



**HAL**  
open science

## Contribution a l'étude de modeles de turbulence au second ordre

Anne Cadiou

► **To cite this version:**

Anne Cadiou. Contribution a l'étude de modeles de turbulence au second ordre. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 1996. Français. NNT : . tel-00086507

**HAL Id: tel-00086507**

**<https://theses.hal.science/tel-00086507>**

Submitted on 4 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CONTRIBUTION A L'ETUDE DE MODELES DE TURBULENCE AU SECOND ORDRE

Thèse de DOCTORAT

Spécialité : Dynamique des Fluides et des Transferts

ECOLE DOCTORALE  
SCIENCES POUR L'INGENIEUR  
DE NANTES

présentée et soutenue publiquement par :

**Anne CADIOU**

le 28 novembre 1996  
à l'Ecole Centrale de Nantes

rapporteurs :

Roland SCHIESTEL	Directeur de recherche CNRS, IRPHE, Marseille	<i>Rapporteur</i>
Claude CAMBON	Directeur de recherche CNRS, ECL, Lyon	<i>Rapporteur</i>
Arne JOHANSSON	Professeur, KTH, Stockholm	<i>Rapporteur</i>

membres du jury :

Roland SCHIESTEL	Directeur de recherche CNRS, IRPHE, Marseille	<i>Président</i>
Claude CAMBON	Directeur de recherche CNRS, ECL, Lyon	<i>Examineur</i>
Bertrand AUPOIX	Maître de recherche, CERT-DERAT, Toulouse	<i>Examineur</i>
Laurent JACQUIN	Maître de recherche, ONERA, Paris	<i>Examineur</i>
Jean PIQUET	Professeur, ECN, Nantes	<i>Examineur</i>
Michel VISONNEAU	Chargé de recherche CNRS, ECN, Nantes	<i>Examineur</i>

Directeur de thèse : Jean PIQUET  
Laboratoire de Mécanique des Fluides, URA 1217 CNRS

## Remerciements

*Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein de la Division Modélisation Numérique du Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Ecole Centrale de Nantes, sous la direction de Monsieur Jean PIQUET.*

*Je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Jean PIQUET, professeur à l'ECN et responsable du Laboratoire de Mécanique des Fluides, qui a encadré et soutenu ce travail de thèse.*

*Je remercie également Monsieur Roland SCHIESTEL, directeur de recherche au CNRS à l'IRPHE à Marseille, d'avoir consacré une partie de son temps comme rapporteur et d'avoir accepté de présider le jury. Ma reconnaissance s'adresse aussi à Monsieur Claude CAMBON, directeur de recherche au CNRS à l'Ecole Centrale de Lyon, pour avoir effectué des commentaires détaillés, avoir bien voulu rédiger un rapport de thèse et participer au jury. Je remercie sincèrement Monsieur Arne JOHANSSON, professeur au KTH à Stockholm pour les discussions que nous avons eues et pour avoir pris le temps de porter un jugement sur mon travail.*

*Je souhaite aussi remercier Monsieur Bertrand AUPOIX, maître de recherche au CERT-DERAT à Toulouse, Monsieur Laurent JACQUIN, maître de recherche à l'ONERA à Paris et Monsieur Michel VISONNEAU, chargé de recherche au CNRS à Nantes, de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.*

*Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Gan Bo DENG, ingénieur de recherche à Nantes et à Monsieur Michel VISONNEAU pour leur disponibilité et pour les conseils qu'ils m'ont apportés au cours de cette thèse.*

*Enfin, je n'oublie pas tous ceux qui m'ont aidé d'une façon ou d'une autre, et plus particulièrement les membres de la Division Modélisation Numérique, pour le soutien chaleureux qu'ils m'ont apporté.*

*J'associe également à ce travail toutes les personnes qui ont participé à la rédaction de ce mémoire.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Relations constitutives et turbulence</b>	<b>5</b>
2.1	Construction d'une fonctionnelle isotrope . . . . .	6
2.1.1	Description du groupe de transformation . . . . .	6
2.1.2	Description d'un polynôme de matrices . . . . .	6
2.1.3	Application du théorème de Cayley-Hamilton . . . . .	7
2.2	Application à la modélisation algébrique du tenseur de Reynolds . . . . .	8
2.3	Application à la modélisation du second ordre . . . . .	10
2.3.1	Relation constitutive pour le terme lent . . . . .	10
2.3.2	Relation constitutive pour le terme rapide . . . . .	11
2.3.3	Relation constitutive pour les termes de transports turbulents . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Modélisations classiques</b>	<b>15</b>
3.1	Modèles au second ordre . . . . .	16
3.1.1	Modélisation de l'équation du tenseur de Reynolds . . . . .	16
3.1.2	Modélisation de l'équation du taux de dissipation . . . . .	25
3.2	Modèles algébriques des contraintes . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Comportement de la turbulence au voisinage d'une paroi</b>	<b>35</b>
4.1	Comportements asymptotiques des quantités turbulentes . . . . .	36
4.2	Equations d'évolution des quantités turbulentes . . . . .	39
4.2.1	Budget des équations de Reynolds . . . . .	40
4.2.2	Budget de l'équation du taux de dissipation . . . . .	45
4.3	Modélisation à faible nombre de Reynolds . . . . .	46
4.3.1	Modélisation des équations de transport des corrélations doubles . . . . .	46
4.3.2	Modélisation de l'équation pour $\varepsilon$ . . . . .	51
4.4	Synthèses de modèles complets . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Réalisabilité des modèles classiques du second ordre</b>	<b>67</b>
5.1	Notion de réalisabilité . . . . .	67
5.2	Caractérisation des structures turbulentes . . . . .	68
5.2.1	Propriétés d'une forme quadratique positive . . . . .	68
5.2.2	Application au tenseur de Reynolds . . . . .	68
5.3	Formulation des contraintes de réalisabilité . . . . .	71
5.3.1	Conditions pratiques . . . . .	71
5.3.2	Application aux modèles de type $K - \varepsilon$ . . . . .	72

5.3.3	Application aux modèles du second ordre . . . . .	73
5.4	Méthode de construction de modèles du second ordre réalisable . . . . .	74
5.4.1	Terme lent . . . . .	75
5.4.2	Terme rapide . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Modélisation classique du tenseur des corrélations pression-déformation</b>	<b>87</b>
6.1	Equations homogènes . . . . .	87
6.2	Modèles classiques du terme rapide . . . . .	91
6.2.1	Naot, Shavit et Wolfshtein . . . . .	91
6.2.2	Launder, Reece et Rodi . . . . .	92
6.2.3	Speziale, Sarkar et Gatski . . . . .	92
6.2.4	Fu, Launder et Tselepidakis . . . . .	93
6.2.5	Shih et Lumley . . . . .	94
6.2.6	Ristorcelli, Lumley et Abid . . . . .	94
6.3	Modèles classiques du terme lent . . . . .	96
6.3.1	Rotta . . . . .	96
6.3.2	Lumley . . . . .	97
6.3.3	Sarkar et Speziale . . . . .	97
6.3.4	Fu, Launder et Tselepidakis . . . . .	97
6.3.5	Ristorcelli, Lumley et Abid . . . . .	98
6.4	Cas tests homogènes . . . . .	98
6.4.1	Déformations irrotationnelles . . . . .	100
6.4.2	Ecoulement avec effet de rotation moyenne . . . . .	135
6.5	Commentaires . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation par une équation de transport</b>	<b>147</b>
7.1	Equation de transport du tenseur de $X_{ijpq}$ . . . . .	148
7.1.1	Evolution dans l'espace spectral . . . . .	148
7.1.2	Intégration dans l'espace physique . . . . .	151
7.1.3	Propriétés des tenseurs et contraintes de base . . . . .	152
7.2	Principe de la modélisation . . . . .	157
7.3	Proposition de terme rapide . . . . .	157
7.3.1	Propriétés et expression de la fonctionnelle . . . . .	158
7.3.2	Etablissement des contraintes de base . . . . .	160
7.3.3	Résolution des contraintes de base . . . . .	161
7.3.4	Calibration du terme rapide . . . . .	164
7.3.5	Test du terme rapide . . . . .	180
7.4	Proposition de terme lent . . . . .	206
7.4.1	Hypothèses et simplifications . . . . .	206
7.4.2	Contraintes de base . . . . .	208
7.4.3	Commentaire et résolution du système couplé des tenseurs du second ordre	209
7.4.4	Détermination des constantes . . . . .	212
7.4.5	Test du terme lent . . . . .	214
7.5	Test du modèle complet . . . . .	218
7.5.1	Déformation pure . . . . .	218
7.5.2	Cisaillement en repère tournant . . . . .	223

7.5.3	Rotation pure . . . . .	224
7.6	Commentaires sur les choix du modèle . . . . .	227
7.6.1	Ecriture des fonctionnelles . . . . .	227
7.6.2	Comportement en rotation . . . . .	227
7.6.3	Extension au cas d'une turbulence inhomogène . . . . .	228
<b>8</b>	<b>Canal en rotation</b>	<b>229</b>
8.1	Présentation du cas test . . . . .	229
8.2	Formulation du problème . . . . .	230
8.2.1	Configuration de l'écoulement et équations du mouvement . . . . .	230
8.2.2	Formulation adimensionnelle . . . . .	233
8.3	Méthode numérique . . . . .	235
8.3.1	Formulation conservative et linéarisation des équations . . . . .	235
8.3.2	Discrétisation spatiale . . . . .	236
8.3.3	Discrétisation temporelle . . . . .	237
8.3.4	Résolution du couplage vitesse-pression . . . . .	238
8.3.5	Initialisation des calculs et conditions aux limites . . . . .	240
8.4	Écoulement turbulent à faible nombre de Reynolds . . . . .	240
8.4.1	Modèle de Chien . . . . .	243
8.4.2	Modèle de Shima . . . . .	247
8.4.3	Modèle de Craft et Launder . . . . .	255
8.4.4	Modèle de Launder et Tselepidakis . . . . .	274
8.5	Écoulement turbulent à faible nombre de Reynolds en présence de rotation . . . . .	288
<b>9</b>	<b>Mise en oeuvre d'un modèle au second ordre</b>	<b>307</b>
9.1	Présentation du code de calcul Horus et conventions . . . . .	307
9.2	Présentation d'un système de coordonnées curvilignes . . . . .	309
9.2.1	Expression des bases . . . . .	310
9.2.2	Dérivées . . . . .	311
9.2.3	Expression des opérateurs différentiels usuels . . . . .	312
9.3	Formation des opérateurs de convection-diffusion . . . . .	314
9.3.1	Plan physique . . . . .	314
9.3.2	Plan de calcul . . . . .	317
9.3.3	Opérateurs de diffusion et réalisabilité . . . . .	319
9.4	Particularités numériques associées à un modèle au second ordre . . . . .	319
9.5	Résolution du couplage vitesse-pression-turbulence . . . . .	320
9.5.1	Discrétisation des équations . . . . .	320
9.5.2	Algorithme de résolution . . . . .	322
9.5.3	Coefficients de relaxation et conditions aux limites . . . . .	323
9.6	Écoulement dans le canal tridimensionnel de Davis et Gessner . . . . .	326
9.6.1	Présentation du cas test . . . . .	326
9.6.2	Principe de la validation . . . . .	327
9.6.3	Présentation des résultats . . . . .	328
9.6.4	Commentaires . . . . .	360
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>361</b>

<b>A</b>	<b>Méthodologie des fermetures statistiques en un point</b>	<b>365</b>
A.1	Description statistique du mouvement . . . . .	365
A.1.1	Notion de moyenne de Reynolds . . . . .	366
A.1.2	Equations du mouvement moyen . . . . .	367
A.1.3	Equations du mouvement fluctuant . . . . .	367
A.2	Equations d'évolution des quantités statistiques . . . . .	368
A.2.1	Evolution des corrélations doubles . . . . .	368
A.2.2	Evolution du tenseur des taux de dissipation . . . . .	369
A.2.3	Evolution de l'énergie cinétique turbulente . . . . .	370
A.2.4	Evolution du taux de dissipation . . . . .	370
<b>B</b>	<b>Réduction d'une base fonctionnelle constituée de tenseurs du second ordre</b>	<b>373</b>
B.1	Théorème de Cayley-Hamilton généralisé . . . . .	373
B.2	Tenseurs indépendants formés par deux tenseurs d'ordre trois . . . . .	375
B.2.1	Extension d'un produit de matrices . . . . .	375
B.2.2	Réduction des extensions . . . . .	375
B.2.3	Bases d'intégrité minimales . . . . .	378
B.3	Application aux tenseurs des taux de déformation et de rotation . . . . .	378
B.3.1	Bases minimales fonctionnelles et invariantes . . . . .	379
B.3.2	Relations de Cayley-Hamilton appliquées à la base . . . . .	379
B.4	Application au tenseur d'anisotropie et aux tenseurs des taux de déformation et de rotation . . . . .	381
B.4.1	Bases minimales fonctionnelles et invariantes . . . . .	382
B.4.2	Relations de Cayley-Hamilton appliquées à la base . . . . .	382
<b>C</b>	<b>Modèles algébriques explicites</b>	<b>385</b>
C.1	Technique de Pope . . . . .	387
C.2	Développements en série de Taylor . . . . .	388
<b>D</b>	<b>Modèle de Shima</b>	<b>395</b>
<b>E</b>	<b>Modèle de Craft et Launder</b>	<b>399</b>
<b>F</b>	<b>Modèle de Launder et Tselepidakis</b>	<b>405</b>
<b>G</b>	<b>Equations de Navier-Stokes en repère relatif</b>	<b>409</b>
<b>H</b>	<b>Changement de repère et objectivité</b>	<b>415</b>
H.1	Changement de repère . . . . .	415
H.1.1	Transformations Euclidiennes classiques . . . . .	415
H.1.2	Notion d'objectivité . . . . .	416
H.2	Règles de transformations d'un repère de référence à un repère mobile . . . . .	416
H.2.1	Notations . . . . .	416
H.2.2	Vitesse et gradient de vitesse . . . . .	417
H.2.3	Tenseurs des taux de déformation et de rotation . . . . .	419
H.2.4	Accélération . . . . .	419
H.3	Application aux équations de Navier-Stokes . . . . .	421

<b>I</b>	<b>Evolution du tenseur de Reynolds dans ses axes propres</b>	<b>423</b>
<b>J</b>	<b>Approche spectrale de la turbulence</b>	<b>425</b>
J.1	Transformation de Fourier . . . . .	425
J.2	Equations du mouvement turbulent dans l'espace physique . . . . .	426
J.3	Passage dans l'espace spectral . . . . .	427
J.3.1	Transformée de Fourier des équations du mouvement turbulent . . . . .	427
J.3.2	Moments du second ordre . . . . .	430
J.3.3	Corrélations triples de vitesse . . . . .	431
J.3.4	Equation d'évolution des moments du second ordre . . . . .	431
J.4	Correspondances avec les fermetures classiques en un point . . . . .	432
J.4.1	Corrélation pression-déformation . . . . .	432
J.4.2	Transfert . . . . .	433
<b>K</b>	<b>Théorie de distorsion rapide</b>	<b>435</b>
K.1	Equations de base . . . . .	435
K.2	Exemples de solutions analytiques . . . . .	438
K.2.1	Déformation pure . . . . .	438
K.2.2	Cisaillement pur . . . . .	439
K.2.3	Rotation pure . . . . .	440
<b>L</b>	<b>Modélisation classique du tenseur des corrélations pression-déformation par <math>X_{ijpq}</math></b>	<b>443</b>
<b>M</b>	<b>Ecritures du modèle classique du tenseur des corrélations pression-déformation</b>	<b>449</b>
M.1	Expression en fonction du tenseur d'anisotropie . . . . .	449
M.2	Expression en fonction du tenseur de Reynolds . . . . .	450
M.3	Correspondance entre les bases tensorielles . . . . .	450
M.3.1	Passage de la base de Reynolds à la base du tenseur d'anisotropie . . . . .	450
M.3.2	Passage de la base du tenseur d'anisotropie à la base de Reynolds . . . . .	451
M.4	Correspondance entre les coefficients . . . . .	452
<b>N</b>	<b>Ecriture des modèles de type Umist sous la forme classique</b>	<b>453</b>
N.1	Expression du terme lent . . . . .	453
N.2	Expression du terme rapide . . . . .	453
N.2.1	Modèle de type Fu, Launder et Tselepidakis . . . . .	454
N.2.2	Modèle de type Craft et Launder . . . . .	456
<b>O</b>	<b>Etude du terme lent du tenseur de corrélation pression - déformation</b>	<b>461</b>
O.1	Equations du mouvement . . . . .	461
O.1.1	Expression générale du retour à l'isotropie . . . . .	461
O.1.2	Modélisation classique . . . . .	463
O.2	Contraintes de réalisabilité . . . . .	463
O.2.1	Expression en fonction des invariants . . . . .	463
O.2.2	Troncature . . . . .	465
O.3	Solutions asymptotiques . . . . .	465
O.3.1	Points fixes du système des invariants complet . . . . .	465
O.3.2	Cas fonction de $II$ . . . . .	466



O.3.3	Cas fonction de $III$ . . . . .	470
O.3.4	Cas fonction de $F$ uniquement . . . . .	474
O.3.5	Fonctionnelle incomplète . . . . .	476
O.4	Tests des formulations et commentaires . . . . .	477
<b>P</b>	<b>Matrice de passage de <math>X_{27}</math> à <math>Y_{16}</math></b>	<b>483</b>
P.1	Vecteurs de base . . . . .	483
P.2	Matrice de passage . . . . .	483
<b>Q</b>	<b>Comparaison du modèle rapide de <math>X_{27}</math> avec le modèle de Johansson</b>	<b>485</b>
Q.1	Rappel des contraintes de base . . . . .	485
Q.2	Résolution des contraintes de base . . . . .	486
Q.3	Vérification de la contrainte de normalisation faible . . . . .	488
Q.4	Remarque sur la calibration des modèles . . . . .	489
<b>R</b>	<b>Règles de transformation dans la base covariante physique</b>	<b>491</b>
R.1	Cas d'une base covariante physique quelconque . . . . .	491
R.1.1	Définition du symbole de Christoffel physique . . . . .	492
R.1.2	Gradients et dérivées covariantes physiques . . . . .	492
R.1.3	Divergences . . . . .	493
R.1.4	Laplaciens . . . . .	495
R.1.5	Dérivée seconde covariante . . . . .	496
R.2	Application à une base covariante orthogonale . . . . .	502
R.2.1	Expression des symboles de Christoffel classique et physique . . . . .	502
R.2.2	Dérivées covariantes et gradients . . . . .	503
R.2.3	Divergences . . . . .	505
R.2.4	Laplaciens . . . . .	506
R.2.5	Relations d'Euclidicité . . . . .	509
R.2.6	Dérivées secondes covariantes . . . . .	510
R.2.7	Termes de convection . . . . .	532
R.2.8	Termes de diffusion . . . . .	534
R.2.9	Equations du mouvement d'un modèle à deux équations . . . . .	537
R.2.10	Equations du mouvement d'un modèle du second ordre . . . . .	540
R.3	Application à un système de coordonnées cylindriques . . . . .	548
R.3.1	Gradients . . . . .	550
R.3.2	Divergences . . . . .	551
R.3.3	Laplaciens . . . . .	551
R.3.4	Dérivée covariante seconde . . . . .	552
R.3.5	Equations du mouvement d'un modèle à deux équations . . . . .	554
R.3.6	Equations du mouvement d'un modèle du second ordre . . . . .	556
R.4	Transformation curviligne . . . . .	564
R.4.1	Calcul du Jacobien de la transformation . . . . .	565
R.4.2	Calcul des métriques . . . . .	566
R.4.3	Gradient . . . . .	567
R.4.4	Divergence . . . . .	568
R.4.5	Laplacien . . . . .	568
R.4.6	Dérivée seconde . . . . .	569

R.4.7	Equations du mouvement d'un modèle à deux équations . . . . .	569
R.4.8	Equations du mouvement d'un modèle du second ordre . . . . .	575
<b>S</b>	<b>Corrections numériques sur les invariants</b>	<b>583</b>
S.1	Rappel de la condition de réalisabilité scalaire . . . . .	583
S.2	Vérification de la limite bidimensionnelle . . . . .	584
S.3	Vérification d'aucun des critères . . . . .	586
S.4	Vérification de la limite axisymétrique . . . . .	586
S.5	Conclusion . . . . .	587



---

# Chapitre 1

## Introduction

La turbulence ne constitue pas une propriété intrinsèque du fluide. Elle est caractérisée à l'aide d'un ensemble d'observations sur l'état du mouvement. Un écoulement turbulent tend d'une façon générale à qualifier un état d'agitation du mouvement où les vitesses évoluent de façon apparemment irrégulière, désordonnée et chaotique, si bien que le comportement du détail des trajectoires des particules fluides semble imprévisible à long terme. Ces mouvements aléatoires s'effectuent dans toutes les directions, même lorsque l'écoulement possède un mouvement d'ensemble évoluant dans une direction privilégiée, comme c'est le cas dans un canal plan. La turbulence est par nature un phénomène tridimensionnel. A ces fluctuations de vitesse sont associées des fluctuations de pression suivant la loi du mouvement du fluide qui est supposé satisfaire à chaque instant les équations de Navier-Stokes. Si l'écoulement turbulent a un comportement aléatoire, il est également rotationnel, et il existe en particulier des fluctuations du rotationnel de vitesse. Ce mouvement tourbillonnaire est présent sur un très large éventail d'échelles de temps et d'espace, qui donne à l'observation l'effet d'un enchevêtrement de tourbillons de structures et durées de vie très variées. En réalité, les plus petites échelles présentes dans l'écoulement sont fixées par la viscosité du fluide, alors que les plus larges échelles sont limitées par la taille des cisaillements présents dans le mouvement moyen, c'est-à-dire en pratique, par les limitantes de l'écoulement. Les dimensions des plus grosses structures sont donc de l'ordre de grandeur du domaine fluide. L'apparition de la turbulence a des causes très diverses. Elle est due le plus souvent à l'augmentation du nombre de Reynolds de l'écoulement, exprimant le rapport entre les termes convectifs et les forces d'origine visqueuse, mais elle peut également être influencée par des forces volumiques d'origine extérieure, comme les forces de Coriolis.

L'accès aux détails du mouvement turbulent est encore relativement difficile et limité à des écoulements particuliers. Dans la majorité des écoulements d'intérêt pratique, ces informations, notamment les variations temporelles des propriétés de l'écoulement, dues aux fluctuations du mouvement turbulent, sont d'ailleurs souvent secondaires et l'attention est principalement portée sur l'évolution de paramètres comme les champs de vitesse et de pression, évalués en moyenne sur un temps caractéristique suffisamment long devant celui du mouvement fluctuant. C'est pourquoi les équations de Navier-Stokes régissant le mouvement instantané peuvent être traitées par une approche statistique, dont l'intérêt a été présenté dès 1895 par O. Reynolds [111] et qui est désormais classique. L'application d'une opération de moyenne sur les équations du mouvement introduit, du fait du caractère non-linéaire des termes de convection, des corrélations entre les fluctuations de vitesse, qui, lorsqu'elles sont évaluées en un point, forment le tenseur de Reynolds. Ces moments du second ordre sont des inconnues dont la représentation approchée est à la base

de la modélisation statistique en un point de la turbulence.

Cette étude porte sur les fermetures, dites au second ordre, qui proposent de modéliser le tenseur de Reynolds par l'intermédiaire de son équation de transport.

L'une des caractéristiques principales des fermetures au second ordre réside dans la possibilité de représenter les différents mécanismes qui régissent l'évolution des corrélations doubles. Les équations du tenseur de Reynolds assurent en outre une représentation exacte des termes de production, qui résultent de l'interaction des contraintes de Reynolds et des gradients du mouvement moyen. Cette propriété est intéressante dans la mesure où les niveaux de contrainte turbulente sont en première approximation gouvernés par leur taux de production respectif. Elle permet également de justifier qualitativement d'une meilleure prise en compte des phénomènes physiques liés à la présence de courbures ou de forces de Coriolis par rapport à une fermeture algébrique directe sur le tenseur de Reynolds. Les modèles du second ordre apparaissent par conséquent comme le niveau d'approximation le plus naturel dans le contexte d'un traitement statistique des équations de Navier-Stokes en un point.

La modélisation des mécanismes mis en jeu dans ces équations s'appuie sur un certain nombre de contraintes de nature physique et mathématique. Les fermetures reposent sur l'existence de relations constitutives, notions directement issues de la mécanique des milieux continus, qui permettent d'exprimer chaque terme comme une fonctionnelle locale dont les arguments sont essentiellement choisis par la physique à représenter et dont la forme est imposée par l'expression exacte du tenseur inconnu dont il convient de respecter les propriétés mathématiques. Ces outils sont intéressants parce qu'ils permettent d'écrire les fermetures de façon relativement systématique, tout en respectant au mieux les contraintes initialement imposées. Leur mise en oeuvre est présentée dans le premier chapitre de ce rapport sous un aspect très général.

Le développement des fermetures s'effectue classiquement dans un premier temps dans l'approximation des grands nombres de Reynolds. Cette hypothèse permet de séparer les phénomènes physiques caractéristiques des grosses structures turbulentes de celles de petites structures responsables des phénomènes de dissipation visqueuse et reste par conséquent une étape précieuse dans la construction d'un modèle de turbulence. Les différents mécanismes présents dans les équations des modèles au second ordre sont décrits en annexe et les expressions classiques de leur modélisation dans l'approximation des grands nombres de Reynolds sont présentées au second chapitre. Le traitement particulier des modèles en présence de parois et les corrections apportées dans le cas des faibles nombres de Reynolds sont abordés au chapitre suivant. Cette étude s'appuie classiquement sur le développement asymptotique des termes au voisinage immédiat de la paroi et sur les données de simulation directe bas-Reynolds de Kim, Moin et Moser [68]. La synthèse des modèles au second ordre bas-Reynolds étudiés par la suite y est présentée. Ces modèles sont choisis pour leur traitement du tenseur des corrélations pression-déformation. L'étude de ce terme, dans laquelle la notion de réalisabilité des modèles tient une place importante, a été largement effectuée dans la littérature dans le cadre des écoulements homogènes. L'application de ce principe est exposée au chapitre cinq. L'hypothèse d'homogénéité, qui néglige l'action du mouvement turbulent sur le champ moyen constitue un outil précieux de test des fermetures turbulentes. Elle permet d'une part de comparer les réponses des modèles à un état donné du champ moyen et d'autre part de faciliter le développement de la base d'une fermeture,

---

en raison de la simplification considérable des équations qu'elle entraîne. Ce niveau d'approximation permet de mettre en évidence certaines des lacunes bien connues des modèles au second ordre, notamment le traitement des écoulements fortement rotationnels. En se basant sur une description de la turbulence en série de Fourier, une formulation originale faisant intervenir une équation de transport supplémentaire est proposée afin de mieux représenter l'action d'une rotation sur un écoulement turbulent homogène. Les performances du modèle sont comparées à des fermetures classiques sur les écoulements servant généralement de tests homogènes et qui comprennent des distorsions irrotationnelles aussi bien que des écoulements de rotation pure. Cette étude est développée sur deux chapitres, séparant la sélection des cas tests homogènes et des formulations classiques de la construction et la validation du modèle proposé.

La simulation d'écoulements réalistes implique nécessairement de prendre en compte à la fois les phénomènes inhomogènes et l'influence du nombre de Reynolds. Le cas test le plus simple, permettant d'isoler ces effets est constitué par l'écoulement développé dans le canal plan de Kim, Moin et Moser [68]. L'étude de cet écoulement est effectuée pour les modèles bas-Reynolds classiques sélectionnés au troisième chapitre. L'influence d'une rotation superposée à l'écoulement moyen  $y$  est comparée aux simulations directes de Kristoffersen et Andersson [69] pour l'un de ces modèles. Le niveau inhabituel de la fermeture proposée précédemment rend difficile son application à des configurations réalistes.

La dernière partie de ce rapport est par conséquent consacrée à la validation du modèle bas-Reynolds retenu pour le cas du canal en rotation, dans le contexte d'un écoulement évoluant en géométrie complexe. La configuration choisie permet de caractériser l'influence de la modélisation des anisotropies de la turbulence et de la présence des parois sur la prédiction du développement d'un tourbillon longitudinal intense et des écoulements secondaires qui lui sont associés. Il s'agit du canal tridimensionnel de Davis et Gessner [40].



---

## Chapitre 2

# Relations constitutives et turbulence

Dans le cadre d'une description statistique en un point de la turbulence (voir annexe A), la modélisation au second ordre consiste en une représentation approchée des équations d'évolution des contraintes de Reynolds, corrélations doubles des fluctuations de vitesse, en fonction de quantités connues de l'écoulement moyen ou du mouvement turbulent. Le développement des modèles s'inspire des techniques utilisées en mécanique des milieux continus pour établir les relations constitutives du milieu. La possibilité d'appliquer cette notion aux corrélations turbulentes a été discutée en 1970 par Lumley [87]. Leur procédure de construction constitue actuellement un moyen intéressant de développement de modèles en turbulence. Cette technique est exposée en début de chapitre. Son application à une modélisation directe du tenseur de Reynolds et son utilisation dans le cadre des fermetures au second ordre sont présentées ensuite. Les expressions établies de la sorte sont à la base de la grande majorité des modélisations classiques proposées dans le cadre du traitement statistique de la turbulence en un point. Ces modèles sont présentés au chapitre suivant.

Les principes sur lesquels repose le développement des modèles de turbulence peuvent être classés suivant deux catégories.

La première regroupe les contraintes basées sur un formalisme mathématique. Il exige en particulier que les expressions approchées aient la même dimension et les mêmes caractéristiques tensorielles que le terme exact. Cela implique que les réponses des modèles aux transformations du système de coordonnées respectent le comportement du terme qu'il représente. C'est ce critère qui a conduit au développement de la modélisation invariante [44] sur laquelle s'appuie le développement des relations constitutives en turbulence. L'extension des techniques utilisées en mécanique des milieux continus aux écoulements turbulents n'est cependant pas toujours pertinente. C'est le cas de l'application du principe d'indifférence matérielle. Il permet de construire des relations constitutives invariantes suivant des translations ou des rotations arbitraires du repère de référence. Les équations de Navier-Stokes ne sont évidemment pas indépendantes du repère dans lequel elles sont décrites et il en est de même des équations d'évolution du tenseur de Reynolds [90]. La turbulence placée dans un repère en rotation présente en outre des caractéristiques distinctes de celle évoluant en repère fixe, ce qui ne permet pas d'appliquer le principe d'indifférence matérielle d'une façon générale. En revanche, dans le cas où la turbulence est bidimensionnelle, c'est-à-dire lorsque l'évolution des fluctuations de vitesse est invariante dans une direction, Speziale et Mac Giolla Mhuiris [158] ont montré que les équations doivent être invariantes pour toute rotation agissant dans cette direction. Les forces de Coriolis peuvent en effet être absorbées dans la pression en définissant une fonction de courant pour le mouvement



évoluant dans les plans normaux à l'axe de rotation [69], ce qui rend l'équation de fluctuation de vitesse identique, que le référentiel soit Galiléen ou non. Cette propriété d'invariance est connue en tant que principe d'indifférence matérielle dans la limite d'une turbulence bidimensionnelle. Par conséquent, ce principe ne peut s'appliquer que dans le cas très particulier d'une turbulence bidimensionnelle soumise à une rotation orthogonale. L'un des principes les plus importants concerne le fait que le système formé par les équations modélisées doit être incapable de générer des solutions irréalistes, qui n'aient pas de sens physique, comme par exemple fournir des valeurs négatives des contraintes normales ou de l'énergie cinétique turbulente. Ce principe de réalisabilité sera développé dans un chapitre ultérieur.

Le second type de principe est de nature plus physique. Il s'agit de critères plus difficiles à cerner, comme de s'assurer que le modèle proposé est fondé sur un mécanisme approché qui peut se substituer de façon plausible au mécanisme physique réel. Ce principe détermine par exemple le choix des arguments de la fonctionnelle formant la relation constitutive et la façon dont ils interagissent dans la fermeture.

## 2.1 Construction d'une fonctionnelle isotrope

En mécanique des milieux continus, la théorie des invariants est utilisée pour établir la forme des relations constitutives du milieu. Ces dernières sont en effet entièrement déterminées par les conditions d'invariance imposées par la présence des symétries matérielles. Les relations constitutives sont la plupart du temps supposées pouvoir s'écrire comme des polynômes de matrices. Il suffit alors de déterminer les ensembles de tenseurs et d'invariants scalaires indépendants qui peuvent être formés à partir d'un nombre donné de variables, tensorielles ou vectorielles, et ce pour un groupe donné de transformation. Ces ensembles définissent les bases dites d'intégrité, tensorielle et invariante, formant les bases de développement des relations constitutives polynômiales. Les bases sont dites minimales si chacun de ses membres est irréductible. Un élément est réductible lorsqu'il peut s'exprimer en fonction des autres éléments de la base d'intégrité, dans le cas contraire, il est irréductible.

### 2.1.1 Description du groupe de transformation

Les relations constitutives sont supposées invariantes par transformation orthogonale. Le groupe utilisé est par conséquent le groupe des rotations. Elles s'écrivent sous la forme d'un tenseur  $T$  dépendant des éléments  $A_1, \dots, A_p$ ,

$$T = T(A_1, \dots, A_p) \quad (2.1)$$

Dans ce cas, lorsque  $T$  est supposé dépendre de façon polynômiale de ses arguments, il s'exprime comme une matrice polynômiale et isotrope, dont les coefficients sont des invariants scalaires.

### 2.1.2 Description d'un polynôme de matrices

L'expression générale d'un polynôme isotrope formé par un nombre infini de matrices est la suivante:

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} G_i T^i \quad (2.2)$$

où

- $G_i$  est un scalaire, polynôme fonction des invariants par transformation orthogonale des matrices  $\{A_1, \dots, A_p\}$ , arguments de la fonctionnelle.
- $T^i$  est un produit de matrices, de la forme  $T^i = A_{i_1}^{\alpha_1} \dots A_{i_n}^{\alpha_n}$ . Les indices inférieurs  $\{i_1, \dots, i_n\}$  sont des éléments de l'ensemble  $\{1, \dots, p\}$  et les indices supérieurs  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  sont des entiers.

Avec ces notations, deux indices inférieurs consécutifs ne peuvent pas être identiques. Les matrices  $\{A_{i_1}^{\alpha_1}, \dots, A_{i_n}^{\alpha_n}\}$  sont appelées les facteurs du produit  $T^i$ . Ils sont respectivement de degrés  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Le nombre  $n$  de facteurs du produit définit l'extension du produit de matrices  $T^i$ , ce qui justifie que ce dernier soit souvent désigné simplement comme une extension d'ordre  $n$ . Le degré total du produit  $T^i$  est défini par la somme des degrés des facteurs qui le constitue,  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ . La somme des degrés associés à un facteur  $A_j$  donné intervenant dans le produit  $T^i$  est appelé quant à lui degré partiel de  $T^i$  en  $A_j$ .

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le nombre de produits de matrices linéairement indépendants et le nombre d'invariants indépendants qui peuvent être formés à partir des arguments matriciels  $\{A_1, \dots, A_p\}$  de la fonctionnelle, sont finis. Le polynôme de matrices  $T$  est donc fini. L'ensemble des produits  $\{T^i\}$  constitue la base d'intégrité de la fonctionnelle et les coefficients  $\{G_i\}$  s'expriment en fonction d'un nombre fini d'invariants, formant la base d'intégrité pour les invariants.

La procédure de détermination des bases d'intégrité repose sur le théorème de Cayley-Hamilton, qui permet d'exprimer les produits d'extension élevée en fonction des extensions d'ordre inférieur. Le principe de réduction des extensions est rappelé au paragraphe suivant et détaillé en annexe (B) pour les produits de matrices carrées de dimension trois.

### 2.1.3 Application du théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton, selon lequel une matrice vérifie son équation caractéristique, s'écrit de la façon suivante lorsqu'il est appliqué à un élément  $A$ , carré de dimension trois :

$$A^3 - A^2 \text{tr}(A) + \frac{1}{2}[(\text{tr}(A))^2 - \text{tr}(A^2)]A - \det(A)Id = 0 \quad (2.3)$$

où  $Id$  désigne la matrice identité,  $\text{tr}$  la trace, et  $\det$ , le déterminant, qui vérifie l'égalité :

$$\det(A) = \frac{1}{6}[(\text{tr}(A))^3 + 2\text{tr}(A^3) - 3\text{tr}(A)\text{tr}(A^2)] \quad (2.4)$$

Une généralisation de cette expression permet de travailler sur des produits de matrices. Soient trois matrices carrées d'ordre trois,  $A, B$  et  $C$ . L'application du théorème de Cayley-Hamilton au polynôme  $A + \lambda B + \mu C$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels quelconques, permet d'écrire, en retenant l'expression en facteur du produit  $\lambda\mu$ , la relation suivante :

$$\begin{aligned} & ABC + BCA + CAB + ACB + CBA + BAC = \\ & (BC + CB)\{A\} + (CA + AC)\{B\} + (AB + BA)\{C\} \\ & + A(\{BC\} - \{B\}\{C\}) + B(\{CA\} - \{C\}\{A\}) + C(\{AB\} - \{A\}\{B\}) \\ & + [\{A\}\{B\}\{C\} - \{A\}\{BC\} - \{B\}\{CA\} - \{C\}\{AB\} + \{ABC\} + \{CBA\}]Id \end{aligned} \quad (2.5)$$

où l'opérateur  $\{.\}$  désigne la trace.

Les relations permettant de déterminer entièrement la base d'intégrité formée à partir de tenseurs du second ordre et de ne retenir que les extensions d'ordre le plus faible possible se déduisent de cette relation, généralisation du théorème de Cayley-Hamilton à un produit de matrices de dimension trois. L'obtention de ces relations est détaillée en annexe et s'inspire directement des procédures développées par Spencer et Rivlin [148] dans un cadre plus général. Cette annexe montre en particulier qu'il n'y a pas lieu de retenir d'extension d'ordre quatre dans la base minimale formée par deux tenseurs du second ordre. Ils génèrent 16 extensions minimales indépendantes, ce qui conduit à une base d'intégrité matricielle minimale composée des 17 éléments suivants :

$$\begin{aligned} & Id \\ & A, A^2, B, B^2 \\ & AB, BA, AB^2, BA^2, A^2B, B^2A, A^2B^2, B^2A^2 \\ & ABA^2, BAB^2, AB^2A^2, BA^2B^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

La base d'intégrité invariante s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} & \{A\}, \{A^2\}, \{A^3\}, \{B\}, \{B^2\}, \{B^3\} \\ & \{AB\}, \{AB^2\}, \{BA^2\}, \{A^2B^2\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

## 2.2 Application à la modélisation algébrique du tenseur de Reynolds

Ces bases d'intégrités sont utilisées directement dans le cadre des modélisations algébriques des contraintes. Les modèles proposent en effet de relier le tenseur de Reynolds au champ moyen, en l'exprimant en fonction des gradients de vitesse moyenne et d'échelles scalaires caractéristiques de la turbulence, généralement basées sur l'énergie cinétique  $K$  et son taux de dissipation  $\varepsilon$ . Les fermetures s'écrivent alors :

$$R_{ij} = f_{ij}(\bar{V}_{m,n}, K, \varepsilon) \quad (2.8)$$

Ce sont des fonctionnelles isotropes formées par des produits de matrices et qui possèdent la même dimension et les mêmes propriétés de symétrie que le tenseur de Reynolds. L'analyse dimensionnelle impose de regrouper les arguments sous la forme :

$$\frac{R_{ij}}{2K} = f_{ij}\left(\frac{K}{\varepsilon} \bar{V}_{m,n}\right) \quad (2.9)$$

et le caractère symétrique du tenseur de Reynolds revient à chercher les extensions fournies par le gradient de vitesse moyenne et son transposé. Il est par conséquent intéressant de scinder les gradients de vitesse moyenne en parties symétrique et antisymétrique dont les interprétations physiques sont plus immédiates, ce qui revient à écrire une fonctionnelle isotrope dépendant des taux de déformation  $S_{ij}$  et des taux de rotation  $W_{ij}$  du mouvement moyen, soit :

$$\frac{R_{ij}}{2K} = f_{ij}\left(\frac{K}{\varepsilon} S_{mn}, \frac{K}{\varepsilon} W_{mn}\right) \quad (2.10)$$

En posant

$$\bar{S} = \frac{K}{\varepsilon} S$$

$$\overline{W} = \frac{K}{\varepsilon} W$$

la base tensorielle est formée *a priori* par les 17 extensions suivantes :

$$\begin{aligned} & Id \\ & \overline{S}, \overline{S}^2, \overline{W}, \overline{W}^2 \\ & \overline{S}\overline{W}, \overline{W}\overline{S}, \overline{S}\overline{W}^2, \overline{W}\overline{S}^2, \overline{S}^2\overline{W}, \overline{W}^2\overline{S}, \overline{S}^2\overline{W}^2, \overline{W}^2\overline{S}^2 \\ & \overline{S}\overline{W}\overline{S}^2, \overline{W}\overline{S}\overline{W}^2, \overline{S}\overline{W}^2\overline{S}^2, \overline{W}\overline{S}^2\overline{W}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

et les seuls invariants à retenir sont au nombre de 5, compte tenu des symétries des tenseurs :

$$\begin{aligned} & \{\overline{S}^2\}, \{\overline{S}^3\}, \{\overline{W}^2\}, \\ & \{\overline{S}\overline{W}^2\}, \{\overline{S}^2\overline{W}^2\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Le tenseur de Reynolds étant symétrique, la fonctionnelle correspondante formée à partir de la base invariante regroupe les extensions dans la base tensorielle suivante :

$$\begin{aligned} & Id \\ & \overline{S}, \overline{S}^2, \overline{W}^2 \\ & \overline{S}\overline{W}, -\overline{W}\overline{S}, \overline{S}\overline{W}^2 + \overline{W}^2\overline{S}, \overline{S}^2\overline{W} - \overline{W}\overline{S}^2, \overline{S}^2\overline{W}^2 + \overline{W}^2\overline{S}^2 \\ & \overline{S}\overline{W}\overline{S}^2 - \overline{S}^2\overline{W}\overline{S}, \overline{W}\overline{S}\overline{W}^2 - \overline{W}^2\overline{S}\overline{W}, \overline{S}\overline{W}^2\overline{S}^2 + \overline{S}^2\overline{W}^2\overline{S}, \overline{W}\overline{S}^2\overline{W}^2 - \overline{W}^2\overline{S}^2\overline{W} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Ces tenseurs ne sont pas tous indépendants, puisque le théorème de Cayley-Hamilton s'applique à la somme

$$\overline{S}\overline{W}^2\overline{S}^2 + \overline{S}^2\overline{W}^2\overline{S}$$

et l'exprime en fonction des autres termes. Il convient enfin d'imposer à la fonctionnelle de vérifier la contrainte

$$R_{nn} = 2K \quad (2.15)$$

permettant de retrouver la définition de l'énergie cinétique turbulente. La fonctionnelle comprend alors 11 termes (Pope [105]) et s'écrit :

$$\frac{R_{ij}}{2K} = \alpha_k T_{ij}^{(k)} \quad (2.16)$$

avec

$$T^{(0)} = Id \quad (2.17)$$

et

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \overline{S} & T^{(6)} &= \overline{W}^2\overline{S} + \overline{S}\overline{W}^2 - \frac{2}{3}\{\overline{S}\overline{W}^2\}Id \\ T^{(2)} &= \overline{S}\overline{W} - \overline{W}\overline{S} & T^{(7)} &= \overline{W}\overline{S}\overline{W}^2 - \overline{W}^2\overline{S}\overline{W} \\ T^{(3)} &= \overline{S}^2 - \frac{1}{3}\{\overline{S}^2\}Id & T^{(8)} &= \overline{S}\overline{W}\overline{S}^2 - \overline{S}^2\overline{W}\overline{S} \\ T^{(4)} &= \overline{W}^2 - \frac{1}{3}\{\overline{W}^2\}Id & T^{(9)} &= \overline{W}^2\overline{S}^2 + \overline{S}^2\overline{W}^2 - \frac{2}{3}\{\overline{S}^2\overline{W}^2\}Id \\ T^{(5)} &= \overline{W}\overline{S}^2 - \overline{S}^2\overline{W} & T^{(10)} &= \overline{W}\overline{S}^2\overline{W}^2 - \overline{W}^2\overline{S}^2\overline{W} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Cette base fonctionnelle est complète et minimale en ne retenant que les extensions de plus petit ordre. Si les coefficients sont supposés constants, le modèle possède dix inconnues, puisque le premier terme est fixé par la normalisation à  $\alpha_0 = 1/3$ .

Il faut noter que les deux premiers termes sont en fait la forme classique des modèles de type  $K - \varepsilon$  standard, à hypothèse de viscosité newtonienne. Les termes quadratiques sont présents dans les modèles algébriques obtenus par l'approche Direct Interaction Approximation (DIA) de Yoshizawa (1984) [180] et les modèles issus de la théorie de ReNormalisation de Groupe (RNG) de Rubinstein et Barton (1990) [123]. Si l'analyse fonctionnelle permet de caractériser la forme tensorielle complète de l'hypothèse de fermeture classique, il reste à déterminer les onze coefficients scalaires, qui dépendent généralement des invariants scalaires de la base invariante. Ils peuvent être fixés à l'aide de contraintes supplémentaires, comme la réalisabilité, ou sur des données expérimentales. Ces techniques seront brièvement abordées dans les chapitres suivants, dans le cadre des modélisations algébriques.

## 2.3 Application à la modélisation du second ordre

L'expression exacte des équations d'évolution du tenseur de Reynolds pour un écoulement turbulent incompressible s'écrit, en reprenant les notations de l'annexe A :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^v + d_{ij}^p + d_{ij}^\nu \quad (2.19)$$

où seuls les termes de production ne nécessitent pas de modélisation.

Le but de ce paragraphe n'est pas de présenter le détail des modélisations complètes de l'équation des moments du second ordre. Seules les principales relations constitutives généralement adoptées seront exposées ici, afin d'illustrer les développements effectués en début de chapitre. Les fermetures utilisant cette technique sont la plupart du temps développées dans le cas d'une turbulence homogène et incompressible, ce qui ne laisse à la modélisation que le tenseur des corrélations pression-déformation et le tenseur des taux de dissipation. L'application des techniques des fonctionnelles ne sera pas présentée pour le tenseur des taux de dissipation, dont les principales fermetures seront détaillées dans le chapitre suivant. L'exploitation des relations constitutives pour les termes de transport turbulent sera juste mentionnée ici, et a été proposée par Lumley en 1978 [89].

### 2.3.1 Relation constitutive pour le terme lent

Lumley [89] a suggéré que le terme lent  $\phi_{ij}^S$  s'écrive en fonction du tenseur de Reynolds, du taux de dissipation, et de la viscosité cinématique, soit :

$$\phi_{ij}^S = f_{ij}(R_{mn}, \varepsilon, \nu) \quad (2.20)$$

L'argument dimensionnel permet d'écrire :

$$\phi_{ij}^S = f_{ij}(b_{mn}, R_t) \quad (2.21)$$

où  $b_{mn}$  est le déviateur du tenseur de Reynolds, défini par :

$$b_{mn} = \frac{1}{\bar{q}^2} R_{mn} - \frac{1}{3} \delta_{mn} \quad (2.22)$$

et  $R_t$ , nombre de Reynolds turbulent :

$$R_t = \frac{K^2}{\varepsilon \nu} \quad (2.23)$$

Dans ce cas, le théorème de Cayley-Hamilton permet d'admettre la base suivante :

$$\begin{array}{l} Id \\ b, b^2 \end{array} \quad (2.24)$$

pour base fonctionnelle minimale, avec les deux invariants scalaires :

$$\{b^2\}, \{b^3\} \quad (2.25)$$

soit encore

$$II = -\frac{1}{2} \{b^2\} \quad (2.26a)$$

$$III = \frac{1}{3} \{b^3\} \quad (2.26b)$$

En respectant la contrainte d'incompressibilité, il est clair que la fonctionnelle s'écrit :

$$\phi_{ij}^S = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S (b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}) \quad (2.27)$$

C'est la forme la plus générale qui puisse être obtenue en partant des hypothèses de fermeture énoncées par Lumley. Les coefficients  $\beta_1^S$  et  $\beta_2^S$  dépendent des invariants du tenseur d'anisotropie et du nombre de Reynolds turbulent  $R_t$ . La forme de ces coefficients reste à déterminer. Leur dépendance vis-à-vis des invariants est classiquement fixée à l'aide de la contrainte de réalisabilité. Les expressions proposées par les modèles classiques sont discutées dans les chapitres suivants.

### 2.3.2 Relation constitutive pour le terme rapide

La base de la fermeture du terme rapide est inspirée de son expression dans le cas d'une turbulence homogène et incompressible. Elle est modélisée par une fonctionnelle isotrope, symétrique et à trace nulle, dépendant linéairement du mouvement moyen par les gradients de vitesse moyenne et de la turbulence par l'intermédiaire du tenseur de Reynolds ainsi que d'échelles scalaires caractéristiques de la turbulence, classiquement exprimées en fonction de  $K$  et  $\varepsilon$ . La fermeture se note alors :

$$\phi_{ij}^R = f_{ij}(R_{nm}; \overline{V}_{m,n}; K; \varepsilon) \quad (2.28)$$

soit encore

$$\phi_{ij}^R = f_{ij}(b_{nm}; S_{mn}; W_{mn}; K; \varepsilon) \quad (2.29)$$

en faisant intervenir le déviateur du tenseur de Reynolds, et les taux de déformation et de rotation du mouvement moyen. Puisque la fonctionnelle dépend explicitement linéairement du mouvement moyen, seules les extensions linéaires en  $S$  et  $W$  doivent être retenues. Des produits de  $b$  et  $S$  subsistent uniquement les extensions suivantes :

$$\begin{array}{l} Id \\ b, b^2, S, \\ bS, Sb, b^2S, Sb^2, \\ bSb^2 \end{array} \quad (2.30)$$

Quant aux extensions supplémentaires qui proviennent des produits de  $b$  et  $W$ , il ne reste que :

$$\begin{aligned} & W \\ & bW, Wb, b^2W, Wb^2, \\ & bWb^2 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Ils forment la base tensorielle. Les invariants respectant la linéarité de la fonctionnelle sont nécessairement :

$$\{b^2\}, \{b^3\}, \{bS\}, \{b^2S\} \quad (2.32)$$

Dans ce cas, il est clair que le tenseur des corrélations pression-déformation, symétrique et à trace nulle, est approché par la fonctionnelle isotrope suivante, faisant intervenir huit groupements tensoriels indépendants :

$$\phi_{ij}^R = \beta_k T^{(k)} \quad (2.33)$$

avec

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= b & T^{(5)} &= b^2S + Sb^2 - \frac{2}{3}\{b^2S\}Id \\ T^{(2)} &= b^2 - \frac{1}{3}Id & T^{(6)} &= Wb - bW \\ T^{(3)} &= S & T^{(7)} &= Wb^2 - b^2W \\ T^{(4)} &= bS + Sb - \frac{2}{3}\{bS\}Id & T^{(8)} &= bWb^2 + b^2Wb \end{aligned} \quad (2.34)$$

Les coefficients dépendent *a priori* des invariants, en respectant l'hypothèse de linéarité. La forme de la fonctionnelle présentée ici correspond à la modélisation classique adoptée pour les contributions homogènes des tenseurs de corrélation pression-déformation. Ils se différencient par le choix des scalaires.

Il faut noter que la base d'intégrité minimale choisie donne directement la forme de la fonctionnelle, sans qu'aucun des vecteurs formés ne se réduise par le théorème de Cayley-Hamilton. Là encore, le choix d'un autre vecteur de base est possible, ce qui revient par exemple à substituer à  $T^{(5)}$  l'extension basée sur  $bSb$ . Dans ce cas, le théorème de Cayley-Hamilton permet d'écrire :

$$bSb = -b^2S - Sb^2 - b\{bS\} + \frac{1}{2}\{b^2\}S + \{b^2S\}Id$$

Le choix de cette présentation est classique (Fu, Launder et Tselepidakis [47]), et ne dépend que de la forme de la base d'intégrité minimale. Les extensions choisies ici sont d'ordre le plus faible possible.

Il est désormais classique d'exprimer le terme rapide en fonction d'un tenseur du quatrième ordre [122], dont la définition et les propriétés seront rappelées au chapitre suivant. Cette écriture provient de la forme exacte du tenseur des corrélations pression-déformation dans le cas d'une turbulence homogène et incompressible. Il vient :

$$\phi_{ij}^R = 2\bar{V}_{ap,q}(X_{iqpj} + X_{jqpi}) \quad (2.35)$$

Le tenseur  $X_{ijpq}$  satisfait en particulier les propriétés suivantes :

$$X_{ijpq} = X_{jipq} \quad (2.36a)$$

$$X_{ijpq} = X_{ijqp} \quad (2.36b)$$

$$X_{ijn} = R_{ij} \quad (2.36c)$$

$$X_{inpn} = 0 \quad (2.36d)$$

Les modélisations classiques proposent une fermeture de ce tenseur par une fonctionnelle isotrope dépendant uniquement du tenseur de Reynolds.

$$X_{ijpq} = f_{ijpq}(R_{mn}) \quad (2.37)$$

Il est toujours intéressant de prendre en compte le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. L'application du théorème de Cayley-Hamilton permet de ne retenir aucune extension dans laquelle l'ordre partiel de ce déviateur est supérieur à deux, ce qui conduit, après application des symétries tensorielles à la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} X_{ijpq} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ & + C_3 \delta_{ij} b_{pq} + C_4 \delta_{pq} b_{ij} \\ & + C_5 (\delta_{ip} b_{jq} + \delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip} + \delta_{jp} b_{iq}) \\ & + C_6 \delta_{ij} b_{.pq}^2 + C_7 \delta_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_8 (\delta_{ip} b_{.jq}^2 + \delta_{iq} b_{.jp}^2 + \delta_{jq} b_{.ip}^2 + \delta_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_9 b_{ij} b_{pq} + C_{10} (b_{ip} b_{jq} + b_{iq} b_{jp}) \\ & + C_{11} b_{ij} b_{.pq}^2 + C_{12} b_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_{13} (b_{ip} b_{.jq}^2 + b_{iq} b_{.jp}^2 + b_{jq} b_{.ip}^2 + b_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_{14} b_{.ij}^2 b_{.pq}^2 + C_{15} (b_{.ip}^2 b_{.jq}^2 + b_{.iq}^2 b_{.jp}^2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

où les quinze coefficients scalaires dépendent *a priori* des invariants *II* et *III* du tenseur d'anisotropie. La notation  $b_{.ij}^n$  indique qu'il s'agit de la composante  $ij$  de  $n$  produits du tenseurs  $b_{ij}$ . La convention de sommation sur les indices répétés est également conservée. La formation du tenseur des corrélations pression-déformation regroupe certains termes entre eux du fait des symétries tensorielles et fournit des relations exprimant les coefficients  $C_i$  en fonction des  $\beta_i$ . Il est possible de réduire le nombre des coefficients  $C_i$  en prenant en compte d'autres contraintes comme la réalisabilité. Ces aspects seront développés dans les chapitres suivants.

### 2.3.3 Relation constitutive pour les termes de transports turbulents

L'emploi des techniques de développement de fonctionnelles est moins systématique dans la modélisation de ces termes inhomogènes.

#### Transport par les fluctuations de pression

Lumley [89] suggère une fermeture du type :

$$\frac{1}{\rho} \overline{p u_i} = f_i(\overline{u_p u_q u_n}) \quad (2.39)$$

ce qui, développé au premier ordre donne, compte tenu des symétries du tenseur un modèle du type :

$$\frac{1}{\rho} \overline{p u_i} = C \overline{u_i u_n u_n} \quad (2.40)$$

#### Transport par les fluctuations de vitesse

Les corrélations triples sont supposées dépendre du tenseur de Reynolds et de ses gradients, par une relation du type :

$$\overline{u_i u_j u_k} = f_{ijk}(R_{pq}; R_{pq,n}; K; \varepsilon) \quad (2.41)$$



Le développement de ces termes s'effectue en recherchant les produits de matrice dans lesquels interviennent au moins une fois un gradient du tenseur de Reynolds ou de l'énergie cinétique turbulente. La prise en compte des symétries des corrélations triples conduit à retenir huit groupements tensoriels où l'ordre partiel de ces gradients est l'unité (Shih, [129]). Cette fonctionnelle permet de retrouver les deux fermetures les plus classiques (Daly et Harlow [35], et Hanjalic et Launder [56]), toutes deux obtenues par des arguments différents et qui seront exposées au chapitre suivant.

D'un point de vue pratique, les modélisations classiques s'appuient sur des principes de bases dont les plus classiques ont été récapitulés en début de chapitre. La technique présentée ici est adoptée généralement dans la construction des fermetures classiques. La calibration des modèles qui en résultent est généralement basée sur des écoulements types étudiés expérimentalement ou numériquement. Les fermetures les plus classiques sont présentées au chapitre suivant.

---

## Chapitre 3

# Modélisations classiques

Ce chapitre présente les hypothèses classiques de modélisation des termes inconnus pour les fermetures statistiques en un point. Dans un premier temps sont présentées les hypothèses associées aux modèles du second ordre pour l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds et du taux de dissipation. Les modèles à deux équations de transport sont abordés succinctement ensuite dans le cadre de la modélisation algébrique du tenseur de Reynolds. L'ensemble des propositions suit la démarche classique. Les particularités associées à la physique des écoulements pariétaux sont exposées dans le chapitre suivant.

Les modélisations présentées ici satisfont les principes exposés au chapitre précédent, à savoir que les modèles ont la même forme tensorielle que les termes qu'ils représentent, à l'exception souvent des modélisations sur les corrélations d'ordre supérieur au niveau de fermeture, comme les corrélations triples de vitesse dans le cadre des modélisations au second ordre. Cette approximation est liée au concept de fermeture qui suppose que les corrélations d'ordre supérieur sont d'une influence mineure sur l'écoulement moyen.

Dans l'ensemble de ce chapitre, les modèles présentés ont été obtenus en se plaçant dans l'approximation des grands nombres de Reynolds. Cette hypothèse simplificatrice permet de supposer que la turbulence possède les deux caractéristiques suivantes :

- D'une part les interactions des grosses structures, responsables du transport de quantité de mouvement, ne sont pas affectées par la viscosité.
- D'autre part, les tourbillons de petite échelle, responsables des phénomènes de dissipation visqueuse, ne dépendent pas de l'état du mouvement moyen et des mouvements turbulents de grande échelle. Leurs structures sont par conséquent souvent supposées similaires à celles d'une turbulence isotrope. Cette approximation, largement adoptée dans les modèles, peut cependant être remise en cause, en particulier pour les corrélations d'ordre supérieur au niveau de fermeture.

L'hypothèse d'un nombre de Reynolds élevé reste néanmoins précieuse dans les premières étapes de construction d'un modèle de turbulence. Elle permet de supposer qu'il n'existe pas d'interactions entre petites et grosses structures, chacune reflétant un mécanisme spécifique. Ces fermetures, dites à grand nombre de Reynolds, sont calibrées généralement à l'aide de données expérimentales ou de simulations directes d'écoulements simples.

### 3.1 Modèles au second ordre

Les équations d'évolution du tenseur de Reynolds  $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$  peuvent se mettre dans le cas d'une turbulence incompressible sous la forme suivante :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij} + d_{ij}^\nu \quad (3.1)$$

où  $P_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $\phi_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $d_{ij}$  et  $d_{ij}^\nu$  représentent respectivement les tenseurs de production par les gradients de vitesse moyenne, de production par les forces volumiques, de redistribution par les corrélations pression-déformation, de dissipation, de diffusion turbulente et de diffusion visqueuse des corrélations doubles de vitesse. La décomposition des termes sources des équations et les notations adoptées pour les différentes contributions sont précisées dans la première annexe.

#### 3.1.1 Modélisation de l'équation du tenseur de Reynolds

##### Production

Les modèles du second ordre présentent l'avantage de représenter correctement les termes de production, dont l'expression est exacte dans les équations d'évolution du tenseur de Reynolds. Ces termes ne nécessitent donc aucune modélisation.

##### Diffusion

La diffusion visqueuse  $d_{ij}^\nu$  ne nécessite pas non plus d'hypothèses de modélisation, contrairement aux termes de diffusion turbulente.

L'expression exacte du terme de diffusion turbulente est la suivante :

$$d_{ij} = T_{ij,k,k}^u + T_{ij,k,k}^p \quad (3.2)$$

avec les actions de diffusion par les corrélations triples et par la pression définies respectivement par :

$$T_{ij,k,k}^u = -[\overline{u_i u_j u_k}]_{,k} \quad (3.3a)$$

$$T_{ij,k,k}^p = -\frac{1}{\rho} [\overline{p u_i} \delta_{jk} + \overline{p u_j} \delta_{ik}]_{,k} \quad (3.3b)$$

##### *Modélisation des corrélations triples*

Les corrélations triples de fluctuation de vitesse constituent un moment statistique d'ordre plus élevé que le tenseur de Reynolds. L'information qu'elles contiennent peut *a priori* être recherchée par l'intermédiaire des termes sources de leur équation de transport, dont l'expression est obtenue de façon analogue à celle du tenseur de Reynolds.

$$\begin{aligned}
 \frac{d \overline{u_i u_j u_k}}{dt} &= -\overline{u_i u_j u_n} \overline{U}_{k,n} - \overline{u_i u_k u_n} \overline{U}_{j,n} - \overline{u_j u_k u_n} \overline{U}_{i,n} \\
 &- \frac{1}{\rho} (\overline{u_i u_j p_{,k}} + \overline{u_i u_k p_{,j}} + \overline{u_j u_k p_{,i}}) \\
 &+ \nu (\overline{u_i u_j u_k})_{,nn} \\
 &+ (R_{ij} R_{kn,n} + R_{ik} R_{jn,n} + R_{jk} R_{in,n}) \\
 &- (\overline{u_i u_j u_k u_n})_{,n} \\
 &- 2 \nu (\overline{u_i u_{j,n} u_{k,n}} + \overline{u_j u_{i,n} u_{k,n}} + \overline{u_k u_{i,n} u_{j,n}})
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Hanjalic et Launder [55] ont formulé une expression algébrique explicite des corrélations triples. La modélisation s'appuie sur une hypothèse d'équilibre, établi dans la limite des nombres de Reynolds élevés et qui est formulée par les approximations suivantes : les transports convectifs des corrélations triples sont négligés, ainsi que les termes de production. L'hypothèse des grands nombres de Reynolds permet également de négliger la diffusion visqueuse. Dans le cadre des modèles du second ordre, les corrélations triples sont supposées être faibles, ce qui permet d'approcher les corrélations quadruples par des produits de corrélations doubles, en utilisant l'hypothèse de quasi-gaussianité de la densité de probabilité des fluctuations de vitesse [125]. Enfin, les corrélations faisant intervenir le gradient de pression sont supposées proportionnelles aux corrélations triples, par analogie avec la première approximation du terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation de l'équation du tenseur de Reynolds.

L'équation algébrique se réduit à l'égalité suivante :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{K}{\varepsilon} (R_{kn} R_{ij,n} + R_{in} R_{jk,n} + R_{jn} R_{ik,n}) \tag{3.5}$$

La valeur du coefficient  $C_s = 0.11$  généralement retenue, a été proposée par Launder, Reece et Rodi en 1975 [74] après accord sur des données expérimentales.

Daly et Harlow ont proposé en 1970 [35] d'exprimer les corrélations triples en fonction des corrélations doubles par une hypothèse de fermeture plus simple de type gradient :

$$\overline{u_i u_j u_k} = -C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{kn} R_{ij,n} \tag{3.6}$$

et dans ce cas,  $C_s = 0.22$ . Cette formulation n'est pas compatible avec les propriétés de symétries du tenseur des corrélations triples  $T_{ijk,k}^u$ . Ce modèle privilégie la direction du gradient choisi, excepté dans le cadre d'écoulements cisailés plans, comme dans un canal plan, où les gradients normaux à la paroi sont prépondérants. Il existe d'autres propositions, plus simples, comme celle de Davidov [44] qui propose une fermeture de type gradient avec un coefficient de diffusion scalaire, ou plus complexes, comme celle de Cormack, Leal et Seinfeld [29] qui introduisent une dépendance supplémentaire en fonction du taux de dissipation et de ses gradients. Les modèles d'Hanjalic et Launder ou de Daly et Harlow sont cependant les plus couramment utilisés dans la pratique.

*Modélisation des corrélations pression-vitesse*

Le terme de diffusion par la pression est la plupart du temps négligé ou modélisé avec les corrélations triples. Il existe peu de proposition de modélisation indépendante en raison d'un manque d'information expérimentale. Ce tenseur n'est pas directement accessible aux mesures.

Lumley [88] en 1975 a suggéré de décomposer ce terme de pression en faisant apparaître son déviateur, et il s'appuie sur une pseudo-relation de Bernoulli pour écrire :

$$-\overline{pu_i} = \frac{2}{5} \overline{u_i u_k u_k} \quad (3.7)$$

Il indique également que la présence du terme de corrélation pression-vitesse détruit la symétrie des indices présente avec les corrélations triples et propose donc de conserver la forme initiale du terme de Daly et Harlow pour modéliser l'ensemble du terme de diffusion. La modélisation retenue est la plus simple et présente l'avantage d'un point de vue numérique de ne pas faire intervenir de dérivées croisées.

**Redistribution par les corrélations pression-déformation**

Le traitement du tenseur des corrélations pression-déformation s'inspire de la forme de la solution de Poisson pour la fluctuation de pression. Cette équation est obtenue en prenant la divergence de l'équation d'évolution de la fluctuation de vitesse et s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} p_{,nn} = -2 u_{m,n} \overline{U}_{n,m} - [u_n u_m - \overline{u_n u_m}]_{,nm} \quad (3.8)$$

Sa solution s'exprime comme une fonction intégral-différentielle de Green. La pression est considérée comme la superposition de potentiels de densité volumique et surfacique, de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} p(\underline{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int \int \int_{\Omega} u_{m,n}^* \overline{U}_{n,m}^* G(\underline{x}, \underline{x}^*) dV^* \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int \int \int_{\Omega} [u_n^* u_m^* - \overline{u_n^* u_m^*}]_{,nm} G(\underline{x}, \underline{x}^*) dV^* \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int \int_{\partial\Omega} \left[ G(\underline{x}, \underline{x}^*) \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial}{\partial n} (G(\underline{x}, \underline{x}^*)) \right] dS^* \end{aligned} \quad (3.9)$$

où  $\Omega$  désigne le volume total de l'écoulement, et  $\partial\Omega$ , sa frontière. La fonction de Green est notée  $G(\underline{x}, \underline{x}^*)$ . Les intégrales sont évaluées au point courant  $\underline{x}^*$ .

L'expression du tenseur des corrélations pression-déformation est obtenue en multipliant la solution de Green par le taux de déformation du mouvement fluctuant et en en prenant ensuite la moyenne.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})} &= \frac{1}{2\pi} \int \int \int_{\Omega} \overline{\frac{\partial \overline{U}_n^*}{\partial x_m^*} \frac{\partial \overline{u_m^*}}{\partial x_n^*} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} G(\underline{x}, \underline{x}^*) dV^* \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int \int \int_{\Omega} \overline{\frac{\partial^2 u_n^* u_m^*}{\partial x_n^* \partial x_m^*} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} G(\underline{x}, \underline{x}^*) dV^* \\ &+ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int \int_{\partial\Omega} \overline{\left[ G(\underline{x}, \underline{x}^*) \frac{\partial p}{\partial n} - p \frac{\partial}{\partial n} (G(\underline{x}, \underline{x}^*)) \right] \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} dS^* \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cette solution montre que le tenseur des corrélations pression-déformation dépend d'informations contenues dans tout le domaine. Son caractère non-local ne rend pas cette expression directement exploitable dans le cadre d'une modélisation en un point, mais suggère une décomposition désormais classique du tenseur des corrélations pression-déformation en trois contributions. La première des intégrales de volume fait intervenir le gradient de vitesse moyenne et est susceptible de répondre immédiatement à toute distorsion du champ moyen. Elle forme le terme rapide. La seconde intégrale, nommée terme lent, est une contribution non-linéaire au tenseur des corrélations pression-déformation par interaction des fluctuations de vitesse entre elles. L'intégrale surfacique constitue le terme de paroi.

L'approche classique de chacune de ces trois contributions a été donnée par Chou [26] en 1945. Elle repose sur une hypothèse d'homogénéité locale. Cela suppose d'une part que les conditions limites des termes lent et rapide sont écrites à l'infini, et la fonction de Green prend la forme

$$G(\underline{x}, \underline{x}^*) = \frac{1}{\|\underline{x} - \underline{x}^*\|} \quad (3.11)$$

et d'autre part que le gradient de vitesse moyenne est approché par son développement autour du point d'évaluation du tenseur des corrélations pression-déformations,  $\underline{x}$ . En ne retenant que l'ordre zéro, le gradient de vitesse moyenne peut être sorti de l'intégrale. Enfin, les corrélations en deux points sont exprimées autour de  $\underline{x}$  en fonction de la distance entre ces deux points, définie avec le vecteur  $\underline{r} = \underline{x} - \underline{x}^*$ , de norme  $r$ , et sont supposées varier suffisamment lentement avec leur localisation  $\underline{x}$  pour en être indépendante dans les intégrales de Green. Dans ce cas, les corrélations du type

$$\frac{\partial u_p^* \partial u_i}{\partial x_q^* \partial x_j} \quad (3.12)$$

sont approchées par

$$\frac{\partial^2 [\overline{u_p^* u_i}]}{\partial r_q \partial r_j} \quad (3.13)$$

et les termes rapide et lent du tenseur des corrélations pression-déformation s'écrivent respectivement sous la forme :

$$\phi_{ij}^R = -\frac{1}{2\pi} \overline{U}_{p,q} \int \int \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^2 (\overline{u_q^* u_i})}{\partial r_p \partial r_j} + \frac{\partial^2 (\overline{u_q^* u_j})}{\partial r_p \partial r_i} \right] \frac{dV^*}{r} \quad (3.14a)$$

$$\phi_{ij}^S = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial^3 (\overline{u_p^* u_q^* u_i})}{\partial r_p \partial r_q \partial r_j} + \frac{\partial^3 (\overline{u_p^* u_q^* u_j})}{\partial r_p \partial r_q \partial r_i} \right] \frac{dV^*}{r} \quad (3.14b)$$

Avec ces approximations l'intégrale de surface devient :

$$\phi_{ij}^P = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int \int_{\partial\Omega} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} \left( p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) - \overline{p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS^* \quad (3.15)$$

En pratique, le terme de paroi est supposé rendre compte à la fois des effets non-locaux inhomogènes et de la présence des parois.

La modélisation des termes lent et rapide est effectuée à partir de leurs expressions simplifiées en turbulence homogène.

*Terme lent*

Le terme lent est un terme de redistribution non-linéaire. La modélisation du terme lent s'effectue parfois avec celle du déviateur du tenseur des taux de dissipation. Ce traitement, proposé par Lumley [89], repose sur le fait qu'à grands nombre de Reynolds, les deux tenseurs contrôlent tous les deux le processus de "retour à l'isotropie", et qu'il est très difficile de les distinguer expérimentalement. Il s'agit de situations où une turbulence homogène initialement anisotrope est laissée à elle-même. Les expériences montrent que la turbulence relaxe vers un état isotrope.

Le terme lent tend à redistribuer l'énergie cinétique entre les différentes composantes du tenseur de Reynolds, pour évoluer vers un état isotrope. L'expression la plus simple, guidée par des critères dimensionnels, a été proposée par Rotta en 1951 [122], et s'écrit :

$$\phi_{ij}^S = -C \varepsilon b_{ij} \quad (3.16)$$

où  $b_{ij}$  est le tenseur d'anisotropie adimensionnel du tenseur de Reynolds, défini par :

$$b_{ij} = \frac{1}{2K} [\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} K \delta_{ij}] \quad (3.17)$$

La constante  $C$  de Rotta est classiquement évaluée entre 3.0 et 3.6.

L'ensemble des modèles classiques du terme lent peut se mettre sous la forme fonctionnelle suivante :

$$\frac{1}{\varepsilon} \phi_{ij}^S = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S [b_{.ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \quad (3.18)$$

où  $II$  est le second invariant du tenseur d'anisotropie. Ses invariants sont au nombre de deux et définis par les traces :

$$II = -\frac{1}{2} b_{.nn}^2 \quad (3.19a)$$

$$III = \frac{1}{3} b_{.nn}^3 \quad (3.19b)$$

L'expression générale des modèles classiques est la forme complète au sens de Cayley-Hamilton d'une fonctionnelle isotrope dépendant uniquement du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$ . Les coefficients  $\beta_1^S$  et  $\beta_2^S$  peuvent dépendre des invariants  $II$  et  $III$ , du nombre de Reynolds turbulent  $R_t$  et des taux de déformation et de rotation du mouvement moyen.

La nécessité des modèles quadratiques réside dans l'incapacité des modèles linéaires de type Rotta à traduire une décroissance différente des anisotropies normales du tenseur de Reynolds, alors que ce fait est observé expérimentalement [124]. Les termes non-linéaires permettent également de respecter la contrainte de réalisabilité. Cet aspect sera discuté ultérieurement.

*Terme rapide*

Le terme rapide est linéaire en fonction du gradient de vitesse moyenne. Il est classiquement mis sous la forme suivante :

$$\phi_{ij}^R = 2 \overline{U}_{p,q} [X_{iqpj} + X_{jqpi}] \quad (3.20)$$

où le tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$  est défini par

$$X_{ijpq} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial r_p \partial r_q} \frac{dV}{r} \quad (3.21)$$

Cette notation a été introduite par Lumley en 1978 [89], à partir d'une description spectrale de la turbulence. En effet, dans le cas d'une approximation homogène, la turbulence peut être décomposée en série de Fourier. Si  $\Phi_{ij}(\underline{k})$  désigne le tenseur spectral des corrélations doubles, il est défini à partir des amplitudes de Fourier de fluctuations de vitesse  $\hat{u}_i$ , et du nombre d'onde  $\underline{k}$  par :

$$\Phi_{ij}(\underline{k}) = \overline{\hat{u}_i(-\underline{k})\hat{u}_j(\underline{k})} \quad (3.22)$$

(voir annexe J). Le passage dans l'espace physique s'effectue par intégration sur l'ensemble des nombres d'onde. Par définition de la dérivée dans l'espace de Fourier, le tenseur d'ordre quatre devient simplement :

$$X_{ijpq} = \int \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (3.23)$$

La description de la turbulence homogène par les séries de Fourier permet de simplifier l'écriture des équations du mouvement, tout particulièrement lorsqu'elles sont linéarisées comme dans la théorie de distorsion rapide (annexe K).

La modélisation du terme rapide se ramène donc au problème de la modélisation de ce terme d'ordre quatre. L'ensemble des traitements classiques suppose que  $X_{ijpq}$  peut être développé comme fonctionnelle isotrope dépendant uniquement du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, ce qui s'exprime de façon complète au sens de Cayley-Hamilton sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} X_{ijpq} &= C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ &+ C_3 \delta_{ij} b_{pq} + C_4 \delta_{pq} b_{ij} \\ &+ C_5 (\delta_{ip} b_{jq} + \delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip} + \delta_{jp} b_{iq}) \\ &+ C_6 \delta_{ij} b_{.pq}^2 + C_7 \delta_{pq} b_{.ij}^2 \\ &+ C_8 (\delta_{ip} b_{.jq}^2 + \delta_{iq} b_{.jp}^2 + \delta_{jq} b_{.ip}^2 + \delta_{jp} b_{.iq}^2) \\ &+ C_9 b_{ij} b_{pq} + C_{10} (b_{ip} b_{jq} + b_{iq} b_{jp}) \\ &+ C_{11} b_{ij} b_{.pq}^2 + C_{12} b_{pq} b_{.ij}^2 \\ &+ C_{13} (b_{ip} b_{.jq}^2 + b_{iq} b_{.jp}^2 + b_{jq} b_{.ip}^2 + b_{jp} b_{.iq}^2) \\ &+ C_{14} b_{.ij}^2 b_{.pq}^2 + C_{15} (b_{.ip}^2 b_{.jq}^2 + b_{.iq}^2 b_{.jp}^2) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Les coefficients de cette fonctionnelle sont des scalaires qui peuvent dépendre des invariants *II* et *III* et du nombre de Reynolds turbulent. Remplacer cette expression dans la relation (3.20) revient à modéliser le terme rapide comme fonctionnelle du tenseur d'anisotropie et des gradients de vitesse moyenne, linéaire en fonction des gradients de vitesse moyenne. En faisant apparaître les tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation du champ moyen il vient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{q}^2} \phi_{ij}^R &= \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 [b_{.ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{.ik}^2 S_{jk} + b_{.jk}^2 S_{kj} - \frac{2}{3} b_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{.ik}^2 W_{jk} + b_{.jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} W_{kp} b_{.pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les contraintes que doivent satisfaire les coefficients seront détaillées dans un chapitre ultérieur.



La forme la plus classique du tenseur des corrélations pression-déformation est linéaire en fonction du tenseur d'anisotropie et a été proposée en 1975 par Launder, Reece et Rodi [74]. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\bar{q}^2} \phi_{ij}^R = \frac{2}{5} S_{ij} + \frac{9C_2 + 6}{11} [b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}S_{mn} \delta_{ij}] + \frac{10 - 7C_2}{11} [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}] \quad (3.26)$$

avec  $C_2 = 0.4$ , coefficient calibré dans le cas d'un écoulement de cisaillement pur sur les expériences de Champagne, Harris et Corrsin [20]. Une calibration de ce modèle à l'aide d'un écoulement de distorsion rapide appliquée à une turbulence initialement isotrope, impose  $C_2 = 10/7$ , ce qui annulerait la contribution du dernier terme, contenant les tenseurs des taux de rotation. A cette expression est parfois préférée la modélisation linéaire de Gibson et Launder [48] proposée en 1984, et connue sous le nom d'isotropisation de la production. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{\bar{q}^2} \phi_{ij}^R = \gamma \left[ \frac{2}{3} S_{ij} + (b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}S_{mn} \delta_{ij}) + (b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}) \right] \quad (3.27)$$

soit encore

$$\phi_{ij}^R = -\gamma [P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij}] \quad (3.28)$$

avec  $\gamma = 0.6$ . Cette formulation ne respecte cependant pas l'ensemble des symétries tensorielles du tenseur  $X_{ijpq}$ , mais est consistante avec les propriétés tensorielles de  $\phi_{ij}^R$ .

Des modélisations récentes proposent de retenir les termes quadratiques de la fonctionnelle. Les comportements de ces formulations par rapport aux modèles linéaires seront discutées dans un autre chapitre.

### Terme de paroi

La présence de parois ne permet plus de vérifier l'hypothèse de milieu quasi-infini, première des approximations retenues pour exprimer simplement les termes rapide et lent. L'intégrale surfacique doit par conséquent supporter l'écart à l'homogénéité. L'interprétation de ce terme de paroi a été donnée par Launder, Reece et Rodi [74] selon l'observation que la fonction de Green prend la forme suivante dans le cas d'un écoulement de plaque plane :

$$G(\underline{x}, \underline{x}^*) = \frac{1}{\|\underline{x}^* - \underline{x}\|} + \frac{1}{\|\underline{x}^* - \underline{\bar{x}}\|} \quad (3.29)$$

où  $\underline{\bar{x}}$  est le point image de  $\underline{x}$  par rapport à la paroi. Ils introduisent la notion de tenseur de réflexion de paroi en posant en complément des termes rapide et lent le terme inhomogène suivant :

$$\phi_{ij}^P = -\frac{1}{4\pi} \int \int \int_{\Omega} \left[ 2 \frac{\partial \bar{U}_n^*}{\partial x_m^*} \frac{\partial u_m^*}{\partial x_n^*} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \bar{u}_n^*}{\partial x_n^*} \frac{\partial \bar{u}_m^*}{\partial x_m^*} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \frac{dV^*}{r} \quad (3.30)$$

L'intégrale est évaluée dans le demi-espace que coupe la paroi. Pour tous les points éloignés de la paroi, la fonction de Green tend vers zéro, ce qui rend la contribution du terme pariétal négligeable. Cette décroissance est classiquement modélisée par une fonction  $f(\frac{l}{y})$ , dépendant de la distance  $y$  à la paroi et d'une échelle caractéristique de la turbulence, par exemple  $l = \frac{K^3 l^2}{\varepsilon}$ .

Ces intégrales volumiques diffèrent des définitions des termes lent et rapide non seulement par les points d'évaluation de la fonction de Green, mais aussi par le fait que les corrélations en

deux points ne dépendent que de l'écart entre les points d'évaluation de l'intégrale de la pression. Ceci incite Launder, Reece et Rodi [74] à proposer un modèle de la forme :

$$\phi_{ij}^P = f\left(\frac{l}{y}\right) [\tilde{\phi}_{ij}^S + 2\bar{U}_{p,q} (\tilde{X}_{iqpj} + \tilde{X}_{jqpi})] \quad (3.31)$$

où les tenseurs tildés sont de forme similaire aux tenseurs homogènes correspondants, mais ne satisfont pas les conditions d'homogénéité de la turbulence. En pratique, ceci signifie que la symétrie des deux premiers indices du tenseur  $\tilde{X}_{ijpq}$  n'a pas lieu d'être imposée. Le tenseur  $\tilde{\phi}_{ij}^S$  a la même structure que le terme lent, avec des constantes numériques différentes. Les coefficients du modèle inhomogène sont donc déterminés en imposant le respect des propriétés tensorielles de  $\phi_{ij}^P$  (symétrie et trace nulle) et par calibration en approximation de couche limite sur la loi de paroi logarithmique. Il faut noter que l'ensemble des coefficients inconnus des fonctionnelles représentant les tenseurs tildés peut être déterminé ainsi parce que les fonctionnelles choisies sont linéaires. Il est clair que cette modélisation est indissociable du modèle de Launder, Reece et Rodi [74] pour le tenseur des corrélations pression-déformation homogène.

Le terme de réflexion de pression sur la paroi a une influence non négligeable sur le terme de corrélation pression-déformation et fait toujours l'objet de développements. La présence de la paroi modifie le processus de redistribution de l'énergie cinétique turbulente entre les composantes du tenseur de Reynolds. L'effet principal est d'amortir le niveau de la contrainte normale du tenseur de Reynolds dans la direction orthogonale à la paroi en la redistribuant sur les directions tangentielles. En pratique, cette contrainte normale est globalement deux fois plus faible pour une couche limite que dans le cas d'un écoulement cisailé libre. La forme homogène des modèles rapide et lent nécessite des corrections au voisinage des parois pour fournir un bon comportement du tenseur de Reynolds. Ces corrections sont effectuées de façon classique en introduisant un tenseur d'effet de paroi, exprimé par exemple en fonction du vecteur normal à la paroi, comme le propose Shir [143] :

$$W_{ij} = n_i n_j f\left(\frac{l}{y}\right) \quad (3.32)$$

Le domaine d'application de la correction pariétale est fixé avec une échelle caractéristique, donnée par la fonction  $f\left(\frac{l}{y}\right)$ . Gibson et Launder [51] ont proposé d'effectuer cette correction directement sur les termes lent et rapide, suivant :

$$\phi_{ij}^{P(r)} = C_{w2} \left[ \phi_{ij}^R n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj}^R n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki}^R n_k n_i \right] \frac{K^{3/2}}{C_l \varepsilon d} \quad (3.33a)$$

$$\phi_{ij}^{P(s)} = C_{w1} \frac{\varepsilon}{K} \left[ \phi_{ij}^S n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj}^S n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki}^S n_k n_i \right] \frac{K^{3/2}}{C_l \varepsilon d} \quad (3.33b)$$

où  $d$  désigne ici la distance à la paroi, et les coefficients sont  $C_{w1} = 0.5$ ,  $C_{w2} = 0.3$ , et  $C_l = 0.22$ . Les auteurs notent qu'une telle formulation ne permet pas de traduire la réduction de la composante normale du tenseur de Reynolds dans le cas d'un écoulement impactant, ce qui conduit Craft et Launder [31] à modifier les fonctionnelles de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{P(r)} &= C_1 \bar{U}_{l,m} R_{lm} (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \\ &+ C_2 (R_{mp} - \frac{3}{2} K \delta_{mp}) (\bar{U}_{k,m} n_p n_k \delta_{ij} - \frac{3}{2} \bar{U}_{i,m} n_j n_p - \frac{3}{2} \bar{U}_{j,m} n_i n_p) \end{aligned} \quad (3.34a)$$

$$\begin{aligned} & + C_3 \overline{U}_{l,m} n_l n_m (n_i n_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \\ \phi_{ij}^{P(s)} & = C_1 \left[ R_{mn} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_i \right] \end{aligned} \quad (3.34b)$$

Les corrections de paroi sont traitées comme des quantités à part entière, mais dont la forme reste analogue aux modélisations classiques des termes rapide et lent. Craft et Launder [32] ont proposé des expressions encore différentes :

$$\phi_{ij}^{P(r)} = C_{w2} F (\overline{U}_{i,j} + \overline{U}_{j,i}) d_n d_n \quad (3.35a)$$

$$\phi_{ij}^{P(s)} = C_{w1} \frac{\varepsilon}{K} \left[ R_{mn} d_k d_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{kj} d_k d_j - \frac{3}{2} R_{ki} d_k d_i \right] \quad (3.35b)$$

où  $C_{w2} = -0.7$  et  $C_{w1} = 2.2$ . Le vecteur  $\underline{d}$  agit comme le vecteur normal mais inclut l'échelle d'approche de la paroi. Il est défini par :

$$d_i = \frac{N_i}{\alpha + (N_n N_n)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad N_i = \frac{\partial(k^{3/2}/\varepsilon)}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \alpha = 0.5 \quad (3.36)$$

Le paramètre  $F$  a été introduit par Lumley en 1978 [89]. C'est un facteur d'aplatissement et il s'écrit en fonction des invariants du tenseur d'anisotropie de la façon suivante :  $F = 1 + 9 III + 27 IIII$ . Il faut noter que les expressions proposées par Craft et Launder sont utilisées avec des modèles quadratiques pour le tenseur des corrélations pression-déformation. La forme complète de la fonctionnelle homogène est en effet susceptible de rendre compte partiellement de l'influence de la paroi sur  $\phi_{ij}$  en permettant de réduire la composante normale de Reynolds dans la direction orthogonale à la paroi. Cette propriété entre dans le cadre de la mise en œuvre de la contrainte de réalisabilité et sera discutée dans un autre chapitre. Launder et Tselepidakis [78] ont également mis en avant la possibilité de restituer les variations rapides de la turbulence dans la direction normale à la paroi en prenant en compte le développement au premier ordre autour de l'homogénéité du gradient de vitesse moyenne, ce qui les conduit à le remplacer dans le terme rapide par

$$\overline{U}_{i,j} \Big|_{eff} = \overline{U}_{i,j} + c_i l \tilde{l}_{,n} \overline{U}_{i,jn} \quad (3.37)$$

où  $l$  est l'échelle de longueur caractéristique choisie,  $\tilde{l} = l\sqrt{F}$  et  $c_i = 0.15$ .

L'enjeu des modélisations actuelles est de construire des modèles pour les termes inhomogènes qui dépendent par construction à la proximité de la paroi. Les corrections de type Gibson et Launder [48] sont en effet efficaces lorsqu'il n'existe qu'une seule paroi, et que sa courbure est faible. La détermination de la distance à la paroi ou du vecteur normal peut s'avérer délicate dans le cas de configurations complexes. Les modélisations récentes préfèrent prendre en compte l'approche de la paroi de façon plus implicite dans les modèles, avec l'utilisation des formulations non linéaires des termes lent et rapide. Le comportement spécifique du tenseur des corrélations pression-déformation au voisinage des parois est détaillé au chapitre suivant.

### Destruction des contraintes turbulentes

Le terme de destruction turbulente est assuré par le tenseur des taux de dissipation dont l'expression exacte est :

$$\varepsilon_{ij} = 2 \nu \overline{u_{i,k} u_{j,k}} \quad (3.38)$$

Ce tenseur est souvent modélisé par sa forme isotrope, en se basant, pour des écoulements à grands nombres de Reynolds, sur l'isotropie locale des petites structures, responsables des mécanismes dissipatifs. Le modèle s'écrit alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (3.39)$$

où  $\varepsilon$  est la taux de dissipation. Dans ce cas, le tenseur des taux de dissipation est pris en compte uniquement dans les équations d'évolution des contraintes normales du tenseur de Reynolds. Le seul mécanisme susceptible de contrôler l'évolution des composantes extra-diagonales doit alors être contenu dans le tenseur des corrélations pression-déformation  $\phi_{ij}$ .

L'écart de ce tenseur à sa forme isotrope peut être pris en compte, selon Lumley [89], de façon indirecte dans le terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation, la modélisation anisotrope du tenseur des taux de dissipation pouvant s'écrire de façon tensoriellement semblable à la forme classique du terme lent. En effet, lorsque le nombre de Reynolds diminue, la séparation des actions des structures dissipatives et des structures énergétiques n'est plus aussi distincte. Rotta [122] propose dans ce cas d'exprimer  $\varepsilon_{ij}$  en fonction du tenseur de Reynolds, suivant :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{K} \varepsilon \quad (3.40)$$

Ceci revient, dans le cas général, à exprimer le tenseur des taux de dissipation comme fonctionnelle du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. Le modèle possède les mêmes dimensions que le terme lent et s'écrit formellement de la même façon, ce qui est bien équivalent à inclure son déviateur dans les corrélations pression-déformation.

$$\phi_{ij}^S - \varepsilon_{ij} = \phi_{ij}^{*S} - \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij} \quad (3.41)$$

Cette approche est souvent implicite dans l'approximation des grands nombres de Reynolds, mais ne simplifie cependant pas la modélisation du terme lent lorsque les nombres de Reynolds sont faibles, d'autant plus qu'elle n'est pas entièrement justifiée en présence de parois. Les comportements asymptotiques du tenseur des taux de dissipation et du tenseur des corrélations pression-déformation ne sont pas identiques au voisinage immédiat des parois, et ne sont pas régis par les mêmes mécanismes. Ces aspects seront abordés au chapitre suivant.

Il convient enfin d'écrire une équation d'évolution pour la trace du tenseur des taux de dissipation afin de compléter le modèle.

### 3.1.2 Modélisation de l'équation du taux de dissipation

L'équation d'évolution exacte du taux de dissipation est décrite par des corrélations de petites échelles reproduisant le détail des mécanismes dissipatifs, ce qui la rend difficile à modéliser. Dans le cas des écoulements à grands nombres de Reynolds, les petites échelles ont pour principale fonction de dissiper l'énergie cinétique turbulente à un taux imposé par les tourbillons de plus grande taille, dont la structure est indépendante de la viscosité. Par conséquent, dans la mesure où on s'intéresse à l'état du tenseur de Reynolds, les termes sources de l'équation de taux de dissipation sont modélisés de façon à traduire les équilibres de production et destruction dominants à grands nombres de Reynolds. Les principaux mécanismes retenus par Tennekes et Lumley [168] sont les suivants :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \overline{P^\varepsilon} - \overline{E^\varepsilon} + P^{\varepsilon 3} + d^\varepsilon + d^{\varepsilon\nu} \quad (3.42)$$

où

$$\overline{P}^\varepsilon = P^{\varepsilon 1} + P^{\varepsilon 2} \quad (3.43)$$

regroupe les termes de production par action du mouvement moyen, et

$$\overline{E}^\varepsilon = E^\varepsilon - P^{\varepsilon 4} \quad (3.44)$$

regroupe le terme de dissipation par action de la viscosité et le terme de production provenant des interactions entre les tourbillons. C'est cet équilibre entre  $E^\varepsilon$  et  $P^{\varepsilon 4}$  qui est dominant pour les très grands nombres de Reynolds, avec les termes de diffusion turbulente par les fluctuations de vitesse.

L'analyse dimensionnelle a conduit Hanjalic et Launder [55] à modéliser ces termes sous la forme suivante, généralement adoptée dans l'ensemble des modélisations :

$$\overline{P}^\varepsilon = C_{\varepsilon 1} P \frac{\varepsilon}{K} \quad (3.45a)$$

$$\overline{E}^\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (3.45b)$$

Lumley [88] a montré que la modélisation des équilibres à grands nombres de Reynolds par

$$C_{\varepsilon 1} P \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

est supportée entièrement par le terme  $\overline{E}^\varepsilon$  et que  $\overline{P}^\varepsilon$  est négligeable dans ce cas. La forme du modèle de l'équation pour le taux de dissipation reste néanmoins la même. Launder, Reece et Rodi [74] reprennent la justification de Lumley dans leur modélisation.

Le transport turbulent est classiquement modélisé par la forme algébrique proposée par Hanjalic et Launder :

$$d^\varepsilon = C_\varepsilon \left[ \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \varepsilon_{,n} \right]_{,m} \quad (3.46)$$

ce qui permet d'écrire l'ensemble des termes de diffusion suivant :

$$d^\varepsilon + d^{\varepsilon\nu} = C_\varepsilon \left[ \left( \nu \delta_{mn} + \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \right) \varepsilon_{,n} \right]_{,m} \quad (3.47)$$

Le terme de production complémentaire par les déformations du mouvement moyen est négligeable pour les écoulements à grands nombre de Reynolds et a souvent été ignoré dans les premières modélisations. L'équation du taux de dissipation est donc généralement approchée par l'expression suivante :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} P \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} + E + C_\varepsilon \left[ \left( \nu \delta_{mn} + \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \right) \varepsilon_{,n} \right]_{,m} \quad (3.48)$$

Les coefficients standards sont  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$ , et  $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ .  $E$  représente les termes correctifs éventuels permettant de sensibiliser le taux de dissipation au taux de déformation du mouvement moyen.

Les modélisations actuelles proposent généralement une valeur plus faible du coefficient  $C_{\varepsilon 1}$  en faisant dépendre  $C_{\varepsilon 2}$  des invariants du tenseur de Reynolds. Craft et Launder [31] proposent ainsi :

$$C_{\varepsilon 1} = 1.0 \quad \text{et} \quad C_{\varepsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.7\sqrt{A_2} F} \quad (3.49)$$

avec  $A_2$  qui s'écrit en fonction de l'invariant  $II$  du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds suivant  $A_2 = -8II$  et  $A_3 = 24III$ . Ces modifications ont pour but de traduire l'influence des anisotropies des grosses structures sur les tourbillons dissipatifs. Elles ont été calibrées sur des expériences fournissant les taux d'élargissement de jets plans ou de jets circulaires.

La présence du terme correctif  $E$  doit permettre l'interaction entre le taux de dissipation et les déformations du mouvement moyen. A l'inverse des équations du tenseur de Reynolds où les termes de production donnent explicitement la forme de la réponse aux gradients de vitesse moyenne, aucun terme analogue ne permet de guider la modélisation de ces effets dans l'équation pour le taux de dissipation. Pope a proposé en 1978 [106] de mettre ces corrections sous la forme :

$$E = [R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij}] \left( \frac{\varepsilon}{K} \right)^2 W_{im} W_{jm} \quad (3.50)$$

Hanjalic et Launder ont proposé une modélisation différente afin de différencier les effets des déformations rotationnelles et irrotationnelles sur la production de  $\varepsilon$ .

$$E = C_{\varepsilon 3} \nu \frac{K}{\varepsilon} R_{mn} \bar{U}_{p,mq} \bar{U}_{p,nq} - C_{\varepsilon 4} f_4 K W_n W_n \quad (3.51)$$

avec  $C_{\varepsilon 3} = 0.25$ ,  $C_{\varepsilon 4} = 0.1$

La modélisation de l'équation de transport du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente varie souvent de façon assez importante suivant les auteurs. Ces différences sont particulièrement importantes lorsque les modèles prennent en compte les effets présents dans les écoulements à faible nombre de Reynolds, comme c'est le cas au voisinage des parois. Certaines de ces propositions sont présentées au chapitre suivant. La complexité de ces termes correctifs illustrent les difficultés rencontrées dans la modélisation de cette équation.

Le paragraphe suivant présente les hypothèses les plus courantes de modélisation algébriques des contraintes de Reynolds dans le cadre des écoulements à grand nombre de Reynolds. Ces formulations reposent sur des approximations fortes mais peuvent constituer une alternative intéressante à la résolution complète des équations de transport du tenseur de Reynolds. Les modèles à deux équations de transport restent par ailleurs un moyen pratique de fournir des conditions initiales relativement physiques aux équations des modèles au second ordre.

## 3.2 Modèles algébriques des contraintes

Les modèles algébriques des contraintes de Reynolds sont les simplifications les plus courantes des fermetures du second ordre. Ils proposent une expression algébrique du tenseur de Reynolds, obtenue à partir de son équation d'évolution utilisée dans les modèles du second ordre, et qui dépend des gradients du mouvement moyen et d'échelles scalaires caractéristiques de la turbulence. Cette approche peut être vue comme une extension des modèles à deux équations de transport, plus particulièrement du modèle  $K - \varepsilon$  ou  $K - \omega$ . Elle est généralement considérée comme une alternative à la modélisation au second ordre pour les écoulements pour lesquels l'hypothèse de Boussinesq est insuffisante à la description de la redistribution de l'énergie cinétique. C'est le cas des écoulements en canal plan soumis à une rotation moyenne. Néanmoins, l'obtention du modèle pour le tenseur de Reynolds repose sur des hypothèse sévères exigeant en particulier que les phénomènes de transport soient négligeables devant les autres mécanismes mis en jeu. La formulation algébrique la plus répandue est due à Rodi [118]. Elle suppose que l'équilibre convection-diffusion du tenseur de Reynolds s'effectue de façon similaire à celui de l'énergie cinétique turbulente et s'écrit :

$$\left[ \frac{dR_{ij}}{dt} - T_{ijl,l} \right] = \frac{R_{ij}}{K} \left[ \frac{dK}{dt} - T_{nnl,l} \right] \quad (3.52)$$

en notant  $T_{ijl,l}$  le terme de transport. Cette relation s'écrit encore, avec les notations classiques :

$$[P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij}] = \frac{R_{ij}}{K} [P - \varepsilon] \quad (3.53)$$

Deux hypothèses sont sous-jacentes à cette formulation. Le tenseur de Reynolds est d'une part supposé dépendre de façon totalement locale de l'état du mouvement, et d'autre part que l'écoulement est amené à un état d'équilibre où les phénomènes de transport sont négligeables. En effet, l'équation d'évolution du tenseur d'anisotropie se met, avec ces hypothèses, sous la forme suivante :

$$\frac{db_{ij}}{dt} = \frac{1}{2K} \left[ T_{ijl,l} - \frac{R_{ij}}{K} T_{nnl,l} \right] \quad (3.54)$$

Dans le cas d'une turbulence homogène, les phénomènes de transport sont nuls, ce qui fournit un état asymptotique correspondant à un équilibre des anisotropies, soit :

$$\frac{db_{ij}}{dt} = 0 \quad (3.55)$$

L'équation algébrique écrite en approximation homogène est modélisée par les fermetures classiques du tenseur des taux de dissipation et du tenseur des corrélations pression-déformation utilisés dans les modèles au second ordre. En choisissant les modèles classiques des termes lent et rapide du tenseur des corrélations pression-déformation, et en évaluant la dissipation de façon isotrope, la relation algébrique de Rodi s'écrit :

$$\begin{aligned} b_{ij} \frac{\varepsilon}{K} \left( \frac{P}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1^S - 1 \right) &= \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{2} \beta_2^S D b_{ij}^2 \\ &+ (\beta_3 - \frac{2}{3}) S_{ij} \\ &+ (\beta_4 - 1) [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ (\beta_6 - 1) [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{ik}^2 W_{jk} + b_{jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} W_{kp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (3.56)$$

où  $P = -2K b_{mn} S_{mn}$ . Il s'agit d'une expression algébrique implicite du tenseur d'anisotropie, qu'il convient de résoudre à l'aide, par exemple, d'une méthode de gradient conjugué. D'après Launder [72], les modèles algébriques fournissent des résultats similaires à ceux donnés par les modèles du second ordre dans le cas des écoulements en canal où les phénomènes de transports sont négligeables. C'est le cas du canal plan soumis à une rotation orthogonale, où le profil de vitesse moyenne développé est asymétrique. Cette caractéristique ne peut pas être captée par les modèles de type Boussinesq, contrairement aux modèles du second ordre dans lesquels une partie de l'influence de la force de Coriolis apparaît explicitement dans les termes exacts de production. Il est par conséquent intéressant de disposer d'une solution algébrique. En revanche, ce n'est pas le cas des écoulements où les phénomènes de transports sont prépondérants. Les prédictions se dégradent encore en présence de recirculations et les modèles du second ordre paraissent proposer le niveau de fermeture le plus naturel à exploiter pour ce type d'écoulement.

La résolution de l'équation algébrique implicite peut cependant s'avérer délicate dans certains cas d'écoulements complexes. Il s'agit en effet de résoudre un système d'équations non-linéaires fortement couplées à chaque pas de temps. Le manque de termes de diffusion peut entraîner des

problèmes de stabilité dans la résolution des équations ou une convergence relativement lente. Dans ce cas, l'effort de calcul ne rend pas une telle approche nécessairement avantageuse par rapport à la résolution complète de modèles au second ordre [153]. Les difficultés numériques associées aux formulations implicites des modèles algébriques ont incité à rechercher des expressions explicites. La construction de telles relations repose principalement sur l'exploitation des fonctionnelles présentées au chapitre précédent. Trois techniques sont généralement exploitées.

