègues constituent une autre grande famille de catégories d'analyse *a priori* qui, à la fois, règne, en filigrane, la description des discussions collectives et en détermine notre interprétation.

Ainsi, l'importance accordée à la dialectique entre *signifiés personnelles* et *signifié socialement partagé* (« premier interprétatif » issu de la théorie de la médiation sémiotique) nous conduira, d'abord à rechercher les phénomènes de *reflet* ou de *paraphrase* (analyse à **dominante descriptive**), puis à relier éventuellement ces deux types d'intervention à des finalités particulières du processus de médiation sémiotique (analyse à **dominante interprétative**). Par exemple, comme déjà montré par Bartolini Bussi et ses collègues (Bartolini Bussi et al. 1995, p. 23), dans une *discussion de bilan*, au moment de la reconstruction collective de l'activité dans Cabri, les *actions* de *reflet* pourront amener les élèves à une prise de conscience et puis de distance de leur produit. En revanche, les *actions* de *paraphrase*, permettront à l'enseignante de retenir et généraliser ce qui a été construit et appris lors de l'activité avec l'artefact ; elles participent donc au processus d'institutionnalisation. En revanche, dans une *discussion de construction d'un signifié*, les *actions* de *reflet* favoriseront l'explicitation des signifiés personnels, tandis que les *actions* de *paraphrase*, auront une fonction importante dans la mise en relation entre signifiés personnels et signifié mathématique socialement partagé, ainsi que dans la constitution même du signifié mathématique socialement partagés.

### 5.1. Résonance et d'autres catégories d'analyse des actions de l'enseignante dérivées de la TdS

D'autres outils théoriques, pour une analyse *a priori* à **dominante interprétative**, des *actions* de l'enseignante, nous seront fournis directement par la TdS. Ces mêmes outils ont été employés aussi par le modèle développé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000).

En particulier, nous analyserons les discussions collectives en termes de situations didactiques où des problèmes d'interprétations sont posés et où des moments potentiellement adidactiques peuvent se produire. Pour comprendre comment, au sein de ces situations didactiques, le processus de médiation sémiotique est mis en place par l'enseignante et comment un certain degré d'adidacticité est garanti, nous essayerons d'identifier le *contrat didactique* (cf. Chapitre 1, § 4.5) sous-jacent, ses règles implicites ou explicites, ses effets éventuels (Effet Topaze, Jourdain, etc.) et son rôle.

Des recherches de Grenier, Comiti et Margolinas (Comiti et Grenier 1993 ; Comiti, Grenier et Margolinas, 1995) nous emprunterons la notion didactique de *résonance* (*résonance nulle*, *résonance faible* et *résonance forte*).

Ces auteurs expliquent que la modélisation en termes de *résonance d'une intervention* (ou de *non-intervention*) d'élèves sur le projet du professeur permet d'interpréter certains des décalages que l'on peut observer, en classe, entre le projet initial du professeur et sa réalisation définitive (Grenier, Comiti et Margolinas, 1995).

Il s'agit donc d'une reconstruction *a posteriori* de la situation didactique de la part du chercheur, qui se fonde sur l'hypothèse que, en général, les interventions de l'enseignante, ainsi que des élèves, ne sont pas par hasard, et qui vise à expliquer certaines prises de décision de l'enseignante au cours du déroulement de la situation.

Ainsi, comme évoque aussi par Perrin-Glorian et Hersant (2003), dans le cas d'une *résonance forte*, l'enseignant *peut décider un changement de la situation en cours ou une suspension momentanée, pour proposer une nouvelle situation, incise dans la précédente*.

En revanche, le cas d'une *absence de résonance* (qualifiée aussi de *résonance nulle*), peut s'expliquer *par une ignorance du professeur des intentions de l'élève* (Perrin-Glorian et Hersant, 2003), ou, au contraire par la volonté explicite de ne pas intervenir, n'estimant pas celui-la le temps propice pour prendre en compte cette intervention.

Par conséquent, cette modélisation des interventions de l'enseignante en termes de *résonance* nous semble pouvoir rendre compte, d'une part, des prises de décision dans l'instant, au niveau local, de l'enseignante, en fonction du processus global de médiation sémiotique ; d'autre part, des décalages entre ce qui est attendu ou souhaité et ce qui se produit réellement en classe.

L'actualisation dans le contexte des discussions collectives des ces catégories d'analyse nouvelles permettra d'observer comment elles fonctionnent effectivement, à quoi elles servent et sont reliées. Nous nous attendons à que cela nous conduise à revenir *a posteriori* sur les mêmes pour mieux les préciser voir les modifier.

## 6. Méthodologie d'analyse *a priori* des actions des élèves lors des discussions collectives.

L'analyse des *actions* des élèves lors des différentes discussions collectives sera conduite de façon différente à celle de l'enseignante. En effet, étant donné les objectifs spécifiques de cette thèse, centrés premièrement sur le rôle de l'enseignante, nous avons choisi de ne pas développer de la même manière ce deuxième axe d'analyse. Ainsi, nous ne distinguerons pas entre niveau d'analyse à **dominante descriptive** versus **interprétative**. L'analyse qui en résultera sera donc réduite et essentiellement orientée afin de pouvoir rendre compte, d'une part, des dynamiques de fonctionnement des discussions collectives, d'autre part, du processus d'émergence et de constructions des signifiés mathématiques socialement partagés.

Dans leur utilisation de la TdS pour l'analyse de séquences ordinaires d'enseignement, Perrin-Glorian et Hersant (2003) ont montré que :

Les séances de classe observées laissent en général entrevoir une alternance entre activité du professeur et l'activité des élèves et que il y a un continuum avec de larges variations concernant la responsabilité face au savoir laissée aux élèves dans la résolution d'un problème qui leur est proposé [Perrin-Glorian et Hersant, 2003, p. 223].

Dans ce continuum, elles ont identifié deux pôles extrêmes :

- ou il existe un milieu avec lequel l'élève peut avoir un rapport direct, effectif ou évoqué, et qui peut lui amener des rétroactions, mêmes insuffisantes : dans ce cas, on peut reconstruire une

situation qui a des potentialités adidactiques même si le maître peut être amené à intervenir sur le milieu et à aménager le milieu au cours de l'action [...].

- ou cette possibilité n'existe pas : l'enseignant est le seul garant des procédés utilisés par les élèves ; c'est lui seul qui fournit les rétroactions aux actions des élèves. [Perrin-Glorian et Hersant, 2003, p. 224].

En étendant ces considérations aussi au cas des nos discussions collectives, nous nous attendons donc à identifier, d'une part, ce que ces auteurs appellent le *potentiel adidactique* de la situation laissé aux élèves, d'autre part, le rôle spécifique des élèves dans le processus de sémiotique.

Ainsi, par rapport aux actions des élèves, les questions que nous nous posons sont :

1. Quelle est le potentiel adidactique possible ou effectif dans les moments de discussions collectives ?
2. Quelle est la prise de responsabilité de la part des élèves ?
3. Quel est le rôle joué par les élèves dans le processus de sémiotique ?
4. Quelles sont les actions spécifiques au travail de construction de signifiés qui sont menées (ou peuvent être menées) par les élèves ?

Même si nous chercherons à adhérer le plus possible aux événements observés, l'analyse sera donc façonnée, dès le départ, par des grandes catégories didactiques. On ne pourra pas vraiment distinguer ce qui relève de la description ou, voir, de l'interprétation, car nous décrirons et interpréterons à la fois les interventions des élèves en remarquant seulement ce qui nous semblera pertinent par rapport aux questions posées.

Ainsi, nous chercherons à identifier toutes les actions des élèves qui permettent d'attester le potentiel d'adidacticité des discussions collectives : les rétroactions du milieu autres que les interventions de l'enseignante, les validations apportées et reconnues par les élèves et les changements volontaires introduites toujours par les élèves dans le milieu. Cela nous permettra d'apporter une réponse, en particulier, aux deux premières questions.

Nous prendrons en compte et analyserons toutes les interventions des élèves qui portent sur un travail de fabrication de signes, de mise en relation de signifiés divers, et en général, d'interprétation. Nous avançons, en fait, l'hypothèse suivante :

*les élèves eux-mêmes sont engagés dans le processus de sémiotique et cela est une conséquence d'un contrat didactique bien spécifique, stable dans la classe.* Cette analyse devrait conduire à répondre aux deux dernières questions.

### **6.1. Catégories d'analyse a priori des actions des élèves**

Nous étendons aux *actions* des élèves la classification en termes d'action à **dominante chronogénétique, topogénétique et mésogénétique** issue du modèle développé par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni, 2000. Ce choix constitue une modification importante par rapport à ce modèle et repose sur l'hypothèse précédemment évoquée selon laquelle aussi dans le cas des interventions d'élèves, il y a une intentionnalité sous-jacente et une prise de responsabilité face aux connaissances à construire. Ce constat est autant plus vrai si l'on considère le cas spécifique de notre séquence expérimentale, où le contrat didactique introduit demande explicitement aux élèves de faire charge du processus de construction de la définition de fonction. En effet, nous considérons que cette intentionnalité sous-jacente peut être plus ou moins présente non pas seulement dans la mesure où une certaine dévolution est assurée mais aussi comme

conséquence d'un contrat didactique bien spécifique. Dans la classe où nous avons réalisé notre expérimentation, ce contrat est supposé être déjà assez stable, à l'issu d'une longue pratique des discussions collectives empruntée à la TMS.

Nous nous attendons ainsi à des interventions des élèves visant (volontairement) à modifier le milieu (actions à dominante mésogénétique), à l'introduire un objet nouveau de savoir (actions à dominante chronogénétique) ou à déterminer un déplacement de responsabilité face à la discussion collective en cours.

Par rapport à la méthodologie d'analyse des discussions collectives développée en particulier par Bartolini Bussi et ses collègues, nous regarderons quelles sont les *actions* significatives jouées par les élèves dans les différentes phases éventuelles, constitutives des discussions collectives. Nous prêterons aussi une grande attention aux phénomènes verbaux de *généralisation* et de *particularisation* car, comme Bartolini Bussi, nous les considérons cruciales dans le processus d'évolution des signifiés personnelles vers le signifié mathématique socialement partagé et cible.

## 7. Méthodologie d'analyse *a priori* de l'évolution des signes et signifiés

Comme déjà anticipé, un des objectifs de notre recherche est celui de modéliser le processus de médiation sémiotique, mis en place en particulier lors d'une *discussion mathématique*.

Pour cela faire, nous coderons toutes les interventions (et l'enseignante et des élèves) afin de tracer une analyse de l'évolution des signes et des signifiés mathématiques socialement partagés lors de ces discussions collectives.

Rappelons que cette analyse se fonde sur les hypothèses suivantes :

- le processus de construction des signifiés mathématiques culturels cible prendra son origine, d'une part, à partir des outils mobilisés spécifiquement par l'activité, en se reliant aux signes inhérents à cet artefact (les signes artefact) et, d'autre part, à partir de signes inhérents aux mathématiques introduits pour une grande partie par l'enseignante (les signes mathématiques).
- Les signifiés mathématiques personnels développés à partir de ces signes sont susceptibles d'évoluer et de se complexifier (se décontextualisant et se dépersonnalisant) grâce à d'autres activités avec l'artefact et, en particulier, lors du moment de la discussion collective.
- Une dialectique sans cesse, entre les signifiés mathématiques personnels et les signifiés mathématiques culturels, à l'occurrence cible, (les deux en voie de construction) caractérise ces discussions mathématiques.

Bien évidemment il s'agit d'hypothèses *a priori* assez larges qui dérivent directement de nos hypothèses de travail (cf. Chapitre 1, § 3.4 et 3.6.2), et que nous espérons pouvoir préciser *a posteriori*.

L'analyse concernera, donc, l'identification des signes verbaux que nous considérons non pas seulement révélateurs mais aussi constitutifs du processus de médiation sémiotique. Ceux signes seront de nature diverse. Il y aura des expressions très explicites, qui révéleront un degré très haut d'objectivation (au sens de Radford, 2000) des signifiés mathématiques associés, puis des énoncés ou des groupes d'énoncés dont la signification et les implications sémantiques seront plus ou moins implicites et subjectives. Dans ce deuxième cas, notre interprétation en tant que chercheurs sera plus importante.

Nous nous attendons, ainsi, par exemple, à des signes comme « variable indépendante », « variable dépendante », « paramètre », « domaine », « image », « graphe de fonction », etc. Nous appellerons ces signes, *signes-mathématiques*, puisque ils ont un référent privilégié dans le domaine des mathématiques.

Rappelons que pour pouvoir distinguer entre les signifiés associés à ce signe mathématique, élaborés par un élève particulier, et les signifiés auxquels l'institution concernée fait référence, nous avons introduit la caractérisation *personnels* versus *culturels* (cf. Chapitre 1, § 3.4.1). Nous avons vu lors du deuxième chapitre que, à la différence du *signifié mathématique personnel* qui peut être idiosyncrasique, le *signifié mathématique culturel*, auquel nous nous référons, est directement lié à la conception et aux objectifs de la séquence, il est partagé par une communauté de pratiques et peut être caractérisé à partir de considérations historico-épistémologiques.

Nous nous attendons aussi à que d'autres signes, élaborés ou construits à partir des artefacts, puissent se produire et se constituer comme nécessaires au processus de constructions des signifiés en cours. En particulier, lors de la première discussion collective, nous comptons d'observer la mise en être de signes verbaux directement issus de l'activité comme, par exemple, « le point A », « le point B », « le point P », « les point H », « la macro Effet1 », etc. Nous appellerons ces signes, *signes-artefact*.

En fin, nous nous attendons aussi à que les instruments de médiation sémiotique spécifiquement mobilisés par les activités avec Cabri, fonctionnent en tant que signes particuliers susceptibles d'engendrer, lors des discussions collectives consécutives, d'autres signes verbaux. Nous coderons alors toutes les références aux instruments de médiation sémiotique : ***Déplacement (direct et indirect), Trace1, Trace2, Trace3, Macro1, Macro2 et Macro3.***



## Deuxième partie : Méthodologie d'analyse *a posteriori* des discussions collectives

### 8. Méthodologie d'analyse *a posteriori* des actions de l'enseignante

Comme déjà vu (cf. Chapitre 5, § 3), par l'analyse *a priori* nous avons pu anticiper, décrire et interpréter des actions de l'enseignante susceptibles de s'actualiser lors des discussions collectives. Dans cette investigation, nous avons procédé selon deux niveaux ; un premier niveau, que nous avons appelé, **à dominante descriptive** et un deuxième niveau que nous avons qualifié **à dominante interprétative**. Le premier visait à fournir des catégories de description des *actions* de l'enseignante en restant le plus adhérent possible à l'observation des faits. Le deuxième portait sur des grandes catégories d'analyse didactique, issues et de la TdS et de la TMS et permettait un retour réflexif sur la description phénoménologique. Nous avons déjà observé dans la méthodologie d'analyse *a priori* (cf. Chapitre 5, § 3 et 4), que la dialectique entre ces deux niveaux n'était pas aussi simple que ça et que, souvent, le niveau à dominante descriptive, sous-entendait, déjà, en filigrane, un point de vue relevant d'une interprétation didactique.

Dans l'analyse *a posteriori*, d'une part, nous montrerons si et comment nous avons repris et actualisé les catégories anticipées *a priori* ; nous décrirons, en outre, comment elles sont apparues et si elles se sont éventuellement précisées ou modifiées d'avantage.

D'autre part, nous montrerons pourquoi nous avons ressenti de la nécessité d'introduire d'autres catégories : quelle a été le procédé suivi pour les concevoir, les identifier et, éventuellement, les classer.

#### 8.1. Méthodologie d'analyse *a posteriori* des actions de l'enseignante, premier niveau d'analyse (descriptif)

La première évolution des catégories *a priori*, introduite par l'analyse *a posteriori*, a été son enrichissement et sa précision.

Au fur et à mesure de la relecture des discussions, le premier noyau des *actions* fourni, d'une part par par Sensevy G., Mercier A. et Schubauer-Leoni M. L. (2000) et, d'autre part par Bartolini Bussi et al. (Bartolini Bussi, M. G. : 1998a ; Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. : 1995b), déjà présent à *a priori*, a été nourri (*a posteriori*), d'autres *actions* susceptibles de rendre mieux compte de l'action professorale, notamment dans sa conduite des discussions collectives en fonction de la médiation sémiotique.

On pourrait définir ce type d'analyse *a posteriori*, « **à dominante empirique** ». En fait, nous avons fait l'hypothèse que toute action accomplie par l'enseignante était en

quelque mesure « intentionnelle », c'est-à-dire, une conséquence, d'une part du processus de médiation sémiotique à mettre en œuvre, et, d'autre part, de son rôle institutionnel (définir, réguler, dévoluer et institutionnaliser). Pour cela toute intervention devait trouver, en principe, une interprétation ou, au moins, une description. A partir des transcriptions et des observations en classe, nous avons, ainsi, essayé de classer chacune de telles interventions, par les catégories déjà existantes. Quand cela n'était pas possible, nous en avons créé une nouvelle. Pour chaque nouvelle *action* saisie, nous avons ensuite cherché à identifier, là où il était possible, d'une part, les indicateurs linguistiques utilisés, d'autre part, les critères caractérisants notre choix.

Par ce procédé, nous avons ainsi obtenu une « liste » d'*actions* spécifiques du travail du professeur, bien plus riche et détaillée de celle du départ, que nous avons ensuite classifié selon les trois catégories déjà existantes *a priori* (actions à dominante topogénétique, chronogénétique et mésogénétique)<sup>56</sup>.

En outre, par ce même procédé, nous avons aussi pu obtenir des informations plus précises sur les indicateurs linguistiques à prendre en compte au moment de la constatation de l'effective actualisation, tant, des *actions* déjà prévues *a priori*, que, des *actions* identifiés *a posteriori*. Ceci a été le deuxième changement introduit par l'analyse *a posteriori*.

Par exemple, pour la catégorie d'**actions à dominante chronogénétique**, relative au niveau à dominante descriptive, nous avons repéré, entre autres, des « actions » nouvelles comme *Annonce du début du moment de discussion collective*, *Prise en compte différée*, *Ralentissement de la discussion*, *Interdiction temporaire d'anticiper*, *Interruption du cours de la discussion*, etc. Les indicateurs linguistiques pris en compte pour cette première classe d'actions ont été : l'emploi d'adverbes de temps comme « alors », « maintenant », « après » etc., les changements de l'objet de la discussion introduits explicitement par l'enseignant<sup>57</sup>, (souvent obtenus par la répétition de la dernière intervention d'élève ou par le rappel de la tâche), les « impératifs » comme « Attends » et les changements des temps verbaux. En particulier, l'attention prêtée aux temps verbaux utilisés et à leur changement (du présent au passé, etc.) s'est révélée utile pour surveiller les phénomènes liés à la gestion de la mémoire didactique de la classe.

Relativement aux actions à **dominante topogénétique**, nous avons repéré d'autres *actions* nouvelles comme *Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel*, *Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité*, *Elargissement dialogique*, etc. Les indicateurs linguistiques que nous avons utilisés pour identifier les mouvements topogénétiques ont été les pronoms personnels et les adjectifs possessifs employés (moi, tu, on, nous, vous, eux, notre, votre, etc.). Nous

<sup>56</sup> Nous ne donnerons pas ici la liste complète de toutes les catégories identifiées *a posteriori*, car ceci constitue déjà un résultat de notre analyse. Nous en citerons ici seulement quelques-unes dans le but d'illustrer la méthodologie adoptée.

<sup>57</sup> Les changements explicites et volontaires du sujet de la discussion ne sont pas une exclusivité de l'enseignante. Les élèves aussi participent à cette chronogénèse. En effet, nous leur attribuons une intentionnalité chronogénétique, chaque fois qu'ils interviennent pour poser, explicitement, à l'attention de toute la classe, un sujet nouveau de discussion qui permet la progression des savoirs. L'intentionnalité est présente ou moins, dans la mesure où il y a un certain contrat didactique établi. Dans ce cas-ci il est évident que pour les élèves, la responsabilité de décider la progression des savoirs est partagée. C'est à eux, pas seulement à l'enseignante, de reprendre et revisiter toute l'activité de Cabri pour essayer d'en sortir les signifiés mathématiques.

Ces mouvements chronogénétiques sont, en général, accompagnés par des phénomènes de résonance de l'enseignante qui favorise ou défavorise le développement de la discussion dans la direction ouverte par l'intervention de l'élève.

avons, en outre, observé les changements du sujet « actant » dans le discours. Telles analyses nous ont servi aussi pour surveiller le processus de construction intersubjective des signes et des signifiés relatifs.

En fin, parmi les nouvelles actions à **dominante mésogénétique** que nous avons pu repérer, nous retrouvons, par exemple, *Demande de compréhension*, *Focalisation sur un trait pertinent de l'activité*, *Institutionnalisation d'un terme mathématique*, etc. Pour cette catégorie, nous ne disposons pas d'indicateurs linguistiques particuliers : c'est par une analyse de la sémantique de la discussion, du discours et des gestes de l'enseignante (du fait qu'elle évoquait ou non l'environnement, qu'elle y faisait ou non directement recours, etc.) que nous avons pu repérer ces actions nouvelles.

Notre analyse *a posteriori* a visé aussi revenir sur d'autres catégories déjà attendues *a priori* (cf. Chapitre 5, § 3). Ainsi, par rapport à l'analyse des discussions collectives issue de la TMS nous avons pu observer comment, par exemple, les actions de généralisation/spécification pouvaient être identifiées et caractérisées.

## 8.2. Méthodologie d'analyse *a posteriori* des actions de l'enseignante, deuxième niveau d'analyse (interprétatif)

Comme pour niveau descriptif, au niveau interprétatif, l'analyse *a posteriori* a comporté l'enrichissement et la précision des catégories prévues *a priori*, la création des catégories nouvelles et la mise en évidence des indicateurs linguistiques utiles à leur identification.

Ainsi, lors de la relecture interprétative des actions de l'enseignante, nous avons considéré nécessaire d'introduire une sous-classification et de distinguer, à l'intérieur de la catégorie des actions à **dominante mésogénétique**, les « **actions propres au travail de sémosis** » (d'interprétation) des « **actions génériques de l'action professorale** ».

La raison de l'extension de la classification proposée par Sensevy G., Mercier A. et Schubauer-Leoni M. L. et de la création d'une nouvelle sous-classification, (**actions à dominante mésogénétique propres au travail de « sémosis »**) est due aux objectifs spécifiques de cette thèse. En effet, toute la séquence a été conçue en fonction du processus de médiation sémiotique visé. Pour cela, à l'intérieur des actions propres à toute dynamique d'enseignement – apprentissage (actions à dominante mésogénétique), nous avons voulu identifier les actions qui étaient spécifiques du travail de construction et de réélaboration de signes / signifiés (sémosis).

Pour ces mêmes objectifs, nous avons aussi essayé de regarder comment les autres actions génériques de l'action professorale se sont positionnées en fonction de ce même processus de médiation sémiotique.

Parmi les actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis nous avons identifié, par exemple, les catégories : *Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné*, *Demande d'interprétation*, *Référence au travail de sémosis à faire (directe ou indirecte)*, etc. Les indicateurs linguistiques pris en compte pour ce type d'actions ont été les expressions ou les mots prononcés par l'enseignante qui indiquaient ou relevaient d'un travail de « sémosis » (comme « voir », au sens « d'interpréter », ou « idée »). En outre nous avons considéré toutes les références explicites, faites par l'enseignante elle-même, au processus de

sémiosis en cours, aux signifiés différents qui étaient au cours de construction et objets déclarés de la discussion.

Par exemple, considérons le début de la première discussion. L'enseignante dit (P1 : D1.txt (101 :103))<sup>58</sup> :

30.	<i>P : Ok, alors, arrêtons-nous là... Ici il y a quelque chose... c'est-à-dire, si je devrais voir cet « Effet1 »...qu'est-ce que c'est, selon vous la Macro « Effet1 » ?</i>	<i>P: Ok, allora, fermiamoci qui... Qui c'è un qualcosa... cioè se io dovessi vedere questo « Effetto1 » ... che cos'è secondo voi la Macro « Effetto1 » ?</i>
-----	---	--

Le verbe « voir » trouve ici un emploi très particulier : il fait visiblement référence au travail de *sémiosis en cours*. Nous avons alors codé cette intervention pas seulement comme *Demande de reconstruction coopérative et sélective* (action à dominante mésogénétique, générique de l'action professorale) mais aussi comme *Référence directe au travail de sémiotique à faire* et *Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné*.

En revanche, parmi les actions à dominante mésogénétique génériques de l'action professorale ayant un rôle spécifique dans le processus de *sémiosis*, nous avons identifié et retenu, par exemple, l'action de *focalisation* sur un trait pertinent de l'activité. En effet, nous avons observé que c'est souvent au moyen de cette *action* que l'enseignante isole et met en évidence les aspects particuliers de l'activité susceptibles d'être interprétés comme signifiés mathématiques.

Par rapport à d'autres notions didactiques issues de la TdS, l'analyse *a posteriori* a permis d'observer, d'une part, comment les phénomènes de *changement chronogénétique*, de *mouvement topogénétique*, de *fusion topogénétique d'intervention mésogénétique*, de *résonance* et de *contrat didactique* se sont effectivement actualisées. D'autre part, l'actualisation constatée nous a conduit à repenser et, dans certains cas, à modifier ces mêmes catégories d'analyse didactique. Ainsi, par exemple, dans le but de surveiller les déplacements topogénétiques, que nous considérons cruciales dans la construction intersubjective des signes et des signifiés relatifs, nous avons observé, en particulier, les changements du sujet « actant ». Cette analyse nous a amené à enrichir notre liste d'action à dominante topogénétique en introduisant d'autres actions comme celle de *Réduction topogénétique* ou de *Déplacement topogénétique vers un élève ou un binôme particulier*. Cette analyse nous a conduit aussi à repenser les catégories didactiques du *Mouvement topogénétique ascendant* et *descendant*. En effet, ces deux types de modélisation ne correspondent pas complètement à notre point de vue. Les mouvements topogénétiques sont, en effet, perçus par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) en termes « verticaux ». Ils ne prennent en compte que la dimension Enseignant versus Classe/Elève, sans besoin de distinguer entre Classe ou élève particulier. Or, nous sommes intéressées à toute type de dynamique de partage de responsabilité et de construction coopérative des signes. Notre analyse est en fait menée par rapport aux différents signifiés en cours d'élaboration (signifiés mathématiques personnels, signifiés mathématiques culturels, signifié mathématiques socialement partagés) outre que à la gestion opérée par l'enseignante. Notre point de vue est donc plutôt « horizontal » ou « relatif ». Il est

<sup>58</sup> Lors de cette thèse, l'écriture du type : (D1.txt (101 :103)), signifie que nous faisons référence au document D1.txt, tel comme il est affiché par Atlas.ti le CD-rom ci-joint. En particulier, les nombre (101 :103) signifient que nous sommes en train d'en reporter les lignes 101, 102 et 103.

dans ce sens-ci que nous avons réinterprété la classification *descendant* versus *ascendant* proposée par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000). Nous avons considéré respectivement comme *ascendant* toute mouvement topogénétique de « mise à distance » de la position du professeur par rapport à celle d'un élève (ou d'un binôme ou de la classe) ; comme *descendant*, le contraire. En outre, il nous est apparu nécessaire d'intégrer ce type de classification en introduisant aussi la distinction entre *Déplacement topogénétique vers la classe*, *Déplacement topogénétique vers un binôme* et *Déplacement topogénétique vers élève particulier*, et la distinction entre *Réduction topogénétique* (qui correspond à la position que l'enseignante recouvre quand elle parle en tant que classe en employant le « nous ») et *Fusion topogénétique*.

En ce qui concerne les outils d'analyse *a priori* issus de la TMS, grâce à l'analyse *a posteriori*, nous avons pu mieux préciser et décrire le rôle, dans le processus de médiation sémiotique, des actions de *paraphrase*, de *reflet*, de *généralisation* et de *particularisation*.

### 8.3. Exemple d'analyse des actions de l'enseignante : premier niveau d'analyse (descriptif) versus deuxième niveau d'analyse (interprétatif)

Pour mieux comprendre la façon dont nous avons procédé dans les différents niveaux d'analyse, considérons le début de la première discussion :

1.	<i>P : Alors, tout le monde est-il arrivé jusqu'aux questions des premières feuilles ? Car maintenant on discute un petit moment ensemble. Arrivons à certaines conclusions, puis si nous n'avons pas terminé...</i>	<i>P : Allora, tutti siamo arrivati fino alle domande dei primi fogli ? Perché ora si fa un attimo di discussione insieme. Arriviamo a certe conclusioni, poi se non abbiamo finito ...</i>
2.	<i>CRISTINA : Je n'ai pas encore compris à quoi il sert tout cela pour les fonctions.</i>	<i>CRISTINA : Non ho ancora capito a cosa serve tutto questo per le funzioni.</i>
3.	<i>P : Alors, très bien, exact. La question de Cristina est très intéressante, car elle dit « je n'ai pas encore compris, je n'ai pas encore compris à quoi sert tout cela pour les fonctions ». Au contraire, on verra, en revoyant tout... Avant tout, avons-nous une idée de qu'est une fonction ? Car ce devrait être la première question...</i>	<i>P : Allora benissimo, esatto. La domanda di Cristina è molto interessante, perché lei dice « non ho ancora capito, non ho ancora capito, cosa serve tutto questo per le funzioni ». E invece vedremo, ripercorrendo tutto... Prima di tutto, abbiamo noi un'idea di che cosa è una funzione ? Perché questa dovrebbe essere la prima domanda...</i>
5.	<i>IGOR : On l'a fait en physique !</i>	<i>IGOR : Si è fatto a fisica !</i>
6.	<i>CRISTINA : Non, c'est que en physique...</i>	<i>CRISTINA : No, è che a fisica...</i>
7.	<i>P : Ah, petis malins</i>	<i>P : Ah, ladroni, ladroni!</i>
8.	<i>IGOR : C'est-à-dire, en réalité nous avons fait les fonctions de la droite!</i>	<i>IGOR : Cioè in realtà abbiamo fatto le funzioni della retta !</i>
9.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que en changeant un paramètre, il changeait tout.</i>	<i>CRISTINA : Cioè che cambiando un parametro cambiava tutto.</i>
10.	<i>MARCO : Peut-être que... c'est-à-dire que... H bouge en fonction de A, B et P.</i>	<i>MARCO : Può darsi che... cioè H si muova in funzione di A, B e P.</i>
11.	<i>P : Alors, lui il dit : « H bouge en fonction de A, B et P »...</i>	<i>P : Allora, lui dice : « H si muove in funzione di A, B e P »....</i>
12.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire d'une à chaque fois !</i>	<i>CRISTINA : Cioè di una alla volta!</i>

Dans un premier temps (premier niveau d'analyse), à l'intervention de l'enseignante (1) nous avons associé l'action *Annonce du début du moment de discussion collective* ; à la première partie de l'intervention (3) les actions *Reflet de la question pertinente d'élève*, à la deuxième partie de l'intervention (3) l'action

*Demande d'explicitation des signifiés personnels disponibles*, et, en fin, à l'intervention (11), l'action *Reffet de l'intervention d'élève*.

Dans un deuxième temps (deuxième niveau d'analyse), nous avons interprété l'intervention (3) comme *Référence indirecte au travail de sémiotique à faire*, *Etablissement d'une règle implicite du contrat* et *Résonance forte* (ayant pour objectif d'introduire l'activité de discussion, avec l'explicitation de son but). En revanche, étant donné l'emphase limitée réservée par l'enseignante à la l'intervention d'élève (10), nous avons codé l'intervention (11) comme *Résonance faible*. L'attribution de ces deux types de *Résonances* e été reliée au *motif* global de l'activité qui, pour l'enseignante est le processus de médiation sémiotique à mettre en œuvre.

#### 8.4. Analyse dans Atlas.ti

L'analyse des discussions a été conduite à l'aide du logiciel AtlasTI.

Ce logiciel permet une analyse qualitative de grands corps des signaux textuels, graphiques, audio et vidéo. En particulier, nous l'avons utilisé pour analyser deux discussions collectives, sous forme de textes.

Il se base sur un principe assez simple : une fois que l'utilisateur a créé un code et a établi l'association de ce code à une partie précise du texte, appelée « citation », le logiciel engendre automatiquement le code libellé dans la colonne à droite de la feuille de travail de AtlasTi. Une parenthèse carrée est ajoutée pour indiquer la citation à laquelle ce code se réfère. Si à une même citation l'utilisateur associe plusieurs codes, ces codes différents sont rajoutés l'un après l'autre et ordonnés de façon à minimiser l'espace occupé. Il n'y donc pas d'autres critères de rangement, comme par exemple le critère chronologique ou celui de la densité. Par rapport à une même citation, le premier code associé, est représenté en rouge, le deuxième en bleu, le troisième en vert, le quatrième en noir, etc. Cette organisation spatiale ne peut pas être contrôlée par l'utilisateur et n'a donc pas aucune relation avec la façon dont l'utilisateur a procédé dans son analyse. En bref, donc, les couleurs différentes ou les colonnes de codes différentes n'ont aucun lien avec les niveaux de granularité de notre analyse.

Ensuite, ces codes peuvent être regroupées en familles et en super-familles, à partir desquelles il est possible de faire des recherches (« queries »), de mener des analyses croisées, de construire des réseaux sémiotiques, etc. Par exemple, en choisissant un code particulier, il est possible de parcourir tout le texte pour voir où ce code apparaît et obtenir toutes les citations relevant de ce code. Il est possible ensuite de combiner cette recherche avec celle d'un autre code, ou d'une autre famille de codes. L'utilisateur peut aussi décider, parmi les différents familles de codes, de filtrer certaines pour en voir seulement certaines d'autres.

Le lecteur pourra trouver en annexe le Cdrom avec nos analyses des discussions collectives, menées dans Atlas.ti.

### 9. Méthodologie d'analyse *a posteriori* des actions des élèves lors des discussions collectives.

Notre méthodologie d'analyse *a posteriori* a consisté à relire, à partir des questions de recherche posées et des catégories d'analyse *a priori*, les transcriptions des discussions collectives. D'une part, cette méthode nous a permis d'observer que pas tout se laissait interpréter par les outils prévus *a priori* ; ce constat nous a conduit à en créer d'autres.

D'autre part, ce type de relecture, nous a amené à préciser d'avantage les catégories d'analyse déjà présentes *a priori* ; dans certains cas nous avons été conduit à les élargir, d'autres à les modifier.

Par exemple, c'est à la suite de la relecture de la première discussion collective que notre décision *a priori* d'étendre aux élèves la classification proposée par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) au regard des enseignant, s'est précisée et éclairée. L'analyse des actions du professeur nous a fourni alors d'autres éléments de modélisation.

Ainsi c'est toujours *a posteriori* que nous avons pu approfondir le partage de la responsabilité, entre élèves et enseignante, face au projet d'enseignement-apprentissage. En particulier, nous avons pu détecter des actions plus révélatrices d'autres d'une prise de responsabilité de la part des élèves. Nous avons considéré ces actions comme des actions à **dominante topogénétique**.

Nous avons qualifié « **d'actions à dominante chronogénétique** », toutes les interventions qui ouvraient volontairement à l'introduction potentielle d'un objet (nouveau) de savoir. D'une part, ces mouvements, de la part des élèves, ont été identifiés par les actions correspondantes de résonance de l'enseignante. Celle-ci a montré, en première, de s'apercevoir de cette potentialité et, dans certains cas, a amplifié l'intervention, dans d'autres, a clos et résolu rapidement l'épisode.

D'autre part, c'est la concordance entre l'intentionnalité déclarée par les élèves eux-mêmes et l'effet produit, qui nous a amené à les considérer comme délibérées et non comme accidentelles.

Par exemple, nous avons qualifié d'**action à dominante chronogénétique** l'intervention 311 de Cristina :

(P1 : D1.txt - (891 :892 :))

311.	CRISTINA : Mais avant cette question-ci, il y en avait une autre ! Il n'y avait pas celle sur comment bouger P pour que H reste immobile ?	CRISTINA : Ma prima di questa ce n'era un'altra ! Non c'era quella di come devo muovere P perché H resti fermo ?
------	--	--

En fait, cette action ouvre la classe au problème de comment bouger P afin que H ne bouge pas et amène successivement l'enseignante même et ses compagnons à développer la question des conditions pour lesquelles H n'existe pas.

Nous avons identifié et défini comme « **actions à dominante topogénétique** » toutes les intervention des élèves qui montraient une prise volontaire de responsabilité, comme, par exemple :

(D1.txt - (793 : 803))

278.	CRISTINA : Maintenant, (à IGOR) tu fais un autre point.	CRISTINA : Ora, (a Igor) fai un altro punto.
279.	P : Maintenant, tu fais un autre point, que nous allons appeler ?	P : Ora fai un altro punto, che lo chiamiamo ?
280.	CRISTINA : C.	CRISTINA : C.
281.	P : Et tu appliques « Effet1 » à H, P, C ?	P : E poi applichi « Effetto 1 » ad H, P, C ?
282.	IGOR : Han, non, alors la notre était bien différente !	IGOR : Han, no, allora la nostra era ben diversa !
283.	CRISTINA : Alors, bouge maintenant, par exemple B.	CRISTINA : Allora ora muovi, per esempio B.

Dans ce petit extrait, Cristina partage complètement avec l'enseignante, la responsabilité de guider Igor dans la reproduction, au rétroprojecteur, du phénomène qu'elle a observé. En réalité, Igor pense qu'il s'agit simplement du fait qu'elle, comme d'ailleurs lui et Filippo aussi ont fait, a changé l'ordre d'application de la macro « Effet1 ». Au contraire, Cristina est en train de se référer à un phénomène bien différent : elle a appliqué deux fois la macro « Effet1 » en utilisant la deuxième fois comme variable indépendante le point H. La classe est donc face à une composition de fonction et Cristina veut bien montrer aux autres qu'il s'agit d'une situation nouvelle.

Les indicateurs utilisés pour repérer ce type d'actions (valables tant pour les actions des élèves comme pour celles de l'enseignante) ont été les changements du sujet actant (c'est-à-dire les prises de parole) visant à donner une explication à un autre élève, à reconstruire sélectivement l'activité ou à guider l'exécution au rétroprojecteur d'un autre élève.

En fin nous avons considéré comme « **actions à dominante mésogénétique** », toutes les actions des élèves qui visaient à modifier volontairement le milieu de la discussion collective. Comme pour l'analyse des actions de l'enseignante, c'est par une analyse de la sémantique de discussion, que nous avons pu repérer ce type d'actions. Ainsi, par exemple, nous avons considéré comme **actions à dominante mésogénétique**, toutes les interventions qui avaient comme objectif la généralisation de ce qui était dit, la mise en évidence d'autres problèmes ou questions, l'explicitation d'une règle du contrat, etc.

Par exemple, notons l'intervention de Igor :

(D1.txt - (1 :146)).

44.	IGOR : Mais faut-il démontrer que H bouge sur cette droite-ci ?	IGOR : Ma bisognerebbe dimostrarlo che H si muove su questa retta ?
-----	---	---

Ici, IGOR change délibérément l'objet de la discussion et pose un problème de légitimité. Cette action a un effet mésogénétique puisqu'elle conduit délibérément à l'explicitation et à l'établissement d'une règle du contrat qui a un effet non seulement sur le milieu de la discussion mais aussi sur celui de la suite de la séquence expérimentale. La question posée par Igor surgit, peut-être, du fait que l'enseignante avait corrigé l'élève en spécifiant sur quelle droite H bouge. Plus probablement ce problème a ses racines dans une règle, déjà établie ailleurs, propre au contrat implicite de la classe, qui exige que : « Tout ce qui a une évidence perceptive doit être démontré ». Igor demande alors ici de valider et d'étendre cette règle à l'activité de discussion collective.

Pour ce qui concerne les outils théoriques fournis *a priori* par la TMS, grâce à la relecture des transcriptions, là aussi, nous avons pu préciser et affiner l'analyse. En particulier, comme pour les actions de l'enseignante à dominante mésogénétique, nous avons voulu distinguer, à l'intérieur des « **actions à dominante mésogénétique** », les **actions spécifiques au processus de sémiotique** et les **actions qui, même en étant génériques du travail d'élève, jouent un rôle cruciale dans ce même processus**. Nous avons, ainsi, observé et noté, par exemple, d'une part, les *Demandes d'interprétation* et les *Questions de sémiotique potentielle*, d'autre part les *Généralisations* introduites par les élèves eux-mêmes.



Enfin, il faut enfin remarquer que ce que nous avons développé n'est pas seulement une méthodologie d'analyse *a posteriori* des discussions collectives mais constitue, en même temps, un résultat de cette thèse. En effet, l'identification et la classification des certaines *actions* des élèves nous a permis de mieux comprendre et modéliser le processus de médiation sémiotique en cours. Surtout il nous a montré que ce processus est fondé ne pas seulement sur des *actions* spécifiques de l'enseignante mais qu'il dépend aussi de l'engagement des élèves et, pour cela, de la dévolution et du contrat didactique assurés dans la classe.

## 10. Méthodologie d'analyse *a posteriori* de l'évolution des signes

Dans l'analyse du processus de sémosis, nous observons la mise en jeu de signes verbaux de nature différente. D'une part, nous constatons l'élaboration de signes associés à des mots ou à des expressions bien précises ; d'autre part, nous assistons à la génération de parties du discours, qui peuvent être considérés comme des signes plus complexes, obtenus par l'articulation de divers signes simples. Il s'agit donc de prendre en compte une structure récursive, qui se développe selon une sorte de mouvement à spirale illimitée, que Peirce définit, justement, comme un processus de sémosis illimité (cf. Chapitre 1, § 5.1.5). Comme nous le rappelle Marty (Marty, 1992), ce processus est inférenciel et amène à une croissance en complexité, qui selon nous est difficile à maîtriser.

Pour cette raison nous avons décidé de distinguer seulement deux plans d'analyse : celui des signes « simples » et celui des signes « complexes ».

Les signes « simples » sont facilement identifiables par des *représentamens* de type quasiment atomique (des mots ou des formulations spécifiques).

En revanche, les signes « complexes » sont beaucoup plus éphémères et font appel à des relations entre familles de signes relativement plus « simples ». Par exemple, nous considérerons l'expression « l'animal à quatre pâtes, appelé le meilleur ami de l'homme » comme un signe « complexe », qui renvoie au même objet que le signe « simple », « chien », et qui se fonde sur des signes « simples » comme « animal », « pâte », « ami », « appeler » etc. Nous pourrions dire qu'ils constituent des *interprétants* plus élaborés de ces *représentamens* plus simples et qu'ils sont associés à des groupes d'énoncés, qui, même quand ils portent, de façon « presque identique », sur un même objet, ne coïncident jamais totalement.

Parmi les énoncés associés à ces signes « complexes », nous avons identifié deux typologies différentes fondamentales. Puisque certains signes complexes focalisaient plutôt sur un seul signe simple, d'autres portaient davantage sur le lien entre deux signes simples différents, le premier type d'énoncés a été associé à ce que nous avons appelé les **définitions** et les **caractérisations** ; le deuxième type, aux **interprétations** et aux **instanciations**.

Enfin, nous voulons souligner que nous inférons les signifiés potentiels associés à ces signes grâce à des observables que sont les actions et les formulations. En termes peirciens, ces dernières sont les différents *représentamens* auxquels nous avons accès. Cependant, les interprétants finaux ne sont pas accessibles et sont toujours issus de notre interprétation.

## 10.1. Premier plan d'analyse : les signes « simples »

Les catégories de **signes- mathématiques** et de **signes- artefact** sont les seules catégories de signes « simples » dont nous disposons *a priori*. L'analyse *a posteriori* a, cependant, permis de les enrichir et mieux préciser leur variété et leur fonctionnalité.

Les autres catégories que nous présenterons dès maintenant ont été repérées, elles-aussi, *a posteriori* à partir de la relecture de la première discussion collective et constituent à la fois une partie de la méthodologie de cette analyse et un résultat de cette méthodologie.

Toutes ces catégories d'analyse ont constitué ensuite la méthodologie d'analyse *a priori* pour les autres discussions collectives et les rapports individuels. Cependant, dans ce manuscrit, nous présenterons seulement l'analyse de deux discussions collectives : la première et la treizième discussion collective.

Les différents signes verbaux « simples » observés, correspondent à des étapes différentes du processus de sémiotique engendré par l'activité spécifique avec les outils de Cabri. Nous pouvons observer, d'une part, des signes issus et élaborés directement à partir de l'utilisation des artefacts, d'autre part, des signes qui, grâce à leur polysémie, jouent un rôle charnière entre le champ sémantique de l'activité et celui (en voie de construction) des mathématiques et, enfin des signes qui appartiennent de façon privilégiée à la culture mathématique. Nous avons nommé ces derniers **signes-mathématiques cible**, les deux autres, respectivement, ont été appelés **signes-artefact** et **signes-pivot**.

### 10.1.1. Signes-artefact

Parmi les **signes-artefact** attendus *a priori*, figuraient tous les signes qui renvoient directement aux éléments de l'activité dans Cabri comme les points « A », « B », « P » et « H », la macro « Effet 1 », etc. Cependant, nous en avons aussi identifié d'autres. Cela a conduit à mieux clarifier leur nature et fonction.

Les **signes-artefact** sont utilisés pour identifier ou focaliser sur un aspect particulier à la fois de l'artefact et de l'activité avec ce dernier, susceptible d'être interprété en termes mathématiques. Ils sont cruciaux dans le processus de médiation sémiotique (MS) car ils interviennent directement dans l'évolution des signifiés. Ils sont destinés à coexister avec les **signes mathématiques -cible** (issus directement des mathématiques) et amenés à disparaître au fur et à mesure que les signes mathématiques mêmes se rendent autonomes de l'artefact. Ils sont les mots ou les expressions d'où le processus de MS prend son origine et, pour cela, ils sont, d'une certaine manière, « opposés » aux **signes mathématiques -cibles**, ces derniers étant les points d'arrivée du même processus. Ils interviennent, souvent, pour constituer le « sens situé » à attribuer aux **signes-pivot**, c'est-à-dire, ils sont constitutifs du signifié mathématique personnel en fonction du contexte. En effet, ils constituent l'ancrage, dans la phénoménologie de l'artefact (et de l'activité), du sens mathématique et ils fonctionnent comme des émergences linguistiques du potentiel sémiotique<sup>59</sup> de l'activité, actualisé par la discussion. L'action dans l'artefact ne suffit pas pour actualiser ce potentiel ; c'est justement la discussion qui peut (éventuellement) le réaliser. C'est toujours par d'autres moments de la discussion collective, que ces signes disparaîtront ensuite, car ils seront branchés sur des **signes-pivot** et à partir de cela sur des **signes mathématiques -cible**.

<sup>59</sup> Le potentiel sémiotique est la capacité non nécessairement exprimée d'un signe de renvoyer à un objet mathématique donné.

Ainsi, par exemple, lors de la citation (P1 : D1.txt - (128 :129)) suivante le mot « bouger » est utilisé trois fois. Nous avons codé avec « bouger (Var Indép) », sa première occurrence, avec « bouger (Var Dép) » et « bouger (Paramètre) », respectivement la deuxième et la troisième fois :

40.	<i>IGOR : Il fallait dire... d'abord si je bougeais le point A, les points qui bougeaient et les points qui ne bougeaient pas.</i>	<i>IGOR : Bisognava dire... prima se spostavo il punto A i punti che si muovevano e i punti che non si muovevano.</i>
-----	--	---

Etant donnés les critères cités ci-dessus, nous avons considéré le mot bouger comme un **signe-artefact** car :

- il est issu directement de la reconstruction de l'activité avec l'artefact et il est effectivement prononcé ;
- il constitue un ancrage dans la phénoménologie de l'artefact du signifié mathématique de fonction comme co-variation.

Ainsi nous avons noté, à l'extérieur des parenthèses le mot *bouger*, sur lequel ce **signe -artefact** repose. Entre parenthèses, s'il était identifiable, nous avons écrit, le signifié mathématique potentiel auquel ce mot peut renvoyer, si certaines conditions sont remplies lors de la discussion collective. Pour les mêmes critères, lors de sa deuxième et troisième occurrence, nous avons respectivement codé « bouger (Var Dép) » et « bouger (Paramètre) ».

L'attribution du signifié potentiel essaie de tenir compte non seulement de l'usage d'un *représentamen* particulier, comme « bouger », mais aussi de son *interprétant* potentiel, suite à son emploi dans une partie donnée du discours. C'est pour cela que nous avons voulu parler de signe et non pas seulement de signifiant.

De la même façon, nous avons ainsi repéré d'autres **signes-artefact** comme : « au hasard », « chose magique », « bouger (Domaine) », « bouger (Image) », « rester/être (Image) », etc.

### 10.1.2. Signes-pivot

Les **signes-pivot** sont fortement polysémiques (c'est-à-dire ils ont plusieurs acceptions et signifiés, en particulier dans le contexte de la vie ordinaire ou de l'activité avec l'artefact, et dans les mathématiques). Pour cela, ils sont susceptibles de permettre le passage d'un contexte à l'autre et de jouer ainsi un rôle « pivot » dans la construction des signifiés mathématiques personnels et puis socialement partagés.

La polysémie de ces signes les rend potentiellement « pivot », mais un tel rôle s'actualise seulement en conséquence d'un usage spécifique, à la charge de l'enseignante. Pour cette raison, non tous les signes polysémiques repérés lors de l'analyse ont été classifiés de **signes-pivot**.

C'est à l'issue de la relecture (*a posteriori*) des discussions collectives que nous avons pu en identifier quelques-uns, comme : « dépendre de » ; « bouger en fonction de » ; « être en fonction de » ; « indépendante » ; « résultat de » ; « varier », « obtenir », « objet », etc.

Par exemple, dans l'intervention suivante, en observant l'usage du mot « objet », nous lui avons reconnu le rôle de **signe-pivot** :

259.	<p><i>P : ... Mais, moi, je suis en train de bouger seulement P, tandis que A et B je les laisse fixes... Voilà alors ces objets-là qui sont quand-même des variables indépendantes, mais que je fixe momentanément, car je les laisse fixes là-bas, en Mathématiques, ils prennent un nom particulier, ils sont appelés paramètres. Car, par exemple, je peux changer leur position, les garder fixes quelque part ailleurs, peut-être H va se retrouver quelque part ailleurs, mais, en bougeant P, l'image<sup>60</sup> va rester toujours comme elle est.</i></p>	<p><i>P : ... Però io sto movendo solo P e A e B li tengo fissi... Ecco allora questi oggetti che sono comunque delle variabili indipendenti, ma che momentaneamente fisso, perché li tengo li fissi in Matematica prendono un nome particolare, vengono chiamati parametri. Perché io, per esempio, posso cambiare la loro posizione, mantenerli fissi da un'altra parte, mi cambia dove va a finire H, però, al muovere di P, rimarrà sempre l'immagine com'è.</i></p>
------	---	--

En fait, l'enseignante s'appuie sur le mot *objet* pour introduire le signifié de paramètre. Les *objets*, auxquels elle se réfère, peuvent être à la fois, les objets « concrets » de Cabri et les objets en mathématiques.

Nous remarquons dans ce cas, que ce mot potentiellement polysémique est effectivement utilisé comme **signe -pivot** pour introduire un signifié dont le champ sémantique de pertinence n'est se réduit pas au seul contexte de l'artefact.

Ou, encore, lors de l'intervention de l'enseignante suivante, observons l'utilisation du verbe « dépendre » (P1 : D1.txt - (470 :473)) comme **signe-pivot** :

159.	<p><i>P: Voici, alors le discours est que, en général, dans une fonction, les points d'où je pars sont appelés variables indépendantes, car je peux les bouger où je veux, ce que j'obtiens est appelé variable dépendante car elle dépend de qui ?</i></p>	<p><i>P: Ecco, allora il discorso è che in generale in una funzione, i punti da cui parto, vengono chiamati variabili indipendenti, perché io li posso muovere dove mi pare mentre quello che ottengo viene chiamata variabile dipendente perché dipende da chi ?</i></p>
------	---	---

A nouveau, selon les critères cités ci-dessus, notons que :

- le verbe « dépendre » est potentiellement polysémique, car il peut avoir un sens et dans le langage courant et dans les mathématiques ;
- dans ce cas, l'enseignante l'utilise effectivement comme mot « pivot » puisque, quand elle pose la question, elle joue sur la dépendance causale, observée par les élèves lors la reconstruction coopérative de l'activité avec l'artefact, pour introduire la dépendance fonctionnelle.

## 10.2. Deuxième plan d'analyse : les signes « complexes »

Le deuxième plan d'analyse a pour objectif l'identification d'un complexe de signes particuliers, qu'on peut ramener à la génération et à la mise en relation de signes divers mais de manière moins explicite.

Dans la progression des discussions collectives, nous avons, en fait, observé différents niveaux d'objectivation (Radford, 2000) des objets mathématiques en cours de construction. Ils émergent de l'interaction de plusieurs signes articulés dans un ou plusieurs énoncés. Nous avons ainsi voulu classer ces énoncés ou, de façon plus générale ces parties du discours, (produits par l'enseignante et par l'élève) selon les catégories : **définitions, caractérisations, interprétations et instanciations.**

Cette classification nous a permis de relier, par exemple, un énoncé au signifié de variable, tout en nuancant par rapport à son degré d'explicitation. En effet, affirmer,

<sup>60</sup> Avec ce qui a été dit auparavant, on comprend qu'il s'agit de l'image globale de la fonction.

par exemple, qu'il y a eu de la part de l'enseignante la production d'une caractérisation n'a pas la même force, la même « évidence expérimentale », qu'attester la formulation d'une définition. La première est beaucoup plus floue et relève beaucoup plus de notre propre interprétation. Cependant caractériser plus ou moins implicitement un « objet » est aussi crucial, dans la mise en place d'un processus de sémiotique, que lui reconnaître une existence certaine, une objectivation, par l'existence d'une définition.

Etant donné les changements perpétuels de signes « complexes » lors d'une discussion collective et notre exigence de pouvoir en modéliser l'évolution, nous avons associé un même code à tous les signes qui portaient quasiment sur le même signifié par un même type de *représentamen*. Ainsi par exemple, nous avons appelé par le même code *Déf(Mouvement)var*, toutes les définitions qui concernaient le signifié de « variable » et qui avaient été formulées en utilisant des signes appartenant au même champ sémantique du mouvement (comme *se déplacer*, *se promener*, *bouger*, etc). Ainsi, selon toujours un critère de voisinage, nous avons essayé de repérer des sortes « d'invariants sémantiques » : tous les signes très proches, même si strictement parlant, ils étaient différents (puisqu'ils avaient été introduits par des énoncés divers), ont été regroupés et identifiés par le même code.

Nous ne sommes pas des linguistes et nous sommes bien conscient que cette méthode d'analyse risque d'écraser certaines distinctions qu'une analyse discursive fine pourrait en revanche mettre bien en évidence. En fait, nous mettrons derrière le même code des signes qui strictement parlant ne sont pas identiques, même s'ils semblent recouvrir le même champ sémantique. Nous chercherons à expliciter les critères de cette « opération de réduction au quotient » mais il faudra, néanmoins, nous faire confiance ! D'ailleurs, cette démarche, qui considère deux objets différents comme « identiques », est propre à tout travail de modélisation. Sinon on ne diminue pas la complexité du réel parce qu'on le décrit exactement.

Nous présentons maintenant ce que nous entendons par **définition**, **caractérisation**, **interprétation** et **instanciation** ; nous illustrerons les différences par quelque exemple, mais nous ne rentrerons pas dans les détails, puisque cela constitue une partie des résultats et sera discuté lors du prochain chapitre.

### 10.2.1. Définitions

Les **définitions** portent sur un **signe-mathématique cible**. Elles visent explicitement et intentionnellement à expliciter, préciser, délimiter le signifié proto ou para mathématique d'un objet en jeu. Il ne s'agit pas de définitions au sens mathématique du terme. Dans la plupart des cas, nous pouvons en fait qualifier de tels énoncés comme « métaphoriques » ou « quasi- métaphorique », car il s'agit d'énoncés dans lesquels le locuteur utilise des *représentamens*, associables à des champs sémantiques différents de ceux auquel l'objet, sur lequel la définition porte, appartient principalement.

Les définitions permettent de « mettre un mot » sur un objet qui était jusqu'alors inconnu ou peu connu. Elles participent, donc, partiellement, à la fonction de l'objectiver : en fournissant un signe, elles appellent à l'existence un « objet » qui ne l'était pas, et qui d'ailleurs pourrait rester comme tel, pour encore de nombreux élèves.

Hors de la parenthèse, nous avons noté ce qu'est l'objet mathématique (potentiel) de la définition ; entre parenthèses, nous avons indiqué un terme représentatif du champ sémantique sur lequel cette définition se fonde.

Par exemple, nous avons codé comme « Déf(Mouvement)Var », la partie de discussion suivante (P1 : D1.txt - (447 :449)) :

149	<i>P : ... Alors, tout ce qui bouge en mathématiques, est appelé variable, et alors c'est jolii l'activité que vous avez faite au début... qu'est-ce qui bouge si on varie certains points...</i>	<i>P : ... Allora, tutto ciò che si muove in Matematica viene chiamato variabile, ed è bellina allora attività che avete fatto all'inizio... cosa si muove al variare di certi punti...</i>
-----	---	---

A partir des considérations mentionnées ci-dessus, nous avons pu qualifier cet énoncé de définition car :

- il porte sur un **signe-mathématique cible**, celui de variable (Déf(Mouvement)**var**).
- Par le caractère définitoire de l'énoncé (« tout ... est appelé... »), il vise explicitement à déterminer le signifié proto mathématique de variable ;
- Il se fonde sur la métaphore du mouvement introduite par l'activité avec Cabri (Déf(**Mouvement**)var).

### 10.2.2. Caractérisations

Les caractérisations portent, de façon plus ou moins **implicite**, sur des **signes-mathématiques cible**, sur des **signes-pivot** et sur des **signes-artefact**.

Elles visent à en mettre en lumière, voire établir, certaines caractéristiques saillantes et définitoires susceptibles d'être interprétées en termes mathématiques (ou proto ou para). Il s'agit de caractérisations relevées par le chercheur en cours d'analyse, données (consciemment ou inconsciemment) par l'enseignante ou un élève et qui servent à enrichir le champ sémantique d'un objet ou son potentiel sémiotique. Parfois, **les caractérisations fournies n'émergent pas directement mais sont issues de l'interaction non nécessairement organisée de plusieurs énoncés de plusieurs acteurs**.

Comme dans une parole, où l'on trouve un aspect dénotatif et un aspect connotatif, dans une phrase ou une suite de phrases, à côté de ce qui est dit explicitement, « de son aspect dénotatif », nous pouvons détecter un aspect que nous pourrions qualifier de « connotatif ». C'est comme si l'on avait des implicites, des germes embryonnaires de tous ces autres signifiés auxquels cette partie du discours tendrait si elle était explicitée jusqu'à ses dernières conséquences.

Ce que nous avons alors appelé **caractérisations** consiste en toutes ces inclinaisons, ces tendances, plus ou moins explicites, à une certaine définition éventuelle. Ces parties du discours ne sont pas des définitions au sens propre du terme, elles pourraient ne jamais l'être, car l'enseignante pourrait ne pas se poser le problème de les expliciter, ou car dans la conscience du locuteur la conséquence ultime de ce qu'il est en train de dire, n'est pas claire. On pourrait alors voir l'introduction d'une définition, comme le moment où l'on prend conscience de cette conséquence et on lui donne une existence, on lui donne <sup>61</sup> une réalité grâce la

---

<sup>61</sup> Une définition est plus qu'une simple constatation, c'est une sorte « d'appel à l'être », grâce justement à la parole. Si l'on part du principe aristotélicien du troisième exclu, dire que A appartient à E ssi P(A) est vrai, implique que, si B est tel que P(B) est faux, alors B n'appartient pas à E. En d'autres termes, B n'entre pas dans la définition de A, donc, d'une certaine manière on l'extrait de l'existant, on lui nie le droit d'appartenir à cette partie de l'existant. Bien évidemment, pour qu'un élève donné reconnaisse à un objet mathématique une quelconque existence, tout un processus de construction du sens de cet objet est nécessaire, il est bien plus long et articulé que sa seule évocation par la parole. Néanmoins, ce processus pour Vygotski s'appuie (aussi) sur les mots

parole. En revanche, tout le processus par lequel l'on a construit des caractérisations diverses associées à un même énoncé, serait une suite de tentatives pour approximer (en le construisant à la fois) ce « quelque chose », *l'interprétant*, qui correspondrait à l'une, ou à l'autre des toutes les différentes définitions possibles.

Dans la plupart des cas, les caractérisations diverses, même prévisibles, ont été identifiées *a posteriori*. Reliées à des définitions, elles ont été regroupées en grandes superfamilles. Ces dernières ont été, à leur tour, associées à des signifiés différents, eux aussi identifiées *a posteriori*.

Par exemple, pour la variable dépendante, les caractérisations repérées ont été reliées à deux grandes familles de signifiés mathématiques culturels différents :

- celle de la variable dépendante comme « résultat » d'un processus (d'une construction aussi bien que de l'application de l'outil Macro de Cabri), désignée par **Caract(Résultat)Var Dép** ;
- celle de variable dépendante comme « objet qui bouge seulement indirectement, en fonction de la variable indépendante », désignée par **Caract(Mouvement)Var Dép**.

Ces deux caractérisations ont été considérées comme faisant partie respectivement de deux manières diverses de concevoir les fonction : celle de la fonction comme « Machine à Input/Output » et celle de fonction comme « Relation de co-variation ». Nous approfondirons ces deux caractérisations dans le chapitre dédié à l'analyse des réseaux sémiotiques des signes utilisés (cf. Chapitre 8).

En général, nous avons codé toutes les caractérisations en utilisant la même modalité utilisée pour les définitions. A l'extérieur des parenthèses, nous avons noté qu'il s'agissait d'une caractérisation (par exemple **Caract(Mouvement)Var Dép**), et nous avons explicité l'objet sur lequel celle-ci portait (**Caract(Mouvement)Var Dép**). En revanche, à la différence des définitions, entre parenthèses nous n'avons pas mis l'élément (éventuellement métaphorique) sur lequel cette caractérisation était basée, mais le type de connotation qui en ressortirait. Cette différence est due au fait que les éléments qui interviennent dans la création d'une caractérisation sont beaucoup plus nombreux et « volatiles » et les expressions utilisées sont à chaque fois différentes. Identifier une caractérisation, reviendrait, alors, pour nous, à reconnaître, dans une partie de discours, ce que nous avons appelé comme une sorte « d'invariant » sémantique<sup>62</sup> qui persisterait, même quand la façon dont elle a été donnée a changé. Bien évidemment, à chaque fois, nous avons essayé d'expliciter les critères pour lesquels nous avons pu attester la présence d'une certaine caractérisation.

Ainsi, par exemple, considérons la partie de discussion (D1.txt - (107 :120)) suivante. C'est la première caractérisation qui est donnée de la macro Effet1 :

32.	<i>IGOR : C'est-à-dire... Qu'elle est la construction qui... Il y a, caché derrière, une construction qui permet de... de dessiner le point H à partir des points A, B, P.</i>	<i>IGOR : Cioè è la costruzione che... c'è nascosta dietro una costruzione che permette di... di disegnare il punto H a partire dai punti A, B e P.</i>
33.	<i>P : « Effet1 » condense, en le cachant, une construction que vous ensuite, vous avez découverte... Et qu'est-ce qu'elle fait cette construction ?</i>	<i>P : « Effetto1 » condensa, nascondendola, una costruzione che poi avete scoperto... E che cosa fa questa costruzione ?</i>

nécessaires à l'identifier. Nous relient cet « appel à l'être » au processus bien plus articulé et complexe de l'« objectivation », mis en évidence par Radford (2002).

<sup>62</sup> Le critère de la recherche et puis reconnaissance « d'un invariant sémantique » a été employé dans le cas aussi des définitions. Cependant, pour les caractérisations cet invariant est encore plus grand.

34.	<i>FILIPPO : Elle construit un point...</i>	<i>FILIPPO : Costruisce un punto...</i>
35.	<i>IGOR : Elle construit le point H... Car nous avons fait...</i>	<i>IGOR : Costruisce il punto H... Perché noi abbiamo fatto...</i>
36.	<i>P : Elle construit le point H à partir de ?</i>	<i>P : Costruisce il punto H a partire da ?</i>
37.	<i>Chœur (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Des trois points.</i>	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Dai tre punti.</i>

Ici la classe est en train de discuter sur ce qu'est la Macro Effet1. Cependant, en même temps, ce qui ressort est aussi une caractérisation particulière des constructions géométriques. Cette caractérisation, très importante, se lie au signifié de fonction comme « machine à Input/Output ». Nous avons donc associé à cette partie du discours, le code « Caract(« I/O »)ConstrGéo ».

Nous avons qualifié cette partie de discussion de caractérisation en force des critères suivants :

- elle est issue de l'interaction de plusieurs énoncés ;
- elle porte sur des **signes-arfact** (comme les « points A, B et P » ou la macro « Effet1 ») et des signes-pivot (comme « construction » qui a une double acception et dans l'artefact « Cabri » et dans les mathématiques) ;
- dans ce cas particulier, elle porte sur l'emploi, de la part de plusieurs acteurs, d'expressions comme « *permet de dessiner... à partir de* » (Igor (32) ou « *construit ...à partir de...* » (l'enseignante (33, 36)) qui reflètent métaphoriquement un mécanisme d'entrée et sortie (Caract(« I/O »)ConstrGéo) ;
- dans ce cas particulier, par le type d'enchaînement des questions (33, 36), elle révèle la volonté de l'enseignante de reprendre intentionnellement la caractérisation probablement involontaire d'Igor (32) et de mettre en évidence une caractéristique saillante de l'activité, susceptible d'être interprétée en termes mathématiques.

### 10.2.3. Interprétations

Les **interprétations** portent **explicitement** sur l'établissement d'un lien interprétatif entre deux familles de signes qui appartiennent à deux champs sémantiques différents. Il ne s'agit pas d'établir une identité entre deux « objets », mais plutôt une équivalence, une correspondance entre deux « mondes ». Le lien est introduit de façon générale ; les énoncés associés, ont donc une portée qui sort du domaine de validité de l'activité spécifique dans Cabri.

Pour attester la mise en place d'interprétations, les indicateurs que nous avons pris en compte sont très variés : l'utilisation de noms communs, d'expressions comme *avoir pour correspondant, notre idée de*, etc ; l'usage d'énoncés conditionnels et, encore, de périphrases qui indiquent simultanément la correspondance et la non coïncidence des deux objets mis en relation.

Par exemple, considérons comment nous avons associé le code « InterprMacro-Fonction » aux parties suivantes de la première discussion collective.

(D1.txt - (401 :405))

135.	<i>P : ... La Macro. Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri, qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si on veut, tout ce que nous avons dans le menu « construction ». Même faire le milieu, je peux le voir comme une fonction ?</i>	<i>P : La Macro. Quindi noi abbiamo un corrispondente della funzione in Cabri, che sono le Macro. Tutte queste sono Macro, se vogliamo, tutte quelle che abbiamo nel menu di « costruzione », anche fare il punto medio la posso vedere come una funzione ?</i>
------	--	---



Pour la première fois, l'enseignante établit ici un lien entre les Macro-constructions dans Cabri et les fonctions, en général. Elle n'est pas en train de définir, ni de caractériser. Néanmoins, en utilisant clairement le terme « *correspondant* », elle statue sur la nature de ces deux signes et de leur relation réciproque. D'autres fois, elle en parle de façon moins explicite, comme dans (D1.txt - (508 :510)) :

- 172 P : ... Alors, ainsi, nous avons dit fonction, Macro dans Cabri, construction et **derrière** chaque Macro **nous avons compris qu'il y a une construction... donc fonction comme Macro, qui, pourtant, pour nous est une construction.**

Nous pouvons observer que dans ce cas-ci elle utilise l'expression *fonction comme Macro*, qui indique, encore, mais de façon moins explicite, une correspondance entre deux objets, qui n'est pas, néanmoins, une simple coïncidence. Elle établit ci un lien entre la macro et la fonction mais après avoir développés tout un réseau de signes divers associé à ces deux signes- là. Derrière au signe « macro », il y a, alors, toute une famille de signes différents qui sont évoques et implique.

Toujours pour identifier l'établissement d'un lien interprétatif entre Macro et Fonction, indiquons d'autres indicateurs pris en compte :

- phrases conditionnelles comme dans (D1.txt - (482 :483)) 163. P : Alors, nous avons trouvé dans Cabri la macro **comme** fonction... **Comme variables indépendantes qu'est-ce que je pourrais dire qu'elles sont ?**
- périphrases, comme, dans (D1.txt - (417 :419)) 141. P : Ainsi, **si je vais voir... en somme**, dans Cabri nous avons les Macro et nous disons que celle-là **peut être une idée de notre fonction...**

pour ce que nous avons vu une caract des nousavons remarqué

### 10.2.4. Instanciations

Les **instanciations** comme les **interprétations**, concernent l'établissement d'un lien entre deux signes simples. Dans ce cas-ci, cependant, l'un des deux signes, est directement issu de l'activité dans Cabri et il est associé à un nom propre. Les **instanciations** correspondent alors à la reconnaissance de l'appartenance d'un signe particulier à une classe donnée des signes, dont un autre signe peut être vu comme le représentant. Les instanciations peuvent aussi être vues comme une sorte d'assignation, où « l'objet à instancier » est contenu par exemple, dans une **définition**. Par exemple, dans la partie de discussion suivante, l'enseignante (235) instancie involontairement les définitions de variable indépendante et dépendante et demande d'instancier le domaine et l'image (D1.txt - (678 :687)) :

235.	P : Alors, dans ce petit jeu que j'ai fait... j'ai pris P et je l'ai bougé, H a bougé, je veux que vous me disiez quelle est la variable indépendante, quelle est la variable dépendante, quel est le domaine de P et quelle est l'image de H.	P : Allora, in questo giochino che ho fatto io... ho preso P e l'ho mosso, H si è mosso, voglio sapere da voi chi è la variabile indipendente chi è la, variabile dipendente, qual è il dominio di P e qual è l'immagine di H.
236.	CRISTINA : La variable indépendante est P et le domaine c'est partout	CRISTINA : La variabile indipendente è P e il dominio è da tutte le parti

Ainsi, à l'intervention 235 de l'enseignante, nous avons associé les codes *Instanc(P)VarIndép* et *Instanc(H)VarDép*, puisque juste après avoir posé la question (je veux que vous me disiez quelle est la variable indépendante, quelle est la variable dépendante ... ) elle ajoute la réponse (... quel est **le domaine de P** et quelle est **l'image de H**). En revanche, dans la réponse de Cristina (236) nous observons

l'instanciation de P comme variable indépendante et du « partout » comme domaine et nous avons associé les codes *Instanc(P)VarIndép* et *Instanc(« Partout »)Domaine*

Les instanciations sont en quelque sorte de même nature que les interprétations. Mais, si ces dernières portent sur des universels, les instanciations, elles, font directement référence à l'activité spécifique dans Cabri. Elles sont utilisées pour construire des liens interprétatifs entre les signes-artefact et les signes-mathématiques cible, pour tester la validité d'une interprétation ou pour la particulariser dans le cas d'un signe-artefact donné.

### 10.3. Etat des signifiés

A côté de l'identification de différents signes (« simples » et « complexes »), nous avons aussi voulu expliciter leur état évolutif au cours de la discussion collective. Ainsi, chaque fois qu'un signe avait été repéré, comme par exemple lors d'une définition, nous avons noté s'il était utilisé pour la première fois (code : « SignifiéIntroduit »), s'il s'agissait du développement d'un discours déjà commencé (code : « SignifiéDéveloppé »), ou d'une ré-évoque (code : « Signifié(Re)évoque »), si l'on était en train de le greffer pour la première fois sur un autre signifié (code : « SignifiéGrefféSurUnAutre »), ou, sur l'activité dans Cabri (code : « SignifiéGrefféSurLActivité »). En outre, quand il était possible, nous avons noté si ce signifié avait été employé, même de façon implicite dans le discours, dans le but de résoudre un problème ou de répondre à une question posée (code : « SignifiéEnActe »).

### 10.4. Instruments de médiation sémiotique

En ce qui concerne les **références aux instruments de médiation sémiotique** (*Déplacement*, *Macro1*, etc.), nous avons constaté la difficulté d'attester par l'analyse seule du discours, l'usage de *Trace* voire du *Déplacement*, **comme instruments de médiation sémiotique**. Nous avons décidé de noter (et coder) aussi toutes les **références verbales faites aux « trajectoires » parcourues** par les points dans Cabri car elles étaient souvent explicitées. En outre, nous avons aussi pris en compte les descriptions de ces trajectoires, données en termes géométriques. Celles-ci ont été ainsi considérées comme des éléments du discours, indicateurs de l'usage évoqué ou effectif de *Trace* combiné avec *Déplacement*.

Par exemple, nous avons codé : *Déplacement direct* et *indirect*, le déplacement particulier de A ; de B ; de P ; (indirect) de H, les *Macro1* ; *Macro2*, *Macro3*, la trajectoire de  $f_{A,B}(P)$ , de  $f_{A,P}(B)$  et de  $f_{B,P}(A)$ , etc. bien sachant qu'il ne s'agit pas d'utilisation épisodique mais d'une utilisation dans un processus plus articulé.

### 10.5. Méthodologie de synthèse sur l'évolution des signes

Les conclusions sur l'évolution des signifiés mathématiques socialement partagés ont été déduites par une analyse des réseaux sémiotiques relatifs aux signes associés. Nous avons cherché à y repérer des régularités, des relations particulières et d'éventuels axes d'évolution privilégiés.

Nous avons construit le réseau sémiotique de chaque objet mathématique, considéré comme crucial dans notre processus d'enseignement- apprentissage, au moyen du logiciel Atlas.ti. En particulier, dans ces réseaux, nous avons rassemblé les divers plans d'analyse et en prenant en compte différents états évolutifs des

signes. Ainsi, chaque réseau veut représenter, sans pourtant être à l'échelle, l'évolution temporelle de tous les signes portant sur un même objet mathématique donné<sup>63</sup>. Pour les construire, nous avons pris en compte les différents codes (chacun renvoyant à l'objet mathématique en jeu, ou à des autres objets corrélés) en les considérant en relation avec leur potentiel sémiotique et avec le niveau d'actualisation des signifiés associés.

Ainsi, les codes du type « *représentamen (interprétant potentiel associable)* », relatifs aux **signes-artefact** du premier plan d'analyse, constituent le niveau le plus implicite, où le potentiel relatif a pu rester presque complètement inexprimé. Par exemple, nous avons noté « *Bouger(Var)* » pour indiquer que dans l'énoncé correspondant, le mot « bouger » a été employé de façon à pouvoir (potentiellement) être associable au signifié mathématique culturel de variable<sup>64</sup>. Néanmoins, dans le discours lui-même, tout ce qui est explicitement dit, est réduit au mot « bouger ». Le reste est dû à une projection de notre part, dans l'univers des possibles, qui cherche à tenir compte de ce qui a été dit avant et qui pourrait être dit après.

Le potentiel sémiotique associé à ce signe, ainsi que d'autres signes corrélés, peuvent, dans d'autres interventions, effectivement s'actualiser, autrement dit s'explicitier davantage ou s'enrichir. Ce que nous avons appelé **caractérisation** ou **définition**, est justement une façon de rendre compte du degré effectif d'actualisation, dans le discours, du potentiel sémiotique attribué à ce signe. Ainsi, les **caractérisations** indiquent l'existence d'un signifié encore implicite, tandis que les **définitions** lui reconnaissent un plus haut niveau de visibilité et d'objectivation. Enfin les **interprétations** et les **instanciations** nous fournissent des informations sur le moment où des signes, associés à champs sémantiques différents, sont mis en relation.

Les réseaux sémiotiques que nous présenterons ensuite ont été dessinés en tenant en compte du premier moment d'entrée (code : « SignifiéIntroduit ») de chacun des codes associés aux différents signes. En revanche, même si, ensuite tout au long de la discussion collective, ce même signe a été utilisé d'autres fois, ces réseaux n'indiquent que la première fois où il a été employé.

Ils ont été organisés selon deux directions privilégiées : du haut vers le bas, dans le sens chronologique, et de gauche à droite. Ainsi, si par exemple le mot « bouger » associé au signifié mathématique de variable a été prononcé au début de la

---

63 En effet, nous faisons ici une hypothèse très forte (que nous ne discuterons pas) : nous considérons qu'en mathématiques il existe des objets qui s'appellent, par exemple, fonction ou variable. Il ne s'agit pas d'objets qui préexistent en soi. Au contraire, ils sont le produit d'une certaine culture et d'une certaine institution. Nous considérons que tous ces signes (et les signifiés relatifs), développés tout au long des différentes discussions collectives, renvoient à de tels objets en évoluant continuellement. Dans le premier chapitre nous avons vu (cf. Chapitre 1, par. 5.1.6.1) comme Peirce aussi parle d'objet, en entendant ce « quelque chose » dont le signe ou *représentamen* tient lieu. Il explique à plusieurs reprises que cet objet peut ne pas exister. En fait, il dit : « *Un signe, ou représentamen, est quelque chose qui tient lieu pour quelqu'un de quelque chose sous quelque rapport ou à quelque titre. Il s'adresse à quelqu'un, c'est-à-dire crée dans l'esprit de cette personne un signe équivalent ou peut-être un signe plus développé. Ce signe tient lieu de quelque chose : son objet. Il tient lieu de cet objet, non sous tous rapports, mais par référence à une sorte d'idée que j'ai appelée quelquefois le fondement du représentamen* » [Peirce, 1897 - C.P. 2-228, cité par Marty, 1996]. Et encore : « *Une icône est un signe qui renvoie à l'objet qu'il dénote simplement en vertu des caractères qu'il possède, que cet objet existe réellement ou non* ». [Peirce, 1978].

64 En d'autres termes, dans l'écriture « bouger (var) », ce qui est noté entre parenthèses est la signification potentielle que nous (en tant que chercheurs) attribuons au signe « bouger » proportionnellement à son usage particulier, à son évolution effective et à sa réélaboration lors des discussions collectives, c'est-à-dire dans la culture (spécifique) de cette classe de seconde.

---

discussion collective, son code relatif (*Bouger(Var)*), peut être lu, dans le réseau sémiotique, en haut. Tout ce qui se trouve à la même hauteur a été dit lors d'une même intervention ou quasiment au même moment. En revanche la position relative sur un axe gauche-droite a été réalisée en prenant en considération un critère de « voisinage sémantique » : tout ce qui nous semblait plus fortement lié à une même famille de signifiés ou appartenant à un même champ sémantique a été gardé le plus près possible. En particulier, tout ce qui nous apparaissait plutôt relié au signifié de mouvement dans Cabri a été positionné vers la droite, le reste vers la gauche.

### 10.6. Encore dans Atlas.ti

Dans l'écriture Déf(Mouvement)VarIndép {18-13} le premier numéro entre accolades, ici 18, engendré automatiquement par le logiciel Atlas.ti, représente le nombre de fois où le code Déf(Mouvement)VarIndép a été inséré et apparaît dans les documents appartenant à une même *unité herméneutique*, c'est-à-dire un « projet », d'Atlas.ti. Il nous donne donc un ordre de grandeur de son poids dans ce même projet. Le deuxième numéro, ici 13, (toujours engendré automatiquement par le logiciel Atlas.ti) indique le nombre de liaisons que ce code entretient avec d'autres codes. Si une liaison avec un même autre code a été établie plusieurs fois tout au long de *l'unité herméneutique*, elle n'est comptée qu'une fois par le logiciel. Le nombre 13 nous fournit donc une information sur le nombre des autres codes associés à un code donné : s'il est important, cela signifie qu'il est très inséré dans le réseau.



# Chapitre 6 : Analyse *a posteriori* des actions de l'enseignante lors des discussions collectives

<b>1. Introduction .....</b>	<b>216</b>
<b>2. Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique.....</b>	<b>217</b>
2.1. Actions génériques de l'enseignante à dominante mésogénétique intervenants dans le processus de médiation sémiotique, identifiées <i>a priori</i> .....	218
2.1.1. Analyse des actions à dominante mésogénétique issue du paradigme de la TdS.....	218
2.1.1.1. Premier groupe : mise en place du milieu commun attendu .....	222
2.1.1.2. Deuxième groupe : modification du milieu commun.....	225
2.1.1.2.1. Premier extrait : exemple de modification d'un milieu insuffisant .....	228
2.1.1.2.2. Deuxième extrait : exemple de modification d'un milieu plus riche que prévu.....	229
2.1.1.2.3. Troisième extrait : exemple de modification d'un milieu par l'introduction d'une nouvelle tâche.....	231
2.1.1.3. Complémentarité des deux processus.....	233
2.1.2. Analyse des actions à dominante mésogénétique issue du paradigme de la TMS.....	235
2.1.2.1. Troisième groupe : Reflet et Paraphrase .....	235
2.1.2.1.1. Le Reflet .....	235
2.1.2.1.2. La Paraphrase.....	238
2.1.2.2. Quatrième groupe : Spécification / Généralisation.....	241
2.1.2.2.1. (Demande de) Généralisation .....	242
2.1.2.2.2. (Demande de) Spécification et (Demande de) Particularisation.....	243
2.2. Première synthèse intermédiaire.....	245
2.3. Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis identifiées <i>a posteriori</i> .....	246
2.3.1. Premier groupe : Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné : Demande d'explicitation des signifiés construits (lors de la résolution d'une tâche) : Référence indirecte au travail de sémosis.....	246
2.3.2. Deuxième groupe : (Demande d') Interprétation (dans l'artefact « Cabri », dans l'artefact « texte d'Euler », dans les mathématiques).....	249
2.4. Deuxième synthèse intermédiaire .....	256
<b>3. Phénomènes remarquables liés au processus de sémosis.....</b>	<b>258</b>
3.1. « Structure verbale » et processus de sémosis.....	258
3.2. Mélange sémiotique .....	260
<b>4. Actions à dominante mésogénétique et processus de médiation sémiotique.....</b>	<b>261</b>

4.1. Actions à dominante mésogénétique et processus de constitution d'icônes : Icônisation .....	261
4.1.1. Actions à dominante mésogénétique et processus d'affranchissement/complexification des signes mathématiques.....	268
<b>5. Actions de l'enseignante à dominante chronogénétique ..</b>	<b>271</b>
5.1.1. Résonance (faible ou forte ou nulle) .....	272
5.1.2. Actions chronogénétiques et médiation sémiotique.....	276
<b>6. Actions de l'enseignante à dominante topogénétique .....</b>	<b>277</b>
6.1.1. Déplacement topogénétique (« vers la classe » : « vers les mathématiques » : « vers un binôme » : « vers un élève particulier ») : Fusion et Réduction topogénétique.....	277
6.1.2. Mouvement topogénétique (ascendant et descendant) .....	281
6.2. Actions topogénétiques et construction intersubjective des signes.....	283
<b>7. Actions de l'enseignante à dominante mixte.....</b>	<b>283</b>
<b>8. Contrat didactique et processus de médiation sémiotique</b>	<b>284</b>
8.1. Règles relatives à l'utilisation d'un artefact .....	285
8.2. Règles relatives à la culture mathématique particulière de la classe ....	286
8.3. Règles relatives aux rapports interpersonnels .....	287
8.4. Phénomènes de contrat locaux.....	288
8.5. Quelques observations sur la règle fondamentale.....	289
<b>9. Résultats au niveau macro .....</b>	<b>292</b>
9.1. Résultats généraux au niveau méthodologique .....	295
<b>10. Tableau de synthèse sur les actions de l'enseignante .....</b>	<b>295</b>

## 1. Introduction

L'analyse *a posteriori* relative aux actions de l'enseignante a été guidée par les questions suivantes :

- Comment l'enseignante gère le processus de médiation sémiotique ? Peut-on identifier des régularités ou des « patterns » dans la façon dont l'enseignante orchestre les discussions collectives ?
- En quoi les notions et les outils issus de la TdS permettent-ils de mieux expliciter le fonctionnement de la TMS ?
- Comment l'analyse en termes de processus de médiation sémiotique a-t-elle finalement conduit à modifier et à faire évoluer les catégories *a priori* fournies par la TdS ?

Tout d'abord, pour y répondre, notre méthodologie (cf. Chapitre 5) a consisté à mettre en œuvre les outils fournis par la TdS et par la TMS, afin d'identifier un ensemble d'actions susceptible de caractériser de façon suffisamment fine la gestion par l'enseignante de deux discussions collectives spécialement organisées en fonction du processus de médiation sémiotique.

Ces deux discussions collectives ont été choisies par leur rôle central dans le processus de médiation sémiotique, par l'usage de deux Médiateurs Sémiotiques différents, Cabri et le texte d'Euler, et par la place et le rôle divers joué dans la progression et la construction des signifiés attendus.

Comme déjà illustré dans le chapitre méthodologique (cf. Chapitre 5, § 8), l'analyse *a posteriori* des transcriptions de ces discussions collectives, nous a conduit à modifier, préciser, étendre, les catégories d'analyse adoptées *a priori*.

D'abord, nous approfondirons deux sortes d'actions : d'une part, les actions, qui, étant prévues *a priori*, ont été affinées ou modifiées *a posteriori* : d'autre part, les

actions spécifiques au travail de sémiotique identifiées pour la première fois au cours de l'analyse *a posteriori*. En général, nous approfondirons surtout les actions qui nous ont permis de mieux analyser le processus de médiation sémiotique. A ce fin, comme déjà décrit dans le chapitre méthodologique (cf. Chapitre 5), nous procéderons en présentant ces actions par groupes.

Dans un premier temps, nous illustrerons quatre groupes d'actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité professorale intervenant dans le processus de médiation sémiotique : les deux premiers groupes étant identifiés à partir du paradigme de la TdS, les deux autres grâce à une analyse issue de la TMS.

Dans un deuxième temps, nous approfondirons les actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémiotique.

Cette distinction permettra, d'une part, de montrer que dans le processus de médiation sémiotique l'enseignante se sert d'un grand nombre d'actions génériques de l'activité professorale qu'on pourrait trouver aussi ailleurs, dans d'autres discussions et d'autres séquences non nécessairement construites en fonction du processus de médiation sémiotique. D'autre part, elle permettra d'isoler les actions qui sont vraiment spécifiques de ce processus.

Cette analyse des actions à dominante mésogénétique sera suivie par l'approfondissement de quelques phénomènes, qu'on ne peut pas qualifier d'action au sens propre du terme, car, même étant strictement liés à la forme prise par le discours de l'enseignante, ils ne sont pas consciemment intentionnels. Nous verrons comment ces phénomènes jouent un rôle important dans le processus de construction de signifiés.

Dans un troisième temps nous aborderons les actions à dominante chronogénétique et finalement les actions à dominante topogénétique. Nous ne ferons qu'une brève allusion aux actions à dominante mixte. On retrouvera la liste totale des actions repérées au cours de notre analyse dans un tableau synthétique, placé à la fin de ce chapitre. Dans ce même tableau, les actions approfondies au cours des différents paragraphes, sont signalées en gras.

Après avoir présenté de façon fine, les diverses actions repérées, nous développerons des réflexions de synthèse sur les liens entre les actions analysées et le processus de médiation sémiotique. Ces réflexions permettront ainsi de dégager les rapports mutuels entre processus de médiation sémiotique, travail de sémiotique, mésogénèse (en particulier milieu et contrat didactique), chronogénèse et topogénèse des discussions collectives. Ces mêmes réflexions vont aussi pouvoir mettre en évidence les apports respectifs de la TdS et de la TMS. Cela nous conduira ainsi à revenir aux questions de recherche qui ont guidé dès le début notre analyse *a posteriori*.

## **2. Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique**

L'approfondissement des actions de l'enseignante à dominante mésogénétique, intervenant dans le processus de médiation sémiotique, sera conduit en deux parties.

Nous aborderons d'abord, les actions à dominante mésogénétique, intervenant dans le processus de médiation sémiotique, qui ont été prévues par notre analyse *a priori*.

Ensuite, nous nous centrerons notre attention sur les actions à dominante mésogénétique, intervenant dans le processus de médiation sémiotique, qui ont été identifiées seulement *a posteriori*.



A son tour, la première partie sera articulée selon deux axes d'analyses croisés. Un premier axe portera sur les actions spécialement identifiées par des notions issues de la Théorie des Situations (TdS).

Un deuxième axe, en revanche, prendra en compte les actions repérées à partir d'outils issus de la Théorie de la Médiation Sémiotique (TMS).

Soulignons donc que ces deux cadres théoriques, la TdS et la TMS, servent, donc, pour distinguer et catégoriser les types d'actions de l'enseignante dans le but de mieux comprendre et puis de modéliser le processus de médiation sémiotique en cours.

## **2.1. Actions génériques de l'enseignante à dominante mésogénétique intervenants dans le processus de médiation sémiotique, identifiées *a priori***

### **2.1.1. Analyse des actions à dominante mésogénétique issue du paradigme de la TdS**

Parmi les actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité de l'enseignante repérées lors de l'analyse *a posteriori* des discussions collectives, nous nous intéressons d'abord à deux groupes d'actions qui, même étant identifiées grâce à une analyse en termes de milieu, se situent au cœur de l'intersection entre TdS et TMS.

Nous avons décidé d'approfondir ces actions car, étant issues de la TdS, elles fournissent pourtant un éclairage sur les dynamiques propres au processus de médiation sémiotique. En effet, elles permettent de mieux discerner comment l'enseignante se sert concrètement de l'artefact et des éléments de l'activité afin de développer des signes appropriés. Cette analyse témoigne ainsi de la pertinence et de l'efficacité des notions issues de la TdS pour modéliser le processus de médiation sémiotique. L'analyse en termes de TdS est conduite donc toujours en fonction de ce même processus.

Il s'agit des actions de : **Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel : Organisation d'une validation commune : (Demande de) Confrontation entre une démarche élaborée lors de l'activité de discussion collective et une démarche élaborée lors de l'activité en binômes : (Demande de faire la) Synthèse : (Demande de) Exécution au rétroprojecteur : (Demande de) Reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri : Evocation du milieu pour la validation : Evaluation par l'enseignante : (Demande de) validation Focalisation sur un trait significatif de l'activité : Manifestation d'un problème ou d'un phénomène rencontré par un binôme particulier : Rappel de la tâche : Validation par le milieu reconnue par l'enseignante.**

Ces actions, identifiées grâce à la TdS, et notamment à partir de la notion de milieu, relèvent, quoique de façon différente, d'une interprétation didactique : certaines ont été qualifiées, lors du chapitre méthodologique (cf. Chapitre 5, § 3), comme étant « à dominante descriptive » (**Evaluation par l'enseignante : (Demande de faire la) Synthèse : (Demande de) Exécution au rétroprojecteur : Focalisation sur un trait significatif de l'activité**) d'autres, ont été considérées « à dominante interprétative » (comme **Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel : Organisation d'une validation commune : (Demande de) Reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri : Evocation du milieu pour la validation : Validation par le milieu reconnue par l'ens.**)

Cette analyse des actions de l'enseignante en termes de milieu, nous montre qu'à la différence du milieu *potentiel* de l'activité qui est censé être le même pour tous les binômes (il a été en fait conçu en fonction d'un élève générique), le milieu *activé* lors du travail avec Cabri, n'était pas le même pour tous les binômes. La discussion collective constitue donc comme le moment où justement l'on opère la co-construction d'un nouveau milieu commun<sup>65</sup> où les différents milieux peuvent, éventuellement confluer, se confronter, s'harmoniser et se transformer. Cette construction à la fois symbolique et matérielle constitue la base pour une la construction sociale de la connaissance.

