



HAL
open science

ANALYSE DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES DE TYPE BI-COUCHE ET À FRONTIÈRE LIBRE

Mathieu Peybernes

► **To cite this version:**

Mathieu Peybernes. ANALYSE DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES DE TYPE BI-COUCHE ET À FRONTIÈRE LIBRE. Mathématiques [math]. Université Pascal Paoli, 2006. Français. NNT : . tel-00085341

HAL Id: tel-00085341

<https://theses.hal.science/tel-00085341>

Submitted on 12 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE CORSE — PASCAL PAOLI
U.M.R CNRS 6134 — SPE
SYSTÈMES PHYSIQUES POUR L'ENVIRONNEMENT

Thèse de Doctorat de l'Université de Corse,
Mathématiques appliquées et applications des mathématiques

Présenté le 4 juillet à 14h30 par
Mathieu PEYBERNES

**ANALYSE DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES
DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES DE TYPE
BI-COUCHE ET À FRONTIÈRE LIBRE**

Soutenue devant le jury composé de

<i>MM.</i> Nicola BELLOMO	Rapporteur
Didier BRESCH	Rapporteur
Benoît DESJARDINS	Examineur
Fabien FLORI	Examineur
David GERARD-VARET	Examineur
Bernard DI MARTINO	Examineur
Pierre ORENGA	Directeur de thèse

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier le professeur Jacques-Henri BALBI, directeur de l'UMR-CNRS 6134 - "Systèmes Physiques de l'Environnement", qui m'a permis de réaliser ces travaux au sein de cette unité mixte de recherche.

Je voudrais exprimer ici ma plus grande reconnaissance au professeur Pierre ORENGA, qui a dirigé ma thèse. Grâce à sa disponibilité constante, j'ai pu bénéficier de ses connaissances scientifiques et de son expérience. Je le remercie chaleureusement pour ses encouragements et la confiance qu'il m'a accordée.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Nicola BELLOMO, Professeur à l'institut Polytechnique de Turin et Monsieur Didier BRESCH, chargé de recherche CNRS (HDR) à l'Université Joseph Fourier à Grenoble, qui malgré le peu de temps que leurs laissent leurs obligations, m'honorent en acceptant d'être les rapporteurs de ce travail.

Je tenais à remercier Monsieur Benoît DESJARDINS, directeur de recherche au CEA et Monsieur David GERARD-VARET, chargé de recherche au CNRS qui m'ont fait l'honneur de participer à cette commission d'examen. Je les en remercie vivement.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Monsieur Bernard DI MARTINO et Monsieur Fabien FLORI, habilités à diriger des recherches à l'Université de Corse, pour leur aide précieuse dans l'élaboration de ce travail et pour leur participation à ma commission d'examen. Leurs conseils et leurs encouragements m'ont été indispensables pour réaliser ce travail.

Mes remerciements vont également à Catherine GIACOMONI pour sa disponibilité et sa gentillesse.

J'associe à ces remerciements l'ensemble des personnes de la faculté des sciences de l'Université de Corse, en particulier les membres de l'UMR, pour leur soutien et leur amitié.

Enfin, je remercie la Collectivité Territoriale de Corse, qui a financé ces travaux dans le cadre d'une bourse régionale.

Résumé

Ce document est la synthèse des trois années de recherche passées au sein de l'équipe fluide-structure de l'Unité Mixte de Recherche "CNRS-Université de Corse" 6134. Il est destiné à apporter quelques compléments à la prédiction de la circulation marine ou à l'étude des déplacements de polluants et concerne principalement des problèmes liés aux équations de shallow water.

La première partie concerne les modèles bi-couches en eaux peu profondes qui sont utilisés lorsque les couches d'eau ont des caractéristiques physiques suffisamment différentes pour ne pas pouvoir se mélanger (au détroit de Gibraltar par exemple). Dans le premier chapitre, nous proposons une approche numérique qui repose essentiellement sur la méthode de Galerkin à l'aide d'une base spéciale et de la méthode des caractéristiques. Le second chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour un problème de shallow water bi-couche avec des conditions aux limites de Dirichlet. La difficulté provient de ces conditions qui ne permettent pas d'employer les outils classiques. Le troisième chapitre concerne les modèles bi-couches à *toit rigide*. Cette hypothèse consiste à négliger les variations de la surface de l'eau. Au niveau de la modélisation, la condition de *rigid-lid* introduit une contrainte sur l'écoulement dont nous précisons la forme. Nous donnons ensuite des résultats d'existence et de régularité et proposons une méthode numérique adaptée.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des problèmes à frontière libre pouvant décrire par exemple la simulation de la dérive d'une nappe de polluant ou la propagation des feux de forêt. On caractérise le mouvement de la frontière à l'aide d'un opérateur différentiel permettant de conserver un domaine assez régulier au cours du temps et d'utiliser ainsi les propriétés classiques des espaces de Sobolev. La résolution est basée sur un schéma lagrangien permettant de suivre chaque particule dans son mouvement et de prendre ainsi en compte les variations de la frontière. Nous terminons cette étude en présentant la simulation d'une nappe de polluant évoluant à la surface de l'eau à partir de la méthode décrite précédemment.

Table des matières

Introduction	6
I Modèles bi-couches	12
1 Présentation des modèles de Shallow Water	14
1.1 Un modèle de Shallow Water à une couche	14
1.1.1 Équations de conservation	14
1.1.2 Les hypothèses simplificatrices	18
1.1.3 Les équations tri-dimensionnelles quasi-hydrostatiques	20
1.1.4 Un modèle bi-dimensionnel à une couche	22
1.2 Un modèle de Shallow Water à deux couches	26
1.2.1 Un modèle tri-dimensionnel	26
1.2.2 Un modèle bi-dimensionnel	29
1.2.3 La méthode de Galerkin pour la résolution numérique	31
2 Un résultat d'existence pour le modèle de SW bi-couche avec des conditions aux limites de Dirichlet	38
2.1 Un résultat d'existence	38
2.2 Une estimation sur le terme d'advection $(u_i \cdot \nabla)u_i$	42
2.3 Une estimation sur h_i dans $L^2(Q)$	44
2.4 Estimations d'énergie	50
2.5 Solutions approchées	53
2.6 Passage à la limite	54
3 Un modèle de SW bi-couche avec l'hypothèse du toit rigide	56
3.1 Analyse mathématique et obtention du modèle de SW bi-couche à surface rigide	57
3.2 Résultats d'existence et de régularité	63
3.2.1 Estimations <i>a priori</i>	64

3.2.2	Construction des solutions approchées	67
3.2.3	Passage à la limite	70
3.2.4	Résultats de régularité	70
3.3	Description de la méthode numérique	73
3.3.1	Base de l'espace fonctionnel $\tilde{\mathcal{V}}$	73
3.3.2	Méthode de Galerkin	74
3.3.3	Reconstitution des champs $H_1 \nabla p$ et $H_2 \nabla p$	75
3.4	Simulations numériques	76
3.4.1	Tests caractéristiques	77
3.4.2	Quelques résultats de comparaison	77

II Problèmes à frontière libre 84

4 Un modèle de Shallow Water à frontière libre 86

4.1	Position du problème	87
4.2	Résultats préliminaires	89
4.2.1	Estimations d'énergie	89
4.2.2	Régularisation du problème	91
4.3	Discrétisation lagrangienne	92
4.3.1	Discrétisation lagrangienne du domaine	92
4.3.2	Problème approché	93
4.4	Résultats de compacité	94
4.5	Passage à la limite sur Δt	99
4.5.1	Dans le domaine discrétisé en temps	99
4.5.2	Dans les équations discrétisées en temps	100
4.5.3	Passage à la limite dans les conditions aux limites	106

5 Simulation de la dérive d'une nappe de polluant à l'aide d'un modèle de SW à frontière libre 109

5.1	Introduction	109
5.2	Un modèle défini sur un domaine dépendant du temps	111
5.3	Formulation ALE du problème	112
5.4	Discrétisation en temps	117
5.5	Discrétisation en espace	118
5.5.1	Méthode numérique	118
5.5.2	Estimations <i>a priori</i>	120

5.6	Tests numériques	122
5.6.1	Dans un domaine idéalisé	122
5.6.2	Dans un cas réaliste	124
	Conclusion	131

Introduction

Ce document est la synthèse de plusieurs années de recherche passées au sein de l'Unité Mixte de Recherche "CNRS-Université de Corse" 6134. Cette unité a pour objectif l'étude des *Systèmes Physiques de l'Environnement* et se décompose en plusieurs équipes dont celle sur les fluides et structures dirigée par Pierre Orenge. C'est au sein de cette équipe que j'ai réalisé mon stage de DEA puis mes trois années de doctorat sur le thème de l'analyse mathématique des problèmes liés à la mécanique des fluides.

Ces travaux de thèse ont été financés par la *Collectivité territoriale de Corse*. L'équipe *fluide-structure* m'a également permis de m'impliquer dans diverses activités scientifiques. J'ai notamment participé à l'étude de courantologie dans le cadre d'un contrat de prestation de service entre le *CNRS* et une ferme marine (contrat n°2004 IND 123). Dans le cadre des projets *GILCO*, en collaboration avec l'*IFREMER* (contrat de recherche État DRRT/CTC-DFER) et *INTERREG III A* (Collaboration Corse-Sardaigne-Toscane), nous avons mis en œuvre des codes de simulation de transport de nappes de pétrole. Sur ce thème, j'ai également été associé à l'organisation du Workshop de Mathématiques pour l'Océanographie intitulé "Modèles de Nappes de Pétrole", à Calacuccia (Corse) en mai 2005.

La volonté de la communauté scientifique de disposer d'un outil de simulation opérationnel, permettant de fournir des prévisions océaniques avec la même régularité et fiabilité que la prévision météorologique, nécessite la collaboration de chercheurs d'horizons très différents. Les physiciens côtoient les chimistes, les biologistes, les informaticiens et les mathématiciens. Les questions de l'existence de solution (qui permet de s'assurer que le problème est bien posé), de la convergence des algorithmes, du comportement des solutions asymptotiques ou encore de la conception de nouvelles méthodes numériques relèvent des mathématiques appliquées.

Ce travail s'inscrit dans la perspective de développer des outils applicables dans des configurations réalistes. Il est notamment destiné à apporter quelques compléments à la prédiction de la circulation marine et à l'étude des déplacements des polluants.

La première étape d'une telle étude repose sur la modélisation des phénomènes physiques concernés. De façon générale, la description des systèmes naturels est très difficile, ceci à cause de la multiplicité des paramètres et de la complexité des phénomènes intervenants. Ainsi, on doit sélectionner un certain nombre de variables représentatives et étudier leur comportement à l'aide de modèles mathématiques dérivant de ces principes physiques. Cette étape de modélisation est importante car elle est directement liée aux ambitions que nous fixons pour élaborer un outil d'aide à la décision opérationnel.

La circulation océanique obéit à des lois de conservation des diverses variables hydrodynamiques. Ce sont les travaux de L. Euler, en formalisant les lois de conservation par des équations aux dérivées partielles, qui ont permis de commencer à comprendre le comportement dynamique des fluides. La forme quasi définitive des équations que l'on utilise date de 1843 avec les travaux de A. de Saint-Venant, repris par la suite par G. Stokes (les équations portent le nom de Navier-Stokes en l'honneur également des travaux du français C. Navier).

On sait maintenant qu'il est utopique de chercher à résoudre directement les équations de Navier-Stokes à l'échelle d'un océan. Le comportement chaotique des équations et la grande diversité d'échelles mises en mouvement sont un frein à tout espoir de simulation directe à partir de ces équations. Un grand nombre de travaux ont été conduits en vue de simplifier les modèles, permettant d'isoler les phénomènes caractéristiques et rendre possible la simulation numérique. Les ouvrages traitant de ces modèles sont nombreux et je me suis pour ma part beaucoup inspiré de ceux de J.C.J. Nihoul [57, 58, 59, 60], J. Pedlosky [64, 65] et A.E. Gill [32] qui font référence en la matière.

On peut classer ces modèles en utilisant différents critères de modélisation physique. Par exemple les modèles les plus simples sont ceux décrivant l'équilibre géostrophique (équilibre entre la force de Coriolis et les forces de pression). Ensuite, on trouve des modèles intégrés suivant la verticale que l'on appelle modèles de shallow water. Ils sont bien adaptés au cas d'une couche d'eau de densité homogène, soit en mouvement sur une couche au repos (modèle à gravité réduite), soit occupant toute la hauteur d'eau. Une autre approche est représentée par les modèles multicouches pour lesquels les variables sont moyennées sur l'épaisseur de chaque couche. Enfin, il y a les modèles tri-dimensionnels plus ou moins complets mais toujours très coûteux au niveau de la simulation numérique.

Pour notre part, nous avons choisi d'aborder dans ce mémoire des problèmes liés

aux équations de shallow water. Plus particulièrement, nous consacrons la première partie à l'étude de problèmes de type bi-couches puis nous nous intéresserons à l'analyse de quelques modèles à frontière libre dans la seconde partie.

Ce document présente les principaux résultats obtenus en les replaçant dans leur cadre bibliographique.

La première partie concerne donc les modèles bi-couches en eaux peu profondes. Ces modèles sont utilisés lorsque les couches d'eau ont des caractéristiques physiques suffisamment différentes pour ne pas pouvoir se mélanger. On trouve une telle configuration par exemple au niveau du détroit de Gibraltar. Les eaux de l'océan, froides et peu salées, plus légères que les eaux méditerranéennes, forment un courant entrant en surface. Ces eaux, après avoir subi une transformation dans le bassin méditerranéen (augmentation de la concentration de sels due à la forte évaporation), ressortent ensuite par le fond du détroit de Gibraltar [54]. Si ce phénomène est maintenant bien connu, il semble difficile à simuler numériquement. En effet, un simple code de shallow water bi-dimensionnel ne peut traduire correctement ce phénomène et un code tri-dimensionnel doit posséder un niveau de raffinement important sur la verticale pour retranscrire le fort cisaillement apparaissant à l'interface des couches. Une voie intéressante semble être l'utilisation d'un modèle bi-couche. Le modèle à partir duquel on a mené ces travaux a été étudié d'une part par F.J. Chatelon *et al.* [12] qui ont montré l'existence de solutions, puis par M.L. Muñoz Ruiz *et al.* [11, 19, 55] en ce qui concerne la régularité et l'unicité des solutions. Tous ces résultats ont été obtenus avec des conditions aux limites sur $u \cdot n$ et $\text{rot } u$. Au niveau numérique, de nombreux travaux ont été effectués par M.J. Castro *et al.* en dimension 1 [5, 7] puis plus récemment en dimension 2 [6], l'approche numérique étant essentiellement basée sur la méthode des volumes finis. Nous avons choisi d'organiser la première partie de la façon suivante :

Dans le premier chapitre, après avoir présenté les modèles de shallow water à une puis deux couches, nous proposons une méthode numérique pour la résolution des équations du modèle de shallow water bi-couche. Pour mettre en œuvre ce code de simulation, nous nous sommes inspirés des travaux déjà effectués au sein du laboratoire dans le cas mono-couche. Le développement du code repose essentiellement sur la méthode de Galerkin à l'aide d'une base spéciale et de la méthode des caractéristiques.

Le second chapitre est consacré à l'étude de l'existence de solutions pour un prob-

lème de shallow water bi-couche avec des conditions aux limites de Dirichlet. Ici, la difficulté provient de ces conditions qui ne permettent pas d'employer les outils classiques utilisés dans le cas de conditions sur $u \cdot n$ et $\text{rot } u$ ou de conditions périodiques ou encore dans le cas où le domaine est \mathbb{R}^n tout entier. Pour traiter les termes couplant les deux couches, nous devons coupler l'estimation naturelle d'énergie avec une estimation des épaisseurs dans $L^2(Q)$. Pour obtenir cette estimation L^2 , nous introduisons l'opérateur de Stokes et utilisons quelques résultats sur les espaces de Hardy pour traiter les termes non linéaires.

Enfin, dans le troisième et dernier chapitre de cette partie, on s'intéresse à une autre classe de modèles : les modèles bi-couches à *toit rigide*. L'hypothèse du *toit rigide* (ou *surface rigide* ou encore *rigid-lid*) consiste à négliger les variations de la surface de l'eau. Dans le cas mono-couche [39, 40, 48], l'hypothèse du *rigid-lid* s'avère tout à fait satisfaisante et permet d'obtenir des résultats comparables à ceux des modèles à surface libre sous certaines conditions. Nous avons choisi ici d'introduire cette hypothèse dans le modèle bi-couche. On détaille les modifications essentielles que cette hypothèse implique aussi bien au niveau formel que numérique. Au niveau de la modélisation, la condition de *rigid-lid* introduit une contrainte sur l'écoulement dont nous précisons la forme. Nous donnons ensuite des résultats d'existence et de régularité. Pour la résolution numérique nous proposons une base spéciale prenant en compte cette contrainte non-locale imposée au fluide puis nous comparons les résultats numériques avec ceux obtenus à partir du modèle à surface libre.

La deuxième partie est composée de deux chapitres. Dans le premier nous nous intéressons au comportement d'un fluide défini dans un domaine dépendant du temps Ω_t . Le modèle que nous proposons peut être utilisé dans divers domaines tels que les problèmes d'interaction fluide-structure [26] ou la simulation de modèles de propagation (comme la simulation de la dérive d'une nappe de polluant [50] ou l'analyse de la propagation des feux de forêt [2]). Pour caractériser le mouvement du fluide, on considère un modèle de shallow water à frontière libre, l'évolution de la frontière étant définie par un opérateur frontière A (de tels opérateurs sont utilisés dans V.A. Solonikov [70], J.T. Beale [3]). Cet opérateur permet de conserver un domaine assez régulier au cours du temps et d'utiliser ainsi les propriétés classiques des espaces de Sobolev. Pour résoudre le système d'équations bi-dimensionnelles caractérisant l'écoulement du fluide, nous proposons un schéma lagrangien. En effet, un schéma d'Euler n'est pas adapté pour la discrétisation d'un problème de ce type puisque

nous travaillons sur un domaine non cylindrique. De plus, la description lagrangienne permet de suivre chaque particule dans son mouvement et de prendre ainsi en compte les variations de la frontière.

Notre approche consiste à utiliser un schéma linéaire où la dérivée totale est approximée par un schéma aux différences finies régularisé. Cette méthode permet de conserver certaines propriétés physiques. Par exemple on peut prouver qu'une particule ne peut pas sortir du domaine d'un pas de temps à l'autre. On montre que le schéma précédent a un sens, en particulier on montre que l'on retrouve le problème continu lorsque le pas de temps converge vers 0, ce qui permet de prouver l'existence d'une solution.

Nous terminons cette étude en proposant, dans le cinquième chapitre, un modèle permettant la simulation de la dérive d'une nappe de polluant à la surface de l'eau. Pour la résolution de ce problème, nous proposons deux méthodes numériques. La première consiste à résoudre les équations de shallow water sur un domaine fixe contenant le polluant. Cette approche nous permet d'utiliser la méthode de Galerkin présentée dans le premier chapitre mais elle nécessite la construction d'un maillage précis, ce qui augmente les temps de calcul. Nous proposons ainsi une deuxième méthode qui consiste à résoudre le problème sur le domaine où le polluant est réellement présent. Nous sommes ainsi amenés à utiliser un problème à domaine variable pour lequel on utilise la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian method) couplée à la méthode des caractéristiques. Une présentation générale de la méthode ALE est donnée dans [36, 37, 53]. Pour résoudre les équations discrétisées en temps, nous proposons une méthode de type Galerkin en utilisant une base spéciale vérifiant les conditions aux limites du fluide.

Partie I

Modèles bi-couches

Chapitre 1

Présentation des modèles de Shallow Water

Dans ce chapitre, nous allons rappeler comment à partir des hypothèses de conservation nous pouvons établir les équations de la mécanique des fluides géophysiques. En intégrant sur la hauteur du fluide ces équations tri-dimensionnelles, nous obtenons le modèle de shallow water mono-couche. Puis nous proposerons un modèle 3D dans lequel le fluide est composé par deux couches de densités différentes. À partir d'un même type d'arguments, nous construirons le modèle de shallow water bi-couche qui sera étudié dans les prochains chapitres. Nous terminerons ce chapitre en proposant une méthode numérique pour résoudre ce problème bi-couche, celle-ci s'appuyant essentiellement sur la méthode de Galerkin.

1.1 Un modèle de Shallow Water à une couche

1.1.1 Équations de conservation

Le domaine d'étude

Lorsqu'on étudie des problèmes à l'échelle de la Terre, tels que les problèmes d'océanographie, on utilise de façon naturelle le système de coordonnées sphériques.

Cependant, dans le cas où les dimensions du domaine sont suffisamment petites (de l'ordre du millier de kilomètres), nous pouvons ignorer la courbure de la Terre [17], [38], et utiliser un système de coordonnées cartésiennes x, y, z avec l'origine en un point M_0 du domaine (figure 1.1.1).

Le plan x, y est tangent à la sphère au point M_0 , l'axe vertical z est donné par la normale à la sphère au point M_0 .

Nous donnons maintenant le cadre formel dans lequel nous allons travailler. On note Ω la surface du fluide au repos, Ω étant un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , de frontière

- $\Gamma_l(t)$, la frontière latérale définie par

$$\Gamma_l(t) = \{(x, y, z) | (x, y) \in \gamma, z \in (-H(x, y), \eta(x, y, t))\}.$$

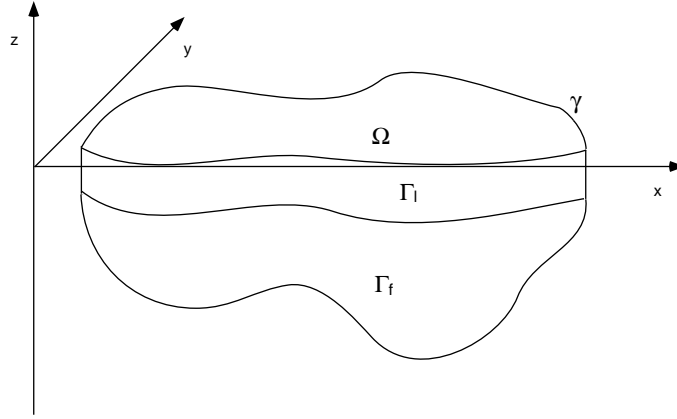


Figure 1.2: domaine d'étude au repos

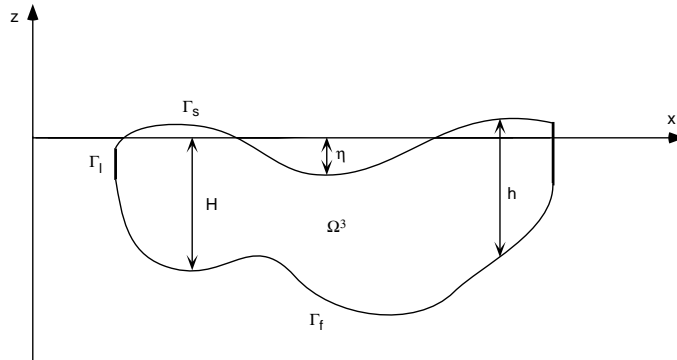


Figure 1.3: coupe verticale du domaine

Nous notons \mathbf{n} , le vecteur normal unitaire extérieur à la frontière. On distingue sa composante horizontale, notée n , de sa composante verticale n_3 .

Dans le cas où \mathbf{n} est le vecteur normal à la surface, on a

$$n = \frac{-\nabla\eta}{\sqrt{(\nabla\eta)^2 + 1}}, \quad n_3 = \frac{1}{\sqrt{(\nabla\eta)^2 + 1}},$$

de même si \mathbf{n} est le vecteur normal au fond du domaine

$$n = \frac{-\nabla H}{\sqrt{(\nabla H)^2 + 1}}, \quad n_3 = \frac{-1}{\sqrt{(\nabla H)^2 + 1}}.$$

Les variables hydrodynamiques

Nous présentons ici les variables d'état qui caractérisent l'écoulement et qui sont susceptibles d'influencer celui-ci [58].

Ces variables sont appelées variables hydrodynamiques :

- ρ , la densité,
- $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ la vitesse du fluide,
on note $u = (v_1, v_2)$ la composante horizontale de la vitesse,
- T , la température,
- S , la salinité,
- p , la pression.

Les équations de conservation

Soit Y , une variable d'état quelconque. Son équation de conservation s'écrit sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{v}Y) = Q^Y - q^Y,$$

où \mathbf{v} est la vitesse du fluide.

Les variations temporelles de Y , représentées par $\frac{\partial Y}{\partial t}$ sont fonctions du transport de fluide à travers les parois du volume considéré, représenté par $\operatorname{div}(\mathbf{v}Y)$, du taux Q^Y de production ou destruction de Y à l'intérieur de ce volume ainsi que de la diffusion moléculaire q^Y .

Écrivons alors l'équation de conservation correspondant à chaque variable hydrodynamique donnée dans le paragraphe précédent :

- le principe de conservation de la masse affirme que la variation de la densité ρ ne dépend que du fluide traversant la frontière du volume considéré, donc on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

- Le principe de conservation de la quantité de mouvement, $\rho\mathbf{v}$, affirme que la variation de la quantité de mouvement d'un système coïncide avec la résultante des forces agissant sur lui.

Les forces prises en compte ici sont les forces de gravité $\rho\mathbf{g}$, la force de Coriolis $-2\mathbf{\Lambda} \wedge \rho\mathbf{v}$, le gradient de pression $(-\nabla_3 p)$ et les forces de dissipation visqueuses $\text{div}(\rho\nu\nabla\mathbf{v})$.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est alors donnée par [58] :

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{v}v_i) = (\rho\mathbf{g})_i - (2\mathbf{\Lambda} \wedge \rho\mathbf{v})_i + \text{div}(\rho\nu\nabla_3 v_i) - (\nabla_3 p)_i.$$

- Les équations de conservation de l'énergie et de la salinité sont remplacées par une équation de poussée. Nous définissons la notion de poussée \mathbf{b} par :

$$\mathbf{b} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \mathbf{g},$$

où ρ_0 est la valeur de la masse spécifique à l'état de référence.

L'évolution de la poussée est traduite par l'équation suivante :

$$\frac{\partial b}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}b) = \nu_b \Delta b,$$

où ν_b est un coefficient de diffusité.

- Nous avons défini une équation d'évolution pour chaque variable hydrodynamique sauf pour la pression p . Ainsi, pour fermer le système, on écrit l'interdépendance entre la masse volumique, la température, la salinité et la pression :

$$\rho = \rho(T, S, p).$$

1.1.2 Les hypothèses simplificatrices

L'approximation de Boussinesq

Un fluide géophysique est caractérisé par le fait que les variations de la masse volumique par rapport à une valeur de référence ρ_0 sont relativement faibles [58].

Ainsi, en faisant une analyse des ordres de grandeur, on peut remarquer que l'équation de conservation de la masse peut être approximée par la condition d'incompressibilité sans avoir à imposer une masse spécifique constante, on a alors :

$$\text{div} \mathbf{v} = 0.$$

Nous pouvons remplacer ρ par ρ_0 dans toutes les équations excepté devant le terme de gravité car celui-ci représente une accélération beaucoup plus forte que les accélérations typiques du fluide. En divisant l'équation de conservation de la quantité de mouvement par ρ_0 , nous pouvons faire apparaître le terme de poussée de la façon suivante :

$$\frac{\rho}{\rho_0} \mathbf{g} = \mathbf{g} + \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \mathbf{g} = \mathbf{g} + \mathbf{b}.$$

Nous introduisons également la pression généralisée définie de la façon suivante :

$$q = \frac{p}{\rho_0} + gz.$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial(v_i)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}v_i) = (-2\boldsymbol{\Lambda} \wedge \mathbf{v})_i - (\nabla_3 q)_i + (\mathbf{b})_i + \text{div}(\nu \nabla_3 v_i).$$

Notion de variables moyennes - Turbulence

Les écoulements des fluides géophysiques sont caractérisés par des mouvements d'apparence désordonnée des différentes variables d'état autour d'une valeur moyenne. L'objectif des modèles de circulation océanique consiste en une recherche de la circulation moyenne sans nécessairement chercher à reproduire les détails de cette circulation. Il faut alors modifier les équations établies dans les sections précédentes afin de prendre en compte cette notion d'écoulement moyen.

Nous décomposons chaque variable d'état en une composante moyenne notée $\langle y \rangle$ et une composante fluctuante autour de cette moyenne notée y' . Ainsi, on écrit :

$$y = \langle y \rangle + y' \text{ avec } \langle y' \rangle = 0$$

L'approximation quasi-hydrostatique

Cette hypothèse est liée à l'anisotropie des grandeurs caractéristiques suivant l'horizontale et la verticale. Ainsi, pour une longueur caractéristique L et une hauteur caractéristique H , on a toujours le rapport d'aspect δ qui vérifie la relation suivante :

$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1.$$

Cela conduit aux simplifications suivantes : si on examine les ordres de grandeur des différents termes apparaissant dans la composante verticale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, on constate une prédominance des termes de gradient vertical de pression et de poussée. On définit alors une équation d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{\partial q}{\partial z} = b,$$

qui remplace la composante verticale de l'équation de conservation de quantité de mouvement.

Enfin, nous utilisons l'hypothèse généralement admise suivante :
On pose $\omega \cdot \vec{k} = 2|\Lambda| \sin(\varphi) \cdot \vec{k}$, et on a l'approximation :

$$2\Lambda \wedge V = \omega \vec{k} \wedge V.$$

1.1.3 Les équations tri-dimensionnelles quasi-hydrostatiques

Nous proposons dans cette section le modèle tri-dimensionnel d'écoulement géophysique que nous allons utiliser par la suite. D'après les sections précédentes, si on omet les symboles $\langle \rangle$, les variables d'état étant toujours considérées par rapport à leur moyenne, ce modèle est finalement donné par le système d'équations suivant [45] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} + \omega \alpha(u) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \mu \Delta u = -\nabla q \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \cdot \nabla b + v_3 \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_b \frac{\partial b}{\partial z} \right) - \mu_b \Delta b = 0 \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} u + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial z} = b \quad (1.4)$$

Pour que le problème soit bien posé, nous devons adjoindre à ces équations des conditions initiales et des conditions aux limites.

Conditions aux limites

Nous allons donner les conditions aux limites en surface et au fond du domaine.

- En surface :

Nous prenons tout d'abord la condition :

$$p = p_a, \quad (1.5)$$

p_a étant la pression atmosphérique en surface, supposée constante. Considérons également la condition aux limite : $(\Gamma \cdot \mathbf{n})_T = \tau_s$, où $\Gamma \cdot \mathbf{n}$ représente la force de viscosité, T la projection sur le plan tangent, et τ_s une fonction qui représente le

forçage du vent qui sera détaillé dans le paragraphe suivant.

L'approximation hydrostatique nous permet de prendre $\mathbf{n} \approx (0, 0, 1)$ et d'écrire la condition précédente sous la forme :

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_s. \quad (1.6)$$

D'autre part la surface du fluide est une frontière libre. Elle peut librement évoluer au cours du temps et elle est imperméable au sens où elle n'est pas traversée par le fluide. Par contre, des flux de salinité et de chaleur peuvent traverser cette frontière. On introduit alors la condition :

$$\nu_b \frac{\partial b}{\partial z} = \tau_b, \quad (1.7)$$

et la condition cinématique :

$$v_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \nabla \eta. \quad (1.8)$$

- Au fond :

On considère la condition

$$(\Gamma \cdot \mathbf{n})_T = \tau_f,$$

où τ_f représente le frottement au fond. Comme précédemment, nous simplifions cette condition :

$$\nu \frac{\partial u}{\partial z} = \tau_f. \quad (1.9)$$

La condition d'imperméabilité au fond nous permet d'écrire :

$$\nu_b \frac{\partial b}{\partial z} = 0, \quad (1.10)$$

et la condition cinématique (annulation de la vitesse normale) :

$$u \cdot \mathbf{n} + v_3 \cdot \mathbf{n}_3 = 0. \quad (1.11)$$

Conditions initiales

Prenons comme conditions initiales les valeurs de u et b à un instant choisi comme état de référence :

$$u(t = 0) = u_0, \quad (1.12)$$

$$b(t = 0) = b_0. \quad (1.13)$$

1.1.4 Un modèle bi-dimensionnel à une couche

Nous allons présenter dans cette section un modèle bi-dimensionnel appelé modèle de Shallow Water en formulation hauteur vitesse. Ce modèle est obtenu en intégrant sur la hauteur d'eau les équations du modèle tri-dimensionnel, en faisant l'hypothèse d'une mer homogène, sans stratification et peu profonde, on pourra donc considérer que $b = 0$.

On pose :

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_{-H}^{\eta} u dz, \quad (1.14)$$

et $u = \bar{u} + u'$ où u' représente la variation de u par rapport à la valeur moyenne.

- Intégrons tout d'abord l'équation (1.3). On a

$$\int_{-H}^{\eta} \operatorname{div} u dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial v_3}{\partial z} dz = 0, \quad (1.15)$$

donc

$$\int_{-H}^{\eta} \operatorname{div} u dz + v_3(\eta) - v_3(-H) = 0, \quad (1.16)$$

de plus d'après les équations (1.8) et (1.11), on a

$$v_3(\eta) = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \cdot \nabla \eta, \quad (1.17)$$

$$v_3(-H) = -u \cdot \frac{n}{n_3} = -u \cdot \nabla H. \quad (1.18)$$

D'autre part, en appliquant la formule de Leibnitz on a :

$$\int_{-H}^{\eta} \operatorname{div} u dz = \operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} u dz \right) - u(-H) \cdot \nabla H - u(\eta) \cdot \nabla \eta. \quad (1.19)$$

Donc en reportant dans (1.16) et en utilisant (1.17) et (1.18), on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\bar{u}h) = 0. \quad (1.20)$$

- En supposant la diffusion horizontale négligeable devant les autres termes, l'équation de conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} + \omega \alpha(u) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\nabla q. \quad (1.21)$$

Remarquons également que

$$\frac{\partial v_3}{\partial z} = -\operatorname{div} u,$$

ainsi

$$v_3 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial(uv_3)}{\partial z} - u \frac{\partial v_3}{\partial z} = \frac{\partial(uv_3)}{\partial z} + u \operatorname{div} u,$$

donc

$$(u \cdot \nabla)u + v_3 \frac{\partial u}{\partial z} = (u \cdot \nabla)u + u \operatorname{div} u + \frac{\partial(uv_3)}{\partial z} = \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{\partial(uv_3)}{\partial z}.$$

En reportant dans (1.21), on obtient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u \otimes u) + \frac{\partial(uv_3)}{\partial z} + \omega \alpha(u) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\nabla q. \quad (1.22)$$

De plus, en utilisant la formule de Leibnitz,

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-H}^{\eta} u dz - u(-H) \frac{\partial H}{\partial t} - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}h) - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

donc

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial u}{\partial t} dz = h \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} - u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (1.23)$$

Traitons à présent l'intégration des termes non linéaires intervenant dans (1.22) :

$$\begin{aligned} & \int_{-H}^{\eta} \operatorname{div}(u \otimes u) dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial uv_3}{\partial z} dz \\ &= \int_{-H}^{\eta} \operatorname{div}(u \otimes u) dz + u(\eta)v_3(\eta) - u(-H)v_3(-H) \\ &= \operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (u \otimes u) dz \right) - u(-H)(u(-H) \cdot \nabla H) \\ & \quad - u(\eta)(u(\eta) \cdot \nabla \eta) + u(\eta)v_3(\eta) - u(-H)v_3(-H), \end{aligned} \quad (1.24)$$

en reportant (1.17) et (1.18) dans cette équation, on obtient

$$\int_{-H}^{\eta} \operatorname{div}(u \otimes u) dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial uv_3}{\partial z} dz = \operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (u \otimes u) dz \right) + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t},$$

or $u = \bar{u} + u'$, donc

$$\operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (u \otimes u) dz \right) = \operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (\bar{u} \otimes \bar{u}) dz \right) + \operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (u' \otimes u') dz \right),$$

On considère généralement que le flux turbulent intervenant dans cette équation est responsable d'une diffusion turbulente semblable à la diffusion moléculaire. L'analogie

suggère alors de représenter le produit des fluctuations apparaissant dans cette équation sous la forme d'un gradient de la vitesse moyenne [57], on a ainsi

$$\operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (u' \otimes u') dz \right) \approx -hA_t \Delta \bar{u},$$

où A_t est appelé coefficient de viscosité turbulente. Pour prendre en compte les effets de dissipation sous maille, on utilise un coefficient de diffusion horizontale A_m qui s'ajoute à A_t . On remplacera donc A_t par un coefficient A , avec $A = A_t + A_m$.

Traitons à présent le terme faisant intervenir le produit des vitesses moyennes.

On a

$$\operatorname{div} \left(\int_{-H}^{\eta} (\bar{u} \otimes \bar{u}) dz \right) = \operatorname{div} (h\bar{u} \otimes \bar{u}) = \bar{u} \operatorname{div} (\bar{u}h) + h(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u},$$

d'après (1.20),

$$\begin{aligned} &= -\bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} + h(\bar{u} \cdot \nabla) \bar{u} \\ &= -\bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{h}{2} \nabla \bar{u}^2 + h \operatorname{rot} \bar{u} \alpha(\bar{u}). \end{aligned}$$

L'intégration des termes non linéaires nous donne finalement :

$$\int_{-H}^{\eta} \operatorname{div} (u \otimes u) dz + \int_{-H}^{\eta} \frac{\partial uv_3}{\partial z} dz = -hA \Delta \bar{u} - \bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{h}{2} \nabla \bar{u}^2 + h \operatorname{rot} \bar{u} \alpha(\bar{u}) + u(\eta) \frac{\partial \eta}{\partial t}. \quad (1.25)$$

L'intégration du terme de Coriolis nous donne

$$\int_{-H}^{\eta} \omega \alpha(u) dz = \omega \alpha \left(\int_{-H}^{\eta} u dz \right) = \omega h \alpha(\bar{u}). \quad (1.26)$$

Intégrons le terme de diffusion verticale.

on a

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \nu \frac{\partial u}{\partial z}(\eta) - \nu \frac{\partial u}{\partial z}(-H)$$

d'où, en utilisant (1.6) et (1.9) :

$$\int_{-H}^{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \tau_s - \tau_f \quad (1.27)$$

Il reste à intégrer le terme de pression. Nous avons fait l'hypothèse d'une mer sans stratification, donc d'après (1.4) $\frac{\partial q}{\partial z} = 0$, donc q ne dépend pas de z , d'où

$$q = q(\eta) = \frac{p_a}{\rho_0} + g\eta$$

et

$$\nabla q = g\nabla\eta,$$

et donc

$$\int_{-H}^{\eta} \nabla q dz = gh\nabla\eta. \quad (1.28)$$

Finalement, l'intégration de (1.22) sur la hauteur d'eau nous donne en utilisant (1.23), (1.25), (1.26), (1.27), (1.28) :

$$h\frac{\partial\bar{u}}{\partial t} - hA\Delta\bar{u} + \frac{h}{2}\nabla\bar{u}^2 + h\text{rot}\bar{u}\alpha(\bar{u}) + \omega h\alpha(\bar{u}) + gh\nabla\eta = \tau_s - \tau_f \quad (1.29)$$

La fonction τ_s peut se modéliser sous la forme

$$\tau_s = C_s V|V|,$$

où V est la vitesse du vent 10 mètres au dessus de la surface et C_s un coefficient positif. τ_f est souvent modélisé par $C_d u|u|$ caractérisant la condition de frottement au fond. Comme on s'intéresse ici à la vitesse moyenne, on modélise τ_f par

$$\tau_f = Dh\bar{u}|\bar{u}|,$$

où D est une constante.