L'idée de base reste classiquement une hypothèse d'équilibre comme celle de Rodi, mais des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour formuler une expression explicite du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. La forme de l'équation algébrique permet de supposer que le tenseur d'anisotropie peut s'exprimer comme une fonctionnelle dépendant des gradients de vitesse moyenne et d'échelles scalaires caractéristiques de la turbulence, basées sur  $K$  et  $\varepsilon$ . Cette relation constitutive est isotrope, tensoriellement symétrique et à trace nulle. La forme complète et minimale au sens des extensions de produits de matrices s'écrit, en respectant les dimensions :

$$\begin{aligned}
 b_{ij} = & G_1 \frac{K}{\varepsilon} S_{ij} \\
 & + G_2 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [S_{ik} W_{jk} + S_{jk} W_{ik}] \\
 & + G_3 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij}] \\
 & + G_4 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [W_{ik} W_{kj} - \frac{1}{3} W_{mn} W_{nm} \delta_{ij}] \\
 & + G_5 \frac{K^3}{\varepsilon^3} [W_{ip} S_{pk} S_{kj} + S_{ip} S_{pk} W_{jk}] \\
 & + G_6 \frac{K^3}{\varepsilon^3} [W_{ip} W_{pk} S_{kj} + S_{ip} W_{pk} W_{kj} - \frac{1}{3} W_{np} W_{pk} S_{kn} \delta_{ij}] \\
 & + G_7 \frac{K^4}{\varepsilon^4} [W_{ip} S_{pq} W_{qk} W_{kp} + W_{ip} W_{pq} S_{qk} W_{jk}] \\
 & + G_8 \frac{K^4}{\varepsilon^4} [S_{ip} W_{pq} S_{qk} S_{kp} + S_{ip} S_{pq} W_{kq} S_{jk}] \\
 & + G_9 \frac{K^4}{\varepsilon^4} [W_{ip} W_{pq} S_{qk} S_{kj} + S_{ip} S_{pq} W_{qk} W_{kj} - \frac{1}{3} W_{np} W_{pq} S_{qk} S_{kn} \delta_{ij}] \\
 & + G_{10} \frac{K^5}{\varepsilon^5} [W_{ip} S_{pq} S_{qn} W_{nk} W_{kj} + W_{ip} W_{pq} S_{qn} S_{nk} W_{jk}]
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

et les coefficients  $G_i$  dépendent des invariants qui sont :

$$\{S^2\}, \quad \{W^2\}, \quad \{S^3\}, \quad \{SW^2\}, \quad \{S^2W^2\} \tag{3.58}$$

Les modèles de type Boussinesq apparaissent comme une approximation au premier ordre de cette fonctionnelle. L'influence du tenseur des taux de rotation intervient tensoriellement à un ordre plus élevé, mais peut-être pris en compte dès le premier ordre par l'intermédiaire des invariants scalaires dont dépendent les coefficients scalaires de la fonctionnelle.

Pope [105] a exposé en 1975, la procédure d'obtention des coefficients  $G_i$  à partir de l'hypothèse algébrique de Rodi, et en supposant que les termes lent et rapide  $y$  sont linéaire en fonction du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. Son étude se restreint au cas bidimensionnel et sa technique consiste à inverser de façon analytique le système algébrique. Ce



procédé a été repris ensuite par Gatski et Speziale [49] et étendu au cas tridimensionnel. Les coefficients de la fonctionnelle forment la solution du système algébrique linéaire. Ils dépendent des coefficients des modèles homogènes choisis pour le tenseur des corrélations pression-déformation, ainsi que des invariants de la base invariante associée à la fonctionnelle. La solution obtenue par Gatski et Speziale permet de retrouver le modèle bidimensionnel calculé par Pope. Les coefficients sont toutefois des fractions polynômiales des invariants relativement complexes et qui peuvent dans certains cas devenir singulières, alors que sa forme bidimensionnelle, quadratique, admet pour dénominateur une fonction linéaire des deux invariants  $\{S^2\}$  et  $\{W^2\}$ . Ceci a conduit Gatski et Speziale à approcher le modèle tridimensionnel par la forme bidimensionnelle, dont les coefficients sont régularisés par une approximation de Padé. Il s'écrit :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \alpha \frac{3(1 + \eta^2)}{3 + \eta^2 + 6\eta^2\xi^2 + 6\xi^2} \left[ S_{ij}^* + (S_{ij}^{*2} - \frac{1}{3} \{S^{*2}\} \delta_{ij}) + (W_{ik}^* S_{kj}^* - S_{ik}^* W_{kj}^*) \right] \quad (3.59)$$

associé aux équations :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{U}_j K_{,j} = -R_{ij} \bar{U}_{i,j} - \varepsilon + \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) K_{,j} \right]_{,j} \quad (3.60a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \varepsilon_{,j} = -C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{K} R_{ij} \bar{U}_{i,j} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \varepsilon_{,j} \right]_{,j} \quad (3.60b)$$

avec toujours :

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (3.61)$$

et les adimensionnalisations suivantes :

$$g = \frac{1}{\frac{P}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1^S - 1} \quad (3.62a)$$

$$\alpha = \frac{\beta_3 - \frac{2}{3}}{\beta_4 - 1} \quad (3.62b)$$

$$S_{ij}^* = g \tau (1 - \beta_4) S_{ij} \quad (3.62c)$$

$$W_{ij}^* = g \tau (1 - \beta_6) [W_{ij} - \left( \frac{\beta_6 - 2}{\beta_6 - 1} \right) \varepsilon_{ijm} \Omega_m] \quad (3.62d)$$

et les coefficients :

$$\beta_1^S = -6.8 \quad \beta_3 = 0.18 \quad \beta_4 = 0.625 \quad \beta_6 = 0.2 \quad g = 0.233 \quad (3.63)$$

et

$$C_\mu = 0.09 \quad \sigma_K = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.44 \quad C_{\varepsilon_1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon_2} = 1.83 \quad (3.64)$$

La technique utilisée par Gatski et Speziale pour développer leur modèle algébrique explicite a été également employée par Taubee [164] à partir d'une équation algébrique permettant de prendre en compte localement le mouvement de convection moyen. L'équation algébrique de Rodi exprime un équilibre asymptotique, valable pour des grandes valeurs du temps caractéristique

$$S\tau = \frac{SK}{\varepsilon} \quad (3.65)$$

avec

$$S = \sqrt{S_{mn} S_{mn}} \quad (3.66)$$

Taulbee propose de s'appuyer sur un équilibre valable à petits temps et qui permet de retrouver la solution asymptotique de Rodi, soit :

$$S\tau \frac{d}{dt} \left( \frac{b_{ij}}{S\tau} \right) = 0 \quad (3.67)$$

L'équation algébrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} b_{ij} \frac{\varepsilon}{K} \left( \frac{P}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1^S - 1 + \frac{1}{S} \frac{dS}{dt} + \frac{d\tau}{dt} \right) &= \frac{\varepsilon}{K} \frac{1}{2} \beta_2^S D b_{ij}^2 \\ &+ \left( \beta_3 - \frac{2}{3} \right) S_{ij} \\ &+ (\beta_4 - 1) [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ (\beta_6 - 1) [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{ik}^2 W_{jk} + b_{jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} W_{kp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (3.68)$$

Le modèle proposé par Taulbee repose, comme pour Gatski et Speziale, sur les fermetures linéaires utilisées dans les modèles du second ordre, et la technique de Pope [105]. L'exploitation de cette relation algébrique est exposée en annexe C et sera mentionnée en fin de chapitre.

La technique de Pope présente l'avantage de proposer une solution analytique pour les coefficients de la fonctionnelle complète du tenseur d'anisotropie, mais son exploitation nécessite un travail de régularisation et son développement est fortement lié à des hypothèses de modélisation homogène et linéaire des termes des modèles au second ordre. La détermination des coefficients de la fonctionnelle liée à l'hypothèse algébrique de Rodi peut se faire directement par calibration sur des écoulements de base. Shih, Zhu et Lumley [139] ont adopté cette approche, combinée avec des contraintes de réalisabilité et de distorsion rapide. Le modèle recherché est une approximation quadratique de la fonctionnelle complète, soit :

$$\begin{aligned} b_{ij} &= G_1 \frac{K}{\varepsilon} S_{ij} \\ &+ G_2 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [S_{ik} W_{kj} + S_{jk} W_{ik}] \\ &+ G_3 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij}] \\ &+ G_4 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [W_{ik} W_{kj} - \frac{1}{3} W_{mn} W_{nm} \delta_{ij}] \end{aligned}$$

avec

$$G_1 = -C_\mu \quad (3.69a)$$

$$G_2 = \frac{1}{2} (C_3 - C_2) \quad (3.69b)$$

$$G_3 = \frac{1}{2} (2C_1 + C_2 + C_3) \quad (3.69c)$$

$$G_4 = \frac{1}{2} (2C_1 - C_2 - C_3) \quad (3.69d)$$

Les coefficients sont déterminés à l'aide de deux contraintes de base :

- Une rotation rapide, imposée à une turbulence initialement isotrope, n'affecte pas la turbulence dans la limite des grands nombres de Reynolds. Ce comportement classique a été

exploité par Reynolds en 1987 [112], et constitue ici une contrainte sur les coefficients du modèle, qui s'écrit :

$$G_4 = 0 \quad (3.70)$$

soit

$$2C_1 = C_2 + C_3 \quad (3.71)$$

- La forme des coefficients est ensuite déterminée à partir de la contrainte de réalisabilité (Schumann [126], Lumley [89]), qui demande à ce que le tenseur de Reynolds soit une forme quadratique positive, c'est-à-dire qu'il vérifie les inégalités de Schwarz :

$$\overline{u_\alpha^2} \geq 0 \quad (3.72a)$$

$$\overline{u_\alpha u_\beta}^2 \leq \overline{u_\alpha^2} \overline{u_\beta^2} \quad (3.72b)$$

sans sommation sur les indices.

Dans le cas où la turbulence est soumise à une déformation rapide, la composante du tenseur de Reynolds dans la direction de la déformation décroît brutalement, ce qui peut amener un modèle non-réalisable à prédire un niveau d'énergie cinétique turbulente négatif. C'est également le cas lorsqu'un cisaillement élevé est imposé, qui conduit à des niveaux de cisaillement du tenseur de Reynolds très grands et pour lesquels un modèle non-réalisable ne vérifie pas les inégalités de Schwarz. Parmi ces deux situations extrêmes, le cas de la déformation pure permet aisément de se placer dans les axes principaux de la déformation, ce qui réduit la contrainte de réalisabilité à une condition sur les contraintes normales du tenseur de Reynolds. Cette étude permet de fixer une forme des coefficients du modèle satisfaisant cette limite. Les inconnues sont ensuite calibrées sur des écoulements cisailés, et Shih, Zhu et Lumley proposent [139] :

$$C_3 = -C_2 \quad (3.73)$$

soit :

$$R_{ij} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - 2 C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} S_{ij} - 2 C_2 \frac{K^3}{\varepsilon^3} (W_{ik} S_{kj} - S_{ik} W_{kj}) \quad (3.74)$$

avec

$$S = \sqrt{S_{mn} S_{mn}} \quad W = \sqrt{W_{mn} W_{mn}} \quad U = \sqrt{S_{mn} S_{mn} + W_{mn} W_{mn}} \quad (3.75)$$

$$C_\mu = \frac{1}{A_0 + A_s^* \left(\frac{K}{\varepsilon} U\right)} \quad (3.76a)$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{1 - 9 C_\mu^2 \left(\frac{K}{\varepsilon} S\right)^2}}{C_0 + 6 \left(\frac{K}{\varepsilon} S\right) \left(\frac{K}{\varepsilon} W\right)} \quad (3.76b)$$

et

$$A_0 = 6.5 \quad C_0 = 1.0 \quad A_s^* = \sqrt{6} \cos(\phi) \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6} \{S^3\}/S^3) \quad (3.77)$$

Le modèle est associé aux équations classiques de transport de l'énergie cinétique et de sa dissipation :

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \bar{U}_j K_{,j} = -R_{ij} \bar{U}_{i,j} - \varepsilon + \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) K_{,j} \right]_{,j} \quad (3.78a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{U}_j \varepsilon_{,j} = -C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{K} R_{ij} \bar{U}_{i,j} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{K} + \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \varepsilon_{,j} \right]_{,j} \quad (3.78b)$$

avec

$$\nu_t = C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} \quad (3.79)$$

et

$$C_{\varepsilon_1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon_2} = 1.92 \quad \sigma_K = 1.0 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (3.80)$$

Il faut noter que dans le cas où l'écoulement est décrit dans un repère tournant, les auteurs proposent de remplacer le tenseur des taux de rotation par le tenseur absolu :

$$\bar{W}_{aij} = W_{ij} - \varepsilon_{ijm} \Omega_m \quad (3.81)$$

où  $\Omega_m$  est le vecteur de rotation des axes du repère, et de remplacer le facteur d'échelle du mouvement moyen par

$$U = \sqrt{S_{mn} S_{mn} + \tilde{W}_{amn} \tilde{W}_{amn}} \quad (3.82)$$

avec

$$\tilde{W}_{aij} = W_{ij} - 2 \varepsilon_{ijm} \Omega_m \quad (3.83)$$

Cette technique est totalement dissociée des coefficients intervenant dans les hypothèses de fermetures adoptées pour les modèles au second ordre. Elle s'inspire uniquement de leur seule expression tensorielle. Il est clair qu'il est difficile de retenir la forme complète de la fonctionnelle et que la troncature quadratique apparaît comme l'ordre minimal à retenir pour prendre en compte le tenseur des taux de rotation. Par ailleurs l'interprétation des termes d'ordre élevé devient plus complexe à mesure que leur degré augmente et leur réelle influence sur la qualité des prédictions reste encore à être validée, ne serait-ce que sur un écoulement de canal plan établi. Il est par conséquent intéressant de développer des expressions algébriques explicites qui soient des troncatures à un ordre voulu de la solution d'une équation algébrique donnée. Ce peut être effectué en développant en série de Taylor les équations algébriques, telles que celle de Rodi et de Taulbee (annexe C). La prise en compte progressive, à un ordre donné, de l'influence du tenseur des taux de rotation ou des non-linéarités devient très naturelle.

L'attrait de tels développements est de disposer d'un procédé de construction systématique de la relation algébrique du tenseur de Reynolds. Il existe d'autres approches pour développer cette fermeture, qui reviennent pour la plupart à exprimer une forme tensorielle similaire à la fonctionnelle exposée ici, mais mettent en oeuvre d'autres techniques. Yoshizawa [180] a écrit une relation pour le tenseur de Reynolds en utilisant une approximation d'interaction directe à deux échelle. Son modèle contient les termes linéaires et quadratiques en fonction du gradient de vitesse moyenne. Une relation du même type a également été calculée par Rubinstein et Barton [123], utilisant le méthode de renormalisation de groupe de Yakhot et Orzag [178]. Ces outils permettent de proposer des expressions analytiques des coefficients. Ces modèles, ainsi que leur formulation bas-Reynolds demandent encore à être validés sur des écoulements en géométrie complexe. Dans la pratique, l'influence du choix de l'équation pour le taux de

dissipation d'énergie cinétique turbulente sur la fermeture algébrique choisie reste également un point intéressant à évaluer. La validation de modèles algébriques dépasse le cadre de cette étude et ces modèles ne sont pas traités par la suite.

Ce chapitre a permis d'avoir un aperçu des principales fermetures de base généralement retenues pour traiter les différents termes constituant les équations de modèles au second ordre. Un examen plus approfondi de l'élaboration des fermetures pour le tenseur des corrélations pression-déformation est effectué dans le cadre des écoulements turbulents homogènes dans les chapitres suivants. Auparavant, la prise en compte de la présence de parois par des corrections inhomogènes et bas-Reynolds dans les fermetures classiques est abordée à l'aide de développements asymptotiques et de données de simulations directes. La synthèse des trois modélisations bas-Reynolds utilisées par la suite est également présentée. L'approche de modélisation terme par terme ne suffit pas en effet à un exposé de fermetures classiques au second ordre dans la mesure où c'est l'interaction de l'ensemble des hypothèses qui constitue en définitive le modèle. A cet égard, il n'est pas nécessairement judicieux de composer un modèle au second ordre en assemblant arbitrairement les propositions de différents auteurs. Une présentation des fermetures terme par terme est néanmoins la seule qui permette d'exposer les hypothèses associées à chaque contribution. Elle est par conséquent encore retenue dans le chapitre suivant pour aborder le traitement des parois, tout en gardant à l'esprit que chaque modèle forme un tout cohérent dans lequel les hypothèses des différentes fermetures trouvent leur justification.

d

---

## Chapitre 4

# Comportement de la turbulence au voisinage d'une paroi

Les modélisations présentées précédemment supposent que tout effet direct de la viscosité sur la turbulence est négligeable et admettent inversement que le champ moyen n'agit pas sur les structures dissipatives. Les modèles ne reflètent alors aucune interaction entre petites et grosses structures, responsables de mécanismes bien distincts. Cette approximation, acceptable dans la majeure partie de l'écoulement, est mise en défaut au voisinage d'une paroi. L'adhérence du fluide implique l'existence d'une zone proche de la paroi où la viscosité moléculaire régit la dynamique de l'écoulement. L'effet de la viscosité sur les processus de transport turbulent devient alors très important.

En pratique, cette zone d'influence s'étend depuis la paroi jusqu'à ce que le nombre de Reynolds turbulent local, basé sur les échelles turbulentes dans la direction normale à la paroi, soit de l'ordre de 100 (Launder [72]). Les modèles de turbulence appliqués dans cette région à faible nombre de Reynolds ont été initialement développés à partir des formulations à grand nombre de Reynolds, en exprimant les coefficients des modèles en fonction de paramètres dépendants de la viscosité, comme le nombre de Reynolds turbulent. Ces corrections empiriques sont encore largement utilisées dans les fermetures bas-Reynolds pour décrire la sous-couche visqueuse.

A l'approche de la paroi, l'aspect de la turbulence se modifie rapidement depuis la zone pleinement turbulente vers la sous-couche visqueuse. Les échelles de longueur dans la direction normale à la paroi se réduisent, conduisant à des structures turbulentes anisotropes. Ces variations rapides donnent en outre un caractère fortement inhomogène à la turbulence. Ce sont ces deux caractéristiques, associées ensuite à l'influence de la viscosité moléculaire, qui constituent actuellement la base des formulations proche paroi. Leurs principes les plus classiques seront exposés dans la deuxième partie de ce chapitre.

Dans un premier temps, les comportements des quantités turbulentes au voisinage d'une paroi sont examinés en s'appuyant sur leur développement asymptotique. Cette technique, justifiée par l'épaisseur très faible de la sous-couche visqueuse, permet de regarder l'ordre de grandeur des différents termes au voisinage immédiat de la paroi, mais doit être complétée par des comparaisons de prédictions au-delà de la couche limite, pour donner un aperçu de l'accord des modèles aux comportements pariétaux des termes exacts. Ces comparaisons sont effectuées, en fin de chapitre, à l'aide des données de simulation directe dans le canal plan de Kim, Moin et Moser [68], pour les modèles choisis.

## 4.1 Comportements asymptotiques des quantités turbulentes

Le comportement asymptotique de l'écoulement turbulent au voisinage immédiat d'une paroi peut être observé en développant les variables en série de Taylor en fonction de leur éloignement de la paroi (Launder [72]). Les composantes des fluctuations de vitesse et de pression évoluent suivant :

$$\begin{aligned} u &= a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + O(y^4) \\ v &= b_2 y^2 + b_3 y^3 + O(y^4) \\ w &= c_1 y + c_2 y^2 + c_3 y^3 + O(y^4) \\ \frac{1}{\rho} p &= \alpha_0 + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + O(y^4) \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $y$  est la distance normale à la paroi, située en  $y = 0$ , et les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  et  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $x$ ,  $z$  et  $t$ , de moyenne nulle en temps. Les composantes de vitesse satisfont la condition d'adhérence à la paroi ( $a_0 = 0$ ,  $b_0 = 0$ , et  $c_0 = 0$ ), ainsi que la propriété d'incompressibilité de l'écoulement, qui s'écrit :

$$u_{,x} + v_{,y} + w_{,z} = 0 \quad (4.2)$$

Cette condition impose aux coefficients de vérifier les relations suivantes :

$$b_1 = 0 \quad (4.3)$$

et pour tout entier  $n$  strictement positif :

$$a_{n,x} + (n+1)b_{n+1} + c_{n,z} = 0 \quad (4.4)$$

soient, en particulier :

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{2}(a_{1,x} + c_{1,z}) \\ b_3 &= -\frac{1}{3}(a_{2,x} + c_{2,z}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

Seule la valeur de  $b_1$  est retenue explicitement. Elle montre que la composante normale de fluctuations de vitesse est d'ordre supérieur aux composantes transversale et longitudinale.

Les coefficients du développement de la fluctuation de pression sont également reliés aux autres coefficients des vitesses par l'intermédiaire des équations de quantités de mouvement turbulentes. Au voisinage immédiat de la paroi, l'écoulement correspond à l'approximation de couche limite bidimensionnelle. Il vient :

$$\begin{aligned} u_{,t} &= -\frac{1}{\rho} p_{,x} + \nu (u_{,xx} + u_{,yy} + u_{,zz}) - uu_{,x} - vv_{,y} - ww_{,z} - v \overline{U}_{,y} \\ v_{,t} &= -\frac{1}{\rho} p_{,y} + \nu (v_{,xx} + v_{,yy} + v_{,zz}) - uv_{,x} - vv_{,y} - wv_{,z} \\ w_{,t} &= -\frac{1}{\rho} p_{,z} + \nu (w_{,xx} + w_{,yy} + w_{,zz}) - uw_{,x} - vw_{,y} - ww_{,z} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les développements s'écrivent à l'ordre deux :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0,x} - 2\nu a_2 + [a_{1,t} + \alpha_{1,x} - \nu(6a_3 + a_{1,xx} + a_{1,zz})]y + O(y^2) &= 0 \\
 \alpha_1 - 2\nu b_2 + [2\alpha_2 - 6\nu b_3]y + O(y^2) &= 0 \\
 \alpha_{0,z} - 2\nu c_2 + [c_{1,t} + \alpha_{1,z} - \nu(6c_3 + c_{1,xx} + c_{1,zz})]y + O(y^2) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Les premiers termes vérifient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{0,x} &= 2\nu a_2 \\
 \alpha_{0,z} &= 2\nu c_2 \\
 \alpha_1 &= 2\nu b_2 \\
 \alpha_2 &= 3\nu b_3
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

ce qui montre en particulier que :

$$a_{2,z} = c_{2,x} \tag{4.9}$$

et

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,x} &= 6\nu a_3 - a_{1,t} + \nu(a_{1,xx} + a_{1,zz}) \\
 \alpha_{1,z} &= 6\nu c_3 - c_{1,t} + \nu(c_{1,xx} + c_{1,zz})
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dans ces expressions,  $\alpha_1$  peut être exprimé en fonction de  $b_2$ , lui-même exprimé, d'après la relation de continuité, en fonction des gradients  $a_{1,x}$  et  $c_{1,z}$ . Dans ce cas, les coefficients de pression sont éliminés et :

$$\begin{aligned}
 6\nu a_3 &= a_{1,t} + \nu(2b_{2,x} - a_{1,xx} - a_{1,zz}) \\
 6\nu c_3 &= c_{1,t} + \nu(2b_{2,z} - c_{1,xx} - c_{1,zz})
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
 6\nu a_3 &= a_{1,t} - \nu(c_{1,xz} + 2a_{1,xx} + a_{1,zz}) \\
 6\nu c_3 &= c_{1,t} - \nu(a_{1,xz} + 2c_{1,zz} + c_{1,xx})
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

ce qui permet en particulier d'écrire l'égalité  $6(\overline{a_1 a_3} + \overline{c_1 c_3}) = 4\overline{b_2^2} + \overline{a_{1,x}^2} + \overline{c_{1,z}^2} + \overline{a_{1,z}^2} + \overline{c_{1,x}^2}$ . Ces relations permettent donc de rappeler que les coefficients de Taylor ne sont pas indépendants. Elles ne seront utilisées par la suite que lorsqu'elles interviennent dans l'ordre des développements.

Le développement en séries de Taylor des fluctuations de pression et de vitesse permet d'obtenir les comportements asymptotiques de la plupart des variables intervenant dans les modèles de turbulence.

Les corrélations doubles de vitesse s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \overline{u^2} &= \overline{a_1^2} y^2 + 2\overline{a_1 a_2} y^3 + O(y^4) \\
 \overline{v^2} &= O(y^4) \\
 \overline{w^2} &= \overline{c_1^2} y^2 + 2\overline{c_1 c_2} y^3 + O(y^4) \\
 \overline{uv} &= \overline{a_1 b_2} y^3 + O(y^4)
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

L'énergie cinétique de la turbulence admet le développement suivant au voisinage de la paroi :

$$K = \frac{1}{2}[(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) y^2 + 2(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y^3] + O(y^4) \tag{4.14}$$

et se comporte en  $O(y^2)$  à la paroi.

Le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon$  est une pseudo-dissipation, utilisée dans la plupart des modèles de turbulence, et dont l'expression  $\varepsilon \equiv \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}}$  correspond à la



forme de la vraie dissipation à grand nombre de Reynolds. Il peut également se développer en série de Taylor suivant :

$$\varepsilon = \nu [(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + 4(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + 4(\overline{a_2^2} + \overline{c_2^2} + 3\overline{a_1 a_3} + 3\overline{c_1 c_3}) y^2] + O(y^3) \quad (4.15)$$

Ceci montre que le taux de dissipation turbulente  $\varepsilon$  ne s'annule pas à la paroi, mais tend vers la limite  $\nu(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2})$  lorsque  $y$  tend vers 0.

Il faut noter que la quantité qui représente en réalité le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente dans le cas général d'une turbulence inhomogène est définie par :

$$\begin{aligned} \varepsilon^r &= \frac{1}{2} \nu \overline{(u_{i,j} + u_{j,i})(u_{i,j} + u_{j,i})} \\ &= \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}} + \nu \overline{(u_i u_j)_{,ij}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Son expression en approximation de couche limite établie s'écrit :

$$\varepsilon^r = \varepsilon + \nu \overline{v^2}_{,yy} \quad (4.17)$$

ce qui fournit le même comportement asymptotique quadratique que  $\varepsilon$ , soit

$$\varepsilon^r = \nu [(\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + 4(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y] + O(y^2) \quad (4.18)$$

En effet,  $\overline{v^2}_{,yy} = 12 \overline{b_2^2} y^2 + O(y^3)$ .

Si les développements en série de Taylor permettent de connaître la consistance des modèles avec la physique proche paroi, ils sont également utilisés pour critiquer les conditions limites proposées avec ces équations. Les conditions aux limites sur  $\varepsilon$  les plus couramment employées sont de quatre types :

$$\varepsilon_p = 0 \quad (4.19a)$$

$$\left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right|_p = 0 \quad (4.19b)$$

$$\varepsilon_p = \nu \left. \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \right|_p \quad (4.19c)$$

$$\varepsilon_p = 2 \nu \left. \left( \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial y} \right)^2 \right|_p \quad (4.19d)$$

Il est clair que la condition de Dirichlet (4.19a) ne peut pas satisfaire le comportement asymptotique du taux de dissipation, et que la condition de Neumann (4.19b) ne serait cohérente avec la physique à la paroi que lorsque  $\overline{a_1 a_2} = -\overline{c_1 c_2}$ . Elles présentent l'avantage de la simplicité de la mise en œuvre numérique. La condition (4.19c) provient de l'équation d'évolution pour l'énergie cinétique turbulente dont les termes dominants au voisinage de la paroi satisfont l'équilibre :

$$0 = -\varepsilon + \nu \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \quad (4.20)$$

Si cette proposition a une justification physique à la paroi, elle n'est pas suffisante pour décrire la façon dont la dissipation s'écarte de cette condition limite. Elle possède en effet le développement suivant :

$$\nu \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} = \varepsilon_p + 6\nu (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + O(y^2) \quad (4.21)$$

alors que le taux de dissipation se comporte comme :

$$\varepsilon = \varepsilon_p + 4\nu (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + O(y^2)$$

Le désaccord des développements à l'ordre un montre que  $\nu \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}$  et  $\varepsilon$  ne s'approchent pas de la paroi avec le même gradient. Cette condition limite présente en outre le désavantage d'introduire un couplage des équations de  $K$  et  $\varepsilon$  par une expression comportant des dérivées d'ordre élevé. C'est pourquoi une condition limite alternative est parfois proposée [102] et s'écrit :

$$\varepsilon_p = 2\nu \left. \frac{K}{y^2} \right|_p \quad (4.22)$$

Cette condition est plus simple que (4.19c), mais ne satisfait pas non plus le comportement linéaire de la dissipation, puisque son développement s'écrit :

$$2\nu \left. \frac{K}{y^2} \right|_p = \varepsilon_p + 2\nu (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + O(y^2) \quad (4.23)$$

La quatrième condition limite généralement adoptée (4.19b) a été proposée par Launder [66] et fournit le bon développement asymptotique à l'ordre un :

$$2\nu \left( \left. \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial y} \right|_p \right)^2 = \varepsilon_p + 4\nu (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + O(y^2) \quad (4.24)$$

Il est clair que les conditions aux limites admettant le même équivalent que  $\varepsilon$  à la paroi ne captent pas le bon gradient, à l'exception de celle adoptée par Launder. Ce dernier propose de simplifier le traitement de cette condition aux limites en remplaçant l'équation de transport de  $\varepsilon$  par celle d'une variable de dissipation  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - D$ , choisie de telle sorte qu'à la paroi, la condition aux limites soit de type Dirichlet, soit  $\tilde{\varepsilon}_p = 0$ . La définition de  $D$ , variable adoptant le comportement asymptotique de  $\varepsilon$  à la paroi, n'est pas unique, comme le montrent les différentes propositions précédentes. Il conviendra cependant de satisfaire l'accord de  $D$  avec  $\varepsilon$  jusqu'au premier ordre inclu, afin d'espérer s'approcher correctement de la paroi. Cette nouvelle variable  $\tilde{\varepsilon}$  est une quantité susceptible d'évoluer beaucoup plus rapidement que  $\varepsilon$  au voisinage de la paroi. La résolution de son équation nécessite éventuellement un maillage suffisamment fin dans la zone pariétale pour y capturer correctement ses gradients.

## 4.2 Equations d'évolution des quantités turbulentes

Dans la mesure où les quantités turbulentes ne sont pas directement accessibles dans la plupart des modèles, il est intéressant de regarder les comportements asymptotiques des termes composant le terme source de leurs équations d'évolution. Ils permettent d'identifier les équilibres dominants à la paroi et de confronter chacun de ces termes aux modèles proposés.

$$\frac{\overline{d}R_{ij}}{dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} + T_{ij,k,k}^u - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^v \quad (4.25)$$

### 4.2.1 Budget des équations de Reynolds

#### Production

En approximation d'écoulement bidimensionnel établi, les termes de productions se réduisent à :

$$\begin{aligned} P_{11} &= -2 \overline{uv} \overline{U}_{,y} \\ P_{22} &= 0 \\ P_{33} &= 0 \\ P_{12} &= -\overline{v^2} \overline{U}_{,y} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Le gradient de vitesse moyenne  $\overline{U}_{,y}$  est  $O(1)$  du fait de l'adhérence du fluide aux parois et le tenseur se développe suivant :

$$\begin{aligned} P_{11} &= -2 \overline{a_1 b_2} \overline{U}_{,y} y^3 - 2 (\overline{a_1 b_3} + \overline{a_2 b_2}) \overline{U}_{,y} y^4 + O(y^5) \\ P_{22} &= 0 \\ P_{33} &= 0 \\ P_{12} &= -\overline{b_2^2} \overline{U}_{,y} y^4 + O(y^5) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Il faut noter que d'après les simulations directes effectuées par Mansour, Kim et Moin [92] dans un canal plan établi, la composante  $P_{11}$  est positive au voisinage de la paroi, bien que la partie principale de son développement soit  $-2 \overline{a_1 b_2} \overline{U}_{,y} y^3$ . En remplaçant  $b_2$  par son expression en fonction des coefficients  $a_i$  et  $c_i$  donnée par la contrainte d'incompressibilité, il vient en effet :

$$-2 \overline{a_1 b_2} \overline{U}_{,y} y^3 = \overline{a_1 c_{1,z}} \overline{U}_{,y} y^3 \quad (4.28)$$

Les simulations montrent en outre que la production est le terme source positif dominant dans le bilan de  $\overline{u^2}$  au voisinage de la paroi.

#### Transport turbulent par le gradient de pression

L'expression du tenseur des corrélations vitesse-gradient de pression se simplifie de la façon suivante dans le cas de l'écoulement bidimensionnel établi :

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= -2 \frac{1}{\rho} \overline{up_{,x}} \\ \Pi_{22} &= -2 \frac{1}{\rho} \overline{vp_{,y}} \\ \Pi_{33} &= -2 \frac{1}{\rho} \overline{wp_{,z}} \\ \Pi_{12} &= -\frac{1}{\rho} \overline{up_{,y}} - \frac{1}{\rho} \overline{vp_{,x}} \end{aligned} \quad (4.29)$$

et son développement s'écrit :

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= -2 \overline{a_1 \alpha_{0,x}} y - 2 (\overline{a_1 \alpha_{1,x}} + \overline{a_2 \alpha_{0,x}}) y^2 + O(y^3) \\ \Pi_{22} &= -2 \overline{b_2 \alpha_1} y^2 + O(y^3) \\ \Pi_{33} &= -2 \overline{c_1 \alpha_{0,z}} y - 2 (\overline{c_1 \alpha_{1,z}} + \overline{c_2 \alpha_{0,z}}) y^2 + O(y^3) \\ \Pi_{12} &= -\overline{a_1 \alpha_1} y - (2 \overline{a_1 \alpha_2} + \overline{a_2 \alpha_1} + \overline{b_2 \alpha_{0,x}}) y^2 + O(y^3) \end{aligned} \quad (4.30)$$

et en remplaçant les coefficients des gradients de pression en fonction des coefficients des développements sur les vitesses, il vient :

$$\begin{aligned}
 \Pi_{11} &= -2\nu [ 2\overline{a_1 a_2} y + (2\overline{a_2^2} + 6\overline{a_1 a_3}) y^2 ] + O(y^3) \\
 \Pi_{22} &= -2\nu [ \phantom{2\overline{a_1 a_2} y} + 2\overline{b_2^2} y^2 ] + O(y^3) \\
 \Pi_{33} &= -2\nu [ 2\overline{c_1 c_2} y + (2\overline{c_2^2} + 6\overline{c_1 c_3}) y^2 ] + O(y^3) \\
 \Pi_{12} &= -2\nu [ \overline{a_1 b_2} y + (3\overline{a_1 b_3} + 2\overline{a_2 b_2}) y^2 ] + O(y^3)
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Le terme de corrélation vitesse-gradient de pression tend vers zéro au fur et à mesure qu'il s'approche de la paroi.

### Dissipation

Le développement du tenseur des taux de dissipation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= 2\nu [ \overline{a_1^2} + 4\overline{a_1 a_2} y + (4\overline{a_2^2} + 6\overline{a_1 a_3} + a_{1,x}^2 + a_{1,z}^2) y^2 ] + O(y^3) \\
 \varepsilon_{22} &= 2\nu [ \phantom{\overline{a_1^2}} + 4\overline{b_2^2} y^2 ] + O(y^3) \\
 \varepsilon_{33} &= 2\nu [ \overline{c_1^2} + 4\overline{c_1 c_2} y + (4\overline{c_2^2} + 6\overline{c_1 c_3} + c_{1,x}^2 + c_{1,z}^2) y^2 ] + O(y^3) \\
 \varepsilon_{12} &= 2\nu [ \phantom{\overline{a_1^2}} + 2\overline{a_1 b_2} y + (3\overline{a_1 b_3} + 4\overline{a_2 b_2}) y^2 ] + O(y^3)
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

A la paroi, les composantes  $\varepsilon_{11}$  et  $\varepsilon_{33}$  ne sont pas nulles.

Le développement de la vraie dissipation s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}^r &= 2\nu [ \overline{a_1^2} + 4\overline{a_1 a_2} y + (4\overline{a_2^2} + 6\overline{a_1 a_3} + a_{1,x}^2 + a_{1,z}^2 - 3\overline{a_{1,x} b_2}) y^2 ] + O(y^3) \\
 \varepsilon_{22}^r &= 2\nu [ \phantom{\overline{a_1^2}} + 10\overline{b_2^2} y^2 ] + O(y^3) \\
 \varepsilon_{33}^r &= 2\nu [ \overline{c_1^2} + 4\overline{c_1 c_2} y + (4\overline{c_2^2} + 6\overline{c_1 c_3} + c_{1,x}^2 + c_{1,z}^2 - 3\overline{c_{1,z} b_2}) y^2 ] + O(y^3) \\
 \varepsilon_{12}^r &= 2\nu [ \phantom{\overline{a_1^2}} + 4\overline{a_1 b_2} y + (\frac{15}{2}\overline{a_1 b_3} + 7\overline{a_2 b_2}) y^2 ] + O(y^3)
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

La relation entre les taux de la pseudo-dissipation et de la vraie dissipation en approximation de couche limite établie se retrouvent ainsi avec les demi-traces :

$$\varepsilon = \nu [ (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + 4(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + 4(\overline{a_2^2} + \overline{c_2^2} + 3\overline{a_1 a_3} + 3\overline{c_1 c_3}) y^2 ] + O(y^3) \tag{4.34}$$

et

$$\varepsilon^r = \nu [ (\overline{a_1^2} + \overline{c_1^2}) + 4(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y + 4(\overline{a_2^2} + 3\overline{b_2^2} + \overline{c_2^2} + 3\overline{a_1 a_3} + 3\overline{c_1 c_3}) y^2 ] + O(y^3) \tag{4.35}$$

Comme il l'a été mentionné précédemment, les deux dissipations diffèrent à l'ordre deux au voisinage de la paroi.

### Diffusion visqueuse

Les termes de diffusion se réduisent à :

$$\begin{aligned}
 d_{11}^\nu &= \nu \overline{u^2}_{,yy} \\
 d_{22}^\nu &= \nu \overline{v^2}_{,yy} \\
 d_{33}^\nu &= \nu \overline{w^2}_{,yy} \\
 d_{12}^\nu &= \nu \overline{uv}_{,yy}
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

et se développent suivant :

$$\begin{aligned}
 d_{11}^\nu &= 2\nu \left[ \overline{a_1^2} + 6\overline{a_1 a_2} y + (6\overline{a_2^2} + 12\overline{a_1 a_3}) y^2 \right] + O(y^3) \\
 d_{22}^\nu &= 2\nu \left[ \overline{b_2^2} y^2 \right] + O(y^3) \\
 d_{33}^\nu &= 2\nu \left[ \overline{c_1^2} + 6\overline{c_1 c_2} y + (6\overline{c_2^2} + 12\overline{c_1 c_3}) y^2 \right] + O(y^3) \\
 d_{12}^\nu &= 2\nu \left[ 3\overline{a_1 b_2} y + (6\overline{a_1 b_3} + 6\overline{a_2 b_2}) y^2 \right] + O(y^3)
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

D'après ces développements, les composantes du tenseur de dissipation et de diffusion visqueuse s'équilibrent avec les termes du tenseur de corrélation vitesse-gradient de pression au voisinage immédiat de la paroi.

### Transport turbulent

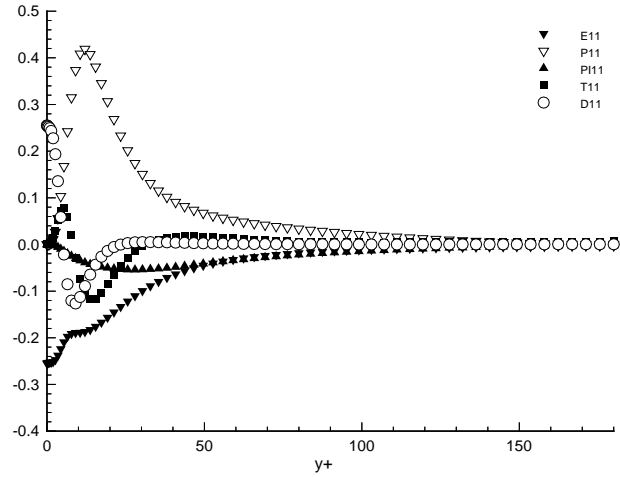
Le terme de transport par les corrélations triples de fluctuation de vitesse est approché par  $T_{ij2,2}^u$ , si bien que sa contribution est la suivante :

$$\begin{aligned}
 T_{112,2}^u &= -[\overline{uuv}]_{,y} \\
 T_{222,2}^u &= -[\overline{vvv}]_{,y} \\
 T_{332,2}^u &= -[\overline{wvw}]_{,y} \\
 T_{122,2}^u &= -[\overline{uvw}]_{,y}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

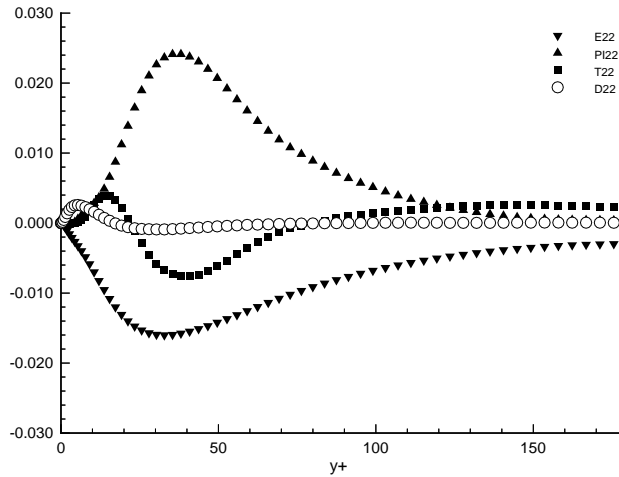
et son développement s'écrit :

$$\begin{aligned}
 T_{112,2}^u &= -4\overline{a_1 a_1 b_2} y^3 - 5(\overline{a_1 a_1 b_3} + 2\overline{a_1 a_2 b_2}) y^4 \\
 &\quad - 6(\overline{a_1 a_1 b_4} + \overline{a_2 a_2 b_2} + 2\overline{a_1 a_3 b_2} + 2\overline{a_1 a_2 b_3}) y^5 + O(y^6) \\
 T_{222,2}^u &= -6\overline{b_2 b_2 b_2} y^5 + O(y^6) \\
 T_{332,2}^u &= -4\overline{c_1 c_1 b_2} y^3 - 5(\overline{c_1 c_1 b_3} + 2\overline{c_1 c_2 b_2}) y^4 \\
 &\quad - 6(\overline{c_1 c_1 b_4} + \overline{c_2 c_2 b_2} + 2\overline{c_1 c_3 b_2} + 2\overline{c_1 c_2 b_3}) y^5 + O(y^6) \\
 T_{122,2}^u &= -5\overline{a_1 b_2 b_2} y^4 - 6(\overline{a_2 b_2 b_2} + 2\overline{a_1 b_2 b_3}) y^5 + O(y^6)
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Les développements en série de Taylor ne permettent que de regarder les équilibres au voisinage immédiat de la paroi. Le changement de comportement des variables de l'écoulement à l'approche de la paroi ne peut être observé qu'en résolvant les équations de transport correspondantes. Les simulations directes effectuées par Mansour, Kim et Moin dans le cas du canal plan établi [92] permettent de dégager les tendances des budgets du tenseur de Reynolds, de l'énergie cinétique et du taux de dissipation. Ces courbes sont rappelées ci-dessous. Les termes exacts à la discrétisation près sont tracés par des symboles en clair. Ce sont les tenseurs de production,  $P_{ij}$  et de diffusion visqueuse, notés  $D_{ij}$  en légende. Le transport turbulent est noté quant à lui  $T_{ij}$ , avec des symboles noirs pleins, comme les deux autres tenseurs qui nécessitent une modélisation, le tenseur des taux de dissipation  $E_{ij}$  et le tenseur des corrélations vitesse-gradient de pression,

$PI_{ij}$ .

 FIG. 4.1: Budget de  $\overline{u^2}$ . Simulations directes de Mansour, Kim et Moin.

Le terme source de l'équation de  $\overline{u^2}$  est dominé par les termes de production, positifs, au delà de la sous-couche visqueuse. En se rapprochant de la paroi, ces termes sont équilibrés par la dissipation et la corrélation vitesse-gradient de pression. Au voisinage immédiat de la paroi, cette dernière tend vers une limite nulle, et contrebalance les termes de dissipation et de diffusion visqueuse, égaux sur la paroi. Les corrélations triples sont négligeables partout.


 FIG. 4.2: Budget de  $\overline{v^2}$ . Simulations directes de Mansour, Kim et Moin.

Ce n'est pas le cas dans l'équation de  $\overline{v^2}$  où le transport turbulent est du même ordre de grandeur que les autres termes, sauf au voisinage immédiat de la paroi, où il décroît beaucoup plus brutalement. La diffusion de pression fournit un mécanisme de production dominant et la

destruction des termes sources est assurée par le terme de dissipation. La diffusion est négligeable partout, sauf au voisinage immédiat de la paroi, où elle assure avec la dissipation, l'équilibre du terme de corrélation vitesse-gradient de pression.

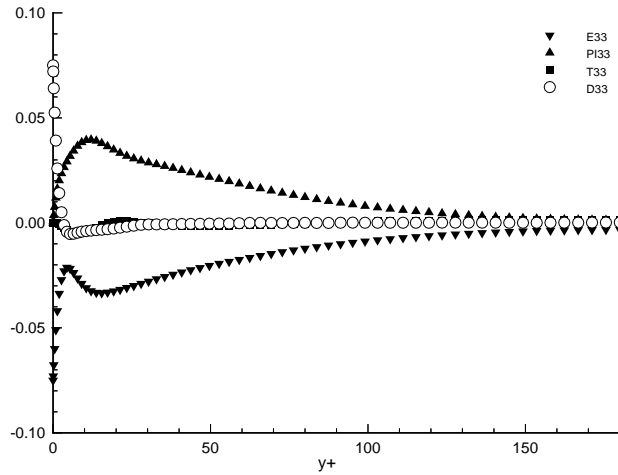


FIG. 4.3: Budget de  $\overline{w^2}$ . Simulations directes de Mansour, Kim et Moin.

Loin de la paroi, le terme de corrélation vitesse-gradient de pression assure la production de  $\overline{w^2}$  et s'équilibre avec les termes de dissipation qui assurent la destruction. A l'approche de la paroi, le terme de diffusion visqueuse vient contrebalancer la décroissance du terme de diffusion de pression en assurant l'équilibre avec le terme de dissipation. Le transport turbulent est négligeable partout.

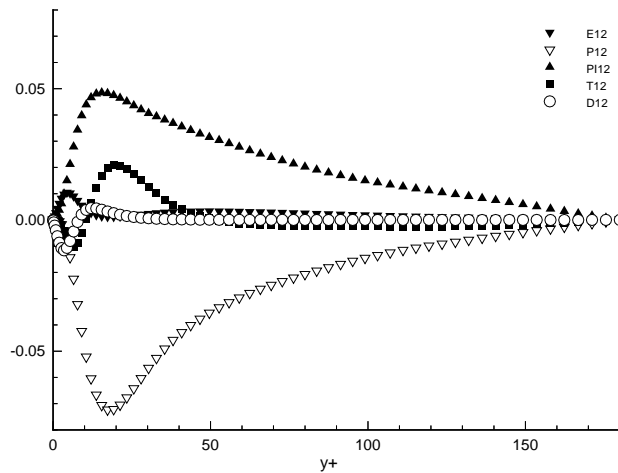


FIG. 4.4: Budget de  $\overline{uv}$ . Simulations directes de Mansour, Kim et Moin.

Tout comme pour  $\overline{u^2}$ , le budget de  $\overline{uv}$  est dominé au loin par le terme de production, qui agit cette fois comme un terme de destruction, puisqu'il est négatif [92]. Il est balancé par la diffusion

de pression, alors que les autres termes restent petits. Au voisinage immédiat de la paroi, la diffusion et la dissipation visqueuse deviennent toutes deux plus importantes et leur différence contrebalance le terme de corrélation vitesse-gradient de pression. L'ordre de grandeur de ces termes est cependant petit, indiquant que la viscosité joue un rôle mineur dans la dynamique du cisaillement  $\overline{u^2}$ .

Les simulations directes permettent également de décrire le bilan d'énergie cinétique loin de la paroi et de vérifier que dans le cas du canal plan établi, l'hypothèse d'équilibre entre production et dissipation est vérifiée de façon satisfaisante au loin. En se rapprochant de la paroi, l'équilibre est dominé par l'action de la diffusion de pression contrebalançant la dissipation et la diffusion visqueuse, quantités qui deviennent identiques à la paroi.

Il apparaît d'une façon générale que la dynamique de la sous-couche visqueuse est assurée par l'équilibre du terme de diffusion de pression avec la différence des termes de diffusion visqueuse et de dissipation, et qu'il convient de ne pas négliger l'importance de ce terme de diffusion de pression dans les formulations proche paroi des modèles, alors que son action est moins sensible au loin.

### 4.2.2 Budget de l'équation du taux de dissipation

L'équation d'évolution du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente s'écrit de la façon suivante, en adoptant le même découpage des termes de pression que pour l'équation du tenseur de Reynolds à savoir :

$$\frac{\overline{d\varepsilon}}{dt} = P^{\varepsilon 1} + P^{\varepsilon 2} + P^{\varepsilon 3} + P^{\varepsilon 4} - E^{\varepsilon} + \Pi^{\varepsilon} + T^{\varepsilon u} + d^{\varepsilon \nu} \quad (4.40)$$

avec par rapport aux notations du chapitre précédent, le découpage suivant :

$$\Pi^{\varepsilon} = -\frac{1}{\rho} 2 [\overline{p, m u_{k, m}}]_{,k} \quad (4.41a)$$

$$T^{\varepsilon u} = -[\overline{u_k u_{i, m} u_{i, m}}]_{,k} \quad (4.41b)$$

A grand nombre de Reynolds, Tennekes et Lumley [168] ont montré que le budget est dominé par l'équilibre du terme de production turbulente  $P^{\varepsilon 4}$  et de taux de dissipation. En s'approchant de la paroi, le taux de production mixte  $P^{\varepsilon 1}$  devient du même ordre que le taux de production turbulente. La production par les gradients  $P^{\varepsilon 3}$  est négligeable devant les autres termes.



Les développements de ces termes en série de Taylor s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 P^{\varepsilon 1} &= -4 \nu \overline{a_1 b_2} \overline{U}_{,y} y + O(y^2) \\
 P^{\varepsilon 2} &= 4 \nu \overline{a_2 b_2} \overline{U}_{,y} y^2 + O(y^3) \\
 P^{\varepsilon 3} &= -2 \nu \overline{a_1 b_2} \overline{U}_{,yy} y^2 + O(y^3) \\
 P^{\varepsilon 4} &= -\frac{3}{2} \nu (\overline{a_1 a_1 b_2} + \overline{c_1 c_1 b_2}) y + O(y^2) \\
 E^\varepsilon &= 4 \nu^2 [6 (\overline{a_1 a_3} + \overline{c_1 c_3}) + 2 (\overline{a_2^2} - \overline{b_2^2} + \overline{c_2^2})] + O(y) \\
 \Pi^\varepsilon &= -8 \nu^2 \overline{b_2^2} + O(y) \\
 T^{\varepsilon u} &= -2 \nu (\overline{a_1 a_1 b_2} + \overline{c_1 c_1 b_2}) y + O(y^2) \\
 d^{\varepsilon \nu} &= 4 \nu^2 [6 (\overline{a_1 a_3} + \overline{c_1 c_3}) + 2 (\overline{a_2^2} + \overline{c_2^2})] + O(y)
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

A la paroi, le transport par la pression s'équilibre avec la différence du taux de dissipation et du taux de diffusion visqueuse.

### 4.3 Modélisation à faible nombre de Reynolds

La construction des modèles bas-Reynolds doit s'appuyer, selon Launder [72], sur les deux caractéristiques suivantes :

- La variation des contraintes de Reynolds dans la sous-couche visqueuse ne semble pas provoquée par la viscosité.

- Le comportement bidimensionnel de la turbulence s'affirme au fur et à mesure de l'approche de la paroi. Il faut noter que le terme bidimensionnel est en fait inadéquat, bien que largement utilisé pour qualifier l'état de la turbulence au voisinage d'une paroi. Le terme approprié a été proposé par Reynolds [112], qui distingue la caractérisation des structures turbulentes suivant leur dimension ou ce qu'il appelle leur componentialité. Cette nomenclature est présentée au chapitre suivant. Au voisinage d'une paroi, les corrélations normales du tenseur de Reynolds décroissent plus vite dans la direction normale à la paroi que les corrélations normales dans le plan parallèle, ce qui correspond à un état à deux composantes de la turbulence, et non à deux dimensions, suivant la caractérisation de Reynolds. C'est cette décroissance sélective que cherche à traduire l'amortissement des coefficients de transport en zone proche paroi.

Les modifications en sous-couche visqueuse doivent s'appuyer sur ce comportement pour tâcher de s'affranchir de toute référence explicite à un amortissement visqueux.

#### 4.3.1 Modélisation des équations de transport des corrélations doubles

Les principales hypothèses de fermeture à considérer sont celles pour  $\phi_{ij}$  et  $\varepsilon_{ij}$ .

### Traitement du tenseur des corrélations pression-déformation

Dans le budget du tenseur de Reynolds, le tenseur des corrélations de pression joue un rôle déterminant au voisinage des parois dans la redistribution d'énergie cinétique entre les différentes composantes. L'approche habituelle consiste à modéliser séparément dans ce terme un tenseur de redistribution et une partie de transport.

Le découpage classique fait intervenir le tenseur des corrélations pression-déformation  $\phi_{ij}$  et le terme de diffusion de pression  $T_{ijk,k}^p$  :

$$\Pi_{ij} = T_{ijk,k}^p + \phi_{ij} \quad (4.43)$$

Le tenseur des corrélations pression-déformation se développe suivant :

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= 2 \overline{\alpha_0 a_{1,x}} y + (2 \overline{\alpha_0 a_{2,x}} + 2 \overline{\alpha_1 a_{1,x}}) y^2 + O(y^3) \\ \phi_{22} &= 4 \overline{\alpha_0 b_2} y + (6 \overline{\alpha_0 b_3} + 4 \overline{\alpha_1 b_2}) y^2 + O(y^3) \\ \phi_{33} &= 2 \overline{\alpha_0 c_{1,z}} y + (2 \overline{\alpha_0 c_{2,z}} + 2 \overline{\alpha_1 c_{1,z}}) y^2 + O(y^3) \\ \phi_{12} &= \overline{\alpha_0 a_1} + (2 \overline{\alpha_0 a_2} + \overline{\alpha_1 a_1}) y + (3 \overline{\alpha_0 a_3} + \overline{\alpha_0 b_{2,x}} + 2 \overline{\alpha_1 a_2} + \overline{\alpha_2 a_1}) y^2 + O(y^3) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les relations d'incompressibilité permettent de vérifier de façon immédiate que ce tenseur est à trace nulle. Les directions longitudinale et transversale sont des directions d'homogénéité, si bien que les composantes normales longitudinales et transversales des tenseurs de corrélation de pression et de corrélation pression-déformation sont toutes les deux identiques. En remplaçant les coefficients de pression par leur expression en fonction des coefficients des vitesses, il vient :

$$\begin{aligned} \phi_{11} &= -2 \nu [ 2 \overline{a_1 a_2} y + (2 \overline{a_2^2} + 6 \overline{a_1 a_3} - a_{1,x}^2 - a_{1,z}^2) y^2 ] + O(y^3) \\ \phi_{22} &= -2 \nu [ -2 (\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y - 2 (\overline{a_2^2} + \overline{c_2^2} + 2 \overline{b_2^2}) y^2 ] + O(y^3) \\ \phi_{33} &= -2 \nu [ 2 \overline{c_1 c_2} y + (2 \overline{c_2^2} + 6 \overline{c_1 c_3} - c_{1,x}^2 - c_{1,z}^2) y^2 ] + O(y^3) \\ \phi_{12} &= \alpha_0 a_1 - \nu [ 2 \overline{a_1 b_2} y - (3 \overline{a_1 b_3} + 2 \overline{a_2 b_2}) y^2 ] + O(y^3) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Les développements montrent que contrairement à  $\Pi_{12}$ , la composante  $\phi_{12}$  du tenseur des corrélations pression-déformation ne s'annule pas à la paroi.

En pratique, certains modèles peuvent scinder le tenseur des corrélations de pression  $\Pi_{ij}$  de façon différente. C'est le cas d'une décomposition proposée par Lumley [88] qui isole la trace du tenseur, définie par

$$\Pi_{nn} = -2 \frac{1}{\rho} (\overline{p u_k})_{,k} \quad (4.46)$$

suivant :

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij}^* - \frac{2}{3} (\overline{p u_k})_{,k} \delta_{ij} \quad (4.47)$$

Le tenseur résultant est le déviateur du tenseur des corrélations de pression, et son développement est immédiat :

$$\begin{aligned} \phi_{11}^* &= -2 \nu [ \frac{2}{3} (2 \overline{a_1 a_2} - \overline{c_1 c_2}) y ] + O(y^2) \\ \phi_{22}^* &= -2 \nu [ \frac{2}{3} (-\overline{a_1 a_2} - \overline{c_1 c_2}) y ] + O(y^2) \\ \phi_{33}^* &= -2 \nu [ \frac{2}{3} (2 \overline{c_1 c_2} - \overline{a_1 a_2}) y ] + O(y^2) \\ \phi_{12}^* &= -2 \nu [ \frac{2}{3} \overline{a_1 b_2} y ] + O(y^2) \end{aligned} \quad (4.48)$$

puisque

$$\Pi_{nn} = -2\nu [ 2(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2}) y ] + O(y^2) \quad (4.49)$$

Avec cette décomposition, la composante normale à la paroi,  $\phi_{22}^*$ , est trois fois plus faible que la composante  $\phi_{22}$ . Les termes principaux sont par contre du même ordre de grandeur dans les développements.

Craft et Launder ont proposé la décomposition suivante :

$$\phi_{ij}^* = \Pi_{ij} - \frac{\overline{u_i u_j}}{2K} \Pi_{nn} \quad (4.50)$$

dont le développement s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{11}^* &= -2\nu [ (2\overline{a_1 a_2} - 2\overline{a_1^2} \frac{(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2})}{a_1^2 + c_1^2}) y ] + O(y^2) \\ \phi_{22}^* &= -2\nu [ 2\overline{b_2^2} y^2 ] + O(y^3) \\ \phi_{33}^* &= -2\nu [ (2\overline{c_1 c_2} - 2\overline{c_1^2} \frac{(\overline{a_1 a_2} + \overline{c_1 c_2})}{a_1^2 + c_1^2}) y ] + O(y^2) \\ \phi_{12}^* &= -2\nu [ a_1 \overline{b_2} y ] + O(y^2) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ce tenseur est également à trace nulle. Il possède la même limite pariétale de sa composante normale que pour  $\Pi_{22}$ , puisque la correction en fonction du tenseur de Reynolds est d'ordre supérieur au terme principal de  $\Pi_{22}$ . Les composantes longitudinale et transversale sont quant à elles légèrement différentes et leur répartition assure au tenseur  $\phi_{ij}^*$  d'être à trace nulle. Ce tenseur fournit une décroissance plus rapide de sa composante normale orthogonale à la paroi, avec un comportement voisin de celui du tenseur des corrélations pression-vitesse.

Il sera intéressant par la suite de regarder le comportement des modèles avec les résultats de simulation directe dans le cas du canal plan établi.

Le terme de redistribution  $\phi_{ij}^*$  est généralement modélisé de façon analogue au tenseur des corrélations pression-déformation  $\phi_{ij}$ . Comme il l'a été rappelé au chapitre précédent, la modélisation de ce tenseur sépare dans un premier temps les contributions homogène et inhomogène. Le terme homogène est lui même scindé en deux parties, dites lente et rapide, classiquement modélisées par une fonctionnelle isotrope dépendant du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds et des gradients de vitesse moyenne. A l'approche de la paroi, ce terme doit permettre à la composante normale du tenseur de Reynolds orientée suivant la direction orthogonale à la paroi de décroître correctement vers zéro. C'est le problème de réalisabilité, qui impose non seulement au tenseur des corrélations pression-déformation d'avoir un comportement asymptotique correct au voisinage de la paroi, mais également d'être en mesure de provoquer le bon comportement asymptotique de la corrélation turbulente normale. Afin de ne pas modifier la structure tensorielle de la fonctionnelle classiquement adoptée sur l'ensemble de l'écoulement pour les termes homogènes, les corrections s'effectuent généralement sur les coefficients de la fonctionnelle. Il faut noter également que la prise en compte explicite des effets du nombre de Reynolds turbulent ne s'effectue généralement que sur les coefficients du terme lent. Le terme rapide est supposé n'être influencé que par les gradients de vitesse moyenne et donc par les grosses structures turbulentes, desquelles les effets visqueux sont séparées dans les modélisations. La prise en compte des effets inhomogènes sur la structure homogène du tenseur peut s'effectuer également par des corrections d'inhomogénéité sur les gradients de vitesse moyenne. Le traitement du terme de réflexion de paroi varie suivant les modèles.

### Traitement du tenseur des taux de dissipation

La modélisation classique du tenseur des taux de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  fait intervenir une fonction dépendant d'un paramètre d'approche de la paroi, permettant de passer continuellement de la forme limite isotrope des grands nombres de Reynolds à l'expression anisotrope  $\varepsilon_{ij}^*$  prépondérante au voisinage immédiat d'une paroi et qu'il faut modéliser. Elle s'écrit sous la forme :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_\varepsilon \varepsilon_{ij}^* \quad (4.52)$$

La fonction  $f_\varepsilon$  est nulle dans la limite isotrope et égale à l'unité à la paroi. Ce type d'expression a été proposé par Hanjalic et Launder en 1976 [56] pour passer de l'approximation isotrope

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}$$

au modèle de Rotta [122] pour les petits nombres de Reynolds, présenté au chapitre précédent

$$\varepsilon_{ij} = \frac{R_{ij}}{K} \varepsilon$$

ce qui donne le modèle complet suivant :

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon \left[ (1 - f_\varepsilon) \frac{2}{3} \delta_{ij} + f_\varepsilon \frac{R_{ij}}{K} \right] \quad (4.53)$$

où la fonction de pondération  $f_\varepsilon$  s'exprime en fonction du nombre de Reynolds turbulent, défini par

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon}$$

suivant :

$$f_\varepsilon = \frac{1}{1 + 0.1 R_t} \quad (4.54)$$

En supposant que la forme isotrope n'affecte pas la limite asymptotique de ce modèle à la paroi, le comportement pariétal est régi par celui de  $\varepsilon_{ij}^*$ . Le modèle de Rotta [122] n'est pas consistant avec les développements asymptotiques à la paroi, qui fournissent les relations suivantes :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\varepsilon R_{11}}{K} \quad \varepsilon_{22} = 4 \frac{\varepsilon R_{22}}{K} \quad \varepsilon_{33} = \frac{\varepsilon R_{33}}{K} \quad \varepsilon_{12} = 2 \frac{\varepsilon R_{12}}{K} \quad (4.55)$$

alors que le modèle propose d'écrire le tenseur des taux de dissipation de façon proportionnelle au rapport du tenseur de Reynolds sur le temps caractéristique de la turbulence.

Le tenseur des taux de dissipation exact vérifie quant à lui :

$$\varepsilon_{11}^r = \frac{\varepsilon^r R_{11}}{K} \quad \varepsilon_{22}^r = 10 \frac{\varepsilon^r R_{22}}{K} \quad \varepsilon_{33}^r = \frac{\varepsilon^r R_{33}}{K} \quad \varepsilon_{12}^r = 2 \frac{\varepsilon^r R_{12}}{K} \quad (4.56)$$

Ces résultats montrent la nature fortement anisotrope du tenseur des taux de dissipation au voisinage immédiat d'une paroi. Launder et Tselepidakis ont proposé en 1991 [78] d'exprimer le tenseur des taux de dissipation en fonction du vecteur unitaire normal à la paroi, et du tenseur de Reynolds. La formulation invariante et correcte asymptotiquement s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon \frac{R_{ij} + R_{ip} n_j n_p + R_{jp} n_i n_p + R_{pq} n_p n_q \delta_{ij}}{K + \frac{5}{2} R_{pq} n_p n_q} \quad (4.57)$$

Ce modèle fournit un bon comportement de la composante normale du tenseur de Reynolds orthogonale à la paroi,  $R_{22}$ , dans le cas de l'écoulement de canal plan établi, mais il sous-estime les variations des composantes  $R_{11}$  et  $R_{33}$  au voisinage de la paroi. Cette observation a incité les auteurs à corriger la modélisation du tenseur des taux de dissipation en lui adjoignant un tenseur redistributif  $\varepsilon'_{ij}$ , de sorte que la forme du modèle s'écrive :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_\varepsilon \varepsilon^*_{ij} + \varepsilon'_{ij} \quad (4.58)$$

Le tenseur  $\varepsilon'_{ij}$  est à trace nulle. La modélisation proposée par Craft et Launder est la suivante :

$$\varepsilon'_{ij} = c(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \left[ 2 a_{ij} + (a_{pq} n_p n_q \delta_{ij} - \frac{3}{2} a_{pi} n_p n_j - \frac{3}{2} a_{pj} n_p n_i) \right] \quad (4.59)$$

avec  $c = 0.05$ , et  $a_{ij}$ , le tenseur d'anisotropie défini par :

$$a_{ij} = \frac{R_{ij}}{K} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (4.60)$$

Le taux  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu(\sqrt{K}_{,i})^2$  a déjà été présenté précédemment. La fonction d'amortissement est fonction du taux d'aplatissement  $A$  de Lumley [89], défini de la façon suivante :

$$A = 1 - \frac{9}{8} A_2 + \frac{9}{8} A_3 \quad (4.61)$$

où  $A_2$  et  $A_3$  sont les invariants du tenseur d'anisotropie, définis respectivement par :

$$\begin{aligned} A_2 &= a_{ij} a_{ij} \\ A_3 &= a_{ij} a_{jk} a_{ki} \end{aligned} \quad (4.62)$$

Elle s'écrit :

$$f_\varepsilon = \exp(-20 A^2) \quad (4.63)$$

Le développement du terme correctif montre qu'il affecte les premiers termes du développement du modèle, si bien que les limites asymptotiques ne sont plus satisfaites :

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{11} &= 2\nu c \left[ \overline{a_1^2} - \overline{c_1^2} \right] + O(y) \\ \varepsilon'_{22} &= 0 \\ \varepsilon'_{33} &= 2\nu c \left[ \overline{c_1^2} - \overline{a_1^2} \right] + O(y) \\ \varepsilon'_{12} &= 2\nu c \left[ \frac{1}{2} \overline{a_1 b_2} \right] y + O(y^2) \end{aligned} \quad (4.64)$$

Afin d'éviter toute référence explicite à la géométrie par l'intermédiaire des normales, Launder [72] propose une formulation alternative qui satisfait le bon comportement asymptotique :

$$\varepsilon^*_{ij} = \frac{\varepsilon}{K} R_{ij} + 2\nu \frac{1}{K} \sqrt{K}_{,p} \frac{[R_{ip} \sqrt{K}_{,j} + R_{jp} \sqrt{K}_{,i} + R_{pq} \sqrt{K}_{,p} \sqrt{K}_{,q} \delta_{ij}]}{1 + 5\nu R_{pq} \sqrt{K}_{,p} \sqrt{K}_{,q}} \quad (4.65)$$

avec

$$f_\varepsilon = \frac{1}{1 + \left( \frac{R_i A_2}{250} \right)^2} \quad (4.66)$$

Dans cette formulation, les gradients de  $R_{11}$  et  $R_{33}$  ne sont pas non plus bien représentés à la paroi, en l'absence de terme correctif.

En 1995, Shima [142] a proposé une nouvelle formulation satisfaisant le développement du tenseur des taux de dissipation jusqu'à l'ordre un inclus. Cette formulation est extrêmement simple. Elle ne fait pas intervenir le vecteur des normales à la paroi, mais utilise le tenseur d'anisotropie de diffusion visqueuse  $d_{ij}^\nu$ . Elle s'écrit :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon}{K} R_{ij} + \varepsilon'_{ij} \quad (4.67)$$

avec

$$\varepsilon'_{ij} = \frac{1}{2} \left[ d_{ij}^\nu - \frac{1}{2} d_{nn}^\nu \frac{R_{ij}}{K} \right] \quad (4.68)$$

Ce modèle représente correctement les gradients de  $R_{11}$  et  $R_{33}$  à la paroi. Il ne permet pas de capter correctement le comportement complexe de  $\varepsilon_{12}$  à l'approche de la paroi, défaut partagé avec les modèles précédents.

### Traitement du tenseur des corrélations triples

La modélisation des termes diffusifs se calque sur la modélisation des corrélations triples de fluctuations de vitesse. Les deux formulations les plus utilisées ont été présentées au chapitre précédent. Il s'agit de l'hypothèse de gradient simple de Daly et Harlow [35] suivant laquelle :

$$T_{ijk,k}^u = -C_s \frac{K}{\varepsilon} [R_{mn} R_{ij,m}]_{,n} \quad (4.69)$$

avec  $C_s = 0.22$ , et de son expression invariante par symétrie des indices, proposée par Hanjalic et Launder [55]

$$T_{ijk,k}^u = -C_s \frac{K}{\varepsilon} [R_{mn} R_{ij,m} + R_{im} R_{jn,m} + R_{jm} R_{in,m}]_{,n} \quad (4.70)$$

Aucune de ces formulations ne rend compte du bon comportement asymptotique au voisinage des parois. Les développements asymptotiques fournissant tout deux les ordres de grandeurs suivants :

$$\begin{aligned} T_{112,2}^u &= O(y^6) \\ T_{222,2}^u &= O(y^8) \\ T_{332,2}^u &= O(y^6) \\ T_{122,2}^u &= O(y^7) \end{aligned} \quad (4.71)$$

Cependant, ces inadéquations sont souvent minimisées par le fait qu'elles portent sur un mécanisme qui n'est pas prépondérant dans la sous-couche visqueuse.

#### 4.3.2 Modélisation de l'équation pour $\varepsilon$

Dans les modélisations à grand nombre de Reynolds, le terme de destruction de la dissipation, modélisé par :

$$-C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (4.72)$$

est calibré par référence à la décroissance de la turbulence derrière une grille, dans la période initiale de la décroissance. Les expériences de Batchelor et Townsend [7] ont montré que la décroissance de l'énergie cinétique suit une loi en puissance,

$$K = \alpha t^{-n} \quad (4.73)$$

Les mesures effectuées par Comte-Bellot et Corrsin [28] proposent un taux de  $n = 1.1$  pour les grands nombres de Reynolds, ce qui conduit à adopter généralement

$$C_{\varepsilon 2} = 1.9 \quad (4.74)$$

Cependant, en fin de décroissance, les effets visqueux deviennent importants ( $R_t < 10$ ) et contribuent à augmenter l'exposant jusqu'à la valeur asymptotique de

$$n = 2.5 \quad (4.75)$$

Hanjalic et Launder [56] ont proposé de traduire cette variation par une fonction de pondération  $f_\varepsilon$  dépendant du nombre de Reynolds turbulent suivant :

$$f_\varepsilon = 1.0 - 0.22 \exp\left(-\frac{R_t^2}{36}\right) \quad (4.76)$$

Ce facteur d'échelle n'est pourtant pas suffisant pour assurer à lui tout seul la disparition du terme de destruction à la paroi puisque la quantité  $\varepsilon^2/K$  tend vers l'infini à l'approche de la paroi. L'utilisation de la quantité  $\tilde{\varepsilon}$ , suggérée par Hanjalic et Launder [56] permet de capter le bon équivalent pariétal, en remplaçant  $\varepsilon^2/K$  par  $\varepsilon\tilde{\varepsilon}/K$ , qui tend vers une valeur constante, avec :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left[ \frac{\partial\sqrt{K}}{\partial y} \right]^2 \quad (4.77)$$

Il reste que si l'expression de l'équation pour la dissipation pour les très grands nombres de Reynolds, se réduit à :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = P^{\varepsilon 4} - E^\varepsilon \quad (4.78)$$

et elle devient pour les petits nombres de Reynolds

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = P^{\varepsilon 1} + P^{\varepsilon 2} + P^{\varepsilon 4} + d^{\varepsilon p} + d^{\varepsilon \nu} - E^\varepsilon \quad (4.79)$$

Il convient en particulier de modéliser le terme de production complémentaire  $P^{\varepsilon 3}$ , qui est classiquement modélisé par une hypothèse de diffusion

$$P^{\varepsilon 3} = C_{\varepsilon 3} \nu \frac{K}{\varepsilon} R_{jk} \overline{U}_{i,lj} \overline{U}_{i,kl} \quad (4.80)$$

Ce terme permet de prendre en compte l'influence de la viscosité sur les gradients de vitesse moyenne. Généralement  $C_{\varepsilon 3}$  est choisi constant, et donc indépendant de la viscosité. La valeur initialement fixée par Hanjalic et Launder est  $C_{\varepsilon 3} = 1.0$ , alors que Launder et Tselepidakis ont proposé  $C_{\varepsilon 3} = 0.43$ .

La forme classique de l'équation bas-Reynolds du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente s'écrit donc :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = C_{\varepsilon 1} \frac{P}{K} \varepsilon - C_{\varepsilon 2} f_\varepsilon \frac{\varepsilon \tilde{\varepsilon}}{K} + C_\varepsilon \left[ \frac{K}{\varepsilon} R_{ij} \varepsilon_{,i} \right]_{,j} + \nu \varepsilon_{,jj} + C_{\varepsilon 3} \nu \frac{K}{\varepsilon} R_{jk} \overline{U}_{i,lj} \overline{U}_{i,kl} \quad (4.81)$$

Certains auteurs préfèrent utiliser directement une équation pour  $\tilde{\varepsilon}$ , pour laquelle les conditions aux limites sont de type Dirichlet.

L'influence de la viscosité sur la diffusion de  $\varepsilon$  doit être prise en compte. L'expression à grand nombre de Reynolds est celle cependant souvent retenue dans les modèles. Il existe des modèles qui proposent de multiplier le coefficient de diffusion  $C_\varepsilon$  par un facteur d'amortissement visqueux  $f_\mu$  [109].

Le terme de diffusion de pression est la plupart du temps négligé, bien que l'étude des développements asymptotiques suggère que ce terme devient significatif dans les phénomènes de transport au voisinage immédiat de la paroi. Une modélisation de ce terme, effective dans la sous-couche visqueuse, a été proposée par Launder et Tselepidakis [78] sous la forme :

$$-\left[\frac{1}{\rho} \nu p_{,i} u_{k,i}\right] = 2 C_{\varepsilon_4} \left[ \nu \frac{\tilde{\varepsilon}}{K} K_{,k} \right] \quad (4.82)$$

avec  $C_{\varepsilon_4} = 0.92$ .

La validation de ces différentes propositions de modélisation terme par terme doit être effectuée en prenant en compte l'ensemble des termes sources des équations, qui permettent de faire fonctionner l'ensemble des mécanismes. La modélisation séparée des termes facilite la recherche de l'accord avec les développements à la paroi des termes exacts correspondants, mais implique nécessairement que les autres termes se comportent correctement d'une part et d'autre part que les quantités à l'aide desquelles sont effectuées ces fermetures ont effectivement un comportement asymptotique correct. Le premier point est validé généralement en effectuant les développements asymptotiques des termes sources et comparant les budgets des équations de transport du tenseur de Reynolds aux solutions issues des calculs de simulations directes dans un canal plan établi. La capacité du modèle à restituer les bons comportements asymptotiques ne peut s'effectuer que par un calcul des solutions des équations.

## 4.4 Synthèses de modèles complets

Les formulations complètes bas - Reynolds des fermetures au second ordre proposées dans la littérature restent pour la plupart des extensions des expressions les plus largement répandues à grand nombre de Reynolds. Elles sont généralement construites de façon à restituer le bon équivalent au voisinage des parois de chacun des termes et portent sur le tenseur des corrélations pression-déformation, classiquement à l'aide d'un terme de paroi, sur le tenseur des taux de dissipation et l'équation de transport du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente. C'est par exemple le cas du modèle de Shima [140], qui est basé sur le modèle de Gibson et Launder, avec des termes d'écho de paroi et des paramètres d'amortissement dépendant du nombre de Reynolds turbulent et des invariants du tenseur d'anisotropie. La tendance actuelle consiste à rechercher des modèles qui répondent implicitement à la proximité de la paroi. C'est une des raisons des propositions de modélisation non-linéaire du tenseur des corrélations pression-déformation, dont l'utilisation réduit en principe l'importance des corrections explicites de type réflexion de parois. Le modèle développé par Craft et Launder [32] repose sur cette idée et possède par ailleurs de nombreux termes correctifs où toute spécification de la présence d'une paroi par son vecteur normal est évité en introduisant des quantités qui identifient les directions des fortes inhomogénéités. Une modélisation bas-Reynolds prenant également en compte des termes non-linéaires dans le tenseur des corrélations pression-déformation a été proposée auparavant par Launder et Tselepidakis [78]. Elle présente l'avantage d'être plus simple que celle de Craft et Launder. Elle utilise par contre encore un terme de réflexion sur le terme rapide. Ces modélisations sont rappelées en



annexe, dans le soucis essentiellement de préciser la version de ces modèles qui a été utilisée ici. Cela permettra par ailleurs de discuter de l'influence de certains termes sur la solution obtenue dans le cas du canal plan établi de Kim, Moin et Moser [68], et qui sera présentée au chapitre 8. Les modèles sont ici comparés aux budgets des équations du tenseur de Reynolds effectuée sur ce même cas test par Mansour, Kim et Moin [92]. Il s'agit de l'écoulement de canal plan établi, dont le nombre de Reynolds, basé sur la vitesse de frottement pariétale et la largeur totale du canal est de 360. Les notations des légendes des courbes sont identiques à celles présentées au paragraphe précédent. Le terme de diffusion visqueuse, évalué de façon implicite dans les calculs, a été reconstruit sur les points intérieurs au domaine, si bien que sa valeur sur les deux premiers points n'est pas restituée sur les figures et n'a pas d'importance particulière dans la mesure où il s'agit d'un terme exact.

La modélisation isotrope du tenseur des taux de dissipation adoptée par le modèle de Shima est responsable du mauvais accord de ce tenseur sur les résultats de simulation directe. Le traitement proposé dans les modèles de Craft et Launder et Launder et Tselepidakis améliore nettement ces prédictions. L'importance de  $\varepsilon_{22}$  est encore surestimée par ce dernier dans le voisinage proche de la paroi, dans une région située approximativement entre  $20 < y^+ < 80$  bien que le comportement de cette composante soit satisfaisant dans la sous-couche visqueuse. Il en est de même pour la composante  $\varepsilon_{33}$ . Ce défaut est partiellement corrigé par le modèle proposé par Craft et Launder. La modélisation du terme de transport par les corrélations triples est identique dans les modèles de Shima [140] et Launder et Tselepidakis [78]. Il s'agit du modèle de Daly et Harlow, contrairement au modèle de Craft et Launder [32] qui retient l'expression d'Hanjalic et Launder. Les différences les plus remarquables portent sur la prédiction des corrélations vitesse-gradient de pression. Le modèle linéaire de Shima semble reproduire de façon relativement correcte ce terme dans le budget de  $\overline{uv}$  mais se montre incapable de représenter le voisinage immédiat de la paroi, dans la direction normale à la paroi. Les modèles non-linéaires permettent en revanche de capter les bonnes tendances dans la sous-couche visqueuse; ils semblent néanmoins encore perfectible dans les régions plus éloignées. Ils sous-estiment la contribution du tenseur des corrélations vitesse-gradient de pression dans les budgets de  $\overline{w^2}$  et  $\overline{uv}$  et localisent une valeur maximale plus loin de la paroi que ne le font les calculs de simulation directe. Le modèle de Craft et Launder présente par ailleurs des irrégularités de l'évolution du tenseur des corrélations vitesse-gradient de pression au voisinage de la paroi, sensibles notamment sur les budgets de  $\overline{v^2}$  et  $\overline{uv}$ , qui ne figurent pas dans les simulations directes. Elles sont largement dues à la présence de nombreuses fonctions d'amortissement continues par morceaux dans le canal. Il reste maintenant à faire fonctionner ces formulations complètes sur ce canal. Ces calculs sont présentés au chapitre 8.

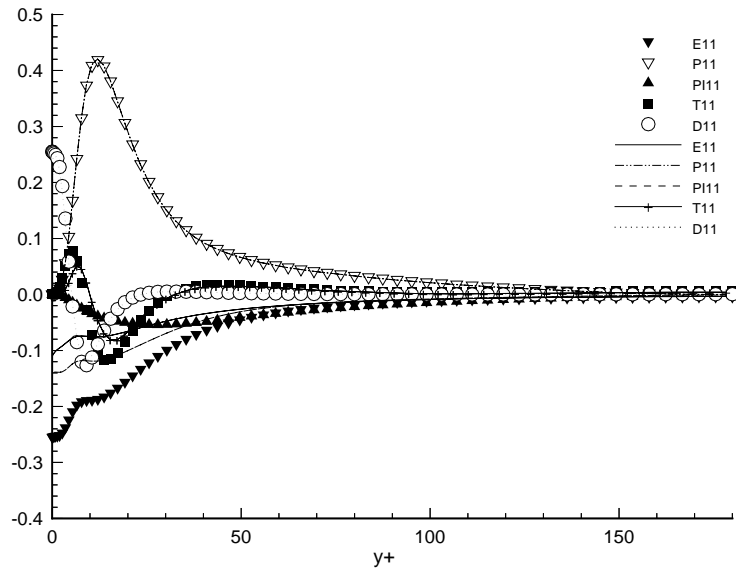


FIG. 4.5: Budget de  $\overline{u^2}$ . Modèle de Shima.

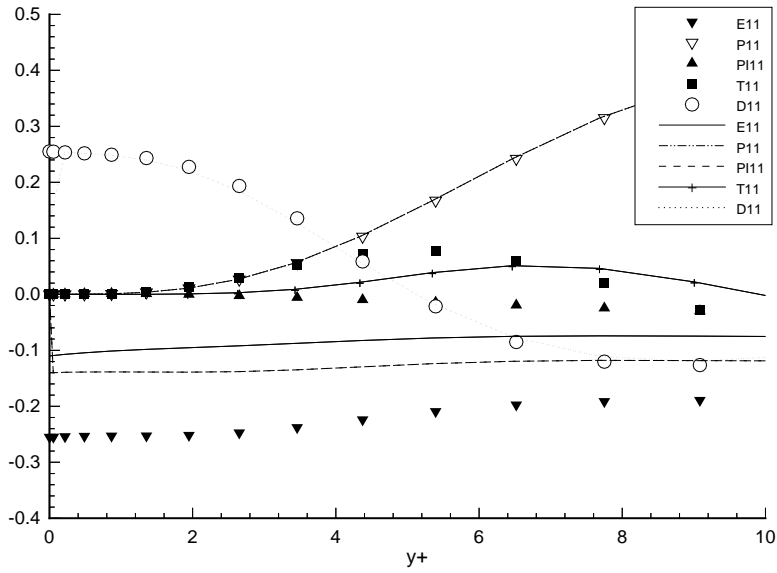


FIG. 4.6: Budget de  $\overline{u^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Shima.

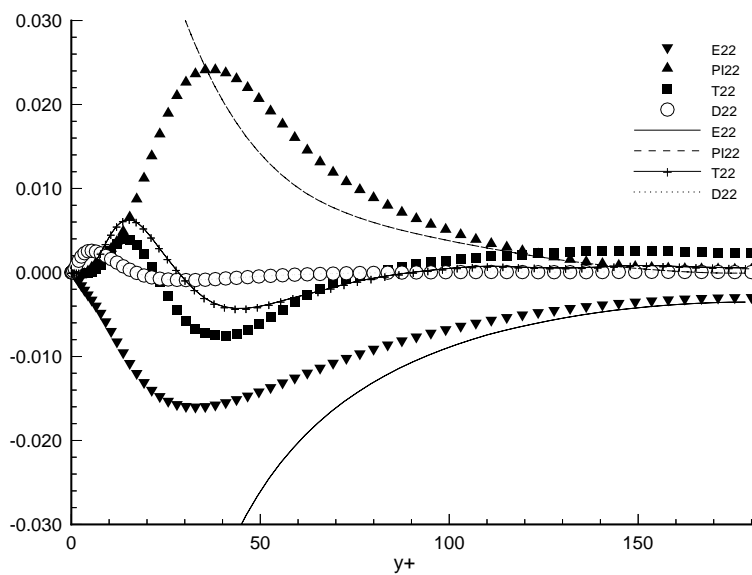


FIG. 4.7: Budget de  $\overline{v^2}$ . Modèle de Shima.

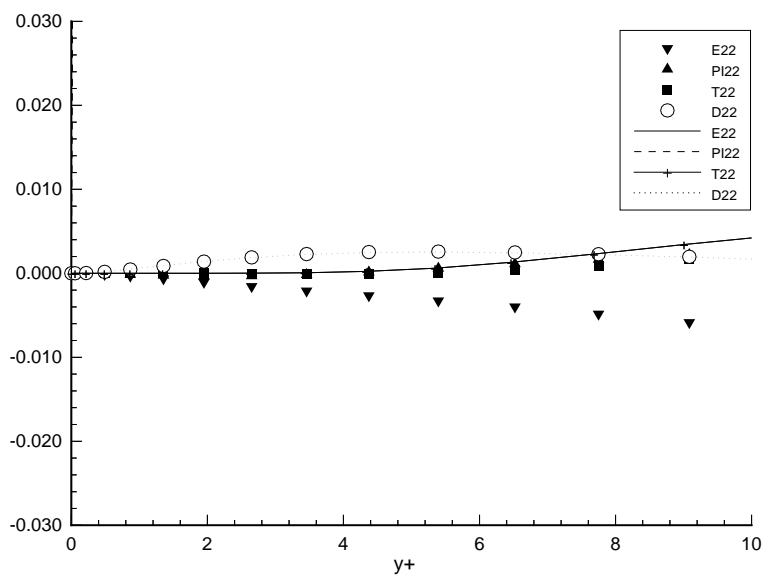
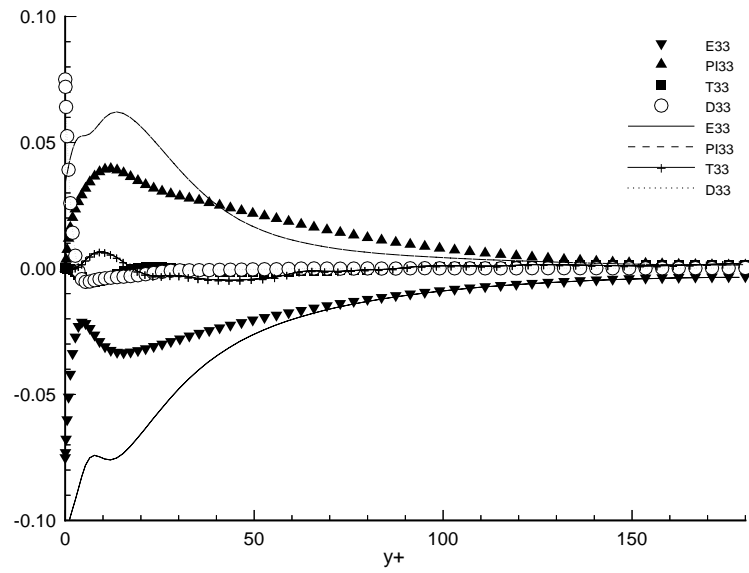
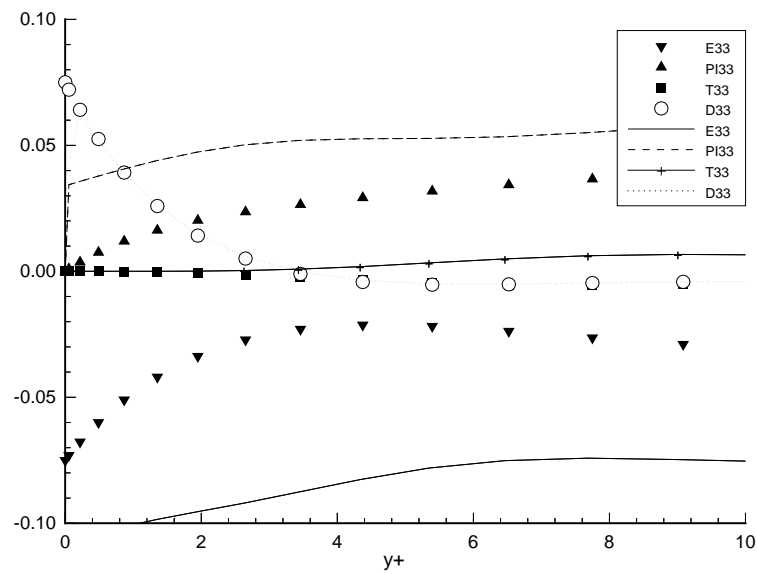


FIG. 4.8: Budget de  $\overline{v^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Shima.

FIG. 4.9: Budget de  $\overline{w^2}$ . Modèle de Shima.FIG. 4.10: Budget de  $\overline{w^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Shima.

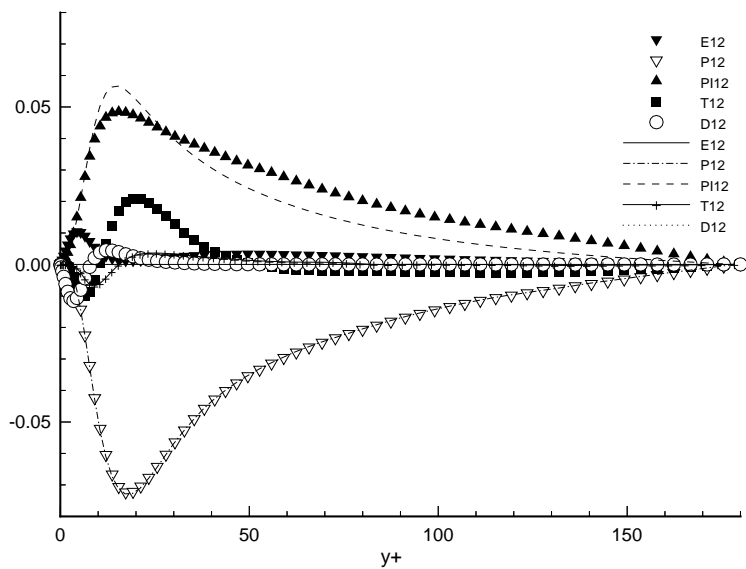


FIG. 4.11: Budget de  $\overline{u'v'}$ . Modèle de Shima.

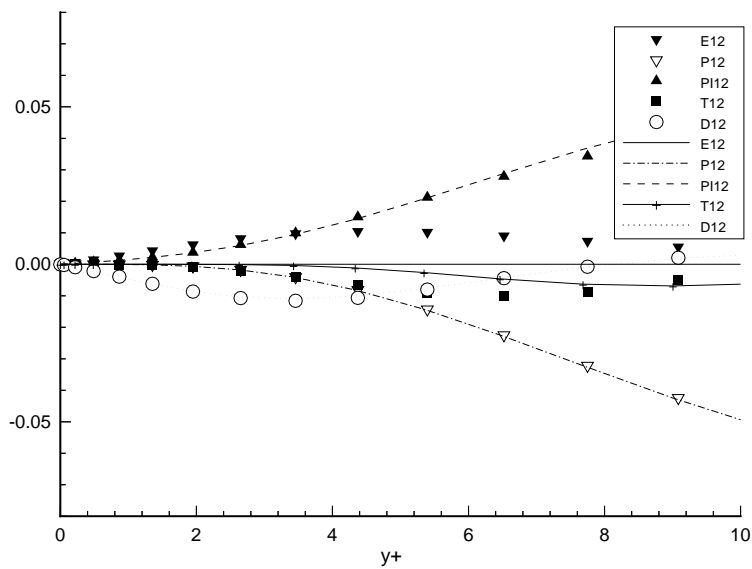
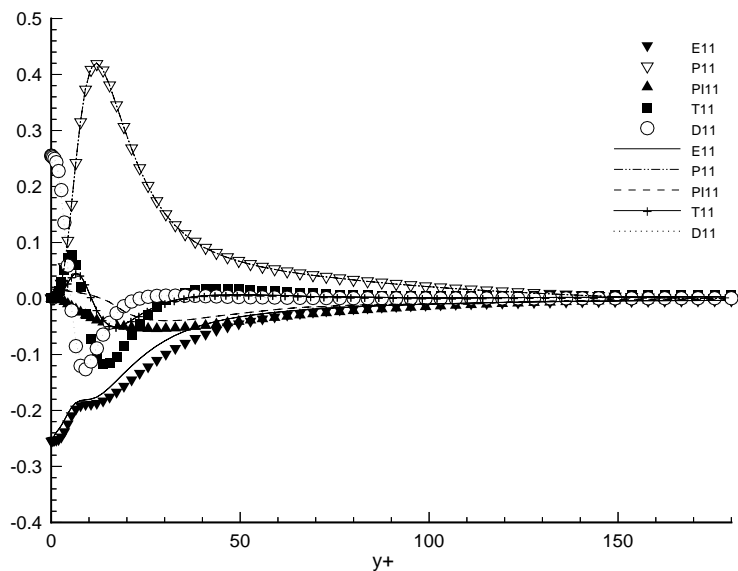
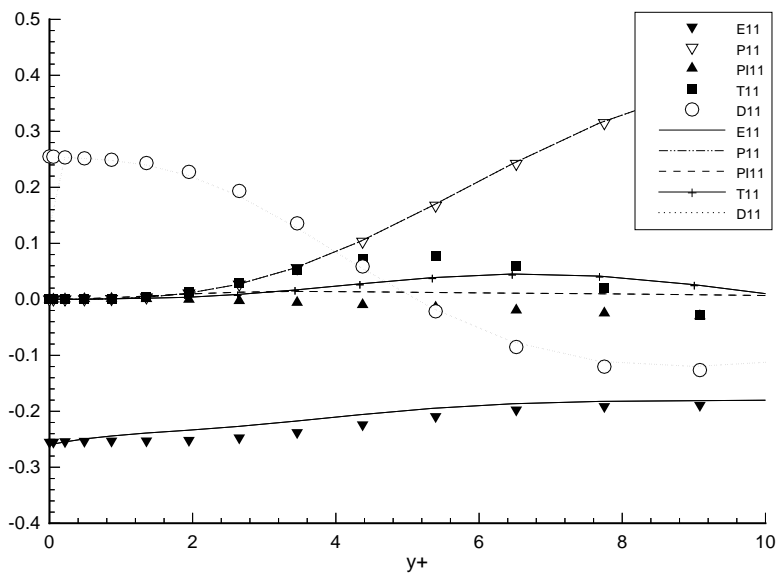


FIG. 4.12: Budget de  $\overline{u'v'}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Shima.

FIG. 4.13: Budget de  $\overline{u^2}$ . Modèle de Craft et Launder.FIG. 4.14: Budget de  $\overline{u^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Craft et Launder.

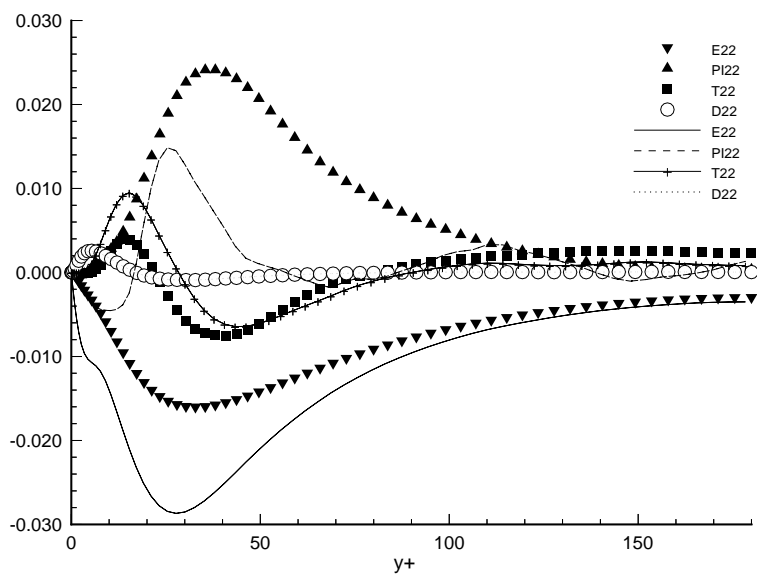


FIG. 4.15: Budget de  $\overline{v^2}$ . Modèle de Craft et Launder.

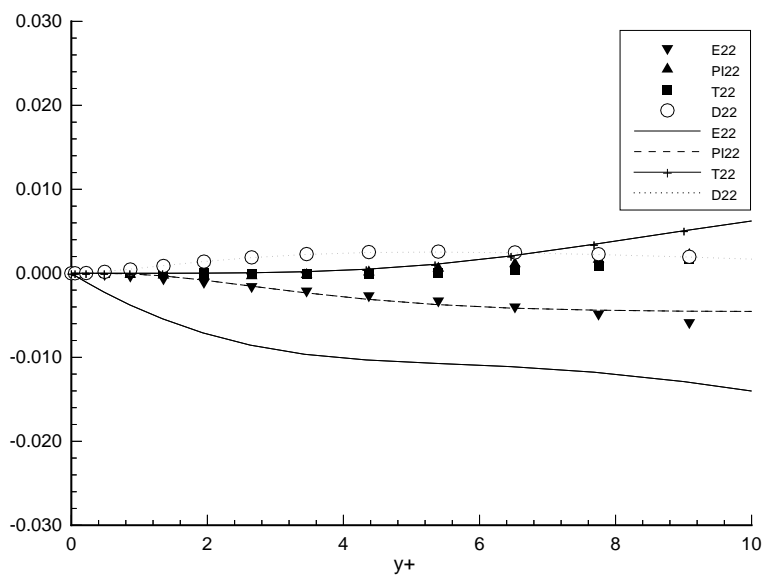
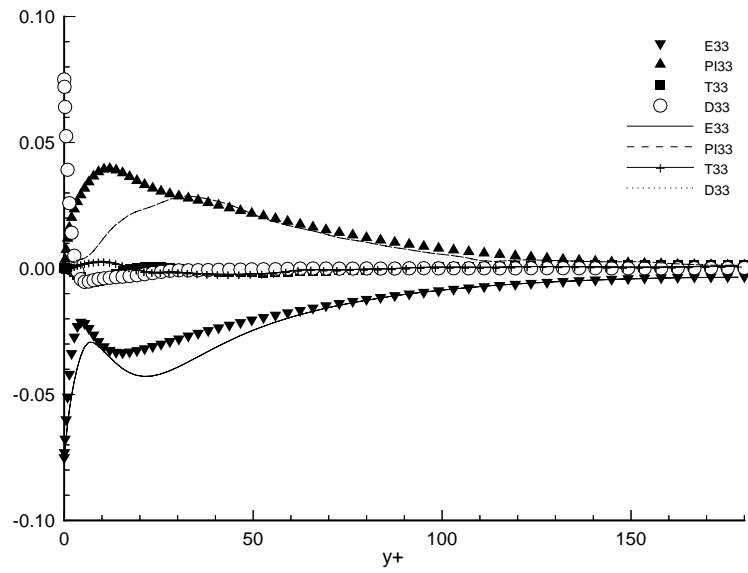
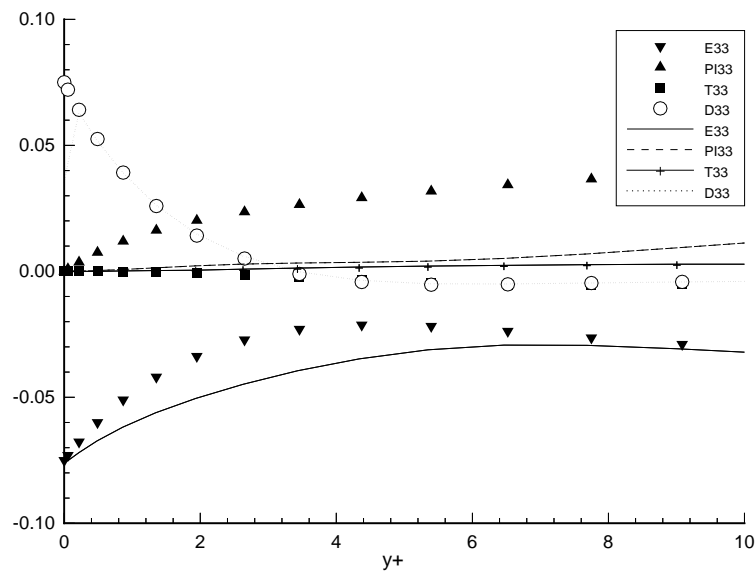


FIG. 4.16: Budget de  $\overline{v^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Craft et Launder.