Dans notre étude, le sens attribué au terme « milieu » est inspiré à la notion de milieu issue de la Tds et rejoint par certains aspects celui repris par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002). En particulier nous nous référons à la mise en place d'un double processus : la constitution d'un milieu pour la discussion collective et la constitution d'un milieu pour la suite de la séquence, qui par cette même discussion collective est mis en place. En fait, le milieu construit collectivement, fournit des rétroactions et des informations ayant un rôle fondamental, non seulement pour la discussion en elle-même mais aussi pour le reste de l'expérimentation :

- il conduit les élèves à expliciter, construire et convenir sur des critères de validité valables pour tout le monde :
- Il apporte des informations permettant de prendre des décisions sur lesquelles, à nouveau, tout le monde sera d'accord :
- une fois établi un critère, la seule évocation du milieu est susceptible de fonctionner comme rétroaction pour invalider ou valider une conjoncture ou une affirmation.

Pour que ce type de milieu puisse se mettre en place, il est nécessaire le développement, en parallèle, d'un contrat didactique spécifique. Nous verrons dans la suite de ce chapitre, qu'un élément de ce contrat est la nécessité de devoir toujours chercher à expliciter et puis à justifier ses propres affirmations par des critères acceptés (ou à accepter)<sup>66</sup> collectivement.

Par exemple, nous verrons que, au début de la première discussion collective, les élèves, guidés par l'enseignante, se mettent d'accord sur ce qu'ils doivent (et ils peuvent) considérer comme une variable dépendante. Le critère adopté est alors celui du déplacement indirect (D1.txt (491 : 500)) :

167.	<i>P : Je peux les bouger partout, aujourd'hui vous étiez libres de les bouger partout. Et, en revanche, ce que j'obtiens, donc la variable indépendante, qu'est-ce que c'est ?</i>	<i>P : Li posso muovere da tutte le parti, oggi eravate liberi di muoverli da tutte le parti. E invece quello che ottengo, quindi la variabile dipendente, che cos'è ?</i>
168.	<i>FILIPPO : C'est un point fixe qu'il n'est pas possible de déplacer.</i>	<i>FILIPPO : È un punto fisso che non è possibile spostare.</i>
169.	<i>IGOR : C'est-à-dire qu'il bouge... en bougeant les autres points.</i>	<i>IGOR : Cioè che si muove... muovendo gli altri punti.</i>
170.	<i>P : Il bouge en fonction des autres [points], c'est-à-dire que tout seul je ne peux pas le déplacer, je peux le déplacer seulement si je déplace les points dont il dépend.</i>	<i>P : Si muove in funzione degli altri, cioè per conto proprio io non lo posso spostare, lo posso spostare solo se sposto i punti da cui dipende.</i>

<sup>65</sup> L'analyse des rapports, que malheureusement nous n'aurons pas l'occasion de présenter lors de cette thèse, nous a montré que ce même milieu commun co-construit lors de la discussion collective, n'est pas le même pour tous les binômes. Néanmoins, sans la construction de cet espace commun, toute construction sociale de la connaissance serait impossible.

<sup>66</sup> Une partie importante des discussions collectives est en fait dédiée à l'analyse et à l'acceptation collective des critères de validités.

Ensuite, lors du développement de la discussion collective il se pose le problème (inattendu *a priori*) de comprendre la nature du point, H', obtenu à partir de l'application deux fois de la macro « Effet1 ». Un élève, Mauro, remarque d'abord que H' bouge de la même façon de H (D1.txt (818 : 834)). Cependant cela n'est pas suffisant pour stater de la nature de H'. Alors, par la question (intervention 291), ce qu'il évoque est justement le critère introduit précédemment :

289.	MAURO : H' bouge de la même façon !	MAURO : H' si muove uguale !
290.	IGOR : Car c'est « Effet1 » qui lui donne cette relation là.	IGOR : Perché è l'« Effetto1 » che gli dà quella relazione lì.
291.	MAURO : Peut-on bouger H' ?	MAURO : Si può muovere H' ?
292.	P : Eh, non, je ne pense pas !	P : Eh, no, non penso !
293.	CRISTINA : Qu'est-ce qu'il a dit?	CRISTINA : Com'è che ha detto ?
294.	P : Si l'on peut bouger H'. Essaie?	P : Se si può muovere H'. Prova ?
295.	GIACOMO : Eh, non ! Car H' maintenant est obtenu...	GIACOMO : Eh, no !... Perché H' adesso è ottenuto...
296.	CRISTINA : Non, car H' maintenant est obtenu de la première.	CRISTINA : No, perché H' è ottenuto dalla prima.
297.	P : H' est obtenu de la première. [...]	P : H' è ottenuto dalla prima. [...]

Observons que l'enseignante participe activement à la co-construction de ce nouveau milieu commun : elle anticipe la réponse (intervention 292) mais après elle guide à la vérification expérimentale du critère évoqué.

L'analyse de ces actions, en montrant la co-constitution et la modification de ce nouveau milieu commun, peut fournir une possible clé d'accès à la modélisation (partielle) d'un élément fondamental de la TMS : la constitution de l'espace intersubjectif. Rappelons que, en termes vygotskiens, cette expression, désigne, métaphoriquement, l'espace matériel et collectif qui permet, par l'action de l'enseignante (et des autres élèves), de modifier la signification qu'individuellement chaque élève attribue à tout signe fourni par l'activité. Il est le terrain propédeutique à tout développement successif sur lequel l'enseignante pourra éventuellement greffer les signes issus de la culture mathématique. Interpréter cet espace, en termes de milieu au sens propre de la TdS, permettra de décrire et caractériser (au moins partiellement) de façon plus fine, grâce aux outils développés par cette même théorie, cette métaphore.

C'est ce que nous verrons dans la suite, tout au long de l'analyse des actions de l'enseignante.

*A priori*, en nous appuyant sur les recherches de Bartolini Bussi et de ses collègues (Bartolini Bussi, 1996 : 1998a : Bartolini Bussi et Boni, 1995a : Bartolini Bussi, Boni, et Ferri, 1995b : Bartolini Bussi et Mariotti, 1998) nous pouvons nous attendre à une distinction entre les *discussions collectives de Bilan* et les *discussions collectives de construction d'un signifié socialement partagé* (cf. Chapitre 1, § 3.5). *A posteriori* cette distinction s'est avérée inadaptée. Dès le début de la première discussion, à l'intérieur de cette dernière, nous observons l'existence et des phases qui correspondraient plutôt à une *discussions collectives de bilan*, comme *l'explicitation des procédés de solution*, et d'autres qui appartiendraient plutôt à une *discussion collective de construction d'un signifié socialement partagé*, comme *l'explicitation des signifiés personnels*.

*A priori* nous nous attendons à des phases de *d'ouverture*, *d'explicitation des signifiés personnels*, *de construction des signifiés*, *de dialectique entre signifiés personnels et signifié collectif*. La réinterprétation de ces phases à la lumière des

outils de la TdS, en particulier de la notion de milieu, nous a permis *a posteriori* de décrire d'une façon plus fine ces phases, en identifiant les actions de l'enseignante caractéristiques de ces mêmes phases. En outre, cela nous a amené à reconnaître à l'intérieur de ces phases deux processus de mésogenèse complémentaires mais différents qui globalement participent à la **co-construction du nouveau milieu commun** : la **mise en place du nouveau milieu commun attendu** et sa **modification**.

Les deux groupes d'actions, que nous approfondirons, porteront respectivement sur ces deux processus complémentaires.

Le premier groupe d'actions est caractéristique du travail de « distillation » des éléments candidats à fonctionner comme signes potentiels pour les signifiés mathématiques visés. En effet, parmi tous les éléments de l'activité potentiellement intéressants, il y en a certains qui ont été conçus, dès la conception de la séquence, pour fonctionner comme signes : en particulier, certains outils spécifiques de Cabri, certaines constructions géométriques construites lors de la résolution des tâches posées dans l'artefact et certaines propriétés de ces constructions. Ce premier groupe d'actions permet donc la **mise en place d'un milieu commun**<sup>67</sup> attendu et cela, grâce à une reconstruction collective et ciblée de l'activité avec l'artefact. Il répond, donc, à la volonté de l'enseignante de permettre l'actualisation des objectifs *a priori*, tels qu'ils ont été projetés lors de l'élaboration de chaque tâche.

Ce même groupe d'actions a aussi comme effet (et comme objectif) celui de permettre aux élèves la prise de conscience et l'explicitation des signifiés personnels relatifs aux signes élaborés au cours de l'activité avec l'artefact. Il s'agit donc d'une mise à distance et d'une mise en réflexion sur les connaissances *en acte* ou implicites construites et mobilisées au cours de cette même activité. Nous avons déjà anticipé que parmi ces connaissances, certaines fonctionnent justement comme critères de validations et comme éléments de décisions pour la suite. C'est pour cette raison que nous parlons, parallèlement, de mésogenèse.

En revanche le deuxième groupe d'actions à dominante mésogénétique ne cherche pas tant à **mettre en place le milieu commun attendu**, intégrant les différents milieux déjà rencontrés par les différents binômes, qu'à **modifier** ce même milieu commun. Par ce groupe d'actions, en fait, nous observons soit l'introduction soit la gestion par l'enseignante d'éléments nouveaux, qui n'étaient ni prévus ni prévisibles *a priori* (lors de la conception de la séquence). Il s'agit de la prise en compte par toute la classe de phénomènes rencontrés par des binômes particuliers ou d'accentuations imprévues que, pourtant, l'enseignante considère comme pertinents voire nécessaires pour le développement et l'enrichissement de ces mêmes signes visés. Bien évidemment, toute reconstruction participe à la modification progressive du milieu commun de même que toute modification contribue à la construction collective de ce même milieu. Cette distinction doit être lue dans sa globalité, étant, les deux processus de mésogenèse (**mise en place** et **modification du milieu commun attendu**), l'un le complémentaire de l'autre dans le processus plus général de **co-construction d'un nouveau milieu commun**<sup>68</sup>. Ce qui distingue le premier groupe d'actions du deuxième c'est que, si le premier groupe

<sup>67</sup> Ce premier groupe d'actions pourrait être aussi considéré à dominante mixte (chrono et topo) car il a en même temps la fonction d'introduire dans le déroulement de la discussion collective, la chronogenèse attendue.

<sup>68</sup> La co-construction d'un milieu commun s'opère et en filtrant et en sélectionnant les éléments significatifs de l'activité prévus *a priori* et en incorporant les éléments non prévus qui peuvent émerger au cours de l'expérimentation.

porte plutôt sur l'actualisation du « prévu », le deuxième groupe, au contraire, traite plutôt avec la « contingence de l'imprévu ».

Cette contingence n'est ni pathologique ni éliminable, car les discussions collectives, sont, pour nature, des systèmes dynamiques. Pour utiliser une métaphore, cette contingence ne rassemble pas à un système chaotique mais à un système en équilibre instable, assujéti à des tensions opposées : d'une part celle de garder le plus possible les objectifs visés et, d'autre part, celle de tenir compte des conditions d'apprentissage réellement produites dans l'instant.

La partition des actions repérées à l'intérieur des deux groupes n'est pas mutuellement exclusive. Au sein de ces deux groupes, par exemple, nous retrouvons des actions en commun, comme celle de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité** ou d'**Organisation d'une validation commune**. La première action se situe à l'intersection de ces deux groupes car elle peut avoir comme objectif soit de permettre la mise en évidence d'un aspect déjà présent implicitement dans l'activité, soit de conduire à l'émergence d'un élément nouveau qui n'était pas spécialement prévu *a priori*. Tandis que, la deuxième peut amener soit à la nouvelle validation (collective) d'un élément déjà validé lors de l'activité avec Cabri, soit à la validation d'un élément imprévu.

### 2.1.1.1. Premier groupe : mise en place du milieu commun attendu

Considérons le début de la première discussion collective. Après un moment où les élèves ont été amenés à expliciter leur signifié personnel relatif au signe de fonction, l'enseignante (26), en soulignant leur ignorance, clôt cette phase et introduit la nouvelle phase (28), qui dans la TMS correspond génériquement à la constitution d'un espace intersubjectif en fonction des phases de *construction des signifiés mathématiques* et de *dialectique entre signifiés personnels et signifié collectif*. L'analyse en termes de milieu nous fournit alors une clé d'accès pour décrire cette métaphore : ces phases, en fait, correspondent, plus précisément à la **mise en place d'un nouveau milieu commun** (D1.txt (085 :095)).

26.	<i>P : Hum, bien. Il me semble une idée très embryonnaire et je suis contente de cette chose car ainsi nous pouvons la construire par nous-mêmes.</i>	<i>P : Hum, va bene. Mi sembra un'idea molto primitiva e ho piacere di questa cosa perché così ce la possiamo costruire.</i>	
27.	<i>IGOR : Mais moi, au collège j'avais fait quelque chose...</i>	<i>IGOR : Ma io alle medie avevo fatto qualcosa...</i>	
28.	<i>P : Toi au collège tu avais fait quelque chose, bien. Alors, voyons si en revoyant ce que nous avons fait nous-mêmes, il ressort celle que nous voudrions être notre idée de fonction. Alors qu'est-ce que vous avez fait ? Raconte le moi de sorte que je le fasse moi aussi... Qui va me le raconter ?</i>	<i>P : Te alle medie hai fatto qualcosa, va bene. Allora vediamo se rivisitando quello che abbiamo fatto noi, viene fuori quello che vorremmo sia la nostra idea di funzione. Allora, cosa avete fatto? Raccontatemelo che così lo faccio anch'io... Chi me lo racconta ?</i>	<b>Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri : Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel</b>

Nous observons d'abord un **Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel**, c'est-à-dire à une action de l'enseignante visant à reconstruire collectivement un même milieu matériel qui puisse intégrer les différents aspects matériels de l'activité avec l'artefact, rencontrés par les divers binômes.

Cette première action, à la différence de l'action de **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri**, que nous aborderons tout de

suite, ne semble pas demander un tri. Néanmoins, de la part des élèves, elle ouvre à l'explicitation des éléments considérés comme principaux : quand on demande à quelqu'un de raconter quelque chose, il est raisonnable de s'attendre à que cette personne se réfère, de préférence, à ce qu'il considère important plutôt que à ce qu'il lui semble négligeable.

L'action d'**exécution au rétroprojecteur** participera, juste après, activement, de cette mise en place.

Nous observons aussi une **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri**<sup>69</sup>, c'est-à-dire à une action de l'enseignante ayant comme objectif celui de reconstruire l'activité dans Cabri. Comme nous l'avons déjà anticipé, pour le paradigme de la TMS il ne s'agit pas simplement de revisiter ce qui s'est passé dans chaque binôme mais, plus particulièrement, d'en réécrire sa signification en identifiant, sélectivement et collectivement, les éléments qui déjà a priori étaient réputés à fonctionner comme signes ou médiateurs sémiotiques.

L'extrait que nous venons de lire, continue avec la reconstruction au rétroprojecteur de l'activité avec Cabri (par les actions de **((Demande de) Exécution au rétroprojecteur)**). Cette reconstruction est constellée systématiquement d'actions de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité**. Ces actions réalisent donc de manière plus ponctuelle le même objectif global caractérisant l'action de **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri**. De manière analogue, l'action de **Rappel de la tâche** poursuit ce même objectif. Si le **Rappel de la tâche** ramène dans la discussion collective l'enchaînement des éléments prévus, au contraire, la **Focalisation sur un trait significatif de l'activité** souligne les éléments attendus, qui, au fur et à mesure, émergent (D1.txt (125 :135)) :

39.	<i>P : [...] Car qu'est-ce qui vous a été dit? C'est-à-dire « qu'est-ce que vous deviez faire » ?</i>	<i>P : [...] Perché cosa vi è stato detto ? Cioè nel « cosa dovevate fare » ?</i>	<b>Rappel de la tâche</b>
40.	<i>IGOR : Il fallait dire... d'abord si je bougeais le point A, les points qui se déplaçaient et les points qui ne se déplaçaient pas...</i>	<i>IGOR : Bisognava dire... prima se spostavo il punto A i punti che si muovevano e i punti che non si muovevano...</i>	
41.	<i>P : Ok...alors par exemple, en bougeant P, je vois que seulement H bouge et, pas seulement ça, voyons de le condenser un petit peu [essayons de résumer un peu tout ça]... je vois aussi qu'il bouge... ?</i>	<i>P : Ok... allora, per esempio, movendo P, io vedo che si muove solo H e non solo, vediamo di condensarlo un attimo... vedo anche che si muove... ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité</b>
42.	<i>IGOR : ... Sur une droite</i>	<i>IGOR : ... Su una retta.</i>	

Toujours dans l'épisode cité ci-dessus, nous pouvons aussi observer, par la focalisation sur le comportement des points A, B, P et H le début de la mise en place de deux critères de validations fondamentaux pour la suite : celui du déplacement

<sup>69</sup> Il faut souligner que les actions de **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri** et de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité** reprennent grosso modo ce que Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002) ont appelé *Identification- reconstruction des traits pertinents de l'action*. Nous avons modifié cette dénomination, en distinguant deux actions différentes, à la fois pour souligner le caractère social incontournable de cette reconstruction (Demande de reconstruction **coopérative** et sélective de l'activité dans Cabri), le fait qu'elle se réfère à l'activité entière et non pas seulement à une action particulière entreprise (Demande de reconstruction coopérative et sélective **de l'activité** dans Cabri), et, finalement, qu'elle se réfère en particulier à des éléments de l'activité censés porter sur un signifié nouveau (Focalisation sur un trait **significatif** de l'activité).

direct des variables indépendantes et celui du déplacement indirect des variables dépendantes. Ce pourquoi que pour ce type d'actions, nous parlons de constitution du milieu.

Les actions du premier groupe sont donc caractérisées par un lien étroit avec les différentes tâches et les aspects divers de l'activité avec l'artefact. En outre, puisque l'activité a été conçue en fonction de la médiation sémiotique, elles portent en particulier sur le fonctionnement des Instruments de Médiation Sémiotique de Cabri. Nous pouvons y reconnaître comme une certaine régularité :

- par des **Demandes de Reconstruction**, de **Demande de Rappel de la tâche**, l'enseignante obtient l'émergence ou la fabrication de la part des élèves, de signes primitifs sur lesquels bâtir des nouveaux signes ou des nouvelles significations :
- ensuite, les **Focalisations**, permettent, parmi tous les signes produits et partagés, d'en mettre en évidence certaines et de développer la réflexion en particulier sur les propriétés ou caractéristiques sémiotiquement pertinentes. Dans l'extrait cité ci-dessus, l'enseignante insiste sur l'aspect co-variationnel, sur le déplacement direct de P, sur le déplacement indirect de H et sur la trajectoire suivie par ce dernier point. Nous avons déjà vu que ces éléments ont une valeur cruciale dans le développement des signifiés de variable indépendante et dépendante.
- Les actions de **Demande de synthèse**, en revanche, donnent accès aux signes internalisés par les élèves au cours de la discussion collective, tout en sachant que les synthèses produites ont, en particulier, une double racine : et dans l'activité avec Cabri et dans l'activité de discussion collective. En fait, facilement, l'élève se réfère au milieu de l'artefact rencontré et il remploie des signes déjà introduits lors de la discussion collective.
- Enfin, par les **Synthèses**, l'enseignante récupère et fixe les signes et les signifiés retenus importants. Ces deux dernières actions ont une fonction de connexion et de complexification du réseau sémiotique, ayant elles la capacité de relier plusieurs éléments développés à des moments différents.

Enfinement, c'est avec ce premier groupe d'actions, que l'enseignante va pouvoir poursuivre et éventuellement actualiser lors de la discussion collective les objectifs d'apprentissage tels qu'on les a conçus *a priori*. Les différentes actions de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité** et de **Rappel de la tâche**, aussi que celle de **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri** ou **(Demande de) Exécution au rétroprojecteur** visent donc, en fonction des objectifs déjà fixés *a priori*, à la gestion de la contingence. Ces actions sont invariantes, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas de la contingence : elle portent toujours sur la reconstruction de l'activité avec l'artefact, sur les tâches données, sur le fonctionnement de ces outils mobilisés, sur la mise en commun des stratégies résolutive adoptées. Ce qui dépend de la contingence c'est le fait que, suivant l'implication progressive des élèves, l'enseignante utilise une action, plutôt qu'une autre. Par exemple, dans l'extrait cité ci-dessus, nous observons qu'elle choisit de rappeler la tâche, là où il s'agissait d'ouvrir un épisode nouveau (39) : en revanche, elle focalise la Dc quand elle est en train de se développer selon la direction souhaitée (41). Dans le premier cas, nous sommes face à l'ouverture d'un épisode nouveau, dans le deuxième, en plein milieu de ce même épisode.

### 2.1.1.2. Deuxième groupe : modification du milieu commun

Nous avons déjà vu, lors de l'approfondissement du premier groupe d'actions à dominante mésogénétique, comment l'enseignante procède à la **mise en place d'un nouveau milieu commun (attendu)** en « distillant » tous les éléments significatifs de l'activité qui déjà *a priori* étaient réputés à devenir signes des signifiés mathématiques visés. Cette reconstruction amène déjà un changement de signification des connaissances en jeu des milieux activés au départ.

Il s'agit dans ce paragraphe d'autres actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité professorale qui ont comme objectif de modifier au sens strict les milieux de départ, en introduisant des éléments absents lors de l'activité avec Cabri.

En termes de TMS, comme le premier groupe, ce deuxième groupe d'actions porte encore sur les phases de *constitution des signifiés* et de *dialectique entre signifiés personnels et signifié collectif*. Dans ce paradigme, la distinction entre actions liées à la **mise en place d'un milieu commun** et actions portant sur la **modification** du même ne serait pas clairement perceptible. Les actions des deux groupes seraient en effet, ramenées au même processus de *définition de l'espace intersubjectif* et à la même *gestion de la contingence*, dont nous avons parlé dans le cas des actions du premier groupe. Eventuellement, dans la TMS, au lieu de **modification d'un milieu commun**, nous pourrions parler de *redéfinition de l'espace intersubjectif* en opposition à une première définition de cet espace. En revanche, par une modélisation en termes de TdS, il est possible de saisir certaines modalités et causes déclenchant les moments où l'enseignante opère (ou est contraint d'opérer) des modifications substantielles du milieu de départ.

Nous constatons ainsi qu'un premier type de modifications du milieu s'impose nécessaire lors **d'une insuffisance du milieu**.

Cette insuffisance peut se décliner de différentes façons :

- Elle peut être due à l'insuffisance du milieu matériel qui ne permet pas de construire, par des rétroactions opportunes, des éléments appartenant à l'activité que l'enseignante, pourtant, considère nécessaires pour le développement des signifiés mathématiques. C'est le cas lors d'un constat perceptif, qui ne permet pas aux élèves de fournir une démonstration ou justification. L'enseignante peut alors demander de démontrer ou de justifier théoriquement une affirmation. Par exemple, à la fin de la première discussion collective, l'enseignante demande de justifier théoriquement l'équivalence (perceptive) des quatre constructions différentes du point H.
- Elle peut être aussi due, et à une insuffisance du milieu matériel ou du milieu constitué des objets mathématiques en jeu, et à une insuffisance de l'activité, au niveau des choix de conception, qui ne permet pas de valider une solution proposée ou d'étendre la discussion collective à d'autres solutions possibles. Nous verrons par la suite, un exemple de la manière possible dont l'enseignante gère une telle insuffisance.
- Elle peut être due à la disparition précoce d'un élément important, après qu'il a été introduit par un élève ou qu'il a été rencontré lors de la résolution d'une tâche avec l'artefact. Le risque que cet élément passe inaperçu ou soit finalement oublié, peut conduire l'enseignante à mettre en place des actions différentes pour le ramener au sein de la discussion collective.



Un deuxième type de modifications s'avère nécessaire lors de la mise en commun de problèmes rencontrés par un binôme particulier ou de la diffusion d'observations d'élèves sur des aspects de l'activité qui n'étaient pas prévus *a priori*. Ces cas correspondent à la gestion d'un **milieu commun qui s'avère plus riche que prévu**. Il s'agit d'un phénomène très naturel, dû au fait que les élèves n'ont pas à faire avec l'objet théorique tel quel. Ils y accèdent par des médiateurs sémiotiques, des IMS (Instruments de Médiation Sémiotique) et un réseau de signes qui amène, avec lui-même, aussi des caractéristiques différentes du prévu : des caractéristiques qui, parfois, peuvent être parasites mais qui, parfois, constituent une richesse ultérieure du signifié en cours d'élaboration. Tout se passe comme si les signifiés avaient un contour *vague*, indéfini, qui au fur et à mesure, va pouvoir se préciser et s'élargir.

Ces deux types de modifications correspondent à la nécessité de la part de l'enseignante de poursuivre les mêmes objectifs d'apprentissage globaux guidant la **mise en place** du milieu commun, malgré un milieu qui se révèle au contraire, pour des raisons différentes, instable. Elle a donc besoin de renégocier et de redéfinir un nouveau milieu commun. Ce qui change par rapport au premier groupe d'actions, c'est le fait que l'accommodation, l'instantiation dans l'instant particulier, des ces objectifs, est à la charge totale de l'enseignante. Dans la co-construction du milieu commun prévu, en revanche, l'instantiation est déjà prévue *a priori* par une certaine conception et articulation de l'activité donnée et par un certain déroulement prévu de la discussion collective.

Cependant, nous constatons aussi un troisième type de modifications du milieu commun qui correspond, soit à une transformation, de la part de l'enseignante, de la tâche initialement prévue, soit à l'introduction d'une nouvelle tâche. Cette transformation amène, alors, à une modification aussi des objectifs fixés *a priori* et elle est plus difficile à expliquer. Nous l'attribuons, d'une part, à la façon dont l'enseignante a internalisé les objectifs globaux (pour elle donc, son intervention mésogénétique ne serait pas une véritable changement), d'autre part, à la volonté de l'enseignante de modifier effectivement les objectifs mêmes. Dans cette deuxième éventualité, la modification des objectifs répond soit à une nécessité perçue par l'enseignante de simplifier la tâche, soit à une possibilité ouverte et perçue comme raisonnable, de la complexifier.

Par exemple, dans les trois extraits suivants, nous retrouvons trois raisons possibles pour une modification substantielle du milieu commun. Le premier extrait porte sur la gestion et la modification du milieu mis en place, là où cette mise en place est en quelque mesure insuffisante : le deuxième, concerne la gestion et la modification d'un milieu qui, au contraire s'est révélé plus riche que prévu. Enfin, le troisième extrait porte sur la modification du milieu par l'introduction d'une nouvelle tâche.

Ainsi le premier extrait, issu de la première discussion collective, montre comment l'enseignante développe un aspect implicite de l'activité avec Cabri (celui du point H obtenu par l'intersection de deux figures géométriques, non pas de trois) en vue de ses conséquences potentielles pour le développement des signifiés de variable dépendante et de image. Cette réflexion en fait constitue le début de tout un travail que l'enseignante va mener à la fois, sur l'image d'une fonction comme trajectoire/ensemble global et sur la variable dépendante comme image ponctuelle, sous-ensemble d'une image globale. Cet aspect implicite ne pouvait pas être mis en évidence directement par une validation organisée dans le milieu matériel.

Le deuxième extrait, provenant toujours de la première discussion collective, renvoie à l'épisode de « la composition de fonctions ». Cristina et Egizia lors de leur travail avec Cabri, se sont aperçues qu'en appliquant deux fois la macro « Effet1 »,

elles pouvaient obtenir un nouveau point H' qui à son tour dépend de H. Il s'agit d'un phénomène totalement imprévisible, observé par ce seul binôme, que l'enseignante transforme en une partie du vécu collectif, en raison de ses implications en termes de variable dépendante. Par des validations organisées dans Cabri et des observations spontanées des élèves, successivement bien saisies par l'enseignante, le déplacement indirect devient ainsi la caractéristique discriminante de tout signe de variable dépendante dans Cabri.

Le troisième extrait porte sur la discussion collective 13 et se réfère à l'épisode où l'enseignante est en train de relier des propriétés spatio-graphiques des graphes construits par les élèves dans Cabri, en suivant la méthode d'Euler, avec les propriétés algébriques de la fonction correspondante. Dans cette occasion nous observons une modification du milieu prévu, due à l'introduction par l'enseignante d'une tâche sensiblement différente de celle initialement prévue.

Dans les modifications du milieu commun, les actions qui revêtent un rôle crucial sont les actions d'**Organisation d'une validation commune, (ou de Demande d'organisation d'une validation commune) validation : de (Demande d') Exécution au rétroprojecteur, d'Evocation du milieu pour la validation, de Diffusion d'un problème ou d'un phénomène local et d'Evaluation par l'enseignante.** Nous avons vu que ces actions s'avèrent nécessaires ou opportunes justement parce que le milieu se révèle instable. Ainsi, par l'**Organisation d'une validation commune**, par exemple, l'enseignante met en place les conditions réelles pour une rétroaction opportune du milieu (in)validant une conjecture donnée. Cette action est souvent accompagnée par une action de **(Demande de) validation** et une action de **(Demande de) Exécution au rétroprojecteur** où la conjecture à tester est effectivement soumise à validation dans l'artefact par ses outils, éventuellement par un ou plusieurs élèves. Par une **Evocation du milieu pour la validation**, en revanche, l'enseignante recourt au milieu sans mettre en place des conditions pour une validation concrète. Elle évoque, par exemple, seulement certaines propriétés ou caractéristiques du fonctionnement de l'artefact ou certains résultats déjà obtenus afin de (in)valider une conjecture. Cette dernière action repose donc sur la mémoire individuelle ou collective de la classe. Par une **Demande de Confrontation entre une démarche élaborée lors de l'activité de discussion collective et une démarche élaborée lors de l'activité en binômes**, comme déjà noté, l'enseignante obtient la mise en relation d'un élément du milieu commun, en cours de construction lors du moment de discussion collective, avec un élément du milieu qu'un binôme particulier a pu rencontrer dans son activité avec Cabri. Par une action de **Diffusion d'un problème ou d'un phénomène local**, l'enseignante injecte dans le nouveau milieu commun, un phénomène ou un problème rencontré par un binôme particulier. Enfin, par une **Evaluation**, l'enseignante apporte un jugement de vérité dont le garant est l'enseignante elle-même dans son rôle institutionnel.

Si l'on considère ces actions, l'on observe, finalement, une dialectique entre deux manières différentes de façonner le milieu commun, deux pôles opposés et complémentaires.

D'une part, l'enseignante intervient sur la mésogenèse de la discussion collective en construisant un véritable milieu nouveau : elle offre à l'attention de toute la classe un problème local, organise éventuellement une confrontation entre le milieu en cours de fabrication et les milieux éventuellement activés précédemment par les binômes divers, puis elle développe les conditions pour une validation de l'objet de la discussion. Les actions de **Exécution au rétroprojecteur** et de **Demande d'exécution au rétroprojecteur** jouent alors, un rôle central car elles favorisent

l'implication de toute la classe dans cette construction collective et l'identification de chacun avec l'action et le vécu des autres.

D'autre part, l'enseignante intervient sur la mésogénèse en force de son rôle institutionnel et résout une contradiction ou un problème ou valide la solution d'une tâche par une action d'**Evaluation de l'enseignante**.

Même s'il s'agit d'une action qui se fonde exclusivement sur l'autorité de l'enseignant et qui n'est pas validée par des rétroactions du milieu, nous considérons cette action d'évaluation comme mésogénétique. En fait, elle joue un rôle pour la suite de la séquence puisque elle peut introduire, par exemple, un critère de validation ou de choix ou, encore, une règle du contrat, partagés par tout le monde.

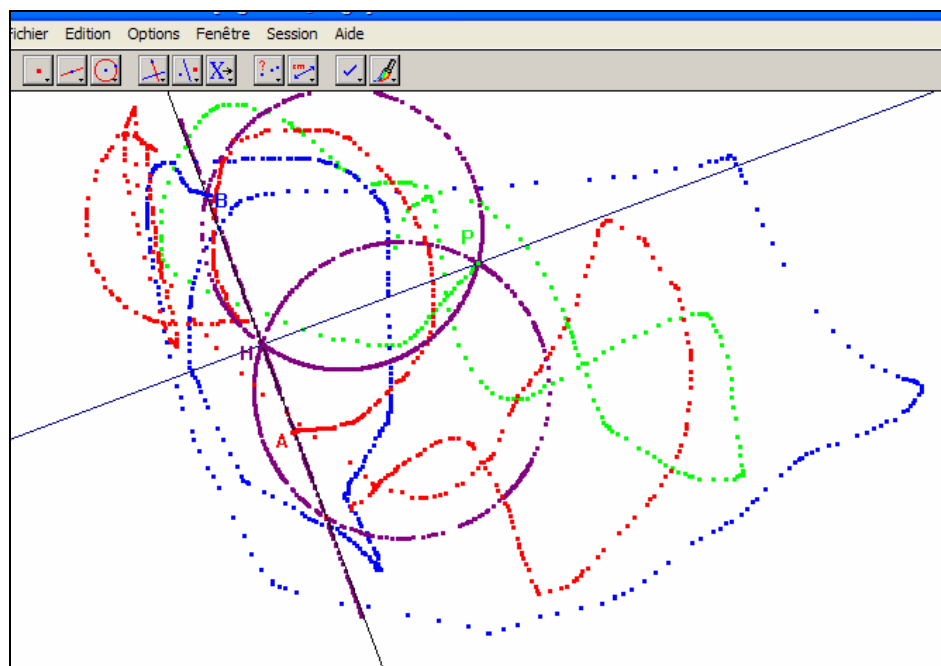
Entre ces deux pôles, il y a tout un continuum où ces deux tensions opposées s'articulent dialectiquement.

### 2.1.1.2.1. Premier extrait : exemple de modification d'un milieu insuffisant

Cette dialectique entre **Evaluation** et **Organisation d'une validation commune** est bien perceptible dans le premier extrait que nous analyserons (D1.txt (268 :279)). Au début, l'observation (90) de l'enseignante est caractéristique d'une évaluation. Son intervention n'est pas du tout problématisée. Ensuite, l'enseignante met en jeu les conditions pour une problématisation et une validation de son affirmation. Nous observons alors une modification réelle par rapport au milieu de départ. Cette modification peut être expliquée par une insuffisance initiale du même milieu. D'une part en fait, le milieu de départ ne permet pas de discriminer une solution partiellement inadaptée. D'autre part, cette solution repose sur une propriété dont l'évidence perceptive nécessite d'être démontrée.

90.	<i>P : [...] Alors je dit « on le voit ! » Pour quelle raison je peux dire autrement... que toutes les trois passent par H ?</i>	<i>P : Allora io dico « si vede ! » Perché posso dire altrimenti ? ... Che tutti e tre passano per H ?</i>	<b>Evaluation par l'enseignante : Focalisation sur l'insuffisance du constat perceptif et sur un trait significatif de l'activité</b>
91.	<i>Plusieurs voix (IGOR, CRISTINA, FILIPPO) : Eh... On le voit !</i>	<i>Più voci (IGOR, CRISTINA, FILIPPO) : Eh... si vede !</i>	
92.	<i>P : On le voit ! Car elles étaient deux seulement, non ? Et donc deux à deux, même si moi maintenant je les considère deux à deux... par exemple j'enlève cette droite-ci... En effet, H reste là ! En revanche, si j'enlève un cercle...</i>	<i>P : Si vede ! Perché se fossero due sole, no ? E quindi a due a due, anche se ora le vedo a due a due... per esempio vado a buttar via questa retta... in effetti H rimane lì, se invece butto via una circonferenza...</i>	<b>Organisation d'une validation commune : Exécution au rétroprojecteur :  Validation par le milieu reconnue par l'enseignante.</b>
93.	<i>IGOR : En effet, je veux dire, la droite qui passe par là, elle nous ne sert pas dans ce cas.</i>	<i>IGOR : In effetti, voglio dire, la retta che passa lì, non ci serve a nulla in questo caso.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève.</b>

L'extrait, que nous venons de lire, porte sur la reconstruction des solutions identifiées par les élèves, relativement aux quatre façons possibles de construire H (par intersection des deux cercles respectivement de diamètre [AP] et [BP], d'un cercle avec la droite (AB), de l'autre cercle avec la droite (AB) et de la projection de P sur la droite (AB)) (figure suivante).



**Figure 6.1 - H peut être obtenu par l'intersection intersection des deux cercles respectivement de diamètre [AP] et [BP], ou comme intersection d'une de ces deux cercles avec la droite [AB] ou, encore comme projection de P sur la droite [AB].**

Cependant, une réponse possible à la tâche posée est de considérer comme quatrième solution possible celle de l'intersection, à la fois, des deux cercles avec la droite. Le milieu de départ ne permet pas d'exclure cette possibilité. Au contraire, il donne une évidence perceptive d'une propriété géométrique, celle du fait que H appartient en même temps aux trois ensembles, propriété qu'il faudrait pouvoir démontrer. Dans l'extrait que nous venons de lire, l'enseignante, d'abord focalise l'attention des élèves sur le fait que les trois constructions géométriques (le cercle de diamètre [AP], celle de diamètre [BP] et la droite (AB)) passent toutes par H. Il s'agit tout au début d'une évaluation. Ensuite elle organise au rétroprojecteur, dans Cabri, une invalidation de la quatrième solution proposée par les élèves (celle de l'intersection des trois figures), en montrant que l'intersection de deux figures suffit. Dans la partie de Dc qui suit, elle conduira les élèves à observer le fait que la troisième figure passe, elle aussi, toujours par H, et qu'il s'agit d'une propriété dont il faut comprendre la raison et démontrer la validité.

En perspective, cette réflexion sur les façons différentes d'obtenir H entraînera des conséquences sur le développement des signifiés, à la fois, et de variable dépendante, et d'image d'une fonction. En fait, les élèves seront susceptibles de commencer à construire, d'une part, le signifié d'image d'une fonction géométrique, à la fois comme trajectoire d'un point, variable dépendante, et comme ensemble global et, d'autre part, le signifié de variable dépendante, comme image ponctuelle, sous-ensemble d'une image globale, obtenu, dans le cas particulier de l'activité, par l'intersection de deux images globales. Nous voyons donc qu'il s'agit bien d'un changement mésogénétique que l'enseignante a décidé d'introduire.

#### **2.1.1.2.2. Deuxième extrait : exemple de modification d'un milieu plus riche que prévu**

Le deuxième extrait que nous analyserons maintenant, porte sur un autre type de modification du milieu commun : celui qui s'avère nécessaire après la mise en commun d'un phénomène inattendu. Il s'agit donc d'une modification déclenchée par

l'observation d'un élève, que nous qualifions comme due à un **milieu plus riche que prévu**.

Cet extrait se situe au sein de l'épisode de « la composition de deux fonctions » (Annexe 3, § A3.1) après l'intervention mésogénétique de Cristina qui pose le problème d'interpréter le statut d'un point H', obtenu en appliquant deux fois la macro Effet1 (la deuxième fois en utilisant comme point de départ le même point H' obtenu par la première application). L'enseignante favorise la mise en commun de ce phénomène et l'implication de toute la classe dans le problème d'interprétation, par une action de **Diffusion d'un problème ou d'un phénomène local** et de **Demande d'exécution au rétroprojecteur**. Les élèves, ainsi sollicités, constatent eux-mêmes des propriétés caractéristiques du point H' et commencent à produire des explications et des interprétations possibles.

Nous pouvons observer, à nouveau, comment la dialectique entre **Evaluation** et **Organisation d'une validation commune** change le statut de l'affirmation de l'enseignante à propos du comportement (et de la nature : variable dépendante ou indépendante ?) de H'. Au début (intervention (292)) le comportement de H' est totalement défini par l'enseignante par son rôle institutionnel (**Evaluation**) : par le fait qu'elle connaît déjà la nature de ce nouveau point H'. Pourtant, pour les élèves il s'agit d'un nouvel élément encore inconnu. Le statut de l'affirmation de l'enseignante (292) change lorsque l'enseignante met en place les conditions pour sa validation (**Organisation d'une validation commune**). Elle devient alors une anticipation éventuellement à confirmer ou à infirmer. Il ne s'agit plus d'une vérité à laquelle croire, mais, d'une véritable conjecture commune dont, publiquement, chacun peut vérifier le fondement. Enfin, le fait de demander à Giacomo (295) de valider lui-même cette conjecture, contraint cet élève (et par lui toute la classe) à participer à cette modification du milieu commun de départ dont, à la différence de Cristina, il n'était pas à l'origine (D1.txt (818 :832)) :

289.	MAURO : H' bouge de la même façon !	MAURO : H' si muove uguale !	
290.	IGOR : Car c'est « Effet1 » qui lui donne cette relation là.	IGOR : Perché è l'« Effetto1 » che gli dà quella relazione lì.	
291.	MAURO : Peut-on bouger H' ?	MAURO : Si può muovere H' ?	
292.	P : Eh, non, je ne pense pas !	P : Eh, no, non penso !	<b>Evaluation par l'ens</b>
293.	CRISTINA : Qu'est-ce qu'il dit ?	CRISTINA : Com'è che ha detto ?	
294.	P : Si l'on peut bouger H'. Essaie?	P : Se si può muovere H'. Prova ?	<b>Organisation d'une validation commune : Demande de validation : Demande d'exécution au rétroprojecteur</b>
295.	GIACOMO : Eh, non ! Car H' maintenant est obtenu...	GIACOMO : Eh, no ! Perché H' adesso è ottenuto...	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
296.	CRISTINA : Non, car H' maintenant est obtenu de la première [fonction/relation/application de la macro « Effet1 »].	CRISTINA : No, perché H' è ottenuto dalla prima !	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>

A la différence du premier extrait, la validation que le milieu apporte relativement au comportement anticipé de H', est reconnue par l'élève lui-même (295). Ceci

donne une force de persuasion encore plus grande. La **Demande d'exécution au rétroprojecteur** a donc comme effet de faciliter l'entrée dans cette transformation du milieu, et l'appropriation de ces élèves qui n'ont pas été responsables de sa première modification.

En termes de TMS, nous pourrions alors dire que les actions d'**Organisation d'une validation commune** et d'**Evaluation** sont deux actions qui ont finalement comme objectif celui de redéfinir l'espace intersubjectif sous la poussée d'événements en partie prévisibles, en partie non prévisibles. Ce choix de rebondir ou non sur des événements imprévisibles se place justement dans l'espace de liberté de l'enseignante.

### 2.1.1.2.3. Troisième extrait : exemple de modification d'un milieu par l'introduction d'une nouvelle tâche

Le troisième extrait que nous analyserons porte sur un troisième type de modification du milieu commun, celle due à l'introduction par l'enseignante d'une nouvelle tâche (et d'un objectif nouveau). Nous avons constaté ce troisième type de modification lors de l'analyse de la discussion collective 13, où nous avons observé, aussi, un autre type d'action relatif à l'**Organisation d'une validation commune**. Il s'agit de la mise en place d'une validation non plus par le milieu matériel mais par l'injection dans le milieu d'autres critères de validation. Il s'agit donc d'une validation non plus pragmatique mais intellectuelle : l'enseignante, afin d(e) (in)valider une intervention d'élève, récupère dans le milieu de la discussion collective, des connaissances déjà présumées et possédées par l'élève même (D13\_23\_10\_02.rtf (261 :271))<sup>70</sup> :

129.	<i>P : [...] Et cette propriété, selon vous, algébriquement c'est-à-dire que à 2 et à -2 il vaut le même, à 3 et à -3 il vaut le même, elle est donnée par quoi?</i>	<i>P : [...] E questa proprietà, secondo voi, algebricamente, cioè che a 2 e a -2 valga lo stesso, a 3 e a -3 valga lo stesso, da cosa è data ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité</b>
130.	<i>CRISTINA : C'est qu'il y a le carré !</i>	<i>CRISTINA : Che c'è il quadrato !</i>	
131.	<i>P : Du fait que le x apparaît seulement au carré. Car si, au lieu d'avoir <math>x^2+5</math>, on avait <math>x^2+5+x</math>, alors cette fonction ressentait du fait [subissait l'influence du fait] ... Alors, par exemple, au lieu de mettre x... qu'est-ce que je pouvais mettre ? +x élevé au... combien?... Pour qu'elle reste symétrique ?</i>	<i>P : Dal fatto che compare la x solo al quadrato. Perché se invece di essere <math>x^2+5</math> fosse stato anche <math>x^2+5+x</math>, allora questa funzione risentiva del fatto... Allora, per esempio, invece che mettercelo x... cosa ci potevo mettere ? +x alla quanto?... Perché rimanesse simmetrica ?</i>	<b>Introduction/modification d'une tâche</b>
132.	<i>CRISTINA : Une valeur positive !</i>	<i>CRISTINA : Un valore positivo !</i>	
133.	<i>P : 3 aussi est positif !</i>	<i>P : Anche 3 è positivo !</i>	<b>Organisation d'une validation commune</b>
134.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire, je voulais dire pair !</i>	<i>CRISTINA : Cioè, volevo dire, pari !</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>

<sup>70</sup> Lors de cette thèse, l'écriture du type : (D13\_23\_10\_02.rtf (261 :271)), signifie que nous faisons référence au document D13\_23\_10\_02.rtf, tel comme il est affiché par Atlas.ti dans le CD-rom ci-joint. En particulier, les nombres (261 :271) signifient que nous sommes en train d'en reporter un extrait qui correspond aux lignes 261 jusque à 271.

Ce micro épisode relatif à la discussion collective 13, nous montre l'actualisation de deux autres actions de l'enseignante à dominante mésogénétique, qui sont cruciales dans la **modification du milieu commun**. Comme déjà anticipé, il s'agit des actions d'**Introduction/modification d'une tâche**<sup>71</sup> et de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité**. Ces deux actions, en particulier la première, peuvent participer à l'injection dans le milieu d'une nouvelle tâche problématique<sup>72</sup>. Dans l'extrait, l'enseignante change la question de départ et introduit une tâche qui est sensiblement différente : une chose est de reconnaître le fait que, si la fonction est symétrique relativement à un axe vertical, cela est dû au fait que la variable indépendante se présente toujours au carré, une autre est d'étendre le discours à toutes les fonctions paires. D'une part, nous pouvons interpréter la question de l'enseignante (131) comme une tentative de mettre à l'épreuve Cristina, pour voir s'elle a vraiment compris, ou si la réponse donnée (130) était seulement fruit d'un effet de contrat. De ce point de vue, cette modification du milieu serait, alors, du même type que les autres actions à dominante mésogénétique. D'autre part, nous pourrions aussi interpréter cette action comme un changement volontaire du milieu de la part de l'enseignante, qui a saisi l'occasion de pousser plus loin la discussion. Il s'agirait alors, d'un troisième type de modification du milieu, lié à la représentation que l'enseignante -même a du milieu, des objectifs d'apprentissage prévus et des objectifs atteignables. De ce deuxième point de vue on aurait une évidence ultérieure du fait que la mise en place du milieu commun et sa modification progressive est un processus dynamique, sensible tant aux contributions des élèves, qu'à la représentation que l'enseignante se fait à chaque instant de l'état des connaissances atteignables. D'une part, donc, cet exemple pourrait illustrer ce que Vygotsky appelle la Zone de Développement Proximale, c'est-à-dire la zone des apprentissages potentiels et atteignables, dans laquelle, métaphoriquement, l'expert (dans notre cas l'enseignante) peut accompagner l'apprenant qui même en ayant toutes les connaissances nécessaires, il ne serait pas capable d'y s'aventurer tout seul. D'autre part, il nous montre un aperçu de la culture de cette classe, qui n'est pas celle d'une classe ordinaire. Visiblement, puisque nous avons identifié d'autres exemples similaires, l'enseignante a l'habitude à prendre le risque de complexifier la tâche.

Bien évidemment les actions d'**Organisation d'une validation commune** ne sont pas exclusives de la seule modification du milieu commun. On retrouve ce type d'actions aussi dans le premier groupe, c'est-à-dire dans la première reconstruction du milieu commun. Cependant, dans le cas d'une modification du milieu commun, ces actions introduisent explicitement des éléments nouveaux. En revanche, dans la reconstruction collective (mise en place du milieu commun attendu), il y a plutôt la reproduction collective d'une validation par le milieu déjà observée lors de l'activité en binômes.

Nous avons choisi, donc, de placer cette action dans le deuxième groupe, car nous estimons que, même quand il s'agit d'un répétition simple d'une validation déjà reconnue, par le seul fait de être refaite, cette action a un effet mésogénétique de

---

<sup>71</sup> L'action d'**Introduction/modification d'une tâche** peut être aussi considérée comme une action à dominante mixte puisqu'elle est susceptible de produire un effet chronogénétique, c'est-à-dire de changer le déroulement attendu des savoirs.

<sup>72</sup> En fait, l'action de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité**, en plus de permettre l'insertion dans le milieu commun de la discussion collective, des éléments attendus de l'activité, peut aussi injecter dans le milieu un élément *a priori* inattendu. Dans l'extrait cité ci-dessus, il était prévu que l'enseignante faisait le lien entre la propriété de symétrie de la fonction et sa parité. En revanche, il n'était pas prévu d'étendre tout de suite ce discours à toutes les fonctions paires.

transformation du milieu<sup>73</sup>. En outre, dans la majorité des cas, il ne s'agit pas simplement de répéter une validation reconnue par tout le monde. En fait, nous observons que l'enseignante décide de réorganiser une validation par le milieu d'un aspect de l'activité déjà rencontré lors du travail en binômes, s'elle s'aperçoit que cela pose encore problème pour certaines élèves. Dans ce cas, l'action de **Organisation d'une validation commune** est bien une modification du milieu commun ou moins pour ces élèves-là.

### 2.1.1.3. Complémentarité des deux processus

La TdS nous a amené à observer et modéliser des phénomènes, que nous pouvons bien placer au cœur de la TMS. D'une part, ce cadre théorique inspiré aux travaux de Brousseau (1998), nous a permis de reconnaître le fonctionnement de l'enseignante qui, sur un continuum possible entre évaluation et validation, essaie toujours de favoriser cette dernière, en organisant dans le milieu les conditions pour sa production. D'autre part cette analyse nous a montré, justement, l'importance qui revêt pour l'enseignante le milieu. Elle le travaille sans cesse. En particulier, nous avons identifié deux manières différentes de façonner le milieu et deux groupes d'actions correspondantes : l'une portant sur la mise en place du milieu commun attendu, l'autre sur sa modification. Il s'agit de deux processus complémentaires qui s'articulent au fur et à mesure et l'où la répartition respective des actions relatives n'est pas mutuellement exclusive.

La complémentarité des ces deux processus et le rôle ambivalent de certaines actions sont bien illustrés par l'exemple de l'action de **Demande de Confrontation entre une démarche élaborée lors de l'activité de discussion collective et une démarche élaborée lors de l'activité en binômes**. Par cette action, l'enseignante obtient la mise en relation du milieu que la classe est en train de fabriquer lors de la discussion collective avec celui que chaque binôme (ou un élève particulier) a, séparément, et rencontré et construit lors du travail avec Cabri. Cette action peut, donc, répondre à trois objectifs principaux. Soit le milieu commun est devenu de plus en plus éloigné des milieux réellement activés par chaque binôme. Dans ce cas, l'enseignante vise ainsi à récupérer ces derniers dans le nouveau milieu commun en cours de co-construction. Soit cette action a pour but de conduire les élèves à une confrontation et à une prise de conscience de la différence existante entre les signifiés personnels élaborés lors de l'activité avec l'artefact et le signifié collectif qui est en train de se développer. Soit, encore, cette action sert à l'enseignante à mettre en place des conditions pour (in)valider collectivement, toujours par confrontation, une stratégie précédemment adoptée par un binôme particulier.

Dans l'extrait suivant, issu de la discussion collective 13, par exemple, la **Demande de Confrontation entre une démarche élaborée lors de l'activité de discussion collective et une démarche élaborée lors de l'activité en binômes** amène à l'**Organisation d'une validation commune** et, par cela, à la prise de conscience de la part de Mattia que sa propre stratégie de construction du graphe ne correspond pas à la méthode proposée par Euler. L'enseignante sait bien que la méthode de Mattia n'est pas celle d'Euler. Elle sait aussi que Mattia croit, pourtant,

<sup>73</sup> Finalement toute transformation du milieu commun participe à la co-construction d'un même milieu. Ce qui donne du sens à la distinction entre les deux groupes d'actions est le décalage entre prévu et imprévu. Dans la **mise en place du milieu commun attendu** ce qui est prédominant est l'adhérence au déroulement prévu et à l'activité avec l'artefact. En revanche, ce qui est déterminant dans ce que nous appelons **modification** de ce même milieu commun, est la gestion de la contingence et de ce qui se passe effectivement dans la classe.



d'avoir bien résolu la tâche de traduire dans Cabri la méthode du grand mathématicien. Ainsi elle a demandé à Mattia de reconstruire publiquement, au rétroprojecteur, dans Cabri, la méthode d'Euler (D13\_23\_10\_02.rtf (035 :043)) :

17.	<i>MATTIA : Après on prend un autre point et ces deux points vont former un segment qui prendra le nom de x qui est la valeur de...</i>	<i>MATTIA : Poi si prende un altro punto e questi due punti formeranno un segmento che prenderà il nome di x che è il valore di...</i>	
18.	<i>P :... des abscisses. Et toi, tu as fait comme ça dans Cabri ?</i>	<i>P :... dell'ascissa. E te hai fatto così in Cabri ?</i>	<b>Demande de Confrontation entre une démarche élaborée lors de l'activité de discussion collective et une démarche élaborée lors de l'activité en binômes</b>
19.	<i>MATTIA : Oui.</i>	<i>MATTIA : Sì.</i>	
20.	<i>P : C'est-à-dire que tu as pris une droite ?</i>	<i>P : Cioè hai preso una retta ?</i>	<b>Organisation d'une validation commune</b>
21.	<i>MATTIA : Non... J'ai pris... une droite, j'ai fait le point, mais après j'ai fait le Nombre.</i>	<i>MATTIA : No... lo ho preso... una retta, ho fatto il punto, poi però ho fatto il Numero.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>

Il suffit à l'enseignante de demander à Mattia si lui-aussi, comme Euler, a pris une droite (20), pour que Mattia se rende tout de suite compte (21) que sa démarche de construction du graphe n'était pas la même d'Euler. En effet, Mattia a pris d'abord un nombre, puis avec l'outil de Cabri Report de mesure, il a transporté ce nombre sur une droite. Pour modifier la variable indépendante, il devait agir donc sur le nombre initial. En revanche, dans la méthode d'Euler, on agit directement sur un point variable qui appartient à une droite donnée et dont la distance (avec signe) par rapport à un point fixe de cette droite représente la variable indépendante. Cet extrait nous montre, à nouveau, le choix qui se pose à l'enseignante entre l'Evaluation et l'Organisation d'une Validation. L'enseignante sait que la méthode de Mattia ne correspond pas à la méthode d'Euler. Pourtant, elle ne choisit pas d'évaluer directement et négativement cette stratégie, mais de créer un milieu favorable à son invalidation. Ce choix peut être expliqué par des raisons différentes. Elle peut être due à la volonté de l'enseignante de mettre en valeur, par opposition à la méthode proposée par Mattia, les spécificités de la méthode d'Euler. De ce point de vue, cette **Demande de confrontation entre une démarche élaborée lors de l'activité de discussion collective et une démarche élaborée lors de l'activité en binômes** serait donc bien liée au processus de **mise en place** du milieu commun attendu.

Cependant, on pourrait interpréter cette action aussi comme étant due à la volonté de l'enseignante de diffuser une méthode spécifique d'un binôme particulier qui présente de l'intérêt pour toute la classe. De ce point de vue cette action serait alors destinée à contribuer à une **modification** du milieu prévu au profit d'un enrichissement de ce milieu.

## 2.1.2. Analyse des actions à dominante mésogénétique issue du paradigme de la TMS

Les actions que nous venons d'analyser, nous éclairent sur la façon dont l'enseignante se sert de l'artefact pour construire un nouveau milieu commun différent des milieux rencontrés par chaque binôme. Maintenant nous approfondirons des actions d'une autre nature, qui répondent à d'autres critères. Même étant identifiées à partir du point de vue de la TMS, nous les avons qualifiées comme actions à dominante mésogénétique : elles pourraient être très bien réinterprétées en termes d'actions de **Focalisation**, de **Synthèse**, de **Reconstruction coopérative et sélective**, de **Diffusion d'un problème ou d'un phénomène local** etc. Cependant nous avons décidé de garder distincts ces deux points de vue et nous avons décidé de croiser l'analyse en termes de milieu, avec une analyse issue des recherches au sein de la TMS. Ce choix, même s'il a amené à une redondance partielle, nous a permis d'intégrer l'analyse déjà faite par une autre perspective : à la différence des actions décrites précédemment, les actions que nous analyserons maintenant, influencent, elles-aussi, la mésogénèse mais en agissant explicitement sur les paroles prononcées<sup>74</sup>. Une analyse en terme de milieu n'aurait pas spécialement considéré la forme verbale avec laquelle, par exemple, une **Focalisation** où une **Synthèse** est conduite. Dans cette nouvelle analyse la forme du discours est en elle-même prise en compte comme moyen d'action de l'enseignante.

Portant explicitement sur les paroles, ces actions revêtent donc un rôle fondamental dans la constitution et dans la complexification du réseau sémiotique. Cela explique pourquoi elles ont été identifiées à partir d'un autre point de vue et appartiennent à une autre tradition d'analyse, celle élaborée au sein de la TMS.

Ces actions, déjà mises en valeur par les recherches de Bartolini-Bussi et ses collègues (Bartolini Bussi, Boni et Ferri, 1995b : Bartolini Bussi, 1998a) et qui, étant génériques de l'action professorale jouent un rôle important dans le processus de médiation sémiotique sont : le **Reflet**, la **Paraphrase**, la **Généralisation** et la **Spécification**. Grâce à notre analyse *a posteriori*, nous avons pu en préciser la fonction au sein d'une discussion collective.

### 2.1.2.1. Troisième groupe : Reflet et Paraphrase

Le **Reflet** comme la **Paraphrase** désigne une action, de type exclusivement langagier, dans laquelle l'enseignante reprend le contenu informationnel d'une ou plusieurs interventions d'élève. En particulier, le **Reflet** indique la répétition par l'enseignante d'une ou plusieurs interventions. Il peut s'accompagner (éventuellement) d'une précision ou d'une correction ultérieure, qui, néanmoins ne modifie pas sa signification. La **Paraphrase**, au contraire, reprend le contenu informationnel d'une ou plusieurs interventions d'élèves, en en modifiant la formulation et en introduisant des éléments nouveaux.

#### 2.1.2.1.1. Le Reflet

Le **Reflet** a, le plus souvent, une fonction à dominante mixte : à la fois mésogénétique et chronogénétique. Il correspond à la mise en place d'une sorte de « jalon » afin de scander la progression, le « défilé » des objets de savoir. Il peut alors servir à quatre objectifs fondamentaux :

<sup>74</sup> Nous affirmons qu'elles modifient toutefois le milieu car elles contribuent à la fois à la co-construction du milieu commun et à sa modification substantielle, mais cela par une action directe sur la forme du discours.

## 1. accompagner et relancer le discours.

Par exemple, si l'on reprend l'épisode (D13\_23\_10\_02.rtf (035 :043) et si on le continue, on observe que, par cette action, l'enseignante accompagne le discours de Mattia dans sa reconstruction de la méthode adoptée pour construire le graphe de la fonction donnée (D13\_23\_10\_02.rtf (043 :049)) :

21.	<i>MATTIA : Non... J'ai pris... une droite, j'ai fait le point, mais après j'ai fait le Nombre...</i>	<i>MATTIA : No... lo ho preso... una retta, ho fatto il punto, poi però ho fatto il Numero...</i>	
22.	<i>P : Nombre</i>	<i>P : Numero</i>	<b>Reflet</b>
23.	<i>MATTIA :... et le Report de la longueur...</i>	<i>MATTIA :... e il Trasporto della lunghezza...</i>	
24.	<i>P : Et le Report de la longueur... pour trouver le segment...</i>	<i>P : E il Trasporto della lunghezza, per trovare il segmento...</i>	<b>Reflet</b>
25.	<i>MATTIA : ... sur la droite. Après j'ai vu que tout bougeait !</i>	<i>MATTIA : ... sulla retta. Poi ho visto che mi si muoveva tutto !</i>	

## 2. canaliser le discours vers un objectif visé.

Elle peut donc entrer dans la catégorie des actions de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité** (D1.txt 141 :159) :

44.	<i>IGOR : Mais faut-il démontrer que H bouge sur cette droite-ci ?</i>	<i>IGOR : Ma bisognerebbe dimostrarlo che H si muove su questa retta ?</i>	
45.	<i>P : Faut-il le démontrer... avant tout il faut comprendre ce que c'est autrement comment peut-on démontrer quelque chose ?</i>	<i>P : Bisognerebbe dimostrarlo... prima di tutto bisogna capire che cos'è altrimenti come facciamo a dimostrare qualcosa ?</i>	<b>Reflet</b>
46.	<i>IGOR : C'est-à-dire qu'est ce que c'est cette droite-ci ?</i>	<i>IGOR : Cioè che cos'è quella retta lì ?</i>	
47.	<i>P : C'est-à-dire qu'est cette droite-ci... Où qu'est une autre chose :</i>	<i>P : Che cos'è quella retta lì... O che cos'è un'altra cosa.</i>	<b>Reflet</b>
48.	<i>IGOR : Qu'est ce que c'est le point H ?</i>	<i>IGOR : Che cos'è il punto H ?</i>	
49.	<i>P : Qu'est ce que c'est le point H ! Attends, faisons intervenir quelqu'un d'autre sinon j'ai peur qu'il va se rendormir... Mattia... vas-y !... Après qu'est ce que je peux faire ?</i>	<i>P : Che cos'è il punto H ! Aspetta, facciamo intervenire anche qualcun altro che se no ho paura che mi si addormenti... Mattia... dai !... Poi cosa posso fare ?</i>	<b>Reflet</b>
50.	<i>MATTIA : Bouger les autres points... A et B.</i>	<i>MATTIA : Muovere gli altri punti... A e B.</i>	
51.	<i>P : Bouger les autres points... Alors par exemple je bouge A ?...</i>	<i>P : Muovere gli altri punti... Allora per esempio muovo A ?...</i>	<b>Reflet</b>

## 3. réintroduire dans la discussion collective un élément crucial qui risque de passer inaperçu.

Dans l'extrait qui suit, l'intervention (124) de l'enseignante récupère dans le discours l'observation de Filippo qui avait défini la fonction en termes de relation.

## 4. statuer définitivement sur la validité d'une observation et clore une « unité de discours » (un « épisode » comme nous l'avons appelé) Dans ce cas,

l'action de **Reflet** se révèle alors être la forme particulière prise par une action d'**Evaluation** ou de **Validation commune**.

Toujours dans l'extrait suivant (D1 369 :385), l'intervention (129) de l'enseignante en ratifiant la validation reconnue par Cristina et Igor, l'évalue positivement et conclut l'épisode :

124.	<i>P : [...] Alors je vous dis... Voyez-vous dans toute cette chose une fonction c'est-à-dire une relation... lui, Filippo, il était en train de dire... une relation qui lie ?</i>	<i>P : [...] Allora vi dico... ci vedete in tutta questa cosa una funzione, cioè una relazione... lui stava dicendo Filippo... una relazione che lega ?</i>	<b>Reflet</b>
125.	<i>FILIPPO : Trois points... C'est-à-dire le quatrième, par exemple B dans ce cas... c'est-à-dire il pourrait même y être [exister] ou ne pas y être [exister] et, éventuellement en prenant le cercle de diamètre [PB] on pourrait exclure A... C'est-à-dire que A, ne nous a pas servi.</i>	<i>FILIPPO : Tra tre punti... Cioè il quarto, per esempio il punto B in questo caso, cioè ci potrebbe anche essere o non essere e magari prendendo la circonferenza di diametro PB si potrebbe escludere A... Cioè a noi A non è servito !</i>	
126.	<i>P : Mais après, comment peux-tu le trouver ? Car je peux faire le cercle de diamètre [PB] et après ? L'autre cercle ou l'autre droite comment peux tu la trouver si tu exclus A ?</i>	<i>P : Ma poi però come lo trovi ? Perché posso fare la circonferenza di diametro PB e poi ? L'altra circonferenza o l'altra retta come la trovi, se escludi A ?</i>	<b>Evocation du milieu pour la validation</b>
127.	<i>CRISTINA : Tu ne peux exclure un [point] !</i>	<i>CRISTINA : Non puoi escluderne nessuno!</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
128.	<i>IGOR : Eh non !... Les trois points servent tous les trois !</i>	<i>IGOR : Eh no... i tre punti servono tutti e tre.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
129.	<i>P : Les trois points servent tous les trois !</i>	<i>P : I tre punti servono tutti e tre !!</i>	<b>Reflet : Evaluation : Validation par le milieu reconnue par l'enseignante : Clôture de phase</b>

Comme nous l'avons vu, le **Reflet**, étant une action linguistique peut avoir plusieurs rôles. Dans l'extrait précédent, en répétant (129) la validation des élèves, l'enseignante statue sur sa validité. Par ce **Reflet**, donc, elle opère deux actions à la fois : elle **reconnait une validation par le milieu** et **évalue** positivement l'intervention des élèves.

Cet extrait donne ainsi une autre évidence expérimentale : nous ne pouvons dire que l'intervention (129) est, à la fois, une **Validation reconnue** et une **Evaluation** que grâce à la présence de cette action de **Reflet**. Pour cette raison nous avons condensé respectivement ces actions dans les expressions : **Validation par Reflet** ou **Evaluation par Reflet**.

Cet extrait, nous montre, donc, comment l'identification de ces actions peut jouer un rôle fondamental dans la modélisation de la chronogenèse (attendue ou effective) d'une discussion collective. Ce rôle a été mis en lumière et souligné pour la première fois par Margolinas (1992, 2004). A cette occasion ce chercheur a pointé l'attention sur le fait qu'identifier des actions de ce type permet un découpage de la discussion collective en épisodes didactiquement pertinents. C'est aussi notre avis : nous considérons le déroulement d'une discussion collective comme le développement

d'une activité composée d'une série de tâches, caractérisées par des objectifs spécifiques (prévus par l'ingénierie de la séquence ou perçus comme tels soit par l'enseignante soit par l'élève). Dans cette perspective, souvent, les actions de **Validation par Reflet** et d'**Evaluation par Reflet** marquent la clôture d'une phase<sup>75</sup>.

### 2.1.2.1.2. La Paraphrase

A la différence de l'action du **Reflet**, la **Paraphrase** a surtout une fonction mésogénétique. Elle peut contribuer à modifier au sens propre le milieu, favorisant l'injection, par le discours, d'éléments absents. Mais elle peut aussi amener un autre type de modification : agissant sur le discours, soit elle permet de changer la signification potentielle à attribuer aux objets du milieu, soit elle permet de changer les mots à disposition des élèves, et, par cela, le réseau sémiotique qui est en train de se tisser. C'est la raison pour laquelle nous lui reconnaissons une très forte vocation sémiotique.

Elle peut, donc, servir à quatre objectifs fondamentaux :

1. Participer à la **modification** (au sens propre) du nouveau milieu commun, en intégrant un phénomène intéressant rencontré précédemment par un binôme particulier. Dans ce cas, cette action se combine souvent avec une action de **Résonance forte**<sup>76</sup> et correspond à la forme prise par une action de **Diffusion d'un problème ou d'un phénomène local** (D1.txt 185 :202) :

61.	<i>MATTIA : Nous nous sommes demandé comment bouger les points pour faire tout le cercle.</i>	<i>MATTIA : Noi ci siamo chiesti come muovere i punti per far fare tutta la circonferenza.</i>	
62.	<i>P : Ah oui ! Eux... (en se référant au groupe Mattia - Nicola) ils ont été les seuls qui se sont posé ce problème intéressant, c'est-à-dire où il fallait bouger B pour l'avoir tout, le cercle. Car, vous voyez, en effet, si je ne le bouge pas assez, disons... c'est-à-dire si je le bouge seulement sur ce petit segment-ci, disons, par exemple, en effet, je n'obtiens pas tout le cercle. Et de là, ils se sont posés le problème de comment le bouger pour l'avoir... Même si j'arrive jusque là, je n'arrive pas à l'avoir toute... Maintenant si je continue je ne le sais pas...</i>	<i>P : Ah si. Loro... (riferendosi al gruppo Mattia - Nicola) sono stati gli unici che si sono posti un problema interessante, cioè dove si doveva muovere B per averla tutta, la circonferenza. Perché vedete, in effetti, se io non lo muovo abbastanza, diciamo... cioè se io lo muovo solo su questo segmentino qui, diciamo, per esempio, io in effetti non la ottengo tutta la circonferenza e quindi loro si erano posti il problema di come muoverlo per averla... Anche se arrivo fin qui non ce la faccio ad averla tutta... Ora se vado avanti non lo so...</i>	<b>Diffusion d'un problème ou d'un phénomène local : Paraphrase de l'intervention 61 :</b>  <b>Exécution au rétroprojecteur</b>

2. Modifier la signification potentielle du milieu matériel déjà existante et permettre la mise en évidence d'éléments de sémiosis potentielle de

<sup>75</sup> Cependant les actions de **Evaluation par Reflet** ou de **Validation par Reflet** ne sont pas les seules à marquer la clôture d'un épisode. Comme Margolinas (1992) le dit, « ce n'est pas, ou pas seulement l'existence d'une réponse verbale du professeur qui marque une conclusion mais le fait que la tâche se referme, que la question est considérée comme réglée par le professeur et par l'élève ». Ainsi d'autres actions encore statuent sur la fermeture d'une question et le changement de phase, comme par exemple les **Synthèses** ou simplement les changements d'objet de la discussion par **Rappel de la tâche** (suivante) ou par **Ouverture dialogique à un autre élève** (sur un autre sujet).

<sup>76</sup> Nous approfondirons les actions de **Résonance** dans le paragraphe consacré aux actions à dominante chronogénétique (cf. Chapitre 6, par. 5.1.1)

l'activité. Cette modification s'opère seulement au niveau du discours : les éléments du milieu, au contraire, sont conservés tels quels.

Dans l'extrait cité ci-dessous, l'enseignante paraphrase l'intervention d'Igor portant sur la première reconstruction de l'activité avec Cabri. La façon dont l'enseignante change le contenu informationnel de l'intervention de cet élève, modifie la perception potentielle que les élèves pourraient avoir du milieu commun en cours de construction (D1.txt 90 :120).

32.	<i>IGOR : C'est-à-dire qu'elle est la construction... il y a caché derrière une construction une construction qui permet de... de dessiner le point H à partir des points A, B et P.</i>	<i>IGOR : Cioè è la costruzione che... c'è nascosta dietro una costruzione che permette di... di disegnare il punto H a partire dai punti A, B e P.</i>	
33.	<i>P : « Effet1 » condense, en le cachant, une construction qu'après vous avez découverte... Et qu'est ce qu'elle fait cette construction ?</i>	<i>P : « Effetto1 » condensa, nascondendola, una costruzione che poi avete scoperto... E che cosa fa questa costruzione ?</i>	<b>Paraphrase</b> de l'intervention 32
34.	<i>FILIPPO : Elle construit un point.</i>	<i>FILIPPO : Costruisce un punto.</i>	
35.	<i>IGOR : Elle construit le point H... Car nous avons fait...</i>	<i>IGOR : Costruisce il punto H... Perché noi abbiamo fatto...</i>	
36.	<i>P : Elle construit le point H à partir de ?</i>	<i>P : Costruisce il punto H a partire da ?</i>	<b>Reflète</b>
37.	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : De trois points.</i>	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Dai tre punti.</i>	

A la demande de l'enseignante, Igor (32) donne une première interprétation de ce qu'il considère être la Macro Effet1. L'enseignante reprend le contenu informationnel d'Igor, en le reformulant (33) : elle introduit l'expression métaphorique « *condense, en le cachant* » et la distinction entre, d'une part, « qu'est-ce que la macro ? », d'autre part, « que fait-elle ? ». De même, lors du tour de parole (36), elle « reflète » les interventions de Filippo (34) et Igor (35) pour diriger la classe vers l'explicitation de tous les éléments géométriques constitutifs de la relation de dépendance. Si l'on observe le réseau sémiotique associé au signe de macro (cf. Chapitre 8), nous avons situé dans ce bref extrait le germe embryonnaire du développement de l'axe associé au signifié de fonction comme « machine à I/O ».

La modification du milieu apportée par une action de **Paraphrase** n'est pas de même nature que les actions du premier et du deuxième groupe. On n'ajoute pas d'autres éléments au milieu comme ce pourrait être le cas dans une **Exécution au rétroprojecteur**, ou une **Organisation d'une validation** nouvelle. Ici l'enseignante conserve les mêmes d'objets et phénomènes, mais, en les décrivant ou expliquant de façon différente, seulement grâce à l'usage de certaines paroles, modifie les interprétations potentielles des élèves.

- (Ré)introduire une « expression » complexe, comme par exemple « *en fonction de* », en la fondant sur une signification expérientielle. Cet objectif est tout à fait différent du premier et ressemble plutôt au deuxième : il ne s'agit plus de modifier le milieu mais de modifier les mots à dispositions des élèves, en l'occurrence le nouveau signe « en fonction de » (D1.txt 493 :500) :

168.	<i>FILIPPO : C'est un point fixe qu'on ne peut pas déplacer.</i>	<i>FILIPPO : È un punto fisso che non è possibile spostare.</i>	
169.	<i>IGOR : C'est-à-dire qui bouge... en bougeant les autres points.</i>	<i>IGOR : Cioè che si muove... muovendo gli altri punti.</i>	

170.	<i>P : Il bouge en fonction des autres [points], c'est-à-dire que tout seul je ne peux pas le déplacer, je peux le déplacer seulement si je déplace les points dont il dépend.</i>	<i>P : Si muove in funzione degli altri, cioè per conto proprio io non lo posso spostare, lo posso spostare solo se sposto i punti da cui dipende</i>	<b>Paraphrase</b> des interventions 168 et 169
------	--	---	--

Il est à noter qu'a pu être identifiée une action que nous avons qualifiée de « **Faux** » **reflet**. Il s'agit d'une action où l'enseignante déclare reprendre une intervention précédente d'élève, mais, en réalité, cette formulation n'a soit pas eu vraiment lieu soit n'a pas du tout la signification que l'enseignante lui attribue.

Par exemple dans l'extrait qui suit l'enseignante fait mine de reprendre l'expression « données initiales » d'un élève (D1.txt 511 :512) :

172.	<i>P : [...] Variables indépendantes : ce d'où on part, quelqu'un, si je ne me trompe pas, avait dit données initiales, que nous, dans une construction, avons toujours.</i>	<i>P : [...] Variabili indipendenti : quello da cui si parte ... qualcuno se non mi sbaglio aveva detto i dati iniziali, che noi in una costruzione abbiamo sempre.</i>	« <b>Faux</b> » <b>reflet</b>
------	--	---	-------------------------------

En réalité, personne n'avait utilisé cette expression. La seule expression qu'on peut trouver et qui lui ressemble est « points initiaux ». Cependant, en analysant la transcription, on découvre que cette dernière expression a été précédemment employée à deux occasions seulement, toujours et seulement par l'enseignante.

Elle s'en est servie, au début, pour renvoyer aux trois points auxquels s'applique la macro « Effet1 » (D1.txt (212 :217)) :

67.	<i>P : alors, cela dit, résumons tout ça : nous avons ces trois points A, B et P initiaux : je leur applique une chose magique qui après, maintenant, n'est plus autant magique que ça, car plus ou moins j'ai compris ce que c'est...</i>	<i>P : Allora, detto quindi questo, riassumiamo la cosa : abbiamo questi tre punti A, B, e P iniziali : ci applico una cosa magica che poi, ora, non è più così magica perché bene o male ho capito cos'è...</i>
-----	--	--

Elle s'en est servie aussi dans une action de **Paraphrase** pour relier l'expression « être en fonction de » avec le signe-pivot « relation » (D1.txt (389 :393)) :

131.	<i>P : H est en fonction des trois points... oh ! Quelle phrase magique !... H est en fonction des trois points... Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors quelle était cette chose qui faisait apparaître le point H, pour nous ?</i>	<i>P : H è in funzione dei tre punti... oh ! Frase magica !... H è in funzione dei tre punti... Quindi potremmo dire che H è il risultato di una certa relazione, come avevi detto te, che gioca sui tre punti iniziali che sono A, B e P. E allora che cos'era questa cosa che faceva comparire il punto H, per noi ?</i>
------	--	--

Par le « **Faux** » **reflet** de l'intervention 172 (D1.txt 511 :512), l'enseignante débouche, ainsi, sur la particularisation de la définition de variable indépendante relativement, tant aux points initiaux auxquels l'on applique la macro, qu'aux données initiales de la construction géométrique sous-jacente. Cette action a donc une fonction à dominante mésogénétique très proche de celle des actions de **Paraphrase** du deuxième type car elle permet de modifier la signification potentielle du milieu.

Comme pour les actions de **Paraphrase** du premier type, l'action de « **Faux** » **Reflet**, elle aussi, permet la modification du nouveau milieu commun par l'intégration d'un phénomène intéressant rencontré précédemment par un binôme particulier. Là

encore, nous pouvons lui reconnaître une fonction à dominante mésogénétique. Par exemple dans l'exemple présenté ci-dessous, l'enseignante affirme reprendre ce qui avait été dit par un élève. En réalité, cela n'est pas vrai (voir l'extrait relatif (D1.txt 185 :202)) : ce qu'elle reprend, en fait, c'est le phénomène auquel le binôme avait fait référence, dans le but d'en introduire une nouvelle interprétation en termes mathématiques (D1.txt (690 :703)) :

239.	<i>P : Et l'image ?</i>	<i>P : E l'immagine ?</i>	
240.	<i>CRISTINA : Et l'image est la droite (AB).</i>	<i>CRISTINA : E l'immagine è la retta (AB).</i>	
241.	<i>IGOR : Est sur la droite (AB).</i>	<i>IGOR : È sulla retta (AB).</i>	
242.	<i>P : Est sur la droite (AB). Ok, donc je pourrais faire aussi des fonctions en disant... eh Mattia, ici on voit un peu ce que toi tu disait... le domaine je ne dit pas qu'il est partout, P je le fais bouger sur quelque chose, P je l'oblige à rester sur quelque chose, par exemple, P je l'oblige à rester sur un petit segment par exemple celui-ci. Donc, à ce point, vous voyez que si P je le bouge ici, c'est-à-dire que je l'oblige à rester ici, vous voyez que je ne l'obtiens pas [la droite], en revanche elle ne passe même pas par A et par B.</i>	<i>P : È sulla retta AB. Ok, quindi io potrei fare anche delle funzioni dicendo il dominio... eh Mattia, qui si vede un po' quello che dicevi te... il dominio io non dico che è ovunque, P lo faccio muovere su qualcosa, P lo obbligo a stare sopra qualcosa, per esempio, P lo obbligo a stare su un segmentino, per esempio questo. Quindi, a questo punto, vedete, che se P lo muovo qui, cioè lo obbligo a stare qua, vedete che non l'ottengo tutta (la retta), anzi addirittura non passa per A e per B.</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b>  <b>« Faux » Reflet</b>

A nouveau, nous pouvons constater que ce type d'action accompagne une action de **Résonance forte**, dont nous parlerons plus loin.

#### 2.1.2.2. **Quatrième groupe : Spécification / Généralisation**

Les actions de **Spécification / Généralisation** et de **(Demande de) Spécification / Généralisation** sont aussi de type exclusivement langagier et issues de la tradition et de l'analyse en termes de TMS. A la différence des autres actions de ce type, elles ne reprennent pas spécialement le contenu informationnel d'une intervention précédente. Mais, en sauvegardant, éventuellement, un noyau central, elles opèrent un changement significatif du référent : du contextualisé au decontextualisé et *vice versa*.

Pour Bartolini-Bussi (Bartolini Bussi, Boni et Ferri, 1995b : Bartolini Bussi, 1998a), le double mouvement de **Spécification/Généralisation**, c'est-à-dire le passage du contextualisé au decontextualisé et *vice versa* caractérise profondément le processus de médiation sémiotique et l'évolution des signes. Notre analyse *a posteriori* a permis de mieux élargir et préciser telles catégories. D'une part, elle nous a conduit à étendre la notion de **Spécification/Généralisation** à d'autres actions que les **Paraphrases** (comme c'était le cas dans les analyses de Bartolini-Bussi et de ses collègues). D'autre part, elle nous a amené à distinguer respectivement deux types différents d'actions de **Spécification** et deux types particuliers d'actions de **Généralisation** : celle de **Spécification** au sens strict et celle de **Particularisation** : celle de **Généralisation par Universalisation** et celle de **Généralisation par Extension du Domaine de Validité**. En outre, notre analyse a bien mis en évidence la fonction différente jouée respectivement par de telles actions en rapport à d'autres,



que nous avons jugées spécifiques du travail de sémiotique, comme celle d'**Interprétation**, dont on parlera dans les paragraphes suivants.

Bien qu'elles soient dérivées de la tradition d'analyse de la TMS, nous avons qualifié ces actions comme étant à dominante mésogénétique. En effet, elles permettent d'opérer un changement du milieu. Les actions de **Spécification**, étant le plus souvent la façon dont une **Focalisation** ou une **Reconstruction** s'actualise<sup>77</sup>, contribuent à rendre présent dans le milieu de la discussion, des objets ou des propriétés du milieu qui étaient absents, indéterminés ou incertains. Ces actions contribuent donc à modifier effectivement le milieu à disposition des élèves. En revanche, les actions de **Généralisation**, comme certaines actions de **Paraphrase**, ne peuvent agir sur le milieu même que de manière indirecte. En fait, elles peuvent aussi modifier exclusivement la signification des objets en jeu et donc l'interprétation possible que les élèves pourraient se faire de ces objets.

### 2.1.2.2.1. (Demande de) Généralisation

On entend par **(Demande de) Généralisation**, toute action langagière qui (demande d'élargir) élargit le « domaine de référence » d'un énoncé.

Notre analyse *a posteriori* nous a amené à en distinguer au moins deux types différents :

#### ➤ (Demande de) Généralisation par Universalisation.

L'énoncé passe, graduellement, d'un référent bien spécifique de l'activité à un référent de plus en plus générique.

Le processus de généralisation associé, se développe donc en plusieurs temps. Par exemple, d'abord on constate que l'enseignante parle de la macro « Effet1 » particulière, puis d'une macro générique dans un contexte choisi, puis encore de toutes les macros de Cabri. Les indicateurs de ce type de discours sont : l'emploi de noms communs au lieu de noms propres, du temps présent : de quantificateurs universels, d'adverbes de temps comme « toujours », le passage du singulier au pluriel, à des termes génériques comme « chose », « objets ».

Changer progressivement le référent change l'objet du discours et, par conséquent, change le milieu avec lequel les élèves sont confrontés. Souvent, dans une action de **Généralisation**, nous observons la persistance, sur un deuxième plan, de l'ancien référent, normalement associé à l'artefact et à l'activité spécifique, combinée avec l'introduction, en premier plan, d'un nouveau référent universel.

#### ➤ (Demande de) Généralisation par Extension du domaine de validité.

Cette action permet d'étendre la validité d'un énoncé à un domaine ou à une situation différents de celui auquel cet énoncé se réfère.

Par exemple, dans l'extrait qui suit, l'enseignante étend, au domaine du papier-crayon, la validité d'une observation saisie et valable dans Cabri (D1.txt 426 :430) :

144.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée.</i>	<i>CRISTINA : Cioè dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta</i>	<b>Généralisation par Universalisation de l'élève</b>
------	---	--	---

<sup>77</sup> Nous avons choisi d'analyser ces actions en termes de **Spécifications** et pas seulement en termes de **Focalisations** car nous considérons les processus associés (du spécifique au général, du decontextualisé au contextualisé) comme étant langagiers. L'enseignante joue beaucoup sur la forme du discours, elle instancie, précise puis généralise et vice versa. Ces actions donc participent au processus de sémiotique.

145.	<i>P : Derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée, que vous avez découverte et que, après, vous pouvez ne pas avoir Cabri et faire sur papier.</i>	<i>P : Dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta, che voi avete scoperto, che poi, potete non avere Cabri e fare su carta.</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b> <b>Généralisation par Extension du domaine de validité</b>
------	---	--	---

Cet extrait montre comment, au contraire de la **Généralisation par Universalisation**, l'action **Généralisation par Extension du domaine de validité**, permet de modifier concrètement le milieu. La référence directe au travail en papier-crayon correspond à l'introduction d'un élément nouveau du milieu qui modifie le domaine de validité de l'énoncé de Cristina (145), puisqu'il change les critères de validité à disposition des élèves.

C'est en particulier par ces actions de **Généralisation par Universalisation** et de **Généralisation par Extension du domaine de validité** que l'enseignante obtient la décontextualisation, dépersonnalisation et détemporalisation de l'activité : d'une part, elle passe d'un élément spécifique ou contingent à un son représentant universel, d'autre part elle étend la pertinence d'un énoncé hors des confins mêmes du contexte de l'activité.

#### 2.1.2.2.2. (Demande de) Spécification et (Demande de) Particularisation

On désigne par **(Demande de) Spécification** toute action qui permet de réduire l'indétermination d'un énoncé précédent.

Lors de notre analyse *a posteriori*, nous en avons distingué deux types :

➤ **(Demande de) Spécification au sens strict<sup>78</sup>.**

Cette action permet de préciser ou de développer le contenu informationnel d'une intervention précédente. Elle n'est pas, pourtant, caractérisée par la volonté d'établir un lien interprétatif entre différents systèmes (familles) des signes, mais, seulement de conduire à l'explicitation des éléments implicites de la discussion. Elle a donc essentiellement une fonction mésogénétique et s'accompagne souvent d'autres actions à dominante mésogénétique.

En reprenant l'extrait déjà cité (D1.txt 437 :456), par exemple, elle se combine avec un **Rappel de la tâche** et un **Reflet** et participe à la mise en place du milieu commun attendu :

39 :	<i>P : [...] Car qu'est-ce qui vous a été dit ? C'est-à-dire dans le « qu'est-ce que vous devez faire » ?</i>	<i>P : [...] Perché cosa vi è stato detto ? Cioè nel « cosa dovevate fare » ?</i>	<b>Rappel de la tâche</b>
40.	<i>IGOR : Il fallait dire... d'abord si je bougeais le point A les points qui bougeaient et les points qui ne bougeaient pas...</i>	<i>IGOR : Bisognava dire... prima se spostavo il punto A i punti che si muovevano e i punti che non si muovevano...</i>	
41.	<i>P : Ok... alors, par exemple, en bougeant P, je vois que seulement H bouge et, pas seulement ça, essayons de le condenser un peu [essayons de résumer un peu tout ça]... je vois aussi qu'il bouge... ?</i>	<i>P : Ok... allora, per esempio, movendo P, io vedo che si muove solo H... e non solo... vediamo di condensarlo un attimo... vedo anche che si muove... ?</i>	<b>Spécification</b> <b>Demande de spécification :</b> <b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité</b>
42.	<i>IGOR : ... Sur une droite.</i>	<i>IGOR : ... Su una retta.</i>	

<sup>78</sup> Dès maintenant, nous nous référerons à une action de **(Demande de) Spécification au sens strict**, en utilisant brièvement l'expression **(Demande de) Spécification**.

43.	<i>P : Sur la droite (AB)</i>	<i>P : Sulla retta (AB).</i>	<b>Reflet avec spécification</b>
-----	-------------------------------	------------------------------	----------------------------------

Comme pour les autres actions de type exclusivement langagier, l'action de **Spécification** peut avoir plusieurs rôles. Dans l'exemple précédent, elle constitue la forme prise par une action de **Focalisation sur un trait significatif de l'activité**. C'est même justement par cette action de **Spécification** qu'on peut affirmer que l'intervention (41) de l'enseignante correspond à une action de **Focalisation**. Dans d'autres cas, elle sert à réaliser une action de **Résonance faible** ou **forte**, dont nous parlerons dans les paragraphes suivantes.

➤ **(Demande de) Particularisation.**

Cette action permet l'instanciation à un contexte ou à un cas particulier, d'un énoncé qui a une portée plus générale. Quand la **Particularisation** réalise le passage d'une famille de signes à une autre, nous l'avons considérée comme étant une action à dominante mésogénétique spécifique du travail de sémiotique et nous en développons l'analyse dans les paragraphes suivants.

Dans l'extrait qui suit, en revanche, l'action de Particularisation de l'enseignante (330) amène seulement à préciser le domaine de référence de l'observation de Cristina et, en se positionnant explicitement par rapport à l'artefact, elle ramène la discussion au contexte de l'artefact (D1.txt (930 :943) («*si, moi, les deux points, je les fais coïncider, je n'ai plus la droite (AB), j'aurais un nombre infini de droites qui passent par ce point, mais la droite (AB), je l'ai perdue* ») :

327.	<i>CRISTINA : Mais une droite peut dégénérer ? C'est-à-dire par un point on ne peut pas avoir une droite ?</i>	<i>CRISTINA : Ma una retta può degenerare ? Cioè per un punto non può esserci una retta ?</i>	<b>Généralisation par extension du domaine de validité par l'élève</b>
328.	<i>P : Alors, par un point combien en passe-t-il ?</i>	<i>P : Allora, per un punto quante ce ne passano ?</i>	
329.	<i>CRISTINA : Une infinité.</i>	<i>CRISTINA : Infinita.</i>	
330.	<i>P : Une infinité... de droites... Le problème est que si, moi, les deux points, je les fais coïncider, je n'ai plus la droite (AB), j'aurais un nombre infini de droites qui passent par ce point, mais la droite (AB), je l'ai perdue.</i>	<i>P : Infinita... di rette... Il problema è che se io i due punti li porto a coincidere non ho più la retta (AB), avrò infinite rette che passano per quel punto, ma la retta (AB) l'ho persa</i>	<b>Reflet avec spécification</b>  <b>Particularisation</b>

Ce qui correspond donc à l'action de **Spécification** mais qu'on pourrait définir « de sens inverse », c'est, donc, l'action de **Généralisation par Universalisation**. En fait, au contraire de l'action de **Spécification**, dans l'action de **Généralisation par Universalisation**, l'enseignante obtient la perte « relative » (c'est-à-dire par rapport à une partie précédente du discours) d'un certain degré de détail au profit d'une extension du référent potentiel.

En revanche, ce qu'on pourrait considérer comme le « dual » de l'action de **Particularisation**, c'est l'action de **Généralisation par Extension du domaine de validité**. En effet, si par cette dernière action, l'enseignante étend la validité d'un énoncé à domaine différent celui de départ : dans la **Particularisation**, elle va, au contraire, en réduire la généralité, en l'appliquant, justement, à un cas particulier.