Posons

$$f = \frac{C_s V|V|}{h}.$$

En notant u la vitesse moyenne, on obtient finalement le système d'équations :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \text{div}(uh) = 0 \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla u^2 + \text{rot}u\alpha(u) - A\Delta u + \omega\alpha(u) + Du|u| + g\nabla\eta = f. \quad (1.31)$$

Nous devons à présent donner les conditions aux limites et initiales. Les conditions aux limites en surface et au fond étant prises en compte lors de l'intégration sur la hauteur d'eau, seules les conditions sur les frontières latérales interviennent.

Si on considère des frontières latérales naturelles, c'est à dire les frontières représentées par les côtes, on prend souvent une condition d'imperméabilité au travers de la frontière qui se traduit par :

$$u \cdot n = 0,$$

pour que le problème soit bien posé, on doit rajouter une condition. On prend généralement une condition sur le rotationnel du vecteur vitesse :

$$\operatorname{rot} u = 0,$$

cette condition s'interprète comme un terme de non dissipation à la frontière. Nous prenons comme conditions initiales :

$$u(t = 0) = u_0,$$

$$h(t = 0) = h_0.$$

1.2 Un modèle de Shallow Water à deux couches

Pour établir le modèle bi-couche, nous considérons à présent que le fluide est composée par deux couches non miscibles de densité ρ_1 et ρ_2 , séparées par une interface d'épaisseur nulle. L'indice 1 sera réservé à la couche inférieure de densité ρ_1 et l'indice 2 à la couche supérieure de densité ρ_2 , avec $\rho_2 < \rho_1$.

1.2.1 Un modèle tri-dimensionnel

L'équation $z = -H(x, y)$ représente le fond du domaine. L'équation $z = \eta_1(x, y, t)$ représente l'interface et $z = \eta_2(x, y, t)$ l'élévation de la surface libre.

La hauteur de la première couche est donc donnée par :

$$h_1(x, y, t) = H(x, y) + \eta_1(x, y, t),$$

et pour la seconde couche :

$$h_2(x, y, t) = \eta_2(x, y, t) - \eta_1(x, y, t).$$

Les domaines occupés par la couche inférieure et la couche supérieure à l'instant t sont respectivement :

$$\Omega_1^3(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \Omega, z \in (-H(x, y), \eta_1(x, y, t))\},$$

$$\Omega_2^3(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in \Omega, z \in (\eta_1(x, y, t), \eta_2(x, y, t))\}.$$

La surface libre du domaine est donnée par

$$\Gamma_{s_2}(t) = \{(x, y, \eta_2(x, y, t)) / (x, y) \in \Omega\},$$

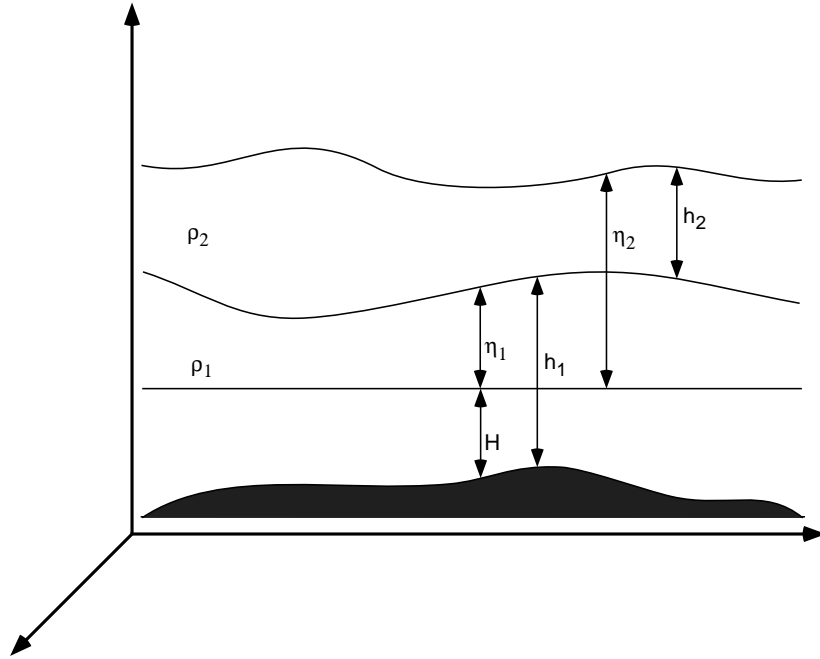


Figure 1.4: notations pour le modèle deux couches

l'interface par

$$\Gamma_{s_1}(t) = \{(x, y, \eta_1(x, y, t)) / (x, y) \in \Omega\},$$

et le fond par

$$\Gamma_f(t) = \{(x, y, -H(x, y)) / (x, y) \in \Omega\}.$$

Nous noterons \mathbf{v}_1 la vitesse de la couche 1 de composante horizontale u_1 et de composante verticale $v_{1,3}$, de même \mathbf{v}_2 représente la vitesse de la couche 2 de composante horizontale u_2 et de composante verticale $v_{2,3}$.

Nous faisons l'hypothèse que les équations régissant l'évolution de chaque couche correspondent aux équations déduites dans les sections 1.1.1 et 1.1.2. Pour la couche inférieure on considère ainsi le système d'équations suivant :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + (u_1 \cdot \nabla) u_1 + v_{1,3} \frac{\partial u_1}{\partial z} + \omega \alpha(u_1) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) = -\nabla q_1 \quad (1.32)$$

$$\operatorname{div} u_1 + \frac{\partial v_{1,3}}{\partial z} = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \quad (1.34)$$

et pour la couche supérieure :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2 \cdot \nabla) u_2 + v_{2,3} \frac{\partial u_2}{\partial z} + \omega \alpha(u_2) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) = -\nabla q_2 \quad (1.35)$$

$$\operatorname{div} u_2 + \frac{\partial v_{2,3}}{\partial z} = 0 \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial z} = 0, \quad (1.37)$$

où ν_1 et ν_2 désignent les coefficients de viscosité respectifs. Les conditions aux limites que nous prenons sont les mêmes que celles considérées dans le cas d'une seule couche (voir section 1.1.3), en surface

$$p_2 = p_a, \quad (1.38)$$

$$\nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \tau_{s_2}, \quad (1.39)$$

$$v_{2,3} = \frac{\partial \eta_2}{\partial t} + u_2 \cdot \nabla \eta_2, \quad (1.40)$$

et au fond :

$$\nu_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = \tau_f, \quad (1.41)$$

$$u_1 \cdot n + v_{1,3} \cdot n_3 = 0. \quad (1.42)$$

À l'interface, on impose la continuité de la pression,

$$p_1 = p_2, \quad (1.43)$$

imposons également une condition cinématique,

$$v_{2,3} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + u_2 \cdot \nabla \eta_1, \quad (1.44)$$

$$v_{1,3} = \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + u_1 \cdot \nabla \eta_1, \quad (1.45)$$

ceci étant équivalent à imposer

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = -\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2, \quad (1.46)$$

où \mathbf{n}_1 est le vecteur normal extérieur à la première couche, et \mathbf{n}_2 la normale extérieure à la seconde couche.

Considérons également la condition à l'interface $(\Gamma_2 \cdot \mathbf{n}_2)_T = \tau_i$, où Γ_2 représente le tenseur des efforts visqueux de la première couche, et τ_i le frottement entre les deux couches. Généralement on considère que $\mathbf{n}_2 \approx (0, 0, -1)$, on obtient alors,

$$-\nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} = \tau_i. \quad (1.47)$$

1.2.2 Un modèle bi-dimensionnel

Pour obtenir le modèle bi-dimensionnel, on intègre les équations de la couche inférieure entre $-H$ et η_1 , et les équations de la couche supérieure entre η_1 et η_2 . On procède de la même façon que dans le cas d'une seule couche, sauf pour les termes de pression qui se traitent différemment :

Pour la couche du fond, en notant p_i la pression à l'interface, on a :

$$q_1 = \frac{p_i}{\rho_1} + g\eta_1,$$

avec $p_i = p_a + \rho_2 g h_2$ (ici p_a est la pression atmosphérique). On a ainsi

$$\nabla q_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} g \nabla h_2 + g \nabla \eta_1,$$

et en intégrant :

$$\int_{-H}^{\eta_1} \nabla q_1 dz = \frac{\rho_2}{\rho_1} g h_1 \nabla h_2 + g h_1 \nabla \eta_1.$$

Pour la couche supérieure on a :

$$q_2 = \frac{p_a}{\rho_2} + g\eta_2,$$

d'où, en remarquant que $\eta_2 = h_2 + \eta_1$,

$$\nabla q_2 = g \nabla h_2 + g \nabla \eta_1$$

et en intégrant on obtient

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} \nabla q_2 dz = g h_2 \nabla h_2 + g h_2 \nabla \eta_1.$$

On aboutit alors à :

$$\begin{aligned} h_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} - h_1 A_1 \Delta \bar{u}_1 + \frac{h_1}{2} \nabla \bar{u}_1^2 + h_1 \text{rot } \bar{u}_1 \alpha(\bar{u}_1) \\ + h_1 \omega \alpha(\bar{u}_1) + g \frac{\rho_2}{\rho_1} h_1 \nabla h_2 + g h_1 \nabla \eta_1 = \tau_i - \tau_f, \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned}
 h_2 \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} - h_2 A_2 \Delta \bar{u}_2 + \frac{h_2}{2} \nabla \bar{u}_2^2 + h_2 \operatorname{rot} \bar{u}_2 \alpha(\bar{u}_2) \\
 + h_2 \omega \alpha(\bar{u}_2) + g h_2 \nabla h_2 + g h_2 \nabla \eta_1 = \tau_{s_2} - \tau_i.
 \end{aligned} \tag{1.49}$$

On modélise généralement le terme τ_i par

$$\tau_i = C_0 h_2 |\bar{u}_2 - \bar{u}_1| (\bar{u}_2 - \bar{u}_1).$$

Pour alléger l'écriture des équations nous ne faisons pas apparaître ici les termes de friction au fond et à l'interface. En divisant par h_1 l'équation (1.48) et par h_2 l'équation (1.49), on obtient ainsi les équations de conservation de la quantité de mouvement suivantes :

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \bar{u}_1^2 + \operatorname{rot} \bar{u}_1 \alpha(\bar{u}_1) - A_1 \Delta \bar{u}_1 + \omega \alpha(\bar{u}_1) + g \nabla h_1 + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \nabla h_2 = f_1, \tag{1.50}$$

$$\frac{\partial \bar{u}_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \bar{u}_2^2 + \operatorname{rot} \bar{u}_2 \alpha(\bar{u}_2) - A_2 \Delta \bar{u}_2 + \omega \alpha(\bar{u}_2) + g \nabla h_2 + g \nabla h_1 = f_2. \tag{1.51}$$

où l'on a noté :

$$f_1 = g \nabla H$$

et

$$f_2 = \frac{C_s V |V|}{h_2} + g \nabla H.$$

Nous noterons dans la suite de cette étude les vitesses moyennes simplement par u_1 et u_2 . Les équations caractérisant le modèle de shallow water bi-couche sont ainsi données par :

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u_1^2 + \operatorname{rot} u_1 \alpha(u_1) - A_1 \Delta u_1 + \omega \alpha(u_1) + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \nabla h_2 + g \nabla h_1 = f_1, \tag{1.52}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \operatorname{div} (u_1 h_1) = 0, \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u_2^2 + \operatorname{rot} u_2 \alpha(u_2) - A_2 \Delta u_2 + \omega \alpha(u_2) + g \nabla h_2 + g \nabla h_1 = f_2, \tag{1.54}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \operatorname{div} (u_2 h_2) = 0. \tag{1.55}$$

En nous inspirant du modèle une couche, nous prenons en général les mêmes conditions aux limites sur les frontières latérales naturelles :

$$u_1 \cdot n = 0, \tag{1.56}$$

$$u_2 \cdot n = 0, \tag{1.57}$$

$$\operatorname{rot} u_1 = 0, \quad (1.58)$$

$$\operatorname{rot} u_2 = 0. \quad (1.59)$$

Et comme conditions initiales :

$$u_1(t = 0) = u_{1,0} \quad (1.60)$$

$$u_2(t = 0) = u_{2,0} \quad (1.61)$$

$$h_1(t = 0) = h_{1,0} \quad (1.62)$$

$$h_2(t = 0) = h_{2,0}. \quad (1.63)$$

Nous pouvons également prendre des conditions aux limites de type Dirichlet, c'est l'objet du prochain chapitre.

1.2.3 La méthode de Galerkin pour la résolution numérique

Le domaine Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 , simplement connexe pour simplifier, de frontière γ de classe $C^{1,1}$ ou Ω un polygone convexe. Physiquement, Ω correspond au domaine horizontal occupé par le fluide. On note n la normale extérieure à Ω sur γ et $x = (x_1, x_2)$ un point de Ω . On note (\cdot, \cdot) le produit scalaire associé à $L^2(\Omega)^N$. Nous nous intéressons ici à la résolution numérique du problème bi-couche introduit dans la section précédente. Pour ne pas alourdir notre présentation de notations inutiles, nous écrirons u_i et non plus \bar{u}_i , en n'oubliant pas que u_i représente ici la vitesse moyennée sur la hauteur de la couche i . Toujours pour simplifier l'écriture, on ne considérera pas dans ce qui suit les termes de frottement au fond et entre les deux couches. Nous souhaitons ainsi résoudre le problème suivant :

$$(E1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u_1^2 + \operatorname{rot} u_1 \alpha(u_1) - A_1 \Delta u_1 + \omega \alpha(u_1) + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \nabla h_2 + g \nabla h_1 = f_1 \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 h_1) = 0 \\ u_1 \cdot n = 0, \operatorname{rot} u_1 = 0 \\ u_1(t = 0) = u_{1,0} \\ h_1(t = 0) = h_{1,0} \end{array} \right.$$

$$(E2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u_2^2 + \operatorname{rot} u_2 \alpha(u_2) - A_2 \Delta u_2 + \omega \alpha(u_2) + g \nabla h_2 + g \nabla h_1 = f_2 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \operatorname{div}(u_2 h_2) = 0 \\ u_2 \cdot n = 0, \operatorname{rot} u_2 = 0 \\ u_2(t = 0) = u_{2,0} \\ h_2(t = 0) = h_{2,0}. \end{array} \right.$$

On définit l'espace fonctionnel \mathcal{V} des fonctions tests :

$$\mathcal{V} = \{ \phi \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{div} \phi \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} \phi \in L^2(\Omega), \phi \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma \},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathcal{V}}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

\mathcal{V} est alors algébriquement et topologiquement inclus dans l'espace

$$\{ \phi \in H^1(\Omega)^2 \mid \phi \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma \}.$$

D'autre part, puisque le domaine est simplement connexe, la norme précédente est équivalente à celle donnée par $\|u\|_{\mathcal{V}}^2 = \|\operatorname{div} u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{rot} u\|_{L^2(\Omega)}^2$, et la forme bilinéaire

$$a(u, v) = (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v) + (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot} v)$$

est coercive.

Dans [11], les auteurs obtiennent une solution faible (u_i, h_i) du problème précédent, où $u_i \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; \mathcal{V})$ et $h_i \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^2(Q)$, et cette solution est unique si les données sont suffisamment régulières. Nous allons approcher numériquement le problème précédent à l'aide de la méthode de Galerkin, celle-ci nécessite l'utilisation d'une base de l'espace fonctionnel \mathcal{V} dans lequel est recherchée la solution u_i . C'est pourquoi nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats obtenus par P. Oronga pour la construction numérique d'une base de l'espace fonctionnel \mathcal{V} [62].

Base de l'espace fonctionnel \mathcal{V}

On rappelle que Ω est un domaine ouvert, borné de \mathbb{R}^2 , simplement connexe, de frontière γ de classe $C^{1,1}$ ou Ω un polygone convexe. On a les décompositions orthogonales de $L^2(\Omega)^2$ et de \mathcal{V} suivantes [18, 33] :

$$L^2(\Omega)^2 = \nabla H^1(\Omega) \oplus \operatorname{Rot} H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{V} = \left\{ u = \nabla p, p \in H^2(\Omega), \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \right\} \oplus \operatorname{Rot} H_0^1(\Omega).$$

C'est-à-dire que toute fonction de \mathcal{V} s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = u_p + u_q = \nabla p + \operatorname{Rot} q,$$

avec p et q solutions des problèmes scalaires suivants :

$$(G) \begin{cases} \Delta p = \operatorname{div} u & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial p}{\partial n} = u \cdot n = 0 & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad (R) \begin{cases} -\Delta q = \operatorname{rot} u & \text{dans } \Omega \\ q = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases}$$

Les conditions de régularité sur le domaine Ω et sa frontière proviennent des résultats obtenus par Grisvard [34]. La fonction scalaire p peut être choisie telle que

$$\int_{\Omega} p dx = 0$$

de telle sorte que $\|\nabla p\|_{L^2(\Omega)^2}$ soit une norme équivalente à $\|p\|_{H^1(\Omega)}$, et si Ω est simplement connexe (compte tenu de $u_p \cdot n = u_q \cdot n = 0$), on a $\|\operatorname{div} u_p\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta p\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|u_p\|_{H^1(\Omega)}$.

De même, $\|\operatorname{Rot} q\|_{L^2(\Omega)^2}$ est une norme équivalente à $\|q\|_{H^1(\Omega)}$ et $\|\operatorname{rot} u_q\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta p\|_{L^2(\Omega)}$ est une norme équivalente à $\|u_q\|_{H^1(\Omega)}$.

De plus, si $\operatorname{div} u_p \in L^p(\Omega)$ alors $p \in W^{2,p}(\Omega)$ et de même, si $\operatorname{rot} u_q \in L^p(\Omega)$ alors $q \in W^{2,p}(\Omega)$ [33].

Nous allons à présent donner un théorème permettant de construire une base spéciale de l'espace \mathcal{V} , satisfaisant aux conditions d'imperméabilité.

On considère les problèmes aux valeurs propres suivants :

$$(P1) \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \gamma, \\ \operatorname{rot} u = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases}$$

$$(P2) \begin{cases} -\Delta p = \lambda p & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases}$$

$$(P3) \begin{cases} -\Delta q = \mu q & \text{dans } \Omega, \\ q = 0 & \text{sur } \gamma. \end{cases}$$

On le théorème suivant [62] :

Théorème 1.1. 1. Si (λ, p) est solution de (P2), alors $(\lambda, \nabla p)$ est solution de (P1).

2. Si (μ, q) est solution de (P3), alors $(\mu, \operatorname{Rot} q)$ est solution de (P1).

3. Puisque Ω est simplement connexe, alors 0 n'est pas valeur propre de (P1).

4. L'ensemble composé des ∇p_i et des $\text{Rot } q_i$, où p_i est solution de (P2) et q_i est solution de (P3), est une base de $L^2(\Omega)^2$ et de \mathcal{V} .

De plus, l'ensemble composé des fonctions p_i , solutions de (P2), constitue une base orthogonal de $L^2(\Omega)$.

Remarque 1.2. Dans le cas d'un domaine à géométrie complexe, les fonctions p_i et q_i , vérifiant les problèmes scalaires précédents, sont obtenues par une méthode d'éléments finis en utilisant des éléments de type Hermite à trois degrés de liberté (u, u_x, u_y) par nœud. Cela permet ainsi d'accéder directement aux ∇p_i et aux $\text{Rot } q_i$. Cependant, dans le cas d'un domaine idéalisé (cf. paragraphe 3.4), ces fonctions sont connues analytiquement.

Méthode de Galerkin

Notons $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m, \dots\}$ la base orthogonale de \mathcal{V} obtenue en normant dans $L^2(\Omega)^2$ la base définie précédemment, c'est à dire l'ensemble des $\frac{\nabla p_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ et des $\frac{\text{Rot } q_i}{\sqrt{\mu_i}}$.

On note \mathcal{V}^m le sous espace de dimension finie engendré par les m premières fonctions $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$.

La méthode de Galerkin consiste à chercher les solutions approchées $u_{1,m}$ et $u_{2,m}$ de u_1 et u_2 sur \mathcal{V}^m , où u_1 et u_2 sont les solutions des problèmes (E1) et (E2).

Pour cela on s'intéresse aux problèmes faibles approchés (E_1^m) et (E_2^m) :

$$(E_1^m) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_{1,m}}{\partial t}, \varphi_i \right) - A_1 a(u_{1,m}, \varphi_i) - \frac{1}{2} (u_{1,m}^2, \text{div } \varphi_i) + (\text{rot } u_{1,m} \alpha(u_{1,m}), \varphi_i) \\ \quad + \omega (\alpha(u_{1,m}), \varphi_i) - g \frac{\rho_2}{\rho_1} (h_{2,m}, \text{div } \varphi_i) - g (h_{1,m}, \text{div } \varphi_i) \\ \quad = (f_1, \varphi_i), \forall \varphi_i, i = 1, \dots, m, \\ \\ \frac{\partial h_{1,m}}{\partial t} + \text{div} (u_{1,m} h_{1,m}) = 0, \\ \\ u_{1,m}(t=0) = u_{1,0,m}, \\ h_{1,m}(t=0) = h_{1,0,m}. \end{array} \right.$$

$$(E_2^m) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_{2,m}}{\partial t}, \varphi_i \right) - A_2 a(u_{2,m}, \varphi_i) - \frac{1}{2} (u_{2,m}^2, \operatorname{div} \varphi_i) + (\operatorname{rot} u_{2,m} \alpha(u_{2,m}), \varphi_i) \\ \quad + \omega (\alpha(u_{2,m}), \varphi_i) - g (h_{2,m}, \operatorname{div} \varphi_i) - g (h_{1,m}, \operatorname{div} \varphi_i) \\ \quad = (f_2, \varphi_i), \forall \varphi_i, i = 1, \dots, m, \\ \\ \frac{\partial h_{2,m}}{\partial t} + \operatorname{div} (u_{2,m} h_{2,m}) = 0, \\ \\ u_{2,m}(t=0) = u_{2,0,m}, \\ h_{2,m}(t=0) = h_{2,0,m}. \end{array} \right.$$

D'autre part, $u_{1,m}$ et $u_{2,m}$ se décomposent sur la base de la façon suivante :

$$u_{1,m} = \sum_{i=1}^m x_{1,i}(t) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{m_p} a_{1,i}(t) \frac{\nabla p_i}{\sqrt{\lambda_i}} + \sum_{i=1}^{m_q} b_{1,i}(t) \frac{\operatorname{Rot} q_i}{\sqrt{\mu_i}},$$

$$u_{2,m} = \sum_{i=1}^m x_{2,i}(t) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{m_p} a_{2,i}(t) \frac{\nabla p_i}{\sqrt{\lambda_i}} + \sum_{i=1}^{m_q} b_{2,i}(t) \frac{\operatorname{Rot} q_i}{\sqrt{\mu_i}}.$$

On note $\varphi_{ai} = \frac{\nabla p_i}{\sqrt{\lambda_i}}$ et $\varphi_{bi} = \frac{\operatorname{Rot} q_i}{\sqrt{\mu_i}}$, on remplace alors $u_{1,m}$ et $u_{2,m}$ par ces expressions dans les problèmes (E_1^m) et (E_2^m) .

En effectuant les intégrations bi-dimensionnelles et en utilisant les propriétés d'orthonormalité de la base, nous sommes amenés à résoudre deux systèmes d'équations différentielles non linéaires du premier ordre :

$$(ED1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_{1,i}}{\partial t} = -A_1 \lambda_i a_{1,i} - \omega \sum_{j=1}^m x_{1,j} XX(a, i, j) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{1,j} x_{1,k} XXX(a, i, j, k) \\ \quad + g \frac{\rho_2}{\rho_1} (h_{2,m}, \operatorname{div} \varphi_{ai}) + g (h_{1,m}, \operatorname{div} \varphi_{ai}) + (f_1, \varphi_{ai}), \\ \\ \frac{\partial b_{1,i}}{\partial t} = -A_1 \mu_i b_{1,i} - \omega \sum_{j=1}^m x_{1,j} XX(b, i, j) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{1,j} x_{1,k} XXX(b, i, j, k) \end{array} \right.$$

$$(ED2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_{2,i}}{\partial t} = -A_2 \lambda_i a_{2,i} - \omega \sum_{j=1}^m x_{2,j} XX(a, i, j) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{2,j} x_{2,k} XXX(a, i, j, k) \\ \quad + g (h_{2,m}, \operatorname{div} \varphi_{ai}) + g (h_{1,m}, \operatorname{div} \varphi_{ai}) + (f_2, \varphi_{ai}) \\ \\ \frac{\partial b_{2,i}}{\partial t} = -A_2 \mu_i b_{2,i} - \omega \sum_{j=1}^m x_{2,j} XX(b, i, j) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m x_{2,j} x_{2,k} XXX(b, i, j, k) \\ \quad + (f_2, \varphi_{bi}). \end{array} \right.$$

Les fonctions $XX(a, i, j)$, $XX(b, i, j)$, $XXX(a, i, j, k)$, et $XXX(b, i, j, k)$ représentent des intégrales de produits de fonctions de base, donc indépendantes du temps.

Pour résoudre ces équations différentielles, nous procédons de la façon suivante. Nous utilisons une méthode de quadrature pour intégrer le terme de diffusion. En effet, les deux systèmes d'équations (ED1) et (ED2) sont du type

$$\frac{\partial x_i(t)}{\partial t} + A\lambda_i x_i(t) = F_i(t).$$

On multiplie alors de part et d'autre par $e^{A\lambda_i t}$, et on intègre entre t et $t + \Delta t$, où Δt représente le pas de temps. En faisant l'approximation $\int_t^{t+\Delta t} e^{A\lambda_i t} F_i(t) dt \approx F_i(t + \Delta t) \int_t^{t+\Delta t} e^{A\lambda_i t} dt$, on obtient finalement la relation générale :

$$x_i(t + \Delta t) = e^{-A\lambda_i \Delta t} x_i(t) + F_i(t + \Delta t) \left(\frac{1 - e^{-A\lambda_i \Delta t}}{\lambda_i} \right).$$

Cette astuce de calcul s'avère particulièrement intéressante lors de l'évaluation des plus petites composantes qui sont principalement dominées par les forces de friction visqueuses.

Les termes $(h_{1,m}, \text{div } \varphi_{ai})$ et $(h_{2,m}, \text{div } \varphi_{ai})$ doivent être calculés à chaque itération après réévaluation de la hauteur d'eau.

Pour calculer $h_{1,m}$ et $h_{2,m}$, on utilise la méthode des caractéristiques. Cette méthode correspond à une approche lagrangienne du problème. En effet, le calcul de la hauteur d'eau est réalisé en évaluant la variation de la hauteur sur une trajectoire. En notant $\frac{D}{Dt}$ la dérivée temporelle sur les caractéristiques, les équations de

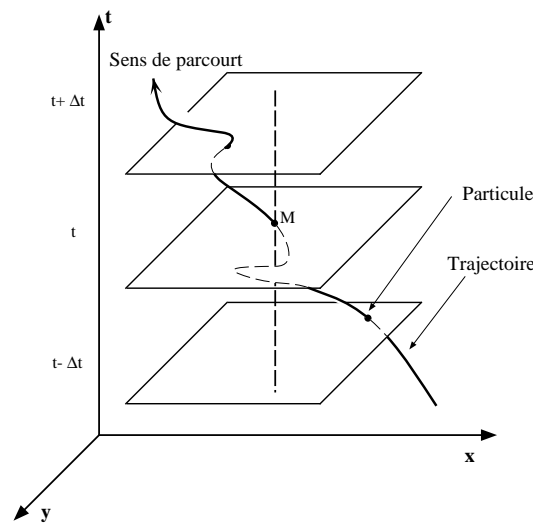


Figure 1.5: Trajectoire d'une particule

conservation de la masse $(E_1^m)_2$ et $(E_2^m)_2$ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{Dh_{1,m}}{Dt} = -h_{1,m} \operatorname{div} u_{1,m}, \quad (1.64)$$

$$\frac{Dh_{2,m}}{Dt} = -h_{2,m} \operatorname{div} u_{2,m}. \quad (1.65)$$

Soit encore, si $X(t)$ représente la coordonnée d'un point de la trajectoire à l'instant t et Δt le pas de discrétisation en temps :

$$h_{1,m}(X(t), t) = h_{1,m}(X(t - \Delta t), t - \Delta t) \exp(-\Delta t \operatorname{div} u_{1,m}(X(t), t)), \quad (1.66)$$

$$h_{2,m}(X(t), t) = h_{2,m}(X(t - \Delta t), t - \Delta t) \exp(-\Delta t \operatorname{div} u_{2,m}(X(t), t)). \quad (1.67)$$

Chapitre 2

Un résultat d'existence pour le modèle de SW bi-couche avec des conditions aux limites de Dirichlet

Ce chapitre a fait l'objet d'une note aux comptes rendus de l'académie des sciences [28].

Nous présentons dans ce chapitre un résultat d'existence pour un problème de shallow water bi-couche, avec conditions aux limites de Dirichlet. La principale difficulté provient des termes couplant les deux couches. Pour les traiter, nous devons coupler l'estimation naturelle d'énergie avec une estimation des épaisseurs dans $L^2(Q)$. Pour obtenir cette estimation L^2 , nous utilisons quelques résultats sur les espaces de Hardy définis sur des bornés pour traiter les termes non linéaires.

2.1 Un résultat d'existence

Nous supposons que la surface du fluide occupe un domaine borné Ω de \mathbb{R}^2 , simplement connexe, de frontière Γ assez régulière. Soit Q le cylindre défini par $\Omega \times (0, T)$ et $\Sigma = \Gamma \times (0, T)$. Pour ne pas alourdir notre présentation de notations inutiles, on ne prendra pas en compte dans ce qui suit la force de Coriolis, la tension du vent sur la surface du fluide, ainsi que les frottements au fond et à l'interface entre les deux fluides. On note $\lambda_i > 0$ et $\mu_i > 0$ les coefficients de diffusion, nous nous intéressons au problème suivant :

$$(P) \begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla) u_i - \lambda_i \nabla \operatorname{div} u_i - \mu_i \Delta u_i + g \nabla h_i + g_i \nabla h_j = 0 & \text{dans } Q, \\ u_i = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ \frac{\partial h_i}{\partial t} + \operatorname{div}(u_i h_i) = 0 & \text{dans } Q, \\ u_i(t=0) = u_{i,0} \quad \text{et} \quad h_i(t=0) = h_{i,0} & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$ et $j = 1, 2$, avec $j \neq i$. Ici, g est l'accélération de la gravité et $g_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1}g$, $g_2 = g$. Le couplage entre les deux couches est pris en compte par les termes de pression $g_i \nabla h_j$.

Soit C_{GN} la plus optimale constante de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante :

$$\|u\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \leq C_{GN} \|u\|_{H_0^1(\Omega)^2} \|u\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

Soit C_2 la constante issue de l'injection de $W^{1,1}(\Omega)^2$ dans $L^2(\Omega)^2$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)^2} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,1}(\Omega)^2}.$$

En suivant le travail de M.L. Munoz Ruiz *et al* [11], on considère les espaces de Orlicz $L_{\mathcal{A}}(\Omega)$, $L_{\mathcal{A}'}(\Omega)$ et $L_{\tilde{\mathcal{A}}'}(\Omega)$ où \mathcal{A} est la N-fonction (voir Adams chapitre 8 [1]) définie par

$$\mathcal{A}(x) = \exp(x^2) - 1,$$

et \mathcal{A}' est la N-fonction complémentaire à \mathcal{A} , équivalente à la N-fonction $\tilde{\mathcal{A}}'$ définie par

$$\tilde{\mathcal{A}}'(x) = x \sqrt{\log^+ x}.$$

L'espace de Orlicz $L_{\mathcal{A}}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)}$

$$\|\cdot\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} = \inf \left\{ p > 0; \int_{\Omega} \mathcal{A} \left(\frac{|\cdot(x)|}{p} \right) dx \leq 1 \right\}.$$

Nous utiliserons par la suite les propriétés suivantes relatives aux espaces de Orlicz [1],

$$\|p\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \leq k \|p\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall p \in H^1(\Omega),$$

$$\|h\|_{L_{\mathcal{A}'}(\Omega)} \leq k' \|h\|_{L_{\tilde{\mathcal{A}}'}(\Omega)} \quad \forall h \in L_{\mathcal{A}'}(\Omega),$$

$$\|h\|_{L_{\tilde{\mathcal{A}}'}(\Omega)} \leq \int_{\Omega} \tilde{\mathcal{A}}'(h) dx + 1,$$

et une version généralisée de l'inégalité de Hölder :

$$\left| \int_{\Omega} ph dx \right| \leq 2 \|p\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \|h\|_{L_{\mathcal{A}'}(\Omega)}.$$

On introduit également l'opérateur de Stokes $S(\Pi) = p$, où (s, p) est l'unique solution problème suivant [44] :

$$-\Delta s + \nabla p = \Pi \text{ dans } \Omega, \quad s = 0 \text{ sur } \Gamma, \quad \operatorname{div} s = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \int_{\Omega} p dx = 0. \quad (2.1)$$

On sait que l'opérateur linéaire S est borné de $W^{-1,r}(\Omega)^2$ dans $L^r(\Omega)$ et de $L^r(\Omega)^2$ dans $W^{1,r}(\Omega)$ avec $1 < r < \infty$. On note ainsi C , C' et C'' les constantes positives satisfaisant aux inégalités suivantes :

$$\|p\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\Pi\|_{W^{-1,2}(\Omega)^2},$$

$$\|p\|_{W^{1,2}(\Omega)} \leq C'\|\Pi\|_{L^2(\Omega)^2},$$

$$\|p\|_{W^{1,4}(\Omega)} \leq C''\|\Pi\|_{L^4(\Omega)^2}.$$

Dans la suite on pose $K_1 = 2C'kk'$.

Conditions sur les données

Soient ε et ε' deux nombres positifs tels que :

$$\varepsilon = \frac{g-1}{2} \text{ et } 0 < \varepsilon' < 1. \quad (2.2)$$

On note

$$\mathbb{C}_1 = \frac{C^2}{2\varepsilon}, \quad \mathbb{C}_2 = \frac{C_2k_2K_1}{2}, \quad \mathbb{C}_3 = \frac{C''C_{GN}^2}{2\varepsilon} + (k_0 + k_1)\mathbb{C}_1, \quad \mathbb{C}_4 = 2K_1^2,$$

où k_0, k_1, k_2 sont définis dans la section 2.2.

On considère également une constante positive δ telle que

$$\delta^2 > 12\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2. \quad (2.3)$$

Nous supposons que les coefficients de viscosité μ_i, λ_i vérifient

$$\left(\frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - 12\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2}}{2\mathbb{C}_1} \right) < \mu_i < \left(\frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - 12\mathbb{C}_1\mathbb{C}_2}}{2\mathbb{C}_1} \right), \quad (2.4)$$

$$\delta\lambda_i > \frac{\delta^2 g_i^2}{4\varepsilon'}. \quad (2.5)$$

Ainsi

$$\mathbb{D}_{3,i} = \delta\mu_i - \mathbb{C}_1\mu_i^2 - 3\mathbb{C}_2, \quad \mathbb{D}_{2,i} = \delta\lambda_i - \frac{\delta^2 g_i^2}{4\varepsilon'}, \quad \mathbb{D}_{1,i} = \delta g + \lambda_i$$

sont strictement positifs.

Enfin, on dira que les données sont petites dans le sens suivant :

$$\mathbb{D}_0 < \theta \min \left\{ \min_{i=1,2} \left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{\sqrt{\delta^2 C_{GN}^2 + 16\mathbb{C}_3\theta_i\mathbb{D}_{3,i}} - \delta C_{GN}}{4\mathbb{C}_3} \right)^2 ; \right.$$

$$\left. \min_{i=1,2} (\mathbb{D}_{1,i} - \mathbb{C}_4 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}) \frac{\theta'_i \mathbb{D}_{3,i}}{\mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}} \right\}, \quad (2.6)$$

où $\theta_i + \theta'_i = 1$, $\theta \in (0, 1)$ et

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_0 = \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4} \right) \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + (\delta g + \lambda_i) \int_{\Omega} h_{i,0} \log h_{i,0} + 4K_1^2 + \right. \\ \left. \text{mes}(Q) \bar{h}_{i,0} (g \bar{h}_{i,0} + g_i \bar{h}_{j,0}) + 2K_1^2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} h_{i,0} \log^+ h_{i,0} \right]. \end{aligned}$$

Si les conditions (2.2)–(2.6) sont satisfaites, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1. *Soient $u_{i,0} \in L^2(\Omega)^2$, $h_{i,0} > 0$, $h_{i,0} \log h_{i,0} \in L^1(\Omega)$, vérifiant les conditions suivantes :*

$$\|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\mathbb{D}_{1,i}}{\mathbb{C}_4}, \quad (2.7)$$

$$\int_{\Omega} h_{i,0} \log^+ h_{i,0} < \frac{\theta'_i \mathbb{D}_{3,i}}{\mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}}, \quad (2.8)$$

$$\|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\sqrt{\delta^2 C_{GN}^2 + 16 \mathbb{C}_3 \theta_i \mathbb{D}_{3,i}} - \delta C_{GN}}{4 \mathbb{C}_3}. \quad (2.9)$$

Il existe une solution $\{(u_1, h_1), (u_2, h_2)\}$ pour le problème (P) vérifiant : $u_i \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^2) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$, $h_i \log h_i \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ et $h_i \in L^2(Q)$ pour $i = 1, 2$, où les équations de conservation de la quantité de mouvement et de continuité sont respectivement résolues dans $L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-1}(\Omega)^2)$ et $L^{\frac{4}{3}}(0, T; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega))$.

Pour obtenir les estimations d'énergie, nous procédons dans un premier temps de la même manière que dans le cas mono-couche [63]. On multiplie respectivement les équations des moments par u_1 et u_2 , on intègre sur Ω et on ajoute les deux équations

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + g \int_{\Omega} h_i \log h_i \, dx \right] + \lambda_i \|\text{div } u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\ \left. \left(\mu_i - \frac{C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \right) \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \right] = \sum_{i=1}^2 g_i (h_j, \text{div } u_i), \quad (2.10) \end{aligned}$$

où C_{GN} est une constante issue des inégalités de Gagliardo-Nirenberg. La principale difficulté qui différencie ce problème du modèle de shallow water mono-couche [63] provient des termes $(h_j, \text{div } u_i)$. Pour estimer ces termes, nous avons besoin d'avoir une borne sur h_i dans $L^2(Q)$ en fonction de bornes sur u_i dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^2) \cap$

$L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $h_i \log h_i$ dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$. Ce résultat a été obtenu par M.L. Munoz-Ruiz *et al.* [11] avec les conditions aux limites suivantes : $u_i \cdot n = \text{rot } u_i = 0$ sur Σ . Avec ces conditions, on peut facilement découpler l'équation des moments en une équation rotationnelle et une équation potentielle, ce qui permet aux auteurs d'obtenir une estimation sur h_i dans $L^2(Q)$. Dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet, on ne peut pas découpler aussi facilement l'équation des moments, ce qui rend délicate l'obtention d'une borne L^2 pour h_i . Notons également que le résultat que nous établissons dans ce chapitre complète les travaux de M.L. Munoz-Ruiz *et al.* dans [56], où les auteurs obtiennent un résultat d'existence dans le cas mono-dimensionnel.