FIG. 4.17: Budget de  $\overline{w^2}$ . Modèle de Craft et Launder.FIG. 4.18: Budget de  $\overline{w^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Craft et Launder.



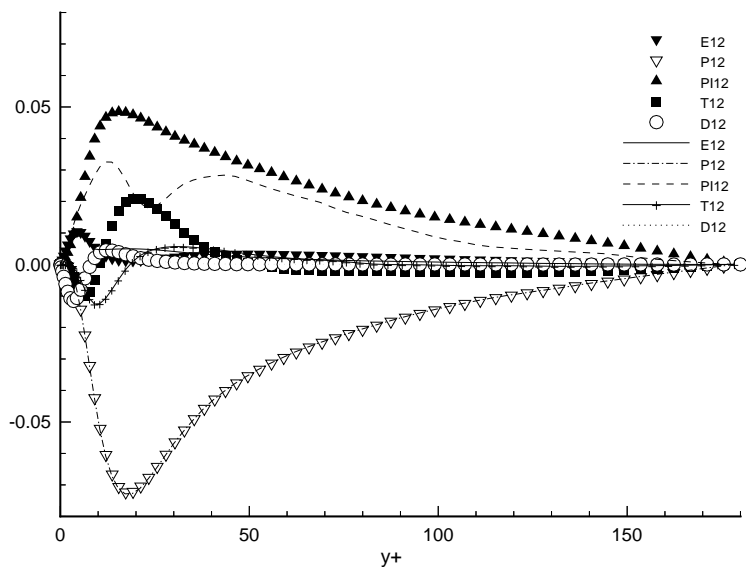


FIG. 4.19: Budget de  $\overline{uv}$ . Modèle de Craft et Launder.

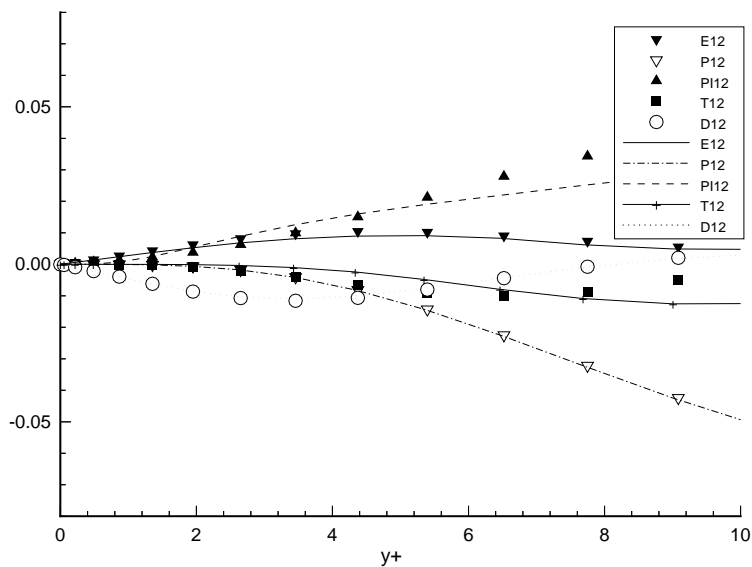


FIG. 4.20: Budget de  $\overline{uv}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Craft et Launder.

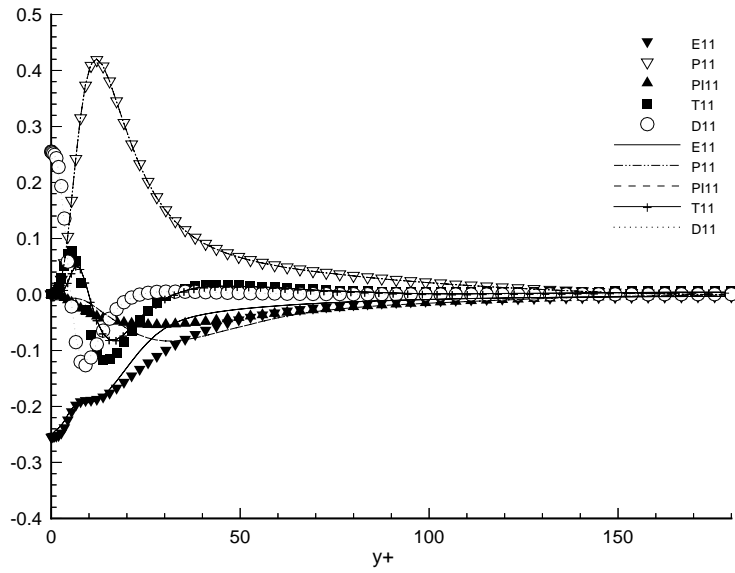


FIG. 4.21: Budget de  $\overline{u^2}$ . Modèle de Launder et Tselepidakis.

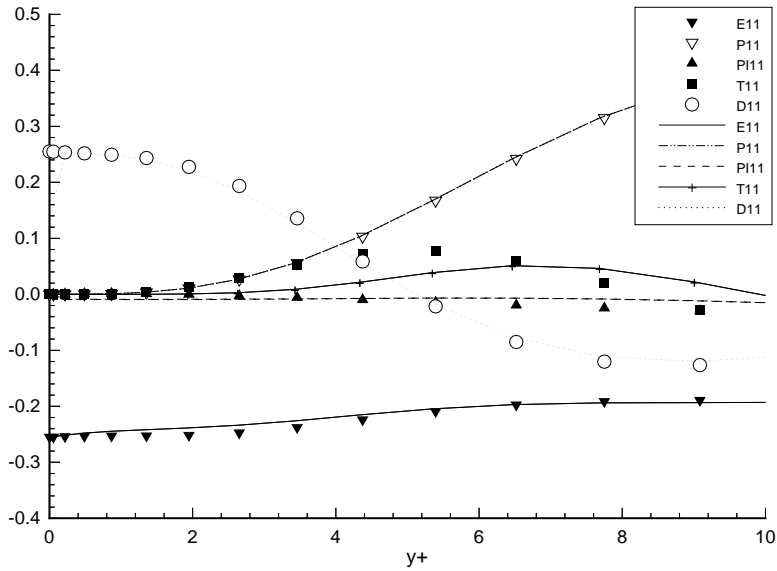


FIG. 4.22: Budget de  $\overline{u^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Launder et Tselepidakis.

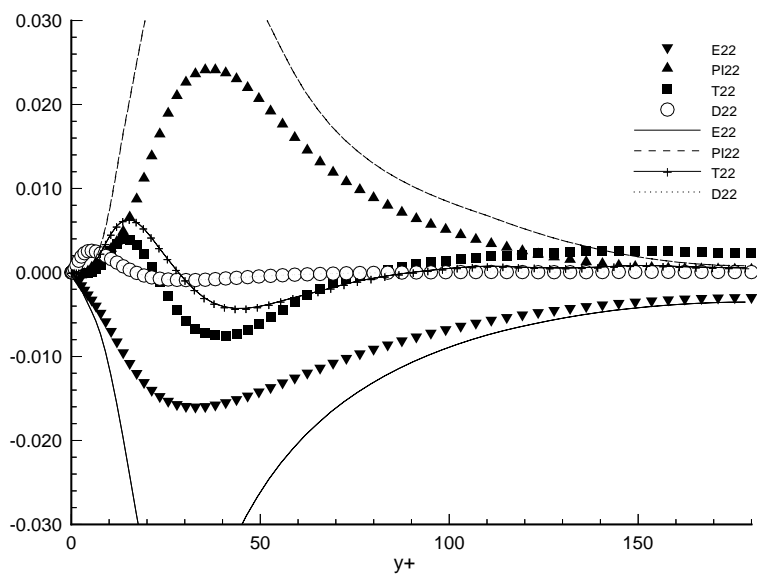


FIG. 4.23: Budget de  $\overline{v^2}$ . Modèle de Launder et Tselepidakis.

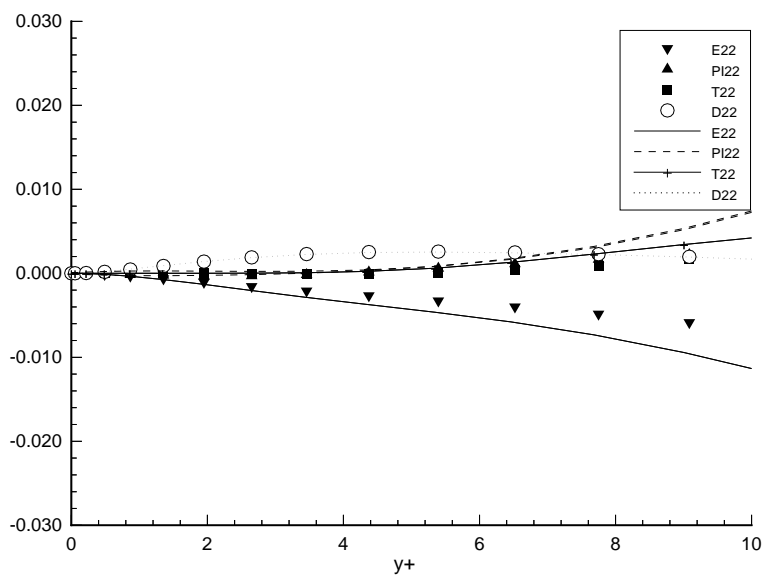


FIG. 4.24: Budget de  $\overline{v^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Launder et Tselepidakis.

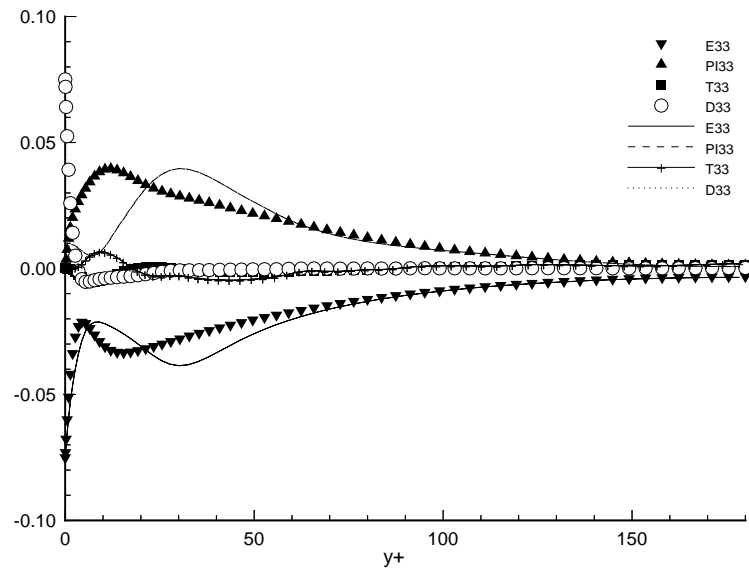


FIG. 4.25: Budget de  $\overline{w^2}$ . Modèle de Launder et Tselepidakis.

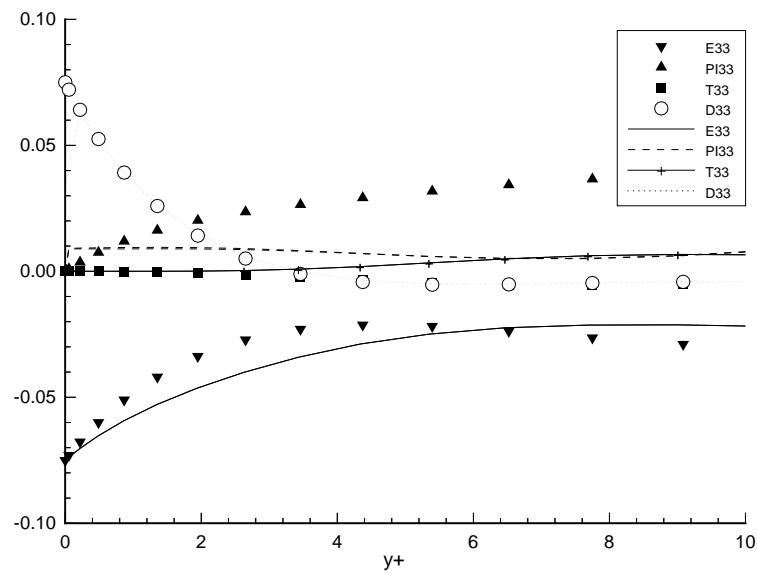


FIG. 4.26: Budget de  $\overline{w^2}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Launder et Tselepidakis.

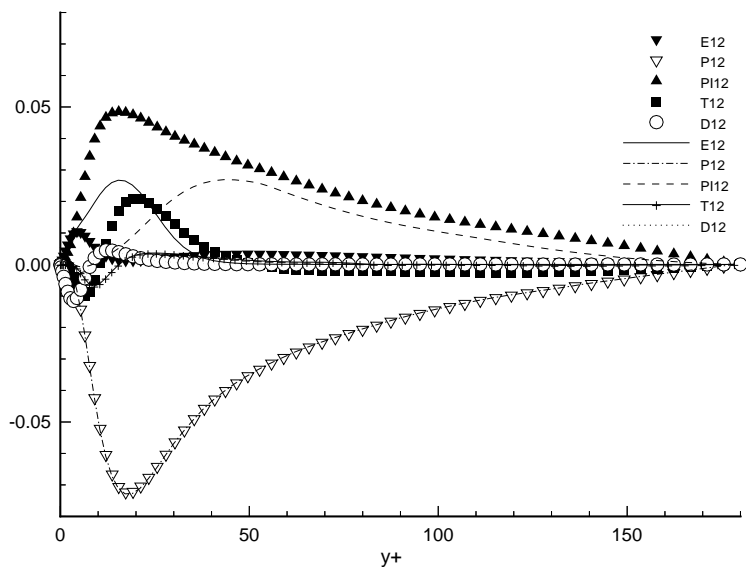


FIG. 4.27: Budget de  $\overline{uv}$ . Modèle de Launder et Tselepidakis.

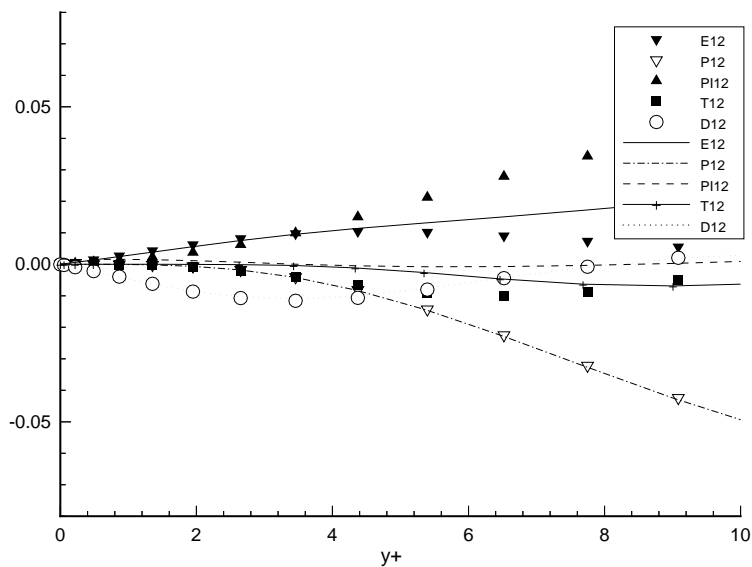


FIG. 4.28: Budget de  $\overline{uv}$ . Voisinage de la paroi. Modèle de Launder et Tselepidakis.

---

## Chapitre 5

# Réalisabilité des modèles classiques du second ordre

### 5.1 Notion de réalisabilité

Parmi les contraintes proposées généralement pour construire une fermeture, la réalisabilité apparaît comme l'une des plus importantes. La notion de réalisabilité a été énoncée dans le cadre des fermetures turbulentes au second ordre par Du Vachat [171], Schumann [126] et Lumley [89]. Par définition, elle exige que les composantes normales du tenseur de Reynolds soient positives et que l'inégalité de Schwarz soit vérifiée entre deux quantités fluctuantes quelconques. Une équation modélisée en tenant compte de ces contraintes peut prévenir de solutions non physiques et réduire ainsi les difficultés numériques.

D'une façon générale, le principe de réalisabilité est une condition nécessaire - et donc minimale - pour que la turbulence ne produise pas de résultat physiquement inacceptable, et il est classiquement appliqué au tenseur de Reynolds, comme dans toute la suite de ce chapitre. Cependant cette notion peut s'étendre à toute quantité sur laquelle porte une fermeture - directement ou indirectement par l'intermédiaire d'une équation différentielle. Lorsque ces critères s'appliquent à des flux scalaires, il s'agit de la réalisabilité jointe [116]. Les contraintes de réalisabilité doivent assurer que le modèle respecte la nature statistique de la fermeture.

Le tenseur de Reynolds est par définition le tenseur des corrélations doubles en un point, de la fluctuation de vitesse. Lorsque la modélisation au second ordre propose un modèle pour le comportement de ces corrélations, il est alors nécessaire qu'il vérifie les propriétés d'un tenseur de moments du second ordre. Lumley [89] a formulé mathématiquement le principe de réalisabilité à l'aide de l'analyse des valeurs propres des corrélations turbulentes. Les contraintes de réalisabilité qui en résultent sont des relations entre les coefficients d'un type donné de modèle permettant de réduire le nombre de coefficients indéterminés. Elles n'apportent pas d'information supplémentaire à celle contenue implicitement dans le choix du modèle.

Le paragraphe suivant rappelle les caractéristiques principales d'un tenseur de corrélations doubles. Les contraintes de réalisabilité sont ensuite formulées pour le tenseur de Reynolds. Enfin, le dernier paragraphe expose deux techniques d'application de ces contraintes aux modèles du second ordre.

## 5.2 Caractérisation des structures turbulentes

D'une façon schématique, les modélisations classiques d'un moment d'une distribution de probabilité définissent une fermeture à l'aide d'un polynôme de moments d'ordres inférieurs. La réalisabilité de cette approximation peut être vue comme une condition d'existence d'une densité de probabilité associée au moment modélisé. Dans le cas général et pour les fermetures au second ordre, le fait que le polynôme d'approximation soit une forme quadratique positive constitue une condition nécessaire, mais non suffisante, à la réalisabilité du modèle. En pratique, cette condition permet donc de contraindre la fermeture à représenter le moment d'une distribution de probabilité, ou de limiter au moins l'erreur introduite par cette modélisation.

Les principaux outils utilisés en pratique dans l'étude de la réalisabilité des fermetures au second ordre font appel aux propriétés des formes quadratiques positives, rappelées brièvement dans le paragraphe suivant.

### 5.2.1 Propriétés d'une forme quadratique positive

Soit une forme quadratique

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_i x_j$$

La matrice  $Q_{ij}$  possède  $n$  valeurs propres  $\lambda^i$  et  $n$  invariants principaux, notés  $I^i$ . Les  $n$  déterminants diagonaux principaux sont définis comme  $D_m$  :

$$D_m = \begin{vmatrix} Q_{11} & \dots & Q_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m1} & \dots & Q_{mm} \end{vmatrix}$$

La forme quadratique  $Q$  est positive si et seulement si les inégalités suivantes sont respectées :

$$\forall \underline{x} \in \mathbb{R}_n, Q(\underline{x}) \geq 0 \iff \forall m \in \mathbb{N}_n, D_m \geq 0 \quad (5.1a)$$

$$\iff \forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda^i \geq 0 \quad (5.1b)$$

$$\iff \forall i \in \mathbb{N}_n, I^i \geq 0 \quad (5.1c)$$

### 5.2.2 Application au tenseur de Reynolds

Le tenseur de Reynolds a pour composantes les corrélations doubles de fluctuations de vitesse, c'est-à-dire les moments du second ordre de la vitesse. La condition de réalisabilité portant sur les déterminants diagonaux principaux s'écrit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_3, \quad R_{\alpha\alpha} \geq 0 \quad (5.2a)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_3, \quad \alpha \neq \beta, \quad R_{\alpha\beta}^2 \leq R_{\alpha\alpha} R_{\beta\beta} \quad (5.2b)$$

$$\det R \geq 0 \quad (5.2c)$$

où dans ce chapitre, la convention de sommation ne s'applique pas aux indices grecs. La seconde inégalité est l'inégalité de Schwarz. Il est équivalent de regarder les propriétés du déviateur

adimensionnel de ce tenseur, le tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$ . Les deux premières inégalités (5.2a) et (5.2b) deviennent :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_3, \quad b_{\alpha\alpha} \geq -\frac{1}{3} \quad (5.3a)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_3, \quad \alpha \neq \beta, \quad b_{\alpha\alpha}^2 \leq b_{\alpha\alpha} b_{\beta\beta} \quad (5.3b)$$

Le tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  est par définition à trace nulle, ce qui signifie que seulement deux de ses valeurs propres sont indépendantes, soit encore que son premier invariant est nul. Il s'en suit que l'anisotropie peut être caractérisée d'un point de vue des grosses structures par les deux invariants du tenseur,  $II$  et  $III$ . La description des structures turbulentes à l'aide du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  est la plus largement répandue dans les modèles classiques au second ordre. Il ne s'agit cependant pas toujours de la quantité la plus pertinente pour caractériser l'état de la turbulence, comme le montrent les études effectuées par Reynolds dans le cas d'écoulements en présence de rotation [67]. La caractérisation de la turbulence par le tenseur  $b_{ij}$  sert néanmoins de cadre aux études de réalisabilité des modèles classiques puisque ce tenseur est généralement le seul indicateur de l'aspect des structures turbulentes qui soit retenu dans ces modèles. Par analogie avec la représentation de la quadrique associée au tenseur  $b_{ij}$ , ces deux invariants peuvent s'interpréter de la façon suivante: l'invariant  $II$  donne une mesure de l'intensité de l'anisotropie, et l'invariant  $III$  précise le type de l'anisotropie des structures. Dans le cas où  $III$  est positif, les structures vorticitaires ont tendance à être alignées et étirées suivant une direction privilégiée et la turbulence est dite de type cigare. Dans le cas contraire, où  $III$  est négatif, les tourbillons sont plutôt ordonnés dans des structures de faibles épaisseurs, dans la direction normale à leur axe de vortacité et la turbulence est dite de type disque. Les invariants du tenseur de Reynolds s'expriment en fonction de l'énergie cinétique  $K$  et des invariants  $II$  et  $III$  d'une façon immédiate :

$$I_R = \bar{q}^2 \quad (5.4a)$$

$$II_R = \bar{q}^2 \left[ \frac{2}{3} + 2II \right] \quad (5.4b)$$

$$III_R = \frac{8}{6} \bar{q}^2 \left[ \frac{2}{9} + 2II + 6III \right] \quad (5.4c)$$

La condition de réalisabilité sur les invariants impose :

$$I_R \geq 0 \quad (5.5a)$$

$$II_R \geq 0 \quad (5.5b)$$

$$III_R \geq 0 \quad (5.5c)$$

ce qui conduit à :

$$\bar{q}^2 \geq 0 \quad (5.6a)$$

$$II \geq -\frac{1}{3} \quad (5.6b)$$

$$II + 3III + \frac{1}{9} \geq 0 \quad (5.6c)$$

Il faut noter que par définition  $III_R = \det(R)$ . La contrainte de réalisabilité impose donc à l'énergie cinétique de rester positive, critère dit de réalisabilité au sens faible (Schumann [126])



et Lumley [89]), et délimite un domaine de validité des invariants. Toutes les valeurs propres du tenseur de Reynolds étant positives, les valeurs propres du tenseur d'anisotropie doivent vérifier l'inégalité (5.3a). En tenant compte du fait que  $b_{ij}$  est un déviateur, il est clair que ses valeurs propres satisfont :

$$\forall \alpha \in N_3, -\frac{1}{3} \leq b_{\alpha\alpha} \leq \frac{2}{3} \quad (5.7)$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton,  $b_{ij}$  vérifie son équation caractéristique,

$$b_{ij}^3 + III b_{ij} - III \delta_{ij} = 0 \quad (5.8)$$

Lorsque le tenseur de Reynolds a une valeur propre nulle, la turbulence ne possède que deux composantes et est désignée par 2C. La valeur propre correspondante du tenseur d'anisotropie est dans ce cas  $-\frac{1}{3}$ . L'équation caractéristique s'écrit alors  $1 + 9II + 27III = 0$ . En posant :

$$F = 1 + 9II + 27III \quad (5.9)$$

on dispose d'une mesure de l'écart de la turbulence à la limite 3D-2C, désignée également comme l'état bidimensionnel [89]. L'intervalle de validité des valeurs propres impose par conséquent :

$$0 \leq F \leq 1 \quad (5.10)$$

L'état  $F = 0$  correspond à la limite 2C, et  $F = 1$  à l'état isotrope où toutes les valeurs propres sont identiques. Par ailleurs, les valeurs propres du tenseur d'anisotropie sont toutes réelles si le discriminant de l'équation caractéristique, défini par :

$$\Delta = 4II^3 + 27III^2 \quad (5.11)$$

est négatif ou nul, soit :

$$\Delta \leq 0 \quad (5.12)$$

Lorsqu'il est nul, il existe au moins une racine double, et la turbulence est axisymétrique. Les conditions (5.10) et (5.12) délimitent scalairement le domaine de validité du tenseur d'anisotropie, qui peut être représenté par la carte d'anisotropie suivante, proposée par Lumley [89] :

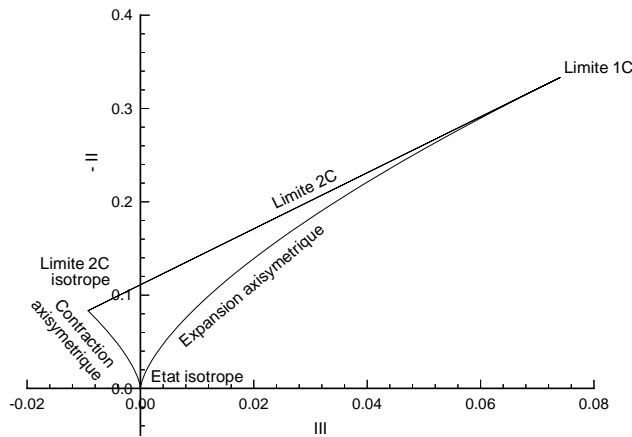


FIG. 5.1: Carte des invariants de Lumley.

Le domaine d'admissibilité est situé dans la zone intérieure. La limite supérieure délimite une turbulence à deux composantes, notée 2C, pour laquelle l'une des composantes normales du tenseur de Reynolds est nulle. C'est le cas au voisinage d'une paroi. Les limites inférieures correspondent aux états axisymétriques, de contraction lorsque  $III \leq 0$  et d'expansion lorsque  $0 \leq III$ . Le point le plus bas dans cette représentation du domaine, de coordonnées  $(0, 0)$  correspond à un état isotrope du tenseur de Reynolds. Lorsque la turbulence est fortement cisailée, elle évolue vers l'état 1C où toute l'énergie se concentre dans les axes principaux sur une seule des composantes du tenseur de Reynolds. Lorsque le tenseur de Reynolds possède une contrainte normale nulle,  $R_{\alpha\alpha} = 0$ , la composante de fluctuation de vitesse correspondante est nulle,  $u_\alpha = 0$ , ce qui dans l'espace spectral revient à annuler les composantes du tenseur spectral des vitesses du type  $\Phi_{\alpha n} = 0$ . La turbulence est dite à deux composantes. Selon Reynolds [112], pour que la turbulence reste 2C, il est nécessaire que les autres composantes de fluctuation de vitesse ne varient pas suivant cette direction  $x_\alpha$ , ce qui correspond à un état bidimensionnel de la turbulence. C'est pourquoi cette limite 2C est généralement appelée limite bidimensionnelle. Dans toute la suite, seuls les états limites d'une turbulence tridimensionnelle sont examinés. Les contraintes de réalisabilité appliquées sur une modélisation de type classique dans le cadre d'une turbulence strictement bidimensionnelle ont été proposées par Reynolds [112] et Shih, Shabbir et Lumley [136]. Elles montrent en particulier que ces fermetures satisfont de façon systématique le principe d'indifférence matérielle d'une turbulence bidimensionnelle soumise à une rotation orthogonale.

### 5.3 Formulation des contraintes de réalisabilité

Il s'agit maintenant d'imposer au modèle de ne jamais conduire le tenseur de Reynolds en dehors de ses limites de réalisabilité rappelées au paragraphe précédent. Les termes sur lesquels porte le modèle doivent rester compatibles avec la nature statistique de la fermeture à chaque instant, et quel que soit l'état de l'écoulement. En pratique, les inégalités mathématiques définissant le domaine de réalisabilité sont difficilement exploitables telles quelles et il convient de formuler des critères équivalents, prévenant par exemple les valeurs propres du tenseur de Reynolds de devenir négatives. La contrainte de réalisabilité consiste donc à fournir des conditions sur les coefficients du modèle traité, permettant, lorsqu'on s'approche des frontières du domaine de réalisabilité du tenseur de Reynolds, de ne jamais les franchir et de pouvoir s'en éloigner tout en restant dans le domaine. Les expressions qui en résultent doivent donc rester valables partout à l'intérieur du domaine.

#### 5.3.1 Conditions pratiques

Les conditions de réalisabilités exposées précédemment sont traduites en terme d'analyse d'extremum relatif suivant Lumley [90], avec dans un premier temps :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_3, \quad R_{\alpha\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dR_{\alpha\alpha}}{dt} \geq 0 \quad (5.13a)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_3 / \alpha \neq \beta, \quad R_{\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\alpha}R_{\beta\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(R_{\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\alpha}R_{\beta\beta})}{dt} \geq 0 \quad (5.13b)$$

Comme nous le verrons par la suite, les états limites de ces expressions fournissent des égalités qui sont la base des conditions de réalisabilité couramment utilisées dans le cadre de la modélisation au second ordre, car elles permettent de réduire le nombre d'inconnues des modèles. Ces inégalités assurent que la frontière bidimensionnelle (2C) est un état limite du tenseur de Reynolds, mais sont insuffisantes pour garantir aux valeurs propres de rester positives, et doivent être complétées par des conditions de convexité [90]:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_3, \quad R_{\alpha\alpha} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 R_{\alpha\alpha}}{dt^2} > 0 \quad (5.14a)$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}_3 / \alpha \neq \beta, \quad R_{\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\alpha}R_{\beta\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 (R_{\alpha\beta}^2 - R_{\alpha\alpha}R_{\beta\beta})}{dt^2} > 0 \quad (5.14b)$$

Il faut noter que les inégalités sont strictes ici, pour permettre aux corrélations de s'éloigner de l'état limite. L'ensemble de ces deux conditions assure aux quantités de rester positives en partant d'une situation réalisable. Ces critères ne donnent pas la façon dont la limite de réalisabilité est atteinte, mais le type de comportement que les équations du mouvement turbulent doivent satisfaire au voisinage de cette limite.

Des conditions similaires peuvent être écrites sur les valeurs propres du tenseur de Reynolds, soit :

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_3 \quad \lambda_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\lambda_i}{dt} \geq 0 \quad (5.15a)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}_3 \quad \lambda_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 \lambda_i}{dt^2} > 0 \quad (5.15b)$$

Dans l'espace propre du tenseur de Reynolds, ces interprétations de la condition de réalisabilité fournissent des critères mathématiques relativement simples.

### 5.3.2 Application aux modèles de type $K - \varepsilon$ .

Les modèles algébriques proposent classiquement une modélisation du tenseur de Reynolds comme fonctionnelle du tenseur des taux de déformation et du tenseur des taux de rotation. Reynolds [112] a proposé un modèle réalisable basé sur le développement au second ordre de la fonctionnelle. Son principe est rappelé brièvement dans ce paragraphe, afin d'illustrer les difficultés de mise en oeuvre.

#### Non réalisabilité du modèle $K - \varepsilon$ .

Le modèle de type  $K - \varepsilon$  classique est basé sur l'hypothèse de Boussinesq, suivant laquelle :

$$\overline{u_i u_j} = \frac{2}{3} K - C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} S_{ij} \quad (5.16)$$

avec  $C_\mu = 0.09$ . Il correspond à l'approximation au premier ordre des modèles algébriques classiques. Dans le cas d'un écoulement de cisaillement pur où les gradients de vitesse moyenne peuvent s'écrire

$$\overline{U}_{i,j} = S \delta_{i1} \delta_{j1}$$

il vient :

$$R_{11} = \frac{2}{3} K - 2 C_\mu \frac{K^2}{\varepsilon} S$$

La condition de réalisabilité suivant laquelle

$$R_{11} \geq 0$$

entraîne l'inégalité :

$$\frac{1}{3C_\mu} \geq \frac{SK}{\varepsilon}$$

soit approximativement :

$$3.7 \geq \frac{SK}{\varepsilon}$$

Etant donné que ce paramètre caractérise le rapport du temps du mouvement moyen au temps turbulent, il est clair que l'inégalité (5.3.2) n'est plus valable dans le cas d'écoulement fortement cisailé. Le modèle  $K - \varepsilon$  classique se contente par conséquent de respecter la condition de réalisabilité au sens faible imposant que l'énergie cinétique reste positive.

### Modèle $K - \varepsilon$ non linéaire.

Reynolds [112] a proposé un modèle de type  $K - \varepsilon$  non linéaire basé sur la théorie de distorsion rapide et la vérification des contraintes de réalisabilité. Cette technique a été présentée au chapitre 3. Elle est encore utilisée pour développer des modèles algébriques basés sur le développement fonctionnel classique, comme le modèle récent de Shih, Zhu et Lumley [139].

### 5.3.3 Application aux modèles du second ordre

Dans le cas des modèles au second ordre, le tenseur de Reynolds n'est pas modélisé directement, mais est la solution d'une équation différentielle. Les contraintes de réalisabilité peuvent donc demander au modèle de satisfaire une relation du type (5.15a) et (5.15b). Cette méthode est appliquée par Lumley [90]. Son principe est le suivant : l'équation de transport d'une valeur propre  $\lambda$  du tenseur de Reynolds peut s'écrire

$$\frac{d\lambda}{dt} = f(\lambda, \xi_i) \quad (5.17)$$

où  $f$  est la fonctionnelle modélisant le second membre et les  $\xi_i$  les arguments de la fonctionnelle autres que  $\lambda$ , comme par exemple le taux de déformation moyen. Cette équation de transport peut conduire la valeur propre à devenir nulle. Le comportement en temps de la valeur propre au voisinage de cette limite doit satisfaire les relations (5.15a) et (5.15b). Lumley [90] et Shih et Lumley [130] proposent l'équivalent suivant au voisinage de la limite nulle :

$$\lambda \rightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{d\lambda}{dt} = C \lambda^n \quad (5.18)$$

avec  $C > 0$  et  $0 < n \leq 1/2$ . La valeur de  $n = 1/2$  a été choisie par Lumley [90] et Shih et Lumley [130] dans leurs modèles respectifs.

Il faut insister sur le fait que cette forme équivalente n'est pas supposée traduire le mécanisme responsable de l'évolution de la turbulence vers la limite de réalisabilité  $2C$ , puisque cette

évolution est entièrement contenue dans les équations du mouvement et peut être provoquée par différents phénomènes physiques, comme un cisaillement ou une déformation rapide. L'équivalent proposé par Lumley souhaite uniquement contrôler le comportement de la solution au voisinage de cette limite en lui permettant en particulier de s'en éloigner. Cette méthode a été récemment critiquée par Speziale, Abid et Durbin [154] qui a montré que le choix effectué par Lumley peut quand même conduire vers des valeurs négatives du paramètre  $F$ .

## 5.4 Méthode de construction de modèles du second ordre réalisable

Les contraintes énoncées précédemment sont appliquées aux équations d'évolution du tenseur des corrélations doubles. Elles s'écrivent, avec les notations classiques :

$$\begin{aligned} \frac{dR_{ij}}{dt} = & -R_{ik}\tilde{V}_{aj,k} - R_{jk}\tilde{V}_{ai,k} \\ & + 2\bar{V}_{ap,q}[X_{iqpj} + X_{jqpi}] + \phi_{ij}^S - \varepsilon_{ij} + \phi_{ij}^R + [T_{ijk}^u + T_{ijk}^p + T_{ijk}^\nu]_{,k} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Le passage dans les axes propres du tenseur de Reynolds permet d'écrire (voir annexe I) la condition de réalisabilité proposée par Lumley sous la forme :

$$R_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \Leftrightarrow C R_{\alpha\alpha}^n = 4\bar{V}_{ap,q} X_{\alpha q p \alpha} + \phi_{\alpha\alpha}^S - \varepsilon_{\alpha\alpha} + [T_{\alpha\alpha k}^u + T_{\alpha\alpha k}^p + T_{\alpha\alpha k}^\nu]_{,k} \quad (5.20)$$

soit encore, pour que cette relation soit valable quel que soit l'état du mouvement moyen :

$$\bar{V}_{ap,q} X_{\alpha q p \alpha} = 0 \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad (5.21a)$$

$$[T_{\alpha\alpha k}^u + T_{\alpha\alpha k}^p + T_{\alpha\alpha k}^\nu]_{,k} + \phi_{\alpha\alpha}^S - \varepsilon_{\alpha\alpha} = C R_{\alpha\alpha}^n \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad (5.21b)$$

ce qui, dans le cas d'une turbulence homogène se réduit à :

$$\bar{V}_{ap,q} X_{\alpha q p \alpha} = 0 \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad (5.22a)$$

$$\phi_{\alpha\alpha}^S - \varepsilon_{\alpha\alpha} = C R_{\alpha\alpha}^n \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} \rightarrow 0 \quad (5.22b)$$

Ces équations constituent les contraintes de réalisabilité de Shih et Lumley [130] pour les termes rapide et lent du tenseur de corrélation pression-déformation.

Reynolds [112] a proposé d'écrire les contraintes de réalisabilité du terme rapide non pas sur  $\phi_{ij}^R$  comme Shih et Lumley, mais directement sur le tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$ , en interprétant la turbulence au niveau spectral, sachant que

$$X_{ijpq} = \int \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k}$$

La turbulence atteint la limite 2C si et seulement s'il existe une composante  $R_{\alpha\alpha}$  du tenseur de Reynolds qui est nulle et le tenseur spectral des vitesses vérifie :

$$\Phi_{\alpha n}(\underline{k}) = 0 \quad (5.23)$$

Par conséquent

$$X_{\alpha j p q} = 0 \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} = 0 \quad (5.24)$$

La turbulence est bidimensionnelle si et seulement s'il n'y a pas d'évolution des fluctuations de vitesse dans une direction donnée. Par conséquent :

$$X_{ijp\alpha} = 0 \quad \text{lorsque} \quad u_{i,\alpha} = 0 \quad (5.25)$$

La contrainte de réalisabilité 2C sur  $X_{ijpq}$  établie par Reynolds [112] est plus forte que le système d'équations de Shih et Lumley [130]. La mise en œuvre de ces contraintes de réalisabilité sur les modèles classiques est examinée dans les paragraphes suivants pour une turbulence tridimensionnelle.

#### 5.4.1 Terme lent

Dans le cas d'un écoulement homogène, Lumley [89] a proposé de modéliser le terme lent avec le déviateur du tenseur des taux de dissipation de sorte que la fermeture s'effectue sur le terme de retour à l'isotropie

$$\phi_{ij}^{S*} = \phi_{ij}^S - D \varepsilon_{ij} \quad (5.26)$$

Il est classiquement modélisé par une fonctionnelle isotrope dépendant uniquement du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds

$$\phi_{ij}^{S*} = \varepsilon [\beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S D b_{.ij}^2] \quad (5.27)$$

L'application de la contrainte de Lumley donne l'état limite suivant des coefficients :

$$\beta_1^S = -2 - \beta_2^S (2 II + \frac{1}{3}) \quad (5.28)$$

lorsque le tenseur de Reynolds possède une valeur propre nulle. Dans ce cas la turbulence est 2C et il est plus facile d'exprimer l'écart à cette limite à l'aide du paramètre d'aplatissement  $F$  que des valeurs propres du tenseur de Reynolds, ce qui conduit à une relation du type :

$$\beta_1^S = -2 - \beta_2^S (2 II + \frac{1}{3}) - C F^n \quad (5.29)$$

avec les coefficients  $C$  et  $n$  qui doivent être positifs et qui restent à calibrer sur les expériences de retour à l'isotropie. Il est classique de développer les coefficients  $\beta_1^S$  et  $\beta_2^S$  en séries de Taylor des invariants  $II$  et  $III$ . Ils dépendent également du nombre de Reynolds turbulent, qui ne peut être pris en compte que lors de la calibration des coefficients puisqu'il n'intervient pas dans la limite de réalisabilité. Une étude qualitative du comportement dynamique du système des invariants du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds est effectuée en annexe O dans le cas du retour à l'isotropie et qui montre différentes évolutions des points fixes de ce système dans le plan des invariants en fonction du choix de développement des coefficients du terme lent.

#### 5.4.2 Terme rapide

La modélisation classique du tenseur  $X_{ijpq}$  s'exprime comme fonctionnelle du tenseur d'anisotropie uniquement. La forme vérifiant l'ensemble des symétries tensorielles du tenseur  $X_{ijpq}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{X}_{ijpq} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ & + C_3 \delta_{ij} b_{pq} + C_4 \delta_{pq} b_{ij} \\ & + C_5 (\delta_{ip} b_{jq} + \delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip} + \delta_{jp} b_{iq}) \\ & + C_6 \delta_{ij} b_{.pq}^2 + C_7 \delta_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_8 (\delta_{ip} b_{.jq}^2 + \delta_{iq} b_{.jp}^2 + \delta_{jq} b_{.ip}^2 + \delta_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_9 b_{ij} b_{pq} + C_{10} (b_{ip} b_{jq} + b_{iq} b_{jp}) \\ & + C_{11} b_{ij} b_{.pq}^2 + C_{12} b_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_{13} (b_{ip} b_{.jq}^2 + b_{iq} b_{.jp}^2 + b_{jq} b_{.ip}^2 + b_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_{14} b_{.ij}^2 b_{.pq}^2 + C_{15} (b_{.ip}^2 b_{.jq}^2 + b_{.iq}^2 b_{.jp}^2) \end{aligned} \quad (5.30)$$

où

$$\bar{X}_{ijpq} = \frac{1}{2K} X_{ijpq}$$

Dans un premier temps, les relations entre les coefficients résultant de l'application des contraintes de réalisabilité proposées par Lumley sont exposées. Les relations provenant des conditions 2C de Reynolds sont données ensuite.

*Système de contraintes de réalisabilité de Lumley*

L'expression du terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation lorsque  $\bar{X}_{ijpq}$  est modélisé de façon classique est donné en annexes. Lorsque  $R_{\alpha\alpha} = 0$ , la composante du tenseur d'anisotropie vaut  $b_{\alpha\alpha} = -1/3$  et en se plaçant dans les axes principaux du tenseur d'anisotropie, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= S_{\alpha\alpha} [C_1 + C_2 - \frac{1}{3}(C_3 + C_4 + 2C_5) + \frac{1}{9}(C_6 + C_7 + 2C_8 + C_9 + C_{10}) \\ &- \frac{1}{27}(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) + \frac{1}{81}(C_{14} + C_{15})] \\ &+ b_{mn} S_{mn} [C_5 - \frac{1}{3}C_{10} + \frac{1}{9}C_{13}] + b_{mn}^2 S_{mn} [C_8 - \frac{1}{3}C_{13} + \frac{1}{9}C_{15}] \end{aligned} \quad (5.31)$$

Cette formulation ne prend pas en compte les termes faisant intervenir le tenseur des taux de rotation dans le terme rapide. Cette égalité, qui doit être vérifiée quel que soit l'état du mouvement moyen, conduit à trois contraintes de réalisabilité :

$$C_1 + C_2 - \frac{1}{3}(C_3 + C_4 + 2C_5) + \frac{1}{9}(C_6 + C_7 + 2C_8 + C_9 + C_{10}) - \frac{1}{27}(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) + \frac{1}{81}(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (5.32a)$$

$$C_5 - \frac{1}{3}C_{10} + \frac{1}{9}C_{13} = 0 \quad (5.32b)$$

$$C_8 - \frac{1}{3}C_{13} + \frac{1}{9}C_{15} = 0 \quad (5.32c)$$

Le modèle de  $X_{ijpq}$  doit également vérifier les contraintes d'incompressibilité et de normalisation sur le tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$ , qui imposent :

$$X_{n j n q} = 0 \quad (5.33a)$$

$$X_{i j n n} = R_{ij} \quad (5.33b)$$

Elles fournissent chacune trois relations sur les coefficients :

$$C_1 + 4C_2 - 2II C_8 + III(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) = 0 \quad (5.34a)$$

$$C_3 + C_4 + 5C_5 - II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + III(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (5.34b)$$

$$C_6 + C_7 + 5C_8 + C_9 + C_{10} - II(C_{14} + 3C_{15}) = 0 \quad (5.34c)$$

et

$$3C_1 + 2C_2 - 2II C_6 + 4III C_{13} = \frac{1}{3} \quad (5.35a)$$

$$3C_4 + 4C_5 - 2II(C_{11} + 2C_{13}) + 2III C_{15} = 1 \quad (5.35b)$$

$$3C_7 + 4C_8 + 2C_{10} - 2II(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (5.35c)$$

Dans ces contraintes apparaissent les deux invariants du tenseur d'anisotropie,  $II$  et  $III$ . La limite de réalisabilité traitée par les contraintes précédentes est la limite bidimensionnelle  $F = 0$ . Pour des raisons de simplicité, il est avantageux de remplacer  $III$  par son expression en fonction de  $F$  dans les contraintes d'incompressibilité et de normalisation. Il vient :

$$III = \frac{1}{27}(F - 1) - \frac{1}{3}II \quad (5.36)$$

Les deux systèmes précédents deviennent :

$$\frac{1}{27}(C_{11} + C_{12} + 2C_{13})F + \frac{1}{3}(6C_8 + C_{11} - C_{12} - 2C_{13})II + C_1 + 4C_2 - \frac{1}{27}(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) = 0 \quad (5.37a)$$

$$\frac{1}{27}(C_{14} + C_{15})F + \left(\frac{1}{3}C_{14} - \frac{1}{3}C_{15} + C_{11} - C_{12} - 4C_{13}\right)II + C_3 + C_4 + 5C_5 - \frac{1}{27}(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (5.37b)$$

$$-(C_{14} + 3C_{15})II + C_6 + C_7 + 5C_8 + C_9 + C_{10} = 0 \quad (5.37c)$$

et

$$\frac{4}{27}C_{13}F + 3C_1 + 2C_2 - \frac{4}{27}C_{13} - 2II\left(C_6 + \frac{2}{3}C_{13}\right) = \frac{1}{3} \quad (5.38a)$$

$$\frac{2}{27}C_{15}F + 3C_4 + 4C_5 - \frac{2}{27}C_{15} - (2C_{11} + 4C_{13} + \frac{2}{3}C_{15})II = 1 \quad (5.38b)$$

$$3C_7 + 4C_8 + 2C_{10} - 2(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (5.38c)$$

La résolution des systèmes de contrainte d'incompressibilité et de normalisation permettent d'exprimer six des coefficients en fonction des autres, soient :

$$C_1 = \frac{2}{15} + \frac{1}{5}II(4C_6 - 2C_8) + \frac{1}{5}III(C_{11} + C_{12} - 6C_{13}) \quad (5.39a)$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} + \frac{1}{5}II(3C_8 - C_6) - \frac{1}{10}III(3C_{11} + 3C_{12} + 2C_{13}) \quad (5.39b)$$

$$C_3 = -\frac{1}{3} - \frac{11}{3}C_5 + \frac{1}{3}II(C_{11} + 3C_{12} + 8C_{13}) - \frac{1}{3}III(3C_{14} + C_{15}) \quad (5.39c)$$

$$C_4 = \frac{1}{3} - \frac{4}{5}C_5 + \frac{2}{3}II(C_{11} + 2C_{12}) - \frac{2}{3}III C_{15} \quad (5.39d)$$

$$C_7 = 2(C_6 + 3C_8 + C_9) - 4II C_{15} \quad (5.39e)$$

$$C_{10} = -(3C_6 + 11C_8 + 3C_9) + II(7C_{15} + C_{14}) \quad (5.39f)$$

soit, en fonction de  $(II, F)$  :

$$C_1 = \frac{2}{15} + \frac{2}{45}C_{13} - \frac{1}{135}C_{11} - \frac{1}{135}C_{12} + \frac{1}{5}II(4C_6 - 2C_8 - C_{11} - C_{12} + 2C_{13}) \quad (5.40a)$$

$$+ F\left(-\frac{2}{45}C_{13} + \frac{1}{135}C_{11} + \frac{1}{135}C_{12}\right)$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} + \frac{1}{135}C_{13} + \frac{1}{90}C_{11} + \frac{1}{90}C_{12} + \frac{1}{5}II(3C_8 - C_6 + \frac{1}{3}C_{13} + \frac{1}{2}C_{11} + \frac{1}{2}C_{12}) \quad (5.40b)$$

$$- F\left(\frac{1}{135}C_{13} + \frac{1}{90}C_{11} + \frac{1}{90}C_{12}\right)$$



$$C_3 = -\frac{1}{3} - \frac{11}{3}C_5 + \frac{1}{27}(C_{14} + \frac{1}{3}C_{15}) + \frac{1}{3}II(C_{11} + 3C_{12} + 8C_{13} + C_{14} + \frac{1}{3}C_{15}) \quad (5.40c)$$

$$- \frac{1}{27}F(C_{14} + \frac{1}{3}C_{15})$$

$$C_4 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}C_5 + \frac{2}{81}C_{15} + \frac{2}{3}II(C_{11} + 2C_{13} + \frac{1}{3}C_{15}) \quad (5.40d)$$

$$- \frac{2}{81}FC_{15}$$

$$C_7 = 2(C_6 + 3C_8 + C_9) - 4IIC_{15} \quad (5.40e)$$

$$C_{10} = -(3C_6 + 11C_8 + 3C_9) + II(7C_{15} + C_{14}) \quad (5.40f)$$

Ces solutions peuvent être introduites dans les trois égalités de réalisabilité proposées par Lumley et qui doivent être satisfaites lorsque  $F = 0$ . Par conséquent, en supposant les coefficients constants, la résolution du système de réalisabilité proposé par Lumley lorsque  $F = 0$  conduit à déterminer trois coefficients supplémentaires, qui sont :

$$C_5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{30}(C_{11} + C_{12} + \frac{2}{3}C_{13} + 10C_8) \quad (5.41a)$$

$$+ \frac{1}{10}II(3C_{11} + 3C_{12} + 2C_{13} + 18C_8 - 6C_6)$$

$$C_9 = \frac{1}{10} - \frac{1}{30}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - C_6 - 4C_8 \quad (5.41b)$$

$$+ II(\frac{3}{10}C_{11} + \frac{3}{10}C_{12} - \frac{34}{5}C_{13} - \frac{1}{3}C_{14} - \frac{3}{5}C_6 + \frac{14}{5}C_8)$$

$$C_{15} = 3C_{13} - 9C_8 \quad (5.41c)$$

Ces trois dernières relations ne sont valables que dans la limite  $F = 0$ , et il peut être intéressant de les considérer comme les premiers termes du développement des coefficients en  $F$ , c'est-à-dire les expressions de  $C_5^{(0)}$ ,  $C_{15}^{(0)}$ , et  $C_9^{(0)}$  :

$$C_5 = C_5^{(0)} + FC_5^{(F)} \quad (5.42a)$$

$$C_9 = C_9^{(0)} + FC_9^{(F)} \quad (5.42b)$$

$$C_{15} = C_{15}^{(0)} + FC_{15}^{(F)} \quad (5.42c)$$

Il reste alors six coefficients indéterminés, les

$$C_6 \quad C_8 \quad C_{11} \quad C_{12} \quad C_{13} \quad C_{14} \quad (5.43)$$

et les trois extensions

$$C_5^{(F)} \quad C_9^{(F)} \quad C_{15}^{(F)} \quad (5.44)$$

La limite analytique isotrope correspondant à  $F = 1$  et pour laquelle le tenseur  $X_{ijpq}$  exact est réduit à ses deux premiers termes, avec :

$$C_1 = \frac{2}{15} \quad (5.45a)$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} \quad (5.45b)$$

est automatiquement vérifiée par ce modèle, puisque cette condition est satisfaite dès lors que les coefficients vérifient les contraintes d'incompressibilité et de normalisation. Shih et Lumley

[134] choisissent d'annuler l'ensemble des six inconnues, afin d'obtenir une expression simple des coefficients. Il vient :

$$C_1 = \frac{2}{15} \quad (5.46a)$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} \quad (5.46b)$$

$$C_3 = -\frac{1}{81} C_{15} F + \frac{1}{9} C_{15} II - \frac{11}{3} C_5 + \frac{1}{81} C_{15} \quad (5.46c)$$

$$C_4 = -\frac{2}{81} C_{15} F + \frac{2}{9} C_{15} II + \frac{2}{81} C_{15} - \frac{4}{3} C_5 \quad (5.46d)$$

$$C_7 = 2 C_9 - 4 II C_{15} \quad (5.46e)$$

$$C_{10} = 7 C_{15} II - 3 C_9 \quad (5.46f)$$

et le système des coefficients de Lumley donne :

$$C_5 = -\frac{1}{10} + F C_5^{(F)} \quad (5.47a)$$

$$C_9 = \frac{1}{10} + F C_9^{(F)} \quad (5.47b)$$

$$C_{15} = F C_{15}^{(F)} \quad (5.47c)$$

L'expression des coefficients  $C_5^{(F)}$ ,  $C_9^{(F)}$  et  $C_{15}^{(F)}$  peut être calibrée sur des situations de distorsion rapide.

L'application des contraintes de réalisabilité de Lumley peut être effectuée de façon légèrement différente : la procédure consiste à résoudre le système formé par les contraintes de Lumley avec les contraintes de base, de normalisation et d'incompressibilité, dans lesquelles  $F = 0$ . Les coefficients obtenus sont identiques aux résultats ci-dessus, mais avec  $F = 0$ . Il est clair dans ce cas que la limite isotrope n'est pas satisfaite par ces coefficients puisqu'ils proviennent d'une résolution tronquée du système des contraintes de base. Ces systèmes s'écrivent maintenant, dans le cas général :

$$\frac{1}{27} F (C_{11} + C_{12} + 2 C_{13}) = 0 \quad (5.48a)$$

$$F \left( \frac{1}{27} C_{14} - \frac{1}{3} C_8 + \frac{1}{9} C_{13} \right) = 0 \quad (5.48b)$$

et

$$\frac{4}{27} F C_{13} = 0 \quad (5.49a)$$

$$\frac{2}{3} F (-C_8 + \frac{1}{3} C_0) = 0 \quad (5.49b)$$

Lorsque  $F$  n'est pas nul, la résolution du système formé par la contrainte de normalisation conduit donc à fixer

$$C_8 = 0 \quad (5.50a)$$

$$C_{13} = 0 \quad (5.50b)$$

alors que le système des conditions d'incompressibilité impose :

$$C_{12} = -C_{11} \quad (5.51a)$$

$$C_{14} = 0 \quad (5.51b)$$

L'ensemble des coefficients de la fonctionnelle  $X_{ijpq}$  s'expriment à l'aide des deux paramètres  $C_6$  et  $C_{11}$  et sont :

$$C_1 = \frac{2}{15} + \frac{4}{5} II C_6 \quad (5.52a)$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} - \frac{1}{5} II C_6 \quad (5.52b)$$

$$C_3 = \frac{1}{30} + II \left( -\frac{2}{3} C_{11} + \frac{11}{5} C_6 \right) \quad (5.52c)$$

$$C_4 = \frac{7}{15} + II \left( \frac{2}{3} C_{11} + \frac{4}{5} C_6 \right) \quad (5.52d)$$

$$C_5 = -\frac{1}{10} - \frac{3}{5} II C_6 \quad (5.52e)$$

$$C_6 = C_6 \quad (5.52f)$$

$$C_7 = \frac{1}{5} + \frac{6}{5} II C_6 \quad (5.52g)$$

$$C_8 = 0 \quad (5.52h)$$

$$C_9 = \frac{1}{10} - C_6 + \frac{3}{5} II C_6 \quad (5.52i)$$

$$C_{10} = -\frac{3}{10} - \frac{9}{5} II C_6 \quad (5.52j)$$

$$C_{11} = C_{11} \quad (5.52k)$$

$$C_{12} = -C_{11} \quad (5.52l)$$

$$C_{13} = 0 \quad (5.52m)$$

$$C_{14} = 0 \quad (5.52n)$$

$$C_{15} = 0 \quad (5.52o)$$

Ce modèle vérifie bien la limite isotrope, quel que soit la valeur du coefficient  $C_6$ . Contrairement aux coefficients obtenus avec la mise en oeuvre précédente, ces solutions proposent une modélisation cubique du tenseur  $X_{ijpq}$ , puisque les termes d'ordre quatre de la fonctionnelle ne sont pas pris en compte dès lors que  $C_{14} = 0$  et  $C_{15} = 0$ . Il faut noter que si le coefficient  $C_6$  est choisi nul, pour simplifier, le terme rapide qui en résulte est exactement le modèle proposé par Fu, Launder et Tselepidakis [47], avec  $C_{11} = -8r$ , modèle exposé au prochain chapitre. L'évaluation des coefficients par cette procédure est moins générale que dans le cas précédent, dans la mesure où elle suppose implicitement que les coefficients ne dépendent pas de  $F$ . Ces hypothèses conduisent à des expressions plus ou moins simples du modèle.

Classiquement, les inconnues  $C_i$  se développent en séries de Taylor suivant  $II$  et  $III$ , soit par exemple :

$$C_i = C_i^{(0)} + II C_i^{(2)} + III C_i^{(3)} + II^2 C_i^{(4)} + O(\|b\|^5) \quad (5.53)$$

Le modèle sur lequel s'appliquent les relations de réalisabilité choisies est une troncature du développement de la fonctionnelle, à un ordre donné, ce qui implique que les tenseurs de plus petit ordre en  $b_{ij}$  auront des coefficients développés à un ordre élevé alors que les termes d'ordre

cubique ou supérieur auront des coefficients faisant intervenir un moins grand nombre d'inconnues scalaires. Johansson et Hallbäck [64] ont suggéré d'effectuer une troncature de  $X_{ijpq}$  à l'ordre quatre. Dans ce cas, les coefficients s'écrivent :

$$C_i = C_i^{(0)} + II C_i^{(2)} + III C_i^{(3)} + II^2 C_i^{(4)} \quad (i = 1, 2) \quad (5.54a)$$

$$C_i = C_i^{(0)} + II C_i^{(2)} + III C_i^{(3)} \quad (i = 3, 4, 5) \quad (5.54b)$$

$$C_i = C_i^{(0)} + II C_i^{(2)} \quad (i = 6, 7, 8, 9, 10) \quad (5.54c)$$

$$C_i = C_i^{(0)} \quad (i = 11, 12, 13, 14, 15) \quad (5.54d)$$

Sous cette forme, les coefficients de la fonctionnelle modélisant  $X_{ijpq}$  comprennent 32 constantes. L'application des contraintes d'incompressibilité et de normalisation conduit, en identifiant les coefficients des polynômes en  $(II, III)$  à réduire le nombre des inconnues à quatorze. Ces relations sont données au paragraphe suivant dans le cadre de la contrainte de réalisabilité de Reynolds. L'application du système des contraintes de réalisabilité de Lumley laisse sept coefficients indéterminés. Ce sont, en cherchant à conserver le même choix de paramètres que précédemment,

$$C_5^{(3)}$$

et les termes d'ordre élevés, soient :

$$C_6^{(0)}, C_8^{(0)} \quad \text{et} \quad C_{11}^{(0)}, C_{12}^{(0)}, C_{13}^{(0)}, C_{14}^{(0)}$$

Les contributions  $C_6^{(2)}$  et  $C_8^{(2)}$  sont en effet déterminées par la limite de réalisabilité et sont toutes les deux nulles. La procédure suivie étant la même que celle exposée au tout début de ce paragraphe, les coefficients vérifient bien la limite isotrope.

#### *Système de contraintes de réalisabilité 2C*

Le système des contraintes de réalisabilité 2C proposé par Reynolds provient de la condition

$$X_{\alpha jpq} = 0 \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} = 0 \quad (5.55)$$

et conduit pour la modélisation classique du tenseur d'ordre quatre aux relations suivantes :

$$C_1 + 2C_2 - \frac{1}{3}(C_3 + C_4 + 4C_5) + \frac{1}{9}(C_6 + C_7 + 4C_8 + C_9 + 2C_{10}) - \frac{1}{27}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + \frac{1}{81}(C_{14} + 2C_{15}) = 0 \quad (5.56a)$$

$$-\frac{1}{9}(C_{11} - C_{12}) + C_3 + \frac{1}{3}(C_6 - C_9) + \frac{1}{27}C_{14} = 0 \quad (5.56b)$$

$$C_2 - \frac{1}{6}C_5 + \left(\frac{1}{18} - II\right)C_8 - \frac{1}{18}C_{10} + \left(\frac{1}{27} + \frac{1}{3}II\right)C_{13} - \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{9}II\right)C_{15} = 0 \quad (5.56c)$$

$$-C_{10} + C_8 + 3C_5 + \frac{1}{9}C_{15} = 0 \quad (5.56d)$$

$$C_1 + \frac{1}{6}C_3 - \frac{1}{3}C_4 - \left(\frac{1}{18} + II\right)C_6 + \frac{1}{9}C_7 - \frac{1}{18}C_9 + \left(\frac{1}{3}II + \frac{1}{54}\right)C_{11} + \frac{1}{54}C_{12} - \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{9}II\right)C_{14} = 0 \quad (5.56e)$$

$$\left(\frac{1}{3}II + \frac{1}{54}\right)C_{11} + \frac{1}{54}C_{12} - \left(\frac{1}{162} + \frac{1}{9}II\right)C_{14} = 0$$

Ces cinq relations ne sont valables que lorsque la turbulence est 2C, c'est-à-dire lorsque  $F = 0$ . L'application des contraintes d'incompressibilité et de normalisation réduit le nombre de relations imposées par la limite 2C à trois. En fixant  $C_1, C_2, C_3, C_7$  et  $C_{10}$  comme précédemment avec les contraintes de base, il vient :

$$C_5 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{30} (C_{11} + C_{12} + \frac{2}{3} C_{13} + 10 C_8) \quad (5.57a)$$

$$+ \frac{1}{10} II (3 C_{11} + 3 C_{12} + 2 C_{13} + 18 C_8 - 6 C_6) \\ - \frac{1}{54} (3 C_{11} - 9 C_6 - C_{14}) - \frac{1}{6} II (3 C_{11} - 9 C_6 - C_{14})$$

$$C_9 = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} (C_{11} + C_{12} + 4 C_{13}) - C_6 - 4 C_8 \quad (5.57b)$$

$$+ II \left( \frac{3}{10} C_{11} + \frac{3}{10} C_{12} - \frac{34}{5} C_{13} - \frac{1}{3} C_{14} - \frac{3}{5} C_6 + \frac{14}{5} C_8 \right) \\ + \frac{4}{3} (3 C_{11} - 9 C_6 - C_{14}) II$$

$$C_{15} = 3 C_{13} - 9 C_8 \quad (5.57c)$$

$$+ \frac{1}{2} (3 C_{11} - 9 C_6 - C_{14})$$

Ces relations permettent de retrouver les solutions de Lumley dès lors que

$$3 C_{11} - 9 C_6 - C_{14} = 0 \quad (5.58)$$

Le calcul des coefficients développés en série de Taylor impose toujours les coefficients suivants pour vérifier les conditions d'incompressibilité et de normalisation :

$$C_1^{(0)} = \frac{2}{15} \quad (5.59a)$$

$$C_1^{(2)} = \frac{4}{5} C_6^{(0)} - \frac{2}{5} C_8^{(0)} \quad (5.59b)$$

$$C_1^{(3)} = \frac{1}{5} (C_{12}^{(0)} + C_{11}^{(0)} - 6 C_{13}^{(0)}) \quad (5.59c)$$

$$C_1^{(4)} = \frac{4}{5} C_6^{(2)} - \frac{2}{5} C_8^{(2)} \quad (5.59d)$$

$$C_2^{(0)} = -\frac{1}{30} \quad (5.60a)$$

$$C_2^{(2)} = -\frac{1}{5} C_6^{(0)} + \frac{3}{5} C_8^{(0)} \quad (5.60b)$$

$$C_2^{(3)} = -\frac{3}{10} (C_{12}^{(0)} + C_{11}^{(0)} + \frac{2}{3} C_{13}^{(0)}) \quad (5.60c)$$

$$C_2^{(4)} = -\frac{1}{5} C_6^{(2)} + \frac{3}{5} C_8^{(2)} \quad (5.60d)$$

$$C_3^{(0)} = -\frac{1}{3} - \frac{11}{3} C_5^{(0)} \quad (5.61a)$$

$$C_3^{(2)} = -\frac{11}{3} C_5^{(2)} + \frac{1}{3} (C_{11}^{(0)} + 3 C_{12}^{(0)} + 8 C_{13}^{(0)}) \quad (5.61b)$$

$$C_3^{(3)} = -\frac{11}{3} C_5^{(3)} - \frac{1}{3} C_{15}^{(0)} - C_{14}^{(0)} \quad (5.61c)$$

$$C_4^{(0)} = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} C_5^{(0)} \quad (5.62a)$$

$$C_4^{(2)} = -\frac{4}{3} C_5^{(2)} + \frac{2}{3} (C_{11}^{(0)} + 2 C_{13}^{(0)}) \quad (5.62b)$$

$$C_4^{(3)} = -\frac{4}{3} C_5^{(3)} - \frac{2}{3} C_{15}^{(0)} \quad (5.62c)$$

$$C_7^{(0)} = 2 (C_6^{(0)} + 3 C_8^{(0)} + C_9^{(0)}) \quad (5.63a)$$

$$C_7^{(2)} = 2 (C_6^{(2)} + 3 C_8^{(2)} + C_9^{(2)}) - 4 C_{15}^{(0)} \quad (5.63b)$$

$$C_{10}^{(0)} = -3 (C_6^{(0)} + \frac{11}{3} C_8^{(0)} + C_9^{(0)}) \quad (5.64a)$$

$$C_{10}^{(2)} = -3 (C_6^{(2)} + \frac{11}{3} C_8^{(2)} + C_9^{(2)}) + 7 C_{15}^{(0)} + C_{14}^{(0)} \quad (5.64b)$$

La résolution du système des contraintes 2C conduit aux relations supplémentaires suivantes :

$$C_5^{(0)} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{27} C_5^{(3)} + \frac{1}{54} C_{14}^{(0)} \quad (5.65a)$$

$$- \frac{1}{45} (C_{11}^{(0)} - \frac{2}{3} C_{12}^{(0)} - C_{13}^{(0)}) + \frac{1}{3} C_8^{(0)} + \frac{1}{6} C_6^{(0)}$$

$$C_5^{(2)} = \frac{1}{3} C_5^{(3)} + \frac{1}{6} C_{14}^{(0)} \quad (5.65b)$$

$$- \frac{1}{5} (C_{11}^{(0)} - \frac{3}{2} C_{12}^{(0)} - C_{13}^{(0)}) + \frac{9}{5} C_8^{(0)} + \frac{9}{10} C_6^{(0)} \quad (5.65c)$$

$$C_9^{(0)} = \frac{1}{10} \quad (5.66a)$$

$$- \frac{1}{30} (C_{11}^{(0)} + C_{12}^{(0)} + 2 C_{13}^{(0)}) - 4 C_8^{(0)} - C_6^{(0)}$$

$$C_9^{(2)} = -C_{14}^{(0)} \quad (5.66b)$$

$$+ \frac{1}{10} (37 C_{11}^{(0)} - 3 C_{12}^{(0)} + 68 C_{13}^{(0)}) - \frac{114}{5} C_8^{(0)} - \frac{57}{5} C_6^{(0)} \quad (5.66c)$$

$$C_{15}^{(0)} = -\frac{1}{2} C_{14}^{(0)} + \frac{3}{2} (C_{11}^{(0)} + 2 C_{13}^{(0)}) - 2 C_8^{(2)} - 9 C_8^{(0)} - \frac{9}{2} C_6^{(0)} \quad (5.67a)$$

$$C_6^{(2)} = -2 C_8^{(2)} \quad (5.68a)$$

Ces coefficients s'expriment en fonction de ceux obtenus avec le système des contraintes de Lumley, surmontés d'une barre ici suivant :

$$C_5^{(0)} = \overline{C}_5^{(0)} - \frac{1}{54} (3 C_{11}^{(0)} - 9 C_6^{(0)} - C_{14}^{(0)}) \quad (5.69a)$$

$$C_5^{(2)} = \overline{C}_5^{(2)} - \frac{1}{6} (3 C_{11}^{(0)} - 9 C_6^{(0)} - C_{14}^{(0)}) \quad (5.69b)$$

$$C_9^{(0)} = \overline{C}_9^{(0)} \quad (5.69c)$$

$$C_9^{(2)} = \overline{C}_9^{(2)} + \frac{4}{3} (3 C_{11}^{(0)} - 9 C_6^{(0)} - C_{14}^{(0)}) - 2 C_8^{(2)} \quad (5.69d)$$

$$C_{15}^{(0)} = \overline{C}_{15}^{(0)} + \frac{1}{2} (3 C_{11}^{(0)} - 9 C_6^{(0)} - C_{14}^{(0)}) \quad (5.69e)$$

$$C_6^{(2)} = \overline{C}_6^{(2)} - 2 C_8^{(2)} \quad (5.69f)$$

Les contraintes de réalisabilité établissent des relations entre les coefficients du modèle de  $\overline{X}_{ijpq}$  qui réduisent de façon intéressante le nombre d'inconnues du modèle. L'étude des systèmes de conditions proposés par Lumley ou par Reynolds montre bien que le modèle obtenu reste réalisable au sens de la contrainte utilisée et dépend de la forme du modèle qui a été admise. Il est également généralement nécessaire de définir la forme des coefficients ailleurs que sur la limite de réalisabilité. Ceci peut s'effectuer comme le proposent Shih et Lumley [130] par un développement en fonction du paramètre d'aplatissement  $F$ , mais doit dans tous les cas permettre de s'éloigner correctement de la limite de réalisabilité. Shih et Lumley proposent de s'appuyer sur une hypothèse d'équivalent de la dérivée première au voisinage de la limite de réalisabilité, en turbulence homogène, pour définir une fonction de correction. Ils proposent que le comportement asymptotique des modèles soit du type :

$$\frac{d\overline{u_\alpha u_\alpha}}{dt} = C F^\alpha \quad \text{lorsque} \quad R_{\alpha\alpha} = 0 \quad (5.70)$$

avec  $C > 0$  et  $0 < \alpha < 1/2$ . Ces techniques peuvent également être utilisées d'une certaine façon pour corriger les modèles qui par construction ne satisfont pas les limites de réalisabilité et ne sont donc pas réalisables. C'est le cas des formulations linéaires du tenseur du quatrième ordre. Il est bien connu [142] que l'isotropisation de la production [99] ou le modèle de Launder, Reece et Rodi [74] ne sont pas réalisables. La grande majorité des modèles au second ordre utilisés sont cependant basés sur une modélisation linéaire du tenseur des corrélations pression-déformation. C'est pourquoi ce type d'opération est intéressant.

Dans le cas d'une turbulence homogène, le modèle le plus simple, dit d'isotropisation de la production s'écrit :

$$\frac{d\overline{R}_{ij}}{dt} = -C_1 \frac{\varepsilon}{2K} [R_{ij} - \frac{2}{3} K \delta_{ij}] - C_2 [P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}] + P_{ij} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (5.71)$$

avec  $C_1 = 3.6$  et  $C_2 = 0.6$ . En se plaçant dans les axes principaux, il vient :

$$\frac{d\overline{R}_{\alpha\alpha}}{dt} = -C_1 \frac{\varepsilon}{2K} [R_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3} K] - C_2 [-2 R_{\alpha\alpha} S_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3} P] - 2 R_{\alpha\alpha} S_{\alpha\alpha} - \frac{2}{3} \varepsilon \quad (5.72)$$

Lorsque  $R_{\alpha\alpha}$  tend vers zéro,

$$\frac{dR_{\alpha\alpha}}{dt} \rightarrow \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} C_1 \varepsilon + C_2 P - \varepsilon \right) \quad (5.73)$$

Il est clair par conséquent que lorsque  $C_1$  est une constante, le modèle peut sortir du domaine de réalisabilité dès que :

$$\frac{1}{2} C_1 < 1 - C_2 \frac{P}{\varepsilon} \quad (5.74)$$

Une façon très courante de corriger ce défaut consiste à augmenter la valeur de  $C_1$  pour éviter que  $R_{\alpha\alpha}$  ne devienne négatif. Le plus simple consiste à poser :

$$\frac{1}{2} C_1 = \max\left[1.8, 1 - C_2 \frac{P}{\varepsilon}\right] \quad (5.75)$$

Ce paramètre peut également être défini comme une fonction du facteur d'aplatissement  $F$ , comme c'est le cas dans le modèle de Shima [140], présenté précédemment (voir annexe D). Des opérations similaires peuvent être effectuées sur le modèle linéaire de Launder, Reece et Rodi [74]. Il ne s'agit bien sûr pas d'une façon de construire un modèle réalisable, mais bien d'une correction sur le comportement des contraintes normales du tenseur de Reynolds proposé par le modèle. Par ailleurs, l'application de la notion de réalisabilité ne constitue pas en soit une méthode de construction d'un modèle dont les solutions sont correctes. Elle permet juste de s'assurer que ce sont des solutions qui ont physiquement un sens.

Des exemples de modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation sont donnés dans le chapitre suivant où on s'intéresse plus particulièrement au traitement des écoulements homogènes. Ce sont pour la plupart des modèles classiques, dont le comportement par rapport à la limite de réalisabilité est bien connu [159], [132] et est mentionné avec leur expression. La vérification du critère de réalisabilité est également importante pour une bonne stabilité du schéma numérique, comme le montre l'expression des équations de convection-diffusion, abordée au dernier chapitre dans le cadre de la validation d'un modèle du second ordre dans un code résolvant les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles pour des écoulements évoluant en géométrie complexe.





---

## Chapitre 6

# Modélisation classique du tenseur des corrélations pression-déformation

Les champs turbulents homogènes jouent un rôle prépondérant dans la calibration et la validation des modèles de turbulence. Ils présentent deux avantages majeurs :

L'approximation homogène permet de traduire sous une forme simplifiée les effets caractéristiques d'un grand nombre d'écoulements d'intérêt pratique. Le champ moyen est découplé du champ fluctuant, de sorte que l'état de la turbulence n'affecte pas le mouvement moyen. Ce dernier influence par contre l'évolution du champ turbulent de façon directe dans les équations du mouvement. Cette caractéristique permet d'étudier séparément le comportement des modèles de turbulence suivant l'état du champ moyen. Les écoulements homogènes ont été largement étudiés, tant expérimentalement que numériquement, notamment les écoulements de déformations irrotationnelles et les écoulements plans cisailés (Tucker et Reynolds [170], Bardina, Ferziger et Reynolds [5], Lee et Reynolds [83]).

Du point de vue de la modélisation au second ordre, l'approximation homogène simplifie considérablement les équations du mouvement en permettant de négliger les termes de diffusion turbulente; seules restent à considérer les fermetures homogènes du tenseur des corrélations pression-déformation et du tenseur des taux de dissipation. Si l'hypothèse d'homogénéité est souvent la base du développement des modèles de turbulence, elle simplifie également la résolution numérique des équations différentielles, puisqu'il ne s'agit plus que d'un problème aux conditions initiales. Les calculs peuvent s'effectuer simplement avec une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre.

### 6.1 Equations homogènes

Dans le cas d'une turbulence homogène incompressible, les équations du mouvement, décrites par un modèle du second ordre, s'écrivent, en repère éventuellement tournant (voir annexe G):

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} P_{,i} - \bar{V}_k \bar{V}_{i,k} - 2 \varepsilon_{imk} \Omega_m \bar{V}_k \quad (6.1a)$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = P_{ij} + G_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^\nu \quad (6.1b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = P^{\varepsilon 1} + P^{\varepsilon 2} + P^{\varepsilon 4} + G^\varepsilon - E^\varepsilon + \phi^\varepsilon + d^{\nu \varepsilon} \quad (6.1c)$$

avec les notations classiques et

$$G_{ij} = 2[R_{ik}\theta_{jk} + R_{jk}\theta_{ik}] \quad (6.2a)$$

$$G^\varepsilon = 0 \quad (6.2b)$$

où  $\theta_{ik} = \varepsilon_{ijm}\Omega_m$ . Il faut noter que les gradients de vitesse moyenne étant indépendants de leur localisation spatiale, les tenseurs des taux de rotation et de déformation relatifs sont décrits par les équations suivantes :

$$\frac{\partial S_{ij}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}P_{,ij} - S_{ik}S_{kj} - W_{ik}W_{kj} + \theta_{ik}(S_{kj} + W_{kj}) - (S_{ik} - W_{ik})\theta_{kj} \quad (6.3a)$$

$$\frac{\partial W_{ij}}{\partial t} = S_{ik}(W_{jk} - \theta_{jk}) - (W_{ik} - \theta_{ik})S_{kj} + (W_{ik}\theta_{jk} - \theta_{ik}W_{jk}) \quad (6.3b)$$

Le gradient de pression n'intervient pas dans l'équation du tenseur des taux de rotation. Par conséquent, seuls les écoulements turbulents homogènes en présence de rotation du mouvement moyen voient leur taux de rotation relatif évoluer dans le temps.

Les équations du mouvement turbulent sont modélisées de façon classique :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = -R_{ik}\tilde{V}_{aj,k} - R_{jk}\tilde{V}_{ai,k} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + \nu R_{ij,nn} \quad (6.4a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 1}R_{mn}S_{mn}\frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{K} \quad (6.4b)$$

où  $\tilde{V}_{ai,j} = \bar{V}_{i,j} - 2\theta_{ij}$ . Les quantités statistiques sont indépendantes de leur position dans l'espace. Il peut être intéressant de décrire la turbulence à l'aide du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds,  $b_{ij}$ , et les équations du mouvement turbulent deviennent :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -2Kb_{mn}S_{mn} - \varepsilon \quad (6.5a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{ij}}{\partial t} = & -\frac{2}{3}S_{ij} + \left(2b_{mn}S_{mn} + \frac{\varepsilon}{K}\right)b_{ij} \\ & + \bar{\phi}_{ij} - {}^D\bar{\varepsilon}_{ij} - (b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}) - (b_{ik}\tilde{W}_{ajk} + b_{jk}\tilde{W}_{aik}) \end{aligned} \quad (6.5b)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 1}R_{mn}S_{mn}\frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2}\frac{\varepsilon^2}{K} \quad (6.5c)$$

où les tenseurs des corrélations pression-déformation et des taux de dissipation sont adimensionnés par l'énergie cinétique turbulente, suivant :

$$\bar{\phi}_{ij} = \frac{1}{2K}\phi_{ij} \quad (6.6a)$$

$${}^D\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2K}{}^D\varepsilon_{ij} \quad (6.6b)$$

La plupart du temps, le déviateur du tenseur des taux de dissipation est modélisé avec le terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation, soit :

$$\bar{\phi}_{ij}^* = \bar{\phi}_{ij}^{*R} + \bar{\phi}_{ij}^{*S} \quad (6.7)$$

et

$$\overline{\phi}_{ij}^{*R} = 2\overline{V}_{ap,q}(\overline{X}_{iqpj} + \overline{X}_{jqpi}) \quad (6.8a)$$

$$\overline{\phi}_{ij}^{*S} = \overline{\phi}_{ij}^S - D\overline{\varepsilon}_{ij} \quad (6.8b)$$

avec

$$\overline{X}_{ijpq} = \frac{1}{2K} X_{ijpq} \quad (6.9)$$

soit, d'après la description spectrale en série de Fourier d'une turbulence homogène (annexe J),

$$\overline{X}_{ijpq} = \frac{1}{2K} \int \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (6.10)$$

où  $\underline{k}$  désigne le nombre d'onde, et  $\Phi_{ij}$ , le tenseur spectral des corrélations de vitesse. On note

$$\overline{V}_{ap,q} = \overline{V}_{p,q} - \theta_{pq} \quad (6.11)$$

La modélisation du terme rapide s'effectue par l'intermédiaire du tenseur  $X_{ijpq}$ . Il est classiquement supposé s'exprimer en fonction du tenseur d'anisotropie. D'après la théorie des fonctionnelles, la forme la plus générale de cette fermeture s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{X}_{ijpq} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ & + C_3 \delta_{ij} b_{pq} + C_4 \delta_{pq} b_{ij} \\ & + C_5 (\delta_{ip} b_{jq} + \delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip} + \delta_{jp} b_{iq}) \\ & + C_6 \delta_{ij} b_{.pq}^2 + C_7 \delta_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_8 (\delta_{ip} b_{.jq}^2 + \delta_{iq} b_{.jp}^2 + \delta_{jq} b_{.ip}^2 + \delta_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_9 b_{ij} b_{pq} + C_{10} (b_{ip} b_{jq} + b_{iq} b_{jp}) \\ & + C_{11} b_{ij} b_{.pq}^2 + C_{12} b_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_{13} (b_{ip} b_{.jq}^2 + b_{iq} b_{.jp}^2 + b_{jq} b_{.ip}^2 + b_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_{14} b_{.ij}^2 b_{.pq}^2 + C_{15} (b_{.ip}^2 b_{.jq}^2 + b_{.iq}^2 b_{.jp}^2) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Cette expression vérifie l'ensemble des symétries du tenseur  $X_{ijpq}$ , satisfaites dans le cadre d'une turbulence homogène, à savoir :

$$\overline{X}_{ijpq} = \overline{X}_{ijqp} \quad (6.13a)$$

relation donnée par la permutation des dérivées secondes, et

$$\overline{X}_{ijpq} = \overline{X}_{jipq} \quad (6.13b)$$

du fait du caractère homogène de l'écoulement.

Les 15 coefficients de (6.12) ne sont pas tous indépendants. Leur nombre peut être réduit par application des contraintes d'incompressibilité et de normalisation sur le tenseur d'anisotropie. L'incompressibilité impose :

$$\overline{X}_{njnq} = 0 \quad (6.14)$$

ce qui se traduit par trois relations sur les coefficients :

$$C_1 + 4C_2 - 2II C_8 + III(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) = 0 \quad (6.15a)$$

$$C_3 + C_4 + 5C_5 - II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + III(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (6.15b)$$

$$C_6 + C_7 + 5C_8 + C_9 + C_{10} - II(C_{14} + 3C_{15}) = 0 \quad (6.15c)$$

La normalisation sur le tenseur d'anisotropie traduit le fait que le tenseur de Reynolds est une contraction du tenseur d'ordre quatre dans le cas homogène :

$$\overline{X}_{ijpq} = b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (6.16)$$

et doit être vérifié dans la mesure où  $\overline{X}_{ijpq}$  est supposé être représenté par une fonctionnelle dépendant uniquement de  $b_{ij}$ . Cette condition fournit trois équations supplémentaires :

$$3C_1 + 2C_2 - 2II C_6 + 4III C_{13} = \frac{1}{3} \quad (6.17a)$$

$$3C_4 + 4C_5 - 2II(C_{11} + 2C_{13}) + 2III C_{15} = 1 \quad (6.17b)$$

$$3C_7 + 4C_8 + 2C_{10} - 2II(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (6.17c)$$

réduisant le nombre de coefficients indépendants à 9. Arbitrairement, les inconnues du modèle seront :

$$C_5 \quad C_8 \quad C_9 \quad C_{10} \quad C_{11} \quad C_{12} \quad C_{13} \quad C_{14} \quad C_{15} \quad (6.18)$$

La résolution du système conduit à :

$$C_1 = \frac{2}{15} - 2II\left(\frac{5}{3}C_8 + \frac{2}{5}C_9 + \frac{2}{15}C_{10}\right) + \frac{1}{5}III(C_{11} + C_{12} - 6C_{13}) + \frac{4}{15}II^2(C_{14} + 7C_{15}) \quad (6.19a)$$

$$C_2 = -\frac{1}{30} + II\left(\frac{4}{3}C_8 + \frac{1}{5}C_9 + \frac{1}{15}C_{10}\right) - \frac{1}{5}III\left[\frac{3}{2}(C_{11} + C_{12}) + C_{13}\right] - \frac{1}{15}II^2(C_{14} + 7C_{15}) \quad (6.19b)$$

$$C_3 = -\frac{1}{3} - \frac{11}{3}C_5 + II\left(\frac{1}{3}C_{11} + C_{12} + \frac{8}{3}C_{13}\right) - III\left(C_{14} + \frac{1}{3}C_{15}\right) \quad (6.19c)$$

$$C_4 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}C_5 + \frac{2}{3}II(C_{11} + 2C_{13}) - \frac{2}{3}III C_{15} \quad (6.19d)$$

$$C_6 = -\frac{11}{3}C_8 - C_9 - \frac{1}{3}C_{10} + \frac{1}{3}II(C_{14} + 7C_{15}) \quad (6.19e)$$

$$C_7 = -\frac{4}{3}C_8 - \frac{2}{3}C_{10} + \frac{2}{3}II(C_{14} + C_{15}) \quad (6.19f)$$

La correspondance entre la fonctionnelle qui modélise directement le tenseur des corrélations pression-déformation et le modèle obtenu par cette hypothèse de fermeture sur  $X_{ijpq}$  est immédiate. Il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{ij}^{*R} &= [4\{bS\}(C_9 + 2C_{10}) + 2\{b^2S\}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13})] b_{ij} \\ &+ [2\{bS\}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + 4\{b^2S\}(C_{14} + 2C_{15})] {}^D b_{ij}^2 \\ &+ \left[\frac{2}{5} - 8II\left(C_8 + \frac{4}{5}C_9 + \frac{3}{5}C_{10}\right) - \frac{12}{5}III(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - \frac{8}{5}II^2(2C_{14} - C_{15})\right] S_{ij} \\ &+ [-6C_5 + 2II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - 6III(C_{14} + C_{15})][b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}] \\ &+ [-6(C_8 + C_9 + C_{10}) - 2II(C_{14} - C_{15})][b_{ik}^2S_{jk} + b_{jk}^2S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}^2S_{mn}\delta_{ij}] \\ &+ \left[\frac{4}{3} + \frac{14}{3}C_5 - 2II\left(-\frac{1}{3}C_{11} + C_{12} - \frac{4}{3}C_{13}\right) + 2III(C_{14} - \frac{1}{3}C_{15})\right][b_{ik}\overline{W}_{ajk} + b_{jk}\overline{W}_{aik}] \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned}
 &+ \left[ \frac{14}{3} C_8 + 2 C_9 - \frac{2}{3} C_{10} + \frac{2}{3} II (C_{14} - 5 C_{15}) \right] [b_{.ik}^2 \overline{W}_{ajk} + b_{.jk}^2 \overline{W}_{aik}] \\
 &+ [2 (C_{12} - C_{11})] [b_{ik} \overline{W}_{akp} b_{.pj}^2 + b_{.ik}^2 \overline{W}_{apk} b_{jp}]
 \end{aligned}$$

La dépendance des coefficients  $\beta_i$  de l'écriture directe de la fonctionnelle apparaît nettement ici. Il est également évident que si les deux modèles sont tensoriellement semblables, ils ne sont pas équivalents. Ils ne contiennent pas tous les deux exactement la même information. Il n'existe pas de troncature du développement polynômial des coefficients  $\beta_i$  suivant les invariants  $II$  et  $III$ , qui correspond à la forme donnée par la modélisation avec le tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$ . Un tel développement génère un plus grand nombre d'inconnues scalaires que les neuf coefficients qu'il convient de retenir dans le modèle de  $\overline{X}_{ijpq}$  (annexe M).

Le terme lent est quant à lui modélisé de façon directe par une fonctionnelle isotrope dépendant uniquement du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds :

$$\phi_{ij}^{*S} = \varepsilon [\beta_1^S b_{ij} + \beta_2^{S D} b_{.ij}^2] \quad (6.21)$$

soit

$$\overline{\phi}_{ij}^{*S} = [\beta_1^S b_{ij} + \beta_2^{S D} b_{.ij}^2] \quad (6.22)$$

Les paragraphes suivants rappellent l'expression de modèles classiques du terme rapide et du terme lent. Les modèles sont présentés séparément, bien que chaque terme rapide doit être calculé avec le terme lent qui lui est associé par les auteurs.

## 6.2 Modèles classiques du terme rapide

### 6.2.1 Naot, Shavit et Wolfshtein

Le modèle proposé par Naot, Shavit et Wolfshtein [99], dit d'isotropisation de la production (IP), est le plus simple des termes rapides. Il est constitué par un terme proportionnel à la partie sphérique de la production, soit :

$$\overline{\phi}_{ij}^R = -C_2 [P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}] \quad (6.23)$$

soit :

$$\overline{\phi}_{ij}^R = C_2 \left[ \frac{2}{3} S_{ij} + (b_{ik} S_{kj} + b_{jk} S_{ki} - \frac{2}{3} b_{mnn} S_{mn} \delta_{ij}) + (b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}) \right] \quad (6.24)$$

Les coefficients de la fonctionnelle s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 0 \\
 \beta_3 &= \frac{2}{3} C_2 & \beta_4 &= C_2 \\
 \beta_5 &= 0 & \beta_6 &= C_2 \\
 \beta_7 &= 0 & \beta_8 &= 0
 \end{aligned} \quad (6.25)$$

La valeur du coefficient est  $C_2 = 0.6$ .

Le terme lent associé est également linéaire, du même type que celui de Rotta présenté au paragraphe suivant, mais avec une constante différente, soit  $C_1 = 3.6$  au lieu de  $C_1 = 3.0$ . Le tenseur des taux de dissipation est supposé isotrope, et les coefficients du modèle de l'équation de transport du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente, traitée de façon classique, sont  $C_{\varepsilon_1} = 1.45$  et  $C_{\varepsilon_2} = 1.92$ .

### 6.2.2 Launder, Reece et Rodi

Ce modèle (LRR) [74] est la forme la plus générale d'un modèle linéaire homogène ne dépendant que du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. Il a été développé à partir de la modélisation du tenseur du quatrième ordre  $X_{ijpq}$ , vérifiant l'ensemble des contraintes de base, soit les symétries des indices, l'incompressibilité et la normalisation sur  $b_{ij}$ . Ce modèle possède un degré de liberté,  $C_2$ . La formulation proposée satisfait systématiquement la limite du terme rapide d'une turbulence homogène et isotrope, dont la forme exacte a été calculée par Crow [34].

$$\overline{\phi}_{ij}^R = \frac{2}{5} S_{ij} + \frac{9C_2 + 6}{11} (b_{ik} S_{kj} + b_{jk} S_{ki} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}) + \frac{10 - 7C_2}{11} (b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}) \quad (6.26)$$

Les coefficients de la fonctionnelle sont donc :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 0 & \beta_2 &= 0 \\ \beta_3 &= \frac{2}{5} & \beta_4 &= \frac{9C_2 + 6}{11} \\ \beta_5 &= 0 & \beta_6 &= \frac{10 - 7C_2}{11} \\ \beta_7 &= 0 & \beta_8 &= 0 \end{aligned} \quad (6.27)$$

Ce terme rapide est associé au modèle linéaire de Rotta [122] pour le terme lent. La dissipation est modélisée de la même façon que pour le modèle précédent, avec les mêmes coefficients  $C_{\varepsilon 1} = 1.45$  et  $C_{\varepsilon 2} = 1.90$ . Le paramètre  $C_2$  est fixé par Launder, Reece et Rodi à  $C_2 = 0.4$ . Cette valeur a été déterminée en supposant que l'état asymptotique d'un cisaillement constant satisfait l'équilibre  $P = \varepsilon$ , hypothèse mise en défaut par les travaux de Speziale et Mac Giolla Muirich [158].

Il est désormais bien connu que l'approximation linéaire du terme rapide ne satisfait pas la contrainte de réalisabilité lorsque la turbulence approche un état 2C [89]. C'est pourquoi des fermetures non-linéaires ont été proposées par la suite.

### 6.2.3 Speziale, Sarkar et Gatski

La forme du modèle de Speziale, Sarkar et Gatski [159], (SSG), a été établie par une modélisation directe du tenseur des corrélations pression-déformation. Il doit être associé au terme lent présenté au paragraphe suivant. La partie rapide s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{ij}^R &= C_1^* b_{mn} S_{mn} b_{ij} \\ &+ \frac{1}{2} (C_3 - \sqrt{b_{mn} b_{mn}} C_3^*) S_{ij} + \frac{1}{2} C_4 (b_{ik} S_{kj} + b_{jk} S_{ki} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}) \\ &+ \frac{1}{2} C_5 (b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}) \end{aligned} \quad (6.28)$$

Il est évident que les coefficients de la fonctionnelle s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= C_1^* b_{mn} S_{mn} & \beta_2 &= 0 \\ \beta_3 &= \frac{1}{2} (C_3 - \sqrt{b_{mn} b_{mn}} C_3^*) & \beta_4 &= \frac{1}{2} C_4 \\ \beta_5 &= 0 & \beta_6 &= \frac{1}{2} C_5 \\ \beta_7 &= 0 & \beta_8 &= 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

et les paramètres donnés par les auteurs sont :

$$C_1^* = 1.8 \quad C_3 = \frac{4}{5} \quad C_3^* = 1.3 \quad C_4 = 1.25 \quad C_5 = 0.4 \quad (6.30)$$

Le tenseur des taux de dissipation est supposé isotrope, et les coefficients de l'équation de transport du taux de dissipation retenus sont  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$  et  $C_{\varepsilon 2} = 1.83$ .

Le modèle de Speziale, Sarkar et Gatski est non-linéaire, parfois appelé quasi-linéaire, dans la mesure où les non-linéarités portent sur les coefficients de la fonctionnelle, et non ses composantes tensorielles. La calibration des quatre coefficients, résultant du fait que la contrainte de normalisation n'a pas été imposée ici, est effectuée de façon à vérifier les limites de stabilité d'un écoulement cisailé en présence d'une rotation orthogonale. Le modèle ne vérifie pas non plus entièrement les critères de réalisabilité, tout comme LRR.

#### 6.2.4 Fu, Launder et Tselepidakis

Le principe de construction du modèle de Fu, Launder et Tselepidakis [47] (FLT) est le même que celui de Launder, Reece et Rodi [74], mais la fonctionnelle de  $X_{ijpq}$  est étendue jusqu'à sa forme complète. Le modèle du terme rapide résultant est cubique, et s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \overline{\phi}_{ij}^R &= \frac{2}{5} S_{ij} \\
 &+ \frac{3}{5} [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &+ \frac{2}{5} [b_{.ik}^2 S_{jk} + b_{.jk}^2 S_{kj} - 2 b_{im} S_{mn} b_{nj} - 3 b_{mn} S_{mn} b_{ij}] \\
 &+ (\frac{13}{15} - 16 r II) [b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}] \\
 &+ \frac{2}{5} [b_{.ik}^2 \overline{W}_{ajk} + b_{.jk}^2 \overline{W}_{aik}] \\
 &+ 24 r [b_{ik} \overline{W}_{akp} b_{.pj}^2 + b_{ik}^2 \overline{W}_{apkb_{jp}}]
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Ce qui, compte tenu des relations entre les extensions données par le théorème de Cayley-Hamilton, correspond aux coefficients suivants pour la fonctionnelle écrite sous la forme minimale choisie :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -2 b_{mn} S_{mn} & \beta_2 &= 0 \\
 \beta_3 &= \frac{2}{5} + \frac{4}{5} II & \beta_4 &= \frac{3}{5} \\
 \beta_5 &= \frac{16}{5} & \beta_6 &= \frac{13}{15} - 16 r II \\
 \beta_7 &= \frac{2}{5} & \beta_8 &= 24 r
 \end{aligned} \tag{6.32}$$

avec  $r = 0.7$ .

Ce terme est modélisé avec un tenseur des taux de dissipation anisotrope :

$$\varepsilon_{ij} = 2 \varepsilon \left[ (1 - \sqrt{F}) b_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right] \tag{6.33}$$

Il est clair que le déviateur de ce tenseur peut être regroupé avec la partie lente du tenseur des corrélations pression-déformation, ce qui donne la contribution suivante aux coefficients du terme lent :

$$\beta_1^S = 2 (1 - \sqrt{F}) \quad \beta_2^S = 0 \tag{6.34}$$

Le terme lent associé à ce modèle, proposé par Fu, Launder et Tselepidakis [47] est décrit au paragraphe suivant. L'équation de transport du taux de dissipation est quant à elle de forme classique, avec  $C_{\varepsilon 1} = 1.45$  et  $C_{\varepsilon 2} = 1.90$ .

Ce terme rapide, cubique, ne possède qu'un degré de liberté. Le modèle choisi pour  $X_{ijpq}$  satisfait les contraintes de base et l'approche 2C de la limite de réalisabilité.



### 6.2.5 Shih et Lumley

Le modèle de Shih et Lumley [130] (SL) est quadratique, avec, comme pour le modèle SSG par rapport au modèle LRR des coefficients qui dépendent des invariants du tenseur d'anisotropie de sorte qu'il s'agit en fait d'une troncature cubique de la fonctionnelle classique. Ce modèle est donc parfois dit quasi-quadratique. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{ij}^R &= \frac{2}{5} S_{ij} \\ &+ 6 \alpha_5 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \frac{2}{5} [b_{ik}^2 S_{jk} + b_{jk}^2 S_{kj} - 2 b_{im} S_{mn} b_{nj} - 3 b_{mn} S_{mn} b_{ij}] \\ &+ \frac{2}{3} (2 - 7 \alpha_5) [b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}] \\ &+ \frac{2}{5} [b_{ik}^2 \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^2 \overline{W}_{aik}] \end{aligned} \quad (6.35)$$

ce qui, après application du théorème de Cayley-Hamilton, donne les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -2 b_{mn} S_{mn} & \beta_2 &= 0 \\ \beta_3 &= \frac{2}{5} I + \frac{4}{5} II & \beta_4 &= 6 \alpha_5 \\ \beta_5 &= \frac{6}{5} I^2 & \beta_6 &= \frac{2}{3} (2 - 7 \alpha_5) \\ \beta_7 &= \frac{2}{5} I^3 & \beta_8 &= 0 \end{aligned} \quad (6.36)$$

avec

$$\alpha_5 = \frac{1}{10} (1 + 0.8 \sqrt{F}) \quad (6.37)$$

La dissipation est supposée isotrope et les coefficients de l'équation du taux de dissipation sont modifiés pour tenir compte du nombre de Reynolds turbulent :

$$C_{\varepsilon 1} = 1.2 \quad (6.38a)$$

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{7}{5} + 0.49 \exp\left(2.83 \frac{1}{\sqrt{R_t}}\right) [1 - 0.33 \ln(1 - 55 II)] \quad (6.38b)$$

où

$$R_t = \frac{4}{9} \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (6.39)$$

Le terme lent classique associé est celui de Lumley [89], décrit au paragraphe suivant.

Ce modèle vérifie la limite de réalisabilité 2C.