## 2.2. Première synthèse intermédiaire

Avant de procéder à l'analyse d'autres actions à dominante mésogénétique, nous voudrions souligner certains éléments d'analyse dégagés jusqu'à ici.

Premier élément. Nous avons décidé de procéder à une analyse des actions de l'enseignante à dominante mésogénétique, en distinguant entre « actions génériques de l'activité professorale, intervenant dans le processus de médiation sémiotique » et « actions spécifiques du travail de sémosis ».

Nous avons ainsi pu remarquer, dans le cas bien particulier d'une discussion collective, un grand nombre d'actions qu'on pourrait identifier ailleurs, dans d'autres contextes sociaux et d'autres séquences expérimentales.

Deuxième élément. S'il est vrai que, dans la gestion d'une discussion collective, le professeur dispose et met à l'œuvre de très nombreux mécanismes qu'on pourrait rencontrer en dehors de la constitution d'un processus de médiation sémiotique, en revanche, dans ce processus, ces mécanismes jouent un rôle très spécifique. En permettant l'ancrage du discours dans la phénoménologie de l'activité avec l'artefact, ils sont cruciaux pour la création et le développement des premiers signes, les signes-artefact. Nous avons vu, que les actions du premier groupe, par exemple, participent à la distillation et à la mise en place d'éléments du nouveau milieu commun attendu, destinés à devenir signes des signifiés mathématiques cible. Les actions du deuxième groupe permettent d'intégrer d'autres éléments, négligés ou imprévus *a priori*, observés par un binôme particulier ou considérés nécessaires ou simplement pertinents par l'enseignante, susceptibles d'élargir ou préciser le potentiel sémiotique initial. Les actions du troisième et quatrième groupe, en revanche, permettent aussi un autre type de transformation de ces signes. En agissant directement sur les mots prononcés et en tissant des liens réciproques entre les différentes familles de signes, elles modifient l'interprétation que les élèves peuvent au fur et à mesure se fabriquer. Finalement, toutes ces actions, considérées comme susceptibles de façonner le nouveau milieu commun, amènent à la création d'un espace intersubjectif dans lequel l'enseignante peut guider au développement du signifié collectif attendu. Cette notion de milieu, issu de la TdS, nous a donc amené à mieux préciser cette métaphore fondamentale de la TMS de l'espace intersubjectif. En outre, puisque la construction de cet espace est nécessaire au processus d'internalisation, notre analyse a permis de fournir des éléments ultérieurs aussi par rapport à cette dernière notion fondamentale de la TMS.

Troisième élément. La notion de milieu joue un rôle crucial. C'est pourquoi l'organisation de validations a une place très importante dans l'activité du professeur. Nous pouvons nous demander pourquoi cette organisation de validations est si pertinente pour la constitution de signes. En fait, dans la TdS, l'organisation de validations est fondamentale et, pourtant, elle ne prend pas, du tout, un point de vue sémiotique. En réalité, l'exigence de donner du sens aux objets théoriques en jeu est une priorité commune aux deux cadres théoriques. En outre, ceci est dû à une hypothèse faite tout au début, liée à la construction même de la séquence et au rôle que nous attribuons, en particulier, à l'artefact. L'artefact incorpore les connaissances mathématiques visées et met à disposition des outils spécifiques. La validation, en particulier à partir de l'artefact, favorise donc l'élaboration des signifiés personnels, de manière forte et consistante avec ces objectifs mathématiques.

Du point de vue de la TMS, les élèves élaborent leurs connaissances à partir de signes construits au cours d'activités spécifiques avec l'artefact. Ces signes prennent leur premier sens, c'est-à-dire leur première signification, par rapport aux rétroactions organisées. Successivement grâce au discours de l'enseignante et des autres élèves, ainsi qu'à d'autres actions organisées dans le milieu commun de la

discussion collective, l'élève est amené à internaliser les signifiés collectifs et à faire évoluer les signifiés personnels relatifs aux signes donnés.

Finalement, nous pouvons dire que cette distinction a conduit à observer que le fonctionnement d'une discussion collective n'est pas totalement et complètement différent d'autres situations collectives, non explicitement caractérisées par un processus de médiation sémiotique. En revanche, il y a certaines actions qui contribuent vraiment à la spécificité de ce processus. C'est à ces actions que nous consacrerons les paragraphes suivants.

### 2.3. Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis identifiées *a posteriori*

Toutes les actions décomptées dans la catégorie que nous approfondissons ci-dessous ont été identifiées exclusivement par une analyse *a posteriori*. Cette catégorie rassemble, en particulier, toutes les actions que nous avons reconnues comme étant spécifiques au travail de sémosis, c'est-à-dire au travail de construction des différents signes issus et de la phénoménologie de l'artefact et de l'activité. Cette catégorie contient aussi toutes les actions relatives à la création des liens interprétatifs entre les différents signes et les nouveaux objets mathématiques auxquels ces signes commencent à se référer. Il s'agit d'un groupe d'actions que nous avons identifié à partir d'une analyse à dominante interprétative, c'est à dire à partir des notions propres à la TMS. Nous l'avons quand même qualifié « à dominante mésogénétique » car nous considérons tout le travail de fabrication de signes dérivés de l'artefact et d'établissement des relations entre ces signes et les objets mathématiques potentiels, comme faisant partie du processus de façonnement et de modification progressive du milieu de la discussion collective.

#### 2.3.1. Premier groupe : Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné : Demande d'explicitation des signifiés construits (lors de la résolution d'une tâche) : Référence indirecte au travail de sémosis

Considérons les extraits suivants. Le travail d'explicitation des signifiés personnels relatifs à la fonction, commence dès le début (D1.txt 057 :059) :

4.	<i>P : [...] Avant tout avons nous une idée de ce qu'est une fonction ? Car cette-ci devrait être notre première question...</i>	<i>P : [...] Prima di tutto, abbiamo noi un'idea di che cosa è una funzione ? Perché questa dovrebbe essere la prima domanda...</i>	<b>Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné</b>
----	--	---	---

Il poursuit, encore (D1.txt 057 :059) :

16.	<i>P : [...] En tout cas, avant tout je voudrais connaître quelle est votre idée de fonction, car, apparemment quelqu'un de vous a déjà en tête une idée embryonnaire.</i>	<i>P : [...] Comunque, prima di tutto, vorrei sapere la vostra idea di funzione, perché qualcuno di voi ha già in testa un'idea primitiva a quanto pare</i>	<b>Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné</b>
-----	--	---	---

Il semble se conclure juste avant le début de la reconstruction collective de l'activité dans Cabri (D1.txt 085 :086) :

26.	<i>P : Hum, bien. Il me semble une idée très embryonnaire et je suis</i>	<i>P : Hum, va bene. Mi sembra un'idea molto primitiva e ho</i>	<b>Evaluation Mise en évidence</b>
-----	--	---	--

	<i>contente de cette chose car ainsi nous pouvons la construire par nous-mêmes.</i>	<i>piacere di questa cosa perché così ce la possiamo costruire</i>	<b>d'une ignorance</b>
--	---	--	------------------------

Du point de vue de la TMS, nous pourrions affirmer que ce premier moment **d'Explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné**, suivi de la mise en évidence d'une ignorance (26) contribue à déclencher le processus de dévolution aux élèves, de l'enjeu interprétatif.

Cependant, cette action, comme les différentes actions de **Demande d'explicitation des signifiés construits (lors de la résolution d'une tâche)** et de **Référence indirecte au travail de sémiotique**, n'apparaît pas seulement au début de la discussion collective. Elle surgit, très clairement, à chaque fois que l'enseignante est conscient de l'introduction (par elle même comme par un élève particulier) d'un signe qui pourrait avoir déjà, chez les élèves une signification, potentiellement conflictuelle avec celle qu'elle est en train de développer. Ainsi, nous retrouvons la même dynamique dans le cas de l'introduction des signes de « domaine » et « image » (D1.txt 526 :529) :

176.	<i>P: [...] Alors maintenant nous avons deux petits mots à introduire, qui sont, je ne sais pas si vous les avez déjà entendus [...]. Un mot est le « domaine » et l'autre mot est l'« image ». Avez-vous déjà parlé de ça en physique, quand vous avez fait la droite ?</i>	<i>P: [...] Allora, adesso abbiamo altre due paroline da introdurre, che sono, non so se ne avete mai sentito parlare, [...]. Una è il « dominio » e una è « l'immagine ». Ne e avete parlato a fisica, quando avete fatto la retta ?</i>	<b>Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné</b>
------	--	---	---

En outre, les actions de **Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné** ne se limitent pas seulement aux moments de la constitution de ce que nous avons appelés les « signes-mathématiques ». Nous observons ces actions aussi pour les signes-artefact. Dans ce dernier cas, elles se combinent souvent avec des actions de **Demande (implicite) d'interprétation**, ou de **Focalisation** et de **Référence indirecte au travail de sémiotique** (D1.txt 057 :059) :

30.	<i>P: Ok, alors, arrêtons nous ici... Ici il y a quelque chose... c'est-à-dire si je devais voir cet « Effet1 »... Qu'est ce que c'est selon vous la Macro « Effet1 » ?</i>	<i>P: Ok, allora, fermiamoci qui... Qui c'è un qualcosa... cioè se io dovessi vedere questo « Effetto1 »... che cos'è secondo voi la Macro « Effetto1 » ?</i>	<b>Focalisation Référence indirecte au travail de sémiotique Demande (implicite) d'interprétation</b>
-----	---	---	---

A nouveau, comme pour les actions de **Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné** du point de vue de la TdS, nous pourrions attribuer à cette action de **Demande (implicite) d'interprétation** (que nous observons ici, mais qu'on rencontre tout au long des discussions collectives) un rôle pertinent dans le processus de dévolution, aux élèves, de la tâche d'interprétation. En particulier, en contribuant à rendre manifestes aux élèves les attentes de l'enseignante, elle porte explicitement sur le contrat, c'est à dire sur le travail requis.

Le travail d'**explicitation des signifiés personnels construits (lors de la résolution d'une tâche)** ou **des signifiés personnels relatifs à un signe donné** n'est donc ni une activité préalable ni optionnelle. Il constitue, avec les autres actions spécifiques au travail de sémiotique, le cœur du processus médiation sémiotique.

Du point de vue de la TMS, les actions de **Demande d'explicitation des signifiés personnels construits (lors de la résolution d'une tâche)** et de **Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné** sont préparatoires à toute autre activité, puisqu'elles permettent un travail direct sur les signes produits lors de l'activité dans Cabri et de l'activité de discussion collective. Quand l'enseignante veut faire émerger les signifiés personnels relatifs à un signe donné ou élaboré au cours de telles activités, elle a différentes possibilités.

Soit, elle amène les élèves à produire eux-mêmes les signes qu'ils considèrent comme importants. C'est ainsi le sens d'une **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité**, d'une **Demande de Rappel de la Tâche** ou d'une **Synthèse**, dont nous avons déjà parlé (cf. Chapitre 6, § 2.1.1.1). C'est pourquoi, en adoptant le point de vue de TMS, nous avons appelé génériquement, toutes ces actions, **Demandes d'explicitation des signes construits (lors de la résolution d'une tâche)**.

Soit, elle donne, tout de suite, le signe dont elle veut l'explicitation des signifiés personnels et demande aux élèves d'explicitier et expliquer ce qu'ils considèrent comme le signifié associé. C'est alors le cas d'une action de **Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné**.

En outre ce type d'actions actualise une préoccupation propre à la TMS (et à toute théorie d'inspiration vygotkienne) : la centralité de la « construction de l'auto-conscience ». Toutes les actions de l'enseignante qui exigent un travail, plus ou moins explicite, sur les signifiés et les signes ont, en effet, comme objectif la prise de conscience de la part des élèves du contenu et de la signification de sa propre expérience de l'activité. Ces actions nous parlent, donc, d'une modalité de travail en classe, c'est-à-dire d'un contrat didactique, qui est, de ce point de vue, très particulier.

C'est dans cette même perspective qu'il faut lire la **Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné** que l'enseignante formule à la fin de la discussion collective (D1.txt 858 :883) :

300.	<i>P : Qui veut faire un résumé de ce que j'ai dit moi ?... Mais je le veux de la part de quelqu'un qui n'a pas parlé... Mauro !</i>	<i>P : Chi se la sente di fare un riassunto di tutto quello che ho detto io ?... Ma lo voglio da qualcuno che non ha parlato... Mauro !</i>	<b>Demande de faire la synthèse</b>
301.	<i>MAURO : Moi non !</i>	<i>MAURO : lo no !</i>	
302.	<i>P : Vas-y, Mauro, puisque tu as été attentif, tu peux le faire! Prends ton temps.</i>	<i>P : Dai, Mauro, che sei stato attento e lo puoi fare ! Con calma.</i>	
303.	<i>MAURO : Ce que j'ai compris ?</i>	<i>MAURO : Quello che ho capito ?</i>	
304.	<i>P : Oui, vas-y, ce que tu as compris !</i>	<i>P : Sì, dai, quello che hai capito !</i>	<b>Demande d'explicitation des signifiés construits</b>
305.	<i>MAURO : C'est-à-dire... pratiquement il y a des choses qu'on peut prendre d'autres choses qui sont indépendantes... qui sont les points A, B et P. H est formé par une construction qui dérive de A, B et P, donc H dépend de la position...</i>	<i>MAURO : Cioè... praticamente ci sono delle cose che si prendono da altre che sono indipendenti... che sono i punti A, B e P. H è formato da una costruzione che deriva da A, B e P, quindi H dipende dalla posizione...</i>	
306.	<i>P : ... de la position des trois points A, B et P. Donc la fonction qu'est ce que c'est pour toi ?</i>	<i>P : ... Dalla posizione dei tre punti A, B e P. Quindi la funzione che cos'è per te ?</i>	<b>Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs</b>

			<b>à un signe donné</b>
307.	<i>MAURO : La fonction pour moi est... c'est-à-dire qu'elle serait une construction que pratiquement... on obtient par plusieurs moyens... qui dérivent de...</i>	<i>MAURO : La funzione per me è... cioè sarebbe una costruzione che praticamente... si ottiene da più modi... che derivano da...</i>	
308.	<i>P : De quels points ?</i>	<i>P : Da quali punti ?</i>	<b>Demande de Spécification</b>
309.	<i>MAURO : A, B et P</i>	<i>MAURO : A, B e P</i>	
310.	<i>P : Ok. [...]</i>	<i>P : Ok. [...]</i>	

La **Demande** de l'enseignante de **faire la synthèse** (300) se transforme tout de suite en **Demande d'explicitation des signifiés construits** (304), puis en **Demande de signifiés personnels relatifs à un signe donné** (306) et en **Demande de Spécification** (308) afin de permettre à l'élève de prendre conscience et d'expliciter sa signification personnelle de l'activité. Cela se produit là où un autre type de contrat aurait pu exiger, au contraire, l'explicitation du savoir déjà institutionnalisé. Il s'explique, peut-être, par la nécessité pour l'enseignante d'accéder aux signes construits par cet élève pour poursuivre, de là, leur développement.

### 2.3.2. Deuxième groupe : (Demande d') Interprétation (dans l'artefact « Cabri », dans l'artefact « texte d'Euler », dans les mathématiques)

La construction des signifiés mathématiques se réalise grâce à la transformation progressive des éléments du discours sur l'activité. Nous avons vu que par des actions de généralisation diverses (en particulier les actions de **Généralisation par Universalisation** et **Extension du domaine de validité**), l'enseignante obtient ainsi la décontextualisation, la dépersonnalisation et la détemporalisation de l'activité même. Elle arrive à « dépouiller » l'activité de toutes ses particularités (ses « accidents ») et à en « distiller les invariants », ce qui doit pouvoir rester valable pour toute autre activité, dans tout autre contexte, pour tout autre élève. Toute cette transformation complexe fait partie du processus, bien plus ample, d'**Institutionnalisation**. Nous pouvons même affirmer que ce dernier trouve dans les moments de discussion collective son apogée.

Cependant, nous considérons que la construction des signifiés mathématiques s'opère aussi, grâce (et surtout) à la construction véritable de systèmes de signes et des liens interprétatifs mutuels. Cette hypothèse est autant plus forte dans le cas de notre séquence, spécifiquement bâtie en fonction du processus de médiation sémiotique.

Dans ce contexte expérimental certains éléments du milieu de l'activité sont établis et développés au fur et à mesure en tant que signes-artefacts, susceptibles de se référer aux signifiés mathématiques visées. Ils sont constitués comme signes grâce à un rapport particulier avec les objets mathématiques signifiés. Ce rapport peut être « d'iconicité » et alors, par exemple, les points qui bougent librement dans Cabri, peuvent signifier, par des « qualités » (c'est-à-dire par des attributs ou des caractéristiques) semblables aux « qualités » qu'on prête aux variables indépendantes, des « objets mathématiques qui varient arbitrairement ». Ces mêmes signes-là pourront posséder aussi un caractère « d'indexicalité » ou « de symbolité », toujours au sens de Peirce (cf. Chapitre 1, § 5.1.6.1). Parallèlement, d'autres familles de signes (les signes-mathématiques) se référant, elles-aussi, aux signifiés mathématiques visées sont aussi introduites et développées, mais cela grâce à un rapport de « convention ». Ainsi, par exemple, l'on décidera



conventionnellement que le mot « paramètre » désigne des variables indépendantes particulières. Les signes-mathématiques-là seraient, alors, des « symboles » au sens de Peirce.

Dans un processus de médiation sémiotique, la construction des signifiés mathématiques ne peut pas, donc, se réduire aux « seuls » processus de décontextualisation, dépersonnalisation et détemporalisation, sur lesquels les actions de **Généralisation**, dont nous avons parlé auparavant, portent. A partir de nos hypothèses initiales et de l'analyse des discussions collectives, nous avons été amené à prendre en compte d'autres processus et d'autres actions relatives, comme celle de **(Demande de) Interprétation dans l'artefact « Cabri », dans l'artefact « texte d'Euler », ou encore dans les mathématiques**. Nous expliquerons dans le détail ce que nous entendons par ces expressions.

- **(Demande d') Interprétation d'un signe donné entre deux familles de signes différents (par exemple entre l'activité avec l'artefact et l'activité avec les mathématiques ou entre l'activité dans Cabri et l'activité avec le texte d'Euler, etc).**

Nous avons désigné par ce type d'action tout établissement d'un lien interprétatif entre deux familles de signes. L'établissement de ce lien n'exige pas la préexistence de ces deux familles de signes. Au contraire, souvent, il se produit en même temps que l'introduction de l'une des deux familles de signes. C'est le cas, par exemple, lors de l'introduction d'un signe-mathématique nouveau : l'action de **(Demande d') Interprétation d'un signe donné entre deux familles de signes différents**, participe, alors, constitutivement à la création même du signifié (interprétant) à attribuer à ce nouveau signe.

Dans notre expérimentation, nous avons distinguées trois types différents d'actions d'établissement d'un lien interprétatif :

- **(Demande d') Interprétation dans l'artefact « Cabri » (en général d'un signe-mathématique).**

Par exemple au début de la première discussion collective l'enseignante demande de rechercher dans les éléments de l'activité avec l'artefact des signes qui pourraient correspondre au signifié de fonction (D1.txt (345 :350)) :

116.	<i>P : Et, qu'est ce que c'est selon vous, dans tout ce travail... la fonction ?</i>	<i>P : E che cos'è secondo voi, in tutto questo lavoro qui... la funzione ?</i>	<b>Demande d'interprétation dans l'artefact « Cabri »</b>
117.	<i>FILIPPO : Une relation qui lie deux points.</i>	<i>FILIPPO : Una relazione che lega due punti.</i>	<b>Interprétation par l'élève : Généralisation</b>
118.	<i>GIACOMO : Exact !</i>	<i>GIACOMO : Esatto !</i>	
119.	<i>P : Une relation qui lie... des points... disons quels points... ?</i>	<i>P : Una relazione che lega... dei punti... diciamo quali punti ?</i>	<b>Reflet avec correction Demande de spécification</b>

Notons, que, en dépit des intentions de l'enseignante, la réponse de Filippo (117), porte, au contraire, sur la tentative d'interpréter ce signe en termes mathématiques, et, en tout cas, de généraliser cette mise en correspondance. L'enseignante précise alors son énoncé (119) afin de bien positionner l'interprétation de l'élève par rapport à l'artefact.

➤ **(Demande d') Interprétation dans l'artefact « texte d'Euler » et (Demande d') Etablissement d'un lien interprétatif entre un signe issu du texte d'Euler et un signe-artefact de Cabri ou un signe-mathématique.**

Ces actions sont très spécifiquement liées à la conception de la séquence expérimentale. En effet, nous l'avons fondée sur l'utilisation de deux instruments de médiation sémiotique, de deux « artefacts » : Cabri et le texte d'Euler. Aux yeux des élèves, ce texte a un rôle double : d'une part, il incarne une portion de la culture et de l'histoire des mathématiques, d'autre part, il se constitue en texte qui à cause de sa distance dans le temps doit être interprété. Il favorise donc l'enjeu interprétatif. Les élèves savent bien qu'il s'agit de signes mathématiques, dont l'appropriation exige l'actualisation, l'interprétation et la traduction dans un langage plus moderne. Ce travail nécessite l'identification avec la rationalité de l'auteur, l'acquisition consciente des ses signes et ses représentations. Le travail sur la compréhension et l'interprétation du texte engage les élèves dans un travail social de confrontations entre signes divers. Il permet l'introduction et la fabrication de nouveaux signes, issus directement du texte (et des mathématiques), ou élaborés par la mise en relation avec les signes déjà existants. Ce travail permet ainsi d'engendrer l'enrichissement et la précision des ces signes.

Notre hypothèse est justement que l'enjeu interprétatif entre ces différents « mondes » et systèmes de signes, peut conduire, progressivement, à la construction des objets mathématiques sur lesquels portent ces signes.

Considérons, par exemple, le début de la discussion collective<sup>13</sup>. L'enseignante a demandé à Mattia de reconstruire au rétroprojecteur (à nouveau, publiquement) la méthode d'Euler dans Cabri. Lors de cette reconstruction coopérative et sélective, nous observons la mise en place d'un réseau de correspondances sémiotiques entre les différents systèmes de signes : celui issu du texte d'Euler : celui issu de la construction dans l'artefact de la méthode d'Euler et celui propre au langage des fonctions numériques. Le point choisi et fixé sur la droite est alors mis en relation avec l'extrémité d'un segment (12), avec l'origine de l'axe des abscisses (15) et avec la valeur zéro de l'abscisse (D13\_23\_10.rtf (016 :033)) :

8.	<i>MATTIA : En pratique, on prend une droite et on prend un point dessus.</i>	<i>MATTIA : In pratica si prende una retta e si prende un punto su di essa</i>	<b>Généralisation par l'élève</b>
9.	<i>P : Soyez bien attentifs eh ?! Et on prend un point...</i>	<i>P : State ben attenti eh ?! E si prende un punto...</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b>
10.	<i>MATTIA : Un point sur elle. Après...</i>	<i>MATTIA : Un punto su di essa. Dopo...</i>	
11.	<i>P : Et à quoi sert le point que tu prends dessus ?</i>	<i>P : E a cosa serve questo punto che prendi su di essa ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité : Demande (implicite) d'interprétation</b>
12.	<i>MATTIA : Il est l'extrémité d'un segment.</i>	<i>MATTIA : È l'estremo di un segmento.</i>	
13.	<i>P : Oui, mais dans la méthode d'Euler, à quoi correspond le point que tu prends ?</i>	<i>P : Sì ma nel metodo di Eulero a cosa corrisponde questo punto che prendi ?</i>	<b>Demande d'interprétation dans l'artefact « texte d'Euler »</b>
14.	<i>MATTIA : Au point zéro, c'est-à-dire au zéro.</i>	<i>MATTIA : Al punto zero, cioè allo zero.</i>	
15.	<i>ALESSANDRO : A l'origine.</i>	<i>ALESSANDRO : All'origine.</i>	
16.	<i>P : Oui, à l'origine, comme le dit</i>	<i>P : Sì, all'origine, come dice</i>	<b>Reflet de</b>

	<i>Alessandro, où mon abscisse vaudra zéro.</i>	<i>Alessandro, dove la mia ascissa varrà zero.</i>	<b>l'intervention d'élève 15 avec évaluation : Paraphrase de l'intervention d'élève 14 avec spécification</b>
--	---	--	---

➤ **(Demande d') Interprétation « dans les mathématiques ».**

Cette action permet l'établissement d'un lien interprétatif entre un signe-artefact (c'est-à-dire un élément significatif de l'activité dans Cabri ou relatif au texte d'Euler), ou un signe-mathématique, et un objet du discours officiel des mathématiques enseignées dans l'institution donnée.

Par exemple, lors de l'épisode nommé « la composition de fonctions (D1.txt (834 :842)) », l'enseignante, à la fin, décrit à nouveau, dans le monde des mathématiques le phénomène de l'application, à deux reprises, de la macro « Effet1 », observé par Cristina. Il ne s'agit pas simplement de ré-expliquer ce qui s'est passé : le changement de système de signes adopté témoigne, justement, la volonté de réinterpréter ce même phénomène dans les mathématiques. Cette réinterprétation importe, ainsi, avec elle-même, un approfondissement ultérieur du sens des signes-mathématiques que les élèves sont en train de construire.

296.	<i>CRISTINA : Non, car H' est obtenu de la première [fonction/relation/application de la macro « Effet1 »].</i>	<i>CRISTINA : No, perché H' è ottenuto dalla prima.</i>	
297.	<i>P : H' est obtenu de la première. Donc, pratiquement j'ai : les variables indépendantes initiales, qui ont donné une variable dépendante, que après j'ai réutilisée comme indépendante pour en trouver une dernière [variable] dépendante. Et alors, elle s'appelle, et nous le verrons, une composition de deux fonctions, car j'ai appliqué la même construction... non en effet une composition de deux fonctions mais de la même... c'est-à-dire je l'ai appliquée une fois et puis je l'ai appliquée une autre fois, en prenant comme point de départ celui final. [...]</i>	<i>P : H' è ottenuto dalla prima. Quindi praticamente c'ho : le variabili indipendenti iniziali, che hanno dato una variabile dipendente, che poi io ho riusato come indipendente, per trovarne un'ultima dipendente. Ecco questa si chiama, e lo vedremo, una composizione di due funzioni, perché io ho applicato la stessa costruzione... non in effetti una composizione di due funzioni, ma della stessa... cioè l'ho applicata una volta e poi l'ho applicata un'altra volta, prendendo come punto di partenza quello finale. [...]</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b>  <b>Interprétation (dans les mathématiques)</b>

Dans cette catégorie d'actions nous ne considérons pas seulement les passages interprétatifs entre les objets de Cabri et les objets mathématiques, tels qu'on les retrouve lors de la première discussion collective. En fait, lors de la discussion collective 13, les élèves ont à faire avec différents types de fonctions (numériques, algébriques) et différents registres. Ainsi, à l'intérieur des mathématiques mêmes, nous observons l'établissement de liens entre différentes expressions relatives au signifié de fonction et à ses constituants. En effet, tout se passe dans le discours, en utilisant quasi-exclusivement la langue naturelle, mais l'enjeu interprétatif porte sur les différents moyens de représenter la fonction : autrement dit le discours renvoie à différents registres, bien qu'il ne les utilise pas vraiment.

Les demandes d'interprétation s'accompagnent donc d'un double mouvement : un mouvement inter-registres et un mouvement entre, d'une part, des fonctions particulières et, d'autre part, la fonction comme objet théorique en soi, exprimé dans le registre de la langue naturelle, abstraction faite du fait qu'elle soit définie sur un ensemble numérique, géométrique ou autre.

Nous considérons ce processus de complexification du réseau sémiotique, au sein des mathématiques comme très important. D'une part, dans la première partie de la séquence, et par des actions d'interprétation dans l'artefact « Cabri », les élèves ont pu construire un premier sens à attribuer à certaines signes-mathématiques. D'autre part, par l'introduction d'autres signes-mathématiques et d'un nouvel artefact, le texte d'Euler, et par d'autres actions d'interprétation (dans le texte ou à l'intérieur des mathématiques mêmes) ces signes-mathématiques ont pu évoluer. Nous faisons l'hypothèse que, par ce processus, le signifié élaboré, au fur et à mesure d'une part, s'enrichit par de multiples connotations dues aux différents signes associés, d'autre part, contribue à la construction d'un invariant théorique relativement à ces mêmes signes.

Les actions d'**Interprétation « dans l'artefact »** et de d'**Interprétation « dans les mathématiques »** sont l'une et l'autre, deux faces d'une même médaille : elles relèvent toutes du même processus d'établissement d'un lien interprétatif entre le monde de l'artefact et le monde des mathématiques. Ce qu'on désigne comme **Interprétation « dans l'artefact »** peut, alors, aussi bien se lire comme **Interprétation « dans les mathématiques »** selon la « direction » qu'on considère prédominante : respectivement, du monde des mathématiques vers le monde de l'artefact ou *vice versa*. Souvent l'analyse de la transcription de la discussion collective ne permet pas de trancher par rapport à la « direction », nous parlons alors d'**Interprétation** tout court.

Par exemple, dans l'extrait qui suit, nous qualifions l'intervention (252) d'**Interprétation « dans l'artefact »** en raison de l'ordre dans lequel l'enseignante énonce : d'abord les signes-mathématiques puis le signes-artefact correspondants. Cependant, on aurait pu imaginer une situation inversée, et, dans une telle éventualité, nous aurions alors parlé d'**Interprétation « dans les mathématiques »** (D1.txt (726 :727)) :

252.	<i>P : J'ai bougé P. J'ai dit : variable indépendante, P : variable dépendante, H : domaine : image... Et A et B qu'est ce qu'ils font ?</i>	<i>P : Ho mosso P. Ho detto : variabile indipendente, P : variabile dipendente, H : dominio : imagine... E A e B che fanno ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif Interprétation (implicite) (dans Cabri)</b>
------	--	--	---

Le nombre d'**Interprétations « dans l'artefact »** et d'**Interprétations « dans les mathématiques »** est quasi égal. Cela témoigne d'un aller-retour continu entre ces différents systèmes des signes. En effet, c'est dans le jeu croisé entre toutes ces interprétations différentes que, nous nous attendons il soit possible l'émergence d'un signifié complexe et, en particulier, des signifiés mathématiques particuliers attendus.

De même, le rapport numérique entre **Demandes d'interprétation** et **Interprétations** données est voisin de l'unité. En revanche, si l'on prend en compte

aussi les **Demandes (implicites) d'Interprétation** et les **Demandes d'Explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné**, ce rapport monte à 1,6<sup>79</sup>.

En effet, par exemple, si l'on reprend et continue l'extrait cité ci-dessus, l'on peut observer que les questions posées par l'enseignante aux élèves (252) (254) (256), ne sont pas des **Demande d'interprétation** directes. Cependant ces questions suivent l'interprétation dans l'artefact « Cabri » de P et H, et une allusion au travail d'interprétation des signes des domaine et image à peine conclus. Nous avons donc qualifié ces questions comme **Demandes (implicites) d'interprétation** (D1.txt (726 :759)) :

252.	<i>P : J'ai bougé P. J'ai dit : variable indépendante, P : variable dépendante, H : domaine : image... Et A et B qu'est ce qu'ils font ?</i>	<i>P : Ho mosso P. Ho detto : variabile indipendente, P : variabile dipendente, H : dominio : immagine... E A e B che fanno ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif ; Interprétation (implicite) (dans Cabri)</b>
253.	<i>CRISTINA : Ils sont immobiles.</i>	<i>CRISTINA : Fermi.</i>	
254.	<i>P : Immobiles... Voilà... Mais ils servent ?</i>	<i>P : Fermi... Ecco... Però servono ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif ; Demande (implicite) d'interprétation</b>
255.	<i>IGOR : Oui, car la droite passe par eux.</i>	<i>IGOR : Sì perché ci passa la retta.</i>	
256.	<i>P : Et si je ne les avais pas ?</i>	<i>P : E se non ce li avessi ?</i>	<b>Focalisation sur un trait significatif ; Demande (implicite) d'interprétation</b>
257.	<i>IGOR : Je crois que on n'aurait pas la relation</i>	<i>IGOR : Mi sa che non ci sarebbe la relazione</i>	<b>Interprétation dans les mathématiques par l'élève</b>
258.	<i>CRISTINA : Je n'aurais pas pu construire H dès le début</i>	<i>CRISTINA : Non avrei potuto costruire H dall'inizio</i>	<b>Interprétation dans l'artefact « Cabri » par l'élève</b>

Toute l'ambiguïté relative aux **Demandes implicites d'interprétation** n'est ni complètement éliminable ni finalement négative. Ces actions, comme d'autres actions spécifiques au processus de médiation sémiotique, sont destinées à amener les élèves à fabriquer librement leurs propres signes, de manière à les mettre à disposition de l'enseignante et des autres élèves, pour que la construction du signifié mathématique visé soit une véritable construction sociale. En outre, le contrat didactique général contribue réduire cette indétermination : les élèves savent bien que toute la discussion collective porte sur un travail interprétatif et que tout élément mis en évidence doit avoir une prégnance du point de vue des signifiés mathématiques à construire. Cela explique pourquoi, même face à une série de demandes ambiguës, les élèves produisent, quand même, des interprétations. En outre, cette indétermination contribue à enrichir les liens réciproques entre les

<sup>79</sup> L'analyse quantitative sur un échantillon si réduit n'est pas très significative. Cependant, il est utile d'observer que le nombre de **Demandes Implicites d'Interprétation** identifiées a été de 8, celui des actions d'**Explicitations des signifiés personnels relatifs à un signe donné** de 6. Les **Demandes d'Interprétations dans le texte d'Euler** sont 1 contre 2 **Interprétations dans le texte d'Euler** données par l'enseignante : les **Demandes d'Interprétations dans l'artefact « Cabri »** 14 contre 10 **Interprétations dans l'artefact « Cabri »** données par l'enseignante et les **Demandes d'Interprétation dans les mathématiques** 10 contre 12 **Interprétations dans les mathématiques**, données par l'enseignant.

différentes familles de signes. Dans l'exemple cité, Igor fait le lien avec les relations, Cristina avec l'activité dans Cabri.

D'une part la proportion entre **Demandes d'interprétation** et **Interprétations** fournies par l'enseignante, d'autre part, l'extrait cité ci-dessus, mettent en évidence que le travail d'interprétation n'est pas à la charge exclusive de l'enseignante. Au contraire la participation active des élèves est considérée comme un élément nécessaire et inéliminable du processus de médiation sémiotique. L'enjeu interprétatif se nourrit de tous les signes produits. En outre nous faisons l'hypothèse que le processus d'internalisation ne peut s'accomplir que par la prise de conscience et l'appropriation progressive de ces signes par les élèves. Pour cela, le professeur sollicite continûment leur intervention, en focalisant sur certains signes par des (demandes d') interprétations.

Même s'il est intéressant de rappeler la différence qui existe entre **Interprétation dans l'artefact** et **Particularisation**, ou entre **Interprétation « dans les mathématiques »** et **Généralisation par Universalisation**, dans la majorité des cas, ces actions se combinent respectivement. Comme nous l'avons déjà dit, les premières désignent l'établissement d'un véritable lien interprétatif, tandis que les deuxièmes qualifient la déclinaison d'un énoncé général à un cas particulier ou *vice versa*. Bien sûr, quand l'énoncé général porte sur une correspondance établie entre le monde des mathématiques et le monde de l'artefact, toute **Particularisation** peut aussi être lue en termes d'**Interprétation « dans l'artefact »**. Pour cette raison, nous avons qualifié la même intervention à la fois de **Particularisation** et d'**Interprétation dans l'artefact**. Analogiquement, nous avons considéré toute interprétation qui inclut explicitement un lien vers des objets théoriques et qui porte sur des référents universels comme une **Interprétation dans « les mathématiques »** et une **Généralisation par Universalisation**.

La combinaison de ces actions et leur articulation réciproque, bien perceptible dans l'intervention (184), même si, du point de vue analytique, dans le cas considéré, elle peut apparaître très complexe, est, en revanche, très naturelle (D1.txt (543 :553)) :

182.	<i>P: L'image est où bouge la variable dépendante... le domaine est où bougent les indépendantes. Donc, Mattia se posait un problème ...</i>	<i>P: L'immagine è dove si muove la variabile dipendente... il dominio è dove si muovono quelle indipendenti. Quindi Mattia si poneva un problema...</i>	<b>Interprétation dans les mathématiques ; Généralisation par Universalisation</b>
183.	<i>IGOR: C'est-à-dire ? Mais « où » il faut l'entendre comment... le « où » ?</i>	<i>IGOR: Cioè ? Ma « dove » inteso come... « dove » ?</i>	
184.	<i>P: Où ? Dans le plan... Maintenant nous sommes dans le plan, nous devrions avoir compris que les fonctions géométriques... C'est-à-dire nous sommes en train de faire des constructions du plan dans le plan, c'est-à-dire nous faisons bouger des points dans le plan et nous avons comme résultat de la construction d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan.</i>	<i>P: Dove ? Nel piano... Ora noi siamo nel piano, dovremmo avere capito che le funzioni geometriche... Cioè stiamo facendo costruzioni del piano nel piano, cioè facciamo muovere dei punti nel piano e abbiamo come risultato della costruzione altri punti che, a loro volta, si muovono nel piano.</i>	<b>Particularisation ; Interprétation dans l'artefact « Cabri »</b>  <b>Interprétation dans l'artefact « Cabri »</b>  <b>Particularisation</b>

Dans l'exemple cité ci-dessus, la première partie de l'intervention (184) (« Où ? Dans le plan... Maintenant nous sommes dans le plan ») constitue une **Particularisation** du terme « où » et le complètement de l'intervention (182) par l'interprétation dans l'artefact des signifiés de domaine et image (**Interprétation dans l'artefact « Cabri »**). La deuxième partie de l'intervention (184), en ce qui concerne la partie « nous devrions avoir compris que les fonctions géométriques... C'est-à-dire nous sommes en train de faire des constructions du plan dans le plan », est une **Interprétation dans l'artefact « Cabri »** du signifié de fonction géométrique. En revanche, en ce qui concerne la partie « c'est-à-dire nous faisons bouger des points dans le plan et nous avons comme résultat de la construction d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan » il s'agit d'une **Particularisation** de l'énoncé général « nous sommes en train de faire des constructions du plan dans le plan ».

Cet extrait montre comment la richesse du réseau sémiotique de correspondances diverses, et des signifiés potentiellement associés, se tisse par une véritable articulation de toutes ces actions.

Tous les exemples cités précédemment, montrent, en outre, que c'est par l'interaction de multiples actions diverses que peut se produire ce changement complexe de signification des éléments de l'activité et ce processus de sémosis que nous avons appelé, synthétiquement « médiation sémiotique orchestrée par l'enseignante ». Nous avons aussi pu tester la pertinence d'une analyse en termes d'**Interprétation (dans l'artefact « Cabri », dans l'artefact « texte d'Euler », dans les mathématiques)**, et non pas seulement en termes de **Généralisation/Spécification**. Ces notions montrent leur efficacité par la mise en évidence des liens qui s'établissent entre « signes issus de la culture mathématique » et « signes issus du monde de l'artefact ». En outre, ils permettent (là où le discours est suffisamment explicite) de distinguer la « direction qui, dans cette dynamique de construction des liens, est, au fur et à mesure, privilégiée (respectivement, à partir de l'activité vers les mathématiques ou *vice versa*).

## 2.4. Deuxième synthèse intermédiaire

L'analyse *a posteriori*, développée en particulier à propos des actions à dominante mésogénétique a mis en évidence des actions au cœur du processus de médiation sémiotique.

Les actions du premier groupe permettent de travailler explicitement sur les signes et sur le passage du plan intra-subjectif, celui des signes et des signifiés personnels correspondants, élaborés au cours de l'activité avec l'artefact, et le plan inter-subjectif, où l'enseignante introduit aussi le point de vue des mathématiques.

Le deuxième groupe amène à la création de liens entre familles de signes différentes et grâce à ces liens favorise l'émergence puis l'internalisation des signifiés mathématiques visés.

Elles contribuent à façonner le milieu de la discussion collective de manière différente des actions génériques du travail de sémosis. Elles interviennent au niveau de la dévolution de la tâche d'interprétation, dans la signification potentielle à attribuer aux éléments du milieu, dans l'introduction explicite des objets théoriques et dans la constitution des liens réciproques.

Tous les actions repérées et les mécanismes associés donnent une impression de grande complexité. Nous nous sommes demandés si l'on pouvait identifier des cycles ou des mécanismes qui se produiraient de façon régulière. Nous nous sommes alors aperçus que pour comprendre globalement la façon dont l'enseignante gère le processus de médiation sémiotique, il ne faut pas considérer les actions que

nous avons dégagées, indépendamment les unes des autres. Au contraire, elles agissent généralement en synergie profonde. En outre, ce processus, d'établissement de liens du monde de l'artefact au monde des mathématiques, n'est pas unidirectionnel mais plutôt cyclique. Nous avons ainsi pu identifier une sorte de **cycle-type**. D'abord l'enseignante travaille pour saisir et décanter, parmi toutes les propriétés des signes-artefact, celles qui sont prégnantes en rapport aux signifiés mathématiques visés. Ensuite elle donne une interprétation du monde de l'artefact vers le monde des mathématiques (**Interprétation « dans les mathématiques »**). Cette interprétation est caractérisée par un discours qui, bien que portant sur des signes-artefact, est très général : les objets cités sont représentés seulement selon leurs caractéristiques sémiotiquement pertinentes et les signes-mathématiques introduits le sont dans leur universalité (**Généralisations par Universalisation**). Puis, éventuellement, elle demande aux élèves de retourner au monde de l'artefact et de développer eux-mêmes, le lien entre le signe-mathématique donné et le signe-artefact de départ ou d'autres objets de l'artefact. Cette demande d'interprétation est caractérisée par une **Demande de Particularisation**. Ainsi, dans ce **cycle-type**, souvent, les **interprétations** précèdent les **demandes d'interprétation** et les **interprétations dans les mathématiques** anticipent les **demandes d'interprétation dans l'artefact « Cabri »**. Cependant nous ne pouvons pas parler d'une règle mais seulement d'une tendance. Nous avons observé ce cycle-type, avec quelques légères différences, pour les signifiés de variable, de variable indépendante, de variable dépendante et de paramètre. En revanche, pour les signifiés de domaine, d'image et de fonction le mécanisme s'est révélé assez différent. Dans le cas de la fonction, l'enseignante a d'abord **demandé** aux élèves **d'interpréter dans l'artefact « Cabri »** ce signe, elle a guidé leurs tentatives d'interprétation et puis, successivement, elle a **complété** et ratifié **l'interprétation donnée**. En revanche, dans le cas des signifiés de domaine et de l'image, elle a d'abord **donné une interprétation dans les mathématiques**. Ensuite, face à la difficulté des élèves de la comprendre, c'est elle-même, qui a **interprété** et **particularisé dans l'artefact « Cabri »** l'interprétation fournie.

Nous nous sommes demandé si de tels écarts par rapport au cycle-type étaient nécessaires ou contingents. Nous estimons que la différence, par rapport au cycle-type, du développement du signifié de fonction peut être volontaire. En fait, au contraire des autres signes-mathématiques à interpréter, le signe de fonction, était déjà disponible dès le début de la discussion collective et l'enseignante n'avait pas besoin de l'introduire. En revanche, elle avait besoin de récupérer les signifiés personnels disponibles et de les mettre en relation à l'activité. En outre l'enjeu interprétatif était déjà très clair, puisque les élèves avaient montré déjà posséder un signifié personnel à ce propos. Nous pourrions dire qu'elle avait donc d'abord la nécessité de les expliciter et de faire émerger les éventuelles interprétations ébauchées.

En revanche l'écart par rapport à l'évolution des signifiés de domaine et image peut être lié plutôt à la contingence. L'incompréhension manifeste des élèves empêche l'enseignante de leur demander de revenir à l'artefact, et la pousse à particulariser, elle-même, directement ce signe<sup>80</sup>.

Cette cyclicité, redoublée par l'introduction d'un autre artefact, le texte d'Euler, amène à une complexification et un enrichissement progressifs du réseau

<sup>80</sup> Il est intéressant que d'observer qu'il n'y a jamais de pattern identique. Ceci montre que, finalement, l'enseignante a beaucoup de liberté et énormément d'actions à disposition. Au fond il y a ce cycle-type mais l'éventail des déclinaisons et modifications possibles et pertinentes est très vaste.



sémiotique. Nous faisons l'hypothèse que, par ce processus, l'objet mathématique signifié qui en résulte sera de plus en plus riche et indépendant des signes-artefact qui l'ont engendré.

### 3. Phénomènes remarquables liés au processus de sémiosis

Ce paragraphe est consacré à développer les phénomènes remarquables, liés au processus de sémiosis identifiés au cours de l'analyse *a posteriori* qui, bien qu'étant associés aux actions de l'enseignante, ne sont pas de la même nature. En effet, jusqu'à présent nous nous sommes fondés beaucoup sur la sémantique du discours de l'enseignante pour en dégager les actions et cela parce nous y avons reconnu une certaine intentionnalité. Dans les paragraphes suivants, nous nous intéressons toujours aux discours de l'enseignante, mais pour interpréter des phénomènes qui ne se laissent pas interpréter en termes d'actions intentionnelles. Autrement dit, l'enseignante contribue à la construction des signifiés par des actions volontaires mais aussi par la structure même du discours qu'elle adopte. Nous considérons ce deuxième facteur comme non vraiment volontaire, même s'il est fortement dépendant et résulte des signifiés qu'elle est en train de développer.

#### 3.1. « Structure verbale » et processus de sémiosis

La structure du discours de l'enseignante (comme celui des élèves) participe fortement de la construction des signifiés. Les unités discursives significatives, les « signes complexes » comme nous les avons appelés, se caractérisent par une certaine « forme », qui véhicule elle aussi une partie du signifié. Il est alors intéressant de remarquer comment les deux signifiés principales de fonctions qui se développent au cours de la discussion collective, celle de relation de co-variation et celle de « machine à Input/Output », prennent aussi leur origine de deux types différents de structure verbale.

D'une part, nous observons l'utilisation massive d'expressions causales, ou conditionnelles ou encore des gérondifs. Ces structures verbales ne sont pas anodines : elles entraînent, en elles-mêmes, un signifié de « **fonction comme co-variation** », même là où ce signifié n'est pas explicitement développée ou énoncée. En outre, la liaison entre les différents signes établie par ce type d'expressions est dynamique D1.txt (0128 :133) :

40.	<i>IGOR : Il fallait dire... d'abord si je bougeais le point A, les points qui se déplaçaient et les points qui ne se déplaçaient pas...</i>	<i>IGOR : Bisognava dire... prima se spostavo il punto A i punti che si muovevano e i punti che non si muovevano...</i>
41.	<i>P : OK...alors par exemple, en bougeant P, je vois que seulement H bouge et, pas seulement ça, voyons de le condenser un peu [essayons de résumer un peu tout ça]... je vois aussi qu'il bouge... ?</i>	<i>P : Ok... allora, per esempio, movendo P, io vedo che si muove solo H e non solo, vediamo di condensarlo un attimo... vedo anche che si muove... ?</i>

D'autre part, nous constatons plusieurs fois la mise en place d'un format verbal très caractéristique, qu'au contraire, nous relierons à la formation du signifié de fonction comme « **machine à I/O** ». Souvent, en relation avec le fonctionnement de la macro « Effet1 », et en jouant sur la dissymétrie entre les points variables indépendantes, et le point variable dépendante, l'enseignante énonce (ou demande d'énoncer) une propriété valable pour les variables indépendantes puis elle demande de faire de même pour le cas de la variable dépendante. La répétition de ce format

« Enoncé ou question sur la variable indépendante puis question homologue sur la variable dépendante » emporte avec lui, d'une part une opposition entre ces deux types de variables, d'autre part une idée de cause-effet (associable à un mécanisme de « Input/Output ») qui, au fur et à mesure, affecte les objets mêmes sur lesquels le discours porte. La causalité inhérente à la structure de la discussion collective (comme la dissymétrie des deux types d'objets) est ainsi, en quelque sorte, transférée aux signifiés mêmes de variable indépendante et dépendante ou de fonction (D1.txt 454 :468) :

135.	<i>P : [...] Toutes celles-ci sont des Macros, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voir comme une fonction?</i>	<i>P : [...] Tutte queste sono Macro, se vogliamo, tutte quelle che abbiamo nel menù di costruzione, anche fare il punto medio la posso vedere come una funzione ?</i>	
136.	<i>Tante voci : Oui</i>	<i>Tante voci : Sì</i>	
137.	<b><i>P : Car, qu'est-ce qu'il prend ?</i></b>	<b><i>P : Perché, cosa prende ?</i></b>	<b>Question sur les variables indépendantes</b>
138.	<i>FILIPPO : Il prend les deux extrémités du segment...</i>	<i>FILIPPO : Prende i due estremi del segmento...</i>	
139.	<b><i>P : Et il me donne ?</i></b>	<b><i>P : E mi dà ?</i></b>	<b>Question sur la variable dépendante</b>
140.	<i>FILIPPO : Et il trouve le troisième point qui est le centre du segment c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.</i>	<i>FILIPPO : E trova il terzo punto che è il centro del segmento cioè è equidistante dai vertici del segmento.</i>	
141.	<b><i>P : Et il me donne le troisième point qui est le milieu [...].</i></b>	<b><i>P : E mi dà il terzo punto che è il punto medio [...].</i></b>	

Même quand le discours de l'enseignante porte sur la relation de co-variation entre points variables indépendantes et point variable dépendante, la répétition fréquente de ce format, le fait que l'enseignante réitère pour chaque point, la même question, induit un changement de focalisation. Les élèves ne sont plus seulement en train d'observer « ce qui bouge en fonction de quoi » mais aussi de saisir tout ce qui est « au départ » en opposition à ce qui est « à l'arrivée ». C'est donc sur cette opposition et non pas seulement sur le déplacement libre ou indirect, que l'enseignante introduit ensuite (159) les définitions de variable indépendante et dépendante (D1.txt (454 :475))<sup>81</sup> :

151.	<b><i>P : Oui, par exemple, lorsque je bougeais A, qui se déplaçait ?</i></b>	<b><i>P : Sì, per esempio, se muovevo A, chi si muoveva ?</i></b>	
152.	<i>IGOR : Il se déplaçait H</i>	<i>IGOR : Si muoveva H</i>	
153.	<b><i>P : Lorsque je bougeais B ?</i></b>	<b><i>P : Se muovevo B ?</i></b>	
154.	<i>IGOR : Aussi.</i>	<i>IGOR : Anche.</i>	
155.	<b><i>P : Lorsque je bougeais P ?</i></b>	<b><i>P : Se muovevo P ?</i></b>	
156.	<i>IGOR et CRISTINA : Aussi.</i>	<i>IGOR et CRISTINA : Anche.</i>	
157.	<b><i>P : Aussi. Et H ? pouvais-je le bouger ?</i></b>	<b><i>P : Anche. E H ? Lo potevo muovere ?</i></b>	
158.	<i>Tante voci : Non !</i>	<i>Tante voci : No !</i>	
159.	<i>P : Voilà alors, le discours c'est</i>	<i>P : Ecco, allora il discorso è che in</i>	

<sup>81</sup> Dans cet extrait, nous pouvons aussi observer que ce même format finit par engendrer un effet Topaze : à la question (159) les élèves n'ont quasiment aucune autre possibilité de répondre qu'en termes de variables dépendantes. L'automatisme induit par ce format est ainsi perceptible aussi autrement.

	<i>que, en général, dans une fonction, les points de départ sont appelés variables indépendantes, car je peux les bouger où je veux tandis que ce que j'obtiens est appelé variable dépendante car elle dépend de qui ?</i>	<i>generale in una funzione, i punti da cui parto, vengono chiamati variabili indipendenti, perché io li posso muovere dove mi pare mentre quello che ottengo viene chiamata variabile dipendente perché dipende da chi ?</i>	<b>Enoncé sur les variables indépendantes</b>  <b>Question sur la variable dépendante</b>
160.	IGOR : Des variables indépendantes.	IGOR : Dalle variabili indipendenti.	

Nous retrouvons, après, ce même type de format respectivement lors de la mise en relations des signifiés de variable indépendante/dépendante avec ceux de hypothèse/conclusion ou lors de l'introduction des signifiés de domaine et image (D1.txt (516 :517)) :

174.	<i>P : Hypothèse qui sont les données initiales et puis nous avons... ?</i>	<i>P : Ipotesi che sono i dati iniziali, e poi abbiamo... ?</i>	<b>Enoncé sur les variables indépendantes ;</b> <b>Question sur la variable dépendante</b>
175.	FILIPPO : ...La thèse [la conclusion].	FILIPPO : ...La tesi.	

(D1.txt (533 :537)) :

178.	<i>P : Alors, le domaine est où on peut bouger les variables indépendantes et l'image est... ? Où sera-t-elle l'image d'une fonction ? Où l'on peut bouger... ?</i>	<i>P : Allora, il dominio è dove si possono muovere le variabili indipendenti e l'immagine è... dove sarà l'immagine di una funzione ? Dove si può muovere... ?</i>	<b>Enoncé sur les variables indépendantes ;</b> <b>Question sur la variable dépendante</b>
179.	IGOR : Les variables dépendantes.	IGOR : Le variabili dipendenti.	

Il est intéressant de souligner que la liaison définie entre ces objets est, au contraire de l'autre type de format, de nature statique : elle n'implique pas le temps, mais un simple rapport de cause-effet.

### 3.2. Mélange sémiotique

Considérons l'extrait (D1.txt 520 :525)) ou les définitions (178) de domaine et de image que nous venons de lire (D1.txt (533 :537)). Elles nous présentent un autre phénomène très intéressant : le **Mélange sémiotique** entre deux (ou plusieurs) familles de signes. Ce phénomène permet, d'une part, de garder la double référence aux deux mondes (par exemple à la fois aux mathématiques et à l'artefact), d'autre part, de prêter, à l'une des deux familles des signes, des propriétés ou des qualités qui sont propres à l'autre :

176.	<i>P : La thèse [la conclusion], ce que nous voulons <b>construire</b> et donc ce que nous <b>obtenons</b>. Ceux en revanche comme <b>variables dépendantes des données initiales... données initiales et données finales... données initiales bougent</b>, librement, je peux les déplacer où je veux ou, au moins cette fois-ci je pouvais les déplacer où je voulais, <b>le point final les suit</b> et tout seul ne bouge pas..</i>	<i>P : La <b>tesi</b>, che è ciò che vogliamo <b>costruire</b> e quindi ciò che <b>otteniamo</b>. Quelli invece come <b>variabili dipendenti dai dati iniziali... dati iniziali e dati finali... dati iniziali si muovono liberamente</b>, posso portarli dove mi pare o almeno questa volta potevo portarli dove mi pareva, <b>il punto finale gli va dietro</b> e di per sé non si muove</i>
------	---	--

178.	<i>P</i> : Alors, le domaine <b>est où on peut bouger les variables indépendantes</b> et l'image est... où sera-t-elle l'image d'une fonction ? Où l'on peut bouger... ?	<i>P</i> : Allora, il dominio è dove si possono <b>muovere le variabili indipendenti</b> e l'immagine è... dove sarà l'immagine di una funzione ? Dove si può muovere... ?
------	--	--

A l'intervention (176), l'enseignante attribue à la « thèse », c'est-à-dire à la conclusion, deux verbes qui sont plutôt propres à d'autres systèmes sémiotiques : le verbe « construire », qu'on peut rapporter aux constructions géométriques et le verbe « obtenir » qu'on renvoie plutôt aux résultats et aux processus de I/O. Ensuite elle associe aux « données initiales », qui relèvent des constructions géométriques, le déplacement libre, qui est une caractéristique spécifique des objets- pères de Cabri. Dans cette même perspective, elle substitue « données finales » par « point final » et lui rattache le déplacement indirect, à nouveau spécifique des objets- fils de Cabri.

A l'intervention (178) le mélange sémiotique est encore plus flagrant : l'enseignante parle à la fois de *domaine* et de *image*, qui sont signes issus de la culture mathématique, et de *bouger*, qui, en revanche, est un signe issu de l'activité avec artefact.

Au départ, nous faisons l'hypothèse que nous devons observer, dans le cas des définitions ou des interprétations dans les mathématiques, des énoncés tout à fait « universels ». *A posteriori*, nous avons, au contraire, constaté qu'il y a toujours un double référent : les objets mathématiques et les éléments concrets de l'activité. Autrement dit, il n'y jamais abstraction complète par rapport au contexte. Nous estimons que cette sorte de polysémie, liée en particulier au phénomène du mélange sémiotique, constitue même une richesse, au cœur du processus de médiation sémiotique.

Ce phénomène du **Mélange sémiotique** est associé au processus d'Icônisation, dont nous parlerons dans le paragraphe suivant.

## 4. Actions à dominante mésogénétique et processus de médiation sémiotique

L'analyse des discussions collectives nous montre que le processus de médiation sémiotique s'opère grâce à la synergie de plusieurs actions de la part de l'enseignante. De ce point de vue, nous pourrions même parler « d'orchestration » d'actions diverses. Dans les paragraphes suivants, nous montrerons comment cette combinaison et articulation d'actions permet l'évolution des signes.

### 4.1. Actions à dominante mésogénétique et processus de constitution d'icônes : Icônisation

Lors de notre analyse *a posteriori* de la première discussion collective, nous avons identifié le développement d'un processus qui, en opérant sur des **signes-artefact** particuliers de l'activité, a conduit à les transformer en icônes. Nous avons appelé ce processus de constitution, lors d'une discussion collective, d'une icône (cf. Chapitre 1, § 5.1.6.1) au sens de Peirce, **processus d'Icônisation**. Il s'agit d'une transformation complexe, principalement à la charge de l'enseignante, qui se compose de multiples actions : des actions à vocation sémiotique spécifique comme les actions d'**Interprétation (dans l'artefact « Cabri » et dans les mathématiques**, et des actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité professorale, comme les actions de **Généralisation** ou de **Particularisation**. Ce processus se situe au cœur du processus même de médiation sémiotique. Il est déclenché par

d'autres actions génériques de l'activité professorale, en particulier par les actions sur le milieu abordées au début de ce chapitre (**Focalisation, Reconstruction coopérative et sélective**, etc)

Rappelons que, pour Peirce, « *Une icône est un signe qui se réfère à l'objet qui dénote en vertu de caractères qui lui sont propres, et qu'elle possède, abstraction faite du fait que tel objet existe ou non* » (2.247). Autrement dit, il n'est pas nécessaire, *a priori* que l'objet, dont on parle, existe réellement. Ceci est le cas de notre expérimentation, où l'objet, auquel le signe par exemple de fonction se réfère, est en train de se construire.

En outre, rappelons que, toujours pour Peirce, il n'y a pas de signes qui soient une icône pure ou un indice pur ou un symbole pur. Dans chaque signe coexistent toujours les trois fonctions, iconique, indexicale et symbolique, parmi lesquelles l'une peut être prévalente<sup>82</sup>. Ainsi, dans notre cas, la constitution d'une icône, ce que nous avons appelé processus d'**lcônisation**, s'accompagne de la constitution d'un indice et d'un symbole.

Ce qui caractérise alors ce processus d'**lcônisation**, par rapport à la simple action d'**Interprétation** c'est le fait qu'il désigne tout le changement progressif de signification d'un signe-artefact jusqu'à devenir une icône, et non pas seulement le moment de l'établissement d'un lien interprétatif entre deux différents familles des signes (par exemple, à partir des signes-artefacts vers des signes-mathématiques, en passant éventuellement par des signes-pivot). Le processus implique ainsi toutes les différentes actions de **Généralisation par Universalisations et par extension du domaine de validité**, aussi que les allers-retours à l'activité pour en extraire les « qualités », au sens de Peirce, qu'on prête aux objets mathématiques signifiés par ces icônes.

Ce processus ne procède donc pas de façon monodirectionnelle mais s'instaure de manière circulaire entre le monde de l'artefact et le monde des mathématiques. Comme déjà expliqué, nous avons même pu reconnaître une sorte de **cycle-type**. D'abord l'enseignante procède, au fur et à mesure, en « sélectionnant » un certain nombre de propriétés ou caractéristiques saillantes d'un **signe-artefact** pour qu'elles puissent finalement être héritées par les objets mathématiques signifiés. Puis elle généralise ces signes-artefact (**Généralisation par Universalisation**) par rapport aux qualités significatives, elle l'interprète dans les mathématiques (**Interprétation dans les mathématiques**), en introduisant le **signe-mathématique** correspondant. Successivement elle demande, aux élèves, de revenir à nouveau à l'artefact, pour interpréter par eux-mêmes, ce même **signe-mathématique** (**Interprétation dans l'artefact**), cette fois ci par rapport aux objets concrets de l'activité ou à **d'autres signes-artefact (Particularisation)**.

Bien évidemment, puisque la construction de ces objets mathématiques, des « interprétants » associés, est finalement subjective, elle peut entraîner d'autres « qualités » du signe-artefact non prévues ou non souhaitées *a priori*. C'est pour prendre en compte une telle éventualité qu'à l'intérieur du paradigme de la médiation

---

<sup>82</sup> Par exemple le signe-artefact d'un point capable de bouger librement dans l'écran de Cabri peut être à la fois une icône, un indice et un symbole du signifié de variable indépendante. Elle peut être une icône car la variabilité logique vient se greffer sur la variabilité spatio-temporelle. Elle peut être un indice, puisque elle est existentiellement, physiquement connectée à l'objet qu'elle représente : la macro incorpore *de facto* une fonction particulière dont les point libres sont les variables indépendantes. Elle est un symbole, puisqu'elle est largement conventionnelle et dans sa façon d'être représentée et dans sa façon d'être désignée (c'est l'enseignante qui décide, au début, quels éléments peuvent jouer ou non le rôle de variables indépendantes).

sémiotique, une séquence expérimentale ne peut pas se composer d'une seule séance. En effet, elle exige plusieurs activités, où la mise en place, le développement et les enjeux interprétatifs respectifs de différents systèmes de signes sont centraux, et où l'objectif est celui de délimiter les éléments qui seront incorporés dans le signe mathématique cible.

Par exemple, tout au long de la première discussion collective, la Macro Effet1 est transformée, au fur et à mesure par le discours de l'enseignante en une icône de la fonction<sup>83</sup>. Ce processus, très long, sera décrit en détail dans le chapitre consacré à l'évolution des signes, en particulier du signe fonction (cf. Chapitre 8). Cependant observons maintenant quelques-unes des « étapes » saillantes de cette transformation. Il est intéressant de remarquer, en particulier, le jeu global de toutes les actions, analysées jusqu'à ici, qui permettent le germe et le développement de ce changement radical de signification.

La première « étape » consiste en l'ancrage dans la phénoménologie de l'artefact de ce processus. Elle correspond à la constitution de la « Macro Effet1 » comme signe-artefact (D1.txt 90 :120) :

28.	<i>P: Toi au collègue tu avais fait quelque chose, bien. Alors, voyons si en revisitant ce que nous avons fait nous-mêmes, il ressort celle que nous voudrions être notre idée de fonction. Alors qu'est-ce que vous avez fait ? Racontez-le moi ainsi que je le fasse moi aussi...Qui va me le raconter ?</i>	<i>P: Te alle medie hai fatto qualcosa, va bene. Allora vediamo se rivisitando quello che abbiamo fatto noi, viene fuori quello che vorremmo sia la nostra idea di funzione. Allora, cosa avete fatto, raccontatemelo che così lo faccio anch'io... Chi me lo racconta ?</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève : Résonance nulle</b> <b>Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri</b> <b>Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel</b>
29.	<i>IGOR: C'est moi qui vais le raconter. Alors... nous avons dessiné les points A, B et P, au hasard, et puis nous avons appliqué la Macro-construction « Effet1 » aux points A, B et P dans cet ordre et un autre point s'est formé que nous avons appelé H</i>	<i>IGOR: Lo racconto io. Allora... abbiamo disegnato i punti A, B e P, a caso, e poi abbiamo applicato la Macro-costruzione « Effetto1 » ai punti A, B e P in questo ordine e si è formato un altro punto che abbiamo chiamato H.</i>	<b>Exécution au rétroprojecteur</b> par l'enseignante de la description de l'activité, fournie par l'élève
30.	<i>P: Ok, alors arrêtons là... Ici il y a quelque chose... c'est-à-dire si je devais voir cet « Effet1 » qu'est ce que c'est selon vous la Macro « Effet1 » ?</i>	<i>P: Ok, allora, fermiamoci qui... Qui c'è un qualcosa... cioè se io dovessi vedere questo « Effetto1 »... che cos'è secondo voi la Macro « Effetto1 » ?</i>	<b>Focalisation de l'attention</b> <b>Demande implicite d'interprétation :</b> <b>Demande de reconstruction coopérative et</b>

<sup>83</sup> L'analyse du développement, au cours de la première discussion collective, du réseau sémiotique relatif au signe de fonction sera conduite lors du chapitre (cf. Chapitre 8, par 4.6 et suivantes). Cependant nous reprenons ici quasiment les mêmes extraits sur lesquels cette analyse portera. En effet, notre point de vue est ici différent : nous ne nous intéressons pas à l'évolution des signes, en eux-mêmes, mais aux actions que l'enseignante mène pour engendrer et accompagner ces évolutions. Bien évidemment, ces deux points de vue se recoupent, puisque la sémantique des actions de l'enseignante ne peut pas se passer de celle des signes produits au fur et à mesure.

			<b>sélective de l'activité dans Cabri : Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné</b>
31.	<i>FILIPPO : On voit que le point H reste...</i>	<i>FILIPPO : Si vede che il punto H sta...</i>	
32.	<i>IGOR : C'est-à-dire qu'elle est la construction que... il y, caché derrière, une construction qui permet ... de dessiner le point H à partir des points A, B et P.</i>	<i>IGOR : Cioè è la costruzione che... c'è nascosta dietro una costruzione che permette di... di disegnare il punto H a partire dai punti A, B e P.</i>	
33.	<i>P : « Effet1 » condense en le cachant, une construction que après vous avez découverte... Et qu'est-ce qu'elle fait, cette construction ?</i>	<i>P : « Effetto1 » condensa, nascondendola, una costruzione che poi avete scoperto... E che cosa fa questa costruzione ?</i>	<b>Paraphrase</b> de la première partie de l'intervention 32 : <b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité dans Cabri</b> <b>Paraphrase</b> de la deuxième partie de l'intervention 32 : <b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité dans Cabri</b>
34.	<i>FILIPPO : Elle construit un point.</i>	<i>FILIPPO : Costruisce un punto.</i>	
35.	<i>IGOR : Elle construit le point H... Car nous avons fait...</i>	<i>IGOR : Costruisce il punto H... Perché noi abbiamo fatto...</i>	
36.	<i>P : Elle construit le point H à partir de ?</i>	<i>P : Costruisce il punto H a partire da ?</i>	<b>Reflet avec demande de spécification</b>
37.	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Des trois points.</i>	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Dai tre punti.</i>	

Observons la synergie des toutes les actions mises en œuvre par l'enseignante.

Les **Reconstructions coopératives et sélectives de l'activité dans Cabri**, combinées avec la **Demande implicite d'interprétation**, donnent accès aux signifiés personnels relatifs au signe macro, déclenchent l'enjeu interprétatif et engendrent des signes nouveaux. L'**Exécution au rétroprojecteur** et l'**Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel amènent** à la mise en place du nouveau milieu commun attendu dans lequel tous les élèves puissent, s'impliquer et s'identifier (au moins partiellement). Les **Focalisation**, la **Paraphrase** (33) et le **Reflet** (36), parmi tous les signes produits, parviennent à centrer la réflexion sur deux caractéristiques sémiotiquement prégnantes du signe-artefact macro : la macro et comme « objet » et la macro comme « outil ». La façon dont l'enseignante reprend et modifie le contenu informationnel de Igor amène donc à un premier changement de la signification à attribuer à cette macro. L'enseignante introduit ainsi deux caractérisations de la macro « Effet1 », comme « chose magique » et comme « machine à Input/Output » (**Caract(« ChoseMagique »)Macro, Caract(« I/O »)Macro,**) qui, successivement développées de façon opportune, se révéleront fondamentales pour la construction du signifié de fonction. En effet, le développement de l'idée de macro comme objet condensant quelque chose (« chose magique »), notamment une « construction géométrique », amènera à assimiler la macro d'abord, à un signe de la fonction, et, consécutivement, de manière explicite, à un signe de la fonction

géométrique. Parallèlement, nous le verrons lors du chapitre dédié aux réseaux sémiotiques (cf. Chapitre 8) l'approfondissement de l'idée de macro, comme outil de construction, permettra le développement d'un signifié de fonction comme « machine à I/O » et par cela, la mise en relation des fonctions géométriques avec les opérations et la structure déductive des théorèmes.

Deuxième « étape » (D1.txt (212 :214)) :

Après avoir investigué la macro « Effet1 » dans sa dynamique de fonctionnement et l'avoir décrite comme une sorte de machine à Input/Output ((D1.txt 90 :120), par une **Synthèse** bien ciblée et une action de **Généralisation**, elle est maintenant transformée en une « chose magique » générique, puis reliée implicitement à une construction géométrique sous-jacente.

67.	<i>P : Alors, cela dit, résumons tout ça : nous avons ces trois points A, B, et P initiaux : je leur applique <b>une chose magique</b> qui, après, maintenant, n'est plus autant magique que ça car, plus ou moins, vous avez compris ce que c'est...</i>	<i>P : Allora, detto quindi questo, riassumiamo la cosa : abbiamo questi tre punti A, B, e P iniziali : ci applico <b>una cosa magica</b> che poi ora non è più così magica perché bene o male ho capito cos'è...</i>	<b>Synthèse avec identification et reconstruction sélective de l'activité : Généralisation par Universalisation</b>
-----	---	---	---

Troisième « étape » (D1.txt (327 :332)) :

A nouveau, un peu plus loin dans la discussion collective, la macro « Effet1 » est définitivement représentée comme macro générique, aussi que les points sur lesquels elle s'applique (**Généralisation par Universalisation**). En même temps, dans la **Synthèse** sélective de l'enseignante, elle continue à garder son double aspect de « machine à Input/Output » et de construction géométrique cachée. C'est justement ces deux « qualités », au sens de Peirce, que l'enseignante est en train de distiller et de cristalliser pour qu'elles puissent, au fur et à mesure, devenir les « qualités » au sens peircien, caractérisant l'interprétant dont cette macro est signe. La **Demande d'interprétation** se fait de plus en plus pressante mais reste encore implicite :

110.	<i>P : Alors cela dit... cette chose est intéressant aussi, il faut en tenir en compte! Après toute cette quantité de choses qui sont sorties doivent se recombinaison ensemble. Maintenant je voudrais savoir si... nous avons une <b>macro</b>, nous avons <b>des points</b> qui bougent, nous avons <b>des points</b> qui apparaissent... nous avons <b>des points qui apparaissent tous seules</b> ou je fais plein de choses <b>et je le fais apparaître</b> et je dis que celui-là c'est mon point...</i>	<i>P : Allora, detto questo... è interessante anche questa cosa, teniamone conto! Poi devono collimare tutta questa marea di cose che sono venute fuori. Adesso vorrei sapere se... abbiamo <b>una macro</b>, abbiamo <b>dei punti</b> che si muovono, abbiamo <b>dei punti</b> che appaiono... abbiamo <b>dei punti che appaiono per conto loro</b>, oppure faccio <b>una marea di cose</b> e lo faccio apparire e dico che quello è il mio punto...</i>	<b>Demande implicite de Interprétation Synthèse avec identification et reconstruction sélective de l'activité Généralisation par Universalisation</b>
------	---	---	---

Quatrième « étape » (D1.txt (365 :370)) :

La macro générique, désormais transformée en « chose magique », puis directement reliée à plusieurs constructions géométriques sous-jacentes, est maintenant explicitement impliquée dans l'enjeu interprétatif. Par une **Demande**



**d'interprétation dans l'artefact « Cabri »**, d'abord l'enseignante demande de relier le signe de relation, puis celui de fonction, au monde de l'artefact :

124.	<p><i>P : Alors... je répète, je suis partie de trois points et j'ai fait <b>une chose magique</b>, il est apparu un autre [point], puis j'ai vu que la chose magique je l'ai comprise, moi aussi je suis capable de le faire apparaître de trois façons différentes, par exemple, pour le moment...</i></p> <p><i>Alors je vous dis... Voyez-vous dans toute ça <b>une</b> fonction c'est-à-dire une relation... lui, Filippo, il était en train de dire... une relation qui lie ?</i></p>	<p><i>P : Allora... ripeto, sono partita da tre punti ho fatto <b>una cosa magica</b>, ne è apparso un altro, poi ho visto che la cosa magica l'ho capita, sono in grado anch'io di farlo apparire in tre modi diversi per esempio, per il momento... Allora vi dico... ci vedete in tutta questa cosa <b>una</b> funzione, cioè una relazione... lui stava dicendo Filippo... una relazione che lega ?</i></p>	<p><b>Synthèse avec identification et reconstruction sélective de l'activité ;</b>  <b>Généralisation par Universalisation</b></p> <p><b>Demande d'interprétation dans l'artefact « Cabri »</b></p>
------	---	---	---

Cinquième « étape » (D1.txt 387 :424) :

Finalement dans cette cinquième étape la macro générique est désormais explicitement établie comme icône du signifié de fonction :

130.	<p><i>MARCO : H est en fonction des trois points</i></p>	<p><i>MARCO : H è in funzione dei tre punti.</i></p>	
131.	<p><i>P : H est en fonction des trois points... Oh ! Quelle phrase magique !... H est en fonction des trois points... Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors qu'est cette chose qui faisait apparaître le point H, pour nous ?</i></p>	<p><i>P : H è in funzione dei tre punti... oh ! Frasi magica !... H è in funzione dei tre punti... Quindi potremmo dire che H è il risultato di una certa relazione, come avevi detto te, che gioca sui tre punti iniziali che sono A, B e P. E allora che cos'era questa cosa che faceva comparire il punto H, per noi ?</i></p>	<p><b>Reflet de l'intervention d'élève ;</b>  <b>Paraphrase avec glissement de signifié ;</b>  <b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité ;</b>  <b>Demande de reconstruction coopérative et sélective ;</b>  <b>Demande d'explicitation des signifiés construits ;</b>  <b>Demande de Particularisation</b></p>
132.	<p><i>MARCO : Deux cercles et une droite.</i></p>	<p><i>MARCO : Due circonferenze e una retta.</i></p>	
133.	<p><i>P : Se je la fais. Et sinon, au début, juste au début ?</i></p>	<p><i>P : Se le faccio. E se no, all'inizio, proprio all' inizio ?</i></p>	<p><b>Focalisation sur un trait significatif de l'activité : Effet Topaze</b></p>
134.	<p><i>IGOR : La Macro.</i></p>	<p><i>IGOR : La Macro.</i></p>	
135.	<p><i>P : La Macro. Donc nous avons un correspondant de la fonction dans cabri qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voir comme une fonction ?</i></p>	<p><i>P : La Macro. Quindi noi abbiamo <b>un</b> corrispondente della funzione in Cabri, che sono <b>le</b> Macro. Tutte queste sono Macro, se vogliamo, tutte quelle che abbiamo nel menù di costruzione, anche fare il punto medio la posso vedere come una funzione ?.</i></p>	<p><b>Reflet de l'intervention d'élève ;</b>  <b>Généralisation par Universalisation ;</b>  <b>Interprétation dans l'artefact « Cabri » ;</b>  <b>Généralisation par Extension du domaine de validité</b></p>

			Particularisation (Demande de) Interprétation dans l'artefact « Cabri »
136.	<i>Plusieurs voix : Oui</i>	<i>Tante voci : Sì</i>	
137.	<i>P : Car, qu'est-ce qu'il prend ?</i>	<i>P : Perché, cosa prende ?</i>	Focalisation sur un trait significatif
138.	<i>FILIPPO : Il prend les deux extrémités du segment...</i>	<i>FILIPPO : Prende i due estremi del segmento...</i>	
139.	<i>P : Et il me donne ?</i>	<i>P : E mi dà ?</i>	
140.	<i>FILIPPO : Et il trouve le troisième point qui est le centre du segment c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.</i>	<i>FILIPPO : E trova il terzo punto che è il centro del segmento cioè è equidistante dai vertici del segmento</i>	
141.	<i>P : Et il me donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si je vais voir... en somme dans Cabri, nous avons les Macro et nous disons que celle-là peut être une idée de notre fonction... Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?</i>	<i>P : E mi dà il terzo punto che è il punto medio... Quindi se io vado a vedere... insomma in Cabri abbiamo le Macro e diciamo... quella può essere un'idea della nostra funzione... E quando invece la facciamo noi?... Che cosa è la funzione ?</i>	Paraphrase avec glissement de signifié ; Généralisation par Universalisation Interprétation dans les mathématiques ; Demande d'interprétation dans l'artefact « Cabri »
142.	<i>FILIPPO : C'est la construction.</i>	<i>FILIPPO : È la costruzione.</i>	Généralisation par l'élève ; Interprétation par l'élève
143.	<i>P : La construction.</i>	<i>P : La costruzione</i>	Reflet de l'interprétation d'élève
144.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée.</i>	<i>CRISTINA : Cioè dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta ?!</i>	Généralisation par l'élève
145.	<i>CRISTINA : Derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée, que vous avez découverte et que, après, vous pouvez ne pas avoir Cabri et faire sur papier.</i>	<i>P : Dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta, che voi avete scoperto, che poi, potete non avere Cabri e fare su carta.</i>	Généralisation par Universalisation et par Extension du domaine de validité

Après avoir guidé de façon de plus en plus soutenue, l'interprétation des élèves, l'enseignante parvient finalement à établir explicitement un lien interprétatif entre le signe-mathématique fonction et le signe-artefact macro (**Interprétation dans l'artefact « Cabri »**). Cette mise en correspondance est générale (**Généralisation par Universalisation**) et intéresse chaque fonction et chaque macro de Cabri (**Généralisation par Extension du domaine de validité**). Ainsi, la **Demande** aux élèves **d'interpréter** (135) ce même signe dans le cas d'une macro différente, le « Milieu d'un segment », a pour but de vérifier et consolider la robustesse des critères, des « qualités », qu'avec la classe, elle a au fur et à mesure « distillées » et qui désormais caractérisent constitutivement toute fonction mathématiques. En particulier, nous retrouvons l'idée de machine à Input/Output : qui dans les cas du signifié de fonction peut se traduire comme la propriété du déterminisme : par chaque fonction à partir de certains objets initiaux, un autre objet peut être créé, toujours de la même façon.

Par cette dernière **Généralisation par Extension du domaine de validité**, et cette deuxième **Interprétation dans l'artefact**, nous voyons aussi se constituer une deuxième icône pour la fonction : celle d'une construction géométrique.

Le développement de ces icônes ne s'arrête pas là. Il va poursuivre tout au long de la séquence expérimentale, s'enrichissant et se complexifiant d'avantage. En fait, l'objet théorique fonction qui, lors de la première activité avec Cabri, a trouvé comme représentamen (et comme interprétant) la construction géométrique, va ensuite en rencontrer d'autres, en particulier les expressions algébriques et, bien évidemment, le graphe.

Par ces premières cinq étapes nous avons voulu montrer comment ce processus d'icônisation est très long et subtil. Il s'étale et se compose de changements progressifs dans le temps qui dépendent de l'interaction de toutes les actions analysées jusqu'à maintenant.

Nous avons constaté ce même **processus d'icônisation** pour toutes les autres signifiés mathématiques visées (variable indépendante, variable dépendante, domaine, image et paramètre). Comme nous l'avons déjà montré dans le cas de la de fonction, illustrer ce type de processus exige une analyse fine. Afin de ne pas alourdir l'exposé de cette thèse, nous avons, donc, décidé de ne pas la présenter pour les autres signifiés. En effet, au travers de l'analyse de l'évolution des signes correspondants, présentée lors du chapitre consacré à l'évolution des réseaux sémiotiques (cf. Chapitre 8), et grâce aux éléments de modélisation que nous venons de donner, nous estimons que les différentes actions, que l'enseignante met en place afin de développer ce processus, sont tout à fait reconnaissables.

#### **4.1.1. Actions à dominante mésogénétique et processus d'affranchissement/complexification des signes mathématiques**

Si l'analyse *a posteriori* de la discussion collective 1 nous a permis de mieux comprendre la genèse des signes-artefact, leur transformation en icône et leur greffe sur les signes-mathématiques, l'analyse de la discussion collective 13 nous éclaire, en revanche sur l'affranchissement de ces mêmes signes du monde de l'artefact. En effet, en particulier par les actions **d'interprétation** entre différents systèmes de signes (en particulier entre signes issus du texte d'Euler, signes issus de l'activité dans Cabri et signes issus des mathématiques, dans le registre algébrique, numérique et géométrique) nous observons la complexification progressive du réseau des signes connecté à chaque signe-mathématique donné. Successivement cette complexification aura comme conséquence l'affranchissement du signe-mathématique du signe-artefact auquel il était originellement associé. Nous faisons l'hypothèse qu'en effet, si la mise en correspondance entre un signe-mathématique et un signe-artefact reste biunivoque, les deux interprétants correspondants risquent de rester confondus et l'objet théorique se retrouve inextricablement mêlé avec le seul interprétant issu de l'artefact. En revanche, si pour un objet théorique donné, les élèves auront à disposition plusieurs représentamens (et plusieurs interprétants) dans l'artefact, c'est-à-dire plusieurs signes-artefact, et plusieurs signes-mathématiques, la possibilité de le comprendre, de s'approprier, de lui donner du sens et de la flexibilité, sera amplifiée.

Cela dit, nous voulons souligner que l'affranchissement ne réside pas dans la perte de tout rapport avec l'activité dans Cabri. L'expérience dans l'artefact continue à imprégner de sens ces signes-mathématiques. En utilisant une métaphore, il ne

s'agit pas d'une décontextualisation au sens « vertical », dans un processus d'abstraction avec perte de liaisons avec les éléments particulières de l'activité, mais au sens « horizontal », c'est-à-dire qu'elle s'opère par une complexification du réseau des correspondances sémiotiques, chacune entraînant avec elle-même un éclairage et un approfondissement nouveaux par rapport au premier, embryonnaire, signifié élaboré.

Par exemple, considérons le début de la discussion collective<sup>13</sup>. L'enseignante a demandé à Mattia d'illustrer la méthode d'Euler telle qu'il l'a traduite dans Cabri. Au rétroprojecteur, Mattia a déjà dessiné une droite horizontale et fixé un point sur cette droite. Puis sur cette même droite, il a choisi un autre point libre de bouger qu'il a appelé, comme Euler, P (D13\_23\_10\_02.rtf (061 :093)) :

30.	MATTIA : Après par P on traçait la perpendiculaire...	MATTIA : Dopo da P si tracciava la perpendicolare...	
31.	P : Oui...	P : Sì...	
32.	MATTIA :... et sur cette perpendiculaire, au travers une formule appliquée à x on trouvait M qui était la <b>valeur des... des appliquées</b> .	MATTIA :... e su questa perpendicolare, tramite una formula applicata a x si trovava M che era il <b>valore de... delle applicate</b> .	Interprétation par l'élève mixte dans les maths, dans Cabri et dans le texte d'Euler : Mélange sémiotique
33.	P :... des appliquées. Et donc la <b>valeur PM</b> était pratiquement ?	P :... delle applicate. E quindi il <b>valore PM</b> era praticamente ?	(Reflet de l'intervention d'élève : Focalisation sur un trait significatif de l'activité : Demande d'interprétation
34.	MATTIA : Ça aurait été le <b>résultat</b> ... en utilisant la calculatrice...	MATTIA : Sarebbe stato il <b>risultato</b> ... usando la calcolatrice...	Interprétation par l'élève dans l'artefact
35.	P : ... le <b>résultat de la formule</b> , comme vous avez dit, qui définit la fonction numérique. Et donc le <b>résultat</b> qu'est-ce que c'est, <b>de la fonction numérique</b> ?	P : ... il <b>risultato della formula</b> , come avete detto voi, che definisce la funzione numerica. E quindi il <b>risultato</b> che cos'è, <b>della funzione numerica</b> ?	Paraphrase avec glissement de signifié : Mélange sémiotique Interprétation mixte dans les maths et dans l'artefact Cabri
36.	MATTIA : <b>Le segment PM !</b>	MATTIA : <b>Il segmento PM !</b>	
37.	P : Et qu'est-ce qu'il représente au niveau de fonction, le segment PM ?	P : E che cosa rappresenta, a livello di funzione, il segmento PM ?	Demande d'interprétation dans les maths
38.	MATTIA : <b>L'appliquée</b>	MATTIA : <b>L'applicata.</b>	Interprétation par l'élève dans Le texte d'Euler
39.	P : L'appliquée pour Euler, et au niveau de la fonction ?	P : L'applicata per Eulero, e a livello di funzione ?	Demande d'interprétation dans les maths
40.	CRISTINA e d'autres : La variable !	CRISTINA e altri : La variabile !	Interprétation par l'élève dans les maths
41.	IGOR : La variable dépendante !	IGOR : La variabile dipendente !	Interprétation par l'élève dans les maths
42.	P : La valeur de la variable dans ce point P qui correspond à la valeur AP pour... AP est en revanche la variable... ?	P : Il valore della variabile in quel punto P che corrisponde al valore AP per... AP è invece la variabile... ?	Demande d'interprétation dans les maths

43.	<i>MATTIA, CRISTINA, IGOR e altri : ... Indépendante.</i>	<i>MATTIA, CRISTINA, IGOR e altri : ... Indipendente.</i>	<b>Interprétation par l'élève dans les maths</b>
44.	<i>P : Indépendante.</i>	<i>P : Indipendente.</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b>
45.	<i>CRISTINA : x.</i>	<i>CRISTINA : x.</i>	<b>Interprétation par l'élève dans les maths - registre algébrique</b>
46.	<i>P : Donc pour cette valeur de x, représentée par AP, j'ai PM qui est le g(x), qui était ce x<sup>2</sup>+5. Ok. [...]</i>	<i>P : Quindi per quel valore di x, rappresentato da AP, c'ho PM che è il g(x), che era quell' x<sup>2</sup>+5. Ok. [...]</i>	<b>Interprétation dans les maths - registre algébrique</b>

Cet extrait montre la complexification du réseau des correspondances entre les différents signes-artefact et signes-mathématiques portant sur le signifié de variable dépendante. Au début de la séquence expérimentale, les élèves avaient comme seul correspondant du signe-mathématique variable dépendante, dans l'artefact, un point capable de bouger indirectement. Maintenant, après quatre mois d'expérimentation<sup>84</sup>, l'introduction des fonctions numériques et des différentes manières de les représenter (par une expression algébrique, par un tableau, par le graphe etc), après l'arrivée du texte d'Euler et de sa méthode de construction du graphe, les élèves ont à disposition une grande variété de signes se référant à la variable dépendante.

Ce n'est plus seulement l'enjeu interprétatif entre monde de l'artefact, le texte d'Euler et le monde des mathématiques. Le discours, même sans sortir des mathématiques, porte sur les différentes expressions de la fonction dans les différents registres. Ainsi, en restant simplement dans le registre de la langue naturelle, sans donc vraiment utiliser ces registres, il renvoie à multiples moyens de représenter la fonction et ses constituants atomiques. En outre, à côté de ce mouvement « horizontal » inter-registres, il y a aussi un mouvement « vertical » de fonction particulière, numérique ou géométrique, à la fonction générique, dont on ne connaît pas l'ensemble de départ ou d'arrivée. Dans l'établissement de ces liens interprétatifs, nous avons vu que les actions d'**Interprétation** et de **Demande d'interprétation** jouent un rôle crucial. Ces moments sont aussi le théâtre de multiples phénomènes de **Mélange sémiotique**.

Par, exemple, dans l'extrait cité ci-dessus, la première interprétation de Mattia (32), mélange des signes issus de Cabri et propres aux fonctions géométriques (le point M construit sur la perpendiculaire à la droite horizontale), avec des signes propres au registre algébrique des fonctions numériques (« la valeur » et « au travers une formule appliquée à x ») et avec un signe issu du texte d'Euler (« l'appliquée »). La **Demande d'interprétation** de l'enseignante qui suit (33) permet de préciser cette interprétation, qui devient « le résultat obtenu par la Calculatrice de Cabri » (34), et qui se place donc à l'intérieur du monde de l'artefact. Ensuite, la **Paraphrase** de l'enseignante (35), transforme cette interprétation en « le résultat de la formule qui définit la fonction numérique », où la référence au calcul dans Cabri laisse davantage la place à la référence explicite à l'écriture algébrique. D'autres **Demandes d'interprétation** ultérieures de l'enseignante amènent à d'autres interprétations : le segment PM (36), l'appliquée (38) et finalement la variable dépendante (40) (41).

<sup>84</sup> Pendant quatre mois les élèves ont aussi poursuivi leur programme normal et ils ont aussi eu les vacances d'été.

L'extrait se conclut par l'introduction et la mise en relation, par l'enseignante (46), d'autres signes encore, issus du registre de représentation algébrique,  $g(x)$  et  $x^2+5$ .

Cet enjeu d'interprétations guidé par l'enseignante, révèle une grande complexité. On pourrait se demander s'il ne serait pas trop difficile pour les élèves en difficulté. Nous pensons que l'extrait cité ci-dessus apparaît complexe d'autant plus que l'on considère disjoint du reste de l'expérimentation et que l'on ne le remplace pas au sein de tout le travail fait dans Cabri. Les élèves sont, en fait, en train de parler d'objets qui sont là, présents sur l'écran et que, eux-mêmes ont construit, testé, utilisé et manipulé. En outre, la Dc à laquelle cet extrait appartient, vient après le travail, individuel à la maison sur le texte d'Euler, après qu'il ait été discuté et interprété collectivement, puis traduit et reconstruit, en binômes, dans Cabri. De plus, le travail d'interprétation ne s'arrête pas là. La séquence expérimentale a prévu d'autres activités et d'autres discussions collectives qui permettront de revenir sur ce réseau de correspondances pour le préciser et l'approfondir. Par exemple, après cette activité d'Euler dans Cabri, les élèves seront amenés à travailler et discuter, sur l'activité dite de « la ficelle élastique », où à nouveau tous ces liens interprétatifs seront explicitement pris en compte. A nouveau, comme pour la discussion collective 1, la discussion collective 13 (d'où cet extrait provient) rapporte seulement le début de tout un processus d'apprentissage, où le signifié de graphe de fonction, introduit par le texte d'Euler, sera mis en relation avec Cabri et puis avec les autres connaissances déjà élaborées. La complexification du réseau des signes constitue donc pour nous une hypothèse fondamentale : à partir d'un artefact et de certains signes les signes-artefact, les élèves commencent à construire le sens à attribuer à d'autres signes, les signes-mathématiques. Ce sens s'enrichit et se clarifie par la complexification du réseau des correspondances sémiotiques et par un travail explicite sur ces correspondances.