Pour démontrer le théorème, nous procédons en trois étapes : en utilisant certaines propriétés des espaces de Hardy, on commence par donner dans le lemme 2.2 une estimation sur $(u_i \cdot \nabla)u_i$ dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)^2) + L^1(0, T; W^{1,1}(\Omega)^2)$ en fonction de bornes sur u_i dans $L^2(H_0^1(\Omega)^2) \cap L^\infty(L^2(\Omega)^2)$. Puis, en introduisant l'opérateur de Stokes et en utilisant cette estimation, nous obtenons une borne sur h_i dans $L^2(Q)$ en fonction de bornes sur u_i dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^2) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $h_i \log h_i$ dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ (lemme 2.5). Enfin, dans la section 2.4, on utilise le lemme 2.5 pour obtenir les estimations globales d'énergie pour des données petites, ce qui permet de passer à la limite dans les équations.

2.2 Une estimation sur le terme d'advection $(u_i \cdot \nabla)u_i$

Soit B_η^x la boule de centre $x \in \Omega$ et de rayon η . Dans la suite, on note $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ l'espace des fonctions $f \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$ dont la dérivée au sens des distributions Df est encore dans $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2)$, l'espace de Hardy défini par :

$$\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) = \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^2) / \sup_{\eta \geq 0} |h_\eta * f| \in L^1(\mathbb{R}^2) \right\}$$

où $h_\eta(x) = \eta^{-2}h(\frac{x}{\eta}) \geq 0$, appartient à $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et vérifie : $\text{supp } h_\eta(x) \subset B_\eta^x$, $\int_{\mathbb{R}^2} h_\eta(x) dx = 1$ (voir C. Fefferman et E. Stein [22], R. Coifman et G. Weiss [16]). Notons que $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ est un sous espace de l'espace de Sobolev $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$. Dans [9] et [35], les auteurs introduisent des espaces de Hardy définis sur des domaines bornés. Un de ces espaces est donné par :

$$\mathcal{H}_z^1(\Omega) = \{ f \in L^1(\Omega) / f_z \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^2) \}$$

où f_z est le prolongement par 0 de f dans \mathbb{R}^2 . Toute fonction f de $\mathcal{H}_z^1(\Omega)$ vérifie $\int_\Omega f dx = 0$. Dans la suite, nous nous intéresserons aux propriétés de ce type

d'espace. On réécrit les termes d'advection sous la forme :

$$u_i \nabla u_{i,l} = \sum_{k=1}^2 u_{i,k} \frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_l} + (-1)^l u_{i,j} \text{rot } u_i = T_{0,l} + T_{1,l}$$

avec $l \neq j$. On montre alors le résultat suivant :

Lemme 2.2. $T_{0,l}$ vérifie l'estimation :

$$\|T_{0,l}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \leq k_0 \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 \quad (2.11)$$

et on peut décomposer $T_{1,l} = T_{11,l} + T_{12,l}$ tel que :

$$\|T_{11,l}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2 \leq k_1 \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \|\text{rot } u_i\|_{L^2(Q)}^2, \quad (2.12)$$

$$\|T_{12,l}\|_{L^1(0,T;W^{1,1}(\Omega))} \leq k_2 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2, \quad (2.13)$$

où k_0, k_1 et k_2 sont des constantes positives ne dépendant que des données.

Démonstration. Dans ce qui suit, on note (h_i, u_i) , $i = 1, 2$, une solution de (P) prolongée par $(0, 0)$ dans \mathbb{R}^2 . On a

$$\left\| u_{i,k} \frac{\partial u_{i,k}}{\partial x_l} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} = \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial u_{i,k}^2}{\partial x_l} \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \|(u_{i,k})^2\|_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Gagliardo Nirenberg, on obtient ainsi (2.11). Pour estimer $T_{1,l}$ dans un espace de Hardy, on remarque que sur toute boule B_η^x , u_i peut se décomposer sous la forme :

$$u_i = \nabla p_\eta^x + \text{Rot } q_\eta^x, \quad \text{où } p_\eta^x \in H^1(B_\eta^x) \text{ et } q_\eta^x \in H_0^1(B_\eta^x). \quad (2.14)$$

Remarque 2.3. Soient B_η^x et $B_{\eta'}^{x'}$ deux boules telles que $B_\cap = B_\eta^x \cap B_{\eta'}^{x'} \neq \emptyset$. Dans chacune de ces boules, u_i peut être décomposé de façon unique en utilisant (2.14). Nous n'avons pas nécessairement $\text{Rot } q_\eta^x \neq \text{Rot } q_{\eta'}^{x'}$ dans B_\cap , toutefois on a : $\text{rot } u = \text{rot Rot } q_\eta^x = \text{rot Rot } q_{\eta'}^{x'}$ dans B_\cap .

En utilisant la décomposition (2.14) et la remarque précédente, sur toute boule B_η^x , il vient :

$$T_{1,l} = -\text{rot } (u_{i,j} \text{Rot } q_\eta^x) + \text{Rot } u_{i,j} \text{Rot } q_\eta^x = A_\eta^x + C_\eta^x$$

où A_η^x vérifie

$$\int_{\Omega} A_\eta^x dx = 0 \text{ et } A_\eta^x = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega.$$

Pour établir le résultat annoncé sur $T_{1,l}$, on pose $I_1(x) = h_\eta * A_\eta^x$ et $I_2(x) = h_\eta * \frac{\partial C_\eta^x}{\partial y}$. Traitons en premier lieu le terme $I_1(x)$. On a :

$$\begin{aligned} I_1(x) &= - \int_{B_\eta^x} \frac{1}{\eta^2} \text{Rot } h \left(\frac{x-y}{\eta} \right) u_{i,j}(y) \frac{\text{Rot } q_\eta^x(y)}{\eta} dy \\ &\leq D_1 \left(\int_{B_\eta^x} |u_{i,j}|^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_{B_\eta^x} (|\text{Rot } q_\eta^x| \eta^{-1})^{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}}, \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1$. De plus, puisque $\int_{B_\eta^x} \text{Rot } q_\eta^x = 0$ et $\text{Rot } q_\eta^x \cdot n = 0$ sur ∂B_η^x , on obtient, en utilisant l'inégalité de Poincaré-Sobolev et la remarque précédente

$$\left(\int_{B_\eta^x} (|\text{Rot } q_\eta^x| \eta^{-1})^{\beta'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq D_2 \left(\int_{B_\eta^x} |\text{rot Rot } q_\eta^x|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} = D_2 \left(\int_{B_\eta^x} |\text{rot } u_i|^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

avec $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta'}$. Ainsi, en posant $\sup_{\eta>0} \int_{B_\eta^x} |f| = M(f)$, il vient

$$\int \sup_{\eta>0} |I_1(x)| dx \leq D_3 \int_\Omega (M(|u_{i,j}|^\beta))^{\frac{1}{\beta}} (M(|\text{rot } u_i|^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}},$$

et avec l'inégalité de Hölder :

$$\int \sup_{\eta>0} |I_1(x)| dx \leq D_3 \|M(|u_{i,j}|^\beta)\|_{L^{\frac{2}{\beta}}}^{\frac{1}{\beta}} \|M(|\text{rot } u_i|^\alpha)\|_{L^{\frac{2}{\alpha}}}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Finalement, si on choisit $\beta < 2$ et $\alpha < 2$, on peut appliquer le théorème du maximum de Hardy-Littlewood, et on obtient :

$$\int \sup_{\eta>0} |I_1(x)| dx \leq D_4 \|u_{i,j}\|_{L^2(\Omega)} \|\text{rot } u_i\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi en remarquant que $\mathcal{H}_z^1(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, on obtient (2.12). En utilisant la même méthode on peut estimer $\int \sup_{\eta>0} |I_2(x)| dx$ par $\|u\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2$, et en rappelant que $\mathcal{W}(\mathbb{R}^2)$ s'injecte dans $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$, on obtient (2.13). \square

2.3 Une estimation sur h_i dans $L^2(Q)$

On obtient dans cette section une estimation sur h_1 et h_2 dans $L^2(Q)$. Pour se faire, on considère l'opérateur de Stokes défini dans la section 2.1 et on utilise les résultats démontrés dans la section précédente. On commence par rappeler la remarque suivante :

Remarque 2.4. Si $h_{i,0} > 0$ et $h_{i,0} \in L^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, alors h_1 et h_2 vérifient les relations suivantes

$$h_1 > 0, \quad h_2 > 0, \quad (2.15)$$

$$\int_{\Omega} h_1 = \int_{\Omega} h_{1,0}, \quad \int_{\Omega} h_2 = \int_{\Omega} h_{2,0}. \quad (2.16)$$

En effet, les inégalités (2.15) se déduisent facilement de la relation

$$h_i(X_i(t), t) = h_i(x_0, 0) e^{-\int_0^t \operatorname{div} u_i(X_i(s), s) ds},$$

où $X_i(t)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = u_i(X_i(t), t), \\ X_i(0) = x_0, \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$. Les relations (2.16) sont obtenues par intégration sur Ω des équations de continuité respectives.

Nous présentons à présent le lemme suivant :

Lemme 2.5. Si $h_{i,0} > 0$ et $h_{i,0} \log h_{i,0} \in L^1(\Omega)$, alors h_1 et h_2 vérifient les estimations

$$\begin{aligned} & \lambda_i \int_{\Omega} h_i \log h_i + \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \leq \mathbb{C}_{0,i} + \frac{1}{4} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \\ & + (\mathbb{C}_1 \mu_i^2 + 3\mathbb{C}_2) \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \mathbb{C}_3 \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 \\ & + \mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^2(\Omega)} \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i + \mathbb{C}_4 \|h_{i,0}\|_{L^2(\Omega)} \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $\mathbb{C}_{0,i} = \lambda_i \int_{\Omega} h_{i,0} \log h_{i,0} + \operatorname{mes}(Q) \bar{h}_{i,0} (g \bar{h}_{i,0} + g_i \bar{h}_{j,0}) + 4K_1^2 + \frac{1}{4} \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2K_1^2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} h_{i,0} \log^+ h_{i,0}$, $i \neq j$.

Démonstration. On considère pour $i = 1, 2$: $p_i = S(-\Delta u_i)$ avec (s_i, p_i) la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta s_i + \nabla p_i = -\Delta u_i \text{ dans } \Omega, & s_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \operatorname{div} s_i = 0 \text{ dans } \Omega, & \int_{\Omega} p_i = 0. \end{cases}$$

Ainsi, en utilisant cette décomposition, les équations de conservation de la quantité de mouvement se réécrivent sous la forme de la somme d'une composante rotationnelle et d'une composante potentielle :

$$-\mu_1 \Delta s_1 + \nabla (\mu_1 p_1 - \lambda_1 \operatorname{div} u_1 + g h_1 + g_1 h_2) = -\frac{\partial u_1}{\partial t} - (u_1 \cdot \nabla) u_1,$$

$$-\mu_2 \Delta s_2 + \nabla (\mu_2 p_2 - \lambda_2 \operatorname{div} u_2 + g_2 h_1 + g h_2) = -\frac{\partial u_2}{\partial t} - (u_2 \cdot \nabla) u_2.$$

En notant que $\bar{h}_i = \bar{h}_{i,0}$, il vient

$$\mu_1 p_1 - \lambda_1 \operatorname{div} u_1 + g(h_1 - \bar{h}_{1,0}) + g_1(h_2 - \bar{h}_{2,0}) = S \left(-\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) + S(-u_1 \cdot \nabla) u_1, \quad (2.18)$$

$$\mu_2 p_2 - \lambda_2 \operatorname{div} u_2 + g_2(h_1 - \bar{h}_{1,0}) + g(h_2 - \bar{h}_{2,0}) = S \left(-\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) + S(-u_2 \cdot \nabla) u_2. \quad (2.19)$$

En multipliant (2.18) par h_1 et (2.19) par h_2 et en intégrant sur Q , on arrive à :

$$\begin{aligned} g \|h_1\|_{L^2(Q)}^2 &= \operatorname{mes}(Q) \bar{h}_{1,0} (g \bar{h}_{1,0} + g_1 \bar{h}_{2,0}) - g_1 \int_Q h_1 h_2 + \lambda_1 \int_Q h_1 \operatorname{div} u_1 \\ &\quad - \mu_1 \int_Q p_1 h_1 + \int_Q S \left(-\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) h_1 + \int_Q S(-u_1 \cdot \nabla) u_1 h_1, \end{aligned} \quad (2.20)$$

et

$$\begin{aligned} g \|h_2\|_{L^2(Q)}^2 &= \operatorname{mes}(Q) \bar{h}_{2,0} (g_2 \bar{h}_{1,0} + g \bar{h}_{2,0}) - g_2 \int_Q h_1 h_2 + \lambda_2 \int_Q h_2 \operatorname{div} u_2 \\ &\quad - \mu_2 \int_Q p_2 h_2 + \int_Q S \left(-\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) h_2 + \int_Q S(-u_2 \cdot \nabla) u_2 h_2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

L'estimation L^2 sur h_1 et h_2 est obtenue en estimant les termes du membre de droite de ces équations. Notons tout d'abord que $\int_Q h_1 h_2 > 0$ puisque $h_1, h_2 > 0$.

On traite ensuite le troisième terme du membre de droite. On a

$$-(h_i, \operatorname{div} u_i) = (\nabla h_i, u_i) = \left(\frac{\nabla h_i}{h_i}, u_i h_i \right) = (\nabla \log h_i, u_i h_i) = -(\log h_i, \operatorname{div} (u_i h_i)),$$

et en utilisant les équations de continuité et (2.16) :

$$-(h_i, \operatorname{div} u_i) = \left(\log h_i, \frac{\partial h_i}{\partial t} \right) = \frac{d}{dt} (h_i \log h_i - h_i, 1) = \frac{d}{dt} (h_i \log h_i, 1). \quad (2.22)$$

Il vient ainsi :

$$\lambda_i \int_Q h_i \operatorname{div} u_i = -\lambda_i \int_\Omega h_i \log h_i + \lambda_i \int_\Omega h_{i,0} \log h_{i,0}. \quad (2.23)$$

On considère à présent le quatrième terme du membre de droite.

$$\begin{aligned}
-\mu_i \int_Q p_i h_i &= -\mu_i \int_Q S(-\Delta u_i) h_i \\
&\leq \mu_i \int_0^T \|S(-\Delta u_i)\|_{L^2(\Omega)} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \mu_i \int_0^T \|-\Delta u_i\|_{H^{-1}(\Omega)^2} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \mu_i \int_0^T \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)^2} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C^2 \mu_i^2}{2\varepsilon} \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2. \tag{2.24}
\end{aligned}$$

Il nous faut maintenant estimer le cinquième terme de droite. Le domaine Ω étant indépendant du temps, on a $S\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial S(u_i)}{\partial t}$, donc

$$-\int_Q S\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) h_i = -\int_Q h_i \frac{\partial S(u_i)}{\partial t} = -\int_0^T \frac{d}{dt} \int_\Omega S(u_i) h_i + \int_Q S(u_i) \frac{\partial h_i}{\partial t}. \tag{2.25}$$

Le premier terme de (2.25) est traité en utilisant certaines propriétés des espaces de Orlicz comme suit :

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega S(u_i) h_i \right| &\leq 2 \|S(u_i)\|_{L_{\mathcal{A}}(\Omega)} \|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega)}} \\
&\leq 2k \|S(u_i)\|_{H^1(\Omega)} \|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega)}} \\
&\leq 2kC' \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega)}} \\
&\leq 2kk' C' \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \|h_i\|_{L_{\tilde{\mathcal{A}}'(\Omega)}},
\end{aligned}$$

on a donc

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega S(u_i) h_i \right| &\leq K_1 \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \left(1 + \int_\Omega \tilde{\mathcal{A}}'(h_i) \right) \\
&\leq K_1 \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \left(1 + \int_\Omega h_i \sqrt{\log^+ h_i} \right) \\
&\leq K_1 \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} + K_1 \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i} \\
&\leq \frac{1}{8} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2K_1^2 + \frac{1}{8} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2K_1^2 \left(\int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i} \right)^2.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder

$$\int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i} \leq \left(\int_\Omega h_i \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega h_i \log^+ h_i \right)^{\frac{1}{2}},$$

on peut écrire

$$\left| \int_{\Omega} S(u_i) h_i \right| \leq \frac{1}{4} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2K_1^2 + 2K_1^2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i,$$

et on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \frac{d}{dt} \int_{\Omega} S(u_i) h_i &\leq \frac{1}{4} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + 2K_1^2 + 2K_1^2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i \\ &\quad + \frac{1}{4} \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2K_1^2 + 2K_1^2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} h_{i,0} \log^+ h_{i,0}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Le second terme de (2.25) est traité en utilisant les équations de continuité :

$$\begin{aligned} \int_Q S(u_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} &= \int_Q S(u_i) \operatorname{div}(u_i h_i) = \int_Q \nabla S(u_i) u_i h_i \\ &\leq \|\nabla S(u_i)\|_{L^4(Q)^2} \|u_i\|_{L^4(Q)^2} \|h_i\|_{L^2(Q)} \end{aligned}$$

avec

$$\|\nabla S(u_i)\|_{L^4(Q)^2} \leq \|S(u_i)\|_{W^{1,4}(Q)} \leq C'' \|u_i\|_{L^4(Q)^2}.$$

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \int_Q S(u_i) \frac{\partial h_i}{\partial t} &\leq C'' \|u_i\|_{L^4(Q)^2}^2 \|h_i\|_{L^2(Q)} \\ &\leq \frac{C''^2}{2\varepsilon} \|u_i\|_{L^4(Q)^2}^4 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq \frac{C''^2 C_{GN}^2}{2\varepsilon} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nous devons à présent estimer le dernier terme du membre de droite de (2.20) et (2.21). Pour se faire, on utilise les résultats obtenus dans la section 2.2 comme suit :

$$\int_Q S(-(u_i \cdot \nabla) u_i) h_i = - \sum_{j=0}^1 \int_Q S(T_j) h_i,$$

on a

$$\begin{aligned} - \int_Q S(T_0) h_i &\leq \int_0^T \|S(T_0)\|_{L^2(\Omega)} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \int_0^T \|T_0\|_{H^{-1}(\Omega)^2} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C^2}{2\varepsilon} \|T_0\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq \frac{k_0 C^2}{2\varepsilon} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le second terme est décomposé comme suit :

$$-\int_Q S(T_1)h_i = -\int_Q S(T_{11})h_i - \int_Q S(T_{12})h_i,$$

on a :

$$\begin{aligned} -\int_Q S(T_{11})h_i &\leq \int_0^T \|S(T_{11})\|_{L^2(\Omega)} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \int_0^T \|T_{11}\|_{H^{-1}(\Omega)^2} \|h_i\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C^2}{2\varepsilon} \|T_{11}\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \\ &\leq \frac{k_1 C^2}{2\varepsilon} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|h_i\|_{L^2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (2.29)$$

$\int_\Omega S(T_{12})h_i$ est traité de la même façon que $-\int_\Omega S(u_i)h_i$ en utilisant les espaces de Orlicz :

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega S(T_{12})h_i \right| &\leq 2 \|S(T_{12})\|_{L_{\mathcal{A}(\Omega)}} \|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega)}} \\ &\leq 2k \|S(T_{12})\|_{H^1(\Omega)} \|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega)}} \\ &\leq 2kC' \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} \|h_i\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega)}} \\ &\leq 2kk'C' \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} \|h_i\|_{L_{\tilde{\mathcal{A}}'(\Omega)}}, \end{aligned}$$

on a ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega S(T_{12})h_i \right| &\leq K_1 \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} \left(1 + \int_\Omega \tilde{\mathcal{A}}'(h_i) \right) \\ &\leq K_1 \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} \left(1 + \int_\Omega h_i \sqrt{\log^+ h_i} \right) \\ &\leq K_1 \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} + K_1 \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} \int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i}. \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_\Omega S(T_{12})h_i &\leq K_1 \int_0^T \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} + K_1 \int_0^T \|T_{12}\|_{L^2(\Omega)^2} \int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i} \\ &\leq C_2 k_2 K_1 \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + C_2 K_1 \int_0^T \|T_{12}\|_{W^{1,1}(\Omega)^2} \int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i}, \\ &\leq C_2 k_2 K_1 \|u_i\|_{L^2(H_0^1(\Omega)^2)}^2 + C_2 K_1 \int_0^T \|T_{12}\|_{W^{1,1}(\Omega)^2} \left(\frac{1}{2} \left(\int_\Omega \sqrt{h_i} \sqrt{h_i \log^+ h_i} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) \\ &\leq \frac{3C_2 k_2 K_1}{2} \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \frac{C_2 K_1}{2} \int_0^T \|T_{12}\|_{W^{1,1}(\Omega)^2} \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \int_\Omega h_i \log^+ h_i, \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \int_Q S(T_{12})h_i &\leq \frac{3C_2k_2K_1}{2} \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 \\ &+ \frac{C_2k_2K_1}{2} \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \left(\int_\Omega h_i \log^+ h_i \right) \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En prenant ε tel que $g-2\varepsilon = 1$, (2.23)–(2.24), (2.26)–(2.30) entraînent (2.17). \square

2.4 Estimations d'énergie

Lemme 2.6. *Sous les hypothèses du théorème 2.1, $\{(u_1, h_1), (u_2, h_2)\}$ vérifie l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbb{D}_{1,1} + \mathbb{D}_{1,2}}{e} &\leq \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \right) \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)}^2 + (\mathbb{D}_{1,i} - \mathbb{C}_4 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}) \sup_t \int_\Omega h_i \log^+ h_i \right. \\ &- \mathbb{D}_{1,i} \sup_t \int_\Omega h_i \log^- h_i + \mathbb{D}_{2,i} \|\operatorname{div} u_i\|_{L^2(Q)}^2 + \left(\mathbb{D}_{3,i} - \mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \int_\Omega h_i \log^+ h_i \right. \\ &\left. \left. - \delta \frac{C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)} - \mathbb{C}_3 \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)}^2 \right) \|u_i\|_{L^2(H_0^1(\Omega)^2)}^2 + (1 - \varepsilon') \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \right] \leq \mathbb{D}_0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\mathbb{D}_{3,i} - \delta \frac{C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)} - \mathbb{C}_3 \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)}^2 - \mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \int_\Omega h_i \log^+ h_i > 0 \quad (2.32)$$

Démonstration. Dans un premier temps, on multiplie la première équation de conservation de la quantité de mouvement par u_1 , la seconde par u_2 , et on intègre sur Ω

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_1 \|\operatorname{div} u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_1 \|u_1\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \\ - g(h_1, \operatorname{div} u_1) - g_1(h_2, \operatorname{div} u_1) - \frac{1}{2} (u_1^2, \operatorname{div} u_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda_2 \|\operatorname{div} u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu_2 \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \\ - g(h_2, \operatorname{div} u_2) - g_2(h_1, \operatorname{div} u_2) - \frac{1}{2} (u_2^2, \operatorname{div} u_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pour majorer les termes non linéaires $(u_i^2, \operatorname{div} u_i)$, on utilise l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg

$$(u_i^2, \operatorname{div} u_i) \leq \|u_i\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq C_{GN} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2.$$

Ensuite, on estime les termes $(h_i, \operatorname{div} u_i)$ en utilisant la relation (2.22) :

$$-(h_i, \operatorname{div} u_i) = \frac{d}{dt}(h_i \log h_i, 1).$$

Puis, en ajoutant (2.33) et (2.34), on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left[\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + g \int_{\Omega} h_i \log h_i \, dx \right] + \lambda_i \|\operatorname{div} u_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \left(\mu_i - \frac{C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2} \right) \|u_i\|_{H_0^1(\Omega)^2}^2 \right] = \sum_{i=1}^2 g_i(h_j, \operatorname{div} u_i). \end{aligned} \quad (2.35)$$

La seconde étape consiste à multiplier (2.35) par δ , à intégrer sur $(0, t)$ et à ajouter (2.17), pour $i = 1, 2$. Notons tout d'abord que le terme $\int_{\Omega} h_i \log h_i$ peut-être décomposé sous la forme

$$\int_{\Omega} h_i \log h_i = \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i - \int_{\Omega} h_i \log^- h_i.$$

Pour pouvoir prendre la borne supérieure dans le membre de gauche de l'équation (2.35), il est nécessaire d'avoir une borne inférieure sur le terme $-g \int_{\Omega} h_i \log^- h_i$. Ceci peut-être obtenu en utilisant l'inégalité de convexité

$$h_i \log h_i \geq -\frac{1}{e},$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} h_i \log^- h_i &= \int_{\{x \in \Omega; h_i(x,t) < 1\}} h_i \log h_i \\ &\geq \frac{-1}{e} \operatorname{mes}(\{x \in \Omega; h_i(x,t) < 1\}) \\ &\geq \frac{-1}{e} \operatorname{mes}(\Omega). \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} & -\frac{2\delta g + \lambda_1 + \lambda_2}{e} \operatorname{mes}(\Omega) \leq \\ & \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \right) \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 + (\delta g + \lambda_i - C_4 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}) \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i \right. \\ & \quad \left. - (\delta g + \lambda_i) \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^- h_i + \delta \lambda_i \|\operatorname{div} u_i\|_{L^2(Q)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \left(\delta \mu_i - C_1 \mu_i^2 - 3C_2 - \frac{\delta C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} - C_3 \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i \Big) \|u_i\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^2)}^2 + \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \Big] \leq \\
& \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\delta}{2} + \frac{1}{4} \right) \|u_{i,0}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + (\delta g + \lambda_i) \int_{\Omega} h_{i,0} \log h_{i,0} + 4K_1^2 \right. \\
& \left. + \text{mes}(Q) \bar{h}_{i,0} (g \bar{h}_{i,0} + g_i \bar{h}_{j,0}) + 2K_1^2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \int_{\Omega} h_{i,0} \log^+ h_{i,0} + \delta g_i \int_0^T |(h_j, \text{div } u_i)| \right] \tag{2.36}
\end{aligned}$$

En utilisant :

$$\delta g_i \int_0^T |(h_j, \text{div } u_i)| \leq \varepsilon' \|h_j\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\delta^2 g_i^2}{4\varepsilon'} \|\text{div } u_1\|_{L^2(Q)}^2,$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}
& - \frac{\mathbb{D}_{1,1} + \mathbb{D}_{1,2}}{e} \text{mes}(\Omega) \leq \sum_{i=1}^2 \left[\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4} \right) \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)}^2 + (1 - \varepsilon') \|h_i\|_{L^2(Q)}^2 \right. \\
& - \mathbb{D}_{1,i} \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^- h_i + \mathbb{D}_{2,i} \|\text{div } u_i\|_{L^2(Q)}^2 + \left(\mathbb{D}_{3,i} - \mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i \right. \\
& \left. \left. - \delta \frac{C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)} - \mathbb{C}_3 \|u_i\|_{L^\infty(L^2(\Omega)^2)}^2 \right) \|u_i\|_{L^2(H_0^1(\Omega)^2)}^2 \right. \\
& \left. + (\mathbb{D}_{1,i} - \mathbb{C}_4 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}) \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i \right] \leq \mathbb{D}_0. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Pour obtenir les estimations annoncées sur u_i et h_i , nous avons besoin de montrer la positivité de

$$\mathbb{D}_{3,i} - \delta \frac{C_{GN}}{2} \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)} - \mathbb{C}_3 \|u_i\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^2)}^2 - \mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)} \sup_t \int_{\Omega} h_i \log^+ h_i.$$

On peut obtenir ce résultat en utilisant l'hypothèse de données petites [11] :

Pour se faire, supposons que u_1, u_2 soient continues de $(0, T)$ dans $L^2(\Omega)^2$, et $h_1 \log^+ h_1, h_2 \log^+ h_2$ continues de $(0, T)$ dans $L^1(\Omega)$. Grâce à (2.8) et (2.9), il existe un temps t' tel que

$$\|u_i(t)\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\sqrt{\delta^2 C_{GN}^2 + 16\mathbb{C}_3 \theta_i \mathbb{D}_{3,i}} - \delta C_{GN}}{4\mathbb{C}_3},$$

$$\int_{\Omega} h_i(t) \log^+ h_i(t) < \frac{\theta_i \mathbb{D}_{3,i}}{\mathbb{C}_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}}, \quad \text{in } [0, t'].$$

Supposons que l'un des termes du membre de gauche atteigne sa borne :

$$\|u_1(t')\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\sqrt{\delta^2 C_{GN}^2 + 16\mathbb{C}_3 \theta_1 \mathbb{D}_{3,1}} - \delta C_{GN}}{4\mathbb{C}_3},$$

$$\|u_2(t')\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\sqrt{\delta^2 C_{GN}^2 + 16C_3\theta_2\mathbb{D}_{3,2}} - \delta C_{GN}}{4C_3},$$

$$\int_{\Omega} h_i(t') \log^+ h_i(t') < \frac{\theta'_i \mathbb{D}_{3,i}}{C_2 \|h_{i,0}\|_{L^1(\Omega)}}, \text{ pour } i = 1, 2,$$

par exemple. La relation (2.37) implique alors :

$$\left(\frac{\delta}{2} - \frac{1}{4}\right) \left(\frac{\sqrt{\delta^2 C_{GN}^2 + 16C_3\theta_1\mathbb{D}_{3,1}} - \delta C_{GN}}{4C_3}\right)^2 \leq \mathbb{D}_0,$$

ce qui est contradictoire avec la relation (2.6). En procédant de la même façon, on obtient le même type de contradiction si un autre terme, dans le membre de gauche, atteint sa borne. Nous avons ainsi montré la relation (2.32). \square

2.5 Solutions approchées

On introduit une base de l'espace $H_0^1(\Omega)^2$ notée $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$, dont les éléments appartiennent à $H^4(\Omega)^2$. Soit \mathcal{V}_n l'ensemble des combinaisons linéaires des n premières fonctions de la base. On considère le problème :

Trouver

- $u_{i,n} \in L^2(0, T; \mathcal{V}_n) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2), \quad i = 1, 2$
- $h_{i,n} \in C^1(\overline{Q}), \quad i = 1, 2,$

tels que

$$(V_n) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_{1,n}}{\partial t}, v\right) + \lambda_1(\operatorname{div} u_{1,n}, \operatorname{div} v) + \mu_1((u_{1,n}, v)) - \frac{1}{2}(u_{1,n}^2, \operatorname{div} v) \\ \quad + (\operatorname{rot} u_{1,n} \alpha(u_{1,n}), v) - g(h_{1,n}, \operatorname{div} v) - g_1(h_{2,n}, \operatorname{div} v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_n \\ \frac{\partial h_{1,n}}{\partial t} + \operatorname{div}(u_{1,n} h_{1,n}) = 0 \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega)) \\ \left(\frac{\partial u_{2,n}}{\partial t}, v\right) + \lambda_2(\operatorname{div} u_{2,n}, \operatorname{div} v) + \mu_2((u_{2,n}, v)) - \frac{1}{2}(u_{2,n}^2, \operatorname{div} v) \\ \quad + (\operatorname{rot} u_{2,n} \alpha(u_{2,n}), v) - g_2(h_{1,n}, \operatorname{div} v) - g(h_{2,n}, \operatorname{div} v) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}_n \\ \frac{\partial h_{2,n}}{\partial t} + \operatorname{div}(u_{2,n} h_{2,n}) = 0 \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; W^{-1, \frac{4}{3}}(\Omega)) \\ u_{i,n}(t=0) = u_{i,0,n} \in \mathcal{V}_n \\ h_{i,n}(t=0) = h_{i,0,n} \in C_c^1(\Omega), \quad h_{i,0,n} \log h_{i,0,n} \in L^1(\Omega) \\ h_{i,0,n} \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega. \end{array} \right.$$

où les données et les constantes vérifient les conditions du théorème 2.1. On choisit $h_{i,0,n} \in C_c^1(\Omega)$ afin d'obtenir une solution $h_{i,n} \in C^1(\overline{Q})$ et les suites $u_{i,0,n}$ et $h_{i,0,n}$ sont

définies telles que

$$\begin{aligned} u_{i,0,n} &\longrightarrow u_{i,0} \text{ dans } L^2(\Omega)^2, \\ h_{i,0,n} \log h_{i,0,n} &\longrightarrow h_{i,0} \log h_{i,0} \text{ dans } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

De la même façon que dans [11], on a alors

Lemme 2.7. *Le problème (V_n) a une solution $\{(u_{1,n}, h_{1,n}), (u_{2,n}, h_{2,n})\}$ dans $[[L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_n)] \times \mathcal{C}^1(\overline{Q})]^2$, qui vérifie l'estimation d'énergie (2.31).*

Démonstration. Pour démontrer ce lemme, on utilise le théorème du point fixe de Schauder [72] de la même façon que dans [13]. On obtient des solutions approchées qui satisfont les estimations *a priori*.

En fait, grâce à la régularité de la base, on a : $u_{1,n}, u_{2,n} \in H^1(0, T; H^4(\Omega)^2)$. $u_{1,n}, u_{2,n}$ appartiennent donc à $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})^2)$ et, en utilisant [63] et la positivité des données initiales $h_{1,0}, h_{2,0}$, on a : $h_{1,n}, h_{2,n} \in \mathcal{C}^1(\overline{Q})$ et $h_{1,n}, h_{2,n} > 0$.

2.6 Passage à la limite

Pour passer à la limite dans les équations approchées, on utilise le lemme suivant obtenue dans [11] :

Lemme 2.8. *Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit*

$$\{(u_{1,n}, h_{1,n}), (u_{2,n}, h_{2,n})\} \in [[L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \cap L^2(0, T; \mathcal{V}_n)] \times \mathcal{C}^1(\overline{Q})]^2$$

la solution de (\mathcal{V}_n) donnée dans le lemme 2.7. On a alors pour $i = 1, 2$

$$u_{i,n} h_{i,n} \text{ borné dans } L^2(0, T; L^1(\Omega)^2), \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial u_{i,n}}{\partial t} \text{ borné dans } L^{\frac{4}{3}}(0, T; H^{-1}(\Omega)^2), \quad (2.39)$$

et on peut extraire de $u_{i,n}$ et $h_{i,n}$ des suites encore notées $u_{i,n}, h_{i,n}$ telles que

$$u_{i,n} \longrightarrow u_i \text{ dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^2) \text{ faible}, \quad (2.40)$$

$$u_{i,n} \longrightarrow u_i \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2) \text{ faible étoile}, \quad (2.41)$$

$$h_{i,n} \longrightarrow h_i \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible}, \quad (2.42)$$

$$u_{i,n} h_{i,n} \longrightarrow u_i h_i \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(Q)^2 \text{ faible}, \quad (2.43)$$

$$\text{rot } u_{i,n} \alpha(u_{i,n}) \longrightarrow \text{rot } u_i \alpha(u_i) \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(Q)^2 \text{ faible}, \quad (2.44)$$

$$\nabla u_{i,n}^2 \longrightarrow \nabla u_i^2 \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(Q)^2 \text{ faible}. \quad (2.45)$$

Chapitre 3

Un modèle de SW bi-couche avec l'hypothèse du toit rigide

Ce chapitre a fait l'objet d'un article paru dans le journal 'Mathematical Models and Methods in Applied Sciences' [52].

Dans ce chapitre, nous proposons un nouveau modèle d'écoulement de fluides géophysiques bi-dimensionnels prenant en compte l'hypothèse du toit rigide (rigid-lid), c'est-à-dire des modèles qui négligent les variations de la surface. Cette hypothèse est souvent utilisée pour des modèles tri-dimensionnels [41, 61] et quelques travaux ont été réalisés pour des problèmes à deux dimensions [39, 40, 48]. La comparaison des modèles à surface libre et à toit rigide a permis de constater que les deux approches donnent généralement des résultats similaires dans le cas où le mouvement de la surface n'est pas trop grand [48, 49]. Notre objectif ici est de tester l'hypothèse du rigid-lid pour le modèle de shallow water bi-couche présenté dans les chapitres précédents. Ce modèle permet de diminuer nettement les temps de calcul, mais de nouvelles difficultés mathématiques et numériques apparaissent. En particulier, nous avons besoin d'estimer $1/h_i$ dans L^∞ . Pour contourner cette difficulté, nous remplaçons h_i par $H_i > \beta > 0$ dans le terme $\operatorname{div}(u_i h_i)$ intervenant dans les équations de continuité, où H_i est l'épaisseur de couche i au repos, ce qui revient à négliger tous les termes quadratiques par rapport aux termes linéaires. Cette hypothèse est réaliste lorsque les fluctuations de h_i sont petites, ce qui est généralement le cas. Nous présentons ensuite des résultats d'existence et de régularité pour ce problème approché, ce qui montre la convergence de notre schéma numérique. Puis nous donnons quelques résultats numériques de comparaison établis sur un domaine idéalisé entre le modèle de shallow water à surface libre et le modèle avec l'hypothèse du toit rigide.

3.1 Analyse mathématique et obtention du modèle de SW bi-couche à surface rigide

Le domaine Ω est un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^2 , simplement connexe pour simplifier, de frontière γ de classe $C^{1,1}$ ou Ω un polygone convexe. Physiquement, Ω correspond au domaine horizontal occupé par le fluide. On note n la normale extérieure à Ω sur γ et $x = (x_1, x_2)$ un point de Ω . On note (\cdot, \cdot) le produit scalaire associé à $L^2(\Omega)^N$.

On considère un système composé par deux couches de fluides superposées de densités ρ_1 et ρ_2 ($\rho_2 < \rho_1$). Dans ce qui suit, l'indice 1 fait référence à la couche du fond et l'indice 2 à la couche supérieure. Soient A_1 et A_2 les coefficients de viscosité pour chaque couche et g l'accélération de la gravité.