### 6.2.6 Ristorcelli, Lumley et Abid

Le modèle développé relativement récemment par Ristorcelli, Lumley et Abid [116], (RLA), est construit de façon à vérifier la contrainte de réalisabilité proposée par Lumley sur  $X_{ijpq}$ . La mise en œuvre des fermetures présentées ici n'est pas détaillée. Il est cependant intéressant de noter que la contrainte de réalisabilité jointe [116], ainsi qu'une condition proposée pour satisfaire le principe d'indifférence matérielle dans la limite bidimensionnelle sont également utilisées pour déterminer l'ensemble des coefficients. Cette dernière condition tend à appliquer le théorème de Taylor-Proudman dans le cas d'une turbulence en rotation (annexe G). Les coefficients sont les suivants :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2 (C_6 b_{mn} S_{mn} + C_4''' b_{mn}^2 S_{mn}) & \beta_2 &= 2 C_4''' b_{mn} S_{mn} \\ \beta_3 &= 2 (C_3 - 2 II C_3'' + 3 III C_3''') & \beta_4 &= 2 C_4 \\ \beta_5 &= 2 C_7 & \beta_6 &= -2 C_5 \\ \beta_7 &= -2 C_8 & \beta_8 &= -2 C_9 \end{aligned} \quad (6.40)$$

Les coefficients  $C_i$  s'écrivent sous la forme :

$$C_i = B_i + F A_i^c \quad (6.41)$$

où les coefficients  $B_i$  satisfont les contraintes de base, et les coefficients  $A_i^c$  permettent aux  $C_i$  de satisfaire l'équilibre asymptotique d'un écoulement cisailé. En posant

$$II_d = \frac{(1 + 3 II)}{(7 + 12 II)} \quad (6.42)$$

il vient :

$$C_3 = B_3 - \frac{2}{5} F (10 A_8^c + 3 A_9^c + A_{10}^c) II - \frac{1}{5} F (A_{11}^c + A_{12}^c + 14 A_{13}^c) III \quad (6.43a)$$

$$C_3'' = B_3'' + F (A_9^c + A_{10}^c) \quad (6.43b)$$

$$C_3''' = B_3''' - \frac{1}{3} F (A_{11}^c + A_{12}^c + 2 A_{13}^c) \quad (6.43c)$$

$$C_4 = B_4 + F [-3 A_5^c + II (A_{11}^c + A_{12}^c + 4 A_{13}^c)] \quad (6.43d)$$

$$C_4''' = B_4''' + F (A_{11}^c + A_{12}^c + 4 A_{13}^c) \quad (6.43e)$$

$$C_5 = B_5 + F [-\frac{7}{3} A_5^c + \frac{1}{3} II (-A_{11}^c + 3 A_{12}^c + 4 A_{13}^c)] \quad (6.43f)$$

$$C_6 = B_6 + F (2 A_9^c + 4 A_{10}^c) \quad (6.43g)$$

$$C_7 = B_7 - 3 F (A_8^c + A_9^c + A_{10}^c) \quad (6.43h)$$

$$C_8 = B_8 - \frac{1}{3} F (7 A_8^c + 3 A_9^c - A_{10}^c) \quad (6.43i)$$

$$C_9 = B_9 + F (A_{11}^c - A_{12}^c) \quad (6.43j)$$

Les coefficients  $A_i^c$  sont déterminés par trois contraintes. La première est donnée par la condition d'incompressibilité, qui impose :

$$A_1^c + 4 A_2^c - 2 A_8^c II + III (A_{11}^c + A_{12}^c + 2 A_{13}^c) = 0 \quad (6.44a)$$

$$A_3^c + A_4^c + 5 A_5^c - II (A_{11}^c + A_{12}^c + 4 A_{13}^c) = 0 \quad (6.44b)$$

$$A_6^c + A_7^c + 5 A_8^c + A_9^c + A_{10}^c = 0 \quad (6.44c)$$

La seconde condition est imposée par la contrainte de normalisation sur  $b_{ij}$  :

$$3 A_1^c + 2 A_2^c - 2 A_6^c II + 4 A_{13}^c III = 0 \quad (6.45a)$$

$$3 A_4^c + 4 A_5^c - 2 II (A_{11}^c + 2 A_{13}^c) = 0 \quad (6.45b)$$

$$3 A_7^c + 4 A_8^c + 2 A_{10}^c = 0 \quad (6.45c)$$

La dernière condition prend en compte la modélisation linéaire du terme lent, associé au terme rapide, pour vérifier l'état asymptotique d'un cisaillement pur. Elle donne les relations suivantes :

$$A_5^c = -0.29 - 0.06 (A_{10}^c - A_8^c) \quad (6.46a)$$

$$A_{11}^c = -3.6 + 5 A_{10}^c - 2 A_{13}^c - 12.7 A_8^c - 3.8 A_9^c \quad (6.46b)$$

$$A_{12}^c = -24.5 - 44.2 A_{10}^c - 2 A_{13}^c + 29 A_8^c - 8 A_9^c \quad (6.46c)$$

avec

$$A_8^c = 0.8 \quad A_9^c = -1.0 \quad A_{10}^c = -0.01 \quad A_{13}^c = 0. \quad (6.47)$$

La résolution de ce système détermine entièrement les coefficients  $A_i^c$ . Les coefficients  $B_i$  sont donnés par :

$$B_3 = \frac{2}{27} \frac{1}{II_d} [41 + 42 II - 0.1 F (221 + 420 II)] \quad (6.48a)$$

$$B_3'' = -\frac{14}{3} \frac{1}{II_d} (1 + 3 II) + 0.6 F \frac{1}{(1 + 3 II)} \quad (6.48b)$$

$$B_3''' = \frac{1}{3} \frac{1}{II_d} (55 + 84 II) \quad (6.48c)$$

$$B_4 = \frac{3}{II_d} - 0.9 F \frac{1}{(1 + 3 II)} \quad (6.48d)$$

$$B_4''' = -\frac{9}{II_d} \quad (6.48e)$$

$$B_5 = -\frac{1}{30} (10 + 21 F) \frac{1}{(1 + 3 II)} \quad (6.48f)$$

$$B_6 = -18 \frac{II}{II_d} + 3 F \frac{1}{(1 + 3 II)} \quad (6.48g)$$

$$B_7 = -\frac{9}{II_d} - 1.8 F \frac{1}{(1 + 3 II)} \quad (6.48h)$$

$$B_8 = \frac{1}{5} (3 F - 5) \frac{1}{(1 + 3 II)} \quad (6.48i)$$

$$B_9 = -\frac{3}{(1 + 3 II)} \quad (6.48j)$$

L'équation d'évolution du taux de dissipation est modélisée de façon classique, avec les constantes  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$  et  $C_{\varepsilon 2} = 1.83$ .

## 6.3 Modèles classiques du terme lent

### 6.3.1 Rotta

Le modèle proposé par Rotta [122] est linéaire, et donc proportionnel au tenseur d'anisotropie :

$$\overline{\phi}_{ij}^S = -C_1 b_{ij} \quad (6.49)$$

avec  $C_1 = 3.0$ . Cette formulation correspond au premier terme du développement de la fonctionnelle isotrope ne dépendant que du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, avec les coefficients suivants :

$$\beta_1^S = -C_1 \quad \beta_2^S = 0 \quad (6.50)$$

Ce modèle est calculé avec LRR. Bien qu'il ne fournisse pas de solution qui ne soit pas physique, il ne permet pas à la turbulence d'atteindre un état 2C.

### 6.3.2 Lumley

Les non-linéarités peuvent être introduites dans le terme lent par l'intermédiaire des coefficients ou du terme quadratique de la fonctionnelle. Le modèle proposé par Lumley [89] est quasi-linéaire, et s'écrit :

$$\overline{\phi}_{ij}^S = -\beta b_{ij} - \gamma^D b_{.ij}^2 \quad (6.51)$$

avec

$$\beta = 2 + \frac{F}{9} \exp\left(-\frac{7.77}{\sqrt{R_t}}\right) \left[\frac{72}{\sqrt{R_t}} + 80.1 \ln(1 + 62.4(-II + 2.3 III))\right] \quad (6.52a)$$

$$\gamma = 0 \quad (6.52b)$$

et par définition,  $R_t = 4K^2/9\nu\varepsilon$ . On rappelle que le  $^D b_{.ij}^2$  désigne le déviateur  $b_{.ij}^2 + 2/3 II \delta_{ij}$ . Cette fonctionnelle correspond donc aux coefficients

$$\beta_1^S = -\beta \quad \beta_2^S = -\gamma \quad (6.53)$$

Ce modèle a été calibré sur les expériences de Comte-Bellot et Corrsin [28] pour des situations où les structures de la turbulence sont de type disque, soit  $III < 0$ .

### 6.3.3 Sarkar et Speziale

Le modèle de Sarkar et Speziale [124] possède des coefficients constants avec la fonctionnelle quadratique. Les coefficients ont été ajustés par l'étude du système dynamique des invariants du tenseur d'anisotropie dans la cadre d'un écoulement homogène de retour vers l'isotropie. Il s'écrit :

$$\overline{\phi}_{ij}^S = -C_1 b_{ij} + 3(C_1 - 2)^D b_{.ij}^2 \quad (6.54)$$

avec  $C_1 = 3.4$ . Bien que ce modèle satisfasse les conditions de réalisabilité dans le plan des invariants, il ne permet pas, tout comme le modèle de Rotta, de décrire un état 2C de la turbulence, comme c'est le cas au voisinage immédiat de parois. Ce modèle est associé au terme rapide de Sarkar, Speziale et Gatski [159].

### 6.3.4 Fu, Launder et Tselepidakis

Le terme lent du modèle de Fu, Launder et Tselepidakis [47], incluant le déviateur du tenseur des taux de dissipation, s'écrit :

$$\overline{\phi}_{ij}^S = -2 C_1 \sqrt{F} [b_{ij} + \gamma^D b_{.ij}^2] - 2(1 - \sqrt{F}) b_{ij} \quad (6.55)$$

et correspond donc aux coefficients :

$$\beta_1^S = -2 C_1 \sqrt{F} - 2(1 - \sqrt{F}) \quad \beta_2^S = -2 \gamma C_1 \sqrt{F} \quad (6.56)$$

avec  $C_1 = -60 II$  et  $\gamma = 1.2$ .

Ce modèle a été établi pour permettre d'approcher l'état réalisable 2C.

### 6.3.5 Ristorcelli, Lumley et Abid

Le terme lent, qui inclue la modélisation du déviateur du tenseur des taux de dissipation, associé au modèle de Ristorcelli, Lumley et Abid [116] est du même type que celui de Lumley :

$$\overline{\phi}_{ij}^S = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S D b_{ij}^2 \quad (6.57)$$

avec

$$\beta_1^S = -2 + 31 II \sqrt{F} \quad \beta_2^S = 0 \quad (6.58)$$

Par simplicité, les termes non-linéaires ne sont pas pris en compte, et la valeur de  $\beta_1^S$  permet de vérifier les limites isotropes  $\beta_1^S = -2$  et asymptotique d'un cisaillement pur  $\beta_1^S = -3.4$ .

## 6.4 Cas tests homogènes

Les performances des fermetures homogènes peuvent être comparées sur une série d'écoulements turbulents homogènes et incompressibles présentant des caractéristiques distinctes. Le découpage du tenseur des corrélations pression-déformation en parties lente et rapide est une écriture justifiée dans le cas homogène par la forme de l'équation de Poisson pour la pression, mais ne correspond pas à deux contributions bien distinctes, ce qui dans le cas général ne justifie pas de regarder leurs comportements de façon séparée (Speziale, Gatski et Sarkar [156]). Les modèles homogènes des termes rapide et lent peuvent cependant être testés séparément, à l'aide d'écoulements qui traduisent de façon prépondérante les phénomènes physiques pour lesquels chacun de ces termes est censé représenter le tenseur des corrélations pression-déformation. Ainsi, il est justifié de comparer les modèles du terme rapide lorsque la turbulence est soumise à des distorsions rapides du champ moyen, et ceux du terme lent pour des écoulements qui, en l'absence de déformation moyenne, reviennent vers un état turbulent isotrope.

Les tests homogènes sont par conséquent de trois types, selon que l'écoulement est placé dans la limite de distorsion rapide, qu'il traduise une relaxation de la turbulence vers l'isotropie, ou qu'il se situe dans un état intermédiaire.

Les expériences de relaxation font partie des cas tests pour lesquels la turbulence est initialement anisotrope. Elles nécessitent de connaître entièrement l'ensemble des variables initiales nécessaires pour le niveau de fermeture utilisé, soit, au minimum, les composantes du tenseur de Reynolds et le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente pour les modèles du second ordre. Elles peuvent être classées suivant la façon dont cet état initial anisotrope a été obtenu, en particulier selon qu'il provienne ou non de l'application d'une distorsion rapide à un état turbulent initialement isotrope.

L'avantage d'une expérience dont la situation initiale est isotrope est le fait que toutes les quantités statistiques nécessaires sont accessibles, analytiquement, pourvu que les valeurs initiales de l'énergie cinétique turbulente et de son taux de dissipation soient connues. L'ensemble des cas tests classiques de distorsion homogène s'effectue à partir d'une turbulence initialement isotrope. Ils peuvent être scindés en deux catégories :

- La première concerne les déformations irrotationnelles, dans lesquelles se distinguent classiquement la contraction axisymétrique, l'expansion axisymétrique et la déformation plane. Ces trois modes de déformation conduisent à des structures turbulentes très différentes. On dispose de calculs de simulations directes effectués par Lee et Reynolds [83] et de solutions analytiques dans le cadre de l'approximation de distorsion rapide (annexe K), données également par Lee [81].

- La seconde regroupe les écoulements comprenant un effet de rotation moyenne, éventuellement dû à une rotation des axes du repère. Le comportement d'un écoulement de cisaillement pur avec ou sans rotation a été calculé par des simulations de larges structures par Bardina, Ferziger et Reynolds [5]. Kassinos et Reynolds [67] en donnent également les solutions de distorsion rapide. Des calculs de rotation pure appliquée à une turbulence initialement axi-symétrique ne sont disponibles que dans le cadre de la théorie de distorsion rapide (annexe K).

D'une façon générale, il est intéressant d'exprimer les gradients de vitesse moyenne sous une forme adimensionnelle. Le paramètre caractéristique de l'intensité de la déformation du mouvement moyen sera noté  $S$ . Il permet de comparer chacune des distorsions appliquées pour un même temps adimensionnel défini par :

$$t^* = S t \quad (6.59)$$

à l'exception de l'étude en rotation pure, où le temps caractéristique de la distorsion est donné par :

$$t^* = \Omega t \quad (6.60)$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{\partial W_{ij}^*}{\partial t^*} = S_{ik}^* (W_{jk}^* - R_o \theta_{jk}^*) - (W_{ik}^* - R_o \theta_{ik}^*) S_{kj}^* + (W_{ik}^* R_o \theta_{jk}^* - R_o \theta_{ik}^* W_{jk}^*) \quad (6.61a)$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t^*} = -R_{ik} (\bar{V}_{aj,k}^* - 2 R_o \theta_{jk}^*) - R_{jk} (\bar{V}_{ai,k}^* - 2 R_o \theta_{ik}^*) \quad (6.61b)$$

$$+ \phi_{ij}^R(R_{mn}, S_{mn}^*, W_{amn}^*) + \phi_{ij}^S(R_{mn}, \varepsilon/S, R_t) - \varepsilon_{ij}(R_{mn}, \varepsilon/S, R_t)$$

$$\frac{\partial(\varepsilon/S)}{\partial t^*} = -C_{\varepsilon 1} R_{mn} S_{mn}^* \frac{(\varepsilon/S)}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon/S)^2}{K} \quad (6.61c)$$

Il suffit de remplacer  $\varepsilon$  par  $(\varepsilon/S)$ , et  $\theta_{ij}$  par  $R_o \theta_{ij}$ , avec  $R_o = \Omega/S$  pour que les équations du mouvement aient une forme similaire aux équations dimensionnelles. Les notations étoilées ne sont pas conservées dans la suite de ce chapitre.

Le paramètre adimensionnel caractéristique du temps du mouvement turbulent est défini par :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{S K} \quad (6.62)$$

Il permet à lui seul de caractériser les différentes distorsions suivant leur intensité.

Dans le cas d'une turbulence homogène, enfin, le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente s'écrit directement en fonction de la vorticité et de la viscosité dynamique par :

$$\varepsilon = \nu \omega^2 \quad (6.63)$$

ce qui permet d'accéder au nombre de Reynolds de l'écoulement, évalué par :

$$Re = \frac{U_\infty L_\infty}{\nu} \quad (6.64)$$

### 6.4.1 Déformations irrotationnelles

L'intensité de la déformation du mouvement moyen définie par Lee et Reynolds [83] est

$$S_d = \sqrt{\frac{1}{2} S_{mn} S_{mn}} \quad (6.65)$$

et le paramètre caractéristique du temps turbulent est donné d'après les auteurs par :

$$S^* = 2 \frac{K}{\varepsilon} S_d \quad (6.66)$$

soit

$$\tau = 2 \frac{S}{S_d} \frac{1}{S^*} \quad (6.67)$$

Les simulations de Lee et Reynolds sont effectuées pour différentes valeurs de  $S^*$ , couvrant les écoulements de distorsion plane rencontrés dans les situations expérimentales comme celles de Tucker et Reynolds [170] ou Mills et Corrsin [97], et les écoulements satisfaisant les conditions de distorsion rapide.

### Déformations axisymétriques

Le gradient de vitesse moyenne, identique au tenseur des taux de déformation est le suivant, conformément aux configurations choisies par Lee et Reynolds [83] :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} S & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} S \end{bmatrix} \quad (6.68)$$

où le paramètre caractéristique de l'intensité de la déformation du mouvement moyen est positif dans le cas d'une contraction et négatif pour une expansion. Les adimensionnalisations effectuées conduisent à

$$|S| = \frac{2}{\sqrt{3}} S_d \quad (6.69)$$

et donc

$$\tau = \sqrt{3} \frac{1}{S^*} \quad (6.70)$$

Bien que ces deux modes ne diffèrent que par le signe de  $S$ , ils entraînent deux comportements bien distincts de l'écoulement turbulent. L'évolution des anisotropies du tenseur de Reynolds dépend cependant dans les deux cas du paramètre de déformation totale  $c$ , défini par :

$$c = e^{|S|t} \quad (6.71)$$

et non du taux de déformation.

#### *Contraction axisymétrique*

Les filaments vorticitaires de toute taille, initialement orientés de façon aléatoire, de la turbulence isotrope, ont tendance à s'aligner et s'étirer dans la direction positive de la déformation, et à décroître dans les directions latérales. La turbulence s'organise par conséquent, pour des

grandes valeurs du taux de déformation totale, en des structures de type cigare, de section circulaire. Les composantes du tenseur des corrélations pression-déformation ont par contre tendance dans l'ensemble, à décroître sous l'effet de la contraction axisymétrique. Le comportement de la turbulence dans ce cas a été décrit par Lee [81] dans le cadre de la théorie de distorsion rapide, où il est clair que l'orientation des filaments dépend uniquement du taux de déformation totale imposé; plus le taux est élevé, plus l'alignement des structures avec l'axe de la déformation positive est prononcée. L'hypothèse de distorsion rapide permet en outre de déterminer un état asymptotique, de type 3D-2C autour de cet axe de symétrie. Cet état est atteint à partir de  $c = 3.0$  (Lee [81]).

Parmi les calculs de Lee et Reynolds [83], deux cas tests ont été retenus. Les paramètres des auteurs sont les suivants :

	$S_d$	$S^*$	$\varepsilon_0$	$K_0$	$\omega_0$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$
AXL	8.66	9.653	0.2117	0.11795	7.0167	0	0	0	0	0	0
AXM	86.6	96.53	0.2117	0.11795	7.0167	0	0	0	0	0	0

soient :

	$ S $	$\tau_0$	$\varepsilon_0$	$K_0$	$Re$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$
AXL	10.00	0.179	0.2117	0.11795	232.56	0	0	0	0	0	0
AXM	100.	0.0179	0.2117	0.11795	232.56	0	0	0	0	0	0

Le premier cas test, AXL, fournit une évolution de l'énergie cinétique turbulente voisine de celle des expériences de Mills et Corrsin [97]. La deuxième, AXM, correspond à une déformation en distorsion rapide.

Les figures (6.1) à (6.4) montrent l'évolution de l'énergie cinétique turbulente et du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds pour AXL données par les différents modèles. Pour plus de lisibilité, ces courbes sont regroupées en deux séries de graphes, le premier concernant les formulations tensoriellement linéaires (IP, LRR, SSG) et le second les formulations non-linéaires (FLT, SL, RLA). Il est clair que le modèle SSG n'apporte pas d'amélioration sensible des prédictions par rapport au modèle LRR. Le modèle FLT a également sensiblement le même comportement, alors que le modèle proposé par RLA est nettement inférieur à ces prédictions. Le comportement du modèle de SL est indéniablement le meilleur sur ce cas. Les figures qui suivent montrent les évolutions des anisotropies dans le plan des invariants, pour chacun des modèles. Tous évoluent sur la limite de contraction axisymétrique, et montrent clairement les intensités des anisotropies atteintes.

Les conclusions sont exactement du même type pour le calcul AXM. Les figures de (6.11) à (6.14) montrent à nouveau les évolutions des anisotropies et de l'énergie cinétique turbulente. Les modèles sont comparés aux solutions analytiques de distorsion rapide.

D'une façon générale sur ce cas test, le seul modèle qui soit capable de prédire correctement le niveau d'anisotropie du tenseur de Reynolds est le modèle SL. L'ensemble des autres modèles sous-estime le niveau d'anisotropie imposé par la contraction axisymétrique. Il faut noter que le modèle RLA, bien que parmi les plus récents a un comportement moins bon que les modèles LRR ou SSG.



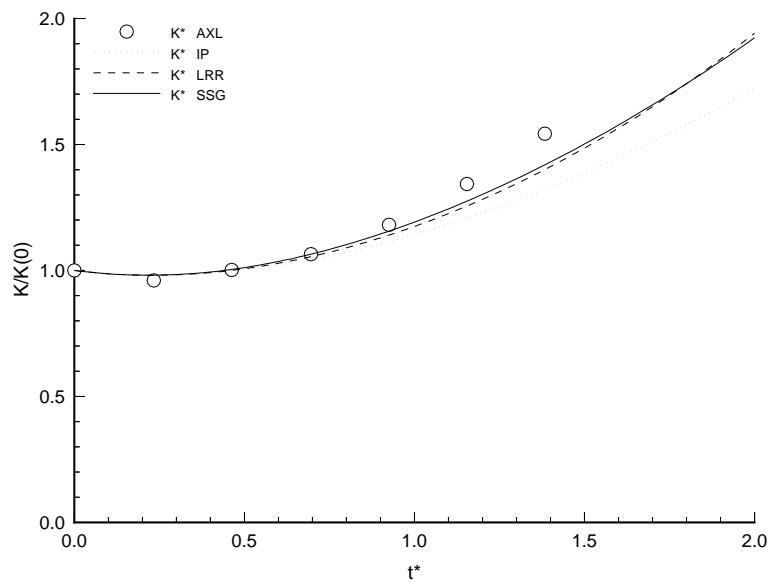


FIG. 6.1: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la contraction axisymétrique AXL.

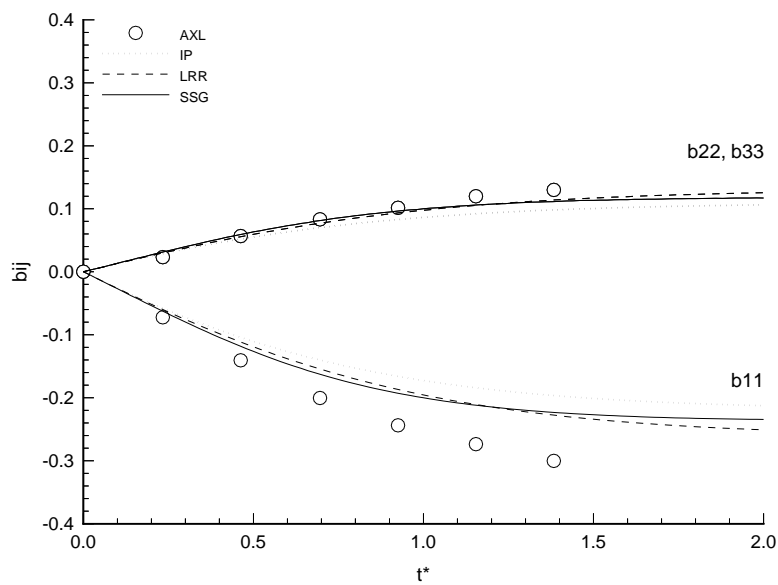


FIG. 6.2: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la contraction axisymétrique AXL.

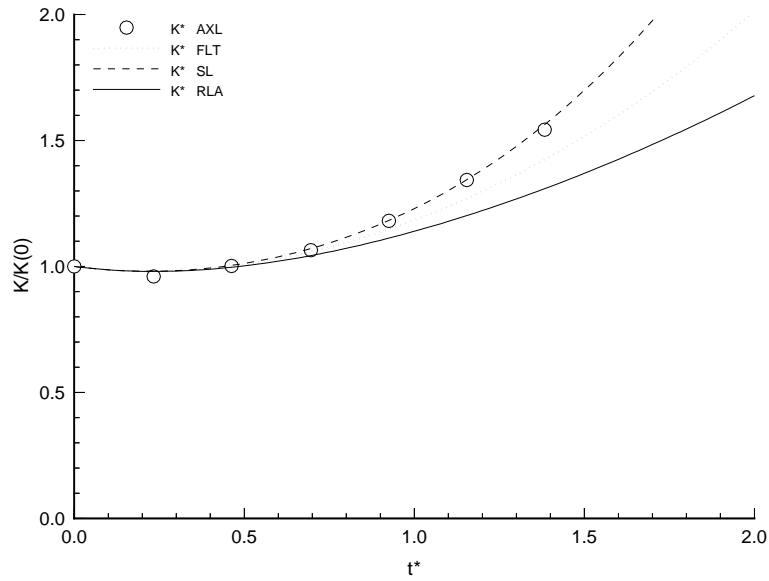


FIG. 6.3: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la contraction axisymétrique AXL.

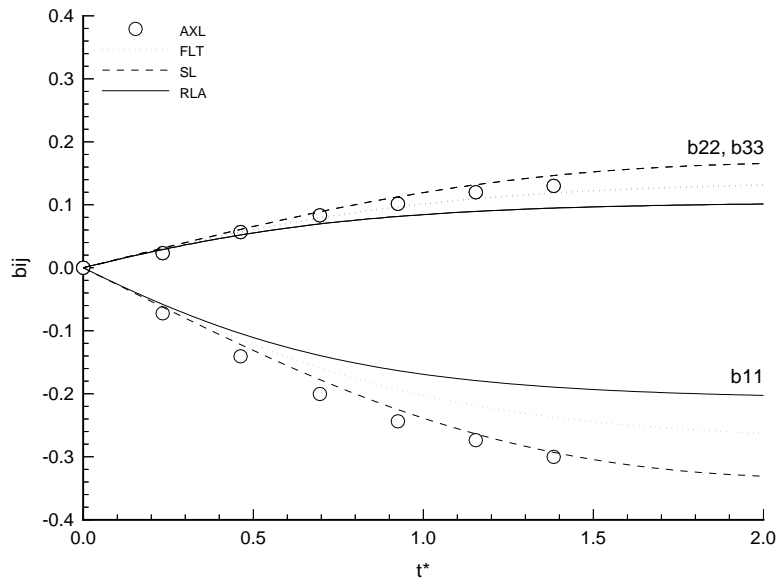


FIG. 6.4: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la contraction axisymétrique AXL.

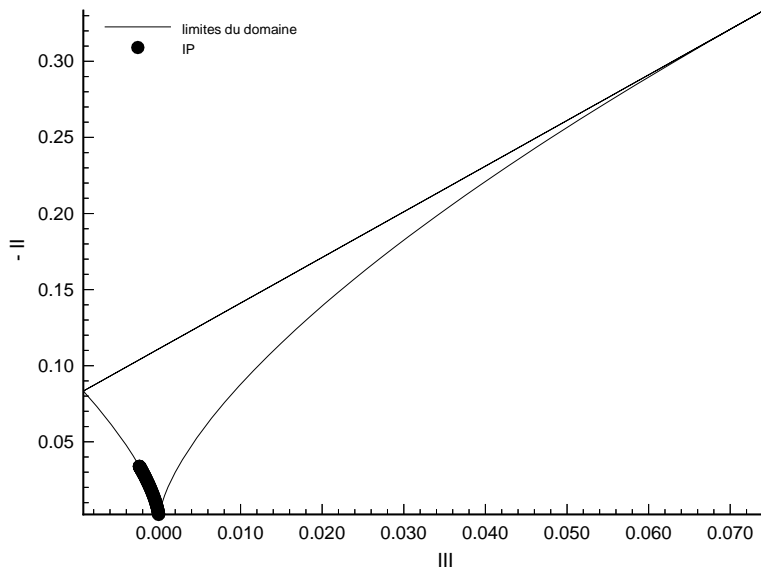


FIG. 6.5: *Contraction axisymétrique AXL.*

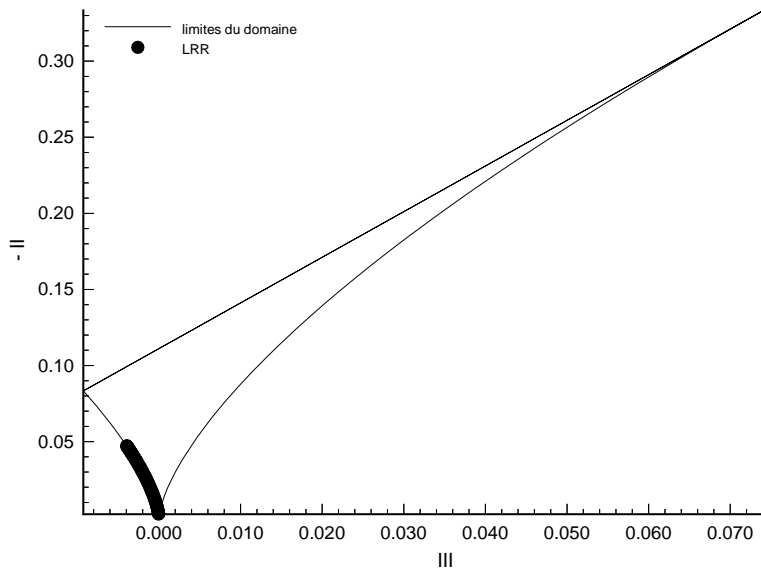
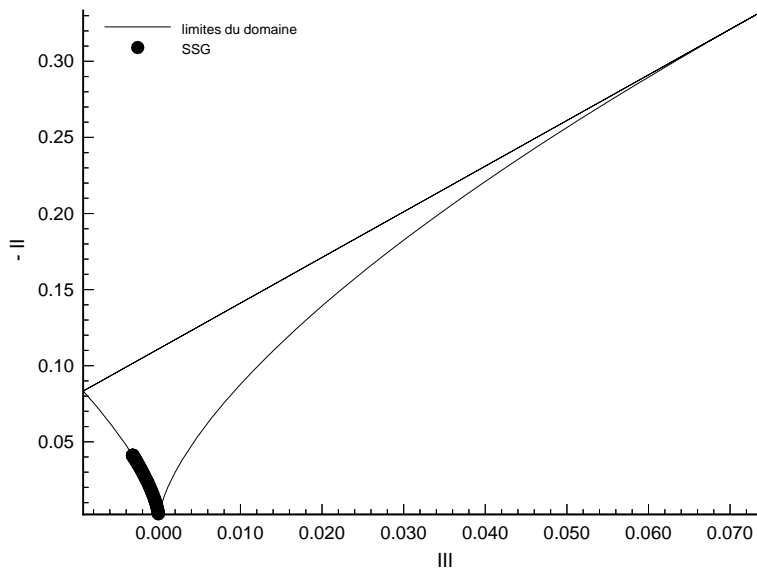
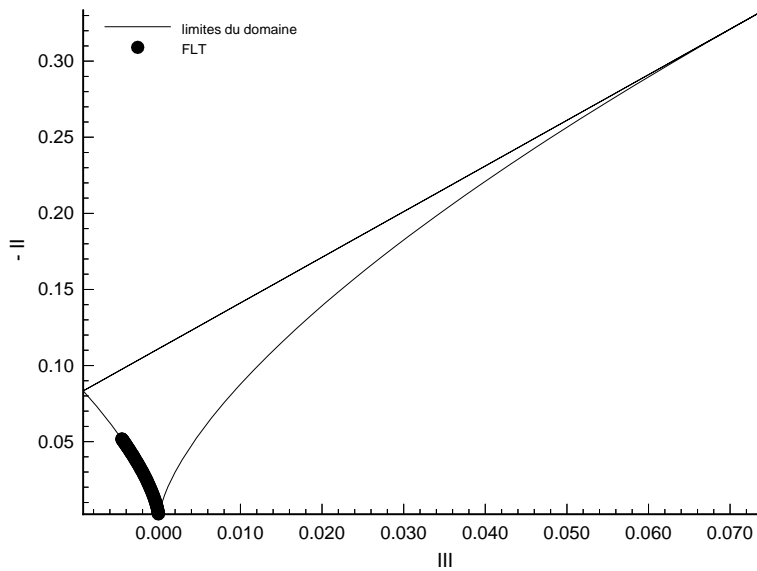


FIG. 6.6: *Contraction axisymétrique AXL.*

FIG. 6.7: *Contraction axisymétrique AXL.*FIG. 6.8: *Contraction axisymétrique AXL.*

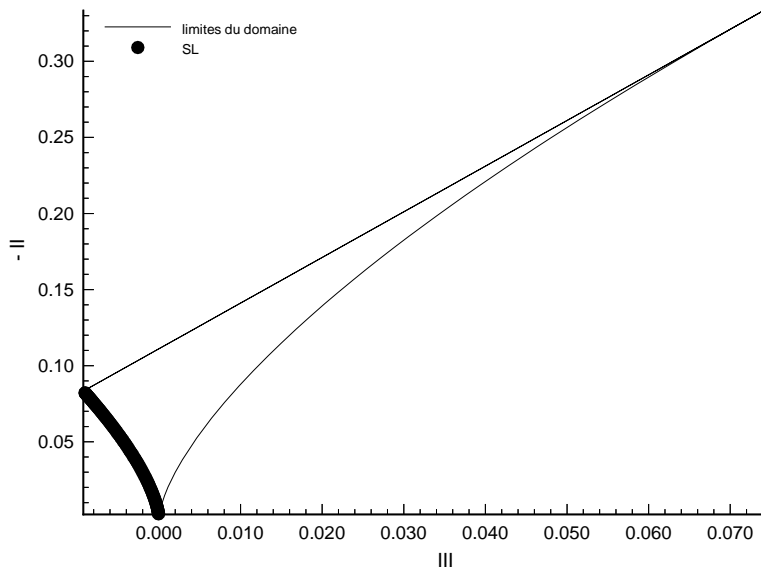


FIG. 6.9: *Contraction axisymétrique AXL.*

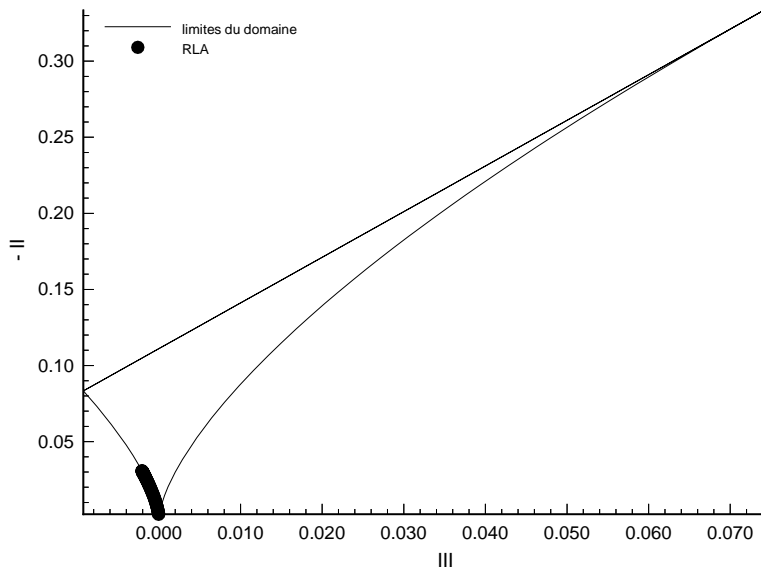


FIG. 6.10: *Contraction axisymétrique AXL.*

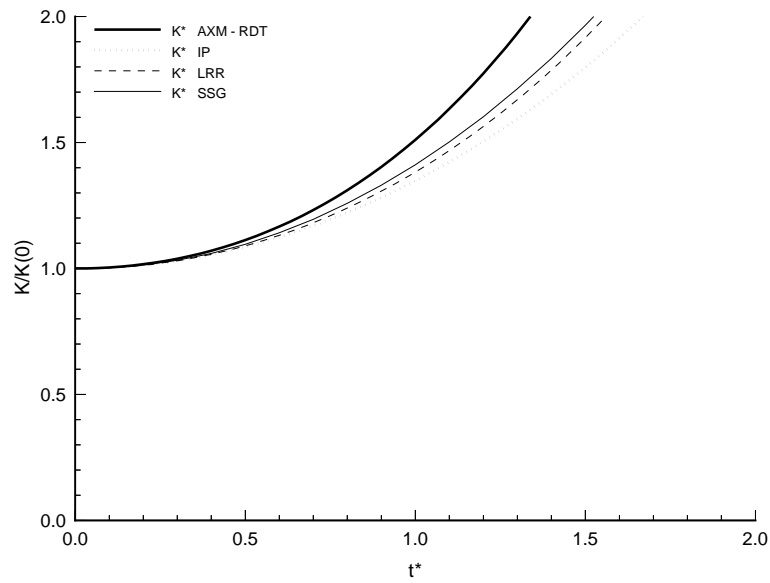


FIG. 6.11: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la contraction axisymétrique AXM.

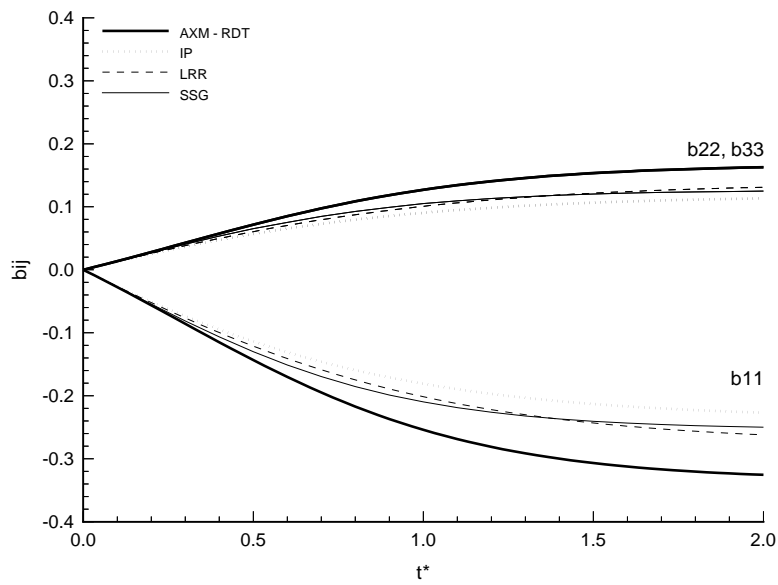


FIG. 6.12: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la contraction axisymétrique AXM.

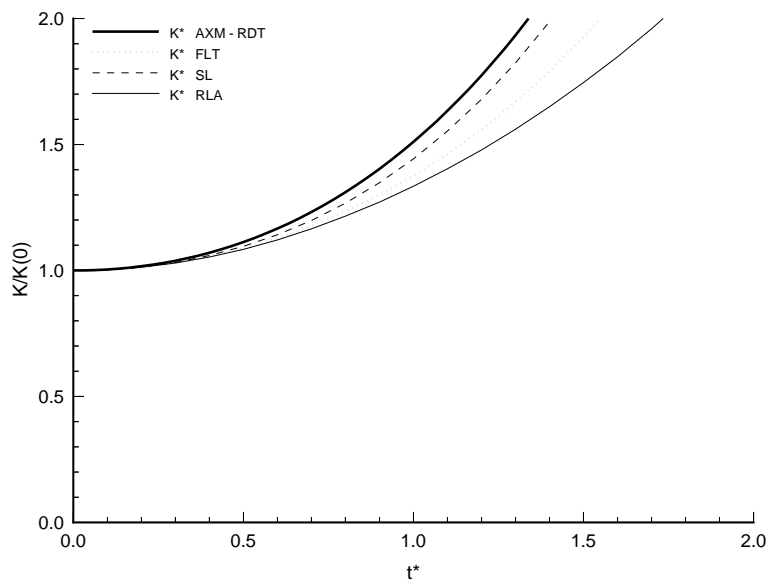


FIG. 6.13: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la contraction axisymétrique AXM.

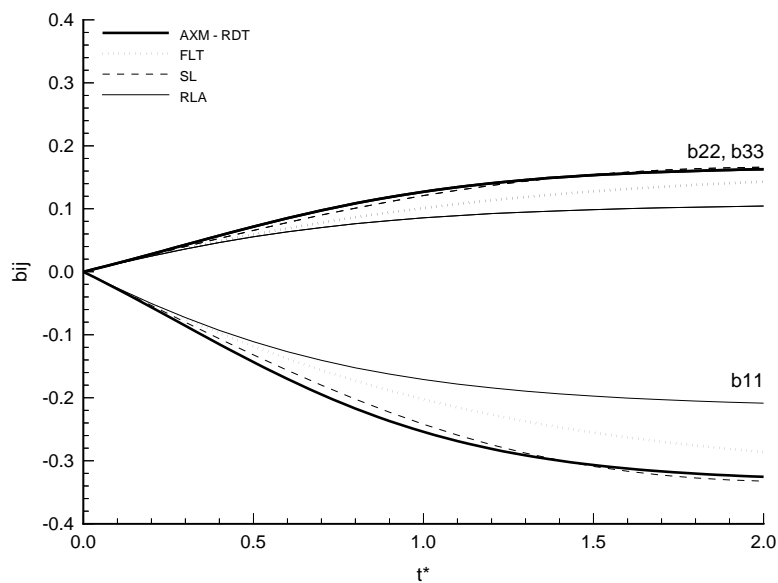
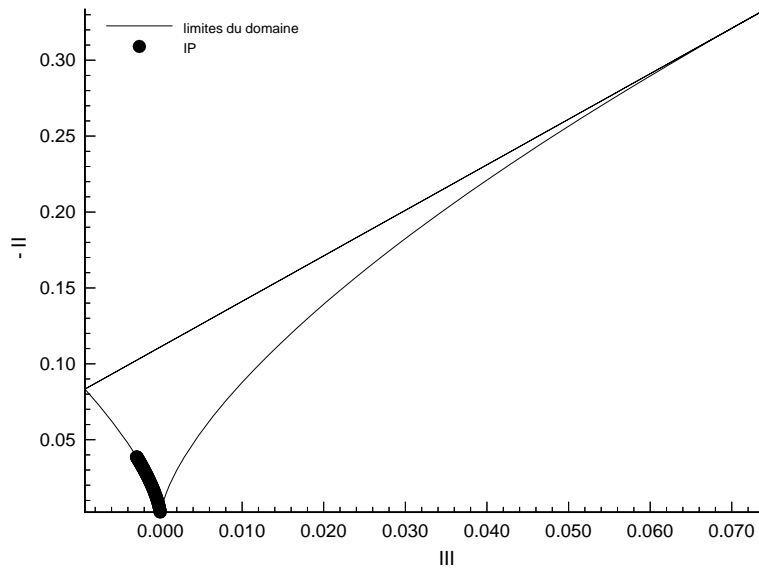
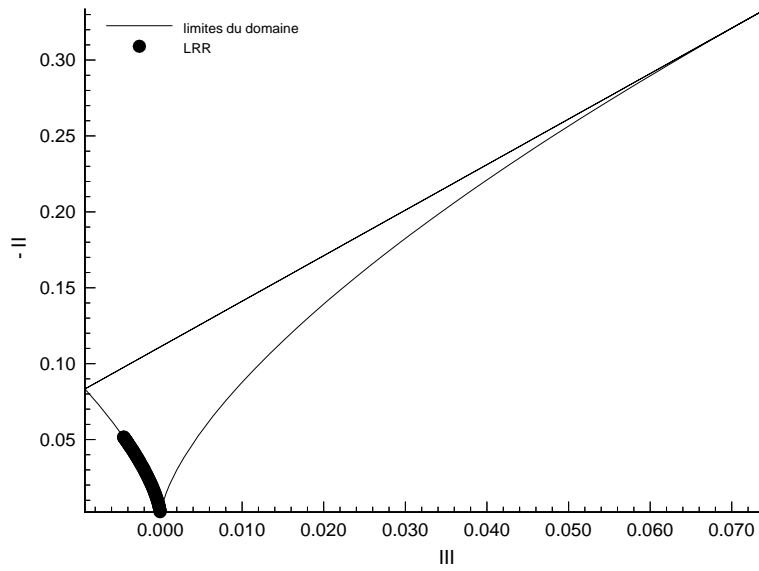


FIG. 6.14: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la contraction axisymétrique AXM.

FIG. 6.15: *Contraction axisymétrique AXM.*FIG. 6.16: *Contraction axisymétrique AXM.*



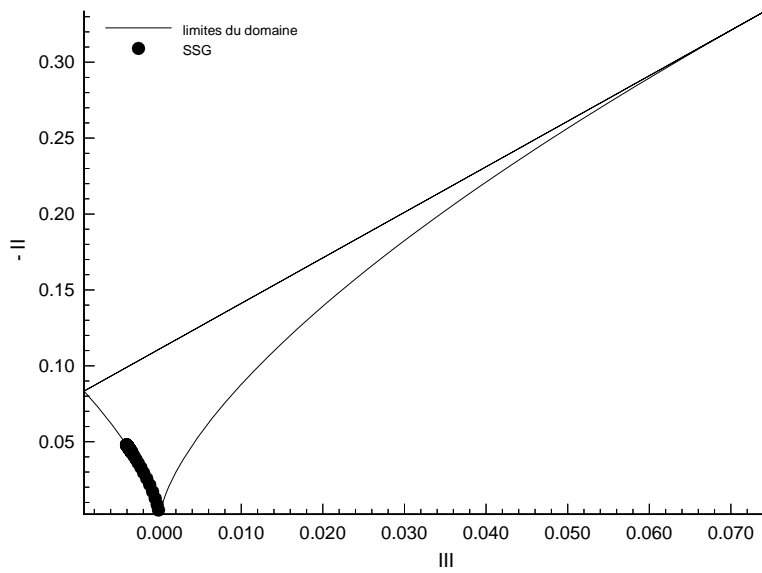


FIG. 6.17: *Contraction axisymétrique AXM.*

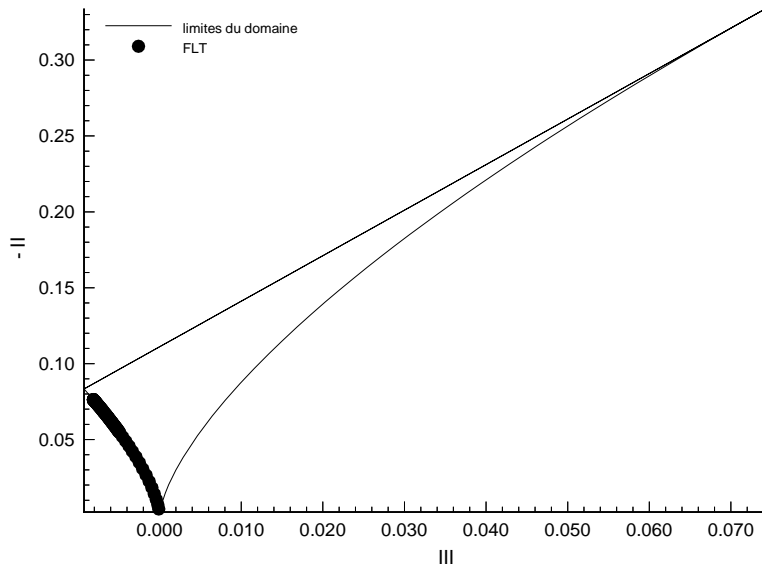
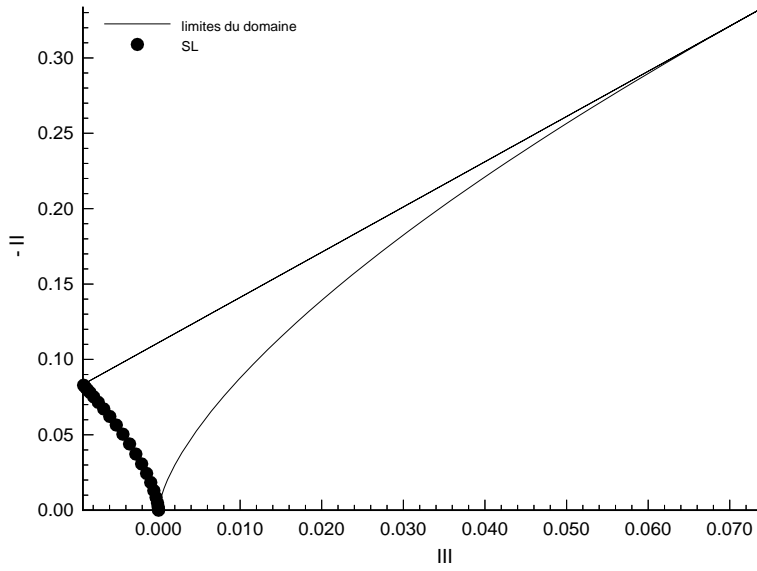
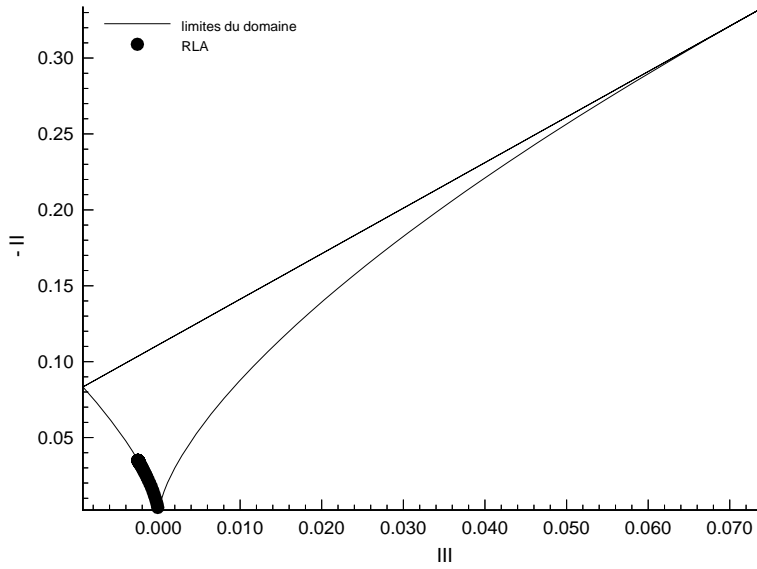


FIG. 6.18: *Contraction axisymétrique AXM.*

FIG. 6.19: *Contraction axisymétrique AXM.*FIG. 6.20: *Contraction axisymétrique AXM.*

*Expansion axisymétrique*

Lorsque la turbulence est soumise à une expansion axisymétrique, le taux de déformation négatif concentre les filaments vorticitaires dans un disque relativement fin, normal à l'axe de symétrie, alors que les déformations positives, plus faibles, les étirent dans les directions radiales. Cette vorticité axiale réduite a tendance à provoquer une décroissance des fluctuations de vitesse transversales, dans le plan orthogonal à l'axe de symétrie, contrebalancée toutefois par l'augmentation du niveau de l'ensemble des anisotropies. Les composantes du tenseur des corrélations pression-déformation croissent au cours du mouvement. La limite asymptotique de l'approximation de distorsion rapide est ici de type 3D-3C, ce qui est *a priori* moins délicat à représenter pour les modèles que l'état asymptotique de contraction axisymétrique rapide, puisqu'il ne se place pas sur la limite de réalisabilité 2C.

Les trois cas tests d'expansion axisymétrique traités par Lee et Reynolds [83] sont définis par les paramètres suivants :

	$S_d$	$S^*$	$\varepsilon_0$	$K_0$	$\omega_0$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$
EXO	0.6213	0.7071	0.1931	0.1099	6.702	0	0	0	0	0	0
EXP	6.213	7.071	0.1931	0.1099	6.702	0	0	0	0	0	0
EXQ	62.13	70.71	0.1931	0.1099	6.702	0	0	0	0	0	0

Seuls deux de ces cas serviront à la comparaison des modèles :

	$ S $	$\tau_0$	$\varepsilon_0$	$K_0$	$Re$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$
EXO	0.7232	2.45	0.1931	0.1099	232.60	0	0	0	0	0	0
EXQ	72.32	0.0245	0.1931	0.1099	232.60	0	0	0	0	0	0

La simulation EXQ correspond au cas d'une distorsion rapide [81].

Dans le cas précédent, les deux configurations envisagées conservent la même hiérarchie dans les performances des fermetures homogènes classiques.

Les comportements des modèles par rapport aux résultats de simulation directe sont en revanche nettement différents entre les deux cas d'expansion axisymétrique. Dans le cas EXO où le terme lent agit d'une façon significative, le modèle SL se comporte encore relativement bien par rapport aux autres, mais les meilleures performances sont données par le modèle quasi-linéaire SSG. Il faut noter que dans ce cas RLA fournit le meilleur comportement des modèles quadratiques, très voisin de celui de SSG. Lorsque dans le cas EXQ, le terme rapide est prépondérant, il n'existe aucune fermeture qui soit capable de prédire le bon niveau d'anisotropie.

Il est difficile d'établir un classement entre les différentes fermetures dans le cas EXQ, étant donné que les performances sur le niveau des anisotropies du tenseur de Reynolds et sur l'évolution de l'énergie cinétique turbulente ne suivent pas les mêmes tendances d'un modèle à l'autre. Globalement, ce sont les formulations les plus simples comme LRR ou SSG qui répondent encore le mieux à cette déformation.

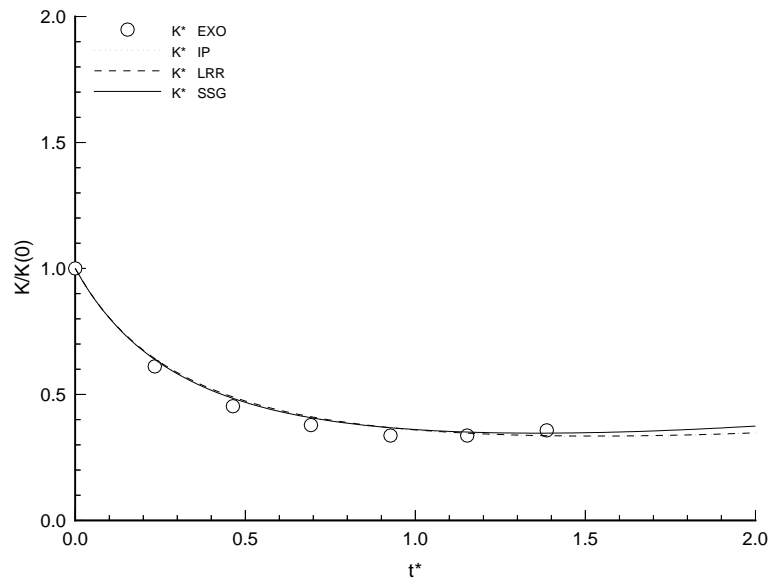


FIG. 6.21: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour l'expansion axisymétrique EXO.

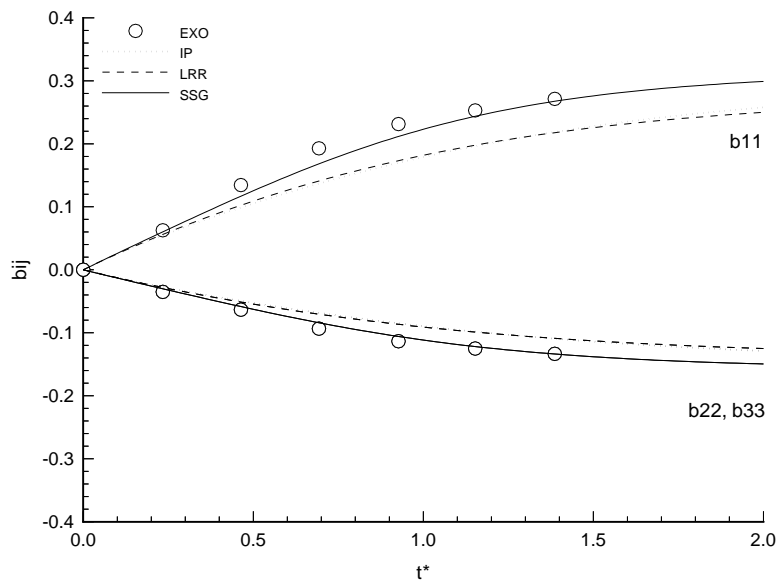


FIG. 6.22: Evolution du tenseur d'anisotropie pour l'expansion axisymétrique EXO.

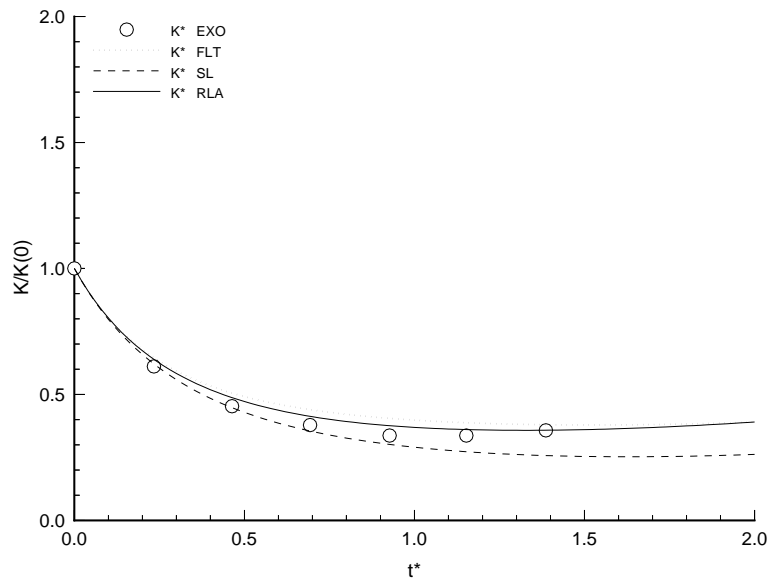


FIG. 6.23: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour l'expansion axisymétrique EXO.

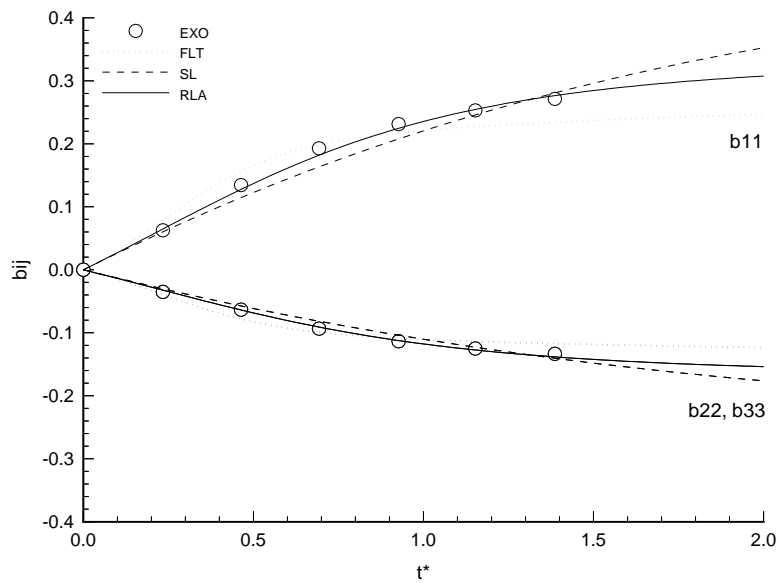
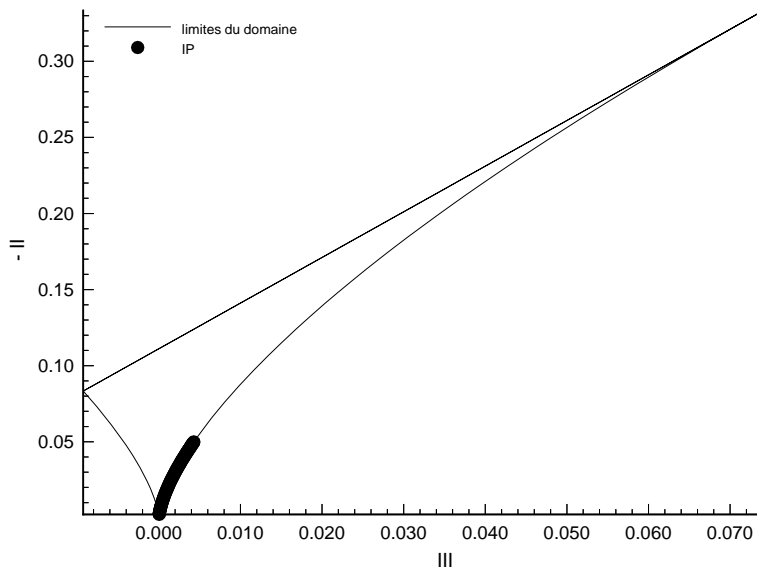
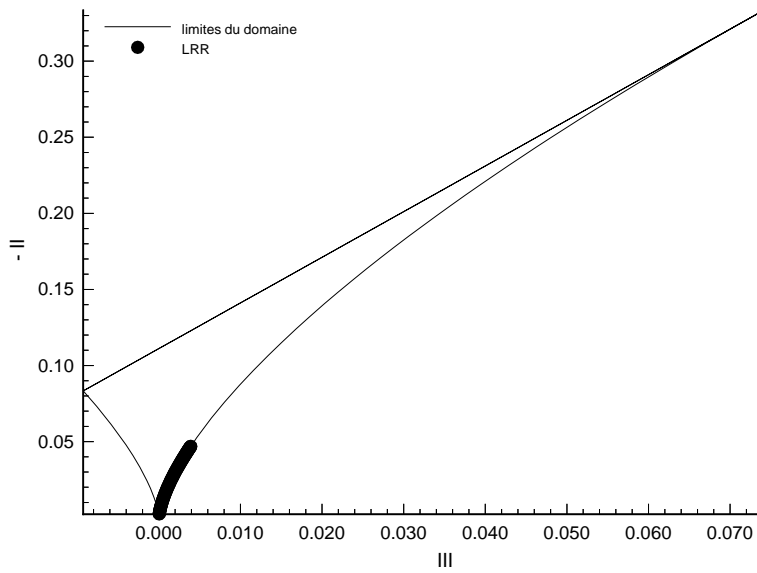


FIG. 6.24: Evolution du tenseur d'anisotropie pour l'expansion axisymétrique EXO.

FIG. 6.25: *Expansion axisymétrique EXO.*FIG. 6.26: *Expansion axisymétrique EXO.*

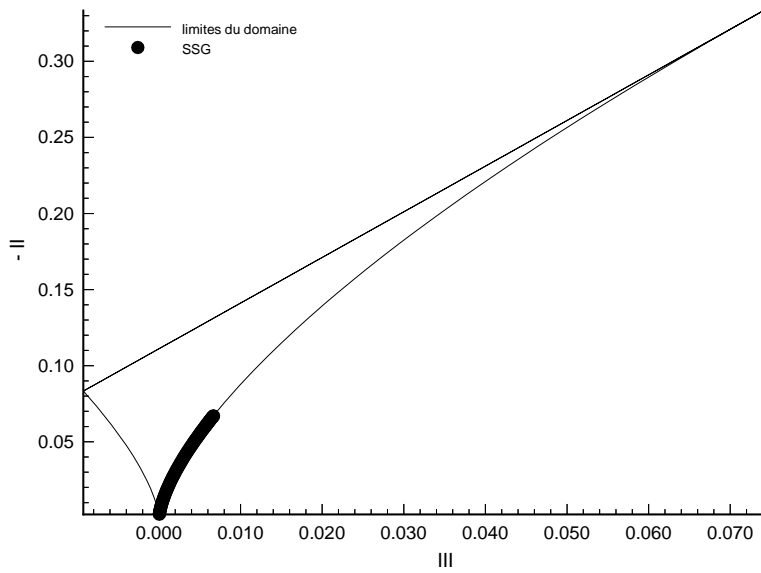


FIG. 6.27: *Expansion axisymétrique EXO.*

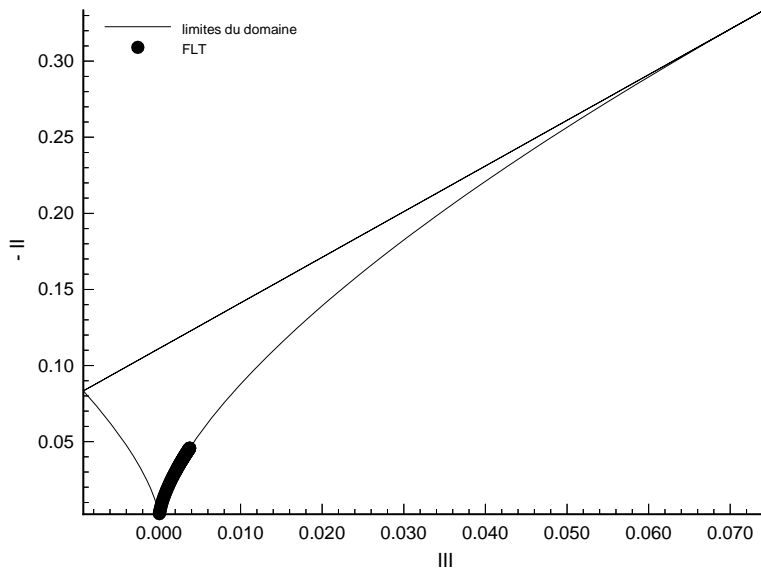
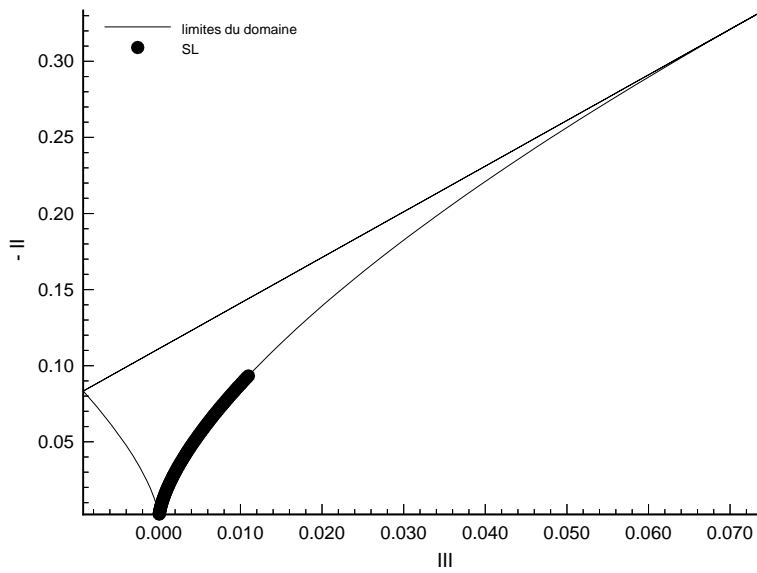
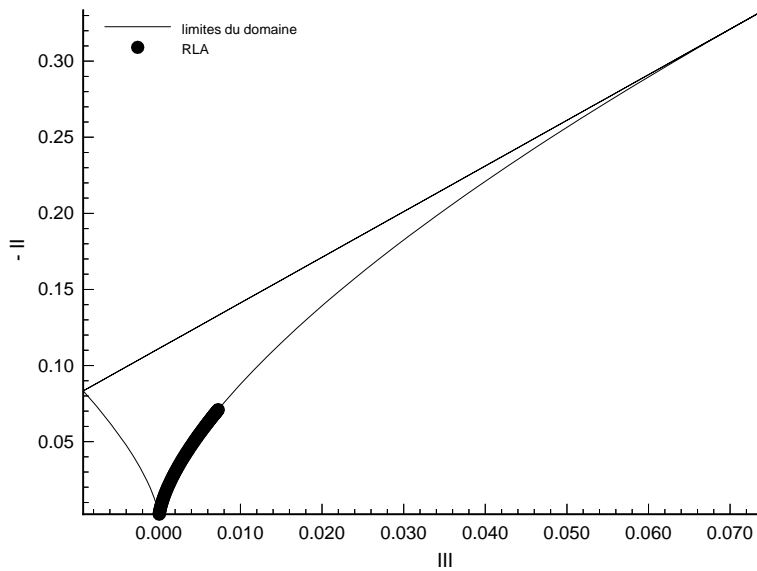


FIG. 6.28: *Expansion axisymétrique EXO.*

FIG. 6.29: *Expansion axisymétrique EXO.*FIG. 6.30: *Expansion axisymétrique EXO.*



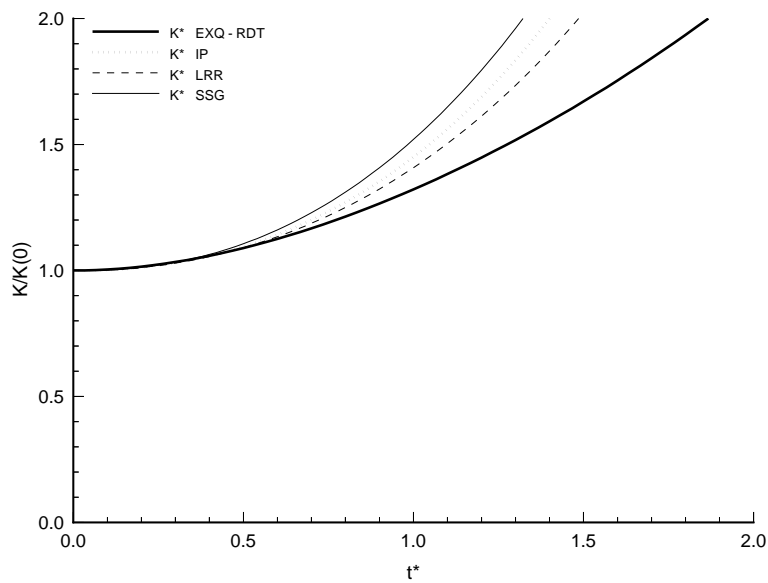


FIG. 6.31: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour l'expansion axisymétrique EXQ.

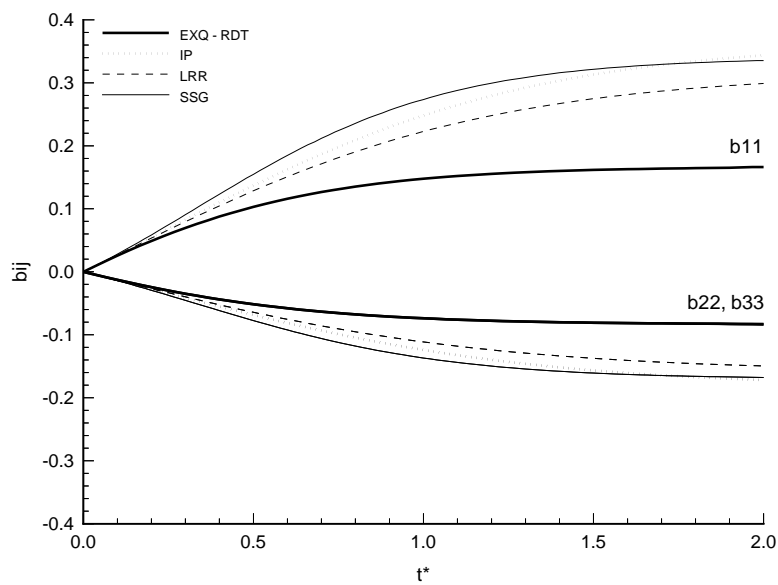


FIG. 6.32: Evolution du tenseur d'anisotropie pour l'expansion axisymétrique EXQ.

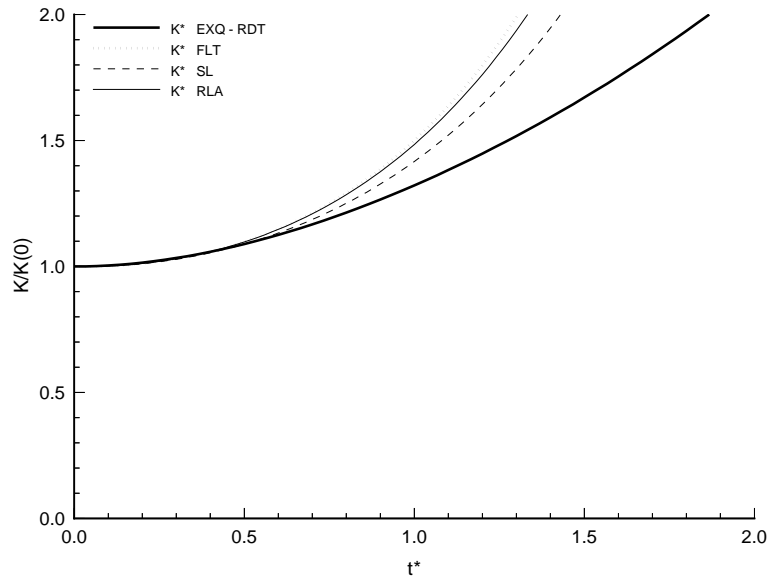


FIG. 6.33: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour l'expansion axisymétrique EXQ.

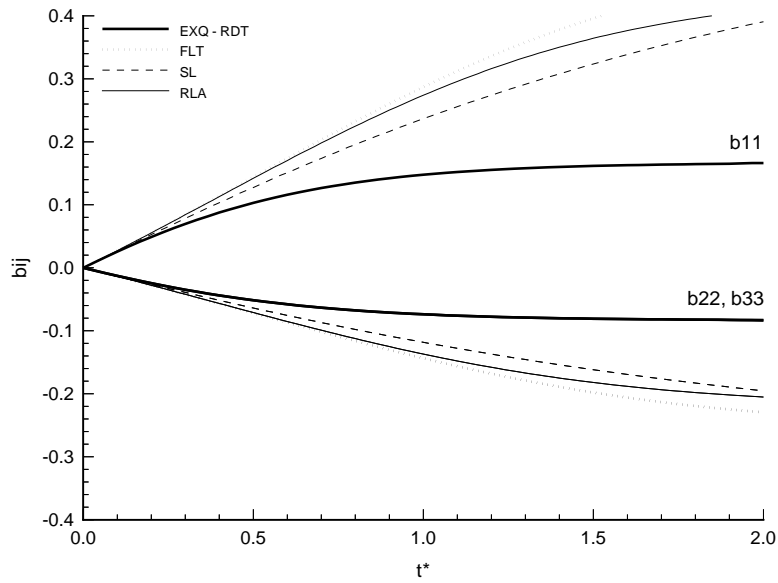


FIG. 6.34: Evolution du tenseur d'anisotropie pour l'expansion axisymétrique EXQ.

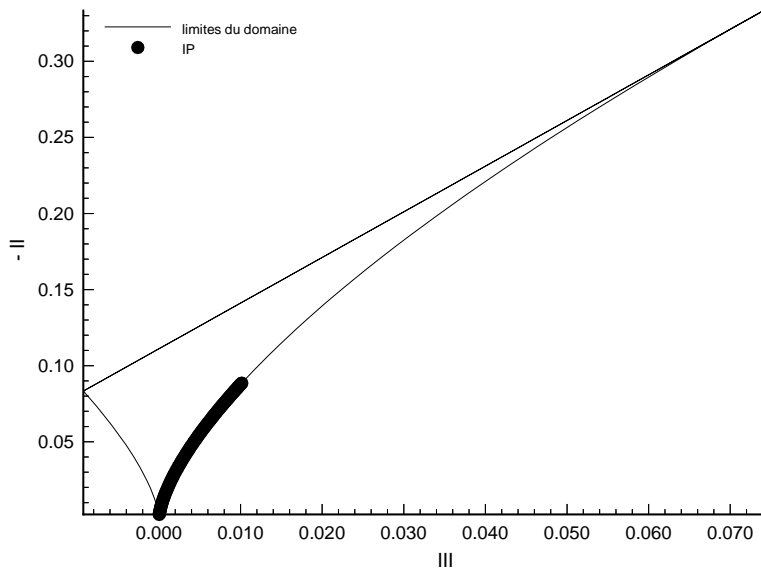


FIG. 6.35: *Expansion axisymétrique EXQ.*

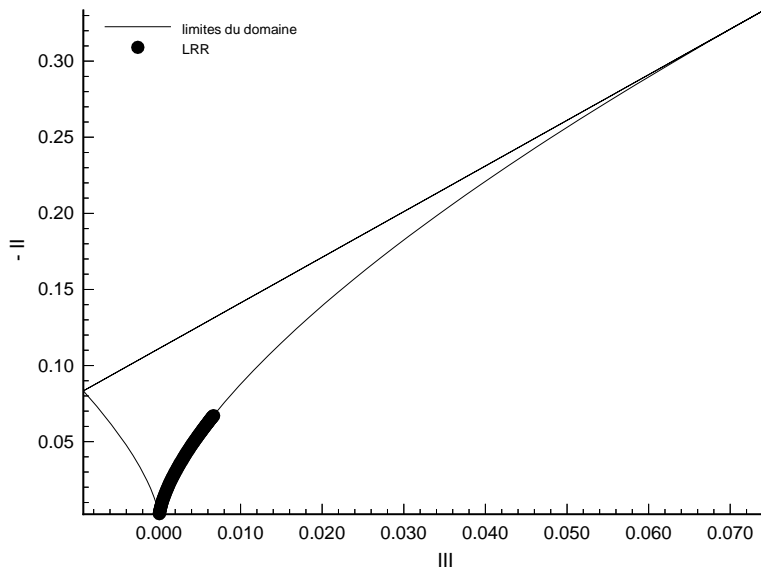
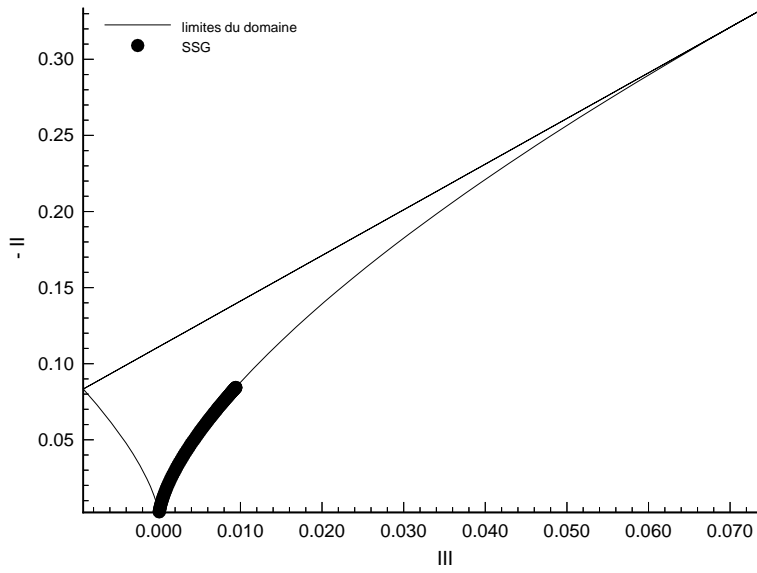
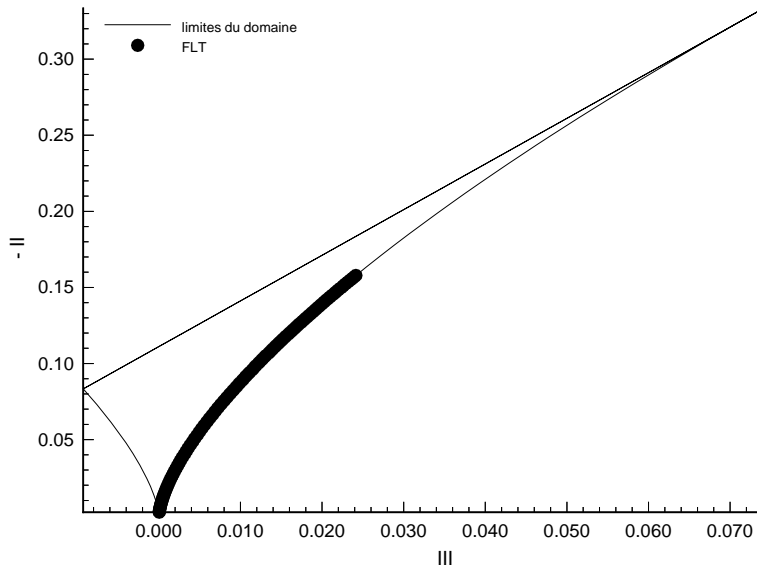


FIG. 6.36: *Expansion axisymétrique EXQ.*

FIG. 6.37: *Expansion axisymétrique EXQ.*FIG. 6.38: *Expansion axisymétrique EXQ.*

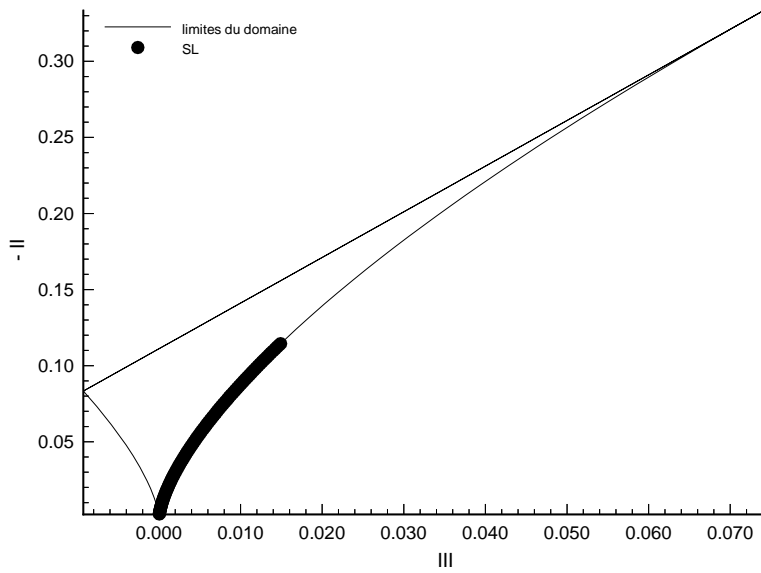


FIG. 6.39: *Expansion axisymétrique EXQ.*

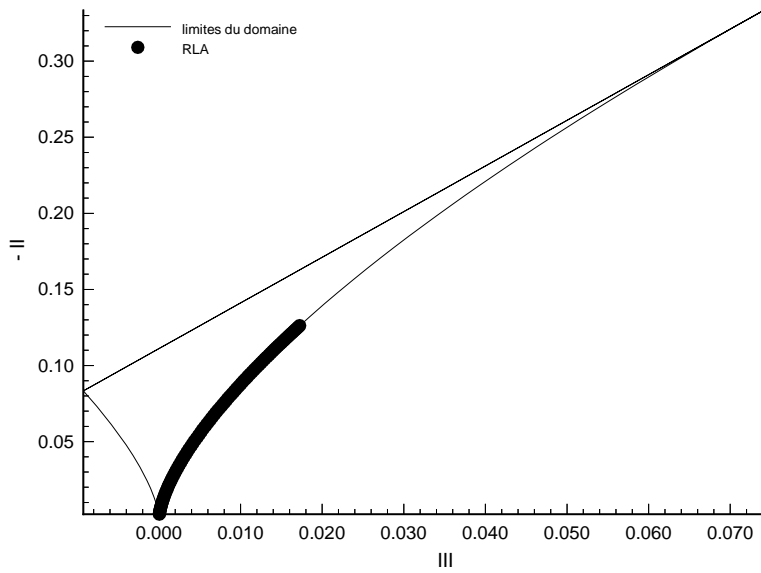


FIG. 6.40: *Expansion axisymétrique EXQ.*

## Déformation plane

Le champ de vitesse moyenne a la configuration suivante :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

avec  $S > 0$ .

Les évolutions de l'énergie cinétique et des anisotropies du tenseur de Reynolds sont très sensibles au taux de déformation, en particulier suivant la direction de contraction. L'état limite de distorsion rapide est identique à celui d'une contraction axisymétrique, mais est atteint de façon différente.

Seules deux simulations ont été retenues, qui correspondent encore aux cas extrêmes. La première a la même évolution de l'énergie cinétique turbulente que l'expérience de Tucker et Reynolds [170], alors que la seconde correspond à l'approximation de distorsion rapide. Ce sont :

	$S_d$	$S^*$	$\varepsilon_0$	$K_0$	$\omega_0$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$
PXA	0.65	1.0	0.08469	0.0652	4.438	0	0	0	0	0	0
PXF	100.	154.0	0.08469	0.0652	4.438	0	0	0	0	0	0

soit :

	$ S $	$\tau_0$	$\varepsilon_0$	$K_0$	$Re$	$b_{11}$	$b_{22}$	$b_{33}$	$b_{12}$	$b_{13}$	$b_{23}$
PXA	0.65	2.0	0.08469	0.0652	232.56	0	0	0	0	0	0
PXF	100.	0.0129	0.08469	0.0652	232.56	0	0	0	0	0	0

Tout comme le cas précédent, la présence des termes lent et rapide permet aux modèles d'accéder à des prédictions de la première configuration, PXA, beaucoup plus proches des résultats de simulation directe que le cas PXF voisin de l'approximation de distorsion rapide.

Les modèles fournissent tous un bon comportement de l'énergie cinétique turbulente pour PXA. Les prédictions des anisotropies par les modèles LRR et SSG sont assez voisines et peuvent paraître difficiles à départager dans la mesure où SSG prédit mieux  $b_{22}$  que LRR, mais LRR capte mieux  $b_{11}$  que SSG. Les deux modèles s'accordent par contre quant à la prédiction de  $b_{33}$ , qui est dans la direction de l'étirement.  $b_{11}$  correspond à la direction non contrainte, alors que  $b_{22}$  est dans la direction de la compression, ce qui peut pencher en la faveur de la solution donnée par SSG.

Les prédictions des modèles non-linéaires sont beaucoup plus aisées à départager sur ce premier cas. Le modèle SL permet de capter les bons niveaux d'anisotropie du tenseur de Reynolds, tout comme dans les configurations précédentes où le terme lent était important. Les modèles FLT et RLA proposent des solutions relativement voisines l'une de l'autre, mais qui dans l'ensemble ne sont pas franchement plus performantes que celle de SSG. Ces différences s'observent cette fois très bien sur le plan des invariants.

Le second cas test pose à nouveau plus de difficultés aux modèles. Il faut noter que le signe de  $b_{11}$  a changé, mais que cette caractéristique n'est capturée par aucun des modèles présentés. Ils conservent tous le même genre de prédiction de la composante normale du tenseur de Reynolds dans la direction non-contrainte. Les modèles non-linéaires, et en particulier le modèle de SL ne semble pas franchement meilleur que SSG dans ce cas.

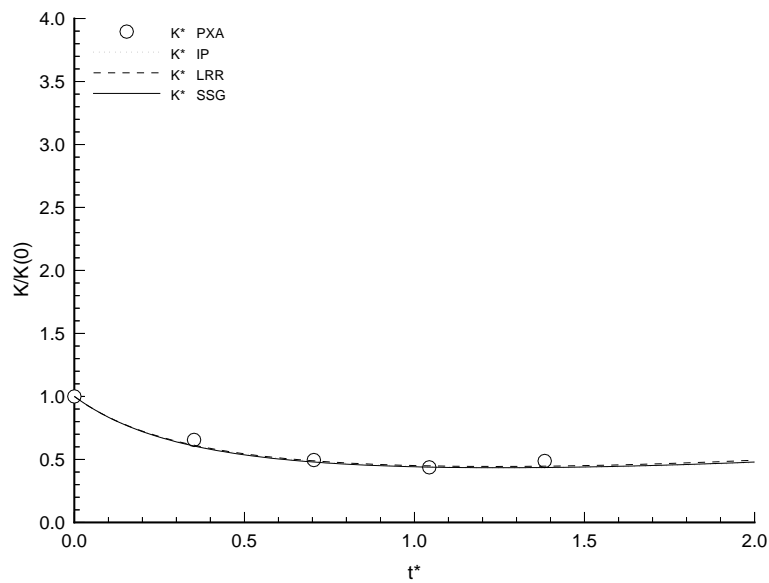


FIG. 6.41: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la déformation plane PXA.

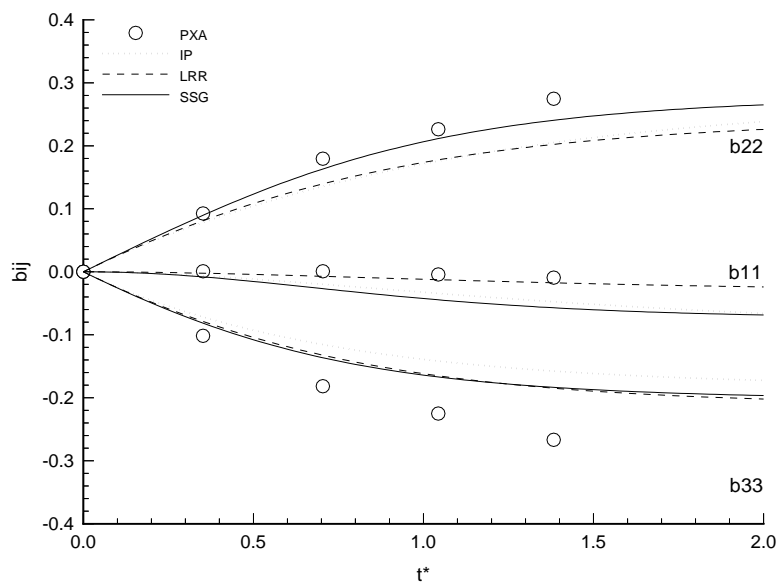


FIG. 6.42: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la déformation plane PXA.

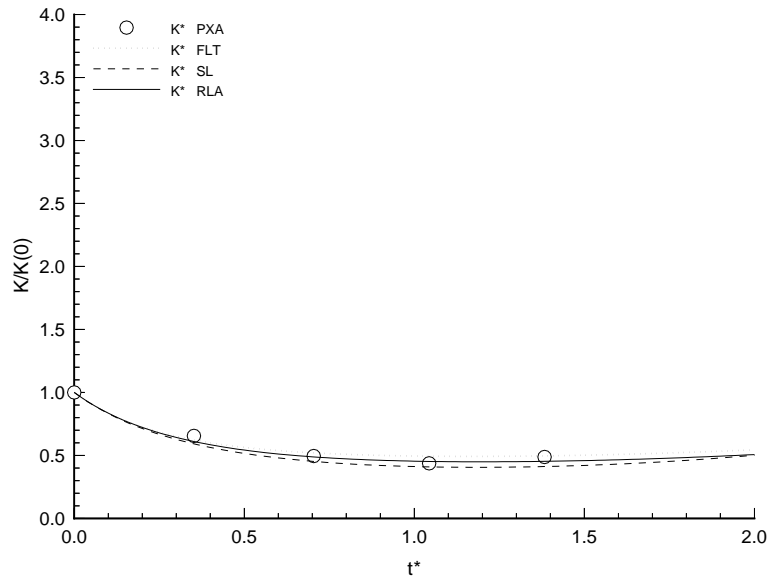


FIG. 6.43: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la déformation plane PXA.

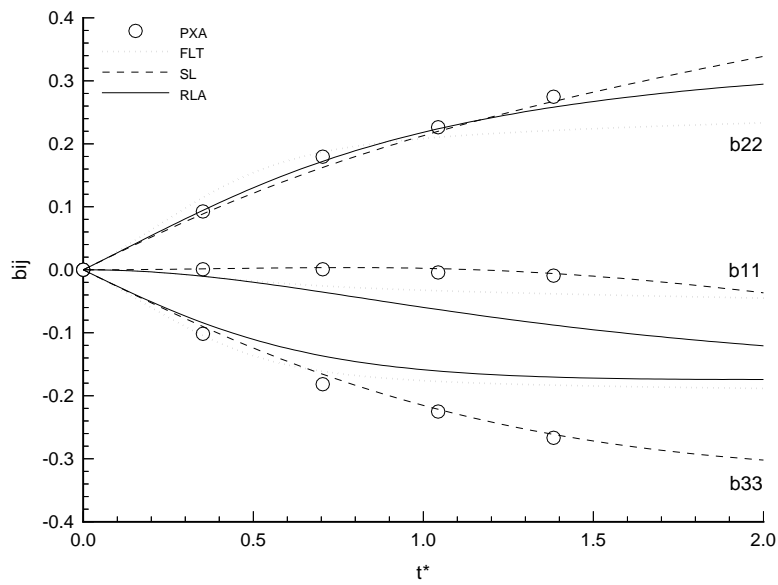


FIG. 6.44: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la déformation plane PXA.



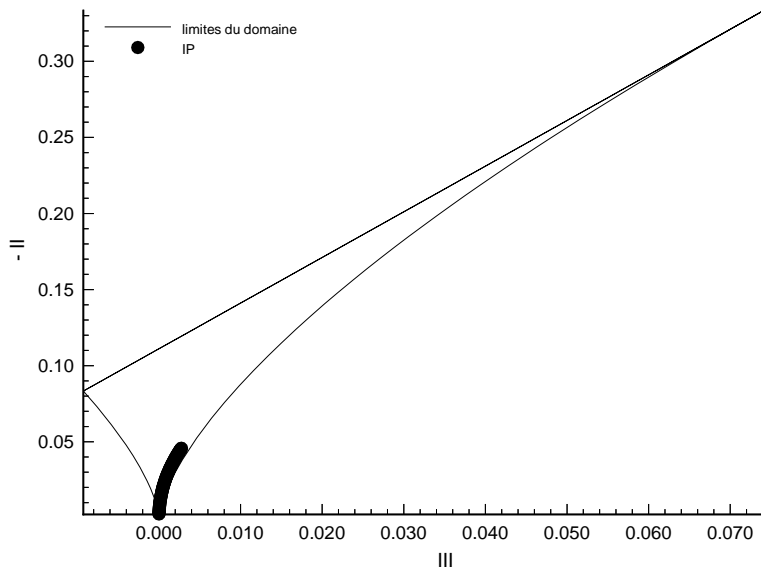


FIG. 6.45: *Déformation plane PXA.*

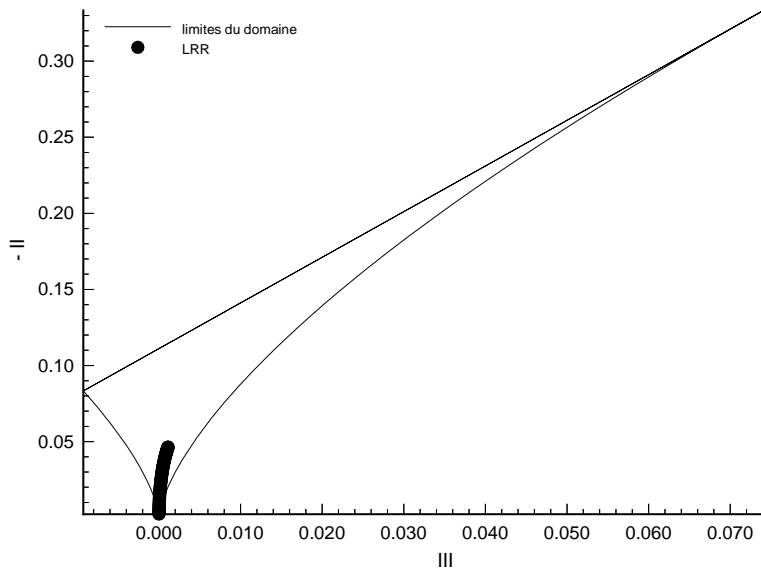


FIG. 6.46: *Déformation plane PXA.*

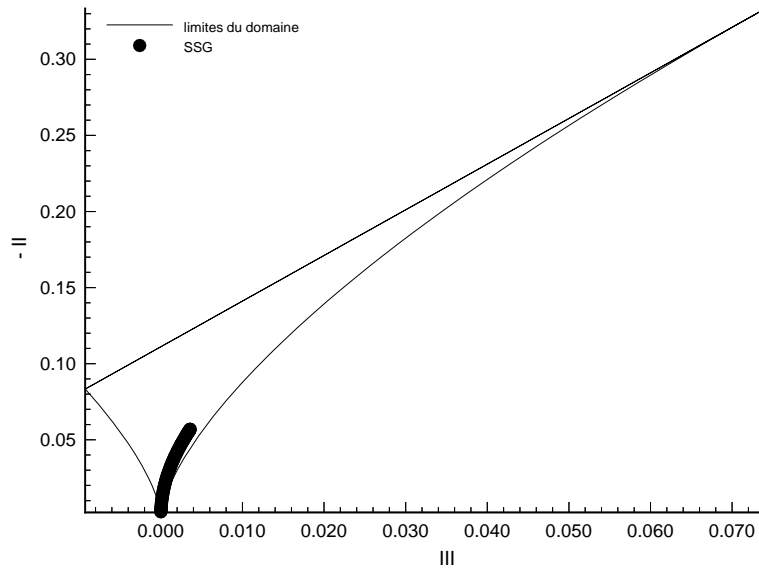


FIG. 6.47: Déformation plane PXA.

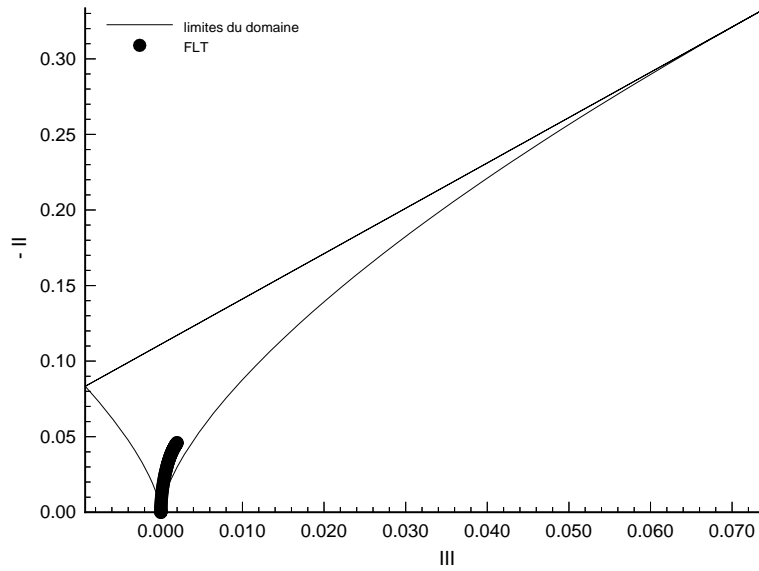


FIG. 6.48: Déformation plane PXA.

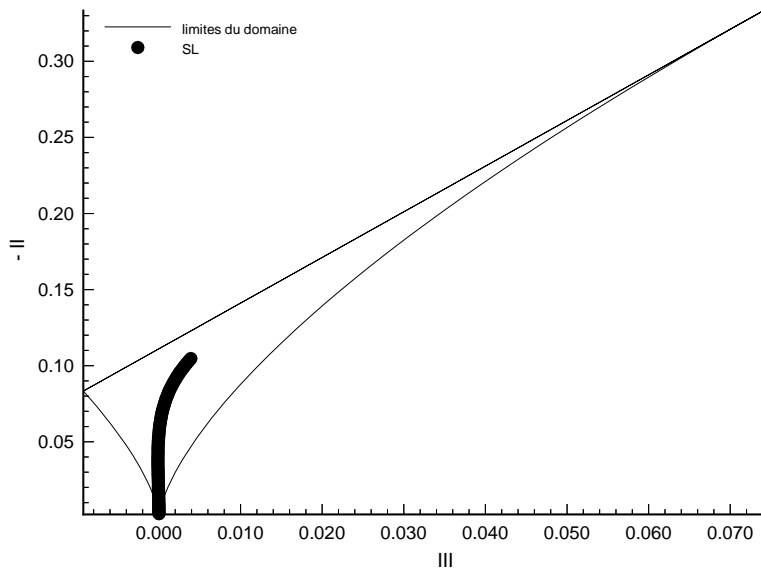


FIG. 6.49: Déformation plane  $PXA$ .

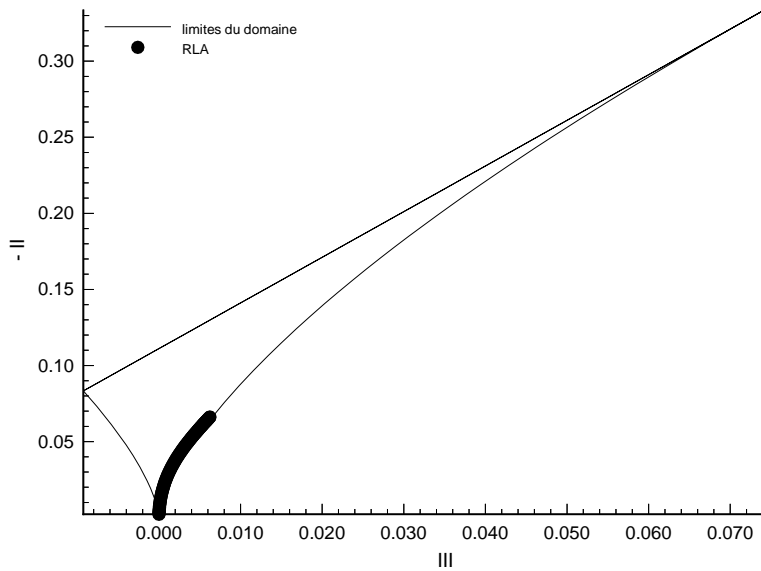


FIG. 6.50: Déformation plane  $PXA$ .

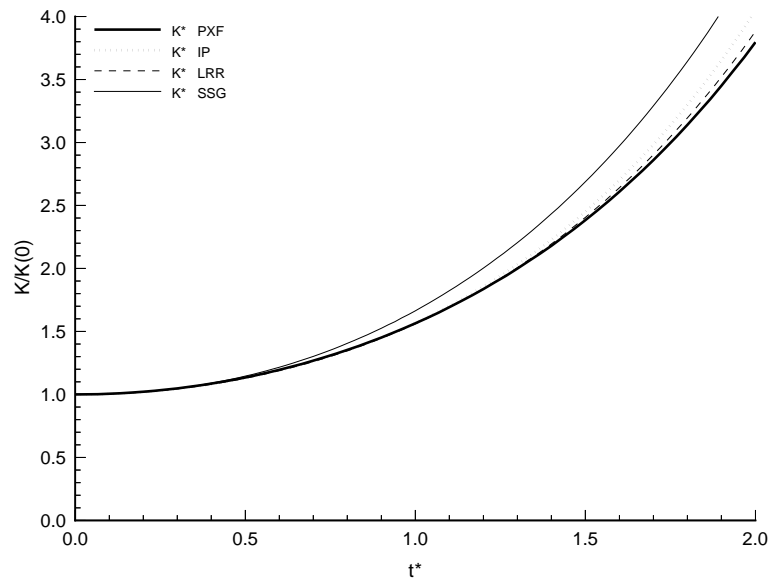


FIG. 6.51: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la déformation plane PXF.