## 5. Actions de l'enseignante à dominante chronogénétique

L'analyse *a posteriori* des actions à dominante chronogénétique a été guidée en particulier par l'objectif de rendre compte du décalage entre chronogénèse attendue et chronogénèse effective d'une discussion collective, spécialement orchestrée en fonction du processus de médiation sémiotique.

Nous nous sommes fondé sur des outils d'analyse dérivés des recherches de Comiti, Grenier et Margolinas (Comiti, Grenier, 1993 : Comiti, Grenier et Margolinas, 1995) et, en particulier, sur la notion de **Résonance**. L'analyse *a posteriori* nous a conduite à modifier cette notion, en distinguant différents types, et nous a finalement donné accès à des éléments de modélisation des actions de l'enseignante. En particulier, face à une intervention d'élève, la présence d'un certain type de **Résonance** de la part de l'enseignante, nous a permis d'inférer sur les objectifs sous-jacents aux actions entreprises. En effet, nous pensons que toute action de l'enseignante est en quelque mesure orientée par la perception, que, à chaque instant, l'ens-même possède, de concordance entre ce que la classe est en train de discuter et les objectifs d'apprentissage qu'elle estime nécessaires ou atteignables.

Cette analyse nous a aussi fourni, indirectement, des éléments intéressants au niveau du contrat didactique spécifique au travail de sémiotique.

### 5.1.1. Résonance (faible ou forte ou nulle)

La notion de **Résonance** est empruntée de Comiti, Grenier et Margolinas (Comiti, Grenier, 1993 : Comiti, Grenier et Margolinas, 1995). Cependant, l'analyse des transcriptions nous a conduit à mieux préciser et, en partie, à modifier cet outil d'analyse. En particulier, nous étions intéressées à expliquer la prise de décision dans l'instant de l'enseignante par rapport aux objectifs visés par l'activité et par la discussion collective concernée. En fait, suivant le moment, face à une intervention potentiellement pertinente d'élève, l'enseignante réagit soit en lui consacrant attention et importance, soit en la soulignant en passant, de façon peu accentuée, soit en l'ignorant ou en ne lui accordant aucune place dans la discussion collective. Autrement dit elle opère respectivement une résonance forte, faible ou nulle sur l'intervention d'un élève. Ceci montre bien le caractère chronogénétique d'un tel type d'action puisque cette dernière révèle et réalise l'exigence de l'enseignante de gérer la progression du temps didactique, en fonction de sa perception de l'état des connaissances des élèves et de son propre projet d'enseignement. Différencier entre **Résonance nulle, faible ou forte** nous a permis, ainsi, d'obtenir des informations sur les attentes de l'enseignante en termes et de contrat et d'objectifs d'apprentissage.

Par exemple, dans l'extrait qui suit, nous avons observé une action de **Résonance forte** lors d'une question de sémiosis potentielle posée par un élève. Cela s'explique par la pertinence de cette question relativement aux objectifs de la discussion collective : toute la discussion collective est en effet conçue en vue de l'établissement de liens interprétatifs entre certains signes-artefact de Cabri et le signe-mathématique fonction.

Cette notion de **Résonance forte** fournit aussi des éléments relevant du contrat spécifique mis en place par l'enseignante, puisque une réaction positive de reprise d'une intervention d'élève peut toujours aussi être interprétée (même si elle est implicite) comme une indication de ce que l'enseignante attendait que les élèves fassent (D1.txt 007 :019) :

1.	<i>P : Alors, nous tous nous sommes arrivés jusque aux questions des premières feuilles ? Car, maintenant nous faisons un petit moment de discussion ensemble [nous allons discuter un peu ensemble de tout ça]. Nous arrivons à certaines conclusions, puis si nous n'avons pas fini...</i>	<i>P : Allora, tutti siamo arrivati fino alle domande dei primi fogli ? Perché ora si fa un attimo di discussione insieme. Arriviamo a certe conclusioni, poi se non abbiamo finito...</i>	<b>Explicitation de l'objectif et de la méthode de la discussion collective</b>
2.	<i>CRISTINA : Je n'ai pas compris à quoi sert tout cela pour les fonctions.</i>	<i>CRISTINA : Non ho ancora capito a cosa serve tutto questo per le funzioni.</i>	<b>Question de sémiosis potentielle d'élève</b>
3.	<i>P : Alors, très bien, exact. La question de Cristina est très intéressante, car elle dit « je n'ai pas encore compris, je n'ai pas encore compris à quoi sert tout cela pour les fonctions ». Et, en revanche, nous verrons en revoyant tout... Mais, avant tout, avons-nous une idée de ce qu'est une fonction ? Car ce devrait être la première question...</i>	<i>P : Allora benissimo, esatto. La domanda di Cristina è molto interessante, perché lei dice « non ho ancora capito, non ho ancora capito, cosa serve tutto questo per le funzioni ». E invece vedremo, ripercorrendo tutto... Prima di tutto, abbiamo noi un'idea di che cosa è una funzione ? Perché questa dovrebbe essere la prima domanda...</i>	<b>Evaluation par l'ens Reflet de la question pertinente d'élève ; Résonance forte Etablissement d'une règle implicite du contrat ; Explicitation de l'objectif et de la méthode de la discussion collective ; Etablissement d'une</b>

			règle implicite du contrat
--	--	--	----------------------------

Nous avons ainsi observé des actions de **Résonance forte**, dans deux situations complémentaires par rapport auxquelles nous avons interprété l'action de l'enseignante de la façon suivante :

- là où des interventions des élèves sont en accord avec la chronogenèse attendue, et donc, donner confirmation à une intervention d'élève permet la mise en place du milieu attendu :
- là où, des interventions d'élèves, imprévisibles *a priori* amènent dans le milieu de la discussion des éléments que l'enseignante perçoit quand même comme pertinents ou nécessaires au développement des signifiés collectifs visés. Dans ce deuxième cas les actions de **Résonance forte** sont donc au service de la modification du milieu.

En revanche, les actions de **Résonance faible** se caractérisent par la présence d'une réaction très modeste de l'enseignante face à une intervention d'élève, qui, dans d'autres circonstances, pourrait être considérée potentiellement comme très pertinente par rapport aux objectifs d'apprentissage.

Cette action est donc la plus révélatrice de la perception que l'enseignante a de l'état des connaissances des élèves « dans l'instant ». Il s'agit d'une perception qui est aussi difficile à expliquer qu'à anticiper. Elle repose sur les représentations que l'enseignante se fait au fur et à mesure de la chronogenèse de la discussion collective, des connaissances qu'elle reconnaît en acte chez les élèves, des objectifs qu'elle considère atteignables à un certain moment donné. En utilisant un vocabulaire vygotkien on pourrait parler de la représentation qu'elle a de la zone de développement proximal (ZDP) de ses élèves, à cet instant là.

Par exemple, si l'on considère encore le début de la première discussion collective, suite à la demande (3) d'explicitier les signifiés personnels attribués au signe de fonction, l'enseignante obtient toute de suite une « bonne » réponse par Marco. En autres termes, déjà après seulement trois minutes de discussion collective, Marco exprime de façon très pertinente le lien qui existe entre le signifié de fonction à construire et l'activité avec Cabri :

(D1.txt (21 :35)) : 5. IGOR : *Si è fatto a fisica !*

6.	CRISTINA : <i>Non, c'est que en physique...</i>	CRISTINA : <i>No, è che a fisica...</i>
7.	P : <i>Ah, petits malins !</i>	P : <i>Ah, ladroni, ladroni !</i>
8.	IGOR : <i>C'est-à-dire, en réalité nous avons fait les fonctions de la droite!</i>	IGOR : <i>Cioè in realtà abbiamo fatto le funzioni della retta !</i>
9.	CRISTINA : <i>C'est-à-dire que en changeant un paramètre, il changeait tout.</i>	CRISTINA : <i>Cioè che cambiando un parametro cambiava tutto.</i>
10.	MARCO : <i>Peut-être que... c'est-à-dire que... H bouge en fonction de A, B et P.</i>	MARCO : <i>Può darsi che... cioè H si muova in funzione di A, B e P.</i>
11.	P : <i>Alors, lui-il dit : « H bouge en fonction de A, B et P »...</i>	P : <i>Allora, lui dice : « H si muove in funzione di A, B e P »...</i>
12.	CRISTINA : <i>C'est-à-dire d'une à chaque fois !</i>	CRISTINA : <i>Cioè di una alla volta !</i>

Et, encore plus loin, nous retrouvons une action de Paraphrase du même ordre :  
(D1.txt (45 :59)) :



16.	<p><i>P : J'y vais ? Mais, je voudrais avoir votre attention car maintenant nous devons condenser tout ça. Alors, je répète un moment pour vous ce qui a été dit. Cristina commence : « j'ai fait tout ça mais je n'ai pas encore compris quel est le rapport de tous ça avec les fonctions ». Alors ma question a été : « mais avons-nous une idée de ce qu'est une fonction, pour comprendre si ça a un rapport ou non avec les fonctions ? » Maintenant, quelqu'un a fait allusion au fait qu'il y a une idée de fonction sortie de la physique, que maintenant je voudrais connaître car je ne la connais pas.</i></p> <p><b>Sur cette vague de cette idée [à propos de cette idée] de « fonction physique », Marco m'a après dit « H dép... est en fonction de A, B et P »... après je ne me rappelle plus bien qui d'autre a dit quelque chose... En tout cas, avant tout je voudrais connaître quelle est votre idée de fonction, car, apparemment quelqu'un de vous a déjà en tête une idée embryonnaire.</b></p>	<p><i>P : Vado ? Però vorrei la vostra attenzione perché ora dobbiamo condensare tutte le cose. Allora, ripeto un attimo per voi quello che è stato detto. Cristina inizia: « ho fatto tutto questo ma non ho ancora capito cosa centri tutto questo con le funzioni ». Allora la mia domanda è stata : « ma abbiamo noi un'idea di cos'è una funzione, per capire se questo centra o non centra con le funzioni ? » Ora, qualcuno mi ha accennato che c'è un'idea di funzione venuta fuori da fisica, che io adesso vorrei sapere perché io non conosco. <b>Sotto quest'onda di quest'idea di « funzione fisica », Marco mi ha detto « H dip... è in funzione di A, di B e di P »... poi non mi ricordo chi altri ha detto qualcosa... Comunque, prima di tutto, vorrei sapere la vostra idea di funzione, perché qualcuno di voi ha già in testa un'idea primitiva a quanto pare.</b></i></p>
-----	---	---

Cependant, même si l'enseignante reprend deux fois l'intervention de Marco, elle ne donne pas de suite à un phénomène éventuel de **Résonance forte**. Au contraire, lors de la deuxième reprise, elle montre fortement qu'elle estime que le « moment n'est pas propice ». Probablement, avant de s'embarquer dans la construction d'un signifié nouveau, l'enseignante veut être vraiment sûre que ce que Marco vient de dire n'est pas le résultat d'un « jeu de devinette » et que les autres élèves ont aussi la possibilité d'expliciter leurs signifiés personnels à propos du signe en question. Nous avons vu comment la TMS attribue, à l'explicitations des signifiés personnels relativement à un signe, un rôle central à la fois dans le processus de médiation sémiotique (puisqu'il permet l'accès à l'enseignante aux signes librement élaborés par les élèves au cours de l'activité avec l'artefact) et dans le processus d'internalisation (puisqu'il favorise l'auto-conscience des élèves).

Nous avons observés d'autres cas d'actions de **Résonance faible**, que nous avons interprétés de la manière suivante :

- le contenu informationnel d'une intervention d'élève quoique pertinente, peut comporter l'introduction trop précoce d'un signe ou d'une signifié : l'enseignante probablement estime que la capacité de compréhension de la classe n'est pas assez mûre :
- l'intervention d'un élève peut amener des éléments qui même si potentiellement pertinents ont été déjà amplement développés : l'enseignante alors estime pas nécessaire les approfondir ultérieurement.

Comme les autres actions de **Résonance**, celle de **Résonance nulle** constitue une évidence supplémentaire du fait que cette action est profondément liée à la chronogénèse. Par cette dénomination, nous indiquons, en réalité, toute absence volontaire d'actions de l'enseignante qui, là où l'on pourrait s'attendre à un phénomène de résonance, décide pourtant de rien faire. Bien entendu, il s'agit d'une interprétation *a posteriori* qui tente de prendre en compte le décalage entre ce qui se produit réellement dans la discussion collective et ce à quoi on pourrait raisonnablement s'attendre, étant donnés les conditions mises en place. Ces absences d'action, donc, permettent de repérer, en particulier, les interventions des

élèves, qui sont perçues par l'enseignante, à un moment donné, comme tout à fait inadaptées à ses « attentes », à son projet professionnel. En effet, à chaque instant, l'enseignante est confrontée à une prise de décision : elle doit alors évaluer la situation en cours et la confronter à ce qu'elle considère, globalement ou localement, comme son objectif et à la méthode de la discussion collective. Pour cela, les actions de **Résonance nulle**, se manifestent par la présence d'autres actions qui servent à l'enseignante pour « recentrer » la discussion et pour rétablir la bonne méthode de travail (**Explicitation de l'objectif et de la méthode de la discussion collective, Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri**, ou, encore, **Demande d'Interprétation**). Très souvent, ces mêmes absences d'actions sont marquées par une « brusque » **Evaluation** et un changement soudain de phase.

Par exemple (D1.txt (88 :94)) :

27.	<i>IGOR : Mais moi, au collège j'avais fait quelque chose...</i>	<i>IGOR : Ma io alle medie avevo fatto qualcosa...</i>	<b>Tentative de l'élève de recourir aux connaissances anciennes</b>
28.	<i>P : Toi au collège tu avais fait quelque chose, bien.</i>  <i>Alors, voyons si en revoyant ce que nous avons fait nous-mêmes, il ressort celle que nous voudrions être notre idée de fonction.</i>  <i>Alors qu'est-ce que vous avez fait ? Racontez-le moi de sorte que je le fasse moi aussi... Qui va me le raconter ?</i>	<i>P : Te alle medie hai fatto qualcosa, va bene.</i>  <i>Allora vediamo se rivisitando quello che abbiamo fatto noi, viene fuori quello che vorremmo sia la nostra idea di funzione.</i>  <i>Allora, cosa avete fatto ? Raccontatemelo che così lo faccio anch'io... Chi me lo racconta ?</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève ; Evaluation ; Changement de phase. Résonance nulle ; Explicitation de l'objectif et de la méthode de la discussion collective ; Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité</b>

La tentative d'Igor de répondre à la question posée, par le recours aux connaissances anciennes, est subitement quasi « réprimandé » par l'enseignante qui aurait pu, dans d'autres contextes, au contraire utiliser cette allusion pour récupérer dans le milieu des connaissances pertinentes. Dans l'extrait cité ci-dessus, l'action de **Résonance nulle** peut s'expliquer par la volonté de l'enseignante de construire le sens à attribuer au signe de fonction, exclusivement à partir des signes fournis par l'activité dans Cabri et du signifié collectif élaboré au cours de la discussion collective même.

Ainsi, en ne sanctionnant « pas positivement » une intervention d'élève, cette action contribue à l'établissement du contrat didactique. En l'espèce, l'intervention (28) statue l'obligation de répondre en s'appuyant seulement sur l'activité avec l'artefact.

Dans d'autres cas, nous avons observé des actions de **Résonance nulle** là où l'attention des élèves est capturée par des aspects qui, à l'instant donné, ne correspondent pas à la chronogenèse attendue ou ne servent pas aux objectifs explicites la discussion collective (dans le cas de la première discussion collective, l'établissement d'un lien interprétatif, entre des signes-artefact particuliers de Cabri et le signe-mathématique de fonction, dans le cas de la deuxième discussion collective,

la mise en relation des propriétés spatio-graphiques du graphe avec celles de la fonction correspondante).

La décision de l'enseignante d'adopter une résonance nulle peut alors bien s'expliquer par la volonté d'éviter que la Dc se concentre sur d'autres éléments que ceux qui sont prévus.

Toutes les actions de **Résonance** appartiennent au « deuxième » niveau d'analyse des discussions collectives, que nous avons appelé **niveau à dominante interprétative**. En effet il s'agit d'une interprétation successive, à l'aide d'une notion didactique, que nous portons sur des actions de **Reflet** ou **Paraphrase**. Dans le cas d'une **Résonance forte**, ce type d'action se combine ultérieurement à des actions de **Spécification** (ou **Demande de spécification**), de **Particularisation**, de **Généralisation**, ou d'**Interprétation**. En revanche, dans le cas d'une **Résonance faible** ou **nulle**, le **Reflet** ou la **Paraphrase** éventuels de l'enseignante ne sont suivis immédiatement que par des actions qui amènent à un changement de phase.

### 5.1.2. Actions chronogénétiques et médiation sémiotique

La théorie de la médiation sémiotique a ses racines dans les travaux en psychologie cognitive de V. Elle entraîne ainsi un rapport de contiguïté profonde avec la théorie de l'activité. Comme dans cette dernière, dans la TMS chaque action est étroitement reliée à un objectif (motif) bien spécifique.

Notre objectif de rendre compte du décalage entre chronogenèse attendue et effective, nous a mené à modifier la notion de **Résonance**, en distinguant entre actions de **Résonance forte**, **faible** ou **nulle**. Ainsi, cette modification des outils initiaux fournis en particulier par les travaux de recherche de Margolinas et Grenier, nous a finalement donné des éléments importants pour inférer sur les objectifs sous-jacents à certaines actions de l'enseignante, et cela justement en fonction du processus de médiation sémiotique à gérer.

En fait, observer un phénomène de **Résonance forte** suite à une intervention d'élève, par exemple, permet de déduire que le contenu de cette intervention correspond bien aux attentes de l'enseignante pour cette phase de la discussion. On peut alors s'attendre à ce que les actions, qui suivent, soient dans la perspective de développer et approfondir ce contenu.

En revanche, constater un phénomène de **Résonance faible** suite à une intervention d'élève, nous fait supposer que la représentation, de l'état des connaissances de la classe, que l'enseignante possède à un moment donné, ne lui permet pas de considérer ce moment de la discussion, comme le plus propice pour certains développements, potentiellement pertinents, pour l'introduction par exemple de nouveaux signes ou pour l'établissement de certains liens interprétatifs. Ainsi, la disponibilité de certains signifiés potentiels en jeu, dans un moment donné, ou facilement évocables à partir d'une certaine intervention, peut être un critère adopté par l'enseignante pour décider si rebondir ou pas sur une intervention d'élève. Les objectifs de cette phase de la discussion seront alors différents, de manière analogue les actions associées. Elles seront orientées par le but de recentrer partiellement la discussion collective et de développer ultérieurement les conditions favorables à accueillir pleinement les implications qu'une telle intervention d'élève amène.

Enfin, identifier un phénomène de **Résonance nulle**, nous permet d'inférer que les objectifs que l'enseignante considère atteignables ou pertinents à un moment donné de la discussion collective sont totalement différents des objectifs perçus tels par les élèves à ce même instant. Nous pouvons alors imaginer que les actions qui

suivent portent sur la définition explicite des buts et de tâches divers à confier aux élèves.

## 6. Actions de l'enseignante à dominante topogénétique

Notre séquence expérimentale accorde une grande importance aux dynamiques sociales de construction inter-subjectives des signes et au partage des responsabilités lors du processus de médiation sémiotique. Le processus d'internalisation est, en effet, central dans la TMS et il se fonde sur la transformation de processus inter-personnels en processus intra-personnels.

L'analyse *a posteriori* des actions de l'enseignante à dominante topogénétique nous a permis de surveiller ces dynamiques. Cette analyse a aussi montré comment des outils théoriques propres à la TdS, modifiés de façon opportune, se sont avérés efficaces pour mieux comprendre la manière dont l'enseignante orchestre la Dc afin de favoriser la l'émergence des signifiés collectifs et la genèse de leur internalisation.

### 6.1.1. Déplacement topogénétique (« vers la classe » : « vers les mathématiques » : « vers un binôme » : « vers un élève particulier ») : Fusion et Réduction topogénétique

Le **Déplacement topogénétique** est une notion didactique que nous avons emprunté aux travaux de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002). Comme ces auteurs l'expliquent, le processus de topogénèse est un processus de « territorialisation/déterritorialisation », géré normalement par l'enseignante visant à donner symboliquement une place, un lieu aux élèves. En particulier, dans le **Déplacement du partage topogénétique** (brièvement **Déplacement topogénétique**), l'enseignante joue sur le partage des tâches initialement défini entre elle-même et les élèves (c'est-à-dire sur la latitude topogénétique) afin de réguler les rapports que les élèves sont en train d'établir à la situation donnée.

Nos objectifs d'analyse, ainsi que la particularité de la séquence spécialement conçue en fonction du processus de médiation sémiotique, nous ont conduit à préciser et en partie, à modifier la notion de **Déplacement topogénétique**, en introduisant quelques différenciations.

Nous avons observé un **Déplacement topogénétique**, réellement accompli dans l'action (et puis éventuellement évoqué dans la discussion collective), et un **Déplacement topogénétique** réalisé seulement par et dans la discussion collective. En particulier, de la part de l'enseignante, nous avons parfois constaté la sollicitation forte face aux élèves à occuper une position nouvelle (en jouant sur le partage réel des tâches), d'autres fois une attestation ou une simple reconnaissance des « positions » des élèves, d'autres fois, encore, la constitution « fictive » (c'est-à-dire dans le discours seul) de telles « positions ». Dans ce dernier cas, certaines positions réellement occupées ont été, reconstruites, étendues, ré-attribuées, en un mot, « transformées ».

Un autre outil théorique que nous avons dérivé de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002), et que nous avons modifié est la notion de **Fusion topogénétique**. Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002) ont mis en évidence l'intérêt de prendre en compte et analyser l'utilisation des pronoms de la part de l'enseignante. Ceci les conduit, en particulier, à identifier des positions de l'enseignante très particulières correspondantes à des statuts différents de l'usage du pronom indéfini « on ». Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002) ont ainsi appelé **Fusion topogénétique** la position issue de l'usage du pronom « on » de la part de l'enseignante lors qu'elle « *se met du côté d'un groupe d'élèves et où la dissymétrie*

de la relation didactique est (fictivement) gommée ». Nous avons repris cet outil d'analyse en le transformant. Nous avons considéré comme **Fusion topogénétique** tout événement, dans le discours de l'enseignante, qui exprimait coïncidence entre sa propre position et la position de toute la classe (ou d'un groupe d'élèves). La technique linguistique utilisée à ce propos, est fondé sur l'usage du pronom « je » au lieu des pronoms « nous » ou « on » : l'enseignante parle à la première personne mais dans son « je », elle est en train de signifier métaphoriquement toute la classe : son intention est visiblement celle de parler au nom de tous. Ce n'est pas toujours le cas, puisque, nous constatons aussi l'usage du même pronom « je » en qualité d'individu séparé de la classe.

D'autres fois encore l'enseignante s'exprime en tant que représentant de toute la collectivité mais en utilisant le pronom « nous ». Nous avons appelé cette dernière situation **Réduction topogénétique**. Nous situons en particulier à ce niveau la constitution progressive de l'institution classe.

En revanche nous avons attribué à l'usage du pronom « on », un caractère de décontextualisation majeure par rapport à l'usage des pronoms définis. Le passage à ce pronom-ci, en effet, dans les discussions collectives analysées, marque souvent la tension à affirmer une « vérité » qui ne dépend pas forcément du contexte.

Les modifications introduites aux outils de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002), nous ont donc paru pertinentes, lors de l'analyse fine de la façon dont l'enseignante a orchestré le processus de médiation sémiotique. En fait, le jeu des rôles que l'enseignante tisse habilement se révèle crucial dans le processus de construction intersubjective des significations différentes à attribuer aux éléments de l'activité. Parfois l'enseignante se pose comme médiateur du savoir institutionnel (**Déplacement topogénétique « vers les mathématiques »**), d'autres fois, comme modérateur neutre au sein d'une autre institution, la classe, composée de personnes qui se confrontent au même niveau (**Déplacement topogénétique « vers la classe »**, « **vers un binôme** » ou « **vers un élève particulier** »). D'autre fois encore, dans un processus d'identification fusionnel (**Fusion topogénétique**) elle permet d'emporter avec elle-même toute la classe dans sa propre (ré)construction de l'activité.

Nous avons voulu considérer ces cas différents, comme étant tous des phénomènes divers de topogénèse. Cependant, nous avons dû distinguer respectivement entre **déplacement topogénétique « vers la classe »**, « **vers les mathématiques** », « **vers un binôme** » ou « **vers un élève particulier** » et entre **Fusion et Réduction topogénétique**.

Par exemple, dans l'extrait qui suit, nous pouvons observer la gestion délicate et appropriée de l'enseignante qui, en reconstruisant une intervention d'élève, transforme au fur et à mesure le sujet acteur au cœur des rapports à la situation donnée (D1.txt (401 :449)) :

135.	<i>P : [...]: Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri, qui sont les Macro. Toutes celles-ci sont Macro, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voire comme une fonction ?</i>	<i>P : [...]. Quindi noi abbiamo un corrispondente della funzione in Cabri, che sono le Macro. Tutte queste sono Macro, se vogliamo, tutte quelle che abbiamo nel menù di costruzione. Anche fare il punto medio la posso vedere come una funzione ?</i>	<b>Réduction topogénétique</b>  <b>Fusion topogénétique</b>
136.	<i>Tante voci : Oui</i>	<i>Tante voci : Sì</i>	
137.	<i>P : Car, qu'est-ce qu'elle prend ?</i>	<i>P : Perché, cosa prende ?</i>	

138.	FILIPPO : Elle prend les deux extrémités du segment...	FILIPPO : Prende i due estremi del segmento...	
139.	P : Et elle <b>me</b> donne ?	P : E <b>mi</b> dà ?	Fusion topogénétique
140.	FILIPPO : Et elle trouve le troisième point qui est le centre du segment c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.	FILIPPO : E trova il terzo punto che è il centro del segmento cioè è equidistante dai vertici del segmento.	
141.	P : Et <b>il me donne</b> le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si <b>je vais voir...</b> en somme dans Cabri, <b>nous avons</b> les Macro et <b>nous disons</b> que celle-là peut être une idée de <b>notre</b> fonction... Et quand en revanche c'est <b>nous qui la faisons</b> ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?	P : E <b>mi dà</b> il terzo punto che è il punto medio... Quindi se <b>io vado a vedere...</b> insomma in Cabri <b>abbiamo</b> le Macro e <b>diciamo...</b> quella può essere un'idea della <b>nostra</b> funzione... E quando invece la <b>facciamo noi</b> ?... Che cosa è la funzione ?	Fusion topogénétique ; Fusion topogénétique ; Réduction topogénétique ; Réduction topogénétique
142.	FILIPPO : C'est la construction !	FILIPPO : È la costruzione !	
143.	P : La construction.	P : La costruzione.	
144.	CRISTINA : C'est-à-dire que derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée !?	CRISTINA : Cioè dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta !?	
145.	CRISTINA : Derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée, que <b>vous</b> avez découverte et que, après, <b>vous pouvez</b> ne pas avoir Cabri et faire sur papier.	P : Dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta, che <b>voi</b> avete scoperto, che poi, <b>potete</b> non avere Cabri e fare su carta.	Déplacement topogénétique vers la classe
146.	FILIPPO : C'est-à-dire en unifiant une, non, deux ou plusieurs choses on peut en trouver une troisième.	FILIPPO : Cioè unendo una, no, due o più cose se ne può trovare una terza.	
147.	IGOR : C'est-à-dire dans la réalisation d'une construction ?	IGOR : Cioè nella realizzazione di una costruzione ?	
148.	FILIPPO : C'est-à-dire en unifiant deux constructions, c'est-à-dire deux ou plusieurs choses on peut en trouver une troisième. En algèbre si on a a plus b on trouve c	FILIPPO : Cioè unendo due costruzioni, cioè due o più cose se ne trova una terza. In algebra se uno ha a più b si trova c.	
149.	P : Eh <b>lui</b> , par exemple, maintenant <b>il est en train de s'envoler...</b> C'est-à-dire celles-ci sont géométriques, donc derrière une fonction géométrique il y a toujours une construction... si <b>moi</b> , en revanche, <b>je prends</b> une opération arithmétique, <b>lui il dit</b> , si <b>j'ai</b> deux nombres a et b, <b>je les additionne</b> et <b>je trouve</b> c... Donc, <b>on commence</b> à avoir une idée : il y a des choses d'où <b>je pars</b> et quelque chose à quoi <b>j'arrive</b> . <b>Alors, ces choses-ci ont des noms en Mathématiques, ils doivent l'avoir forcément...</b> Alors, tout ce qui bouge en Mathématiques, est appelé variable... et c'est joli alors l'activité que vous avez faite au début... qu'est-ce qui bouge si on varie certains points... Car au début qu'est ce <b>qui vous avait été demandé</b> ?	P : Eh <b>lui</b> , per esempio ora <b>sta andando...</b> Cioè queste sono geometriche, quindi dietro una funzione geometrica c'è sempre una costruzione... se <b>io</b> invece <b>prendo</b> un'operazione aritmetica, <b>lui dice</b> , se <b>ho</b> due numeri a e b, <b>li sommo</b> e <b>trovo</b> c... Quindi <b>si comincia</b> ad avere un'idea : ci sono delle cose da cui <b>parto</b> e qualcosa a cui <b>arrivo</b> . <b>Allora queste hanno dei nomi in Matematica, ce li devono avere per forza.</b> <b>Allora, tutto ciò che si muove in Matematica viene chiamato variabile</b> , ed è bellina allora attività che avete fatto all'inizio... cosa si muove al variare di certi punti... Perché all'inizio che cosa <b>vi era stato chiesto</b> ?	Déplacement topogénétique vers en élève particulier Fusion topogenetique Déplacement topogénétique vers les mathématiques Déplacement topogénétique vers la classe

Au début (135) l'enseignante parle au nom de la classe entière (**Réduction topogénétique**). Toute la classe se retrouve donc identifiée à la position de l'enseignante qui propose une première interprétation dans l'artefact « Cabri » du signe de fonction et qui, par une **Fusion topogénétique**, implique les élèves dans une nouvelle recherche dans l'artefact d'autres signes se référant au même objet théorique. D'abord il s'agit de la macro de Cabri « Milieu d'un segment » (136-141), ensuite c'est le cas des constructions géométriques (141-145). Le fait que la classe toute entière soit métaphoriquement représentée dans cette identification et que, donc, la responsabilité du travail d'interprétation soit complètement partagée, amène Filippo à proposer une nouvelle interprétation, totalement inattendue (146, 148). Ainsi, au début de l'intervention de l'enseignante (149), la place centrale est accordée à la position, particulière, de cet élève, qui se retrouve donc le seul protagoniste de la tâche d'interprétation et de généralisation du signifié de fonction (les autres élèves ne sont plus capables de le suivre...) (**Déplacement topogénétique vers un élève particulier**). Ensuite cette position est assumée par l'enseignante elle-même, qui prend la même place de l'élève, mais en qualité de représentant de la classe entière (**Fusion topogénétique**). Puis, encore, le discours change, ce sont alors les mathématiques, dont l'enseignante est le médiateur, qui fournissent leur « solution à cette tâche d'interprétation » (**Déplacement topogénétique vers les mathématiques**). C'est donc aux mathématiques de dire quelle est, pour eux, la « nature » des objets dont la classe est en train de parler : aucun moyen de contrôle, « aucune place », ne semble subsister, à ce point-là, pour les élèves. Enfin, c'est la classe entière, mais, cette fois-ci, sans l'enseignante, qui est appelée à remplir la tâche de se confronter avec la position occupée par les mathématiques, pour en faire, éventuellement, la sienne propre (**Déplacement topogénétique vers la classe**).

Ce qui s'éloigne, le plus, de l'esprit initial de la notion didactique de topogénèse telle qu'on le trouve chez Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002), est à notre avis, l'action de **Déplacement topogénétique vers les mathématiques**. Cette action exprime une forme particulière d'institutionnalisation par laquelle l'enseignante déplace la responsabilité de « l'accomplissement de la tâche » (dans l'exemple précédent il s'agit de la tâche d'interprétation) à un acteur fictif, qui n'est pas elle-même mais dont elle est le médiateur. On pourrait alors dire que, par cette action, le savoir institutionnel visé à ce moment trouve, à l'intérieur de la discussion collective, une place et un espace de dialectique avec l'institution classe et chaque élève singulièrement. « Les mathématiques » deviennent, par une métaphore, une « objectivation » du troisième constituant de la relation triadique didactique fondamentale, avec lequel, les élèves peuvent se confronter.

Le **Déplacement topogénétique vers les mathématiques**, conjointement avec la **Fusion** et la **Réduction topogénétique**, nous permettent, ainsi, de différencier entre l'enseignante qui parle à la première personne, celle qui s'identifie avec la classe entière, et l'enseignante qui est porteur de la voix de la culture et de l'institution mathématique.

Nous avons aussi vu comment ces différentes positions de l'enseignante entraînent des conséquences sur le processus de médiation sémiotique : favorisant respectivement l'identification et l'implication des élèves dans l'enjeu interprétatif (**Fusion**) : déterminant des déplacements différents de responsabilité face au processus d'apprentissage (**Réduction, Déplacement topogénétique vers un**

élève, vers un binôme, etc.) ou introduisant explicitement le point de vue de la culture mathématique (**Déplacement topogénétique vers les mathématiques**).

### 6.1.2. Mouvement topogénétique (ascendant et descendant)

Les **mouvements topogénétiques ascendants et descendants**, sont aussi des notions issues des travaux de recherche de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002). Pourtant, dans notre analyse, ils sont colorés d'une acception légèrement différente. Ils désignent pour nous des moments où la « distance topogénétique est respectivement accrue ou réduite ». Il s'agit d'une évaluation relative, non absolue qui identifie un changement qualitatif de position de l'enseignante.

Les **mouvements topogénétiques ascendants** marquent les moments où l'enseignante intervient en qualité de garant ultime de la relation didactique, de véritable « maître du temps didactique » et « du savoir visé » (*D1.txt (305 :312)*) :

105.	<i>P: Oui, mais je te préviens à l'avance qu'il en a une autre. Une autre [construction] que eux ont trouvé, mais que maintenant nous ne voulons pas dévoiler car maintenant ce n'est pas ça qui nous intéresse. Maintenant je voudrais un moment de réflexion.</i>	<i>P: Sì, però ti anticipo che ce n'è un'altra. Un'altra che loro hanno trovato, ma che adesso non vogliamo svelare perché non è quello che ci interessa. Adesso io vorrei un attimo di riflessione</i>	<b>Mouvement topogénétique ascendant</b>
------	---	---	--

Les **mouvements topogénétiques descendants**, en revanche, indiquent les moments où pour des raisons différentes, l'enseignante laisse (plus ou moins fictivement) son rôle de « maître » pour se positionner au niveau des élèves.

Par exemple, reprenons une partie de l'épisode de « animation multiple » déjà présenté (cf. Chapitre 6, § 8.5) (*D1.txt (574 :585)*) :

192.	<i>P: Si elles sont indépendantes, je voudrais pouvoir les bouger toutes les trois en même temps...Est-ce que Cabri il me permet de le faire ?</i>	<i>P: Se sono indipendenti vorrei anche poterle muovere tutte e tre contemporaneamente... Cabri mi permette di farlo ?</i>	
193.	<i>CRISTINA: Si on fait l'animation ?</i>	<i>CRISTINA : Se si fa l'animazione ?</i>	
194.	<i>MAURO : Avec l'animation multiple !</i>	<i>MAURO : Con l'animazione multipla !</i>	
195.	<i>P: Avec l'animation multiple ???</i>	<i>P: Con l'animazione multipla ???</i>	
196.	<i>MAURO : Autrement comment puis-je faire pour les bouger tous les trois tous ensembles ?</i>	<i>MAURO : Altrimenti come faccio a muoverli tutti e tre insieme ?</i>	
197.	<i>P: Viens ici et montre-le moi.</i>	<i>P: Vieni qui e fammi vedere.</i>	<b>Mouvement topogénétique descendant</b>

L'intervention (195) (aussi comme tout le dialogue qui suit) témoigne l'étonnement de l'enseignante face à l'éventualité d'avoir recours à l'animation multiple. En effet, elle n'avait pas pensé à une telle possibilité. Ainsi, quand elle demande à Mauro de montrer au rétroprojecteur le fonctionnement de cet outil, elle est en train de manifester un réel désir de compréhension. Nous assistons, à ce moment, un renversement partiel de la dissymétrie caractéristique à toute relation didactique : l'enseignante « cède », momentanément, sa place à l'élève, c'est lui, maintenant qui contrôle le jeu.



Nous avons aussi repéré des **Mouvements topogénétiques descendants** de la part de l'enseignante lors d'un abandon fictif de son rôle. Dans ce cas, ces actions jouent une fonction similaire à celle des **Fusions topogénétiques**, que souvent elles accompagnent. Reprenons à nouveau la suite de l'épisode de l'animation multiple (D1.txt (629 :658) :

215.	<i>P : On t'offre une glace! (Elle rie) Vas-y [tu peut retourner à ta place]. Donc... où je le veux... partout en même temps, à moins que Mauro n'invente le « super ressort », nous avons quelque problème. Mais, nous pouvons le faire un par un. Donc essayons, par exemple, de bouger P... Où suis-je en train de bouger P ?</i>	<i>P : Ti offriamo il gelato! (Ride) Vai. Quindi... dove mi pare... ovunque contemporaneamente, a meno che Mauro non inventi il "super-mollone", abbiamo un attimo dei problemi. Però possiamo farlo uno alla volta. Quindi proviamo per esempio a muovere P... Dove lo sto muovendo P ?</i>	
216.	<i>IGOR : Où vous voulez.</i>	<i>IGOR : Dove le pare.</i>	
217.	<i>CRISTINA : Là-bas quelque part.</i>	<i>CRISTINA : Lì intorno.</i>	
218.	<i>FILIPPO : Où vous voulez, mais pour tracer la droite vous devez faire le point parallèle... C'est-à-dire que vous devez déplacer P parallèlement...</i>	<i>FILIPPO : Dove le pare, però per tracciare la retta deve fare il punto parallelo... Cioè deve spostare P parallelamente...</i>	
219.	<i>Plusieurs voix: Non!</i>	<i>Varie voci : No !</i>	
220.	<i>P : Qu'est-ce que ça veut dire « faire le point parallèle » ?</i>	<i>P : Che vuol dire « fare il punto parallelo » ?</i>	<b>Mouvement topogénétique descendant</b>
221.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire le point doit passer sur une droite parallèle ?</i>	<i>CRISTINA : Cioè il punto deve passare sopra una retta parallela ?</i>	
222.	<i>FILIPPO : Oui !</i>	<i>FILIPPO : Sì !</i>	
223.	<i>IGOR : Non, ce n'est pas vrai, il suffit que tu le déplaces !</i>	<i>IGOR : No, non è vero, basta che lo sposti !</i>	
224.	<i>P : Même si je vais comme ça?</i>	<i>P : Anche se vado così ?!</i>	<b>Organisation d'une validation commune ; Exécution au rétroprojecteur</b>
225.	<i>FILIPPO : Oui, il la fait quand même [la droite], mais, il la fait plus lente !</i>	<i>FILIPPO : Sì, la fa lo stesso, però la fa più lenta !</i>	<b>Validation par le milieu reconnu par l'élève</b>
226.	<i>P : Ah, tu dis... il la fait plus lente ?! Donc, si, en revanche, je vais sur une droite parallèle... et ça peut nous servir après... je l'obtiens plus rapidement... Mais P je suis en train de le bouger... ?</i>	<i>P : Ah... dici te... la fa più lenta ?!. Quindi, se invece vado su una retta parallela... e questo ci può servire dopo... la ottengo più velocemente... Però P lo sto muovendo... ?</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève Mouvement topogénétique descendant ; Fusion topogénétique Anticipation de l'intérêt futur de cette question ; Réduction topogénétique Fusion topogénétique Exécution au rétroprojecteur : Fusion topogénétique</b>

L'enseignant, après avoir récupéré le contrôle de la discussion collective (215), l'abandonne à nouveau, cette fois-ci « fictivement » (220), afin de récupérer dans le milieu en co-construction, l'observation de Filippo. Il s'agit effectivement d'une action d'abandon « fictif » puisque nous voyons bien qu'elle maîtrise cette intervention : elle propose un nouveau milieu pour l'invalider partiellement (224), elle en anticipe l'intérêt futur, puis elle l'intègre (226) en reprenant le discours d'où elle s'était arrêtée.

## 6.2. Actions topogénétiques et construction intersubjective des signes

Le processus d'internalisation s'opère à la fois par la *transformation d'un processus inter -subjectif en un processus intra -subjectif et par la reconstruction interne d'opérations externes*. Nous avons déjà souligné comment la création d'un espace intersubjectif est fondamentale dans la TMS. L'analyse des actions à dominante topogénétique de l'enseignante constitue donc un élément important pour analyser comment l'enseignante gère et favorise ce passage du plan inter- personnel au plan intra- personnel, comment elle accompagne le partage et le déplacement éventuel des responsabilités face au processus d'apprentissage et comment elle crée ainsi les conditions externes pour que l'internalisation des signifiés collectifs puisse se produire.

Nous nous sommes donc appuyés sur les outils de la **Fusion topogénétique et du Mouvement topogénétique descendant et ascendant**. Ceux-ci permettaient de prendre en compte les moments où la distance topogénétique entre élèves et enseignante était réduite, accrue ou complètement écrasée par l'action de l'enseignante elle-même.

Ensuite, nous avons rencontré la nécessité de prendre en compte aussi d'autres situations intermédiaires. Par exemple nous nous sommes intéressés aux moments où l'enseignante se concevait en termes de classe (*Déplacement topogénétique vers la classe*), ou bien où la responsabilité était déplacée à un élève ou à un binôme en particulier (*Déplacement topogénétique vers un élève*), ou, encore, quand l'enseignante jouait le rôle de médiateur de la voix des mathématiciens (*Déplacement topogénétique vers les mathématiques*).

Nous avons ainsi repris ces outils, qui n'appartenaient pas à la TMS mais à la TdS, et nous les avons étendus et modifiés. Ils sont devenus, au fur et à mesure, des éléments cruciaux pour comprendre le processus de construction inter -subjective des signifiés. Nous avons ainsi observé comment les actions de **Réduction** et de **Fusion topogénétique** contribuent, respectivement, à la constitution de l'institution classe et à une identification progressive des élèves avec la position de l'enseignante. D'une part, cela permet d'impliquer les élèves dans la co-construction d'un milieu commun où les milieux activés de chacun puissent confluer et s'intégrer. D'autre part, il favorise l'émergence d'une signification collective de ce même milieu, que chacun peut ressentir voir reconnaître comme la propre.

## 7. Actions de l'enseignante à dominante mixte

Nous ne développerons pas l'analyse des actions de l'enseignante à dominante mixte pour des raisons différentes. D'abord, nous avons déjà eu l'occasion de parler d'un certain nombre d'entre elles, lors des analyses différentes des d'actions de l'enseignante. Ensuite, nous estimons que leur rôle (poly)fonctionnel, à la fois, à la mésogénèse et à la topogénèse ou à la chronogénèse et à la mésogénèse, etc, est

plus facilement reconnaissable. En fait, il est assez clair que chaque fois que l'enseignante demande de faire quelque chose, cette action importe avec elle-même à la fois sa propre dimension (chrono ou méso) et une dimension topogénétique. Il est clair que chaque fois que l'enseignante rappelle ou explicite la tâche qui avait été donnée dans Cabri ou fait une synthèse, d'une part elle est en train de modifier le milieu en injectant des aspects de l'activité qui n'étaient pas présents, d'autre part, elle est aussi en train d'agir sur la chronogénèse de la discussion collective. Dans le cas d'une action de **Rappel** ou d'**Explicitation de la tâche**, elle récupère la chronogénèse attendue. Dans le cas d'une **Synthèse**, soit elle inaugure, soit elle clôt un épisode.

Un mot de plus sur l'action de **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri**. Nous avons déjà eu l'occasion de prendre en compte cette action surtout par rapport à ses fonctions mésogénétiques. En effet, elle se pose comme l'action à dominante mixte par antonomase, car elle est à la fois à dominante mésogénétique, chronogénétique et topogénétique. Elle participe, comme nous avons déjà vu, à la (ré)création d'un milieu commun (**mésogénèse**). En même temps, elle permet la création d'un « espace » intersubjectif de construction de signifiés partagés (**topogénèse**), et, enfin, elle permet de scander le temps didactique (**chronogénèse**), puisque elle importe à l'intérieur de la discussion collective, la concaténation des activités (c'est-à-dire la chronogénèse attendue) telle qu'elle avait été conçue *a priori*.

## 8. Contrat didactique et processus de médiation sémiotique

Le processus de médiation sémiotique vit d'un contrat didactique spécifique dont nous avons pu détailler un certain nombre de règles. Nous faisons même l'hypothèse que ce type de contrat est strictement nécessaire la mise en place du processus même.

Non seulement les actions d'**Etablissement explicite d'une règle** ou d'**Explicitation des objectifs et de la méthode de la discussion collective** sont fondamentales pour la mise en place d'un contrat didactique favorable à la médiation sémiotique, mais aussi des actions qui implicitement contribuent à définir les attentes de l'enseignante et par cela l'enjeu auquel les élèves sont appelés, comme les **Références indirectes au travail de sémosis** ou même les (**Demandes d'Interprétations**). D'autres actions qui indirectement produisent l'établissement d'un contrat spécifique sont, comme nous l'avons déjà vu, celles d'**Evaluation** et de **Résonance**. En sanctionnant positivement ou négativement une intervention d'élève, ces actions véhiculent un jugement de valeur qui porte tant sur le contenu de la discussion collective (les connaissances qui doivent être à l'objet de la discussion collective) que sur les attentes et les obligations réciproques.

L'analyse de la sémantique de ces actions a ainsi eu comme conséquence celles de fournir des éléments sur le contrat didactique spécifique de cette classe. Il faut souligner que nous n'avons pas l'objectif d'analyser tout le contrat didactique caractérisant la classe examinée. Notre intérêt était celui de dégager surtout les règles qui tiennent aux dynamiques de gestion des discussions collectives. Ces moments de discussions collectives ont été, en fait, considérés comme cruciaux dans le processus de médiation sémiotique, orchestré par l'enseignante.

Ainsi, dès la première discussion collective, nous avons observé la mise en place explicite ou implicite de différentes règles du contrat, que nous avons pu classer

selon trois catégories principales. C'est une façon de présenter, mais il est clair que ces trois catégories de règles ont des intersections importantes :

- règles relatives à l'utilisation d'un artefact<sup>85</sup>, impliqué dans un travail de sémiotique
- Règles relatives à la culture mathématique particulière de cette classe, qui influencent fortement la façon de fonctionner de la classe, dans d'un travail de sémiotique.
- Règles relatives à la gestion des dynamiques inter personnelles, puisque le processus d'internalisation comporte l'appropriation et la réélaboration de la part des élèves de certains signes produits et partagés collectivement, c'est-à-dire sur le passage du plan inter-personnel au plan intra-personnel.

Les critères que nous avons retenus afin d'attester la présence d'une règle du contrat sont : la présence d'une règle donnée dans plusieurs interventions et dans discussions collectives diverses, la capacité d'une règle à conditionner fortement le cours de la discussion collective (dans la chronogenèse ou dans la gestion des rapports interpersonnels), le fait qu'une règle soit mentionnée ou évoquée par un élève.

### 8.1. Règles relatives à l'utilisation d'un artefact

Les règles relatives à l'utilisation d'un artefact, utilisé comme médiateur sémiotique dans la construction de certains signifiés mathématiques attendus, peuvent s'énoncer de la façon suivante :

- **R1 : « L'activité dans l'artefact « Cabri » a une signification dans le monde des mathématiques, notamment en relation avec le signifié de fonction, une signification qu'il faut rechercher ensemble ».**

Cette règle explicite a été identifiée la première fois à partir de l'intervention de l'enseignante (3) :

(D1.txt (014 :017))

3.	<p><i>P : [...] La question de Cristina est très intéressante, car elle dit : « je n'ai pas encore compris, je n'ai pas encore compris à quoi sert tout cela pour les fonctions ».</i>  <i>Et, en revanche, nous verrons en revoyons tout...</i></p>	<p><i>P : [...] La domanda di Cristina è molto interessante, perché lei dice: « non ho ancora capito, non ho ancora capito, cosa serve tutto questo per le funzioni ». E invece vedremo, ripercorrendo tutto... [...]</i></p>
----	--	---

Elle constitue une sorte de « **règle fondamentale** », sous-jacente à tout le travail d'interprétation qui s'instaure lors d'une *discussion mathématique* que nous avons appelée de *construction collective d'un signifié socialement partagé* (cf. Chapitre 1, § 3.5). Nous aurons l'occasion de revenir sur cette règle et d'en approfondir les corollaires, à la fin de ce paragraphe.

- **R2 : « out ce qui a été fait dans l'artefact « Cabri » et tout ce qui a été dit lors de la discussion collective doit trouver une signification intégrant les différents éléments en jeu .**

Cette règle explicite a été identifiée d'abord de façon implicite lors de la première intervention de l'enseignante que nous avons déjà citée (3) et successivement lors de l'intervention (110). Nous pourrions même dire qu'elle constitue un complètement

<sup>85</sup> Rappelons que la classe avait déjà travaillé avec « Cabri » et « l'Algebrista », un micromonde pour l'apprentissage de l'algèbre.

de la règle fondamentale R1 et souligne le fait que la signification à rechercher doit prendre en compte chaque élément en jeu (*D1.txt (327 :329)*) :

110.	<i>P : Alors cela dit... il est intéressant ça aussi, il faut en tenir en compte! Après toute cette quantité de choses qui sont sorties doivent se recombinaison ensemble.</i>	<i>P : Allora, detto questo... è interessante anche questa cosa, teniamone conto! Poi devono collimare tutte questa marea di cose che sono venute fuori... [...]</i>
------	--	--

La règle R2 s'accompagne aussi à la règle suivante :

- **R3 : « out ce qui a posé problème lors de l'activité avec l'artefact « Cabri » doit être discuté ensemble ».**

Cette règle explicite a été identifiée lors des interventions (*D1.txt (843 :844)*) :

297.	<i>P : [...] D'autres questions ? Faites-les ressortir, toutes ces questions que vous avez dans le ventre... sur ce que vous avez fait.</i>	<i>P : [...] Altre domande ? Fatevele venire quelle che avete nello stomaco... di quello che avete fatto.</i>
------	---	---

et (*D1.txt (965 :966)*) :

336.	<i>P : Marco, parle avec nous ? Si là-bas il arrive quelque chose d'étrange, nous voulons le voir aussi. Mais, écoute ce que sont en train de dire les autres !</i>	<i>P : Marco, parli con noi ? Se lì succede qualcosa di strano, lo vogliamo vedere tutti. Però stai a sentire quello che stanno dicendo gli altri !</i>
------	---	---

Le travail d'interprétation s'opère nécessairement à partir de l'activité avec l'artefact. Tout ce qui a posé problème doit être partagé et diffusé pour confluer dans la construction collective du réseau de signifiés attendus.

## 8.2. Règles relatives à la culture mathématique particulière de la classe

En revanche, les règles relatives à la dimension culturelle particulière de la classe, qui revêtent une importance toute particulière lors de la gestion d'une discussion collective, peuvent s'énoncer de la façon suivante :

- **R4 : « Tout ce qui a une évidence perceptive doit être démontré ».**

Cette règle a été identifiée indirectement à partir de l'intervention d'un élève. En fait, sans supposer l'établissement préalable de cette règle, nous ne pouvons pas donner sens à l'intervention de Igor suivante et à la réponse correspondante de l'enseignante (*D1.txt (141 :142)*) :

44.	<i>IGOR : Mais faut-il démontrer que H bouge sur cette droite-ci ?</i>	<i>IGOR : Ma bisognerebbe dimostrarlo che H si muove su questa retta ?</i>
45.	<i>P : Faut-il le démontrer... avant tout il faut comprendre ce que c'est, autrement comment peut-on démontrer quelque chose ?</i>	<i>P : Bisognerebbe dimostrarlo... Prima di tutto bisogna capire che cos'è altrimenti come facciamo a dimostrare qualcosa ?</i>

La réponse donnée par l'enseignante (45) amène alors aussi à l'établissement explicite de la règle suivante :

- **R5 : « Avant de démontrer une évidence perceptive, il faut essayer de la comprendre ».**

Observons que l'interaction entre ces deux interventions (44) et (45) nous montre aussi que c'est bien l'enseignante qui reste le garant ultime de toute règle du contrat.

- **R6 : « Lors de la discussion collective il faut prendre en compte toutes les questions qui ont été posées dans la fiche de travail avec Cabri ».**

Cette règle implicite a été identifiée lors des interventions suivantes (D1.txt (891 :894)) :

310.	<i>P : [...] S'il n'y a pas de doutes je passerai à la dernière question à savoir [...]</i>	<i>P : [...] Se non ci sono dubbi io passerei all'ultima domanda ossia [...]</i>
311.	<i>CRISTINA : Mais avant cette [question] on en avait une autre !... Est-ce que il n'y avait pas celle sur comment je dois bouger P pour que H ne bouge pas ?</i>	<i>CRISTINA : Ma prima di questa ce n'era un'altra !... Non c'era quella di come devo muovere P perché H resti fermo ?</i>
312.	<i>P : Pardonnez-moi, j'ai oublié tout un morceau. Vous avez raison !</i>	<i>P : Perdonatemi, mi sono scordata tutto un pezzo. Avete ragione !</i>

Ou encore (D13\_23\_10\_02.rtf (127)) :

62.	<i>P : A ce point, passons à la question « décrivez ci après [...] le graphe avec vos mots ». Alors, voulons-nous les lire ? Voulez-vous dire ce que vous avez observez ?</i>	<i>P : A questo punto possiamo allora alla domanda « descrivete di seguito... [...] il grafico con parole vostre ». Allora, li vogliamo leggere ? Volete dire quello che avete osservato ?</i>
-----	---	--

Cette règle répond à la nécessité de garder ou récupérer dans le déroulement et la gestion de la discussion collective la chronogenèse attendue. En fait, nous avons vu lors du quatrième chapitre (cf. Chapitre 4, § 3.2) que la séquence expérimentale a été conçue selon un enchaînement de tâches particulier, qui répond à des objectifs d'apprentissage précis. Nous faisons l'hypothèse que la résolution de ces tâches et la discussion collective consécutive peuvent permettre la constitution d'un réseau de signes adéquats.

### 8.3. Règles relatives aux rapports interpersonnels

Le processus d'internalisation se fonde sur le passage de signes du plan interpersonnel au plan intrapersonnel. Les règles relatives à la gestion de ces dynamiques interpersonnelles revêtent donc une grande importance dans le processus de médiation sémiotique, soutenu par l'enseignante. Elles peuvent s'énoncer de la manière suivante :

- **R7 : « Le travail de construction collective des signifiés nouveaux s'opère, tout d'abord, à partir des signifiés personnels déjà construits. Le premier souci est avant tout, d'essayer de les expliciter ».**

Cette règle explicite a été identifiée à partir des interventions de l'enseignante (3) et (17) :

(D1.txt (018 :019))

3.	<i>P : [...] Avant tout, avons-nous une idée de ce qu'est une fonction ? Car ce devrait être la première question...</i>	<i>P : [...] Prima di tutto, abbiamo noi un'idea di che cosa è una funzione ? Perché questa dovrebbe essere la prima domanda...</i>
----	--	---

(D1.txt (049 :051))

17.	<i>P : [...] Alors, ma question a été: « mais avons-nous une idée de ce qu'est une fonction pour comprendre si cela a ou non un rapport avec les fonctions ? »</i>	<i>P : [...] Allora la mia domanda è stata : « ma abbiamo noi un'idea di cos'è una funzione per capire se questo centra o non centra con le funzioni ? »</i>
-----	--	--

Elle s'accompagne aux deux règles déjà énoncées, R2 et R3. En fait, non seulement le processus de médiation sémiotique, orchestré par l'enseignante, se fonde sur les signes et signifiés différents que les élèves ont personnellement élaborés. Mais aussi, l'objectif final posé est celui de parvenir à une articulation et une harmonisation (toujours imparfaites et inachevées) entre signifiés personnels (construits précédemment ou construits lors de l'activité avec l'artefact) et le signifié mathématique collectif attendu.

- **R8 : « Chaque élève est responsable de ce qu'on dit lors de la discussion collective : si quelqu'un n'est pas d'accord il faut qu'il intervienne et qu'il intègre ce qui a été dit ».**

Cette règle explicite montre bien la coresponsabilité des élèves dans le processus de médiation sémiotique. Elle se relie à la règle R3, puisque répond, d'une part, à la nécessité de bâtir la construction des signifiés mathématiques nouveaux sur les signifiés personnellement élaborés, au cours de l'activité avec l'artefact. D'autre part, cette règle met bien en évidence le fait qu'il s'agit d'une construction *sociale*, d'un signifié collectivement partagé. La dimension de coparticipation active est donc fondamentale. Elle a été repérée à partir de l'intervention suivante (D1.txt (138 :139)) :

43.	<i>P : [...] Quand quelqu'un n'est pas d'accord il doit intervenir et il doit dire quelque chose de plus.</i>	<i>P : [...]. Quando qualcuno non è d'accordo deve intervenire o deve dire qualcosa di più.</i>
-----	---	---

Ou encore (D13\_23\_10\_02.rtf (101)) :

50.	<i>P : Vas-y, Mauro, dis-nous... à la limite tu seras interrompu par les autres [élèves].</i>	<i>P : Dai dicci Mauro... semmai vieni interrotto dagli altri [...]</i>
-----	---	---

#### 8.4. Phénomènes de contrat locaux

Lors de la première discussion collective nous avons aussi observé des phénomènes de contrat que nous pouvons définir « locaux ». Il s'agit en fait d'épisodes qui, bien que intéressants, ont été remarqués seulement une fois et ont montré avoir une influence limitée dans le cours de la discussion collective.

Nous avons décidé quand même d'exprimer ces phénomènes en termes de règles, puisque nous ne pouvons pas affirmer qu'il s'agit d'épisodes isolés, ne révélant pas la mise en place (ou en lumière) d'une autre règle du contrat, qui, finalement n'a plus eu besoin de fonctionner lors du reste de la séquence expérimentale.

- **R9 : « Dès qu'on entre dans le travail d'interprétation de l'activité dans Cabri, il faut rester le plus près possible des signifiés construits lors de l'activité même : le recours aux connaissances anciennes n'est pas à cet instant-là pertinent ».**

Cette règle implicite, qui semble être contradictoire avec les règles R2 et R3 précédentes, a été identifiée lors de l'intervention (121) de l'enseignante suivante (D1.txt (345 :360)) :

116.	<i>P : Et, qu'est ce que c'est selon vous, dans tout ce travail... la fonction ?</i>	<i>P : E che cos'è secondo voi, in tutto questo lavoro qui... la funzione ?</i>
117.	<i>FILIPPO : Une relation qui lie deux points.</i>	<i>FILIPPO : Una relazione che lega due punti.</i>
118.	<i>GIACOMO : Exacte !</i>	<i>GIACOMO : Esatto</i>
119.	<i>P : Une relation qui lie... des points... disons quels points... ?</i>	<i>P : Una relazione che lega... dei punti... diciamo quali punti... ?</i>
120.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire le fait que H reste sur le cercle de diamètre [AP], sur le cercle de diamètre [BP] ?</i>	<i>CRISTINA : Cioè il fatto che H sta sulla circonferenza di diametro [AP], sulla circonferenza di diametro [BP] ?</i>
121.	<i>IGOR : Mais, nous au collège nous avons fait quelque chose sur les fonctions directes, parallèles, peut-être que ça existe ça ?</i>	<i>IGOR : Mah... noi avevamo fatto alle medie qualcosa sulle funzioni dirette, parallele può darsi che esista questa cosa ?</i>
122.	<i>P : Oui, ils existent mais pas ici maintenant... non !</i>	<i>P : Sì esistono però qui ora... no !</i>

Nous expliquons cet intervention de l'enseignante par la nécessité de contrôler la situation et de concentrer, à ce moment donné, la discussion sur les signifiés construits lors de l'activité avec l'artefact.

- **R10 : « Si la démarche de résolution envisagée est trop difficile cela veut dire que l'on est en train de résoudre le mauvais problème ».**

Cette règle implicite a été repérée lors de l'épisode suivant :  
(D1.txt (298 :302))

101.	<i>P : Eh Igor, mais ce que je suis en train de te demander... avec deux cercles et la droite, après il faut une belle démonstration du fait que tous se rencontrent là-bas !</i>	<i>P : Eh Igor, ma quello che ti sto chiedendo io... con due circonferenze e la retta, poi ci vuole una bella dimostrazione che tutti si incontrano lì !</i>
102.	<i>IGOR : En fait, nous ne l'avons pas mise, la droite !</i>	<i>IGOR : Infatti non l'abbiamo messa la retta !</i>

L'épisode montre comment l'enseignante joue sur cette règle implicite du contrat pour obtenir (Effet Topaze) la bonne réponse de Igor et pour rediriger la discussion collective. En fait, nous supposons que l'évocation d'une tâche difficile comme celle d'une démonstration a pour but de dissuader les élèves de prendre comme quatrième construction possible de H, celle de l'intersection des trois figures. L'enseignante sait que cette dernière construction est, en effet, erronée et obtient par son intervention, que les élèves cherchent ailleurs.

## 8.5. Quelque observation sur la règle fondamentale

Nous faisons l'hypothèse que le type de contrat établi est vital pour que le travail d'interprétation soit effectivement assumé par les élèves (Dévolution). Ce travail, en effet, une fois explicitement demandé, repose sur la règle qui veut que tout ce qui se passe dans Cabri ait une correspondance dans les mathématiques (R1). Ce même type de contrat veut aussi que « **ce qui est posé comme « signe » reste « signe » et, en particulier, que les objets théoriques ne soient pas soumis aux mêmes types de nécessités auxquelles les objets concrets de l'artefact obéissent forcément** » (R11). En revanche, il est demandé aux objets théoriques de répondre à une nécessité logique qui puisse trouver dans l'artefact son instantiation éventuelle. D'autre part, « **si l'artefact est un bon médiateur, l'on doit pouvoir**



**fournir une interprétation mathématiquement consistante des ses « limites » (R12).** Nous pourrions dire que ces deux dernières règles constituent une sorte de corollaires très importants à la règle **R1**, que nous avons appelé **règle fondamentale**. Cette règle est en fait sous-jacente à toute activité dans l'artefact « Cabri » et à tout travail d'interprétation.

Infirmier ces trois règles, R1, R11 et R12, implique annihiler toute garantie du fait que le jeu interprétatif soit aussi à la portée des élèves, c'est-à-dire toute dévolution possible. En fait, si seulement certains éléments de l'activité avec l'artefact sont interprétables dans les mathématiques, comment pourront les élèves, en toute autonomie, savoir les choisir ? Et si la propriété théorique d'un objet mathématique est fondée sur des caractéristiques spécifiques ou des limites de l'artefact, comment assurer sa validité hors de l'artefact lui-même ?

Cependant, au début de l'épisode de l'animation multiple, l'enseignante tente d'introduire la définition et le signifié théorique de paramètre justement à partir des limites de Cabri (184) (190) (192). Elle contrevient ainsi aux règles du contrat. En effet il n'est pas légitime de vouloir fonder la nécessité d'introduire la déf de paramètre, en opposition à celle de variable indépendante, seulement parce que, dans Cabri, l'on ne peut bouger qu'un seul point à la fois. Les paramètres comme les variables indépendantes ne sont pas des objets concrets, ils sont des « objets » théoriques, dont les points libres de Cabri ne sont qu'un signe « partiel » et « limité ». C'est donc seulement par une nécessité théorique, que l'on doit pouvoir définir ces mêmes « objets », c'est-à-dire, par un choix légitime de fixer arbitrairement certaines de ces variables.

Face à cette tentative de l'enseignante, il est intéressant d'observer que les élèves repositionnent tout de suite le problème : soit il se pose au niveau théorique (191), soit il se pose au niveau de l'artefact (194 - 210). Dans le premier cas, le problème n'a pas raison d'être. Dans le deuxième cas, les élèves proposent de trouver dans Cabri un outil adapté à « traduire » cette propriété théorique : « l'animation multiple » pourrait ainsi réaliser, dans cet artefact, la variation multiple qui caractérise *a priori* ces objets théoriques, indiqués comme variables indépendantes. L'étonnement de l'enseignante, face à cette proposition d'utiliser l'animation multiple, indique finalement l'impasse où elle se trouve alors.

184.	<i>P : [...] Ritorniamo alla traccia e riprendiamoci i tre punti iniziali. Applichiamo « Effetto1 » ad A, B e P. Ecco il problema è questo : Cabri mi permette di far muovere H mentre muovo tutto ?</i>	<i>P : [...] Ritorniamo alla traccia e riprendiamoci i tre punti iniziali. Applichiamo « Effetto1 » ad A, B e P. Ecco il problema è questo : Cabri mi permette di far muovere H mentre muovo tutto ?</i>
185.	<i>CRISTINA : Comment ?</i>	<i>CRISTINA : Come ?</i>
186.	<i>IGOR : C'est-à-dire, comment faire pour bouger tout ?</i>	<i>IGOR : Cioè, come si fa a muovere tutto ?</i>
187.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire dans quel sens ?</i>	<i>CRISTINA : Cioè in che senso ?</i>
188.	<i>P : Maintenant je vous le explique..je dis.. Je peux voire ce qui arrive à H... car mes variables indépendantes qui sont ?</i>	<i>P : Ora ve lo dico... dico... posso vedere cosa succede ad H... perché le mie variabili indipendenti chi sono ?</i>
189.	<i>IGOR : A, B et P.</i>	<i>IGOR : A, B e P.</i>
190.	<i>P : Donc je pourrais vouloir les bouger toutes les trois ensembles en même temps ? Ou Cabri... ?</i>	<i>P : Quindi potrei volerle muovere tutte e tre contemporaneamente ? Oppure Cabri... ?</i>
191.	<i>IGOR : Mais, si elles sont indépendantes... Oui !</i>	<i>IGOR : Ma se sono indipendenti... Sì !</i>

192.	<i>P: Si elles sont indépendantes, je voudrais pouvoir les bouger toutes les trois en même temps... Est-ce que Cabri il me permet de le faire ?</i>	<i>P: Se sono indipendenti vorrei anche poterle muovere tutte e tre contemporaneamente... Cabri mi permette di farlo ?</i>
193.	<i>CRISTINA: Si on fait l'animation ?</i>	<i>CRISTINA: Se si fa l'animazione ?</i>
194.	<i>MAURO: Avec l'animation multiple !</i>	<i>MAURO: Con l'animazione multipla !</i>
195.	<i>P: Avec l'animation multiple ?!?</i>	<i>P: Con l'animazione multipla ?!?</i>
196.	<i>MAURO: Autrement comment puis-je faire pour les bouger tous les trois tous ensemble ?</i>	<i>MAURO: Altrimenti come faccio a muoverli tutti e tre insieme ?</i>
197.	<i>P: Viens ici et montre-le moi.</i>	<i>P: Vieni qui e fammi vedere !</i>
198.	<i>MAURO: Vous me payerez le repas si je suis capable de le faire !</i>	<i>MAURO: Mi pagate il pranzo se ce la faccio !</i>
199.	<i>P: On te paye le repas... ça dépend de combien tu manges, Mauro ! (Elle rie)</i>	<i>P: Ti paghiamo il pranzo... dipende da quanto mangi Mauro ! (Ride)</i>

Finalement, après l'intervention de l'observateur (212), l'enseignante reprend le contrôle de la discussion collective et replace la question de manière conforme au contrat. Ainsi, si l'on observe la définition de paramètre à laquelle elle aboutira plus tard (intervention (259) déjà citée avant (cf. Chapitre 5, § 10.1.2), nous voyons bien qu'elle la donne toujours en essayant de garder les deux mondes distincts. La porosité entre les deux familles de signes relatives, ce que nous avons appelé **Mélange sémiotique**, cependant, subsiste. Ce n'est pas, en effet, ce qui est mis en cause par le contrat.

208.	<i>ELENA: Madame le professeur... vous êtes surprise !</i>	<i>ELENA: Professoressa... è rimasta !</i>
209.	<i>P: Je suis très perplexe... Car...</i>	<i>P: Sono rimasta molto perplessa... Perché...</i>
210.	<i>IGOR: Je n'aurais jamais dit que Cabri est capable de faire ça</i>	<i>IGOR: Non l'avrei mai detto che Cabri riuscisse a fare queste cose.</i>
211.	<i>P: Je ne connaissais pas ça, mais ça me laisse un peu perplexe car je ne sais pas ce qui est derrière et je ne le vois pas immédiatement. Ça c'est un peu un petit jeu, je crois qu'on devrait comprendre un peu mieux. Evitons ça pour le moment !</i>	<i>P: Non la sapevo questa cosa, ma mi lascia un po' perplessa perché so cosa c'è dietro e non ce la vedo immediatamente. Questa cosa è un po' un giochino credo che dovremmo capire un pochino meglio. Evitiamo questa cosa per il momento.</i>
212.	<i>Observateur: Lorsque tu mets le ressort, tu donnes des directions! Donc, lorsque tu déplaces et relâches tous tes ressorts, tu, en réalité, tu vois bouger les trois points seulement selon quelques directions, non pas dans tout le plan. Donc, en réalité, tu n'es pas en train de bouger tous les points partout dans le plan. Le problème que la prof posait est plus complexe, elle demande: « puis-je bouger tous les points en même temps, chacun, où je le veux ? »</i>	<i>Osservatore: Quando tu metti le molle, dai delle direzioni! Quindi quando tu sposti e lasci tutte le molle, tu in realtà vedi muovere i tre punti solo su alcune direzioni, non su tutto il piano. Quindi, in realtà, non stai muovendo tutti i punti dappertutto su tutto il piano. Il problema che poneva la professoressa è più complesso, chiede: « posso muovere tutti punti contemporaneamente dove voglio ciascuno ? »</i>
213.	<i>MAURO: Chaque une [variable] où je veux? Non, alors on ne peut pas.</i>	<i>MAURO: Ciascuna dove voglio? No, allora non si può.</i>
214.	<i>IGOR: Tu as perdu le repas offert !</i>	<i>IGOR: Hai perso il pranzo pagato !</i>
215.	<i>P: On t'offre une glace! (Elle rie) Vas-y [tu peut retourner à ta place]. Donc... où je le veux... partout en même temps, à moins que Mauro n'invente le « super ressort », nous avons quelque problème. Mais, nous pouvons le faire un par un. Donc essayons, par exemple, de bouger P... Où suis-je en train de bouger P ?</i>	<i>P: Ti offriamo il gelato! (Ride) Vai, Mauro... Quindi... dove mi pare... ovunque contemporaneamente, a meno che Mauro non inventi il super-mollone, abbiamo un attimo dei problemi. Però possiamo farlo uno alla volta. Quindi proviamo per esempio a muovere P... Dove lo sto muovendo P ?</i>

## 9. Résultats au niveau macro

L'analyse *a posteriori* que nous venons de présenter nous permet de revenir aux questions de départ pour chercher à y répondre.

Nous avons démarré notre analyse en nous demandant si nous pouvions identifier des « régularités » ou des patterns dans la façon dont l'enseignante orchestre les discussions collectives. Nous nous sommes aussi demandé s'il était possible de modéliser, en quelque sorte, l'action du professeur lors de sa gestion du processus de médiation sémiotique.

*A posteriori*, nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas de patterns vraiment figés ni d'actions qui toutes seules puissent accomplir ce processus. En revanche nous avons pu identifier un **cycle-type** où les allers-retours du monde des mathématiques au monde de l'artefact sont fréquents. Dans ce **cycle-type** nous avons observé d'abord la constitution d'un signe-artefact, puis l'introduction d'un signe-mathématique, puis l'établissement d'un lien interprétatif entre le signe-artefact de départ et le signe-mathématique donné, puis, finalement, la demande aux élèves de retourner au monde de l'artefact et de développer, eux-mêmes, des correspondances sémiotiques nouvelles entre le signe-mathématique donné, le signe-artefact de départ ou d'autres signes-artefact potentiels.

Dans ce **cycle-type**, souvent les **interprétations** données par l'enseignante précèdent les **demandes d'interprétation**, les **interprétations « dans les mathématiques »** anticipent les **demandes d'interprétation « dans l'artefact « Cabri »** », les **Généralisations par Universalisation** accompagnent les **Interprétations « dans les mathématiques »**, tandis que les **demandes d'interprétation** aux élèves sont caractérisées par des **demandes de particularisation**.

Ainsi, toujours *a posteriori*, les seuls mouvements, que nous avons pu observer et qui se répètent, sans cesse, avec une certaine régularité, sont les passages du spécifique à l'universel et du particulier au général et *vice versa*. Ces mouvements, dont nous en avons pu préciser, en particulier, les actions associées (**Spécification**, **Particularisation** et **Généralisation (par Universalisation et par Extension du domaine de Validité)**) présentent comme une structure « fractale » : on le retrouve au niveau local (au sein même d'une même intervention), aussi qu' à des niveaux de plus en plus globaux, jusqu' à caractériser des parties entières de discussions.

En outre, notre analyse a montré que seule la conjonction de plusieurs actions diverses, permet la constitution d'un terrain favorable à toute genèse des signes et des signifiés associés. Les discussions collectives peuvent être assimilées à un système dynamique, sensible à la contingence, où l'enseignante opère au fur et à mesure certaines régulations selon les objectifs *a priori*. Même les actions spécifiques du travail de sémosis, et notamment les actions de (**Demande d'Interprétation**), identifiées par notre analyse et jugées cruciales tant dans le processus de constitution des signes-artefact, que dans leur transformation en icônes de objets mathématiques signifiés et dans la complexification et l'approfondissement du réseau sémiotique, ne peuvent pas subsister toutes seules. Elles prennent du sens seulement grâce à d'autres actions de nature différente, génériques de l'activité professorale.

Nous nous sommes demandé si et comment les notions et les outils issus de la TdS peuvent permettre de mieux expliciter le fonctionnement de la TMS.

*A posteriori*, grâce aux catégories fournies par la TdS, et notamment aux travaux de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002), nous pouvons maintenant exhiber une modélisation de l'activité de l'enseignante bien plus détaillée et précise que au

début. Par cette modélisation nous avons même pu énumérer toutes ces actions, de nature différente, qui se combinent au sein d'un tel processus complexe et en indiquer les fonctions prédominantes respectives, soit mésogénétiques, soit chronogénétiques soit topogénétiques.

Grâce à ces mêmes catégories d'analyse et en particulier, à la notion de milieu, filtrées au moyen des catégories et des objectifs propres de la médiation sémiotique (comme celle de l'intersubjectivité), nous avons pu identifier et approfondir les actions qui plus spécialement participent à la co-construction d'un nouveau milieu commun, crucial pour la mise en place d'un espace intersubjectif et donc pour le processus de médiation sémiotique. Nous avons aussi observé comment certains éléments du milieu activés par des tâches spécifiques et élaborés en termes de connaissances nécessaires, évoluent tout au long des discussions collectives pour devenir signes d'un objet théorique précis dans la culture mathématique. C'est dans cette analyse en termes de milieu que le croisement entre actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité professorale et la spécificité du processus de médiation sémiotique a été mise en évidence.

Cette même analyse nous a conduit à identifier des actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis comme les actions de **Demande d'explicitation des signifiés personnel relatifs à un signe donné**. Nous avons même observé que, ces actions, contrairement à toute attente, ne se posent pas seulement au début de la discussion collective mais chaque fois qu'il y a conflit potentiel entre signes.

En outre l'analyse issue de la TdS a conduit à identifier des processus plus spécifiques, qui sont au cœur du vaste processus de médiation sémiotique : comme les **processus d'icônisation** et le **processus d'affranchissement/complexification**.

Un autre phénomène important spécifique du processus de la médiation sémiotique, que notre analyse a mis en évidence c'est le **Mélange sémiotique**. Ce phénomène, loin d'être négatif, constitue une richesse pour la constitution de la signification à attribuer aux objets mathématiques en jeu : il permet une porosité entre les différentes familles de signes et par cela un échange respectif des caractéristiques plus chargées de sens ou suggestives.

Nous nous sommes aussi demandé si et comment notre analyse, menée par rapports aux objectifs et aux notions propres à la TMS pouvait finalement conduire à modifier ou à faire évoluer les catégories *a priori* fournies par la TdS. En effet, *a posteriori*, nous constatons que notre sensibilité particulière pour toute la dynamique d'interaction sociale nous a porté à modifier fortement, voir élargir, les catégories d'analyse de la gestion par l'enseignante de topogénèse d'une discussion collective, dont nous disposions *a priori*. Ainsi nous avons en partie transformé les notions de **Fusion topogénétique** et de **Mouvement topogénétique ascendant ou descendant** et nous avons introduit de nouvelles catégories d'actions comme celle de **Réduction topogénétique** et **Déplacement topogénétique vers les mathématiques**. En contrepartie, l'appropriation et la transformation d'outils dérivés des travaux de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2002), ont permis de modéliser de façon plus fine l'articulation, que l'enseignante mène, entre le plan intra-subjectif et inter-subjectif. Or dans la perspective vygotskienne propre à la TMS, l'orchestration de ces deux plans se pose comme un élément essentiel du processus de construction des signifiés.

Notre objectif de rendre compte du décalage entre chronogénèse attendue et effective, nous a mené à modifier la notion de **Résonance**. Nous avons ainsi distingué entre actions de **Résonance forte, faible ou nulle**. Cette modification des

outils initiaux fournis en particulier par les travaux de recherche de Margolinas et Grenier nous a donné une clé d'accès pour décrire, voire interpréter, les intentions de l'enseignante. En effet, dans la médiation sémiotique chaque action est reliée à un but bien spécifique. Ainsi reconnaître des actions de **Résonance forte** ou **faible** ou **nulle** nous a donné des éléments importants pour inférer quel type de représentation de l'état des connaissances des élèves, l'enseignante possède à un moment donné : quels objectifs elle considère atteignables et donc quelles sont les tâches qui doivent leur être confiées. Autrement dit, par cette modélisation nous avons obtenu des informations sur l'objectif sous-jacent qui a pu guider certaines actions de l'enseignante.

Autre grande différence par rapport à nos attentes et à nos analyses *a priori* c'est qu'il n'y a pas de discussions collectives entièrement de construction des signifiés ou de bilan. Autrement dit, nous ne pouvons pas découper les discussions collectives en parties séparées, l'une portant sur le bilan, l'autre sur la constitution de signes etc, mais il y a toujours, des allers et des retours, des « contaminations » qui s'établissent entre les différents moments.

En ce qui concerne plus proprement la TdS, nous estimons que cette analyse peut aussi apporter un regard nouveau sur le processus d'Institutionnalisation au sens strict. Dans le cas de notre thèse, considérer « insuffisante » la seule prise en compte des processus de décontextualisation, dépersonnalisation et détemporalisation, a été postulé *a priori*. S'agissant, en effet, de construire des signifiés par le développement et la mise en relations de familles de signes diverses, d'autres processus liés à la médiation sémiotique étaient déjà présumés et attendus. Cependant cette même « insuffisance » pourrait être reconsidérée aussi dans le cas d'une séquence ordinaire ou « classique » élaborée au sein de la TdS. Et fait, là aussi il y a des changements de signification importants à faire : les objets construits lors de l'activité (les connaissances *en acte*) n'ont jamais la même signification et le même statut qu'on leur prête dans les mathématiques et, plus précisément à l'intérieur de l'institution classe. Pourtant, il ne s'agit pas, « simplement », de « substituer » le rapport personnel à l'objet de savoir avec le rapport institutionnel. De même, il ne s'agit non plus de considérer le processus d'institutionnalisation orienté seulement du contextualisé vers le dé-contextualisé, du personnalisé vers le dé-personnalisé et du temporalisé vers le dé-temporalisé. Tout le processus d'institutionnalisation a plutôt comme objectif celui d'établir de liens dialectiques entre ces deux extrémités de ce processus et d'intervenir sur le rapport personnel, qui reste finalement en partie inaccessible, pour qu'il devienne le plus conforme possible au rapport institutionnel visé. Dans cette perspective, l'analyse que nous avons menée et qui nous a conduit à identifier d'autres actions à vocation plus spécifiquement sémiotique (comme les actions **d'interprétation**) peut se révéler utile aussi dans l'explication de ce processus de changement de signification qui caractérise aussi en partie l'institutionnalisation. En fait, ces actions d'interprétation offrent justement une mobilité entre champs sémantiques différents, et, par la flexibilité entre contextes, facilitent non seulement la dé-contextualisation mais aussi la dé-temporalisation.

Enfin, en ce qui concerne plus spécialement la TMS, notre analyse a conduit à identifier non seulement des actions propres au processus de médiation sémiotique mais aussi certaines règles du contrat didactique spécifique, nécessaire pour qu'un tel processus puisse se constituer. C'est bien l'usage d'outils issus de la TdS qui a permis de préciser, et même d'identifier ces règles sous-jacentes.

A nouveau, par des outils extérieurs à la TMS, nous avons pu mieux caractériser certaines conditions d'activation, de fonctionnement et de reproductibilité de ce processus. Qu'une analyse en termes de TdS pouvait amener à une compréhension majeure d'un processus spécifiquement organisé à partir d'une hypothèse psychologique et d'apprentissage différente, n'était pas donnée au début.

### 9.1. Résultats généraux au niveau méthodologique

L'analyse que nous avons présentée montre comment TMS et TdS ont pu s'articuler dans la mise en place et dans la modélisation d'un processus de médiation sémiotique. D'une part, la TdS a fourni des catégories générales d'interprétation des actions de l'enseignante dans une activité de discussion collective, spécifiquement organisée et orchestrée en fonction de ce processus de médiation sémiotique. D'autre part, la TMS a conduit à concevoir un tel type d'activité de discussion, permettant de préciser, élargir ou modifier certains outils d'analyse et de modélisation fournis par la TdS.

Ainsi, les catégories de la topogénèse, ont amené à mieux expliquer les dynamiques sociales qui caractérisent et peuvent supporter la construction intersubjective de signifiés. Les catégories de la chronogénèse ont fourni des éléments utiles pour mieux interpréter les *motifs* sous-jacents certaines actions de l'enseignante et ainsi, en partie, modéliser sa gestion du temps didactique en fonction des objectifs *a priori*. Enfin, les catégories de la mésogénèse non seulement ont conduit, à identifier la spécificité du processus de médiation sémiotique dans certaines actions génériques de l'activité professorale mais elles ont aussi contribué à préciser certaines métaphores fondamentales de la TMS, comme celle de la définition d'un espace inter- subjectif apte à la formation du signifié collectif. Grâce à la notion de milieu, en fait, nous avons eu accès à des outils plus sensibles et nous avons pu décrire de façon plus fine, cette belle métaphore, en distinguant par exemple deux processus complémentaires, celui de la mise en place du milieu commun attendu et celui de la modification de ce même milieu.

D'autre part, les catégories issues directement de la TMS, mais identifiées par confrontation aux catégories d'analyse didactiques propres à la TdS, ont permis, de rendre compte du travail spécifique d'orchestration du processus de médiation sémiotique de l'enseignante.

Enfin, l'analyse en termes de contrat didactique (et de la façon dont l'enseignante a joué sur certaines règles) nous a permis de porter un éclairage sur les conditions de viabilité et de reproductibilité de la séquence expérimentale.

Tous ces éléments nous permettent ainsi d'affirmer la possibilité d'articulation positive entre les deux cadres théoriques.

## 10. Tableau de synthèse sur les actions de l'enseignante

<p><b>Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique génériques de l'activité professorale</b></p> <p><b>Premier niveau d'analyse (à dominante descriptive) :</b></p> <p>Annnonce de l'introduction de termes mathématiques : Anticipation de l'existence d'une autre stratégie résolutive : Anticipation de l'intérêt futur de la question abordée : Appel à un ou plusieurs élèves distraits : Correction de la terminologie employée par un élève : <b>Demande d'exécution au rétroprojecteur</b> : Demande d'explication : <b>Demande de confrontation</b> <b>Activité de discussion collective</b> <b>Versus Activité dans Cabri</b> : <b>Demande de faire la synthèse</b> : <b>Evaluation</b> : <b>Exécution au rétroprojecteur</b> : Explication (éventuellement de l'intervention d'un</p>
--

<p>élève) : <b>Explicitation de l'objectif et méthode de la discussion collective : Explicitation de la tâche : Focalisation sur un trait significatif de l'activité</b> (ou sur des problèmes de limites de l'artefact, sur les termes du problème, sur l'insuffisance d'un constat perceptif) : Focalisation de l'attention : <b>Généralisation (ou Demande de) (par extension du domaine de référence : par extension du domaine de validité : par universalisation) : Guide à l'exécution au rétroprojecteur</b> : Incitation sécurisant pour l'élève : Institutionnalisation d'un terme mathématique : <b>Manifestation d'un problème ou d'un phénomène rencontré par un binôme particulier</b> : Mise en évidence d'une ignorance : Objection (éventuellement métaphorique) : <b>Paraphrase de l'intervention d'élève</b> (éventuellement avec généralisation ou avec glissement de signifié ou avec particularisation) : Personnification de Cabri : <b>Rappel de la tâche</b> : Ratification de l'objection : <b>Reflet de l'intervention d'élève</b> ou de une question pertinente d'élève (éventuellement avec correction ou avec exemplification ou avec explication ou avec spécification) : Répétition des termes mathématiques introduits : " <b>Faux</b> " <b>Reflet</b> : Spécification (Demande de faire la) : Synthèse (éventuellement avec identification et reconstruction sélective ou avec généralisation).</p>
<p><b>Deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative) :</b>  <b>Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel : Organisation d'une validation commune : Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri : Evocation du milieu pour la validation : Validation par le milieu reconnue par l'enseignante, Effet Topaze : Etablissement d'une règle (explicite ou implicite) du contrat.</b></p>
<p><b>Actions de l'enseignante à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis</b></p>
<p><b>Deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative) :</b>  <b>Demande de explicitation des signifiés construits : Demande d'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné : (Demande de) Interprétation (dans l'artefact « Cabri », dans l'artefact « texte d'Euler », dans les mathématiques - registre algébrique, géométrique, numérique, langagier) : (Demande de) Mise en relation de signifiés divers : Référence (directe ou indirecte) au travail de sémosis à faire.</b></p>
<p><b>Actions de l'enseignante à dominante chronogénétique</b></p>
<p><b>Premier niveau d'analyse (à dominante descriptive) :</b>  <b>Annnonce du début du moment de discussion collective : Annonce de l'introduction de termes mathématiques : Anticipation de l'existence d'une autre stratégie résolutive : Anticipation de l'intérêt futur de la question abordée : Clôture de phase : Demande de confrontation Activité de discussion collective Versus Activité dans Cabri : Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri : Evaluation par l'enseignante : Explicitation de objectif et de la méthode de la discussion collective : Explicitation de la tâche : Interdiction de recourir aux connaissances anciennes : Interdiction temporaire d'anticiper : Interruption du cours de la discussion : Jugement différé : Ouverture de phase : Prise en compte différée : Ralentissement de la discussion : Rappel de la tâche : Reflet de l'intervention d'élève</b> ou de une question pertinente d'élève (éventuellement avec correction ou avec exemplification ou avec explication ou avec spécification).</p>
<p><b>Deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative) :</b>  <b>Résonance (faible ou forte ou nulle).</b></p>
<p><b>Actions de l'enseignante à dominante topogénétique</b></p>
<p><b>Premier niveau d'analyse (à dominante descriptive) :</b>  <b>Appel à un ou plusieurs élèves distraits : Appel à une reconstruction coopérative</b></p>

du même milieu matériel : Demande d'exécution au rétroprojecteur : Demande de faire la synthèse de la discussion collective : Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri : Elargissement dialogique : Explication de l'intervention d'élève : Guide à l'exécution au rétroprojecteur : Mise en parallèle de productions d'élèves.

***Deuxième niveau d'analyse (à dominante interprétative) :***

**Déplacement topogénétique (vers la classe : « vers les mathématiques » : vers un binôme : vers un élève particulier) : Fusion topogénétique : Mouvement topogénétique (ascendant et descendant) : Réduction topogénétique.**

**Actions de l'enseignante à dominante mixte**

Appel à une reconstruction coopérative du même milieu matériel (mésos et topos) : Demande de confrontation Activité de discussion collective Versus Activité dans Cabri (chronos et méso) : Demande d'exécution au rétroprojecteur (mésos, topos) : Demande de faire la synthèse de la discussion collective (mésos et topos) : **Demande de reconstruction coopérative et sélective de l'activité dans Cabri (chronos, méso et topos)** : Explication de l'objectif et de la méthode de la discussion collective (chronos et méso) : Explication de la tâche (chronos et méso) : Guide à l'exécution au rétroprojecteur (mésos et topos) : Rappel de la tâche (chronos et méso) : Résonance (faible ou forte ou nulle) (chronos et méso) : Reflet + Evaluation (chronos et méso) : Reflet + Validation (chronos et méso).





# Chapitre 7 : Analyse a posteriori des actions des élèves lors des discussions collectives

<b>1. Introduction .....</b>	<b>299</b>
<b>2. Actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité d'élève .....</b>	<b>302</b>
2.1. Premier groupe d'actions : mise en place du milieu commun attendu...	302
2.1.1. Coresponsabilité des élèves dans la mise en place du milieu commun : « La disparition de H dans l'artefact Cabri » .....	304
2.1.2. Coresponsabilité des élèves dans la mise en place du milieu commun : Confrontation entre sa propre méthode et la méthode d'Euler .....	306
2.2. Deuxième groupe d'actions : modification du milieu commun .....	308
2.2.1. Coresponsabilité des élèves dans la modification du milieu commun : « La composition de fonction » .....	309
2.2.2. Coresponsabilité des élèves dans la modification du milieu commun : « L'allure du graphe » .....	312
2.3. Troisième groupe d'actions : actions à dominante mésogénétique de type langagier .....	315
<b>3. Première synthèse intermédiaire .....</b>	<b>318</b>
<b>4. Actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis .....</b>	<b>319</b>
4.1. Les questions de sémosis potentielle .....	320
4.2. Les interprétations .....	321
<b>5. Phénomènes remarquables .....</b>	<b>322</b>
<b>6. Deuxième synthèse intermédiaire .....</b>	<b>323</b>
<b>7. Actions des élèves à dominante chronogénétique .....</b>	<b>324</b>
<b>8. Actions des élèves à dominante topogénétique .....</b>	<b>326</b>
8.1. Fusion et Réduction topogénétique .....	328
<b>9. Résultats au niveau macro : apports respectifs de la Théorie des situations et de la Théorie de la médiation sémiotique .....</b>	<b>330</b>
<b>10. Tableau de synthèse sur les actions des élèves .....</b>	<b>332</b>

## 1. Introduction

L'analyse des actions des élèves sera conduite de manière plus réduite que celle des actions de l'enseignante. Notre objectif est en fait de fournir un regard complémentaire par rapport à cette première analyse.