Pour la couche du fond et la couche supérieure, on note respectivement h_1, h_2 les épaisseurs et u_1, u_2 les champs de vecteurs vitesse moyennés sur la verticale. Avec les notations de la figure 3.1, on a $h_1(x, t) = H_1(x) + \eta_1(x, t)$ et $h_2(x, t) = H_2 + \eta_2(x, t) - \eta_1(x, t)$, où $H_1(x)$ et $H_2(x)$ représentent les épaisseurs de la couche du fond et de la couche supérieure au repos, et $\eta_1(x, t), \eta_2(x, t)$ les élévations de chaque couche. Soit Q le cylindre défini par $\Omega \times]0, T[$ et $\Sigma = \gamma \times]0, T[$. Sur la frontière γ , on

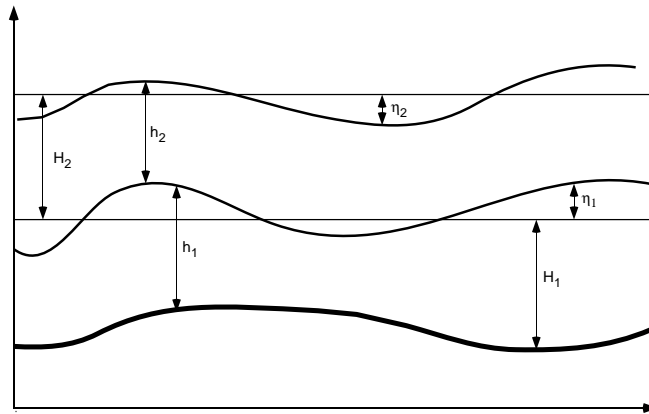


Figure 3.1: Section verticale du domaine.

prend une condition d'imperméabilité, $u_i \cdot n = 0$, et une condition sur le rotationnel de la vitesse, $\text{rot } u_i = 0$ sur $\Sigma, i = 1, 2$. Le modèle de shallow water bi-couche à surface rigide est une approximation du modèle de shallow water bi-couche à surface

libre en formulation hauteur-vitesse suivant [19] :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u_1^2 + \text{rot } u_1 \alpha(u_1) - A_1 \Delta u_1 \\ \quad + \omega_c \alpha(u_1) + g \nabla h_1 + g \frac{\rho_2}{\rho_1} \nabla h_2 = g \nabla H_1 & \text{dans } Q, \\ \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + \text{div}(u_1 h_1) = 0 & \text{dans } Q, \\ u_1 \cdot n = 0, \text{ rot } u_1 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_1(t=0) = u_{1,0} & \text{dans } \Omega, \\ h_1(t=0) = h_{1,0} & \text{dans } \Omega, \\ \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u_2^2 + \text{rot } u_2 \alpha(u_2) - A_2 \Delta u_2 \\ \quad + \omega_c \alpha(u_2) + g \nabla h_1 + g \nabla h_2 = f + g \nabla H_1 & \text{dans } Q, \\ \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \text{div}(u_2 h_2) = 0 & \text{dans } Q, \\ u_2 \cdot n = 0, \text{ rot } u_2 = 0 & \text{sur } \Sigma, \\ u_2(t=0) = u_{2,0} & \text{dans } \Omega, \\ h_2(t=0) = h_{2,0} & \text{dans } \Omega, \end{array} \right.$$

On considère l'espace fonctionnel \mathcal{V} des fonctions admissibles introduit dans la section 1.2.3 :

$$\mathcal{V} = \{ \phi \in L^2(\Omega)^2, \text{div } \phi \in L^2(\Omega), \text{rot } \phi \in L^2(\Omega), \phi \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma \}.$$

On sait que le problème suivant :

Trouver (u_1, h_1) et $(u_2, h_2) \in$

$$[L^2(0, T; \mathcal{V}) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)] \times [L^\infty(0, T; L^1(\Omega)) \cap L^2(Q)]$$

tels que $h_1 > 0, h_2 > 0$, et

$$(V_1) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \phi \right) + A_1 a(u_1, \phi) - \frac{1}{2} (u_1^2, \text{div } \phi) + (\text{rot } u_1 \alpha(u_1), \phi) - g (h_1, \text{div } \phi) \\ \quad - g \frac{\rho_2}{\rho_1} (h_2, \text{div } \phi) + \omega_c (\alpha(u_1), \phi) = -g (H_1, \text{div } \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{V} \\ \frac{\partial h_1}{\partial t} + \text{div}(u_1 h_1) = 0, \text{ dans } L^1(0, T; W^{-1,p}(\Omega)), \quad p < 2 \\ \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}, \phi \right) + A_2 a(u_2, \phi) - \frac{1}{2} (u_2^2, \text{div } \phi) + (\text{rot } u_2 \alpha(u_2), \phi) \\ \quad - g (h_1 + h_2, \text{div } \phi) + \omega_c (\alpha(u_2), \phi) = (f, \phi) - g (H_1, \text{div } \phi), \quad \forall \phi \in \mathcal{V} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} + \text{div}(u_2 h_2) = 0, \text{ dans } L^1(0, T; W^{-1,p}(\Omega)), \quad p < 2 \\ u_1(t=0) = u_{1,0} \in \mathcal{V}, \quad u_2(t=0) = u_{2,0} \in \mathcal{V} \\ h_1(t=0) = h_{1,0} \in L^2(\Omega), \quad h_2(t=0) = h_{2,0} \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$$

admet une solution et cette solution est unique si l'on considère des données suffisamment régulières [11].

Hypothèse du Rigid-lid

De façon générale, l'onde de surface de la couche supérieure a une vitesse (de l'ordre de $\sqrt{gh_2}$) plus grande que celle de l'onde de surface de la couche du fond (de l'ordre de $\sqrt{g\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}h_1}$). De plus, l'amplitude de l'onde de surface correspondant à la couche supérieure est plus petite que celle de l'onde de surface correspondant à la couche inférieure (typiquement de l'ordre d'un facteur 100).

C'est pourquoi nous avons choisi, à partir de ces considérations, de faire l'hypothèse du rigid-lid dans le cadre de notre modèle bi-couche. Cette hypothèse consiste à négliger les variations de la surface du fluide supérieur, *i.e.* on suppose que $h = h_1 + h_2$ est constant, mais nous ne faisons pas l'hypothèse que h_1 et h_2 sont constants. D'autre part, cette approche permet également de contourner la difficulté liée à la condition CFL qui impose généralement l'utilisation d'un petit pas de temps afin d'assurer la stabilité du schéma numérique (nous pouvons trouver dans la littérature d'autres méthodes qui traitent de cette difficulté tels que les méthodes de différences finies semi-implicites [8]).

De cette façon, si on néglige l'élévation η_2 dans le précédent problème et si on note η l'élévation η_1 , les deux équations de continuité sont donnés par

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 h_1) = 0 \text{ et } -\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_2 h_2) = 0, \quad (3.1)$$

avec

$$h_1 = H_1 + \eta \text{ et } h_2 = H_2 - \eta.$$

Ainsi, en combinant ces deux équations, on obtient les deux équations suivantes :

$$\operatorname{div}(u_1 h_1 + u_2 h_2) = 0, \quad (3.2)$$

$$2\frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div}(u_1 h_1 - u_2 h_2) = 0. \quad (3.3)$$

Par soucis de clarté, nous utiliserons dans ce qui suit les lettres en gras pour faire référence aux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Par exemple, $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, où u_1 et $u_2 \in \mathbb{R}^2$. Afin de proposer une formulation variationnelle de notre problème, on introduit la contrainte (3.2) dans l'espace des fonctions admissibles. Nous sommes ainsi amenés à définir l'espace suivant

$$\{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{V}^2; \operatorname{div}(\varphi_1 h_1 + \varphi_2 h_2) = 0\}.$$

Remarquons tout d'abord que les fonctions de cet espace peuvent se mettre sous la forme

$$\varphi_1 = \frac{\text{Rot } q_1}{h_1} + \frac{\nabla p}{h_1}, \quad \varphi_2 = \frac{\text{Rot } q_2}{h_2} - \frac{\nabla p}{h_2}.$$

Ceci soulève deux difficultés :

- Il est clair que h_i est borné dans $L^\infty(Q)$ (plus précisément, $-H_1 < \eta < H_2$) mais nous n'avons pas obtenu une borne sur $\frac{1}{h_i}$, ce qui peut-être problématique pour le schéma numérique.
- Les fonctions tests dépendent implicitement de la solution et nous n'avons pas suffisamment de régularité sur $\frac{1}{h_i}$ pour établir un résultat d'existence d'une solution.

Afin de contourner ces difficultés, nous avons choisi d'utiliser la forme linéarisée de (3.1), ce qui revient à négliger tous les termes quadratiques par rapport aux termes linéaires (on peut trouver une justification dans le chapitre 3 de Pedlosky [64]).

Ainsi, on utilise l'équation

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} + \text{div}(u_i H_i) \tag{3.4}$$

au lieu de $\frac{\partial h_i}{\partial t} + \text{div}(u_i h_i)$, $i = 1, 2$.

Notons également que l'hypothèse supplémentaire consistant à fixer une épaisseur constante pour la couche du fond donne une expression simplifiée des équations de continuité pour chaque couche [41, 61] :

$$\text{div}(u_i H_i) = 0. \tag{3.5}$$

Notre approche (3.4) est une équation intermédiaire entre (3.5) et l'équation de continuité du problème \mathcal{P} . Avec cette approche, nous sommes capable d'établir un résultat d'existence de solution et ainsi de montrer la convergence du schéma numérique.

Ainsi, l'espace des fonctions admissibles est donné par

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{V}^2; \text{div}(\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2) = 0 \}.$$

Soit \mathcal{H} la fermeture dans $L^2(\Omega)^4$ de $\tilde{\mathcal{V}}$. En supposant que $H_1 > \beta > 0$ et $H_1, \frac{1}{H_1} \in W^{1,\infty}(\Omega)$, nous obtenons la formulation faible suivante ($V_{r,l}$)

trouver

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in L^2(0, T; \tilde{\mathcal{V}}) \cap (L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2))^2,$$

$$\eta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)),$$

tels que

$$(V_{rl}) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \phi_1 \right) + A_1 a(u_1, \phi_1) - g'(\eta, \operatorname{div} \phi_1) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t}, \phi_2 \right) + A_2 a(u_2, \phi_2) \\ - \frac{1}{2}(u_1^2, \operatorname{div} \phi_1) + (\operatorname{rot} u_1 \alpha(u_1), \phi_1) - \frac{1}{2}(u_2^2, \operatorname{div} \phi_2) + (\operatorname{rot} u_2 \alpha(u_2), \phi_2) \\ + \omega_c (\alpha(u_1), \phi_1) + \omega_c (\alpha(u_2), \phi_2) = (f, \phi_2), \quad \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \tilde{\mathcal{V}}, \\ 2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} (u_1 H_1 - u_2 H_2) = 0, \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}, \\ \eta(t=0) = \eta_0 \in L^2(\Omega), \end{array} \right.$$

où $g' = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1}$ représente le coefficient de gravité réduite.

Interprétation des solutions de (V_{rl})

Nous nous proposons à présent de caractériser l'espace orthogonal \mathcal{H}^\perp de \mathcal{H} . Nous donnons le lemme suivant :

Lemme 3.1.

$$\mathcal{H}^\perp = \{ \phi \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2, \phi_1 = H_1 \nabla p, \phi_2 = H_2 \nabla p, p \in H^1(\Omega) \}, \quad (3.6)$$

$$\mathcal{H} = \{ \varphi \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2; \operatorname{div} (\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2) = 0, (H_1 \varphi_1 + H_2 \varphi_2) \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma \} \quad (3.7)$$

Démonstration. • Preuve de (3.6) :

Nous introduisons tout d'abord l'espace suivant

$$\mathcal{V}' = \{ \varphi \in \mathcal{V}^2, \operatorname{div} (\varphi_1 H_1) = \operatorname{div} (\varphi_2 H_2) = 0 \}.$$

On a

$$\mathcal{V}'^\perp = \{ \psi \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2, \psi_1 = H_1 \nabla p_1, \psi_2 = H_2 \nabla p_2, p_i \in H^1(\Omega) \}.$$

En effet, si $\mathbf{u} = (H_1 \nabla p_1, H_2 \nabla p_2)$, on obtient

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}', (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (H_1 \nabla p_1, v_1) + (H_2 \nabla p_2, v_2)$$

$$= -(p_1, \operatorname{div}(v_1 H_1)) - (p_2, \operatorname{div}(v_2 H_2)) = 0.$$

Réciproquement, si $\mathbf{u} \in \mathcal{V}'^\perp$, on a

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}', (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 0 \\ \implies \left(u_1, \frac{\operatorname{Rot} q_1}{H_1} \right) + \left(u_2, \frac{\operatorname{Rot} q_2}{H_2} \right) &= 0, \forall q_1, q_2 \in D(\Omega) \\ \implies \left(\frac{u_i}{H_i}, \operatorname{Rot} q_i \right) &= 0, \forall q_i \in D(\Omega). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant un résultat de De Rham, nous déduisons que [71]

$$\frac{u_i}{H_i} = \nabla p_i, \quad p_i \in H^1(\Omega).$$

Nous pouvons à présent montrer l'égalité

$$\tilde{\mathcal{V}}^\perp = \left\{ \phi \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2, \phi_1 = H_1 \nabla p, \phi_2 = H_2 \nabla p, p \in H^1(\Omega) \right\}.$$

Soit $\psi \in \tilde{\mathcal{V}}^\perp$. $\tilde{\mathcal{V}}^\perp \subset \mathcal{V}'^\perp$ d'où $\mathcal{V}' \subset \tilde{\mathcal{V}}$, donc $\psi_1 = H_1 \nabla p_1$ et $\psi_2 = H_2 \nabla p_2$. De plus, $\int_{\Omega} \varphi \cdot \psi = 0, \forall \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{\mathcal{V}}$.

Pour tout $\varphi_1 \in \mathcal{V}$, $\varphi_2 = -\frac{\varphi_1 H_1}{H_2} \in \mathcal{V}$ et $\varphi_1 H_1 + \varphi_2 H_2 = 0$, donc $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{\mathcal{V}}$.

On obtient ainsi $\forall \varphi_1 \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\varphi_1, -\frac{\varphi_1 H_1}{H_2} \right) \cdot (H_1 \nabla p_1, H_2 \nabla p_2) &= 0 \\ \iff \int_{\Omega} H_1 \varphi_1 \cdot (\nabla p_1 - \nabla p_2) &= 0 \\ \implies H_1 \nabla p_1 &= H_1 \nabla p_2, \end{aligned}$$

et comme $H_1 > 0$ sur Ω , $\nabla p_1 = \nabla p_2$.

Réciproquement, si $\mathbf{u} = (H_1 \nabla p, H_2 \nabla p)$, on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}, (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= (H_1 \nabla p, v_1) + (H_2 \nabla p, v_2) \\ &= (\nabla p, H_1 v_1 + H_2 v_2) \\ &= (p, \operatorname{div}(H_1 v_1 + H_2 v_2)) = 0. \end{aligned}$$

- Pour la démonstration de (3.7), on raisonne de la même façon que dans le théorème 1.4 de Temam [71].

□

On peut ainsi interpréter les solutions du problème faible (V_{rl}) comme les solutions du problème suivant :

$$\mathcal{P}_{rl} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \nabla u_1 - A_1 \Delta u_1 + \omega_c \alpha(u_1) + g' \nabla \eta = H_1 \nabla p, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_2 \nabla u_2 - A_2 \Delta u_2 + \omega_c \alpha(u_2) = f + H_2 \nabla p, \\ 2 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \operatorname{div} (u_1 h_1 - u_2 h_2) = 0, \\ \operatorname{div} (u_1 h_1 + u_2 h_2) = 0, \\ u_1 \cdot n = 0, \operatorname{rot} u_1 = 0, \text{ sur } \gamma, \\ u_2 \cdot n = 0, \operatorname{rot} u_2 = 0, \text{ sur } \gamma, \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0, \\ \eta(t=0) = \eta_0. \end{array} \right.$$

Remarque 3.2. De la même manière que dans les équations de Navier-Stokes incompressibles, nous voyons apparaître dans ce système une contrainte (la quatrième équation), le multiplicateur de Lagrange correspondant étant donné par l'inconnu $(H_1 \nabla p, H_2 \nabla p)$ [41, 48].

3.2 Résultats d'existence et de régularité

Nous allons à présent proposer un résultat d'existence de solution (\mathbf{u}, η) de (V_{rl}) pour des données contrôlées. Afin de ne pas alourdir les démonstrations de notations inutiles, nous supposons dans cette section que $g' = 1$ (on obtient une démonstration similaire pour tout g'). On considère $B_2, \lambda, \alpha, C_1, K_0$ et θ tels que

$$\theta \in]0, 1[, \quad (3.8)$$

$$A_2 > \lambda > 0, \quad B_2 = A_2 - \lambda, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\alpha} = \min \left(1, \inf \left(\frac{1}{H_1} \right) \right), \quad (3.10)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \|\nabla \log H_1\|_{L^\infty(\Omega)^2}, \quad (3.11)$$

$$K_0 = \frac{1}{2} \|u_{1,0}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \|u_{2,0}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\eta_0}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega)^2)}^2. \quad (3.12)$$

C la meilleure constante associée à l'inégalité de Gagliardo-Nirenbergis :

$$\|u\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \leq C \|u\|_{\mathcal{V}} \|u\|_{L^2(\Omega)^2}. \quad (3.13)$$

On suppose également que

$$H_1, \frac{1}{H_1} \in W^{1,\infty}(\Omega), \quad (3.14)$$

$$f \in L^2(0, T_0; L^2(\Omega)^2), \quad (3.15)$$

$$\mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}, \quad (3.16)$$

$$\eta_0 \in L^2(\Omega). \quad (3.17)$$

Ces données vérifient de plus les hypothèses suivantes, correspondant à des hypothèses de données contrôlées :

$$\theta^2 \frac{2A_1^2}{C^2} > K_0 + 2C_1 T_0 \alpha K_0 \exp(2C_1 \alpha T_0), \quad (3.18)$$

$$\frac{2B_2^2}{C^2} > K_0 + 2C_1 T_0 \alpha K_0 \exp(2C_1 \alpha T_0). \quad (3.19)$$

Théorème 3.3. *Pour tout $\theta, \lambda, f, T_0, \eta_0$ et \mathbf{u}_0 satisfaisant (3.8)–(3.19), le problème faible (V_{rl}) a une unique solution (u, η) tels que*

$$\mathbf{u} \in L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}) \cap (L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2,$$

$$\eta \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

La démonstration de ce théorème se fait en trois étapes. On donne tout d'abord les estimations *a priori*, puis nous construisons une suite de solutions approchées satisfaisant ces estimations, et enfin nous présentons brièvement le passage à la limite dans les équations de continuité et de quantité de mouvement.

3.2.1 Estimations *a priori*

Nous établissons dans cette partie les majorations de type énergie vérifiées par les solutions du problème (V_{rl}) . En remplaçant ϕ par \mathbf{u} dans (V_{rl}) , on obtient l'égalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) + A_1 \|u_1\|_{\mathcal{V}}^2 + A_2 \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 + (\nabla \eta, u_1) \\ & = \frac{1}{2} (u_1^2, \operatorname{div} u_1) + \frac{1}{2} (u_2^2, \operatorname{div} u_2) + (f, u_2). \end{aligned}$$

Les termes $\frac{1}{2}(u_i^2, \operatorname{div} u_i)$ n'étant pas nécessairement bornés, on construit un espace de stabilité. L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg permet d'écrire :

$$|(u_i^2, \operatorname{div} u_i)| \leq C \|u_i\|_{\mathcal{V}}^2 \|u_i\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

Puis en utilisant l'équation $(V_{rl})_2$, on écrit :

$$\begin{aligned} (\nabla \eta, u_1) &= \left(\frac{\nabla \eta}{H_1}, u_1 H_1 \right) = - \left(\frac{\eta}{H_1} \operatorname{div} (u_1 H_1) \right) + (\eta u_1, \nabla \log H_1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\eta}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\eta u_1, \nabla \log H_1) \end{aligned}$$

avec

$$|(\eta u_1, \nabla \log H_1)| \leq \frac{1}{2} \|\nabla \log H_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \log H_1\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

on obtient ainsi l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) &+ \left(A_1 - \frac{C}{2} \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2} \right) \|u_1\|_{\mathcal{V}}^2 \\ &+ \left(B_2 - \frac{C}{2} \|u_2\|_{L^2(\Omega)^2} \right) \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \frac{\eta}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + C_1 \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pour obtenir les estimations annoncées, nous avons besoin de montrer la positivité des termes

$$A_1 - \frac{C}{2} \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2} \text{ et } B_2 - \frac{C}{2} \|u_2\|_{L^2(\Omega)^2}.$$

Ce résultat est obtenu grâce à l'hypothèse de données petites :

En effet, on suppose les solutions u_1 et u_2 continues de $(0, T_0)$ dans $L^2(\Omega)^2$ (ce qui est le cas en dimension finie), et puisque $\|u_{1,0}\|_{L^2(\Omega)^2} < \theta \frac{2A_1}{C}$ et $\|u_{2,0}\|_{L^2(\Omega)^2} < \frac{2B_2}{C}$ (ces inégalités proviennent des hypothèses (3.12), (3.18) et (3.19)), il existe un temps t' tel que dans $(0, t')$:

$$\begin{aligned} \|u_1\|_{L^\infty(0,t';L^2(\Omega)^2)} &< \frac{2A_1}{C}, \\ \|u_2\|_{L^\infty(0,t';L^2(\Omega)^2)} &< \frac{2B_2}{C}. \end{aligned}$$

Soit t_0 le plus petit temps tel que l'un des termes $\|u_i\|_{L^\infty(0,t_0;L^2(\Omega)^2)}$ atteint sa borne.

En intégrant l'équation (3.20), on a $\forall t \leq t_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \|u_2(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 &+ \left(A_1 - \frac{C}{2} \|u_1\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^2)} \right) \|u_1\|_{L^2(0,t;\mathcal{V})}^2 \\ &+ \left(B_2 - \frac{C}{2} \|u_2\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega)^2)} \right) \|u_2\|_{L^2(0,t;\mathcal{V})}^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{\eta(t)}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq K_0 + C_1 \int_0^t \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

On doit alors distinguer deux cas :

- Premier cas : $\|u_1\|_{L^\infty(0,t_0;L^2(\Omega)^2)} = \frac{2A_1}{C}$ et $\|u_2\|_{L^\infty(0,t_0;L^2(\Omega)^2)} < \frac{2B_2}{C}$.

L'estimation (3.21) écrite au temps $t = t_0$ donne

$$\frac{2A_1^2}{C^2} \leq K_0 + C_1 \int_0^{t_0} \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).$$

De plus pour tout $t \leq t_0$,

$$\|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \left\| \frac{\eta(t)}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2K_0 + 2C_1 \int_0^t \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right),$$

et puisque

$$\begin{aligned} \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \left\| \frac{\eta(t)}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \inf\left(\frac{1}{H_1}\right) \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{1}{\alpha} \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{\alpha} \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

on en déduit que

$$\|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\alpha K_0 + 2\alpha C_1 \int_0^t \left(\|\eta\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right), \quad (3.22)$$

ainsi, en utilisant un lemme de Gronwall, on obtient

$$\|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\alpha K_0 \exp(2C_1\alpha T_0)$$

et ainsi

$$\frac{2A_1^2}{C^2} \leq K_0 + 2C_1 T_0 \alpha K_0 \exp(2C_1\alpha T_0),$$

ce qui contredit l'hypothèse (3.18).

- deuxième cas : $\|u_2\|_{L^\infty(0,t_0;L^2(\Omega)^2)} = \frac{2B_2}{C}$ et $\|u_1\|_{L^\infty(0,t_0;L^2(\Omega)^2)} < \frac{2A_1}{C}$.
de la même façon, l'équation (5.5) écrite au temps t_0 donne

$$\frac{2B_2^2}{C^2} \leq K_0 + 2C_1 T_0 \alpha K_0 \exp(2C_1\alpha T_0),$$

ce qui contredit (3.19) et la positivité annoncée de $A_1 - \frac{C}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega)^2}$ et $B_2 - \frac{C}{2}\|u_2\|_{L^2(\Omega)^2}$ est vérifiée.

Ainsi, en intégrant l'équation (3.20) sur $(0, t)$ pour tout $t \leq T_0$, on obtient l'équation (3.21) pour tout $t \leq T_0$. Et en procédant de la même façon que pour obtenir l'équation (3.22), on en déduit la relation

$$\|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\alpha K_0 + 2\alpha C_1 \int_0^t \left(\|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right)$$

$$\implies \|u_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\eta(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\alpha K_0 \exp(2C_1\alpha T_0),$$

la relation (3.21) est ainsi borné par

$$K_0 + 2C_1 T_0 \alpha K_0 \exp(2C_1\alpha T_0) \text{ for all } t \leq T_0.$$

Finalement, nous obtenons l'inégalité d'énergie suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_1(t)\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2)}^2 + \left(A_1 - \frac{C}{2} \|u_1\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2)} \right) \|u_1\|_{L^2(0, T_0; \mathcal{V})}^2 \\ & + \frac{1}{2} \|u_2(t)\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2)}^2 + \left(B_2 - \frac{C}{2} \|u_2\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2)} \right) \|u_2\|_{L^2(0, T_0; \mathcal{V})}^2 \\ & + \frac{1}{2} \left\| \frac{\eta(t)}{\sqrt{H_1}} \right\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))}^2 \leq K_0 + 2C_1 T_0 \alpha K_0 \exp(2C_1\alpha T_0), \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$A_1 - \frac{C}{2} \|u_1\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2)} \geq 0, \quad (3.24)$$

$$B_2 - \frac{C}{2} \|u_2\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2)} \geq 0. \quad (3.25)$$

3.2.2 Construction des solutions approchées

Afin de construire les solutions approchées, on introduit une base de l'espace fonctionnel $\tilde{\mathcal{V}}$ que l'on note $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots\}$ et on considère $\tilde{\mathcal{V}}_n$ l'espace de dimension finie engendré par les n premières fonctions de cette base. Nous allons chercher (\mathbf{u}_n, η_n) , avec \mathbf{u}_n écrit sous la forme $\mathbf{u}_n(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \varphi_k(x)$, comme solution du problème faible suivant :

Trouver

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_n &= (u_{1,n}, u_{2,n}) \in L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n) \cap (L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2, \\ \eta_n &\in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

tels que

$$(V_n) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_{1,n}}{\partial t}, \phi_1 \right) + A_1 a(u_{1,n}, \phi_1) - (\eta_n, \operatorname{div} \phi_1) + \left(\frac{\partial u_{2,n}}{\partial t}, \phi_2 \right) + A_2 a(u_{2,n}, \phi_2) \\ - \frac{1}{2} (u_{1,n}^2, \operatorname{div} \phi_1) + (\operatorname{rot} u_{1,n} \alpha(u_{1,n}), \phi_1) - \frac{1}{2} (u_{2,n}^2, \operatorname{div} \phi_2) + w_c(\alpha(u_{1,n}), \phi_1) \\ + (\operatorname{rot} u_{2,n} \alpha(u_{2,n}), \phi_2) + w_c(\alpha(u_{2,n}), \phi_2) = (f, \phi_2), \quad \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \tilde{\mathcal{V}}_n, \\ 2 \frac{\partial \eta_n}{\partial t} + \operatorname{div} (u_{1,n} H_1 - u_{2,n} H_2) = 0, \\ \mathbf{u}_n(t=0) = \mathbf{u}_{n,0} \longrightarrow \mathbf{u}_0 \text{ dans } \mathcal{H}, \\ \eta_n(t=0) = \eta_{n,0} \longrightarrow \eta_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Pour résoudre ce problème, nous allons utiliser le théorème du point fixe de Schauder. On rappelle que ce théorème spécifie que si on considère un espace de Banach E , K_0 un sous ensemble convexe et compact de E et Π une application continue de K_0 dans lui-même, alors il existe $x_0 \in K_0 | x_0 = \Pi(x_0)$ [31].

Pour appliquer ce théorème, on fixe une fonction \mathbf{u}_n^* dans $L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n)$ et on résout le problème suivant

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} 2 \frac{\partial k_n}{\partial t} + \operatorname{div} (u_{1,n}^* H_1 - u_{2,n}^* H_2) = 0, \\ k_n(t=0) = \eta_{n,0}. \end{array} \right.$$

La solution k_n de ce problème (H) appartient à $L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$ et on définit l'application suivante :

$$\Pi_1 : L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n) \longrightarrow L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$$

$$\mathbf{u}_n^* \longmapsto \Pi_1(\mathbf{u}_n^*) = k_n.$$

Puis on résout le problème suivant :

$$(U) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial u_{1,n}}{\partial t}, \phi_1 \right) + A_1 a(u_{1,n}, \phi_1) - (k_n, \operatorname{div} \phi_1) + \left(\frac{\partial u_{2,n}}{\partial t}, \phi_2 \right) + A_2 a(u_{2,n}, \phi_2) \\ - \frac{1}{2} (u_{1,n}^2, \operatorname{div} \phi_1) + (\operatorname{rot} u_{1,n} \alpha(u_{1,n}), \phi_1) - \frac{1}{2} (u_{2,n}^2, \operatorname{div} \phi_2) + w_c(\alpha(u_{1,n}), \phi_1) \\ + (\operatorname{rot} u_{2,n} \alpha(u_{2,n}), \phi_2) + w_c(\alpha(u_{2,n}), \phi_2) = (f, \phi_2), \quad \forall \phi = (\phi_1, \phi_2) \in \tilde{\mathcal{V}}_n \\ \mathbf{u}_n(t=0) = \mathbf{u}_{n,0}. \end{array} \right.$$

On définit alors l'application Π_2 qui associe à $k_n \in L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$ la solution du problème (U), $\mathbf{u}_n \in L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n)$. Enfin, on considère l'application $\Pi_2 \circ \Pi_1$. Nous allons démontrer que cette application vérifie les conditions du théorème du point fixe de Schauder et ainsi qu'elle admet un point fixe.

En utilisant un lemme de Gronwall, on montre aisément que la solution k_n de (H) vérifie l'inégalité suivante :

$$\|k_n\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))}^2 \leq \exp(4TH_2)\|\eta_{n,0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \exp(4TH_2)\|\mathbf{u}_n^*\|_{L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n)}^2. \quad (3.26)$$

De plus, en procédant de la même façon que pour les estimations *a priori*, on montre que la solution \mathbf{u}_n de (U) vérifie

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n\|_{L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n)}^2 &\leq \frac{\beta}{\varepsilon} T_0 \|k_n\|_{L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))}^2 \\ &+ 2\frac{\beta}{\lambda} \left(\|f\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega)^2)}^2 + T_0 \|H_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{4} \|\mathbf{u}_{n,0}\|_{L^2(\Omega^4)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

où k_n est la solution de (H).

Avec (3.26) et (3.27), on obtient alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n\|_{L^2(\tilde{\mathcal{V}}_n)}^2 &\leq \frac{\beta}{\varepsilon} T_0 \exp(4TH_2) \left(\|\eta_{n,0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_n^*\|_{L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}_n)}^2 \right) \\ &+ \frac{\beta}{\lambda} \left(\|f\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{\lambda}{2} \|\mathbf{u}_{n,0}\|_{L^2(\Omega^4)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Ainsi, pour un temps T suffisamment petit, il existe R tel que

$$\Pi(B(0, R)) \subset B(0, R),$$

et $B(0, R)$ est un ensemble convexe compacte pour la topologie faible de $L^2(0, T; \tilde{\mathcal{V}}_n)$.

Nous avons ainsi vérifié toutes les conditions du théorème de Schauder (pour montrer la continuité, on procède de la même façon que dans F.J. Chatelon *et al.* [13]). Donc le problème $\mathbf{u}_n = \Pi(\mathbf{u}_n)$ admet une solution dans $L^2(0, T; \tilde{\mathcal{V}}_n)$. Et puisque \mathbf{u}_n est une solution de (U) et η_n une solution de (H), on a $\mathbf{u}_n(t=0) = \mathbf{u}_{n,0}$ et $\eta_n(t=0) = \eta_{n,0}$.

On a donc obtenu l'existence d'une solution pour un temps petit. Cependant, grâce aux majorations *a priori*, ce résultat peut être prolongé quelque soit T_0 vérifiant (3.18) et (3.19).

3.2.3 Passage à la limite

On peut vérifier aisément que (\mathbf{u}_n, η_n) , solution du problème faible approché (V_n) , vérifie les mêmes estimations que (\mathbf{u}, η) , solution de (V_{rl}) , et on obtient :

$$\mathbf{u}_n \text{ borné dans } L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}) \cap (L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2$$

et

$$\eta_n \text{ borné dans } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

On peut ainsi extraire de \mathbf{u}_n et η_n des sous suites, encore notées \mathbf{u}_n et η_n telles que

$$\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}) \text{ faible,}$$

$$\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u} \text{ in } (L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2 \text{ faible étoile,}$$

$$\eta_n \longrightarrow \eta \text{ dans } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.}$$

Ce qui nous permet de passer à la limite dans notre problème approché (le passage à la limite dans les termes non linéaires se fait par application du théorème d'Aubin [63]).

3.2.4 Résultats de régularité

Lemme 3.4. *Soit (\mathbf{u}, η) une solution de (V_{rl}) dans $L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}) \cap (L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2 \times L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega))$.*

1. *Si $f \in H^1(0, T_0; L^2(\Omega)^2)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathcal{V}} \cap H^2(\Omega)^4$ et $\eta_0 \in H^1(\Omega)$, alors la solution (\mathbf{u}, η) vérifie*

$$\mathbf{u} \in H^1(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}) \cap (W^{1,\infty}(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2$$

$$\eta \in W^{1,\infty}(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

2. *Si $f \in \bigcap_{k=0}^{m-1} H^{m-k}(0, T_0; H^{2k}(\Omega)^2)$, $\mathbf{u}_0 \in \tilde{\mathcal{V}} \cap H^{2m}(\Omega)^4$ et $\eta_0 \in H^{2m-1}(\Omega)$, $m \geq 1$ alors la solution (\mathbf{u}, η) vérifie*

$$\mathbf{u} \in H^m(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}) \cap (W^{m,\infty}(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2$$

$$\eta \in W^{m,\infty}(0, T_0; L^2(\Omega)).$$

Démonstration. On dérive par rapport au temps le problème variationnel en dimension finie (V_n) , on multiplie par a'_k et on somme sur i . On obtient en intégrant sur Ω

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + A_1 \|u'_{1,n}\|_{\mathcal{V}}^2 + A_2 \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}}^2 - (\eta'_n, \operatorname{div} u'_{1,n}) - (u'_{1,n} u_{1,n}, \operatorname{div} u'_{1,n}) \\ & - (u'_{2,n} u_{2,n}, \operatorname{div} u'_{2,n}) + (\operatorname{rot} u'_{1,n} \alpha(u_{1,n}), u'_{1,n}) + (\operatorname{rot} u'_{2,n} \alpha(u_{2,n}), u'_{2,n}) = (f', u'_{2,n}). \end{aligned}$$

On a

$$(\eta'_n, \operatorname{div} u'_{1,n}) \leq \frac{1}{\lambda} \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u'_{1,n}\|_{\mathcal{V}}^2,$$

on dérive $\eta'_n = H_2 \operatorname{div} u_{2,n}$, et on multiplie par η'_n . En intégrant sur Ω , on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq H_2 \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)} \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}},$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + (A_1 - \lambda) \|u'_{1,n}\|_{\mathcal{V}}^2 + A_2 \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}}^2 \leq \frac{1}{\lambda} \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + (u'_{1,n} u_{1,n}, \operatorname{div} u'_{1,n}) + (u'_{2,n} u_{2,n}, \operatorname{div} u'_{2,n}) - (\operatorname{rot} u'_{1,n} \alpha(u_{1,n}), u'_{1,n}) \\ & - (\operatorname{rot} u'_{2,n} \alpha(u_{2,n}), u'_{2,n}) + H_2 \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)} \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}} + \|f'\|_{L^2(\Omega)^2} \|u'_{2,n}\|_{L^2(\Omega)^2}, \end{aligned}$$

on a également

$$\begin{aligned} & \|u'_{2,n}\|_{L^2(\Omega)^2} \|f'\|_{L^2(\Omega)^2} \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f'\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \varepsilon \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}}^2, \\ & H_2 \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)} \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{H_2}{\lambda} \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + H_2 \lambda \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}}^2, \\ & |(\operatorname{rot} u'_{i,n} \alpha(u_{i,n}), u'_{i,n})| \leq \|u'_{i,n}\|_{\mathcal{V}} \|u_{i,n}\|_{L^4(\Omega)^2} \|u'_{i,n}\|_{L^4(\Omega)^2} \\ & \leq C \|u'_{i,n}\|_{\mathcal{V}}^{3/2} \|u'_{i,n}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|u_{i,n}\|_{L^4(\Omega)^2} \\ & \leq \varepsilon \|u'_{i,n}\|_{\mathcal{V}}^2 + C_2 \|u'_{i,n}\|_{L^2(\Omega)^2}^2. \end{aligned}$$

De la même façon on peut estimer $(u'_{i,n} u_{i,n}, \operatorname{div} u'_{i,n})$, et on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + K_1 \|u'_{1,n}\|_{\mathcal{V}}^2 + K_2 \|u'_{2,n}\|_{\mathcal{V}}^2 \\ & \leq \alpha_4 \|f'\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \left(\alpha_3 + \alpha_1 \|u_{1,n}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 + \alpha_2 \|u_{2,n}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 \right) \left(\|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

l'intégration en temps donne ainsi

$$\left(\|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \alpha_4 \|f'\|_{L^2(0,T_0;L^2(\Omega)^2)}^2 + \|\mathbf{u}'_n(0)\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$+ \int_0^t \left(\alpha_3 + \alpha_1 \|u_{1,n}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 + \alpha_2 \|u_{2,n}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 \right) \left(\|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),$$

et si on choisit $\mathbf{u}_n(0) \in H^2(\Omega)^4 | \mathbf{u}_n(0) \longrightarrow \mathbf{u}_0 \in H^2(\Omega)^4$, $\eta_n(0) \in H^1(\Omega) | \eta_n(0) \longrightarrow \eta_0 \in H^1(\Omega)$, le lemme de Gronwall donne

$$\|\mathbf{u}'_n\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta'_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \mathcal{C}.$$

On en déduit ainsi que

$$\mathbf{u}'_n \text{ est borné dans } (L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)^2))^2,$$

et

$$\eta'_n \text{ borné dans } L^\infty(0, T_0; L^2(\Omega)),$$

et finalement

$$\mathbf{u}'_n \text{ borné dans } L^2(0, T_0; \tilde{\mathcal{V}}).$$

On montre le deuxième résultat du lemme par récurrence. En effet, supposons ce résultat vrai au rang $(m-1)$, c'est-à-dire pour $\mathbf{u}_n^{(m-1)}$ et $\eta_n^{(m-1)}$. On peut ainsi définir $u_{i,n}^{(m)}(0), \eta_n^{(m)}(0)$ et raisonner comme dans la partie (1) du lemme. Nous obtenons les mêmes résultats si on est capable de majorer les termes non linéaires

$$(\text{rot } u_{i,n}^{(k)} \alpha(u_{i,n}^{(m-k)}), u_{i,n}^{(m)}),$$

le raisonnement étant le même pour le terme $\nabla u_{i,n}^2$. On considère alors trois cas :

- $0 < k < m$

$$\begin{aligned} |(\text{rot } u_{i,n}^{(k)} \alpha(u_{i,n}^{(m-k)}), u_{i,n}^{(m)})| &\leq \|u_{i,n}^{(k)}\|_{\mathcal{V}} \|u_{i,n}^{(m-k)}\|_{L^4(\Omega)^2} \|u_{i,n}^{(m)}\|_{L^4(\Omega)^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_{i,n}^{(k)}\|_{\mathcal{V}}^2 + \frac{C}{2} \|u_{i,n}^{(m-k)}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|u_{i,n}^{(m)}\|_{L^2(\Omega)^2} \|u_{i,n}^{(m)}\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u_{i,n}^{(k)}\|_{\mathcal{V}}^2 + \varepsilon \|u_{i,n}^{(m)}\|_{\mathcal{V}}^2 + C_3 \|u_{i,n}^{(m-k)}\|_{L^4(\Omega)^2}^4 \|u_{i,n}^{(m)}\|_{L^2(\Omega)^2}^2. \end{aligned}$$

- $k = m$, ce cas est identique au cas (1) du lemme.