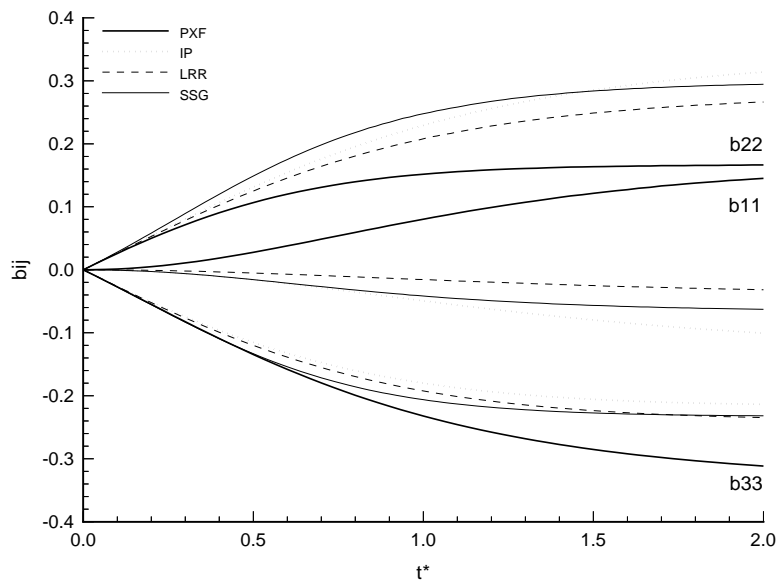


FIG. 6.52: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la déformation plane PXF.

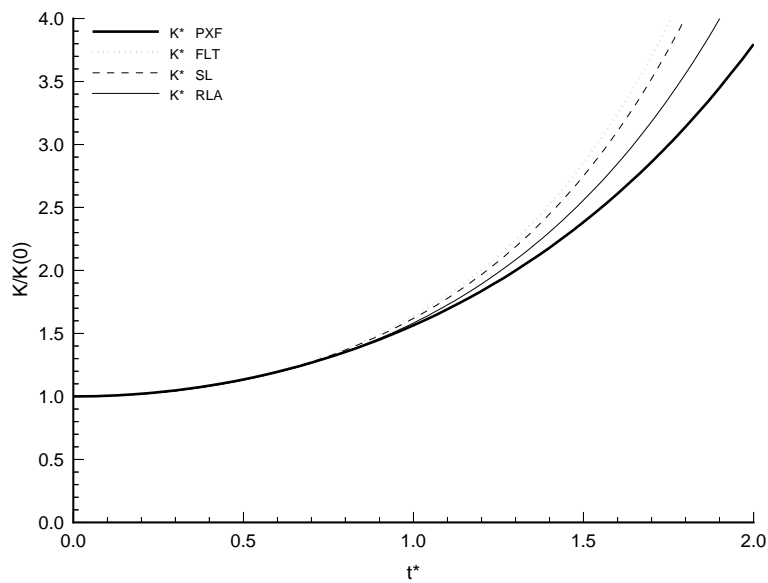


FIG. 6.53: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la déformation plane PXF.

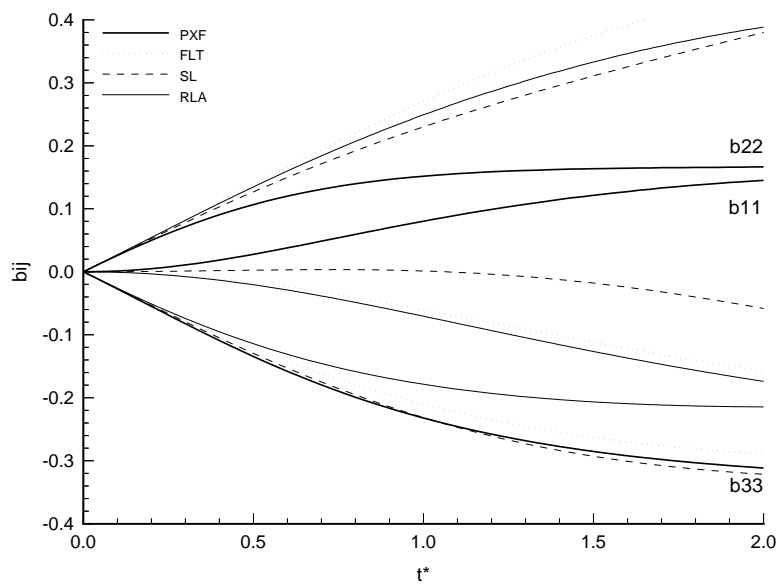
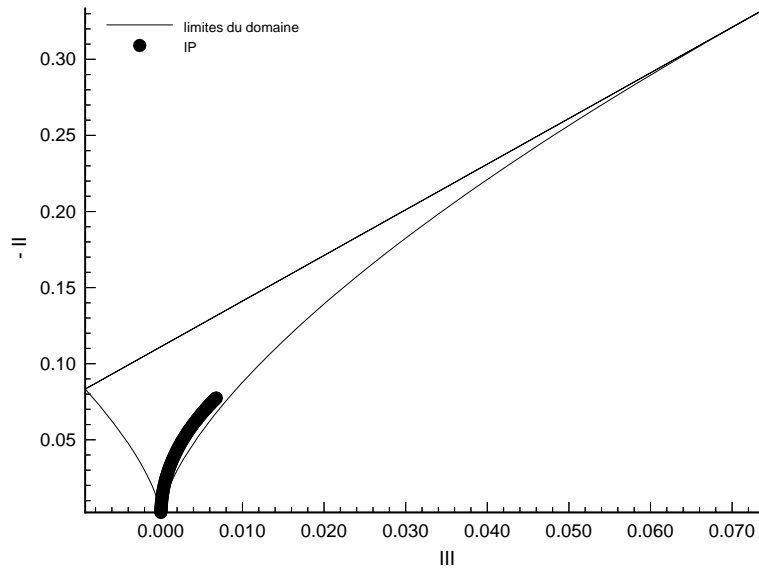
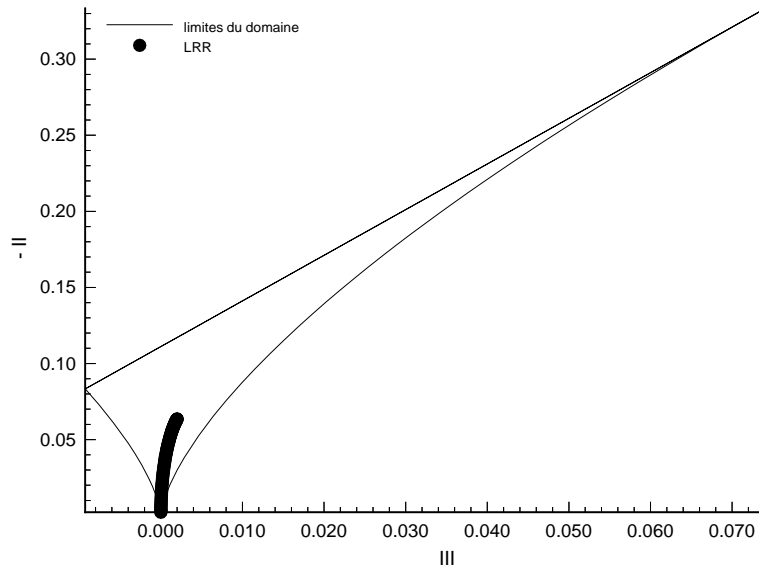


FIG. 6.54: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la déformation plane PXF.

FIG. 6.55: *Déformation plane PXF.*FIG. 6.56: *Déformation plane PXF.*

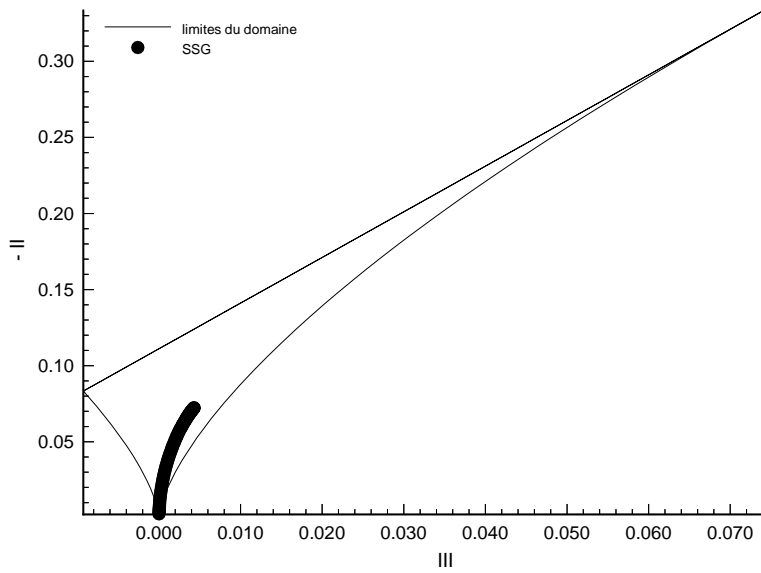


FIG. 6.57: Déformation plane PXF.

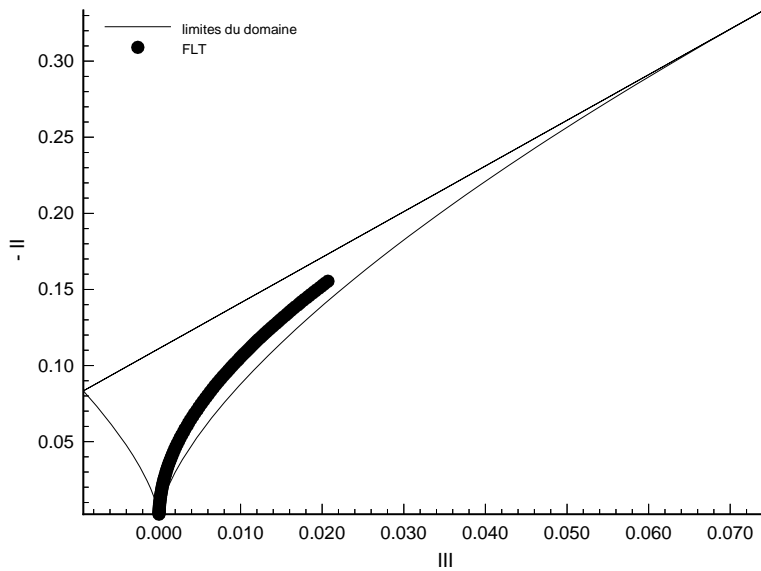


FIG. 6.58: Déformation plane PXF.

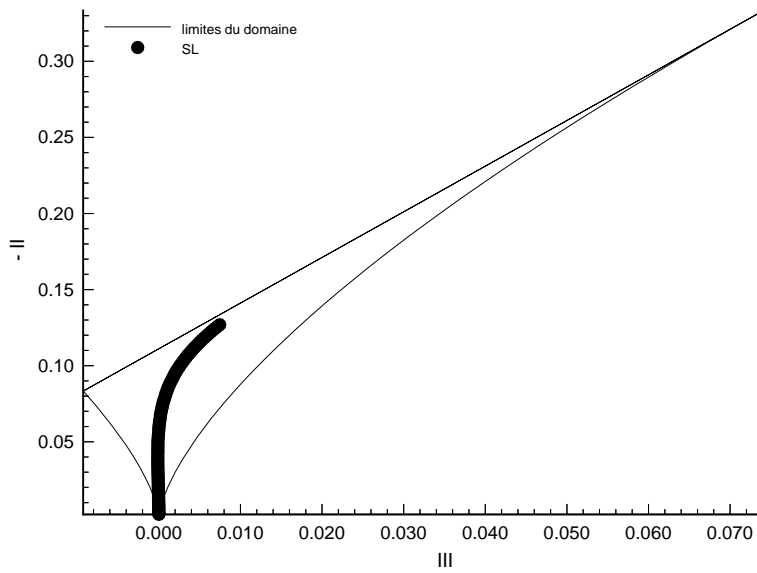


FIG. 6.59: Déformation plane PXF.

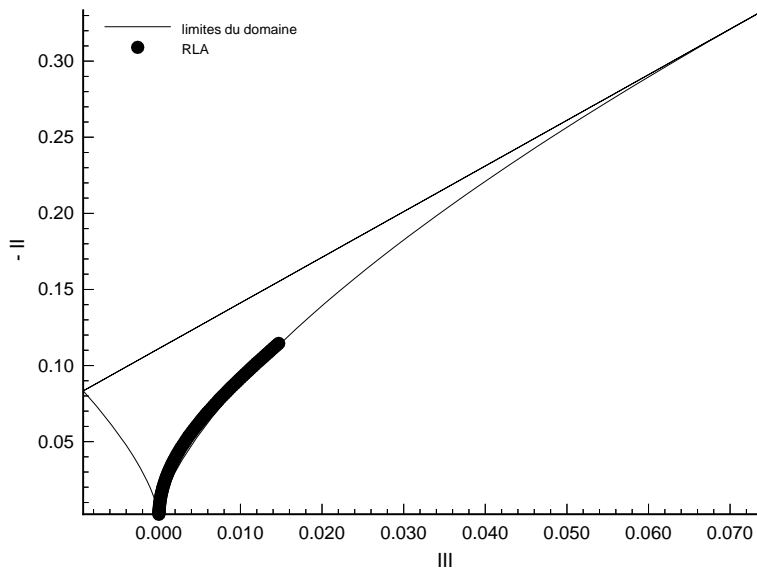


FIG. 6.60: Déformation plane PXF.



### Déformations planes successives

Des calculs ont été effectués dans le cadre de l'approximation de distorsion rapide par Kassinos et Reynolds [67] dans ce cas. Les axes propres des déformations successives sont tournés de 45 degrés. Le première déformation plane, PS1, s'écrit :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.73a)$$

Elle est appliquée sur une turbulence initialement isotrope, jusqu'à  $c = 2.72$ . La seconde, notée PS2 s'écrit :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}S & 0 \\ \frac{1}{2}S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.73b)$$

Des expériences ont été effectuées pour ces configurations par Gence et Mathieu [50]. Seules les évolutions des modèles en approximation de distorsion rapide sont données ici.

Si la première solution de distorsion rapide a été calculée numériquement, la seconde est tirée du rapport de Kassinos et Reynolds [67], ce qui explique son aspect moins lisse. Les évolutions dans le plan des invariants ne sont pas rappelées. Il suffit de se reporter au cas PXF pour en avoir un aperçu.

Il est intéressant de noter qu'aucun des modèles ne prédit correctement la deuxième déformation.

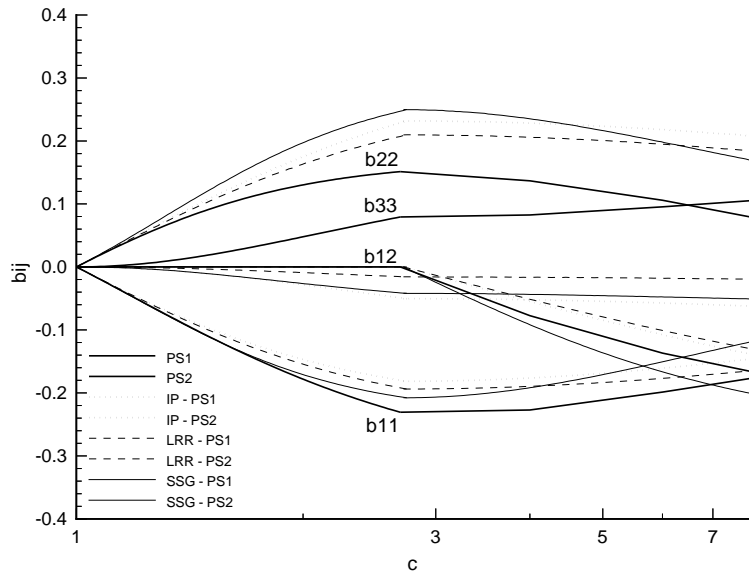


FIG. 6.61: Evolution du tenseur d'anisotropie pour les déformations planes successives PS12R.

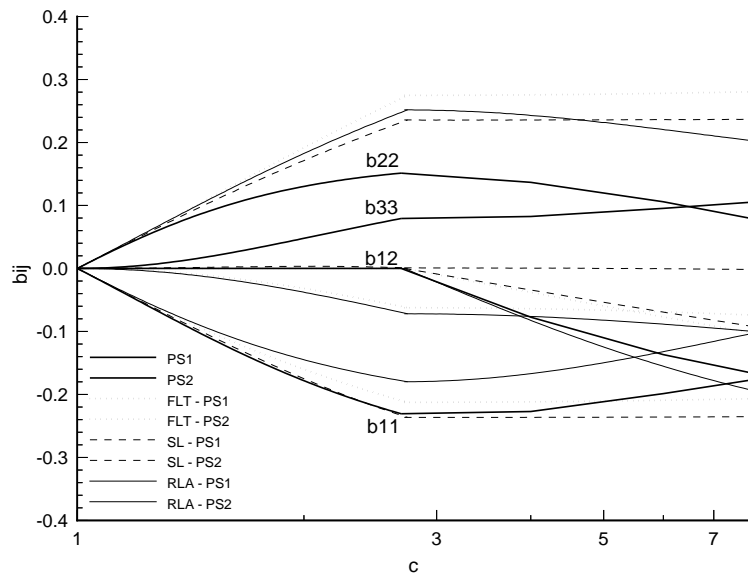


FIG. 6.62: Evolution du tenseur d'anisotropie pour les déformations planes successives PS12R.

#### 6.4.2 Ecoulement avec effet de rotation moyenne

##### Rotation pure d'une turbulence initialement axisymétrique

L'écoulement est placé dans un repère en rotation uniforme, sans qu'il y ait de déformation moyenne du champ relatif. La turbulence évolue en approximation de distorsion rapide à partir d'un état initialement axisymétrique déterminé analytiquement par le modèle du tenseur spectral axisymétrique proposé par Sreenivasan et Narashima [162]. Le choix de ce modèle axisymétrique initial a permis d'effectuer l'intégration analytique des différentes quantités spectrales et ce de façon indépendante de la forme des densités spectrales initiales. Son expression est rappelée en annexe K. Les calculs des modèles sont comparés à ces solutions de rotation rapide. Deux configurations sont envisagées suivant les orientations du vecteur rotation  $\Omega$  du repère et la direction initiale d'axisymétrie de la turbulence,  $e$ . Le premier cas correspond à la situation où les structures turbulentes sont initialement orientées suivant l'axe de la rotation, et le second au

cas où ces deux directions sont orthogonales.

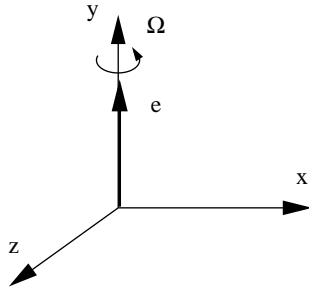


FIG. 6.63: *Cas 1.*

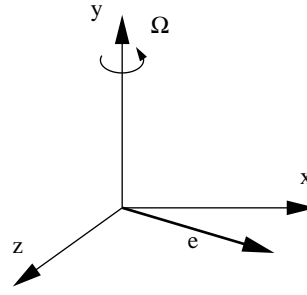


FIG. 6.64: *Cas 2.*

Dans le premier cas, la turbulence reste axisymétrique au cours du temps, en conservant la même orientation de ses axes principaux et évolue vers un état asymptotique caractérisé par  $b_{ij}(\infty) = -1/5 b_{ij}(0)$ . Dans le plan des invariants, ces évolutions se traduisent par un changement de type d'anisotropie, passant, dans le cas où les structures sont initialement allongées, d'un état d'expansion axisymétrique à celui d'une contraction axisymétrique, et inversement. Cette sensibilité importante de la solution linéaire à des conditions initiales axisymétriques a été notée par les calculs numériques effectués par Jacquin, Cambon et Mathieu [19] et Cambon et Jacquin [17]. Par ailleurs, le fait que l'état asymptotique de l'anisotropie dépende entièrement de l'anisotropie initiale a été mis en évidence dans les calculs effectués par Jacquin, Leuchter, Cambon et Mathieu [62]. La solution analytique restitue bien ce comportement. Il faut noter que le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds passe d'après la solution analytique de distorsion rapide par un état isotrope instable, après une décroissance très rapide de l'anisotropie initiale, conformément aux expériences de Wigeland et Nagib [175]. L'anisotropie croît de nouveau jusqu'à un temps adimensionnel  $t^* = \Omega t$  voisin de  $t^* = 1.4$  et évolue enfin vers sa valeur asymptotique. Ce comportement est également en accord avec les calculs de Jacquin, Leuchter, Cambon et Mathieu [62].

Dans le cas où l'anisotropie initiale est dans le plan normal à l'axe de rotation, la turbulence perd son caractère axisymétrique mais évolue toujours vers un état asymptotique correspondant à  $b_{ij}(\infty) = -1/5 b_{ij}(0)$ . Cet état est cependant atteint moins rapidement que dans le premier cas. L'évolution des composantes de vitesse dans le plan normal à l'axe de rotation se traduit par des oscillations importantes des anisotropies et une évolution complexe dans le plan des invariants.

Aucun des modèles rapides classiques ne permet de différencier ces deux cas dans le plan des invariants et ne restitue correctement l'évolution des anisotropies du tenseur de Reynolds.

Les équations du mouvement d'une turbulence homogène placée en approximation de rotation rapide se réduisent dans le repère relatif à :

$$\frac{\overline{d}R_{ij}}{dt} = -2 R_{ik} \theta_{jk} - 2 R_{jk} \theta_{ik} + \phi_{ij}^{R,\Omega} \quad (6.74)$$

soit encore

$$\frac{\overline{d}b_{ij}}{dt} = -2 b_{ik} \theta_{jk} - 2 b_{jk} \theta_{ik} + \frac{1}{2k} \phi_{ij}^{R,\Omega} \quad (6.75)$$

$$\frac{\overline{d}K}{dt} = 0 \quad (6.76)$$

où  $\phi_{ij}^{R\Omega}$  est la contribution du terme rapide homogène dépendant du taux de rotation du repère, soit, en fonction du tenseur du quatrième ordre  $X_{ijpq}$  :

$$\phi_{ij}^{R\Omega} = -2 \theta_{pq} (X_{iqpj} + X_{jqpi}) \quad (6.77)$$

La modélisation classique de  $X_{ijpq}$ , consistant en une fonctionnelle isotrope ne dépendant que du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, conduit alors à la forme suivante :

$$\frac{1}{2K} \phi_{ij}^{R\Omega} = \beta_6 [b_{jk} W_{ik} + b_{ik} W_{jk}] + \beta_7 [b_{.jk}^2 W_{ik} + b_{.jk}^2 W_{jk}] + \beta_8 [b_{.jp}^2 W_{qp} b_{iq} + b_{.pk}^2 W_{qp} b_{jq}] \quad (6.78)$$

En se plaçant dans le plan des invariants, les symétries tensorielles conduisent, du fait de l'anisotropie du tenseur des taux de rotation du repère, aux évolutions suivantes :

$$\frac{\bar{d}II}{dt} = 0 \quad \frac{\bar{d}III}{dt} = 0$$

ce qui permet d'illustrer simplement le fait qu'aucune formulation classique de  $X_{ijpq}$  ne peut représenter l'évolution des invariants du tenseur de Reynolds d'une turbulence homogène soumise à une rotation rapide.

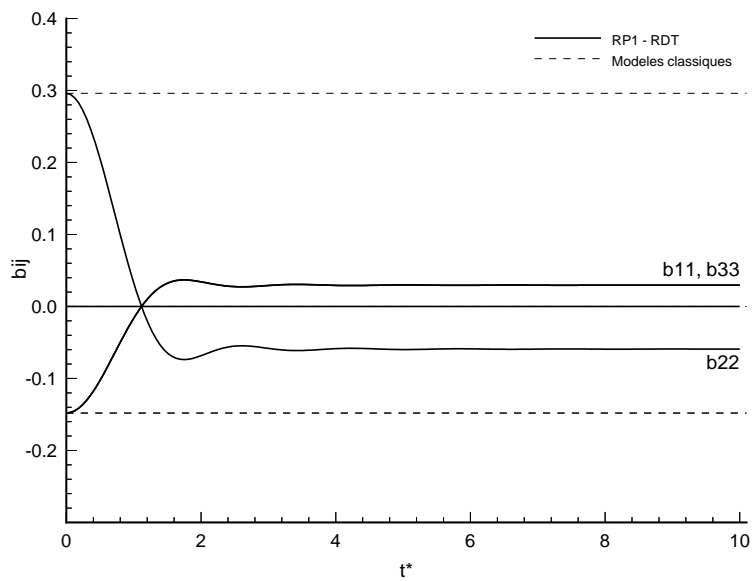


FIG. 6.65: Evolution du tenseur d'anisotropie des modèles classiques dans le cas 1.

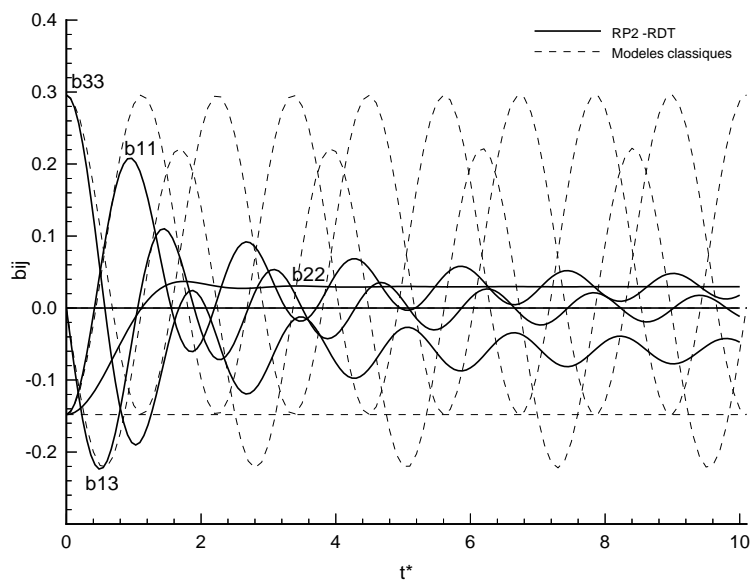
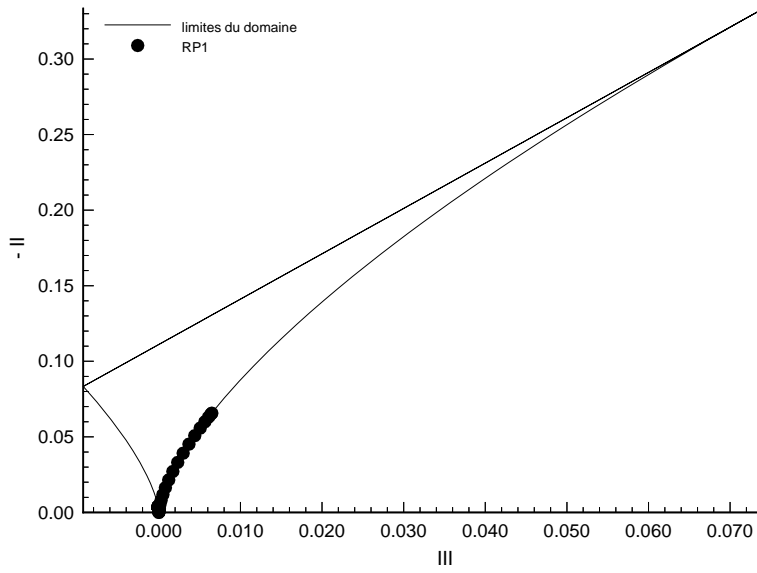
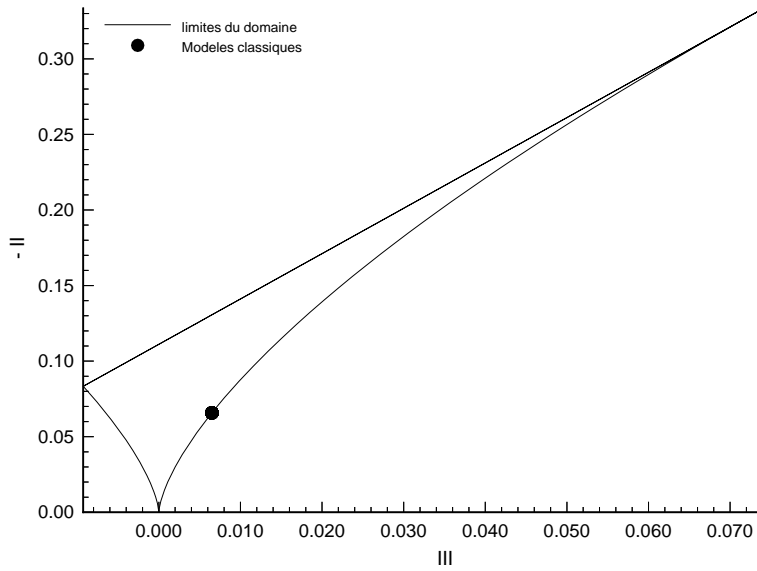


FIG. 6.66: Evolution du tenseur d'anisotropie des modèles classiques dans le cas 2.

FIG. 6.67: *Solution de distorsion rapide dans le cas 1.*FIG. 6.68: *Comportement des modèles classiques dans le cas 1.*

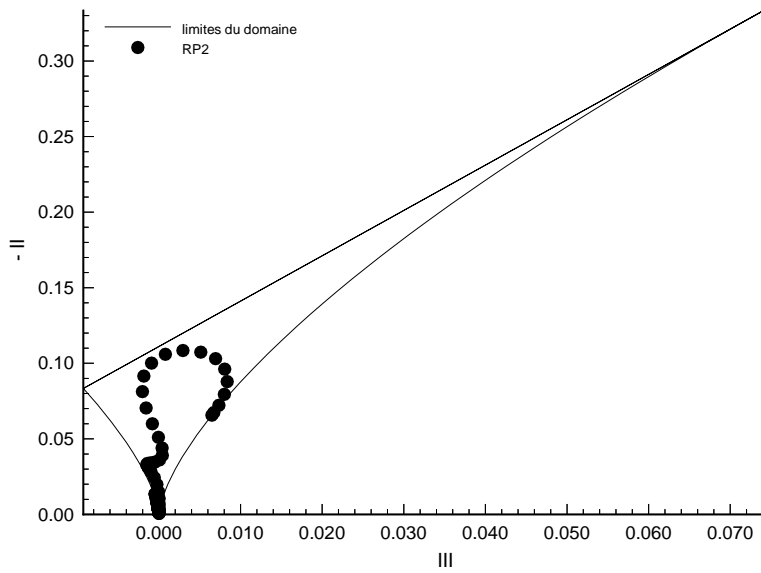


FIG. 6.69: *Solution de distorsion rapide dans le cas 2.*

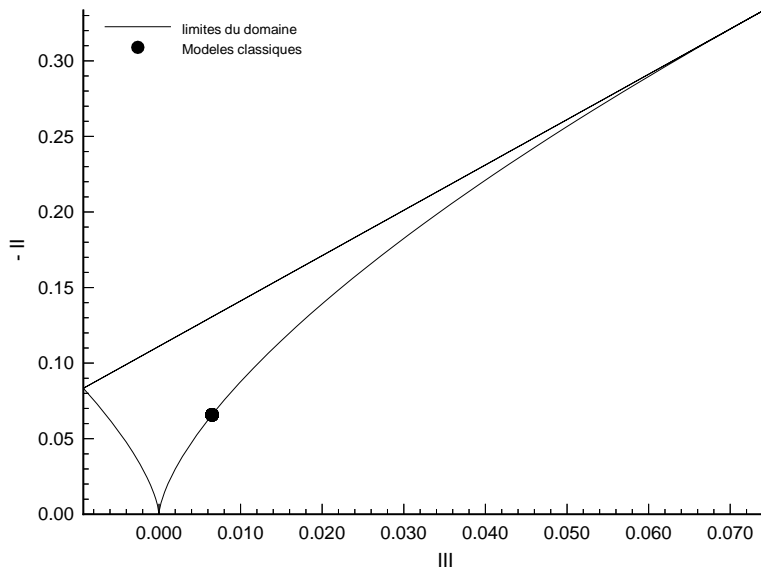


FIG. 6.70: *Comportement des modèles classiques dans le cas 2.*

### Cisaillement en repère tournant

Le cas d'un écoulement turbulent homogène de cisaillement pur dans un repère tournant est intéressant car il constitue une combinaison arbitraire d'une déformation plane et d'une rotation, et représente donc sous une forme simplifiée une classe relativement générale d'écoulement turbulent homogène. Le gradient relatif de vitesse moyenne relative est donné par

$$\bar{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.79)$$

avec

$$\Omega = [0, 0, \Omega] \quad (6.80)$$

le taux de rotation du repère tournant, relativement à un repère inertiel de référence.

Partant d'un état initial isotrope, une turbulence soumise à un cisaillement pur atteint rapidement un état asymptotique, et ce de façon monotone [156]. La prédiction correcte de cet état asymptotique constitue un test intéressant des modèles complets, bien que la plupart de ces modèles soient calibrés de façon à restituer au mieux les valeurs asymptotiques du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. L'adimensionnalisation des équations montre que l'évolution de ces anisotropies dépend uniquement du rapport  $\varepsilon_0/S K_0$ .

Les performances des modèles sont comparées aux simulations de grosses structures de Bardina, Ferziger et Reynolds [5], effectuées à partir d'une turbulence isotrope, avec

$$\frac{\varepsilon_0}{S K_0} = 0.296 \quad (6.81)$$

Les évolutions de l'énergie cinétique turbulente sont comparées aux résultats de ces simulations, bien que ces dernières ne soient pas défiltrées. D'après Speziale, Gatski et Mac Giolla Muhris, les différences entre les champs défiltrés ou non peuvent être cependant considérées comme relativement faibles, du moins sur l'énergie cinétique turbulente [155].

L'addition des forces d'inertie de Coriolis permet de stabiliser ou de déstabiliser l'écoulement [158]. Cet effet apparaît explicitement dans les équations de quantité de mouvement, sous la forme d'un mécanisme supplémentaire de production des contraintes de Reynolds. Les simulations de larges structures [5] ou les théories linéaires [9] montrent que l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente augmentent exponentiellement pour des rapports du taux de rotation du repère à l'intensité du cisaillement  $R_o$  compris entre 0 et 0.5. Le cas le plus énergétique correspond à  $R_o = 0.25$ . Les valeurs intermédiaires  $0 < R_o < 0.5$  correspondent à une action déstabilisante de la rotation sur le cisaillement. Les modèles de turbulence ne sont généralement pas calibrés sur de tels mécanismes, à l'exception du modèle de Speziale, Sarkar et Gatski [159]. Il est donc intéressant de voir dans quelle mesure les modèles sont capables de prédire cet intervalle de stabilité, sans introduire de corrections explicites pour tenir compte de la rotation du repère.



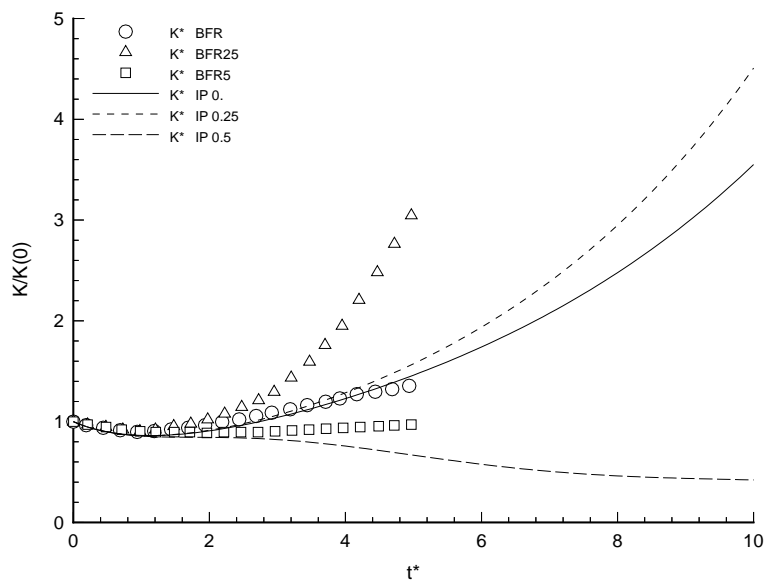


FIG. 6.71: *Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle IP.*

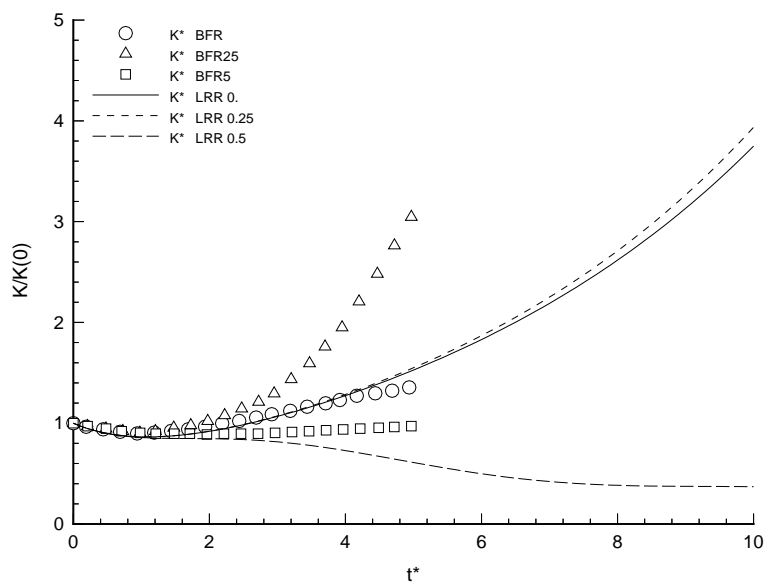


FIG. 6.72: *Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle LRR.*

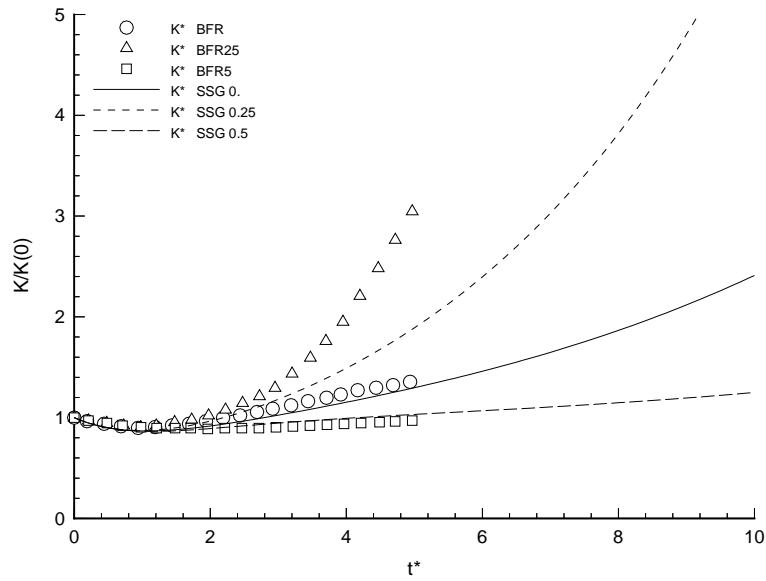


FIG. 6.73: *Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle SSG.*

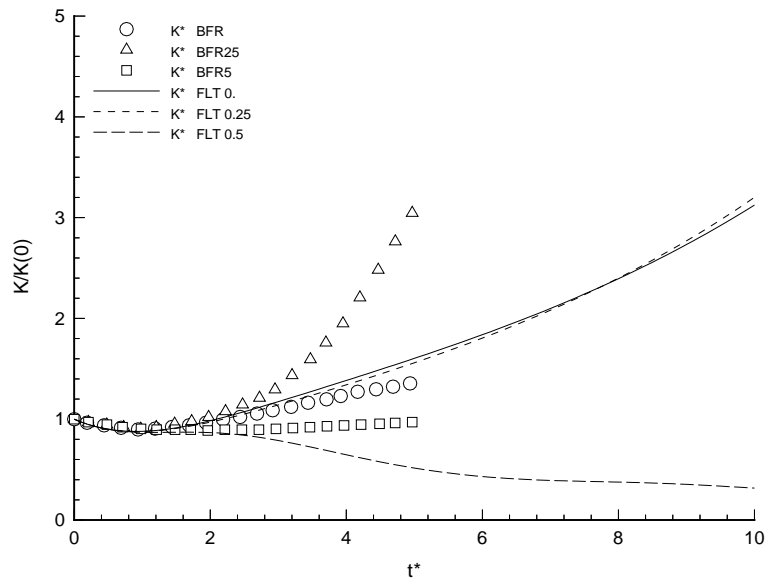


FIG. 6.74: *Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle FLT.*

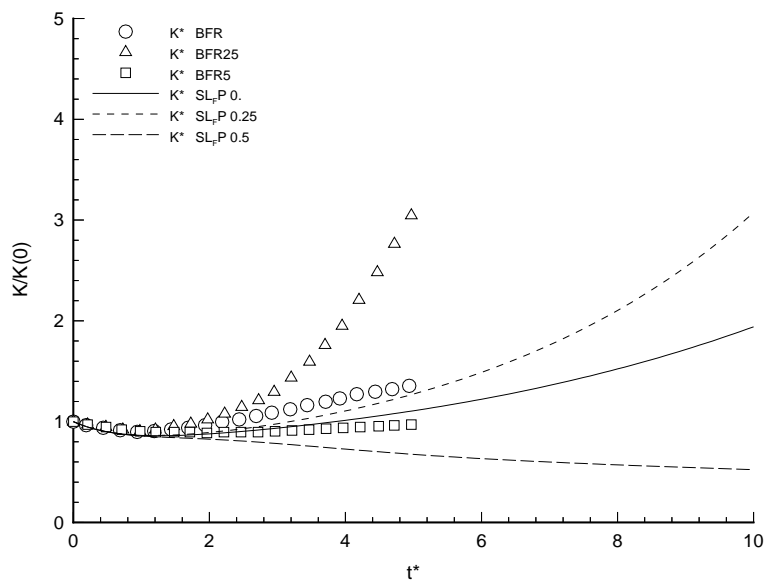


FIG. 6.75: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle SL à grand nombre de Reynolds.

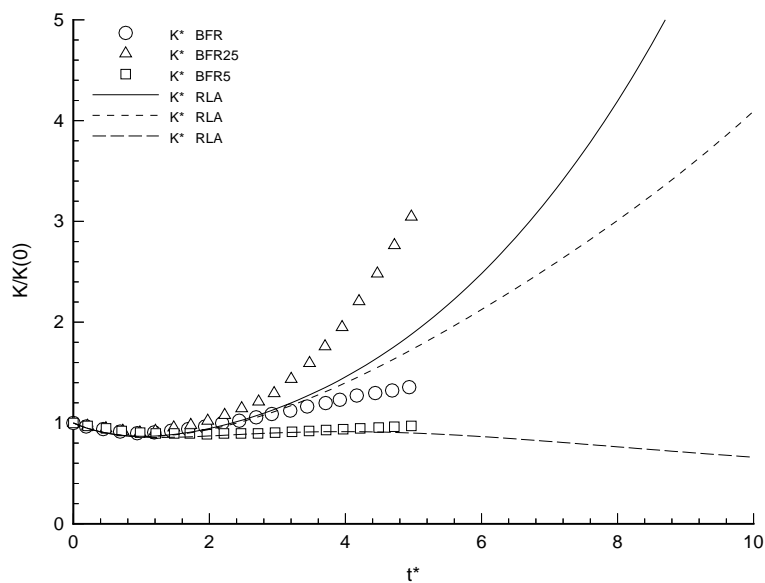


FIG. 6.76: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle RLA.

Les solutions asymptotiques en cisaillement pur sont comparées aux données expérimentales évaluées en moyenne sur les expériences de Tavoularis et Corrsin [165], Tavoularis et Karnik [166] et les simulations directes de Rogers, Moin et Reynolds [120]. Les valeurs des points fixes retenues sont :

$$b_{11}^{\infty} = 0.203 \quad b_{22}^{\infty} = -0.143 \quad b_{33}^{\infty} = -0.06 \quad b_{12}^{\infty} = -0.156 \quad \left(\frac{\varepsilon}{SK}\right)_{\infty} = 0.180 \quad \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_{\infty} = 1.73$$

L'ensemble des modèle atteint un état asymptotique. il est défini par le tableau suivant :

Modèles	$b_{11}^{\infty}$	$b_{22}^{\infty}$	$b_{33}^{\infty}$	$b_{12}^{\infty}$	$\left(\frac{\varepsilon}{SK}\right)_{\infty}$	$\left(\frac{P}{\varepsilon}\right)_{\infty}$
IP	0.192	-0.096	-0.096	-0.185	0.177	2.09
LRR	0.155	-0.121	-0.034	-0.187	0.183	2.04
SSG	0.218	-0.145	-0.073	-0.163	0.180	1.82
FLT	0.210	-0.196	-0.647	-0.145	0.141	2.04
SL	0.192	-0.186	-0.054	-0.090	0.055	3.24
RLA	0.207	-0.143	-0.061	-0.248	0.263	1.88

Ces calculs montrent que le modèle SSG permet de capter relativement bien les tendances des simulations de Bardina, Ferziger et Reynolds. Les modèles linéaires IP et LRR restituent des niveaux d'énergie cinétique turbulente trop élevés dans le cas du cisaillement sans rotation. Ils prédisent également une relaminarisation dans le cas limite de stabilité  $R_o = 0.5$ . Ces tendances s'observent également sur le modèle non-linéaire FLT, dont les performances sont similaires au modèles LRR et sur le modèle RLA. L'ensemble des modèles fournit un niveau d'énergie cinétique turbulente trop faible dans le cas où l'énergie cinétique est maximale, soit lorsque  $R_o = 0.25$ .

## 6.5 Commentaires

L'examen des performances des fermetures homogènes sur les différents cas tests ne permettent pas d'élire un modèle en particulier, qui soit le meilleur sur toutes les configurations. Suivant l'influence du terme lent, du nombre de Reynolds et en fonction des distorsions imposées, la hiérarchie des performances des modèles complets change.

Il peut toutefois être noté que d'une façon générale le modèle de Shih et Lumley se comporte le mieux tant que l'influence du terme lent est importante. Lorsque la distorsion est plus rapide, le modèle de Speziale, Sarkar et Gatski donne des résultats satisfaisants dans l'ensemble. Il est par conséquent intéressant de retenir ces deux modèles pour servir de base à des comparaisons ultérieures. Le modèle de Launder, Reece et Rodi est également toujours intéressant à retenir, parce que c'est le plus simple des modèles capables de prédire de façon relativement correcte les écoulements de déformation pure.



---

## Chapitre 7

# Modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation par une équation de transport

Le tenseur des corrélations pression-déformation peut être écrit en fonction des champs de vitesse moyen et fluctuant sous une forme intégrale, en exprimant la fluctuation de pression comme solution de Green de son équation de Poisson. L'ensemble des modélisations en un point du tenseur des corrélations pression-déformation s'appuie sur une approximation homogène de cette solution, permettant de l'écrire sous la forme tensorielle suivante (Lumley [89]) :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^S + \phi_{ij}^R \quad (7.1a)$$

avec

$$\phi_{ij}^R = 2\bar{V}_{ap,q} [X_{iqpj} + X_{jqpi}] \quad (7.1b)$$

où  $\phi_{ij}^S$  et  $\phi_{ij}^R$  désignent respectivement le terme lent et le terme rapide.

Dans le cas d'une turbulence incompressible et homogène, le tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$  s'écrit de façon exacte comme une intégrale volumique dépendant de gradients de fluctuations de vitesse. Il n'est pas immédiatement affecté par un changement rapide de l'état des contraintes du mouvement moyen, et sa modélisation est généralement supposée indépendante du gradient de vitesse moyenne. La plupart des modélisations classiques expriment ce tenseur comme fonctionnelle isotrope du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  du tenseur de Reynolds, ses coefficients dépendant des invariants *II* et *III*.

Ces modèles rencontrent encore des difficultés dans la prédiction des écoulements purement rotationnels. Dans le cas d'une turbulence homogène soumise à une distorsion rapide, seul le terme rapide nécessite une modélisation. L'équation d'évolution du tenseur de Reynolds s'écrit dans un repère en rotation uniforme :

$$\frac{\bar{d}R_{ij}}{dt} = -R_{ik}\tilde{V}_{aj,k} - R_{jk}\tilde{V}_{ai,k} + 2\bar{V}_{am,n}[X_{inmj} + X_{jnmi}] \quad (7.2)$$

La plupart des modèles classiques fournit des solutions correctes dans le cas de déformations irrotationnelles et rapides. Ils présentent cependant des oscillations non amorties des anisotropies lorsqu'ils sont placés dans des situations de rotation rapide, contrairement aux solutions analytiques issues de la théorie de distorsion rapide.

Il faut en outre remarquer que les évolutions exactes des invariants du tenseur d'anisotropie s'écrivent :

$$\frac{\overline{dII}}{dt} = \frac{4}{\overline{q}^2} \overline{\theta}_{pq} b_{mn} X_{nqpm} \quad (7.3a)$$

$$\frac{\overline{dIII}}{dt} = \frac{4}{\overline{q}^2} \overline{\theta}_{pq} b_{mk} b_{km} X_{nqpm} \quad (7.3b)$$

alors que les modèles classiques répondent par une évolution nulle des invariants :

$$\frac{\overline{dII}}{dt} = 0 \quad (7.4a)$$

$$\frac{\overline{dIII}}{dt} = 0 \quad (7.4b)$$

Le comportement de la turbulence soumise à une rotation rapide ne peut donc pas être correctement prédit par des modèles basés uniquement sur le tenseur  $b_{ij}$ . Ceci tient essentiellement au fait que les contraintes de base, appliquées à cette fonctionnelle de façon à faire respecter les propriétés de symétrie, incompressibilité et normalisation du modèle d'ordre quatre par rapport à la forme exacte de  $X_{ijpq}$ , fournissent un tenseur symétrique sur ses deux indices  $j$  et  $p$ .

Ce chapitre propose une fermeture basée sur l'équation d'évolution du tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$ , déduite de la description spectrale de la turbulence et d'examiner le type d'information contenue dans une telle formulation.

## 7.1 Equation de transport du tenseur de $X_{ijpq}$

### 7.1.1 Evolution dans l'espace spectral

Une approche spectrale des écoulements turbulents permet d'avoir accès à la physique des différentes échelles et de rendre compte de leur contribution au mouvement turbulent. Dans le cas d'une turbulence homogène, elle est convenablement décrite par une analyse de Fourier (annexe J). Les amplitudes de Fourier de fluctuation de vitesse et de pression sont définies par la transformée suivante, d'une grandeur  $\phi(\underline{x})$  :

$$\hat{\phi}(\underline{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi(\underline{x}) e^{-I\underline{k}\cdot\underline{x}} d\underline{x} \quad (7.5)$$

où  $\underline{x}$  désigne la position de la particule fluide dans l'espace physique et  $\underline{k}$  le nombre d'onde. Le tenseur spectral des vitesses est défini dans le cas d'une turbulence homogène par :

$$\Phi_{ij}(\underline{k}) \equiv \overline{\hat{u}_i(-\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{k})} \quad (7.6)$$

L'équation d'évolution des fluctuations de vitesse dans l'espace de Fourier s'écrit, dans un repère tournant, de la façon suivante :

$$\frac{\overline{d\hat{u}_i}}{dt} = -\nu k^2 \hat{u}_i - \hat{u}_k \tilde{V}_{ai,k} + 2 \frac{k_i k_p}{k^2} \overline{V}_{ap,k} \hat{u}_k - Ik_k P_{ip}(\underline{k}) \int u_p(\underline{k} - \underline{p}) u_k(\underline{p}) d\underline{p} \quad (7.7)$$

avec pour dérivée convective,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{\underline{K}} = \frac{\partial}{\partial t} - \bar{V}_{q,p} k_q \frac{\partial}{\partial k_p} \quad (7.8)$$

Les notations habituelles sont adoptées pour les gradients relatifs des vitesses moyennes. Le tenseur  $P_{ij}(\underline{k}) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$  désigne l'opérateur de projection dans le plan orthogonal au nombre d'onde. La pression a été éliminée de l'équation de transport de  $\hat{u}_i$  en l'exprimant en fonction des vitesses par l'intermédiaire de l'équation de Poisson.

L'équation d'évolution des moments du second ordre est formée à partir des évolutions pour les amplitudes des fluctuations et conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{ij}(\underline{k})}{dt} = & - 2\nu k^2 \Phi_{ij}(\underline{k}) \\ & - \tilde{V}_{aj,k} \Phi_{ik}(\underline{k}) - \tilde{V}_{ai,k} \Phi_{kj}(\underline{k}) \\ & + 2\bar{V}_{am,n} \left[ \frac{k_j k_m}{k^2} \Phi_{in}(\underline{k}) + \frac{k_i k_m}{k^2} \Phi_{nj}(\underline{k}) \right] \\ & - \frac{k_m k_n}{k^2} \int [k_i \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) + k_j \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \\ & + k_m \int [\Phi_{imj}(\underline{p}, \underline{k}) + \Phi_{jmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \end{aligned} \quad (7.9)$$

où  $\Phi_{ijp}$  désigne les corrélations triples de fluctuation de vitesse. Sa définition est rappelée en annexe J. Le terme étoilé désigne son conjugué.

L'expression du tenseur spectral des corrélations pression-déformation peut être obtenue avec l'équation de Poisson pour la fluctuation de pression, qui s'écrit, dans l'espace de Fourier :

$$\frac{1}{\rho} \hat{p}(\underline{k}) = -2I \bar{V}_{am,n} \frac{k_m}{k^2} \hat{u}_n(\underline{k}) + \frac{k_n k_m}{k^2} \int \hat{u}_n(\underline{k} - \underline{p}) \hat{u}_m(\underline{p}) d\underline{p} \quad (7.10)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} TF \left[ \frac{1}{\rho} \overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})} \right] = & 2\bar{V}_{am,n} \int \left[ \frac{k_m k_j}{k^2} \Phi_{in}(\underline{k}) + \frac{k_m k_i}{k^2} \Phi_{jn}(\underline{k}) \right] d\underline{k} \\ & - \frac{k_m k_n}{k^2} \int [k_i \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) + k_j \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \end{aligned} \quad (7.11)$$

Le premier terme, linéaire explicitement en fonction du gradient de vitesse moyenne répond immédiatement à toute variation du champ moyen et correspond au terme rapide. Le second terme est la transformée du terme lent, non-linéaire, et désigne le transfert dû aux interactions triadiques de la turbulence sur elle-même.

Il faut noter que le dernier terme de l'équation de transport ci-dessus n'a pas de correspondant dans l'espace physique. Son intégration sur l'ensemble des nombres d'onde est nulle. Il ne contribue pas directement au budget du tenseur de Reynolds. Il correspond à un transfert du spectre du tenseur de Reynolds entre les différents nombres d'onde sans aucune production ou destruction du tenseur de Reynolds. C'est un terme de transfert non-linéaire dans l'espace spectral.



Le terme rapide fait intervenir le tenseur

$$\hat{X}_{ijpq}(\underline{k}) = \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) \quad (7.12)$$

contribution à  $X_{ijpq}$ , présenté au chapitre précédent, des nombres d'onde compris entre  $\underline{k}$  et  $\underline{k} + d\underline{k}$ . Son équation d'évolution se déduit donc aisément de l'équation de transport du tenseur spectral. En effet, l'équation d'évolution du nombre d'onde s'écrit :

$$\left. \frac{d\underline{k}_i}{dt} \right|_{\underline{K}} = -\bar{V}_{p,i} k_p \quad (7.13)$$

où  $\underline{K}$  désigne la valeur initiale du nombre d'onde. Il vient :

$$\frac{d\hat{X}_{ijpq}(\underline{k})}{dt} = \frac{k_p k_q}{k^2} \frac{d\Phi_{ij}(\underline{k})}{dt} - \bar{V}_{n,p} \frac{k_n k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) - \bar{V}_{n,q} \frac{k_p k_n}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) - 2 \frac{k_p k_q}{k^3} \Phi_{ij}(\underline{k}) \frac{d\underline{k}}{dt} \quad (7.14)$$

Or la norme du nombre d'onde satisfait l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{k}^2}{dt} &= 2 k_n \frac{d\underline{k}_n}{dt} \\ &= -2 k_m k_n \bar{V}_{m,n} \end{aligned} \quad (7.15)$$

ce qui donne :

$$\frac{d\underline{k}}{dt} = -\frac{k_m k_n}{k} \bar{V}_{m,n} \quad (7.16)$$

Par conséquent le passage de l'équation de  $\Phi_{ij}$  à celle de  $\hat{X}_{ijpq}$  s'écrit :

$$\frac{d\hat{X}_{ijpq}(\underline{k})}{dt} = \frac{k_p k_q}{k^2} \frac{d\Phi_{ij}(\underline{k})}{dt} - \bar{V}_{n,p} \hat{X}_{ijnq}(\underline{k}) - \bar{V}_{n,q} \hat{X}_{ijnp}(\underline{k}) + 2 \frac{k_m k_n}{k^2} \bar{V}_{m,n} \hat{X}_{ijpq}(\underline{k}) \quad (7.17)$$

En remplaçant le transport du tenseur spectral  $\Phi_{ij}(\underline{k})$  par son expression, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}_{ijpq}(\underline{k})}{dt} &= -2\nu k^2 \hat{X}_{ijpq}(\underline{k}) \\ &\quad - \tilde{V}_{aj,k} \hat{X}_{ikpq}(\underline{k}) - \tilde{V}_{ai,k} \hat{X}_{kjpq}(\underline{k}) \\ &\quad + 2\bar{V}_{am,n} \left[ \frac{k_j k_m}{k^2} \hat{X}_{inpq}(\underline{k}) + \frac{k_i k_m}{k^2} \hat{X}_{njpq}(\underline{k}) \right] \\ &\quad - \frac{k_p k_q}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2} \int [k_i \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) + k_j \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \\ &\quad + k_m \frac{k_p k_q}{k^2} \int [\Phi_{imj}(\underline{p}, \underline{k}) + \Phi_{jmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \\ &\quad - \bar{V}_{n,p} \hat{X}_{ijnq}(\underline{k}) - \bar{V}_{n,q} \hat{X}_{ijnp}(\underline{k}) + 2 \frac{k_m k_n}{k^2} \bar{V}_{m,n} \hat{X}_{ijpq}(\underline{k}) \end{aligned} \quad (7.18)$$

Le tenseur des taux de dissipation sera noté :

$$\hat{\varepsilon}_{ijpq} = 2\nu k_p k_q \Phi_{ij}(\underline{k}) \quad (7.19)$$

Par analogie avec l'équation de transport du tenseur de Reynolds dans le cas d'une turbulence homogène, le terme rapide s'écrit en fonction du tenseur d'ordre six défini par :

$$\hat{B}_{ijpqmn}(\underline{k}) = \frac{k_p k_q}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) \quad (7.20)$$

Les termes non-linéaires forment l'équivalent du terme lent et seront notés :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ijpq}^s(\underline{k}) &= k_m \frac{k_p k_q}{k^2} \int [\Phi_{imj}(\underline{p}, \underline{k}) + \Phi_{jmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \\ &- \frac{k_p k_q}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2} \int [k_i \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) + k_j \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \end{aligned} \quad (7.21)$$

L'équation d'évolution du tenseur spectral  $\hat{X}_{ijpq}$  peut alors se mettre sous la forme suivante, en mettant en évidence les termes provenant des forces de Coriolis :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{X}_{ijpq}(\underline{k})}{dt} &= - \hat{\varepsilon}_{ijpq}(\underline{k}) + \hat{\phi}_{ijpq}^s(\underline{k}) \\ &+ \bar{V}_{m,n} \left[ -\hat{X}_{ijmp} \delta_{nq} - \hat{X}_{ijmq} \delta_{np} - \hat{X}_{inpq} \delta_{jm} - \hat{X}_{njpq} \delta_{im} \right. \\ &\quad \left. + 2\hat{B}_{ijpqmn} + 2\hat{B}_{inpqmj} + 2\hat{B}_{njpqmi} \right] \\ &- 2\bar{\theta}_{mn} \left[ -\hat{X}_{inpq} \delta_{jm} - \hat{X}_{njpq} \delta_{im} \right. \\ &\quad \left. + \hat{B}_{inpqmj} + \hat{B}_{njpqmi} \right] \end{aligned} \quad (7.22)$$

L'équation d'évolution du tenseur des taux de dissipation  $\hat{\varepsilon}_{ijpq}(\underline{k})$  peut être obtenue de façon analogue à celle de  $\hat{X}_{ijpq}$ , puisque les deux tenseurs ne diffèrent que par le produit de  $2\nu k^2$ . Elle s'écrit :

$$\frac{d\hat{\varepsilon}_{ijpq}(\underline{k})}{dt} = -2 \frac{k_m k_n}{k^2} \bar{V}_{m,n} \hat{\varepsilon}_{ijpq} + 2\nu k^2 \frac{d\hat{X}_{ijpq}(\underline{k})}{dt} \quad (7.23)$$

et possède une forme similaire à celle de  $\hat{X}_{ijpq}(\underline{k})$ .

### 7.1.2 Intégration dans l'espace physique

L'intégration sur l'ensemble des nombres d'onde de l'équation précédente écrite dans l'espace spectral conduit à l'équation d'évolution du tenseur dimensionnel  $X_{ijpq}$ .

$$X_{ijpq} = \int \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (7.24)$$

Les intégrations des tenseurs inconnus sont notées :

$$\varepsilon_{ijpq} = 2\nu \int k_p k_q \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (7.25)$$

respectivement, pour le tenseur des taux de dissipation,

$$B_{ijpqmn} = \int \frac{k_p k_q}{k^2} \frac{k_m k_n}{k^2} \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (7.26)$$

pour le tenseur intervenant dans le terme rapide,

$$\phi_{ijpq}^S = \int \hat{\phi}_{ijpq}^s(\underline{k}) d\underline{k} \quad (7.27)$$

et pour le terme lent.

Par définition, la dérivée particulière dans l'espace spectral est la transformée de Fourier de la dérivée particulière de l'espace physique. L'intégration des termes convectifs n'introduit donc pas de tenseur supplémentaire. Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{dX_{ijpq}}{dt} = & - \varepsilon_{ijpq} + \phi_{ijpq}^S \\ & + \bar{V}_{m,n} [-X_{ijmp}\delta_{nq} - X_{ijmq}\delta_{np} - X_{inpq}\delta_{jm} - X_{njpq}\delta_{im} \\ & + 2B_{ijpqmn} + 2B_{inpqmj} + 2B_{njpqmi}] \\ & - 2\bar{\theta}_{m,n} [-X_{inpq}\delta_{jm} - X_{njpq}\delta_{im} \\ & + B_{inpqmj} + B_{njpqmi}] \end{aligned} \quad (7.28)$$

Les forces de Coriolis interviennent ici comme dans le terme source de l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds, c'est-à-dire de façon explicite dans les termes de production et le terme rapide. Leur action diffère cependant dans la mesure où elle ne porte pas sur l'ensemble de ces termes. Son action dans le terme rapide s'effectue ainsi avec la somme  $B_{inpqmj} + B_{njpqmi}$ , et non sur l'ensemble des contributions du tenseur d'ordre six en repère fixe,  $B_{ijpqmn} + B_{inpqmj} + B_{njpqmi}$ . Nous reviendrons sur cet aspect en fin de chapitre.

L'équation d'évolution du tenseur  $X_{ijpq}$  fait intervenir trois tenseurs,  $B_{ijpqmn}$ ,  $\phi_{ijpq}^S$  et  $\varepsilon_{ijpq}$ , traduisant respectivement les comportements des termes rapide, lent et de la dissipation, pour lesquels il convient de formuler trois hypothèses de fermeture.

### 7.1.3 Propriétés des tenseurs et contraintes de base

Le tenseur  $X_{ijpq}$  satisfait les propriétés de symétries et normalisations énoncées au chapitre précédent. Rappelons que ses deux derniers indices sont symétriques puisque la multiplication est commutative. Les deux premiers indices sont également symétriques par hypothèse d'homogénéité de la turbulence.

$$X_{ijpq} = X_{ijqp} \quad (7.29a)$$

$$X_{ijpq} = X_{jipq} \quad (7.29b)$$

Le caractère incompressible de l'écoulement se traduit par :

$$X_{kjkq} = 0 \quad (7.30)$$

avec sommation sur les indices répétés. Ces relations réduisent à 27 le nombre de composantes indépendantes de  $X_{ijpq}$ .

Par définition, ce tenseur d'ordre quatre permet de retrouver le tenseur de Reynolds par contraction de ses deux derniers indices,

$$X_{ijkk} = R_{ij} \quad (7.31)$$

ce qui donne six relations supplémentaires, portant le nombre de composantes indépendantes de 27 à 21. Le tenseur résultant de la contraction de ses deux premiers indices est un tenseur d'ordre deux,

$$X_{kkpq} = Y_{pq} \quad (7.32)$$

défini comme le tenseur de directivité [112].

$$Y_{pq} = \int \frac{k_p k_q}{k^2} \Phi_{nn}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (7.33)$$

Cette contrainte apporte cinq relations, et le nombre de composantes indépendantes de  $X_{ijpq}$  est alors de 16.

Les tenseurs  $\phi_{ijpq}^S$  et  $\varepsilon_{ijpq}$  satisfont les mêmes conditions de symétries des indices que  $X_{ijpq}$ , et le tenseur d'ordre six  $B_{ijpqmn}$  possède par commutativité de la multiplication toutes les symétries sur ses quatre derniers indices. L'homogénéité permet la symétrie de ses deux premiers indices. Ainsi :

$$\phi_{ijpq}^S = \phi_{ijqp}^S \quad (7.34a)$$

$$\phi_{ijpq}^S = \phi_{jipq}^S \quad (7.34b)$$

$$\varepsilon_{ijpq} = \varepsilon_{ijqp} \quad (7.35a)$$

$$\varepsilon_{ijpq} = \varepsilon_{jipq} \quad (7.35b)$$

et

$$B_{ijpqmn} = B_{ijqpnm} \quad (7.36a)$$

$$B_{ijpqmn} = B_{ijpqn m} \quad (7.36b)$$

$$B_{ijpqmn} = B_{ijpnqm} \quad (7.36c)$$

$$B_{ijpqmn} = B_{jipqmn} \quad (7.36d)$$

Le caractère incompressible de l'écoulement permet d'écrire :

$$\phi_{ikpk}^S = 0 \quad (7.37a)$$

$$\varepsilon_{ikpk} = 0 \quad (7.37b)$$

$$B_{ikpkmn} = 0 \quad (7.37c)$$

Ces tenseurs possèdent par définition les relations de normalisation suivantes :

$$\phi_{ijkk}^S = \phi_{ij}^S \quad (7.38a)$$

$$\varepsilon_{ijkk} = \varepsilon_{ij} \quad (7.38b)$$

où  $\phi_{ij}^S$  et  $\varepsilon_{ij}$  sont respectivement les expressions du terme lent et du tenseur des taux de dissipation intervenant dans l'équation du tenseur de Reynolds. La normalisation sur le tenseur d'ordre six s'écrit :

$$B_{ijpqkk} = X_{ijpq} \quad (7.39)$$

Il faut noter que les conditions de normalisation issues de la contraction des deux premiers indices ne fait pas référence à des tenseurs connus ici. Elles ne peuvent donc pas constituer des contraintes dans le choix des modèles.

Les relations de symétries des indices sont immédiatement vérifiées par l'équation de transport de  $X_{ijpq}$ , pourvu que l'ensemble des trois tenseurs précédents les vérifie également.

Outre les conditions de symétries, pour que la propriété d'incompressibilité soit conservée sur l'équation de transport de  $X_{ijpq}$ , il est nécessaire que le terme source de l'équation suivante soit nul :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{d}X_{kjkq}}{dt} = & - \varepsilon_{kjkq} + \phi_{kjkq}^S \\ & + \overline{V}_{m,n} [-X_{kjm k} \delta_{nq} - X_{kjm q} \delta_{nk} - X_{knkq} \delta_{jm} - X_{njkq} \delta_{km} \\ & + 2B_{kjkqmn} + 2B_{knkqmj} + 2B_{njkqmk}] \\ & - 2\overline{\theta}_{mn} [-X_{knkq} \delta_{jm} - X_{njkq} \delta_{km} \\ & + B_{knkqmj} + B_{njkqmk}] \end{aligned} \quad (7.40)$$

Il est clair que si les tenseurs  $\phi_{ijpq}^S$ ,  $\varepsilon_{ijpq}$ , et  $B_{ijpqmn}$  satisfont leur condition d'incompressibilité, cette relation devient :

$$0 = 2\overline{V}_{am,n} [-X_{njm q} + B_{njp m k k}] \quad (7.41)$$

relation qui est satisfaite pour tout gradient de vitesse moyenne lorsque  $B_{ijpqmn}$  vérifie sa condition de normalisation sur  $X_{ijpq}$ . Le respect du caractère incompressible de l'écoulement ne suffit donc pas à assurer à l'équation de transport de  $X_{ijpq}$  de vérifier les relations d'incompressibilité.

La condition de normalisation de l'équation de transport de  $X_{ijpq}$  par rapport à celle de  $R_{ij}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{d}X_{ijkk}}{dt} = & - \varepsilon_{ijkk} + \phi_{ijkk}^S \\
 & + \bar{V}_{m,n} [-X_{ijmk}\delta_{nk} - X_{ijmk}\delta_{nk} - X_{inkk}\delta_{jm} - X_{njkk}\delta_{im} \\
 & + 2B_{ijkkmn} + 2B_{inkkmj} + 2B_{njkkmi}] \\
 & - 2\bar{\theta}_{mn} [-X_{inkk}\delta_{jm} - X_{njkk}\delta_{im} \\
 & + B_{inkkmj} + B_{njkkmi}]
 \end{aligned} \tag{7.42}$$

Si l'ensemble des tenseurs satisfait leur condition de normalisation, il est clair que l'expression précédente est l'équation de transport du tenseur de Reynolds.

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{d}R_{ij}}{dt} = & - \varepsilon_{ij} + \phi_{ij}^S \\
 & - R_{ik}\tilde{V}_{aj,k} - R_{jk}\tilde{V}_{ai,k} \\
 & + 2\bar{V}_{am,n} [X_{imnj} + X_{njmi}]
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

D'une façon analogue, l'équation de transport de  $X_{ijpq}$  fournit l'équation d'évolution du tenseur  $Y_{pq}$  dans le cas d'une turbulence homogène et incompressible, puisque par contraction des deux premiers indices, il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{d}X_{kkpq}}{dt} = & - \varepsilon_{kkpq} + \phi_{kkpq}^S \\
 & + \bar{V}_{m,n} [-X_{kkmp}\delta_{nq} - X_{kkmq}\delta_{np} - X_{knpq}\delta_{km} - X_{nkpq}\delta_{km} \\
 & + 2B_{kkpqmn} + 2B_{knpqmk} + 2B_{nkpqmk}] \\
 & - 2\bar{\theta}_{mn} [-X_{knpq}\delta_{km} - X_{nkpq}\delta_{km} \\
 & + B_{knpqmk} + B_{nkpqmk}]
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

Si l'ensemble des tenseurs satisfait ses normalisations et que le tenseur  $B_{ijpqmn}$  satisfait l'incompressibilité, il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\bar{d}Y_{pq}}{dt} = & - \varepsilon_{kkpq} + \phi_{kkpq}^S \\
 & - Y_{kp}\bar{V}_{k,q} - Y_{kq}\bar{V}_{k,p} \\
 & + 2\bar{V}_{m,n} [-X_{mnpq} + B_{kkpqmn}] \\
 & - 4\bar{\theta}_{mn} [X_{mnpq}]
 \end{aligned} \tag{7.45}$$

Il faut noter que si  $X_{ijpq}$  satisfait la condition d'homogénéité, les indices  $m$  et  $n$  sont symétriques. Le tenseur de rotation du repère  $\bar{\theta}_{mn}$  étant antisymétrique, il vient :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\bar{Y}_{pq}}{dt} = & - \varepsilon_{kkpq} + \phi_{kkpq}^S \\
 & - Y_{kp}\bar{V}_{k,q} - Y_{kq}\bar{V}_{k,p} \\
 & + 2\bar{S}_{mn}[-X_{mnpq} + B_{kkpqmn}]
 \end{aligned} \tag{7.46}$$

où  $\bar{S}_{mn}$  est le tenseur des taux de déformation du mouvement moyen. Les forces de Coriolis n'interviennent pas de façon explicite dans l'équation pour  $Y_{pq}$ . Elles ne seront susceptibles d'influencer le tenseur structurel que par leur action sur le tenseur  $X_{mnpq}$  et les autres termes de l'écoulement. Il est alors clair que l'utilisation de ce tenseur en complément au tenseur de Reynolds ne suffit pas pour rendre compte de l'action de la rotation seule, et qu'il est nécessaire de regarder l'évolution du tenseur d'ordre quatre. Dans le cas d'une rotation en présence de déformations relatives du mouvement moyen, l'intervention de ce tenseur peut être intéressante, et fournir des résultats satisfaisants, du moins en ce qui concerne l'approximation de distorsion rapide [67].

Il reste à déterminer les propriétés qui doivent constituer des contraintes dans la construction des modèles. La forme du terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation et celle du tenseur des taux de dissipation sont des modèles dans l'équation du tenseur de Reynolds. Dans le cas d'une turbulence homogène incompressible, seules les symétries et l'incompressibilité constituent des contraintes à respecter dans la construction des modèles de ces tenseurs pour l'équation d'évolution du tenseur  $X_{ijpq}$ . La forme des normalisations dépend du choix de ces modèles et peut être discutée *a posteriori*. Le cas du terme rapide est différent dans la mesure où son expression est exacte dans l'équation de transport du tenseur de Reynolds. Dans ce cas, deux systèmes de contraintes peuvent être envisagés. Le premier porte directement sur le tenseur  $B_{ijpqmn}$ . C'est *a priori* la forme la plus restrictive, et la seule qui assure au modèle de représenter correctement le tenseur qu'il approche. C'est le système choisi pour déterminer les coefficients du modèle. Le second système porte sur les équations de transport, et demande au modèle de permettre à l'équation d'évolution de  $X_{ijpq}$  de représenter correctement l'équation du tenseur de Reynolds dans l'approximation d'une turbulence homogène et incompressible. Cette condition sera appelée par la suite contrainte de normalisation faible. Son incidence sur le modèle sera discutée au paragraphe 7.3.

La prise en compte des propriétés des tenseurs présente un autre intérêt que celui de la modélisation. Cela permet de réduire considérablement le nombre d'inconnues scalaires à résoudre. Un tenseur d'ordre quatre possède en effet 81 composantes *a priori*. Si les modèles permettent de satisfaire les symétries portant sur les deux derniers indices, le nombre de composantes indépendantes n'est plus que de 54. La vérification de l'incompressibilité fournit dix-sept relations supplémentaires, qui permettent de ne retenir que 37 composantes indépendantes. Le caractère homogène de la turbulence réduit ce nombre à 27. Le système des équations homogènes de transport de  $X_{ijpq}$  doit être constitué d'au plus 27 équations différentielles scalaires. Si les normalisations sur le tenseur de Reynolds et le tenseur de directivité sont prises en compte de façon explicite, le nombre de composantes indépendantes du tenseur  $X_{ijpq}$  à retenir est de 16, la première normalisation apportant six relations, et la seconde, cinq. Le système à résoudre pour les grandes échelles est alors formé de 16 équations provenant du tenseur d'ordre quatre, des 6 équations du tenseur de Reynolds, complétées par 5 équations d'évolution du tenseur de directivité. Dans le cas d'une turbulence homogène et incompressible, les modèles doivent permettre de passer d'un système de variables indépendantes à l'autre. Les contraintes étant linéaires, ce

peut être effectué de façon matricielle (annexe P).

Le tenseur  $B_{ijpqmn}$  est d'ordre six, et possède quant à lui 729 composantes *a priori*. La vérification des symétries sur ses quatre derniers indices réduit ce nombre à 135. L'incompressibilité fournit alors cinquante-quatre relations supplémentaires, et la normalisation permet de ne retenir plus que 44 composantes indépendantes. La vérification des contraintes d'homogénéité impose de plus onze relations. Par conséquent, si le modèle satisfait l'ensemble des contraintes de base, il suffit de ne retenir que 33 composantes pour décrire l'ensemble du tenseur  $B_{ijpqmn}$ , homogène, pour lequel il reste à déterminer une fermeture.

## 7.2 Principe de la modélisation

La démarche habituelle aux modèles classiques concernant le tenseur des corrélations pression-déformation d'une turbulence homogène, consiste à fixer l'expression du terme lent puis à déterminer le terme rapide. Cette procédure est largement motivée par la simplicité de mise en œuvre du terme lent et la possibilité de visualiser le comportement dynamique du mécanisme de retour à l'isotropie dans le plan des invariants.

Dans le cas présent, le manque d'informations sur le détail du comportement des tenseurs d'ordre élevé intervenant dans le terme lent du bilan de  $X_{ijpq}$  incite à suivre la démarche inverse, en commençant par déterminer la forme du modèle rapide. Ses propriétés tensorielles et les contraintes qu'il vérifie sont exposées dans le prochain paragraphe. Le terme rapide est calibré à l'aide de la Théorie de Distorsion Rapide pour un écoulement homogène. Il est ensuite testé sur les situations classiques d'écoulements, évoluant dans la limite de distorsion rapide.

Les hypothèses de modélisation des tenseurs d'ordre quatre des taux de dissipation et du terme lent sont effectuées ensemble et sont donc exposées après le terme rapide. Les écoulements sont supposés à grands nombres de Reynolds. Les constantes du terme lent sont évaluées numériquement de façon à satisfaire au mieux la limite asymptotique d'un écoulement de cisaillement pur appliqué à une turbulence initialement isotrope. Il serait bien évidemment préférable d'ajuster les paramètres en plaçant le modèle dans la limite des écoulements de retour à l'isotropie, et d'effectuer une étude similaire à celle réalisée dans la hiérarchie des modèles classiques du second ordre. Cette procédure trouve cependant sa justification dans le fait que les termes lent et rapide caractérisent précisément des types limites d'écoulement turbulent, et ne se juxtaposent pas simplement dans le cas général. Dans les formulations classiques, le terme rapide est souvent calibré numériquement, sur une situation complète, après que le terme lent ait été déterminé par des expériences de retour à l'isotropie, si bien qu'un couplage existe effectivement entre les modèles des termes lent et rapide.

Le comportement du modèle homogène complet est ensuite comparé à des modèles classiques sur certains des cas tests classiques du chapitre précédent, permettant de commenter les choix effectués.

## 7.3 Proposition de terme rapide

L'écoulement turbulent est supposé homogène et incompressible et satisfait l'approximation de distorsion rapide, de sorte que seul le terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation nécessite une modélisation dans l'équation de transport du tenseur de Reynolds, qui s'écrit :



$$\frac{dR_{ij}}{dt} = -R_{ik}\tilde{V}_{aj,k} - R_{jk}\tilde{V}_{ai,k} + 2\bar{V}_{am,n}[X_{inmj} + X_{jnmi}] \quad (7.47)$$

L'équation d'évolution du tenseur  $X_{ijpq}$  devient quant à elle :

$$\begin{aligned} \frac{dX_{ijpq}}{dt} = & \bar{V}_{m,n} [-X_{ijmp}\delta_{nq} - X_{ijmq}\delta_{np} - X_{inpq}\delta_{jm} - X_{njpq}\delta_{im} \\ & + 2B_{ijpqmn} + 2B_{inpqmj} + 2B_{njpqmi}] \\ & - 2\bar{\theta}_{mn} [-X_{inpq}\delta_{jm} - X_{njpq}\delta_{im} \\ & + B_{inpqmj} + B_{njpqmi}] \end{aligned} \quad (7.48)$$

La fermeture est entièrement assurée par le tenseur  $B_{ijpqmn}$ .

### 7.3.1 Propriétés et expression de la fonctionnelle

Le tenseur  $B_{ijpqmn}$ , sur lequel porte la modélisation du terme rapide, est modélisé de façon analogue au tenseur  $X_{ijpq}$  pour les modèles classiques rapides. Il est supposé s'exprimer comme fonctionnelle isotrope du tenseur  $X_{ijpq}$  et des tenseurs d'ordre deux qui en découlent par contraction des indices, soient le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  et le tenseur structurel  $Y_{pq}$ . Par simplicité, seule l'expression linéaire est retenue, et elle est écrite sous une forme analogue à la modélisation d'un tenseur du quatrième ordre, c'est-à-dire en ne prenant en compte que le tenseur de Kronecker pour le développement de la base.

La fonctionnelle est ainsi composée *a priori* de sept cent vingt tenseurs d'ordre six. La vérification des symétries sur les quatre derniers indices et de la contrainte d'homogénéité imposant la symétrie des deux premiers indices ramène le nombre de groupements tensoriels à seize. La fonctionnelle s'écrit ainsi :

$$\begin{aligned}
& B_{ijpqmn} \\
& = \\
& 2K \frac{c_1}{15} [\delta_{ij}(\delta_{pq}\delta_{mn} + \delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})] \\
& + 2K \frac{c_2}{15} [\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{pq} + \delta_{jm}\delta_{in}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{mn} + \delta_{jp}\delta_{iq}\delta_{mn} + \delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{nq} + \delta_{jp}\delta_{im}\delta_{nq} \\
& + \delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{mq} + \delta_{jp}\delta_{in}\delta_{mq} + \delta_{iq}\delta_{jm}\delta_{np} + \delta_{jq}\delta_{im}\delta_{np} + \delta_{iq}\delta_{jn}\delta_{mp} + \delta_{jq}\delta_{in}\delta_{mp}] \\
& + \frac{c_3}{15} [R_{ij}(\delta_{pq}\delta_{mn} + \delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})] \\
& + \frac{c_4}{15} [Y_{ij}(\delta_{pq}\delta_{mn} + \delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})] \\
& + \frac{c_5}{15} [R_{ip}(\delta_{jq}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{qm} + \delta_{jm}\delta_{qn}) + R_{iq}(\delta_{jp}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{pm} + \delta_{jm}\delta_{pn}) \\
& + R_{jp}(\delta_{jq}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{qm} + \delta_{jm}\delta_{qn}) + R_{jq}(\delta_{jp}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{pm} + \delta_{jm}\delta_{pn}) \\
& + R_{in}(\delta_{jq}\delta_{mp} + \delta_{jp}\delta_{qm} + \delta_{jm}\delta_{qp}) + R_{im}(\delta_{jq}\delta_{np} + \delta_{jp}\delta_{qn} + \delta_{jm}\delta_{qp}) \\
& + R_{jn}(\delta_{iq}\delta_{mp} + \delta_{ip}\delta_{qm} + \delta_{im}\delta_{qp}) + R_{jm}(\delta_{iq}\delta_{np} + \delta_{ip}\delta_{qn} + \delta_{in}\delta_{qp})] \\
& + \frac{c_6}{15} [Y_{ip}(\delta_{jq}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{qm} + \delta_{jm}\delta_{qn}) + Y_{iq}(\delta_{jp}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{pm} + \delta_{jm}\delta_{pn}) \\
& + Y_{jp}(\delta_{jq}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{qm} + \delta_{jm}\delta_{qn}) + Y_{jq}(\delta_{jp}\delta_{mn} + \delta_{jn}\delta_{pm} + \delta_{jm}\delta_{pn}) \\
& + Y_{in}(\delta_{jq}\delta_{mp} + \delta_{jp}\delta_{qm} + \delta_{jm}\delta_{qp}) + Y_{im}(\delta_{jq}\delta_{np} + \delta_{jp}\delta_{qn} + \delta_{jm}\delta_{qp}) \\
& + Y_{jn}(\delta_{iq}\delta_{mp} + \delta_{ip}\delta_{qm} + \delta_{im}\delta_{qp}) + Y_{jm}(\delta_{iq}\delta_{np} + \delta_{ip}\delta_{qn} + \delta_{in}\delta_{qp})] \\
& + c_7 [\delta_{ij}(R_{pq}\delta_{mn} + R_{pm}\delta_{qn} + R_{pn}\delta_{qm} + \delta_{pq}R_{mn} + \delta_{pm}R_{qn} + \delta_{pn}R_{qm})] \\
& + c_8 [\delta_{ij}(Y_{pq}\delta_{mn} + Y_{pm}\delta_{qn} + Y_{pn}\delta_{qm} + \delta_{pq}Y_{mn} + \delta_{pm}Y_{qn} + \delta_{pn}Y_{qm})] \\
& + \frac{c_9}{15} [R_{pq}(\delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + R_{pm}(\delta_{ij}\delta_{qn} + \delta_{iq}\delta_{jn} + \delta_{jq}\delta_{in}) \\
& + R_{pn}(\delta_{ij}\delta_{qm} + \delta_{iq}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jp}) + R_{qm}(\delta_{ij}\delta_{pn} + \delta_{ip}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jp}) \\
& + R_{qn}(\delta_{ij}\delta_{mp} + \delta_{ip}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jp}) + R_{mn}(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})] \\
& + \frac{c_{10}}{15} [Y_{pq}(\delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + Y_{pm}(\delta_{ij}\delta_{qn} + \delta_{iq}\delta_{jn} + \delta_{jq}\delta_{in}) \\
& + Y_{pn}(\delta_{ij}\delta_{qm} + \delta_{iq}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jp}) + Y_{qm}(\delta_{ij}\delta_{pn} + \delta_{ip}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jp}) \\
& + Y_{qn}(\delta_{ij}\delta_{mp} + \delta_{ip}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jp}) + Y_{mn}(\delta_{ij}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq} + \delta_{iq}\delta_{jp})] \\
& + c_{11} [\delta_{ij}(X_{pqmn} + X_{nqmp} + X_{mqnp} + X_{mnpq} + X_{mpnq} + X_{nmpq})] \\
& + c_{12} [X_{ijpq}\delta_{mn} + X_{ijmn}\delta_{pq} + X_{ijqm}\delta_{pn} + X_{ijqn}\delta_{pm} + X_{ijpm}\delta_{qn} + X_{ijpn}\delta_{qm}] \\
& + c_{13} [X_{pqij}\delta_{mn} + X_{mni j}\delta_{pq} + X_{qmij}\delta_{pn} + X_{qni j}\delta_{pm} + X_{pmij}\delta_{qn} + X_{pni j}\delta_{qm}] \\
& + c_{14} [(X_{ipjq} + X_{iqjp} + X_{jpiq} + X_{jqip})\delta_{mn} + (X_{imjn} + X_{injm} + X_{jmin} + X_{jnim})\delta_{pq} \\
& + (X_{imjq} + X_{iqjm} + X_{jm iq} + X_{jqim})\delta_{np} + (X_{injq} + X_{iqjn} + X_{jniq} + X_{jqin})\delta_{mp} \\
& + (X_{imjp} + X_{ipjm} + X_{jm ip} + X_{jpim})\delta_{nq} + (X_{injp} + X_{ipjn} + X_{jni p} + X_{jpin})\delta_{mq}] \\
& + c_{15} [(X_{jn pq} + X_{jp nq} + X_{jq np})\delta_{im} + (X_{in pq} + X_{ip nq} + X_{iq np})\delta_{jm} \\
& + (X_{jm pq} + X_{jp mq} + X_{jq mp})\delta_{in} + (X_{im pq} + X_{ip mq} + X_{iq mp})\delta_{jn} \\
& + (X_{jq mn} + X_{jm nq} + X_{jn mq})\delta_{ip} + (X_{iq mn} + X_{im nq} + X_{in mq})\delta_{jp} \\
& + (X_{jp mn} + X_{jm np} + X_{jn mp})\delta_{iq} + (X_{ip mn} + X_{im np} + X_{in mp})\delta_{jq}] \\
& + c_{16} [(X_{pqjn} + X_{nqjp} + X_{npjq})\delta_{im} + (X_{pqin} + X_{nqip} + X_{npiq})\delta_{jm} \\
& + (X_{pqjm} + X_{mqjp} + X_{mpjq})\delta_{in} + (X_{pqim} + X_{mqip} + X_{mpiq})\delta_{jn} \\
& + (X_{mnjq} + X_{nqjm} + X_{mqjn})\delta_{ip} + (X_{mniq} + X_{nqim} + X_{mqin})\delta_{jp} \\
& + (X_{mnjp} + X_{npjm} + X_{mpjn})\delta_{iq} + (X_{mni p} + X_{npi m} + X_{mpin})\delta_{jq}]
\end{aligned} \tag{7.49}$$

L'ensemble des tenseurs présentés sont dimensionnels. La fonctionnelle est mise sous la même forme que celle de Johansson [63] et ne diffère que par le choix des coefficients (annexe Q).

Il existe deux contraintes de base à imposer à la fonctionnelle pour que le modèle soit cohérent avec le tenseur qu'il est censé représenter. Ce sont les contraintes d'incompressibilité et de normalisation, propriétés satisfaites par les quantités statistiques sur lesquelles porte la modélisation, et qu'il convient donc de vérifier.

Il conviendra enfin de s'assurer que la fonctionnelle choisie satisfait l'état limite d'une turbulence isotrope. Cette limite est simple dans la mesure où les quantités statistiques peuvent être calculées analytiquement, connaissant la forme du tenseur spectral lorsque la turbulence est spectralement isotrope, pour laquelle les tenseurs sont notés par l'exposant  $(\cdot)^{iso}$ . L'intégration du tenseur spectral sur l'ensemble des nombres d'onde conduit à l'expression exacte suivante :

$$B_{ijpqmn}^{iso} = \begin{aligned} & 2K \frac{1}{35} [\delta_{ij}(\delta_{pq}\delta_{mn} + \delta_{pm}\delta_{qn} + \delta_{pn}\delta_{qm})] \\ & - 2K \frac{1}{210} [\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{pq} + \delta_{jm}\delta_{in}\delta_{pq} + \delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{mn} + \delta_{jp}\delta_{iq}\delta_{mn} \\ & + \delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{nq} + \delta_{jp}\delta_{im}\delta_{nq} + \delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{mq} + \delta_{jp}\delta_{in}\delta_{mq} \\ & + \delta_{iq}\delta_{jm}\delta_{np} + \delta_{jq}\delta_{im}\delta_{np} + \delta_{iq}\delta_{jn}\delta_{mp} + \delta_{jq}\delta_{in}\delta_{mp}] \end{aligned} \quad (7.50)$$

sachant que :

$$R_{ij}^{iso} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} \quad (7.51a)$$

$$Y_{pq}^{iso} = \frac{2}{3} K \delta_{pq} \quad (7.51b)$$

$$X_{ijpq}^{iso} = 2K \left[ \frac{2}{15} \delta_{ij} \delta_{pq} - \frac{1}{30} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jp} \delta_{iq}) \right] \quad (7.51c)$$

Il faut cependant noter que cette limite ne constitue pas une contrainte, mais doit être systématiquement vérifiée par les coefficients, après application des contraintes de base, étant donné que la fonctionnelle est construite comme un développement autour de l'isotropie. Elle représente le premier terme du développement.

### 7.3.2 Etablissement des contraintes de base

Les coefficients de la fonctionnelle sont supposés constants. Cette approximation suit la démarche adoptée pour les modèles classiques, conduisant notamment au modèle de Launder, Reece et Rodi [74]. L'application de la contrainte d'incompressibilité conduit à la résolution du système suivant, obtenu en développant (7.37a) sur la base tensorielle :

$$\frac{1}{15}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + \frac{1}{15}c_5 + \frac{1}{15}c_6 = 0 \quad (7.52a)$$

$$\frac{2}{15}c_6 + c_8 + \frac{7}{15}c_{10} + c_{15} = 0 \quad (7.52b)$$

$$c_{11} + c_{12} + 2c_{14} + 7c_{15} = 0 \quad (7.52c)$$

$$\frac{1}{15}c_3 + \frac{7}{15}c_5 + c_7 + \frac{1}{15}c_9 + c_{14} = 0 \quad (7.52d)$$

$$\frac{2}{15}c_5 + c_7 + \frac{7}{15}c_9 + c_{16} = 0 \quad (7.52e)$$

$$\frac{1}{15}c_4 + \frac{7}{15}c_6 + c_8 + \frac{1}{15}c_{10} + c_{14} = 0 \quad (7.52f)$$

$$c_{11} + c_{13} + 2c_{14} + 7c_{16} = 0 \quad (7.52g)$$

La normalisation est quant à elle satisfaite par :

$$\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{15}c_2 + c_7 + c_8 + \frac{1}{15}c_9 + \frac{1}{15}c_{10} = 0 \quad (7.53a)$$

$$\frac{7}{15}c_2 + \frac{1}{15}c_9 + \frac{1}{15}c_{10} = 0 \quad (7.53b)$$

$$\frac{1}{3}c_3 + \frac{4}{15}c_5 + c_{12} = 0 \quad (7.53c)$$

$$\frac{1}{3}c_4 + \frac{4}{15}c_6 + c_{13} = 0 \quad (7.53d)$$

$$\frac{7}{15}c_5 + \frac{2}{15}c_9 + c_{15} = 0 \quad (7.53e)$$

$$\frac{7}{15}c_6 + \frac{2}{15}c_{10} + c_{16} = 0 \quad (7.53f)$$

$$7c_7 + \frac{3}{5}c_9 + c_{11} = 0 \quad (7.53g)$$

$$7c_8 + \frac{3}{5}c_{10} + c_{11} = 0 \quad (7.53h)$$

$$7c_{12} + 4c_{15} - 1 = 0 \quad (7.53i)$$

$$7c_{13} + 4c_{16} = 0 \quad (7.53j)$$

$$7c_{14} + 2c_{15} + 2c_{16} = 0 \quad (7.53k)$$

A titre indicatif, la limite isotrope est satisfaite lorsque la turbulence est isotrope, et que :

$$-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{3}c_5 - \frac{1}{3}c_6 - \frac{1}{6}c_9 - \frac{1}{6}c_{10} + \frac{1}{4}c_{12} + \frac{1}{4}c_{13} - \frac{3}{2}c_{14} - c_{15} - c_{16} - \frac{1}{28} = 0 \quad (7.54a)$$

$$-\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{6}c_3 - \frac{1}{6}c_4 - 5c_7 - 5c_8 - \frac{1}{3}c_9 - \frac{1}{3}c_{10} - c_{11} - 2c_{12} - 2c_{13} + 2c_{14} + \frac{3}{14} = 0 \quad (7.54b)$$

Ces deux relations doivent être vérifiées *a posteriori*.

### 7.3.3 Résolution des contraintes de base

La résolution du système complet conduit à déterminer l'ensemble des coefficients de la fonctionnelle à l'exception d'un seul. Le modèle possède ainsi un degré de liberté après application des contraintes de base, noté  $c$ .

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{10}{147} + \frac{135}{14}c & c_5 &= -\frac{5}{588} - \frac{15}{7}c & c_9 &= -\frac{71}{147} - \frac{30}{7}c & c_{13} &= -\frac{2}{315} + c \\
 c_2 &= -\frac{5}{588} - \frac{15}{7}c & c_6 &= -\frac{4}{147} + \frac{45}{28}c & c_{10} &= \frac{1}{84} + \frac{15}{2}c & c_{14} &= c \\
 c_3 &= -\frac{71}{147} - \frac{30}{7}c & c_7 &= \frac{4}{245} - \frac{55}{28}c & c_{11} &= -\frac{1}{14} + \frac{37}{4}c & c_{15} &= -\frac{1}{90} - \frac{7}{4}c \\
 c_4 &= \frac{2}{49} - \frac{30}{7}c & c_8 &= \frac{9}{980} - \frac{55}{28}c & c_{12} &= \frac{47}{315} + c & c_{16} &= \frac{1}{90} - \frac{7}{4}c
 \end{aligned} \tag{7.55}$$

Ces coefficients vérifient les expressions analytiques de la limite isotrope.

Il est intéressant de regarder le système de coefficients obtenus en appliquant la contrainte de normalisation faible. Elle consiste à appliquer les contraintes de base, non pas sur le modèle lui-même, mais sur les équations d'évolution. Elle repose sur l'idée que si les coefficients de  $B_{ijpqmn}$  ne permettent pas de satisfaire la contrainte classique de normalisation, ils doivent au moins permettre de retrouver les équations de transport des tenseurs  $R_{ij}$  et  $Y_{pq}$  à partir de l'équation d'évolution de  $X_{ijpq}$ , en supposant que  $X_{ijpq}$  satisfasse lui-même ses contraintes de base. Etant donné que le modèle de  $B_{ijpqmn}$ , construit en approximation de distorsion rapide, est linéaire, l'ensemble des équations différentielles est linéaire. Il suffit alors de connaître la matrice de passage d'un système de variables à l'autre pour en déduire les relations que doit satisfaire l'ensemble des coefficients dans ce cas. L'ensemble des calculs a été effectué à l'aide du logiciel de calcul formel Maple V - Release 2. Les bases de variables indépendantes retenues sont données en annexe P, ainsi que la matrice de passage correspondante. Le principe du développement est rappelé ci-dessous.

Le nombre de composantes indépendantes de  $X_{ijpq}$ , après vérification de ses contraintes de base est vingt-sept. Le système peut donc se composer de vingt-sept équations d'évolution scalaires de  $X_{ijpq}$ ,  $X_{27}$ , ou bien d'un système faisant intervenir les variables de la normalisation,  $R_{ij}$  et  $Y_{pq}$ , nommé  $Y_{16}$ .  $Y_{16}$  peut être constitué des six composantes indépendantes de  $R_{ij}$ , de seize composantes de  $X_{ijpq}$ , et cinq composantes de  $Y_{pq}$ . Les contraintes de base permettent de passer d'un système de variables indépendantes à un autre suivant la relation :

$$Y_{16} = P^{-1} X_{27} \tag{7.56}$$

en posant  $P$  la matrice de passage de  $Y_{16}$  à  $X_{27}$ . Cette matrice est indépendante du mouvement, et

$$\frac{dY_{16}}{dt} = P^{-1} \frac{dX_{27}}{dt} \tag{7.57}$$

Les systèmes d'équations étant linéaires, ils peuvent être notés sous la forme :

$$\frac{dY_{16}}{dt} = M_{16} Y_{16} \tag{7.58}$$

$$\frac{dX_{27}}{dt} = M_{27} X_{27} \tag{7.59}$$

Dans ce cas,

$$\frac{dY_{16}}{dt} = P^{-1} M_{27} P X_{27} \tag{7.60}$$

et le système des contraintes doit satisfaire l'égalité

$$M_{16} = P^{-1} M_{27} P \quad (7.61)$$

quels que soient les gradients de vitesse moyenne. La résolution de ce système conduit à exprimer l'ensemble des coefficients du modèle en fonction de deux paramètres. En choisissant  $c_{14}$  et  $c_{15}$ , il vient :

$$\begin{aligned} c_1 &= -60 c_{14} - \frac{1950}{49} c_{15} - \frac{25}{49} & c_7 &= 2 c_{14} + \frac{111}{49} c_{15} + \frac{61}{1470} & c_{13} &= -2 c_{14} - \frac{12}{7} c_{15} - \frac{8}{315} \\ c_2 &= 15 c_{14} + \frac{480}{49} c_{15} + \frac{23}{196} & c_8 &= 2 c_{14} + \frac{111}{49} c_{15} + \frac{101}{2940} & c_{14} &= c_{14} \\ c_3 &= 60 c_{14} + \frac{1800}{49} c_{15} - \frac{11}{147} & c_9 &= -\frac{30}{7} c_{15} - \frac{5}{42} & c_{15} &= c_{15} \\ c_4 &= 60 c_{14} + \frac{1800}{49} c_{15} + \frac{22}{49} & c_{10} &= -\frac{30}{7} c_{15} - \frac{1}{28} & c_{16} &= c_{15} + \frac{1}{45} \\ c_5 &= -15 c_{14} - \frac{465}{49} c_{15} - \frac{3}{49} & c_{11} &= -\frac{37}{7} c_{15} - \frac{41}{315} & & \\ c_6 &= -15 c_{14} - \frac{465}{49} c_{15} - \frac{13}{98} & c_{12} &= -2 c_{14} - \frac{12}{7} c_{15} + \frac{41}{315} & & \end{aligned} \quad (7.62)$$

Ce système possède un degré de liberté supplémentaire par rapport au système dérivé des contraintes fortes. Les coefficients sont équivalents si et seulement si

$$c_{15} = -\frac{1}{90} - \frac{7}{4} c \quad (7.63)$$

Les deux systèmes vérifient l'ensemble des contraintes de base à l'exception de la contrainte de normalisation, dont la formulation faible apporte une forme moins restrictive. Il faut noter que la formulation faible exige que l'équation d'évolution du tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$  soit cohérente avec les équations d'évolution des tenseurs issus de la contraction de deux de ses indices, et en particulier de l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds. Il est clair que dans le cas d'une turbulence homogène où le tenseur  $X_{ijpq}$  et ses normalisations par rapport à  $R_{ij}$  et  $Y_{pq}$  sont définis de façon exacte, cette contrainte a un sens. Si l'écoulement est de plus en approximation de distorsion rapide, la condition de normalisation sur les équations d'évolution est équivalente à imposer une contrainte de façon indirecte sur le tenseur  $B_{ijpqmn}$  intervenant dans le terme rapide, les autres termes étant connus de façon exacte. Dès que l'écoulement homogène sort de cette approximation, une telle contrainte fournit des relations faisant intervenir les modèles des termes lent et du tenseur des taux de dissipation. Ce fait n'est pas un problème dans la mesure où les termes lent et rapide ne sont effectivement pas indépendants dans le cas général, mais il ne permet plus de disposer d'un outil de réduction des degrés de liberté du terme rapide seul. Dans le cas d'une turbulence inhomogène, la définition du tenseur d'ordre quatre exprimé en fonction du tenseur spectral des vitesses n'est en outre plus valable. Les modèles classiques qui proposent une modélisation du terme rapide à l'aide de l'approximation homogène étendent généralement leur application aux écoulements inhomogènes sans modifier la structure de la fonctionnelle.