Lors d'une discussion collective, les élèves sont principalement soumis à deux facteurs d'influence : ce qu'ils ont fait dans Cabri lors de l'activité en binômes et ce qui se passe pendant la discussion collective même. Notre problématique consiste à

repérer l'impact sur les élèves de ces deux facteurs. Ainsi, la participation éventuelle dans le processus de co-construction du milieu commun de la discussion collective (mise en place du milieu commun attendu et modification de ce même milieu commun), rend compte de ce qu'ils ont fait en binômes, lors de l'activité avec l'artefact « Cabri ». A ce niveau nous pouvons en fait observer l'incidence et l'articulation entre le milieu de la séquence (des tâches données) et le milieu en cours de construction lors de la discussion collective. C'est pourquoi, les premières questions qui ont guidé notre analyse *a posteriori* ont été :

1. Quel type de participation pouvons-nous reconnaître et attribuer aux élèves dans les deux processus mésogénétiques complémentaires de co-construction ou de modification du milieu commun ?
2. Quel est le type de rapport des élèves à ce milieu ? Les discussions collectives engagent de façon importante le rôle de l'enseignante ; cependant est-il possible d'identifier des moments d'adidacticité potentielle ou effective de la part des élèves ? En effet, Mercier a déjà montré qu'il existe des moments adidactiques effectifs dans des situations non prévues comme telles (1992).

Puisque nous nous sommes intéressées en particulier au processus de médiation sémiotique et à la manière dont certains signes sont fabriqués, évoluent et éventuellement sont internalisés par les élèves, l'autre question que nous posons est :

3. Quelles sont les actions spécifiques au travail de sémosis qui sont menées (ou peuvent être menées) par les élèves ?

Enfin, la TMS prend fortement en compte, d'une part le développement de l'auto-conscience, d'autre part les dynamiques sociales. En fait, la prise de conscience du propre parcours d'apprentissage et la constitution d'un espace intersubjectif de signes partagés, sont deux éléments fondamentaux qui participent au processus éventuel d'internalisation. Nous nous ne sommes pas centré sur cette prise de conscience, cependant nous nous sommes quand-même interrogé sur la prise de responsabilité des élèves. Nous considérons en fait, ce dernier processus comme une condition nécessaire mais non suffisante de ce processus d'internalisation. Nous nous sommes donc posé la question suivante :

4. Quelle est donc la prise de responsabilité de la part des élèves dans le processus d'apprentissage ?

Soulignons que la réponse à cette question n'est pas sans liens avec la réponse à la question n°2 précédente. En effet, il s'agit de deux manières différentes de regarder au même phénomène : les moments adidactiques correspondent à des moments de prise de responsabilité dans le processus de sémosis.

Nous avons déjà partiellement répondu aux dernières deux questions. L'analyse du contrat didactique a déjà mis en évidence des conditions de viabilité ou de reproductibilité de ce type de séquence (cf. Chapitre 6, § 8). De manière analogue, l'analyse des actions de l'enseignante à **dominante topogénétique** a déjà pris en compte et analysé *les mouvements de déplacement topogénétique* de l'enseignante vers des élèves particuliers, un binôme donné ou la classe entière. Nous essayons ici de présenter d'autres évidences expérimentales et d'autres éléments d'approfondissement et de réponse.

A partir des questions de recherche posées, notre méthodologie d'analyse *a posteriori* (cf. Chapitre 5, § 8) a consisté à reprendre les catégories d'analyse déjà développées lors de l'analyse *a posteriori* des actions du professeur, pour étudier, dans les transcriptions des deux discussions collectives, en particulier les actions des élèves.

Ce choix repose sur l'hypothèse de recherche qu'il est possible étendre la méthodologie d'analyse adoptée pour l'enseignante, car le contrat didactique de cette classe est suffisamment robuste pour garantir une certaine « symétrie » de rôles entre enseignante et élèves<sup>86</sup>.

En outre, comme pour les actions de l'enseignante, nous avons aussi postulé que les actions des élèves sont elles aussi orientées par des motifs précis.

Cette méthodologie a permis d'observer que tout ne se laissait interpréter par les outils prévus *a priori* et nous a conduit à en élaborer d'autres.

En particulier, suite à la relecture de la première discussion collective, notre décision *a priori* d'étendre aux élèves la classification proposée par Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000) relativement aux enseignants, s'est précisée et éclairée. Nous présenterons donc les résultats de cette analyse en gardant cette même classification<sup>87</sup>. Suivant l'exemple de l'analyse *a posteriori* des actions du professeur, nous décrivons d'abord, parmi toutes les actions des élèves à **dominante mésogénétique** repérées, celles qui se sont révélées cruciales dans le processus de sémiotique. Ensuite nous présentons de façon plus fine les actions à dominante mésogénétique spécifiques de ce même travail de sémiotique.

Ces actions à dominante mésogénétique constituent l'évidence d'une participation active, des élèves dans le processus de médiation sémiotique, allant au-delà du caractère nécessaire de cette participation. Elles révèlent aussi le fonctionnement d'un contrat didactique spécifique et nécessaire au processus de médiation sémiotique, guidé par l'enseignante.

Nous aborderons ensuite l'analyse d'actions d'élèves à **dominante chronogénétique** et **topogénétique**. En particulier, puisque le rôle de la prise de responsabilité des élèves dans le processus de médiation sémiotique nous intéresse, nous nous intéressons aux actions à dominante chronogénétique qui montrent une participation active des élèves à l'actualisation de la chronogénèse attendue ou inattendue d'une discussion collective.

En revanche, parmi les différentes actions à dominante topogénétique repérées, nous approfondirons celles qui fournissent directement ou indirectement des évidences, d'une part, sur le contrat didactique caractéristique du travail de sémiotique dans lequel sont placés ces élèves. D'autre part, comme pour les actions à **dominante chronogénétique**, ces actions à dominante topogénétique témoignent de la prise de responsabilité des élèves lors d'une discussion collective. Ce dernier élément éclaire ultérieurement sur les conditions d'adidacticité possible.

---

<sup>86</sup> Autrement dit, nous faisons l'hypothèse qu'il existe de façon stable, dans la classe, un contrat de coopération entre élèves et enseignant dans lequel tout le monde partage l'objectif commun d'une construction sociale de la connaissance.

<sup>87</sup> Comme nous l'avons déjà souligné, l'intérêt de cette thèse est principalement centré sur le rôle du professeur. L'analyse des actions des élèves ne sera donc pas approfondie de la même manière. Surtout, nous ne distinguerons pas entre niveau à dominante descriptive et niveau à dominante interprétative : ces deux plans seront partiellement mélangés, afin simplement de répondre aux questions posées.

Enfin, puisque l'analyse *a posteriori* a été menée en utilisant des outils issus de la TdS mais réinterprétés en fonctions des catégories et des objectifs de la TMS, nous reverrons sur cette méthodologie pour répondre aussi à la question suivante :

5. Quels sont les apports respectifs et les rapports mutuels entre TdS et TMS dans notre analyse ?

Bien sûr nous ne présenterons pas toutes les actions des élèves repérées. En revanche, on pourra retrouver la liste complète de ces actions des élèves, à la fin de ce chapitre, sous forme d'un tableau synthétique.

## 2. Actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité d'élève

Nous avons choisi de prendre en compte et d'analyser seulement les actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité d'élève, qui permettent de mieux comprendre si et comment les élèves participent à la co-construction du milieu commun, c'est-à-dire à la mise en place du milieu commun attendu et à sa modification. Nous sommes aussi intéressées à identifier des moments éventuels d'adidacticité lors des discussions collectives.

En fait, attester un rôle actif dans le façonnement du milieu de la discussion collective et, par conséquent, dans le milieu de la séquence expérimentale, signifie, pour nous, attester aussi un rôle actif des élèves dans le processus de médiation sémiotique.

Pendant une discussion collective, les élèves sont soumis à deux influences complémentaires, d'une part il y a ce qu'ils ont fait dans Cabri, d'autre part il y a ce que l'enseignante fait et dit lors de la discussion collective même. Ces deux influences les amènent à entreprendre des actions. Même si la gestion et l'orchestration des deux processus de mise en place du milieu commun attendu et de sa modification est finalement à la charge de l'enseignante, la contribution de telles actions des élèves est déterminante.

Ainsi, le premier groupe d'actions que nous analyserons, permettra d'observer quel type de participation active l'on peut attribuer aux élèves dans le processus de co-construction du milieu commun. Puisque ces actions portent, en particulier, sur la reconstruction coopérative et sélective de l'activité avec Cabri, elles conduiront aussi à mettre en évidence quel est l'impact, dans les discussions collectives, des tâches prévues, organisées en binômes avec l'artefact.

En revanche, le deuxième groupe d'actions en montrant le rôle joué par les élèves dans le processus de modification de ce milieu, permettra la mise en évidence surtout de l'impact imprévu des activités avec l'artefact.

### 2.1. Premier groupe d'actions : mise en place du milieu commun attendu

Les élèves contribuent à la mise en place du milieu commun attendu grâce à leur participation effective à revisiter et reconstruire l'activité avec l'artefact. Cette reconstruction est fortement guidée par l'enseignante, et, de façon globale, par des demandes générales de reconstruction, et, ponctuellement, par des rappels des tâches diverses, par des demandes de focalisations appropriées ou des demandes de faire la synthèse. Nous avons appelé génériquement toutes ces actions de l'enseignante **demandes d'explicitation des signifiés personnels construits (lors de l'activité avec l'artefact)**. Cette reconstruction est caractérisée par des **exécutions au rétroprojecteur** des différents élèves et des **demandes de compréhension** qui permettent la mise en évidence des aspects problématiques

rencontrés. Dans ce travail l'on retrouve une première contribution, du milieu organisé, au processus de construction des signifiés mathématiques visés. En fait cette reconstruction porte principalement sur les activités avec l'artefact telles qu'elles ont été conçues selon les objectifs visés. Ainsi, la mise en place du milieu commun attendu est, donc, un moment fortement didactique qui se développe en interaction stricte avec l'enseignante, dont les actions, et la succession prévue des activités, orientent de manière déterminant l'enchaînement des interventions des élèves. Cependant, cette mise en place, même étant une véritable situation didactique, peut comporter aussi des moments d'adidacticité où c'est l'interaction avec le milieu, et non, par exemple, l'évaluation de la part de l'enseignante, qui permet l'évolution des connaissances des élèves. Cette interaction engendre aussi la formation de ce que nous avons appelé les signifiés personnels relatifs à une activité donnée.

En particulier, ce sont les actions de **Validation par le milieu reconnue par l'élève** qui permettent d'attester tels moments éventuels d'adidacticité.

Ces actions ne sont, pourtant, pas toutes de même nature. Nous avons des **Validations par le milieu reconnues par l'élève** où l'enseignante semble vraiment « disparaître » pendant que l'élève est engagé dans son propre rapport à la connaissance à construire ; d'autres où, au contraire, l'enseignante participe activement à l'organisation des conditions objectives pour la validation. Nous avons des rétroactions qui sont apportées par le milieu matériel, d'autres qui sont apportées par le milieu constitué par les objets mathématiques en jeu<sup>88</sup>.

Nous sommes intéressées à ce processus de co-construction du milieu commun et à l'éventuelle participation active des élèves, car dans le processus de médiation sémiotique la mise en évidence de certains aspects de l'activité (des certaines propriétés ou caractéristiques saillants des outils de Cabri, du comportement de certains objets construits) est partie intégrante, nécessaire et propédeutique, à la constitution de signes-artefact. Dans le processus de médiation sémiotique, ces signes, rendus disponibles lors de ces reconstructions, sont, ensuite, destinés à évoluer, se liant à des signes mathématiques précis, et à renvoyer aux référents mathématiques visés. La reconstruction sélective de l'activité, par sa prise en compte explicite des doutes et des problèmes rencontrés et par les focalisations opportunes de l'enseignante a justement ce rôle.

Nous sommes aussi intéressées aux moments d'adidacticité car notre séquence expérimentale a été conçue à l'aide de l'hypothèse fondamentale que l'interaction avec un milieu, au moins partiellement adidactique, contribue de manière déterminante à la construction d'un signifié personnel à partir des signes-artefact impliqués. Nous ne savons pas si cette hypothèse est sous-jacente aussi à la manière dont l'enseignante orchestre la discussion collective. Cependant nous avons vu qu'elle consacre beaucoup d'attention à l'organisation de validations communes. Nous pouvons donc supposer que cette hypothèse, même implicitement, a pu provenir de l'enseignante elle-même.

Considérons les deux épisodes suivants. Ils donnent deux exemples complémentaires de l'apport fondamental de l'activité avec un artefact, respectivement en binômes ou en individuel, dans la mise en place du milieu commun lors de la discussion collective consécutive,

<sup>88</sup> Nous avons aussi observé, lors de l'analyse des actions de l'enseignant, que suivant le type de milieu organisé ou activé, le rôle de ceci est différent ainsi que le type d'interaction langagière qui se développe : dans le cas d'un milieu symbolique, par exemple, les objections et les contre-exemples sont de plus en plus basés sur les règles de la déduction naturelle (cf. Chapitre 6, par. 2.1.2).

Le premier extrait porte sur la relation entre activité en binômes dans Cabri et activité collective de la discussion collective ; le deuxième extrait met en évidence la relation entre activité individuelle avec le texte d'Euler et activité collective de discussion.

### 2.1.1. Coresponsabilité des élèves dans la mise en place du milieu commun : « La disparition de H dans l'artefact Cabri »

Le premier épisode se réfère à la première discussion collective. La classe est en train de résoudre collectivement la question relative aux conditions dans lesquelles H peut disparaître.

Il n'y a pas d'accord sur la disparition effective du point H. La résolution de ce nœud est nécessaire pour la poursuite de la séquence expérimentale. En fait, à partir de cette activité (avec d'autres activités corrélées), le signifié de domaine (où le critère pour sa définition sera la possibilité pour le point variable dépendante d'être déterminé de façon univoque) pourra prendre sens et le signifié même de fonction (comme correspondance qui exige d'être fonctionnelle et partout définie).

Igor atteste la disparition du point H, non pas sur la base d'un raisonnement, comme le veut l'enseignante (325), mais, par référence directe aux rétroactions de Cabri (D1.txt (925 :932)) :

325.	<i>P : Il y a des cas où il peut disparaître et des cas où non, car P est allé en H. Alors, ici il faut bien comprendre comment fonctionne la chose. Alors, ce qu'on sait : là-bas a disparu. Cela vient-il de l'ordinateur ? A-t-il disparu vraiment ? Il faut le comprendre en réfléchissant dessous.</i>	<i>P : Ci sono dei casi in cui può scomparire e casi no, perché P è andato in H. Allora qui bisogna capire molto bene come funziona la cosa. Allora, dato di fatto : lì è sparito. È il computer ? È sparito veramente ? C'è da capirlo ragionandoci sopra.</i>	
326.	<i>IGOR : Il a disparu vraiment, car autres fois dans d'autres exercices... si par hasard il y avait trois points superposées, il le mettait tous les trois là-bas, et en revanche ici il ne les met pas.</i>	<i>IGOR : È sparito veramente, perché si è fatto anche altre volte in altri esercizi... se magari c'erano tre punti sovrapposti, ce li metteva tutti e tre lì, e invece qui non ce li mette.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>

Cet élève invoque directement le comportement de Cabri (326) : il rappelle que si un point existe mais n'est pas visible, car il est superposé à un autre point, en cliquant dessus, Cabri en affiche l'existence. Dans le cas du point H, le binôme avait vraiment essayé de voir si ce point était encore là mais le point avait disparu. La rétroaction, prévue, expérimentée avec l'artefact par le binôme dans un moment adidactique, est maintenant devenue un critère partagé pour reconnaître l'absence du point H. Ce critère fait désormais partie intégrante du nouveau milieu commun.

Après l'intervention d'Igor, le problème de la disparition de H n'est pas réglé définitivement. Marco objecte qu'il a fait une construction différente et que, dans son cas particulier, H n'a pas disparu, tandis que l'ordinateur s'est éteint. L'enseignante lui demande, alors, de reconstruire collectivement au rétroprojecteur ce qu'il a fait en binôme.

Voici la continuation de l'épisode (D1.txt (991 :1016)) :

344.	<i>P : [...] Viens Marco, fais-nous voir ce qui se passe à vous deux.</i>	<i>P : [...] Vieni Marco, fatti vedere cosa succede a voi.</i>	<b>Demande d'exécution au</b>
------	---	--	-------------------------------

			<b>rétroprojecteur ; Constitution d'un milieu commun pour la validation</b>
345.	<i>MARCO : Je crée trois points A, B, et P, puis je crée le milieu entre B et P, ensuite je prends le cercle de centre le milieu, je prends l'autre cercle de diamètre [A,B] puis je prends la droite passant par A et B et l'intersection entre ces deux cercles et la droite est H.</i>	<i>MARCO : Creo tre punti A, B, e P, poi creo il punto medio tra B e P, quindi prendo la circonferenza di centro il punto medio, prendo l'altra circonferenza di diametro [A,B] poi prendo la retta passante per A e B e l'intersezione tra queste due circonferenze e la retta è H.</i>	<b>Reconstruction sélective par l'élève ; Exécution au rétroprojecteur par l'élève</b>
346.	<i>IGOR : C'est la même construction que nous avons faite !</i>	<i>IGOR : È uguale alla costruzione che abbiamo fatto noi !</i>	<b>Mise en relation de stratégies résolutive ; Jugement de coïncidence de deux stratégies par l'élève</b>
347.	<i>P : Attends laisse-le essayer. Essaie de le faire disparaître.</i>	<i>P : Aspetta lascialo provare. Prova a farlo sparire.</i>	<b>Ralentissement de la discussion collective ; Constitution d'un milieu commun pour la validation</b>

[...]

351.	<i>MARCO : Non, il est ici, H est ici.</i>	<i>MARCO : No, è qui, H è qui.</i>	
352.	<i>FILIPPO : Essaie de regarder au-dessous, en cliquant sur les points, au moins on voit tout de suite.</i>	<i>FILIPPO : Prova a guardare sotto, a calcare sui punti, almeno si vede subito.</i>	<b>Constitution d'un milieu commun pour la validation par l'élève</b>
353.	<i>IGOR : Attends, on voit si l'on change la couleur de H.</i>	<i>IGOR : Aspetta, si vede a cambiar colore ad H.</i>	<b>Constitution d'un milieu commun pour la validation</b>
354.	<i>MARCO : Non, il n'y est pas. H n'est pas là.</i>	<i>MARCO : No, non c'è. H non c'è.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>

Dans l'exemple que nous venons de lire, l'enseignante guide l'organisation d'une validation commune (347) puisqu'elle appelle Marco au rétroprojecteur (344), ralentit la discussion collective et demande à Marco d'essayer. Cependant, toute la classe partage cette démarche avec l'enseignante. En fait, après que Marco a déplacé le point A jusqu'à le faire coïncider avec le point B (et avoir ainsi annulé, sans en être conscient, la droite (AB)), Filippo propose de cliquer sur le point A (352), en évoquant implicitement une rétroaction de l'artefact connue par les élèves, qui permet de savoir si le point H, existe encore, bien que confondu avec A, ou s'il n'exister plus. En même temps, Igor suggère de modifier la couleur des points A, B et H pour pouvoir les distinguer (353). Ainsi, finalement c'est à Marco de reconnaître la validation apportée par Cabri et de clore l'épisode.

Cet extrait donne une évidence de comment l'attestation de ce type d'actions (**Organisation d'une validation commune par l'élève, Validation reconnue par un élève**) permet, en effet, d'affirmer la possibilité, pour les élèves, de moments d'adidacticité, même dans une situation qui est fortement guidée par l'enseignante comme celle que nous venons de lire.



En outre, il montre comment, effectivement, dans, la mise en place du milieu commun attendu, l'enseignante organise des moments explicitement dédiés à une confrontation renouvelée des élèves à des milieux normalement déjà rencontrés dans le travail en binômes. Certaines tâches précises du travail avec Cabri, en fait, ont leur raison d'être didactique, justement, lors des discussions collectives consécutives. C'est le cas, par exemple, de la question posée à propos de la disparition de H. Elle acquiert tout son sens seulement si l'on prend en compte le potentiel sémiotique associé, c'est-à-dire si l'on la place par rapport aux signifiés de variable dépendante et de domaine que la classe a commencé à construire. Cependant ce potentiel sémiotique, pour pouvoir être exploité et développé, doit être rendu disponible à toute la classe. Pour cette raison nous affirmons que la mise en place correspond à l'actualisation des objectifs globaux selon la chronogenèse attendue et que, dans ce processus, la participation active des élèves est nécessaire.

Lors d'une discussion collective, beaucoup d'autres moments dépendent totalement de la gestion, par l'enseignante, dans l'instant de ces mêmes objectifs, face à un milieu qui se relève instable et différent du prévu. C'est le cas de l'épisode inattendu de la « composition de fonctions » que nous avons déjà eu l'occasion d'analyser lors du chapitre précédent (cf. Chapitre 6, § 2.1.1.2). Dans cet épisode, l'enseignante, toujours porteur conscient de ces mêmes objectifs d'apprentissage, réagit à une modification imprévue du milieu introduite par un élève, en organisant et créant un nouveau milieu, susceptible d'intégrer ce nouveau phénomène.

Nous verrons dans le prochain paragraphe un autre exemple qui prendra en compte cette autre façon des élèves de contribuer activement à la mésogenèse d'une discussion collective.

### **2.1.2. Coresponsabilité des élèves dans la mise en place du milieu commun : Confrontation entre sa propre méthode et la méthode d'Euler**

Le deuxième extrait se réfère à un épisode de la discussion collective<sup>13</sup>. Il porte, en particulier, sur la relation à une autre composante du milieu matériel : le texte d'Euler. Il témoigne d'un véritable moment d'adidacticité de Cristina, repris et rendu collectif par l'enseignante.

Le processus est toujours celui de la mise en place d'un nouveau milieu commun mais par rapport à un artefact, qui n'a plus les mêmes caractéristiques d'interactivité de Cabri, et à une tâche, celle de l'interprétation, qui est très différente des tâches de résolution de problèmes.

L'enseignante est en train de guider la reconstruction collective de la méthode d'Euler pour la représentation géométrique d'une fonction numérique, dans Cabri. Autrement dit, elle est en train de revisiter collectivement l'activité dite « d'Euler dans Cabri » (cf. Chapitre 4, § 8.3). En particulier, elle a commencé à confronter cette méthode avec celles employés par les différents binômes. En fait, elle sait que plusieurs élèves ont cru à tort avoir reproduit dans Cabri la méthode du grand mathématicien. En réalité, plusieurs entre eux ont adopté la stratégie 5. 2a. 4 (cf. Chapitre 4, § 8.1.3), c'est-à-dire ont d'abord introduit un nombre variable dans Cabri et ensuite reporté ce nombre sur l'axe des abscisses. Après avoir montré que la méthode de Mattia ne correspond pas à celle d'Euler, elle invoque l'intervention de Cristina. Cette élève, en fait est la seule qui s'est rendu compte, en relisant à la maison le texte d'Euler, que sa propre démarche de construction du graphe dans Cabri n'était pas la même que celle d'Euler (D13\_23\_10\_02.rtf (115 :121)) :

57.	<i>P : [...] En revanche, il y a</i>	<i>P : [...] Invece c'è qualcuno che gli</i>
-----	--------------------------------------	--

	<i>quelqu'un qui a eu avant le doute de ne pas avoir fait exactement comme le disait Euler, car elle (en se référant à Cristina) m'a donné une feuille qui, en revanche... le doute elle l'avait eu à partir d'une phrase du texte d'Euler.</i>	<i>era venuto prima, il dubbio di non aver fatto proprio come diceva Eulero, perché lei (en se référant à Cristina) mi ha consegnato un foglio che invece... il dubbio le era venuto da una frase del testo di Eulero.</i>	
58.	<i>CRISTINA : Oui, car je l'ai relu et il disait: « autant P s'éloignera de A autant plus grand deviendra la valeur de x représentée par P » c'est pourquoi j'ai dit « mais nous, nous sommes parti du changement de la valeur de x dans [laquelle] x se déplaçait!</i>	<i>CRISTINA : Sì perché io l'ho riletto e diceva : « quanto più P si allontanerà da A tanto più grande diventerà il valore di x rappresentato da P » e sicché ho detto « ma noi siamo partiti dal cambiare il valore di x in cui si spostava » !</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
59.	<i>P : Donc, elle avait le contraire : autant plus la valeur de x devenait grande autant plus P s'éloignait et, en revanche Euler disait : autant « P s'éloignera autant plus grand deviendra la valeur de x »</i>	<i>P : Quindi lei aveva il contrario : tanto più grande diventava il valore di x tanto più P si allontanava e invece Eulero diceva : « tanto più P si allontanava tanto più grande diventava il valore di x ».</i>	
60.	<i>CRISTINA : Pratiquement nous nous sommes trompées dans notre construction: nous devons partir du segment, par conséquent nous pouvions varier P et appliquer la formule à la mesure du segment.</i>	<i>CRISTINA : Praticamente noi abbiamo sbagliato la costruzione : dovevamo partire dal segmento, che quindi potevamo variare P e applicare la formula alla misura del segmento.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>

En relisant, individuellement à la maison, l'extrait du texte d'Euler, Cristina a compris que sa méthode de construction du graphe dans Cabri ne correspondait pas à la méthode proposée par le célèbre mathématicien. C'est la confrontation autonome, à la maison, entre la démarche de construction suivie en binôme dans l'artefact Cabri et la description fournie par le texte d'Euler (58) qui a fait surgir le doute. Puisqu'il ne s'agit pas du même type d'artefact -à la différence de Cabri, le texte d'Euler n'est pas susceptible tout seul de fournir une rétroaction validant le doute de Cristina- nous voyons ici le rôle fondamental de la discussion collective et de l'enseignante, dans la solution de conflits possibles. L'intervention du professeur est, dans ce cas, nécessaire pour confirmer ensuite la validation perçue comme telle de Cristina lors de son propre moment d'adidacticité. De ce point de vue, l'apport de l'enseignante est rendu incontournable par les insuffisances propres à ce type de milieu.

D'autre part, la caractéristique propre à ce travail sur un texte historique est celle de la construction sociale d'une interprétation. L'hypothèse d'apprentissage sous-jacente est celle que ce type de connaissance ne se construit pas seulement grâce aux rétroactions avec un milieu porteur de déséquilibres mais surtout par l'internalisation d'interactions sociales, guidées par l'enseignante. Le passage du plan inter-subjectif au plan intra- subjectif est central. La confrontation entre le travail individuel, en binômes, et collectif, qui porte sur la prise de conscience de ce qu'on a appris est incontournable. Dans l'exemple cité ci-dessus, l'enseignante s'appuie sur le travail personnel de confrontation de Cristina pour introduire collectivement l'interprétation correcte du texte d'Euler dans Cabri. Cette interprétation une fois disponible pourra être internalisée par d'autres élèves.

Du point de vue de Cristina, la prise de conscience de la différence entre la démarche suivie en binôme et celle proposée par Euler, résulte de la discussion

collective sur le texte d'Euler et de la demande, de l'enseignante, de confronter à la maison, la méthode d'Euler avec celle adoptée par les binômes, dans Cabri. Nous pouvons supposer que cette prise de conscience (et cette progression dans son processus d'apprentissage), puisse être due, à son tour, à l'internalisation d'éléments de la discussion collective précédente.

Le moment d'adidacticité vécu par Cristina, correspond à l'investissement de cette élève dans le travail d'interprétation. Le problème qui se pose alors est celui de comment assurer ce type d'investissement. Cette question revient à se demander comment assurer la dévolution de ces tâches de confrontation et d'interprétation. Nous estimons qu'une grande partie d'une telle dévolution dépend de l'établissement et du bon fonctionnement d'un contrat didactique spécifique. Tout au long des DC différentes, nous observons que l'enseignante tient en grand compte le travail en binômes et les rapports individuels, elle consacre du temps à discuter, valider ou invalider, collectivement les productions différentes élaborés séparément. Les élèves savent donc bien que ce type de travail constitue une partie importante des discussions collectives : il est l'objet d'un débat et un jugement collectif particulier et une partie de l'évaluation de l'enseignante ne porte pas autant sur l'exactitude de ce qui a été écrit avant, mais, justement, sur l'investissement ou non des élèves dans ce travail.

Bien évidemment les actions de **Validation par le milieu reconnue par l'élève**, comme pour les **Validations par le milieu reconnues par l'enseignante**, n'appartiennent pas exclusivement au processus de mise en place du milieu commun attendu. Nous les retrouvons aussi dans le processus de modification du même milieu, lors du paragraphe suivant ;

## **2.2. Deuxième groupe d'actions : modification du milieu commun**

Si dans la mise en place du milieu commun attendu, la participation active des élèves a un poids déterminant, dans la modification de ce milieu commun les élèves jouent encore un rôle majeur.

En fait, nous avons vu que parmi les causes de modification du milieu commun nous pouvons identifier celle d'une insuffisance du milieu et celle une richesse surabondante du même milieu. Dans la majorité des cas, c'est suite à des interventions d'élèves, qui, justement, introduisent ou révèlent une instabilité du milieu, que l'enseignante décide de le modifier. Ce sont donc des actions d'élèves qui souvent déclenchent une modification du milieu attendu.

Parmi elles, les plus répandues sont : **Manifestation d'un problème par un élève**, **Introduction d'un élément nouveau dans le milieu par un élève**, **Généralisation par un élève** et **Etablissement/Explicitation d'une règle du contrat par un élève**. Ces actions peuvent accompagner les actions de **Guide à l'exécution à rétroprojecteur par un élève** et de **Rappel de la tâche par un élève**.

D'une part, ces actions amènent à un changement volontaire du milieu, par l'introduction d'un élément nouveau (comme la mise en évidence d'un problème, d'un phénomène ou d'un cas particulier) ou par l'établissement d'une règle du contrat.

D'autre part, elles indiquent la possibilité de moments d'adidacticité, où ce sont les rétroactions du milieu, et non les évaluations de l'enseignante, qui (in)valident une conjecture ou mettent à l'épreuve une connaissance *en acte*.

Les deux extraits suivants permettent d'introduire, d'emblée, plusieurs de telles actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité des élèves, que nous avons jugées révélatrices d'une participation active des élèves dans la modification

d'un nouveau milieu commun. Ces extraits montrent aussi un grand nombre d'actions identifiées et analysées au cours de l'analyse des actions du professeur que nous retrouvons du côté des élèves.

### 2.2.1. Coresponsabilité des élèves dans la modification du milieu commun : « La composition de fonction »

Le premier extrait porte sur l'épisode de la « composition de fonctions ». Cet épisode a été déjà amplement analysé, du point de vue des actions de l'enseignante lors du sixième chapitre (cf. Chapitre 6, § 2.1.1.2). Cependant il est emblématique aussi du rôle des élèves lors d'une discussion collective. Nous y faisons donc référence plusieurs fois, tout au long de ce chapitre, en soulignant, les aspects différents inhérents à l'activité des élèves. En particulier, étant donné que chaque intervention peut correspondre à des actions de nature différente, certaines à dominante mésogénétique, d'autres à dominante topogénétique, d'autres encore à dominante chronogénétique, nous verrons au fur et à mesure, se croiser et se sédimer, l'une sur l'autre, plusieurs analyses. Dans ce paragraphe nous signalons et discuterons seulement les actions à dominante mésogénétique, génériques de l'activité des élèves et ayant une pertinence dans le processus de médiation sémiotique ; les autres actions seront, en revanche, mises en évidence et illustrées respectivement lors des paragraphes suivants. (D1.txt - (749 :820)) :

Dans le tableau présenté ci-dessous nous noterons aussi les actions de (Demande d')Interprétation par l'élève, qui sont mésogénétiques spécifiques du travail de sémosis (dont nous parlerons dans le paragraphe suivant). Nous noterons aussi les autres actions qui sont servies pour modéliser l'action des élèves (dont nous avons déjà donné une description en ce qui concerne l'analyse des actions de l'enseignante).

259.	<i>P : [...] Bien, maintenant dites-moi.</i>	<i>P : [...] Bene, ora ditemi voi.</i>	
260.	<i>CRISTINA : Je voulais demander une chose. Mais moi j'ai un point H... si je clique « Effet1 » sur H, B et un autre point, il me fait un autre point... C'est-à-dire?</i>	<i>CRISTINA : Io volevo chiedere una cosa. Ma io ora ho un punto H... se pigio « Effetto 1 » ad H, B ed un altro punto, mi fa un altro punto... Cioè ?</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau du milieu par l'élève ; Demande d'interprétation par l'élève</b>
261.	<i>P : Tu as fait devenir H quoi ?</i>	<i>P : Hai fatto diventare H cosa ?</i>	
262.	<i>CRISTINA : Un paramètre indépendante.</i>	<i>CRISTINA : Un parametro indipendente.</i>	<b>Interprétation par l'élève</b>
263.	<i>P : Une variable indépendante!</i>	<i>P : Una variabile indipendente !</i>	
264.	<i>CRISTINA : Mais si je bouge ceux... si je bouge H et ces autres [points] ?</i>	<i>CRISTINA : Ma se io muovo quelli... se muovo H e quegli altri ?</i>	<b>Demande d'interprétation par l'élève</b>
265.	<i>P : Et on obtient une fonction de fonction ! Bravo Cristina ! Alors elle dit, écoutez bien quelle idée bizarre que seulement cette petite pouvait avoir... Alors, reprenons depuis le début : elle dit « je me prend mes trois points »...</i>	<i>P : E viene una funzione di funzione ! Grandissima Cristina ! Allora lei dice, sentite che idea balzana che poteva venire solo alla cuccioletta... Allora, ripartiamo tutto da capo : lei dice « mi prendo i miei tre punti »...</i>	<b>Paraphrase avec particularisation ; Exécution au rétroprojecteur ; Résonance forte</b>
266.	<i>IGOR : C'est-à-dire si elle fait « Effet1 » à trois points différents de A, B et P mais dans un ordre divers ?</i>	<i>IGOR : Cioè se fa « Effetto1 » ai tre punti diversi da A, B e P però in un ordine diverso ?</i>	<b>Demande de compréhension par l'élève</b>
267.	<i>P : Mais elle y met aussi H !</i>	<i>P : Però ci rimette anche H !</i>	
268.	<i>EGIZIA : Non, attends !</i>	<i>EGIZIA : No, aspetta !</i>	
269.	<i>FILIPPO : Nous l'avons déjà fait !</i>	<i>FILIPPO : L'abbiamo già fatto !</i>	<b>Mise en relation de</b>

			<b>stratégies résolutives diverses par l'élève ; Jugement de coïncidence de deux stratégies par l'élève</b>
270.	<i>P : Vous l'aviez déjà essayez ?</i>	<i>P : L'avete già provato ?</i>	
271.	<i>FILIPPO : Il change la relation entre les trois points.</i>	<i>FILIPPO : Cambia la relazione tra i tre punti.</i>	<b>Mise en relation de stratégies résolutives diverses par l'élève</b>
272.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que vous avez fait un autre « Effet1 » avec H ?</i>	<i>CRISTINA : Cioè avete fatto un altro « Effetto1 » con H ?</i>	
273.	<i>IGOR e FILIPPO : Oui.</i>	<i>IGOR e FILIPPO : Sì.</i>	
274.	<i>IGOR : Mais en prenant d'abord B, puis A et ensuite P. Nous avons essayé mais après nous avons abandonné car il y avait trop de confusion.</i>	<i>IGOR : Però prendendo prima il punto B, poi A e poi P. Avevamo provato, però poi abbiamo abbandonato perché veniva troppa confusione.</i>	
275.	<i>P : Faites-mois voir, IGOR. Fait attention car elle va être un peu déçue si elle n'a pas été la seule (le prof sourit) ...</i>	<i>P : Fammi vedere, IGOR. Guarda che ci rimane malissimo se non è stata l'unica lei (la professoressa sorride)...</i>	<b>Organisation d'une validation commune ; Demande d'exécution au rétroprojecteur</b>
276.	<i>CRISTINA : C'est n'est pas vrai !</i>	<i>CRISTINA : Non è vero !</i>	
277.	<i>P : Alors, ici il y a H.</i>	<i>P : Allora, qui c'è H.</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur</b>
278.	<i>CRISTINA : Maintenant, tu fais un autre point.</i>	<i>CRISTINA : Ora fai un altro punto.</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève</b>
279.	<i>P : Maintenant tu fais un autre point que nous allons appeler ?</i>	<i>P : Ora fai un altro punto, che lo chiamiamo ?</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur</b>
280.	<i>CRISTINA : C.</i>	<i>CRISTINA : C.</i>	
281.	<i>P : Et puis tu appliques « Effet1 » à H, P et C.</i>	<i>P : E poi applichi « Effetto1 » ad H, P, C ?</i>	
282.	<i>IGOR : Han, non la notre était bien différente !</i>	<i>IGOR : Han, no, allora la nostra era ben diversa !</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
283.	<i>CRISTINA : Alors maintenant, par exemple, bouge B.</i>	<i>CRISTINA : Allora ora muovi, per esempio B.</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève</b>
284.	<i>IGOR : Il y a des H qui bougent... ils bougent sur deux cercles différents.</i>	<i>IGOR : Si muovono due H... si muovono su due circonferenze diverse.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
285.	<i>MARCO : C'est-à-dire qu'il y en a une infinité...</i>	<i>MARCO : Della serie ce ne sono infinite...</i>	<b>Généralisation par l'élève</b>
286.	<i>FILIPPO : Pratiquement il y a une infinité... on peut construire une infinité de relations... c'est-à-dire plus on met de points...</i>	<i>FILIPPO : Praticamente ci sono infinite... si possono costruire infinite relazioni... cioè... più punti ci si mettono...</i>	<b>Généralisation par l'élève</b>
287.	<i>IGOR : Ce-ci est le cercle de diamètre [PC].</i>	<i>IGOR : Questa è la circonferenza di diametro [PC].</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
288.	<i>P : C'est-à-dire que ça colle, justement, non? Car H tout seul reste sur celui de diamètre [AP].</i>	<i>P : Cioè, giustamente torna no ? Perché H di per suo sta su quella di diametro AP.</i>	
289.	<i>MAURO : H' bouge de la même</i>	<i>MAURO : H' si muove uguale !</i>	<b>Introduction d'un</b>

	<i>façon !</i>		<b>élément nouveau du milieu par l'élève</b>
290.	<i>IGOR : Car c'est « Effet1 » qui lui donne cette relation-là.</i>	<i>IGOR : Perché è l'« Effetto1 » che gli dà quella relazione lì.</i>	<b>Interprétation par l'élève</b>
291.	<i>MAURO : Peut-on bouger H' ?</i>	<i>MAURO : Si può muovere H' ?</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau du milieu par l'élève</b>
292.	<i>P : Eh, non, je ne pense pas !</i>	<i>P : Eh, no, non penso !</i>	
293.	<i>CRISTINA : Comment a-t-il dit ?</i>	<i>CRISTINA : Com'è che ha detto ?</i>	
294.	<i>P : Si l'on peut bouger H'. Essaie?</i>	<i>P : Se si può muovere H'. Prova ?</i>	<b>Organisation d'une validation commune</b>
295.	<i>GIACOMO : Eh, non ! ... Car H' maintenant est obtenu...</i>	<i>GIACOMO : Eh, no ! ... Perché H' adesso è ottenuto...</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b> <b>Interprétation par l'élève</b>
296.	<i>CRISTINA : Non, car H' maintenant est obtenu de la première.</i>	<i>CRISTINA : No, perché H' è ottenuto dalla prima.</i>	<b>Interprétation par l'élève</b>

Du point de vue d'une analyse des actions de l'élève à dominante mésogénétique, cet extrait montre comme le rôle joué par les élèves dans la modification du milieu commun est déterminant. L'articulation des actions entreprises amène en fait à un changement du milieu prévu, à un élargissement du système des signes à disposition et donc à enrichissement du potentiel sémiotique. Cet extrait montre donc, comment dans le processus de médiation sémiotique, qui est principalement à la charge de l'enseignante, finalement les élèves jouent un rôle décisif.

D'abord c'est Cristina qui pose le problème d'interpréter le phénomène observé dans Cabri (260, 262, 264) ; ensuite c'est Igor et Filippo, qui se sentent tout à fait concernés et qui réagissent en mettant en relation la question de Cristina avec leur propre expérience (266, 269, 271, 273). Ils n'ont pas compris à quoi Cristina se réfère (c'est-à-dire à la double application de la macro « Effet1 »), ils pensent qu'il s'agit simplement d'avoir échangé l'ordre d'application aux points variable indépendante. Nous constatons que même Egizia (268) participe, ayant elle-aussi, avec Cristina, observé ce même phénomène. Même si l'enseignante intervient activement dans la résolution de la « dispute » (270, 275) et continue à maîtriser la discussion collective, Cristina guide carrément l'exécution au rétroprojecteur d'Igor (278), c'est même elle qui décide le nom à donner aux points (280) et les opérations qu'il faut faire sur les points variable indépendante (283).

L'interprétation, qui suit la mise en commun du phénomène, est aussi partiellement à la charge des élèves. Nous en avons reporté ici seulement le début : Marco et Filippo généralisent (285, 286), Igor et Mauro constatent des aspects saillants (287,289), Ensuite nous voyons, à nouveau, Igor (290), puis Giacomo (295) et Cristina (296) proposer leur explication et leur interprétation du phénomène.

Le milieu qui est constitué lors d'une discussion collective est de façon incontournable un milieu didactique. Cependant, l'extrait que nous venons de lire nous conduit à prendre en compte aussi une dimension adidactique.

D'abord les interventions d'Igor (284, 287), Marco (285) et Filippo (286) surgissent sans aucune sollicitation de l'enseignante. Elles semblent déterminées exclusivement par le rapport de ces élèves au milieu.

Ensuite, l'observation de Mauro (289) sur le déterminisme du comportement de H', puis sa question sur le déplacement éventuel toujours de H' (291), témoignent qu'il est en train d'évoquer et de mobiliser un critère, issu de l'artefact, et désormais collectivement partagé et reconnu par la classe comme suffisant pour attester l'existence d'une variable dépendante. En, outre, cette intervention révèle que cet élève est aussi en train de mettre à l'épreuve, *en acte*, de manière autonome, les définitions de variable dépendante qu'il a internalisées suite aux interventions de l'enseignante. Rappelons que, l'enseignante à partir de l'activité dans Cabri a introduit deux définitions co-existantes de variable dépendante : comme donnée finale d'un processus et comme point qu'on peut pas bouger directement. Le déterminisme de l'objet final n'a pas été explicitement postulé même s'il aurait pu dériver implicitement de la nature des objets indiqués comme signes pour le signifié de variable dépendante. Cependant la mise en évidence de ce déterminisme, aussi que l'explication relative de Igor (290), qui mobilise le signifié de relation en le reliant à celui de la Macro « Effet1 », ne répondent aucunement à un effet de contrat : ils sont le résultat d'un rapport « adidactique » à ce phénomène nouveau que la classe est en train d'analyser.

Enfin, Giacomo (295) et Cristina (296), évoquent (de façon autonome) et actualisent (en l'accommodant) la définition déjà donnée de variable dépendante, comme objet obtenu à partir d'autres objets initiaux. Ainsi, dans une discussion collective, la présence de l'enseignante et des autres élèves fonctionne comme un amplificateur et un catalyser d'un processus où les élèves sont engagés activement.

### 2.2.2. Coresponsabilité des élèves dans la modification du milieu commun : « L'allure du graphe »

Le deuxième extrait est relatif à la discussion collective<sup>13</sup>. L'enseignante est en train de lire publiquement les réponses, rendues par chaque binôme, relatives à la description de l'allure du graphe obtenu par implémentation dans Cabri de la méthode d'Euler (fiche n° 7 « Euler dans Cabri », cf. Chapitre 4, § 8.3). L'objectif global de cette partie de discussion collective est de mettre en relation les propriétés spatio-graphiques du graphe avec sa représentation algébrique. En revanche il n'était pas prévu de parvenir aussi à la définition d'un graphe de fonction « *symétrique par rapport à une appliquée donnée* » (c'est-à-dire par rapport à un axe vertical, perpendiculaire à l'axe des abscisses) (D13\_23\_10\_02.rtf (135 :157)) :

66.	<i>P (en lisant à haute voix ce que Giacomo et Alessandro ont écrit) : « L'allure du graphe a une courbe symétrique par rapport à l'appliquée dans le point A ».</i>	<i>P (leggendo ad alta voce ciò che Giacomo e Alessandro hanno scritto) : « L'andamento del grafico ha una curva simmetrica rispetto all'applicata nel punto A ».</i>	
67.	<i>EGIZIA : Nous aussi, nous avons mis qu'elle était symétrique.</i>	<i>EGIZIA : Anche noi abbiamo messo che era simmetrica.</i>	<b>Mise en relation de stratégies résolutive diverses par l'élève ; Jugement de coïncidence de deux stratégies par l'élève</b>
68.	<i>FILIPPO : Oui, mais... Nous ne l'avons pas mis « symétrique » !</i>	<i>FILIPPO : Sì, ma... Noi non ce l'abbiamo messa « simmetrica » !</i>	<b>Mise en relation de stratégies résolutive diverses par l'élève</b>
69.	<i>IGOR : Nous ne l'avons pas mise « symétrique » !</i>	<i>IGOR : Non ce l'hai messa simmetrica !</i>	

70.	<i>FILIPPO : Non, nous ne l'avons pas mise !</i>	<i>FILIPPO : No, non ce l'ho messa !</i>	
71.	<i>IGOR : Tu ne l'as pas car après nous avons eu le doute, que après il faudrait la définir Il faut conditionner le fait...</i>	<i>IGOR : Non ce l'hai messa perché dopo ci era venuto il dubbio, dopo ci sarebbe da definirla. Bisogna condizionare il fatto...</i>	<b>Mise en relation de stratégies résolutives diverses par l'élève ; Etablissement/Explicitation d'une règle du contrat par l'élève</b>
72.	<i>P : Tu as raison ! .Qu'est ce que ça veut dire « symétrique par rapport à l'appliquée » ?</i>	<i>P : Hai ragione !. Cosa vuol dire « simmetrica rispetto all'applicata » ?</i>	<b>Résonance forte</b>
73.	<i>CRISTINA : Ça veut dire que...</i>	<i>CRISTINA : Vuol dire che...</i>	
74.	<i>P : Ça veut dire que... ?</i>	<i>P : Vuol dire che... ?</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b>
75.	<i>GIACOMO : ... Ayant pris un point...</i>	<i>GIACOMO : ... Preso un punto...</i>	
76.	<i>P (à Giacomo) : Alors viens: faisons le dessin de comment il vous venait et cherchons à comprendre.</i>	<i>P (a Giacomo) : Allora vieni: facciamo il disegno di come vi veniva e cerchiamo di capire.</i>	<b>Demande d'exécution au rétroprojecteur</b>
77.	<i>CRISTINA : On peut faire comme ça : tracer la parallèle à la droite ... celle des nombres, ensemble, où il y a le point A. Après, avec les points qu'on trouve, tracer l'appliquée et voir si les points trouvés ont la même valeur !</i>	<i>CRISTINA : Si può fare così: tracciare la parallela alla retta che... quella dei numeri, insomma, dove c'è il punto A. Poi, coi punti che ci si trovano, tracciare l'applicata e vedere se i punti trovati hanno lo stesso valore !</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau, Guide à l'exécution au rétroprojecteur</b>
78.	<i>P : Même valeur et... hem.</i>	<i>P : Stesso valore e... hem.</i>	<b>Reflet de l'intervention d'élève</b>
79.	<i>CRISTINA : Même valeur !</i>	<i>CRISTINA : Stesso valore !</i>	
80	<i>P : [Giacomo et le professeur sont au tableau] Alors Cristina nous a donné une bonne idée, maintenant voyons la tienne. Alors celle de Cristina était celle-là et voyons si elle coïncide avec la tienne. Met-toi là-bas et dessine le graphe. Alors, tu n'as pas bien fait symétrique. Et elle dit « pour voir s'il est symétrique je peux tracer à partir d'un point la parallèle a (RS), trouver ces deux points sur le graphe... ». Pardon ? C'est-ce que tu as dit ?</i>	<i>P : [Giacomo e la professoressa sono alla lavagna] Allora la Cristina ci ha dato una buona idea, ora vediamo la tua. Allora quella della Cristina era questa e vediamo se coincide con la tua. Fai la frittata lì e disegna il grafico. Allora non l'hai fatto molto simmetrico. E lei dice : « per vedere se è simmetrico posso tracciare da un punto qui la parallela a (RS), trovare questi due punti sul grafico... ». Come hai detto ? Scusa ?</i>	<b>Organisation d'une validation commune, Demande d'exécution au rétroprojecteur, Paraphrase avec spécification</b>
81	<i>CRISTINA : ... tracer les...</i>	<i>CRISTINA : ... tracciare le...</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève</b>
82	<i>P : ... les perpendiculaires. Ensuite... faire ce qui dit après, Euler, pour retrouver les x correspondants.</i>	<i>P : ... le perpendicolari. Quindi... fare quello che poi dice Eulero per ritrovare le x corrispondenti.</i>	<b>Reflet avec spécification</b>
83.	<i>GIACOMO : ... les distances de A !</i>	<i>GIACOMO : ... le distanze da A !</i>	
84.	<i>CRISTINA : Et puis mesurer les segments à partir de A...</i>	<i>CRISTINA : E poi misurare i segmenti da A...</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève</b>
85.	<i>P : ... Ce segment et ce segment :</i>	<i>P : ... Questo segmento e questo</i>	



	<i>s'ils me donnent le même nombre, je dis que dans ce cas-là... c' est ce que j'entends par « être symétrique ».</i>	<i>segmento : se mi danno lo stesso numero, dico che questo caso... questo è quello che io intendo per « essere simmetrica ».</i>	
86.	<i>IGOR : Mais, ces deux points, professeur... ?!</i>	<i>IGOR : Però quei due punti, professoressa... ?!</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau du milieu</b>
87.	<i>CRISTINA : ... Mais ils pourraient aussi être deux points particuliers ?!</i>	<i>CRISTINA : ... Però potrebbe essere anche due punti particolari ?!</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau du milieu</b>
88.	<i>FILIPPO : Selon moi, outre que...</i>	<i>FILIPPO : Secondo me, oltre a...</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau du milieu</b>
89.	<i>P : Et ça doit valoir ?... exacte...</i>	<i>P : E questo però deve valere ?... esatto...</i>	
90.	<i>FILIPPO : ... pour tous les points !</i>	<i>FILIPPO : ... per tutti i punti !</i>	<b>Introduction d'un élément nouveau du milieu</b>
91.	<i>P : Il doit être valable pour toutes les perpendiculaires que je peux tracer par ces points-là.</i>	<i>P : Deve valere per tutte le parallele che posso tracciare per tutti questi punti.</i>	<b>Paraphrase avec généralisation</b>

Comme le premier extrait, ce deuxième montre au nouveau l'importance de l'action d'**Introduction d'un élément nouveau du milieu par un élève**. C'est une action qui peut se décliner de plusieurs manières : une question bien saisie (comme dans l'intervention (260) de Cristina du premier extrait), une observation très pertinente et ciblée (comme les interventions de Filippo (86) et (88) dans le deuxième extrait), la proposition d'une nouvelle stratégie de résolution (comme l'intervention de (77) de Cristina du deuxième extrait), la manifestation d'un problème rencontré ou d'un phénomène intéressant ou l'explicitation d'une règle du contrat (comme l'intervention de Igor (71) du deuxième extrait). Elle témoigne, de façon particulière, le caractère potentiellement mésogénétique de certaines interventions des élèves. La fabrication du milieu est donc gérée par l'enseignante mais dans une coresponsabilité avec les élèves. De façon analogue, le processus de sémiotique (c'est-à-dire de la fabrication des signes), principalement orchestré par l'enseignante, dépend aussi fortement de la participation active des élèves. Dans cet extrait nous observons, par exemple, que la définition de la propriété de « *symétrie d'un graphe de fonction par rapport à une appliquée donnée* », émerge de l'interaction de plusieurs interventions d'élèves. Elle n'était pas un objectif *a priori* de la discussion collective. Cependant, à partir de la nécessité même d'une définition (68-71), ce sont les élèves qui proposent une méthode qui essaie d'être valable pour tout point du domaine de la fonction (86-90) et qui peut bien correspondre à la définition mathématique de parité d'une fonction (77-84).

Dans ce dernier extrait, la proposition (77) de Cristina répond, au moins partiellement, à la demande du professeur de définir ce que la classe va considérer par « *courbe symétrique* » (72). Cependant, nous avons aussi d'autres exemples où l'introduction d'un élément nouveau dans milieu par un élève est, en revanche, complètement spontanée. Déjà l'observation de Filippo (86), qui met en garde sur le fait qu'il faut que la définition donnée soit valable pour n'importe quel point choisi, est plus inattendue. Nous supposons qu'elle est plus facilement explicable par la présence d'un contrat spécifique, déjà bien établi dans la classe. D'après l'extrait, par exemple, il est clair que, la production de chaque binôme revêt une grande importance et que la pratique de prendre en compte collectivement chaque réponse et de la justifier est bien consolidée. L'intervention d'Igor à propos de la nécessité de

définir (71) ce qu'on entend par « symétrique » est flagrant du fait que cela aussi est une règle déjà bien acceptée par la classe. En outre, le fait que ce soit justement un élève qui explicite et souligne l'importance de cette règle du contrat, est une évidence ultérieure du fait que la coresponsabilité du façonnement de ce nouveau milieu commun est perçue comme telle par les élèves eux-mêmes.

Ainsi, en quelque sorte, les interventions qui révèlent un degré d'adidacticité majeur, sont celles qui, en même temps, témoignent du bon fonctionnement d'un certain contrat.

Dans les deux extraits cités, l'enseignante organise la confrontation des deux stratégies résolutes, celle de Cristina opposée à celle d'Igor ((275) lors du premier extrait) et celle de Giacomo opposée à celle de Cristina ((80) lors du deuxième extrait). Elle garantit ainsi à chacun des élèves tout l'espace nécessaire, pour qu'ils puissent assumer, exprimer et démontrer la validité de leur propre position. La validation qui est ainsi apportée par le milieu et reconnue par les élèves est susceptible de posséder des conditions d'adidacticité. En outre, l'enseignante permet ainsi le consolidation d'une pratique, d'une méthode de travail dans la classe, par laquelle chaque élève doit se sentir concerné par la production d'un autre élève. Cela peut ainsi expliquer, pourquoi nous avons constaté fréquemment des actions spontanées des élèves de **Mise en relation de stratégies résolutes diverses** ou de **Jugement de coïncidence entre deux stratégies résolutes** (comme l'intervention (269) lors du premier extrait ou les interventions (69), (71) lors du deuxième).

### 2.3. Troisième groupe d'actions : actions à dominante mésogénétique de type langagier

Les actions de ce groupe, dérivent, comme les autres actions déjà prises en compte, de l'analyse *a posteriori* des actions de l'enseignante. Elles sont issues d'une tradition d'analyse différente, celle de la TMS, et, à la différence des actions mentionnées jusqu'à ici, portent exclusivement sur la forme du discours. Dans les travaux de recherche en particulier de Bartolini Bussi et ses collègues (Bartolini Bussi, 1996 ; 1998a ; Bartolini Bussi et Boni, 1995a ; Bartolini Bussi, Boni, et Ferri, 1995b ; Bartolini Bussi et Mariotti, 1998), ces actions ont été analysées surtout par rapport à l'enseignant. Cependant dans ces travaux on trouve aussi la description de phénomènes d'appropriation de la conduite de l'enseignant de la part des élèves. Analogiquement, dans notre analyse, quoique centrée principalement sur le rôle du professeur dans la gestion du processus de médiation sémiotique, certains actions de l'enseignant ont été étendues et étudiées aussi par rapport aux élèves. Nous avons qualifiées ces actions de type langagier comme étant à dominante mésogénétique car elles participent à la co-construction du milieu commun. Les actions de **Spécification** et de **Particularisation**, par exemple, contribuent à expliciter ou à introduire des éléments dans le milieu qui étaient respectivement implicites ou absents. Souvent les **Spécifications** constituent la forme prise par les réponses des élèves aux Demandes de l'enseignante de **Reconstruction coopérative et sélective**, de **Rappel de la tâche** ou de **Focalisation**. Ces actions donc amènent d'une part, à l'élaboration de critères pour la prise de décisions ou pour la validation issus du milieu et collectivement partagés, d'autre part, à la fabrication et à la mise à disposition de signes-artefact et de signes-pivot.

En revanche, comme dans l'analyse des actions du professeur, les actions de **Particularisation** s'accompagnent souvent aux actions d'**Interprétation (dans**

**l'artefact « Cabri » ou dans l'artefact « texte d'Euler », ou dans « les mathématiques », etc.),** dont nous nous occuperons lors des paragraphes suivants, et permettent l'établissement d'un lien interprétatif entre un ou plusieurs signes-mathématiques et un ou plusieurs signes-artefact. Dans les autres cas, les **Particularisations** et les **Demandes de Particularisation** ont surtout une fonction de compréhension : les élèves demandent de particulariser ou particularisent à leur tour afin de mieux comprendre de quoi la classe est en train de discuter.

Nous avons vu, dans l'analyse des actions de l'enseignante que les actions de **Généralisation (par Universalisation et par extension du domaine de validité)** revêtent un rôle fondamental dans les processus de décontextualisation et donc dans les processus d'icônisation éventuellement associés. Il est intéressant de souligner que ces processus ne dépendent pas exclusivement des interventions du professeur, comme l'on aurait pu penser, mais qu'au contraire, ils se développent aussi grâce à la participation active des élèves, qui s'impliquent directement dans le travail d'interprétation. Cette caractéristique est peut-être une particularité d'une séquence d'apprentissage spécialement bâtie en fonction du processus de médiation sémiotique et met en évidence le bon fonctionnement d'un contrat didactique très spécifique.

Par exemple, considérons l'extrait suivant. Il a été déjà analysé de plusieurs points de vue lors de l'analyse des actions de l'enseignante (cf. Chapitre 6, § 2.1.1.1 et 3.1). Nous observons que le processus d'icônisation, orchestré par l'enseignante et caractérisé par un processus de généralisation progressif, est, finalement, en partie soutenu par les interventions cruciales de Cristina (144) et, surtout, de Filippo (146, 148) (D1.txt (401 :499)) :

135.	<i>P : La Macro. Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri, qui sont les Macro. Toutes celles-ci sont Macro, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux le voire comme une fonction ?</i>	<i>P : La Macro. Quindi noi abbiamo un corrispondente della funzione in Cabri, che sono le Macro. Tutte queste sono Macro, se vogliamo, tutte quelle che abbiamo nel menù di costruzione, anche fare il punto medio la posso vedere come una funzione ?</i>	<b>Généralisation par Universalisation ; Généralisation par Extension du domaine de validité ; Demande d'interprétation dans l'Artefact ; Demande de particularisation</b>
136.	<i>Plusieurs voix : Oui</i>	<i>Tante voci : Sì</i>	
137.	<i>P : Car, qu'est-ce qu'il prend ?</i>	<i>P : Perché, cosa prende ?</i>	<b>Focalisation</b>
138.	<i>FILIPPO : Il prend les deux extrémités du segment...</i>	<i>FILIPPO : Prende i due estremi del segmento...</i>	
139.	<i>P : Et il me donne ?</i>	<i>P : E mi dà ?</i>	<b>Focalisation</b>
140.	<i>FILIPPO : Et il trouve le troisième point qui est le centre du segment c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.</i>	<i>FILIPPO : E trova il terzo punto che è il centro del segmento cioè è equidistante dai vertici del segmento.</i>	
141.	<i>P : Et il me donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si je vais voir... ensomme dans Cabri, nous avons les Macro et nous disons que celle-là peut être une idée de notre fonction... Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?</i>	<i>P : E mi dà il terzo punto che è il punto medio... Quindi se io vado a vedere... insomma in Cabri abbiamo le Macro e diciamo... quella può essere un'idea della nostra funzione... E quando invece la facciamo noi ?... Che cosa è la funzione ?</i>	<b>Paraphrase avec glissement léger de signifié ; Généralisation Universalisation ; Demande d'interprétation dans l'artefact ;</b>
142.	<i>FILIPPO : C'est la construction.</i>	<i>FILIPPO : È la costruzione.</i>	<b>Généralisation par</b>

			<b>Universalisation par l'élève ; Interprétation dans l'artefact par l'élève</b>
143.	<i>P : La construction.</i>	<i>P : La costruzione</i>	
144.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée.</i>	<i>CRISTINA : Cioè dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta.</i>	<b>Généralisation par Universalisation par l'élève ; Interprétation dans l'artefact par l'élève</b>
145.	<i>CRISTINA : Derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée, que vous avez découverte et que, après, vous pouvez ne pas avoir Cabri et faire sur papier.</i>	<i>P : Dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta, che voi avete scoperto, che poi, potete non avere Cabri e fare su carta.</i>	<b>Généralisation par Universalisation et par Extension du domaine de validité</b>
146.	<i>FILIPPO : C'est-à-dire en unifiant une, non, deux ou plus choses on peut en trouver une troisième</i>	<i>FILIPPO : Cioè unendo una, no, due o più cose se ne può trovare una terza</i>	<b>Généralisation par Universalisation et par Extension du domaine de validité par l'élève</b>
147.	<i>IGOR : C'est-à-dire dans la réalisation d'une construction ?</i>	<i>IGOR : Cioè nella realizzazione di una costruzione ?</i>	<b>Demande de particularisation par l'élève</b>
148.	<i>FILIPPO : C'est-à-dire en unifiant deux constructions, c'est-à-dire deux ou plusieurs choses on peut en trouver une troisième. En algèbre si on a a plus b on trouve c</i>	<i>FILIPPO : Cioè unendo due costruzioni, cioè due o più cose se ne trova una terza. In algebra se uno ha a più b si trova c</i>	<b>Spécification par l'élève ; Généralisation par Universalisation ; Généralisation par Extension du domaine de validité.</b>
149.	<i>P : Eh lui, par exemple, maintenant il est en train de s'envoler... C'est-à-dire ces-ci sont géométriques, donc derrière une fonction géométrique il y a toujours une construction si moi, en revanche, je prend une opération arithmétique, lui il dit, si j'ai deux nombres a et b, je les additionne et je trouve c... Donc, on commence à avoir une idée : il y a des choses d'où je pars et quelque chose à quoi j'arrive. Alors, ces choses-ci ont des noms en Mathématiques, ils doivent l'avoir forcément... Alors, tout ce qui bouge en Mathématiques, est appelé variable... et c'est joli alors l'activité que vous avez faite au début... qu'est-ce qui bouge si on varie certains points... Car au début qu'est ce qui vous avait été demandé ?</i>	<i>P : Eh lui, per esempio ora sta andando... Cioè queste sono geometriche, quindi dietro una funzione geometrica c'è sempre una costruzione se io invece prendo un'operazione aritmetica, lui dice, se ho due numeri a e b, li sommo e trovo c... Quindi si comincia ad avere un'idea : ci sono delle cose da cui parto e qualcosa a cui arrivo. Allora queste hanno dei nomi in Matematica, ce li devono avere per forza... Allora, tutto ciò che si muove in Matematica viene chiamato variabile... ed è bellina allora l'attività che avete fatto all'inizio... cosa si muove al variare di certi punti... Perché all'inizio che cosa vi era stato chiesto ?</i>	<b>Explication de l'intervention d'élève ; Généralisation par Universalisation, Interprétation dans l'artefact ; Interprétation dans les mathématiques ; Généralisation par Universalisation ; Interprétation dans les mathématiques ; Rappel de la tâche ; Demande de particularisation</b>

Les actions de **Généralisation** des élèves semblent avoir la même fonction que les actions de **Généralisation** de l'enseignante, c'est à dire qu'elles répondent au

même enjeu interprétatif. Le processus de médiation sémiotique est donc guidé par l'enseignante, mais, l'objectif global de la recherche et de l'établissement d'un lien interprétatif entre différents systèmes de signes est partagé par la classe entière. Sinon, nous ne pourrions pas expliquer l'intervention (146) de Filippo. Bien évidemment elle a été, en quelque sorte, préparée par tout le travail précédent, d'interpréter, en termes de fonction, d'abord la macro « Effet1 », une macro générique, puis la macro du menu de construction de Cabri « milieu d'un segment ». Tous ces passages, qui appartiennent au processus plus global d'Icônisation, ont été guidés par l'enseignante. Cependant, en aucune occasion, l'enseignante n'avait mis en relation ces objets avec les opérations arithmétiques ou les fonctions numériques. Il s'agit donc d'un apport original qui montre que Filippo a saisi une caractérisation possible commune à tous les signes donnés, appartenant à des champs sémantiques divers, et a essayé de la généraliser (146) puis de la réinvestir dans un autre champ sémantique encore (148).

Si nous pouvons attribuer aux élèves une volonté consciente de participer au processus de généralisation, au contraire, nous ne pouvons affirmer que la participation au processus d'Icônisation soit volontaire. Nous pensons plutôt que l'enseignante fait usage de ce que les élèves disent pour, justement, guider ce processus et conduire à la fabrication des signes-artefact en relation aux signes-mathématiques visés. Les élèves, d'autre part, sont impliqués dans ce processus grâce à un contrat didactique qui leur assure la possibilité de se lancer dans ce travail d'interprétation (cf. Chapitre 6, § 8.5 règle fondamentale). Cependant ils ne possèdent pas, les familles de signes concernés : le processus de fabrication et de complexification des réseaux sémiotiques est, en fait, concomitant à la construction des objets mathématiques correspondants.

Une autre différence par rapport à l'analyse des actions de l'enseignante est que nous n'avons pas observé d'actions de **Reflet** ou de **Paraphrase** de la part des élèves. Ces actions semblent donc être vraiment spécifiques de l'activité du professeur. Finalement, ce n'est pas surprenant, compte tenu des fonctions que nous avons reconnues à ces actions. Elles obéissent à la nécessité de canaliser la discussion collective vers les objectifs d'apprentissage visés et d'introduire un changement de signification potentielle des signes en jeu, en fonctions des signifiés mathématiques visés. Bien évidemment il s'agit donc d'une prérogative de l'enseignante, puisque les élèves ne possèdent pas *a priori*, ces mêmes signifiés.

### 3. Première synthèse intermédiaire

Les actions analysées montrent le rôle actif des élèves dans les deux processus complémentaires de mise en place et de modification du milieu commun attendu. Rappelons que ces deux processus contribuent ainsi au processus plus global de co-construction du milieu commun. Cette participation active a des effets sur le processus de sémosis, à partir de la fabrication de certains signes-artefact jusqu'à leur transformation et à leur mise en relation avec des signes-mathématiques donnés. Nous avons observé, par exemple, que :

- par les **reconstructions sélectives de l'activité dans Cabri**, les élèves mettent en commun et à disposition des signes susceptibles de renvoyer à des objets mathématiques et participent donc à la constitution d'une (ou plusieurs) familles de signes partagés ;
- par les actions d'**introduction d'éléments nouveaux dans le milieu** (comme une question bien saisie, une observation pertinente et ciblée, la

proposition d'une nouvelle stratégie résolutive, la manifestation d'un problème ou d'un phénomène intéressant) ils produisent une extension du réseau sémiotique et un enrichissement du potentiel sémiotique correspondant ;

- par les actions de **généralisation** ils contribuent activement, d'une part au processus de décontextualisation, d'autre part à l'enjeu interprétatif. Ces actions sont en fait cruciales dans la transformation des signes produits.
- par l'**établissement d'une règle du contrat didactique** (ou par une **demande d'établissement**), ils favorisent la diffusion et le consolidation d'un contrat didactique spécifique, strictement nécessaire au développement du processus de médiation sémiotique puisque favorisant l'engagement des élèves dans le travail d'interprétation ;

Nous avons aussi souligné que ces actions révèlent aussi la possibilité de moments d'adidacticité réels, même dans une situation qui est fortement déterminée par les interventions de l'enseignante comme celle d'une discussion collective.

#### 4. Actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis

Comme déjà illustré lors du chapitre méthodologique (cf. Chapitre 5), les catégories d'analyse issues des recherches de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), ont été modifiées pour rendre compte d'actions à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis. Cette modification du modèle initial, d'abord développée en fonction de l'analyse des actions de l'enseignante, a été étendue aux élèves. Nous avons en fait constaté que même pour les élèves, il y avait des actions spécifiques à ce processus et que les catégories déjà repérées dans le cas de l'enseignante pouvaient modéliser assez bien leur activité. Nous attribuons cette possibilité à la présence d'un contrat didactique spécifique stable dans la classe.

Nous avons qualifié ces actions spécifiques du travail de sémosis comme étant, à dominante mésogénétique car, comme nous l'avons vu pour l'analyse du professeur, elles contribuent à la mésogénèse des DC. En fait, comme pour les actions abordées auparavant, elles permettent de façonner un milieu susceptible d'apporter des rétroactions opportunes, en termes de :

- critères de validation reconnus, acceptés et utilisés par toute la classe ;
- connaissances utiles à des prises de décision ;
- connaissances relatives aux propriétés des éléments du milieu en jeu.

D'une part, nous faisons ainsi l'hypothèse que certains éléments du milieu peuvent confluer pour constituer les signes-artefact et les signes-pivot. D'autre part, nous croyons que la fabrication de ces signes-artefact et de ces signes-pivot, comme l'établissement d'un réseau de correspondances sémiotiques avec les signes-mathématiques introduits par l'enseignante, peuvent modifier certains éléments du milieu, au moins dans leur perception et interprétation potentielles de la part des élèves.

En particulier, les actions qui revêtent un rôle crucial dans le processus de sémosis sont : les **explicitations des signifiés personnels relatifs à un signe donné**, les **question de sémosis potentielle** et les actions d'**interprétation**. Le premier type d'action est sollicité par une demande explicite de l'enseignante, en revanche les deux autres sont provoquées seulement indirectement par le type de contrat en vigueur dans la classe. Le premier type d'action appartient à la même famille des actions d'**Explicitation des signes construits**, mais il porte sur un travail sémiotique plus direct : au lieu de demander génériquement de reconstruire

collectivement l'activité ou de se rappeler d'une certaine tâche, l'enseignante demande explicitement d'essayer de manifester publiquement ce que chaque élève considère comme le sens (**Explicitations des sens personnels relatifs à un signe donné**) à attribuer à un signe donné. Nous avons déjà souligné que ce travail répond à deux objectifs : favoriser la prise de conscience de son propre processus d'apprentissage et amener à la fabrication de signes candidats à renvoyer aux notions mathématiques visées.

#### 4.1. Les questions de sémiosis potentielle

Les **Questions de sémiosis potentielle** posées par les élèves sont aussi des actions très spécifiques qui caractérisent le processus de médiation sémiotique. Elles portent plus ou moins explicitement sur la mise en relation de deux signes ou sur la nature des éléments du milieu en jeu. Par exemple, nous croyons qu'on peut comprendre pleinement la demande de Cristina, qui se pose tout au début de la première discussion collective, seulement si l'on la place au sein de ce processus (D1.txt (007 :012)) :

1.	<i>P : Alors, nous tous nous sommes arrivés jusque aux questions des premières feuilles ? Car, maintenant nous faisons un petit moment de discussion ensemble [nous allons discuter ensemble de tout ça]. Nous arrivons à certaines conclusions, puis si nous n'avons pas fini...</i>	<i>P : Allora, tutti siamo arrivati fino alle domande dei primi fogli ? Perché ora si fa un attimo di discussione insieme. Arriviamo a certe conclusioni, poi se non abbiamo finito...</i>
2.	<i>CRISTINA : Je n'ai pas compris à quoi sert tout cela pour les fonctions.</i>	<i>CRISTINA : Non ho ancora capito a cosa serve tutto questo per le funzioni.</i>

L'enjeu interprétatif est très clair dès le début, aussi comme la tâche d'interprétation qui se pose.

Il est intéressant de remarquer que ces questions ne sont pas exclusives de la phase initiale de la première discussion collective, mais nous les constatons tout au long de la discussion collective. Par exemple, dans l'extrait suivant, Igor pose une question sur la nature de la droite (AB) ou du point H, donc la classe connaît déjà la construction (D1.txt (144 :153)) :

45.	<i>P : Faut-il le démontrer... avant tout il faut comprendre qu'est-ce que c'est autrement comment faisons nous pour démontrer quelque chose ?</i>	<i>P : Bisognerebbe dimostrarlo... prima di tutto bisogna capire che cos'è altrimenti come facciamo a dimostrare qualcosa ?</i>
46.	<i>IGOR : C'est-à-dire qu'est ce que c'est cette droite-ci ?!</i>	<i>IGOR : Cioè che cos'è quella retta lì ?!</i>
47.	<i>P : : C'est-à-dire qu'est ce que c'est cette droite-ci... Ou qu'est ce que c'est une autre chose ;</i>	<i>P : Che cos'è quella retta lì... o che cos'è un'altra cosa.</i>
48.	<i>IGOR : Qu'est ce que c'est le point H ?</i>	<i>IGOR : Che cos'è il punto H ?</i>
49.	<i>P : Qu'est ce que c'est le point H ! [...]</i>	<i>P : Che cos'è il punto H ! [...]</i>

Ou encore, (D1.txt (543 :547)), toujours Igor :

182.	<i>P : L'image est où bouge la variable dépendante... le domaine est où bougent celles indépendantes. Donc, Mattia se posait un problème ...</i>	<i>P : L'immagine è dove si muove la variabile dipendente... Il dominio è dove si muovono quelle indipendenti. Quindi Mattia si poneva un problema...</i>
183.	<i>IGOR : C'est-à-dire ? Mais « où » il faut l'entendre comment... le « où » ?</i>	<i>IGOR : Cioè ? Ma « dove » inteso come... « dove » ?</i>

La question posée par Igor (183) peut être interprétée à deux niveaux :

- soit Igor est en train de demander le signifié du « où » dans le sens de son emplacement « physique » dans l'écran de Cabri (car il ne perçoit pas le plan géométrique représenté, comme étant un lieu en soi mais seulement un conteneur) ;
- soit il est en train de demander le signifié mathématique du domaine. En effet, comme dans le cas de la définition de variable, cette métaphore du mouvement et du lieu est encore à décrypter.

Cependant, dans les deux cas, la question montre qu'Igor s'est impliqué dans une activité d'interprétation : il ne comprend pas bien la définition donnée par l'enseignante et demande comment faut-il entendre le « où ». Il résulte aussi évident la nécessité pour Igor, et probablement pour d'autres élèves, d'explicitier ultérieurement le lien entre les signifiés de domaine et d'image et l'activité dans Cabri.

La présence de questions de sémiosis potentielle, même si elles proviennent d'un groupe restreint d'élèves, montre que la conscience de l'enjeu interprétatif et de l'objectif global de l'établissement de liens interprétatifs entre le monde de l'artefact et celui des mathématiques n'est pas à la charge exclusive de l'enseignante. Ce type de questions a été observé lors des premières trois discussions collectives.

En revanche, nous n'avons pas identifié ce type d'actions au cours de la deuxième discussion collective analysée (la discussion collective n°13). Cette discussion collective ne semble pas se prêter à ce genre de questions. Nous nous sommes interrogés sur cette différence. Peut-être, est-ce dû au fait que, lors la discussion collective<sup>13</sup> un certain nombre de liens a été déjà établi et que les élèves ne perçoivent plus la nécessité d'en constituer d'autres. Ceci pourrait signifier que l'enjeu interprétatif est perçu comme tel par les élèves, selon le type de discussions collectives, ce qui pourrait être un élément du contrat didactique spécifique. Ceci pourrait aussi être lié plus spécialement au processus d'*icônisation* qui est fort lors des premières discussions collectives, mais qui se délaye, au fur et à mesure, dans le temps, dans le processus de complexification /affranchissement.

## 4.2. Les interprétations

Considérons la continuation de l'épisode cité lors du paragraphe (cf. Chapitre 7, § 2.3). Après le **Rappel de la tâche** (149) de l'enseignante, la classe a revisité toute la première partie de l'activité « Effet 1 », avec l'analyse du comportement des différents points à l'écran. L'enseignante est ensuite parvenu à introduire la définition de variables indépendantes comme « *points de départ qu'on peut bouger librement* » et de variable dépendante comme « *point qui dépend des points de départ et qui bouge seulement indirectement* ».

A ce moment, Filippo cherche à nouveau d'établir d'autres liens interprétatifs et d'autres **généralisations** possibles (D1.txt (499 :525)) :

171.	<i>FILIPPO : Mais ça c'est relié à algèbre au travers... C'est-à-dire pratiquement au travers des trois plans ... C'est-à-dire X,Y,Z ?</i>	<i>FILIPPO : Ma è collegato all'algebra per via... Cioè praticamente per via dei tre piani... cioè X,Y,Z ?</i>
------	--	--



172.	<i>P : Ils veulent trouver tout de suite une connexion avec l'algèbre !... Il est lié aux trois plans ? ça pourrait être une bonne intuition, Filippo ! Nous verrons ! N'anticipe pas trop les choses ! Alors, donc nous avons dit fonction, Macro dans Cabri, construction et derrière chaque Macroque, nous avons compris, qu'il y a une construction... donc fonction comme Macro, qui pourtant est une construction. Variables indépendantes: ce d'où on part, quelqu'un, si je ne me trompe pas, avait dit données initiales, que nous, dans une construction nous avons toujours.</i>	<i>P : Vogliono trovare subito questo collegamento con l'algebra ! ... È collegato coi tre piani ? Potrebbe essere un'intuizione buona, Filippo ! Vedremo ! Non anticipare troppo le cose ! Allora, quindi, abbiamo detto funzione, Macro in Cabri, costruzione e dietro ogni Macro abbiamo capito c'è una costruzione... quindi funzione come Macro, che poi però è una costruzione. Variabili indipendenti : quello da cui si parte ... qualcuno se non mi sbaglio aveva detto i dati iniziali, che noi in una costruzione abbiamo sempre.</i>
173.	<i>FILIPPO : Donc ce pourrait être notre hypothèse !</i>	<i>FILIPPO : Quindi potrebbe essere la nostra ipotesi !</i>
174.	<i>P : Hypothèse, qui sont les données initiales. Et puis nous avons ?</i>	<i>P : Ipotesi che sono i dati iniziali, e poi abbiamo ?</i>
175.	<i>FILIPPO : La thèse [la conclusion] !</i>	<i>FILIPPO : La tesi !</i>
176.	<i>P : La thèse [la conclusion], ce que nous voulons construire et donc ce que nous obtenons. Ceux en revanche comme variables dépendantes des données initiales... données initiales et données finales... données initiales bougent, librement, je peux les déplacer où je veux ou, au moins cette fois-ci je pouvais les déplacer où je voulais, le point final les suit et tout seul ne bouge pas.</i>	<i>P : La tesi, che è ciò che vogliamo costruire e quindi ciò che otteniamo. Quelli invece come variabili dipendenti dai dati iniziali... dati iniziali e dati finali... dati iniziali si muovono, liberamente, posso portarli dove mi pare o almeno questa volta potevo portarli dove mi pareva, il punto finale gli va dietro e di per sé non si muove.</i>

Il faut souligner que l'établissement d'un lien entre la structure déductive d'un théorème et les signifiés de variable indépendante et dép n'était pas un des objectifs d'apprentissage de la séquence. Cependant, le travail d'interprétation orchestré en première personne par l'enseignante (172), est assumé aussi par Filippo, qui le pousse encore plus loin.

Nous expliquons cette intervention par la présence d'un contrat didactique qui veut que tout élève soit appelé à participer à cette recherche d'interprétation (règle fondamentale n°1 du contrat didactique (cf. Chapitre 6, § 8.5). En outre, il faut tenir en compte du type de classe dans laquelle notre expérimentation s'est déroulée. Dans cette classe, en fait, l'apprentissage de la démonstration en géométrie a été fait dans Cabri et à partir d'hypothèses analogues, inspirées par le même cadre théorique de la TMS. En particulier, le signifié de théorème a été développé à partir du signifié de construction géométrique (Mariotti, 2000, 2001, 2003). Ainsi, le fait que Filippo ait étendu ces liens jusqu'aux variables indépendantes et dépendantes est le témoignage d'une modalité de travail, à la fois, assez familière et exceptionnelle.

## 5. Phénomènes remarquables

Nous faisons maintenant brièvement allusion aux phénomènes remarquables liés au processus de sémosis, déjà identifiés au cours de l'analyse d'action professorale. Nous avons essayé d'étendre cette analyse aussi aux élèves. Comme déjà expliqué, il s'agit plutôt de phénomènes, non d'actions volontaires, qui portent sur la forme du discours adoptée et qui ne concernent pas seulement l'enseignante mais aussi le comportement des élèves.

D'une part, nous avons déjà souligné l'utilisation massive d'expressions causales, ou conditionnelles et de gérondifs. Nous avons aussi noté que ces structures

verbales ne sont pas anodines : elles contribuent à véhiculer un signifié de fonction « **comme co-variation** », même là où ce signifié n'est ni explicitement développé, ni énoncé. En outre, la liaison entre les différents signes, établie par ce type d'expressions, est dynamique. La situation d'apprentissage telle qu'elle a été conçue, amène à l'usage de ce type d'expressions facilitant, donc, la construction d'une dépendance logique sur une dépendance causale. Ce sont les élèves mêmes qui, plus ou moins consciemment, utilisent ce type de structure verbale pour décrire l'activité dans l'artefact.

D'autre part, nous avons déjà observé dans le discours de l'enseignante la présence d'un autre phénomène très intéressant : le **mélange sémiotique**. Par ce phénomène, comme dans une contamination par contiguïté, des propriétés ou des qualités propres à une certaine famille de signes sont transférées à une autre famille de signes.

Nous avons remarqué que, ce phénomène, fréquent dans le discours de l'enseignante lors de la première discussion collective, et quasiment absent lors de du discours des élèves, se diffuse dans une proportion renversée, lors de la discussion collective 13.

Ainsi, nous interprétons cette donnée par le fait que, dans le cas de l'enseignante, ce phénomène marque surtout le processus d'icônisation et est, en quelque mesure, destiné à disparaître au fur et à mesure que le processus d'Institutionnalisation s'accomplit. En revanche, dans le cas des élèves, il est surtout lié au processus de complexification et d'enrichissement du réseau sémiotique et il dénote l'apprentissage en cours (D13\_23\_10\_02.rtf (107)) :

53.	<i>MAURO : Car je n'avais pas la possibilité de bouger P librement, car étant pris du nombre, je devais varier forcément le nombre. Donc, d'abord j'ai construit le segment [AP] puis j'ai pris sa longueur et dans la longueur j'ai fait la fonction [PM].</i>	<i>MAURO : Perché non avevo la possibilità di muovere P liberamente, perché essendo preso dal numero, dovevo variare per forza il numero. Quindi prima ho costruito il segmento [AP] poi ho preso la sua lunghezza e nella lunghezza ho fatto la funzione [PM].</i>
-----	---	---

Dans cet extrait, Mauro est en train d'expliquer pourquoi il s'est aperçu que la méthode utilisée pour construire le point **M** n'était pas la même que celle décrite dans le texte d'Euler. Dans la première partie de son intervention, il explique que, ayant construit **P** à partir de l'outil « Nombre » de Cabri, à la différence d'Euler, il ne pouvait pas bouger directement ce point, mais qu'il devait varier le nombre dont ce point dépendait. Dans la description qui suit et qui utilise une famille de signes totalement propre à l'artefact, il glisse l'expression « et dans la longueur j'ai fait la fonction **AP** ». Nous avons interprété cette expression de la manière suivante : « et à partir de la mesure du segment **[AP]**, j'ai calculé, à partir de l'expression de la fonction donnée, la valeur correspondant à la mesure du segment **[PM]** ». Le mélange sémiotique entre l'expression de la fonction, les outils dans Cabri, la longueur et la mesure de la longueur est évident.

## 6. Deuxième synthèse intermédiaire

Nous avons vu qu'à côté d'actions génériques des élèves intervenant dans le processus de sémosis, il y a aussi des actions des élèves spécifiques de ce même processus. Ces actions permettent un travail direct sur les signes, elles développent une prise de conscience des élèves et sont ainsi susceptibles de favoriser l'internalisation éventuelle des signifiés mathématiques produits. En fait, rappelons que dans une perspective vygotkienne, ce processus d'internalisation, du point de

vue du sujet, a ses racines dans la création d'un espace intersubjectif, où, à partir de l'explicitation des signifiés personnels relatifs à un signe donné et à de questions portant sur la nature des signes produits, se développe par l'établissement, l'appropriation et l'élaboration progressive de liens et de mises en correspondances entre signes divers. C'est pour cette raison, que par rapport à tous ces différents passages, nous avons identifié des actions spécifiques au processus de sémiosis.

Nous avons aussi souligné que ces actions spécifiques du travail de sémiosis, même étant identifiées à partir d'une analyse en termes de médiation sémiotique, peuvent être réinterprétées au sein de la TdS comme des actions à dominante mésogénétique, pouvant d'une certaine manière modifier le milieu. Le changement introduit n'est pas de la même nature que pour d'autres actions à dominante mésogénétique génériques de l'activité des élèves. En fait, les actions, à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémiosis identifiées, ne changent pas le milieu matériel mais les rapports mutuels entre les différents éléments de ce milieu, les connexions entre connaissances possibles et, donc, les interprétations potentielles que les élèves peuvent ainsi se donner.

Nous avons ensuite observé que, contrairement aux attentes, les actions des élèves jouent un rôle non négligeable et que le processus de médiation sémiotique, même étant guidé par l'enseignante, se nourrit aussi de la participation des élèves.

Nous pourrions nous demander si cette participation est nécessaire. Pour répondre à cette question de façon définitive, il faudrait, par exemple, mener une expérimentation comparative. Nous n'avons donc pas ici les moyens expérimentaux pour l'établir clairement. Cependant nous avançons l'hypothèse que cette coparticipation est nécessaire. En fait, c'est grâce à un travail actif de confrontation entre les signes (*représentamens* et *interprétants*) produits lors de la discussion collective et les signifiés personnellement élaborés que nous croyons possible une construction efficace des objets mathématiques correspondants. Ce travail même s'il est sollicité par l'enseignante doit être accompli par l'élève lui-même. En outre, c'est aussi grâce aux questions de sémiosis potentielle des élèves, en plus des interventions directes de l'enseignante et du contrat didactique en place, que le travail d'interprétation peut être dévolu et le processus de médiation sémiotique relancé au fur et à mesure.

## 7. Actions des élèves à dominante chronogénétique

L'introduction volontaire de la part des élèves d'un élément nouveau dans le milieu en plus d'avoir un effet mésogénétique, en changeant la progression des savoirs, peut aussi avoir un effet chronogénétique. Ainsi, un certain nombre d'actions à dominante mésogénétique, peuvent aussi être analysées comme étant des actions à dominante mixte, chronogénétique et mésogénétique. Nous nous référons, en particulier, à des actions comme les **manifestations d'un problème rencontré ou d'un phénomène observé**, les **questions de sémiosis potentielle** et les **propositions d'une nouvelle stratégie résolutive**.

Plus généralement, toutes les DC sont en partie bâties sur les reconstructions de l'activité menée précédemment par les élèves. Ainsi, finalement, nous voyons dans le déroulement des DC, les effets chronogénétiques du travail en binômes ou individuel. Ce même effet a été déjà bien mis en évidence et analysé par Sensevy (1996).

Par exemple, dans l'extrait suivant, les interventions d'Igor et puis de Filippo permettent à toute la classe de rencontrer le même phénomène qu'ils ont observé en

binôme dans Cabri. Ce type d'interventions change ainsi le cours de la DC et produit un temps d'apprentissage ultérieur (D1.txt (846 :857)) :

298.	<i>IGOR : Nous avons renversé l'ordre... l'ordre des points... lorsque nous avons appliqué l'«Effet 1 ».</i>	<i>IGOR : Noi abbiamo invertito, vabbeh, l'ordine dei punti... quando abbiamo applicato « l'Effetto1 ».</i>
299.	<i>FILIPPO : Mais, pratiquement on avait la même chose, les positions seules... des variables fixes changeaient</i>	<i>FILIPPO : Però era praticamente la stessa cosa, cambiavano solamente le posizioni delle... variabili fisse...</i>
300.	<i>P : ça c'est ce qui s'est aussi passé avec eux, même s'ils ne l'on pas fait exprès, mais ils l'ont fait par erreur. Clairement, si je change l'ordre, H aussi va se retrouver quelque part ailleurs, peut-être il ne se trouvera plus sur le cercle de diamètre [PB], il se trouvera sur le cercle de diamètre [AB] et puis on aura la droite (PB), mais après conceptuellement au fond, il ne change pas grande chose.</i>	<i>P : È quello che era successo a loro, anche se loro non l'avevano fatto di proposito, ma lo avevano fatto per sbaglio. Chiaramente, se io cambio l'ordine, anche H va a finire da un'altra parte, magari non sta più sulla circonferenza di diametro [PB], starà sulla circonferenza di diametro [AB] e poi sarà la retta (PB), ma poi concettualmente in fondo, non è che cambia molto.</i>

Des exemples analogues sont identifiables lors de la discussion collective 13, en ce qui concerne le travail individuel.

En général, l'effet chronogénétique attendu de l'activité en binômes ou individuelle fait partie de la conception même de la séquence. Les activités sont conçues en fonction de leur capacité potentielle d'influencer, voire de déterminer la chronogénèse de la discussion collective consécutive. L'effet chronogénétique des interventions de l'enseignante et des élèves donne alors une mesure de l'impact réel des activités en binômes ou individuelles, dans le déroulement successif de la discussion collective. Les actions de **résonance forte** marquent, ainsi, du point de vue de la perception que l'enseignante a, dans l'instant de la discussion collective, la cohérence de certaines interventions d'élèves avec les objectifs prévus. Elles indiquent aussi leur opportunité ou pertinence temporelle perçue. Ainsi, une analyse en termes d'actions chronogénétiques, à la fois de la part de l'enseignante et de la part des élèves, permet de repérer l'incidence du travail en binômes avec l'artefact dans les discussions collectives correspondantes.

La participation active des élèves à l'actualisation de la chronogénèse attendue de la discussion collective, même étant préalablement organisée, par exemple par des demandes de reconstruction ou de mise en commun des problèmes rencontrés, n'est pas complètement prévisible. En revanche ce qui est prévisible est la détermination explicite des élèves, dans la conduite de la discussion collective, à aborder et résoudre ensemble toutes les questions posées dans la fiche de travail dans Cabri. Cette détermination est issue d'un contrat didactique spécifique bien établi dans la classe (cf. Chapitre 6, § 8.5) et exprime, à nouveau, une coresponsabilité partagée face à la chronogénèse d'une DC. Notons alors que, la diffusion d'un contrat didactique spécifique a aussi une pertinence du point de vue de la gestion de la chronogénèse.