- $k = 0$

$$\begin{aligned} |(\text{rot } u_{i,n} \alpha(u_{i,n}^{(m)}), u_{i,n}^{(m)})| &\leq \|u_{i,n}\|_{\mathcal{V}} \|u_{i,n}^{(m)}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \\ &\leq \varepsilon \|u_{i,n}^{(m)}\|_{\mathcal{V}}^2 + C_3 \|u_{i,n}\|_{\mathcal{V}}^2 \|u_{i,n}^{(m)}\|_{L^2(\Omega)^2}^2. \end{aligned}$$

On peut ainsi appliquer le lemme de Gronwall comme dans la partie (1), et on obtient

$$\|\mathbf{u}_n^{(m)}\|_{L^2(\Omega)^4}^2 + \|\eta_n^{(m)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_n^{(m)}\|_{\tilde{\mathcal{V}}}^2 \leq \mathcal{C}.$$

□

3.3 Description de la méthode numérique

Le problème faible (V_{rl}) est résolu numériquement à l'aide de la méthode de Galerkin. Nous devons ainsi construire une base de l'espace $\tilde{\mathcal{V}}$ qui puisse être aisément obtenue d'un point de vue numérique.

3.3.1 Base de l'espace fonctionnel $\tilde{\mathcal{V}}$

Le lemme suivant nous donne une base spéciale de l'espace $\tilde{\mathcal{V}}$. Cette base est construite à partir de la base spéciale de l'espace \mathcal{V} définie dans la section 1.2.3, qui a été mise en œuvre pour résoudre le problème de shallow water bi-couche à surface libre.

Lemme 3.5. *L'ensemble composé des $\left(\frac{\text{Rot } q}{H_1}, 0\right)$, $\left(0, \frac{\text{Rot } q}{H_2}\right)$, et $\left(\frac{\nabla p}{H_1}, \frac{-\nabla p}{H_2}\right)$, où p et q sont les solutions des problèmes (P2) et (P3) définis dans la section 1.2.3, forme une base de l'espace $\tilde{\mathcal{V}}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{u} \in \tilde{\mathcal{V}}$. On a $\text{div}(u_1 H_1 + u_2 H_2) = 0$, on peut ainsi écrire

$$u_1 H_1 + u_2 H_2 = \text{Rot } q, \quad q \in H_0^1(\Omega).$$

De plus $u_1 H_1$ et $u_2 H_2 \in \mathcal{V}$, donc

$$u_1 H_1 = \nabla p_1 + \text{Rot } q_1 \quad \text{et} \quad u_2 H_2 = \nabla p_2 + \text{Rot } q_2,$$

d'où $\nabla(p_1 + p_2) + \text{Rot}(q_1 + q_2) = \text{Rot } q$. La décomposition étant unique,

$$\nabla p_1 = -\nabla p_2 := \nabla p.$$

D'autre part, en utilisant la base de \mathcal{V} définie dans la section 1.2.3, on a

$$\nabla p = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \nabla p_k, \quad \text{Rot } q_1 = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \text{Rot } q_i, \quad \text{Rot } q_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \text{Rot } q_j,$$

donc

$$\frac{\nabla p}{H_i} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\nabla p_k}{H_i}, \quad \frac{\text{Rot } q_1}{H_1} = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \frac{\text{Rot } q_i}{H_1}, \quad \frac{\text{Rot } q_2}{H_2} = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{\text{Rot } q_j}{H_2},$$

on obtient ainsi

$$u_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\nabla p_k}{H_1} + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i \frac{\text{Rot } q_i}{H_1} \quad \text{et} \quad u_2 = -\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{\nabla p_k}{H_2} + \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j \frac{\text{Rot } q_j}{H_2}.$$

□

Remarque 3.6. Dans le cas d'un domaine à géométrie complexe, les fonctions p et q , vérifiant les problèmes (P2) et (P3), sont obtenues par une méthode d'éléments finis en utilisant des éléments de type Hermite à trois degrés de liberté (u, u_x, u_y) par nœuds. Cela permet ainsi d'accéder directement aux ∇p et aux $\text{Rot } q$. Cependant, dans le cas d'un domaine idéalisé (cf. paragraphe 3.4), ces fonctions sont connues analytiquement.

3.3.2 Méthode de Galerkin

Soit $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la base de $\tilde{\mathcal{V}}$ définie dans la section précédente. Considérons l'ensemble $\tilde{\mathcal{V}}_n$ des combinaisons linéaires des n premières fonctions $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Nous allons chercher $\mathbf{u}_n \in \tilde{\mathcal{V}}_n$ où $\mathbf{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n})$ se décompose sous la forme

$$u_{1,n}(x, t) = \sum_{k=1}^n x_k(t) \varphi_k^1(x) \text{ et } u_{2,n}(x, t) = \sum_{k=1}^n y_k(t) \varphi_k^2(x).$$

Plus précisément,

$$u_{1,n}(x, t) = \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t) \frac{\nabla p_i}{H_1}(x) + \sum_{j=1}^{n_b} b_j(t) \frac{\text{Rot } q_j}{H_1}(x),$$

$$u_{2,n}(x, t) = - \sum_{i=1}^{n_a} a_i(t) \frac{\nabla p_i}{H_2}(x) + \sum_{j=1}^{n_c} c_j(t) \frac{\text{Rot } q_j}{H_2}(x),$$

avec $n = n_a + n_b + n_c$. On construit la suite (\mathbf{u}_n, η_n) , solution du problème (V_n) défini dans la section 3.2.2.

Cette méthode nous amène à résoudre un système d'équations différentielles non linéaire du premier ordre et à coefficients constants

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

$$\dot{c} = F_3, \quad (3.30)$$

où

$$K_{11} \text{ est une matrice } n_b \times n_b \text{ avec } (K_{11})_{kj} = \left(\frac{\text{Rot } q_j}{H_1}, \frac{\text{Rot } q_k}{H_1} \right),$$

$$K_{12} \text{ est une matrice } n_b \times n_a \text{ avec } (K_{12})_{ki} = \left(\frac{\nabla p_i}{H_1}, \frac{\text{Rot } q_k}{H_1} \right),$$

$$K_{21} \text{ est une matrice } n_a \times n_b \text{ avec } (K_{21})_{kj} = \left(\frac{\text{Rot } q_j}{H_1}, \frac{\nabla p_k}{H_1} \right),$$

K_{22} est une matrice $n_a \times n_a$ avec $(K_{22})_{ki} = \left(\frac{\nabla p_i}{H_1}, \frac{\nabla p_k}{H_1} \right) + \frac{\lambda_k}{H_2^2}$,
 et $a \in \mathbb{R}^{n_a}$, $b \in \mathbb{R}^{n_b}$, $c \in \mathbb{R}^{n_c}$ sont les vecteurs suivants

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_{n_b} \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \\ \vdots \\ c_{n_c} \end{bmatrix}.$$

Les termes qui apparaissent dans le membre de gauche de (3.29) et (3.30) représentent la projection de $\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t}$, et $F1, F2, F3$ la projection des autres termes. Ce système est ensuite résolu à l'aide d'une méthode de type Euler implicite.

Pour approcher l'élévation, on cherche η_n sous la forme

$$\eta_n = \sum_{i=1}^{n_a} d_i p_i,$$

où les p_i sont solutions de (P2) et constituent une base orthogonale de $H^1(\Omega)$. La projection de $\frac{\partial \eta_n}{\partial t} = H_2 \operatorname{div} u_{2,n}$ sur les p_k nous donne ainsi le système suivant

$$\dot{d}_k = \lambda_k a_k.$$

Dans la section 3.4.2, nous allons comparer les résultats numériques obtenus avec ceux établis à partir du modèle de shallow water bi-couche à surface libre. Ce dernier est résolu à l'aide de la méthode présentée dans la section 1.2.3 en utilisant la base spéciale de l'espace \mathcal{V} , composée des fonctions $(\nabla p_i, \operatorname{Rot} q_i)$.

Remarque 3.7. Les valeurs n_a, n_b et n_c ne sont pas choisies arbitrairement. Nous définissons ces valeurs de telle sorte à avoir les n premières valeurs propres du problème (P1) (sans trous dans la base). De plus, puisque nous utilisons les mêmes solutions du problème (P3) pour les deux couches, on prend généralement $n_b = n_c$.

3.3.3 Reconstitution des champs $H_1 \nabla p$ et $H_2 \nabla p$

Dans notre modèle, une autre inconnue p apparaît, considérée comme un multiplicateur de Lagrange. L'espace \mathcal{H}^\perp défini dans la section 3.1 nous permet de reconstituer les termes $H_1 \nabla p$ et $H_2 \nabla p$.

On utilise la décomposition suivante :

$$p = \sum_{i=1}^{\infty} z_i p_i$$

donc

$$(H_1 \nabla p, H_2 \nabla p) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i (H_1 \nabla p_i, H_2 \nabla p_i),$$

où les p_i ont été définis précédemment. Nous projetons ensuite l'équation de conservation de la quantité de mouvement sur la base constituée par les $(H_1 \nabla p_k, H_2 \nabla p_k)$. On obtient ainsi le système linéaire suivant

$$B.z = b.$$

Ici, les termes qui apparaissent dans le membre de gauche représentent la projection de $\sum_{i=1}^{n_a} z_i (H_1 \nabla p_i, H_2 \nabla p_i)$ sur $(H_1 \nabla p_k, H_2 \nabla p_k)$, $k = 1, \dots, n_a$. Ainsi B est une matrice carrée d'ordre n_a ayant pour coefficients $B_{ki} = (H_1 \nabla p_i, H_1 \nabla p_k) + H_2^2 \lambda_k \delta_{ik}$ (puisque $(H_2 \nabla p_i, H_2 \nabla p_k) = H_2^2 (\nabla p_i, \nabla p_k) = H_2^2 (p_i, -\Delta p_k) = H_2^2 \lambda_k \delta_{ik}$). Et b représente la projection des autres termes sur $(H_1 \nabla p_k, H_2 \nabla p_k)$.

3.4 Simulations numériques

Nous présentons dans cette section les résultats numériques obtenus à partir du modèle de shallow water bi-couche avec l'hypothèse du rigid-lid, en utilisant les méthodes numériques développées dans la section précédente.

Notre étude se fait ici sur un domaine carré. Dans ce cas particulier, les fonctions propres, solutions des problèmes $(P2)$ et $(P3)$, sont connues analytiquement. Notons toutefois que l'étude peut se faire également sur des domaines plus complexes sans difficultés supplémentaires [4, 30]. En effet, dans le cas plus général, les problèmes $(P2)$ et $(P3)$ sont résolus à l'aide du logiciel d'éléments finis Modulef développé par l'INRIA. L'utilisation d'éléments finis de type Hermite à trois degrés de liberté par nœud (Tria 2P3D) permet alors d'accéder directement au gradient et au rotationnel des fonctions sans avoir recours à un code de dérivation numérique.

Afin de tester la validité de l'hypothèse du toit rigide, nous allons comparer ces résultats avec ceux obtenus à partir du modèle bi-couche à surface libre (que l'on appellera également modèle complet), dans le cas d'un fond constant (sect. 3.4.2) et dans le cas d'un fond variable (sect. 3.4.2).

3.4.1 Tests caractéristiques

Le domaine sur lequel sont effectués les tests est un domaine idéalisé dont la surface est un carré de côté 10^6 m. Par un changement d'échelles spatial et temporel, on se ramène à un carré de côté un et les fonctions propres orthonormées solutions des problèmes scalaires de Neumann et de Dirichlet ($P2$) et ($P3$) sont données par

$$U_p = \frac{\nabla p}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \nabla(\cos(i\pi x) \cos(i\pi y))$$

$$\lambda = (i^2 + j^2)\pi^2$$

$$U_q = \frac{\text{Rot } q}{\sqrt{\mu}} = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \text{Rot}(\sin(i\pi x) \sin(i\pi y))$$

$$\mu = (i^2 + j^2)\pi^2, \quad i \neq 0, \quad j \neq 0.$$

Les densités ρ_1 et ρ_2 des couches inférieures et supérieures vérifient $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 0,995$. L'épaisseur de la couche supérieure au repos est $H_2 = 100$ m.

Le coefficient de gravité réduite est donné par

$$g' = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} g = 5.10^{-2} \text{ ms}^{-2},$$

et on néglige les effets du terme de Coriolis : $\omega_c = 0$. Le champ de contrainte f imposée à la surface ("wind stress") est supposée constant et uniforme (dans la direction de l'axe y). Puis on prend les valeurs $n_b = n_c = 60$ et $n_a = 72$.

Le domaine est divisé en 6400 éléments triangulaires utilisés pour les intégrations numériques et la méthode des caractéristiques. Le pas de temps maximum que nous avons pu utiliser, afin de respecter les conditions CFL, est de 50 s pour le modèle de shallow water bi-couche complet. Ce pas de temps doit être comparé avec celui du modèle rigid-lid qui est de 10^3 s.

3.4.2 Quelques résultats de comparaison

Nous présentons dans cette section deux séries de résultats numériques. Dans un premier temps, les tests sont exécutés dans le cas d'un fond constant, puis nous considérerons dans la deuxième série une bathymétrie variable ($H_1 = 100 + 10^{-4} \times x$).

Comparaison du modèle rigid-lid avec le modèle à surface libre avec un fond constant

Nous supposons ici que la bathymétrie est donnée par

$$H_1 = 100 \text{ m.}$$

Le cas test considéré permet de prévoir "physiquement" la solution du problème stationnaire. En effet, puisque la contrainte f peut s'écrire sous la forme d'un gradient $f = \nabla\theta$, avec $\theta = \alpha y$, il est alors aisé de montrer que, pour le modèle complet, une solution du problème stationnaire est $\left(\mathbf{u} = 0, \eta_2 = \frac{\theta}{g} + cste, \eta_1 = \frac{-\rho_2}{g'\rho_1}\theta + cste \right)$ [48].

En partant des conditions initiales $\mathbf{u}(t = 0) = 0, \eta_1(t = 0) = 0$ et $\eta_2(t = 0) = 0$, la solution du problème va converger vers cette solution stationnaire par des basculements avec amortissement du plan d'eau.

Pour vérifier ces considérations, nous présentons sur les figures 3.2 et 3.3 l'évolution de la norme L^2 de la vitesse de la couche supérieure pour chacun des deux modèles, puis sur les figures 3.4 et 3.5 celle de la couche inférieure. Les oscillations observées pour les deux modèles présentent une période similaire voisine de $6.5 \times 10^5 \text{ s}$. Ces oscillations sont dues au vent qui fournit au système de l'énergie cinétique et qui se transforme en énergie potentielle par inclinaison du plan d'eau.

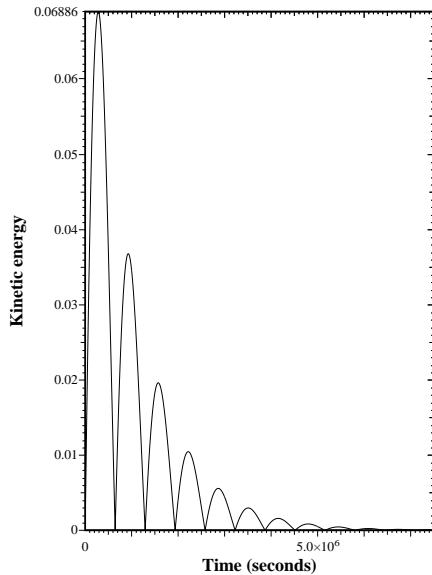


Figure 3.2: norme L^2 de u_2 (rigid-lid)

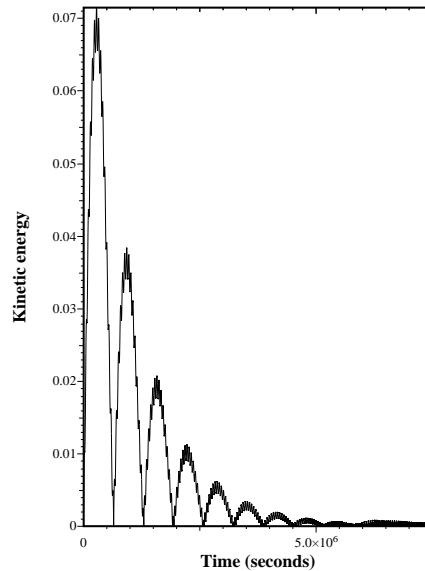


Figure 3.3: norme L^2 de u_2 (modèle complet)

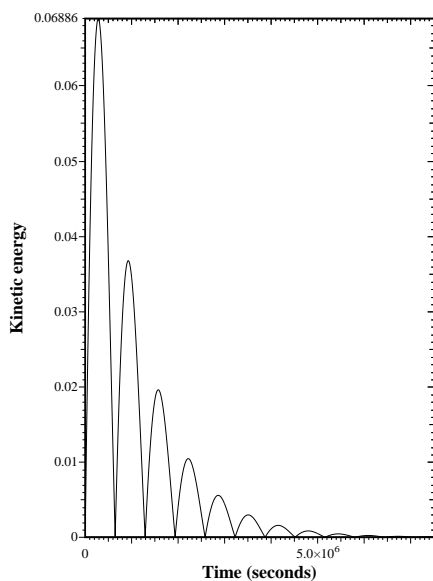


Figure 3.4: norme L^2 de u_1 (rigid-lid)

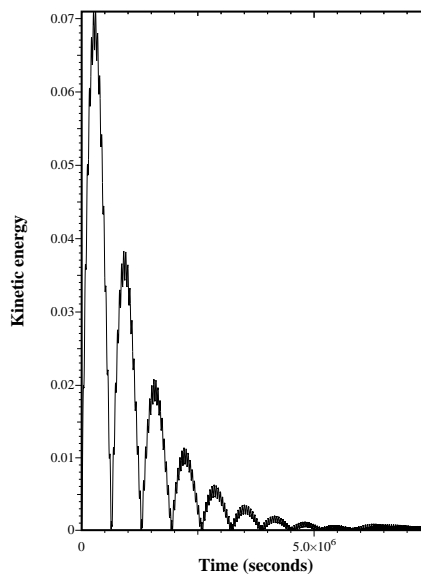


Figure 3.5: norme L^2 de u_1 (modèle complet)

Afin de vérifier que l'hypothèse de petites variations de la surface est valable, nous présentons sur la figure 3.6 les variations de la surface du fluide η_2 correspondant au modèle complet. Ces variations sont de l'ordre de quelques centimètres, ce qui est négligeable devant la hauteur d'eau totale. Cette observation nous permet de justifier l'application de l'hypothèse du rigid-lid dans ce cas.

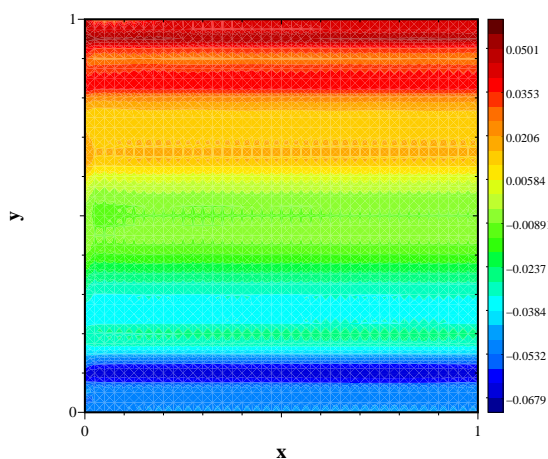


Figure 3.6: élévation de la surface (η_2) (modèle complet)

Puis nous représentons respectivement sur les figures 3.7 et 3.8 l'élévation η_1 de la couche inférieure pour le modèle rigid-lid et pour le modèle bi-couche complet.

On observe que l'amplitude de cette élévation est environ 100 fois plus grande que celle de la surface.

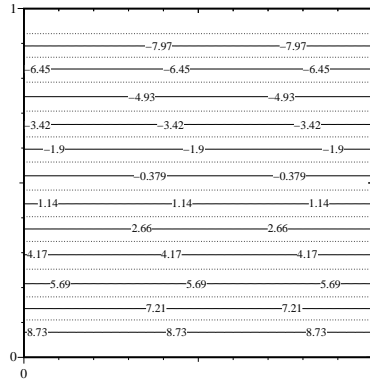


Figure 3.7: élévation η_1 , modèle rigid-lid

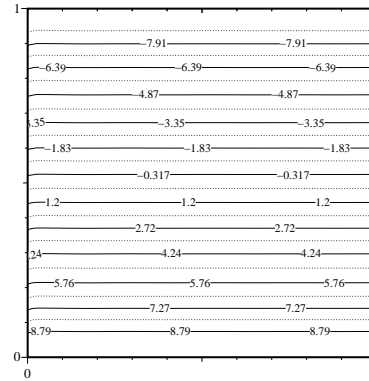


Figure 3.8: élévation η_1 , modèle complet

Ensuite nous représentons sur la figure 3.9 le champ reconstitué $H_2 \nabla p$ du modèle rigid-lid, que nous comparons au champ $-g \nabla \eta_2$ (figure 3.10) du modèle complet. Nous remarquons là encore que la forme des champs est similaire en direction et en amplitude (écart inférieur à 5%).

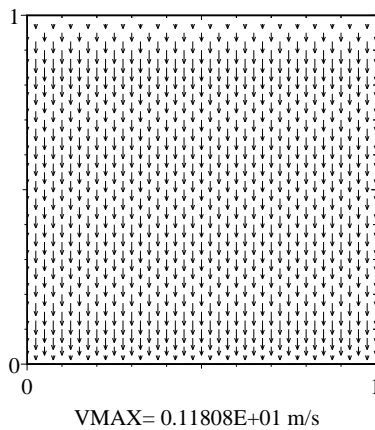


Figure 3.9: $H_2 \nabla p$ (rigid-lid)

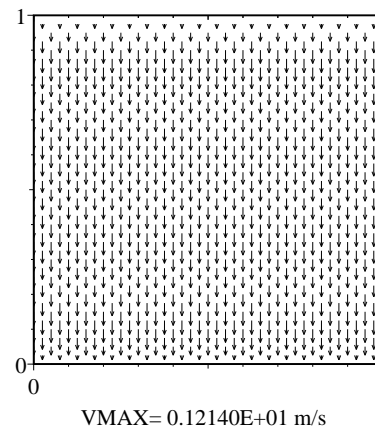


Figure 3.10: $-g \nabla \eta_2$ (modèle complet)

Comparaison du modèle rigid-lid avec le modèle à surface libre avec un fond variable

Considérons à présent le cas où le fond du domaine a une forme particulière :

$$H_1 = 100 + 10^{-4} \times x.$$

En utilisant le même argument que dans la section précédente, on voit que pour le modèle complet on obtient la même solution asymptotique ($t \rightarrow \infty$), c'est-à-dire

$$\left(\mathbf{u} = 0, \eta_2 = \frac{\theta}{g} + cste, \eta_1 = -\frac{\rho_2}{g'\rho_1}\theta + cste \right).$$

Par contre, on peut vérifier aisément que $\mathbf{u} = 0$ ne vérifie pas les équations stationnaires intervenant dans le modèle rigid-lid. En effet, dans ce cas, on aurait $g'\nabla\eta_1 = H_1\nabla p$. Or ici, $H_1\nabla p$ ne peut pas se mettre sous la forme d'un gradient, ce qui entraîne que $\mathbf{u} = 0$ n'est pas solution.

On représente respectivement sur les figures 3.11 et 3.12 l'évolution de la norme L^2 de la vitesse de la couche supérieure et inférieure, pour le modèle complet.

De même, pour le modèle rigid-lid, on donne respectivement sur les figures 3.13 et 3.14 l'évolution de la norme L^2 de la vitesse de la couche inférieure, ainsi qu'une représentation de cette vitesse. On observe alors que cette vitesse se stabilise vers une valeur constante non nulle alors que la vitesse de la couche supérieure s'annule (figure 3.15).

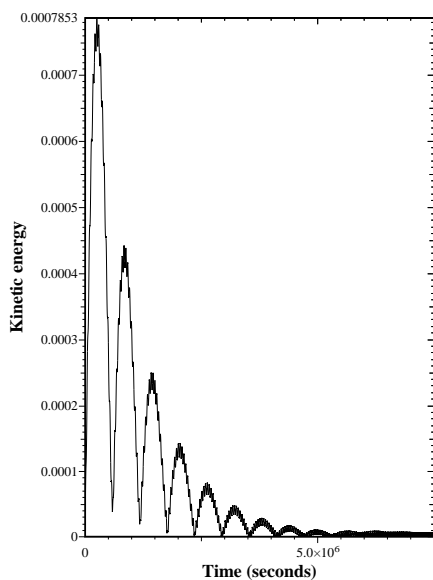


Figure 3.11: norme L^2 de u_2 (modèle complet)

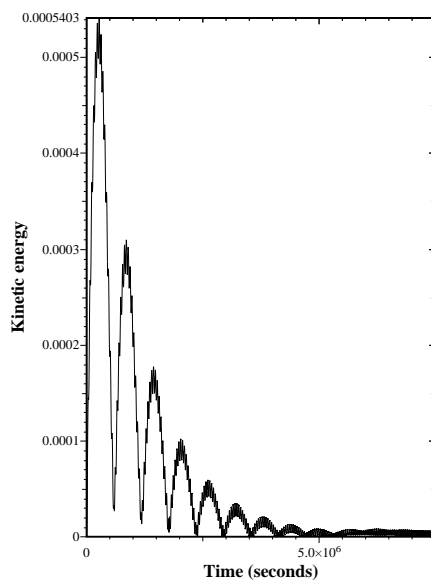


Figure 3.12: norme L^2 de u_1 (modèle complet)

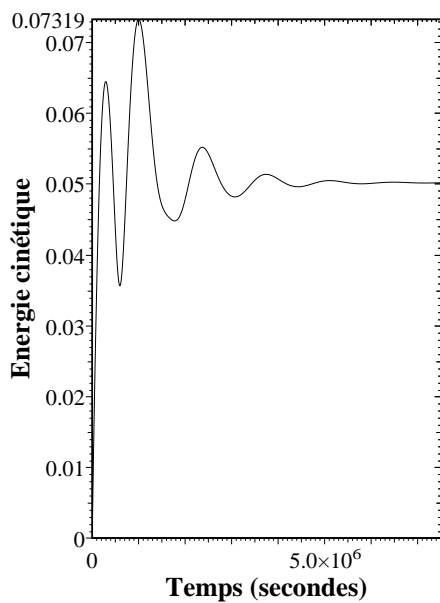


Figure 3.13: norme L^2 de u_1 (rigid-lid)

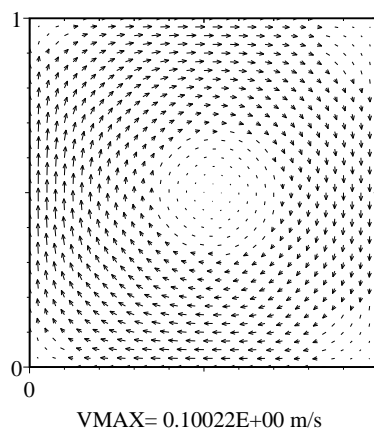
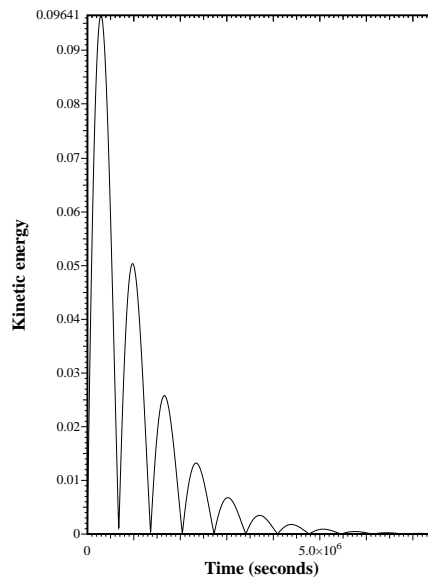


Figure 3.14: (u_1) (rigid-lid)

Figure 3.15: norme L^2 de u_2 (rigid-lid)

En conclusion, le modèle proposé dans ce chapitre apporte des gains de temps importants dans la simulation des écoulements de type shallow water bi-couche. Néanmoins, comme c'est souvent le cas dans de telles approches, l'hypothèse modifie en partie le comportement physique du modèle. Ceci est déjà le cas pour l'hypothèse du rigid-lid sur le modèle tri-dimensionnel, ce type d'écoulement ne pouvant être mis en mouvement par de simple variation de pression atmosphérique.

La vitesse résiduelle dans la couche inférieure (comparativement au modèle complet) est une conséquence directe de l'hypothèse du rigid-lid. C'est le résultat de l'action du forcing artificiel dû au multiplicateur de Lagrange qui ne s'écrit pas sous la forme d'un potentiel.

Il sera par ailleurs intéressant d'obtenir des résultats sur le modèle évitant la linéarisation de la contrainte et pour lequel nous ne pouvons pas a priori juger de l'impossibilité d'écrire $h_1 \nabla p$ sous la forme d'un gradient.

Partie II

Problèmes à frontière libre

Chapitre 4

Un modèle de Shallow Water à frontière libre

Ce travail a fait l'objet d'un article actuellement soumis [27].

Nous nous intéressons dans ce chapitre au comportement d'un fluide défini dans un domaine dépendant du temps. Le modèle que nous proposons peut être utilisé dans divers domaines tels que les problèmes d'interaction fluide-structure [26] ou la simulation de modèles de propagation (comme la simulation de la dérive d'une nappe de polluant [50] ou l'analyse de la propagation des feux de forêt [2]). Pour caractériser le mouvement du fluide, on considère un modèle de shallow water à frontière libre, l'évolution de la frontière étant définie par un opérateur frontière A (de tels opérateurs sont utilisés dans V.A. Solonikov [70] , J.T. Beale [3]). Cet opérateur permet de conserver un domaine assez régulier au cours du temps et d'utiliser ainsi les propriétés classiques des espaces de Sobolev. Pour résoudre le système d'équations bi-dimensionnelles (\mathcal{P}_v) du fluide, nous proposons un schéma lagrangien. En effet, un schéma d'Euler n'est pas adapté pour la discrétisation d'un problème de ce type puisque nous travaillons sur un domaine non cylindrique. De plus, la description lagrangienne permet de suivre chaque particule dans son mouvement et de prendre ainsi en compte les variations de la frontière. De nombreux papiers proposent de résoudre les équations de Navier-Stokes sur un domaine à frontière variable à l'aide de la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian method). Nous pouvons par exemple citer J. Donéa *et al.* [21] qui propose une étude de cette méthode. Notons également, sur ce sujet, notre récent travail [50] dans lequel nous nous intéressons à la résolution d'un problème de shallow water à frontière libre à l'aide de la méthode ALE et en considérant que l'opérateur frontière A est nul (le cas $A = 0$ est notamment considéré dans V.A. Solonikov [69]). Ce travail fait l'objet du dernier chapitre dans lequel on s'intéresse plus particulièrement à la description du comportement

d'une nappe de polluant à la surface de la mer.

Notre étude suit une série de papiers ([23], [24], [25], [26]), traitant de modèles définis sur un domaine dépendant du temps. Pour résoudre ce type de problèmes, ces papiers utilisent une méthode basée sur un théorème de point fixe. L'originalité de notre approche est de contourner l'utilisation d'un tel point fixe qui n'est ni naturelle ni économique d'un point de vue numérique. En effet, la donnée de (u_0, h_0) et des paramètres physiques du problème doivent suffire pour obtenir la solution du problème en suivant le mouvement de la frontière, sans qu'il ne soit besoin de supposer l'écoulement global connu et d'utiliser une méthode de point fixe.

Notre propos ici est de résoudre un problème de shallow water en utilisant un schéma linéaire simple où la dérivée totale est approchée par un schéma de différences finies auquel on ajoute un opérateur régularisant B dépendant du pas de la discrétisation et s'annulant quand le pas tend vers 0^+ [24]. Nous montrons que le problème continu est retrouvé lorsque le pas de temps tend vers 0, ce qui permet de montrer l'existence d'une solution. L'une des principales difficultés de ce passage à la limite sera de montrer que l'on retrouve les termes d'advection. La description lagrangienne est particulièrement bien adaptée pour décrire le mouvement de la frontière. L'opérateur B donne la compacité nécessaire pour justifier tout les calculs et passer à la limite dans les équations. De plus, cet opérateur donne un sens à la discrétisation puisque il permet de montrer qu'une particule ne sort pas du domaine d'un pas de temps à l'autre. La discrétisation lagrangienne nous permet également de contourner les difficultés liées aux termes non linéaires (advection) et nous amène ainsi à résoudre un problème stationnaire linéaire classique.

4.1 Position du problème

À l'instant t , le fluide occupe un domaine borné Ω_t de \mathbb{R}^2 de frontière γ_t . On note γ_0 la frontière du fluide à l'instant initial. En supposant que γ_0 est assez régulière, on définit la frontière "déformée" à l'instant t de la façon suivante : $\gamma_t := \{x = X + d(X, t), X \in \gamma_0\}$, où d correspond au déplacement $d(X, t) = \Gamma(t, 0, X) - X$, où $\Gamma(t, s, x)$ fait référence à l'écoulement lagrangien, i.e. la position à l'instant t de la particule située à la position x au temps s . Cette déformation a un sens si l'écoulement lagrangien correspondant $X \mapsto \Gamma(t, 0, X) = X + d(X, t)$ est un difféomorphisme de γ_0 dans $\gamma_t := \Gamma(t, 0, \gamma_0)$, donc tout ce qui suit est justifié tant que $\det \mathcal{J}(X, t) \neq 0$ sur γ_0 , (où $\mathcal{J}(X, t)$ est matrice jacobienne associée à la transformation $X \mapsto \Gamma(t, 0, X)$), et Γ est une injection sur γ_0 . On définit ainsi $\Gamma(0, t, x)$

par $\Gamma(0, t, \cdot) = \Gamma(t, 0, \cdot)^{-1}$ et $\Gamma(t, s, x) = \Gamma(t, 0, \Gamma(0, s, x))$. Grâce à l'opérateur A , nous verrons par la suite que d est borné dans $W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\gamma_0))$ par une borne dépendant linéairement des données initiales. Ainsi, si on considère des données petites, Γ vérifie les conditions précédentes et la déformation a un sens (voir P.G. Ciarlet [15], B. Desjardins *et al.* [20]).

On pose $Q = \cup_{t \in (0, T)} \Omega_t \times \{t\}$, $\Sigma = \cup_{t \in (0, T)} \gamma_t \times \{t\}$ et n la normale unitaire extérieure à Ω_t sur γ_t . On suppose que l'évolution du fluide est caractérisée par le problème de shallow water suivant :

$$(\mathcal{P}_v) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla h = 0 & \text{dans } Q, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) = 0 & \text{dans } Q, \end{cases}$$

où u représente la vitesse, h la hauteur du fluide et μ le coefficient de diffusion. Afin d'établir les conditions aux limites, on introduit la description lagrangienne de la vitesse, $U : \gamma_0 \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(X, T) \mapsto u(\Gamma(t, 0, X), t)$. Sur la frontière γ_0 on a :

$$U(X, t) = u(X + d(X, t), t) = \frac{\partial d(X, t)}{\partial t}, \quad (4.1)$$

et on définit le mouvement de la frontière γ_t par une condition sur la composante normale du tenseur des contraintes σ :

$$\sigma(X + d(X, t), t) \cdot n(X + d(X, t), t) | \det \mathcal{J}|(X, t) = A(\partial U(X, t) / \partial t) \text{ sur } \gamma_0 \times (0, T), \quad (4.2)$$

où A est un opérateur défini sur γ_0 qui prend en compte les efforts appliqués sur le fluide à la frontière. On suppose que A est un opérateur de Laplace-Beltrami qui assure que $\int_{\gamma_0} A(v)v = \int_{\gamma_0} A^{1/2}(v)A^{1/2}(v) = \|v\|_{H^2(\gamma_0)}^2$ (pour plus de détails sur ce type d'opérateurs voir V.A. Solonikov [70] et R. Dautrey, J.L. Lions [18]).

On complète ces équations par des conditions initiales :

$$h_0 \log h_0 \in L^1(\Omega_0), \quad h_0 \geq 0, \quad (4.3)$$

$$u_0 \in H^{5/2}(\Omega_0). \quad (4.4)$$

Comme P.L. Lions dans [43] ou P. Orenca dans [63], on introduit des conditions de données petites :

$$M_0 = \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + \int_{\Omega_0} h_0 \log h_0 + \frac{1}{e} \operatorname{mes}(\cup_{t \in (0, T)} \Omega_t) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2(\gamma_0)}^2$$

$$< \beta \min \left(\left(\frac{2\mu}{C_{GN}} \right)^2 ; \left(\frac{2\alpha}{TC_{GN}} \right)^2 \right), \quad (4.5)$$

$$\|u_0\|_{L^2(\Omega_0)} < \min \left(2\frac{\mu}{C_{GN}} ; 2\frac{\alpha}{C_{GN}T} \right), \quad (4.6)$$

où α et β sont deux nombres positifs tels que $\alpha + \beta = 1/2$ et C_{GN} est la meilleure constante de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

$$\|u\|_{L^4(\Omega_t)}^2 \leq \|u\|_{L^2(\Omega_t)} \|u\|_{H^1(\Omega_t)}. \quad (4.7)$$

4.2 Résultats préliminaires

4.2.1 Éstimations d'énergie

Dans cette section nous allons établir et prouver des résultats de compacité pour le problème (\mathcal{P}_v) sous des hypothèses de données petites.