Ce sont les coefficients ou les gradients de vitesse moyenne qui subissent des corrections. Le terme rapide apparaît alors comme un développement autour de l'homogénéité. Si une démarche similaire est adoptée ici, l'équation d'évolution du tenseur d'ordre quatre en approximation de distorsion rapide et pour une turbulence homogène, peut être conservée pour fournir le premier terme du développement. Il est bien évident que la normalisation de cette équation par rapport à l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds ne peut pas être conservée dans le modèle. Il faudrait pour cela disposer d'une équation du tenseur d'ordre quatre inhomogène complète. L'extension du modèle en inhomogène sera commentée en fin de chapitre.

### 7.3.4 Calibration du terme rapide

Le modèle rapide, par définition, doit au moins être consistant avec le comportement des écoulements évoluant dans le cadre de la Théorie de Distorsion Rapide. La calibration du terme rapide du modèle X27 est par conséquent basée sur cette théorie. Les possibilités de calibration sont toutefois limitées, puisque le modèle, linéaire, ne possède qu'un seul degré de liberté,  $c_{14}$ .

Les calculs de distorsions rapides effectués à l'aide de la description spectrale de la turbulence, permettent de disposer de développements analytiques en série de Taylor au voisinage de l'instant initial, du tenseur  $B_{ijpqmn}$ , exact et modélisé, et des tenseurs en un point nécessaires. Ils fournissent dans chacun des cas de distorsion rapide envisagés, des valeurs différentes de la constante  $c_{14}$  suivant la condition initiale choisie. Sachant que l'unicité du degré de liberté du modèle rend inutile tout développement à un ordre supérieur à deux, les valeurs de  $c_{14}$  ainsi obtenues ne permettent pas nécessairement de fournir directement le meilleur accord global du modèle avec la solution de RDT sur laquelle il a été calibré. Elles constituent toutefois une valeur numérique de référence, au voisinage de laquelle nous pouvons espérer trouver un coefficient  $c_{14}$  optimal. La procédure de calibration s'effectue donc en deux temps :

- Un développement en série de Taylor du tenseur  $B_{ijpqmn}$ , sur lequel porte la modélisation, est effectué en partant de conditions initiales choisies.
- Les valeurs numériques qui en proviennent servent de base au calcul numérique des solutions des équations différentielles du problème rapide, et sont ajustées sur chaque cas de façon à obtenir globalement le meilleur comportement.

Ces valeurs sont ensuite confrontées afin de dégager la valeur de calibration qui sera retenue ensuite pour l'ensemble des calculs sur les cas tests.

### Développements en série de Taylor

La calibration de la partie rapide du modèle de  $B_{ijpqmn}$  est effectuée à partir du développement en série de Taylor de la solution analytique fournie par la théorie de distorsion rapide. Les cas de déformation axisymétrique, cisaillement plan et rotation pure ont été envisagés, en partant d'un état axisymétrique de la turbulence initiale, défini entièrement par le tenseur spectral des vitesses (annexe K).

Dans chacun des cas, la solution exacte du tenseur spectral  $\hat{B}_{ijpqmn}$ , expression dans l'espace spectral du tenseur  $B_{ijpqmn}$  modélisé dans l'espace physique, peut être calculée. Son expression est développée en série de Taylor au voisinage des petits temps. Le modèle est également développé en série de Taylor jusqu'à un ordre suffisant pour identifier les coefficients des deux polynômes, de façon à calculer le degré de liberté de  $c_{14}$ .

*Déformation axisymétrique*

La déformation axisymétrique choisie pour la calibration correspond au gradient de vitesse moyenne suivant :

$$\bar{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}S & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}S \end{bmatrix} \quad (7.64)$$

où  $S$  est le taux de déformation. Le temps adimensionnel est noté  $\beta$  et est défini par  $\beta = St$ .

Si la turbulence initiale est axisymétrique, avec les hypothèses retenues par Sreenivasan et Narashima [162], la calibration est possible au premier ordre et conduit à :

$$c_{14} = \frac{2}{69} \quad (7.65)$$

Lorsque la turbulence est initialement isotrope, le premier ordre est systématiquement prédit de façon correcte par la forme de la fonctionnelle modélisant  $B_{ijpqmn}$ , notée  $\tilde{B}_{ijpqmn}$ , indépendamment de la valeur de  $c_{14}$ . La calibration s'effectue donc au second ordre, avec :

$$c_{14} = \frac{4}{77} \quad (7.66)$$

Afin d'illustrer ce résultat, l'expression de la première composante du modèle, développée au voisinage de  $\beta = 0$  à l'ordre deux, est comparée au résultat issu de la distorsion rapide, lequel s'écrit :

$$\begin{aligned} B_{111111} &= \left[ \frac{8}{35}\tilde{B}_1 + \frac{4}{35}\tilde{B}_2 \right] \\ &\quad \left[ \frac{16}{105}\tilde{B}_1 - \frac{4}{105}\tilde{B}_2 \right] \beta \\ &\quad \left[ \frac{32}{165}\tilde{B}_1 + \frac{94}{1155}\tilde{B}_2 \right] \beta^2 + O(\beta^3) \end{aligned} \quad (7.67)$$

où  $\tilde{B}_1$  et  $\tilde{B}_2$  sont respectivement des intégrations des spectres isotropes et anisotropes de la turbulence à l'état initial (annexe K), définis par :

$$\tilde{B}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^2 B_1(K) dK \quad \tilde{B}_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K^2 B_2(K) dK$$

Le développement du modèle conduit quant à lui à :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{111111} &= \left[ \frac{8}{35}\tilde{B}_1 + \frac{4}{35}\tilde{B}_2 \right] \\ &\quad \left[ \frac{16}{105}\tilde{B}_1 - \frac{4}{105}\tilde{B}_2 \right] \beta \\ &\quad \left[ \left( \frac{176}{1029} + \frac{108}{165}c_{14} \right) \tilde{B}_1 + \left( \frac{4}{49} + \frac{9}{35}c_{14} \right) \tilde{B}_2 \right] \beta^2 + O(\beta^3) \end{aligned} \quad (7.68)$$

La calibration du modèle pour une déformation axisymétrique sera la valeur de  $c_{14}$  obtenue à partir de la turbulence initialement isotrope, soit

$$c_{14} = \frac{4}{77}.$$



La fonctionnelle est en effet établie comme un développement autour de l'isotropie. Les développements axisymétriques permettent de mettre en évidence le fait que le modèle n'est pas par construction apte à prendre en compte complètement une anisotropie initiale de la turbulence. Il est également clair que l'état axisymétrique choisi est un cas particulier d'anisotropie, et que la calibration du coefficient qui en a été déduite ne peut refléter les effets anisotropes d'une façon générale.

Il faut remarquer par ailleurs que le développement à petit temps ne tient naturellement pas compte du signe de  $\beta$ , ce qui, en particulier aboutit à la même calibration pour une contraction ou une expansion axisymétrique. Il est pourtant bien connu que la réponse rapide de la turbulence à une contraction ou une expansion axisymétrique présente des caractéristiques distinctes [81], comme il l'a été rappelé au chapitre précédent. L'aspect approximatif du développement limité comme calibration se voit donc justifié de fait.

### Cisaillement plan

Le cisaillement plan est défini par le gradient de vitesse moyenne suivant :

$$\bar{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.69)$$

Là encore le temps sera adimensionné avec le paramètre  $\beta = St$ .

Le développement ne permet pas d'extraire une valeur du coefficient dans le cas anisotrope, qui soit indépendante des densités spectrales isotrope et anisotrope choisies; seule la solution développée à partir de l'état isotrope permet de calibrer la constante avec

$$c_{14} = \frac{4}{77}$$

comme l'illustre le développement de la première composante du modèle :

$$\begin{aligned} B_{111111} &= \left[ \frac{8}{35} \tilde{B}_1 + \frac{4}{35} \tilde{B}_2 \right] \\ &\quad \left[ -\frac{16}{385} \tilde{B}_1 + \frac{8}{495} \tilde{B}_2 \right] \beta^2 + O(\beta^3) \end{aligned} \quad (7.70)$$

Le développement du modèle s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{111111} &= \left[ \frac{8}{35} \tilde{B}_1 + \frac{4}{35} \tilde{B}_2 \right] \\ &\quad \left[ \left( -\frac{48}{1715} - \frac{64}{245} c_{14} \right) \tilde{B}_1 + \left( \frac{188}{15435} - \frac{142}{735} c_{14} \right) \tilde{B}_2 \right] \beta^2 + O(\beta^3) \end{aligned} \quad (7.71)$$

La calibration issue du développement à petit temps de la solution de distorsion rapide est identique dans les cas de déformation et de cisaillement envisagés, lorsque la turbulence est initialement isotrope.

*Rotation pure*

L'écoulement évolue dans un repère tournant à une vitesse constante. La rotation est orientée suivant l'axe  $z$ .

$$\Omega_i = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{cases} \quad (7.72)$$

Il n'y a pas de gradient relatif de vitesse moyenne relative. Il est possible de déterminer une valeur de  $c_{14}$ , correspondante au développement des solutions évoluant à partir d'une turbulence axisymétrique d'axe initialement aligné avec l'axe de la rotation. Il vient :

$$c_{14} = \frac{6}{385} \quad (7.73)$$

La première composante est donnée à titre d'exemple, en posant  $\beta = \Omega t$  :

$$\begin{aligned} B_{111111} &= \left[ \frac{8}{35} \tilde{B}_1 + \frac{4}{35} \tilde{B}_2 \right] \\ &\quad \left[ -\frac{64}{3465} \tilde{B}_2 \right] \beta^2 + O(\beta^4) \end{aligned} \quad (7.74)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{111111} &= \left[ \frac{8}{35} \tilde{B}_1 + \frac{4}{35} \tilde{B}_2 \right] \\ &\quad \left[ \left( -\frac{128}{15435} - \frac{32}{49} c_{14} \right) \tilde{B}_2 \right] \beta^2 + O(\beta^4) \end{aligned} \quad (7.75)$$

Le modèle respectant le fait que la turbulence isotrope n'est pas affectée par l'action d'une rotation pure, et ce indépendamment de  $c_{14}$ , il ressort de ces calibrations que la valeur du paramètre, cohérente avec la théorie de distorsion rapide et appliquée à une turbulence initialement isotrope est :

$$c_{14} = \frac{4}{77}$$

Il est évident que les développements des quantités turbulentes au second ordre au voisinage de l'instant initial ne suffisent pas à traduire la réponse de la turbulence à la distorsion rapide qui lui est appliquée. C'est pourquoi la valeur du paramètre choisie précédemment peut être considérée comme une estimation pouvant être numériquement corrigée par un calcul de la solution du modèle en approximation de distorsion rapide. Le caractère très particularisé de l'anisotropie initiale n'incite pas à retenir la valeur issue de la calibration anisotrope en rotation pure, mais bien celle issue des calibrations isotropes.

**Calculs numériques et calibration**

Le comportement du modèle rapide calibré précédemment est comparé aux solutions de distorsions rapides. Les équations sont résolues par une méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre, que le modèle soit sous la forme Y16 ou X27.

*Déformation axisymétrique*

Des calculs complets de distorsion rapide ont été effectués par Lee [81] dans le cas de déformations axisymétriques. Nous disposons donc des évolutions en temps de l'énergie cinétique, du tenseur d'anisotropie, des composantes indépendantes du tenseur du quatrième ordre - au nombre de cinq dans le cas d'une turbulence axisymétrique - et du terme rapide des corrélations pression-déformation.

Les solutions de contraction et expansion axisymétriques sont comparées pour chacune de ces quantités statistiques. Lee considère qu'à partir de  $c = 3.0$ , l'écoulement rapide atteint sa limite asymptotique. L'approximation du modèle en distorsion rapide doit permettre de retrouver ces tendances.

D'une façon générale, l'évolution du tenseur du quatrième ordre vers un état asymptotique est relativement bien respectée dans les deux cas jusqu'à cette valeur de  $c = 3.0$ . Les figures 7.1 et 7.2 donnent les évolutions du tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$  dans les deux cas, jusqu'à un temps  $c = 8.0$ , tracé en échelle logarithmique. Les symboles représentent les solutions de distorsion rapide pour chacune des composantes indépendantes du tenseur.

La valeur donnée par défaut par la calibration précédente permet globalement de traduire l'ensemble des évolutions des quantités statistiques d'une façon relativement correcte jusqu'à  $c = 3.0$ . L'accord du modèle avec la solution de distorsion rapide est meilleur dans le cas de l'expansion axisymétrique que pour la contraction, en particulier sur l'évolution asymptotique du tenseur des corrélations pression-déformation (voir figures 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7 7.8).

En faisant varier le degré de liberté du modèle dans un voisinage de la valeur de calibration, nous observons une évolution différente du comportement des variables dans le cas de la contraction et de l'expansion axisymétrique.

Dans le cas de l'expansion axisymétrique, l'énergie cinétique est très sensible à la valeur de calibration  $c_{14}$ . La réponse se rapproche de la solution de distorsion rapide lorsque  $c_{14}$  augmente, jusqu'à une valeur optimale voisine de  $c_{14} \simeq 0.058$  - les calculs ont montré qu'il est inutile d'aller chercher une précision numérique plus élevée compte tenu du caractère général de l'accord recherché - (figures 7.9 et 7.10). Cette tendance se retrouve sur les composantes du tenseur de Reynolds, pour lesquelles de trop faibles valeurs de  $c_{14}$  ne permettent pas de capter une bonne tendance asymptotique (figures 7.11 et 7.12). Par contre l'évolution du terme rapide ne se voit pas grandement affectée par les variations de  $c_{14}$ . Bien que les valeurs voisines de 0.058 captent mieux l'évolution du terme rapide, les différentes prédictions ne sont pas très sélectives (figures 7.13 et 7.14).

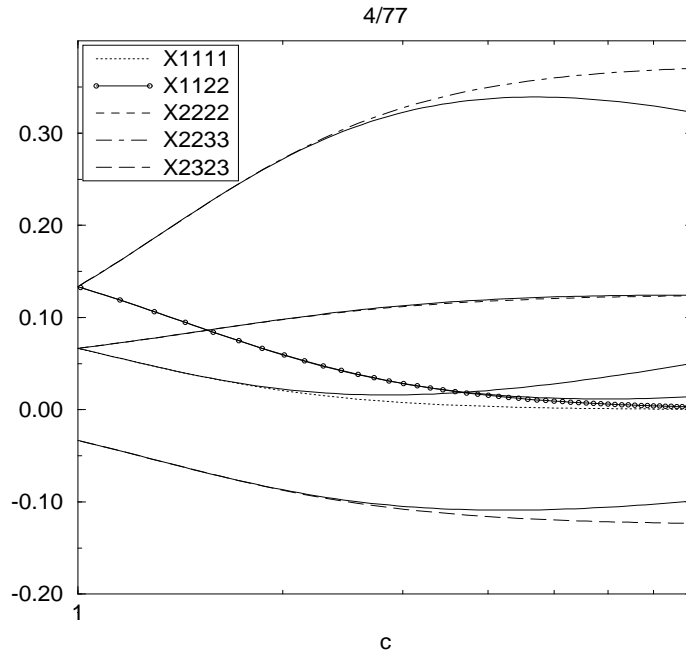


FIG. 7.1: Evolution des composantes indépendantes de  $\bar{X}_{ijpq}$  dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

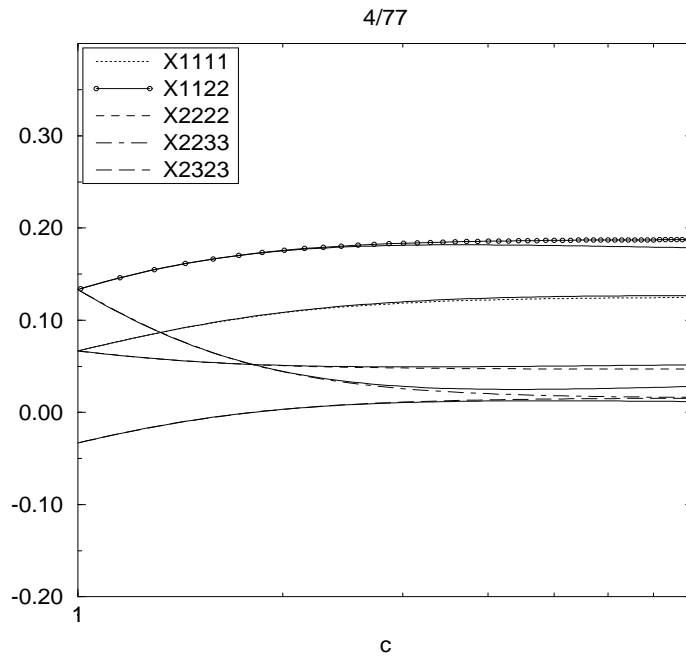


FIG. 7.2: Evolution des composantes indépendantes de  $\bar{X}_{ijpq}$  dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

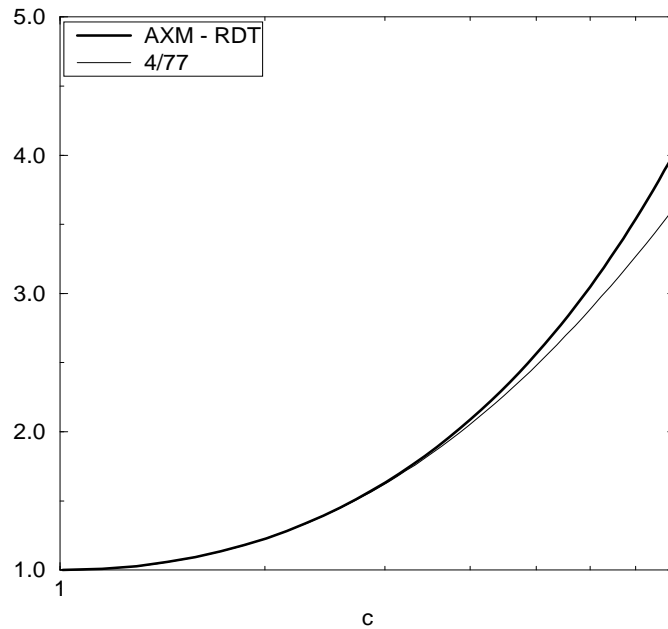


FIG. 7.3: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

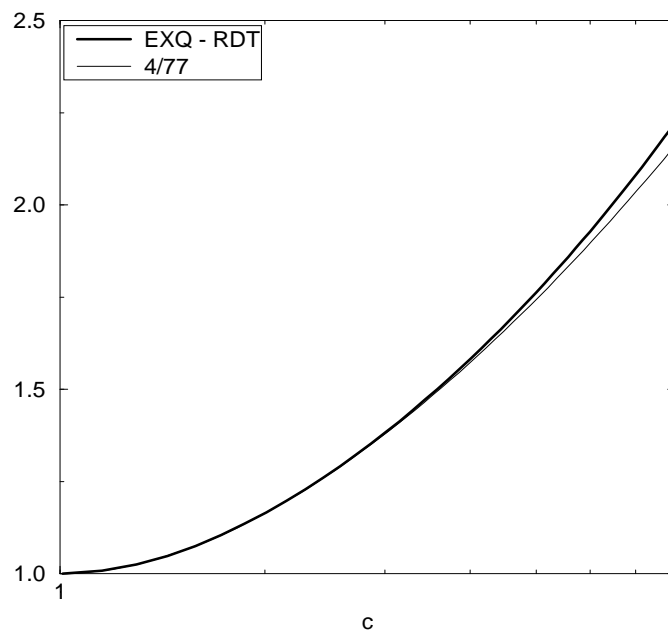


FIG. 7.4: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

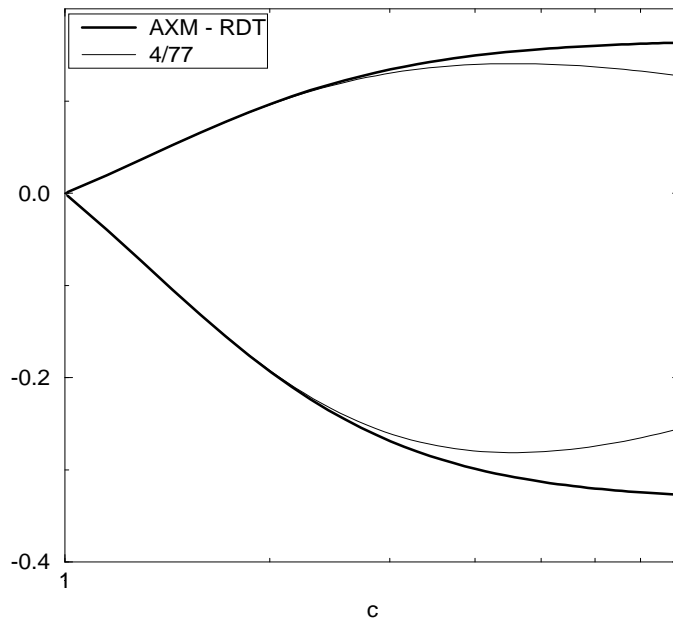


FIG. 7.5: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

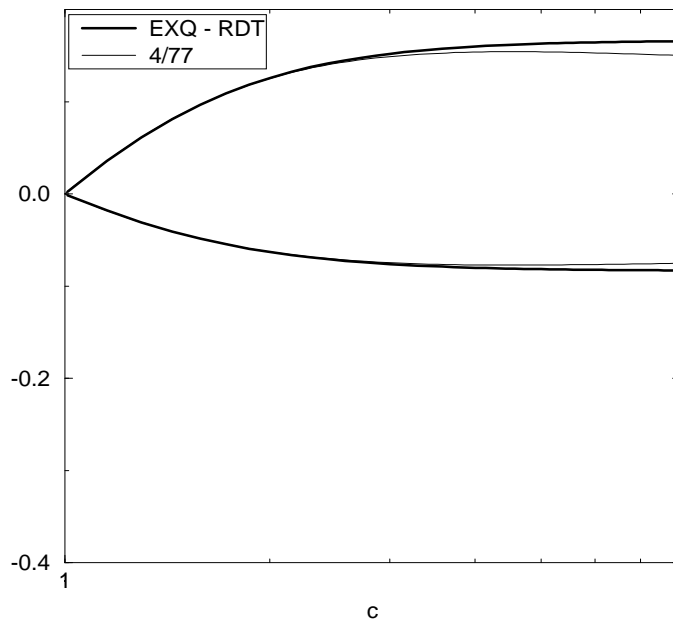


FIG. 7.6: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

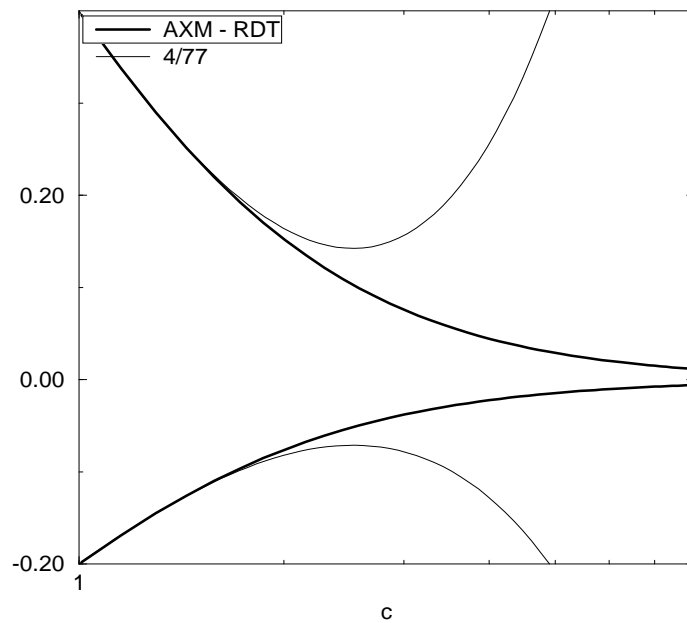


FIG. 7.7: Evolution des composantes du terme rapide dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

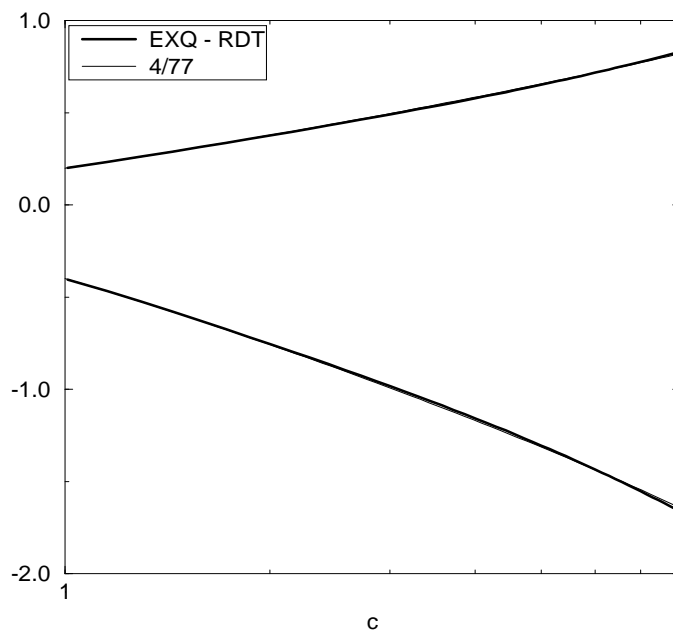


FIG. 7.8: Evolution des composantes du terme rapide dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour  $c = \frac{4}{77}$ .

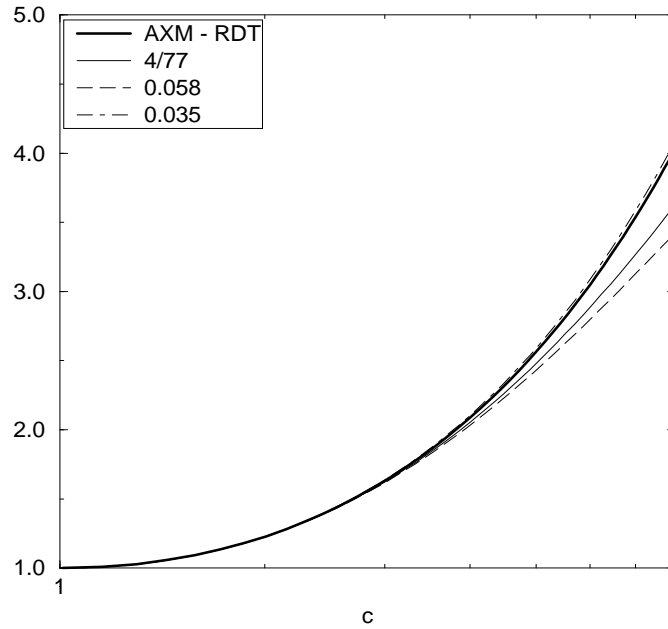


FIG. 7.9: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour différentes calibrations.

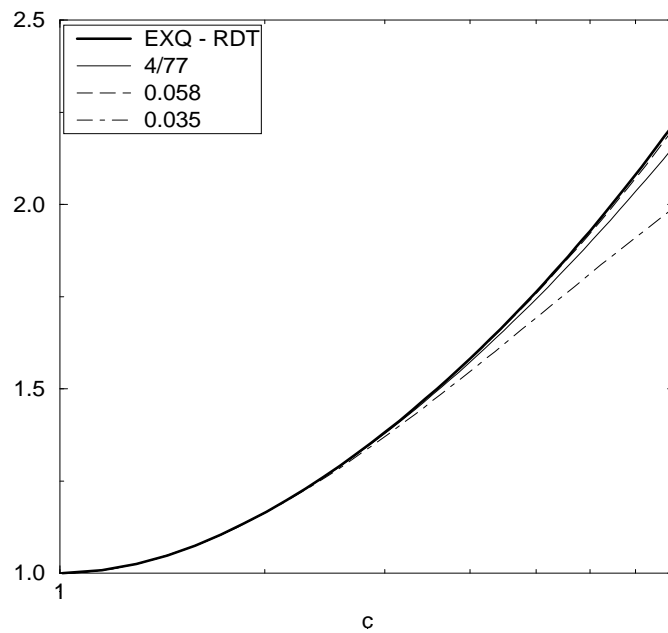


FIG. 7.10: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour différentes calibrations.



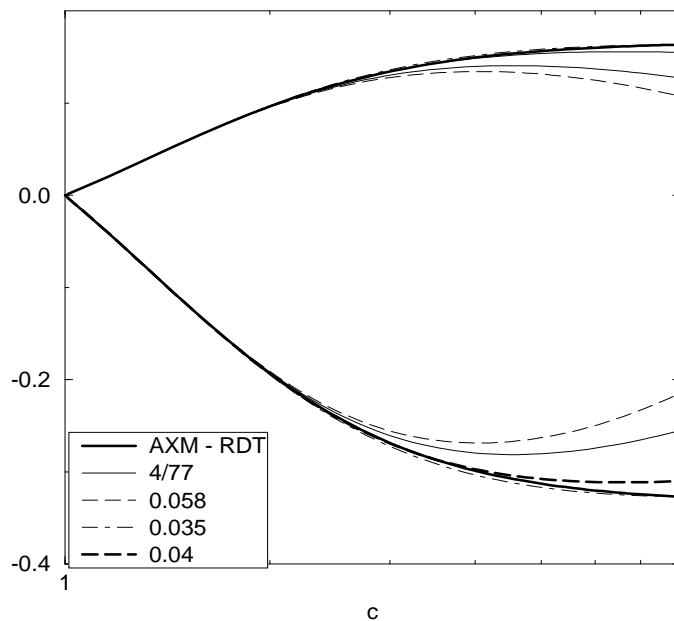


FIG. 7.11: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour différentes calibrations.

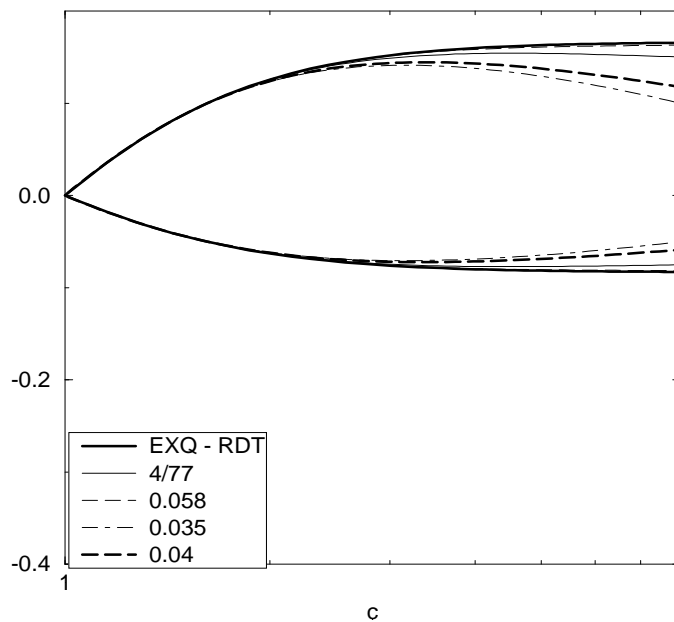


FIG. 7.12: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour différentes calibrations.

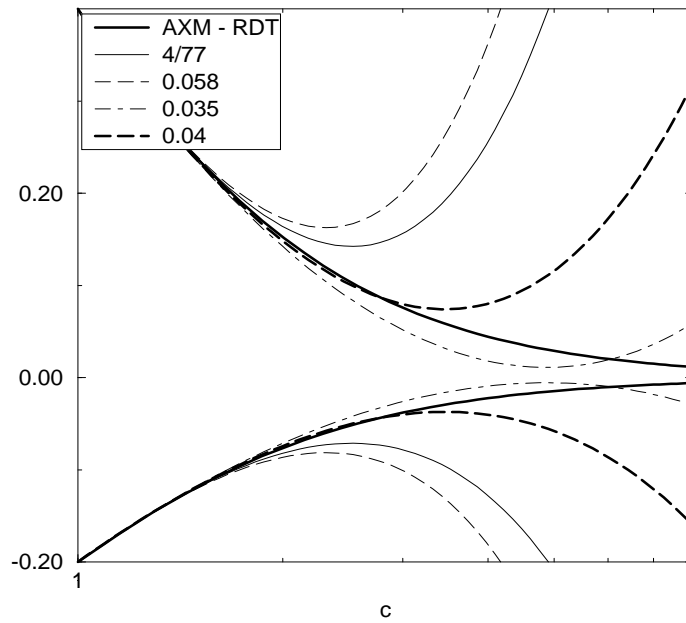


FIG. 7.13: *Evolution des composantes du terme rapide dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour différentes calibrations.*

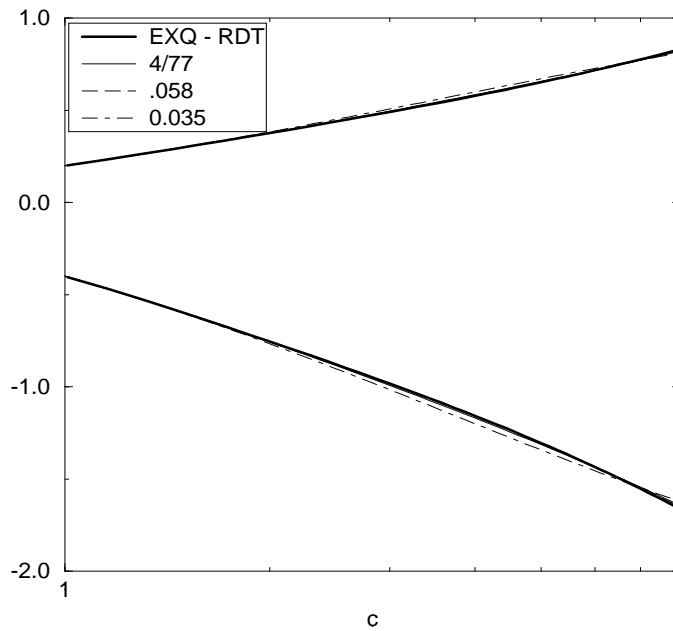


FIG. 7.14: *Evolution des composantes du terme rapide dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour différentes calibrations.*

Dans le cas de la contraction axisymétrique, la tendance inverse est observée. L'évolution de l'énergie cinétique et du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds sont assez peu modifiées par la variation du paramètre  $c_{14}$ , du moins dans l'intervalle de temps considéré, comparativement à la réponse du terme rapide. En outre, une diminution de la valeur de  $c_{14}$  par rapport à sa valeur de calibration par les développements en série de Taylor tend à mieux reproduire la solution de distorsion rapide de l'ensemble de ces quantités statistiques. Il subsiste toutefois un écart important des prédictions asymptotiques de  $\frac{\phi_{ij}^R}{S_{q_0}^2}$  par rapport aux solutions de distorsion rapide, qui tient à l'expression même du modèle, puisque toutes les réponses ont une allure similaire. Ceci se retrouve bien sûr dans les évolutions du tenseur du quatrième ordre (figures 7.15, 7.16 et 7.17, 7.18).

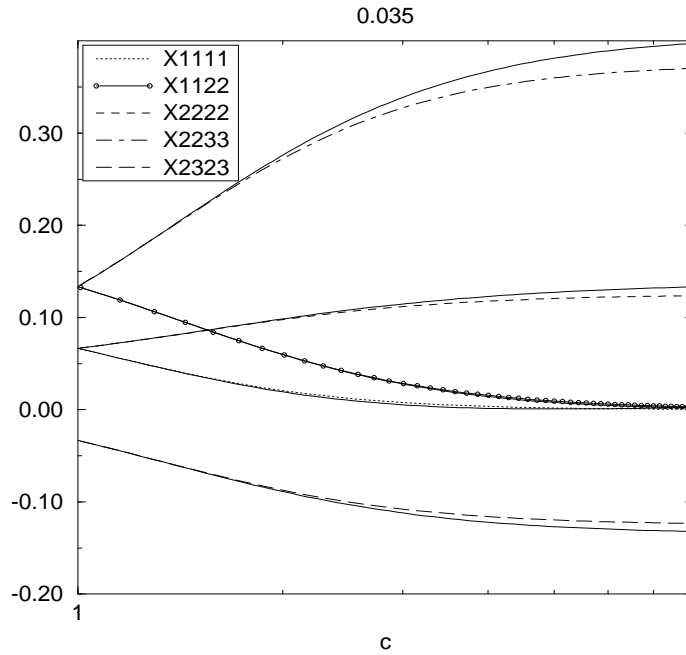


FIG. 7.15: Evolution des composantes indépendantes de  $\bar{X}_{ijpq}$  dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour  $c = 0.035$ .

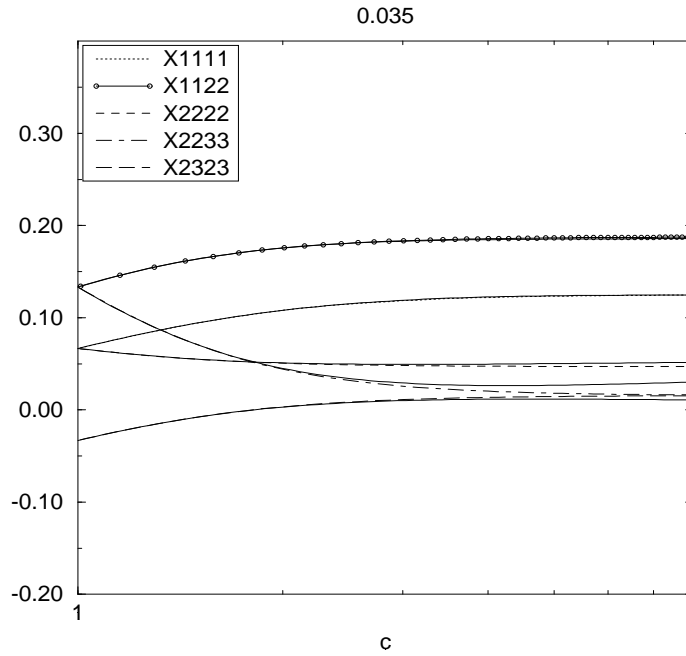


FIG. 7.16: Evolution des composantes indépendantes de  $\bar{X}_{ijpq}$  dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour  $c = 0.035$ .

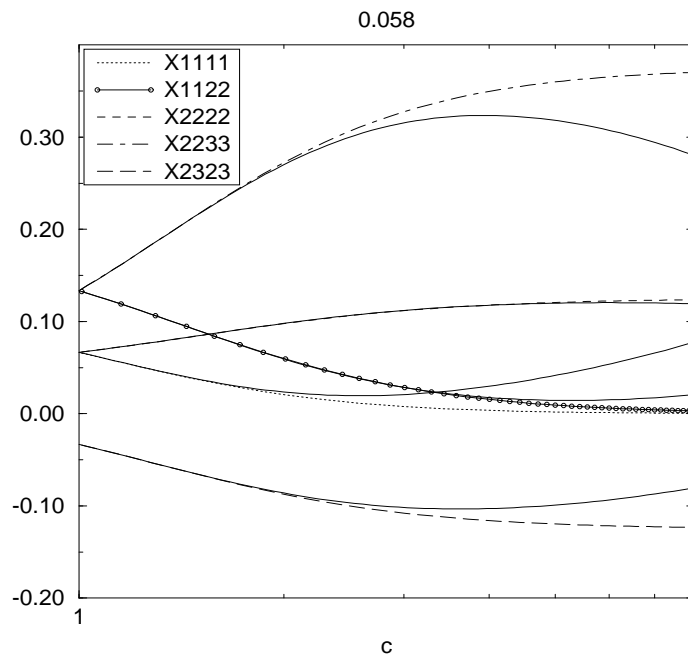


FIG. 7.17: Evolution des composantes indépendantes de  $\overline{X}_{ijpq}$  dans le cas d'une contraction axisymétrique, pour  $c = 0.058$ .

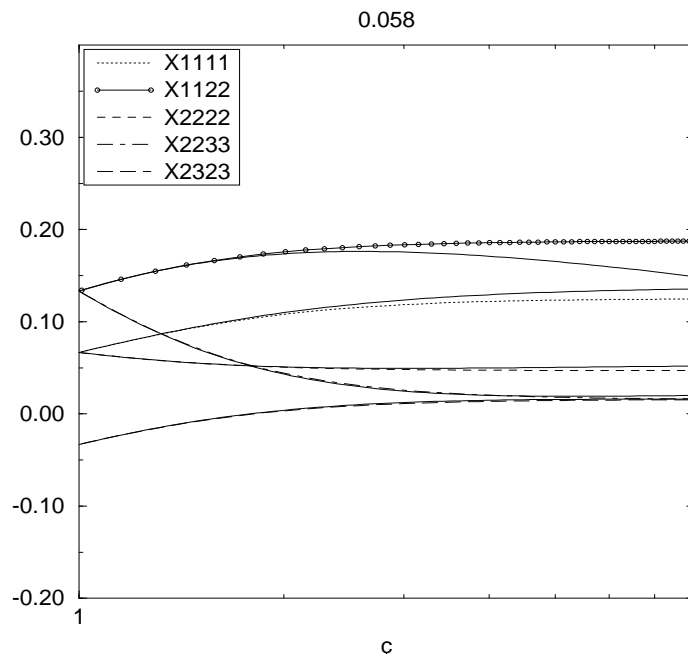


FIG. 7.18: Evolution des composantes indépendantes de  $\overline{X}_{ijpq}$  dans le cas d'une expansion axisymétrique, pour  $c = 0.058$ .

Afin de respecter globalement les tendances de l'écoulement en déformation axisymétrique, la valeur de calibration proposée, réalisant un compromis sur l'ensemble des quantités statistiques observées est la suivante :

$$c_{14} = 0.04 \quad (7.76)$$

### Rotation pure

Les évolutions du tenseur d'anisotropie ont également été comparées avec le calcul en rotation pure rapide, pour laquelle le modèle avait été calibré dans la première partie. L'énergie cinétique n'étant pas affectée par l'action d'une rotation rapide non visqueuse, les composantes du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  constituent la première base d'évaluation du modèle. Dans le cas choisi où l'axe d'axisymétrie initiale est aligné avec l'axe de la rotation, la turbulence reste axisymétrique, et ses axes principaux inchangés. Il suffit par conséquent de regarder l'évolution d'une seule des composantes du tenseur. La figure 7.19 montre les solutions de  $b_{11}$  au cours du mouvement pour les différentes valeurs de calibration.

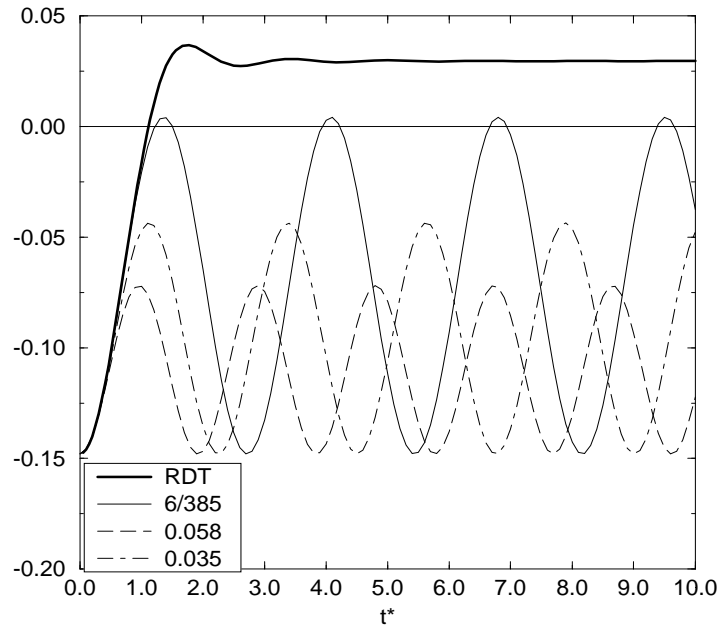


FIG. 7.19: Evolution de la composante  $b_{11}$  du tenseur d'anisotropie dans le cas 1 de rotation rapide.

D'une façon générale, la solution du modèle proposé présente des oscillations qui n'existent pas dans la solution analytique. Le traitement de la rotation par le modèle sera examiné plus en détail par la suite. Lorsque le paramètre  $c_{14}$  varie autour de sa valeur de calibration  $6/385$ , les oscillations voient leur amplitude et leur période varier en même temps. Elles augmentent si  $c_{14}$  est plus élevé que la calibration initiale, et inversement. Il est clair avec ce calcul que le cas d'une rotation pure ne constitue pas *a priori* un cas adapté à la calibration du modèle. Par conséquent, la valeur définitive de la calibration est déduite de l'étude des cas irrotationnels, et conduit à retenir la valeur de (7.76), soit :

$$c_{14} = 0.04$$

Le modèle qui en résulte est désigné par X27 (ou encore Y16).

### 7.3.5 Test du terme rapide

Ce paragraphe examine le comportement du modèle dans les situations de distorsions rapides classiques. Dans un premier temps, les performances du modèle rapide sont comparées à celles des modèles de référence sur les situations de déformations rapides qui ont servi à sa calibration.

Les capacités du modèle sont ensuite testées sur des distorsions rapides présentant des modes d'écoulements différents. Ses résultats sont comparés aux calculs issus de la théorie de distorsion rapide et à ceux présentés par les modèles de référence choisis parmi les modèles classiques dans les situations correspondantes. Lorsque ces données sont accessibles par la théorie de distorsion rapide, le terme rapide est comparé aux solutions linéaires, soit directement, soit indirectement par l'intermédiaire du tenseur du quatrième ordre  $X_{ijpq}$ . Les comparaisons aux modèles classiques se limiteront à l'examen du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds  $b_{ij}$ , et à l'énergie cinétique de la turbulence.

#### Comparaison aux modèles de référence sur les cas de calibration

Les modèles de référence ont été choisis d'une part en raison de leurs hypothèses de fermetures et d'autre part en fonction de leurs performances, évaluées dans le chapitre précédent. Ce sont :

- Le modèle de Launder, Reece et Rodi (LRR) [74], dont les caractéristiques principales sont similaires à celles du modèle proposé, puisqu'il est linéaire et non-réalisable. Ses performances en déformation axisymétrique justifient par ailleurs de le retenir.
- Le modèle de Speziale, Sarkar et Gatski (SSG) [159], choisi comme référence d'une manière générale. Rappelons que ce modèle n'est pas élaboré à partir du tenseur  $X_{ijpq}$ , et que les coefficients de la fonctionnelle modélisant le terme rapide ne satisfont pas les relations de normalisation de  $X_{ijpq}$  par rapport à  $b_{ij}$ . La fonctionnelle est tensoriellement linéaire, avec des coefficients dépendant des gradients de vitesse moyenne. Il est désormais connu que la prise en compte de termes non-linéaires dans les modèles classiques permet d'améliorer les performances et est nécessaire en particulier à la satisfaction de la réalisabilité. Le modèle rapide linéaire de X27 étant une extrapolation à son niveau du modèle LRR, on peut uniquement espérer approcher les performances du modèle SSG dans le cas général.
- Le modèle de Shih et Lumley (SL) [130], fonctionnellement non-linéaire, et réalisable. Il présente également une correction en fonction du nombre de Reynolds turbulent, dont il n'est pas tenu compte en approximation de distorsion rapide.

Il faut insister sur le fait que l'écoulement est en approximation de distorsion rapide, ce qui en pratique ne fait intervenir que le terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation des formulations classiques.

*Contraction axisymétrique*

Seul le modèle complet SL permet d'approcher les solutions distorsions rapides. L'approximation rapide de ce modèle détériore considérablement ses performances. Le modèle rapide X27 avoisine ici la prédiction de SL complet, ce qui montre de meilleurs résultats que LRR ou SSG, aussi bien pour l'énergie cinétique (figure 7.20) que pour les composantes du tenseur d'anisotropie (figure 7.21). Le comportement du modèle X27 est satisfaisant dans le cas de la contraction axisymétrique rapide, qui est le cas le plus simple de déformation rapide axisymétrique.



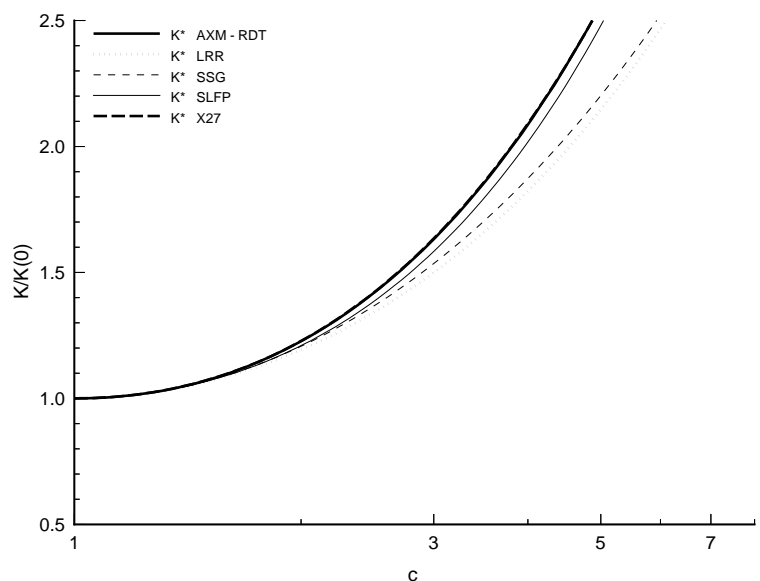


FIG. 7.20: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la contraction axisymétrique AXM.

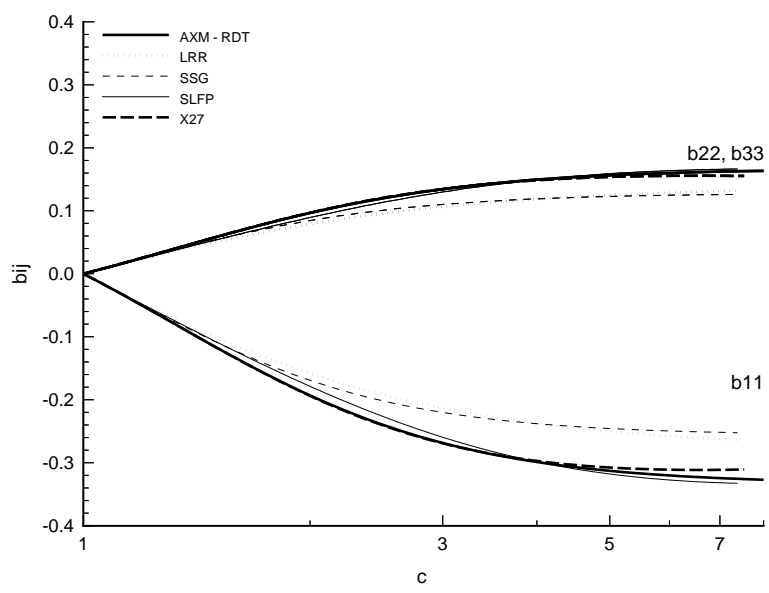


FIG. 7.21: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la contraction axisymétrique AXM.

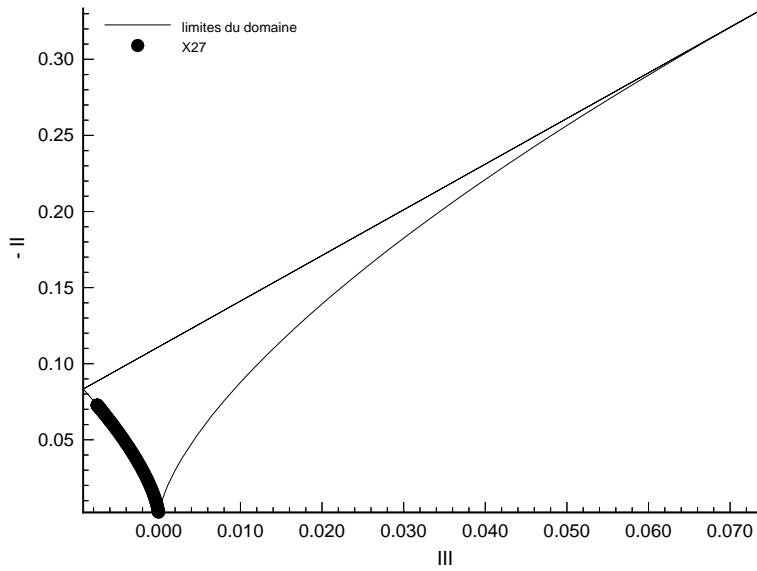


FIG. 7.22: *Evolution dans le plan des invariants pour la contraction axisymétrique AXM.*

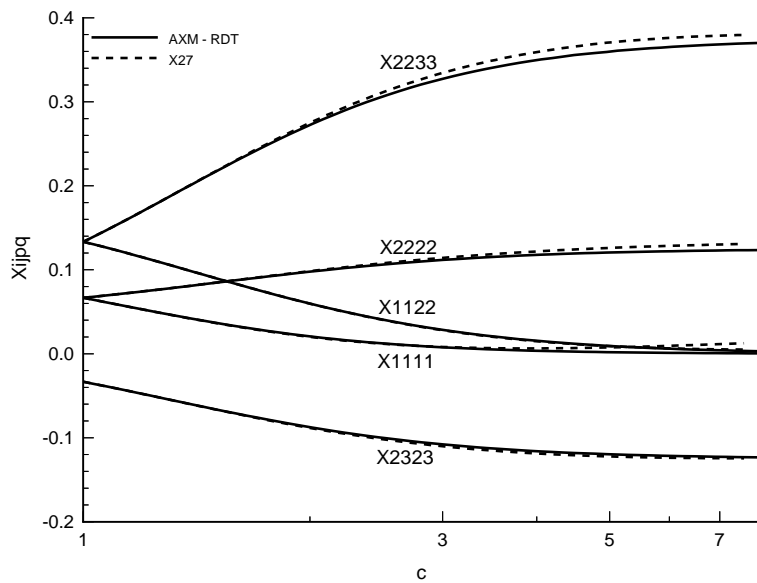


FIG. 7.23: *Evolution des composantes indépendantes du tenseur  $X_{ijpq}$ .*

*Expansion axisymétrique*

L'écoulement est caractérisé par le gradient de vitesse moyenne du cas test rapide EXQ. Les variables sont tracées en fonction de la déformation totale  $c$ .

Aucun des modèles rapides de référence ne donne une prédiction correcte de l'évolution du tenseur d'anisotropie dans ce cas. Bien que la prédiction de l'état d'équilibre ne soit pas excellente par rapport à la solution de distorsion rapide, la calibration choisie pour le modèle X27 permet globalement de capter de meilleurs niveaux d'énergie cinétique. (figure 7.24) et d'anisotropie du tenseur de Reynolds (figure 7.25).

D'une façon générale, le tenseur  $X_{ijpq}$  possède trente-deux composantes indépendantes après vérification des contraintes de bases - symétries, incompressibilité et normalisation sur le tenseur de Reynolds -. Seuls les cas où la turbulence est axisymétrique sont intéressants pour une comparaison directe du modèle avec la distorsion rapide sur ce tenseur, dans la mesure où  $X_{ijpq}$  ne comprend plus que cinq composantes indépendantes. Lorsque la turbulence ne reste pas axisymétrique, il est préférable de comparer les évolutions des composantes indépendantes du tenseur rapide des corrélations pression-déformation.

L'évolution des composantes de  $X_{ijpq}$  par rapport à la solution de distorsion rapide a déjà été regardée lors de la calibration du modèle et elle est rappelée figure 7.26.

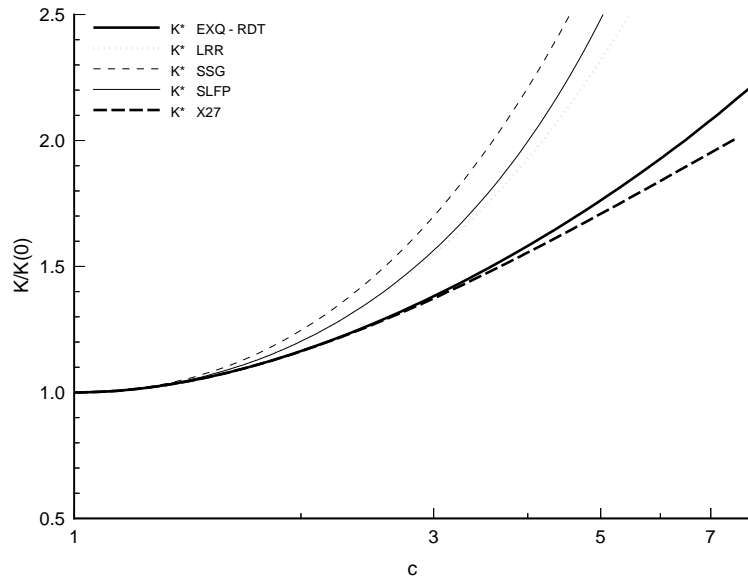


FIG. 7.24: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour l'expansion axisymétrique EXQ.

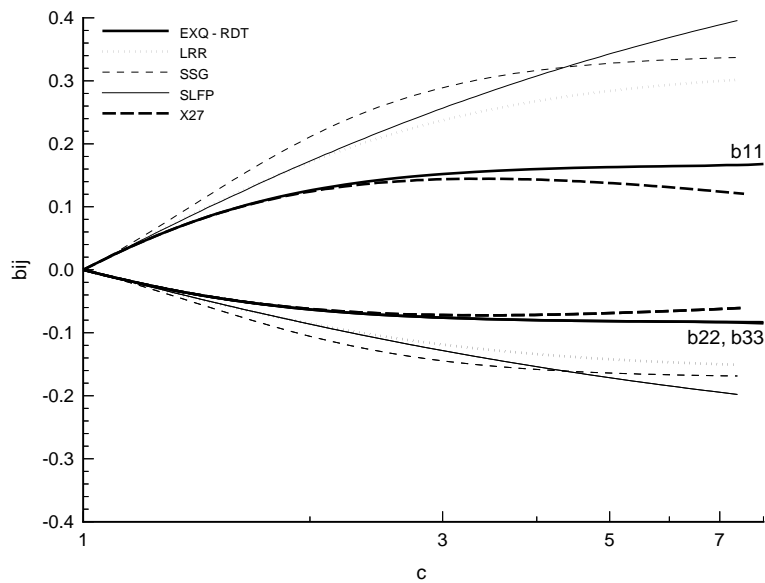


FIG. 7.25: Evolution du tenseur d'anisotropie pour l'expansion axisymétrique EXQ.

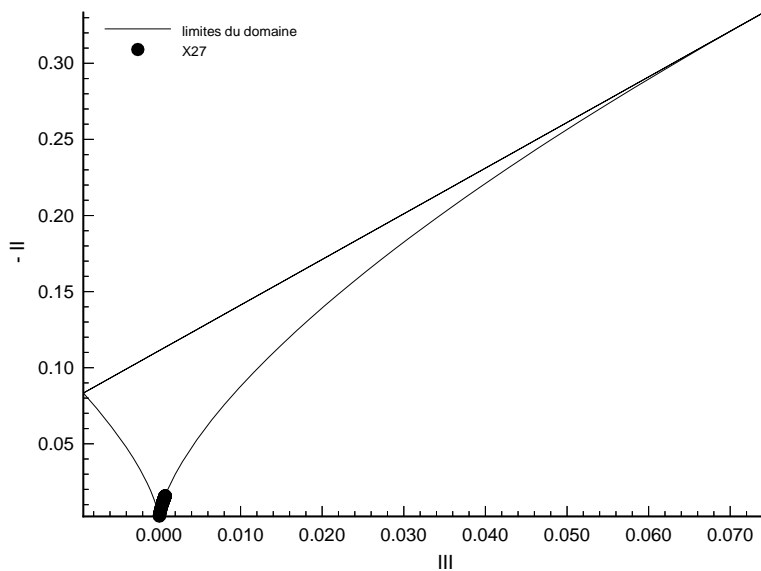


FIG. 7.26: Evolution dans le plan des invariants pour l'expansion axi-symétrique EXQ.

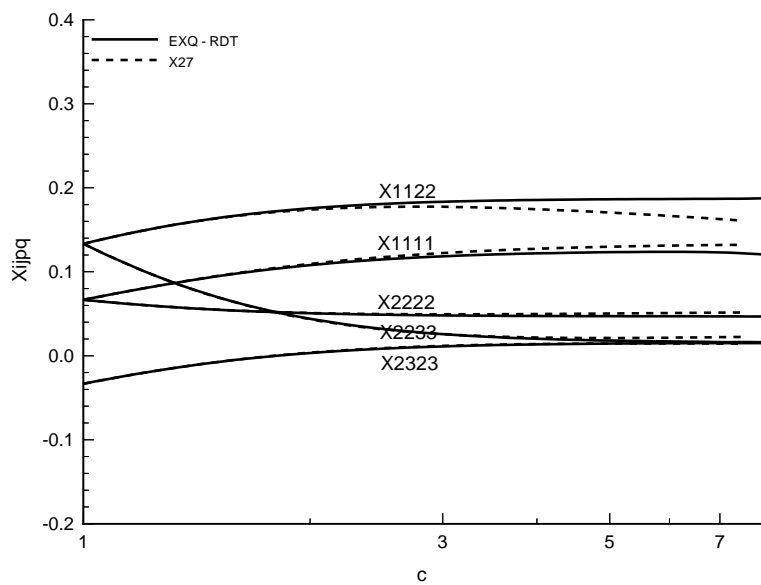


FIG. 7.27: Evolution des composantes indépendantes du tenseur  $X_{ijpq}$ .

### Calculs en distorsion rapide

Le modèle rapide est maintenant évalué sur des configurations sur lesquelles il n'a pas été calibré.

#### *Déformation plane simple*

Le troisième mode simple de déformation pure retenu comme cas test est celui de la déformation plane. Les solutions de distorsion rapide ont été calculées par intégration sur l'ensemble des nombres d'ondes des quantités spectrales correspondantes. La déformation plane est définie par le cas test PXF, avec les mêmes notations que précédemment.

Les figures 7.28 et 7.29 montrent respectivement les évolutions de l'énergie cinétique et du tenseur d'anisotropie.

Il est clair que le modèle X27 approche mieux la solution RDT que l'ensemble des autres modèles. Ce comportement est beaucoup plus évident sur les composantes du tenseur d'anisotropie (figure 7.29) que pour l'énergie cinétique de la turbulence (figure 7.28).

L'examen du tenseur du quatrième ordre est ici plus délicat, dans la mesure où la turbulence n'est plus axisymétrique. Les évolutions du tenseur  $X_{ijpq}$  sont données à titre indicatif figure 7.31.

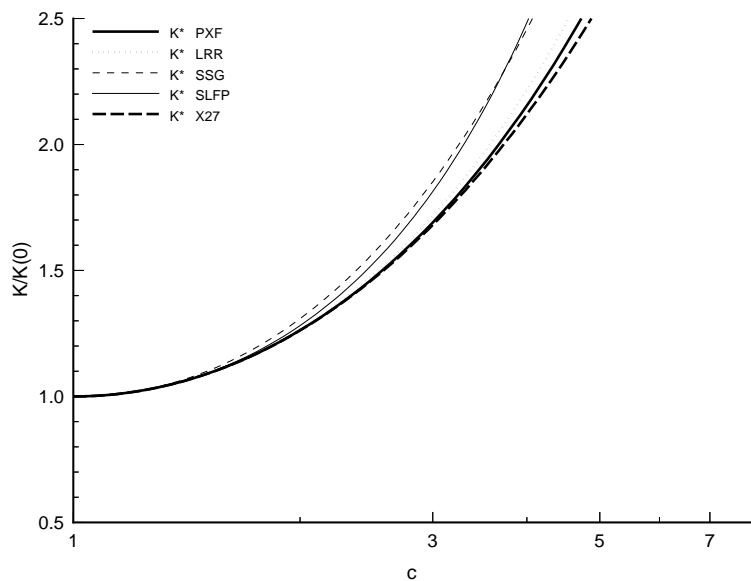


FIG. 7.28: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour la déformation plane PXF.

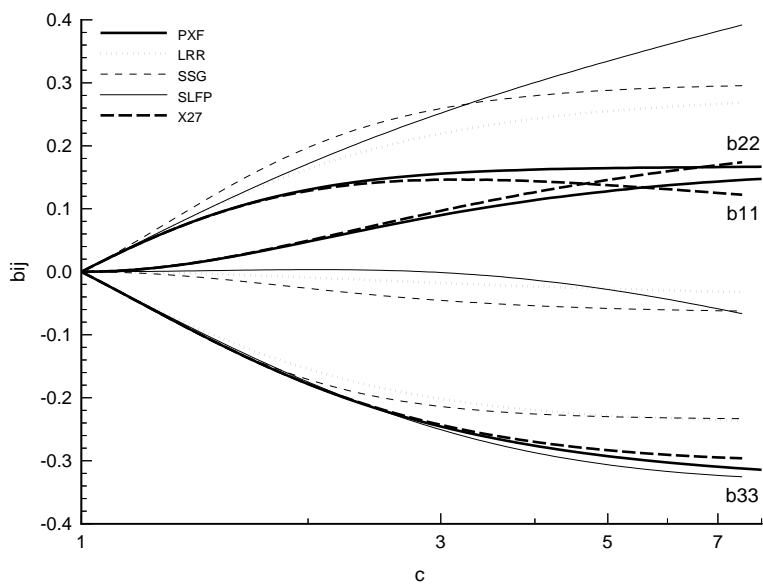


FIG. 7.29: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la déformation plane PXF.

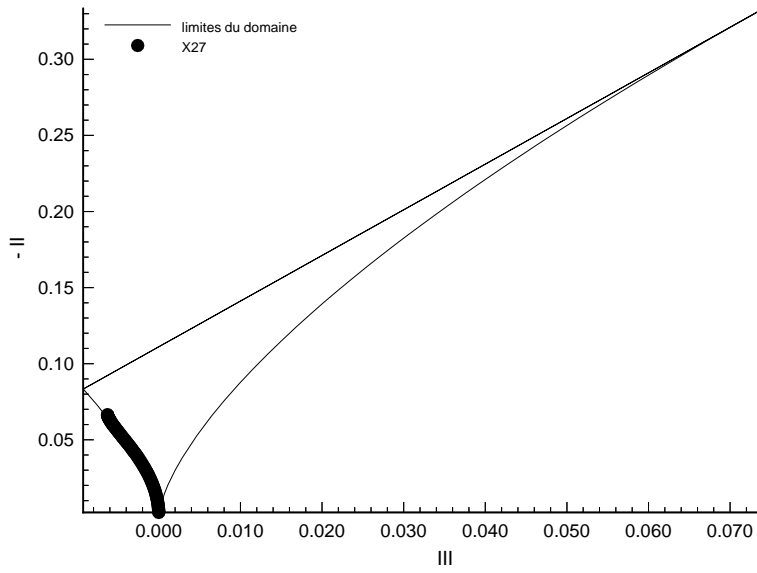


FIG. 7.30: Evolution dans le plan des invariants pour la déformation plane  $PXF$ .

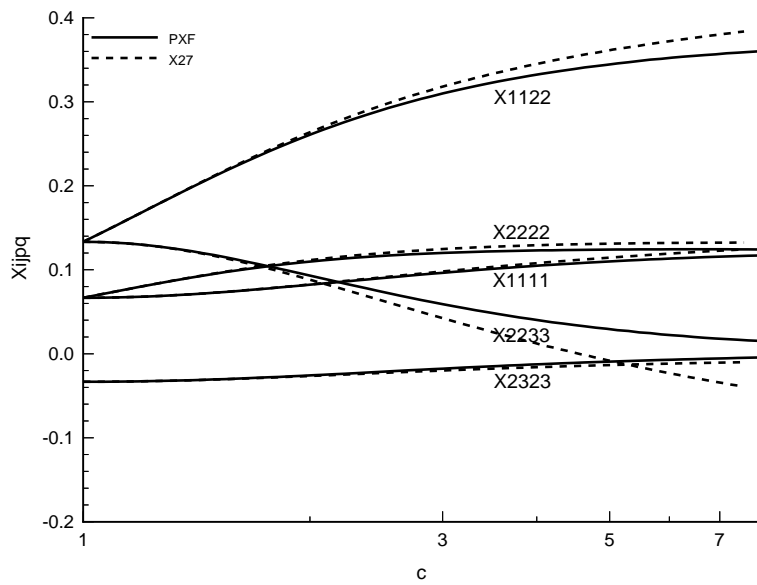


FIG. 7.31: Evolution des composantes du tenseur  $X_{ijpq}$ .



*Cisaillement pur*

L'évolution des performances du modèle rapide en cisaillement pur dans un repère tournant est effectuée ici de façon qualitative, en l'absence de solutions analytiques de distorsion rapide.

Le gradient relatif de vitesse moyenne relative est défini par :

$$\bar{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.77)$$

et le vecteur

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} \quad (7.78)$$

désigne la rotation uniforme du repère. Le temps adimensionnel est  $St$ .

Lorsque le repère est fixe, le comportement du modèle semble fournir un niveau d'anisotropie asymptotique raisonnable en moyenne (figures 7.32 et 7.33). Il faut cependant noter que l'évolution des anisotropies vers cet état se fait de façon différente de celle des modèles classiques. Elle présente des oscillations inexistantes dans les modèles classiques retenus. Bien qu'à première vue le comportement du modèle à petit temps avoisine celui de la distorsion rapide [82], de telles oscillations n'ont *a priori* pas lieu d'être [158].

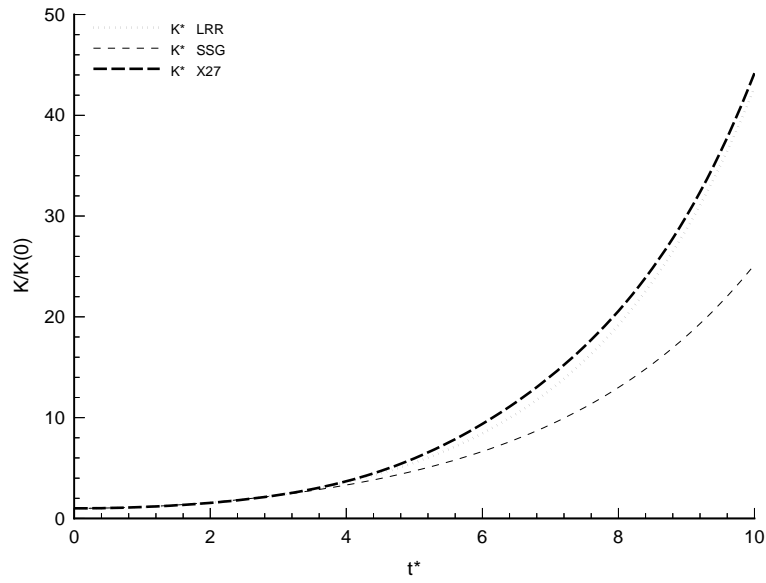


FIG. 7.32: *Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour le cisaillement pur BFR.*

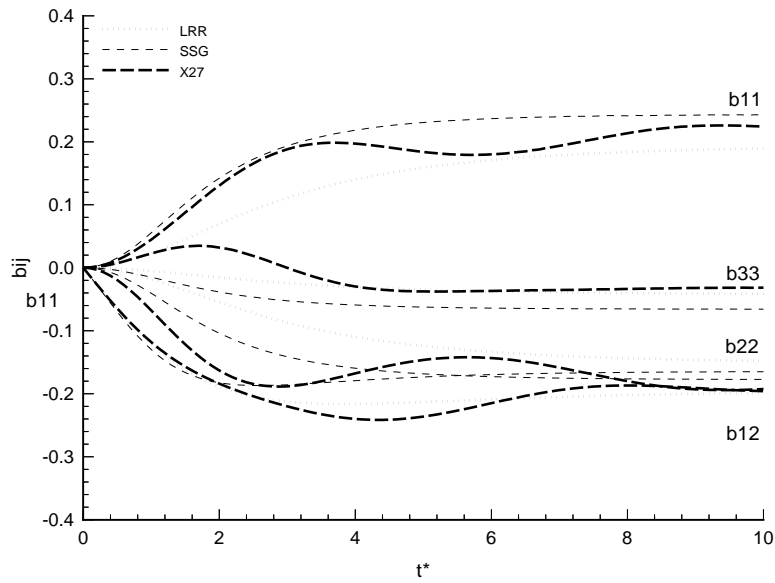


FIG. 7.33: *Evolution du tenseur d'anisotropie pour le cisaillement pur BFR.*

La prédiction de l'énergie cinétique turbulente est voisine de celle du modèle LRR.

Dans un repère tournant, le comportement du modèle rapide X27 se démarque nettement plus des formulations rapides classiques. Deux cas ont été envisagés, qui correspondent aux configurations BFR5 et BFR25 de Lee et Reynolds [83], mais en approximation de distorsion rapide. Lorsque  $R_o = 0.25$ , la prédiction de l'énergie cinétique reste conforme au fait que ce rapport doit représenter l'état le plus énergétique (figure 7.34). Si le modèle LRR est bien connu pour être énergétiquement trop faible dans ce cas, le modèle X27, en présentant une énergie cinétique plus élevée que SSG tend à capturer la bonne tendance. Par contre, l'examen des composantes du tenseur d'anisotropie donne une prédiction bien différente des modèles classiques, ce qui laisse penser qu'elle n'est pas nécessairement conforme à la solution de RDT (figure 7.35), hypothèse renforcée par le cas test suivant.

Lorsque  $R_o = 0.5$ , la solution de distorsion rapide montre que l'écoulement est à la limite supérieure du rapport de stabilité. Pour la calibration choisie, il est clair que le comportement de l'énergie cinétique n'est pas conforme avec cette limite, puisqu'elle n'est pas toujours croissante (figure 7.36).

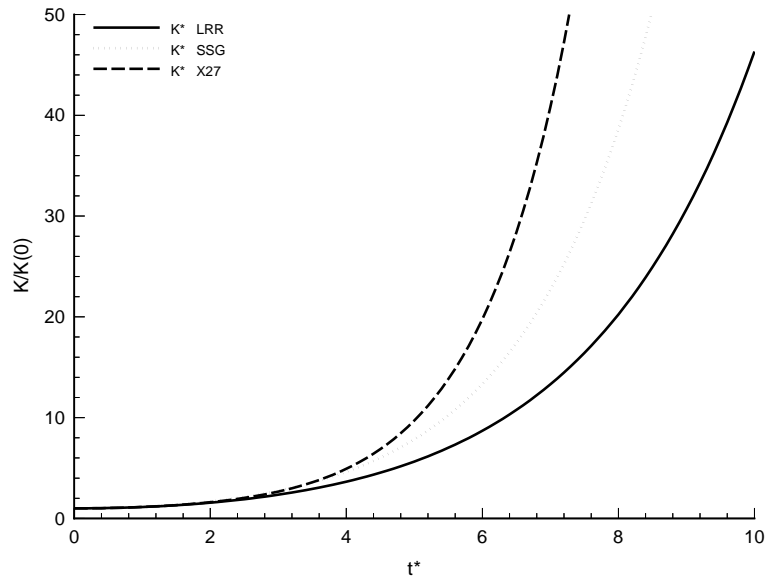


FIG. 7.34: *Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour le cisaillement pur BFR25.*

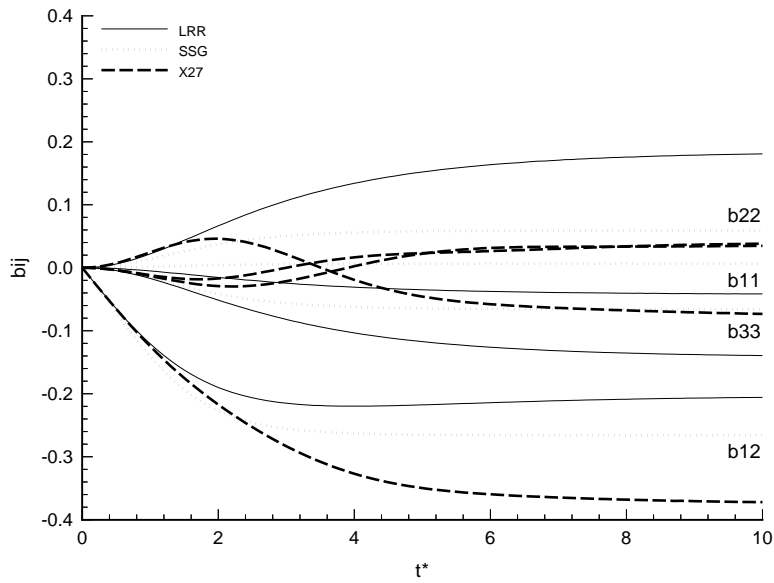


FIG. 7.35: *Evolution du tenseur d'anisotropie pour le cisaillement pur BFR25.*

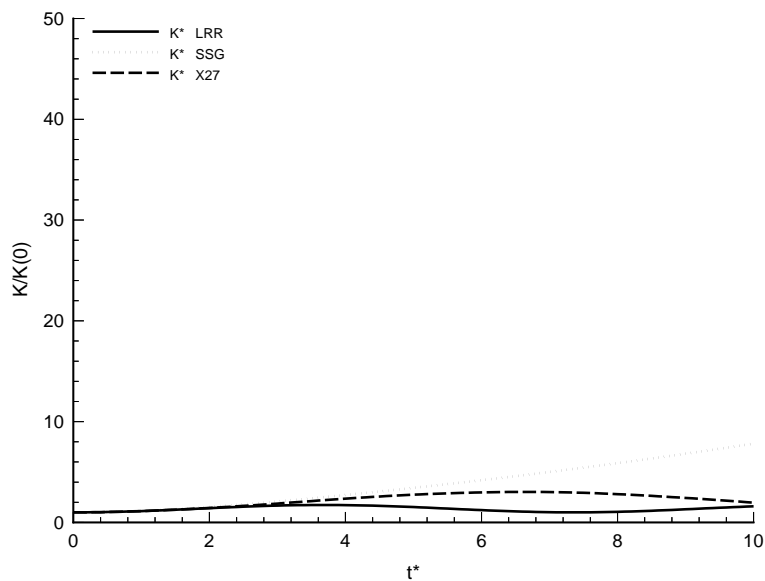


FIG. 7.36: Evolution de l'énergie cinétique turbulente pour le cisaillement en présence de rotation BFR5.

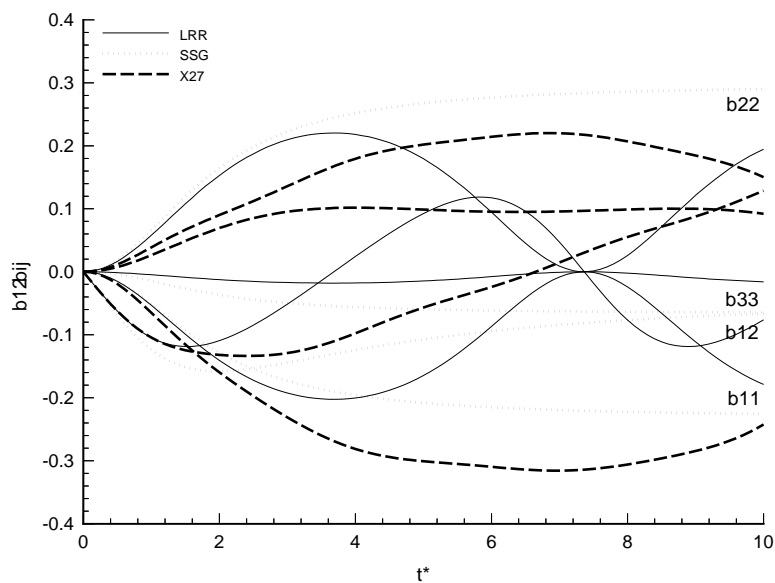


FIG. 7.37: Evolution du tenseur d'anisotropie pour le cisaillement en présence de rotation BFR5.

Il peut être intéressant de noter que les modèles rapides classiques n'ont pas tous non plus comme limite supérieure de stabilité le paramètre  $R_o = 0.5$ , mais une valeur inférieure, contrairement au modèle SSG, dont les degrés de liberté ont été calibrés de façon à respecter cette limite. Ce comportement de l'énergie cinétique se reflète dans celui des évolutions des composantes du tenseur d'anisotropie. Cette caractéristique est encore plus marquée pour LRR, dont l'énergie cinétique est également trop faible.

### *Rotation pure*

Le comportement du modèle rapide X27 est comparé aux prédictions du modèle SSG sur les deux situations de rotation rapide présentées au chapitre précédent. Rappelons que ces cas diffèrent par l'orientation du vecteur rotation par rapport à l'axe d'axisymétrie initial.

Dans le premier cas, correspondant à la situation où les deux vecteurs sont colinéaires, le modèle SSG ne permet pas de voir la modification de la turbulence par la rotation. C'est le cas de l'ensemble des modèles classiques dont l'expression est une fonctionnelle isotrope dépendant des gradients de vitesse, du tenseur de Reynolds  $R_{ij}$ , et éventuellement du tenseur de directivité  $Y_{pq}$ . Le modèle rapide X27 permet par contre de prendre en compte partiellement cette influence (figure 7.38).

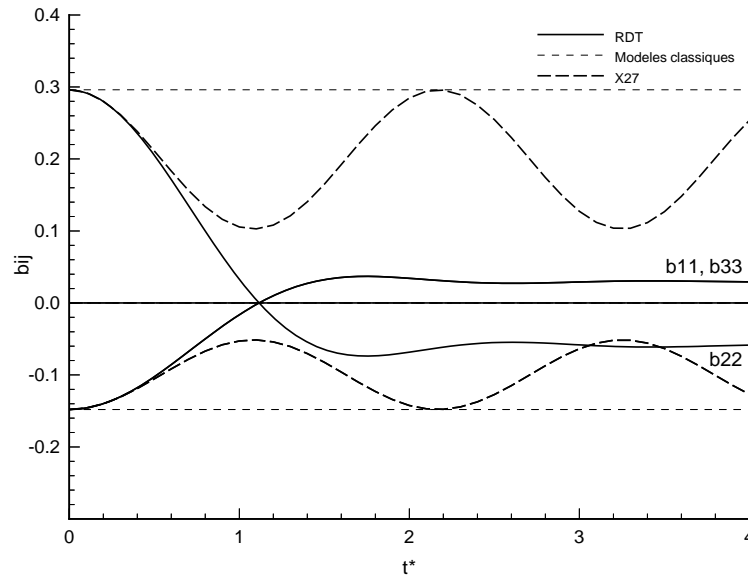


FIG. 7.38: *Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie pour le premier cas de rotation pure.*

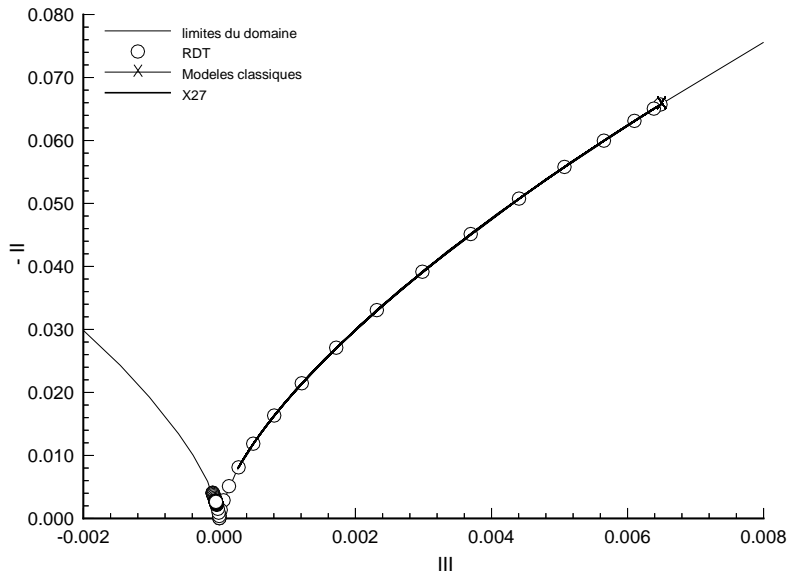


FIG. 7.39: Evolution des invariants dans le cas 1.

Le temps de validité de la solution linéaire de RDT a été estimé par Wigeland et Nagib [175] et est de l'ordre de  $t^* = 1.1$ , jusqu'auquel on note un bon accord du modèle. En dehors de ce domaine, le comportement de X27 est sensiblement différent. Il présente en effet une solution oscillant avec une période constante entre deux états axisymétriques. L'écoulement reste axisymétrique dans ses axes principaux tout au long du mouvement. L'amplitude des oscillations, fixée avec la calibration du modèle, ne permet pas d'atteindre un état tel que le signe du troisième invariant de  $b_{ij}$  change par rapport à la situation initiale, comme l'indique la solution de RDT. Les amplitudes des oscillations ne sont pas non plus amorties, contrairement à la solution de RDT. Cette caractéristique risque de surestimer l'importance de la rotation lors du calcul de valeurs asymptotiques d'écoulements rotationnels ou en repère tournant.

Le principal apport que constitue la formulation du type X27 aux modèles classiques, s'estime de façon quantitative par le comportement des solutions dans le plan des invariants (figure 7.39). Alors que le modèle classique ne bouge pas de la situation initiale, le modèle X27 prend en compte l'évolution de l'axisymétrie. La solution proposée n'est cependant pas fidèle à la RDT dès que le domaine d'influence de la RDT est quitté. Ceci tient sans doute moins à l'intérêt d'une équation de transport supplémentaire de ce type, qu'au choix de la fonctionnelle pour  $B_{ijpqmn}$ , construite par simple analogie avec les fonctionnelles développées pour les tenseurs d'ordre quatre, sans tenir compte de tenseurs qui seraient éventuellement plus spécifiques de ces bases de dimension élevée.

Dans le second cas, correspondant à la situation où les deux vecteurs sont orthogonaux, le modèle SSG répond par une évolution des anisotropies oscillant avec une période et une amplitude constante (figure 7.40). Il ne distingue pas les deux cas de rotation dans le plan des

invariants (figure 7.41).

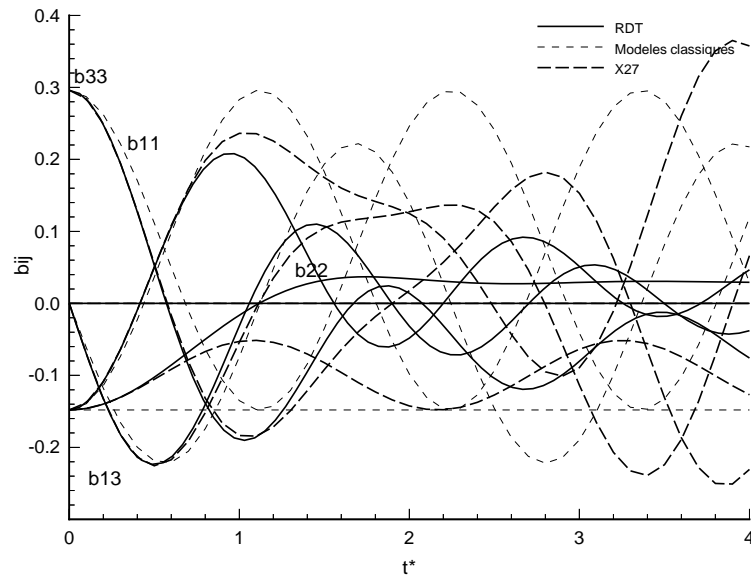


FIG. 7.40: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie pour le second cas de rotation pure.

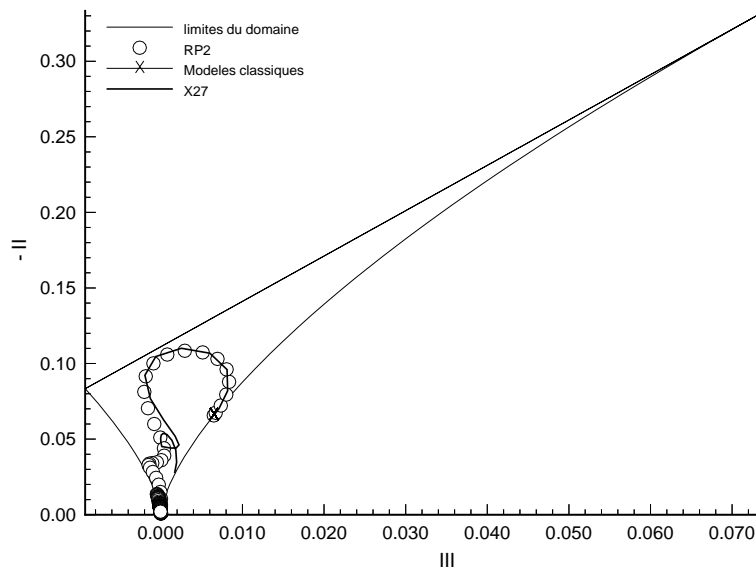


FIG. 7.41: Evolution des invariants dans le cas 2.

De même que dans le cas précédent, la solution donnée par X27 est relativement fidèle à la solution de RDT dans le domaine de validité de cette théorie et meilleure que celle proposée



par le modèle SSG. Par contre, ce comportement se dégrade rapidement. Il n'est pas évident d'identifier des périodes d'oscillation des composantes du tenseur d'anisotropie, même sur un temps adimensionnel plus long que celui présenté sur la figure 7.40. L'évolution de la solution dans le plan des invariants (figure 7.41) tracée jusqu'au temps  $t^* = 3.0$ , illustre ce fait d'une façon plus immédiate.

Il apparaît alors relativement intéressant de comparer les évolutions des tenseurs du quatrième ordre issus des solutions de X27 et de la RDT. Le premier cas, où la turbulence reste axisymétrique, permet de ne retenir que les cinq composantes indépendantes de  $X_{ijpq}$ . Le second cas nécessite de bien distinguer chaque composante, même si les échelles sont conservées pour plus de clarté.

Dans le premier cas, le comportement du tenseur  $X_{ijpq}$  est analogue à celui du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$  (figure 7.42).

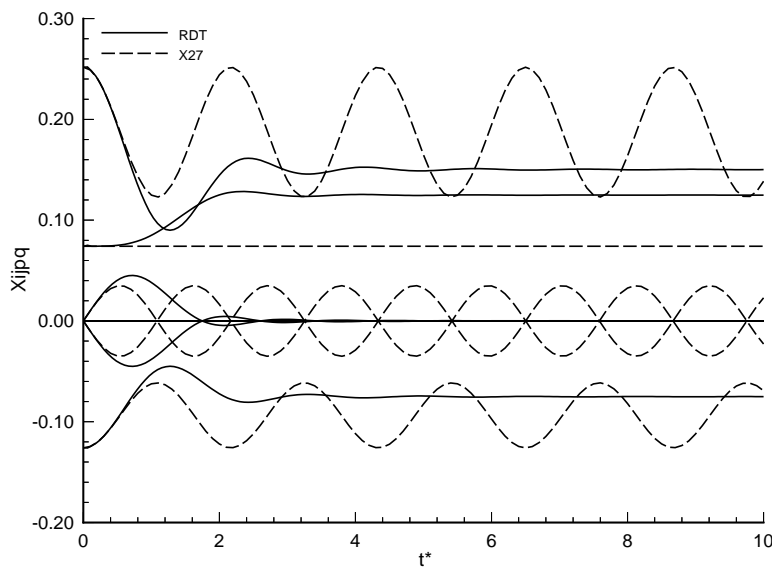


FIG. 7.42: Evolution des composantes du tenseur  $X_{ijpq}$  dans le cas 2.

Les solutions s'accordent avec la RDT sur son domaine de validité et oscillent avec une période et une amplitude constante par la suite, alors que la solution de RDT s'amortit rapidement.

Dans le second cas, les oscillations des composantes sont affichées deux par deux, de façon à en faciliter la lecture. La solution analytique de RDT est par contre rappelée dans chaque figure. Le nom exact des composantes importe peu, c'est pourquoi aucune de ces courbes ne possède

de légende particulière. Seule l'allure générale présente un intérêt.

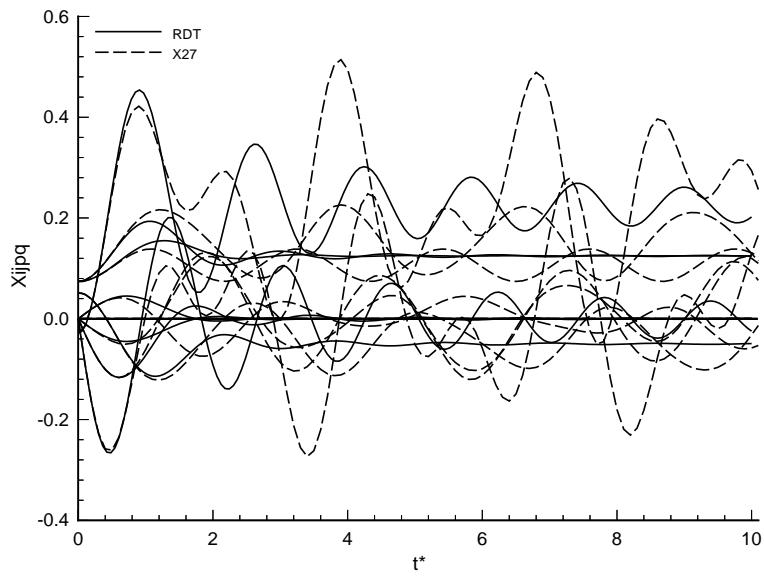


FIG. 7.43: Evolution des composantes tenseur  $X_{ijpq}$  dans le cas 2.

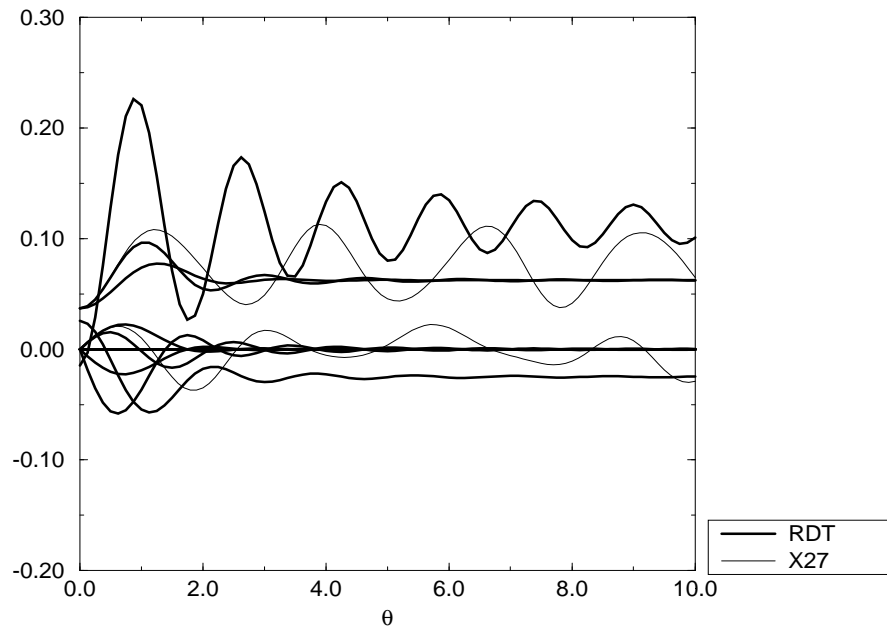


FIG. 7.44: Détail du tenseur  $\bar{X}_{ijpq}$ .

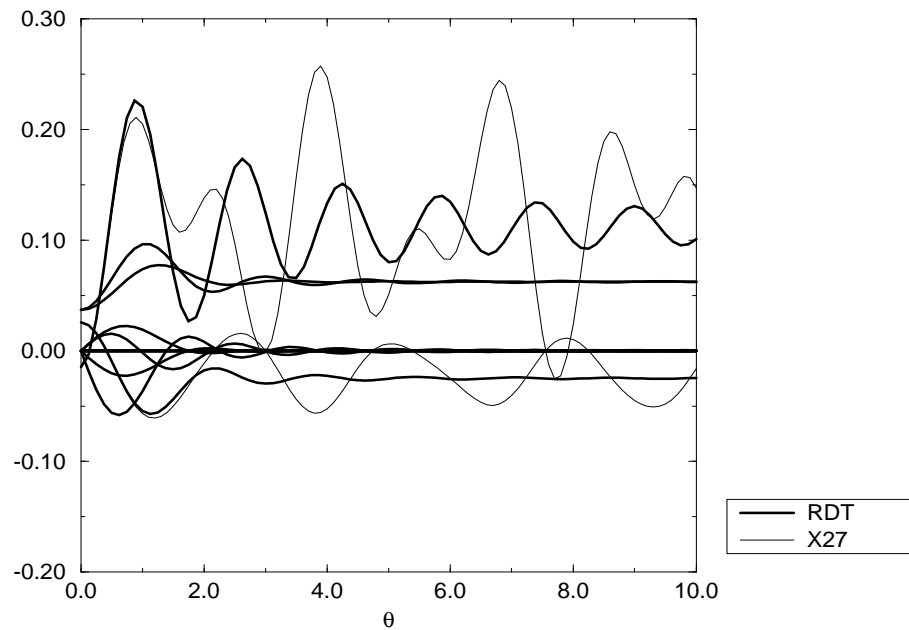


FIG. 7.45: *Détail du tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$ .*

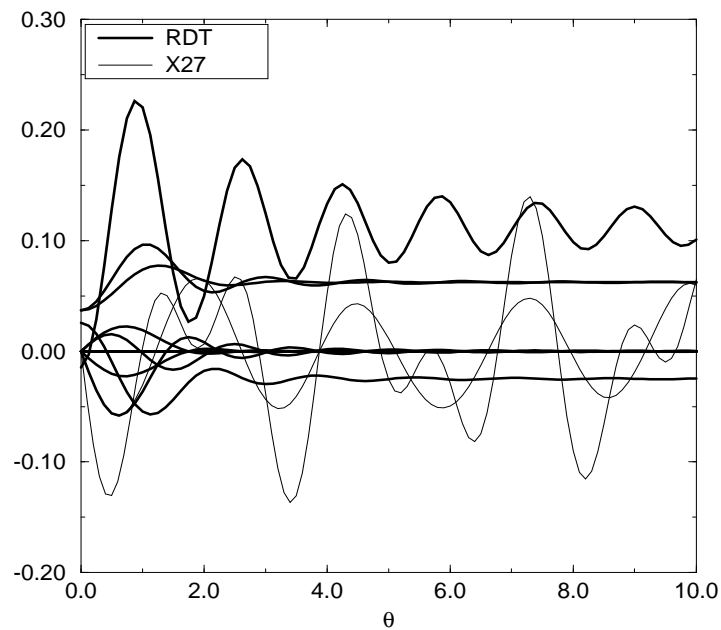
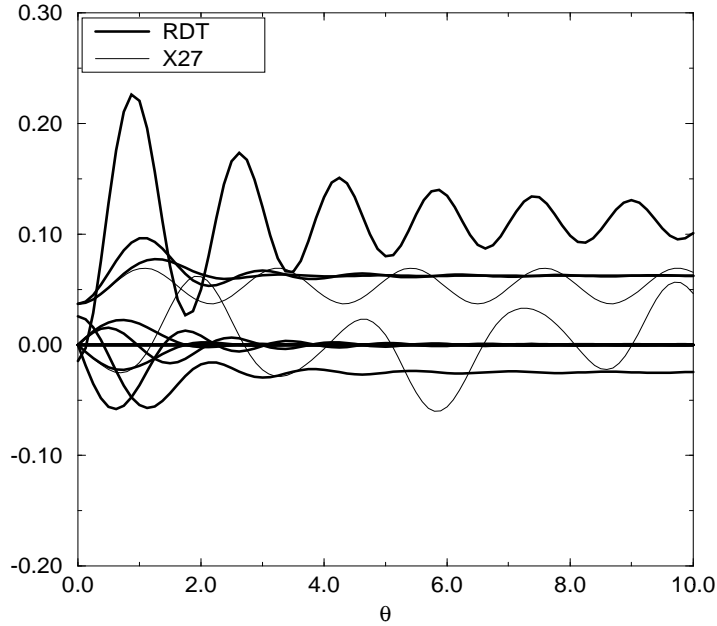


FIG. 7.46: *Détail du tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$ .*

FIG. 7.47: *Détail du tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$ .*

Le mode d’oscillation est ici plus complexe. Si certaines composantes possèdent des oscillations visiblement périodiques à amplitude constante, ce n’est pas le cas de toutes, ce qui explique le comportement du tenseur d’anisotropie du tenseur de Reynolds.

#### *Déformations planes successives*

L’ensemble des cas tests simples précédents, à l’exception de la rotation pure, a permis d’évaluer le développement des anisotropies par le modèle rapide présenté, à partir d’une situation initiale spectralement isotrope. Ces résultats permettent d’estimer la capacité du modèle à produire un niveau correct d’anisotropie dans des situations de base et sont plutôt encourageants dans l’ensemble.

Il est dès lors intéressant de regarder le comportement du modèle dans des cas semblables à partir d’une situation anisotrope réaliste. Le calcul de deux déformations planes rapides successives appliquées à un écoulement turbulent initialement isotrope est approprié dans ce cas pour deux raisons :

- Il permet évidemment de comparer la réponse à la seconde déformation directement à partir d’une condition initiale anisotrope “exacte”, fournie par la RDT sur la première déformation, à la solution de RDT elle-même.
- Il permet ensuite d’accéder à des conditions initiales anisotropes fournies par le modèle et donc de tester directement la sensibilité du modèle à des conditions anisotropes “inexactes”, en comparant les solutions issues des conditions initiales anisotropes données par la solution de RDT. Il est donc possible d’avoir une idée de la capacité du modèle à réagir avec ses propres erreurs.