Dans l'extrait suivant, par exemple, Cristina change le cours de la Dc tel qu'il avait été délimité par l'enseignante (310), pour rappeler qu'avant d'aborder la question sur l'équivalence des constructions différents de H, il faut examiner ensemble la question du déplacement de P pour que H ne bouge pas. Il est intéressant de remarquer qu'à cet instant-là, toute la classe participe à la définition de ce qu'il faut d'abord discuter ensemble. Ainsi, Marco, puis Igor et Cristina introduisent la question de la disparition de H (D1.txt (883 :898)) :

310.	<i>P : Ok. Si quelqu'un a des doutes... Maintenant c'est le moment de les dire... Maintenant ou jamais... Non, ce n'est pas vrai ! Mais en somme, maintenant serait le moment le plus adapté ! S'il n'y a pas de doutes je passerai à la dernière question à savoir : « H peut être obtenu par quatre constructions diverses, sauriez-vous les trouver et en justifier l'équivalence ? » Et ici on ira vers une chose future, vers l'équivalence entre constructions, qui pourra être très intéressante.</i>	<i>P : Ok. Se qualcuno ha dei dubbi... Ora è il momento di dirli... Ora o mai più... No, non è vero ! Ma insomma, ora sarebbe il momento più adatto ! Se non ci sono dubbi io passerei all'ultima domanda ossia : « H si può trovare con quattro costruzioni diverse, sapreste trovarle e giustificarne l'equivalenza ? » E qui si andrà verso una cosa futura, verso l'equivalenza tra costruzioni, che potrà essere molto interessante.</i>
311.	<i>CRISTINA : Mais avant cette [question-ci] on en avait une autre ! ... Est-ce que il n'y avait pas celle de comment je dois bouger P pour que H ne bouge pas ?</i>	<i>CRISTINA : Ma prima di questa ce n'era un'altra ! ... Non c'era quella di come devo muovere P perché H resti fermo ?</i>
312.	<i>P : Pardonnez-moi, j'ai oublié tout un morceau. Vous avez raison !</i>	<i>P : Perdonatemi, mi sono scordata tutto un pezzo. Avete ragione !</i>
313.	<i>MARCO : C'est celle avec H qui disparaît ?!</i>	<i>MARCO : È quella con H che scompare ?!</i>
314.	<i>CRISTINA, IGOR : C'est celle avec H qui disparaît !</i>	<i>CRISTINA, IGOR : È quella con H che scompare !</i>

Nous voulons souligner comment l'utilisation d'outils provenant de la TdS (chronogenèse et contrat didactique) permet de mieux comprendre un autre aspect de la gestion d'une discussion collective, spécialement organisée en fonction d'un processus de médiation sémiotique. Les questions posées dans la fiche de travail dans Cabri, comme l'a montré l'analyse *a priori* de la séquence expérimentale (cf. Chapitre 4), trouvent souvent leur raison d'être définitive seulement dans leur résolution collective lors des DC consécutives. La résolution en binômes, en fait, permet la construction de certains signifiés personnels et la fabrication de certains signes. Cependant c'est la transformation collective de ces signes et des signifiés associées, guidée par l'enseignante selon un ordre assez précis, qui peut permettre l'introduction et éventuellement l'internalisation des signifiés mathématiques visés. La gestion de la chronogenèse a donc un poids dans le processus de médiation sémiotique même.

## 8. Actions des élèves à dominante topogénétique

La prise de responsabilité, et plus en général le partage des responsabilités lors d'une discussion collective, a été déjà en partie analysée, en considérant de façon intégrée l'analyse des actions du professeur et celle des actions des élèves. En fait, lors de l'analyse des actions de l'enseignante, nous avons déjà examiné, par exemple, les actions de **déplacement topogénétique vers un élève, vers un binôme ou vers la classe**. Ces mouvements, qui marquent un changement d'acteur(s) principal(s) dans une discussion collective et qui mettent en lumière une participation active des élèves, sont en grande partie orchestrés par l'enseignante elle-même. Cependant, nous observons aussi des actions qui surgissent directement de l'initiative libre des élèves et qui témoignent, donc, d'une prise autonome de responsabilité. Nous avons appelé génériquement ces actions **interventions topogénétiques**. Elles sont liées à des prises de paroles, inattendues, d'un élève visant, par exemple, à expliquer à un autre élève, ce que ce dernier n'a pas compris, à guider au rétroprojecteur un deuxième élève dans une démarche de validation, à reconstruire publiquement une partie de son activité, pour que toute la classe puisse rencontrer et interpréter le même phénomène ou un problème rencontré en binômes,

à proposer une possible démarche résolutive, ou encore, à confronter deux procédés de résolution divers. Puisque il s'agit d'interventions non explicitement sollicitées par l'enseignante, elles ont été interprétées comme des signes possibles d'un rapport partiellement adidactique avec le milieu de la discussion collective.

L'exemple peut-être plus parlant est celui nommé de « la composition de fonctions » et relatif à la discussion collective<sup>1</sup>. Cet épisode a déjà été analysé plusieurs fois, lors du chapitre précédent (cf. Chapitre 6, § 2.1.1.2).

Rappelons que cet épisode se situe lorsque la classe est en train d'examiner le phénomène observé par Cristina et Egizia. Ces élèves ont, en fait, appliqué deux fois la macro « Effet1 », en prenant la deuxième fois comme variable indépendante, le point variable dépendante H, obtenu par la première application. Igor croit d'avoir constaté lui aussi le même phénomène. En réalité, ce que lui et Filippo ont observé est autre chose : ces élèves n'ont pas appliqué deux fois la macro mais ils ont simplement changé l'ordre d'application de la macro aux points initiaux A, B, et P. Ces deux élèves ne perçoivent pas la différence avec le problème exposé par Cristina et l'enseignante organise alors une validation commune, en invitant Igor au rétroprojecteur (D1.txt (779 :806)) :

272.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que vous avez fait un autre « Effet1 » avec H ?</i>	<i>CRISTINA : Cioè avete fatto un altro « Effetto1 » con H ?</i>	
273.	<i>IGOR et FILIPPO : Oui.</i>	<i>IGOR e FILIPPO : Sì.</i>	
274.	<i>IGOR : Mais en prenant d'abord B, puis A et ensuite P. Nous avons essayé mais après nous avons abandonné car il y avait trop de confusion.</i>	<i>IGOR : Però prendendo prima il punto B, poi A e poi P. Avevamo provato, però poi abbiamo abbandonato perché veniva troppa confusione.</i>	
275.	<i>P : Faites-mois voir, IGOR. Fait attention car elle va être un peu déçue si elle n'a pas été la seule (le prof sourit)...</i>	<i>P : Fammi vedere, IGOR. Guarda che ci rimane malissimo se non è stata l'unica lei !</i>	<b>Organisation d'une validation commune par le milieu</b>
276.	<i>CRISTINA : C'est n'est pas vrai !</i>	<i>CRISTINA : Non è vero !</i>	
277.	<i>P : Alors, ici il y a H.</i>	<i>P : Allora, qui c'è H.</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur</b>
278.	<i>CRISTINA : Maintenant, tu fais un autre point.</i>	<i>CRISTINA: Ora fai un altro punto.</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève ; Intervention topogénétique</b>
279.	<i>P : Maintenant tu fais un autre point que nous allons appeler ?</i>	<i>P : Ora fai un altro punto, che lo chiamiamo ?</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur, Déplacement topogénétique à un élève puis à la classe</b>
280.	<i>CRISTINA : C.</i>	<i>CRISTINA : C.</i>	<b>Intervention topogénétique</b>
281.	<i>P : Et puis tu appliques « Effet1 » à H, P et C.</i>	<i>P : E poi applichi « Effetto1 » ad H, P, C ?</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur</b>
282.	<i>IGOR : Han, non, la notre était bien différente !</i>	<i>IGOR : Han, no, allora la nostra era ben diversa !</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
283.	<i>CRISTINA : Alors maintenant, par exemple, bouge B.</i>	<i>CRISTINA : Allora ora muovi, per esempio B.</i>	<b>Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève ; Intervention topogénétique</b>

284.	<i>IGOR : Il y a des H qui bougent... ils bougent sur cercles différents.</i>	<i>IGOR : Si muovono due H... si muovono su due circonferenze diverse.</i>	<b>Validation par le milieu reconnue par l'élève</b>
------	---	--	--

Nous observons que Cristina partage complètement avec l'enseignante la responsabilité de ce moment. Même si c'est Igor qui a été appelé au rétroprojecteur, c'est elle qui, en réalité est en train de guider l'exécution (278, 281, 283). C'est elle encore qui intervient pour décider le nom à donner au point créé (280). Il est évident que le contrat didactique n'est pas usuel : en fait l'organisation d'une validation commune n'est pas une tâche exclusive de l'enseignante. Même les interventions d'Igor et Filippo, montrent une prise de responsabilité dans la conduite de la discussion collective et un rapport au milieu de la discussion collective, au moins partiellement adidactique. En fait, ces élèves auraient pu se taire et laisser l'enseignante décrire à toute la classe le phénomène présenté par Cristina. Au contraire, ils interviennent en confrontant le travail de Cristina et Egizia avec le leur. Cette intervention risque de montrer à l'enseignante leur faiblesse éventuelle. Cependant, ces élèves semblent, plus préoccupés de comprendre et de réagir par rapport au problème en jeu que de se comporter conformément aux attentes éventuelles de l'enseignante. Pour cette raison nous avons considéré cette position comme étant ou moins partiellement adidactique.

Un autre exemple de cette prise de responsabilité a été identifié lors de l'épisode déjà présenté précédemment (cf. Chapitre 7, § 2.2.2) (D13\_23\_10\_02.rtf (135 :157)) et concernant l'élaboration d'une « définition de courbe symétrique ». Là aussi l'on voit d'abord Igor et Filippo (68-71) problématiser l'observation de Egizia qui affirme que « *l'allure du graphe est une courbe symétrique par rapport à l'appliquée passant par le point A* » (66). Ensuite on observe Giacomo prendre la parole pour essayer de résoudre le problème (74), puis Cristina guider l'exécution au rétroprojecteur de Giacomo (77-84) et, enfin, Filippo, Igor et Cristina (86 - 90) compléter cette résolution dans le cas le plus général possible.

Les actions à dominante topogénétique nous fournissent donc, indirectement des évidences, d'une part, sur le contrat didactique dans lequel ces élèves vivent, d'autre part, sur la possibilité de moments d'adidacticité, même au sein d'une situation, celle d'une discussion collective, qui est, par vocation primaire, une situation fortement gérée par l'enseignante.

### 8.1. Fusion et Réduction topogénétique

Notre analyse des actions de l'enseignante a permis de préciser un autre outil d'analyse dérivé des travaux de recherche de Sensevy, Mercier et Schubauer-Leoni (2000), celui de **fusion topogénétique** (cf. Chapitre 6, § 6). Nous sommes même parvenu à distinguer cette notion par confrontation avec celle de **réduction topogénétique**. En particulier, nous avons observé lors du discours de l'enseignante, parfois, l'utilisation du pronom « je » au lieu de « nous » ou de « vous ». Dans ce « je », l'enseignante parle en première personne mais, ce qui est métaphoriquement signifié, est toute la classe (**fusion topogénétique**). Cet outil linguistique s'est même montré plus incisif que l'utilisation du pronom « nous », qui se réfère, déjà naturellement, à la classe entière (**réduction topogénétique**). En fait il favorise encore plus l'identification et l'implication des élèves dans la position manifestée par l'enseignante et, donc, en particulier, l'engagement dans l'enjeu interprétatif.

A priori nous aurions pu nous attendre exclusivement à ce type d'actions de la part de l'enseignante. En revanche, dans l'analyse des actions des élèves nous avons observé, mais en mesure beaucoup plus réduite, des actions analogues. Nous nous sommes demandé si ces actions de la part des élèves avaient la même fonction que dans le cas de l'enseignante.

Ainsi, dans le cas de la **réduction topogénétique**, nous avons constaté une utilisation du pronom « nous » analogue à celle de l'enseignante : dans le but d'exprimer une vérité générale, toujours valable et réfutable par toute la classe, l'élève parle en première personne plurielle.

Par exemple, dans l'extrait suivant, Filippo est en train d'expliquer pour quelle raison il considère que H peut disparaître. Il s'agit de son opinion personnelle mais il utilise le « nous » (D1.txt (972 :974)) :

339.	<i>FILIPPO : Si nous faisons coïncider parfaitement les deux cercles, ils auront un nombre infini de points d'intersection alors le logiciel n'est plus capable de calculer le point d'intersection...</i>	<i>FILIPPO : Se noi facciamo coincidere perfettamente le due circonferenze, esse avranno infiniti punti di intersezione allora il programma non riesce più a calcolare qual è il punto di intersezione...</i>	<b>Réduction topogénétique</b>
------	--	---	--------------------------------

Ou encore, dans l'intervention suivante, Filippo pose une question qui, même si elle est engendrée par une curiosité personnelle, peut intéresser toute la classe (D13\_23\_10\_02.rtf (283)) :

140.	<i>FILIPPO: Mais, moi-je me demandais : si nous allons vers l'infini que est-ce qui se passe ? Si, nous continuons à déplacer P sur la droite (RS) toujours vers la droite ?</i>	<i>FILIPPO : Ma io mi chiedevo : se noi andiamo all'infinito cosa succede ? ... Se noi continuiamo a spostare P sulla retta (RS) sempre verso destra ?</i>	<b>Réduction topogénétique</b>
------	--	--	--------------------------------

En revanche, dans le cas de la **fusion topogénétique**, nous croyons que l'utilisation du pronom « je » au lieu du « nous » ne répond pas à l'objectif, même implicite, de favoriser une identification entre position de l'actant et celle du reste de la classe, comme dans le cas de l'enseignante. Il exprime, plutôt, le symptôme d'une identification déjà avérée ou simplement de l'appropriation par l'élève d'un type de discours propre de l'enseignante. En fait dans les seuls deux cas où nous l'avons observé, ce phénomène de **fusion topogénétique** par un élève suit toujours une **fusion topogénétique** par l'enseignante. Bien évidemment il ne s'agit pas d'un nombre de cas statistiquement significatif. Nous sommes conscients que cet aspect mériterait des analyses ultérieures. Nous voulons ici donner seulement quelque aperçu qualitatif et des éléments complémentaires de réflexion par rapport à l'analyse des actions de l'enseignante.

Par exemple, dans l'exemple suivant (D1.txt (654 :663)), l'intervention de Cristina (227) présente une **fusion topogénétique**. Cependant, cela s'avère être un phénomène qui se produit à la suite d'un autre phénomène de fusion topogénétique, intervenant lors de la tentative de l'enseignante (226), de comprendre et prendre en charge l'observation de Filippo (225) :

225.	<i>FILIPPO : Oui, il la [en se référant à la droite] fait quand-même, mais il la fait plus lentement !</i>	<i>FILIPPO : Sì, la [riferendosi alla retta] fa lo stesso, però la fa più lenta !</i>	
226.	<i>P : Ah... tu dis... il la fait plus</i>	<i>P : Ah... te dici... la fa più lenta.</i>	



	<i>lentement. Donc, si je vais sur une droite parallèle, et ça peut nous servir après, je l'obtiens plus rapidement. Mais P je suis en train de le bouger... ?</i>	<i>Quindi, se invece vado su una retta parallela, e questo ci può servire dopo, la ottengo più velocemente. Però P lo sto movendo... ?</i>	<b>Fusion topogénétique</b>
227.	<i>CRISTINA : Il est claire que je ne peux pas dessiner toute cette droite-là.</i>	<i>CRISTINA : È chiaro che non posso disegnarla tutta quella retta.</i>	<b>Fusion topogénétique</b>
228.	<i>P : Mais si je mettais tous mes efforts, et si j'étais l'Highlander [...] célèbre ?</i>	<i>P : Ma se mi ci mettessi d'impegno, e fossi l'Highlander [...] famoso ?</i>	<b>Fusion topogénétique</b>

Notons que lors de l'intervention (226) l'enseignante s'est appropriée l'observation de Filippo et, en parlant à la première personne, entraîne avec elle, la classe entière dans l'analyse de la trajectoire de H lorsque on déplace P parallèlement (ou non) à la droite (AB). En effet, en regardant plus en général la partie de discussion, d'où cet extrait est tiré, nous pouvons avancer l'hypothèse que la **fusion topogénétique** de l'enseignante est destinée à réorienter la discussion collective. Notons aussi que, comme l'enseignante, Cristina aussi, intervient à la première personne (227) : en s'identifiant avec l'enseignante, elle n'arrive pas seulement à s'approprier le problème, mais aussi à en développer des implications.

Comme déjà anticipé, peut-être pourrait-on aussi relier ce phénomène à la diffusion d'un certain genre de discours. Le format choisi par l'enseignante serait alors adopté aussi par l'élève et témoignerait, en fait, que l'identification souhaitée s'est effectivement produite. Il s'agit encore simplement d'une hypothèse qui mériterait elle aussi d'être approfondie.

Ces notions de **fusion** et **réduction topogénétique** se révèlent donc utiles pour essayer de surveiller et éventuellement expliquer la constitution et le passage d'un espace intersubjectif à l'espace intra-subjectif. Nous faisons, en fait, l'hypothèse que les identifications avec toute la classe (**réductions topogénétiques**) favorisent la constitution d'un espace intersubjectif dans lequel chaque élève peut se sentir représenté. En revanche, les identifications fusionnelles (**fusions topogénétiques**) non seulement favorisent la création d'un espace sociale partagé, mais, facilitent encore plus le processus d'internalisation de ce qui, dans cet espace, s'est produit.

## 9. Résultats au niveau macro : apports respectifs de la Théorie des situations et de la Théorie de la médiation sémiotique

Nous avons étendu aux élèves, la modélisation de l'activité du professeur issue des travaux de recherche de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (2000) et déjà profondément modifiée par notre analyse *a posteriori*. Nous avons aussi adopté des outils provenant de la TdS pour mieux expliquer ce qui se passe dans une discussion collective spécifiquement conçue en fonction d'un processus de médiation sémiotique. Ce choix sous-entend une hypothèse de recherche forte : celle que l'activité des élèves possède des caractéristiques particulières dues au contrat didactique bien établi dans cette classe. En fait, depuis deux ans, les élèves sont engagés dans d'autres projets conçus au sein du même paradigme de la médiation sémiotique. En outre, depuis une dizaine d'années, l'enseignante collabore avec Maria Alessandra Mariotti et a mûri une vaste expérience dans l'orchestration de discussions collectives.

Par ces caractéristiques particulières nous nous attendons à une certaine « symétrie » dans le rôle de l'enseignante et des élèves lors de la participation à une discussion collective. Autrement dit, elles nous permettent d'avancer l'hypothèse, partagée aussi par Bartolini Bussi et ses collègues (Bartolini Bussi, 1998a ; Bartolini Bussi et Boni, 1995a ; Bartolini Bussi, Boni, et Ferri, 1995b ), que les élèves puissent s'approprier de certaines actions typiques de l'activité de l'enseignante<sup>89</sup> et que, par conséquent , ces actions puissent aussi se retrouver du côté des élèves.

Ce que nous avons développé n'est, donc, pas seulement une méthodologie d'analyse *a posteriori* des actions des élèves. Elle constitue, en soi-même, un résultat de cette thèse. Notre méthodologie s'est en effet révélé valide.

Cependant nous soulignons que le domaine de validité de cette méthodologie est dépendant du type de contrat mise en place dans la classe.

L'analyse des actions à **dominante mésogénétique** intervenant dans le processus de sémiotique a permis de reconnaître et attribuer aux élèves, dans les deux processus complémentaires (constituant la co-construction du milieu commun) de mise en place du milieu commun attendu et de modification du même milieu, une participation active et même nécessaire. Dans une situation où le rôle de l'enseignante est si important, cette analyse a mis aussi en évidence des moments d'adidacticité.

L'analyse des actions à **dominante mésogénétique spécifiques au processus de sémiotique**, a conduit à mieux comprendre et modéliser le processus de médiation sémiotique en cours. L'identification et la classification des certaines actions des élèves, a montré que ce processus ne se fonde pas seulement sur des actions propres à l'enseignante mais qu'il dépend aussi d'actions spécifiques des élèves, comme les **questions de sémiotique potentielle** ou les **interprétations**. Ces actions sont assurées par l'engagement des élèves (dévolution) dans un travail d'interprétation et, pour cela, par un contrat didactique adéquat, déjà mis en évidence lors de l'analyse des actions du professeur (cf. Chapitre 6, § 8). Cette analyse a aussi montré la présence, même dans le discours des élèves, de phénomènes de **mélange sémiotique**. En outre, l'analyse des cas où cela s'est produit, même si elle n'est pas significative statistiquement, a conduit à faire l'hypothèse que dans le discours des élèves, à la différence de l'enseignante, ces phénomènes sont surtout liés au processus de complexification/affranchissement des signes et témoignent d'un apprentissage en cours.

L'analyse des actions d'élèves à **dominante chronogénétique** a montré l'incidence des élèves dans l'actualisation de la chronogénèse attendue. Cet aspect est très important dans la TMS, puisque les activités sont, en fait, conçues en fonction de leur capacité potentielle d'influer sur la chronogénèse de la discussion collective consécutive.

Enfin, l'analyse des actions à **dominante topogénétique** a fourni indirectement des évidences, d'une part, sur le contrat didactique dans lequel les élèves se trouvent, d'autre part, sur les conditions d'adidacticité possible lors d'une discussion collective. En outre, il a mis en évidence la présence d'actions qu'*a priori*, on pouvait s'attendre seulement de la part de l'enseignante comme celles de **fusion topogénétique**. A la différence de l'enseignante, dans le cas des élèves, ce type d'actions, plutôt que d'indiquer une volonté d'identification, semble attester une identification déjà avérée.

---

<sup>89</sup> En réalité, Bartolini Bussi et ses collègues, au lieu de parler d'actions, parlent préférentiellement de stratégies communicatives. Cependant, comme nous avons déjà essayé d'expliquer (cf. Chapitre 1, par. 3.4.1), notre classification, bien que différente, cherche à se situer en continuité avec la classification élaborée par ces auteurs.

D'une part, l'analyse en termes de TdS a conduit à mieux modéliser le fonctionnement d'une discussion collective orchestrée en fonction du processus de médiation sémiotique. Par une analyse en termes de milieu et de mésogenèse, nous avons ainsi pu décrire de façon plus approfondie le processus de constitution et de redéfinition continue d'un espace intersubjectif. Par une analyse en termes de contrat didactique et de topogenèse, nous avons identifié de manière plus fine les dynamiques sociales associées. Enfin, par une analyse en termes de chronogenèse, nous avons pu repérer l'incidence de l'activité en binômes avec l'artefact dans le déroulement des discussions collectives consécutives.

D'autre part, les notions dérivées de la TMS ont amené à préciser, étendre, voire changer les notions issues de la TdS. L'extension même des catégories d'analyse de l'action professorale aux élèves a été rendue nécessaire afin de modéliser les processus de construction d'un espace intersubjectif et de sémosis consécutif. Cette opération a été soutenue par des hypothèses d'inspiration vigotskienne. En fait, nous avons pu analyser toutes les actions, même de la part des élèves, en prenant pour modèle celles du professeur, car nous supposons qu'elles sous-entendent toujours un motif.

## 10. Tableau de synthèse sur les actions des élèves

Comme déjà expliqué, notre analyse des actions des élèves a été assez réduite. Voici alors le tableau synthétique des actions des élèves identifiées lors des deux discussions collectives analysées. Cette présentation obéit seulement à un ordre alphabétique. En revanche, en gras, nous avons signalé les actions dont nous avons parlé de façon un peu plus approfondie lors du chapitre présent.

<b>Actions des élèves à dominante mésogénétique génériques de l'activité des élèves intervenant dans le processus de médiation sémiotique</b>
Correction par un élève ; Demande d'explicitation de la tâche par un élève ; Demande d'explicitation /établissement d'une règle du contrat par l'élève ; Demande de compréhension par l'élève ; Demande de spécification par l'élève ; Etablissement règle explicite par l'élève ; Evocation de l'activité de discussion collective par l'élève ; Evocation par l'élève de la validation par le milieu ; Evocation épisode particulier d'une discussion collective ; Exécution au rétroprojecteur par l'élève ; Explication par l'élève ; Généralisation (ou Demande de) (par extension du domaine de référence ; par extension du domaine de validité ; par universalisation) par l'élève ; Guide à l'exécution au rétroprojecteur par l'élève ; Introduction d'un élément nouveau dans le milieu par un élève ; Jugement de coïncidence entre deux stratégies résolutive diverses par l'élève ; Manifestation d'un problème par l'élève ; Mise en relation de stratégies résolutive diverses par l'élève ; Objection par l'élève ; <b>Organisation d'une validation par le milieu par un élève</b> ; Particularisation par l'élève ; Reconstruction sélective par l'élève ; Spécification par l'élève ; Synthèse par l'élève ; Tentative de recourir aux connaissances anciennes par l'élève ; <b>Validation par le milieu reconnue par l'élève.</b>
<b>Actions des élèves à dominante mésogénétique spécifiques du travail de sémosis</b>
<b>Demande d'interprétation posée par l'élève ; Explicitation des signifiés personnels par l'élève ; Interprétation par l'élève ; Question de sémosis potentielle par l'élève.</b>
<b>Actions des élèves à dominante chronogénétique</b>
Action chronogénétique d'élève ;

---

Evocation épisode particulier d'une discussion collective ; **Introduction d'un élément nouveau dans le milieu par un élève** ; Rappel de la tâche par l'élève.

**Actions des élèves à dominante topogénétique**

Action topogénétique d'élève ;  
Fusion topogénétique par l'élève ; Mise en relation de stratégies résolutive diverses par l'élève ; Jugement de coïncidence entre deux stratégies résolutive diverses par l'élève ; Organisation d'une validation par le milieu par un élève ; Réduction topogénétique par l'élève.

**Actions des élèves à dominante mixte**

Reconstruction sélective par un élève (mésos et topo) ; Demande d'explicitation de la tâche par un élève (chronos et mésos) ; Guide à l'exécution au rétroprojecteur (mésos et topo) ; Introduction d'un élément nouveau dans le milieu par un élève (mésos, topo et chronos) ;



# Chapitre 8 : Analyse a posteriori de l'évolution des signes

<b>1. Introduction .....</b>	<b>335</b>
<b>2. Contexte.....</b>	<b>336</b>
<b>3. Observations méthodologiques et questions de recherche</b>	<b>337</b>
<b>4. Première discussion collective analysée (DC 1) : « Effet1 »</b>	<b>339</b>
4.1. Variable .....	339
4.2. Variable indépendante.....	342
4.3. Variable dépendante .....	346
4.4. Domaine et image .....	350
4.4.1. Image et trajectoire.....	355
4.5. Paramètre.....	357
4.6. Fonction.....	360
4.6.1. Le signe de fonction et la famille de signes issue de l'IMS Macro..	365
4.6.1.1.1. Premiers liens interprétatifs entre les signes de fonction, relation et construction géométrique.....	365
4.6.1.1.2. Liens interprétatifs entre les signes de la « macro Effet1 », des macros de Cabri, des constructions géométriques et de la « chose magique » .....	366
4.6.1.1.3. Liens interprétatifs entre les macros en général de Cabri, les fonctions, et les relations. ....	369
4.6.1.1.4. Liens interprétatifs entre les fonctions, les opérations et les fonctions géométriques .....	371
4.6.2. Le signe de fonction et la famille des signes issus des IMS Déplacement+Trace.....	372
4.6.3. Synthèse sur l'évolution du signe de fonction .....	375
<b>5. Deuxième discussion collective analysée (DC 13) : « Euler dans Cabri » .....</b>	<b>376</b>
<b>6. Résultats généraux .....</b>	<b>381</b>

## 1. Introduction

L'analyse de l'évolution des signes porte sur deux discussions collectives, pour lesquelles nous avons déjà conduit l'analyse des actions de l'enseignant et des élèves.

Le choix de nous centrer sur ces deux seules discussions collectives est dû à la volonté d'étudier de façon fine le processus de médiation sémiotique. En fait, dans la tentative d'étudier de près l'évolution des signes, nous nous sommes aperçues que ce processus de sémosis, décrit par Peirce comme croissant en complexité et jamais inachevé, est très articulé et demande une analyse assez détaillée et parfois lourde. D'autre part, sans ce type d'analyse, l'étude correspondante des actions de l'enseignant et de élèves en vu d'une modélisation du processus de sémosis ne

nous a pas semblé très efficace : c'est seulement par l'interaction croisée entre ces différents plans d'analyse, que nous avons pu identifier, décrire et modéliser certains mécanismes de gestion du processus de médiation sémiotique caractéristiques de l'action de l'enseignant et des élèves. En outre, elle s'est révélée très riche et nous a fourni une sorte de méthodologie « prototypique », susceptible d'être employée dans l'étude d'autres discussions collectives et d'autres situations d'apprentissage riches du point de vue sémiotique. Par exemple, nous avons commencé, avec succès, à étendre ce type de méthodologie à l'analyse des rapports individuels et des fiches de travail en binômes, mais, puisque ce travail mérite encore approfondissement, il ne sera pas présenté lors de cette thèse.

## 2. Contexte

Nous analyserons de suite les réseaux sémiotiques relatifs à la première discussion collective et à la troisième discussion collective.

Ces discussions diffèrent par beaucoup d'aspects :

- Par leur place dans la progression de la séquence, puisqu'elles se situent l'une au début de la séquence expérimentale, lors de l'introduction des fonctions géométriques dans Cabri, et l'autre dans la deuxième moitié de la séquence expérimentale, après l'introduction des fonctions numériques et du graphe de fonction (et après la suspension des vacances d'été).
- Par le type d'artefacts impliqués : la première discussion collective porte sur l'artefact Cabri, la deuxième sur l'artefact Cabri et sur l'artefact « texte d'Euler ».
- Par la nature du processus de sémosis impliqué : la première relève de la première rencontre avec les signes associés aux signifiés de fonction géométrique (variable indépendante, variable dépendante, domaine, image et paramètre) ; la deuxième discussion collective vise à développer la mise en place d'un réseau des correspondances sémiotiques entre les constituants divers des fonctions géométriques, des fonctions numériques et du graphe de fonction.

Rappelons que la première discussion analysée a consisté à revisiter l'activité « Effet 1 » (Chapitre 4, § 5.1). Lors de cette séance, les élèves étaient confrontés à une macro « Effet1 » qui à partir de trois points libres construisait un quatrième point, dépendant des trois points initiaux. En résolvant un certain nombre de tâches, les élèves étaient amenés à explorer le comportement et les propriétés des objets à l'écran de Cabri.

Cette première discussion collective s'est étalée sur environ une heure et demi.

La deuxième discussion collective analysée, a consisté à revisiter l'activité n°7 « Euler dans Cabri » (Chapitre 4, § 8.3) et le tout début de l'activité n°8. Nous ne présenterons ici que la partie de discussion concernant l'activité n°7.

Rappelons que cette discussion a eu lieu après douze autres discussions collectives et que l'activité n°7 demandait aux élèves d'implémenter dans Cabri la méthode de construction du graphe décrite par le texte d'Euler et de décrire l'allure du graphe de la fonction obtenu. En particulier, lors de l'activité, il fallait construire le graphe de la fonction  $g$  qui à  $x$  réel associe  $g(x)=x^2+5$ .

Cette discussion collective s'est étalée sur environ une heure.

En ce qui concerne la première discussion collective, nous avons pu identifier 15 « épisodes principaux ».

En revanche, nous avons pu repérer 5 épisodes principaux dans la deuxième discussion collective.

Au sein de chaque épisode, nous avons aussi pu identifier des « sous-épisodes » qui semblent se détacher du cours principal de la discussion, pour se concentrer sur un aspect particulier ou négligeable de l'activité ou de la discussion même.

Parfois, ces sous-épisodes sont dus à des interventions inattendues des élèves, négligées, ou jugées inappropriées, par l'enseignant, ou, encore, à des interruptions de l'enseignante, qui tente par exemple de rétablir l'attention des élèves ou de résoudre une impasse technique avec l'artefact « Cabri ». Dans ce cas, nous avons appelé ces sous-épisodes des « déviations ». En fait, en observant la gestion effective par l'enseignant, on voit qu'elle cherche à les clore rapidement.

Parfois, ces sous-épisodes portent sur l'approfondissement (de la part de l'enseignante ou des élèves) d'un aspect particulier.

Evidemment, cette classification en « épisodes principaux » et « sous-épisodes » n'est pas absolue et elle cherche à prendre en compte au moins partiellement les intentions de l'enseignant, comme elles se manifestent dans la gestion de la discussion même. Cette classification nous a aidé à avoir une idée globale du déroulement de l'activité. Le lecteur trouvera en annexe la description détaillée en épisodes des deux discussions collectives analysées.

Le lecteur pourra trouver la décomposition détaillée en épisodes des deux discussions collective en annexe (Annexe 3). E, revanche, il pourra lire les transcriptions complètes des deux discussions collectives (et les analyses menées dans Atlas.ti) dans le DC-rom joint à cette thèse.

### **3. Observations méthodologiques et questions de recherche**

L'évolution des signes élaborés tout au long des discussions collectives nous donne en filigrane, une image de l'évolution des signifiés socialement partagés qui leur sont associés. En fait, pour chaque objet mathématique abordé lors de la première discussion collective, nous avons tracé une représentation (possible)<sup>90</sup> de son réseau sémiotique relatif. Cela a été fait dans le logiciel Atlas.ti, en prenant en compte tous les signes produits lors des discussions collectives, qui pouvaient être rattachés à l'objet mathématique en question.

En revanche, en ce qui concerne la deuxième discussion considérée, la discussion collective treize, nous avons choisi de construire et puis d'analyser un seul réseau sémiotique global, susceptible de mieux rendre compte de la complexification sémiotique caractéristique de ce moment d'interaction collective. En fait, la première discussion collective était très articulée, longue et complexe : c'était le moment où chaque signe inhérent à la notion de fonction (géométrique) était introduit pour la première fois et travaillé de façon spécifique. Ces caractéristiques nous ont contraint à l'aborder par parties. En revanche, la discussion collective treize est

<sup>90</sup> Dans ce texte, quand nous nous référons aux réseaux sémiotiques, en réalité nous nous référons à une des représentations possibles de ces réseaux. En fait, évidemment, nous n'avons pas accès direct aux réseaux sémiotiques des discussions collectives, qui constituent non seulement une notion théorique, mais impliquent aussi une dimension insaisissable d'élaboration personnelle par les sujets impliqués. Nous nous contentons donc ici seulement de présenter une représentation possible, par le biais d'un logiciel particulier, qui cherche à prendre en compte les signes principaux produits. Cette représentation donnera forcément une perspective dépendante de notre analyse *a priori*, et notre sensibilité dans l'analyse *a posteriori*.



emblématique du processus d'amplification et d'approfondissement des liens interprétatifs entre signes divers. Chaque signe se présente très imbriqué aux autres. Nous avons donc considéré dénaturant et très difficile, de découper le réseau sémiotique en sous-réseaux. En outre, cette discussion collective n'était pas aussi longue. Ce qui a permis de l'approcher de manière globale.

Dans les deux cas, notre objectif a été celui d'identifier des régularités et des axes de développement privilégiés. Nous avons essayé de répondre aux questions suivantes :

- Pour chaque objet mathématique (inhérent à la notion de fonction comme variable, domaine, paramètre, etc.), quels sont les signes qui ont été introduits, utilisés ou modifiés ?
- Quels sont les signifiés, ou mieux, les familles de signifiés, éventuellement identifiables qu'on peut leur associer ?
- Grâce à quels instruments de médiation sémiotique sont-ils développés de manière privilégiée ?
- Comment ces familles sont mises en relations entre elles ?
- Par rapport à un même objet mathématique, ces familles ont-elles, toutes, la même structure évolutive ?
- Nous pouvons affirmer que dans la TMS, la relation entre plan interpersonnel et intra-personnel est fondamentale et que le processus de médiation sémiotique, repose sur une activité collaborative. Comment peut-on décrire le processus de médiation sémiotique en tant qu'activité collaborative ? Quels signes sont élaborés par l'enseignant ? Y-a-t-il des signes produits ou transformés par les élèves ?

Comme déjà expliqué dans la méthodologie (Chapitre 5, § 10.5 et 10.6), rappelons qu'une lecture verticale du réseau sémiotique ne donne pas une idée complète du temps qui passe. En fait, si un code a été utilisé plusieurs fois, la représentation fournie par Atlas.ti, ne permet de le représenter qu'une fois seulement. Nous avons choisi alors de le placer dans le réseau au moment de sa première introduction. Ainsi, par exemple, si dans le réseau sémiotique de la variable, nous observons, une seule fois, l'apparition, en haut, du signe-artefact « P », cela ne signifie pas qu'ensuite ce signe n'a pas été réutilisé. Au contraire, puisque nous voyons que ce signe est relié au signe « déplacement de P », nous pouvons déduire que ce signe a été ensuite explicitement employé lors de focalisations successives, justement pour décrire le type de déplacement (direct) auquel ce point P a été soumis. Ainsi, le fait, que certains codes apparaissent en début du réseau sémiotique, signifie que les signes correspondants ont été introduits en premier. De même, le fait que les liens de ces codes avec d'autres codes s'interrompent à un moment donné, signifie qu'à partir de ce moment le discours n'a plus porté de manière explicite sur ces signes-là.

Par exemple, toujours dans le réseau associé à la variable, le fait que les derniers liens directs du signe-artefact « P » avec d'autres signes sont celui avec les « points initiaux » et le « déplacement de P » (et qu'ensuite la discussion continue à partir de ces nouveaux signes), signifie qu'à partir de ce moment là, les échanges successifs ont cessé de porter directement sur « P » mais se sont centrés sur « les points initiaux », dont le point P est un représentant, et sur le type de déplacement caractérisant ce point.

Enfin, rappelons (cf. Chapitre 5, § 10.6) que les nombres à côté des codes ne sont finalement pas très significatifs. En fait, ils sont engendrés automatiquement par le logiciel et indiquent, de gauche à droite, respectivement, le nombre de fois où ce

code apparaît dans une même unité herméneutique<sup>91</sup> et le nombre de liens que ce code possède avec les autres codes de cette même unité herméneutique.

## 4. Première discussion collective analysée (DC 1) : « Effet1 »

### 4.1. Variable

Signes simples	<p>Signes-artefact : « A », « au hasard » ; « B » ; « bouger (VarDép) » ; « bouger (VarIndép) » ; « bouger (Var) » ; « données finales » ; « données initiales » ; « H » ; « macro Effet1 » ; « P » ; « point final » ; « points initiaux » ; « résultat de ».</p> <p>Signes-pivot : « bouger en fonction de » ; « dépendre de » ; « être en fonction de » ; « indépendante » ; « objet » ; « obtenir (VarDép) » ; « résultat de » ; « variables fixes » ; « varier (VarIndép) ».</p> <p>Signes-mathématiques : « variable dépendante » ; « variable indépendante » ; « variable ».</p>
Signes complexes	<p>Caract (Mouvement) VarDép ; Caract (Mouvement) VarIndép ; Caract (PointIntersectDeuxCirconf) VarDép ; Caract (PointsInitiaux) DonnéesIn ; Déf (CeQu'OnObtient/Résultat) VarDép ; Déf (ChoseIndép) VarIndép ; Déf (Dep/Arrivée) Var ; Déf (DonnéesFin) VarDép ; Déf (DonnéesInConst) VarIndép ; Déf (Mouvement) Var ; Déf (Mouvement) VarDép ; Déf (Mouvement) VarIndép ; Déf (PointDeDépart) Var Indép ; Déf (PointFinale) VarDép. InterprVarDép-Thèse ; InterprVarIndép-Hypothèse.</p>
Instruments de médiation sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement direct et indirect</b> identifiés par l'évocation ou le recours direct à : Déplacement de A; Déplacement de B; Déplacement de P; Déplacement indirect de H ;</li> <li>○ <b>Déplacement combiné avec Trace (1, 2 et 3)</b> identifiés par l'évocation ou le recours direct à : Trajectoire de P; Trajectoire de B; Trajectoire de H;</li> <li>○ <b>Macro1 et Macro2.</b></li> </ul>

Tableau synthétique des signes associé à la variable

Le signifié<sup>92</sup> de variable a été développé conjointement à ceux de variable indépendante et dépendante. Il est alors difficile et même artificiel de distinguer les signes portant exclusivement sur le premier, abstraction faite des deux autres.

Soulignons que ce résultat est cohérent avec notre hypothèse de vouloir construire le signifié de co-variation.

<sup>91</sup> Une unité herméneutique est un « projet » de Atlas.ti. Dans notre cas, toute la thèse avec tous les documents pris en compte par Atlas.ti appartiennent à la même unité herméneutique.

<sup>92</sup> Rappelons que dès le départ (Chapitre 2, par. 1) nous n'avons pas vraiment voulu distinguer entre signifié au singulier et signifiés au pluriel. En fait nous considérons, toujours un signifié comme, l'un des possibles signifiés, insérés dans un réseau de signifiés plus vaste.

Pour cela, le réseau sémiotique relatif au signe de variable (cf. Figure 8.1), a été construit en prenant aussi en compte les signes relatifs à la variable indépendante et à la variable dépendante. En particulier, nous avons considéré que, chaque fois qu'un énoncé portait conjointement sur les signifiés de variable indépendante et de variable dépendante, cela pouvait renvoyer, aussi, à celui de variable tout court. Au contraire, si le signe concernait seulement, soit la variable indépendante, soit la variable dépendante, ce signe n'était pas pris en compte dans le réseau spécifiquement dédié au signe de variable. En outre, une fois introduites explicitement les définitions de variable indépendante et dépendante, nous avons considéré le signifié de variable inséparable de ceux de variable indépendante et dépendante et donc toujours présent en arrière plan. Ainsi, à partir de ce point-là, sauf dans les cas où ce signifié était explicitement évoqué ou utilisé tout seul, nous n'avons pas procédé au codage ultérieur de la discussion collective. Le réseau sémiotique relatif à ce signe s'arrête donc juste après la formulation explicite des définitions de variable indépendante et dépendante, de la part de l'enseignante. Son évolution ultérieure est, en revanche, lisible au travers de l'analyse des réseaux sémiotiques respectifs des signes de variable indépendante et dépendante, présentés successivement.

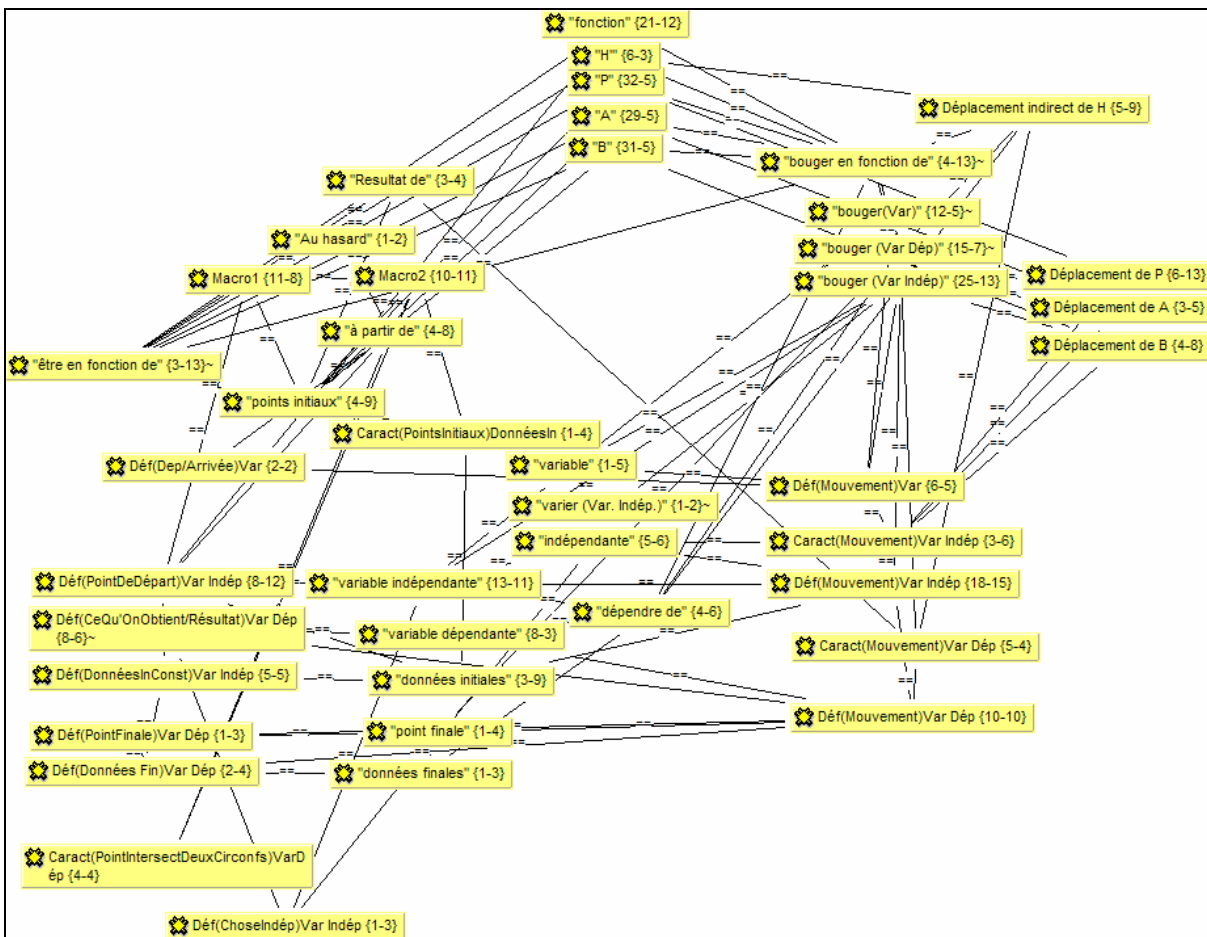


Figure 8.1 - Réseau sémiotique des signes associés à la variable : développement bi-axial.

L'analyse du réseau sémiotique relatif au signe de variable nous montre que la construction des signifiés associés se développe selon deux axes principaux, qui, au début de la première discussion collective, progressent quasi-parallèlement. En analysant la discussion collective nous observons que cela correspond à l'intention

même de l'enseignant. En fait, ces deux familles de signifiés sont gardées distinctes, enrichies et même objectivées différemment, lors de l'introduction explicite par l'enseignant des deux définitions différentes.

Pour la construction du signifié de variable, nous parlons donc de **développement bi-axial**.

1. Le premier axe, que l'on peut voir sur la partie gauche du réseau sémiotique, se développe autour du signifié de variable comme objet de départ et d'arrivée d'un procédé. Cet axe prend son origine dans les instruments de médiation sémiotique **Macro1** et **Macro2**.

Notre analyse a montré que toute une famille de signes est, en fait, mise en œuvre jusqu'à conduire, (de manière totalement imprévue) un élève à relier les variables indépendantes aux objets initiaux d'une construction géométrique et par cela aux hypothèses d'un théorème et les variables dépendantes aux conclusions d'un théorème.

Nous expliquerons pourquoi nous avons relié toute cette première famille de signifiés au signifié de fonction, qualifié de « Machine à Input/Output ».

2. Le deuxième axe de signifiés, visible sur la partie droite du réseau sémiotique, porte sur le signifié de variable comme objet qui varie. Il a comme signes privilégiés ceux de certains points qui bougent dans Cabri en étant reliés par une fonction géométrique. Il a donc comme instrument de médiation sémiotique fondamental celui du **Déplacement (direct et indirect)**. A cette deuxième famille de signifiés, nous avons associé un signifié « co-variationnel » de fonction.

Ces deux axes de signifiés démarrent, dès le début, autour de la reconstruction d'éléments différents de l'activité dans Cabri. Nous pouvons ici détecter le rôle d'orchestration de l'enseignant qui, dans la co-construction du milieu attendu, focalise, d'une part, sur le fonctionnement de l'outil macro « Effet1 », capable de construire le point H à partir des trois points A, B et P (ce qui reviendrait au premier axe), et d'autre part, sur le déplacement direct et indirect de ces mêmes points (deuxième axe).

Ensuite, à ces deux axes de signifiés, l'enseignant fait correspondre deux définitions différentes. On pourrait dire que ces deux moments bien distincts, constituent en quelque sorte une première objectivation des ces deux pôles de développement :

**Déf(Dep/Arrivée)Var (D1.txt (444 :446)) :**

149.	<i>P : [...] Donc, on commence à avoir une idée : il y a des choses d'où je pars et quelque chose à quoi j'arrive. Alors, ces choses-ci ont des noms en mathématiques, ils doivent l'avoir forcément...</i>	<i>P : [...] Quindi si comincia ad avere un'idea: ci sono delle cose da cui parto e qualcosa a cui arrivo. Allora queste hanno dei nomi in Matematica, ce li devono avere per forza...</i>
------	---	--

Puis elle continue (D1.txt (446 :447)) :

**Déf(Mouvement)Var :**

149.	<i>P : [...] Alors, tout ce qui bouge en mathématiques, est appelé variable...</i>	<i>P : [...] Allora, tutto ciò che si muove in Matematica viene chiamato variabile...</i>
------	--	---

Ensuite l'enseignant greffe ces deux définitions sur l'activité et à partir de cela, introduit le signe de variable indépendante. Elle fait cela toujours en proposant deux définitions différentes.

Il est intéressant d'observer que le moment de l'objectivation de ces définitions, comme ce le sera le cas dans l'introduction explicite de la définition de variable indépendante, représente l'instant où la différence entre les deux pôles est maximisée mais aussi les deux pôles reliés.

## 4.2. Variable indépendante

Signes simples	<p>Signes-artefact : « A », « à partir de » « au hasard » ; « B » ; « bouger(Var) » « bouger (VarIndép) » ; « données initiales » ; « expressions de co-variation », « H » ; « macro Effet1 » ; « où je veux/où l'on veut » ; « P » ; « points initiaux ».</p> <p>Signes-pivot : « bouger en fonction de » ; « être en fonction de » ; « indépendante » ; « objet » ; « varier (VarIndép) ».</p> <p>Signes-mathématiques : « variable indépendante » ; « variable ».</p>
Signes complexes	<p>Caract (DonnéesInitialesConst) VarIndép ;            Caract (Mouvement) VarIndép ;            Caract (PointsInitiaux) DonnéesIn ;            Caract (PointsInitiaux) VarIndép ;            Déf (ChoseIndép) VarIndép ; Déf (Dep/Arrivée) Var ;            Déf (DonnéesIn) Hypothèse ;            Déf (DonnéesInitialesConst) VarIndép ;            Déf (Mouvement) Var ; Déf (Mouvement) VarIndép ;            Déf (PointsDeDépart/Initiaux) VarIndép ;            Instanc (A,B,P) VarIndép ; Instanc(H) VarIndép ;            Instanc (P) VarIndép ; Instanc (P,C,H) VarIndép ;            InterprVarIndép-Hypothèse.</p>
Instruments de médiation sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement direct</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au : Déplacement de A; Déplacement de B; Déplacement de P;</li> <li>○ <b>Déplacement</b> combiné avec <b>Trace (1 et 3)</b> identifiés par l'évocation ou le recours direct à : Trajectoire de P; Trajectoire de B; Trajectoire de H;</li> <li>○ <b>Macro1</b> et <b>Macro2</b>.</li> </ul>

**Tableau synthétique des signes associés à la variable indépendante**

Pour le signifié de variable indépendante, nous parlons aussi de **développement bi-axial** (cf. Figure 8.2). Il s'agit des deux mêmes axes de signifiés identifiés auparavant dans le cas du signifié de variable. Nous pouvons observer comment ces deux axes se précisent et se diversifient autour des mêmes IMS.

1. En se fondant justement, sur l'IMS **Déplacement**, le premier axe, visible sur le coté droit de la figure, se développe à partir du « mouvement arbitraire » des points libres de bouger dans Cabri.

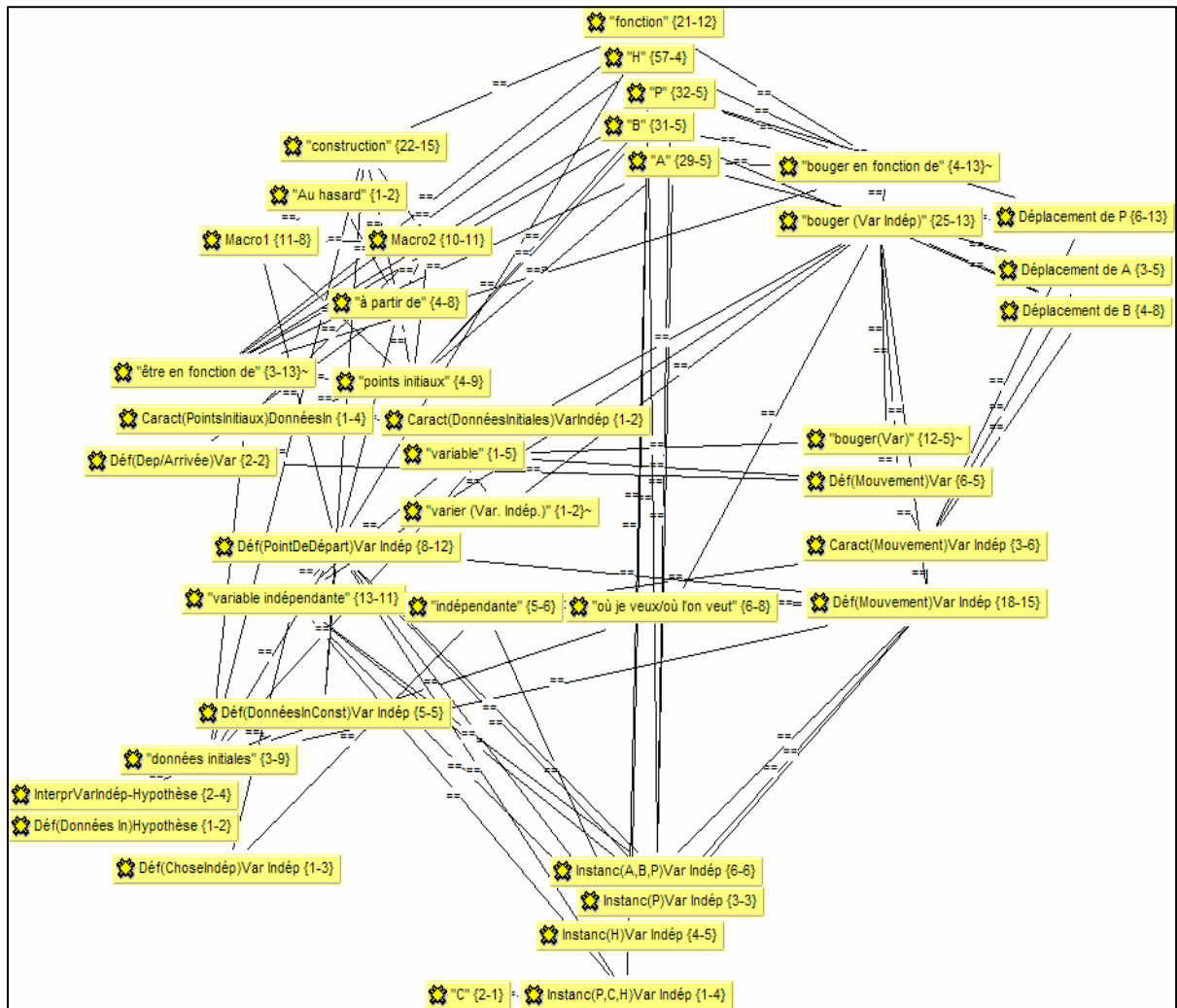


Figure 8.2 - Réseau sémiotique des signes associés à la variable : développement bi-axial.

2. En revanche, en se greffant sur le fonctionnement des IMS **Macro1** **Macro2**, le deuxième axe évolue vers l'idée de variables indépendantes comme objets initiaux appartenant à un processus à deux états (entrée/sortie) de plus en plus général (ce que nous avons appelé « Machine à Input/Output »).

Comme nous pouvons le lire sur le côté gauche du réseau sémiotique, les objets initiaux sont d'abord identifiés avec les points initiaux auxquels s'applique l'outil macro, puis se révèlent être les données géométriques initiales d'une construction géométrique, jusqu'à être interprétés, en termes de données initiales d'une opération de somme et d'hypothèses relatives à un théorème donné. Cette dernière mise en relation, que nous avons qualifiée d'interprétation en termes fonctionnels de la structure déductive d'un théorème, n'est pas due à l'enseignant, mais à un élève, Filippo. Elle ne s'explique pas seulement par l'histoire de cette classe, qui est assez particulière, puisque depuis deux ans, dans la même perspective de la TMS, la classe suit un projet d'approche à la structure axiomatique de la géométrie, fondée sur les potentialités évolutives de l'environnement Cabri<sup>93</sup> (Mariotti, 2000, 2001).

<sup>93</sup> Lors de ce projet, très vaste, les élèves démarrent avec un menu réduit qui correspond aux axiomes de base de la géométrie euclidienne (point, droite, etc.) et construisent au fur et à mesure des éléments nouveaux de cette géométrie, des théorèmes, qui sont ensuite enregistrés comme

Nous relient aussi ces mises en relation à l'enjeu interprétatif constitutif du processus de sémiotique et à la co-habitation articulée des deux IMS **Macro1** et **Macro2**. En fait, le fait de concevoir l'outil Macro, d'une part comme boîte noire machine à input output (et, par conséquent, les variables indépendantes comme objets de départ), d'autre part, comme construction géométrique (et les variables indépendantes seraient alors vues comme données initiales) pourrait avoir conduit Filippo à faire abstraction de la nature des points A, B, P et H pour arriver, en premier lieu à associer de manière implicite les fonctions aux opérations algébriques, en deuxième lieu, à retenir de manière explicite les deux états d'une relation d'implication donnée et à les relier à la structure déductive des théorèmes.

Nous interprétons ces épisodes (finalement très inattendus et probablement non répétables), comme une évidence du fait que cet élève a effectivement pris en charge le travail d'interprétation.

Comme on peut l'observer à partir du réseau sémiotique, le travail de sémiotique démarre dès la première partie de la discussion collective, par une reconstruction coopérative et sélective de l'activité. Elle est orchestrée par l'enseignant selon deux axes quasiment parallèles.

Elle commence, dès le début, par la focalisation, d'une part, sur le fonctionnement de l'outil macro et sur les statuts différents des points impliqués (points dessinés au hasard par l'utilisateur / point créé par la macro « Effet1 »), d'autre part, sur le comportement opposé de ces mêmes points (points qui bougent / points qui ne bougent pas ; points qui peuvent être déplacés directement / points qui ne peuvent pas être déplacés directement).

D'abord l'enseignant se sert de ces observations et caractérisations pour introduire, en même temps, les deux définitions co-existantes de variable, (ref intervention 149 du paragraphe précédent), qui correspondent aux deux pôles de ce développement bi-axial. Ensuite elle greffe au-dessus de ces définitions, les deux autres définitions co-existantes de variables indépendantes (D1.txt (470 :472)) :

**Déf(PointDeDépart)Var Indép :**

159.	<i>P : Voilà alors, le discours c'est que, en général, dans une fonction, les points de départ sont appelés variables indépendantes...</i>	<i>P: Ecco, allora il discorso è che in generale in una funzione, i punti da cui parto, vengono chiamati variabili indipendenti...</i>
------	--	--

Puis elle continue (D1.txt (472 :473)) :

**Déf(Mouvement)Var Indép :**

159.	<i>P :... car je peux les bouger où je veux. [...]</i>	<i>P : ... perché io li posso muovere dove mi pare. [...]</i>
------	--	---

Comme pour le signe de variable, le moment de formulation explicite de ces deux définitions représente l'instant où ces deux pôles sont à la fois, rendus apparents, « objectivés » différemment et interconnectés.

Ces deux mêmes pôles sont reliés par l'enseignant, successivement, de façon plus ou moins explicite, lors de la toute la reconstruction de l'activité dans Cabri. En particulier, le travail de reconnaissance et d'assignation du statut de variables indépendantes, d'abord, aux points A, B et P, puis au point H, est lisible dans l'épisode assez intéressant de la « composition de fonctions » (Chapitre 6, §

---

macro-constructions, et qui peuvent fonctionner, à leur tour, comme des outils pour développer d'autres théorèmes encore dans cette même théorie.

2.1.1.2.2 et Chapitre 7, § 2.2.1). Dans l'extrait présenté ci-dessous et tiré de cet épisode, nous pouvons remarquer le fonctionnement conjoint, *en acte*, de ces deux familles de signifiés.

Au début, Cristina pose le problème d'interpréter le statut du point H quand on applique deux fois la macro Effet1 (D1.txt (751 :764)).

260.	<i>CRISTINA : Je voulais demander une chose. Mais si, maintenant, j'ai le point H, si j'appuie [si j'applique] « Effet1 » à H, B et un autre point, il me fait un autre point... C'est-à-dire?</i>	<i>CRISTINA : lo volevo chiedere una cosa. Ma io ora ho un punto H ...se pigio « Effetto1 » ad H, B ed un altro punto, mi fa un altro punto... Cioè ?</i>
261.	<i>P : Tu as fait devenir H, quoi ?</i>	<i>P : Hai fatto diventare H cosa ?</i>
262.	<i>CRISTINA : Un paramètre indépendant.</i>	<i>CRISTINA : Un parametro indipendente.</i>
263.	<i>P : Une variable indépendante!</i>	<i>P : Una variabile indipendente !</i>
264.	<i>CRISTINA : Mais si je bouge ces... Si je bouge H et ces autres [points ?]?</i>	<i>CRISTINA : Ma se io muovo quelli... se muovo H e quegli altri ?</i>

En suivant les indications de Cristina, l'enseignant demande à Igor, qui croit avoir rencontré lui aussi le même phénomène évoqué par Cristina, de reconstruire au rétroprojecteur, la situation présentée par Cristina. Igor applique alors une première fois la macro « Effet1 » aux points A, B, et P. Ensuite, Cristina demande à Igor, de construire un nouveau point libre (interventions 278-280), d'appeler ce point C et d'appliquer une deuxième fois la macro « Effet1 » aux points H, P et C (D1.txt (793 :816)) :

Lors de cette deuxième application de la macro « Effet1 », Igor a pris comme objet initial de l'application, le point H, qui était jusqu'à ce moment-là seulement le signe de la variable dépendante. Ce point H devient alors, maintenant, aussi le signe d'une variable indépendante. Cependant, il ne peut plus être déplacé directement, comme pour tous les points, variables indépendantes, rencontrés auparavant. Ainsi, pour identifier le statut du point H, la classe ne peut plus se référer à la première définition de variable indépendante (*Déf(Mouvement)VarIndép*) introduite. C'est alors à la deuxième définition (*Déf(PointsDeDepart)Var Indép*) qu'il faut faire appel, c'est-à-dire au fait que H est devenu l'entrée nouvelle, le nouvel objet de départ. A partir de cette deuxième définition, l'enseignant, résume ainsi la situation, en institutionnalisant aussi l'expression « composition de fonctions » (D1.txt (834 :844)) :

297.	<i>P : H' est obtenu de la première. Donc, pratiquement j'ai : les variables indépendantes initiales, qui ont donné une variable dépendante, qu'après j'ai réutilisée comme indépendante pour en trouver une dernière [variable] dépendante. Alors cette fonction ci s'appelle, et nous le verrons une composition de deux fonctions, car j'ai appliqué la même construction... non en effet une composition de deux fonctions mais de la même ... c'est-à-dire je l'ai appliquée une fois et puis je l'ai appliquée une autre fois, en prenant comme point de départ le point final. [...]</i>	<i>P : H' è ottenuto dalla prima. Quindi praticamente c'ho : le variabili indipendenti iniziali, che hanno dato una variabile dipendente, che poi io ho riusato come indipendente, per trovarne un'ultima dipendente. Ecco questa si chiama, e lo vedremo, una composizione di due funzioni, perché io ho applicato la stessa costruzione... non in effetti una composizione di due funzioni, ma della stessa... cioè l'ho applicata una volta e poi l'ho applicata un'altra volta, prendendo come punto di partenza quello finale. [...]</i>
------	---	---



### 4.3. Variable dépendante

Signes simples	<p>Signes-artefact :  « à partir de » ; « bouger(VarDép) » ; « construire (quelque chose) » ; « données finales » ; « expressions de <math>\omega</math>-variation » ; « format Enoncé sur la VarIndép ou sur le Domaine / Question sur la VarDép ou sur Image » ; « H » ; « H' » « macro Effet1 » ; obtenir (Var Dép) » ; « point finale ».</p> <p>Signes-pivot : « bouger en fonction de » ; « être en fonction de » ; « dépendre/dépendant de » ; « résultat de ».</p> <p>Signes-mathématiques : « variable dépendante » ; « variable ».</p>
Signes complexes	<p>Caract (CeQu'OnObtient/Résultat) PointDép ;  Caract (Mouvement) Var Dép ;  Caract (PointAPartirDesTroisPoints) VarDép ;  Caract (PointIntersectConstrsGéos) VarDép ;  Déf (CeQu'OnObtient) Thèse ;  Déf (CeQu'OnObtient/Résultat) VarDép ;  Déf (DonnéesFin) VarDép ; Déf (Mouvement) VarDép ;  Déf (Obj à construire) Thèse ; Déf (Point Final) VarDép ;  Instanc (H') VarDép ; Instanc (H (A,B,P)) Relation ;  Instanc (H) VarDép ;  InterprThèse-VarDép.</p>
Instruments de Médiations sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement indirect</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au déplacement indirect de H ;</li> <li>○ <b>Déplacement</b> combiné avec <b>Trace (2 et 3)</b> identifiés par l'évocation ou le recours direct à : Trajectoire de P; Trajectoire de B; Trajectoire de H;</li> <li>○ <b>Macro1 et Macro2.</b></li> </ul>

Tableau synthétique des signes associés à la variable dépendante

L'analyse du réseau sémiotique relatif au signe de variable dépendante nous montre que, comme dans le cas de la variable indépendante, elle est caractérisée par un **développement bi-axial** (cf. Figure 8.3).

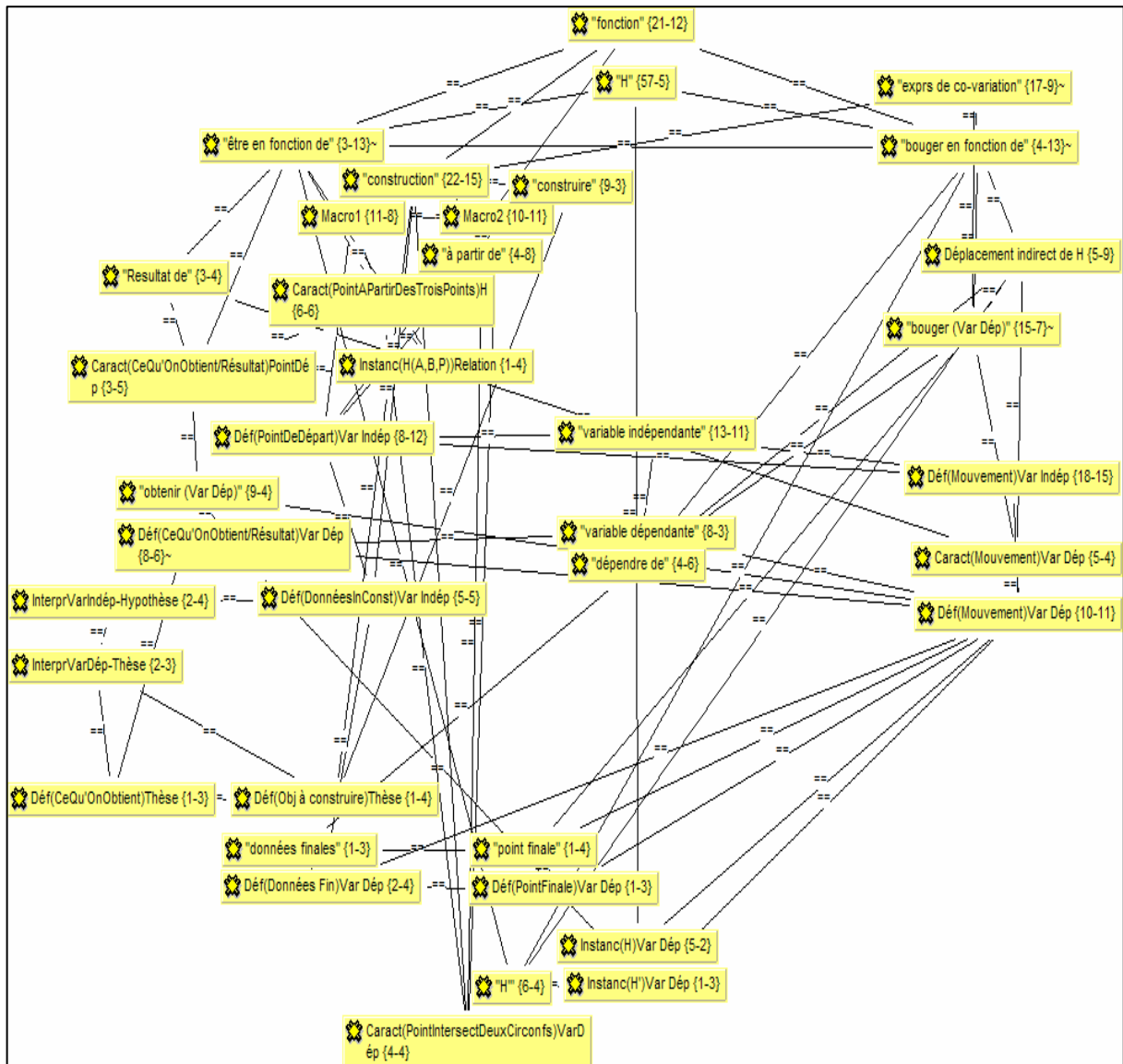


Figure 8.3 - Réseau sémiotique des signes associés à la variable dépendante : développement bi-axial.

- Le premier axe, représenté à droite, se développe autour de l'idée du déplacement indirect du point variable dépendante dans Cabri. Il se fonde, donc, sur l'IMS **Déplacement (indirect)** et se construit par opposition au déplacement libre des points, variables indépendantes. Nous avons relié cette première famille de signifiés au signifié de fonction comme « relation de co-variation ».
- Le deuxième axe, représenté à gauche, progresse à partir de l'idée de variable dépendante en tant que point final, résultat d'un procédé. C'est toute une famille de signifiés qui se développe grâce aux IMS **Macro1** et **Macro2**. Cet axe démarre de l'idée du point H, obtenu par l'application de la Macro « Effet1 » à partir des trois points initiaux, se développe autour de l'idée de résultat d'une construction géométrique dans Cabri, pour évoluer jusqu'à mettre en relation le signe de « variable dépendante » et le signe de « thèse d'un théorème ». Nous avons associé à ce deuxième axe le signifié de fonction nommé « Machine à Input/Output ».

Déjà dès le tout début, dans la phase de reconstruction sélective et coopérative de l'activité, l'enseignant focalise sur le point H, signe de la variable dépendante, de deux façons différentes. D'une part, elle en met en évidence le fait qu'il a été construit par la macro « Effet1 » à partir des trois points A, B, P. D'autre part, elle demande de ré-évoquer le comportement dynamique des points et leurs relations mutuelles.

Comme dans le cas de la variable indépendante, ces deux familles de signifiés sont ainsi développées quasi parallèlement et puis objectivées par deux définitions bien distinctes. Ces définitions sont introduites en les greffant sur les deux définitions, elles aussi différentes, de variables indépendantes. La greffe est obtenue en pivotant sur la polysémie du verbe « dépendre » (signe-pivot), tant dans l'acception courante que dans les mathématiques. La dépendance fonctionnelle est ainsi fondée sur la dépendance causale bien plus familière (D1.txt (470 :477)) :

**Déf(CeQu'OnObtient)VarDép :**

159.	<i>P : Voici, alors ce qu'on dit, en général, dans une fonction, les points d'où je pars, sont appelés variables indépendantes, car je peux les bouger où je veux, tandis que ce que j'obtiens est appelé variable dépendante car elle dépend de quoi ?</i>	<i>P : Ecco, allora il discorso è che in generale in una funzione, i punti da cui parto, vengono chiamati variabili indipendenti, perché io li posso muovere dove mi pare mentre quello che ottengo viene chiamata variabile dipendente perché dipende da chi ?</i>
160.	<i>IGOR : Des variables indépendantes.</i>	<i>IGOR : Dalle variabili indipendenti.</i>
161.	<i>P : Des variables indépendantes ! [...]</i>	<i>P : Dalle variabili indipendenti !</i>

Puis l'enseignant continue et focalise, à nouveau, sur le comportement dynamique et dissymétrique des points A, B et P par rapport au point H (interventions 161-167).

161.	<i>P : [...] Et, donc, H tout seul, pus-je le bouger ?</i>	<i>P : ... E quindi H, per conto suo lo posso muovere ?</i>
162.	<i>Voix diverses (IGOR, FILIPPO, MARCO) : Non.</i>	<i>Varie voci (IGOR, FILIPPO, MARCO) : No.</i>
163.	<i>P : Alors, dans Cabri, nous avons trouvé la Macro comme fonction... comme variables indépendantes... que pourrais je dire ce qu'elles sont ?</i>	<i>P : Allora in Cabri abbiamo trovato la Macro come funzione... come variabili indipendenti quali potrei dire che sono ?</i>
164.	<i>CRISTINA : A, B, P... les points de départ.</i>	<i>CRISTINA : A, B, P... i punti di partenza.</i>
165.	<i>P : les points de départ; et qu'est-ce que je peux leur faire dans Cabri ?</i>	<i>P : I punti di partenza ; e che cosa gli posso fare in Cabri ?</i>
166.	<i>FILIPPO : Les bouger par rapport...</i>	<i>FILIPPO : Muoverli rispetto...</i>
167.	<i>P : Je peux les bouger partout, aujourd'hui vous étiez libres de les bouger partout. Et, en revanche, ce que j'obtiens, donc la variable dépendante, qu'est-ce que c'est ?</i>	<i>P : Li posso muovere da tutte le parti, oggi eravate liberi di muoverli da tutte le parti. E invece quello che ottengo, quindi la variabile dipendente, che cos'è ?</i>

Sur l'opposition variables indépendantes/ variable dépendante (165-167) (« Les points de départ... Je peux les bouger partout et... en revanche... la variable dépendante... ? ») et sur la première définition de variable dépendante (167) (« ce que j'obtiens, donc la variable dépendante »), par une action de paraphrase à l'intervention d'Igor (169), l'enseignante fonde la deuxième définition de variable dépendante (170) (D1.txt (477 :500)) :

**Déf(Mouvement)VarDép:**

168.	<i>FILIPPO : C'est un point fixe qu'on ne peut pas déplacer.</i>	<i>FILIPPO : È un punto fisso che non è possibile spostare.</i>
169.	<i>IGOR : C'est-à-dire qui bouge... si on bouge les autres points</i>	<i>IGOR : Cioè che si muove... muovendo gli altri punti.</i>
170.	<i>P : Il bouge en fonction des autres [points], c'est-à-dire que tout seul je ne peux pas le déplacer, je peux le déplacer seulement si je déplace les points dont il dépend.</i>	<i>P : Si muove in funzione degli altri, cioè per conto proprio io non lo posso spostare, lo posso spostare solo se sposto i punti da cui dipende</i>

Comme on peut le remarquer, le moment de l'objectivation mutuelle des deux pôles (interventions (167) : « ... ce que j'obtiens, donc la variable dépendante... » et (170) : « ...[point qui] bouge... si on bouge les autres points... ») des deux familles de signifiés, coïncide aussi avec l'un des moments de leur mise en relation.

Notons, que le fait d'avoir comme signes des points reliés par une fonction géométrique dans un environnement dynamique, permet de récupérer dans le signifié « unique » de variable dépendante, celui de point qui bouge seulement en déplaçant les points dont il dépend et celui de donnée finale issue d'une construction géométrique. La synergie des IMS différents est alors évidente : d'une part l'outil le **Déplacement indirect**, d'autre part la Macro dans sa double valence de « Machine à Input/Output » (**Macro1**) et de « construction géométrique sous-jacente » (**Macro2**).

Tout comme pour le cas de la variable indépendante, les instanciations (cf. Chapitre 5, § 10.2.4) constituent un moment de croisement et de mise en relation des deux axes de signifiés.

Nous pouvons trouver un exemple d'instanciation implicite, lors de l'épisode, déjà évoqué, de la composition de fonctions (D1.txt (751 :764)). Dans l'extrait qui suit nous pouvons observer, l'instanciation de H', comme variable dépendante, c'est-à-dire la mise en relation, du point H', obtenu par l'application, une deuxième fois, de la macro « Effet1 » à B, P et H, avec les variables dépendantes. Cette mise en relation est faite en mobilisant, *en acte*, les deux définitions de **Déf(Mouvement)VarDép** (289 – 294) et de **Déf(CeQu'OnObtient)VarDép** (295 – 296). Le moment d'institutionnalisation de l'enseignant, (voir intervention 297, cité lors du paragraphe précédent) rend explicite cette mise en relation.

289.	MAURO : H' bouge de la même façon [que H] !	MAURO : H' si muove uguale !
290.	IGOR : Car c'est « Effet1 » qui lui donne cette relation-là.	IGOR : Perché è l'« Effetto1 » che gli dà quella relazione lì.
291.	MAURO : Peut-on bouger H' ?	MAURO : Si può muovere H' ?
292.	P : Eh, non, je ne pense pas !	P : Eh, no, non penso !
293.	CRISTINA : Comment a-il-dit ?	CRISTINA : Com'è che ha detto ?
294.	P : Si l'on peut bouger H'. Essaie ?	P : Se si può muovere H'. Prova ?
295.	GIACOMO : Eh, non ! Car H' maintenant est obtenu...	GIACOMO : Eh, no ! Perché H' adesso è ottenuto...
296.	CRISTINA : Non, car H' maintenant est obtenu de la première [application de la Macro « Effet1 »/relation/fonction].	CRISTINA : No, perché H' è ottenuto dalla prima.

L'épisode cité, met aussi en évidence la fragilité du signe artefact H qui ne renvoie plus de façon univoque au seul signifié de variable dépendante. Dans cette situation nouvelle, étrange, les élèves, comme l'on peut le voir dans le cas de Mauro présenté ci-dessous, éprouvent alors l'exigence de tester, à nouveau, la robustesse des définitions déjà introduites. Le fait d'avoir rejoué librement ces définitions peut nous faire supposer que les définitions et les caractérisations données auparavant par l'enseignant, ont été effectivement internalisées.

#### 4.4. Domaine et image

Puisque les signes de domaine et image ont été introduits et développés, lors de la discussion collective, de manière très entrelacée, nous avons décidé de présenter conjointement l'analyse des réseaux sémiotiques associés.

Voici, d'abord les signes et les IMS associés au signe de domaine que nous avons identifiés :

Signes simples	Signes-artefact : « au hasard » ; « bouger(Domaine) » ; « macro Effet » ; « où je veux/où l'on veut » ; « partout »
	Signes-mathématiques : « domaine »
Signes complexes	Caract (Mouvement) Domaine ; Déf (Mouvement) Domaine ; Instanc ("Partout") Domaine ; Instanc (Plan) Domaine.
Instruments de médiation sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement direct</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au déplacement de B et de P.</li> </ul>

Tableau synthétique des signes associés au domaine

En revanche, les signes et les IMS associés au signe d'image que nous avons identifiés sont :

Signes simples	Signes-artefact : « bouger/se déplacer(Image) » ; « être(Image) » ; « faire faire/obtenir/avoir(Image) » ; « format Enoncé sur VarIndép-ou sur Domaine / Question sur VarDép ou sur Image » ; « reproduire/former/tracer/dessiner » ; « rester sur(Image) ».
	Signes-mathématiques : « image »
Signes complexes	Caract (ObjetGéo) Trajectoire ; Caract (Parcours/ObjetGéo) Trajectoire ; Caract (Parcoursd'unPoint) Trajectoire ; Caract (PointAPartirDesTroisPoints) VarDép ; Caract (PointIntersectConstrsGéos) VarDép ; Déf (Mouvement) Image ; Instanc (Droite(AB)) Image ; Instanc (PartieDroite(A,B)) Image ; Instanc (Plan) Image.
Instruments de médiation sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement indirect</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au déplacement de H.</li> <li>○ <b>Déplacement</b> combiné avec <b>Trace (2 et 3)</b> identifiés par l'évocation ou le recours direct à la trajectoire de H.</li> </ul>

Tableau synthétique des signes associés à l'image

Contrairement aux signes de variable (indépendante et dépendante), pour le domaine, notre analyse a mis en évidence un seul axe principal de développement. Il s'agit donc d'un signifié où nous pourrions dire que le **développement** a été **mono-axial** : en effet seule la famille de signifiés associée au mouvement est présente. Le deuxième axe de développement, celui relié au signifié de fonction comme

« machine à input/output », que nous avons pu repérer pour les autres signes, est, en revanche, quasiment absent. On retrouve ce signifié de manière indirecte, seulement au début, lorsque l'enseignant greffe la définition de domaine sur l'opposition entre données initiales et données finales d'une construction.

En outre, par l'étude du réseau sémiotique du domaine, nous avons aussi pu remarquer que le seul IMS mobilisé a été le **Déplacement direct**. En particulier, l'analyse de la discussion collective n'a pas permis de dire si l'outil **Trace** a été effectivement utilisé, car le comportement erratique des points variables indépendantes peut être constaté par le seul déplacement arbitraire, sans le recours explicite à cet autre outil.

Voici alors les réseaux sémiotiques relatifs au domaine (cf. Figure 8.4) :

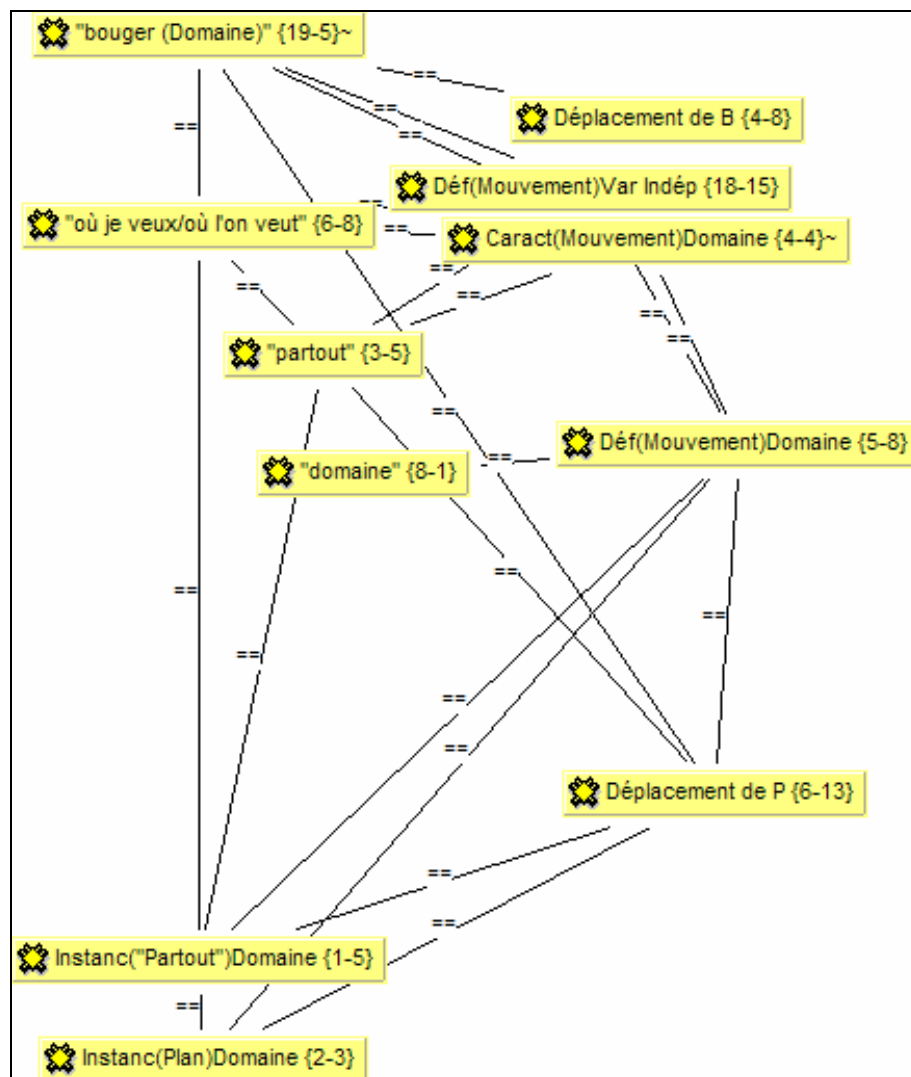
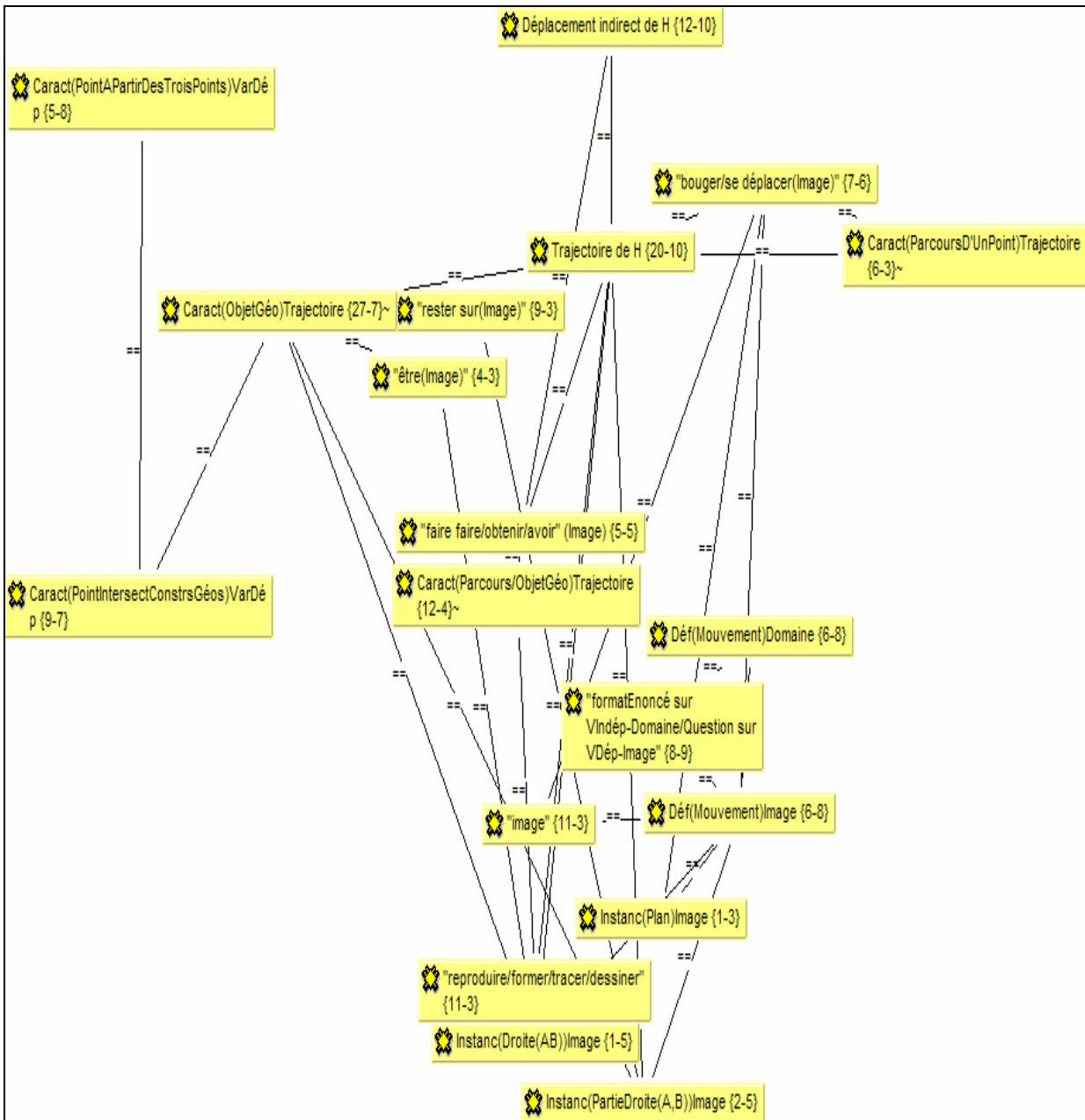


Figure 8.4 - Réseau sémiotique des signes associés au domaine : développement quasiment mono-axial.

La situation pour l'image est plus complexe (cf. Figure 8.5).

D'abord, soulignons que les IMS mobilisés sont le **Déplacement indirect** combiné avec **Trace**. Dans le cas de l'image, nous avons pu identifier, lors de la discussion collective, des références explicites (faites par l'enseignant et par les élèves), aux trajectoires suivies par H. Ces références témoignent justement de l'usage combiné de **Déplacement indirect** et **Trace**.

Voici le réseau sémiotique de l'image :



**Figure 8.5 - Réseau sémiotique des signes associés à l'image : développement quasiment bi-axial.**

En ce qui concerne le domaine, toutes les caractérisations implicites, qui précèdent l'introduction de la définition, ainsi que la définition en elle-même, ne portent jamais, de manière directe, sur le signifié de fonction comme « Machine à Input/Output ». Pourtant, compte tenu de la notion d'ensemble déjà présente dès l'école primaire en Italie, à la différence de la France, l'enseignante avait, éventuellement, la possibilité de développer aussi ce deuxième axe des signifiés. Elle pouvait, par exemple, définir le domaine comme « l'ensemble où tous les objets de départ où tous les données initiales sont choisies ». Au contraire, l'enseignante a choisi de ne pas le faire. Probablement ce choix est dû au fait qu'elle est consciente des difficultés et des obstacles sous-jacents à une définition « proto » ensembliste éventuelle.

En tout cas, puisque l'enseignant greffe les signes de domaine (176), comme celui d'image, sur l'opposition entre données initiales et données finales (« *Ceux en revanche comme les variables dépendant des données initiales... données initiales*

et données finales...»), nous pouvons, néanmoins, faire l'hypothèse, qu'indirectement, ces derniers signes puissent avoir hérité des caractérisations dérivant du deuxième axe de développement des signes précédents, celui lié au signifié de « Machine à Input/Output ».