Lemme 4.1. *Sous les hypothèses (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6), et pour un temps fini T , h , u , et d vérifient :*

$$u \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)), \quad (4.8)$$

$$h \log h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t)), \quad h \geq 0, \quad (4.9)$$

$$U \in L^\infty(0, T; H^2(\gamma_0)), \quad (4.10)$$

$$d \in W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0)), \quad \det \mathcal{J} \neq 0, \quad (4.11)$$

$$h \in L^2(Q). \quad (4.12)$$

Démonstration. On multiplie l'équation $(\mathcal{P}_v)_1$ par u et on utilise la formule de Leibniz. On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 - \frac{1}{2} \int_{\gamma_t} u^2 u \cdot n - \frac{1}{2} \int_{\Omega_t} u^2 \operatorname{div} u + \frac{1}{2} \int_{\gamma_t} u^2 u \cdot n \\ & + \mu \|Du\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \int_{\Omega_t} \nabla h u - \mu \int_{\gamma_t} \frac{\partial u}{\partial n} u = 0. \end{aligned}$$

Le terme $\int_{\Omega_t} \nabla h u$ est traité comme suit :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} \nabla h u &= \int_{\Omega_t} \nabla \log h h u \\
&= - \int_{\Omega_t} \log h \operatorname{div} (h u) + \int_{\gamma_t} h \log h u \cdot n \\
&= \int_{\Omega_t} \log h \frac{\partial h}{\partial t} + \int_{\gamma_t} h \log h u \cdot n \\
&= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (h \log h - h) + \int_{\gamma_t} h \log h u \cdot n \\
&= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h \log h - \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h - \int_{\gamma_t} h \log h u \cdot n + \int_{\gamma_t} h u \cdot n + \int_{\gamma_t} h \log h u \cdot n.
\end{aligned}$$

Ainsi, en notant que l'équation de continuité donne $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h = 0$, on obtient

$$\int_{\Omega_t} \nabla h u = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h \log h + \int_{\gamma_t} h u \cdot n.$$

On estime $\int_{\Omega_t} u^2 \operatorname{div} u$ à l'aide de l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg :

$$\int_{\Omega_t} u^2 \operatorname{div} u \leq C_{GN} \|u\|_{L^2(\Omega_t)} \|u\|_{H^1(\Omega_t)}^2.$$

Donc, en écrivant les termes de frontière $\int_{\gamma_t} h u \cdot n - \mu \int_{\gamma_t} \frac{\partial u}{\partial n} u = \int_{\gamma_t} u \sigma \cdot n$ sur γ_0 et en utilisant les conditions aux limites (4.2), on arrive à l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \mu \|Du\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} h \log h + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} |A^{1/2} U|^2 \leq C_{GN} \|u\|_{L^2(\Omega_t)} \|u\|_{H^1(\Omega_t)}^2.$$

Ensuite, on intègre sur $(0, t)$, $t \in (0, T)$. On écrit $C_{GN} \int_0^t \|u\|_{L^2(\Omega_t)} (\|u\|_{L^2(\Omega_t)}^2 + \|Du\|_{L^2(\Omega_t)}^2) \leq C_{GN} \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))} \|Du\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_t))}^2 + C_{GN} T \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))}^3$. De plus, en notant que $\int_{\Omega_t} h(t) \log h(t) \geq -\operatorname{meas}(\cup_{t \in (0,T)} \Omega_t)/e$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(\alpha - \frac{C_{GN} T}{2} \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))} \right) \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))}^2 + \beta \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))}^2 + \frac{1}{2} \|U\|_{L^\infty(0,t;H^2(\gamma_0))} \\
&+ \left(\mu - \frac{C_{GN}}{2} \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))} \right) \|u\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega_t))}^2 + \|h \log h\|_{L^\infty(0,t;L^1(\Omega_t))} \leq \frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 \\
&+ \int_{\Omega_0} h_0 \log h_0 + \frac{1}{e} \operatorname{meas}(\cup_{t \in (0,T)} \Omega_t) + \frac{1}{2} \|u_0\|_{H^2(\gamma_0)}^2 = M_0, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

avec $\alpha + \beta = 1/2$. Nous devons vérifier à présent que $\alpha - C_{GN} T/2 \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))} > 0$ et $\mu - C_{GN}/2 \|u\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega_t))} > 0$. Pour montrer ce dernier point, on rappelle que u_0

vérifie $\|u_0\|_{L^2(\Omega_0)} < \min(2\mu/C_{GN}; 2\alpha/(C_{GN}T))$. En dimension fini (au moins), il existe $t_1 > 0$ tel que pour tout $t \in]0, t_1[$, $\|u(t)\|_{L^2(\Omega_t)} < \min(2\mu/C_{GN}; 2\alpha/(C_{GN}T))$. En supposant qu'il existe t_1 tel que $\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega_{t_1})} = \min(2\mu/C_{GN}; 2\alpha/(C_{GN}T))$, par exemple $\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega_{t_1})} = 2\mu/C_{GN}$, alors l'estimation (4.13) au temps t_1 permet d'écrire

$$\beta \|u\|_{L^\infty(0,t_1;L^2(\Omega_{t_1}))}^2 = \beta \left(\frac{2\mu}{C_{GN}} \right)^2 \leq M_0,$$

ce qui contredit (4.5). On obtient une contradiction similaire si $\|u(t_1)\|_{L^2(\Omega_{t_1})} = 2\alpha/(C_{GN}T)$, ce qui prouve l'estimation (4.8)–(4.10).

Remarque 4.2. De la relation (4.1) et de l'estimation sur U , on déduit que $d \in W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0))$ et la frontière est ainsi de classe C^1 . Donc, pour tout t , on peut donner un sens à la trace d'une fonction de $H^1(\Omega_t)$. Notons également que la borne sur d permet d'assurer que $\det \mathcal{J} \neq 0$ et de donner un sens à la déformation.

Pour obtenir la borne L^2 sur h , on introduit l'opérateur gradient $\bar{\nabla}$ dans Q et on pose $W = \sum_{i=1}^4 w_i$ avec

$$\begin{aligned} w_1 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}, 0 \right), & w_2 &= (u \nabla u_1, u \nabla u_2, 0), \\ w_3 &= \mu \left(-\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial x_1} - \frac{\partial \operatorname{rot} u}{\partial x_2}, -\frac{\partial \operatorname{div} u}{\partial x_2} + \frac{\partial \operatorname{rot} u}{\partial x_1}, 0 \right), & w_4 &= (0, 0, \operatorname{div}(hu)). \end{aligned}$$

Avec ces notations, (\mathcal{P}_v) peut être réécrit sous la forme $\bar{\nabla} h + W = 0$. On a $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$, donc $w_1 \in H^{-1}(Q)$ et $w_3 \in H^{-1}(Q)$. De plus, $w_2 \in L^{4/3}(Q) \subset H^{-1}(Q)$, puisque $u \in L^4(Q) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$. D'autre part $h \log h \in L^\infty(0, T; L^1(\Omega_t))$, donc $h \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_t))$ et $\operatorname{div}(hu) = -\frac{\partial h}{\partial t} \in H^{-1}(Q)$, ce qui permet de déduire que $w_4 \in H^{-1}(Q)$. Ainsi,

$$\bar{\nabla} h = -W \in H^{-1}(Q)$$

et donc $h \in L^2(Q)$ si $h \in L_{loc}^2(Q)$. La borne sur h dans $L_{loc}^2(Q)$ peut être obtenue comme dans P.L. Lions [42]. \square

4.2.2 Régularisation du problème

On approche le problème (\mathcal{P}_v) en régularisant l'équation de continuité avec le terme δh^2

$$(\mathcal{P}_v^\delta) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla h = 0 & \text{dans } \Omega_t, \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(hu) + \delta h^2 = 0 & \text{dans } \Omega_t, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites précédentes (4.2). Cette régularisation est un argument nous permettant de construire les solutions approchées et en particulier de passer à la limite dans les équations discrétisées.

Remarque 4.3. La borne sur h dans $L^2(Q)$ obtenue dans le lemme 4.1 permet de passer à la limite sur δ dans (\mathcal{P}_v^δ) et ainsi de retrouver les solutions de (\mathcal{P}_v) .

En vu du schéma numérique et afin de préserver la positivité de h , on renormalise l'équation de continuité comme suit : $\partial \log h / \partial t + u \nabla \log h + \operatorname{div} u + \delta h = 0$. Ainsi (\mathcal{P}_v^δ) peut être reformulé sous la forme :

$$(\mathcal{P}_v^\delta) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + \nabla h = 0 & \text{dans } \Omega_t, \\ \frac{\partial \log h}{\partial t} + u \nabla \log h + \operatorname{div}(u) + \delta h = 0 & \text{dans } \Omega_t. \end{cases}$$

Notons que cette renormalisation a un sens puisque $h \in L^2(Q)$ et $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$ (R.J. Di Perna et P.L. Lions [66], P.L. Lions, Lemme 2.3 [42]).

4.3 Discrétisation lagrangienne

On résout les équations du fluide en utilisant un schéma lagrangien qui est particulièrement bien adapté puisque il permet de suivre chaque particule dans son mouvement et de prendre ainsi en compte les variations de la frontière de façon naturelle. Dans un premier temps, on propose une discrétisation en temps du domaine et on définit les domaines approchés Ω_k . Ensuite, on introduit les problèmes stationnaires résolus sur chaque Ω_k . Comme on l'a mentionné dans l'introduction, pour passer à la limite dans les équations, on introduit dans la discrétisation un opérateur $\Delta^\alpha B u$, où $0 < \alpha < 1$, tel que $D(B) \equiv H^3(\Omega_t)$ pour presque tout $t \in (0, T)$ et $\Delta t^\alpha B u \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ au sens des distributions.

4.3.1 Discrétisation lagrangienne du domaine

Pour le mouvement de la frontière, on considère la discrétisation suivante : pour tout $k \in [1, \dots, m]$, avec $\Delta t = T/m$, on pose

$$d_0(X) = 0 \tag{4.14}$$

et

$$d_k(X) = d_{k-1}(X) + u_{k-1}(X + d_{k-1}(X))\Delta t, \tag{4.15}$$

$$\Gamma_k(X) = X + d_k(X), \quad (4.16)$$

où u_k est défini dans la section qui suit. De la même façon, on considère les courbes caractéristiques définies par l'équation $dx(t)/dt = u(x(t), t)$ qui est discrétisée en utilisant la relation

$$x_{k+1} = x_k + u_k(x_k)\Delta t, \quad k \in \{0, \dots, m-1\}, \quad \Delta t = \frac{T}{m}.$$

Par récurrence, on construit m domaines approchés $\Omega_k = \{x_k \in \mathbb{R}^2 / x_k = x_{k-1} + u_{k-1}(x_{k-1})\Delta t, x_{k-1} \in \Omega_{k-1}\}$. On pose :

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{\Delta t} &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times]\Delta t, T[/ x(t) = x_k, \\ &\quad t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[, x_i \in \Omega_i, k \in \{1, \dots, m-1\}\} \\ \partial\widehat{Q}_{\Delta t} &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \times]\Delta t, T[/ y(t) = \Gamma_k(X), \\ &\quad t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[, X \in \gamma_0, k \in \{1, \dots, m-1\}\} \\ \widetilde{Q}_{\Delta t} &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times]\Delta t, T[/ x(t) = x_k + (t - k\Delta t)u_k(x_k), \\ &\quad t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[, x_i \in \Omega_i, k \in \{1, \dots, m-1\}\} \\ \partial\widetilde{Q}_{\Delta t} &= \{(y, t) \in \mathbb{R}^2 \times]\Delta t, T[/ y(t) = \Gamma_k(X) + (t - k\Delta t)u_k(\Gamma_k(X)), \\ &\quad t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[, X \in \gamma_0, k \in \{1, \dots, m-1\}\}. \end{aligned}$$

4.3.2 Problème approché

On note $\tilde{x}_k = x_{k-1}$ la position dans Ω_{k-1} de la particule située en x_k au temps $t = k\Delta t$. On approche la dérivée lagrangienne dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement par : $(u_k - \tilde{u}_{k-1})/\Delta t + \Delta t^\alpha B u_k$, où $t_k = k\Delta t$, $u_k = u(x_k, t_k)$, $\tilde{u}_{k-1} = u(\tilde{x}_k, t_{k-1}) = u(x_k - \tilde{u}_{k-1}\Delta t, t_{k-1})$, $0 < \alpha < 1$, B est un opérateur tel que $D(B) = H^3(\Omega_k)$ et $\Delta t^\alpha B u_k \rightarrow 0$ au sens des distributions quand $\Delta t \rightarrow 0^+$. On rajoute à l'opérateur $\Delta t^\alpha B u_k$ de bonnes conditions aux limites pour s'assurer que $\Delta t^\alpha \int_{\Omega_k} B u_k u_k = \Delta t^\alpha \|u_k\|_{H^3(\Omega_k)}^2$.

Remarque 4.4. La condition sur la composante normale du tenseur des contraintes est perturbée par l'approximation de la dérivée lagrangienne, cette condition devient ainsi :

$$\begin{aligned} &\sigma(X + d(X, t), t) \cdot n(X + d(X, t), t) | \det \mathcal{J}|(X, t) \\ &+ \Delta t^\alpha \text{Tr}(Bu)(X + d(X, t), t) = A(\partial U(X, t)/\partial t) \text{ sur } \gamma_0 \times (0, T), \end{aligned} \quad (4.17)$$

En utilisant ces notations, on considère le problème stationnaire suivant :

$$(\mathcal{P}_v^\delta)_k \left\{ \begin{array}{ll} u_k - \mu \Delta t \Delta u_k + \Delta t \nabla h_k + \Delta t^{1+\alpha} B u_k = \tilde{u}_{k-1} & \text{dans } \Omega_k, \\ \log h_k + \Delta t \operatorname{div} u_k + \delta \Delta t h_k = \log \tilde{h}_{k-1} & \text{dans } \Omega_k, \\ \sigma_k(\Gamma_k(X)) \cdot n_k(\Gamma_k(X)) | \det \mathcal{J}_k|(X) + \Delta t^\alpha \operatorname{Tr}(B u_k)(\Gamma_k(X)) \\ = A \left(\frac{u_k(\Gamma_k(X)) - u_{k-1}(\Gamma_{k-1}(X))}{\Delta t} \right) & \text{sur } \gamma_0, \\ + \text{des conditions aux limites pour l'opérateur } \Delta t^\alpha B u_k, & \end{array} \right.$$

où \mathcal{J}_k est la matrice jacobienne associée à la transformation $X \mapsto \Gamma_k(X) = X + d_k(X)$, permettant de passer de γ_0 à γ_k . Nous verrons dans la section suivante que $\sup_{0 \leq k \leq m} \|d_k\|_{W^{1,\infty}(\gamma_0)} \leq \sqrt{2K_\alpha T}$, où K_α dépend linéairement des données initiales. Donc, si on considère des données petites, on déduit que $\det \mathcal{J}_k \neq 0$ et Γ_k est une injection sur γ_0 , et cette transformation a un sens. De la même façon, on pose J_k la matrice jacobienne associée à la transformation $x_{k+1} = x_k + \Delta t u_k(x_k)$ permettant de passer de Ω_k à Ω_{k+1} :

$$J_k = \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_{k1}} & \Delta t \frac{\partial u_{k1}}{\partial x_{k2}} \\ \Delta t \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_{k1}} & 1 + \Delta t \frac{\partial u_{k2}}{\partial x_{k2}} \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas, nous verrons que le terme $\Delta t^\alpha B u_k$ nous permet d'établir que $\Delta t D u_k$ est borné dans $L^\infty(\Omega_k)$ par une borne qui dépend proportionnellement des données initiales et $\Delta t^{(1-\alpha)/2}$. Donc si on choisit Δt assez petit, $\det J_k > 0$ et la transformation $x_{k+1} = x_k + \Delta t u_k(x_k)$ a un sens.

4.4 Résultats de compacité

Nous allons maintenant établir et montrer quelques résultats de compacité sur les solutions stationnaires des M problèmes $(\mathcal{P}_v^\delta)_k$, ce qui nous permettra de passer à la limite dans la section (4.5). Pour mettre en œuvre ces estimations, on introduit la suite M_k , ($k=1, \dots, m$), définie par récurrence par $M_1 = D_0$ et $M_k = M_{k-1} + (2\mu \Delta t + C_2 \Delta t^{1-2\alpha} \Delta t) M_{k-1}$, où $D_0 = \int_{\Omega_0} h_0 | \det J_0 | + 1/2 \int_{\Omega_0} u_0^2 | \det J_0 | + 1/2 \|A^{1/2}(u_0 \circ \Gamma_0)\|_{L^2(\gamma_0)}^2$ et C_2 est défini dans la preuve du lemme suivant. Notons que la suite $(M_m)_{m \geq 1}$ (où $m = T/\Delta t$) converge vers $D_0 e^{\mu T}$ quand $m \rightarrow +\infty$ ($\Delta t \rightarrow 0^+$). Ainsi pour tout $\Delta t < \alpha$, il existe K_α tel que $M_m < K_\alpha$.

Lemme 4.5. *Si Δt est choisi assez petit ($\Delta t < \alpha$) et si on fait l'hypothèse :*

$$K_\alpha < 2 \left(\frac{\mu}{C_{GN}} \right)^2, \quad (4.18)$$

on obtient

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \|u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \leq 2 \frac{\mu}{C_{GN}}, \quad \sum_{i=1}^k \|u_i - u_{i-1}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq 2 \left(\frac{\mu}{C_{GN}} \right)^2,$$

$$\Delta t^\alpha \sum_{i=1}^k \Delta t \|u_i\|_{H^3(\Omega_i)}^2 \leq \mathbb{C}, \quad \sum_{i=1}^k \Delta t \|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \leq \mathbb{C}',$$

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \|h_i\|_{L^1(\Omega_i)} \leq 2 \left(\frac{\mu}{C_{GN}} \right)^2, \quad \sum_{i=1}^k \Delta t \|h_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \leq \mathbb{C}''(\delta),$$

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \|u_i \circ \Gamma_i\|_{H^2(\gamma_0)} \leq \sqrt{2K_\alpha} \leq 2 \frac{\mu}{C_{GN}}, \quad \sum_{i=1}^k \|u_i \circ \Gamma_i - u_{i-1} \circ \Gamma_{i-1}\|_{H^2(\gamma_0)}^2 \leq 2 \left(\frac{\mu}{C_{GN}} \right)^2,$$

où \mathbb{C} , \mathbb{C}' et $\mathbb{C}''(\delta)$ sont indépendants de Δt .

Démonstration. On donne les estimations pour $k = 1$, $k = 2$ et on généralise pour tout k .

estimations pour $k = 1$

On multiplie l'équation de conservation de la quantité de mouvement du système (\mathcal{P}_v^δ) par u_1 et on intègre sur Ω_1 . En prenant en compte les conditions aux limites décrites dans la section précédente (équation (4.17)), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \mu \Delta t \|Du_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \Delta t \int_{\Omega_1} h_1 \operatorname{div} u_1 + \Delta t^{1+\alpha} \|u_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 \\ & + \int_{\gamma_0} [A(u_1 \circ \Gamma_1) - A(u_0 \circ \Gamma_0)] u_1 \circ \Gamma_1 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \tilde{u}_0^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} u_0^2 |\det J_0|. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_0} [A(u_1 \circ \Gamma_1) - A(u_0 \circ \Gamma_0)] u_1 \circ \Gamma_1 = \int_{\gamma_0} |A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1)|^2 - \int_{\gamma_0} A^{\frac{1}{2}}(u_0 \circ \Gamma_0) A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1) \\ & = \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1 - u_0 \circ \Gamma_0)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 - \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_0 \circ \Gamma_0)\|_{L^2(\gamma_0)}^2. \end{aligned}$$

Le terme $-\Delta t \int_{\Omega_1} h_1 \operatorname{div} u_1$ est estimé à l'aide de l'équation de continuité :

$$\begin{aligned} -\Delta t \int_{\Omega_1} h_1 \operatorname{div} u_1 &= \int_{\Omega_1} h_1 \log \frac{h_1}{\tilde{h}_0} - \delta \Delta t \int_{\Omega_1} h_1^2 \\ &= \int_{\Omega_1} h_1 \log \frac{h_1}{\tilde{h}_0} + \delta \Delta t \|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2, \end{aligned}$$

et on écrit :

$$\int_{\Omega_1} h_1 \log \frac{h_1}{\tilde{h}_0} + \delta \Delta t \|\nabla h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \geq \int_{\Omega_1} (h_1 - \tilde{h}_0) + \delta \Delta t \|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2.$$

De plus l'équation de continuité montre que $h_1 = \tilde{h}_0 e^{-\Delta t \operatorname{div}(u_1) - \delta \Delta t h_1} \geq 0$. Finalement on en déduit l'inéquation suivante :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \|u_1 - \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \mu \Delta t \|Du_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \|h_1\|_{L^1(\Omega_1)} \\ &+ \delta \Delta t \|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1 - u_0 \circ \Gamma_0)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 \\ &\quad + \Delta t^{1+\alpha} \|u_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 \leq D_0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Puisque $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$, on a $H^3(\Omega_1) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega_1)$, donc il existe une constante \mathbb{K} telle que

$$\Delta t \|u_1\|_{W^{1,\infty}(\Omega_1)} \leq \mathbb{K} \Delta t \|u_1\|_{H^3(\Omega_1)} \leq \mathbb{K} \Delta t^{\frac{1-\alpha}{2}} \sqrt{2} \frac{\mu}{C_{GN}}.$$

Cette estimation montre que l'on peut toujours choisir Δt assez petit tel que $\det J_1 > 0$ et la transformation $x_2 = x_1 + u_1 \Delta t$ a un sens.

estimations pour $k = 2$

De la même façon, on a :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|u_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \frac{1}{2} \|u_2 - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \mu \Delta t \|Du_2\|_{L^2(\Omega_1)}^2 - \Delta t \int_{\Omega_2} h_2 \operatorname{div} u_2 + \Delta t^{1+\alpha} \|u_2\|_{H^3(\Omega_2)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_2 \circ \Gamma_2)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_2 \circ \Gamma_2 - u_1 \circ \Gamma_1)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 \\ &\quad \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} u_1^2 |\det J_1| + \frac{1}{2} \|A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1)\|_{L^2(\gamma_0)}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

L'inégalité de Gagliardo-Nirenberg conduit à :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_1} u_1^2 |\det J_1| \leq \frac{1}{2} \|u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{\Delta t}{2} C_{GN} \|u_1\|_{L^2(\Omega_1)} \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2$$

$$+ \frac{K^2}{2} \Delta t^2 \|u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 \|u_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2, \quad (4.21)$$

puisque $H^3 \subset W^{1,\infty}$ et $\det J_1 = 1 + \Delta t \operatorname{div} u_1 + \Delta t^2 \left(\frac{\partial u_{21}}{\partial x_{21}} \frac{\partial u_{22}}{\partial x_{22}} - \frac{\partial u_{22}}{\partial x_{21}} \frac{\partial u_{21}}{\partial x_{22}} \right)$. Pour traiter le terme $-\Delta t \int_{\Omega_2} h_2 \operatorname{div} u_2$, on écrit

$$\begin{aligned} -\Delta t \int_{\Omega_2} h_2 \operatorname{div} u_2 &= \int_{\Omega_2} h_2 \log \frac{h_2}{\tilde{h}_1} - \delta \Delta t \int_{\Omega_2} h_2^2 \\ &= \int_{\Omega_2} h_2 \log \frac{h_2}{\tilde{h}_1} + \delta \Delta t \|h_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2, \end{aligned}$$

et on obtient :

$$\int_{\Omega_2} h_2 \log \frac{h_2}{\tilde{h}_1} + \delta \Delta t \|h_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \geq \int_{\Omega_2} (h_2 - \tilde{h}_1) + \delta \Delta t \|h_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2,$$

de plus

$$\int_{\Omega_1} h_1 |\det J_1| \leq \int_{\Omega_1} h_1 + \Delta t \int_{\Omega_1} h_1 \operatorname{div} u_1 + K^2 \Delta t^2 \|h_1\|_{L^1(\Omega_1)} \|u_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2, \quad (4.22)$$

avec

$$\Delta t \int_{\Omega_1} h_1 \operatorname{div} u_1 \leq \|h_1\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega_1)}} \|\Delta t \operatorname{div} u_1\|_{L_{\mathcal{A}(\Omega_1)}},$$

où $L_{\mathcal{A}(\Omega_1)}$ est l'espace de Orlicz défini par la N-fonction $\mathcal{A}(t) = \exp(t^2) - 1$ et $L_{\mathcal{A}'(\Omega_1)}$ son dual défini par la N-fonction $\mathcal{A}'(t)$ équivalent à $t\sqrt{\log^+(t)}$. Puisque $\Delta t^{1+\alpha} \|\operatorname{div} u_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}^2 \leq K D_0$, on a si Δt est assez petit

$$\int_{\Omega_1} \mathcal{A}(\Delta t \operatorname{div} u_1) = 1 + \Delta t^2 \|\operatorname{div} u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \tau(\Delta t^{2-2\alpha}) - 1.$$

Donc, puisque

$$\begin{aligned} \|h_1\|_{L_{\mathcal{A}'(\Omega_1)}} &\leq \|h_1\|_{L^1(\Omega_1)}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_1} h_1 \log^+ h_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|h_1\|_{L^1(\Omega_1)} + \frac{1}{4} \int_{\Omega_1} h_1 \log^+ h_1 \\ &\leq \|h_1\|_{L^1(\Omega_1)} + \frac{1}{4} \|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \Delta t \int_{\Omega_1} h_1 \operatorname{div} u_1 &\leq C_1 \Delta t^2 \|u_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 \|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^{\frac{3}{2}} + C_2 \Delta t^{2-2\alpha} \|h_1\|_{L^1(\Omega_1)} \\ &\quad + C_3 \Delta t^{2-2\alpha} \|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ainsi, des relations (4.19) et (4.20)-(4.23), puis en ajoutant $\mu\Delta t\|u_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2$, on déduit facilement l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \frac{1}{2}\|u_1 - \tilde{u}_0\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \frac{1}{2}\|u_2 - \tilde{u}_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \Delta t \left(\mu - \frac{C_{GN}}{2}\|u_1\|_{L^2(\Omega_1)} \right) \|u_1\|_{H^1(\Omega_1)}^2 \\ & + \mu\Delta t\|Du_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 + \|h_2\|_{L^1(\Omega_2)} + \Delta t(\delta - C_3\Delta t^{1-2\alpha})\|h_1\|_{L^2(\Omega_1)}^2 + \delta\Delta t\|h_2\|_{L^2(\Omega_2)}^2 \\ & + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}(u_1 \circ \Gamma_1 - u_0 \circ \Gamma_0)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}(u_2 \circ \Gamma_2 - u_1 \circ \Gamma_1)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 + \Delta t^{1+\alpha}A_1\|u_1\|_{H^3(\Omega_1)}^2 \\ & + \Delta t^{1+\alpha}\|u_2\|_{H^3(\Omega_2)}^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}(u_2 \circ \Gamma_2)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 \leq D_0 + 2\mu\Delta tD_0 + C_2\Delta t^{1-2\alpha}\Delta tD_0 = M_2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A_i &= 1 - \Delta t^{1-\alpha}C_1\|h_i\|_{L^2(\Omega_i)}^{\frac{3}{2}} - \Delta t^{1-\alpha}K^2\|h_i\|_{L^1(\Omega_i)} - \Delta t^{1-\alpha}\frac{K^2}{2}\|u_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \\ & - \Delta t^{1-\alpha}K^2\|A^{\frac{1}{2}}u_i\|_{L^2(\gamma_i)}^2, \text{ avec } i = 1, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Puisque on a la condition (4.18), $\mu - C_{GN}/2\|u_1\|_{L^2(\Omega_1)} > 0$. De plus pour Δt assez petit $\delta - C_3\Delta t^{1-2\alpha} > 0$, $A_1 > 0$ et le terme du membre de gauche est positif. Notons aussi les propriétés induites par l'opérateur $\Delta t^\alpha B$ qui nous permet de montrer que $\det J_2 > 0$.

estimations pour tout k

De la même façon, on déduit la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u_k\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \|u_i - \tilde{u}_{i-1}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\mu - \frac{C_{GN}}{2}\|u_i\|_{L^2(\Omega_i)} \right) \Delta t\|u_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2 \\ & + \mu\Delta t\|Du_k\|_{L^2(\Omega_k)}^2 + \|h_k\|_{L^1(\Omega_k)} + (\delta - C_3\Delta t^{1-2\alpha})\sum_{i=1}^{k-1} \Delta t\|h_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \delta\Delta t\|h_k\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \\ & + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^k \|A^{\frac{1}{2}}(u_i \circ \Gamma_i - u_{i-1} \circ \Gamma_{i-1})\|_{L^2(\gamma_0)}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} A_i\Delta t^{1+\alpha}\|u_i\|_{H^3(\Omega_i)}^2 \\ & + \Delta t^{1+\alpha}\|u_k\|_{H^3(\Omega_k)}^2 + \frac{1}{2}\|A^{\frac{1}{2}}(u_k \circ \Gamma_k)\|_{L^2(\gamma_0)}^2 \leq M_k. \end{aligned} \tag{4.24}$$

De plus, comme pour $k = 2$, les termes A_i et $\mu - C_{GN}/2\|u_i\|_{L^2(\Omega_i)}$ sont positifs. Ainsi, pour tout $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, on obtient les estimations annoncées. \square

Remarque 4.6. À partir de l'équation de continuité discrétisée du système (\mathcal{P}_v^δ) et de la précédente équation (4.24) on a :

$$\sum_{i=1}^m \int_{\Omega_k} \left| \log \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right) \right| \leq \mathbb{C}.$$

Remarque 4.7. À partir de résultats classiques sur les espaces de Sobolev, on en déduit que :

$$\forall x \in \Omega_k, \forall y \in \partial\Omega_k, |\Delta t^{\frac{1+\alpha}{2}} u_k(x) - \Delta t^{\frac{1+\alpha}{2}} u_k(y)| \leq \Delta t^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u_k\|_{W^{1,\infty}(\Omega_k)} |x - y|.$$

D'autre part, l'inégalité (4.24) montre que $\Delta t^{1+\alpha} \|u_k\|_{H^3(\Omega_k)}^2$ est borné indépendamment de k . En dimension 2, $H^3(\Omega_k) \hookrightarrow W^{1,\infty}(\Omega_k)$, donc

$$\forall x \in \Omega_k, \forall y \in \partial\Omega_k, |\Delta t u_k(x) - \Delta t u_k(y)| \leq \Delta t^{\frac{1-\alpha}{2}} \mathbb{C} |x - y|.$$

Si on choisit Δt tel que $\Delta t^{(1-\alpha)/2} \mathbb{C} \leq 1$, cette inégalité montre que le déplacement relatif d'un point du domaine par rapport au déplacement d'un point de la frontière est plus petit que la distance entre ces deux points. Cette information nous permet d'affirmer qu'il n'y a pas de point sortant du domaine d'un pas de temps à l'autre.

4.5 Passage à la limite sur Δt

Nous montrons ici que les solutions approchées ont la compacité nécessaire pour passer à la limite dans le domaine discrétisé en temps et dans les équations.

4.5.1 Dans le domaine discrétisé en temps

On introduit les notations suivantes pour tout $k \in \{0, \dots, m-1\}$, $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[$

$$\widehat{d}(X, t) = d_k(X), \text{ pour tout } t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[\quad (4.25)$$

et

$$\widetilde{d}(X, t) = d_k(X) + u_k(X + d_k(X))(t - k\Delta t) \text{ pour tout } t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[. \quad (4.26)$$

On a :

$$\|d_1\|_{H^2(\gamma_0)} \leq \Delta t \|u_0 \circ \Gamma_0\|_{H^2(\gamma_0)},$$

et

$$\|d_k\|_{H^2(\gamma_0)} \leq \|d_{k-1}\|_{H^2(\gamma_0)} + \Delta t \|u_{k-1} \circ \Gamma_{k-1}\|_{H^2(\gamma_0)}.$$

Ainsi, du lemme 4.5, nous déduisons que :

$$\sup_{0 \leq k \leq m} \|d_k\|_{H^2(\gamma_0)} \leq \sqrt{2K_\alpha} T \leq \frac{2\mu T}{C_{GN}}.$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \|\widehat{d}\|_{L^\infty(H^2(\gamma_0))} &\leq \sqrt{2K_\alpha} T \leq \frac{2\mu T}{C_{GN}}, \\ \|\widetilde{d}\|_{L^\infty(H^2(\gamma_0))} &\leq \sqrt{2K_\alpha} T + \Delta t \sqrt{2K_\alpha} \leq \frac{2\mu T}{C_{GN}} + \Delta t \frac{2\mu}{C_{GN}} \end{aligned}$$

et

$$\left\| \frac{\partial \widetilde{d}}{\partial t} \right\|_{L^\infty(H^2(\gamma_0))} \leq \sqrt{2K_\alpha} \leq \frac{2\mu}{C_{GN}}.$$

On en déduit ainsi que \widetilde{d} est borné dans $W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0))$. Donc il existe $d \in W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0)) \subset W^{1,\infty}(0, T; C^1(\gamma_0))$ tel que

$$\widetilde{d} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} d \text{ dans } W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0)) \text{ faible étoile.}$$

De plus, puisque l'injection de $W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0))$ dans $C^{0,\alpha}(0, T; C^1(\gamma_0))$, $0 < \alpha < 1$, est compacte

$$\widetilde{d} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} d \text{ dans } C^{0,\alpha}(0, T; C^1(\gamma_0)) \text{ fort.}$$

D'autre part, étant donné que $\|d\|_{W^{1,\infty}(0, T; W^{1,\infty}(\gamma_0))} \leq \liminf_{\Delta t \rightarrow 0} \|\widetilde{d}\|_{W^{1,\infty}(0, T; H^2(\gamma_0))} \leq (1+T)\sqrt{2K_\alpha}$, on en déduit que $\det \mathcal{J}(X, t) \neq 0$, $X \in \gamma_0$, $t \in [0, T]$, pour des données petites. Du lemme 4.5, on a :

$$\|\widetilde{d} - \widehat{d}\|_{H^2(\gamma_0)} \leq \Delta t \sup_k \|u_k \circ \Gamma_k\|_{H^2(\gamma_0)} \leq \mathbb{C} \Delta t$$

donc

$$\widetilde{d} - \widehat{d} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^\infty(0, T; C^1(\gamma_0)) \text{ fort,}$$

et on a $\widehat{Q}_{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} Q$.