Les déformations planes successives sont inspirées des expériences de Lee et Reynolds [83]. Le cas test est le même qu'au chapitre précédent, soit une première déformation plane, définie par PS1

$$\bar{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

à la suite de laquelle est appliquée la second déformation, PS2 :

$$\bar{V}_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}S & 0 \\ \frac{1}{2}S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.80)$$

Le premier mode PS1 est appliqué à une turbulence initialement isotrope, jusqu'au temps de référence  $c = 2.72$ . Les prédictions du modèle rapide X27 peuvent être comparées à la solution de RDT (figure 7.48 et 7.49).

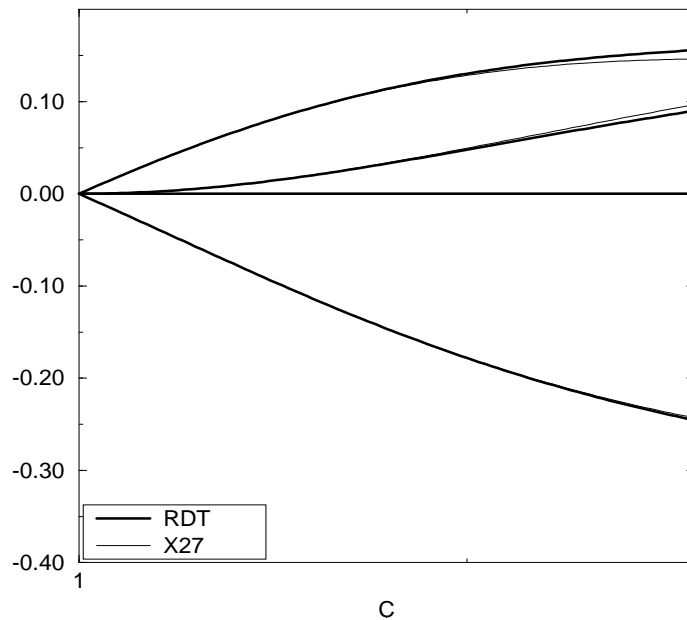
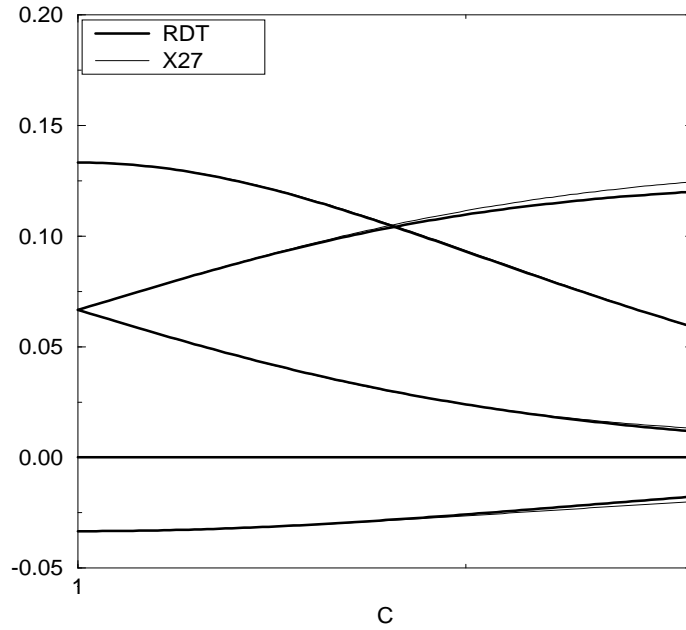


FIG. 7.48: Tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$ .

FIG. 7.49: *Tenseur  $X_{ijpq}$ .*

Ces résultats ont déjà été examinés lors du cas test de déformation plane simple. Les conditions spectrales initiales diffèrent donc légèrement de la solution donnée par le calcul de RDT. Le calcul des deux modes par X27 donne l'évolution suivante du tenseur d'anisotropie (figure 7.50):

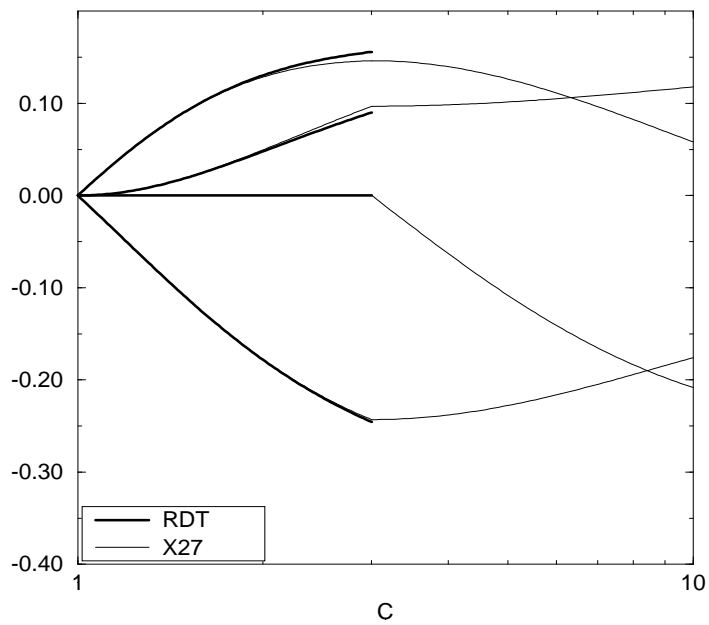


FIG. 7.50: *Déformations planes successives.*

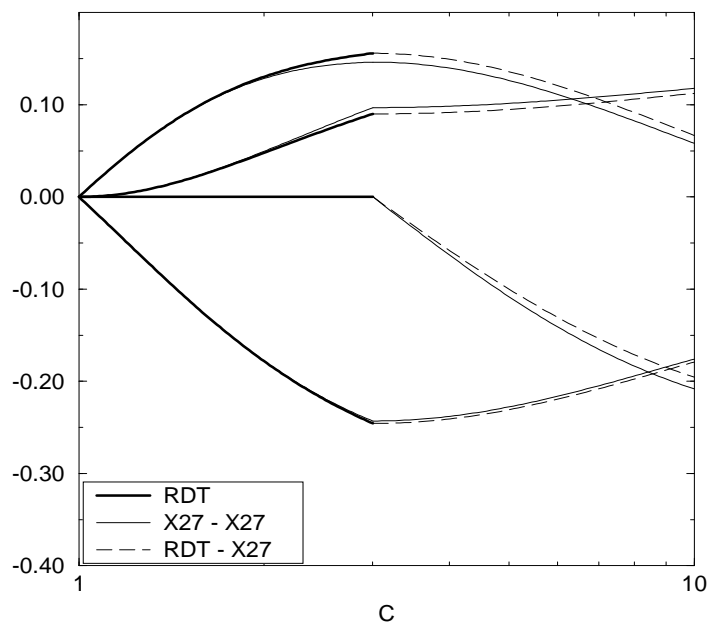


FIG. 7.51: *Conditions initiales de RDT.*

La comparaison des solutions données par le modèle rapide X27 pour le second mode de déformation, à partir de conditions anisotropes issues d'un calcul X27 et d'un calcul RDT du premier mode (figure 7.51), permet de dire que les anisotropies développées par X27 ont un sens.

Les résultats sont effectivement semblables.

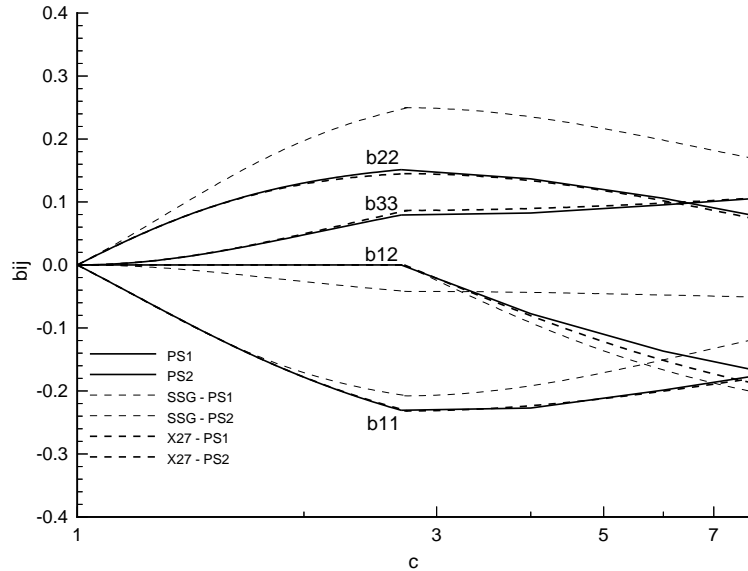


FIG. 7.52: *Evolution du tenseur d'anisotropie pour les déformations planes successives PS12R.*

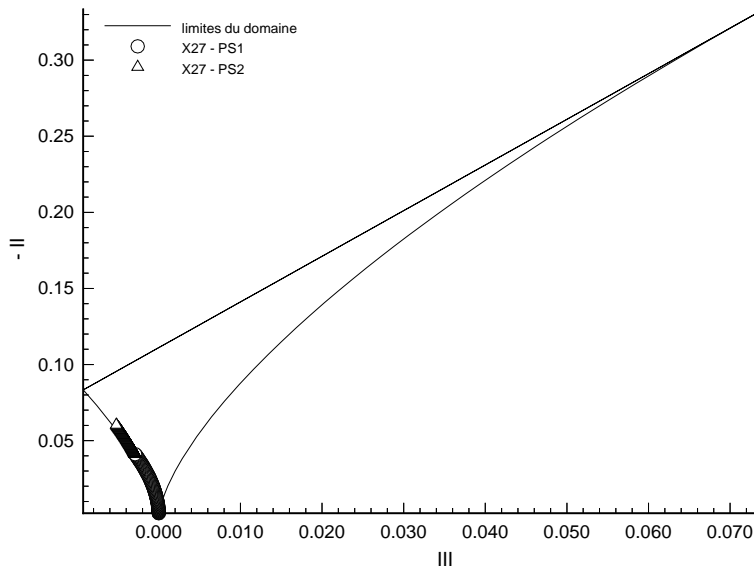


FIG. 7.53: *Evolution des invariants pour les déformations planes successives PS12R. Modèle X27.*

Le calcul X27 du mode PS2 semble voisin de la prédiction de RDT, ce qui permet de dire que



le modèle X27 traite relativement correctement ce cas simple même avec des conditions initiales anisotropes.

### Remarques sur les calculs rapides

Les calculs rapides effectués précédemment montrent que la hiérarchie de modèle du type X27 présente des caractéristiques intéressantes. En revanche, il possède par nature l'inconvénient de nécessiter la donnée initiale des composantes indépendantes des tenseurs  $X_{ijpq}$  et éventuellement de  $Y_{pq}$ , généralement inconnues dans le cas anisotrope.

La modélisation sommaire du tenseur  $B_{ijpqmn}$  demanderait une étude plus précise dans le cas de la rotation pure. Nous reviendrons sur cet aspect en fin de chapitre. Néanmoins une formulation de ce type permet d'accéder à une information qui n'est pas vue par les modèles classiques et qui s'observe notamment dans le plan des invariants.

## 7.4 Proposition de terme lent

Le terme lent intervenant dans l'équation d'évolution du tenseur  $X_{ijpq}$  est modélisé en même temps que le tenseur des taux de dissipation. Cette démarche s'inspire du traitement du tenseur de  $\varepsilon_{ij}$  proposé par Lumley [89] pour une turbulence homogène incompressible et à grands nombres de Reynolds. Les termes de dissipation sont supposés s'exprimer comme fonctionnelle dépendant du tenseur de Reynolds, caractérisant les grosses structures et de l'échelle caractéristique des mécanismes dissipatifs. Lorsque le terme lent est modélisé par une fonctionnelle similaire, cela revient à traiter implicitement le déviateur du tenseur des taux de dissipation avec le terme lent.

L'équation du taux de dissipation est modélisée de façon classique, par :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon 1} R_{mn} S_{mn} \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (7.81)$$

avec  $C_{\varepsilon 1} = 1.44$  et  $C_{\varepsilon 2} = 1.90$ . Bien qu'inadaptée au traitement d'un écoulement rotationnel [153], cette modélisation est la plus couramment utilisée avec les modèles homogènes classiques. Elle sera donc conservée ici dans le but de comparer uniquement les traitements du tenseur des corrélations pression-déformation.

La mise en œuvre du terme lent ne peut pas être effectuée par une analyse similaire à celle des modèles classiques, le comportement dynamique du système de retour à l'isotropie dans le plan des invariants ne correspondant plus exactement à l'espace des phases du système différentiel. A cette analyse est substituée une étude des équations différentielles des tenseurs d'anisotropie d'ordre deux, dictée par la forme du modèle choisi.

L'étude de l'écoulement de retour à l'isotropie ne fournit pas suffisamment de renseignements pour permettre de définir entièrement la forme du terme lent, si bien que le modèle est calibré numériquement de façon à satisfaire au mieux la limite asymptotique d'un écoulement de cisaillement pur appliqué à une turbulence initialement isotrope, comme il l'a été mentionné au début de ce chapitre.

### 7.4.1 Hypothèses et simplifications

Le terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation désigne la forme modélisant ce tenseur dans la limite des écoulements de retour à l'isotropie. En l'absence de gradients de vitesse moyenne, les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (7.82a)$$

$$\frac{dX_{ijpq}}{dt} = -\varepsilon_{ijpq} + \phi_{ijpq}^S \quad (7.82b)$$

Les déviateurs adimensionnels des tenseurs seront notés de la façon suivante, en minuscules :

$$b_{ij} = \frac{1}{2K} R_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (7.83a)$$

$$y_{pq} = \frac{1}{2K} Y_{pq} - \frac{1}{3} \delta_{pq} \quad (7.83b)$$

$$x_{ijpq} = \frac{1}{2K} X_{ijpq} - \left[ \frac{2}{15} \delta_{ij} \delta_{pq} - \frac{1}{30} (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jp} \delta_{iq}) \right] \quad (7.83c)$$

L'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente s'écrit pour un écoulement de retour à l'isotropie :

$$\frac{dK}{dt} = -\varepsilon \quad (7.84)$$

et le système devient :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (7.85a)$$

$$\frac{dx_{ijpq}}{dt} = \frac{\varepsilon}{K} x_{ijpq} + \frac{1}{2K} [-\varepsilon_{ijpq} + \phi_{ijpq}^S] \quad (7.85b)$$

Le temps caractéristique de décroissance est noté :

$$\tau = \frac{\varepsilon}{K} \quad (7.86)$$

et les expressions adimensionnelles des termes inconnus sont étoilées comme :

$$\varepsilon_{ijpq} = 2\varepsilon \varepsilon_{ijpq}^* \quad (7.87a)$$

$$\phi_{ijpq}^S = \varepsilon \phi_{ijpq}^{S*} \quad (7.87b)$$

Dans ce cas, l'équation du mouvement se met sous la forme :

$$\frac{dx_{ijpq}}{dt} = \tau [x_{ijpq} - \varepsilon_{ijpq}^* + \frac{1}{2} \phi_{ijpq}^{S*}] \quad (7.88)$$

L'expression des évolutions du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds et de la directivité s'en déduit immédiatement par contraction des indices :

$$\frac{db_{ij}}{dt} = \tau [b_{ij} - \varepsilon_{ijnn}^* + \frac{1}{2} \phi_{ijnn}^{S*}] \quad (7.89a)$$

$$\frac{dy_{pq}}{dt} = \tau [y_{pq} - \varepsilon_{nnpq}^* + \frac{1}{2} \phi_{nnpq}^{S*}] \quad (7.89b)$$

D'après l'expression des équations homogènes déduites de la description spectrale de la turbulence, le terme lent exact est non-linéaire et fait intervenir des produits de convolution

d'amplitudes de Fourier des fluctuations de vitesse. La modélisation du terme lent ne s'inspire cependant pas directement de sa forme exacte et ne retient que l'hypothèse classique d'une expression fonctionnelle dépendant des déviateurs des corrélations de vitesse retenues pour décrire l'écoulement. Il est donc modélisé par analogie avec les expressions classiques développées pour le tenseur du second ordre. Le modèle pour le terme lent du quatrième ordre  $\phi_{ijpq}^S$  est donc une fonctionnelle isotrope des déviateurs du tenseur de Reynolds,  $b_{ij}$ , du tenseur structurel  $y_{pq}$  et du tenseur d'ordre quatre  $x_{ijpq}$ . De même que pour le développement du terme rapide, la forme de la fonctionnelle utilise la même technique que pour les tenseurs du second ordre.

Par simplification, le terme lent est supposé dépendre linéairement des différents déviateurs. Cette approximation conduit à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\phi_{ijpq}^{S*} &= C_0 x_{ijpq} \\ &+ C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ &+ C_3 \delta_{ij} b_{pq} + C_4 b_{ij} \delta_{pq} + C_5 (b_{ip} \delta_{jq} + b_{iq} \delta_{jp} + b_{jq} \delta_{ip} + b_{jp} \delta_{iq}) \\ &+ C_{16} \delta_{ij} y_{pq} + C_{17} y_{ij} \delta_{pq} + C_{18} (y_{ip} \delta_{jq} + y_{iq} \delta_{jp} + y_{jq} \delta_{ip} + y_{jp} \delta_{iq})\end{aligned}\quad (7.90)$$

Le modèle comprend neuf inconnues, qui doivent vérifier les contraintes de base. Ces dernières sont précisées dans le paragraphe suivant, où une notation permettant de retrouver la forme linéaire du terme lent des modèles classiques sera adoptée, sous forme d'une simple "normalisation" sur ce tenseur. Les coefficients sont supposés constants.

#### 7.4.2 Contraintes de base

Le terme lent doit satisfaire la contrainte d'incompressibilité, qui s'écrit :

$$\phi_{i\alpha j\alpha}^{S*} = 0 \quad (7.91)$$

Le système des contraintes correspondantes est donc :

$$\begin{aligned}C_3 + C_4 + 5C_5 &= 0 \\ C_{16} + C_{17} + 5C_{18} &= 0\end{aligned}\quad (7.92)$$

Le tenseur doit également être un déviateur, ce qui impose que lorsque la turbulence est isotrope,  $\phi_{ijpq}^{S*} = 0$ . Il vient :

$$\begin{aligned}\phi_{ijpq}^{S*} &= C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{jp} \delta_{iq}) \\ &= 0\end{aligned}\quad (7.93)$$

soit :

$$\begin{aligned}C_1 &= 0 \\ C_2 &= 0\end{aligned}\quad (7.94)$$

Le modèle dépend alors de cinq inconnues et peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\phi_{ijpq}^{S*} &= C_0 x_{ijpq} \\ &+ C_3 \delta_{ij} b_{pq} - (C_3 + 5C_5) b_{ij} \delta_{pq} + C_5 (b_{ip} \delta_{jq} + b_{iq} \delta_{jp} + b_{jq} \delta_{ip} + b_{jp} \delta_{iq}) \\ &+ C_{16} \delta_{ij} y_{pq} - (C_{16} + 5C_{18}) y_{ij} \delta_{pq} + C_{18} (y_{ip} \delta_{jq} + y_{iq} \delta_{jp} + y_{jq} \delta_{ip} + y_{jp} \delta_{iq})\end{aligned}\quad (7.95)$$

Enfin, il peut être intéressant de ramener ces coefficients à une forme connue par rapport aux modèles classiques. Il s'agit d'un simple changement de variable. L'expression du terme lent dans l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds est la suivante :

$$\phi_{ijnm}^{S*} = \beta_1^S b_{ij} + \beta_3^S y_{ij} \quad (7.96)$$

Dans ce cas, il se forme une sorte de condition de normalisation, conduisant à :

$$\begin{aligned} C_0 + 3C_4 + 4C_5 &= \beta_1^S \\ 3C_{17} + 4C_{18} &= \beta_3^S \end{aligned} \quad (7.97)$$

En résolvant ce système avec les contraintes d'incompressibilité, il vient :

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{1}{3}(\beta_1^S - C_0 + 11C_5) \\ C_{16} &= -\frac{1}{3}(\beta_3^S + 11C_{18}) \end{aligned} \quad (7.98)$$

Par conséquent, le modèle du terme lent s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi_{ijpq}^{S*} &= C_0 x_{ijpq} \\ &- \frac{1}{3}(\beta_1^S - C_0 + 11C_5) \delta_{ij} b_{pq} + \frac{1}{3}(\beta_1^S - C_0 - 4C_5) b_{ij} \delta_{pq} \\ &+ C_5 [b_{ip} \delta_{jq} + b_{iq} \delta_{jp} + b_{jq} \delta_{ip} + b_{jp} \delta_{iq}] \\ &- \frac{1}{3}(\beta_3^S + 11C_{18}) \delta_{ij} y_{pq} + \frac{1}{3}(\beta_3^S - 4C_{18}) y_{ij} \delta_{pq} \\ &+ C_{18} [y_{ip} \delta_{jq} + y_{iq} \delta_{jp} + y_{jq} \delta_{ip} + y_{jp} \delta_{iq}] \end{aligned} \quad (7.99)$$

avec les contractions suivantes, correspondant respectivement aux contributions du terme lent dans les équations de transport de  $b_{ij}$  et  $y_{pq}$  :

$$\phi_{ijn}^{S*} = \beta_1^S b_{ij} + \beta_3^S y_{ij} \quad (7.100a)$$

$$\phi_{nnpq}^{S*} = (C_0 - \beta_1^S - 7C_5) b_{pq} + (C_0 - \beta_3^S - 7C_{18}) y_{pq} \quad (7.100b)$$

Il faut noter en particulier que le choix de la fonctionnelle du terme lent découple les équations de transport de  $b_{ij}$  et  $y_{pq}$  de celle de  $x_{ijpq}$ . Le comportement du système résultant est étudié dans le paragraphe suivant. Le modèle du terme lent est linéaire, mais fait intervenir un deuxième tenseur pour rendre compte du phénomène de retour à l'isotropie. Il souffre donc des mêmes défauts que le modèle de Rotta, linéaire, avec en particulier une réduction des anisotropies qui se fait de façon identique pour toutes les composantes du tenseur de Reynolds, notamment parce que le retour à l'isotropie du tenseur structurel  $Y_{pq}$  est également linéaire. Dans un premier temps, la solution analytique du système régissant le retour à l'isotropie des tenseurs  $R_{ij}$  et  $Y_{pq}$  est déterminée afin de mettre en évidence l'apport de cette seconde équation dans le terme lent linéaire. Il faut noter que ces développements ne sont pas très facilement exploitables dans la mesure où le tenseur structurel est mal connu, ainsi que la physique qui lui est associée. Cette étude est effectuée à titre indicatif, puisque l'évaluation de l'influence du terme lent complet nécessite de prendre en compte l'équation pour  $X_{ijpq}$ .

### 7.4.3 Commentaire et résolution du système couplé des tenseurs du second ordre

Le modèle proposé pour le terme lent conduit à découpler les équations de  $b_{ij}$  et  $y_{pq}$  de celle de  $X_{ijpq}$ , pour donner :

$$\frac{d\tau}{dt} = (1 - C_{\varepsilon 2}) \tau^2 \quad (7.101a)$$

$$\frac{dK}{dt} = -K \tau \quad (7.101b)$$

$$\frac{db_{ij}}{dt} = \tau b_{ij} + \frac{1}{2} \tau [\beta_1^S b_{ij} + \beta_3^S y_{ij}] \quad (7.101c)$$

$$\frac{dy_{pq}}{dt} = \tau y_{pq} + \frac{1}{2} \tau [(C_0 - \beta_1^S - 7C_5) b_{pq} + (C_0 - \beta_3^S - 7C_{18}) y_{pq}] \quad (7.101d)$$

Le système à résoudre peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d\tau}{dt} = C \tau^2 \quad (7.102a)$$

$$\frac{dK}{dt} = -K \tau \quad (7.102b)$$

$$\frac{dZ}{dt}(t) = -\tau(t) \mathcal{B} Z(t) \quad (7.102c)$$

où

$$Z = \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \quad (7.103)$$

En adoptant les notations suivantes :

$$C = 1 - C_{\varepsilon 2}$$

$$B_1 = -(1 + \frac{1}{2}\beta_1^S) \quad B_2 = -\frac{1}{2}\beta_3^S \quad (7.104)$$

$$B_3 = -\frac{1}{2}(C_0 - \beta_1^S - 7C_5) \quad B_4 = -(1 + \frac{1}{2}(C_0 - \beta_3^S - 7C_{18}))$$

Pour les modèles classiques, la constante  $C$  est négative. Ce système montre en particulier que la solution du tenseur d'anisotropie est la solution de l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2b}{dt^2} + (B_1 + B_4 - C)\tau \frac{db}{dt} + \tau^2(B_1 B_4 - B_2 B_3) b = 0 \quad (7.105)$$

Les conditions initiales du système d'équations différentielles sont indicées par un zéro. Ainsi la solution des équations (7.101a) et (7.101b) conduit aux formes analytiques suivantes :

$$\tau(t) = \tau_0 \left[ \frac{1}{1 - C\tau_0 t} \right] \quad (7.106)$$

$$K(t) = K_0 \left[ \frac{1}{1 - C\tau_0 t} \right]^{\left(\frac{1}{C}\right)} \quad (7.107)$$

Le taux de décroissance de l'énergie cinétique turbulente est fixée par le coefficient  $C_{\varepsilon 2}$ .

La résolution du système matriciel (7.102c) peut être obtenue en diagonalisant la matrice  $\mathcal{B}$  - les coefficients sont supposés le permettre. Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $\mathcal{B}$ . Les quantités évaluées dans l'espace propre associé seront notées d'un tilde ( $\tilde{\phantom{x}}$ ). Il vient :

$$\tilde{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (7.108)$$

avec

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(B_1 + B_4) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad (7.109a)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(B_1 + B_4) - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \quad (7.109b)$$

où  $\Delta = (B_1 - B_4)^2 + 4B_2 B_3$  est le discriminant. La matrice de passage  $\mathcal{P}$  dans la base propre, composée des vecteurs propres, est définie par  $\mathcal{B} = \mathcal{P}\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{P}^{-1}$ , et s'écrit :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(B_1 - B_4) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} & \frac{1}{2}(B_1 - B_4) - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ B_3 & B_3 \end{pmatrix} \quad (7.110)$$

Pour mémoire, l'inverse de  $\mathcal{P}$  est ici :

$$\mathcal{P}^{-1} = \frac{1}{B_3 \sqrt{\Delta}} \begin{pmatrix} B_3 & -\frac{1}{2}(B_1 - B_4) - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \\ B_3 & \frac{1}{2}(B_1 - B_4) + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} \end{pmatrix} \quad (7.111)$$

Posons  $\tilde{Z} = \mathcal{P}^{-1}Z$ , et le système s'écrit :

$$\frac{d\tilde{Z}_i}{dt} = -\tau(t) \tilde{\mathcal{B}} \tilde{Z}_i \quad (7.112)$$

La résolution dans l'espace propre est immédiate et donne :

$$\tilde{Z}_i(t) = \tilde{Z}_i(0)[1 - C\tau_0 t]^{\left(\frac{\lambda_i}{C}\right)} \quad (7.113)$$

Les changements de repère  $Z_i = \mathcal{P}_{ik}\tilde{Z}_k$  conduisent à exprimer les conditions initiales selon :

$$\tilde{Z}_1(0) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}[b_0 - \frac{1}{2B_3}(B_1 - B_4 - \sqrt{\Delta}) y_0] \quad (7.114a)$$

$$\tilde{Z}_2(0) = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}[b_0 - \frac{1}{2B_3}(B_1 - B_4 + \sqrt{\Delta}) y_0] \quad (7.114b)$$

et

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{1}{2} [ (B_1 - B_4 + \sqrt{\Delta}) \theta\left(\frac{\lambda_1}{C}\right) \tilde{Z}_1(0) + (B_1 - B_4 + \sqrt{\Delta}) \theta\left(\frac{\lambda_2}{C}\right) \tilde{Z}_2(0) ] \\ y(t) &= B_3 [ \theta\left(\frac{\lambda_1}{C}\right) \tilde{Z}_1(0) + \theta\left(\frac{\lambda_2}{C}\right) \tilde{Z}_2(0) ] \end{aligned} \quad (7.115)$$

avec

$$\theta = (1 - C\tau_0 t) \quad (7.116)$$

si bien que la solution du système s'écrit :

$$\begin{aligned} b_{ij}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\theta\left(\frac{\lambda_1}{C}\right) - \theta\left(\frac{\lambda_2}{C}\right)) [ \frac{1}{2}(B_1 - B_4) b_{ij0} - B_2 y_{ij0} ] \\ &+ (\theta\left(\frac{\lambda_1}{C}\right) + \theta\left(\frac{\lambda_2}{C}\right)) [ \frac{1}{2} b_{ij0} ] \\ y_{ij}(t) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\theta\left(\frac{\lambda_1}{C}\right) - \theta\left(\frac{\lambda_2}{C}\right)) [ -\frac{1}{2}(B_1 - B_4) y_{ij0} - B_3 b_{ij0} ] \\ &+ (\theta\left(\frac{\lambda_1}{C}\right) + \theta\left(\frac{\lambda_2}{C}\right)) [ \frac{1}{2} y_{ij0} ] \end{aligned} \quad (7.117)$$

Il est clair que la prise en compte d'une équation d'évolution supplémentaire couplée à celle du tenseur  $b_{ij}$  d'anisotropie du tenseur de Reynolds permet d'ajuster deux temps de décroissance de la turbulence. Disposer d'un tel système de deux équations différentielles pour décrire le mouvement de retour à l'isotropie aurait été sans doute plus intéressant avec le tenseur des taux de dissipation, ou plus exactement de son déviateur. Le mode de retour à l'isotropie est également, et d'une façon évidente, contrôlé différemment par les paramètres du modèle qu'avec un choix de fonctionnelle non-linéaire dépendant uniquement de  $b_{ij}$ . Le fait que l'évolution du tenseur  $b_{ij}$  puisse être contrôlée par une équation différentielle du second ordre montre en particulier la possibilité d'une solution oscillante. D'après les résultats expérimentaux, cette solution n'est pas souhaitable (Choi et Lumley [25]). Il convient donc de définir des contraintes sur les coefficients du modèle en fonction du type de solution à retenir.

Le système des équations régissant le mouvement peut être encore mis sous la forme suivante, en choisissant le temps caractéristique du retour à l'isotropie comme paramètre d'évolution en temps :

$$\frac{dZ}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \frac{dZ}{dt} \quad (7.118)$$

soit d'après (7.101a) et (7.102c) :

$$\frac{dZ}{d\tau} = -\frac{1}{C} \frac{1}{\tau} \mathcal{B} Z \quad (7.119)$$

Pour qu'il y ait un retour à l'isotropie sans oscillations, il est nécessaire que les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{B}$  soient réelles et positives, c'est-à-dire que :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_2 &> 0 \end{aligned} \quad (7.120)$$

Il peut être alors intéressant de regarder le polynôme caractéristique de  $\mathcal{B}$ , qui s'écrit :

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (7.121)$$

avec :

$$\begin{aligned} S &= -(1 + \frac{1}{2}\beta_1^S) - (1 + \frac{1}{2}C_0 - \frac{7}{2}C_{18}) + \frac{1}{2}\beta_3^S \\ P &= (1 + \frac{1}{2}\beta_1^S) (1 + \frac{1}{2}C_0 - \frac{7}{2}C_{18}) - \frac{1}{2}\beta_3^S(1 + \frac{1}{2}C_0 - \frac{7}{2}C_5) \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont réelles si son discriminant  $\Delta$  est positif et sont toutes deux positives lorsque  $P > 0$  et  $S > 0$ .

Lorsque le coefficient  $\beta_3^S = 0$ , le problème se ramène à un modèle du type Rotta et est beaucoup plus simple. Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -(1 + \frac{1}{2}\beta_1^S) \quad (7.122a)$$

$$\lambda_2 = -(1 + \frac{1}{2}C_0 - \frac{7}{2}C_{18}) \quad (7.122b)$$

Les contraintes imposent :

$$1 + \frac{1}{2}\beta_1^S < 0 \quad (7.123a)$$

$$1 + \frac{1}{2}C_0 - \frac{7}{2}C_{18} < 0 \quad (7.123b)$$

Dans ce cas, le coefficient  $C_5$  n'intervient pas directement sur les contraintes du système de retour à l'isotropie.

#### 7.4.4 Détermination des constantes

Les constantes ont été évaluées numériquement de façon à satisfaire au mieux la limite asymptotique d'un écoulement de cisaillement pur appliqué à une turbulence initialement isotrope. Cette calibration présente deux avantages par rapport à une calibration sur un écoulement de retour à l'isotropie. Elle permet d'une part de faire intervenir l'ensemble des coefficients du modèle en ajustant la solution asymptotique sur les équilibres des quatre composantes du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds. Il est dès lors évident que la calibration est délicate et ne peut être que très grossière, et ce d'autant plus que la solution fournie par le modèle rapide ne possède pas par définition les mécanismes d'évolution vers cet état asymptotique. Le second, et principal avantage, est de proposer un cas de calibration à partir d'un état initial connu analytiquement dans l'espace spectral. L'idéal serait de disposer d'une simulation de retour à

l'isotropie à partir d'un état anisotrope obtenu par exemple par une distorsion rapide d'une turbulence initialement isotrope. Cette simulation fait partie des cas tests du terme lent qui peuvent être proposés *a posteriori*. Afin de simplifier le problème, certaines hypothèses supplémentaires sont effectuées. De façon à retrouver le modèle de Rotta dans les équations de transport du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, le coefficient  $\beta_1^S$  satisfait :

$$\beta_1^S = -3.6 \quad (7.124)$$

Les coefficients retenus sont :

$$\begin{aligned} \beta_1^S &= -3.6 & \beta_3^S &= -1.5 \\ C_0 &= -6.5 & C_5 &= -0.1 & C_{18} &= 0.4 \end{aligned} \quad (7.125)$$

Cet ensemble satisfait les relations sur les valeurs propres du système des tenseurs du second ordre.

Les conditions initiales isotropes sont données par Bardina, Ferziger et Reynolds [5]. Les valeurs asymptotiques des composantes du tenseur d'anisotropie auxquelles conduit l'application d'un cisaillement pur sont classées dans le tableau ci-dessous. Les valeurs expérimentales proviennent des travaux de Tavoularis et Corrsin [165] et les valeurs asymptotiques du modèle de Speziale, Sarkar et Gatski [159], précisément calibré sur ce cas, y sont données également.

	TC	SSG	X27
$b_{11}^\infty$	0.20 ~ 0.21	0.21	0.16
$b_{22}^\infty$	-0.14 ~ -0.15	- 0.14	- 0.11
$b_{33}^\infty$	-0.05 ~ -0.07	- 0.07	- 0.05
$b_{12}^\infty$	-0.14 ~ -0.16	- 0.17	- 0.17

La calibration a été effectuée en privilégiant pour cet écoulement de cisaillement pur, la prédiction de la composante de cisaillement  $b_{12}^\infty$  par rapport aux composantes normales.



### 7.4.5 Test du terme lent

Le comportement asymptotique, donné par le modèle complet, des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas d'un cisaillement pur est le suivant :

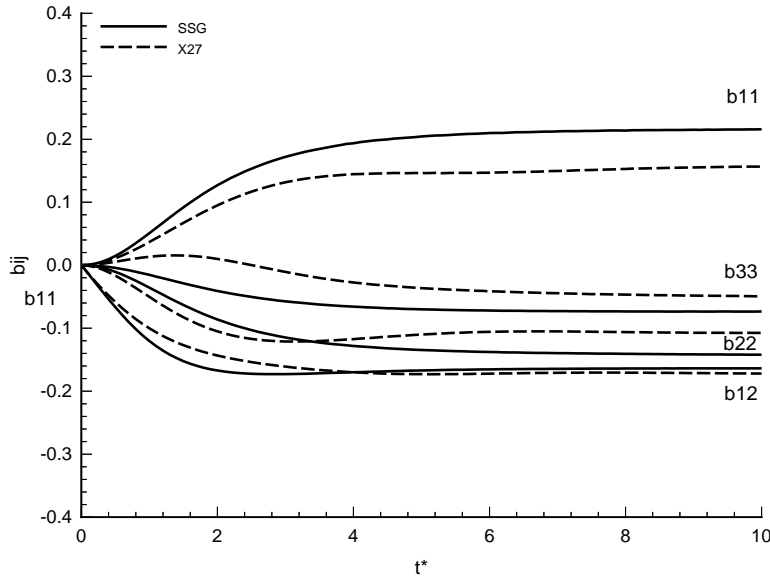


FIG. 7.54: *Comportement asymptotique.*

Le modèle est ici comparé au modèle SSG, dont le comportement asymptotique est relativement bon dans ce cas.

### Retour à l'isotropie

Les expériences de retour à l'isotropie dont nous disposons ne fournissent pas suffisamment d'information pour pouvoir être appliquées au calcul des composantes du tenseur du quatrième ordre. Par conséquent, deux tests simples ont été calculés. Ils s'inspirent des simulations M5R et Q6R, de retour à l'isotropie après application d'une déformation axisymétrique proposées par Lee et Reynolds. Ce sont des écoulements de relaxation après application d'une contraction axisymétrique, AXM, pour la première et d'une expansion axisymétrique, PXF, pour la seconde. Le choix de ces configurations est motivé d'une part par le fait que les conditions initiales fournies possèdent des valeurs du troisième invariant de signe opposé, et d'autre part par le fait que ces déformations initiales sont voisines de l'approximation de distorsion rapide. Les conditions initiales pour le tenseur  $X_{ijpq}$  peuvent donc être calculées dans l'approximation de distorsion rapide, pourvu que le temps final proposé soit suffisamment petit pour que cette hypothèse soit encore justifiée. Le comportement du modèle X27 en approximation de distorsion rapide permet en effet de supposer que la condition initiale fournie par le modèle lui-même ne sera pas trop farfelue. Les temps de calculs ont été choisis d'après les valeurs proposées par Lee et Reynolds pour M5R et Q6R. Il reste ensuite à déterminer approximativement une valeur initiale du taux de dissipation. Les auteurs ne fournissent pas explicitement ces données pour tous les points de

simulation, mais évaluent pour AXM et PXF les intervalles de variation du taux de déformation équivalent,  $S^*$ . En choisissant de débiter la relaxation sur le dernier des champs sauvegardés, la valeur du taux de dissipation initial peut être alors estimée avec la plus petite valeur de  $S^*$ . Il vient :

	$S^*_0$	$S^*_1$	$S_d$	$S$	$c_1$	$K_1$	$\varepsilon_1$
AXM	96.53	38.2	86.6	100.	3.363	0.88	4.02
EXQ	70.71	47.6	62.13	72.32	3.09	0.7	1.8

Le calcul de la valeur initiale du taux de dissipation s'obtient aisément une fois connue la valeur de l'énergie cinétique turbulente, par :

$$\varepsilon_1 = 2 \frac{K_1 S_d}{S^*_1}$$

Le temps est adimensionnalisé suivant le taux de décroissance de la turbulence, soit :

$$t^* = (t - t_1) \frac{\varepsilon_1}{2 K_1} \quad (7.126)$$

Les valeurs finales des temps de relaxation adimensionnels proposés sont respectivement de  $t^* = 1.439$  et  $t^* = 1.107$  pour M5R et Q6R. Il est clair que les taux de relaxation sont établis de façon très approximative et ne correspondent pas aux valeurs des simulations directes. Les performances du terme lent de X27 sont comparées de façon qualitative avec le modèle SSG. Le plan des invariants permet de rappeler que les niveaux des anisotropies initiales ne sont pas très élevés et les composantes d'anisotropies du tenseur de Reynolds montrent que le retour vers l'état isotrope est relativement lent, tout particulièrement dans le cas Q6R. Ces configurations restent malgré tout très simples.

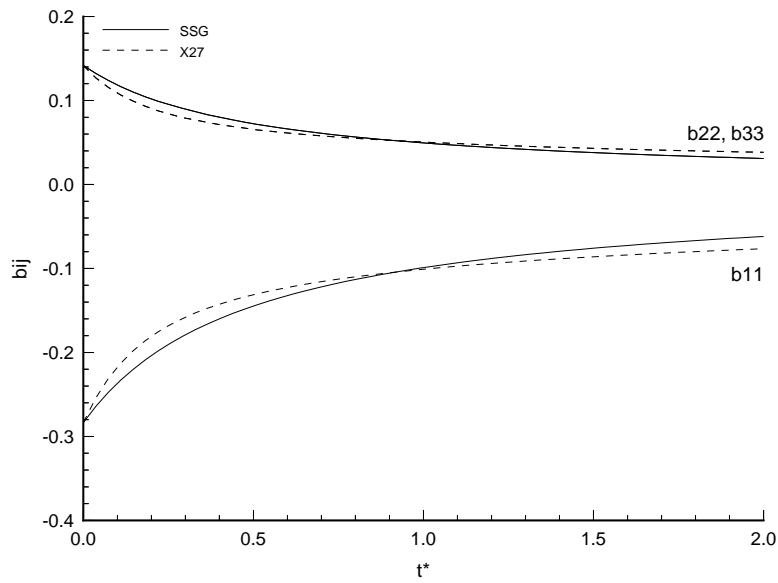


FIG. 7.55: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la relaxation  $M5R$  à partir d'une contraction axisymétrique.

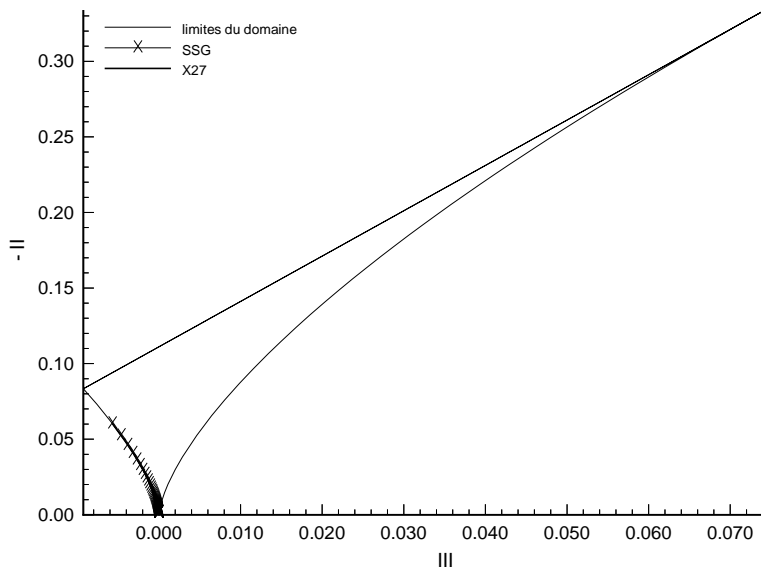


FIG. 7.56: Evolution dans le plan des invariants. Relaxation  $M5R$ .

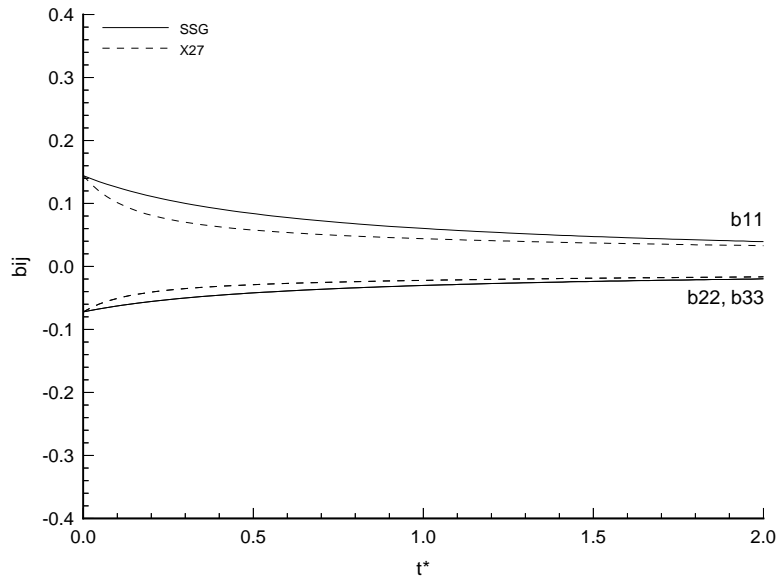


FIG. 7.57: Evolution du tenseur d'anisotropie pour la relaxation  $Q6R$  à partir d'une expansion axisymétrique.

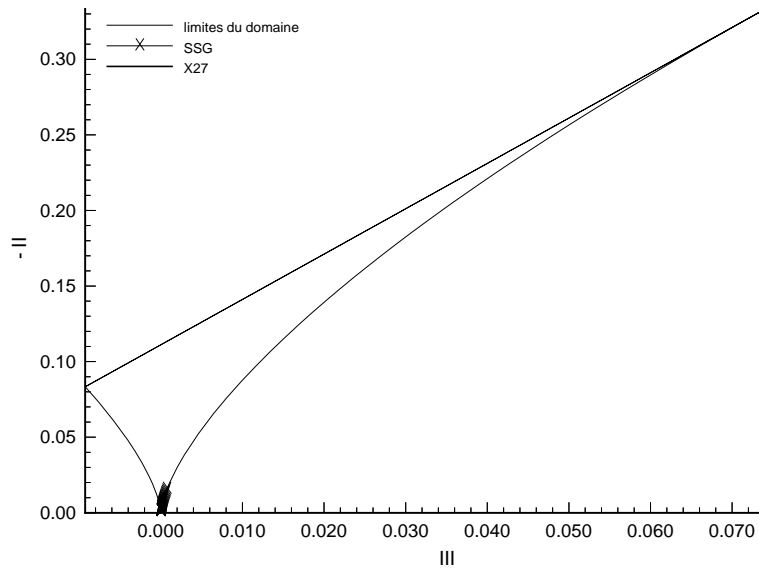


FIG. 7.58: Evolution dans le plan des invariants. Relaxation  $Q6R$ .

## 7.5 Test du modèle complet

Le modèle complet est comparé au modèle de Speziale, Sarkar et Gatski [159], un des modèles non linéaires, considérés comme optimaux sur des cas tests homogènes. Compte tenu du fait que les excellentes performances du modèle SSG doivent beaucoup à son caractère non linéaire, il est seulement espéré que la présente formulation, qui augmente le nombre de degrés de liberté *linéaires* aux dépens de la présence d'effets non linéaires, approche les prédictions de SSG.

### 7.5.1 Déformation pure

Les performances du modèle complet sont évaluées sur les cas de déformations irrotationnelles qui prennent fortement en compte le terme lent et qui ont été exposés au chapitre précédent. Ce sont les cas de contraction axisymétrique AXL, d'expansion axisymétrique EXO et de déformation plane PXA.

Si les performances du modèle X27 sont voisines de celles de SSG pour AXL, le niveau d'anisotropie prédit dans le cas de l'expansion EXO est nettement inférieur aux simulations directes et au modèle SSG. Il faut noter que dans le cas EXO, l'intensité de l'anisotropie est plus élevée pour des faibles valeurs de  $S^*$  que dans l'approximation de distorsion rapide. Le terme lent associé au modèle rapide de X27 ne permet pas de suivre cette tendance, ce qui fait que les niveaux d'anisotropie restent faibles. Le niveau général des anisotropies du tenseur de Reynolds reste à nouveau trop faible par rapport, à la fois aux simulations directes et aux performances de SSG, alors que la composante  $b_{22}$  notamment devrait être plus importante à mesure que  $S^*$  diminue. En revanche, il est intéressant de noter cette fois que la composante  $b_{11}$  a suivi la bonne tendance par rapport aux simulations directes, propriété qui n'est pas captée par les modèles classiques.

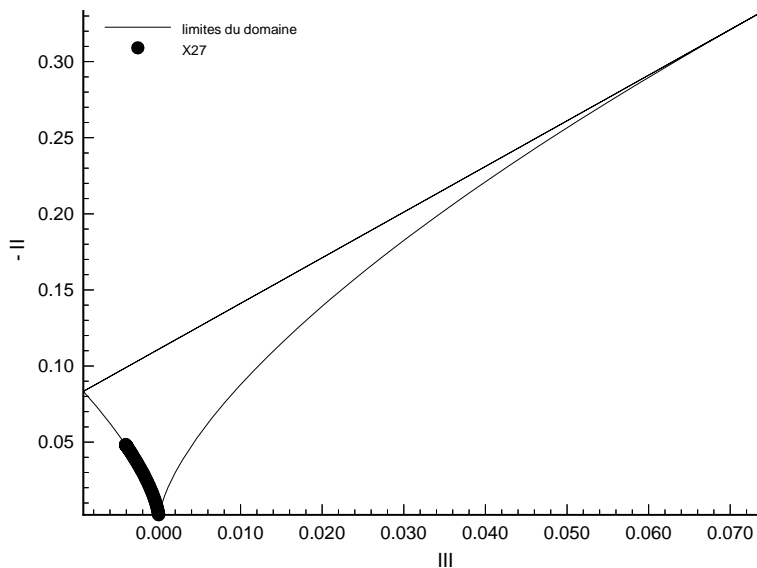
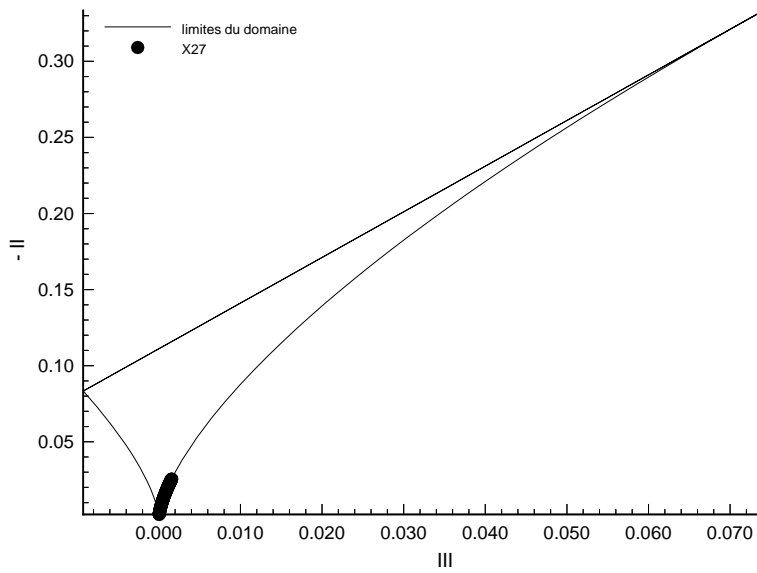
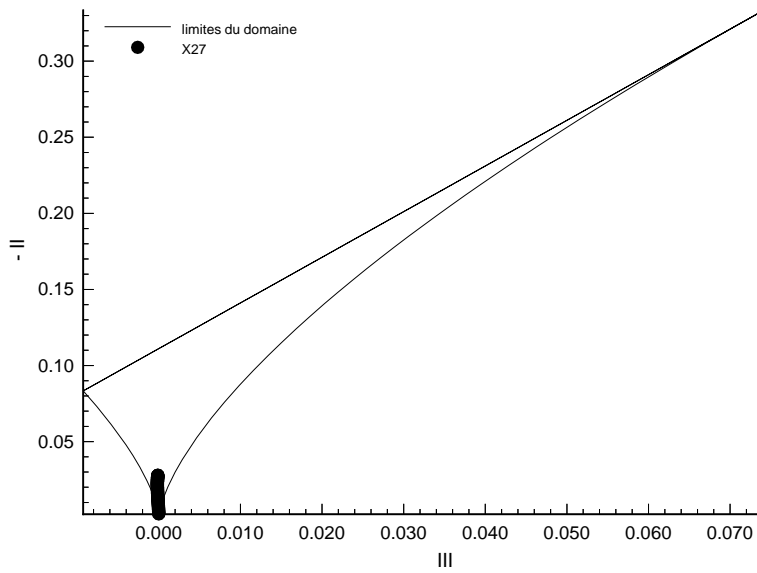


FIG. 7.59: Contraction axisymétrique AXL.

FIG. 7.60: *Expansion axisymétrique EXO.*FIG. 7.61: *Déformation plane PXA.*

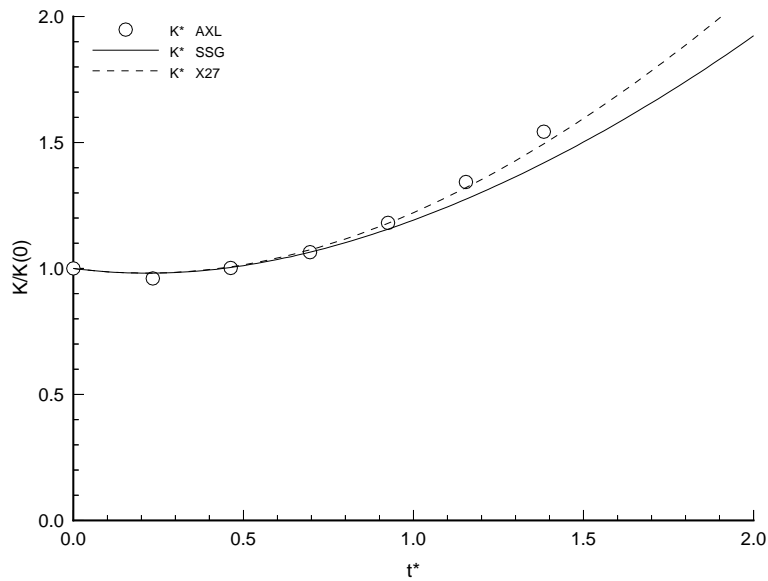


FIG. 7.62: Evolution de l'énergie cinétique dans le cas de la contraction axisymétrique AXL.

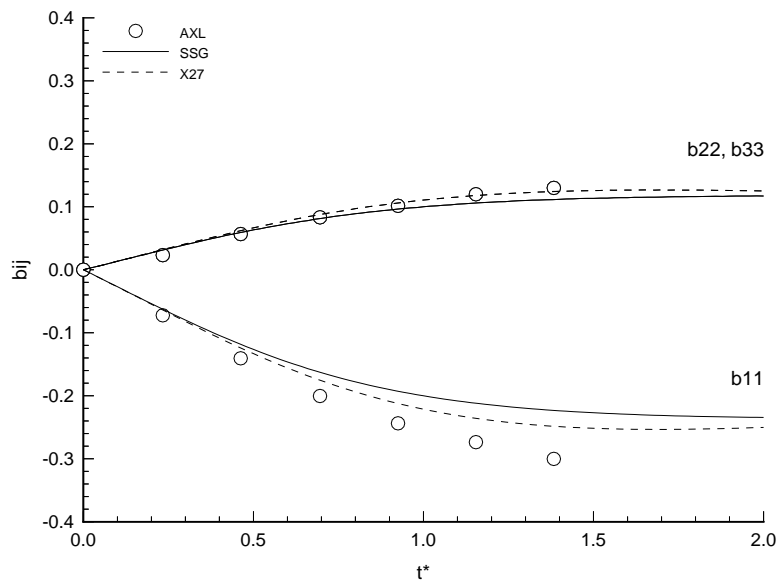


FIG. 7.63: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas de la contraction axisymétrique AXL.

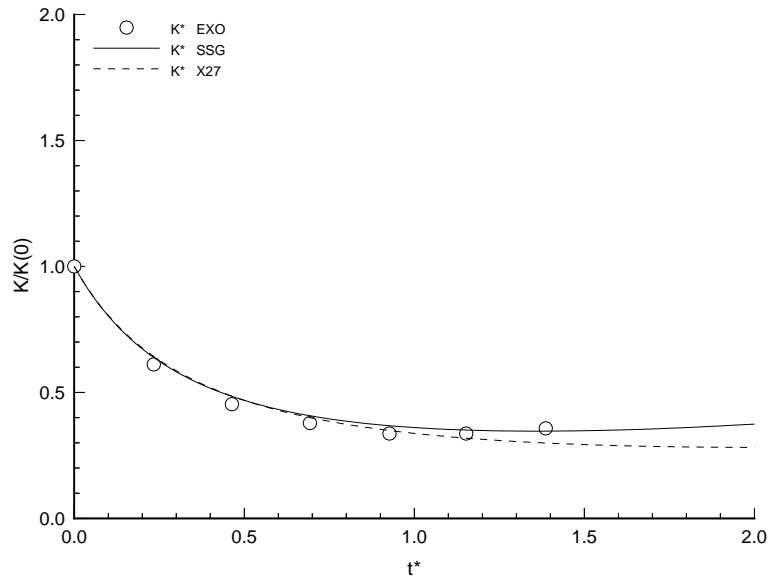


FIG. 7.64: Evolution de l'énergie cinétique dans le cas de l'expansion axisymétrique EXO.

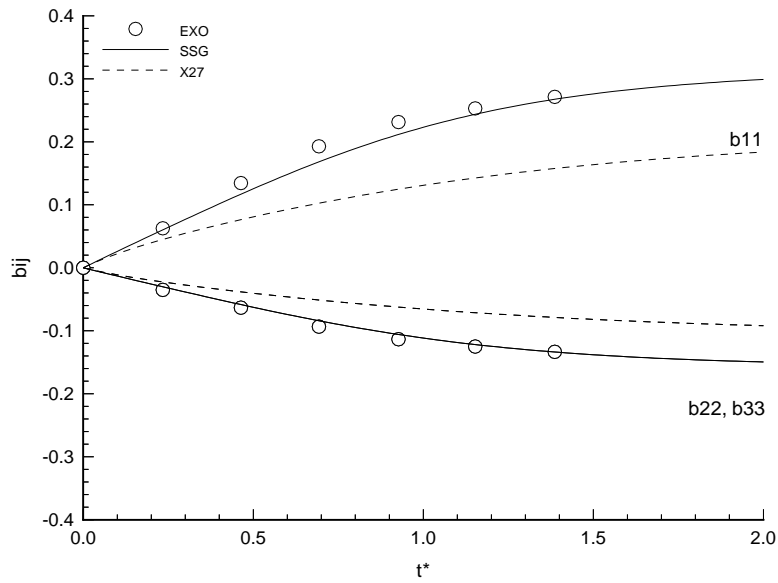


FIG. 7.65: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas de l'expansion axisymétrique EXO.



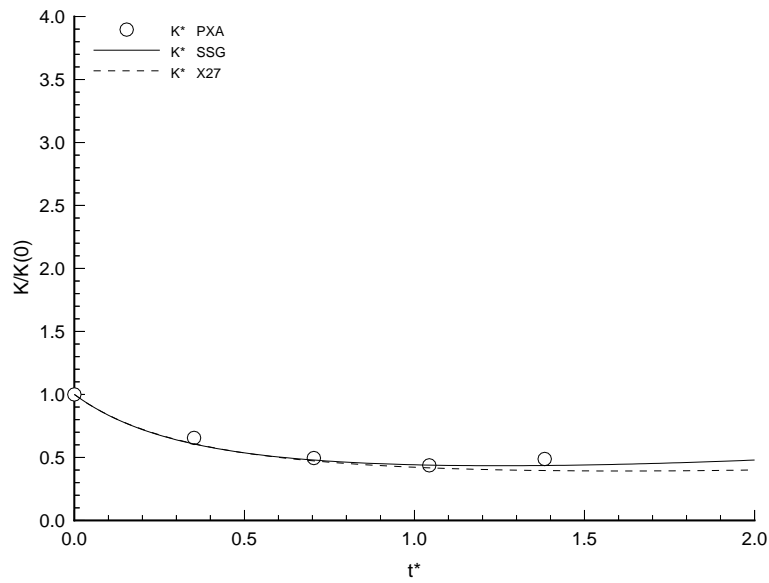


FIG. 7.66: Evolution de l'énergie cinétique dans le cas de la déformation plane PXA.

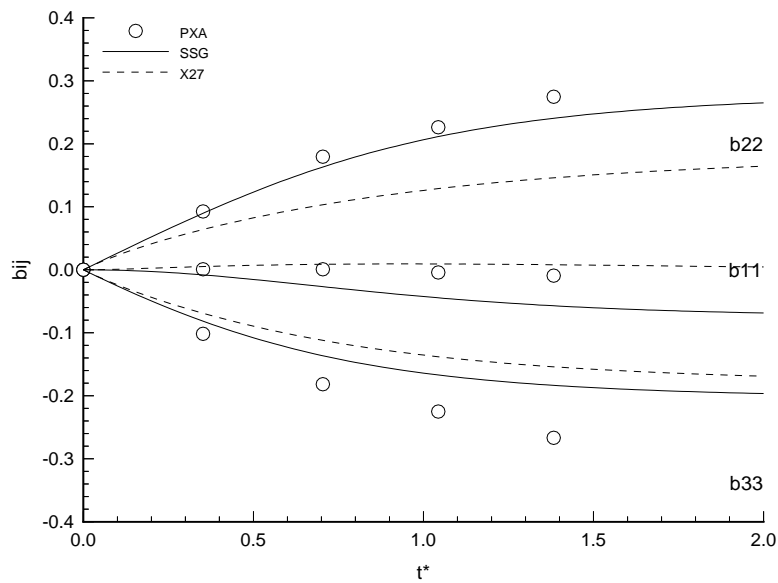


FIG. 7.67: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas de la déformation plane PXA.

## 7.5.2 Cisaillement en repère tournant

Un cisaillement pur est appliqué dans un repère tournant uniformément. La configuration est celle de Bardina, Ferziger et Reynolds, comme dans le chapitre précédent. La turbulence est initialement isotrope et les trois valeurs du paramètre de rotation  $R_o$  sont envisagées.

Le modèle X27 suit globalement les bonnes tendances pour restituer l'évolution de l'énergie cinétique turbulente, mais semble néanmoins légèrement moins bon que le modèle SSG. Lorsque  $R_o = 0.25$ , le niveau d'énergie cinétique turbulente est encore sous-estimé par rapport à la prédiction de SSG, un comportement qui est par ailleurs observé pour la plupart des modèles classiques. La modélisation du "terme rapide" étant entièrement fixée par les contraintes de base, la seule possibilité d'amélioration de ses performances réside dans le traitement du terme lent et de la modélisation de la dissipation, dont l'influence sur l'état asymptotique est bien connue, notamment par l'intermédiaire du paramètre  $\tau$ . Cette limitation existe cependant également chez les modèles classiques, c'est pourquoi la comparaison des performances est effectuée en conservant la même modélisation du taux de dissipation.

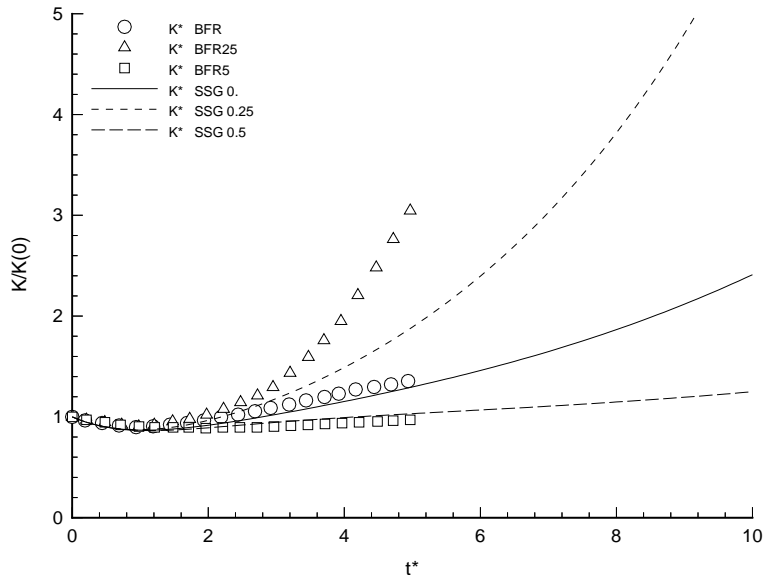


FIG. 7.68: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle SSG.

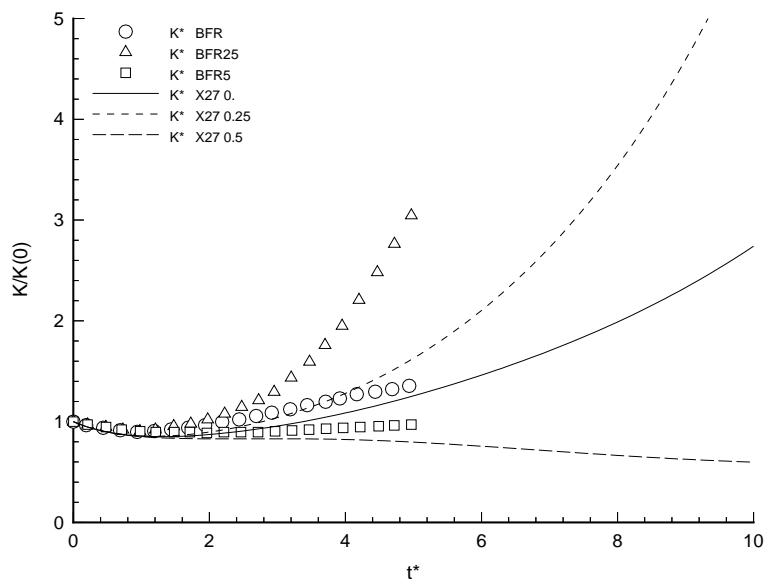


FIG. 7.69: Evolution de l'énergie cinétique turbulente dans le cas du cisaillement avec rotation. Modèle X27.

Il faut remarquer que jusqu'à présent, l'écoulement initial est excessivement simple, puisqu'isotrope. Les tenseurs  $X_{ijpq}$  et  $Y_{pq}$  y sont connus analytiquement.

### 7.5.3 Rotation pure

Les configurations sont celles des cas 1 et 2 présentés au chapitre précédent. La dissipation est fixée initialement à une valeur unitaire, tout comme l'énergie cinétique turbulente. Ces calculs ne permettent qu'une discussion qualitative, puisqu'ils ne sont confrontés à aucune expérience réelle particulière.

Le modèle classique complet SSG ne distingue toujours pas les deux cas de rotation dans le plan des invariants. Le phénomène de retour à l'isotropie observé est entièrement dû à la contribution lente du modèle. L'évolution des invariants s'effectue par contre de manière distincte avec le modèle X27. Dans le premier cas, la turbulence retourne à l'isotropie en restant dans ses axes principaux. L'influence du terme lent s'observe bien sur l'évolution des anisotropies du tenseur de Reynolds, qui sont cette fois amorties. L'évolution de l'écoulement vers l'état isotrope de la turbulence n'est pas directe dans le second cas et passe par des états oscillants entre les

axisymétries de type disque et cigare.

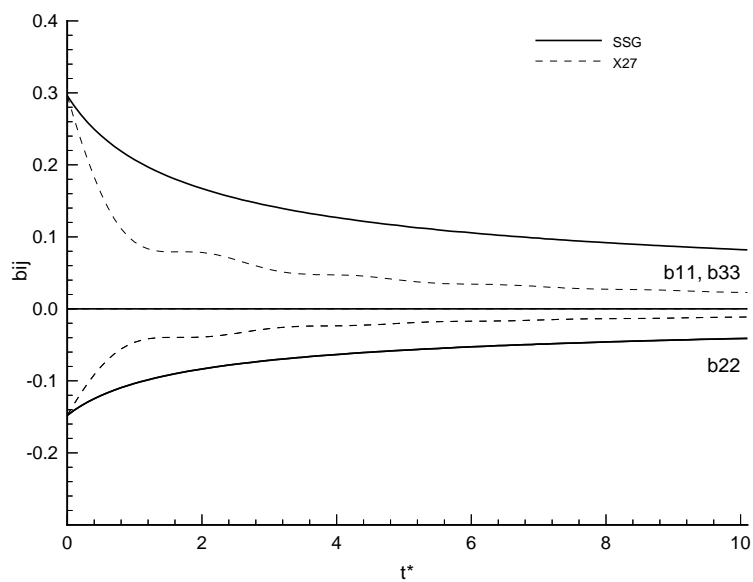


FIG. 7.70: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas 1.

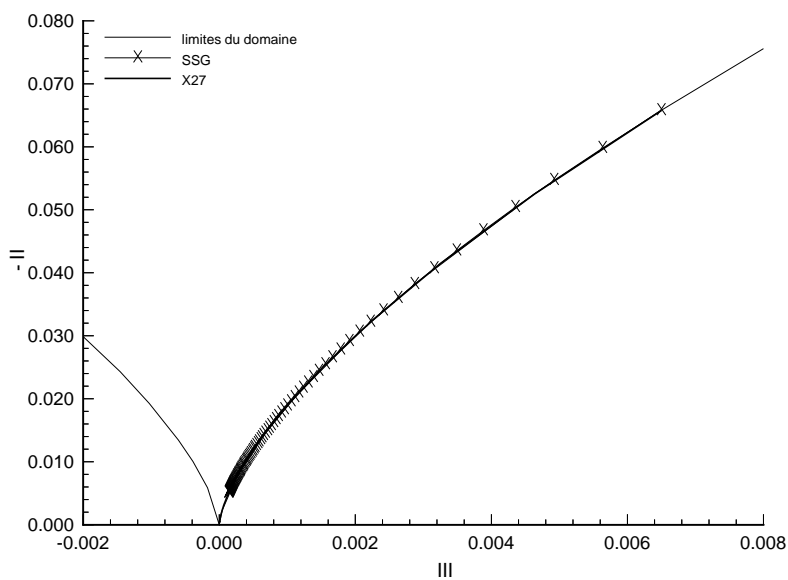


FIG. 7.71: Evolution dans le plan des invariants pour le cas 1.

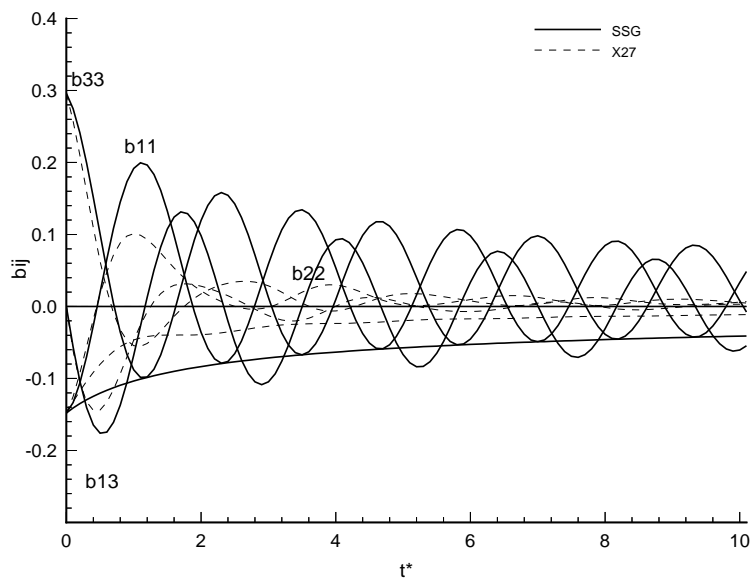


FIG. 7.72: Evolution des composantes du tenseur d'anisotropie dans le cas 2.

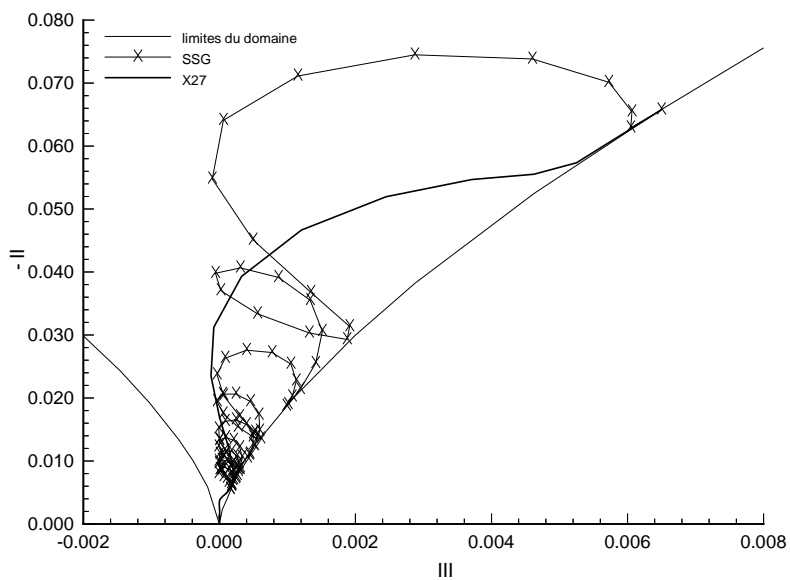


FIG. 7.73: Evolution dans le plan des invariants pour le cas 2.

## 7.6 Commentaires sur les choix du modèle

### 7.6.1 Ecriture des fonctionnelles

La comparaison des simulations homogènes effectuées avec les modèles complet et rapide montre que le terme lent est trop approximatif et contribue largement à la mauvaise prédiction du modèle complet dès que le terme rapide n'est plus prépondérant dans la physique de l'écoulement. Le manque d'information sur le détail des moments statistiques de la turbulence en situation de retour à l'isotropie ne facilite pas la calibration du modèle. L'introduction de termes non-linéaires est apparue fondamentale dans l'expression du terme lent des corrélations pression-déformation de l'équation du tenseur de Reynolds, parce qu'elle permet en particulier de décrire une décroissance différente des anisotropies normales du tenseur de Reynolds. La prise en compte de non-linéarités au niveau du tenseur  $X_{ijpq}$  est compromise par l'augmentation sérieuse du nombre d'inconnues du modèle que cela suppose.

La fonctionnelle intervenant dans le terme rapide est également l'expression la plus simple possible respectant les propriétés de base du terme exact, linéaire suivant le tenseur  $X_{ijpq}$  et ne faisant intervenir que le tenseur identité d'ordre deux pour développer la base tensorielle. Cette expression peut être vue comme une formulation analogue à celle du modèle homogène linéaire de Launder, Reece et Rodi [74] pour les formulations classiques. Ses coefficients étant constants, ils ne laissent qu'un degré de liberté après l'application des contraintes de base et il est clair que rien ne permet au modèle de satisfaire entièrement le critère de réalisabilité du tenseur de Reynolds. Son comportement est cependant relativement satisfaisant par rapport aux modèles rapides classiques sur l'ensemble des calculs de RDT présentés. Les solutions de rotation rapide sont cependant perfectibles et il serait intéressant de voir si l'introduction de l'alternateur  $\varepsilon_{ijp}$  dans l'expression des fonctionnelles permet d'améliorer les prédictions tout en conservant des formulations linéaires. Un développement systématique impose de prendre en compte au moins un produit tensoriel dans les arguments de la fonctionnelle d'ordre six, ce qui en augmente considérablement l'écriture. Ces investigations pourraient être faites uniquement dans le cadre de rotations rapides.

### 7.6.2 Comportement en rotation

Dans le cas d'une rotation rapide, les équations du mouvement se réduisent à :

$$\frac{d\bar{X}_{ijpq}}{dt} = -2\bar{\theta}_{mn} [-X_{inpq}\delta_{jm} - X_{njpq}\delta_{im} + B_{inpqmj} + B_{njpqmi}] \quad (7.127)$$

et l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds devient :

$$\frac{d\bar{R}_{ij}}{dt} = 2R_{ik}\bar{\theta}_{jk} + 2R_{jk}\bar{\theta}_{ik} - 2\bar{\theta}_{mn} [X_{inmj} + X_{jnmi}] \quad (7.128)$$

La première équation peut inciter à chercher un modèle non pas directement sur le tenseur  $B_{ijpqmn}$ , mais sur la partie antisymétrique en  $m$  et  $n$ , de la somme  $B_{inpqmj} + B_{njpqmi}$ , seule contribution inconnue intervenant dans le cas d'une rotation pure. Une démarche analogue peut être suivie dans la construction d'un modèle explicite pour  $X_{ijpq}$ , en s'intéressant à la partie antisymétrique de  $X_{inmj} + X_{jnmi}$ . Il serait éventuellement intéressant de regarder l'évolution de ce terme. La seule contribution inconnue et éventuellement antisymétrique pour la rotation ne contient qu'une fois le tenseur  $B_{ijpqmn}$ , sous la forme  $\bar{\theta}_{mn}\bar{\theta}_{pq}B_{nqpmij}$ .

### 7.6.3 Extension au cas d'une turbulence inhomogène

L'ensemble des calculs qui ont été développés dans ce chapitre place la turbulence en approximation homogène. Dans le cas d'un écoulement inhomogène le tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$  n'a pas autant de sens. En effet, la décomposition du tenseur des corrélations pression-déformation suivant (7.1a) n'est justifiée que par une approximation homogène de la solution de Green de l'équation de la fluctuation de pression. L'ensemble des propositions classiques de modélisation du terme rapide adopte néanmoins cette forme, vue comme le premier terme d'un développement autour de l'homogénéité. Les corrections inhomogènes interviennent généralement par extension autour de cette expression, sur le gradient de vitesse moyenne, ou par l'addition d'un terme tensoriel supplémentaire.

L'extension du modèle présenté à une situation inhomogène peut retenir le même type de démarche, en modélisant la contribution homogène du terme rapide avec le tenseur  $X_{ijpq}$ , connu par l'intermédiaire de son équation de transport. Cette dernière correspond à l'approximation rapide des équations homogènes (7.28). Dans ce cas, il est clair que la normalisation du tenseur  $X_{ijpq}$  ne doit pas être explicite et en particulier qu'il convient de résoudre le système des vingt sept équations scalaires de  $X_{ijpq}$  pour chaque évaluation du terme rapide. Le problème de l'équilibre de cette équation avec l'expression complète de l'équation du tenseur de Reynolds se manifeste clairement sur deux points. Il s'agit d'une part de l'initialisation de cette équation supplémentaire, et d'autre part de la mise en œuvre des corrections inhomogènes. L'initialisation peut être effectuée avec la solution isotrope, en demandant à ce que l'état des déformations du mouvement moyen amène le tenseur  $X_{ijpq}$  vers un état asymptotique. Une autre solution consisterait à voir l'état du tenseur  $X_{ijpq}$  cherché par ces équations comme une perturbation d'un état homogène anisotrope, insensible à l'action d'une rotation, et qui peut être fourni par un des modèles classiques. Dans tous les cas, cela revient à développer le tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$  autour d'un état homogène. Les corrections inhomogènes sont nécessaires. Il peut être intéressant d'en chercher une expression explicite en fonction du tenseur de Reynolds. Là encore deux possibilités peuvent être exploitées. La première consiste à retenir une forme fonctionnelle semblable aux modèles classiques et à déterminer les relations entre les coefficients dans la limite d'un écoulement bidimensionnel, comme les études effectuées dans la limite de réalisabilité. La seconde consiste à établir d'abord des liens entre les différentes composantes de  $X_{ijpq}$  dans la limite bidimensionnelle, à la manière des développements asymptotiques des écoulements de paroi.

---

## Chapitre 8

# Canal en rotation

### 8.1 Présentation du cas test

L'écoulement de canal pleinement développé est une configuration très largement utilisée pour étudier le comportement des modèles de turbulence en présence de parois solides. La simplicité de la géométrie en fait un cas test relativement bien documenté aussi bien expérimentalement que numériquement. Les nombres de Reynolds exploités diffèrent cependant d'une expérience à l'autre, ce qui ne permet pas nécessairement de disposer de données complémentaires. Le détail des structures turbulentes reste également difficilement accessible aux mesures, et ce d'autant plus que le nombre de Reynolds de l'écoulement est élevé. Dans la couche limite, au voisinage immédiat de la paroi, le cisaillement très important de l'écoulement et les très petites dimensions des échelles caractéristiques de la turbulence ne permettent pas toujours de négliger la présence des instruments de mesure dans l'écoulement pariétal. Pour cette raison, l'analyse du comportement de la turbulence au voisinage immédiat des parois s'appuie sur des calculs tridimensionnels de simulations directes. Cette approche constitue un moyen intéressant pour évaluer les corrélations et quantités statistiques utilisées en modélisation, jusque dans la couche limite. Les calculs effectués par Kim, Moin et Moser en 1987 [68] dans le cas du canal plan servent de base de données de référence pour la validation des modèles. Dans un premier temps, les modèles présentés dans les chapitres précédents sont comparés à ces simulations. On s'intéresse notamment à la prise en compte de la paroi par le tenseur de corrélation pression-déformation et par le tenseur des taux de dissipation.

L'influence d'une rotation imposée à la configuration du canal plan est étudiée ensuite. Il est désormais connu que les forces de Coriolis associées à la rotation agissent directement sur le champ moyen et sur le champ fluctuant. Leurs actions sur le champ moyen ont tendance à induire un écoulement secondaire, alors que sur la turbulence, elles modifient le processus de mélange. Chacun de ces effets interagit l'un avec l'autre, l'écoulement secondaire affectant les contraintes du champ turbulent, et les modifications des structures turbulentes induisent des variations dans le champ moyen. Le cas test considéré dans ce chapitre, un écoulement évoluant entre deux plaques planes parallèles et animées d'un mouvement de rotation constant, présente l'avantage de séparer l'action des forces de Coriolis sur le champ turbulent de celles sur le champ moyen. Cet écoulement a été étudié expérimentalement par Johnston, Halleen et Lezius en 1972 [65] pour des nombres de Rossby de l'ordre de 0.2 et des nombres de Reynolds compris entre 11000 et 54000. Bien qu'ils se soient principalement intéressés aux grandeurs moyennes, les caractéristiques de cet écoulement ont été mises en évidence. Les modèles sont comparés aux



simulations directes effectuées par Kristoffersen et Andersson en 1993 [69], dont les nombres de Reynolds sont voisins des calculs de Kim, Moin et Moser [68].

## 8.2 Formulation du problème

### 8.2.1 Configuration de l'écoulement et équations du mouvement

L'écoulement turbulent est établi et évolue entre deux parois planes parallèles. Ces plaques sont éventuellement soumises à une rotation uniforme  $\Omega$  autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'écoulement (cf. fig. 8.1).

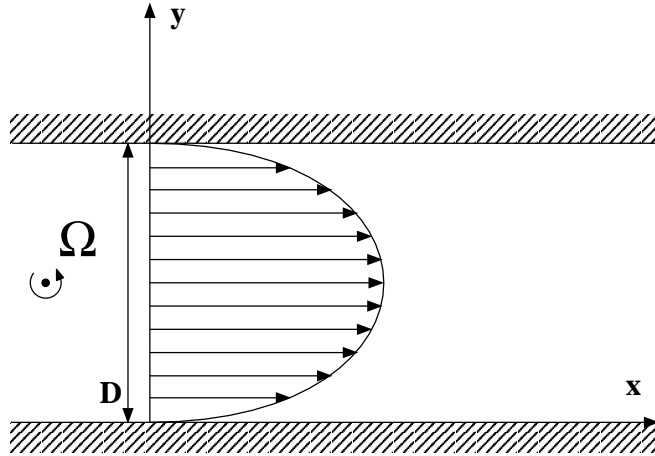


FIG. 8.1: *Écoulement de canal en rotation*

$D$  désigne la distance entre les deux plaques.

Le fluide est toujours supposé incompressible, de densité  $\rho$  et de viscosité cinématique constante  $\nu$ . Les composantes de vitesse de l'écoulement, décrites dans un repère cartésien  $(x, y, z)$  tournant avec les parois, sont décomposées en un champ moyen et un champ fluctuant suivant :

$$\begin{aligned} U &= \bar{U} + u \\ V &= \bar{V} + v \\ W &= \bar{W} + w \end{aligned} \quad (8.1)$$

Il en est de même pour la pression statique :

$$P = \bar{P} + p \quad (8.2)$$

L'écoulement instationnaire est supposé bidimensionnel en moyenne, ce qui impose à la troisième composante de vitesse moyenne d'être nulle, soit  $\bar{W} = 0$ , en prenant l'axe  $z$  parallèle à l'axe de la rotation.

L'équation de continuité du champ moyen s'écrit alors :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} = 0 \quad (8.3)$$

L'écoulement établi qui sera traité dans toute la suite, correspond à un état stationnaire, si bien que la turbulence est homogène dans la direction  $x$ . Cette hypothèse impose d'une part au

terme instationnaire d'être nul et d'autre part à la composante normale de la vitesse moyenne de s'annuler dans tout le canal,  $\overline{V} = 0$ , conséquence de l'équation de continuité (8.3) et de l'adhérence du fluide aux parois. Les équations de Navier-Stokes régissant le mouvement moyen se réduisent par conséquent aux équations suivantes :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} + \frac{d}{dy} \left[ \nu \frac{d\overline{U}}{dy} - \overline{uv} \right] \quad (8.4a)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dy} - 2\Omega\overline{U} - \frac{d\overline{v^2}}{dy} \quad (8.4b)$$

où la dérivée convective est nulle et  $\overline{P}^*$  est la pression statique réduite, prenant en compte les effets de la rotation sur la pression et définie en fonction du potentiel des forces centrifuges par :

$$\overline{P}^* = \overline{P} - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 \quad (8.5)$$

Le mouvement moyen est alors décrit par une équation de transport :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} + \frac{d}{dy} \left[ \nu \frac{d\overline{U}}{dy} - \overline{uv} \right] \quad (8.6)$$

où le gradient de pression étant indépendant de la localisation en  $x$ ,  $d\overline{P}^*/dx$  est une constante. Il représente le flux de masse entre les deux parois et peut être obtenu par intégration de l'équation de quantité de mouvement (8.4b) dans le canal :

$$\int_0^D \frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} dy = \int_0^D \frac{d}{dy} \left[ \nu \frac{d\overline{U}}{dy} - \overline{uv} \right] dy \quad (8.7)$$

soit :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} = \frac{1}{D} \left[ \nu \frac{d\overline{U}}{dy} - \overline{uv} \right]_0^D \quad (8.8)$$

Le tenseur de Reynolds s'annule sur les parois, de sorte que :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} = \frac{1}{D} \nu \left[ \left. \frac{d\overline{U}}{dy} \right|_D - \left. \frac{d\overline{U}}{dy} \right|_0 \right] \quad (8.9)$$

et le gradient de pression s'exprime directement en fonction du cisaillement pariétal. Par définition, le cisaillement total est la somme du cisaillement visqueux et de la contrainte de cisaillement turbulent et s'écrit :

$$\tau = -\rho \left[ \overline{uv} - \nu \frac{d\overline{U}}{dy} \right] \quad (8.10)$$

Sur les parois, le cisaillement turbulent est nul et

$$\frac{1}{\rho} \tau_0 = \nu \left. \frac{d\overline{U}}{dy} \right|_0 \quad \frac{1}{\rho} \tau_D = \nu \left. \frac{d\overline{U}}{dy} \right|_D \quad (8.11)$$

Le gradient de pression peut donc être noté en fonction du cisaillement turbulent :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} = \frac{1}{D} \frac{1}{\rho} [\tau_0 - \tau_D] \quad (8.12)$$

L'évaluation pratique de ce gradient sera discutée dans les paragraphes suivants.

Il faut noter que l'hypothèse d'écoulement établi laisse l'équation d'évolution de la vitesse normale  $\bar{V}$  (8.4b) inchangée par rapport à l'approximation de couche limite. Dans cette équation, la rotation contribue explicitement, par l'intermédiaire du terme de production  $2\Omega\bar{U}$ , à créer un gradient de pression dans la direction normale aux parois. Cet équilibre n'a pas cependant d'influence sur le bilan du mouvement moyen. Le mouvement moyen du canal établi est donc régi par une équation de forme identique que le canal soit en rotation ou non.

Les équations d'évolution du tenseur de Reynolds s'écrivent en approximation de couche limite, avec les notations habituelles :

$$\begin{aligned}
 \frac{DR_{11}}{Dt} &= -2 R_{12} \frac{d\bar{U}}{dy} + 4 R_{12} \Omega + S_{11}^i \\
 \frac{DR_{22}}{Dt} &= -4 R_{12} \Omega + S_{22}^i \\
 \frac{DR_{33}}{Dt} &= S_{33}^i \\
 \frac{DR_{12}}{Dt} &= -R_{22} \frac{d\bar{U}}{dy} - 2 [R_{11} - R_{22}] \Omega + S_{12}^i \\
 \frac{DR_{13}}{Dt} &= -2 R_{23} \Omega + S_{23}^i \\
 \frac{DR_{23}}{Dt} &= -2 R_{13} \Omega + S_{13}^i
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

où seuls les termes de productions ont été détaillés, le tenseur  $S_{ij}^i$  regroupant l'ensemble des termes sources où la rotation n'intervient pas de façon explicite.

$$S_{ij}^i = \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} + T_{ij2,2}^p + T_{ij2,2}^u + \nu R_{ij,2}$$

Les forces de Coriolis forment un tenseur à trace nulle et ne produisent ou ne détruisent pas directement l'activité turbulente, mais redistribuent l'énergie cinétique sur les différentes composantes du tenseur de Reynolds. Johnston, Halleen et Lezius [65] ont décrit l'effet caractéristique de la rotation sur le canal en considérant le cas d'une couche limite soumise à une rotation. Ce cas correspond, dans le cas d'une description classique d'une couche limite au voisinage de la paroi inférieure du canal, où  $d\bar{U}/dy > 0$ . Ce côté est également désigné comme zone de pression, alors que le côté opposé est la zone de suction. Les hypothèses de couche limite classique supposent  $R_{12} < 0$  et  $R_{11} - R_{22} > 0$ . En se plaçant dans le cas où le taux de rotation est positif ( $\Omega > 0$ ), le cisaillement turbulent a tendance à augmenter, ce qui entraîne une diminution de l'épaisseur de couche limite et un accroissement de la production turbulente. Le niveau d'énergie cinétique turbulente se voit donc augmenté dans cette zone. La rotation a tendance à déstabiliser la couche limite du côté de pression. Le phénomène inverse se produit de l'autre côté du canal, dont la configuration correspond à une couche limite classique à laquelle est imposée une rotation de signe opposé par rapport à la description précédente. Les mêmes arguments indiquent que l'énergie cinétique turbulente sera plus faible qu'en l'absence de rotation et la couche limite aura tendance à être stabilisée.

La caractéristique principale de l'écoulement de canal soumis à une rotation normale au plan de l'écoulement est que l'un des côtés du canal sera stabilisé par une suppression de la turbulence par l'action de la rotation et que l'autre côté se verra déstabilisé par une augmentation de l'activité turbulente. Cette caractéristique conduit à deux cisaillements pariétaux différents sur les deux parois et à un profil de vitesse moyenne asymétrique.

### 8.2.2 Formulation adimensionnelle

Les variables peuvent être calculées en référence aux échelles caractéristiques de longueur et de vitesse de l'écoulement. L'échelle de longueur caractéristique choisie dans toute la suite est la largeur  $D$  du canal. Certaines expériences prennent la demi-largeur du canal comme référence, notamment en l'absence de rotation, lorsque l'écoulement traité est symétrique [68]. La vitesse de référence  $U_{ref}$  sera précisée par la suite. L'écriture des équations sous forme adimensionnelle fait intervenir le nombre de Reynolds  $Re_{ref} = U_{ref}D/\nu$  et le nombre de Rossby  $Ro_{ref} = \Omega D/U_{ref}$ . L'équation d'évolution de la vitesse moyenne (8.6) devient :

$$0 = -\frac{d(\overline{P}^*)}{dx^*} + \frac{d}{dy^*} \left[ \frac{1}{Re_{ref}} \frac{d\overline{U}^*}{dy^*} - \overline{u^*v^*} \right] \quad (8.14)$$

où l'ensemble de variables étoilées est sans dimension. La pression est adimensionnée par :

$$\overline{P}_{ref}^* = \rho U_{ref}^2 \quad (8.15)$$

Le gradient de pression (8.9) s'écrit en fonction des variables sans dimensions de la façon suivante :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\overline{P}^*}{dx} = \frac{1}{Re_{ref}} \frac{U_{ref}^2}{D} \left[ \left. \frac{d\overline{U}^*}{dy^*} \right|_0 - \left. \frac{d\overline{U}^*}{dy^*} \right|_1 \right] \quad (8.16)$$

ce qui entraîne l'expression adimensionnelle suivante :

$$-\frac{d(\overline{P}^*)}{dx^*} = \frac{1}{Re_{ref}} \left[ \left. \frac{d\overline{U}^*}{dy^*} \right|_0 - \left. \frac{d\overline{U}^*}{dy^*} \right|_1 \right] \quad (8.17)$$

quelle que soit la vitesse de référence choisie.

Les expériences sans rotation basent couramment le nombre de Reynolds de l'écoulement sur la vitesse de frottement pariétal  $u_\tau$ . Cette formulation présente l'avantage de faciliter l'écriture du gradient de pression. Par contre la disymétrie de l'écoulement imposée par la présence d'une rotation fournit deux vitesses de frottement distinctes  $u_{\tau 1}$  et  $u_{\tau 2}$ , respectivement sur les parois inférieures et supérieures, ce qui rend le choix d'une vitesse de frottement comme vitesse de référence moins naturelle. En effet, la vitesse de frottement  $u_{\tau 1}$  est définie en fonction du cisaillement turbulent par :

$$u_{\tau 1}^2 = \frac{1}{\rho} \tau_1 \quad (8.18)$$

soit :

$$u_{\tau 1}^2 = U_{ref}^2 \frac{1}{Re_{ref}} \left. \frac{dU^*}{dy^*} \right|_{y^*=0} \quad (8.19)$$

et d'une façon analogue,

$$u_{\tau 2}^2 = -U_{ref}^2 \frac{1}{Re_{ref}} \left. \frac{dU^*}{dy^*} \right|_{y^*=1} \quad (8.20)$$

Le gradient de pression (8.12) devient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{d\bar{P}^*}{dx} &= \frac{1}{D} [u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2] \\ &= \frac{U_{ref}^2}{D} [u_{\tau 1}^{2*} + u_{\tau 2}^{2*}] \end{aligned} \quad (8.21)$$

ce qui permet d'exprimer le gradient de pression en fonction d'une sorte de vitesse de frottement global  $U_{ref} = u_{\tau}$ , définie par :

$$u_{\tau}^2 = \frac{1}{2}(u_{\tau 1}^2 + u_{\tau 2}^2) \quad (8.22)$$

et l'expression adimensionnelle du gradient de pression s'écrit :

$$-\frac{d(\bar{P}^*)^*}{dx^*} = [u_{\tau 1}^{2*} + u_{\tau 2}^{2*}] \quad (8.23)$$

soit d'après (8.22),

$$-\frac{d(\bar{P}^*)^*}{dx^*} = 2 \quad (8.24)$$

Le gradient de pression est donc fixé avec  $Re_{\tau} = u_{\tau}D/\nu$ . Cette vitesse de frottement global  $u_{\tau}$  sert à normaliser les quantités globales dans l'ensemble du canal. Les vitesses de frottement attachées aux parois sont utilisées pour caractériser localement les échelles pariétales. En l'absence de rotation, l'écoulement est symétrique et cette vitesse de référence est identiquement la vitesse de frottement pariétal.

Imposer le gradient de pression revient à imposer un débit dans le canal, aussi est-il intéressant dans le cas de l'écoulement asymétrique de baser le nombre de Reynolds sur la vitesse débitante  $U_m$  dans le canal [65]. Cette vitesse est définie par :

$$U_m = \frac{1}{D} \int_0^D U(y) dy \quad (8.25)$$

Son expression s'écrit donc en fonction des variables sans dimension :

$$U_m = U_{ref} \int_0^1 U^*(y^*) dy^* \quad (8.26)$$

avec  $Re_m = U_m D/\nu$ . Dans ce cas, le gradient de pression est toujours défini par

$$-\frac{d\bar{P}^{**}}{dx^*} = [u_{\tau 0}^{2*} + u_{\tau 1}^{2*}] \quad (8.27)$$

cependant il ne peut plus être évalué par (8.24) mais simplement par son expression en fonction du gradient de vitesse moyenne (8.17). Il convient alors d'assurer que le gradient de pression satisfait le débit imposé en vérifiant que :

$$1 = \int_0^1 U^*(y^*) dy^* \quad (8.28)$$

Ceci peut être effectué de façon itérative par une méthode de type PISO ou par une résolution directe du système couplé prenant en compte cette contrainte. La mise en œuvre de ce calcul sera détaillée au paragraphe 8.3.

Pour des raisons évidentes de simplicité d'écriture, les notations étoilées des variables adimensionnelles ne seront pas prises en compte dans toute la suite.

## 8.3 Méthode numérique

### 8.3.1 Formulation conservative et linéarisation des équations

L'ensemble des équations de transport présentées précédemment peut se mettre sous la forme conservative générale suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \tilde{S}_\Phi + \frac{d}{dy} \left[ (\tilde{D}_\Phi) \frac{d\Phi}{dy} \right] \quad (8.29)$$

où le terme instationnaire est identiquement nul dans le cas de l'écoulement établi et  $\Phi$  désigne la variable dépendante de l'équation. Le terme source peut être décomposé de la façon suivante en deux contributions en faisant apparaître les termes dits non-linéaires,  $S_\Phi^{NL}$ , en facteur de la variable dépendante. Le reste est noté  $S_\Phi^L$ .

$$\tilde{S}_\Phi = S_\Phi^L + S_\Phi^{NL} \Phi \quad (8.30)$$

Le choix de chacun de ces termes dépend du modèle de turbulence utilisé. Le coefficient de diffusion peut quant à lui se mettre sous la forme :

$$\tilde{D}_\Phi = \frac{1}{Re} + \frac{D_\Phi}{\sigma_\Phi} \quad (8.31)$$

où  $D_\Phi$  et  $\sigma_\Phi$  dépendent évidemment des équations et des modèles de turbulence.

La résolution numérique de cette équation impose de linéariser les termes. Les méthodes de volume fini ou de différences finies s'appliquent sur des systèmes différentiels linéaires. Si l'exposant  $n + 1$  désigne l'étape courante et  $n$  l'étape non-linéaire précédente, la linéarisation des équations est effectuée sur le terme de diffusion et sur les termes sources comme suit :

$$\frac{\partial \Phi^{(n+1)}}{\partial t} = S_\Phi^{L(n)} + S_\Phi^{NL(n)} \Phi^{(n+1)} + \frac{d}{dy} \left[ (\tilde{D}_\Phi)^{(n)} \frac{d\Phi^{(n+1)}}{dy} \right] \quad (8.32)$$

La linéarisation conduit à expliciter une partie du terme source, toute expression évaluée à l'étape non-linéaire précédente étant explicitée. Le choix des différents termes peut varier suivant l'équation traitée et doit contribuer à augmenter la stabilité du schéma numérique choisi.

Dans le cas des modèles de turbulence de type  $K - \varepsilon$  linéaires, le terme de diffusion se voit renforcé par la viscosité turbulente.

$$D_\Phi = \nu_t \quad (8.33)$$

L'écriture du terme source diffère suivant chaque modèle. D'une façon générale, la dissipation  $\varepsilon$  ( ou  $\tilde{\varepsilon}$  ) peut être implicite dans l'équation d'évolution de l'énergie cinétique, puisqu'elle s'écrit en fonction de la viscosité turbulente suivant :

$$\varepsilon = C_\mu f_\mu \frac{K^2}{\nu_t} \quad (8.34)$$

Il peut être intéressant de linéariser le produit  $K^2$  en le décomposant simplement en  $K^n K^{n+1}$ , puisque la dissipation est une quantité *a priori* toujours positive. Dans certains cas, lorsque l'équation pour une dissipation modifiée  $\tilde{\varepsilon}$  est traitée, la forme du coefficient correctif  $D$  peut également inciter à expliciter ce terme, de sorte que seule la production d'énergie cinétique turbulente constitue le terme source explicite de l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence.

Ces implications facilitent la résolution des équations. C'est le cas du modèle de Chien [24]. Les termes correspondants dans l'équation pour  $\tilde{\varepsilon}$  peuvent subir un traitement analogue, avec de façon évidente, une implication possible du terme de destruction modélisé généralement par :

$$C_{\varepsilon_2} f_2 \varepsilon \tilde{\varepsilon} / K \tag{8.35}$$

Dans le cas des modèles du second ordre, les termes de diffusion ne sont pas naturellement renforcés par une viscosité turbulente. Le terme source de quantité de mouvement est donc plus important puisqu'il comprend le gradient des tensions de Reynolds. Ce dernier est traité de façon explicite. Les termes de diffusion des équations turbulentes dépendent des modèles proposés et sont de type Hanjalic et Launder ou Daly et Harlow. Les seuls termes qui peuvent être implicites de façon systématique résident, pour les équations du tenseur de Reynolds, dans la partie linéaire du terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation. Le traitement de l'équation d'évolution de la dissipation est effectué de façon semblable au cas des modèles de type  $K - \varepsilon$ .

Le gradient de pression, intervenant dans le terme source de l'équation de quantité de mouvement est explicite dans le cas d'une adimensionnalisation par la vitesse de frottement. La résolution est effectuée par l'algorithme PISO. Si c'est le système couplé qui est résolu dans le cas d'une adimensionnalisation par la vitesse débitante, le gradient de pression constitue une variable à part entière.

### 8.3.2 Discrétisation spatiale

La méthode numérique utilisée pour résoudre le système d'équations (8.29) est une procédure de volume fini. Elle s'appuie sur un maillage non uniforme où toutes les variables dépendantes sont stockées au centre géométrique de chaque volume de contrôle (figure 8.2).