### Déf(Mouvement)Domaine et Déf(Mouvement)Image :

176.	<i>P : Ceux en revanche comme les variables dépendant des données initiales... données initiales et données finales... les données initiales bougent, librement, je peux les déplacer où je veux ou, au moins cette fois-ci je pouvais les déplacer où je voulais, le point final les suit et tout seul ne bouge pas. Alors maintenant nous avons deux petits mots à introduire, qui sont, je ne sais pas si vous les avez déjà entendus [...]. Un mot est le « domaine » et l'autre mot est l'« image ». Avez-vous déjà parlé de ça en physique, quand vous avez fait la droite ?</i>	<i>P : ... Quelli invece come variabili dipendenti dai dati iniziali... dati iniziali e dati finali ... dati iniziali si muovono, liberamente, posso portarli dove mi pare o almeno questa volta potevo portarli dove mi pareva, il punto finale gli va dietro e di per sé non si muove. Ok. Allora, adesso abbiamo altre due paroline da introdurre, che sono, non so se ne avete mai sentito parlare, [...]. Una è il dominio e una è l'immagine. Ne e avete parlato a Fisica, quando avete fatto la retta ?</i>	
177.	<i>Plusieurs voix: non.</i>	<i>Varie voci : No.</i>	
178.	<i>P : Alors, le domaine est où on peut bouger les variables indépendantes et l'image est... où sera-t-elle l'image d'une fonction ? Où l'on peut bouger... ?</i>	<i>P : Allora, il dominio è dove si possono muovere le variabili indipendenti e l'immagine è ? Dove sarà l'immagine di una funzione ? Dove si può muovere... ?</i>	<b>Déf(Mouvement)Domaine</b>
179.	<i>IGOR : ... Les variables dépendantes</i>	<i>IGOR : ... Le variabili dipendenti.</i>	<b>Déf(Mouvement)Image</b>
180.	<i>P : La ou les variables dépendantes.</i>	<i>P : La o le variabili dipendenti.</i>	

Dans le cas du domaine, l'absence du deuxième axe de signifiés dans le cas du domaine, pourrait être, en quelque mesure, à l'origine de l'incompréhension manifestée, juste après, par un élève (D1.txt (541 :553)) :

181.	<i>IGOR : Je n'ai pas compris... l'image est celle-ci?!</i>	<i>IGOR : Non ho capito... l'immagine è quella lì ?!</i>
182.	<i>P : L'image est où bouge la variable dépendante... le domaine est où bougent les variables indépendantes. Donc, Mattia se posait un problème...</i>	<i>P : L'immagine è dove si muove la variabile dipendente... il dominio è dove si muovono quelle indipendenti. Quindi Mattia si poneva un problema...</i>
183.	<i>IGOR : C'est-à-dire ? Mais « où » il faut l'entendre comment... le « où » ?</i>	<i>IGOR : Cioè ? Ma "dove" inteso come... "dove" ?</i>
184.	<i>P : Où ? Dans le plan... Maintenant nous sommes dans le plan, nous devrions avoir compris que les fonctions géométriques... C'est-à-dire nous sommes en train de faire des constructions du plan dans le plan, c'est-à-dire nous faisons bouger des points dans le plan et nous avons comme résultat de la construction d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan.</i>	<i>P : Dove ? Nel piano... Ora noi siamo nel piano, dovremmo avere capito che le funzioni geometriche... Cioè stiamo facendo costruzioni del piano nel piano, cioè facciamo muovere dei punti nel piano e abbiamo come risultato della costruzione altri punti che, a loro volta, si muovono nel piano</i>



Cette absence expliquerait, alors, au moins partiellement, pourquoi, en donnant la définition de fonction géométrique (« *les fonctions géométriques... C'est-à-dire nous sommes en train de faire des **constructions du plan dans plan**, c'est-à-dire nous faisons bouger des points dans le plan et nous avons comme résultat de la construction d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan* »), l'enseignant éprouve l'exigence d'utiliser l'expression « *du plan dans le plan* », en renvoyant ainsi, implicitement, à la notion ensembliste de fonction et au signifié de « Machine à Input/output ».

Une autre raison serait le problème de bien saisir quels sont les signes artefact, dans Cabri, censés fonctionner comme domaine et image. En fait, l'image est définie comme « où les variable dépendantes bougent » et le domaine est introduit comme « où les variable indépendantes bougent » et cela a été fait après avoir caractérisé ces mêmes variables indépendantes comme « les données initiales que je bouge où je veux ». « Bouger l'où je veux » est une expression qui a une double acception qui n'est pas seulement spatiale : dans le langage courant elle peut aussi indiquer une modalité d'action arbitraire. En outre, dans le cas du domaine, encore plus que dans le cas de l'image, la référence vague au « où » ne permet pas d'en parler en tant qu'objet. C'est un problème lié à l'hétérogénéité de l'espace : pour les élèves, il existe seulement ce qui est dessiné, et là, le domaine n'apparaît pas, alors que l'image, après avoir bougé le point H, est très bien tracée et peut être identifiée à des trajectoires bien précises.

Si nous observons les réseaux sémiotiques du domaine et de l'image nous pouvons constater d'autres différences.

Une première différence est identifiable lors de la demande de la part de l'enseignant d'instancier le domaine et l'image du point P. Le problème d'associer un signe-artefact bien déterminé au signe mathématique de domaine se pose à nouveau, alors que cela n'est plus le cas pour l'image : (D1.txt (678 :695)) :

235.	<i>P : Alors, dans ce petit jeu que j'ai fait... j'ai pris P et je l'ai bougé, H a bougé, je veux que vous me disiez quelle est la variable indépendante, quelle est la variable dépendante, quel est le domaine de P et quelle est l'image de H.</i>	<i>P : Allora, in questo giochino che ho fatto io... ho preso P e l'ho mosso, H si è mosso, voglio sapere da voi chi è la variabile indipendente chi è la, variabile dipendente, qual è il dominio di P e qual è l'immagine di H.</i>	<b>Instanc(P)VarIndép Instanc(H)VarDép</b>
236.	<i>CRISTINA : La variable indépendante est P et le domaine c'est partout</i>	<i>CRISTINA : La variabile indipendente è P e il dominio è da tutte le parti</i>	<b>Instanc(P)VarIndép Instanc(Partout)Do maine</b>
237.	<i>P : Le domaine est partout, donc tout le plan, commençons à l'appeler par son propre nom.</i>	<i>P : Il dominio è da tutte le parti, quindi tutto il piano, cominciamo a chiamarlo col suo nome.</i>	<b>Instanc(Partout)Do maine ;</b>
238.	<i>CRISTINA : La variable dépendante est H.</i>	<i>CRISTINA : La variabile dipendente è H.</i>	<b>Instanc(H)VarDép</b>
239.	<i>P : Et l'image ?</i>	<i>P : E l'immagine ?</i>	
240.	<i>CRISTINA : l'image est la droite (AB).</i>	<i>CRISTINA : E l'immagine è la retta (AB).</i>	<b>Instanc(Droite (AB))Image</b>
241.	<i>IGOR : ... Est sur la droite AB.</i>	<i>IGOR : ...È sulla retta AB.</i>	<b>Instanc(PartieDroit e(AB))Image</b>

Il est nécessaire de passer par le « partout » prononcé par Cristina et le fait que l'enseignant lui associe le plan pour obtenir finalement un signe-artefact bien défini.

Rappelons que cette différence, d'avoir comme domaine tout le plan et comme image une figure géométrique particulière, avait été choisie consciemment, lors du

moment de la conception de la séquence. En effet, dans la première activité (« Effet1 » ref), nous avons voulu bâtir la construction de ces deux objets mathématiques (celui de variable indépendante et dépendante) sur des signes de Cabri, ayant un comportement le plus dissymétrique possible. En revanche, la question n°3 de la deuxième activité (« Effet2 » ref), avait justement, comme objectif, entre autres, de mieux préciser cette différence et de confronter les élèves à une fonction dont le domaine n'était plus tout le plan, mais une figure géométrique particulière, notamment un triangle et un cercle.

Probablement, mais cela est à tester, en confrontant dès le début les élèves à une fonction géométrique ayant comme domaine un segment ou une droite, on aurait pu observer, une évolution de signifiés plus semblable à celle d'image.

#### 4.4.1. Image et trajectoire

La différence principale entre l'évolution du réseau sémiotique du domaine par rapport à celui de l'image est que, dans ce dernier, on commence à développer le signifié de trajectoire.

En fait, bien que le signifié d'image soit développé en étant fondé de manière principale sur la famille liée au mouvement, on remarque des façons différentes d'en parler, et donc des aspects différents mis en évidence. En fait, le discours sur le **déplacement direct** des points variables indépendantes utilise un seul type de verbe, c'est-à-dire un seul type de « signe-artefact », le verbe « bouger » (et « déplacer », que nous avons considéré comme appartenant à la même famille). Au contraire, le discours sur le **déplacement indirect** combiné avec **Trace** du point variable dépendante, c'est-à-dire sur les trajectoires différentes suivies par H, se construit au travers de différentes familles de verbes (et donc de signes-artefact). Par conséquent, les signes complexes associés, les caractérisations qui en émergent, sont à leur tours multiples.

Nous retrouvons ainsi l'emploi de verbes comme « bouger », ou « se déplacer », qui met l'accent sur la trajectoire en tant que parcours d'un point qui bouge pendant le temps (**Caract(ParcoursD'UnPoint)Trajectoire**) (D1.txt (131 :135)) :

41.	<i>P : Ok...alors par exemple, en bougeant P, je vois que seul H bouge et, pas seulement ça, essayons de condenser un petit peu [essayons de résumer un peu tout ça]... je vois aussi qu'il bouge... ?</i>	<i>P : Ok... allora, per esempio, muovendo P, io vedo che si muove solo H e non solo, vediamo di condensarlo un attimo... vedo anche che si muove... ?</i>
42.	<i>IGOR : ... Sur une droite.</i>	<i>IGOR : ... Su una retta.</i>

Dans ce type de caractérisation, l'attention porte plus sur le déplacement en soi que sur l'objet géométrique final atteint par un tel mouvement. En outre, dans ce type de caractérisation, il semble qu'un tel objet final soit en réalité déjà là, qu'il ne soit pas justement produit par un tel mouvement.

En revanche, cela n'est plus le cas, quand on parle de la trajectoire de la variable dépendante, en utilisant des verbes comme « obtenir », « faire faire », « avoir » ou encore comme « tracer », « dessiner », « reproduire », « former ». Dans ce cas, nous constatons la production de signes complexes qui mettent l'accent sur la double acception de trajectoire en tant que séquence des positions d'un point qui bouge et objet géométrique final atteint par un tel mouvement. Toutes ces caractérisations ont été considérées comme appartenant à une même famille de signes, que nous avons codée par **Caract(Parcours/ObjetGéométrique)Trajectoire**. Cette famille de signes complexes met en évidence, en particulier, la relation de dépendance de l'image du

domaine choisi (c'est-à-dire le fait que, étant donné la même fonction, ayant des domaines différents on obtient des images différentes). A l'intérieur de cette famille, nous avons identifié deux sous-familles : celle portant sur les verbes du type « obtenir », « faire faire », « avoir » etc. considérée sémantiquement comme plus voisine du signifié de fonction comme « Machine à I/O » ; celle relative aux verbes du type « tracer », « dessiner », etc., retenue comme plus proche du signifié « co-variationnel » de fonction (D1.txt (185 : 186)) :

61.	<i>MATTIA: Nous nous sommes demandé comment déplacer les points pour faire faire tout le cercle.</i>	<i>MATTIA: Noi ci siamo chiesti come muovere i punti per far fare tutta la circonferenza.</i>
-----	--	---

Finalement, nous constatons aussi la production de caractérisations impliquant l'usage de verbes comme « rester sur », ou « être » (D1.txt (852 :857)) :

300.	<i>P : ça c'est ce qui s'est aussi passé avec eux, même s'ils ne l'ont pas fait exprès, mais ils l'ont fait par erreur. Clairement, si je change l'ordre, H aussi va se retrouver quelque part ailleurs, peut-être il ne reste plus sur le cercle de diamètre [PB], il reste sur le cercle de diamètre [AB] et puis on aura la droite (PB), mais après conceptuellement au fond, ça ne change pas grande chose.</i>	<i>P : È quello che era successo a loro, anche se loro non l'avevano fatto di proposito, ma lo avevano fatto per sbaglio. Chiaramente, se io cambio l'ordine, anche H va a finire da un'altra parte, magari non sta più sulla circonferenza di diametro [PB], starà sulla circonferenza di diametro [AB] e poi sarà la retta (PB), ma poi concettualmente in fondo, non è che cambia molto.</i>
------	---	---

Dans ce cas-là, les trajectoires différentes sont perçues d'emblée, globalement ; la caractérisation qui en résulte relève alors de celle d'objets géométriques finals (**Carac(ObjetGéométrique)Trajectoire**). Tant pour le verbe « rester sur » que pour le verbe « être », même si particulièrement pour ce dernier, toute référence explicite au déplacement a été éliminée. En outre, on peut observer que le verbe « rester sur » véhicule plus particulièrement l'aspect « déterminé » de l'image.

C'est en raison de cette analyse des verbes utilisés qu'à la différence du réseau sémiotique du domaine, nous préférons parler pour l'image plutôt de développement **bi-axial**.

Ce réseau sémiotique nous montre ainsi que la classe passe de la trace d'un point qui bouge, à une courbe, pour arriver à un objet géométrique précis.

De même, nous pouvons observer le changement de signification de H : de point obtenu à partir de trois points donnés, à point construit par l'intersection de deux trajectoires, qui correspondent à deux objets géométriques précis et qui peuvent par cela être construites.

Du coup, d'une part, on voit ici se mettre en place et fonctionner le double aspect de la trajectoire dont nous avons fait l'hypothèse *a priori*.

D'autre part, on ne pouvait obtenir cette évolution de signification que si l'on utilisait les fonctions géométriques.

## 4.5. Paramètre

Voici les signes associés au paramètre :

Signes simples	Signes-artefact : « A » ; « B » ; « bouger(Paramètre) » ; « expressions de co-variation », ; « macro » ; « macro Effet1 ».
	Signes-pivot : « objet » ; « indépendante » ; « varier (VarIndép) ».
	Signes-mathématiques : « paramètres » ; « variable indépendante » ; « variable » ; « variables fixes ».
Signes complexes	<p>           Caract(DonnéesInitialesConst)VarIndép ;            Caract(Mouvement)Paramètre ;            Caract(Mouvement)VarIndép ;            Caract(PointsInitiaux)DonnéesIn ;            Caract(PointsInitiaux)VarIndép ;            Déf(ChoseIndép)VarIndép ; Déf(Dep/Arrivée)Var ;            Déf(DonnéesInitialesConstr)VarIndép ;            Déf(Mouvement)Var ; Déf(Mouvement)VarIndép ;            Déf(PointsDeDépart/Initiaux)VarIndép ;            Déf(VarIndépFixe)Paramètre ;            Instanc(A,B)Paramètre ; Instanc(P)VarIndép ;            Instanc(P,C,H)VarIndép ; InterprVarIndép-Hypothèse.         </p>
Instruments de médiation sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement direct</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au : déplacement de A; déplacement de B; déplacement de P;</li> <li>○ <b>Déplacement indirect</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au déplacement de H</li> <li>○ <b>Macro1</b> et <b>Macro2</b>.</li> </ul>

Tableau synthétique des signes associés au paramètre

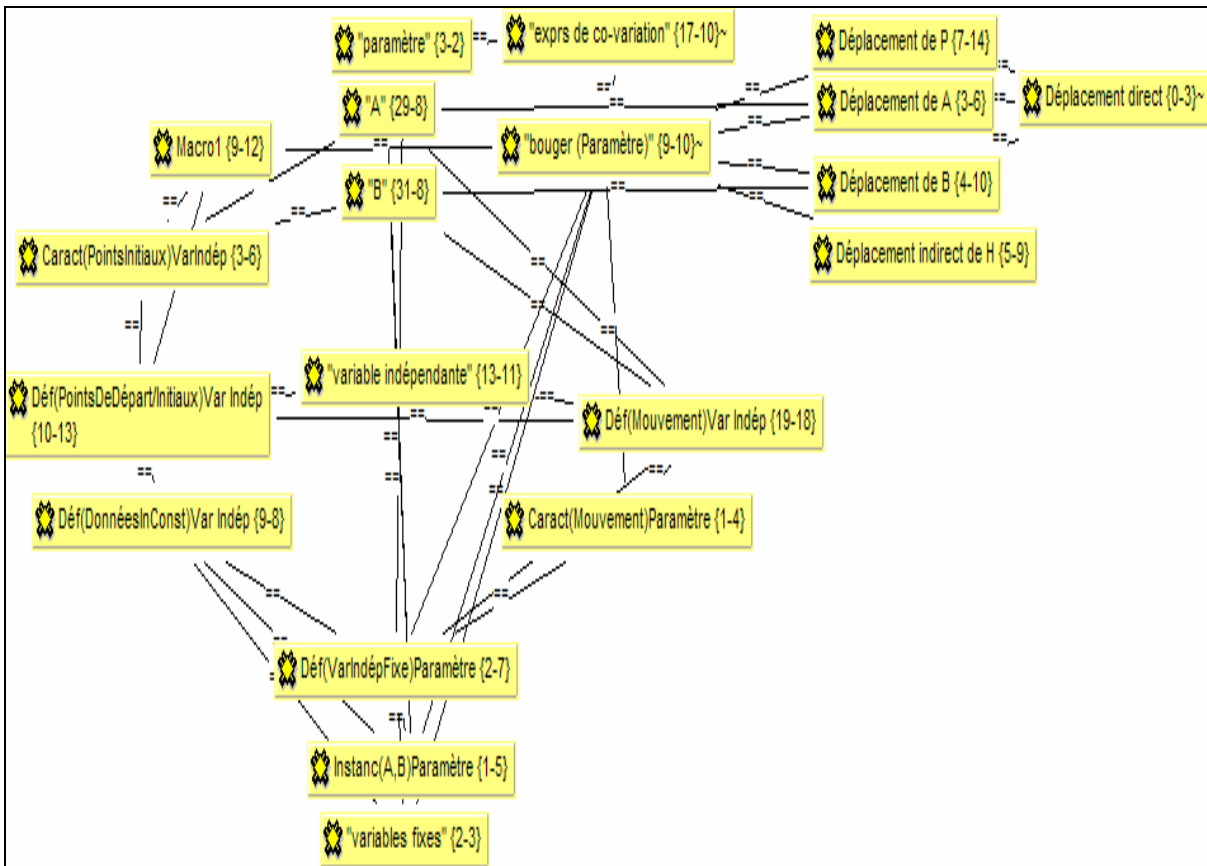


Figure 8.6 - réseau sémiotique relatif au paramètre : développement quasiment bi-axial

Le réseau sémiotique relatif à la notion de paramètre (cf. Figure 8.6) nous montre une certaine prédominance de signes associés au signifié de co-variationnel de fonction.

Pendant nous ne pouvons pas dire qu'il s'agit d'un développement mono-axial car il y a aussi, tout au long de la discussion, le développement en parallèle de l'autre famille des signes, celle que nous avons rattachée au signifié de fonction comme « Machine à Input/output ». Cela n'est pas surprenant car l'enseignant greffe justement le signifié de paramètre sur celui de variable indépendante, caractérisé par un développement bi-axial. Ce qui est intéressant, et révèle une différence par rapport au signe de variable, est, en revanche, le fait qu'au moment de l'introduction de la définition, nous ne retrouvons qu'une seule définition, en quelque sorte, hybride : elle condense, dans un seul énoncé, les deux familles de signifiés à la fois (D1.txt (741 : 749)) :

**Def(VarsIndépsFixes)Paramètre**

<p>259.</p>	<p><i>P</i> : Je n'aurais pas pu construire <i>H</i> dès le début.                  Mais, moi, je suis en train de bouger seulement <i>P</i>, tandis que <i>A</i> et <i>B</i> je les laisse fixes... Voilà alors ces objets-là qui sont quand-même des variables indépendantes, mais que je fixe momentanément, car je les laisse fixes là-bas, en mathématiques, ils prennent un nom particulier, ils sont appelés paramètres. Car, par exemple, je peux</p>	<p><i>P</i> : Non avrei potuto costruire <i>H</i> dall'inizio. Però io sto muovendo solo <i>P</i> e <i>A</i> e <i>B</i> li tengo fissi... Ecco allora questi oggetti che sono comunque delle variabili indipendenti, ma che momentaneamente fisso, perché li tengo li fissi in Matematica prendono un nome particolare, vengono chiamati parametri. Perché io, per esempio, posso cambiare la loro posizione, mantenerli fissi da un'altra parte, mi cambia dove va a finire <i>H</i>, però, al muovere di <i>P</i>, rimarrà sempre l'immagine</p>
-------------	---	--

	<i>changer leur position, les garder fixes quelque part ailleurs, peut-être H va se retrouver quelque part ailleurs, mais, en bougeant P, l'image<sup>94</sup> va rester toujours comme elle est.</i>	<i>com'è.</i>
--	---	---------------

Cette définition est bâtie sur l'usage du **signe-pivot** « objet » qui renvoie à la fois aux objets de Cabri et aux objets théoriques transcendant la particularité contingente des points à l'écran.

L'introduction de cette définition de paramètre est préparée par l'enseignant par une focalisation qui porte sur les limites de Cabri. Son intention est clairement celle d'introduire la définition de paramètre (et peut-être celle de fonction à une variable) par les biais des limites de Cabri, c'est à dire en fondant cette définition sur la notion de variables indépendantes, « *qui peuvent bouger librement* » dans Cabri, et sur le fait que dans Cabri on ne peut que bouger un point à la fois (D1.txt (553 : 556)) :

184.	<i>P: [...] Allons-y voir quelque chose. Retournons à la trace et reprenons les trois points initiaux. Appliquons « Effet1 » à A, B et P. Voici le problème: Cabri me permet de faire bouger H lorsque je bouge tout?</i>	<i>P: [...] Allora andiamo a vedere una cosa. Ritorniamo alla traccia e riprendiamoci i tre punti iniziali. applichiamo "Effetto 1" ad A, B e P. Ecco il problema è questo: Cabri mi permette di far muovere H mentre muovo tutto ?</i>
------	---	---

L'observation de l'enseignant n'a pas l'effet souhaité. En fait, les élèves lui opposent l'usage de l'animation multiple, c'est-à-dire d'un outil de Cabri qui peut assez bien correspondre aux propriétés théoriques attribuées aux variables indépendantes. Cette éventualité n'avait pas, du tout, été prévue par l'enseignant (D1.txt (558 : 585)) :

185.	<i>CRISTINA : Comment?</i>	<i>CRISTINA : Come ?</i>
186.	<i>IGOR : C'est-à-dire, comment faire pour bouger tout?</i>	<i>IGOR : Cioè, come si fa a muovere tutto ?</i>
187.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire dans quel sens ?</i>	<i>CRISTINA : Cioè in che senso ?</i>
188.	<i>P : Maintenant je vous l'explique... je dis.. Je peux voir ce qui arrive à H... car mes variables indépendantes qui sont ?</i>	<i>P : Ora ve lo dico... dico... posso vedere cosa succede ad H... perché le mie variabili indipendenti chi sono ?</i>
189.	<i>IGOR : A, B et P.</i>	<i>IGOR : A, B e P.</i>
190.	<i>P : Donc je pourrais vouloir les bouger toutes les trois ensembles en même temps ? Ou Cabri... ?</i>	<i>P : Quindi potrei volerle muovere tutte e tre contemporaneamente ? Oppure Cabri ?</i>
191.	<i>IGOR : Mais, si elles sont indépendantes... Oui !</i>	<i>IGOR : Ma se sono indipendenti ? ... Sì !</i>
192.	<i>P : Si elles sont indépendantes, je voudrais pouvoir les bouger toutes les trois en même temps... Est-ce que Cabri me permet de le faire ?</i>	<i>P : Se sono indipendenti vorrei anche poterle muovere tutte e tre contemporaneamente... Cabri mi permette di farlo ?</i>
193.	<i>CRISTINA : Si on fait l'animation ?</i>	<i>CRISTINA : Se si fa l'animazione ?</i>
194.	<i>MAURO : Avec l'animation multiple !</i>	<i>MAURO : Con l'animazione multipla !</i>
195.	<i>P : Avec l'animation multiple ?!?</i>	<i>P : (Avec surprise) Con l'animazione multipla !?</i>
196.	<i>MAURO : Autrement comment puis-je faire pour les bouger tous les trois, tous ensemble ?</i>	<i>MAURO : Altrimenti come faccio a muoverli tutti e tre insieme ?</i>
197.	<i>P : Viens ici et montre-le moi !</i>	<i>P : Vieni qui e fammi vedere !</i>

<sup>94</sup> Avec ce qui a été dit avant, on comprend qu'il s'agit de l'image globale de la fonction.

Même si la proposition de Mauro se révèle, après coup, insuffisante, puisque, en effet, l'animation multiple ne permet pas de bouger les trois variables indépendantes indépendamment les unes des autres partout dans le plan, elle montre le fait que le processus de sémiotique a bien fonctionné :

- Mauro reconnaît bien, aux variables indépendantes, une « nature » qui transcende celle de la contingence des points A, B, et P dans Cabri : en fait si les variables sont indépendantes, elles doivent pouvoir varier séparément (191), même si cela n'avait pas été le cas dans l'activité avec Cabri ;
- les élèves (Mauro et Cristina) se sont engagés dans la recherche d'un outil de Cabri, susceptible de correspondre aux propriétés des objets théoriques signifiés (193, 194 et suivantes).

A la fin de cet épisode, l'enseignant parvient à formuler la définition de paramètre que nous avons déjà présentée. Elle le fait, en la greffant sur la définition de variable indépendante comme point qui bouge (« *J'ai bougé P. J'ai dit variable indépendante P* ») (252) et sur l'opposition entre le point P, qu'elle bouge effectivement, et les points, A, B, que les élèves ont déjà observés bouger librement et ont déjà associés aux variables indépendantes, mais qui, dans ce cas particulier, restent immobiles (D1.txt (726 :741)) :

252.	<i>P : J'ai bougé P. J'ai dit : variable indépendante, P : variable dépendante, H : domaine : image... Et A et B qu'est ce qu'ils font ?</i>	<i>P : Ho mosso P. Ho detto : variabile indipendente, P : variabile dipendente, H : dominio : immagine... E A e B che fanno ?</i>
253.	<i>CRISTINA : Ils sont immobiles.</i>	<i>CRISTINA : Fermi.</i>
254.	<i>P : Immobiles... Voilà... Mais ils servent ?</i>	<i>P : Fermi... Ecco... Però servono ?</i>
255.	<i>IGOR : Oui, car la droite passe par eux.</i>	<i>IGOR : Sì perché ci passa la retta.</i>
256.	<i>P : Et si je ne les avais pas ?</i>	<i>P : E se non ce li avessi ?</i>
257.	<i>IGOR : Je crois qu'on n'aurait pas la relation</i>	<i>IGOR : Mi sa che non ci sarebbe la relazione</i>
258.	<i>CRISTINA : Je n'aurais pas pu construire H dès le début</i>	<i>CRISTINA : Non avrei potuto costruire H dall'inizio</i>

Ces interventions des élèves montrent bien que, désormais, les points A, B, et P synthétisent à la fois et le fait d'être une donnée initiale d'une construction géométrique (interventions 255, 257, 258) et le fait d'être des points qui pourraient être librement déplacés dans Cabri mais qu'on a décidé de garder fixes (253).

Notons, enfin, qu'à posteriori, l'analyse du réseau sémiotique, nous montre que nous aurions pu exploiter davantage l'outil de Cabri « Punaiser/ Dépunaiser ». Cet outil aurait pu, en effet, fonctionner comme IMS pour mieux introduire, caractériser et donc construire ces signes relatifs à la notion de paramètre.

#### 4.6. Fonction

Signes simples	<p>Signes-artefact :</p> <p>« "chose magique (cachant quelque chose derrière) », « à partir de » « au hasard » ; « B » ; « bouger(Var) » « bouger (VarIndép) » ; « données initiales » ; « expressions de co-variation », « format Enoncé sur VarIndép ou sur Domaine / Question sur VarDép ou sur Image » ; « macro Effet1 » ; « macro » .</p> <p>Signes-pivot : « bouger en fonction de » ; « construction » ; « être en fonction de » ; « relation » .</p>
----------------	---

	Signes-mathématiques : « fonction de fonction » ; fonction géométrique » ; « fonction » ; « opération ».
Signes complexes	Caract("I/O")ConstrGéo ; Caract("I/O")FonctGéo ; Caract("I/O")Fonction ; Caract("I/O")Macro ; Caract("I/O")Macro/Fonction/Constr/Opération ; Caract("I/O")Opération ; Caract(Chose magique)Fonction ; Caract(ChoseMagique)Macro ; Caract(Co-variation)ConstGéo ; Caract(Co-variation)FonctGéo ; Caract(Co-variation)Macro ; Caract(Co-variation)RelationGéo ; Caract(Droite)Fonction en Physique ; Caract(Relation)Fonction ; Caract(RelationDéterminée)Macro ; Déf(ConstrGéo)FoncGéo ; Déf(Macro/ConstrAppliquée2Fois)FonctDeFonct ; Déf(RelationEntreConstrsGéos)Fonction ; Déf(RelationEntrePoints)Fonction ; Instanc(H(A,B,P))Relation ; Instanc(MacroEffet1)Constr ; Instanc(Milieu)fonction ; InterprConstrGéo-Fonction ; InterprConstrGéo-Macro ; InterprFonction-Macro ; InterprFonction-Opération ; InterprMacro-Relation.
Instruments de médiation sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement direct</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au : déplacement de A; déplacement de B; déplacement de P;</li> <li>○ <b>Déplacement indirect</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au déplacement de H</li> <li>○ <b>Macro1</b> et <b>Macro2</b></li> </ul>

Tableau synthétique des signes associé à la fonction

Dans le développement de différents signes liés à l'objet théorique fonction, comme celui de variable, de variable indépendante, de variable dépendante et de paramètre, nous avons détecté deux grands axes de développement des signifiés associés. Ils sont liés respectivement aux IMS **Macro** versus **Déplacement+Trace**. Nous avons considéré ces deux axes comme associés à deux grandes familles possibles de signifiés de fonction, celle que nous avons appelée « machine à I/O » et celle définie comme « relation de co-variation ».

Nous nous sommes posé alors la question si ce développement bi-axial était aussi reconnaissable dans le réseau sémiotique relatif à la fonction, tout court.

Nous avons ainsi cherché à identifier, parmi tous les signes produits et inhérents à la notion de fonction, ceux qui étaient issus de l'usage de l'IMS **Macro** et ceux qui portaient, au contraire, davantage sur **Déplacement + Trace**.

Nous avons remarqué qu'à la différence du développement des autres réseaux sémiotiques déjà analysés, le réseau sémiotique de la fonction présente plutôt un



développement « **en étoile** ». Cela n'est pas surprenant car cette notion est très complexe et fortement interconnectée avec de nombreux éléments de l'activité.

Ce réseau ne donne pas seulement une idée de la croissance en complexité du processus de sémiotique, dont parle Marty en renvoyant à Peirce (Chapitre 1, § 5.1.5) mais permet aussi de mettre en évidence le caractère inférentiel de ce processus. Les objets théoriques auxquels les signes se réfèrent sont en fait à reconstituer à partir de *représentamens* donnés.

Les pôles de ce réseau sont constitués par des signes privilégiés autour desquels gravite la discussion et se développe toute une famille d'autres signes associés : ces signes privilégiés ont finalement une implication forte dans le développement des signifiés de fonction.

Les huit familles de signes, autours desquelles nous voyons se constituer, s'articuler et se complexifier le réseau sémiotique relatif au signifié de fonction sont :

- celle relative aux « **fonctions géométriques** » ;
- celle relative aux « **fonctions mathématiques en général**»,
- celle relative aux « **relations** »,
- celle relative aux « **constructions géométriques** »,
- celle relative à la « **Macro Effet1** »
- celle relative aux « **macros en général** » de Cabri,
- celle relative à une « **chose magique** », qui condense ou cache quelque chose
- celle relative aux « **opérations** »

Ces huit pôles ont été encadrés dans le réseau sémiotique (cf. Figure 8.7) par des rectangles orange.



Comme on peut l'observer, le réseau est très complexe. Pour le présenter, nous avons alors isolé des « clusters », c'est-à-dire des sous-réseaux particuliers<sup>95</sup>.

Ces clusters regroupent plusieurs pôles et mettent en évidence des liaisons qui, lors de l'analyse de la discussion collective, se sont révélés plus significatives que d'autres. Par exemple, par ces clusters, nous avons pris en compte les liaisons qui ont été développées de manière spéciale, auxquels la discussion a finalement consacré un certain temps, ou qui ont fini par exercer un effet important sur le développement consécutif des signifiés de fonction associés.

En observant le réseau sémiotique, il est possible de reconnaître des petits et des grands clusters. Les petits clusters représentent de parties de discussion où les liens réciproques entre plusieurs signes sont travaillés dans un temps voisin. En revanche, les grands clusters mettent en évidence des liens qui sont établis et travaillés sur un temps plus long, où, par exemple l'établissement de ces liaisons a été préparé par l'établissement de liens divers.

L'analyse de la discussion collective a montré que les développements respectifs des signes liés aux IMS **Macro** et **Déplacement + Trace** sont très différents. En ce qui concerne le premier développement, au fur et à mesure que la discussion collective progresse, nous avons constaté la construction de plusieurs types de signes complexes (des interprétations, des caractérisations, etc.) et l'établissement de liens interprétatifs réciproques.

Au contraire, en ce qui concerne les signes issus de l'IMS **Déplacement + Trace**, nous n'avons pu observer que la production de signes complexes de type « caractérisation », qui, même en étant numériquement importants, restent déconnectés entre eux.

Cette différence nous conduit à supposer, mais nous le verrons par la suite, que, lors de cette première discussion collective, le signe de fonction associé au signifié de « machine à input/output » a été travaillé de manière plus explicite et directe. En revanche, le signifié « co-variationnel » de fonction, a été beaucoup travaillé mais de façon implicite.

En analysant la discussion collective, nous avons avancé l'hypothèse que ce résultat, un peu surprenant, puisque à partir de notre analyse *a priori* nous nous attendions plutôt au contraire, a été probablement dû à l'incidence, dans l'orchestration déterminante de l'enseignante, de ses propres signifiés personnels.

En ce qui concerne la présentation des différents clusters relatifs aux deux familles de signifiés, d'une part, les différents clusters appartenant à la première famille de signes issue de l'IMS **Macro**, seront identifiables, sur le réseau sémiotique, par des couleurs différentes. D'autre part, de manière analogue, relativement à la famille associée aux IMS **Déplacement + Trace**, nous présenterons les caractérisations données. Elles seront identifiables, sur ce même réseau, par des ovals lilas.

On pourra remarquer que le même signe appartient à plusieurs clusters. C'est pourquoi il participe à la constitution, en même temps de signifiés différents. On pourra aussi observer que, suivant les points de vue adoptés (les focalisations choisies), les signes complexes, en particulier les caractérisations produites, se prêteront à interprétations diverses et feront partie de développements différents.

---

<sup>95</sup> De cette manière, nous ne présenterons pas le déroulement de la discussion collective dans un ordre purement chronologique, facilement reconnaissable en lisant simplement de haut en bas le réseau sémiotique ou sa description fournie en annexe (Annexe 3, par. A3.1).

#### 4.6.1. Le signe de fonction et la famille de signes issue de l'IMS Macro

##### 4.6.1.1.1. Premiers liens interprétatifs entre les signes de fonction, relation et construction géométrique

Ce premier « cluster » correspond au début de la première discussion collective. Il est identifiable dans le réseau sémiotique de la fonction par le sous-réseau bleu foncé en haut à droite (cf. Figure 8.7).

Le signe de fonction fait son entrée dans la discussion collective et dans ce cluster dès le commencement, grâce à la question de sémiosis potentielle (Chapitre 7, § 4.1), suivante posée par Cristina (D1.txt (011 :013)) :

2.	<i>CRISTINA : Je n'ai pas compris à quoi sert tout cela pour les fonctions.</i>	<i>CRISTINA : Non ho ancora capito a cosa serve tutto questo per le funzioni.</i>	<b>Question de sémiosis potentielle</b>
----	---	---	---

L'enseignant demande alors ce que les élèves considèrent comme fonction (3). Cette action, comme nous l'avons vu (Chapitre 7, § 4.1), a pour but l'explicitation et la mise en commun des signifiés personnels des élèves. De la part des élèves il y a d'abord la tentative de se rappeler de ce qu'ils ont déjà rencontré en physique (5, 6, 8), où ce signe est confondu avec celui d'une droite passant par deux points donnés (8) (D1.txt (013 :023)) :

3.	<i>P : Alors, très bien, exact. La question de Cristina est très intéressante, car elle dit « je n'ai pas encore compris, je n'ai pas encore compris à quoi sert tout cela pour les fonctions ». Au contraire, on verra, en revoyant tout... Avant tout, avons-nous une idée de qu'est une fonction ? Car ce devrait être la première question...</i>	<i>P : Allora benissimo, esatto. La domanda di Cristina è molto interessante, perché lei dice « non ho ancora capito, non ho ancora capito, cosa serve tutto questo per le funzioni ». E invece vedremo, ripercorrendo tutto... Prima di tutto, abbiamo noi un'idea di che cosa è una funzione ? Perché questa dovrebbe essere la prima domanda...</i>	
5.	<i>IGOR : On l'a fait en physique !</i>	<i>IGOR : Si è fatto a fisica !</i>	<b>Caract(Droite)Fonction en Physique</b>
6.	<i>CRISTINA : Non, c'est que en physique...</i>	<i>CRISTINA : No, è che a fisica...</i>	
7.	<i>P : Ah, petits malins</i>	<i>P : Ah, ladroni, ladroni!</i>	
8.	<i>IGOR : C'est-à-dire, en réalité nous avons fait les fonctions de la droite !</i>	<i>IGOR : Cioè in realtà abbiamo fatto le funzioni della retta !</i>	

Suite à cette même demande de l'enseignant (3), nous trouvons aussi, un peu plus loin, la production embryonnaire d'une définition de fonction. Elle est fournie par deux élèves, Igor et Filippo, à partir des activités que les élèves viennent d'accomplir dans Cabri. Elle est donnée en termes de relation (18), d'abord entre points (19) puis entre constructions géométriques différentes (21) (D1.txt (061 :083)) :

18.	<i>IGOR : Elle est une relation qui lie ... différents ...</i>	<i>IGOR : È una relazione che lega... diversi...</i>	<b>Déf(RelationEntreConstrsGéos)Fonction</b>
19.	<i>FILIPPO :...un point à différents ...</i>	<i>FILIPPO : ... un punto a diversi...</i>	
20.	<i>P : Alors, à haute voix IGOR, car je ne t'entends pas!</i>	<i>P : Allora, forte IGOR, che non ti sento!</i>	
21.	<i>IGOR : ... Elle est une relation qui</i>	<i>IGOR : ... È una relazione che</i>	

	<i>lie plusieurs... plusieurs constructions... c'est-à-dire plusieurs éléments géométriques, comment peut-on dire?... c'est-à-dire... peut-être elle lie un point à une droite ou un cercle à une droite... peut-être si on bouge... ce cercle, on voit que la droite aussi se déplace... c'est-à-dire qui est une relation.. qu'il y a une relation entre ces deux...</i>	<i>lega più... più costruzioni... cioè più elementi geometrici, come si dice?... cioè... magari lega un punto ad una retta oppure una circonferenza ad una retta... magari spostando... questa circonferenza, si vede che si sposta anche la retta... cioè è una relazione... che c'è tra queste due...</i>	
22.	<i>P : Une relation... en Physique aussi elle était une relation entre un cercle et une droite ?</i>	<i>P : Una relazione... anche in Fisica era una relazione tra una circonferenza e una retta ?</i>	<b>Reflet</b>
23.	<i>IGOR : Non... non... j'ai dit comme ça car en Physique nous avons fait la droite.</i>	<i>IGOR : No... no... io ho detto così perché a Fisica abbiamo fatto la retta.</i>	
24.	<i>P : Et donc, qu'est-ce que c'était selon vous?</i>	<i>P : E quindi che cos'era secondo voi ?</i>	<b>Reflet</b>
25.	<i>CRISTINA : Le résultat de deux points... c'est-à-dire car je me rappelle que c'était une droite dans le plan... non?... Donc c'était le résultat de... « étant donné deux points »</i>	<i>CRISTINA : Il risultato di due punti... cioè perché mi ricordo che era una retta in un piano... no?... Quindi era il risultato di... « dati due punti »</i>	

Nous pouvons supposer que les signifiés auxquels les élèves font référence tout d'abord sont surtout issus de leur mémoire scolaire. Cependant l'usage du signe-pivot **relation** peut être aussi interprété, dans les intentions d'Igor et Filippo, comme dépouillé de toute acception mathématique. Il se peut alors que les élèves aient utilisé ce terme seulement dans son acception courante, afin de décrire l'activité. Si cela est le cas, nous pouvons alors remarquer toute la potentialité sémiotique de ce signe-pivot, qui, une fois établi, pourrait être utilisé par l'enseignant comme liaison entre le monde des mathématiques et celui de l'expérience quotidienne.

Dans ce premier temps notons aussi qu'Igor parle bien de construction géométrique (21), cependant le lien avec la fonction géométrique n'est pas fait. Autrement dit la liaison interprétative entre « **fonction** » et « **construction géométrique** » demeure encore indirecte et une construction géométrique seule n'est pas encore conçue comme fonction en soi.

#### **4.6.1.1.2. Liens interprétatifs entre les signes de la « macro Effet1 », des macros de Cabri, des constructions géométriques et de la « chose magique ».**

Parmi les signes divers relatifs à ce cluster (identifiable par les liaisons en rose au milieu, Figure 8.7) nous y retrouvons des familles des signes complexes (des caractérisations) assez spéciales, associées au signe simple codé par « **chose magique** ». Ces familles n'étaient pas prévisibles du tout à l'avance par l'analyse *a priori* et montrent bien l'apport original et incontournable de l'enseignant dans le processus de médiation sémiotique.

En fait, lors du moment de la reconstruction sélective de l'activité, l'enseignant dirige les réflexions des élèves sur l'outil macro. Cela permet d'introduire l'idée de la macro « Effet1 » comme celle d'un objet mystérieux (**Caract(ChoseMagique)Macro**) qui condense et cache quelque chose (32) et qui fonctionne comme une sorte de « machine à Input/output » (32) (**Caract("I/O")Macro**). Parallèlement, ce travail bien

ciblé de focalisation de l'enseignant conduit à interpréter cette même macro « Effet1 » en termes d'une construction géométrique précise (**InterprMacro-ContrGéo**). Par cette focalisation, cette dernière vient à hériter de la même caractérisation de « machine à I/O » (**Caract("I/O")Macro**) (D1.txt (101 :120)) :

30.	<i>P : Ok, alors, arrêtons-nous là... Ici il y a quelque chose... c'est-à-dire, si je devais voir cet « Effet1 »...qu'est-ce que c'est, selon vous la Macro « Effet1 » ?</i>	<i>P: Ok, allora, fermiamoci qui... Qui c'è un qualcosa... cioè se io dovessi vedere questo « Effetto1 »... che cos'è secondo voi la Macro « Effetto1 » ?</i>	
31.	<i>FILIPPO : On voit que le point H reste...</i>	<i>FILIPPO : Si vede che il punto H sta...</i>	
32.	<i>IGOR : C'est-à-dire... Quelle est la construction qui... Il y a, caché, une construction qui permet de... de dessiner le point H à partir des points A, B, P.</i>	<i>IGOR : Cioè è la costruzione che... c'è nascosta dietro una costruzione che permette di... di disegnare il punto H a partire dai punti A, B e P.</i>	<b>Caract(ChoseMagique)Macro InterprMacro-ContrGéo Caract("I/O")Macro Caract("I/O")ContrGéo</b>
33.	<i>P : « Effet1 » condense, en la cachant, une construction que vous ensuite, vous avez découverte... Et qu'est-ce qu'elle fait cette construction ?</i>	<i>P : « Effetto1 » condensa, nascondendola, una costruzione che poi avete scoperto... E che cosa fa questa costruzione ?</i>	<b>Caract(ChoseMagique)Macro InterprMacro-ContrGéo</b>
34.	<i>FILIPPO : Elle construit un point...</i>	<i>FILIPPO : Costruisce un punto...</i>	
35.	<i>IGOR : Elle construit le point H... Car nous avons fait...</i>	<i>IGOR : Costruisce il punto H... Perché noi abbiamo fatto...</i>	
36.	<i>P : Elle construit le point H à partir de ?</i>	<i>P : Costruisce il punto H a partire da ?</i>	
37.	<i>Chœur (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Des trois points.</i>	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Dai tre punti.</i>	<b>Caract("I/O")Macro Caract("I/O")ContrGéo</b>

La partie de discussion qui suit, développe ces caractérisations. Après avoir revisité le comportement des différents points à l'écran, les élèves sont en fait invités à reconstruire collectivement les différentes constructions qui avaient pu être sous-jacentes à « Effet1 » et qui pouvaient être à l'origine de H à partir de A, B, et P. (D1.txt (212 :217)) :

67.	<i>P : alors, cela dit, résumons tout ça : nous avons ces trois points A, B et P initiaux : je leur applique une chose magique qui après, maintenant, n'est plus autant magique que ça, car plus ou moins j'ai compris ce que c'est... [...] Vous avez construit ces trois choses, exact ? Vous avez construit le cercle de centre... ?</i>	<i>P : Allora, detto quindi questo, riassumiamo la cosa : abbiamo questi tre punti A, B, e P iniziali : ci applico una cosa magica che poi, ora, non è più così magica perché bene o male ho capito cos'è... [...] Vi siete ricostruite queste tre cose, giusto ? Vi siete costruiti la circonferenza di centro... ?</i>	<b>InterprMacro-ContrGéo</b>
-----	---	--	------------------------------

Les observations gravitent alors autour de la macro « Effet1 », comme quelque chose qui cache quelque chose d'autre, dont il faut comprendre à la fois la nature et le fonctionnement.

Si au début, cette famille de caractérisations portant sur la « chose magique » (**Caract(ChoseMagique)Macro**) n'est pas du tout volontaire, à partir d'un certain point (124), l'enseignant semble en jouer consciemment :

124.	<p><i>P : Alors... je répète, je suis partie de trois points et j'ai fait une chose magique, il est apparu un autre [point], puis j'ai vu que la chose magique je l'ai comprise, moi aussi je suis capable de le faire apparaître de trois façons différentes, par exemple, pour le moment...</i></p> <p><i>Alors je vous dis... Voyez-vous dans toute cette chose [dans tout ça] une fonction c'est-à-dire une relation... lui, Filippo, il était en train de dire... une relation qui lie ?</i></p>	<p><i>P : Allora ... ripeto, sono partita da tre punti ho fatto una cosa magica, ne è apparso un altro, poi ho visto che la cosa magica l'ho capita, sono in grado anch'io di farlo apparire in tre modi diversi per esempio, per il momento...</i></p> <p><i>Allora vi dico... ci vedete in tutta questa cosa una funzione, cioè una relazione... lui stava dicendo Filippo... una relazione che lega ?</i></p>	<p><b>Caract(ChoseMagique)Macro ;</b></p> <p><b>InterprMacro- ConstrGéo ;</b></p> <p><b>Caract(ChoseMagique)Fonction ;</b></p> <p><b>Effet Topaze ;</b></p> <p><b>Demande d'interprétation</b></p>
125.	<p><i>FILIPPO : Trois points... C'est-à-dire le quatrième, par exemple B dans ce cas... c'est-à-dire il pourrait même y être [exister] ou ne pas y être [exister] et, éventuellement en prenant le cercle de diamètre [PB] on pourrait exclure A... C'est-à-dire que A ne nous a pas servi.</i></p>	<p><i>FILIPPO : Tra tre punti... Cioè il quarto, per esempio il punto B in questo caso, cioè ci potrebbe anche essere o non essere e magari prendendo la circonferenza di diametro PB si potrebbe escludere A... Cioè a noi A non è servito !</i></p>	

La « chose magique » dont elle est en train de parler est ambiguë : il pourrait s'agir de l'activité, de la macro ou encore bien de la fonction. Nous voyons aussi que, par une généralisation progressive, le discours passe de la prise en compte de la macro particulière « Effet1 » (30) à une « chose » (124) de plus en plus générique.

D'une part, ce processus, conduit ainsi à concevoir, cette même macro « Effet1 » et ensuite toutes les macros de Cabri comme autre chose que la macro en elle-même (**Caract(ChoseMagique)Macro**). Pour nous, ce qui était « derrière Effet1 », c'était, seulement, une certaine construction géométrique cachée. Mais dans l'usage plus ou moins volontaire de l'enseignant comme dans la perception qu'en ont les élèves, cet objet devient de plus en plus en lui-même un signe de la fonction. Le signifié même de fonction commence à se colorer de cette même caractérisation (**Caract(ChoseMagique)Fonction**). Ce travail conduit alors à transformer la macro en une icône (Chapitre 1, § 5.1.6.1) de la fonction. Nous avons appelé tout ce processus de changement de signification de la macro « Effet1 », de transformation en icône, **processus d'icônisation**. L'analyse de ce processus, habilement orchestré par l'enseignant, a été déjà présentée lors du chapitre consacré aux actions de l'enseignant (Chapitre 6, § 4.1).

D'autre part, cette même famille de signes participe d'un véritable effet Topaze, voulu et nécessaire. Le milieu est en fait insuffisant pour que les élèves puissent aboutir par eux-mêmes à mettre en relation les fonctions avec les macro de Cabri, ce qui était l'objectif didactique de cette première séance.

Cependant, il est clair, dès le début, que toute l'activité a un lien significatif avec cette notion, qu'il faut l'expliciter et que cette opération n'est pas finalement à la charge des élèves. Le travail de reconstruction sélective a donc pour but celui de conduire les élèves à amener le plus d'éléments possibles pour que l'enseignant puisse après tisser tous les liens mutuels. Les actions de focalisation servent à cela. Quand l'enseignant, en limitant l'espace de liberté de réponse des élèves, entre dans cet effet Topaze c'est parce qu'elle estime que le moment de l'explicitation des liens est arrivé.

Ainsi, quand l'enseignant introduit le lien interprétatif entre fonction et macro (124), en s'appuyant sur cet effet Topaze, grâce à toutes ces caractérisations diverses (**Caract("I/O")Macro**, **Caract(ChoseMagique)Macro** et

**Caract(ChoseMagique)Fonction**), la macro Effet1, s'était déjà chargée d'un certain nombre de propriétés (elle est une sorte de machine à I/O, elle est une construction cachée). En même temps, elle était déjà presque devenue une icône de fonction.

#### 4.6.1.1.3. Liens interprétatifs entre les macros en général de Cabri, les fonctions, et les relations.

L'intervention (125) de Filippo engendre une petite déviation : l'attention des élèves est en fait, catalysée sur le problème de considérer comme constitutifs de la relation trois points seulement ou tous les quatre points. Cela permet quand même de focaliser à nouveau l'attention sur les quatre points et marque ainsi le passage vers l'établissement de nouveaux liens interprétatifs (visibles dans le cluster en bleu foncé dans la partie gauche du réseau sémiotique, Figure 8.7). En particulier, l'enseignante tisse explicitement ces nouveaux liens interprétatifs en s'appuyant encore sur la famille de signes liés à « chose magique » (D1.txt (387 :393) :

130.	MARCO : H est <b>en fonction des</b> trois points	MARCO : H è <b>in funzione dei</b> tre punti.	
131.	P : H est en fonction des trois points... Oh ! Quelle phrase magique !... H est en fonction des trois points... Donc nous pourrions dire que H est le résultat d'une certaine relation, comme tu avais dit, qui joue sur les trois points initiaux qui sont A, B et P. Et alors qu'est cette chose qui faisait apparaître le point H, pour nous ?	P : H è in funzione dei tre punti ... oh ! frasina magica !... H è in funzione dei tre punti ... quindi potremmo dire che H è il risultato di una certa relazione, come avevi detto te, che gioca sui tre punti iniziali che sono A, B e P . E allora che cos'era questa cosa che faceva comparire il punto H, per noi ?	<b>Instanc(H(A,B,P)Relation)</b> <b>Caract(ChoseMagique)Macro</b> <b>Caract("I/O")Macro</b>

Le signe-pivot « en fonction de » exprime, dans cet ordre : d'abord ce qui dépend et, ensuite, ce dont le premier dépend. L'enseignante a alors besoin de renverser cet ordre pour pouvoir relier la notion de macro, déjà caractérisée en termes de « machine à I/O », à celle de fonction. Pour obtenir cela, elle paraphrase l'expression « en fonction de », en jouant aussi sur la caractérisation en termes de « machine à I/O » de la macro et en étendant cette caractérisation au signifié même de relation, déjà greffé sur celui de fonction.

Nous voyons ainsi, en même temps, réapparaître l'usage ambigu du mot « chose », référentiel, d'une part à la caractérisation de la macro comme « chose magique », d'autre part à un effet Topaze évident (133-134), car la réponse à la question posée est presque automatique.

La discussion continue (D1.txt (387 : 417)) :

132.	MARCO : Deux cercles et une droite.	MARCO : Due circonferenze e una retta.	
133.	P : Se je la fais. Et sinon, au début, juste au début ?	P : Se le faccio. E se no, all'inizio, proprio all' inizio ?	
134.	IGOR : La Macro.	IGOR : La Macro.	
135.	P : La Macro. Donc nous avons un correspondant de la fonction dans Cabri, qui sont les Macros. Toutes celles-ci sont des Macros, si nous voulons, toutes celles que nous avons dans le menu de construction, même faire le milieu je peux la voir comme une fonction ?	P : La Macro. Quindi noi abbiamo un corrispondente della funzione in Cabri, che sono le Macro. Tutte queste sono Macro, se vogliamo, tutte quelle che abbiamo nel menù di costruzione, anche fare il punto medio la posso vedere come una funzione ?	<b>InterprMacro-Fonction</b>



136.	<i>Plusieurs voix : Oui</i>	<i>Tante voci : Sì</i>	
137.	<i>P : Car, qu'est-ce qu'elle prend ?</i>	<i>P : Perché, cosa prende ?</i>	
138.	<i>FILIPPO : Elle prend les deux extrémités du segment...</i>	<i>FILIPPO : Prende i due estremi del segmento...</i>	
139.	<i>P : Et elle me donne ?</i>	<i>P : E mi dà ?</i>	
140.	<i>FILIPPO : Et elle trouve le troisième point qui est le centre du segment c'est-à-dire qu'il est équidistant des sommets du segment.</i>	<i>FILIPPO : E trova il terzo punto che è il centro del segmento cioè è equidistante dai vertici del segmento.</i>	
141.	<i>P : Et elle me donne le troisième point qui est le milieu... Ainsi, si je vais voir... en somme dans Cabri, nous avons les Macro et nous disons que celle-là peut être une idée de notre fonction... Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?</i>	<i>P : E mi dà il terzo punto che è il punto medio... Quindi se io vado a vedere... insomma in Cabri abbiamo le Macro e diciamo... quella può essere un'idea della nostra funzione... E quando invece la facciamo noi ?... Che cosa è la funzione ?</i>	<b>Caract("I/O")Fonction ; InterprMacro-Fonction</b>

Par un nouvel effet Topaze (133) l'enseignant obtient enfin que Macro fasse le lien entre le signe de fonction et le signe de macro de Cabri. Le **processus d'Icônisation** trouve ici son apogée, puisque l'interprétation est explicitement posée.

Il est intéressant de remarquer que les critères de validation de ce lien interprétatif sont recherchés dans la caractérisation en termes de « machine à I/O » de l'outil macro de Cabri (voir l'enchaînement des questions de l'enseignant « *Car, qu'est-ce qu'elle prend ?* » (137) et « *Et qu'est-ce qu'elle me donne ?* » (139)). La notion de fonction va ainsi hériter elle-même cette caractérisation forte de « machine à I/O » (**Caract("I/O")Fonction**).

Puis, finalement l'enseignant boucle le cercle. Puis qu'ils ont déjà établi le lien entre les fonctions et les relations (premier cluster bleu et troisième cluster rouge), entre les macros de Cabri et les constructions géométriques (deuxième cluster rose), entre les fonctions et les macros de Cabri (troisième cluster rouge encore), il ne lui reste qu'à conclure en établissant le dernier lien, celui entre les fonctions et les constructions géométriques (D1.txt (417 :430) :

141.	<i>P : [...] Et quand en revanche c'est nous qui la faisons ? Qu'est-ce que c'est la fonction ?</i>	<i>P : [...] E quando invece la facciamo noi ?... Che cosa è la funzione ?</i>	
142.	<i>FILIPPO : C'est la construction.</i>	<i>FILIPPO : È la costruzione.</i>	<b>Interpr Fonction-Macro</b>
143.	<i>P : La construction.</i>	<i>P : La costruzione</i>	
144.	<i>CRISTINA : C'est-à-dire que derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée.</i>	<i>CRISTINA : Cioè dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta.</i>	<b>Caract(ChoseMagique Macro) ; InterprConstrGéo-Macro</b>
145.	<i>CRISTINA : Derrière chaque Macro il y a toujours une construction cachée, que vous avez découverte et que, après, vous pouvez ne pas avoir Cabri et faire sur papier.</i>	<i>P : Dietro ogni Macro c'è sempre una costruzione nascosta, che voi avete scoperto, che poi, potete non avere Cabri e fare su carta.</i>	

Nous constatons à nouveau, dans l'intervention de Cristina (144), la force *en acte* de la caractérisation en termes de « chose magique » de la macro (**Caract(ChoseMagique)Macro**). Elle emporte avec elle le lien interprétatif déjà établi entre macros et constructions (**InterprConstrGéo-Macro**). En outre, le

processus de généralisation, entrepris par l'enseignant à propos des macros, qui avait démarré à partir de la macro particulière « Effet1 » (30, cluster rose), avait abouti à une macro quelconque liée à des points donnés (110, cluster rose) puis aux macros de la barre des outils de construction de Cabri (135), trouve maintenant son accomplissement. Après cette dernière intervention de Cristina, en fait, l'enseignante statue, tout court, que le lien interprétatif est établi pour chaque macro et pour toutes les constructions géométriques, pas seulement celles dans Cabri (145).

Nous voyons aussi que, dès maintenant, le rapport entre les fonctions et les constructions géométriques a été établi de façon explicite : la construction géométrique en elle-même est identifiée comme une fonction. Nous observons, en outre, qu'un processus de généralisation homologue à celui de la macro « Effet1 », porte sur la notion de construction géométrique. Elle ne doit plus justement s'entendre seulement comme une construction géométrique de Cabri mais comme une construction quelconque même en papier-crayon (145).

#### 4.6.1.1.4. Liens interprétatifs entre les fonctions, les opérations et les fonctions géométriques

Analysons maintenant brièvement le cluster central identifié par les liaisons en vert (cf. Figure 8.7).

L'enjeu interprétatif suscité par le processus de médiation sémiotique conduit Filippo à établir un lien interprétatif entre le signe de fonction et les opérations algébriques (D1.txt (432 :443)) :

146.	<i>FILIPPO : C'est-à-dire en unifiant une, non, deux ou plus de choses on peut en trouver une troisième</i>	<i>FILIPPO : Cioè unendo una, no, due o più cose se ne può trovare una terza</i>	<b>Caract("I/O")Macro /Fonction/Constr/Opération</b>
147.	<i>IGOR : C'est-à-dire dans la réalisation d'une construction ?</i>	<i>IGOR : Cioè nella realizzazione di una costruzione ?</i>	
148.	<i>FILIPPO : C'est-à-dire en unifiant deux constructions, c'est-à-dire deux ou plusieurs choses, on peut en trouver une troisième. En algèbre si on a a plus b on trouve c</i>	<i>FILIPPO : Cioè unendo due costruzioni, cioè due o più cose se ne trova una terza. In algebra se uno ha a più b si trova c</i>	<b>Caract("I/O")Const rGéo ; Caract("I/O")Opération</b>
149.	<i>P : Eh lui, par exemple, maintenant il est en train de s'envoler... C'est-à-dire ces fonctions sont géométriques, donc derrière une fonction géométrique il y a toujours une construction si moi, en revanche, je prends une opération arithmétique, lui il dit, si j'ai deux nombres a et b, je les additionne et je trouve c...</i>	<i>P : Eh lui, per esempio ora sta andando... Cioè queste sono geometriche, quindi dietro una funzione geometrica c'è sempre una costruzione se io invece prendo un'operazione aritmetica, lui dice, se ho due numeri a e b, li sommo e trovo c...</i>	<b>Caract(Chose magique)Fonction  Caract("I/O")Opération ; InterprConstrGéo-FoncGéo InterprFonction-Opération</b>

Différents éléments ont pu jouer pour l'établissement de ce lien :

- La recherche de la construction inconnue, de « quoi est derrière quoi » d'abord pour les macros (**Caract(ChoseMagique)Macro**), ensuite pour les fonctions, (**Caract(ChoseMagique)Fonction**) dans l'usage qu'en a fait l'enseignante, a amené Filippo à tout considérer comme un signe potentiel d'un objet théorique qui, finalement, ne se réduit jamais au signe par lequel il est porté. Ce fait pourrait alors se lire comme la mise en jeu d'un contrat implicite spécifique.

- Les caractérisations de la même nature mais se référant à des objets très divers, a conduit Filippo à aller chercher « l'invariant », c'est-à-dire ce qui reste, abstraction faite de toutes ces « formes » particulières, le critère qui permet de parler de la même manière aussi bien d'une macro que d'une construction géométrique de Cabri, que d'une fonction.
- Les processus divers de généralisation qui caractérisent le discours de l'enseignant et que l'élève aussi s'autorise à entreprendre. Cela reviendrait alors, encore, au contrat propre du processus de médiation sémiotique.

Cet extrait témoigne aussi du croisement de tout un nombre de liaisons entre caractérisations différentes, portant sur le signifié de fonction comme « machine à input/output ». Nous les avons noté, dans le réseau (cf. Figure 8.7) par des liaisons en bleu clair.

L'intervention de Filippo contraint l'enseignant à établir un premier lien interprétatif (149) respectivement entre fonctions et constructions géométriques et entre fonctions et opérations algébriques. Pour ce faire, elle a besoin d'introduire une différenciation entre « fonctions » et « opérations ». Nous avons considéré ce type de phénomène comme un « phénomène de splitting » (Cerulli, 2004). En fait, pour une nécessité spécifiquement didactique, face à un même objet mathématique, l'enseignant génère des signes divers mais reliés, pour mettre en lumière des propriétés diverses, qu'elle considère à ce niveau-là comme « sensibles ».

#### 4.6.2. Le signe de fonction et la famille des signes issus des IMS Déplacement+Trace

Le nombre de signes associés à l'objet fonction, produits grâce à l'IMS *Macro* est aussi important que celui des signes engendrés par *Déplacement+Trace*. Mais, dans la plupart des cas, ces derniers signes restent toujours au niveau de caractérisations très implicites. Sauf au début et à l'occasion de la définition de fonction géométrique, il nous faut descendre au niveau des constituants de la notion de fonction (variable, variable indépendante, variable dépendante, paramètre etc) pour retrouver la production et la mise en relation de signes plus explicites, qui, en montrant un degré d'objectivation majeur, se réfèrent à l'objet de fonction en termes co-variationnels.

Ainsi, au début nous pouvons identifier une définition qui porte en elle, une caractérisation co-variariationnelle. Il s'agit de la définition donnée par Igor lors du moment initial d'explicitation des signifiés personnels. La fonction est alors définie comme relation entre constructions géométriques différentes, caractérisée par une « dépendance causale » (voir l'usage de phrases conditionnelles et du gérondif) (D1.txt (67 :71)) :

21.	<p><i>IGOR : ... Elle est une relation qui lie plusieurs... plusieurs constructions... c'est-à-dire plusieurs éléments géométriques, comment peut-on dire?... c'est-à-dire... peut-être elle lie un point à une droite ou un cercle à une droite ... peut-être si on bouge... ce cercle, on voit que la droite aussi se déplace... c'est-à-dire qui est une relation.. qu'il y a une relation entre ces deux ...</i></p>	<p><i>IGOR : ... È una relazione che lega più... più costruzioni... cioè più elementi geometrici, come si dice?... cioè... magari lega un punto ad una retta oppure una circonferenza ad una retta... magari spostando... questa circonferenza, si vede che si sposta anche la retta... cioè è una relazione che c'è tra queste due...</i></p>	<p><b>Déf(RelationEntreConstrsGéos)Fonction</b></p> <p><b>Caract(Co-Variation)Relation Géo</b></p>
-----	--	--	--

En revanche tout au long de la discussion collective, nous pouvons détecter la production de caractérisations « co-variationnelles » qui restent encore très implicites et subjectives. C'est le cas pour la construction géométrique sous-jacente à la macro « Effet1 » (**Caract(Co-variation)ConstrGéo**) et pour le cas de la macro en elle-même ou des macros en général de Cabri (**Caract(Co-variation)Macro**).

Nous avons colorié ces caractérisations en violet (cf. Figure 8.7).

Par exemple, si l'on reprend la partie de discussion, déjà commentée lors de l'analyse du réseau sémiotique de la notion de variable indépendante et du cluster rose, nous voyons que la construction géométrique sous-jacente à la macro « Effet1 » se caractérise, en même temps, comme « machine à I/O » (33 - 37) et comme relation de « co-variation » (40 - 41) **Caract(Co-variation)ConstrGéo** (D1.txt (111 :137)) :

33.	<i>P : « Effet1 » condense, en le cachant, une construction que vous ensuite, vous avez découverte... Et qu'est-ce qu'elle fait cette construction ?</i>	<i>P : « Effetto1 » condensa, nascondendola, una costruzione che poi avete scoperto... E che cosa fa questa costruzione ?</i>	
34.	<i>FILIPPO : Elle construit un point...</i>	<i>FILIPPO : Costruisce un punto.</i>	
35.	<i>IGOR : Elle construit le point H... Car nous avons fait...</i>	<i>IGOR : Costruisce il punto H... Perché noi abbiamo fatto...</i>	
36.	<i>P : Elle construit le point H à partir de ?</i>	<i>P : Costruisce il punto H a partire da ?</i>	
37.	<i>Chœur (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Des trois points.</i>	<i>Coro (CRISTINA, FILIPPO, IGOR) : Dai tre punti.</i>	
38.	<i>IGOR : Mais... des deux cercles à nous... c'est-à-dire les trois points sont servis pour faire les deux cercles.</i>	<i>IGOR : Però... da due circonferenze a noi... cioè i tre punti sono serviti per fare le due circonferenze.</i>	
39.	<i>P : Oui, car maintenant on vous a fait découvrir cette construction... Car qu'est-ce qui vous a été dit ? C'est-à-dire « qu'est-ce que vous deviez faire » ?</i>	<i>P : Sì perché adesso vi è stata fatta scoprire questa costruzione... Perché cosa vi è stato detto ? Cioè nel « cosa dovevate fare » ?</i>	
40.	<i>IGOR : Il fallait dire... d'abord si je bougeais le point A, les points qui se déplaçaient et les points qui ne se déplaçaient pas...</i>	<i>IGOR : Bisognava dire... prima se spostavo il punto A i punti che si muovevano e i punti che non si muovevano...</i>	<b>Caract(Co-variation)ConstrGéo</b>
41.	<i>P : Ok...alors par exemple, en bougeant P, je vois que seulement H bouge et, pas seulement ça, voyons de le condenser un petit peu [essayons de résumer un peu tout ça]... je vois aussi qu'il bouge... ?</i>	<i>P : Ok... allora, per esempio, muovendo P, io vedo che si muove solo H e non solo, vediamo di condensarlo un attimo... vedo anche che si muove... ?</i>	
42.	<i>IGOR : ... Sur une droite.</i>	<i>IGOR : ... Su una retta.</i>	
43.	<i>P : Sur la droite (AB).</i>	<i>P : Sulla retta (AB).</i>	

L'intervention (39) de l'enseignant demande aux élèves de « remonter à l'origine » de la construction qu'ils ont pu fournir. Cette origine est à rechercher dans les trajectoires des points. En fait, les élèves peuvent indiquer quelle est la construction cachée (et peuvent aussi la reproduire), seulement parce qu'ils ont pu concevoir cette construction comme un ensemble de trajectoires corrélées engendrées par des points qui bougent. En filigrane alors, par les interventions de l'enseignant (39, 41, 43) et par la double nature de la trajectoire (à la fois parcours d'un point qui bouge (40, 41) et objet géométrique global (41-43)), nous voyons se développer l'idée de

construction géométrique sous-jacente comme relation de co-variation entre points (**Caract(Co-variation)ConstrGéo**).

Une caractérisation progressive analogue à celle de la construction géométrique investit aussi le discours sur la macro, comme, par exemple dans (D1.txt (482 :500)) :

163.	<i>P :</i>	<i>P : Allora in Cabri abbiamo trovato la Macro come funzione ... come variabili indipendenti quali potrei dire che sono ?</i>	
164.	<i>CRISTINA : A, B, P...</i>	<i>CRISTINA : A, B, P... i punti di partenza.</i>	
165.	<i>P :</i>	<i>P : I punti di partenza ; e che cosa gli posso fare in Cabri ?</i>	
166.	<i>FILIPPO :</i>	<i>FILIPPO : Muoverli rispetto...</i>	<b>Caract(Co-variation)Macro</b>
167.	<i>P : Je peux les bouger partout, aujourd'hui vous étiez libres de les bouger partout. Et, en revanche, ce que j'obtiens, donc la variable dépendante, qu'est-ce que c'est ?</i>	<i>P : Li posso muovere da tutte le parti, oggi eravate liberi di muoverli da tutte le parti. E invece quello che ottengo, quindi la variabile dipendente, che cos'è ?</i>	
168.	<i>FILIPPO : C'est un point fixe qu'il n'est pas possible de déplacer</i>	<i>FILIPPO : È un punto fisso che non è possibile spostare.</i>	
169.	<i>IGOR : C'est-à-dire qu'il bouge... si on bouge les autres points</i>	<i>IGOR : Cioè che si muove... muovendo gli altri punti.</i>	
170.	<i>P : Il bouge en fonction des autres [points], c'est-à-dire que tout seul je ne peux pas le déplacer, je peux le déplacer seulement si je déplace les points dont il dépend.</i>	<i>P : Si muove in funzione degli altri, cioè per conto proprio io non lo posso spostare, lo posso spostare solo se sposto i punti da cui dipende.</i>	

Ici l'enseignant est bien en train de parler de la macro, de ses objets initiaux et finaux. Cependant, puisqu'ils sont déjà devenus respectivement signes de la fonction, de la variable indépendante et de la variable dépendante, quand elle en parle, elle finit par s'y référer en termes co-variationnels (voir la référence explicite au déplacement et l'usage constant de phrases conditionnelles et de gérondifs (166 - 170)). Ces nouveaux signes ont été alors considérés comme appartenant à une même famille dénotée par **Caract(Co-variation)Macro**.

Le seul autre moment où l'enseignant récupère les caractérisations données en termes co-variationnels et en donne une définition, c'est, comme nous l'avons déjà anticipé, au moment de la définition des fonctions géométriques.

Cette définition est en quelque sorte nécessaire lors de l'introduction des définitions de domaine et image. Pour mieux préciser ces derniers signes, donnés en termes de mouvement, elle reprend, alors, implicitement le lien interprétatif entre construction géométrique et fonction géométrique (**InterprConstrGéo-FoncGéo**), donné à l'intervention (149, cluster vert) (D1.txt (543 :553)) :

182.	<i>P : L'image est où bouge la variable dépendante... le domaine est où bougent les indépendantes. Donc, Mattia se posait un problème ...</i>	<i>P : L'immagine è dove si muove la variabile dipendente... Il dominio è dove si muovono quelle indipendenti. Quindi Mattia si poneva un problema...</i>	
183.	<i>IGOR : C'est-à-dire ? Mais « où » il faut l'entendre comment... le « où » ?</i>	<i>IGOR : Cioè ? Ma « dove » inteso come... « dove » ?</i>	

184	<p><i>P: OÙ ? Dans le plan... Maintenant nous sommes dans le plan, nous devrions avoir compris que les fonctions géométriques... C'est-à-dire nous sommes en train de faire des constructions du plan dans le plan, c'est-à-dire nous faisons bouger des points dans le plan et nous avons comme résultat de la construction d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan.</i></p>	<p><i>P: Dove ? Nel piano... Ora noi siamo nel piano, dovremmo avere capito che le funzioni geometriche... Cioè, stiamo facendo costruzioni del piano nel piano, cioè facciamo muovere dei punti nel piano e abbiamo come risultato della costruzione altri punti che, a loro volta, si muovono nel piano.</i></p>	<p><b>InterprConstrGéo-FoncGéo;</b>  <b>Déf(ConstrGéo)FonctGéo;</b>  <b>Caract("I/O")ConstrGéo;</b>  <b>Caract(Co-variation)ConstrGéo</b></p>
-----	--	--	---

Par cette nouvelle définition de fonction géométrique, donnée en termes de construction géométrique (« ... nous devrions avoir compris que les fonctions géométriques... C'est-à-dire nous sommes en train de faire des constructions du plan dans le plan, c'est-à-dire nous faisons bouger des points dans le plan et nous avons comme résultat de la construction d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan ») l'enseignant récupère ainsi toutes les caractérisations élaborées jusqu'alors, sur les constructions géométriques (**Caract(Co-variation)ConstrGéo** et **Caract("I/O")ConstrGéo**) (voir cluster rose au milieu).

Ces mêmes caractérisations sont, dès lors, héritées par les fonctions géométriques mêmes (**Caract("I/O")FonctGéo** et **Caract("Co-variation")FonctGéo**).

En outre, par cette même définition, l'enseignant établit explicitement un lien entre les deux grandes familles de signes. La définition, en fait, mélange à la fois des signes issus de l'usage l'IMS **Macro** (« **du plan au plan** », « **avoir comme résultat** ») et de l'usage des IMS **Déplacement+Trace** (« nous faisons bouger des points dans le plan », et « d'autres points qui, à leur tour, bougent dans le plan »).

#### 4.6.3. Synthèse sur l'évolution du signe de fonction

Par rapport aux objectifs envisagés *a priori* par cette séance, on constate que les signes associés à l'objet fonction sont très complexes et demeurent longtemps mélangés à d'autres signes. Cependant, au fur et à mesure que la discussion se développe, ces signes se précisent et se développent. Cette complexité n'est pas surprenante car il s'agit d'un réseau de signifié multiples et articulés, difficile à construire, auquel toute la séquence expérimentale, assez longue, est consacrée. Celle que nous avons analysée ici est seulement la première de dix-huit discussions collectives.

Dans ce cas particulier, encore plus que pour d'autres objets théoriques pris en compte, il est nécessaire de parler de « signifiés » au pluriel.

Nous avons observé, que les développements respectifs des signes liés aux IMS **Macro** et **Déplacement + Trace** sont très différents. En ce qui concerne le premier, au fur et à mesure que la discussion collective progresse, nous avons remarqué la construction de types de signes complexes différents et l'établissement de liens interprétatifs mutuels.

Au contraire, en ce qui concerne les signes issus de l'IMS **Déplacement + Trace**, nous ne pouvons observer que la production des signes complexes de type « caractérisation », qui, même en étant numériquement importants, restent déconnectés entre eux. Notre analyse du réseau sémiotique a montré que les signifiés de fonction, d'une part comme « relation entre éléments géométriques » et, d'autre part, comme « machine à I/O », semblent ressortir de façon prédominante. Cependant nous ne pouvons pas affirmer que la dimension « co-variationnelle »

reste inexprimée ou peu développée car le nombre de fois où il y est fait allusion ou recours est aussi important que dans le cas des signes liés au signifié de fonction comme « machine à input/output ». Dans le cas des signes issus des outils **Déplacement** et **Trace**, il y a, pourtant, une « objectivation » et une mise en relation beaucoup moins systématique. Il faut descendre au niveau des éléments constitutifs (variables indépendante et dépendante) pour retrouver cette dimension « dynamique » de façon explicite. A ce niveau, comme nous l'avons vu auparavant, au contraire, la dimension co- variationnelle est parfois (voir domaine ou image) prédominante.

Nous ne nous attendions pas à cela et, *a posteriori*, nous considérons que cette évolution est probablement due pour beaucoup aux signifiés personnels de l'enseignante à propos de l'objet mathématique fonction.

De même n'était pas prévisible *a priori* l'idée de relation, présente dès le début chez les élèves. Tout le travail sur les macros, le repérage de la construction cachée a pourtant permis au signifié associé, qui démarre en étant « statique », de devenir de plus en plus « dynamique ». Cette évolution a été rendue possible par la prise de conscience de la part des élèves de toute la dialectique entre les différentes trajectoires des points qui bougent et la construction géométrique correspondante.

En revanche, comme prévu *a priori*, l'outil **Macro** a joué un rôle très fort et déterminant (voir les familles des signes liées respectivement à « chose magique » et à « machine à I/O »).

## 5. Deuxième discussion collective analysée (DC 13) : « Euler dans Cabri »

Pour la lisibilité du texte, nous ne présenterons pas ici l'analyse ayant conduit au réseau sémiotique relatif à la discussion collective n°13.

Nous nous contentons de présenter les résultats principaux de cette analyse, en donnant le tableau synthétique des signes identifiés lors de cette analyse et en commentant brièvement le réseau sémiotique associé<sup>96</sup>.

Signes simples	Signes-artefact : « A », « abscisse(s) » « AP/SegmentAP » ; « appliquée/s » ; « bouger (Var Indép) » ; « Calculatrice » ; « Droite » ; « Euler » ; « exprs de co-variation » ; « FaireCroître/Augmenter » ; « Fenêtre des nombres » ; « LonguerEtMesure » ; « M » ; « MesureDuSegmAP » ; « Nombre » ; « Perpendiculaire (par P) à la droite (AP) » ; « point zero » ; « point A d'Euler » ; « Point Sur Un Objet » ; « Report de Mesure » ; « reproduire/former/tracer/dessiner » ; « Segment PM » ; « symétrique » ; « Trace » ; « valeur de AP » ; « valeur de l'abscisse » ; « Valeur de l'appliquée » ; « valeurPM » ; Signes-pivot : « croissance » ; « résultat de ».
----------------	---

96 L'analyse complète du réseau est disponible pour tout lecteur qui le désire auprès de l'auteur.

	Signes-mathématiques : « dérivée(s) » ; « Droite de symétrie » ; « Fonctions paires » « formule » « origine » ; « graphe » ; « g(x) » ; « minimum » ; « tangente » ; « Valeur de x » ; « valeur de y » ; « valeur minimum » « x » ; « $x^2+5$ ».
Signes Complexes	<p>           Caract(ObjetGéo)Trajectoire ;            Caract(Parcours/ObjetGéo)Trajectoire ;            Caract(ParcoursD'UnPoint)Trajectoire ;            Caract(RésultatCalculatrice)Var Dép ;            Déf(CeQu'OnObtient/Résultat)Var Dép ;            Déf(Mouvement)Var Indép ;            Déf(Opérationnelle)CourbeSymétrique ;            Interpr"Appliquée"- "variable dépendante" ;            Interpr"Appliquée"- "variable" ;            Interpr"CourbeQuiAugmente"- "croissance" ;            Interpr"CroissanceSymétrique"- "Carré" ;            Interpr"g(x)-"<math>x^2+5</math>" ; Interpr"MesureDuSegAP"- "x" ;            Interpr"PointAd'Euler"- "Origine" ;            Interpr"PointPlusPrèsDroite"- "ValeurMinimum" ;            Interpr"Points à Droite de A"- "Valeurs positives de x" ;            Interpr"point zero"- "point A d'Euler" ;            Interpr"Resultat de"- "ValeurPM" ;            Interpr"Résultat"- "SegmentPM" ;            Interpr"Segment PM"- "variable" ;            Interpr"Segment PM"- "variable dépendante" ;            Interpr"Segment"- "x" ;            Interpr"SegmentAP"- "VarIndép" ;            Interpr"SegmentPM"- "g(x)" ;            Interpr"SegmentPM"- "Appliquée" ;            Interpr"SegmentPM"- "ValeurDeL'Appliqué" ;            Interpr"Valeur de x"- "ValeurAP" ;            Interpr"ValeurMinimumg(x)"- "g(0)" ;            Interpr"ValeurMinimumVarDép"- 5 ;            Interpr"VarIndép"- "x" ;            Interpr"x"- "MesureDuSegmAP" ;            Interpr"x"- "SegmentAP" ;            Interpret"x"- "valeur de l'abscisse"         </p>
Instruments de Médiations sémiotique	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <b>Déplacement (direct et indirect)</b> combiné avec <b>Trace 2</b> identifié par l'évocation ou le recours direct au déplacement de P et au déplacement de M;</li> <li>○ <b>Fenêtre des nombres</b></li> </ul>

Tableau synthétique des signes relatifs à la discussion collective 13

Remarquons d'abord qu'à la différence de la première discussion collective, le réseau sémiotique présente un nombre très réduit de caractérisations et définitions, qui, d'ailleurs, sont mobilisées seulement implicitement. En revanche, le réseau se compose d'un grand nombre d'interprétations.

Nous relierons cette différence à plusieurs facteurs :

- au type de tâches données,
- au type d'artefacts différents impliqués,



- au type de signes divers mobilisés.

En fait, la tâche était celle de construire le graphe de la fonction  $g$  qui à  $x$  réel associe  $g(x) = x^2 + 5$  en implémentant, dans Cabri, la méthode décrite par le texte d'Euler.

A la différence de la première discussion collective, les artefacts impliqués étaient donc au nombre de deux : Cabri-géomètre et le texte d'Euler. Le motif de la discussion était comme dans le cas de la première discussion, d'établir un lien entre signes-artefact et signes-mathématiques. Cependant, dans ce cas-ci, la composante iconique, au sens de Peirce (Chapitre 1, § 5.1.6.1), des signes-artefacts impliqués, issus du texte d'Euler, était beaucoup moins importante que dans le cas de la première discussion, où les signes-artefact dérivait de la phénoménologie de l'activité avec Cabri. En même temps, la composante symbolique de ces mêmes signes-artefact, issus du texte d'Euler, était prédominante.

C'est pour cette raison que dans cette discussion (et nous pouvons le voir dans le réseau), le travail d'établissement de liens interprétatifs entre une grande multiplicité de signes appartenant à des registres différents (algébrique, numérique et géométrique) et à des contextes différents, (les mathématiques, l'histoire des mathématiques, la vie ordinaire, Cabri) est prédominant. Par exemple le signe «  $x$  » est relié aux signes : « variable indépendante », « mesure du segment [AP] », « mesure de la distance de A de P », « abscisses » (qui est à la fois un signe-artefact du texte d'Euler et un signe-mathématique) et à «  $a$  » (car le nombre sur lequel on veut effectuer le calcul est étiqueté, par l'outil « Calculatrice » de Cabri, «  $a$  »), etc. De même, nous pouvons observer un développement « en étoile » : il n'y a pas d'axes privilégiés de développement mais plutôt une expansion selon plusieurs directions.

Comme le montre le réseau, le travail de mise en relation est très riche, ce qui correspond aux objectifs didactiques de l'activité. En fait, à partir de l'interprétation du texte d'Euler l'enjeu de cette activité était :

- d'une part, de reprendre le problème déjà abordé par les élèves à la séance n°5, de représenter géométriquement dans Cabri une fonction numérique donnée, pour retravailler les liens réciproques, dans le graphe de fonction, entre les fonctions géométriques et les fonctions numériques ;
- d'autre part, de réinvestir dans la construction du graphe la notion de trajectoire.

Ainsi, pour accomplir la tâche de représenter le graphe de la fonction donnée selon la méthode d'Euler, dans Cabri, il fallait établir des liens explicites entre les fonctions numériques et les fonctions géométriques. En particulier il fallait :

- réinterpréter en termes géométriques le signifié de variable numérique et relier les nombres à la mesure de segments adéquats ou à la distance entre deux points donnés ;
- associer à la variable indépendante numérique un point libre se déplaçant dans le graphe et à la variable dépendante numérique un point dépendant du point variable indépendante ;
- mobiliser l'outil « Trace » de Cabri, (susceptible par cela de fonctionner comme IMS) et réinvestir l'idée de trajectoire pour obtenir le graphe de la fonction numérique souhaité.

Nous pouvons observer que toutes ces liaisons se mettent effectivement en place lors de la discussion collective 13.

Comme dans le cas de la première discussion collective, nous avons isolé des clusters, c'est-à-dire des sous-réseaux principaux, regroupant tous les signes portant sur le même objet théorique (cf. Figure 8.8 suivante). Ainsi, on peut voir que le cluster vert regroupe tous les signes portant sur « l'origine » ; le cluster rose présente

tous les signes liés à la variable dépendante et le cluster bleu intéresse les signes liés à la variable indépendante. En revanche nous avons encadré en orange les caractérisations diverses et les signes concernant la trajectoire.

Par exemple, rappelons alors l'extrait déjà analysé lors du chapitre six (cf. Chapitre 6, § 2.3.2 et 4.1.1). Cet extrait correspond au cluster vert dans le réseau sémiotique. Lors de ce moment de la discussion collective, nous pouvons observer se tisser les liens entre les signes-artefact « point sur cette droite » de Cabri, « point A » du texte d'Euler, « point zero » et les signes-mathématiques « origine » et « point où la valeur de mon abscisse est zéro ».

De manière analogue, observons le cluster rose dans le réseau sémiotique présenté ci-dessous. Ce cluster correspond plus au moins à l'extrait déjà analysé lors du chapitre 6 (cf. Chapitre 6, § 4.1.1) qui montrait un exemple du processus de complexification/affranchissement de la variable dépendante. Lors de ce moment de discussion collective, la classe parvient à relier :

- les signes-artefact de Cabri : « perpendiculaire par un point (**P**) à une droite (la droite (**AP**)) », « segment [**PM**] », « résultat de la formule » (car le nombre issu du calcul de Cabri est appelé « résultat ») ; «  $a^2 + 5$  » (car le nombre sur lequel on veut effectuer le calcul est étiqueté, par l'outil « Calculatrice » de Cabri, « a »),
- aux signes-artefact issus du texte d'Euler : « valeur des appliquées » et « appliquée » (car dans le texte d'Euler, l'ordonnée est appelée « appliquée »),
- aux signes-mathématiques « variable dépendante », « mesure du segment [**PM**] », « mesure de la distance de P de M », «  $g(x)$  » et «  $x^2+5$  ».

En ce qui concerne la notion de trajectoire, notre analyse a mis en évidence son incidence (voire les petits cadres orange dans le réseau) lors des descriptions du graphe de la fonction  $g$ , fournies par les élèves, dans la deuxième partie de la discussion.

La caractérisation de la trajectoire à la fois comme parcours d'un point qui bouge et comme objet géométrique (**Caract(Parcour/ObjetGéo)Trajectoire**) non seulement est présente mais elle est aussi majoritaire. En fait, contre une seule caractérisation de la trajectoire en termes d'objet (**Caract(ObjetGéo)Trajectoire**), et deux caractérisations de la trajectoire en termes de parcours d'un point qui bouge (**Caract(Parcour)Trajectoire**) ; pour cette troisième caractérisation nous avons pu décompter 21 occurrences. Dans la discussion, cette caractérisation se présente en lien à des verbes comme « former », « tracer », « dessiner » et « reproduire » et associée à signes-artefact comme « M », « P », « point zero », « point A d'Euler » (qui sont à la fois issus du texte d'Euler et de la transposition de ce texte dans Cabri), etc. et à l'outil de Cabri « Trace ».

L'analyse de la discussion montre alors qu'effectivement ce double signifié de trajectoire, développé lors des séances précédentes, a pu être réinvesti dans l'interprétation du graphe. En fait, les élèves décrivent l'allure du graphe de la fonction à la fois en termes dynamiques (comme trace du point M, qui dépend du point P et qui bouge) et statiques (où certaines propriétés géométriques ou spatiales du graphe sont aperçues globalement, comme la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, ou la « concavité »). C'était justement là l'un des objectifs principaux de cette séance et de la séquence expérimentale.

Pour conclure, nous voulons souligner qu'encore plus que dans le cas de la première discussion collective, cette discussion collective a été bâtie et orchestrée par l'enseignante, à partir de l'activité des élèves avec les artefacts Cabri et texte

d'Euler. En fait, non seulement l'enseignante a démarré la co-construction du nouveau milieu commun par une reconstruction coopérative et sélective de l'activité précédente « Euler dans Cabri ». Elle a aussi organisé la discussion à partir de l'analyse du rapport à la maison de Cristina et des réponses écrits par chaque binôme commentant l'allure du graphe (cf. en annexe, Annexe 3, § A3.2 le déroulement précis de la discussion). Ainsi, lors de la première partie de la discussion collective, l'originalité de la méthode d'Euler a-t-elle émergé par la confrontation entre l'activité en binômes de Mattia et Nicola, l'activité des autres élèves, l'activité individuelle de Mauro et le rapport individuel de Cristina. En revanche, lors de la deuxième partie de la discussion collective, le réinvestissement du signifié de trajectoire, dans l'étude des propriétés spatiales et géométriques du graphe, a été obtenu lors de la lecture commentée collectivement des réponses rendues par chaque binôme. Cette articulation correspond bien à notre à notre hypothèse théorique d'inspiration vygotskienne, qui postule la nécessité d'une organisation spécifique des activités sémiotiques différentes (activités dans l'artefact, activités de discussions collectives, activités de rédaction de fiches de travail et activités d'écriture de rapports individuels).

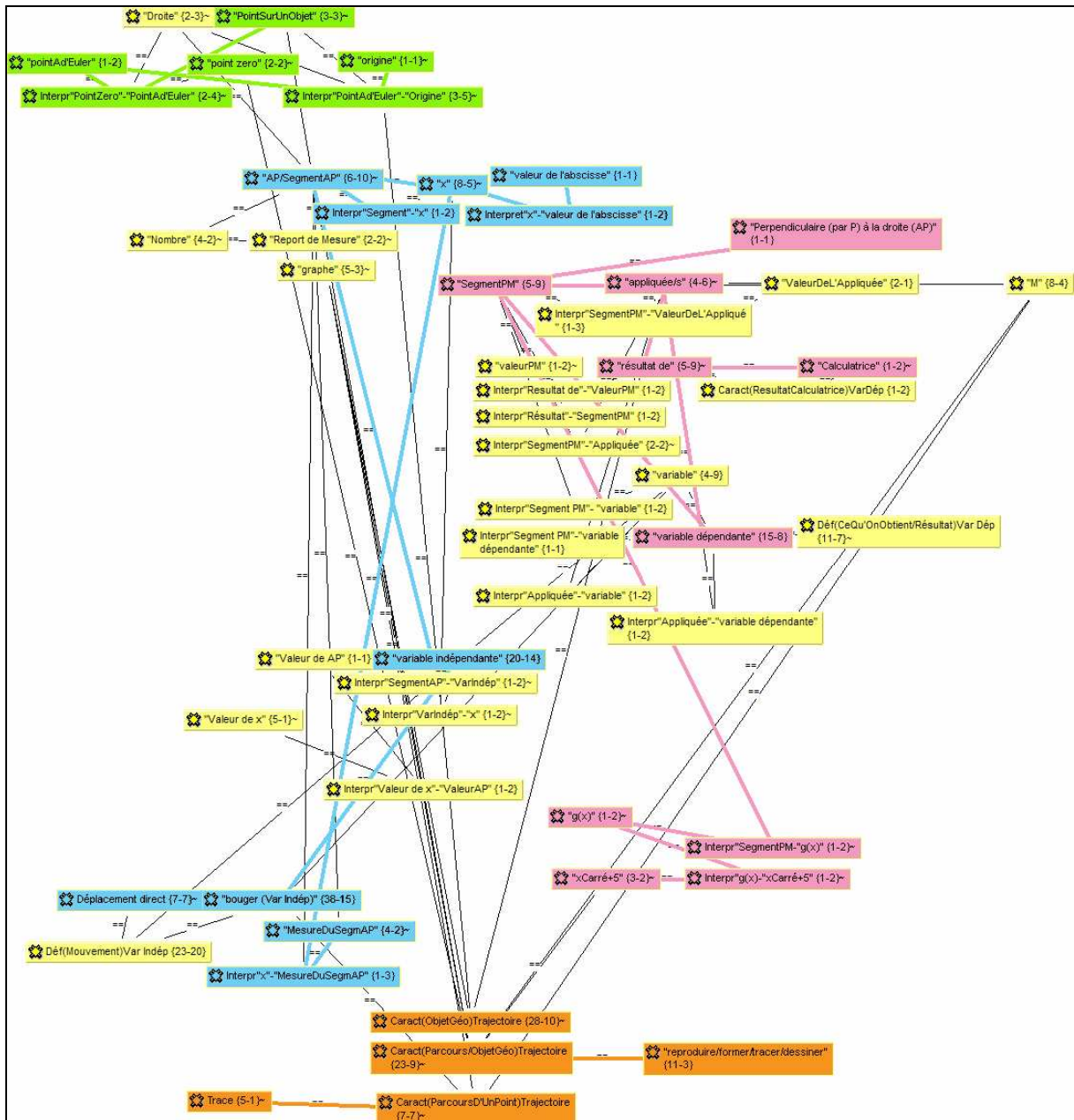


Figure 8.8 - Réseau sémiotique des signes associés à la discussion collective 13 : développement « en étoile ».