4.5.2 Dans les équations discrétisées en temps

Dans cette section, on donne quelques éléments pour le passage à la limite dans les équations discrétisées en temps. On introduit les notations suivantes, pour tout $k \in \{1, \dots, m-1\}$, $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t[$

$$\widehat{x}(t) = x_k,$$

$$\widehat{u}(\widehat{x}(t), t) = u(x_k, t_k = k\Delta t) = u_k(x_k), \quad \widehat{h}(\widehat{x}(t), t) = h(x_k, t_k = k\Delta t) = h_k(x_k),$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\hat{x}(t), t) &= \hat{u}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t) + \frac{\hat{u}(\hat{x}(t), t) - \hat{u}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t}(t - k\Delta t), \\ \tilde{h}(\hat{x}(t), t) &= \hat{h}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t) + \frac{\hat{h}(\hat{x}(t), t) - \hat{h}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t}(t - k\Delta t).\end{aligned}$$

Dans $\widehat{Q}_{\Delta t}$, les solutions discrétisées en temps vérifient le problème :

$$(\widetilde{\mathcal{P}}_v) \begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}(\hat{x}(t), t)}{\partial t} - \mu \Delta \hat{u}(\hat{x}(t), t) + \Delta t^\alpha B \hat{u}(\hat{x}(t), t) + \nabla \hat{h}(\hat{x}(t), t) = 0, \\ \frac{\partial \tilde{h}(\hat{x}(t), t)}{\partial t} + \hat{h}(\hat{x}(t), t) \operatorname{div} \hat{u}(\hat{x}(t), t) + \delta \hat{h}(\hat{x}(t), t) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(X + \hat{d}(X, t), t) \cdot \hat{n}(X + \hat{d}(X, t), t) | \det \hat{\mathcal{J}}|(X, t) \\ + \Delta t^\alpha \operatorname{Tr}(B \hat{u})(X + \hat{d}(X, t), t) = -A(\partial \tilde{U}(X, t)/\partial t) \text{ sur } \gamma_0, \quad (4.27)\end{aligned}$$

où $\tilde{U}(X, t) = \tilde{u}(X + \hat{d}(X, t), t)$. D'autre part, les résultats de compacité obtenus dans le lemme 4.5 nous permettent de déduire qu'il existe $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega_t))$ tel que

$$\begin{cases} \hat{u} \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega_t)) \text{ faible étoile,} \\ \hat{u} \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T; H^1(\Omega_t)) \text{ faible.} \end{cases}$$

On pose $\Omega_{t, \Delta t} = \widehat{Q}_{\Delta t} \cap \{(x, t); x \in \mathbb{R}^2\}$. On obtient :

$$\int_{\Delta t}^T \|\hat{u}(\hat{x}(t), t) - \hat{u}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)\|_{L^2(\Omega_{t, \Delta t})}^2 = C \sum_{k=1}^m \Delta t \|u_k - u_{k-1}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \leq \mathbb{C} \Delta t.$$

On en déduit ainsi que $\hat{u}(\hat{x}(t), t) - \hat{u}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$ dans $L^2(Q)$ fort. De plus, d'après les estimations sur u_k , on montre que

$$\|\tilde{u}(\hat{x}(t), t)\|_{L^2(Q_{\Delta t})} \leq \mathbb{C}$$

et

$$\|\tilde{u}(\hat{x}(t), t) - \hat{u}(\hat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)\|_{L^2(Q_{\Delta t})}^2 \leq \sum_{k=1}^m \Delta t \|u_k - u_{k-1}\|_{L^2(\Omega_k)}^2 \leq \mathbb{C} \Delta t.$$

On peut alors en déduire les résultats de convergence qui suivent :

$$\begin{cases} \tilde{u} - \hat{u} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^2(Q) \text{ fort,} \\ \tilde{u} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} u \text{ dans } L^2(Q) \text{ faible.} \end{cases} \quad (4.28)$$

De la même façon, il existe $h \in L^2(Q)$ tel que

$$\widehat{h} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} h \text{ dans } L^2(0, T; L^2(\Omega_t)) \text{ faible.} \quad (4.29)$$

De plus la remarque 4.6 nous permet de déduire que

$$\left(\int_{\Delta t}^T \int_{\Omega_{t, \Delta t}} \left| \log \left(\frac{\widehat{h}(\widehat{x}(t), t)}{\widehat{h}(\widehat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)} \right) \right| \right) = \Delta t \sum_{i=1}^{m-1} \int_{\Omega_k} \left| \log \left(\frac{h_i}{h_{i-1}} \right) \right| \leq \mathbb{C} \Delta t$$

et ainsi

$$\log \left(\frac{\widehat{h}(\widehat{x}(t), t)}{\widehat{h}(\widehat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)} \right) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^1(Q) \text{ fort.}$$

Comme \widehat{h} est borné dans $L^2(Q)$, on en déduit, d'après cette convergence forte, que

$$\widehat{h}(\widehat{x}(t), t) - \widehat{h}(\widehat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^p(Q) \text{ fort, } p < 2,$$

ce qui entraîne :

$$\widetilde{h} - \widehat{h} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ dans } L^p(Q) \text{ fort, } p < 2. \quad (4.30)$$

Nous allons à présent montrer que $\partial \widetilde{u} / \partial t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \partial u / \partial t + u \cdot \nabla u$ au sens des distributions. Puisque $\widehat{Q}_{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} Q$, pour tout $\phi \in D(Q)$, il existe $\underline{\Delta t}$ tel que $\forall \Delta t \leq \underline{\Delta t}$, $\text{supp } \phi \subset \subset \widehat{Q}_{\Delta t}$. En considérant un pas de temps $\Delta t \leq \underline{\Delta t}$, on multiplie $\partial \widetilde{u} / \partial t$ par $\phi \in D(Q)$, et on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t), t) - \widehat{u}(\widehat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t), t) \\ &= \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t), t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t), t) - \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t), t) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Dans le dernier terme, on introduit le changement de variable suivant : $t^* = t - \Delta t$. On note J la matrice jacobienne associée au changement de variable et $\det J$ son déterminant

$$\det J = 1 + \Delta t \text{div } \widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*) + \Delta t^2 (D\widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*))^2$$

où $(D\zeta)^2 = \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_1} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_2} - \frac{\partial \zeta_1}{\partial x_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial x_1}$. Ce déterminant est strictement positif et borné si Δt est assez petit d'après les résultats de compacité du lemme 4.5. En notant que

$\int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} = \int_{\Delta t}^T \int_{\Omega_{t,\Delta t}}$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
(4.31) &= \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t), t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t), t) \\
&\quad - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t^*,\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t) \det J \\
&= \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t), t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t), t) - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t^*,\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t) \\
&\quad - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t^*,\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*) \operatorname{div} \widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*) \phi(\widehat{x}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t) \\
&\quad - \Delta t \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t^*,\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*) (D\widehat{u}(\widehat{x}(t^*), t^*))^2 \phi(\widehat{x}(t^* + \Delta t), t^* + \Delta t)
\end{aligned}$$

En remarquant que $\int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \cdot = \int_{\Delta t}^T \cdot - \int_{T-\Delta t}^T \cdot$, on trouve

$$\begin{aligned}
(4.31) &= \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t), t) - \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&\quad + \underbrace{\int_{T-\Delta t}^T \int_{\Omega_{t,\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t), t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}_{\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ voir remarque (4.8)}} \\
&\quad - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t,\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \operatorname{div} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \\
&\quad - \underbrace{\Delta t \int_0^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t,\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) (D\widehat{u}(\widehat{x}(t), t))^2 \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}_{\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0 \text{ voir remarque (4.9)}}.
\end{aligned}$$

Pour simplifier, nous ne ferons pas apparaître les termes convergeant vers 0 quand Δt tend vers 0^+ , donc (4.31) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
(4.31) &= \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t), t) - \phi(\widehat{x}(t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&\quad + \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t), t + \Delta t) - \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&\quad - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t,\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \operatorname{div} u(\widehat{x}(t), t) \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t), t + \Delta t) - \phi(\widehat{x}(t), t)}{\Delta t} \\
&\quad - \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t) + \Delta t \widehat{u}(\widehat{x}(t), t), t + \Delta t) - \phi(\widehat{x}(t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&\quad - \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t, \Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \operatorname{div} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t).
\end{aligned}$$

On passe à la limite sur Δt dans chaque terme $\forall \phi \in D(Q)$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t), t + \Delta t) - \phi(\widehat{x}(t), t)}{\Delta t} \\
&= \left\langle u(x(t), t), \frac{\partial \phi(x(t), t)}{\partial t} \right\rangle_{D'(Q), D(Q)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi(\widehat{x}(t) + \Delta t \widehat{u}(\widehat{x}(t), t), t + \Delta t) - \phi(\widehat{x}(t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^2 \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{u}_i(\widehat{x}(t), t) \frac{\phi_i(\widehat{x}(t) + \Delta t \widehat{u}(\widehat{x}(t), t), t + \Delta t) - \phi_i(\widehat{x}(t), t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\langle u_i(x(t), t) u_j(x(t), t), \frac{\partial \phi_i(x(t), t)}{\partial x_j} \right\rangle_{D'(Q), D(Q)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta t}^{T-\Delta t} \int_{\Omega_{t, \Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \operatorname{div} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) \phi(\widehat{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \\
&= \langle u(x(t), t) \operatorname{div} u(x(t), t), \phi(x(t), t) \rangle_{D'(Q), D(Q)}.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\widehat{u}(\widehat{x}(t), t) - \widehat{u}(\widehat{x}(t - \Delta t), t - \Delta t)}{\Delta t} \phi(\widehat{x}(t), t) \\
&= - \left\langle u(x(t), t), \frac{\partial \phi(x(t), t)}{\partial t} \right\rangle_{D'(Q), D(Q)} \\
&\quad - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left\langle u_i(x(t), t) u_j(x(t), t), \frac{\partial \phi_i(x(t), t)}{\partial x_j} \right\rangle_{D'(Q), D(Q)} \\
&\quad - \langle u(x(t), t) \operatorname{div} u(x(t), t), \phi(x(t), t) \rangle_{D'(Q), D(Q)} \tag{4.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t}, \phi(x(t), t) \right\rangle_{D'(Q), D(Q)} \\
&\quad + \langle (u(x(t), t) \cdot \nabla) u(x(t), t), \phi(x(t), t) \rangle_{D'(Q), D(Q)} \\
&\quad + \langle u(x(t), t) \operatorname{div} u(x(t), t), \phi(x(t), t) \rangle_{D'(Q), D(Q)} \\
&\quad - \langle u(x(t), t) \operatorname{div} u(x(t), t), \phi(x(t), t) \rangle_{D'(Q), D(Q)},
\end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\partial \widetilde{u}(\widehat{x}(t), t)}{\partial t} \phi(\widehat{x}(t), t) \\
&= \left\langle \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} + (u(x(t), t) \cdot \nabla) u(x(t), t), \phi(x(t), t) \right\rangle_{D'(Q), D(Q)}. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Remarque 4.8. D'après la définition du support de ϕ , il existe $\widetilde{\Delta t}$ tel que

$$\left[\bigcup_{t \in [T - \Delta t, T]} \Omega_{t, \Delta t} \times \{t\} \right] \cap \operatorname{supp} \phi = \emptyset, \text{ for all } \Delta t \leq \widetilde{\Delta t}.$$

Remarque 4.9. On a

$$\begin{aligned}
&\Delta t \int_{\Delta t}^{T - \Delta t} \int_{\Omega_{t, \Delta t}} |\widehat{u}(\widehat{x}(t), t) (D\widehat{u}(\widehat{x}(t), t))^2 \phi(\widehat{x}(t), t)| \\
&\leq 2\Delta t \sup_k \|u_k\|_{L^2(\Omega_k)} \times \left(\sum_{k=1}^{m-1} \Delta t \|u_k\|_{H^3(\Omega_k)}^2 \right) \sup_k \|\phi\|_{L^\infty(\Omega_k)},
\end{aligned}$$

d'après les estimations du lemme (4.5)

$$\Delta t \int_0^{T - \Delta t} \int_{\Omega_{t, \Delta t}} |\widehat{u}(\widehat{x}(t), t) (D\widehat{u}(\widehat{x}(t), t))^2 \phi(\widehat{x}(t), t)| \leq \mathbb{C}' \Delta t^{1-\alpha}.$$

ainsi, puisque $0 < \alpha < 1$,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \int_{\Delta t}^{T - \Delta t} \int_{\Omega_{t, \Delta t}} \widehat{u}(\widehat{x}(t), t) (D\widehat{u}(\widehat{x}(t), t))^2 \phi(\widehat{x}(t), t) = 0.$$

On utilise la même méthode pour passer à la limite dans le terme

$$\int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\partial \log \widetilde{h}(\widehat{x}(t), t)}{\partial t} \phi(\widehat{x}(t), t),$$

et on obtient

$$\left\langle \frac{\partial \log h(x(t), t)}{\partial t} + u(x(t), t) \cdot \nabla \log h(x(t), t), \phi(x(t), t) \right\rangle_{D'(Q), D(Q)}. \quad (4.34)$$

Finalement, au sens des distributions, quand Δt tend vers 0^+ , $(\widetilde{\mathcal{P}}_v)$ conduit au problème (\mathcal{P}_v^δ) .

4.5.3 Passage à la limite dans les conditions aux limites

Pour obtenir les estimations de la première section et passer à la limite dans le problème régularisé (\mathcal{P}_v^δ) , nous devons montrer les conditions aux limites (4.2). Pour se faire, on réécrit le problème discrétisé en temps sous la forme variationnelle :

$$\int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \phi + \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \nabla \widehat{u} \nabla \phi - \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} \widehat{h} \operatorname{div} \phi + \Delta t^\alpha \int_{\widehat{Q}_{\Delta t}} B^{\frac{1}{2}}(\widehat{u}) B^{\frac{1}{2}}(\phi) + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A^{1/2}(\tilde{U}), A^{1/2}(\Phi) \right\rangle_{D'(0,T;L^2(\gamma_0))} = 0, \quad \forall \phi \in D(0,T;C^\infty(\mathbb{R}^2)), \quad (4.35)$$

où $\Phi(X,t) = \phi(X + \widehat{d}(X,t), t)$. La relation (4.32) est encore valide si on prend $\phi \in D(0,T;C^\infty(\mathbb{R}^2))$, mais on ne peut pas appliquer à cet instant la formule de Green et écrire la relation (4.33) pour $\phi \in D(0,T;C^\infty(\mathbb{R}^2))$. Donc, en notant que $\widehat{d} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} d$ dans $L^\infty(C^1)$ et \tilde{U} est borné dans $L^\infty(H^2(\gamma_0))$, on en déduit seulement que, à la limite,

$$\int_Q u \frac{\partial \phi}{\partial t} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_Q u_i u_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \int_Q \operatorname{div} u u \phi + \int_Q \nabla u \nabla \phi - \int_Q h \operatorname{div} \phi + \left\langle \frac{\partial}{\partial t} A^{1/2}(U), A^{1/2}(\Phi) \right\rangle_{D'(0,T;L^2(\gamma_0))} = 0, \quad \forall \phi \in D(0,T;C^\infty(\mathbb{R}^2)). \quad (4.36)$$

De plus, dans la section précédente, on a montré que

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \nabla u - \Delta u + \nabla h = 0 \text{ dans } D'(Q).$$

Puisque $u \nabla u \in L^{4/3}(Q)$, donc $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla h \in L^{4/3}(Q)$. Ainsi, en considérant la fonction $\phi \in D(0,T;C^\infty(\Omega_t))$, on a :

$$\int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla h \right) \phi + \int_Q u \nabla u \phi = 0, \quad (4.37)$$

Pour appliquer la formule de Green, on introduit $\Theta_1 = (-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + h, 0, u_1)$ et $\Theta_2 = (0, -\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + h, u_2)$. Donc, (4.37) peut réécrit sous la forme

$$\sum_{i=1}^2 \int_Q \overline{\operatorname{div}} \Theta_i \phi_i + \int_Q u \nabla u \phi = 0,$$

où $\overline{\text{div}}$ représente l'opérateur divergence dans Q . On peut ainsi appliquer la formule de Green dans Q et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_Q u \frac{\partial \phi}{\partial t} + \int_Q \nabla u \nabla \phi + \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} u_i \phi_i N_t - \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} \phi_i \nabla u_i \cdot N_x + \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} \phi_i h_i N_{x_i} \\ - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_Q u_i u_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} - \int_Q \text{div } u u \phi + \sum_{i=1}^2 \int_{\Sigma} u_i \phi_i u \cdot N_x = 0, \end{aligned} \quad (4.38)$$

où $N = (N_{x_1}, N_{x_2}, N_t)$ est la normale unitaire extérieure à Q . Ainsi, en notant que $u \cdot N_x = -N_t$ et $\int_{\Sigma} \psi N_{x_i} = \int_0^T \int_{\gamma_t} \psi n_i$, on obtient la relation (4.2) dans $W^{-1,\infty}(0, T; H^{-2}(\gamma_0))$ en combinant (4.36) et (4.38).

Chapitre 5

Simulation de la dérive d'une nappe de polluant à l'aide d'un modèle de SW à frontière libre

Ce chapitre a fait l'objet d'un article en cours de publication [51].

5.1 Introduction

Nous nous proposons de donner une modélisation de la dérive de nappes de polluant à la surface de la mer. Ce polluant peut être bien sûr du pétrole, mais aussi tout autre fluide de densité inférieure à celle de l'eau de mer et faiblement miscible dans celle-ci. Les phénomènes qui vont conditionner le devenir d'un polluant dans l'eau sont nombreux et simultanés : étalement, évaporation, dissolution, dispersion sous forme de gouttelettes, biodégradation, etc.

Contrairement à la plupart des modèles que nous avons rencontrés dans la littérature, nous avons choisi d'opter pour un véritable modèle d'écoulement de la nappe de polluant plutôt que par un simple suivi des trajectoires de ces particules. Il nous a paru nécessaire, pour réaliser postérieurement des études de la consistance du modèle, de se baser directement sur des équations de conservation usuelles pour le polluant. Cette approche se veut différente et complémentaire de celles généralement utilisées, comme par exemple le modèle Mothy de Météo France dédié à la prévision de dérive des hydrocarbures. Pour simplifier, la plupart des modèles tels que Mothy sont basés sur le même principe : la nappe d'hydrocarbure est entraînée par le courant de surface à 100% de sa vitesse et poussée par le vent à environ 3% de sa vitesse. En connaissant la position de la nappe ainsi que la force et l'orientation du courant et du vent de surface pour les jours à venir, un calcul vectoriel simple donne la réponse. Des utilisations du modèle Mothy en temps réel sur des cas con-

crets ont été effectuées avec succès, comme par exemple lors de l'accident de l'Erika dans le Golfe de Gascogne (décembre 1999).

Bien entendu, la pratique est plus compliquée. Le vent de surface en un point précis de la mer n'est pas toujours celui des bulletins météorologiques. D'autre part, le courant de surface est une combinaison du courant général de la zone, des courants de marée et des courants dus au vent, avec des sources d'incertitude multiples. Pour le calcul des courants, les logiciels de simulation, tels que Mothy, utilisent généralement un modèle barotrope couplé à un modèle de viscosité turbulente qui permet de représenter le cisaillement de courant sur la verticale. La résolution numérique étant souvent basée sur une méthode de type différences finies. Notons que ce type de modèle suit (ou prédit) la trajectoire des particules; il est donc bien adapté à l'étude de la dérive des containers et a déjà été utilisé à cette fin.

Nous nous proposons dans cette étude de donner un modèle permettant la simulation de la dérive de la nappe en prenant en compte la phase d'étalement et en considérant différents facteurs tels que le vent, la gravité ou encore la friction entre la mer et le polluant. Pour se faire, nous introduisons un modèle bi-couche. On suppose pour cela que le polluant et l'eau sont deux fluides superposés et non-miscibles. Dans cette première étude, le comportement de l'eau est supposé connu et on s'intéresse essentiellement à la modélisation de la propagation du polluant. Pour décrire le mouvement du polluant, nous proposons un modèle de shallow water. On note h l'épaisseur de la nappe de polluant et u sa vitesse intégrée sur la hauteur. On suppose dans un premier temps que la vitesse W et le gradient d'élévation $\nabla h'$ de l'eau sont connus. Les équations que nous considérons pour caractériser l'écoulement du polluant sont données par :

$$(\mathcal{P}_p) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + g \nabla h + g \nabla h' + C|u - W|(u - W) = f \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(uh) = 0. \end{cases}$$

Ici f représente le forçage du vent, g l'accélération de la gravité et C un coefficient de frottement entre les deux couches. Au système (\mathcal{P}_p) on ajoute les conditions initiales : $h(t = 0) = h_0$ et $u(t = 0) = u_0$. Soit $\omega(t)$ le domaine occupé par le polluant à l'instant t de frontière $\gamma(t)$. On introduit, comme indiqué sur la figure 5.1, un domaine fixe Ω correspondant à la surface de l'eau de frontière Γ tel que $\omega(t) \subset K, \forall t \in [0, T]$, où K est un compact de Ω .

Une première approche consiste à calculer l'écoulement du polluant dans le domaine fixe Ω de la façon suivante : au temps $t = 0$ on suppose que $h = 0$ sur $\gamma(0)$.

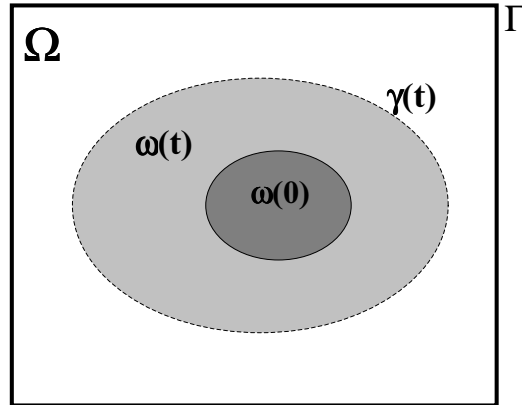


Figure 5.1: domaine Ω

Pour caractériser l'absence de polluant dans $\Omega \setminus \omega(0)$, on prolonge la condition $h = 0$ dans $\Omega \setminus \omega(0)$. On suppose ainsi que $h_0 = u_0 = 0$ dans $\Omega \setminus \omega(0)$.

Cette méthode permet d'utiliser un maillage fixe et de contourner les difficultés liées aux conditions aux limites. Par commodité, on considère les conditions $u \cdot n = \text{rot } u = 0$ sur Γ . Dans ce cas on sait que le problème admet une solution faible [14].

Mais en général, les dimensions de la nappe sont beaucoup plus petites que celles du domaine Ω occupé par la mer, ce qui diminue la précision des calculs au niveau du domaine occupé par le polluant.

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle approche basée sur un modèle à frontière libre. Nous proposons de résoudre le mouvement de la nappe uniquement dans le domaine $\omega(t)$ où le polluant est réellement présent.

5.2 Un modèle défini sur un domaine dépendant du temps

On rappelle que $\omega(t)$ est le domaine occupé par le polluant à l'instant $t \in [0, T]$ et $\tilde{Q} = \cup_{t \in [0, T]} (\omega(t) \times \{t\})$. Pour caractériser l'écoulement de la nappe, on considère les équations de shallow water, détaillées dans l'introduction, écrites dans le domaine

dépendant du temps $\omega(t)$:

$$(\mathcal{P}_p) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u - \mu \Delta u + g \nabla h + g \nabla h' + C|u - W|(u - W) = f & \text{dans } \omega(t), \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(uh) = 0 & \text{dans } \omega(t), \\ h(t=0) = h_0 & \text{dans } \omega(0), \\ u(t=0) = u_0 & \text{dans } \omega(0), \end{array} \right.$$

où h_0 s'annule sur $\gamma(0)$. La principale difficulté réside dans la caractérisation des conditions aux limites. Pour les décrire on considère que la déformée de la frontière $\gamma(t)$ est définie par $\gamma(t) = \{x' = x + d(x, t), x \in \gamma(0)\}$ (voir chapitre précédent), où d représente le déplacement $d(x, t) = \Gamma(t, 0, x) - x$ et $\Gamma(t, s, x)$ correspond à l'écoulement lagrangien, *i.e.* la position à l'instant t de la particule localisée en x à l'instant s . Avec ces notations, on a la condition naturelle $\partial d(\Gamma(0, t, x), t)/\partial t = u(x, t)$ sur $\gamma(t)$. On complète cette condition par une condition sur la composante normale du tenseur des contraintes : $\sigma_n(t) = h(t) - \mu \operatorname{div} u(t) = A(\partial(d \circ \Gamma(0, t, \cdot))) \cdot n/\partial t$ sur $\gamma(t)$ et une condition sur le rotationnel : $\operatorname{rot} u(t) = 0$, où A est un opérateur frontière prenant en compte les efforts exercés sur le fluide par l'environnement extérieur sur $\gamma(t)$ (voir chapitre précédent). De tels opérateurs frontières sont utilisés dans V.A. Solonikov [70] et J.T. Beale [3]. Dans cette première approche nous négligerons ces forces et on prendra $A \equiv 0$ [69]. Dans ce cas, il est naturel de considérer que $h(t) = 0$ sur $\gamma(t)$, ce qui entraîne finalement les conditions $\operatorname{div} u(t) = 0$, $\operatorname{rot} u(t) = 0$, $h(t) = 0$ sur $\gamma(t)$.

5.3 Formulation ALE du problème

Pour la résolution du problème (\mathcal{P}_p) , nous proposons une méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian method) couplée à la méthode des caractéristiques. Une présentation générale de la méthode ALE est donnée dans [36, 37, 53]. Cette méthode permet de combiner les avantages (tout en diminuant les inconvénients) des deux approches classiques utilisées en mécanique des milieux continus : la description Lagrangienne et la description Eulerienne. La description Lagrangienne permet de repérer assez facilement les surfaces libres et les interfaces entre les différents points matériels, mais elle n'est pas adaptée lorsque de grandes distortions du maillage interviennent (figure 5.3). La description Eulerienne, qui utilise un maillage fixe, évite de telles distortions, mais demande une définition de l'interface précise et un

maillage détaillé (figure 5.2).

La méthode ALE consiste à calculer à chaque itération en temps, une vitesse de domaine suivant le mouvement de la frontière (à travers les conditions aux limites vérifiées par celles-ci) et calculée de façon arbitraire à l'intérieur du domaine, de sorte à obtenir un maillage de bonne qualité. On introduit alors cette vitesse dans les équations de shallow water et on l'utilise pour construire le maillage suivant. Le couplage avec la méthode des caractéristiques est particulièrement intéressant puisqu'il permet de prendre en compte les termes d'advection dans les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement.

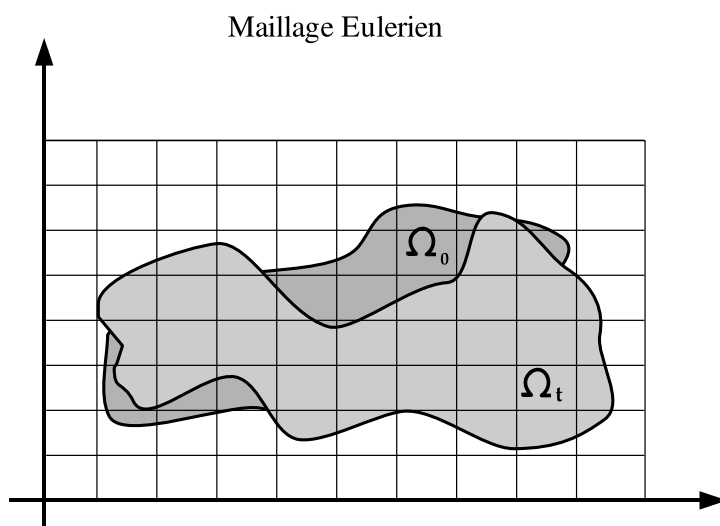


Figure 5.2: Maillage en eulérien.

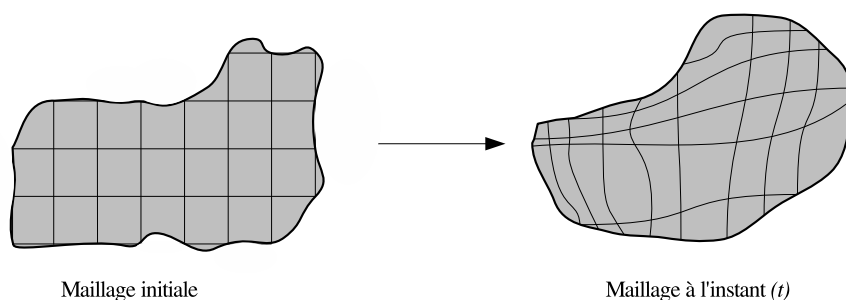


Figure 5.3: évolution du maillage en Lagrangien.

Dans ce qui suit, nous ne prenons pas en compte les effets du vent, du gradient d'élévation de l'eau et des termes de friction, pour éviter d'alourdir les équations de notations inutiles à la présentation de la méthode numérique.

On commence par définir, pour tout $t \in [0, T]$, la vitesse du maillage c^t . Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour calculer cette vitesse. Pour notre problème, c^t vérifie une équation de type Poisson :

$$\begin{cases} \Delta c^t(x) = 0 & \text{dans } \omega(t), \\ c^t(x) = u(x, t) & \text{sur } \gamma(t). \end{cases}$$

Remarque 5.1. Pour définir les conditions aux limites, on peut également utiliser dans certaines situations la composante normale de la vitesse. C'est notamment le cas lorsque la composante tangentielle de la vitesse est prédominante [53].

On définit ensuite l'application

$$\begin{aligned} c : \quad \tilde{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, t) &\longmapsto c(x, t) = c^t(x). \end{aligned}$$

La correspondance entre les différents domaines $\Omega(t_1)$ et $\Omega(t_2)$ est alors donnée par l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\cdot, t_1; t_2) : \quad \omega(t_1) &\longrightarrow \omega(t_2) \\ x_1 &\longmapsto x_2 = \mathcal{C}(x_1, t_1; t_2), \end{aligned}$$

où $(\mathcal{C}(x_1, t_1; t), t)$ représente la courbe caractéristique de (x_1, t_1) vers (x_2, t_2) dans le domaine espace-temps Q :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}[\mathcal{C}(x_1, t_1; t), t] = [c^t(\mathcal{C}), 1] \\ [\mathcal{C}(x_1, t_1; t_1), t_1] = [x_1, t_1]. \end{cases}$$

Remarque 5.2. $\mathcal{C}(x_1, t_1; t)$ décrit le mouvement d'un nœud qui se trouve à la position x_1 à l'instant t_1 .

Pour tout temps τ , la vitesse ALE u_τ est alors définie par

$$u_\tau(x, t) = u(\mathcal{C}(x, \tau; t), t), \text{ avec } x \in \omega(\tau) \text{ et } \mathcal{C}(x, \tau; t) \in \omega(t), \quad (5.1)$$

ce qui est équivalent à :

$$u_\tau(\mathcal{C}(x, t; \tau); t) = u(x, t). \quad (5.2)$$

De la même façon, on définit la hauteur ALE h_τ et la vitesse du maillage c_τ par :

$$h_\tau(x, t) = h(\mathcal{C}(x, \tau; t), t), \quad (5.3)$$

$$c_\tau(x, t) = c(\mathcal{C}(x, \tau; t), t), \text{ avec } x \in \omega(\tau) \text{ et } \mathcal{C}(x, \tau; t) \in \omega(t), \quad (5.4)$$

ce qui est équivalent à :

$$h_\tau(\mathcal{C}(x, t; \tau); t) = h(x, t), \quad (5.5)$$

$$c_\tau(\mathcal{C}(x, t; \tau); t) = c(x, t). \quad (5.6)$$

Avant d'établir la formulation ALE de notre problème (\mathcal{P}_p), on donne dans le lemme suivant un développement à l'ordre 1 des dérivées de

$$F_\tau : \quad \begin{array}{l} \tilde{Q} \quad \longrightarrow \omega(\tau) \times [0, T] \\ (x, t) \quad \longmapsto (\mathcal{C}(x, t; \tau), t), \end{array}$$

Lemme 5.3. *Si on suppose que F_τ est suffisamment régulière, on a pour tout $x \in \omega(t)$:*

$$\frac{\partial F_\tau}{\partial t}(x, t) = (-c(x, t), 1) + O(t - \tau)$$

et

$$\frac{\partial F_\tau}{\partial x_i}(x, t) = (e_i, 0) + O(t - \tau),$$

où e_i , $i = 1, 2$, est le vecteur unitaire correspondant à l'axe $\overrightarrow{Ox_i}$.

Démonstration. La première relation est obtenue en établissant le développement limité de $\tau \mapsto \frac{\partial F_\tau}{\partial t}(x, t)$ en t :

$$\frac{\partial F_\tau}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial F_t}{\partial t}(x, t) + O(t - \tau) = (-c(x, t), 1) + O(t - \tau).$$

En effet, la dérivée de $s \mapsto (\mathcal{C}(x, s; t), s)$ en t est donnée par

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{(\mathcal{C}(x, s; t), s) - (\mathcal{C}(x, t; t), t)}{s - t} = \lim_{s \rightarrow t} \frac{(\mathcal{C}(x, s; t) - x, 1)}{s - t},$$

or le d-l de $t \mapsto \mathcal{C}(x, s; t)$ en s donne

$$\mathcal{C}(x, s; t) = \mathcal{C}(x, s; s) + c(x, s)(t - s) + o(t - s) = x + c(x, s)(t - s) + o(t - s),$$

d'où $\mathcal{C}(x, s; t) - x = c(x, s)(t - s) + o(t - s)$, et donc

$$\frac{\partial F_t}{\partial t}(x, t) = \lim_{s \rightarrow t} \left(-c(x, s) + \frac{o(t - s)}{s - t}, 1 \right) = (-c(x, t), 1).$$

De la même façon, en donnant le développement limité de $t \mapsto \frac{\partial F_\tau}{\partial x_i}(x, t)$ en τ , on obtient la deuxième relation :

$$\frac{\partial F_\tau}{\partial x_i}(x, t) = \frac{\partial F_\tau}{\partial x_i}(x, \tau) + O(t - \tau) = (e_i, 0) + O(t - \tau).$$

□

Pour établir la formulation ALE à l'ordre 1 du problème (\mathcal{P}_p) , on reporte les définitions (5.2), (5.5), (5.6) dans (\mathcal{P}_p) . Ainsi, en utilisant les formules des dérivées de fonctions composées, et en appliquant le lemme 5.3, on obtient :

Lemme 5.4. *Si les solutions sont suffisamment régulières, la formulation ALE du problème (\mathcal{P}_p) est donnée par :*

$$(\mathcal{P}_{p\tau}) \begin{cases} \frac{\partial u_\tau}{\partial t} + (u_\tau - c_\tau) \nabla u_\tau - \mu \Delta u_\tau + g \nabla h_\tau = O(t - \tau), \text{ dans } \omega(\tau) \times [0, T], \\ \frac{\partial h_\tau}{\partial t} + (u_\tau - c_\tau) \nabla h_\tau + h_\tau \operatorname{div} u_\tau = O(t - \tau), \text{ dans } \omega(\tau) \times [0, T]. \end{cases}$$

Démonstration. On a $u(x, t) = (u_\tau \circ F_\tau)(x, t)$. En utilisant les formules de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = J(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) \cdot \frac{\partial F_\tau}{\partial x_i}(x, t),$$

où J est la matrice jacobienne associée à u_τ :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial (u_\tau)_{x_1}}{\partial x_1} & \frac{\partial (u_\tau)_{x_1}}{\partial x_2} & \frac{\partial (u_\tau)_{x_1}}{\partial t} \\ \frac{\partial (u_\tau)_{x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial (u_\tau)_{x_2}}{\partial x_2} & \frac{\partial (u_\tau)_{x_2}}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, en appliquant le lemme 5.3 on arrive à :

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x, t) = \frac{\partial u_\tau}{\partial x_i}(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) + O(t - \tau).$$

De la même façon,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = J(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) \cdot \frac{\partial F_\tau}{\partial t}(x, t),$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u_\tau}{\partial t}(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) - c(x, t) \nabla u_\tau(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) + O(t - \tau) \\ &= \frac{\partial u_\tau}{\partial t}(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) - c_\tau(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) \nabla u_\tau(\mathcal{C}(x, t; \tau), t) + O(t - \tau). \end{aligned}$$

En reportant ces résultats sur les dérivées partielles dans le problème (\mathcal{P}_p) , on obtient les équations $(\mathcal{P}_{p\tau})_1$ et $(\mathcal{P}_{p\tau})_2$. \square

Remarque 5.5. Par la suite, on utilisera une discrétisation en temps d'ordre 1 pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_{p\tau})$. En effet, une discrétisation temporelle d'ordre supérieur à 1 ne donnera pas plus de précision puisque la formulation ALE est d'ordre 1. Pour obtenir une précision en temps d'ordre 2, il est nécessaire d'avoir un développement supérieur de F_τ , ce qui rend les équations ALE plus complexes. Pour plus de détails sur des schémas d'ordre 2, nous pouvons citer [29].

5.4 Discrétisation en temps

On note Δt le pas de temps, $\omega^n = \omega(t^n)$ de frontière γ^n , et on considère la discrétisation en temps suivante : $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^M = T = m_T \Delta t$, avec $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Soient $U^n : \omega^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $H^n : \omega^n \rightarrow \mathbb{R}$ les approximations des solutions continues $u(t)$, $h(t)$ au temps t^n . Pour toute fonction $g : \tilde{Q} \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leq n \leq \frac{T}{\Delta t}$, $0 \leq m \leq \frac{T}{\Delta t}$, on introduit les notations :

$$\begin{aligned} g_m^n(x) &= g_{t^m}(x, t^n) \text{ for } x \in \omega^m, \\ g^n(x) &= g_n^n(x) = g(x, t^n) \text{ for } x \in \omega^n. \end{aligned}$$

Le principe de la discrétisation en temps est alors le suivant : on suppose connus le domaine ω^n , la vitesse U^n , la hauteur H^n et la vitesse du maillage C^n . Le calcul de ω^{n+1} , U^{n+1} , H^{n+1} et C^{n+1} , est basé sur la méthode des caractéristiques (pour plus de détails nous pouvons citer [68]). Pour se faire, on renormalise l'équation de continuité $(\mathcal{P}_{p\tau})_2$ comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \log h_{t^n} + (u_{t^n} - c_{t^n}) \nabla \log h_{t^n} + \operatorname{div} u_{t^n} = 0, \quad (5.7)$$

et on utilise la méthode des caractéristiques [67], pour l'équation de conservation de la quantité de mouvement et de continuité, afin d'approcher la vitesse ALE $u_{t^n}(x, t^{n+1})$ et la hauteur ALE $h_{t^n}(x, t^{n+1})$ au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$. Dans ce qui suit, on notera U_n^{n+1} et H_n^{n+1} les approximations de $u_{t^n}(x, t^{n+1})$ et $h_{t^n}(x, t^{n+1})$. En approximant la dérivée Lagrangienne par un schéma d'Euler implicite d'ordre 1, on obtient ainsi le schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} U_n^{n+1}(x) - \Delta t \mu \Delta U_n^{n+1}(x) + \Delta t g \nabla H_n^{n+1}(x) = \tilde{U}^n(x) & \text{dans } \omega^n, \\ \log H_n^{n+1}(x) + \Delta t \operatorname{div} U_n^{n+1}(x) = \log \tilde{H}^n(x) & \text{dans } \omega^n, \\ \operatorname{div} U_n^{n+1} = 0 & \text{sur } \gamma^n, \\ \operatorname{rot} U_n^{n+1} = 0 & \text{sur } \gamma^n, \\ H_n^{n+1} = 0 & \text{sur } \gamma^n, \end{array} \right.$$

où $\tilde{U}^n(x) = U^n(X^n(x, t^n))$ et $\tilde{H}^n(x) = H^n(X^n(x, t^n))$, avec $X^n(x, \cdot) : [t^n, t^{n+1}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ représentant la courbe caractéristique solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X^n}{\partial t}(x, t) = (U^n - C^n)(X^n(x, t)) \\ X^n(x, t^{n+1}) = x. \end{array} \right.$$

Remarque 5.6. Dans notre étude, nous approximerons le pied de la caractéristique par un schéma de Runge-Kutta d'ordre 1 : $X^n(x, t^n) \simeq x - (U^n - C^n)(x)\Delta t$.

D'autre part, compte tenu des conditions aux limites vérifiées par C^n ($C^n(x) = U^n(x)$ sur Γ^n), on peut supposer que le pied de la caractéristique reste dans le domaine Ω^n pour un pas de temps assez petit, ce qui permet de justifier la définition de $U^n(X^n(x, t^n))$.

Nous pouvons à présent en déduire le domaine ω^{n+1} à l'aide de l'application $F_{n+1}(\cdot, t^n) : \omega^n \longrightarrow \omega^{n+1}$. Ainsi,

$$F_{n+1}(x, t^n) = (\mathcal{C}(x, t^n; t^{n+1}), t^n) = (x + \Delta t C^n(x) + O(\Delta t^2), t^n).$$

On peut donc approximer ω^{n+1} par

$$\omega^{n+1} = \{y, y = x + \Delta t C^n(x), x \in \Omega^n\}.$$

Il nous reste à définir les approximations U^{n+1} et H^{n+1} sur ω^{n+1} . Pour $y = x + \Delta t C^n(x) \in \omega^{n+1}$, $U^{n+1} : \omega^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $H^{n+1} : \omega^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont approchées par :

$$U^{n+1}(y) = U_n^{n+1}(x)$$

$$H^{n+1}(y) = H_n^{n+1}(x),$$

où $y = x + \Delta t C^n(x)$.

Remarque 5.7. L'équation de continuité renormalisée (5.7) introduite pour la discrétisation en temps assure la positivité de H^n (voir l'équation (5.11)) pour tout n et permet d'obtenir certaines estimations dans la section suivante.

5.5 Discrétisation en espace

5.5.1 Méthode numérique

La discrétisation en temps décrite dans la section précédente nous amène à résoudre, à chaque pas de temps t^n , un problème en variables d'espace du type :

$$(\mathcal{P}_p^n) \left\{ \begin{array}{ll} U_n^{n+1} - \Delta t \mu \Delta U_n^{n+1} + \Delta t g \nabla H_n^{n+1} = \tilde{U}^n & \text{dans } \omega^n, \\ \log H_n^{n+1} + \Delta t \operatorname{div} U_n^{n+1} = \log \tilde{H}^n & \text{dans } \omega^n, \\ \operatorname{div} U_n^{n+1} = 0 & \text{sur } \gamma^n, \\ \operatorname{rot} U_n^{n+1} = 0 & \text{sur } \gamma^n, \\ H_n^{n+1} = 0 & \text{sur } \gamma^n. \end{array} \right.$$

Pour résoudre le problème (\mathcal{P}_p^n) , nous proposons d'utiliser la décomposition orthogonale de $L^2(\omega^n)^2$ suivante :

$$L^2(\omega^n)^2 = \nabla H_0^1(\omega^n) \oplus \text{Rot } H_0^1(\omega^n) \oplus \nabla \mathcal{H}(\omega^n), \quad (5.8)$$

où \mathcal{H} représente l'intersection de H^1 et de l'espace des fonctions harmoniques. On peut donc décomposer U_n^{n+1} de la façon suivante :

$$U_n^{n+1}(x) = \nabla p_n^{n+1} + \text{Rot } q_n^{n+1} + \nabla r_n^{n+1}, \quad (5.9)$$

avec $p_n^{n+1}, q_n^{n+1} \in H_0^1(\omega^n)$ et $r_n^{n+1} \in \mathcal{H}$. Puisque $\text{div } U_n^{n+1} = \text{rot } U_n^{n+1} = H_n^{n+1} = 0$ sur γ^n , on en déduit facilement que $\Delta p_n^{n+1} (= \text{div } U_n^{n+1})$ et $\Delta q_n^{n+1} (= \text{rot } U_n^{n+1})$ s'annulent à la frontière. Avec la décomposition (5.9), on en déduit que l'équation de conservation de la quantité de mouvement discrétisée en temps $(\mathcal{P}_p^n)_1$ est équivalente au système suivant :

$$(\mathcal{M}^n) \begin{cases} \nabla (p_n^{n+1} - \Delta t \mu \Delta p_n^{n+1} + \Delta t g H_n^{n+1}) = P_{\nabla H_0^1} \tilde{U}^n & \text{dans } \omega^n, \\ \text{Rot } (q_n^{n+1} - \Delta t \mu \Delta q_n^{n+1}) = P_{\text{Rot } H_0^1} \tilde{U}^n & \text{dans } \omega^n, \\ \nabla r_n^{n+1} = P_{\nabla \mathcal{H}} \tilde{U}^n = \tilde{U}^n - P_{\nabla H_0^1} \tilde{U}^n - P_{\text{Rot } H_0^1} \tilde{U}^n & \text{dans } \omega^n, \end{cases}$$

complété par les conditions aux limites $H_n^{n+1} = p_n^{n+1} = q_n^{n+1} = 0$ sur γ^n .

Remarque 5.8. Avec cette décomposition, on obtient directement la projection de U_n^{n+1} sur $\nabla \mathcal{H}$ en fonction de \tilde{U}^n .

La nature des conditions aux limites permet de remplacer les équations $(\mathcal{M}^n)_1$, $(\mathcal{M}^n)_2$ par le problème scalaire :

$$\begin{cases} p_n^{n+1} - \Delta t \mu \Delta p_n^{n+1} + \Delta t g H_n^{n+1} = \theta & \text{dans } \omega^n, \\ q_n^{n+1} - \Delta t \mu \Delta q_n^{n+1} = \delta & \text{dans } \omega^n, \end{cases}$$

où θ et δ proviennent des projections de \tilde{U}^n sur ∇H_0^1 et $\text{Rot } H_0^1$: $\nabla \theta = P_{\nabla H_0^1} \tilde{U}^n$ et $\text{Rot } \delta = P_{\text{Rot } H_0^1} \tilde{U}^n$. Ce problème est résolu avec la base $\{e_1, \dots, e_k, \dots\}$, où chaque élément e_k est solution de

$$(H) \begin{cases} -\Delta e_k = \lambda_k e_k & \text{dans } \omega^n, \\ e_k = 0 & \text{sur } \Gamma^n, \end{cases}$$

pour tout k . On peut donc approcher p_n^{n+1} et q_n^{n+1} de la façon suivante :

$$p_n^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^n e_i,$$

$$q_n^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_q} \beta_i^n e_i.$$

Cette méthode nous amène à résoudre le système relativement simple suivant :

$$\begin{cases} \alpha_i + \Delta t \mu \lambda_i \alpha_i = -\Delta t g(H_n^{n+1}, e_i) + (\theta, e_i) \\ \beta_i + \Delta t \mu \lambda_i \beta_i = (\delta, e_i), \end{cases}$$

ce qui nous donne les coefficients α_i et β_i .

Remarque 5.9. Avec cette méthode, on peut approcher U_n^{n+1} par

$$\widehat{U}_n^{n+1} = \sum_{i=1}^{N_p} \alpha_i^n \nabla e_i + \sum_{i=1}^{N_q} \beta_i^n \text{Rot } e_i + \nabla r_n^{n+1}. \quad (5.10)$$

Grâce aux propriétés des éléments e_k , on peut vérifier que \widehat{U}_n^{n+1} vérifie les conditions aux limites $\text{div } \widehat{U}_n^{n+1} = \text{rot } \widehat{U}_n^{n+1} = 0$ sur γ^n .

Remarque 5.10. L'inconnu H_n^{n+1} est calculé à l'aide de l'équation de continuité $(\mathcal{P}_p^n)_2$ de la façon suivante :

$$H_n^{n+1} = \widetilde{H}^n e^{-\Delta t \text{div } U_n^{n+1}}. \quad (5.11)$$

5.5.2 Estimations *a priori*

Le problème que nous étudions à chaque pas de temps est du type

$$(Q) \begin{cases} u - \alpha \Delta u + \beta \nabla h = f & \text{dans } \omega^n \\ \log h + \gamma \text{div } u = \log g & \text{dans } \omega^n, \\ \text{div } u = 0 & \text{sur } \gamma^n, \\ \text{rot } u = 0 & \text{sur } \gamma^n, \\ h = 0 & \text{sur } \gamma^n, \end{cases}$$

où α , β et γ sont positifs et constants. Nous proposons ici un résultat sur les estimations globales d'énergie :

Lemme 5.11. *Si (u, h) est une solution classique du problème (Q), alors u est bornée dans $H^1(\omega^n)^2$ et h est bornée dans $L^2(\omega^n)$.*

Démonstration. Soit (u, h) une solution classique de (Q). En multipliant $(Q)_1$ par u et en intégrant sur ω^n , on obtient :

$$\|u\|_{L^2(\omega^n)^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\omega^n)}^2 - \beta \int_{\omega^n} h \text{div } u = \int_{\omega^n} f u. \quad (5.12)$$

Pour traiter le terme $-\beta \int_{\omega^n} h \text{div } u$, on résout exactement l'équation de continuité :

$$h = g e^{-\gamma \text{div } u}. \quad (5.13)$$

Remarque 5.12. Puisque g fait référence au terme \tilde{H}^n calculé au temps précédent, la relation (5.13) assure la positivité de g et h à chaque pas de temps si on suppose que $h_0(x) \geq 0$.

On a

$$\begin{aligned} & \beta \int_{\omega^n} h \operatorname{div} u \, dx = \beta \int_{\omega^n} g \operatorname{div} u e^{-\gamma \operatorname{div} u} \, dx \\ &= \beta \int_{\{x \in \omega^n \mid \operatorname{div} u \geq 0\}} g \operatorname{div} u e^{-\gamma \operatorname{div} u} \, dx + \beta \int_{\{x \in \omega^n \mid \operatorname{div} u < 0\}} g \operatorname{div} u e^{-\gamma \operatorname{div} u} \, dx, \\ & \leq \beta \int_{\{x \in \omega^n \mid \operatorname{div} u \geq 0\}} g \operatorname{div} u e^{-\gamma \operatorname{div} u} \, dx. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x e^{-\gamma x}$ est bornée sur $[0, +\infty)$: $x e^{-\gamma x} \leq M$, donc

$$\beta \int_{\{x \in \omega^n \mid \operatorname{div} u \geq 0\}} g \operatorname{div} u e^{-\gamma \operatorname{div} u} \, dx \leq \beta M \int_{\{x \in \omega^n \mid \operatorname{div} u \geq 0\}} g \, dx.$$

En utilisant les inégalités de Hölder et Young ($\int_{\omega^n} u f \leq \varepsilon \|u\|_{L^2(\omega^n)}^2 + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\omega^n)}^2$), on obtient les inégalités suivantes :

$$(1 - \varepsilon) \|u\|_{L^2(\omega^n)}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2(\omega^n)}^2 \leq \beta M \int_{\omega^n} g \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\omega^n)}^2. \quad (5.14)$$

On peut également obtenir une borne sur h dans $L^2(\omega^n)$. Pour se faire, on considère la décomposition orthogonale de $L^2(\omega^n)$ suivante [33, 62] :

$$L^2(\omega^n) = \nabla H^1(\omega^n) \oplus \operatorname{Rot} H_0^1(\omega^n). \quad (5.15)$$

Ainsi toute fonction $u \in L^2(\omega^n)$ peut être développée de la façon suivante : $u = \nabla p + \operatorname{Rot} q$ avec $p \in H^1(\omega^n)$ et $q \in \operatorname{Rot} H_0^1(\omega^n)$ solutions des problèmes scalaires :

$$(G) \begin{cases} \Delta p = \operatorname{div} u & \text{dans } \omega^n \\ \frac{\partial p}{\partial n} = u \cdot n = 0 & \text{sur } \gamma^n \end{cases} \quad \text{et} \quad (R) \begin{cases} -\Delta q = \operatorname{rot} u & \text{dans } \omega^n \\ q = 0 & \text{sur } \gamma^n. \end{cases}$$

(La fonction p peut être choisie telle que $\int_{\omega^n} p = 0$).

On considère ensuite la projection L^2 de l'équation (Q)₁ sur le champ des vecteurs gradients [14] :

$$\int_{\omega^n} (u - \alpha \Delta u + \beta \nabla h - f) \nabla l \, dx = 0, \quad (5.16)$$

où $l \in H^1(\omega^n)$. En posant $u = u_p + u_q$, avec $u_p = \nabla p$ et $u_q = \operatorname{Rot} q$, on obtient :

$$\int_{\omega^n} (u_p - \alpha \Delta u_p + \beta \nabla h - f) \nabla l \, dx = 0. \quad (5.17)$$

Ici, on a pris en compte le fait que les projections de u_q et $\text{Rot rot } u_q$ sur $\nabla H^1(\omega^n)$ sont nulles. L'équation (5.17) est vraie pour tout $l \in H^1(\omega^n)$. Ainsi, en rappelant que $\text{div } u_p = \Delta p$, on obtient :

$$\nabla(p - \alpha \Delta p + \beta h + \Theta) = 0, \quad (5.18)$$

où $\nabla \Theta$ représente la projection de f sur $\nabla H^1(\omega^n)$ pour le produit scalaire de L^2 . On obtient ainsi

$$p - \alpha \Delta p + \beta h + \Theta = \xi, \quad (5.19)$$

où ξ est une constante.

Remarque 5.13. Dans F.J. Chatelon *et al.* [10], les conditions aux limites $u \cdot n = \text{rot } u = 0$ sont utilisées pour la projection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Ces conditions permettent d'obtenir les mêmes résultats que dans le cas $\text{div } u = \text{rot } u = 0$ sur la frontière.

La borne L^2 sur h est alors obtenue en multipliant (5.19) par h et en intégrant sur ω^n ,

$$\beta \|h\|_{L^2(\omega^n)}^2 = \int_{\omega^n} h \xi dx - \int_{\omega^n} h \Theta dx + \alpha \int_{\omega^n} h \Delta p dx - \int_{\omega^n} h p dx. \quad (5.20)$$

Les termes du membre de droite étant estimés de la même façon que dans [10]. \square

5.6 Tests numériques

5.6.1 Dans un domaine idéalisé

Nous comparons les résultats obtenus en utilisant respectivement le modèle avec un domaine fixe (introduit dans la section 5.1) et notre approche à frontière libre. Afin de donner une interprétation précise de ces résultats numériques, on considère un domaine Ω pas trop grand par rapport au domaine occupé par le polluant $\omega(t)$ (à l'instant initial, la nappe occupe un disque de rayon 200 m centré dans un carré Ω de côté 1000 m). Pour résoudre le problème (\mathcal{P}_p) dans Ω , on utilise la méthode de Galerkin avec la base spéciale introduite dans le premier chapitre et qui vérifie $u \cdot n = \text{rot } u = 0$ sur Γ . Dans les résultats numériques qui suivent nous ne prenons pas en compte les effets de la couche d'eau ($C = 0, \nabla h' = 0$) et on considère un vent tournant f (figure 5.6).

On donne dans les figures 5.4 et 5.5 les maillages utilisés dans les deux approches numériques et dans la figure 5.7 la position de la nappe de polluant à l'instant initial.

Dans les figures 5.8 et 5.9 on présente la dérive du polluant à partir du modèle à domaine fixe et du problème à frontière libre après 1500 s. L'évolution de l'épaisseur du polluant est similaire pour les deux méthodes et on peut observer également que la nappe est déformée par le vent et l'effet de la gravité de la même façon.

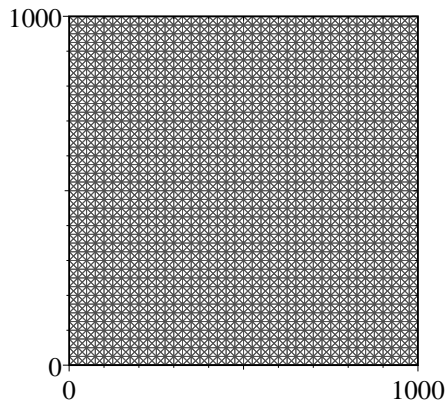
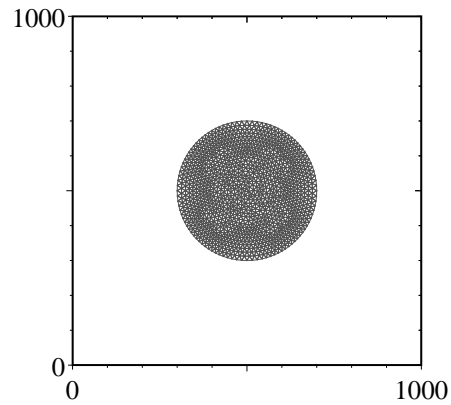
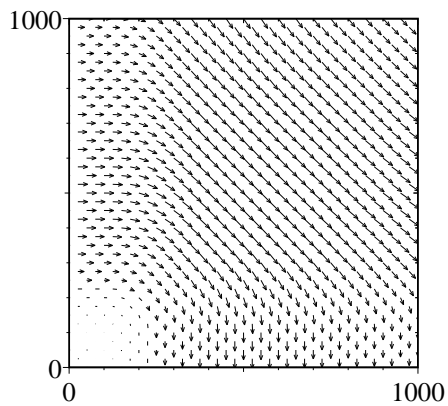
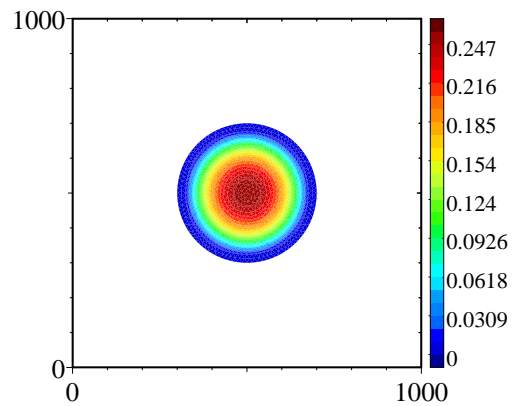
Figure 5.4: maillage du domaine fixe Ω Figure 5.5: maillage de $\omega(t)$ 

Figure 5.6: vent

Figure 5.7: hauteur de la nappe à $t = 0$

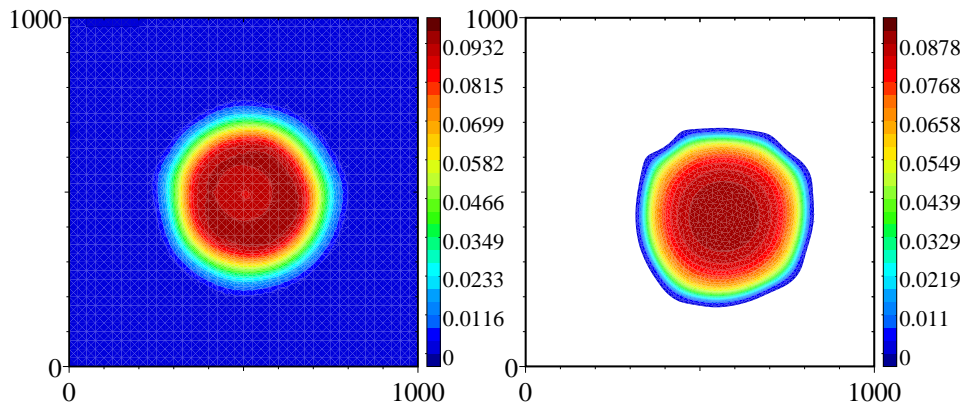


Figure 5.8: épaisseur de la nappe à $t = 1500$ s, modèle à domaine fixe

Figure 5.9: épaisseur de la nappe à $t = 1500$ s, modèle à frontière libre

5.6.2 Dans un cas réaliste

Tests caractéristiques

Nous testons ici la méthode ALE dans une situation réaliste : le barrage de Calacuccia (Corse, figure 5.10). Pour simuler l'écoulement de la couche d'eau on utilise le problème de shallow water. Sur la frontière, on applique une condition d'imperméabilité $W \cdot n = 0$ et une condition sur le rotationnel : $\text{rot } W = 0$ qui nous permettent d'utiliser la méthode de Galerkin avec la base spéciale mentionnée dans le premier chapitre. À partir de la vitesse moyennée sur la hauteur, on utilise un modèle 1D pour obtenir le courant de surface (figure 5.11). On observe un écoulement vers l'est le long des côtes et une recirculation par le centre du domaine.

L'objectif est la simulation de la dérive du polluant. On présente dans la figure 5.12 le maillage du domaine occupé par le polluant à l'instant initial $t_0 = 0$ et son épaisseur dans la figure 5.13. La frontière $\gamma(0)$ est représentée par un cercle de rayon trente mètres et l'épaisseur maximale $h_{max}(0)$ est environ de 25 centimètres.

On donne dans la figure 5.14 la position de ce polluant à l'instant initial t_0 .

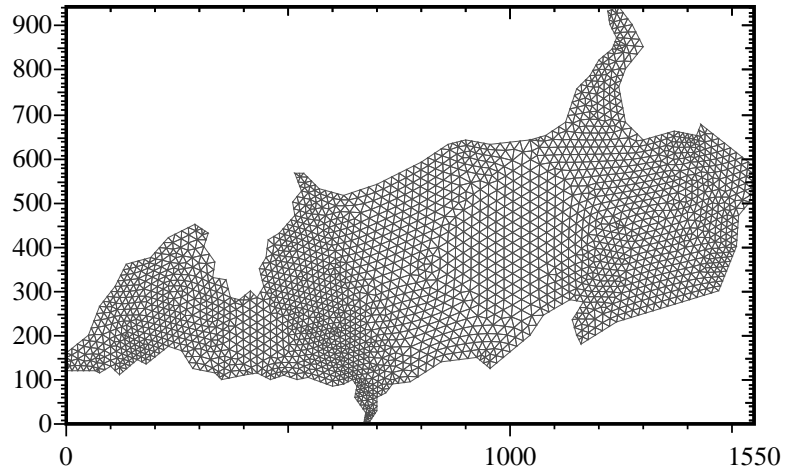
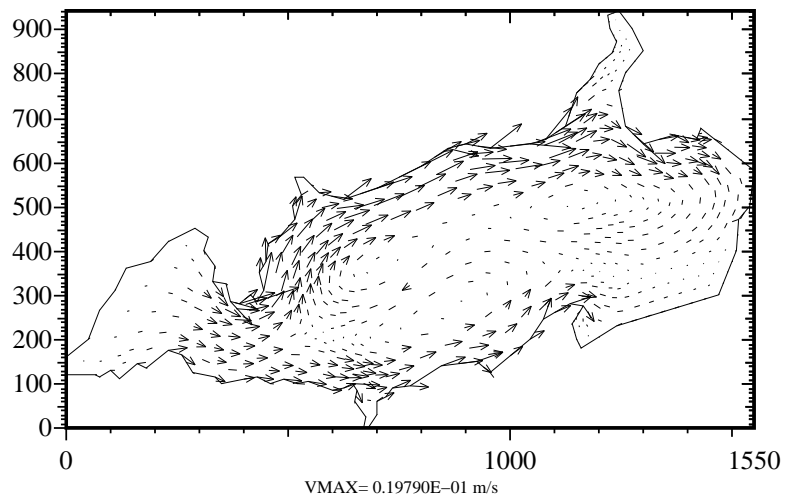
Figure 5.10: Barrage de Calacuccia (longueur max ≈ 1550 mètres)

Figure 5.11: Courant de surface

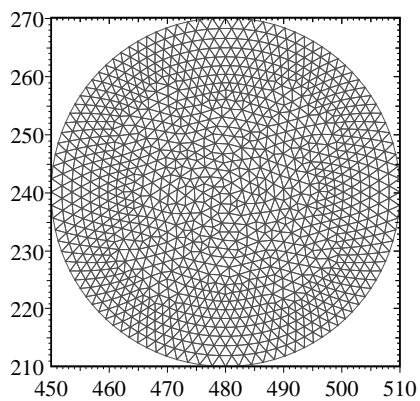
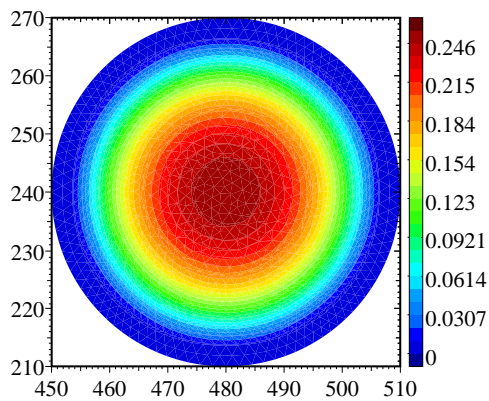
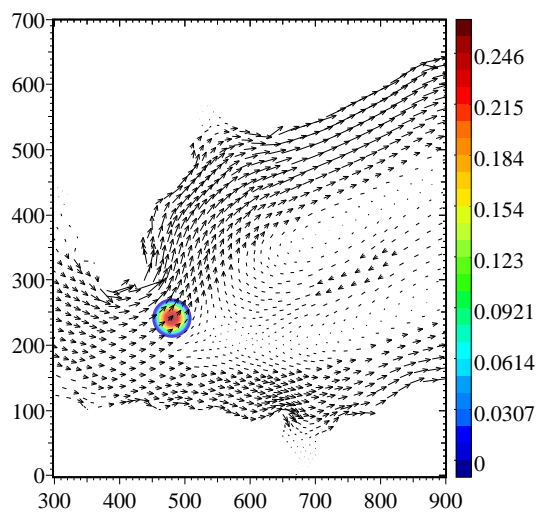
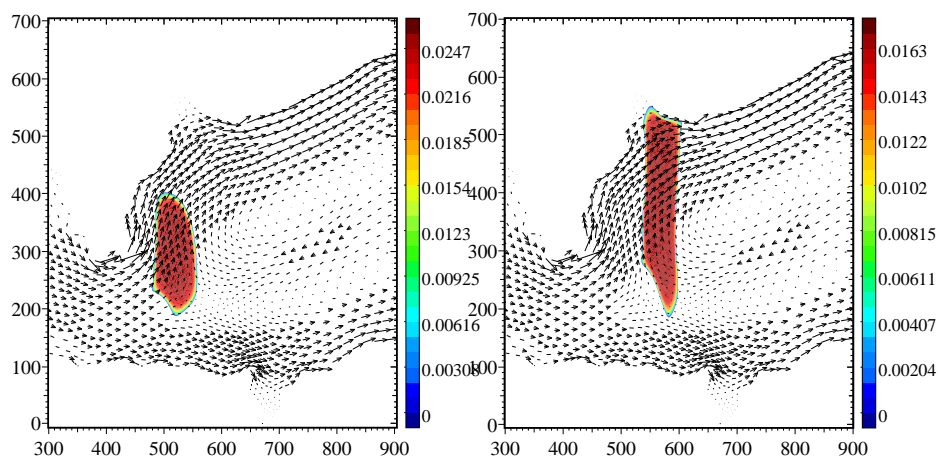
Figure 5.12: maillage du polluant($t = 0$)Figure 5.13: épaisseur du polluant ($t = 0$)

Figure 5.14: position du polluant dans le lac

Simulations numériques

Dans les figures 5.15 et 5.16, on donne l'évolution de la nappe de polluant en fonction du temps. On peut observer l'écoulement du polluant dû à la gravité et sa dérive vers le nord-est en suivant le courant de surface de l'eau. Notons que le polluant atteint les côtes au bout d'environ $t = 5$ heures. On présente ensuite le maillage du

Figure 5.15: $t = 3$ heuresFigure 5.16: $t = 5$ heures

domaine occupé par le polluant à $t = 3$ heures (figure 5.17). On peut remarquer la capacité de l'approche ALE à maintenir un maillage relativement régulier malgré les distortions du domaine. L'épaisseur et la vitesse du polluant à $t = 3$ heures sont données dans les figures 5.18 et 5.19. Les simulations que nous présentons ici sont arrêtées lorsque la nappe de polluant atteint la côte. Dans ce cas il faut un traitement particulier pour les particules de polluant touchant les côtes, on peut par exemple considérer qu'elles ont une vitesse nulle ou encore que la nappe se déverse sur la côte.

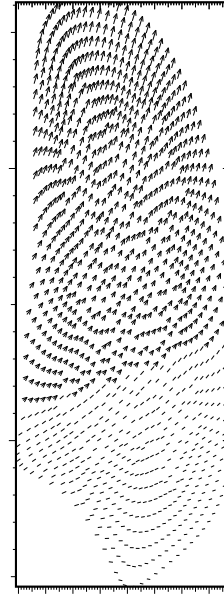
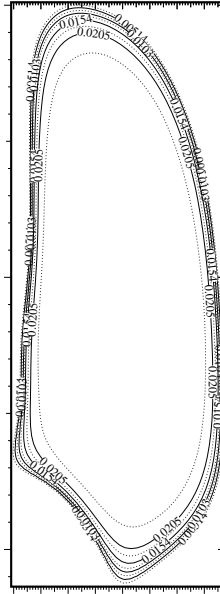
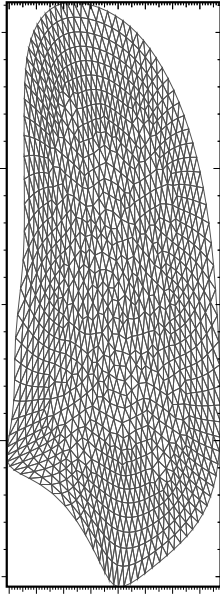


Figure 5.17: maillage

Figure 5.18: épaisseur

Figure 5.19: vitesse

Analyse du temps de calcul

Le test présenté dans la section 5.6.2 est exécuté en utilisant 25 fonctions tests pour la partie en gradient de l'écoulement et 25 fonctions tests pour la partie rotationnelle. Puisque ces fonctions tests sont obtenues en prenant le gradient et le rotationnel des solutions du problème aux valeurs propres (H), nous avons à calculer, à chaque pas de temps, seulement 25 fonctions tests. Dans notre simulation, le nombre de ces fonctions tests est suffisant pour calculer la solution avec une bonne précision, même lorsque le domaine devient relativement complexe. Les fonctions e_k vérifiant les problèmes scalaires (H) sont obtenues en utilisant la méthode des sous-espaces et une méthode des éléments finis avec des éléments de type Hermite avec trois degrés de liberté (v, v_x, v_y) par nœud, ce qui permet d'obtenir une expression numérique de ∇e_k et $\text{Rot } e_k$. Le coût de ce calcul représente une grande partie du temps CPU total (environ 97%), l'autre partie étant négligeable (déformation du maillage, calcul de C^n, α_i, β_i).

Le temps CPU de chaque partie de la simulation est donné dans le tableau 5.1 (sur un PC équipé d'un processeur Pentium 2.8 GHz et 512 Mo de RAM). Chaque itération correspondant à 10 secondes réelles pour l'écoulement.

	Temps CPU	%
Une itération	65,25s	100
Problèmes aux valeurs propres	63,14s	96,76
Calcul de C^n	0,72s	1,1
Déformation du maillage	0,02s	0,03

Table 5.1: Répartition du temps de simulation

Conclusion et Perspectives

Nous avons essayé, à travers ce document, de répondre à un certain nombre de questions, aussi bien pour valider certaines hypothèses que pour proposer des solutions pour la résolution des problèmes étudiés. Bien que chacune des parties ait été consacrée à l'étude d'un problème spécifique, nous pouvons apercevoir une forte complémentarité entre elles, notamment dans le dernier chapitre où nous introduisons un modèle bi-couche pour décrire le comportement d'une nappe de polluant sur la mer, la couche supérieure étant résolue à l'aide d'un problème à frontière libre. Un grand nombre de questions, tant sur le point de la modélisation que de l'analyse mathématique, restent posées; ce qui permet de dégager un certain nombre de perspectives sur lesquelles nous croyons qu'il est intéressant d'insister.

Tout d'abord, concernant la modélisation du comportement de polluants à la surface de la mer, il est important d'identifier les phénomènes physiques intervenants à la frontière de la nappe car ils jouent un rôle fondamental dans le traitement de la dynamique du problème. Pour obtenir des résultats plus conformes à la réalité, il est également nécessaire de prendre en compte d'autres facteurs comme l'évaporation ou l'apport de polluant en ajoutant par exemple un terme dans l'équation de conservation de la masse.

Le schéma lagrangien que nous avons introduit dans le quatrième chapitre nous a paru particulièrement bien adapté à la résolution de problèmes à frontière libre. Nous proposons d'utiliser cette méthode pour un problème de tsunami, pour lequel différents travaux ont déjà été menés [46, 47]. La prise en compte d'un domaine dépendant du temps nous permettra également de traiter le cas où l'eau recouvre les terres.

Enfin, nous nous sommes engagés dans un partenariat avec l'équipe "feux de forêts" de l'UMR 6134 de l'Université de Corse. Ces problèmes nous intéressent particulièrement car ils font intervenir des systèmes d'équations non linéaires et définis sur des domaines dépendant du temps. Le savoir faire acquis par notre équipe sur la résolution des problèmes à frontière libre devrait s'avérer utile dans l'analyse numérique de ces problèmes.

Bibliographie

- [1] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Volume 65 of Pure and applied mathematics. Academic press, inc., 1978.
- [2] M.I. Asensio, L. Ferragut, and J. Simon. Modelling of convective phenomena in forest fire. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat.*, 96(3):299–313, 2002.
- [3] J.T. Beale. Large-time regularity of viscous surface waves. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 84:307–352, 1984.
- [4] F. Bosseur, B. Di Martino, and P. Orenca. Resolution by galerkin method with a special basis of a geophysical flow in open sea: a calvi’s bay simulation. *Appl. Math. Modelling*, 24:73–94, 2000.
- [5] M.J. Castro, J.A. Garcia Rodriguez, J.M. González-Vida, J. Macias, C. Parés, and M.E. Vázquez-Cendón. Numerical simulation of two layer shallow water flows through channels with irregular geometry. *J. Comput. Phys.*, 195(1):202–235, 2004.
- [6] M.J. Castro, J.A. Garcia Rodriguez, J.M. González-Vida, and C. Parés. A parallel 2d finite volume scheme for solving systems of balance laws with non-conservative products: Application to shallow flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:2788–2815, 2006.
- [7] M.J. Castro, J.A. Garcia Rodriguez, J. Macias, C. Parés, and M.E. Vázquez-Cendón. A two-layer finite volume model for flows through channels with irregular geometry: computation of maximal exchange solutions. applications to the strait of gibraltar. *Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul.*, 9:241–249, 2004.
- [8] V. Casulli. Semi-implicit finite difference methods for the two dimensional shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 86:56–74, 1990.
- [9] D.C. Chang, S.G. Krantz, and E.M. Stein. h^p theory on a smooth domain in \mathbb{R}^n and elliptic boundary problems. *J. Funct. Anal.*, 114:286–347, 1993.

-
- [10] F.J. Chatelon, B. Di Martino, and P. Orenca. The nonlinear galerkin's method applied to shallow water equation. *M³AS*, 9(6):825–854, 1999.
- [11] F.J. Chatelon, M.L. Munoz-Ruiz, and P. Orenca. On a bi-layer shallow-water problem. *Nonlinear Anal.*, 4:139–171, 2003.
- [12] F.J. Chatelon and P. Orenca. Condition d'existence de solutions d'un problème de shallow water basé sur un modèle bicouche. *CRAS*, 324:515–518, 1988.
- [13] F.J. Chatelon and P. Orenca. On a non-homogeneous shallow-water problem. *Math. Modelling Numerical Anal.*, 31(1):27–55, 1997.
- [14] F.J. Chatelon and P. Orenca. Some smoothness and uniqueness results for a shallow water problem. *Adv. Differential Equations*, 3(1):155–176, 1998.
- [15] P.G. Ciarlet. *Elasticité tridimensionnelle*. Collection Recherches en Mathématiques Appliquées. Masson, 1986.
- [16] R. Coifman and G. Weiss. Extensions of hardy spaces and their use in analysis. *Bull. A.M.S.*, 83:569–645, 1977.
- [17] B. Cushman-Roisin. *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics*. Prentice Hall, 1994.
- [18] R. Dautrey and J.L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques*. Collection C.E.A. Masson, 1984.
- [19] Maria de la Luz Muñoz Ruiz. *Análisis de un modelo bicapa de aguas poco profundas*. Thèse de Doctorat, Universidad de Málaga, mai 2002.
- [20] B. Desjardins, M.J. Esteban, C. Grandmont, and P. Le Tallec. Weak solutions for a fluid-elastic structure interaction model. *Rev. Mat. Comput.*, 14(2):523–538, 2001.
- [21] J. Donéa, A. Huerta, and J. Sarrate. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for fluid-multi rigid bodies interaction problems. *Comput. Methods in Appl. Mech. and Eng*, 190:3171–3188, 2001.
- [22] C. Fefferman and E. Stein. h^p spaces of several variables. *Acta Math.*, 129:137–193, 1972.

-
- [23] F. Flori, B. Giudicelli, and P. Orenca. An existence result for a compressible fluid pattern coupled to a cylindrical shell. *Nonlinear Analysis - Real World and Applications*, 7:308–318, 2006.
- [24] F. Flori, C. Morelli, and P. Orenca. Convergence of a lagrangian scheme for a compressible navier-stokes model defined on a domain depending on time. *Nonlinear Analysis*, 61:759–780, 2005.
- [25] F. Flori and P. Orenca. On a nonlinear fluid-structure interaction problem defined on a domain depending on time. *Nonlinear Analysis, TMA*, 38:549–569, 1999.
- [26] F. Flori and P. Orenca. Fluid-structure interaction: analysis of a 3-d compressible model. *Annales de l'Institut Henri Poincaré - Nonlinear Analysis*, 17:753–777, 2000.
- [27] F. Flori, P. Orenca, and M. Peybernes. Convergence of a lagrangian scheme for a shallow water problem with free boundary. *soumis*.
- [28] F. Flori, P. Orenca, and M. Peybernes. Sur un problème de shallow water bicouche avec conditions aux limites de dirichlet. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 340(10):719–724, 2005.
- [29] G. Fourestey. Une méthode des caractéristiques d'ordre deux sur maillages mobiles pour la résolution des équations de navier-stokes incompressibles par éléments finis. *Rapport de Recherche, INRIA*, 4448, 2002.
- [30] C. Giacomoni and P. Orenca. On the two-dimensional compressible isentropic navier-stokes equations. *Math. Modelling Numerical Anal.*, 36:1091–1109, 2002.
- [31] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Springer-Verlag, 1983.
- [32] A.E. Gill. *Atmosphere - Ocean Dynamics*, volume 30 of *International geophysics series*. Academic press, 1982.
- [33] V. Giraut and P.A. Raviart. *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Series in Computational Mathematics. 1986.
- [34] P. Grisvard. *Boundary value problems in non-smooth domains*. 1981.

-
- [35] J. Hogan, C. Li, A. McIntosh, and K. Zhang. Global higher integrability of jacobians on bounded domains. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire*, 17(2):193–217, 2000.
- [36] Howard H. Hu. Direct simulation of flows of solid-liquid mixtures. *International Journal of Multiphase Flow*, 22(2):335–352, 1996.
- [37] T.J.R. Hughes, W. Liu, and T.K. Zimmermann. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comp. Methods in App. Mech. and Eng.*, 29:329–349, 1981.
- [38] Z. Kowalik and T.S. Murty. *Numerical Modelling of Ocean Dynamics*. Volume 5 of Ocean Engineering. World Scientific, 1993.
- [39] C.D. Levermore, M. Oliver, and E.S. Titi. Global well-posedness for models of shallow water in a basin with a varying bottom. *Indiana Univ. Math. J.*, 45:479–510, 1996.
- [40] C.D. Levermore, M. Oliver, and E.S. Titi. Global well-posedness for the lake equations. *Physica*, D98:492–509, 1996.
- [41] J.L. Lions, R. Temam, and S. Wang. On the equation of the large scale ocean. *Non linearity*, 5:1007–1053, 1992.
- [42] P.L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics*. vol.1. oxford university press., 1996.
- [43] P.L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics*. vol.2. oxford university press., 1998.
- [44] P.L. Lions. Bornes sur la densité pour les équations de navier-stokes compressibles isentropiques avec conditions aux limites de dirichlet. *C.R. Acad. Scie. Paris*, 328:659–662, 1999.
- [45] B. Di Martino. *Analyse par la méthode de Galerkin non linéaire de problèmes d’océanographie physique*. Thèse de Doctorat, Université de Corse, 1998.
- [46] B. Di Martino, F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenca. Analysis of a tsunami problem. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 334:551–556, 2002.

-
- [47] B. Di Martino, F. Flori, C. Giacomoni, and P. Orenca. Mathematical and numerical analysis of a tsunami problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 13:1489–1514, 2003.
- [48] B. Di Martino, C. Giacomoni, and P. Orenca. Analysis of some shallow water problems with rigid-lid hypothesis. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(6):779–799, 2001.
- [49] B. Di Martino, C. Giacomoni, and P. Orenca. A numerical approach to marine circulation using free surface or rigid-lid modeling: application in the bay of calvi. *Computational Fluids Dynamics*, 16:37–48, 2002.
- [50] B. Di Martino, P. Orenca, and M. Peybernes. Simulation of a spilled oil slick with a shallow water model with free boundary. *soumis à M³AS*.
- [51] B. Di Martino, P. Orenca, and M. Peybernes. Simulation of a spilled oil slick with a shallow water model with free boundary. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, à paraître.
- [52] B. Di Martino, P. Orenca, and M. Peybernes. On a bi-layer shallow water problem with the rigid-lid hypothesis. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 15:843–869, 2005.
- [53] B. Maury. Characteristics ale method for the unsteady 3d navier-stokes equations with a free surface. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 6:175–188, 1996.
- [54] J.F. Minster. *La machine océan*. Fluid Mechanics and its Applications. Flammarion, 1998.
- [55] M.L. Munoz-Ruiz. On a non-homogeneous bi-layer shallow-water problem: smoothness and uniqueness results. *Nonlinear Anal.*, 59(3):253–282, 2004.
- [56] M.L. Munoz-Ruiz and M.J. Castro-Diaz. On a one-dimensional bi-layer shallow-water problem. *Nonlinear Anal.-Theor*, 53(5):567–600, 2003.
- [57] J.C.J. Nihoul. *Modelling of Marine Systems*. Elsevier Oceanography series. Elsevier Scientific Publishing Compagny, 1975.
- [58] J.C.J. Nihoul. *Modèles mathématiques et Dynamique de l'environnement*. Elsevier Publications, 1977.

-
- [59] J.C.J. Nihoul. *Hydrodynamic models of shallow continental seas - Application to the North Sea.* , Etienne Riga, 1982.
- [60] J.C.J. Nihoul. *Introduction à la mécanique des fluides géophysiques.* , Association Université de Corse-Université de Liège, 1987.
- [61] OPA. Ocean general circulation model. Version 8:Reference Manual, Avril 1997.
- [62] P. Orenca. Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes d'océanographie physique en dimension deux. *CRAS*, 314:587–590, 1992.
- [63] P. Orenca. Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water. *Arch. Rational Mach. Anal.*, 130:183–204, 1995.
- [64] J. Pedlosky. *Geophysical fluid dynamics.* Springer, 1986.
- [65] J. Pedlosky. *Ocean Circulation Theory.* Springer, 1996.
- [66] R.J. Di Perna and P.L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98:511–547, 1989.
- [67] O. Pironneau. On the transport diffusion algorithm and its application to the navier-stokes equations. *Numer. Math.*, 38:309–332, 1982.
- [68] O. Pironneau, J. Liou, and T. Tezduyar. Characteristic-galerkin and galerkin/least squares space-time formulations for the advection-diffusion equation with time-dependent domains. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 100(1):117–141, 1992.
- [69] V.A. Solonikov. The solvability of the problem of the motion of a viscous incompressible fluid that is bounded by a free surface. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 41(6):1388–1424, 1977.
- [70] V.A. Solonikov. Unsteady motion of a finite mass of fluid bounded by a free surface. *J. Soviet Math*, 40:672–686, 1988.
- [71] R. Temam. *Navier-stokes equations.* North Holland, 1984.
- [72] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, Fixed Point Theorems.* Vol. I Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Springer, 1986.