## 6. Résultats généraux

Nous avons élaboré une méthodologie d'analyse qui correspond aux hypothèses de la TMS et qui conjointement, permet de modéliser la mise en place et l'évolution de familles différentes de signes liés à un même objet théorique. Ce type d'analyse, bien que présent dans la TMS, n'avait pas été développé de cette manière et constitue donc un apport de notre travail à ce cadre théorique.

En outre, l'analyse en termes de réseaux sémiotiques, a amené à distinguer entre signes simples et complexes et donc conduit à en indiquer les critères pour les identifier.

Ainsi, au niveau des signes simples, la distinction entre signes-artefact, signes-pivot et signes-mathématiques a permis de mieux identifier les apports respectifs d'une part, de l'activité avec artefact, d'autre part, de la gestion par l'enseignante de

la discussion collective. Nous avons vu certains signes, comme par exemple « chose magique » ou « dépendre de », devenir respectivement un signe-artefact de la fonction ou un signe-pivot par lequel l'enseignante a pu greffer pour la première fois la dépendance fonctionnelle sur la dépendance cause-effet.

En revanche, au niveau des signes complexes, la classification en définitions, caractérisations, interprétations et instanciations, a permis de rendre compte de la complexité du processus de sémiotique, tout en tenant en compte aussi le degré éventuel d'explicitation et de mise en relation entre signes produits divers.

Par conséquent, notre modélisation en termes de réseaux sémiotiques a fourni un outil susceptible de décrire, au moins partiellement, le développement des signifiés associés aux signes produits. En fait, grâce au repérage et à l'identification de différents signes produits et des liaisons respectives construites (par exemple le fait que, pour la variable dépendante, on en parle en termes de « résultat obtenu » (Caract("I/O")VarDép) de même que de « point qui bouge seulement de manière indirecte » (Caract("Mouvement")VarDép)), nous avons pu avancer l'hypothèse que la classe comporte deux signifiés différents en train de se construire.

# Chapitre 9 : Conclusions et perspectives

<b>1. Conclusions.....</b>	<b>383</b>
1.1. Articulation TdS/TMS.....	384
1.1.1. La séquence expérimentale .....	384
1.1.2. Le rôle de l'artefact.....	385
1.1.3. Le rôle de l'enseignante .....	385
1.2. Méthodologie d'analyse.....	387
1.3. Mise au points de critères historico- épistémologiques et cognitifs .....	387
1.3.1. La séquence expérimentale .....	387
1.3.2. Le rôle de l'artefact.....	389
<b>2. Perspectives .....</b>	<b>389</b>

## 1. Conclusions

Quand peut-on dire qu'un travail de recherche a été achevé ?

L'une de mes directrices de thèse m'a souvent rappelé que « il meglio è nemico del bene », c'est-à-dire que « le mieux est l'ennemi du bien ».

Ainsi, quel que soit le désir de continuer, à approfondir les nouvelles questions surgies, à faire face aux frustrations, il faut bien, à un moment donné, s'arrêter, regarder en arrière et essayer de faire le point, en cherchant aussi à dégager les nouvelles pistes qui s'ouvrent.

Notre problème initial était d'étudier le processus de médiation sémiotique à partir d'un artefact lors du processus d'enseignement- apprentissage d'une notion mathématique donnée.

En effet, notre objectif situé dans le cadre des études sur les nouvelles technologies, visait à analyser les caractéristiques sémiotiques d'un artefact, non comme une limite à gérer, mais comme une potentialité effectivement exploitable du point de vue didactique.

Cet objectif nous a conduit à devoir gérer, tant dans la conception que dans la réalisation de la séquence expérimentale, deux niveaux de granularité très différents : un niveau macro et un niveau micro.

D'une part, en nous situant dans une perspective vygotkienne, nous avons bâti une ingénierie didactique sur le long terme. Nous considérons cette condition comme incontournable pour la mobilisation de certains artefacts en tant que médiateurs sémiotiques et pour permettre la dialectique entre plan intersubjectif et plan intra-subjectif dans la mise en place effective du processus de médiation sémiotique.

D'autre part, nous avons dû nous outiller et entreprendre une analyse très fine, des mécanismes langagiers de constitution et de fonctionnement des signes. En fait, tels mécanismes sont très subtils et denses.

Dans la gestion de ce double niveau, nous avons eu recours à deux cadres théoriques différents. D'une part, nous nous sommes placé au sein de la TMS, par rapport à laquelle nous avons organisé le processus de médiation sémiotique. D'autre part, nous avons décidé de faire intervenir de façon croisée, la TdS, à la fois comme outil de construction et d'analyse de la séquence expérimentale.

La mise en place de cette articulation entre cadres théoriques différents constitue un premier résultat de notre travail. En fait, non seulement, elle a conduit à la construction de notre séquence expérimentale mais elle a aussi permis, à la lumière des questions posées, de décrire et interpréter *a posteriori* les phénomènes observés. Au cours de nos premiers trois chapitres, nous avons dégagé les critères de constructibilité de cette ingénierie, qui, par conséquent constituent en eux-mêmes un théorème « constructif » de cette articulation possible.

## **1.1. Articulation TdS/TMS**

Nous avons questionné cette articulation entre TdS et TMS tout au long de notre travail de thèse et avons identifié plusieurs plans de réponses.

Nous nous sommes aussi demandé en quoi consistent finalement les apports respectifs de la TdS et de la TMS. Chaque cadre théorique, nous semble, en fait, pouvoir fournir un regard complémentaire de l'autre, en permettant parfois de se interroger, parfois de s'intégrer, réciproquement.

Nous avons donc essayé de lire ces apports respectifs surtout en termes d'enrichissement réciproque.

### **1.1.1. La séquence expérimentale**

En questionnant cette articulation, un premier plan de réponses concerne donc la construction de l'ingénierie.

L'articulation TdS/TMS a conduit à l'organisation d'un processus d'enseignement-apprentissage, modélisé à la fois comme processus d'adaptation à un milieu didactique organisé, porteur de déséquilibres et comme processus de construction de signifiés. Cette double approche a trouvé son instanciation tant dans l'organisation de l'architecture globale de la séquence que dans la conception, au niveau microscopique, des tâches diverses, au sein de chaque séance.

Rappelons que, par exemple, au niveau global, cette articulation a amené à problématiser l'idée même de représentation d'une fonction numérique et à préparer la séance concernant l'arrivée d'un élément de médiation sémiotique, tel que le texte d'Euler, par une autre séance, portant sur les différents représentations possibles d'une fonction numérique.

Toujours au niveau de l'architecture globale, cette articulation a aussi conduit à concevoir une organisation sociale bien précise des activités, en intercalant activités en binômes avec Cabri, rapports individuels à la maison et discussions collectives.

Un premier apport fondamental de la TdS à la TMS a été donc celui d'aider à la conception de certaines tâches et à l'organisation de certaines situations problème.

Par cette analyse issue de la TdS, nous avons pu mettre l'accent sur la manière dont ces tâches ont été conçues, ce qui a permis de souligner un aspect de la TMS souvent mal interprété. En fait, on considère parfois que dans la TMS, lors des discussions collectives, l'enseignant finit simplement par dire ce qu'il veut que les élèves apprennent. Cependant cette interprétation s'arrête à une lecture de la discussion partielle, abstraction faite de tout le travail d'élaboration et puis de

---

résolution des tâches précédant la discussion même. Notre thèse a cherché à montrer le contraire. Les moments de discussion collective sont préparés par des tâches appropriées avec l'artefact. Ce n'est que sur la résolution de ces tâches, comportant, souvent, des moments adidactiques, et sur la production, le partage et la réélaboration conséquente de certains signes, issus de cette activité de résolution, que l'enseignante a pu enraciner et guider le développement des signifiés mathématiques lors de la discussion collective.

### 1.1.2. Le rôle de l'artefact

Du point de vue de l'artefact, cette double perspective théorique a conduit à impliquer Cabri-géomètre, tant comme source de rétroaction du milieu organisé que comme instrument de médiation sémiotique. Il s'agit de deux perspectives complémentaires non exclusives, l'une permettant de mieux saisir le rôle et l'effet potentiel, sur l'apprentissage, de la résolution de certains problèmes, l'autre de mieux guider l'orchestration de la discussion collective vers l'exploitation de ce potentiel. En fait cette double perspective a conduit d'une part, à une analyse du potentiel sémiotique des outils *Déplacement*, *Trace* et *Macro* de l'artefact, et, d'autre part, à l'organisation de rétroactions opportunes de Cabri, au sein de chaque séance. Cette double perspective a ainsi permis de concevoir des types de tâches différents. Certaines tâches ont comporté plutôt la construction de connaissances, comme outils de solutions de problèmes posés ; d'autres tâches ont surtout favorisé le travail sémiotique sur les signes en construction. Par l'analyse de deux discussions collectives, nous avons vu que sur ces connaissances et sur ces signes l'enseignante a pu finalement bâtir un processus de médiation sémiotique qui a été objet d'analyse de ce travail.

Lors de la conception de la séquence, l'analyse en termes de TMS a permis de mettre l'accent sur la polysémie de certains signes issus de l'artefact, qui ont une signification tant dans le monde de l'artefact que dans les mathématiques (pensons par exemple à l'outil « trace/trajectoire » de Cabri). Nous avons vu que ces outils pouvaient jouer un rôle pivot dans la construction des signifiés mathématiques visés. Cette perspective a ajouté une autre dimension à celle de la TdS.

D'autre part, la TdS a permis de considérer le milieu en termes de fonctionnement d'un système dynamique d'actions/rétroactions, susceptible de favoriser l'élaboration de critères de validation socialement partagés. Nous avons vu que ce fonctionnement a occupé une place importante dans les discussions collectives, où il a participé de façon déterminante à la constitution d'un espace inter- subjectif dans lequel les signifiés socialement partagés ont pu se développer. Cette notion a permis non seulement de guider la construction de la séquence mais aussi d'interpréter, *a posteriori*, un grand nombre d'actions conduites tant par l'enseignante que par les élèves, dans le processus de médiation sémiotique.

### 1.1.3. Le rôle de l'enseignante

Le deuxième problème de ce travail de recherche a été celui d'étudier de manière plus approfondie le rôle de l'enseignant dans la gestion du processus de médiation sémiotique lors du moment de discussion collective.

Comme sur le plan de l'organisation de la séquence, sur ce deuxième plan, nous avons aussi questionné l'articulation TdS/TMS.



D'une part cette articulation a permis d'interroger, approfondir, préciser et intégrer, les outils théoriques issus de ces deux cadres théoriques. Ainsi, par exemple, nous avons pu réinterpréter la notion dérivée de la TMS de « constitution d'un espace intersubjectif », en termes de mise en place et de modification du milieu commun attendu. Cette métaphore fondamentale de Vygotski, finalement insaisissable, a pu ainsi trouver des outils efficaces, bien que partiels, de modélisation dans la TdS. En outre, la TdS n'a pas seulement permis de mieux décrire l'« espace intersubjectif » mais, à partir de la notion de milieu, a aussi donné des critères de construction.

Réciproquement, la nécessité de modéliser une discussion collective, spécifiquement orchestrée en fonction du processus de médiation sémiotique, a conduit à préciser puis à étendre, par exemple, les notions de résonance ou la classification des actions de l'enseignant, proposée par Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (2000) et issue de la TdS. D'une part, cette opération a montré l'efficacité de ces outils. D'autre, part, elle a donné des éléments ultérieurs d'approfondissement. Par exemple, à partir de la TMS, nous avons pu identifier des actions à dominante mésogénétique spécifiques au processus de sémosis, qu'on ne pouvait pas prendre bien compte à partir d'une analyse en termes de milieu. En fait, ces actions, à la différence, par exemple des actions mésogénétiques comme les reconstructions coopératives ou sélectives de l'activité ou l'exécution au rétroprojecteur, se situent exclusivement au niveau du discours, ne portent pas sur les situations ou les objets réels et ne modifient pas vraiment le milieu, puisqu'elles n'apportent pas vraiment d'éléments nouveaux. Ces actions (pensons, par exemple, aux actions de paraphrase, de généralisation ou de demande d'interprétation) sont de type langagier et jouent parfois exclusivement sur la forme du discours, en permettant ainsi l'établissement et l'enrichissement du réseau sémiotique et un changement de signification des éléments du milieu présents.

Un autre apport fondamental de TdS à la TMS a été la mise en évidence du contrat didactique spécifique, nécessaire au bon fonctionnement du processus de médiation sémiotique. A partir de la notion théorique de contrat, issue de la TdS, nous avons pu identifier les règles principales de fonctionnement sous-jacentes à ce processus. Nous avons vu, par exemple, que certaines règles, comme la règle fondamentale qui veut que « tout ce qui se passe dans Cabri ait une correspondance dans les mathématiques » (R1), ou comme la règle qui exige que « ce qui est posé comme « signe » reste « signe » et, en particulier, que les objets théoriques ne soient pas soumis aux mêmes types de nécessités auxquelles les objets concrets de l'artefact obéissent forcément » (R11) ou encore comme la règle qui postule que « si l'artefact est un bon médiateur, l'on doit pouvoir fournir une interprétation mathématiquement consistante des ses « limites » (R12), sont nécessaire à garantir que le jeu interprétatif soit aussi à la portée des élèves, c'est-à-dire toute la dévolution possible.

Inversement, la TMS a apporté à la TdS des éléments de caractérisation d'un contrat didactique qui pourrait potentiellement permettre de faire face aux pannes du milieu adidactique. En fait, on sait bien que tout ne peut pas fonctionner de façon adidactique et que, souvent, à partir d'un certain moment, les conditions pour un fonctionnement adidactique ne sont plus garanties, il peut y avoir un blocage des élèves. Le contrat que nous avons identifié pourrait alors permettre de faire fonctionner la relation didactique au-delà des limites de la situation. En fait, lors de notre recherche, nous avons vu fonctionner une situation didactique, justement après les moments adidactiques d'activité avec l'artefact. Nous avons vu que, dans ce

nouveau contrat, les positions et les responsabilités de l'enseignante et des élèves n'étaient pas les mêmes que dans une relation didactique habituelle. Il y avait une sorte de circulation des rôles et, bien que l'enseignante gardait le contrôle épistémologique de la situation, une certaine symétrie de positions.

C'est justement grâce à ces partages de responsabilités, négociés au sein de ce contrat spécifique, que nous avons aussi pu remarquer une coparticipation active à la co-construction du milieu commun et des moments adidactiques qui n'étaient pas, du tout, organisés par l'enseignante. C'est aussi pour cette raison que nous avons pu étendre la classification des actions de l'enseignante aux élèves. Toujours pour cette raison, nous avons dû aussi intégrer la classification proposée par Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni (2000), en introduisant, à côté de la notion de fusion topogénétique, celles de la réduction topogénétique et de déplacement topogénétique vers un élève, un binôme, ou la classe entière.

## **1.2. Méthodologie d'analyse**

Notre recherche de recherche repose sur un travail méthodologique assez important. Bien qu'encore à raffiner, l'élaboration des outils d'analyse, leur explicitation, la recherche et la mise au point de différents critères de classification ont occupé une partie centrale de cet étude.

Par rapport à la modélisation des actions de l'enseignant, par exemple, nous avons repris, réinterprété et intégré les outils issus des recherches de Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni et ses collègues (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000), sur les mésogenèse, topogenèse et chronogenèse, avec les outils issus des recherches de Comiti, Grenier et Margolinas (Comiti et Grenier 1993 ; Comiti, Grenier et Margolinas, 1995) sur la résonance, avec les outils issus des recherches de Bartolini Bussi et ses collègues (Bartolini Bussi et al, 1995a et 1995b), sur le processus d'orchestration des discussions mathématiques, et avec d'autres outils encore, élaborés de manière originale.

Nous avons ensuite étendu ces outils à l'analyse des élèves.

Afin de modéliser les réseaux sémiotiques, notion cruciale dans la TMS, nous avons mis au point des outils qui n'étaient pas présents dans ce même paradigme théorique.

En même temps, nous avons élaboré une classification des signes susceptible de rendre compte d'une part du processus de sémosis, d'autre part du degré d'explicitation des signifiés potentiels associés.

## **1.3. Mise au point de critères historico- épistémologiques et cognitifs**

### **1.3.1. La séquence expérimentale**

Notre séquence expérimentale constitue encore un résultat de ce travail d'un autre point de vue. Elle est le résultat de l'identification et de la mise en place de critères d'ordre cognitif et historico- épistémologique. En fait, notre brève analyse épistémologique a conduit à la nécessité de fonder l'apprentissage de la notion de fonction, telle qu'elle l'a été historiquement, sur le signifié de co-variation.

Nous avons vu comment la construction de ce signifié a des implications fortes dans l'apprentissage de la notion de variable et dans une interprétation dynamique du graphe de fonction. Cependant, ce signifié co- variationnel de fonction est parfois plus que négligée dans l'institution scolaire, qui au contraire, a tendance à

développer une approche quantitative, presque exclusivement numérique ou algébrique. Ces considérations ont conduit à concevoir une séquence expérimentale d'un certain point de vue, radicalement différent de ce que présentent les curricula en France et en Italie. Nous avons en fait bâti la construction des signifiés de fonction et de graphe de fonction à partir des fonctions géométriques, dans un environnement de géométrie dynamique (EGD), tel que Cabri-géomètre.

Nous n'avons pas vraiment questionné le fonctionnement *a posteriori* de cette séquence et l'apprentissage effectif des élèves. Cela constitue finalement une frustration par rapport à ce travail de thèse. Cependant, nous avons pu avoir un bref aperçu de son déroulement lors de l'analyse des actions des élèves et des réseaux sémiotiques des discussions collectives. À ces occasions nous avons ainsi vu, par exemple, que, déjà après seulement la première activité avec Cabri et la première discussion collective, le double signifié de fonction comme « relation de co-variation » et comme « machine à I/O » étaient présent. Nous avons aussi vu que lors de la première discussion, des élèves étaient déjà capables tous seuls de mobiliser certains critères comme le déplacement indirect ou indirect, pour statuer sur le rôle du point  $H'$ , variable dépendante, (épisode de la composition de fonctions), ou pour aller chercher un outil de Cabri susceptible de fonctionner comme signe adéquat d'une fonction à trois variables indépendantes (épisode de l'animation multiple), ou, encore, de réinvestir le signifié de fonction comme « machine à input/output » dans un contexte différent comme celui des opérations algébriques.

De même, lors de la deuxième discussion collective analysée, nous avons pu observer l'établissement, de la part de certains élèves, de tout un ensemble de liens interprétatifs entre les signifiés de fonction géométrique, de trajectoire et de fonction numérique, dans la construction et la description du graphe de fonction.

Il s'agit d'une évaluation des apprentissages des élèves, indirecte et partielle, puisque se basant essentiellement, d'une part, sur les actions des élèves, d'autre part, sur les contributions des élèves dans l'évolution des réseaux sémiotiques. Cependant elle permet d'obtenir des informations et d'inférer positivement sur ces apprentissages.

La participation des élèves à la co-construction du milieu commun a été un élément ultérieur permettant d'attester du processus d'apprentissage en cours.

En fait l'évolution de la discussion nous donne en filigrane une trace de ce que les élèves avaient construit précédemment (individuellement et en binômes) lors de l'activité avec Cabri. Sans l'implication active de élèves dans la reconstruction coopérative et sélective des différents éléments de l'activité, par exemple, et dans l'explicitation des signifiés personnels construits, aucune discussion collective n'aurait pu être se mettre en place, ni évoluer. L'enseignante, en fait, orchestre l'évolution de la discussion, vers l'émergence des signifiés mathématique cibles, toujours, à partir de l'expérience phénoménologique des élèves avec l'artefact et des signifiés personnels élaborés.

On pourrait alors dire que nous étions plus intéressées à l'interaction apprentissage- enseignement, qui émerge de l'analyse des discussions collectives, qu'au seul processus d'apprentissage. En ce qui concerne, donc, le bon fonctionnement global de la séquence, le lecteur devra nous faire confiance. D'ailleurs, cette séquence, après sa mise au point et sa mise en oeuvre en 2002, n'est pas restée un épisode isolé mais a été reproduite plusieurs fois, par plusieurs enseignants différents. Ceci témoigne d'une certaine reproductibilité et robustesse.

La nécessité de travailler avec une enseignante et une classe non ordinaires peut apparaître comme une faiblesse de notre thèse, comme de la TMS<sup>97</sup>. En effet, ce cadre théorique nécessite un enseignant avec une expérience particulière dans la pratique d'orchestration des discussions collectives. Cependant, par rapport à notre travail de thèse, ce contexte optimal a été non seulement une nécessité, mais aussi une garantie du fait que la modélisation que nous en avons tirée, est dans une certaine mesure effectivement représentative du processus que nous voulions étudier.

### 1.3.2. Le rôle de l'artefact

Nous avons démarré nos études d'abord en remarquant que, sous certaines conditions, des outils sont susceptibles de fonctionner comme signes, dans la construction de certains signifiés. Ensuite nous avons identifié le signifié de co-variation comme une composante centrale de la notion de fonction et nous avons relié ce signifié à la métaphore cognitive fondamentale du mouvement. Au même temps, une analyse épistémologique de l'artefact Cabri-géomètre (en termes de potentiel sémiotique) nous a conduit à repérer, dans cet même artefact, des outils susceptibles de fonctionner effectivement comme signes pour la construction de ce type de signifié.

Nous avons donc cherché à prendre en compte l'apprentissage au moyen de l'artefact, grâce à une double analyse épistémologique-cognitive, en termes d'instrument, et sémiotique, en termes de potentialités sémiotiques (rappelons à ce propos le rôle fondamental joué par les signes-artefacts dans le « processus d'icônisation »).

Il s'agit d'une analyse complexe qui a voulu considérer l'usage d'un EIAH, sur le long terme. Ce choix est aussi relativement rare. Lors de l'analyse des discussions collectives, nous avons pu voir les effets d'un tel choix dans les formulations des élèves : les mélanges sémiotiques et les imbrications entre le vocabulaire théorique et le vocabulaire issu de l'artefact ont demeurés très significatifs et importantes, pour longtemps.

## 2. Perspectives

Plusieurs pistes de travaux s'ouvrent à l'issue de ce travail de recherche.

L'analyse des deux discussions collective a montré que nous ne pouvons pas traiter des discussions collectives comme d'un phénomène déterminé. Qu'une certaine caractérisation soit produite ou non, à un certain moment donné, n'est pas calculable *a priori*. On pourrait même parler d'effet « papillon ». L'utilisation parfois inconsciente d'un verbe plutôt que d'un autre, peut conditionner toute l'évolution subséquente de la discussion. Ainsi, la production et l'élaboration de certains signes dépend, en fait, d'une part du potentiel sémiotique des outils impliqués et des tâches proposées, d'autre, part des signifiés personnels des élèves, et de l'enseignante. En fait, c'est à lui qu'est confiée la responsabilité ultime d'orchestrer la discussion afin de favoriser le processus d'internalisation des signifiés mathématiques cibles. Cette

---

<sup>97</sup> Rappelons que ce type de contrainte est caractéristique aussi d'un grand nombre de recherches au sein de la TdS. Surtout au début des recherches au sein de ce cadre théorique, les enseignants et les classes prises en compte n'étaient pas ordinaires. Seulement récemment après vingt ans d'études, ces analyses ont pu être étendues aussi aux classes ordinaires.

responsabilité a un lien étroit avec ce qu'il considère comme les signifiés à construire avec les élèves.

Nous avons vu, par exemple, comment au sein du réseau sémiotique de la variable indépendante, le signifié d' « objet de départ » a été développé davantage par l'enseignante en déterminant un développement bi-axial du signifié associé à ce signe.

De manière analogue, on pourrait étendre l'analyse des réseaux sémiotiques aux rapports individuels des élèves pour étudier l'incidence spécifique dans ces réseaux nouveaux, des signes élaborés collectivement, sur la construction des signifiés personnels des élèves.

Nous sommes convaincues que le contrat que nous avons identifié est une condition nécessaire au processus de médiation sémiotique. C'est pour cette raison, que nous avons finalement décidé de travailler avec une classe et une enseignante non ordinaires. Ce choix nous a permis justement d'observer le fonctionnement déjà stable de ce contrat et, en conséquence, la mise en place aussi du processus de médiation sémiotique.

Lors de notre analyse, nous avons de plus observé que, l'enseignante met constamment en place des éléments de contrôle du contrat, cherche à expliciter les règles implicites, souligne les « bonnes » actions des élèves (celles qui favorisent ce type de contrat), etc. Ces éléments pourraient être des conditions qui favorisent l'établissement de ce contrat. Cependant il serait intéressant d'aller chercher d'autres conditions permettant l'instauration de ce contrat.

En ce qui concerne l'articulation TdS/TMS, il serait intéressant de relire des travaux qui ont été faits, soit dans la TdS soit dans la TMS, à la lumière de cette articulation. En ce qui concerne les travaux conduits au sein de la TMS, on pourrait en fait s'attendre à ce que, par exemple, toute une partie qui n'est pas finalement théorisée, repose, sur un certain usage de la théorie des situations. Inversement, en ce qui concerne la TdS, on pourrait trouver, dans les travaux sur l'institutionnalisation ou sur l'action de l'enseignant, des études qui, *de facto*, portent aussi sur les signifiés et qui pourraient trouver des outils efficaces d'interprétation dans la TMS.

A partir d'une telle perspective double (de composante fondamentale du milieu et d'instrument de médiation sémiotique), il serait aussi intéressant de considérer l'intégration, dans l'enseignement, de l'usage d'artefacts, aussi pour d'autres notions mathématiques (en particulier de géométrie dynamique), et pour d'autres signifiés mathématiques, fondés sur l'idée de variation, comme celui de tangente et de dérivée.

A la lumière des analyses sur l'action de l'enseignante, une nouvelle piste qui s'ouvre serait celle de questionner de manière plus explicite le lien entre institutionnalisation et processus de médiation sémiotique. On pourrait, en fait, relier ce processus d'institutionnalisation, où se fait la transformation des connaissances en savoirs, à la dialectique « vygotskienne » entre signifiés personnels et signifiés mathématiques socialement partagés et visés. Nous avons vu que la gestion délicate de cette dialectique occupe une place centrale dans la TMS. Tout un nombre d'actions spécifiques de l'enseignante y est consacré et un contrat didactique spécifique se met en place. Nous estimons que ces éléments pourraient déjà permettre de mettre en lumière, par exemple, certaines conditions favorisant aussi le

processus d'institutionnalisation et permettre de lire autrement ce processus, souvent moins explicitement travaillé que le processus de dévolution.

Pour conclure nous voudrions revenir sur le paradoxe sur l'enseignement pointé pour la première fois par Brousseau : d'une part l'enseignant veut que les élèves apprennent, d'autre part, il ne peut pas communiquer le savoir visé « directement », c'est-à-dire dire sans que ceci soit construit personnellement par les élèves. En fait, dans ce dernier cas, le risque serait de communiquer un savoir finalement dépourvu de sens.

En bien, dans l'articulation entre situations didactiques et discussions mathématiques, il nous semble que ce paradoxe non seulement peut trouver son apogée, mais peut aussi être dépassé.

Il peut trouver son apogée, car à ce niveau, nous pouvons observer, représenté de manière extrême, la tension entre « ce que l'enseignant voudrait dire », « ce qu'il ne doit pas dire » et « ce qu'il s'attend à que les élèves disent ».

Il peut être dépassé, car nous croyons que l'utilisation, autant difficile que délicate de la part de l'enseignante, d'outils comme médiateurs sémiotiques, au sein de situations spécifiquement organisées pour l'apprentissage, peut soutenir la tâche très complexe d'harmoniser la construction personnelle de connaissances avec la nécessité institutionnelle de communiquer un savoir culturellement significatif.

Le travail que nous avons accompli a cherché à contribuer à cette tâche. Il s'agit du début mais il nous semble que la route entreprise soit prometteuse... en tout cas très passionnante.



---

# Bibliographie

- Arcavi, A. et Schoenfeld, A. H. : 1987, 'On the meaning of variable', *Mathematics Teacher*, vol. 81(6), pp. 420-427.
- Arcavi, A. et Schoenfeld, A. H. : 1993, 'Mathematics tutoring through a constructivist lens : the challenges of sense-making', *Journal of Mathematics Behaviour*, 11(4).
- Artigue, M. : 1998, 'L'évolution des problématique en didactique de l'analyse', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18.2, pp. 231-262, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Arzarello, F. et Bartolini Bussi, M. G. : 1998, 'Italian Trends in Research in Mathematics Education : A National Case Study in the International Perspective', in Kilpatrick J. & Sierpiska A. (éds.), *Mathematics Education as a Research Domain : A Search for Identity*, Vol. 2, pp. 243-262, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Bachtin, M. : 1979, *Estetica e romanzo : un contributo fondamentale alla "scienza della letteratura"*, Einaudi, Torino.
- Bachtin, M. : 1988, *L'autore e l'eroe : Teoria letteraria e scienze umane*, Einaudi, Torino.
- Balacheff, N. : 1995. 'Conception, propriété du système sujet/milieu', in Noïrfalisse R., Perrin-Glorian M.-J. (éds.) *Actes de la VII<sup>e</sup> Ecole d'été de didactique des mathématiques*, pp. 215-229. IREM de Clermont-Ferrand, Clermont-Ferrand.
- Barnes, M. : 1988, 'Understanding the function concept : some results of interviews with secondary and tertiary students', *Research on Mathematics Education in Australia*, pp. 24-33.
- Bartolini Bussi, M. G. : 1991, 'Social Interaction and Mathematical Knowledge', *Proceedings of the 15<sup>th</sup> Conference of Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 1-16, Assisi, Italie.
- Bartolini Bussi, M. G. : 1993, 'Coordination of Spatial Perspectives : an illustrative Exemple of Internalization of Strategies in Real Life Drawing', *Journal of Math. Behaviour*.
- Bartolini Bussi, M. G. : 1996, 'Mathematical Discussion and Perspective Drawing in Primary School', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 31 (1-2), pp. 11-41.
- Bartolini Bussi, M. G. : 1998a, 'Verbal interaction in mathematics classroom : a Vygotskian analysis', in H. Steinbring et al. (éds.), *Language and communication in mathematics classroom*, NCTM, Reston, Virginia, pp. 65-84.
- Bartolini Bussi, M. G. : 2000, 'The Theoretical Dimension of Mathematics : a Challenge for Didacticians', *Proceedings of 24<sup>th</sup> Annual Meeting del CMESG (Canadian Mathematics Education Study Group)*, Montreal, Canada.
- Bartolini Bussi, M. G. : 2001, 'La matematica come disciplina teorica : referenti concreti ed esperimenti mentali', *Atti del Convegno 'Matematica e scuola :*



- facciamo il punto*, IRRSAE Lombardia, Milano.
- Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1998, 'From drawing to construction : teacher's mediation within the Cabri environment', *Proceedings of the 22<sup>nd</sup> International Conference Psychology of Mathematics Education*, Vol. I, pp. 180-95. Stellenbosh, South Africa.
- Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1999a, 'Instruments for Perspective Drawing : Historic, Epistemological and Didactic Issues', in Goldschmidt G., Porter W. & Ozkar M. (éds.), *Proc. of the 4<sup>th</sup> Int. Design Thinking Res. Symp. on Design Representation*, III 175-185, Massachusetts Institute of Technology & Technion - Israel Institute of Technology.
- Bartolini Bussi, M. G. et Mariotti, M. A. : 1999b, 'Semiotic mediation : from history to mathematics classroom', *For the Learning of Mathematics*, vol. 19(2), pp. 27-35.
- Bartolini Bussi, M. G. et Boni M. : 1995a, 'Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica : un approccio Vygotskiano', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, vol. 18A (3), pp. 221-256.
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. : 1995b, *Interazione sociale e conoscenza a scuola : la discussione matematica*. Rapport technique n°21. Centro Documentazione Educativa, Comune di Modena.
- Bartolini Bussi, M. G., Mariotti, M. A. et Ferri, F. : (à paraître a), 'Semiotic mediation in the Primary School : Durer's glass', in Hoffmann H.; Lenhard J.; Seeger F. (éds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education (Festschrift for Michael Otte)*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M. et Ferri, F. (à paraître b), 'Construction problems in primary school : A case from the geometry of circle', in P. Boero (éd.), *Theorems in School : From history and epistemology to cognitive and educational issues*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Bartolini Bussi, M. G., Boni, M., Ferri, F. et Garuti, R. : 1999c, 'Early approach to theoretical thinking : Gears in primary school', *Educational Studies in Mathematics* Vol. 39(1-3), pp. 67-87.
- Bauersfeld, H. et Cobbs, P. : 1995, *The emergence of mathematical meaning : Interaction in classroom cultures*. Lawrence Erlbaum A. P., Hillsdale, New Jersey.
- Bell, A. et Janvier, C : 1981, 'The interpretation of graphs representing situations', *For the Learning of Mathematics*, vol. 2(1), pp. 34-42.
- Berger, M. : 2002, *The Appropriation of Mathematical Objects by Undergraduate Mathematics Students : a Study*, Doctoral dissertation, School of Mathematics, University of the Witwatersrand, Johannesburg.
- Berger, M. : 2004, 'The functional use of a mathematical sign', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 55, pp. 81-102, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Berthoz, A. : 1997, *Le sens du mouvement*, Odile Jacob, Paris.
- Bessot, A. : 2003, 'Introduction à la Théorie des situations didactiques', *Concepts fondamentaux de la didactique*, Cours pour le M2 EIAH-D de l'Université Joseph Fourier, Grenoble. su internet ?
- Bloch, I. : 2000, 'L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation', Thèse université Bordeaux I.
- Bloch, I. : 2003a, 'Teaching functions in a graphic milieu : What forms of knowledge enable students to conjecture and prove?', *Educational Studies in Mathematics* Vol. 52, pp. 3-28.

- 
- Boero, P. : 1994, 'Situations didactiques et problèmes d'apprentissage : convergence et divergences dans les perspectives de recherche', in M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavnignot (éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France, hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, pp. 17-50. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Borba, M. C. et Confrey, J. 1992. 'Transformations of functions using multi-representational software : visualization and discrete points', *Sixteenth Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education – North America*, Durham
- Bosch, M. et Chevallard, Y. : 1999, 'La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19.1, pp. 77-123, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Bourbaki, N. : 1939, *Théorie des Ensembles (fascicule de résultats)*, Paris.
- Boyer, C. B. : 1990, *Storia della matematica*, Oscar Saggi Mondadori.
- Breidenbach, D. E., Dubinsky, E., Hawks, J. et Nichols, D. : 1992, 'Development of the process conception of function', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 23, pp. 247–285, Kluwer Academic Publishers.
- Bronckart, J.-P. : 1996, *Activité langagière, textes et discours. Pour un interactionisme socio-discursif*, Delachaux et Niestlé S. A., Lausanne (Switzerland) – Paris.
- Brousseau G. : 1986, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques, Thèse d'état de l'Université de Bordeaux*, Bordeaux.
- Brousseau G. : 1998, *Théorie des situations didactiques*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Brousseau, G. et Centeno, J. : 1991, 'Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 11, pp. 167-210, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Brousseau, G. : 1980, Les échecs électifs en mathématiques dans l'enseignement élémentaire, *Revue de Laryngologie*. Vol 101, n°3.4.
- Brousseau, G. : 1982a, 'Les objets de la didactique des mathématiques', in *Actes de la Troisième école d'été de didactique des mathématiques*, Olivet.
- Brousseau, G. : 1982b, 'Ingénierie didactique : d'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique', in *Actes de la Deuxième école d'été de didactique des mathématiques*.
- Brousseau, G. : 1988, 'Didactique fondamentale', in *Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire, Actes de l'université d'été*, Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.
- Brousseau, G. : 1997, *Theory of Didactical Situations in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau G. : 1998, *Théorie des situations didactiques*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Brousseau, G. et Centeno, J. : 1991, 'Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 11.2-3, pp. 167-210, La pensée sauvage, Grenoble.
- Brousseau, N. et Brousseau, G. : 1987, *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Bodeaux, Publication de l'IREM.
- Carlson, M. P. : 1998, 'A Cross-Sectional Investigation of the Development of the Function Concept', *CBMS Issues in Mathematics Education* 7, pp. 114-162.
- Cauchy, A. L. : 1821, *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique. Premier partie. Analyse algébrique*, Paris : l'Imprimerie Royale.
-

- 
- Cerulli, M. et Mariotti M. A. : 2000, *A symbolic manipulator to introduce pupils to algebra theory*, ITS, Montreal.
- Cerulli, M. : 2002, 'Introducing pupils to theoretical thinking : the case of algebra', *Proceedings of CERME2 European Research in Mathematics Education II*, Vol. 1, pp. 139-151. Edited by Jarmila Novotna, Prague.
- Cerulli, M. : 2004, *Introducing pupils to Algebra as a Theory: L'Algebrista as an instrument of semiotic mediation*, Thèse de doctorat, Università di Pisa, Scuola di Dottorato in Matematica.
- Chauvat, G. : 1997, *Etudes didactique pour la réalisation et l'utilisation d'un logiciel de représentations graphiques cartésiennes des relations binaires entre réels dans l'enseignement des mathématiques des DUT industriels*, Thèse, Université d'Orleans.
- Chauvat, G. : 1999a, 'Courbes et fonctions au collège', in *Petit x 51*, pp. 23-44.
- Chauvat, G. : 1999b, 'Etude du rapport aux graphiques cartésien dans les situations d'action instrumentée par le logiciel ORGE', ARDM, *Actes de la 10<sup>ème</sup> école d'été de didactique des mathématiques (Houlgate)*, IUFM de l'Académie de Caen.
- Chevallard, Y. : 1992, 'Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, pp. 73-112, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Clagett, M. : 1968, *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Quantities and Motions. A treatise on the uniformity and difformity of intensities known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, The University of Wisconsin press Madison.
- Comiti, C. et Grenier, D. : 1993, 'L'observation, outil de recherche pour la modélisation de phénomènes didactiques', *Cahier n°3 du séminaire Recherche/Réflexion/Interaction, année 1993*, Publication de l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Grenoble, pp. 55-72d.
- Comiti, C. et Grenier, D. : 1997, 'Régulations didactiques et changements de contrats'. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 17.3, pp. 81-102, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Comiti, C., Grenier, D. et Margolinas, C. : 1995, 'Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situations de classes et modélisation de phénomènes didactiques' in ARSAC et al. (éds.), *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92-113, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Confrey, J. et Smith, E. : 1994, 'Exponential functions, rates of change and the multiplicative unit', *Educational Studies in mathematics*, Vol. 26, pp.135-164.
- Confrey, J. : 1992, *Function probe* [Macintosh Software], Intellimation Library for the Macintosh, Santa Barbara CA.
- Cuoco, A. A. : 1994, 'Multiple representation for functions', in E. Dubinsky, A. Schoenfeld et J. Kaput (éds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, MAA notes 33, pp. 121-140, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Derive (software) : 1994, Software Warehouse, Honolulu, HI.
- Dirichlet, P. G. Lejeune : 1837, *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus und Kosinusreihen*, pp. 133-160.
- Dörfler, W. : 2000, 'Means for meaning', in P. Cobb, E. Yackel, K. McClain (éds.) *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms : Perspectives on Discourse, Tools, and Instructional Design*, Lawrence Erlbaum, Mahwah, N.J., pp. 99-132.
-

- 
- Dorier, J. L. et al. : 1997, *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, éd. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Douady, R. : 1986, 'Jeux de cadre et dialectique outil-objet', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7.2, pp. 5-31, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Dreyfus, T. et Eisenberg, T. : 1983, 'The function concept in college students: Linearity, smoothness and periodicity', *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5(3 et 4), pp. 119-132.
- Dubinsky, E. et Harel, G. : 1992, 'The nature of the process conception of function', in G. Harel et E. Dubinsky (éds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25, pp. 85-106, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Dubinsky, E. : 1989, 'Teaching Mathematical Induction II', in *Journal of Mathematical Behaviour*, 8, pp. 285-304.
- Dubinsky, E. : 1991, 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking' in D. O. Tall (éd.) *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 95-123, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Duval, R. : 1993, 'Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée', *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 5, pp. 37-65.
- Duval, R. : 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Bern.
- Duval, R. : 1998, 'Signe et objet : Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre représentation et objet'. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitive* 6, 139–163.
- Duval, R. : 2000, 'Basic issues for research in mathematics education', *Proceedings of the 24<sup>th</sup> International Conference, Psychology of Mathematics Education*, Vol.1, Hiroshima, Japan, pp. 59–69.
- Eisenberg, T. : 1991, 'Functions and associated learning difficulties', in D. Tall (éd.), *Advanced Mathematical Thinking*, Mathematics Education Library, pp. 140-152, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Eisenberg, T. et Dreyfus, T. : 1994, 'On understanding how students learn to visualize function transformations', in E. Dubinsky, A. Schoenfeld et J. Kaput (éds.), *Research in Collegiate Mathematics Education I, CBMS Issues in Mathematics Education*, 4 , pp. 45-68.
- Eisenhart, M. A. : 1988, 'The ethnographic Research Tradition and the mathematical Education Research', *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 19 (2), pp. 99-114.
- Ellerton, N. F. et Clarkson, P. C. : 1996, 'Language factors in mathematics teaching and learning. Dans A. J. Bishop et al. (éds.), *International Handbook of mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, pp. 987- 1034.
- Engestroem Y. : 1987, *Learning by Expanding : an Activity Theoretical Approach to Developmental Research*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki.
- Engestroem, Y. : 1990, 'When is a tool? Multiple meanings of artefacts in human activity', in *Learning, Working and Imagining: Twelve Studies in Activity Theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, pp. 171-195.
- Euler L. : 1748, *Introductio in analysis infinitorum*, traduit du latin en français, avec des notes et des éclaircissements par J. B. Labey (1797). Introduction a l'analyse infinitesimal. Bachelier, Paris.
- Everaert-Desmedt, N. : 1990, *Le processus interprétatif. Introduction à la sémiotique de Ch.S. Peirce*, Liège, Mardaga.
-

- 
- Falcade, R. : 2001, *L'environnement Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction*, Mémoire de DEA, UJF, Grenoble.
- Falcade, R. : 2002, 'Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe de fonction', *Petit x*, Vol. 58, pp. 47-81.
- Frege, G. : 1904, 'Was ist eine Funktion?' in *Festschrift Ludwig Boltzmann gewidmet zum sechzigsten Geburtstage, 20. Februar 1904*, S. Meyer (ed.), Leipzig: Barth, 1904, pp. 656-666. Traduit comme 'What is a Function?' par P. Geach in *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, P. Geach and M. Black (eds. and trans.), Oxford: Blackwell, third edition, 1980.
- Galluzzi, P. : 1979, *Momento. Studi galileiani*, Roma, Edizioni dell'Ateneo & Bizzarri. Verificare con MA
- Godino, J. D. et Batanero, C. : 1994, Significato institucional y personal de los objetos matemos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, pp. 325-355, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Godino, J. D. et Batanero, C. : 1998, Funciones semióticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, *Seminario de Investigación en Education Matemática (SIEM) de la Sociedad Portuguesa de Investigación en Education Matemática*, Guimaraes.
- Goldenberg, E. P. : 1987, 'Believing is seeing : how proceptions influence the perception of graph', *Proceeding of the 11<sup>th</sup> International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1, pp. 197-203, IGPME Montreal, Canada.
- Goldenberg, E. P. : 1995, 'Rumination about dynamic imagery', in R. Sutherland et J. Mason (éds.), *Exploiting Mental Imagery with computers in mathematics education*, pp. 202-224, Heidelberg : Springer Verlag, NATO ASI series F, Vol 138.
- Goldenberg, E. P., Lewis, P. et O'Keefe, J. : 1992 'Dynamic representation and the development of a process understanding of function' in G. Harel et E. Dubinsky (éds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25, pp. 235-260. Mathematical Association of America. Washington DC.
- Gomes, A. S. : 1999, *Développement conceptuel consécutif a l'activité instrumentée - L'utilisation d'un système informatique de géométrie dynamique au collège*, Thèse de doctorat, Université Paris V, Paris.
- Gray, E. M. et Tall, D. O. : 1994, 'Duality, ambiguity and flexibility : a proceptual view of simple arithmetic', *Journal for Research in Mathematics Education* n. 26, pp. 115-141.
- Grenier, D. : 1988, *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Groetsch, C. W. : 2004, 'Nascent function concepts in Nova Scientia', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 35, N°6, pp. 867-875.
- Grugnetti, L., Marchini, C., Maffini, A. : 1999, 'Le concept de fonction dans l'école italienne; usage de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens', *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, Louvain, pp. 421-444
- Harel, G., et Kaput, J. J. : 1991, 'The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts', in D. Tall (éd.), *Advanced mathematical thinking*, pp. 81-94, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- 
- Hazzan, O. et Goldenberg, E. P. : 1997, 'Students' Understanding of the notion of function in dynamic geometry environments', *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol. 1(3), pp. 263-290.
- Herscovics, N. : 1982, 'Problems related to the understanding of functions', in *Proceeding of the Workshop on Functions*, Foundation for Curriculum Development, Enschede.
- Jahn, A. P. : 1998, 'Des transformations de figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Relations entre aspects géométriques et fonctionnels en classe de seconde. Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Janvier, C. : 1983, 'Teaching the concept of function', *Mathematical Education for Teaching*, vol. 4(2), pp. 48-60.
- Katz, V. J. : 1993, *A history of mathematics*, Harper-Collins, New York.
- Kerslake, D. : 1981, 'Graphs', in K. M. Hart (éd.), *Children's understanding of mathematics concepts : 11-16*, pp. 120-136, Alden Press, Oxford, Angleterre.
- Kolmogorov, A. N. : 1960, 'Introduction' in H. Lebesgue, *The measurement of quantities* (2nd Russian Edition) Uchpedgiz, Moscow.
- Kozulin, A. : 1990, *Vygotsky's Psychology, A biography of Ideas*, Harvard University Press, Cambridge MA.
- Kuratowski, K. et Mostowski, A. : 1966, *Teoria mnogości*, Polskie Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Laborde, C. : 1991, 'Deux usages complémentaires de la dimension sociale dans les situations d'apprentissage en mathématiques', in C. Garnier, N., Bednarz & I. Ulanovskaya (Éds.), *Après Vygotski et Piaget. Perspectives sociale et constructiviste. Écoles russe et occidentale*. Bruxelles, Belgique, Éditions de Boeck, pp. 29– 49,
- Laborde, C. et Capponi, B. : 1994, 'Cabri- géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique', *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 14.1.2, pp. 165-210.
- Laborde, C. : 1999, 'Core geometrical knowledge for using the modelling power of Geometry with Cabri-geometry', *Teaching Math. and its Application*, vol. 18(4), pp. 166-171.
- Laborde, C. : 1999b, 'L'activité instrumentée par des logiciels de géométrie dynamique', Marc Bailleul (ed.), *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques*, pp. 235-244, Caen : ARDM.
- Laborde, C. et Mariotti, M. A. : 2001, 'Grounding the notion of function in a DGS', *Cabri World 2001*.
- Lacasta, E. : 1995, *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*, Thèse, Université Bordeaux I.
- Lagrange, J. L. : 1797, '*Théorie des fonctions analytiques contenant des principes du Calcul Différentiel...*', Paris, De l'Imprimerie de la République, Prairial au V, mai - juin, Première édition, 1797, Troisième édition revue et suivie d'une note par M. J.-A. Serret, Paris, Bachelier, 1847, Œuvres IX, pp. 11-421.
- Lakoff, G. et Núñez, R. : 1998, 'Conceptual Metaphor in Mathematics', in J. P. Koenig (éd.), *Discourse and Cognition : Bridging the Gap*, CSLI/Cambridge University Press, Stanford, CA.
- Lakoff, G. et Núñez, R. : 2000, *Where Mathematics comes from. How the embodied mind brings Mathematics into being*, Basic Books, New York.
- Leinhardt, G., Zaslavky, O. et Stein, M. K. : 1990, *Functions, Graphs, and Graphing :*
-

- Tasks, Learning, and Teaching, *Review of Educational Research*, vol. 60 n. 1, pp. 1-64.
- Leont'ev, A. N. : 1959/1976, *Problemi dello sviluppo psichico*, Editori riuniti, Roma.
- Leont'ev, A. N. : 1977, *Attività, coscienza, personalità*, Giunti Barbéra, Firenze.
- Longo, G. : 1997, 'Geometrie, Mouvement, Espace : Cognition et Mathématiques', *Intellectica Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive*, 25, pp. 195-218.
- Lovell, K. :1971, 'Some aspects of the growth of the concept of a function', in M. F. Roskopf, L. P. Steffe et S. Taback éd(s.), *Piagetian Cognitive Development Research and Mathematical Education*, pp. 12-33, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Wahington DC.
- Mac Lane, S. : 1986, *Mathematics Form and Function*, Springer, Heidelberg.
- Malik, M. A. : 1980, 'Historical and pedagogical aspects of the definition of function', *International Journal of mathematics education in science and technology*, 11 (4), pp. 489-492.
- Mansfield, H. : 1985, 'Points, lines and their representations', *For the Learning of Mathematics*, vol. 5(3), pp. 2-6.
- Margolinas, C. : 1989, *Le point de vue de la validation : essai d'analyse et de synthèse en didactique des mathématiques*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- Margolinas, C. : 1992, 'Eléments pour l'analyse du rôle du maître', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, pp. 113-158, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Margolinas, C. : 2004, 'Point de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques', *Habilitation à diriger les recherches en Sciences de l'Education*, Université de Provence.
- Mariotti, M. A. :1997, 'Justifying and proving : figural and conceptual aspects', in Hejny M. & Novotna J. (éd(s).), *Proceedings of the European Research Conference on Mathematical Education*, pp. 21-27, Podebrady, Czech Republic.
- Mariotti, M. A. :1998, 'Introduzione alla dimostrazione all'inizio della scuola secondaria superiore', *L'insegnamento della matematica e delle Scienze Integrate*, 21B, (3), 209-52.
- Mariotti, M. A. : 2000, Introduction to proof : the mediation of a dynamic software environment, (Special issue) *Educational Studies in Mathematics* Vol. 44, (1&2) , pp. 25-53, Kluwer, Dordrecht.
- Mariotti, M. A. : 2001, "Justifying and proving in the cabri environment", *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, Vol. 6, n° 3 Dordrecht: Kluwer, 257-281.
- Mariotti, M. A. : 2002, 'Influence of technologies advances on students' math learning', in L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (éd(s).), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Lawrence Erlbaum Associates, pp. 695-723.
- Mariotti, M. A. : 2003, 'Introduire les élèves à une théorie. La médiation du logiciel Cabri', *Actes du Séminaire national de didactique de mathématiques*, Vol. 1, pp. 173-186, Paris.
- Markovits, Z., Eylon, B. et Bruckheimer, M. : 1986, 'Functions today and yesterday', *For the Learning of Mathematics*, vol. 6(2), pp. 18-24.
- Markovits, Z., Eylon, B. et Bruckheimer, M. : 1988, 'Difficulties students have with the function concept', *The ideas of algebra*, K-12, pp. 43-60, NCTM 1988 Yearbook.

- 
- Marnyanskii, I. A. :1965/1975, 'Psychological characteristics of pupils' assimilation of the concept of a function', in J. Kilpatrick, I. Wirszup, E. Begie et J. Wilson (éds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, XIII, pp. 163-172, SMSG University of Chicago Press, USA.
- Marty, R. : 1990, *L'algèbre des signes*. Amsterdam : John Benjamins.
- Marty, R. : 1992, 'La Sémiotique selon Robert Marty', <http://www.univ-perp.fr/see/rch/lts/marty/index-r.htm> (basée sur l'ouvrage *99 Réponses sur la sémiotique* de C. et R. Marty édité par le Centre Régional de Documentation Pédagogique, Montpellier).
- Marty, R. : 1996, *76 Définitions du signe relevées dans les écrits de C. S. Peirce*, <http://www.univ-perp.fr/see/rch/lts/marty/76-fr.htm>
- Mercier, A. : 1997, 'La relation didactique et ses effets', en C. Blanchard-Laville (Ed.) *Variations sur une leçon de mathématiques. Analyse d'une séquence : L'écriture des grands nombres*, L'Harmattan, Paris.
- Mercier, A., Schubauer-Leoni, M.L., et Sensevy, G. : 2002, 'Vers une didactique comparée', *Revue Française de Pédagogie*, INRP, Paris, Vol. 141, pp.5-16.
- Mercier, A. : 1992, 'L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique', *Thèse*, Université de Bordeaux I
- Monk, S. : 1992, *A study of calculus students' constructions of functional situations : the case of the shadow problem*, travail présentée à American Educational Research Association, San Francisco, CA.
- Monk, S. et Nemirovsky, R. : 1994, 'The case of Dan : student construction of a functional situation through visual attributes', in E. Dubinsky, A. Schoenfeld et J. Kaput (éds.), *Research in Collegiate Mathematics Education I, CBMS Issues in Mathematics Education*, 4 , pp. 139-168.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A. H. et Arcavi, A : 1993, 'Aspects of understanding : on multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them', in T. A. Romberg, E. Fennema et T. P. Carpenter (éds.), *Integrating research on the graphical representation of function*, pp.69-100, Lawrence Erlbaun Associated, Hillsdale-NJ.
- Neugebauer, O. : 1993, *The exact sciences in antiquity*, 2<sup>ème</sup> éd.; Barnes and Noble; New York :
- Parmentier, M. :1989, *Leibniz ; la naissance du calcul différentiel*, Vrin, Paris.
- Peirce, C. S. : 1978 *Ecrits sur le signe*, rassemblés, traduits et commentés par Gérard Deledalle, Collection L'ordre philosophique, Editions du Seuil, Paris.
- Perrin-Glorian, M. J. : 1994, 'Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives', in M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavnignot (éds), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France, hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 47-147.
- Perrin-Glorian, M. J. : 1999a, 'Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19.3, pp. 279-322, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Perrin-Glorian, M. J. : 1999b, 'Analyse d'un problème de fonctions en termes de milieu. Structuration du milieu pour l'élève et pour le maître', in Noïrfalise (éd.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'université d'été de La Rochelle*, pp. 17-38, IREM de Clermont-Ferrand.
- Perrin-Glorian, M. J., Hersant, M : 2003, 'Milieu et contrat didactique, outils pour
-



- l'analyse de séquences ordinaires', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 23.2, pp. 217-276, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Pimm, D. : 1995, *Symbols and meanings in school mathematics*, Routledge, London.
- Pontecorvo C., Ajello A. M., Zucchermaglio C. : 1991, *Discutendo s'impara, Interazione sociale e conoscenza a scuola*, La Nuova Italia Scientifica.
- Rabardel, P. : 1995, *Les Hommes & Les Technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.
- Rabardel, P. : 1999a, 'Le langage comme instrument? Eléments pour une théorie instrumentale étendue'. Avec Vygotski Sous la direction d'Yves Clot, La Dispute, Paris.
- Rabardel, P. : 1999b, 'Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques', Marc Bailleul (ed.), *Actes de la dixième université d'été de didactique des mathématiques*, 203-213, Caen : ARDM.
- Radford, L. (à paraître). 'The anthropology of meaning', *Educational Studies in Mathematics* (special issue on semiotics).
- Radford, L. : 2000, Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking : A semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 42, pp. 237-268.
- Radford, L. : 2002, The seen, the spoken and the written : A semiotic approach to the problem of objectivation of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, vol. 22(2), pp. 14-23.
- Robert, A. : 1998, 'Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18.2, pp. 139-189, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Robert, A. et Robinet, J. : 1996, 'Prise en compte du "méta" in didactique des mathématiques', *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol. 16.2, pp. 145-175, La Pensée Sauvage, Grenoble,.
- Rouchier, A. : 1991, 'Étude de la conceptualisation dans le système didactique en mathématiques et informatique élémentaires : proportionnalité, structures itéro-récurrentes, institutionnalisation', *Thèse d'état*, Université d'Orléans, UFR de Sciences Fondamentales et Appliquées, Orléans.
- Sajka, M. : 2003, 'A secondary school student's understanding of the concept of function – a case study', *Educational Studies in Mathematics* 53, pp. 229-254, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Salin, M.-H. : 2002, 'Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations', in Dorier, J.-L., Artaud, M., Arigue, M., Berthelot, R., Floris, R (éds.), *Actes de la 11<sup>ième</sup> Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Schoenfeld, A. H. : 1990, 'GRAPHER : a case of study in educational technology, research and development', in A. di Sessa, M. Gardner, J. Greeno, F. Reif, A. H. Schoenfeld et E. Stage (éds.), *Toward a scientific practice of science education*, pp. 281-300, Lawrence Erlbaum Associated, Hillsdale-NJ.
- Schubauer-Leoni, M.L., Leutenegger, F. et Mercier, A. : 2000, 'Interactions didactiques dans l'apprentissage des grands nombres', en M. Gilly, J.P. Roux, A. Trognon (Eds) *Apprendre dans l'interaction. Analyse des médiations sémiotiques*, Presses Universitaires de Nancy, Université de Provence, Nancy.
- Schwartz, J. et Yerushalmy, M. : 1992, 'Getting students to function in and with algebra', in G. Harel et E. Dubinsky (éds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25, pp. 261-289, Mathematical Association of America, Washington DC.

- 
- Schwarz, B. et Dreyfus, T. : 1995, 'New action upon old objects : a new ontological perspective on functions', *Educational Studies in Mathematics* 29, pp. 259-291, Kluwer Academic Publishers.
- Schwarz, B., Dreyfus, T. et Bruckheimer, M. : 1990, 'A model of the function concept in a three-fold representation', *Computers and Education*, 14(3), pp. 249-262.
- Sensevy, G. et Mercier, A. : 2003, 'Logiques d'action du professeur et du chercheur, un essai d'analyse', *Symposium REF*. Genève. 21 Septembre.
- Sensevy, G., Mercier, A. et Schubauer-Leoni, M.L. : 2000, 'Vers un modèle de l'action didactique du professeur. À propos de la course à 20', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20.3, pp. 263-304, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Sensevy, G. : 1996, 'Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen : le journal des fraction', *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, Vol. 16.1, pp. 7-46.
- Sfard, A. : 1991, 'On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin', *Educational Studies in Mathematics* 22, pp. 1-36, Kluwer Academic Publishers.
- Sfard, A. : 1992, 'Operational origins of mathematical objects and the quandry of reification – the case of function', in G. Harel et E. Dubinsky (éds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25, pp. 59-84, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Sierpinska, A. : 1992, 'On understanding the notion of function', in G. Harel et E. Dubinsky (éds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25, pp. 25-58, Mathematical Association of America, Washington DC.
- Sierpinska, A. : 1994, *Understanding in Mathematics*, The Falmer Press, London.
- Skemp, R. R. : 1971, *The Psychology of Learning Mathematics*, Penguin Books, Harmondsworth, England.
- Slavit, D. : 1997, 'An alternate route to reification of function', *Educational Studies in Mathematics* Vol. 33, pp. 259-281, Kluwer Academic Publishers.
- Smith, J. : 1983, 'Community and reality', in E. Freeman (ed.), *The Relevance of Charles Peirce*, Monist Library of Philosophy, La Salle, pp. 38–58.
- Steinbring, H. : 1997, 'Epistemological investigations of classrooms interaction in elementary mathematics teaching', *Educational Studies in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, n. 32, pp. 49–92.
- Tall, D. O. et Vinner, S. : 1981, 'Concepts image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 12, Kluwer Academic Publishers, pp. 151-169.
- Tall, D. O. : 1991, The psychology of advanced mathematical thinking, D. O. Tall (éd.), *Advanced Mathematical thinking*, 3-21 : Kluwer, Dordrecht.
- Tall, D. O. : 1994, 'A Versatile Theory of Visualisation and Symbolisation in Mathematics', *Actes de la 46<sup>ème</sup> rencontre de la C.I.E.A.E.M*, Toulouse.
- Tall, D. O. : 1996, 'Understanding the processes of advanced mathematical thinking', *L'enseignement mathématique*, 42, pp. 395-415.
- Thompson, P. W. : 1994, 'Students, functions and the undergraduate curriculum', in E. Dubinsky, A. Schoenfeld et J. Kaput (éds.), *Research in Collegiate Mathematics Education I, CBMS Issues in Mathematics Education*, 4 , pp. 21-44.
- Trigueros, M. et Ursini, S. : 1999, 'Does the understanding of variable evolve through
-

- schooling ?', in O. Zaslavsky (éd), *Proceedings of the 23<sup>rd</sup> International Conference, Psychology of Mathematics Education*, vol. 4, pp. 273-80, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel.
- Usiskin, Z. : 1988, 'Conceptions of school algebra and uses of variables', in A. Coxford (éd.), *Idea of algebra : K-12*, pp. 8-19, NCTM, Reston, VA.
- Vergnaud, G. : 1991, 'La théorie des champs conceptuels', *Recherches en Didactique des mathématiques*, 10/2.3, Grenoble, La Pensée Sauvage Editeurs pp. 133-169.
- Vergnaud, G. : 2000, 'Développement et apprentissage, la zone de proche développement', in *Lev Vygotsky, Pédagogue et penseur de notre temps*, G. Vergnaud (éd.), Paris, Hachette éducation.
- Vinner, S. : 1983, 'Concept definition, concept image and the notion of function', *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), pp. 293-305.
- Vinner S. et Dreyfus, T. : 1989, Images and definitions for the concept of function, *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), pp. 356-366.
- Vygotskij, L. S. : 1931/1978, *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Vygotskij, L. S. : 1934/1986, *Thought and Language*, A. Kozulin, (éd. et trad.), MIT Press, Cambridge, Mass.
- Vygotskij, L. S. : 1934/1992, *Pensiero e Linguaggio*, Bari : Laterza Editore.
- Vygotskij, L. S. : 1934/1997, *Pensée et langage*. 3<sup>e</sup> édition, La Dispute, Paris.
- Vygotskij, L. S. : 1994, *The Vygotskij Reader*, R. van der Veer et J. Valsiner (éd. et trad.), Blackwell Publishers, Oxford.
- Vygotsky, L. S. : 1956, *Izbrannie psihologiceskie issledovanija* [Recherche en psychologie], Moscow, APNRSFSR.
- Wagner, S. : 1981, 'Conservation of equation and function under transformations of variable', *Journal for Research in Mathematics Education* n.12, pp. 107-118.
- Wartofsky, M. : 1979, *Perception, Representation, and the Forms of Action: Towards an Historical Epistemology*, in *Models Representation and the Scientific Understanding*, D. Reidel Publishing Company, pp. 188-209.
- Wertsch, J. V. : 1979, 'The Regulation of Human Action and the given-new organization of private speech', in G. Zivin (éd.) *The Development of Self-Regulation Through Private Speech*, Wiley, NY.
- Wertsch, J. V. : 1985, *Vygotsky and the social formation of mind*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.
- Wertsch, J. V. : 1991, *Voices of the mind : a Sociocultural Approach to Mediated Action*, Harvester Wheatsheaf.
- Wertsch, J. V. et Bivens J. A. : 1992, 'The Social Origins of individual mental functioning : Alternatives and Perspectives', *The Quarterly Newsletter of the Laboratory of Comparative Human Cognition*, Vol. 14, N.2, 35-44.
- Wertsch, J. V., Minick, N. et Arns, F. : 1984, 'The Creation of Context in Joint Problem Solving', in B. Rogoff, J Lave (éds.) *Everyday cognition : Its Development in Social Context*, Harvard University Press, Cambridge, pp. 151-71.
- Wisłøw, C. : 2003, 'Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering', *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 52, pp. 271-288, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- Youschkevitch, A. P. : 1976, 'The concept of Function up to the middle of the 19<sup>th</sup> Century', *Archive for History of exact Sciences*, Vol. 16, 36-85, French

translation by Jean-Marc Bellemin, "Fragments d'histoire des mathématiques", pp. 7-68, Bulletin de A.P.M.E.P, 1981, Vol. 41, Paris.



# Annexe 1

Ce bref glossaire reprend et synthétise des éléments du cours de DEA tenu par Annie Bessot (2003).

## A1.1. Etat d'équilibre d'une situation adidactique

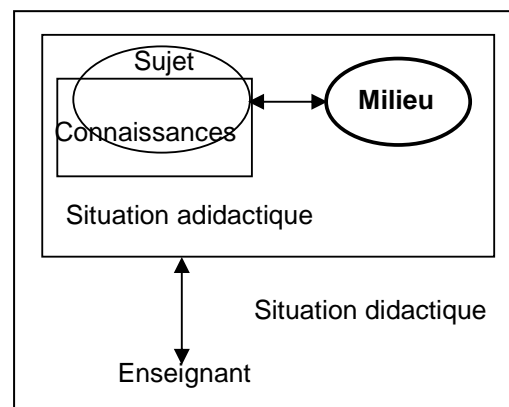
L'évolution de la situation adidactique, dans laquelle un élève se retrouve dès qu'il a accepté la dévolution du problème, peut être alors lue comme une succession d'états parmi des états permis ou possibles. En reprenant des termes de la théorie des jeux, voici comme B l'a définis :

Une situation est donnée par un ensemble *d'états possibles* d'un *milieu* parmi lesquels on choisit à chacune de ses décisions un nouvel état parmi ceux qui lui sont permis à ce moment-là par des règles qui lui ont été proposées. L'actant cherche à mener le milieu à un état final déclaré gagnant et à éviter les états « perdants ». Une connaissance est un moyen de choisir une stratégie ou d'en écarter certaines d'autres. La connaissance déterminée par une situation est celle qui engendre sa stratégie optimale. On suppose que l'actant cherche à obtenir « le meilleur résultat au meilleur prix » [Brousseau, 1998].

Dans cette situation, les interactions sujet/milieu indiquent ainsi la capacité du système à retrouver un équilibre à la suite de certaines perturbations, voire à évoluer si ces perturbations le rendent nécessaire (Bessot, 2003).

## A1.2. Milieu

Cette notion modélise tout ce que dans la situation adidactique, l'élève *ne contrôle pas* mais qui modifie ses connaissances. Il s'agit d'un système dynamique où le problème désigne finalement le résultat d'une ou plusieurs perturbations, plus ou moins sévères, de l'équilibre de la relation sujet / milieu. Pour Brousseau cette notion joue donc un rôle central, dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et, dans l'enseignement, comme référence et objet épistémologique (Bessot, 2003).



## A1.3. Phases de validation/Phases d'évaluation

Dans le modèle des situations didactiques, les *phases de validations* par le milieu jouent un rôle très important, puisque elles permettent à l'élève d'obtenir des informations à propos de la validité et pertinence de sa réponse. Comme il l'a bien souligné Margolinas (1992) ces phases diffèrent profondément des *phases d'évaluation*. Les premières sont une modalité d'actualisation des phases de conclusion qui ne peut pas être adidactique, tandis que les deuxièmes sont la modalité adidactique de ces mêmes phases de conclusion. (Margolinas, 1992).

## A1.4. Problèmes

Les problèmes sont pris par Brousseau dans le sens de « situations problématiques », où les interactions élève/milieu sont finalisées par une question ou un but à atteindre. Choisir les « bons problèmes », c'est-à-dire les « bonnes situations problématiques », pour Brousseau, c'est alors déterminer des milieux avec lesquels l'élève doit interagir pour pouvoir apprendre des mathématiques. Dans ces milieux les connaissances souhaitées doivent ainsi pouvoir se construire et se manifester essentiellement comme des outils de solution et de contrôle de problèmes dont l'élève accepte la responsabilité.

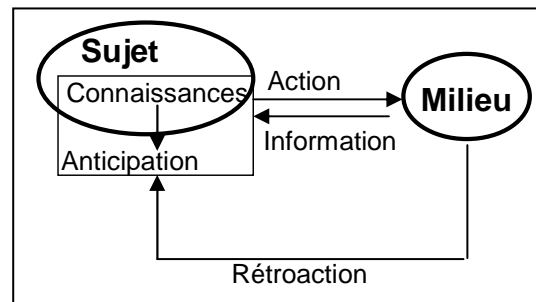
En fait, il écrit :

C'est donc dans ses manifestations comme outil de résolution de problèmes que l'existence d'une connaissance peut être attestée, ou encore c'est dans la capacité du système sujet / milieu à conserver dynamiquement un équilibre à la suite de perturbations en satisfaisant des contraintes de viabilité. Ces contraintes ne portent pas sur la façon dont l'équilibre est retrouvé, mais sur les critères qui attestent de sa restauration (on pourrait dire encore : il n'y a pas une seule façon de connaître). [Balacheff, 1995]

### A1.5. Rétroaction

Brousseau appelle *rétroaction* une information particulière fournie par le milieu, qui est reçue par l'élève comme une sanction, positive ou négative, relative à son action et qui lui permet d'ajuster cette action, d'accepter ou de rejeter une hypothèse, de choisir entre plusieurs solutions. Il y a donc nécessairement de l'incertitude dans une situation adidactique. Seulement à l'état final

de la situation, s'il n'y a plus d'incertitude relativement aux choix possibles, cela signifie que le sujet connaît la réponse, autrement dit qu'il a appris, qu'il sait. On peut dire qu'alors la situation est contrôlée par l'élève et que, par rapport à cette situation adidactique, il n'y a plus de milieu (Bessot, 2003).



### A1.6. Situation non didactique, didactique, adidactique

Une *situation non didactique, spécifique d'un savoir*, est une situation problématique dépourvue de finalité didactique, pour laquelle le rapport au savoir s'élabore comme un moyen économique d'action. Une *situation didactique* pour B est une situation problématique à finalité didactique, comprenant l'élève, l'enseignant et le système éducatif tout entier. Une *situation adidactique* est une situation problématique à finalité didactique, organisée par l'enseignant, où l'élève répond comme si la situation était *non didactique*.

## Annexe 2

Vous trouvez ici un bref approfondissement de la trichotomie du *representamen* et de celle de *l'interprétant*.

Cet approfondissement reprend et synthétise une partie des travaux de Everaert-Desmedt (1990).

### A2.1. La trichotomie du *representamen*

Le *representamen* peut être

- un *qualisigne* (*priméité*), c'est-à-dire une qualité qui fonctionne comme signe.
- un *sinsigne* (*secondéité*), c'est-à-dire une chose ou un événement spatio-temporellement déterminé qui fonctionne comme signe.
- un *légisigne* (*tiercéité*), c'est-à-dire un signe conventionnel.

Comme exemples de légisignes, Everaert-Desmedt (1990) évoque les mots de passe, les insignes, les billets d'entrée à un spectacle, les signaux du code de la route, les mots de la langue sont des légisignes. Cependant, les légisignes ne peuvent agir qu'en se matérialisant dans des sinsignes qui constituent des « répliques ». Ainsi, l'article « le » est un légisigne, dans le système de la langue française. Mais il ne peut être employé que par l'intermédiaire de la voix ou de l'écriture qui le matérialise. Matérialisé dans des sinsignes (des occurrences, qui occupent des positions spatio-temporelles différentes), il comprend également des qualisignes, comme l'intonation dans la réplique orale ou la forme des lettres dans la réplique écrite.

### A2.2. La trichotomie de *l'interprétant*

Suivant la trichotomie de *l'interprétant*, le signe est appelé respectivement :

- un *rhème* (*priméité*),
- un *dicisigne* ou signe dicent (*secondéité*)
- un *argument* ou raisonnement (*tiercéité*).

*L'interprétant rhématique* a une structure de *priméité* : il ne fait donc appel à rien d'« autre », pour opérer la relation du *representamen* à l'objet, qu'aux qualités du *representamen*, qui sont aussi les qualités de toute une classe d'objets possibles. Le rhème n'est ni vrai ni faux, il équivaut à une variable dans une fonction propositionnelle ; il fonctionne comme un blanc dans une formule, un vide à remplir pour répondre à un questionnaire : « ... est rouge ». Par exemple, le portrait d'une personne, sans autre indication, représente toute une classe d'objets possibles : les personnes ressemblant à ce portrait ; il s'agit d'un sinsigne iconique rhématique. Mais si le portrait est considéré dans un contexte, accompagné de l'indication du nom de la personne, par exemple sur un passeport, le niveau d'interprétation change : nous passons à la *secondéité* (sinsigne indiciel dicent).

Le *dicisigne* est un signe interprété au niveau de la *secondéité* ; il fonctionne comme une proposition logique, qui met en relation des constantes (un sujet, c'est-à-dire ce dont on parle, et un prédicat, c'est-à-dire ce qu'on en dit), et peut être vraie ou fausse. Par exemple, le portrait d'une personne avec l'indication du nom de cette



personne est un sinsigne indiciel dicent. L'interprétant de ce signe correspond, en effet, à la proposition : « Cette personne représentée est Monsieur un Tel ». Un dicisigne, avons-nous dit, est vrai ou faux, à la différence d'un rhème qui n'est que possible et n'a pas de valeur de vérité. Mais un dicisigne ne fournit pas de raison de sa vérité ou de sa fausseté, à la différence d'un argument qui aboutit à une conclusion en suivant un processus rationnel.

*L'argument* interprète un signe au niveau de la tiercéité ; il formule la règle qui relie le representamen et son objet. Un signe argumental a toujours comme representamen un légisigne et comme objet un symbole. On distingue cependant trois types d'arguments selon la nature de la règle qui relie le representamen à son objet. La règle peut (1) être imposée aux faits (déduction : « Chaque fois qu'il y a un feu rouge, il y a un ordre de s'arrêter »), ou (2) résulter des faits (induction : « Chaque fois qu'il y a de la fumée, il y a du feu ») ; l'argument peut aussi consister (3) à découvrir, sous la forme d'une hypothèse, une règle susceptible d'expliquer un fait (abduction)<sup>98</sup>.

---

<sup>98</sup> Pour expliquer cette nouvelle trichotomie, Peirce donne cet exemple d'abduction : « imaginons qu'en entrant dans une pièce, j'aperçois sur la table une poignée de haricots blancs et, à côté, un sac de haricots ; je constate que ce sac contient uniquement des haricots blancs; je fais alors l'hypothèse que les haricots qui se trouvent sur la table proviennent de ce sac. Alors, *L'abduction est un argument qui fait appel à la priméité pour formuler la règle (il s'agit d'une hypothèse, donc d'une règle possible), tandis que l'induction repose sur la secondéité (la règle découle de l'observation répétée de faits réels, contingents) et que la déduction appartient exclusivement à la tiercéité (la règle se justifie elle-même en tant que règle)* (Everaert-Desmedt, 1990).

---

## Annexe 3

### A3.1. Décomposition en épisodes de la première discussion collective analysée

La première discussion analysée ici porte sur la reconstruction collective de l'activité « Effet 1 ».

Il s'agit d'une heure et demie de discussion collective.

Les 16 épisodes principaux composant cette discussion sont les suivants :

- Episode 1.D1 (interventions 1-28) : phase préalable ayant pour double objectif explicite :
  - d'introduire un travail sur les signifiés (en commençant par l'explicitation des signifiés personnels primitifs, disponibles, attribués au signe de fonction, notamment en physique), d'une part,
  - de créer un milieu favorable pour la rencontre d'une ignorance, d'autre part.
- Episode 2.D1 (interventions 28-39) : début de la reconstruction coopérative et sélective de l'activité « Effet1 » dans Cabri. Reconstruction coopérative et sélective des solutions apportées à la première question posée dans la fiche de travail (Chapitre 4, § 5.1, 5.1.1 et 5.1.2).
- Episode 3.D1 (interventions 39-57) : focalisation, guidée par l'enseignant, sur les traits pertinents relatifs à l'activité de déplacement des points P, A et B. Reconstruction coopérative et sélective des solutions apportées à la deuxième question posée dans la fiche de travail (Chapitre 4, § 5.1.3).
- Episode 4.D1 (interventions 57-90) : focalisation, guidée par l'enseignant, sur les diverses constructions possibles de H qui seraient sous-jacentes à la macro « Effet1 », projection orthogonale exclue. Reconstruction coopérative et sélective des solutions proposées pour la troisième question de la fiche de travail en binômes (Chapitre 4, § 5.1.4).
  - DéviationD1 (interventions 44-49). Igor demande s'il faut démontrer que H bouge sur la droite (AB). L'enseignant répond qu'avant de démontrer, il faut comprendre de quoi l'on parle.
  - Déviation D1 (interventions 59-60) : l'enseignant appelle Marco à suivre la discussion en cours.
  - Sous-épisode D1 (interventions 61-66) introduit par Mattia qui met en évidence le problème suivant : comment faut-il bouger les points pour obtenir la totalité du cercle et non pas un arc de cercle.
  - Déviation D1 (interventions 68-78) introduite involontairement par l'enseignant qui n'arrive pas à éliminer un point créé dans Cabri et à désactiver l'outil Trace, actif sur ce point.

- Déviation D1 (interventions 81-84) introduite par Igor : il n'a pas pu identifier, lors de la résolution de cette tâche en binômes, la quatrième construction de H. Il espère pouvoir la découvrir.  
L'analyse de la gestion opérée par l'enseignant lors de cette déviation d'Igor D1 (81-84) (résonance nulle) nous a conduits à la déduction suivante : l'enseignant a pour intention d'exclure, à cet instant-là, la reconstruction de H comme projection orthogonale. En fait, il ne répond pas à la demande d'Igor de dévoiler à la classe la quatrième construction possible de H, mais dirige la discussion vers l'équivalence des autres constructions possibles.
- Episode 5.D1 (interventions 90-105) : focalisation par l'enseignant sur la différence existante entre les constructions possibles de H et le problème de la démonstration de l'équivalence de ces constructions.
  - Déviation D1 (interventions 96-103) introduite par Igor qui avance l'hypothèse suivante : dans la quatrième construction mystérieuse, H est obtenu comme intersection de trois constructions géométriques, à savoir le cercle centré en A et de diamètre [BP], le cercle centré en B et de diamètre [AP], et la droite (AB).
- Episode 6.D1 (interventions 105-145) : établissement d'un lien interprétatif entre les premières activités avec la macro « Effet1 » et les fonctions en mathématiques.
  - Déviation D1 (interventions 106-109) introduite par Igor. Il demande si le « circocentre » sert à quelque chose dans la quatrième construction mystérieuse de H. La réponse de l'enseignant est « non ».
  - Déviation D1 (interventions 111-113) introduite par Igor. Il observe que dans l'activité avec Cabri, certains points disparaissent. Nous avons qualifié ce micro-épisode de « déviation » car les élèves et l'enseignant discutent alors du statut des points qui apparaissent. Igor, ne prenant pas en compte cet aspect, cherche, lui, à attirer l'attention sur les points qui disparaissent.
  - Sous-épisode D1 (interventions 125-129) introduit par Filippo. Il apporte l'objection suivante : la relation dont il est alors question, relation qui constituerait la fonction donnée, ne concerne pas les quatre points A, B, P et H, mais seulement trois points. En particulier, après avoir collectivement défini la fonction comme une relation géométrique particulière, Filippo pose le problème ainsi : quels sont les points nécessaires et suffisants permettant la caractérisation de la relation en question ? D'après lui, trois points seulement sembleraient suffire. Le débat est lancé par l'enseignant et la validation est faite dans Cabri.
- Episode 7.D1 (interventions 146 - 149) : intervention mésogénétique de Filippo qui établit une correspondance, en termes fonctionnels, entre les macro-constructions géométriques dans Cabri et les opérations en algèbre. Nous n'avons pas qualifié cet épisode totalement inattendu de « déviation » car l'enseignant s'en saisit et le développe, dans une action de résonance forte.

- 
- Episode 8.D1 (interventions 149-173) : introduction des définitions « quasi - métaphoriques » et « contextualisées » de *variable*, *variable indépendante* et *variable dépendante*.
    - Déviation D1 (interventions 171-172) introduite par Filippo qui tente d'établir un lien interprétatif entre l'algèbre et les fonctions. Le lien serait éventuellement dû « à la présence des trois plans X, Y, Z ». Cette intervention de Filippo n'est pas récupérée par l'enseignant (action de résonance nulle).
  - Episode 9.D1 (interventions 173-176) : intervention mésogénétique de Filippo qui établit un lien entre la structure déductive des théorèmes et les signifiés de *variable indépendante* et *dépendante*.
  - Episode 10.D1 (interventions 176-184) : introduction des définitions « quasi - métaphoriques » et « contextualisées » de *domaine* et *image*.
  - Episode 11.D1 (interventions 184-215) : première tentative par l'enseignant d'introduction de la définition de *fonction à une variable*, s'appuyant sur la fait suivant : dans Cabri, on ne peut bouger qu'un seul point à la fois.
    - Sous-épisode D1 (190-215) imprévu impliquant l'animation multiple. Suite à la question (théorique et pratique) de l'enseignant portant sur le fait de pouvoir ou non déplacer simultanément les trois points, variables indépendantes, Mauro propose l'utilisation de l'outil « animation multiple » présent dans Cabri. La praticabilité de cet outil, ainsi que sa pertinence théorique, est mise en question. L'enseignant n'avait pas considéré cette éventualité. Il voulait utiliser l'impossibilité, dans Cabri, de bouger trois points simultanément, pour introduire le signifié de fonction à une variable.
  - Episode 12.D1 (interventions 215-259) : deuxième tentative d'introduction de la définition de *fonction à une variable* et introduction par l'enseignant de la définition « quasi -métaphorique » et « contextualisée » de *paramètre*.
    - Sous-épisode D1 (218-226) introduit par Filippo qui développe la question suivante : « Comment faut-il bouger le point P pour obtenir le plus vite possible la droite (AB) ? ». Filippo focalise l'attention de la classe sur le fait que l'on obtient plus rapidement la droite (AB), image de P par la fonction donnée, si l'on bouge P parallèlement à la droite même.
    - Sous-épisode D1 (227-234) introduit par Cristina qui déplace l'objet de la discussion et pose le problème théorique suivant : « on ne peut pas dessiner entièrement la droite dans Cabri, car Cabri est fini et la droite, en revanche, est, elle, infinie ! ».
    - Sous-épisode D1 (241-251) introduit par Igor qui souligne que, selon lui, l'image (globale) de P par la fonction donnée, n'est pas « la droite (AB) », mais « sur la droite (AB) ». L'enseignant reprend cette observation d'Igor et focalise l'attention sur l'image de la restriction du domaine de P ainsi : si l'on bouge P sur une partie restreinte du plan, on n'obtient pas toute la droite (AB) mais seulement un segment appartenant à la droite (AB).
-

- Episode 13.D1 (260-297) : intervention mésogénétique de Cristina qui porte à l'attention de toute la classe le phénomène de la composition de deux fonctions, qu'elle avait rencontré en travaillant en binômes.
- Episode 14.D1 (297-300) : intervention mésogénétique d'Igor et analyse succincte des conséquences de l'application de la Macro « Effet1 » aux points A, B, P dans un ordre différent de celui proposé dans la fiche de travail.
- Episode 15.D1 (300-310) : synthèse de la discussion par Mauro.
- Episode 16.D1 (313-354) : analyse des cas et des conditions où H disparaît. Reconstruction collective et sélective des solutions apportées à la question 4 de la fiche de travail (Chapitre 4, § 5.1.5).
  - Déviation D1 (327-338) : transformation par Cristina de la question initiale « quand H disparaît-il ? » en la question « peut une droite dégénérer en un point ? ». La disparition de H serait due, selon Cristina, au fait qu'une droite est un objet théorique qui, pour rester telle qu'elle, ne peut pas se transformer (=dégénérer) en un point. Cet argument est repris et partagé par d'autres élèves.
  - Sous-épisode D1 (339-344) : intervention mésogénétique de Filippo et d'Igor, qui attribuent la disparition de H à la superposition des deux cercles dont H est l'un des deux points d'intersection. Elle est donc motivée par des arguments liés à la construction.
  - Sous-épisode D1 (344-354) : intervention mésogénétique de Marco, qui affirme que H ne semble pas disparaître dans sa construction. La classe analyse alors collectivement au rétroprojecteur le procédé de construction dans Cabri de H suivi par le binôme « Marco et Elena ». La non-disparition de H lors du travail dans Cabri se révèle liée à un problème de fonctionnement du logiciel installé dans l'ordinateur de ces élèves.

### A3.2. Décomposition en épisodes de la deuxième discussion collective analysée

Nous avons déjà indiqué que la deuxième discussion analysée dans la présente thèse est en réalité la treizième discussion collective effective de la séquence expérimentale. Elle a porté sur la reconstruction collective de l'activité n°7 « Euler dans Cabri » (cf. Chapitre 4, § 8.3) et sur le tout début de l'activité n°8 (cf. Chapitre 4, § 9.1).

Elle a été d'une durée d'environ une heure et est composée de 5 épisodes principaux.

Rappelons que l'activité n°7 demandait aux élèves de transposer dans Cabri la méthode d'Euler en construisant le graphe de la fonction  $g$  qui à  $x$  réel associe  $g(x)=x^2+5$ .

Voici son découpage en 5 épisodes principaux :

- Episode 1.D13 (interventions 1-46) : reconstruction collective des deux premières questions de la fiche n°7 « Euler dans Cabri » (cf. Chapitre 4, § 8.3, 8.3.2 et 8.3.3).  
Mattia, à la demande de l'enseignant, reconstruit au rétroprojecteur, la façon dont il a traduit, avec Nicola, dans Cabri la méthode de construction du graphe

de fonction décrit par le texte d'Euler. En fait, ils décrivent la stratégie de résolution 5. 2a. 3 (cf. Chapitre 4, § 8.1.3), qui ne correspond pas à la méthode proposée par le célèbre mathématicien. En effet, ils ont choisi de fixer et d'afficher de manière arbitraire le nombre, variable indépendante, à représenter et de le reporter sur l'axe des abscisses. Euler, quant à lui, construit l'axe des abscisses et considère la mesure de la distance, d'un point variable (sur cet axe) à l'origine de cet axe. Ce point variable est un représentant du nombre, variable indépendante, à représenter (stratégie 5. 2a. 4).

Par ailleurs, ce binôme, comme beaucoup d'autres élèves, a choisi de poser simplement le point P construit par le « Report de mesure » sur l'axe des abscisses (stratégie 5. 2a. 5) et non pas de considérer l'intersection du cercle centré en l'origine et passant par P avec la l'axe des abscisses (stratégie 5. 2a. 6). (cf. Chapitre 4, § 8.1.3 ). Ce choix, qui fait que le point P n'est pas robuste au déplacement, est mis en évidence par l'enseignant.

- Episode 2.D13 (interventions 46-61) : l'enseignant dirige la discussion afin d'obtenir la prise de conscience que la méthode présentée par Mattia diffère de celle proposée par Euler. Pour cela, il s'appuie sur des productions d'élèves, telles celles de Mauro ou du binôme « Egizia et Cristina », qui ont suivi une stratégie résolutive conforme à la méthode d'Euler.
- Episode 3.D13 (interventions 61- 139) : reconstruction des diverses solutions apportées par les binômes à la dernière question de la fiche « Euler dans Cabri » : « Décrivez avec vos mots l'allure du graphe ».
  - Sous-épisode D13 (interventions 66-102) : lecture du début de la description de l'allure du graphe, fournie par le binôme "Cristina et Egizia". Débat sur le signifié de courbe « *symétrique* » par rapport à une appliquée donnée.
  - Sous-épisode D13 (interventions 103-119) : lecture de la description de l'allure du graphe de fonction donnée par le binôme « Mattia et Nicola » : discussion sur le signifié de *minimum d'un graphe*. Ce point correspond à la valeur minimale que la variable dépendante peut prendre. En particulier, le minimum est atteint pour  $x=0$ . Dans ce cas  $g(0)=5$ .
  - Sous-épisode (interventions 120-135) : lecture de la description de l'allure du graphe de fonction donnée par Mauro. Focalisation sur la concavité de la fonction et sur sa parité. Mauro a remarqué que la concavité de la fonction est vers le haut. En revanche l'enseignante amène Cristina à observer que la parité (en réalité l'enseignante parle de symétrie) est due à la présence du  $x$  au carré.
  - Sous-épisode D13 (interventions 136) : lecture de la description de l'allure du graphe de fonction donnée par le binôme « Igor et Filippo ».
  - Sous-épisode D13 (interventions 137-139) : complétion de la lecture de la description fournie par le binôme « Cristina et Egizia ». Focalisation sur le domaine de la fonction donnée. En fait, ce binôme a observé que, dans la fiche, on n'avait pas choisi un domaine réellement et que,

de ce fait, elles pouvaient considérer comme domaine la droite réelle toute entière. L'enseignant souligne alors que l'on aurait effectivement pu avoir comme domaine un segment limité et que, dans ce cas, la fonction aurait changé également.

- Episode 4.D13 (140-177) : intervention mésogénétique de Filippo, qui pose la question : « que se passe-t-il si nous poursuivons le déplacement de P sur la droite [RS] vers la droite? ». Débat de toute la classe sur ce qu'il advient du graphe de la fonction à l'infini. Les élèves évoquent la notion de *dérivée* abordée récemment en physique.
- Episode 5.D13 (179-180) : lecture de la description de l'allure du graphe de fonction donnée par le binôme « Marco et Elena ».

Le reste de la discussion (environ 5 minutes) porte sur le problème suivant : comment modéliser, dans Cabri, la situation de la ficelle élastique présentée dans la fiche n°8.

Le lecteur peut lire la totalité de la transcription des deux discussions collectives présentées ici, ainsi que leur analyse (grâce au logiciel Atlas.ti), dans le CD-rom accompagnant cette thèse.

## Annexe 4

### **A4.1. Composition des binômes lors de la dernière expérimentation**

La première partie de l'expérimentation a été réalisée dans une classe italienne de niveau scolaire analogue à la Seconde et s'est étalée de Mai à Juin 2002. Elle s'est arrêtée à la réalisation en classe de la séance n°5.

La classe était composée de 13 élèves partagés dans les binômes suivants :

- Igor et Filippo
- Cristina, Egizia et Giacomo
- Elena et Marco
- Mattia et Nicola
- Lorenzo et Mauro
- Andrea et Michele.

La deuxième partie de l'expérimentation s'est étalée de Octobre à Décembre 2002, lors de l'année scolaire suivant.

La classe était composée de 13 élèves partagés dans les binômes suivants :

- Igor et Filippo
- Cristina, Egizia
- Giacomo et Alessandro
- Elena et Marco
- Mattia et Nicola
- Lorenzo et Mauro
- Michele.