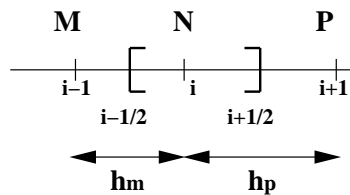


FIG. 8.2: *Volume de contrôle centré en N*

Localement, le point  $N$  désigne le centre de la cellule courante centrée au point  $i$  du maillage primaire et  $M$  et  $P$ , les localisations adjacentes des variables dépendantes respectivement en  $i - 1$  et  $i + 1$ . Les frontières de la cellule courante seront notées  $i - \frac{1}{2}$  et  $i + \frac{1}{2}$ , numérotations du maillage secondaire. Le maillage est symétrique par rapport au centre du canal et est raffiné au voisinage des parois. L'épaisseur de la première maille sera précisée par la suite. Elle est fixée par le nombre de Reynolds de l'écoulement et sa valeur adimensionnelle maximale, en variable  $y^+$ , dépend *a priori* du modèle choisi. Le répartition des points intérieurs est effectuée avec un étirement en sinus hyperbolique jusqu'au centre du canal.

Les termes de diffusion sont approchés par un schéma centré. Les flux sont calculés aux interfaces des cellules secondaires. La dérivée première  $y$  est évaluée par un schéma aux différences finies centré du premier ordre et fait intervenir les points primaires voisins. Le coefficient de diffusion  $\bar{D}_\Phi$  est interpolé géométriquement sur ces points. Le bilan de flux sur le maillage secondaire

conduit donc à la forme discrète suivante :

$$\frac{\partial \Phi_N}{\partial t} = \tilde{S}_N + \frac{2}{h_m + h_p} \left[ D_d \frac{\Phi_P - \Phi_N}{h_p} - D_u \frac{\Phi_N - \Phi_M}{h_m} \right] \quad (8.36)$$

avec les interpolations géométriques suivantes :

$$D_d = \frac{1}{2}(D_N + D_P) \quad \text{et} \quad D_u = \frac{1}{2}(D_M + D_N)$$

Soit :

$$\frac{\partial \Phi_N}{\partial t} = \tilde{S}_N + \frac{1}{h_p (h_m + h_p)} \left\{ \begin{aligned} & h_p \Phi_M (D_M + D_N) + h_m \Phi_P (D_N + D_P) \\ & - [h_m (D_N + D_P) + h_p (D_M + D_N)] \Phi_N \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \Phi_N}{\partial t} = \sum C_{nb} \Phi_{nb} - C_N \Phi_N + \tilde{S}_N \quad (8.38)$$

où les  $()_{nb}$  désignent les points voisins de N intervenant dans le schéma discret et

$$C_N = \sum C_{nb}$$

Avec ces notations, le coefficient diagonal  $C_N$  de la matrice est toujours positif. Les points voisins sont  $M$  et  $P$ . La matrice issue de la discrétisation spatiale est alors tridiagonale, de diagonale positive. Le forme discrète des équations (8.29) stationnaires s'écrit donc :

$$C_M \Phi_M + C_N \Phi_N + C_P \Phi_P = C_S \quad (8.39)$$

Il est clair qu'il est avantageux d'impliciter la partie du terme source permettant d'augmenter la dominance diagonale de la matrice. C'est la raison de la décomposition (8.30) où  $S_{\Phi}^{NL}$  désigne les termes négatifs facteurs de la variable dépendante.

### 8.3.3 Discrétisation temporelle

Dans certains cas, le schéma stationnaire peut s'avérer insuffisant pour résoudre les équations, notamment lorsque les termes sources sont importants. Il peut être nécessaire de renforcer la dominance diagonale par un schéma instationnaire, par un schéma du type Euler partiellement implicite du premier ordre en temps :

$$\frac{\Phi_N^{n+1} - \Phi_N^n}{\Delta t} = - \left[ C_M^n \Phi_M^{n+1} + C_N^n \Phi_N^{n+1} + C_P^n \Phi_P^{n+1} \right] + C_S^n \quad (8.40)$$

Le système tridiagonal s'écrit alors :

$$- \left[ C_M^n \Phi_M^{n+1} + \left( C_N^n + \frac{1}{\Delta t} \right) \Phi_N^{n+1} + C_P^n \Phi_P^{n+1} \right] + \left( C_S^n + \frac{\Phi_N^n}{\Delta t} \right) = 0 \quad (8.41)$$

Ce schéma implicite est inconditionnellement stable. Le pas de temps peut être déterminé par un critère physique et choisi plus petit que le temps caractéristique de la turbulence, soit  $\frac{K}{\varepsilon}$ .



### 8.3.4 Résolution du couplage vitesse-pression

Le champ de pression d'un écoulement incompressible est habituellement évalué à partir de l'équation de continuité, couplée avec l'équation de Poisson. Dans le cas de l'écoulement bidimensionnel établi, le champ de pression n'a pas besoin d'être calculé, puisque son gradient est constant, comme il l'a été rappelé au paragraphe 8.2.2. Deux méthodes peuvent être choisies, qui dépendent de l'adimensionnalisation des équations.

La première méthode peut être adoptée lorsque le gradient de pression est connu. C'est immédiatement le cas dès que le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse de frottement pariétal. Le gradient de pression est une constante et peut être explicité dans le terme source de l'équation de quantité de mouvement. Les systèmes issus de la discrétisation sont tridiagonaux. Ils peuvent être résolus par une méthode directe comme l'algorithme de Thomas, simplification de la méthode de Gauss pour les systèmes tridiagonaux.

La seconde méthode s'applique lorsque le débit est imposé. C'est systématiquement le cas dès que le nombre de Reynolds est basé sur la vitesse moyenne de l'écoulement. Le couplage vitesse-pression est contenu dans les équations (8.14) et (8.28) dont les expressions discrètes s'écrivent, en variables adimensionnelles :

$$\int_N U_N = 1 \quad (8.42a)$$

$$C_N U_N^{n+1} = - \sum_{nb} C_{nb} U_{nb}^{n+1} + \hat{C}_S^{n+1} - \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (8.42b)$$

où le calcul du débit s'effectue par l'intégration discrète de la vitesse sur tout le canal et  $\hat{C}_S$  regroupe les termes sources autres que le gradient de pression, soit :

$$C_S = \hat{C}_S - \frac{d\bar{P}}{dx}$$

Le gradient de pression est calculé à l'aide de la contrainte de débit constant (8.42a). L'intégration numérique s'effectue par une simple méthode des trapèzes, notée :

$$\int_N U_N = \sum_N T_N U_N \quad (8.43)$$

La matrice du système couplé est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & T_2 & & & & & & & T_{n-1} \\ 1 & C_2 & C_3 & & & & & & \\ 1 & C_1 & C_2 & C_3 & & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ 1 & & & C_{i-1} & C_i & C_{i+1} & & & \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & & & & & C_{n-2} & C_{n-1} & C_n & \\ 1 & & & & & & C_{n-2} & C_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\bar{P}/dx \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{C}_{S2} \\ \hat{C}_{S3} \\ \vdots \\ \hat{C}_{Si} \\ \vdots \\ \hat{C}_{S_{n-2}} \\ \hat{C}_{S_{n-1}} \end{bmatrix} \quad (8.44)$$

Ce système peut être résolu par une méthode directe en effectuant une décomposition  $LU$  sur la matrice de discrétisation avant de résoudre deux systèmes triangulaires. Cette procédure

présente l'inconvénient d'occuper une place mémoire importante en manipulant des matrices carrées de la dimension du maillage. C'est pourquoi la résolution des équations par une méthode faiblement couplée, itérative, de type PISO, peut être préférée dans ce cas.

L'équation (8.42b) dans laquelle le gradient de pression est évalué de façon explicite, s'écrit sous la forme :

$$U_N = \hat{U}_N - C_{\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (8.45)$$

où

$$\hat{U}_N = \frac{1}{C_N} \left[ - \sum C_{nb} U_{nb} + \hat{C}_S \right] \quad (8.46a)$$

$$\text{et } C_{\bar{P}} = \frac{1}{C_N} \quad (8.46b)$$

La solution de cette équation est obtenue par la résolution directe du système tridiagonal. Elle ne satisfait pas nécessairement la contrainte de débit constant.

Le gradient de pression est évalué à partir de l'équation (8.42a) :

$$\int_N U_N = \int_N \hat{U}_N - \int_N C_{\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{dx} \quad (8.47)$$

Si, dans le cas d'un schéma instationnaire, le pas de temps est indépendant du maillage, alors l'intégration peut s'effectuer et conduit au gradient de pression :

$$- \frac{d\bar{P}}{dx} = \frac{1 - \sum_N T_N \hat{U}_N}{\sum_N T_N C_{\bar{P}}} \quad (8.48)$$

Ce gradient permet de corriger le champ de vitesse et assure la conservation du débit.

Les principales étapes de l'algorithme PISO sont rappelées ici :

initialisation du gradient de pression

prédiction de la vitesse

$$\tilde{U}_N^{n+1} = \hat{U}_N^{n+1} - C_{\bar{P}} \left( \frac{d\bar{P}}{dx} \right)^n \quad (8.49a)$$

$$\hat{U}_N^{n+1} = C_{\bar{P}} \left[ - \sum C_{nb} U_{nb}^{n+1} + \hat{C}_S \right] \quad (8.49b)$$

prédiction de la pression

$$\left( \frac{d\bar{P}}{dx} \right)^{n+1} = \frac{\hat{U}_N^{n+1} - 1}{\int C_{\bar{P}}} \quad (8.49c)$$

correction de la vitesse

$$U_N^{n+1} = C_{\bar{P}} \left( \frac{d\bar{P}}{dx} \right)^{n+1} + \tilde{U}_N^{n+1} \quad (8.49d)$$

Lorsque les calculs sont effectués avec un gradient de pression imposé, il est préférable de résoudre directement les systèmes tridiagonaux. C'est la méthode choisie dans le paragraphe suivant. La technique par résolution directe ou par PISO peut être effectuée dans le cas de l'écoulement en présence de rotation, pour lequel les simulation basent le nombre de Reynolds sur la vitesse débitante  $U_m$ .

### 8.3.5 Initialisation des calculs et conditions aux limites

Les modèles à deux équations de transport sont initialisés le plus simplement possible par un champ de vitesse satisfaisant l'adhérence du fluide aux parois et uniforme dans tout le canal. Les champs de l'énergie cinétique turbulente et de la dissipation sont également uniformes. Les calculs effectués avec les modèles de type  $K - \varepsilon$  permettent d'initialiser les calculs de type  $R_{ij} - \varepsilon$  à qui ils fournissent des conditions initiales plus réalistes. Les tensions de Reynolds sont donc initialement isotropes puisqu'elles proviennent de modèles  $K - \varepsilon$  standards.

Les conditions aux limites sont de type parois. L'expression pariétale de la grandeur calculée pour le taux de dissipation dépend du modèle. Si les équations font intervenir  $\tilde{\varepsilon}$ , elle est de type Dirichlet, sinon la condition aux limites sur  $\varepsilon$  est imposée par la condition de paroi proposée par le modèle.

## 8.4 Ecoulement turbulent à faible nombre de Reynolds

La configuration du canal plan établi de Kim, Moin et Moser [68] a été retenue comme cas test. C'est l'écoulement à faible nombre de Reynolds pour lequel les prédictions des budgets des équations au second ordre ont été examinés et c'est également l'écoulement qui correspond aux simulations directes de Kristofferson et Andersson [69], qui prend en compte la présence d'une rotation orthogonale.

Les caractéristiques de l'écoulement moyen sont les suivantes :

$$\begin{aligned} Re_\tau &= \frac{U_\tau D}{\nu} \\ &= 360 \end{aligned} \quad (8.50)$$

soit

$$\begin{aligned} Re_m &= \frac{U_m D}{\nu} \\ &= 5600 \end{aligned} \quad (8.51)$$

lorsque la longueur de référence est basée sur la largeur du canal.

La comparaison des résultats en l'absence de rotation s'effectue avec l'adimensionnalisation basée sur la vitesse de frottement pariétale, si bien que le gradient de pression est connu.

Le modèle de type  $K - \varepsilon$  retenu pour fournir une condition initiale plus physique aux modèles au second ordre est le modèle bas-Reynolds de Chien [24]. Sa formulation est très simple et il utilise une équation de transport pour  $\tilde{\varepsilon}$ , défini par :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \frac{K}{y^2}$$

C'est par ailleurs un modèle dont les prédictions de la vitesse moyenne, de l'énergie cinétique turbulente et du cisaillement sont correctes dans le cas du canal plan [102].

Les modèles au second ordre choisis sont les formulations bas-Reynolds de Shima [140], Craft et Launder [32] et Launder et Tselepidakis [79], comme dans le chapitre 4.

Une étude de maillage a été effectuée avec les modèles de Chien et de Shima. Le maillage est construit en fonction de la résolution des modèles au second ordre. Des paramètres moins restrictifs peuvent être appliqués pour les modèles à deux équations de transport. Néanmoins, il est évident qu'il n'est pas intéressant sur ce genre de configuration d'effectuer des interpolations entre les grilles des deux types de modèles pour fournir des conditions initiales aux modèles au second ordre. Les mêmes maillages sont employés pour tous les modèles. Le maillage est simplement déterminé par la taille de première maille et l'espacement des points à l'intérieur du canal. Le maillage de référence retenu place le premier point en  $y^+ = 1$  et distribue 50 points suivant un étirement en sinus hyperbolique dans le demi-canal. La sous-couche visqueuse ( $y^+ < 5$ ) est traitée par 5 points et 30 points sont localisés dans la région correspondant aux forts gradients du profil de vitesse moyenne, soit pour  $y^+ < 50$ . Le maillage est symétrique par rapport au centre du canal. Les calculs avec une répartition uniforme de points à l'intérieur du canal pour une même épaisseur de première maille ont permis de montrer que les étirements de ce maillage n'influencent pas les résultats et par conséquent que la précision du schéma n'est pas affectée par la distribution des points du maillage choisie. La grille uniforme augmente le nombre de points de façon relativement importante avec 180 dans le demi-canal. Un maillage plus fin a également été testé, qui place le premier point au voisinage de  $y^+ = 0.2$ . Une répartition uniforme des points conduit à 750 mailles dans le demi-canal. Ce maillage conduit le modèle de Shima à la même solution, ce qui autorise à présenter l'ensemble des comparaisons sur le premier maillage à 50 points, bien que les modèles du second ordre soient systématiquement calculés sur ce maillage et les maillages fins. Il faut noter que d'après les résultats de simulation directe, le plus petit pas de temps caractéristique de la turbulence, défini par  $K/\varepsilon$  est associé à la première maille au voisinage de la paroi et est relativement petit ici. Pour les maillages à 50 ou 180 points dans le demi-canal, pour lesquels la taille de la première maille est fixée par  $y^+ = 1$ , ce pas de temps est voisin de 0.0015. Il est de l'ordre de  $10^{-4}$  pour le maillage uniforme à 750 points. Ces pas de temps ne sont pas des contraintes numériques *a priori* nécessaires à la résolution des équations discrètes puisque le schéma est inconditionnellement stable. Ils sont donnés à titre indicatif. Un aperçu de la répartition des points est donnée sur le profil de vitesse moyenne du modèle de Chien sur les deux figures ci-dessous.

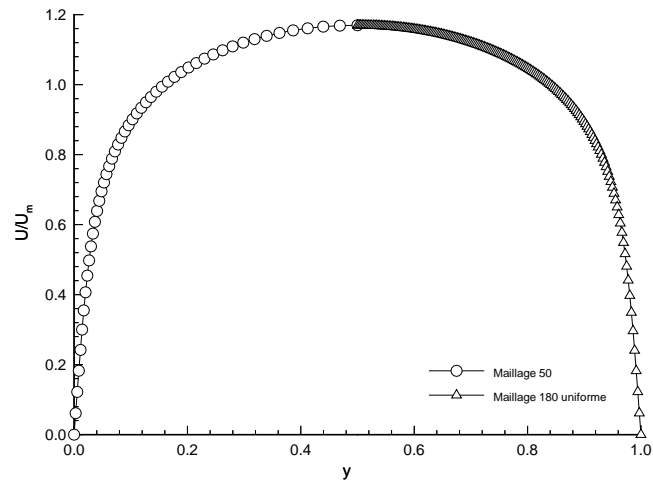


FIG. 8.3: Répartitions des points du maillage à 50 points étirés et du maillage régulier correspondant.

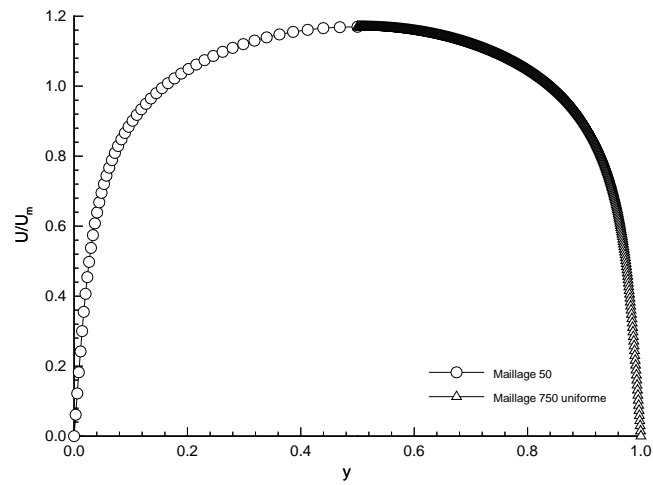


FIG. 8.4: Répartitions des points du maillage à 50 points étirés et du maillage uniforme à 750 points.

## 8.4.1 Modèle de Chien

Les calculs avec le modèle de Chien sont comparés aux simulations directes de Kim, Moin et Moser [68]. Le profil de vitesse moyenne est relativement bien prédit, comme le montre la courbe du profil de vitesse moyenne adimensionnalisée par la vitesse débitante et l'évolution de la vitesse longitudinale, adimensionnalisée par la vitesse de frottement  $U_\tau$  et notée  $U^+$ . Cette dernière est comparée également à la loi de paroi classique d'une couche limite turbulente établie sur une plaque plane. La sous-couche visqueuse est décrite par un profil de vitesse linéaire et la zone logarithmique, localisée au dessus des  $y^+ = 50$ , vérifie :

$$U^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (8.52)$$

avec  $C = 5.5$ , et où la constante de Karman est approchée par 0.4.

L'énergie cinétique turbulente et le profil de cisaillement sont correctement approchés par le modèle. Comme dans la grande majorité des modèles existants, le profil du taux de dissipation décroît au voisinage de la paroi, contrairement aux données de simulation directe qui situent le maximum à la paroi. Les composantes normales du tenseur de Reynolds sont quant à elle isotrope, puisque le modèle de Chien repose sur une fermeture linéaire du type Boussinesq. Les résultats de simulations directe sont représentés par des points sur l'ensemble des figures. Les courbes de convergences sont données en fonction des itérations en abscisse et des logarithmes des résidus.

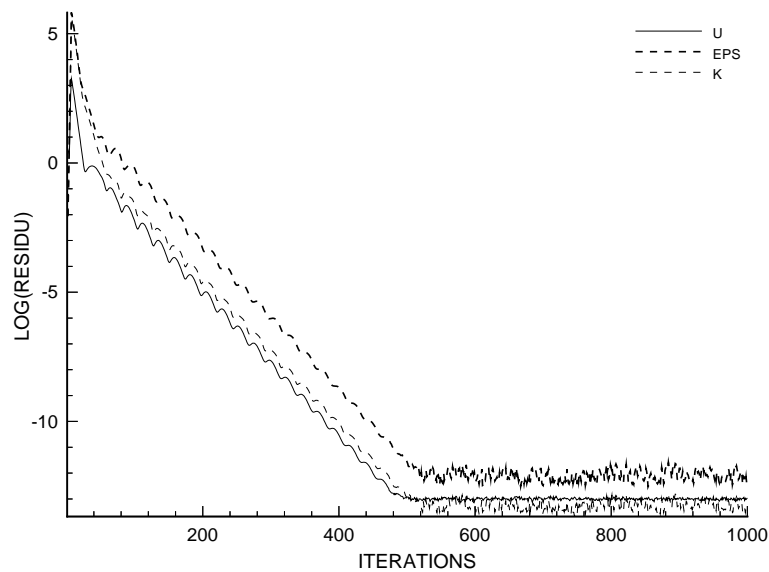


FIG. 8.5: *Evolution des résidus. Modèle de Chien.*

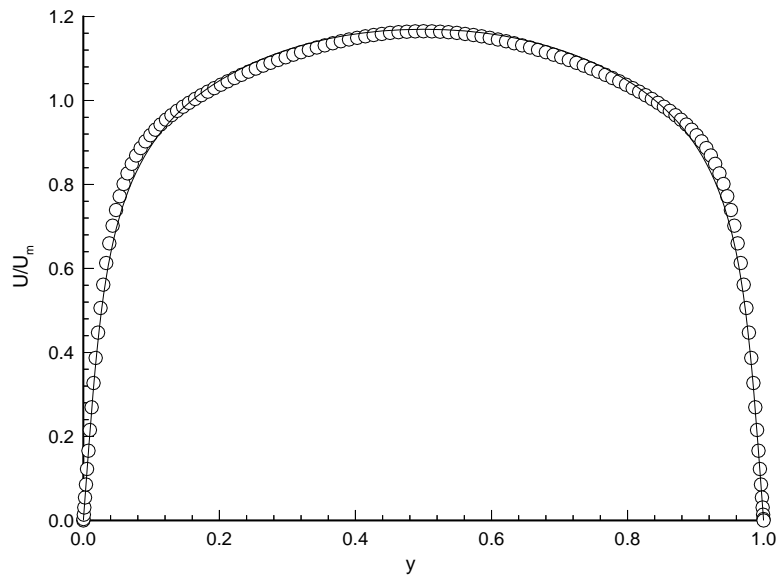


FIG. 8.6: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Chien.

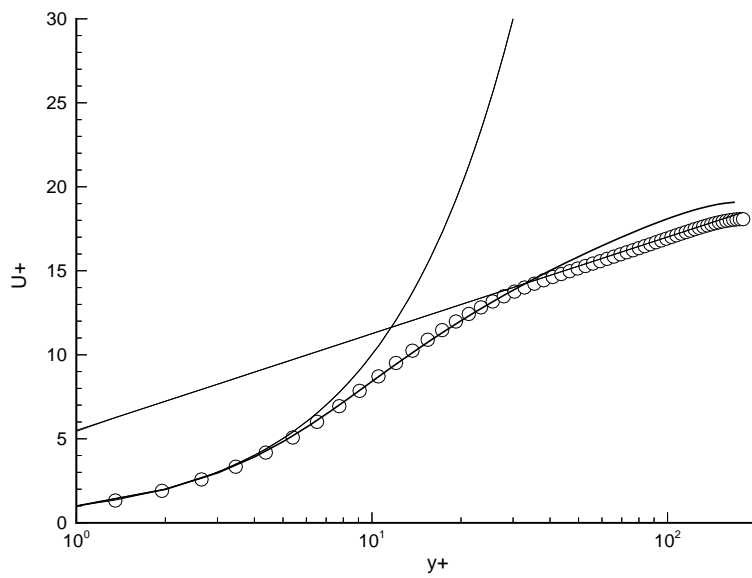


FIG. 8.7: Loi logarithmique. Modèle de Chien.

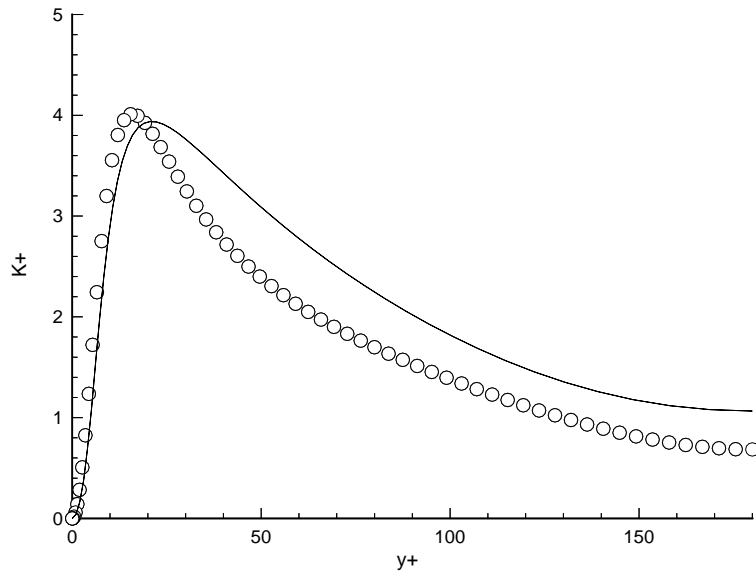


FIG. 8.8: *Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Chien.*

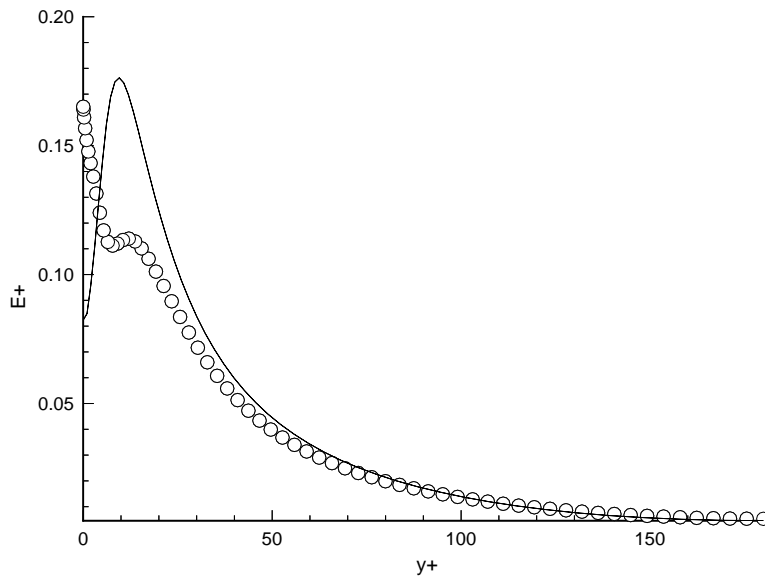


FIG. 8.9: *Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\epsilon^+$ . Modèle de Chien.*



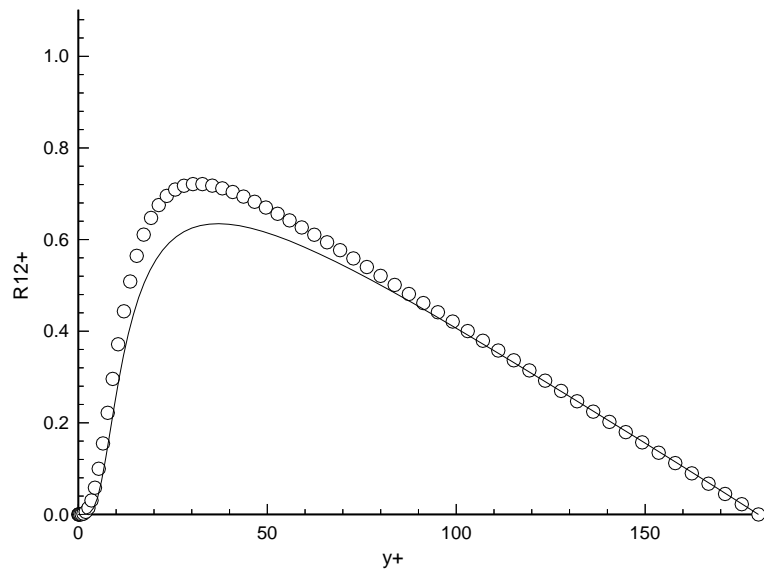


FIG. 8.10: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Chien.

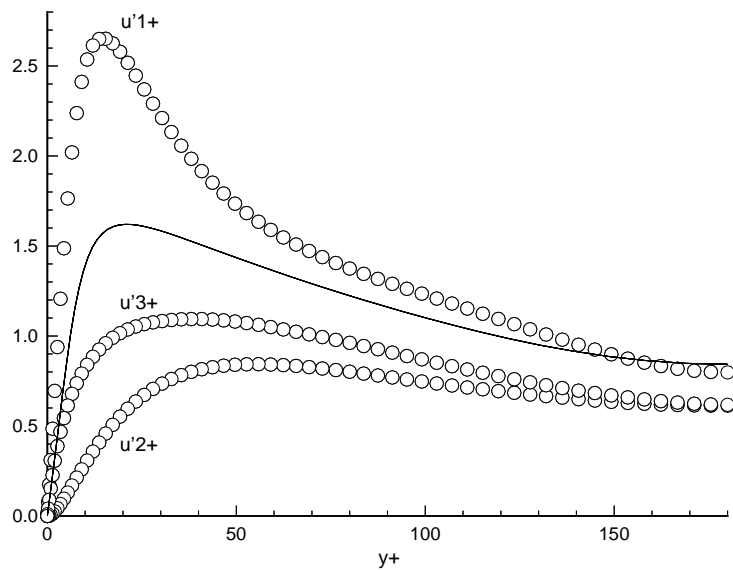


FIG. 8.11: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Chien.

## 8.4.2 Modèle de Shima

Le modèle de Shima est initialisé par les résultats du calcul avec le modèle de Chien. Il nécessite un plus petit pas de temps que le modèle  $K - \varepsilon$  et un plus grand nombre d'itérations pour parvenir à réduire les résidus de façon satisfaisante. Ces derniers ont l'allure suivante :

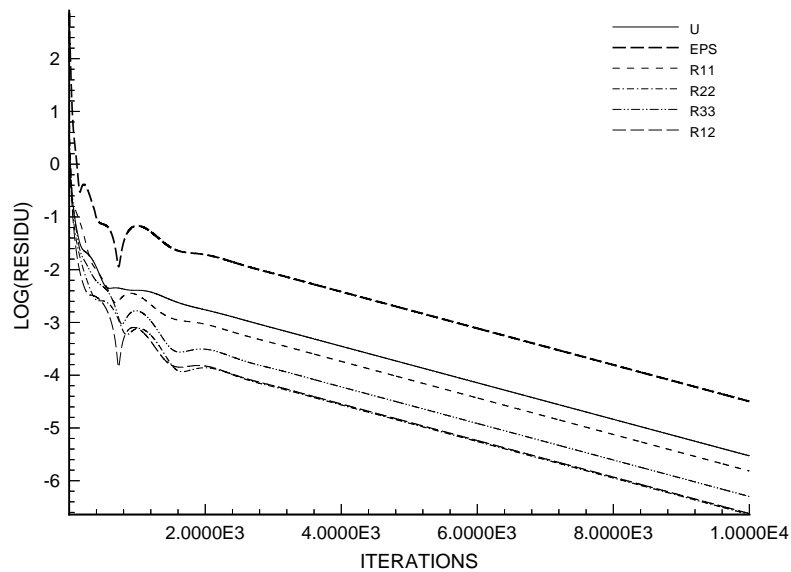


FIG. 8.12: Evolution des résidus. Modèle de Shima.

Les résidus atteignent une décroissance linéaire assez rapidement. Les prédictions des profils de vitesse moyenne sont sensiblement équivalentes à celles obtenues avec le modèle de Chien.

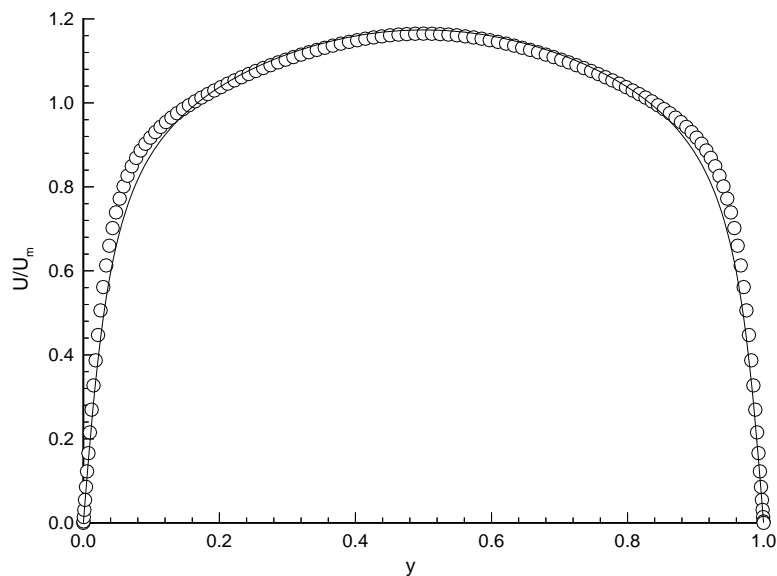


FIG. 8.13: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Shima.

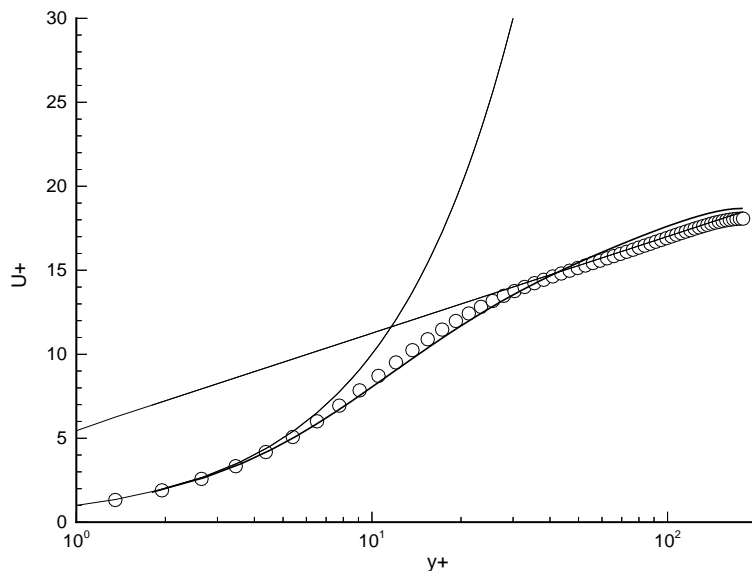


FIG. 8.14: Loi logarithmique. Modèle de Shima.

Il en est de même pour le comportement du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente, qui partage le même défaut que la solution de Chien. La prédiction de l'énergie cinétique tur-

bulente est par contre meilleure dans l'ensemble dans la mesure où le niveau d'énergie cinétique turbulente est mieux prédit au centre du canal.

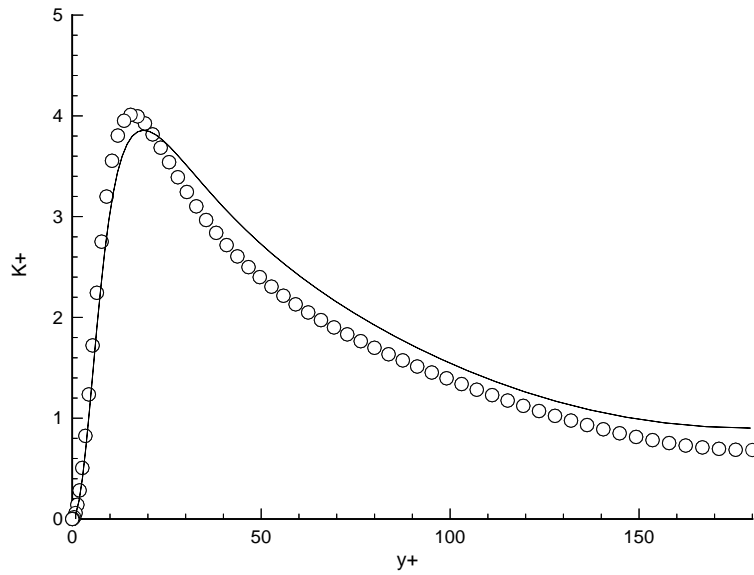


FIG. 8.15: *Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Shima.*

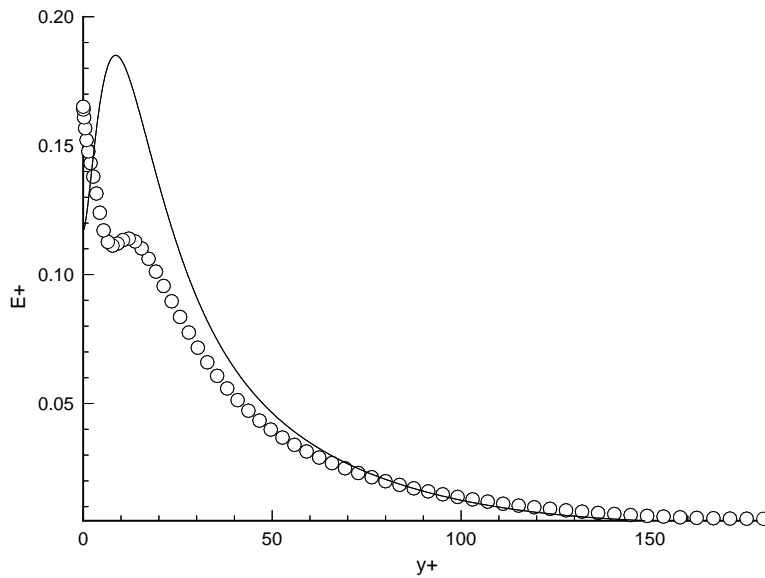


FIG. 8.16: *Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\epsilon^+$ . Modèle de Shima.*

L'évolution de la contrainte de cisaillement est prédite de façon relativement correcte par le modèle de Shima, bien que le gradient soit légèrement trop important au voisinage immédiat de la paroi. La solution reste cependant du même ordre que celle du  $K - \varepsilon$ .

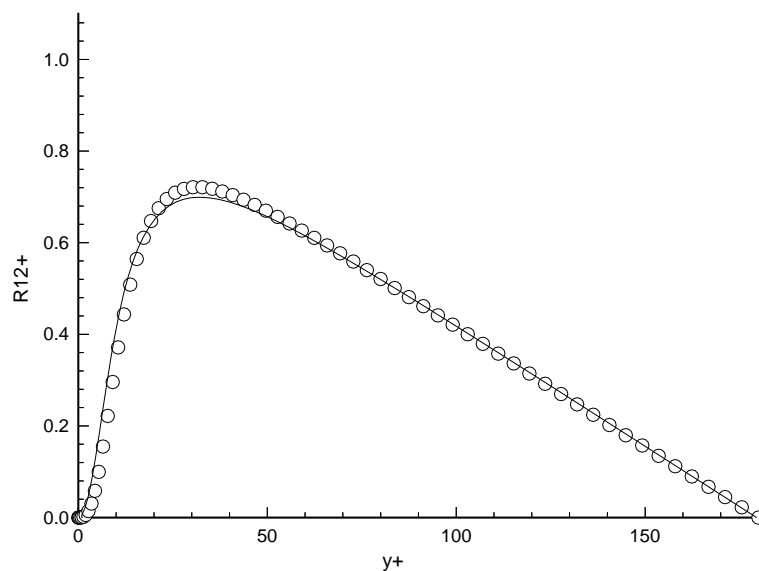


FIG. 8.17: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Shima.

L'anisotropie des contraintes normales du tenseur de Reynolds est par contre nettement améliorée par rapport au modèle à deux équations de transport, comme le montrent les évolutions des

moyennes quadratique des fluctuations de vitesse.

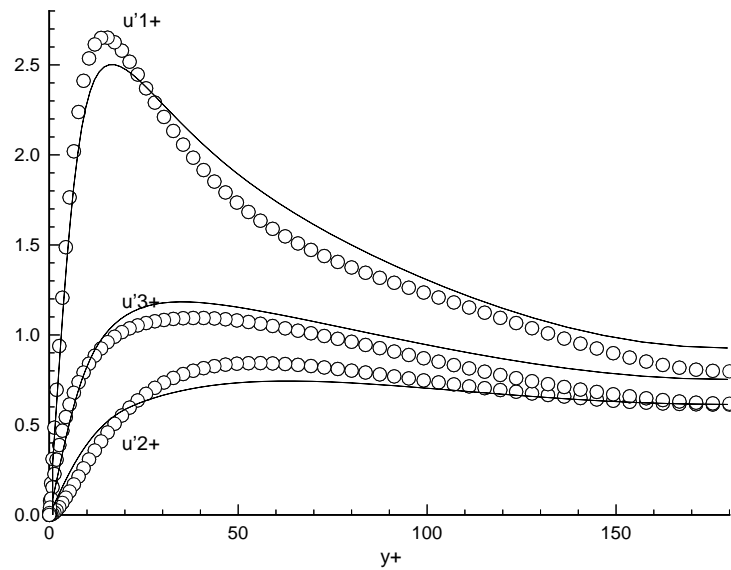


FIG. 8.18: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Shima.

L'ordre de grandeur des différentes contraintes normales est globalement restitué. Le niveau des contraintes normales dans le centre du canal ne restitue pas l'égalité des contraintes  $R_{22}$  et  $R_{33}$ , bien que le niveau de l'énergie cinétique turbulente soit relativement correct. La composante normale à la paroi,  $R_{22}$  reste encore trop importante au voisinage immédiat de la paroi. Ceci

s'observe particulièrement bien sur les évolutions asymptotiques, en échelle logarithmique :

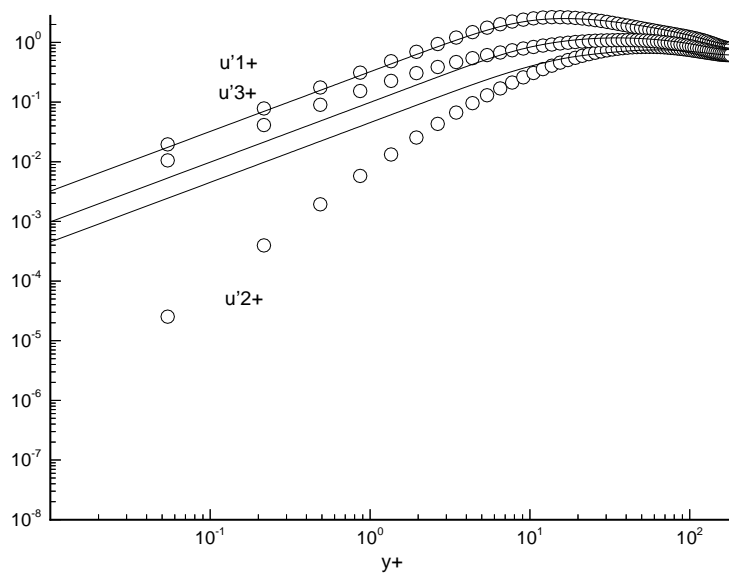


FIG. 8.19: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Comportement asymptotique. Modèle de Shima.

L'utilisation de modèles non-linéaires espère permettre de mieux traduire la décroissance de cette contrainte normale à l'approche de la paroi. Il est par ailleurs intéressant de regarder les budgets des équations de transport du tenseur de Reynolds calculés par le modèle. Les précédents budgets décrits au chapitre 4, avaient été établis en fournissant au modèle les solutions de simulation

directe.

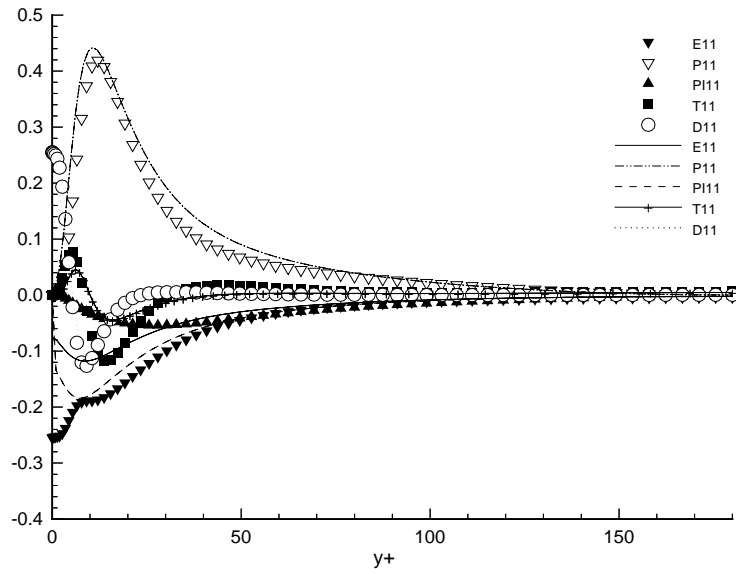


FIG. 8.20: Budget de  $\overline{u^2}$ . Modèle de Shima.

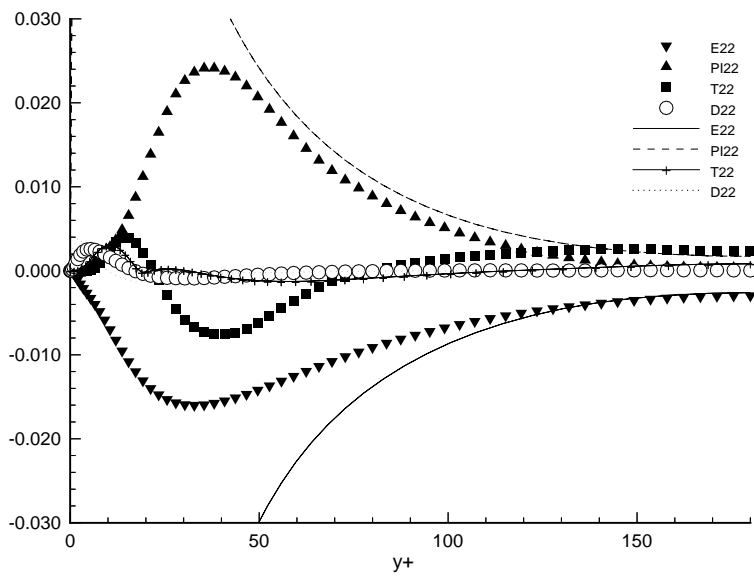


FIG. 8.21: Budget de  $\overline{v^2}$ . Modèle de Shima.



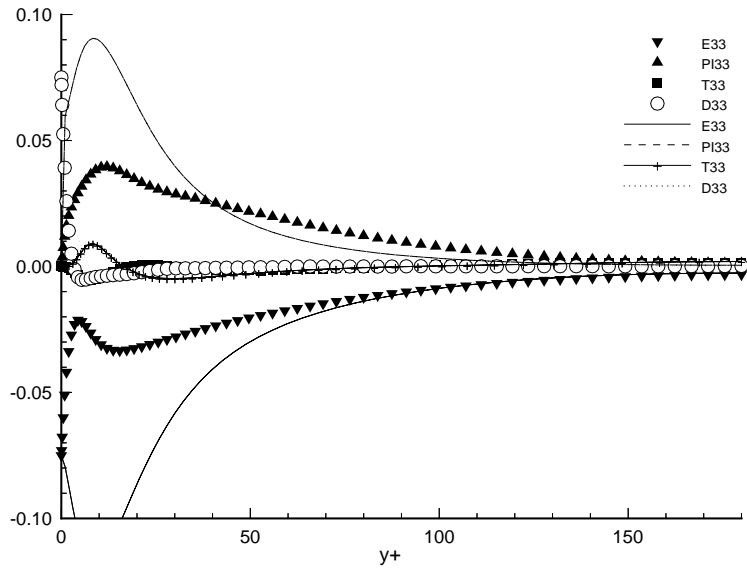


FIG. 8.22: Budget de  $\overline{w^2}$ . Modèle de Shima.

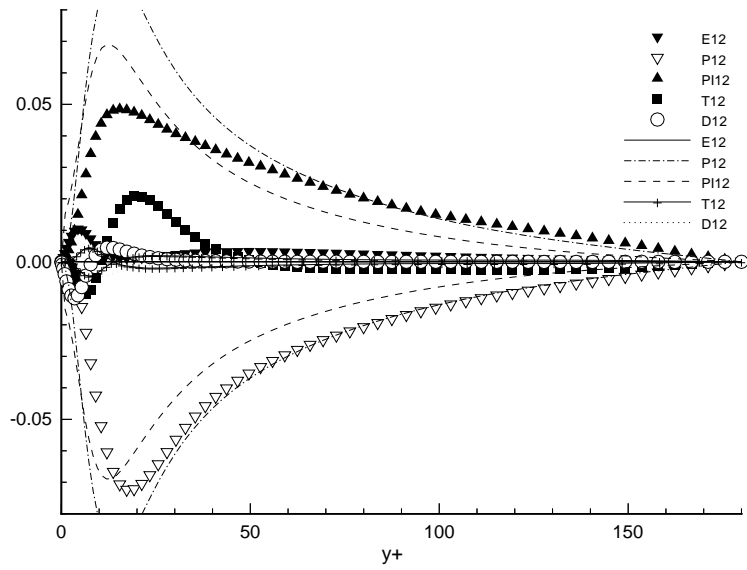


FIG. 8.23: Budget de  $\overline{uv}$ . Modèle de Shima.

Les prédictions sont évidemment dégradées par rapport à la solution issues des données de simulation directe. Les mêmes notations sont conservées, mais le budget de la contrainte de cisaillement est symétrique ici. Les maillages n'ayant pas le même nombre de points, il est préférable

de tracer les évolutions sur l'ensemble du canal. Les termes exacts sont représentés avec les solutions issues des calculs et sont bien sûr moins bien estimés puisque les contraintes de Reynolds et le gradient de vitesse moyenne ne correspondent pas exactement à la solution de simulation directe.

### 8.4.3 Modèle de Craft et Launder

Le modèle de Craft et Launder [32], présenté au chapitre 4 et dont l'expression est rappelée en annexe, a été calculé sur la même configuration. Les conditions initiales données au modèle ne proviennent pas cette fois des calculs du  $K - \varepsilon$  de Chien, mais des résultats obtenus avec le modèle de Shima. Les calculs sont effectués avec les paramètres adoptés pour le modèle de Shima, en utilisant toutefois un pas de temps approximativement dix fois plus petit. Il était précédemment de l'ordre de  $10^{-2}$ , alors qu'ici il est de l'ordre de  $10^{-3}$ . La solution donnée par le modèle de Craft et Launder évolue rapidement vers l'état laminaire. Les calculs sur les maillages plus fins ne changent pas l'allure de la solution. Sur le maillage à 50 points dans le demi-canal, l'évolution des résidus est la suivante :

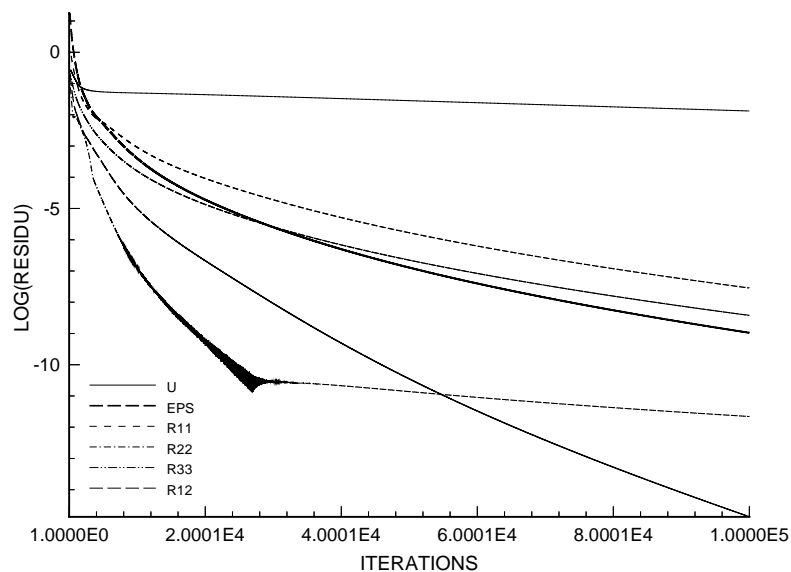


FIG. 8.24: Evolution des résidus. Modèle de Craft et Launder.

et le profil de vitesse moyenne tend vers le profil laminaire :

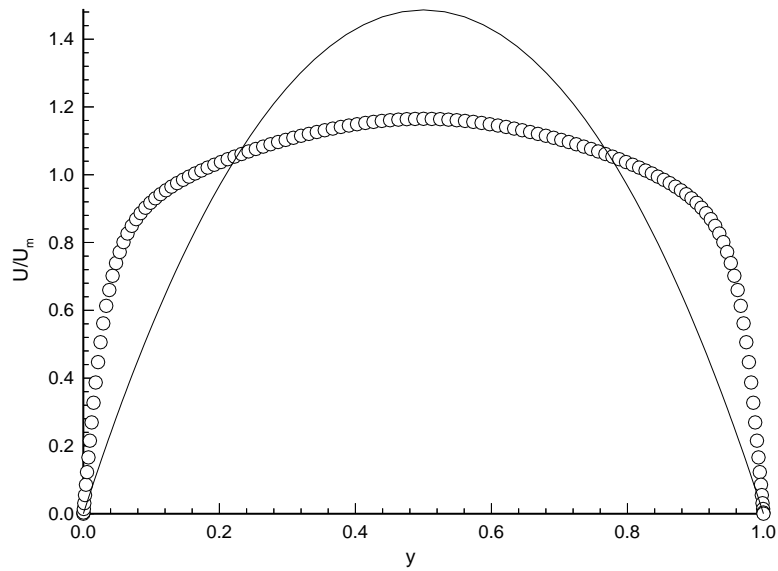


FIG. 8.25: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Craft et Launder.

alors que les composantes normales du tenseur de Reynolds tendent vers des valeurs nulles. Elles sont représentées par des triangles dans la figure ci-dessous :

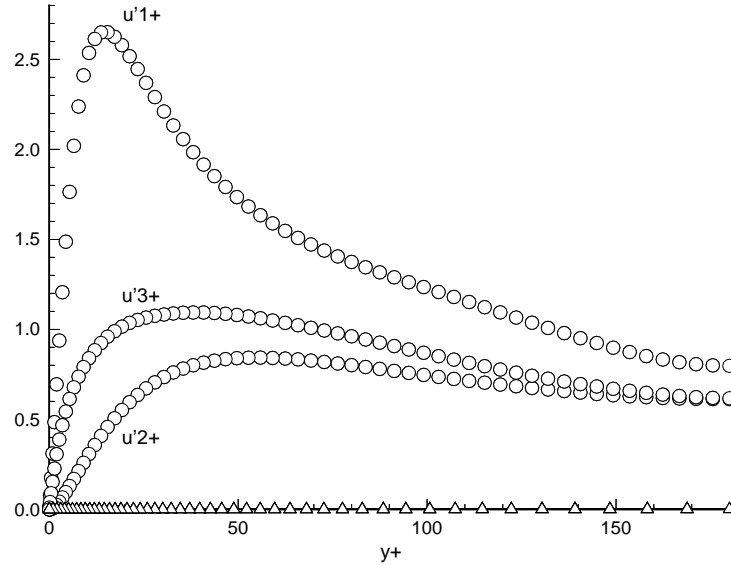


FIG. 8.26: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Craft et Launder.

L'énergie cinétique et la dissipation s'éteignent également. Il semble que le terme lent soit responsable de ce comportement, puisqu'il suffit d'en changer les coefficients pour converger vers une solution turbulente. La laminarisation de l'écoulement est amorcée par une décroissance importante de la contrainte normale  $R_{22}$  qui n'est pas rattrapée par le terme lent. Dans la version du modèle calculé précédemment, le terme lent fait intervenir une fonction d'amortissement définie par :

$$f_A = \begin{cases} (A/14)^{(1/2)} & A < 0.05 \\ A/(0.7)^{(1/2)} & 0.05 < A < 0.7 \\ A^{(1/2)} & 0.7 < A \end{cases} \quad (8.52a)$$

qui est une fonction continue imposant un changement d'évolution des coefficients à l'approche de la paroi en fonction du paramètre d'aplatissement  $A = F$ , passant d'une loi en  $\sqrt{A}$  en une loi en  $A$ . En choisissant de faire évoluer continuellement le terme lent comme une fonction de  $\sqrt{A}$  et non de  $A$ , la turbulence parvient à se maintenir. Il suffit par exemple de prendre pour fonction d'amortissement :

$$f_A = A^{(1/2)} \quad (8.52b)$$

et de modifier par conséquent également la correction du terme linéaire proposée dans le modèle, initialement en  $A$ , en la faisant dépendre de  $\sqrt{A}$ . Les coefficients du terme lent deviennent ainsi :

$$c_1 = 3.1 f_A f_{R_i} \min(A_2^{(1/2)}, 0.5) \quad (8.53a)$$

$$c'_1 = 1.1 \quad (8.53b)$$

soit :

$$\beta_1^S = -2(f_A + c_1) \quad (8.54a)$$

$$\beta_2^S = -4c'_1 c_1 \quad (8.54b)$$

La solution de ce système est présentée pour le maillage à 50 points, les résultats sur les maillages plus fins étant identiques. Les courbes de convergence sont les suivantes :

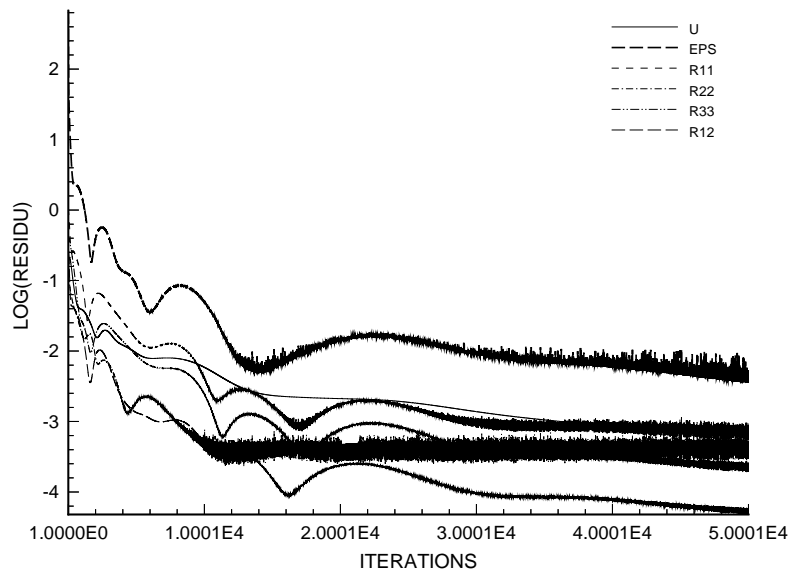


FIG. 8.27: Evolution des résidus. Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

Les oscillations parasites sont atténuées sur le maillage plus fin à 180, en conservant les mêmes paramètres de calcul. Elles n'affectent cependant pas la solution obtenue. Les résultats sont donc toujours présentés sur le maillage à 50 points. Le profil de vitesse moyenne est représenté de

façon excellente avec ce calcul, comme le montrent les deux figures ci-dessous.

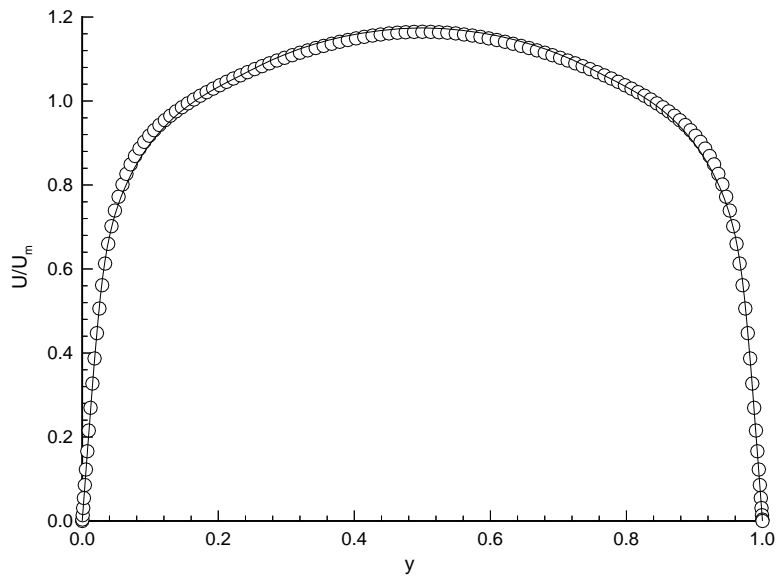


FIG. 8.28: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

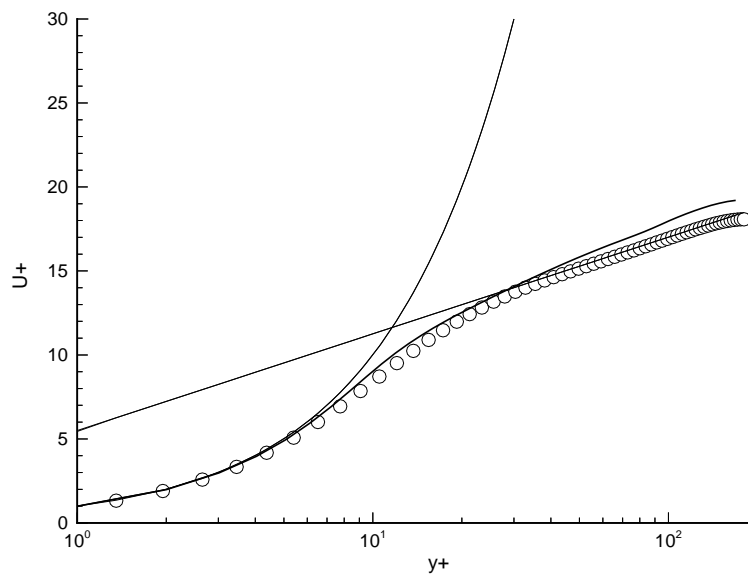


FIG. 8.29: Loi logarithmique. Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

L'énergie cinétique turbulente est plus importante que pour le modèle de Shima :

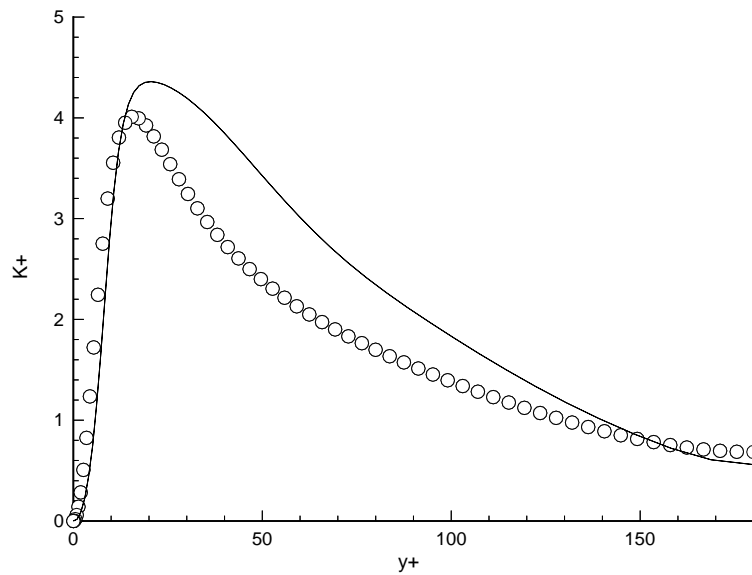


FIG. 8.30: Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

et le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente présente une inflexion localisée à peu près correctement, mais dont l'amplitude est beaucoup plus marquée que sur les données de

simulation directe :

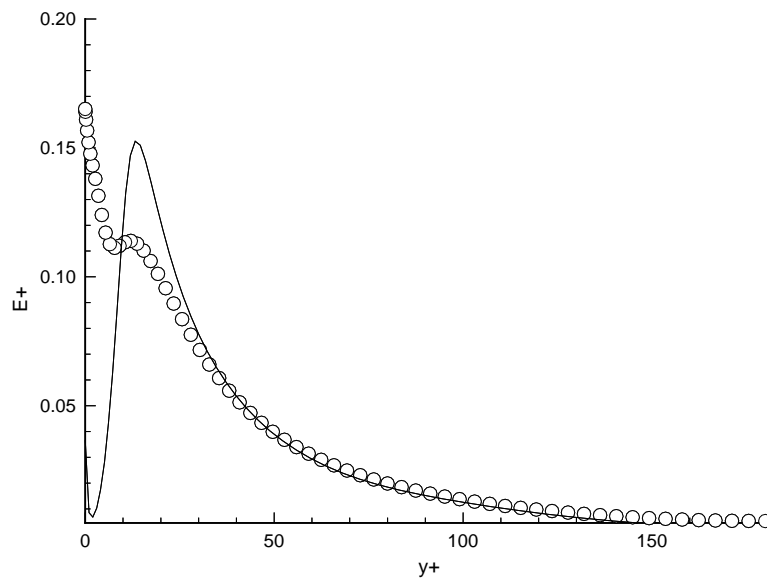


FIG. 8.31: Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.



Ce genre de comportement est très différent de celui proposé par les autres modèles. La contrainte de cisaillement du tenseur de Reynolds est relativement bien représentée par le modèle :

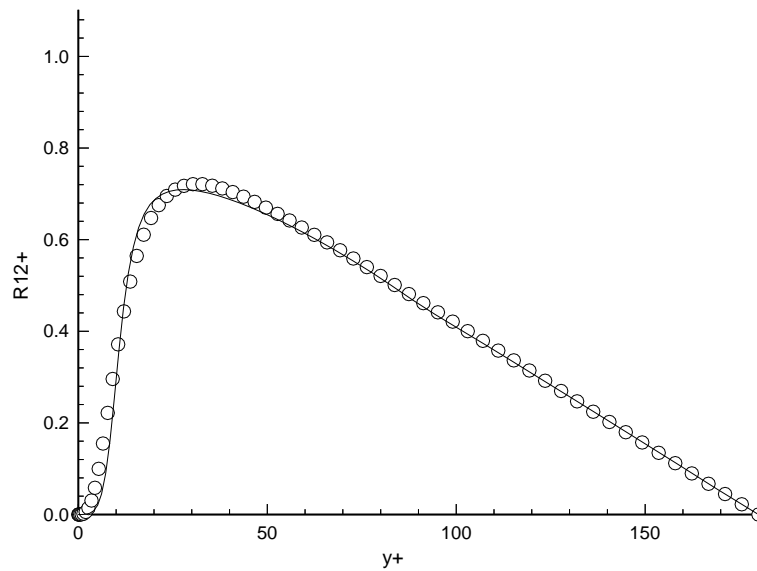


FIG. 8.32: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

Les contraintes normales restent par contre encore assez éloignées des prédictions de simulation directe. Par rapport au modèle tensoriellement linéaire de Shima, la composante normale  $R_{22}$  augmente beaucoup moins vite au voisinage immédiat de la paroi, mais son niveau général reste

inférieur dans tout le canal et présente des inflexions qui n'ont pas lieu d'être.

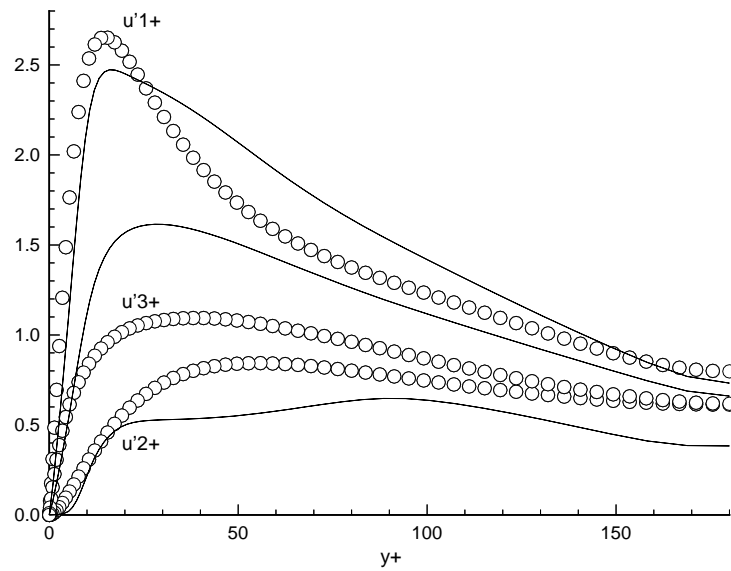


FIG. 8.33: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

Il est intéressant de noter que le comportement asymptotique des contraintes normales est par contre mieux représenté qu'avec le modèle de Shima :

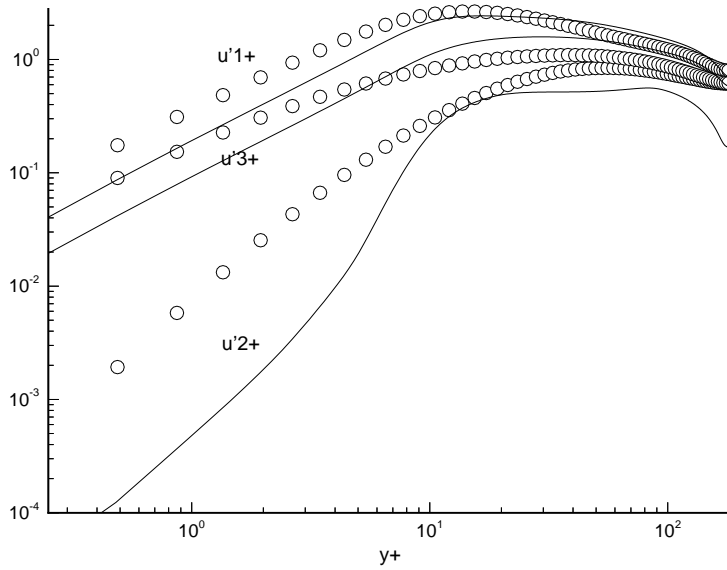


FIG. 8.34: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Comportement asymptotique. Modèle de Craft et Launder où  $f_A$  est modifiée.

La prédiction des contraintes normales peut être améliorée en modifiant différemment le terme lent. La modification suivante du coefficient d'amortissement  $f_A$  suffit à trouver une solution qui ne soit pas laminaire :

$$f_A = \begin{cases} (A/14)^{(1/2)} & A < 0.05 \\ (A/0.7)^{(1/2)} & 0.05 < A < 0.7 \\ A^{(1/2)} & 0.7 < A \end{cases} \quad (8.54c)$$

mais génère une fonction continue par morceaux. C'est la raison pour laquelle la première modification explorée a consisté à remplacer tout simplement  $f_A$  par  $\sqrt{A}$ . Pour conserver le choix de la fonction d'amortissement du modèle initial tout en imposant un comportement en  $\sqrt{A}$  pour  $0.05 < A < 0.7$ ,

$$f_A = \begin{cases} (A/14)^{(1/2)} & A < 0.05 \\ A/(0.7)^{(1/2)} & 0.05 < A < 0.7 \\ A^{(1/2)} & 0.7 < A \end{cases} \quad (8.54d)$$

les coefficients suivant ont été appliqués au terme lent :

$$c_1 = 3.1 \sqrt{f_A} f_{R_t} \min(A_2^{(1/2)}, 0.5) \quad (8.55a)$$

$$c'_1 = 1.1 \quad (8.55b)$$

avec

$$\beta_1^S = -2(\sqrt{f_A} + c_1) \quad (8.56a)$$

$$\beta_2^S = -4 c'_1 c_1 \quad (8.56b)$$

Pour les mêmes paramètres de simulation que dans le cas précédent, les résidus évoluent cette fois de la façon suivante :

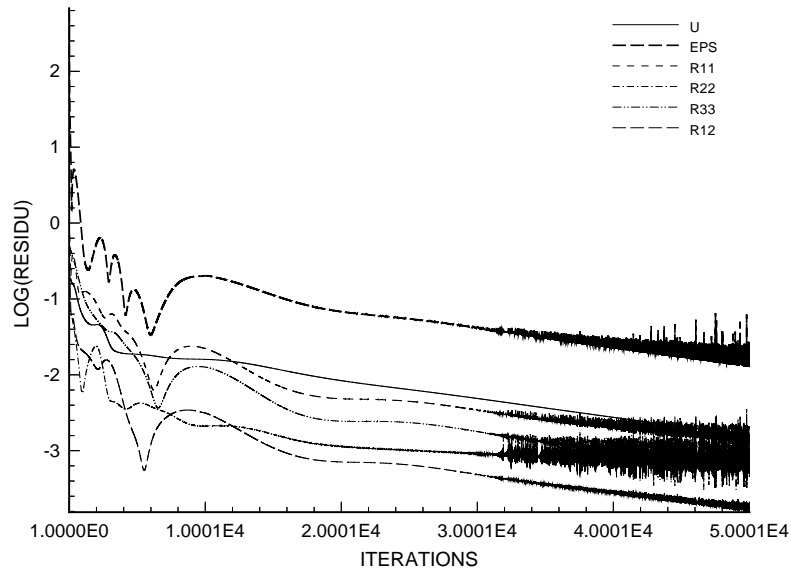


FIG. 8.35: Evolution des résidus. Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

Les profils de vitesse moyenne obtenus sont un peu moins bon que précédemment :

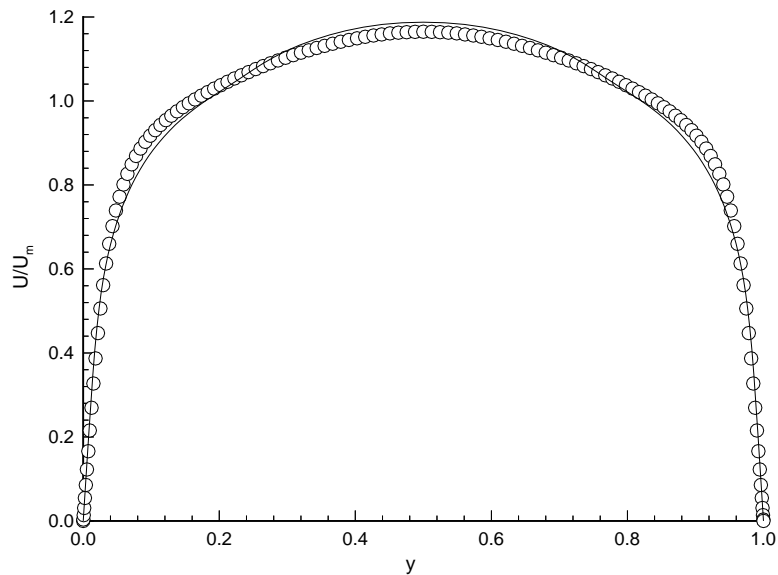


FIG. 8.36: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

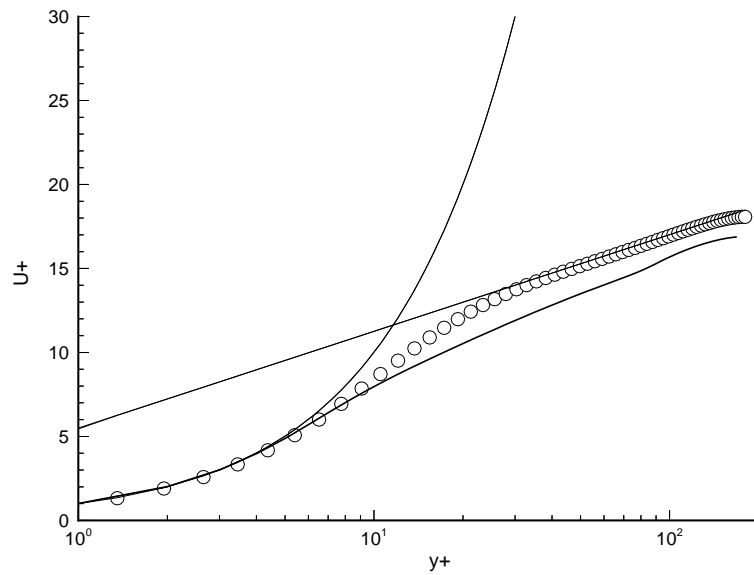


FIG. 8.37: Loi logarithmique. Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

mais l'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation sont sensiblement identiques.

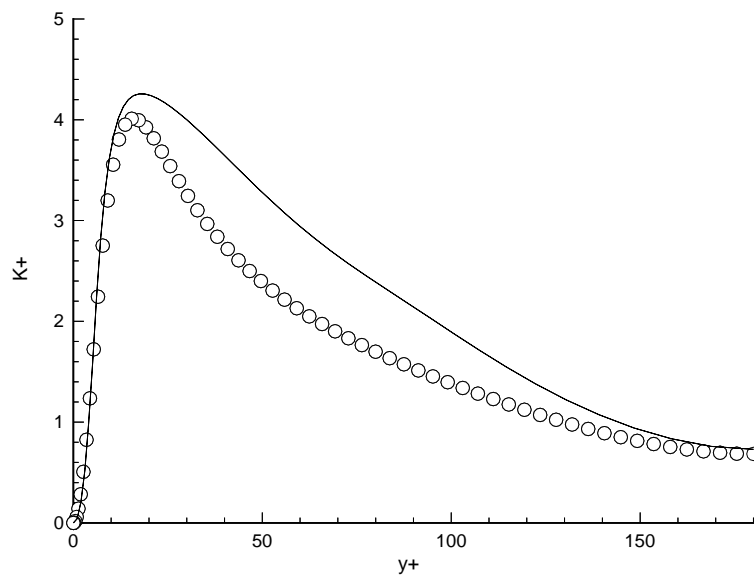


FIG. 8.38: Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

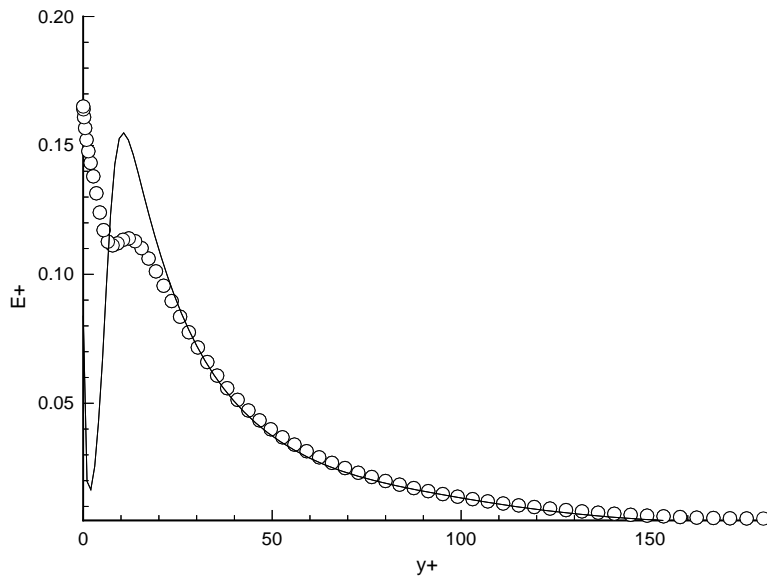


FIG. 8.39: Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

Le cisaillement présente un gradient trop important au voisinage de la paroi :

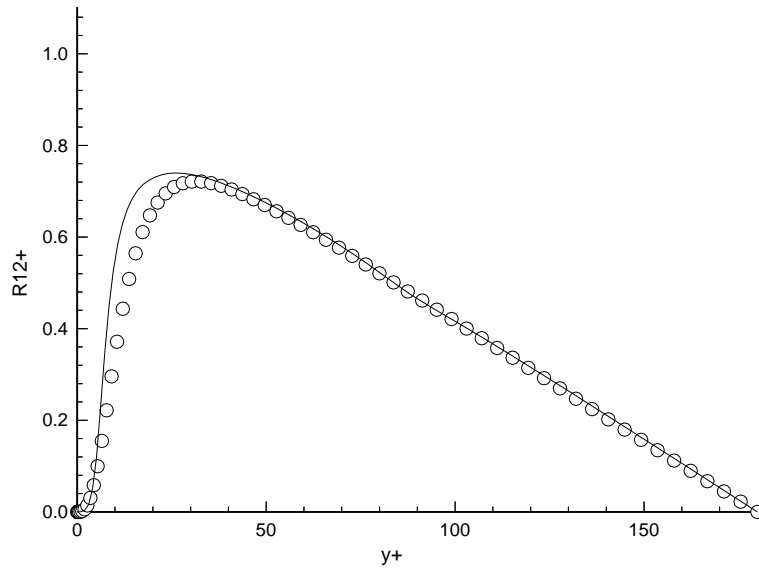


FIG. 8.40: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

mais la prédiction de la contrainte normale du tenseur de Reynolds dans la direction orthogonale à la paroi est un peu meilleure que dans le cas précédent.

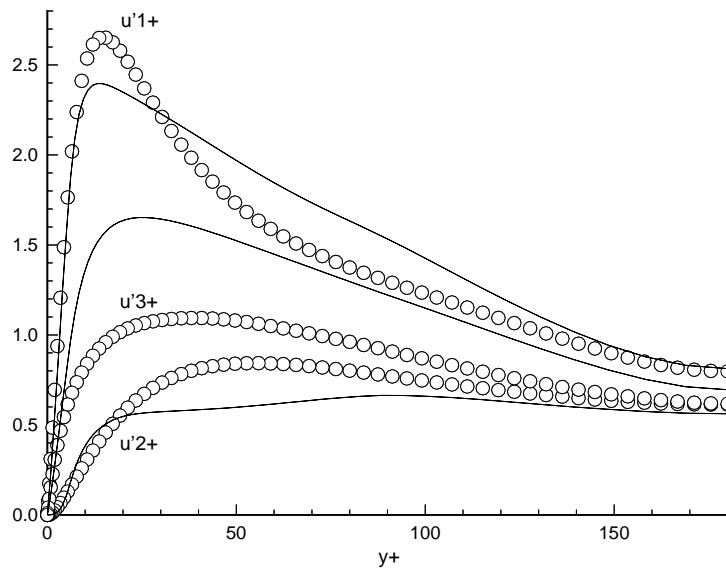


FIG. 8.41: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

Le comportement des contraintes normales au centre du canal semble également meilleur ici.

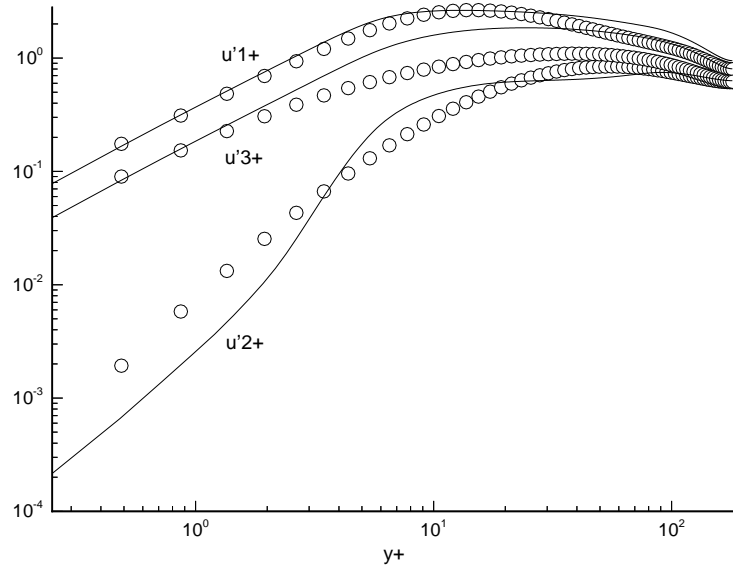


FIG. 8.42: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Comportement asymptotique. Modèle de Craft et Launder avec  $f_A^{1/2}$ .

Comme il est mentionné en annexe, il existe une version plus récente du modèle de Craft et Launder [33], qui propose un certain nombre de modifications, concernant notamment le traitement des termes de paroi et du terme de diffusion de pression. La fonction  $f_A$  proposée est cependant identique. Le comportement de ce modèle est similaire à la version présentée précédemment, au sens où la contrainte normale du tenseur de Reynolds, orthogonale à la paroi décroît de façon très importante dans tout le canal. La contrainte normale longitudinale reste cependant très élevée, ce qui ne permet pas d'évoluer vers un état laminaire de l'écoulement en entraînant une réduction progressive du niveau d'énergie cinétique turbulente dans tout le canal. Ce comportement, observé sur l'ensemble des maillages choisis, ne conduit pas à une réduction satisfaisante des résidus. Ils sont typiquement de la forme suivante, pour un pas de temps de



l'ordre de  $10^{-4}$  :

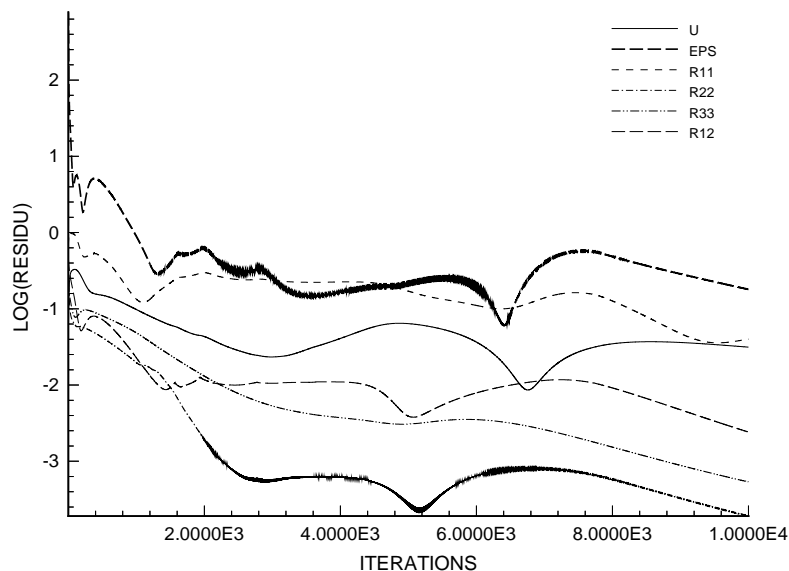


FIG. 8.43: Evolution des résidus. Modèle de Craft et Launder [33].

La solution correspondante, sur le maillage à 50 points est loin d'être réaliste :

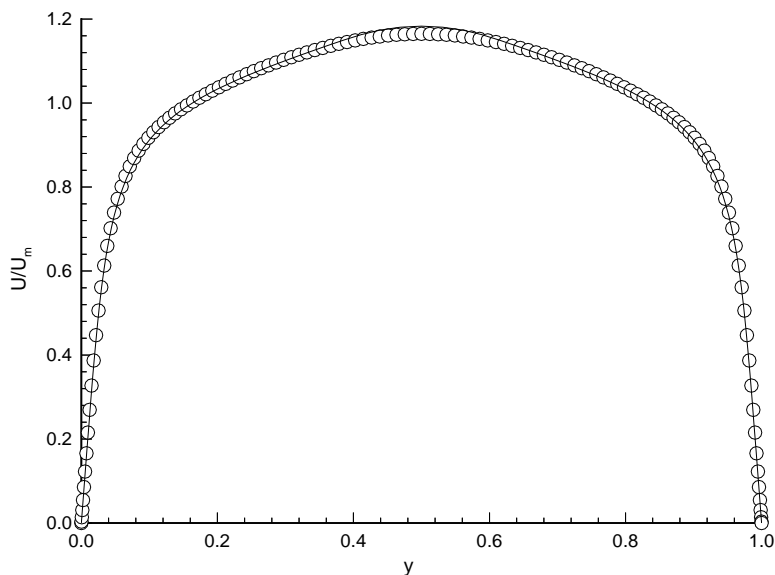
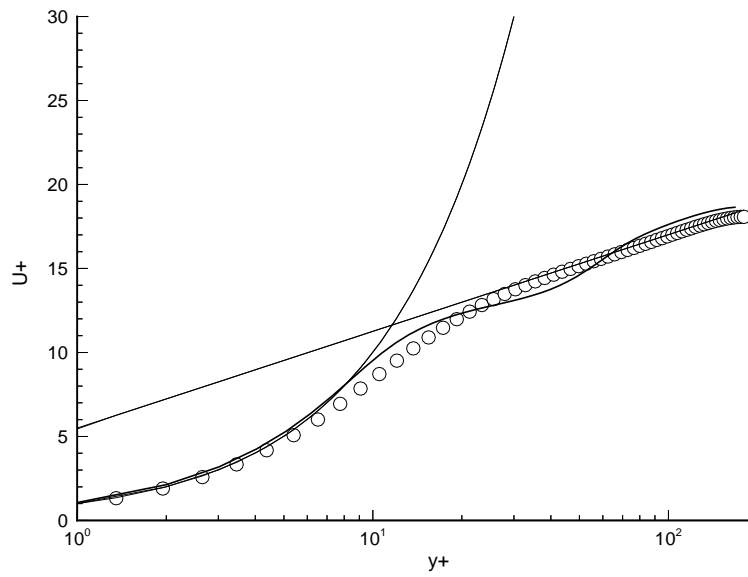
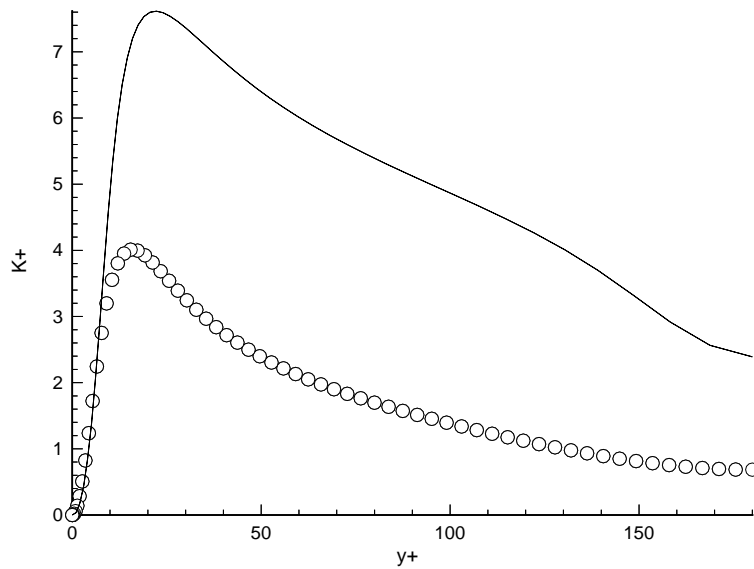


FIG. 8.44: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Craft et Launder [33].

FIG. 8.45: *Loi logarithmique. Modèle de Craft et Launder [33].*

L'énergie cinétique turbulente est largement surestimée :

FIG. 8.46: *Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Craft et Launder [33].*

et le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente est la seule quantité dont l'allure ressemble à la solution de la version précédente du modèle, après modification de l'influence de  $f_A$ .

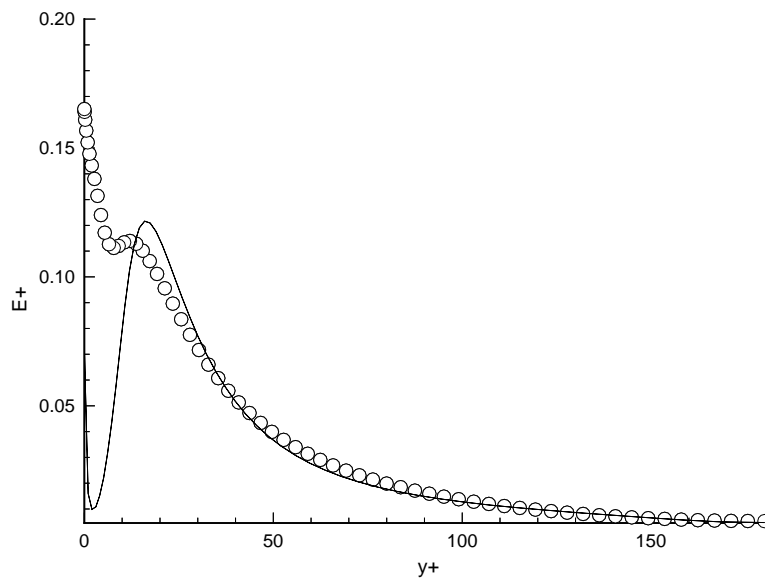


FIG. 8.47: Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Craft et Launder [33].

Le comportement des contraintes normales est du type :

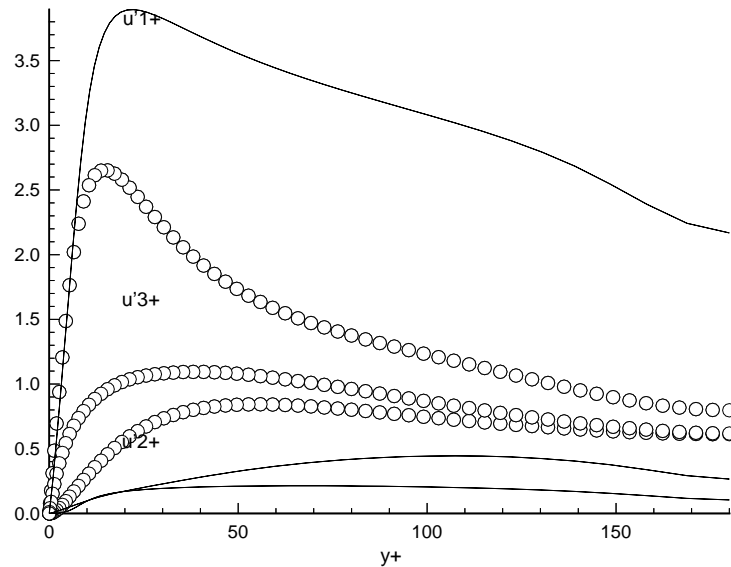


FIG. 8.48: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Craft et Launder [33].

Ce modèle possède un nombre assez important de coefficients d'amortissement et de termes correctifs, à la fois dans l'équation de transport du taux de dissipation et dans le traitement des termes de paroi. Les modifications qui ont été nécessaires de faire sur le terme lent dans le premier cas pour obtenir une solution qui ne soit pas laminaire restent par conséquent difficilement justifiables dans ce contexte. Il semble néanmoins qu'une évaluation trop forte du terme lent dans l'équation de transport de la corrélation double normale à la paroi entraîne progressivement un mécanisme de réduction trop importante de cette contrainte, qui à terme conduit à détruire la turbulence. C'est la raison pour laquelle il est intéressant d'examiner le comportement du modèle de Launder et Tselepidakis, qui comprend beaucoup moins de termes correctifs que les modèles de Craft et Launder. Son expression est présentée également en annexe.

Le traitement non-linéaire du tenseur des corrélations pression-déformation est légèrement différent de celui effectué par Craft et Launder dans le mesure où il ne retient pas l'ensemble des termes cubiques de ce modèle. Ces termes complémentaires doivent, d'après Launder et Li [73] permettre au tenseur des corrélations pression-déformation de mieux se comporter au voisinage de la paroi. Ils sont retenus dans les modèles de Craft et Launder pour tâcher de s'affranchir des corrections inhomogènes. La forme du modèle de Launder et Tselepidakis retient quant à elle les corrections inhomogènes sur le gradient de vitesse moyenne intervenant dans le terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation et l'associe à un terme d'écho de paroi. Le terme lent en revanche en est dépourvu. La modélisation de l'équation de transport du taux de dissipation et du tenseur des taux de dissipation est également différente et d'un traitement beaucoup plus répandu, en fonction de la distance normale à la paroi.

### 8.4.4 Modèle de Launder et Tselepidakis

Les calculs avec le modèle de Launder et Tselepidakis tel qu'il est décrit dans l'annexe conduit également à une solution laminaire, sur l'ensemble des maillages. Les résidus évoluent pour le maillage à 50 points et le même pas de temps que pour le premier calcul avec le modèle de Craft et Launder, suivant :

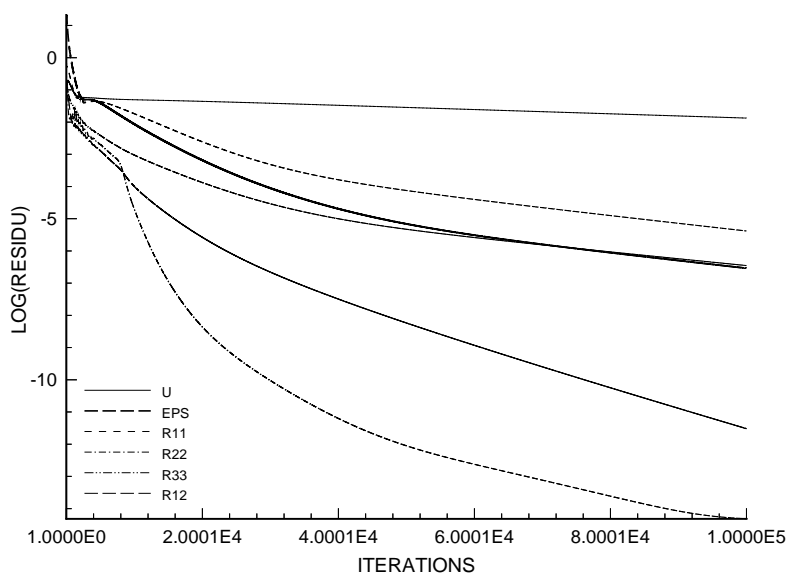


FIG. 8.49: Evolution des résidus. Modèle de Launder et Tselepidakis.

Le profil de vitesse tend également vers le même type de solution que le modèle de Craft et Launder, soit :

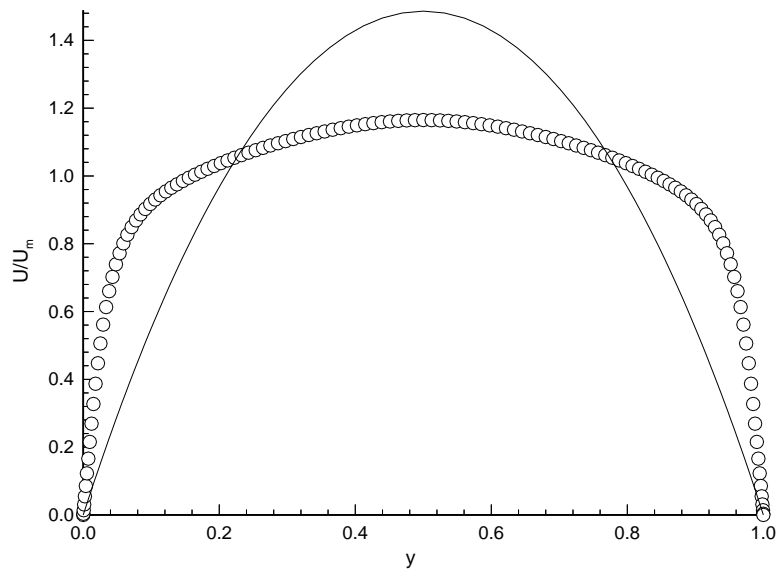


FIG. 8.50: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Launder et Tselepidakis.

et l'énergie cinétique et le taux de dissipation s'annulent dans l'ensemble du canal, alors que les contraintes normales du tenseur de Reynolds s'éteignent :

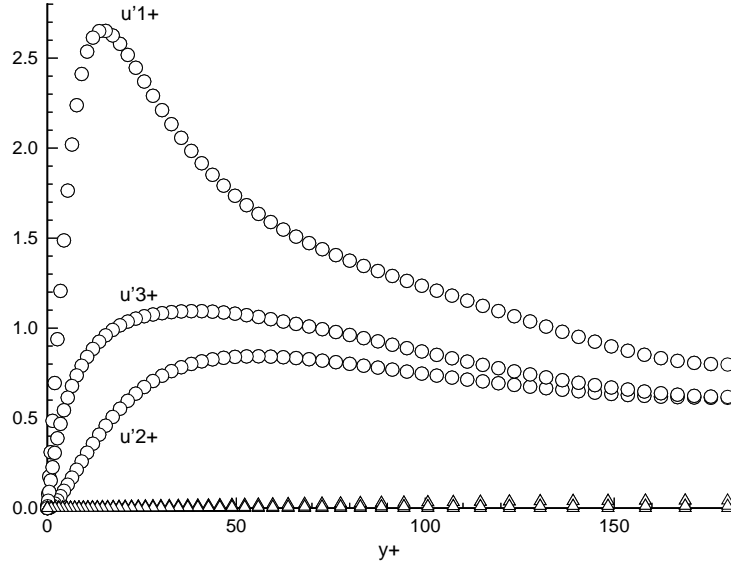


FIG. 8.51: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Launder et Tselepidakis.

Des modifications du terme lent analogues à celles effectuées dans le modèle de Craft et Launder ne permettent pas d'améliorer les résultats. Elles sont beaucoup moins justifiées ici, où l'équation de dissipation qui est résolue est celle de  $\varepsilon$ , et non celle de  $\tilde{\varepsilon}$ . Le paramètre de dissipation qui intervient dans le temps caractéristique du terme lent est  $\varepsilon$ , ce qui rend le terme lent *a priori* d'un ordre moins élevé au voisinage immédiat de la paroi, que dans le cas du modèle de Craft et Launder. Il s'avère ici que c'est la modélisation du tenseur des taux de dissipation qui a une influence importante sur le comportement du modèle. La modélisation proposée par Launder et Tselepidakis est consistante avec les développements asymptotiques exacts du tenseur. Il s'agit en effet du modèle suivant :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_\varepsilon \varepsilon_{ij}^* + \varepsilon'_{ij} \quad (8.57)$$

avec

$$f_\varepsilon = \exp(-20 A^2) \quad (8.58a)$$

$$c_1^* = -0.05 \quad (8.58b)$$

et

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon}{K} \frac{(R_{ij} + R_{ik} n_j n_k + R_{jk} n_i n_k + R_{mn} n_n n_m n_i n_j)}{(1 + \frac{3}{2K} R_{mn} n_n n_m)} \quad (8.59a)$$

$$\varepsilon'_{ij} = 2 c_1^* (\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \left[ 2 b_{ij} + b_{mn} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} b_{kj} n_k n_j - \frac{3}{2} b_{ki} n_k n_i \right] \quad (8.59b)$$

En pratique, l'accord d'un modèle avec le comportement asymptotique du terme exact, en approximation de couche limite, a une importance relative. Son comportement au voisinage immédiat de la paroi est restitué par l'équilibre des mécanismes constituant les termes sources des équations de transport. La capacité du modèle à évoluer vers les bons comportements asymptotique n'est pas imposée explicitement dans les différentes fermetures et rien n'assure que ce sera la cas. La façon dont le modèle s'écarte de la solution asymptotique devient alors importante. Dans le cas du modèle de Launder et Tselepidakis, le traitement du tenseur des taux de dissipation par la modélisation de Rotta, qui n'est pas consistante avec les développements asymptotiques analytiques, permet aux équations d'évoluer vers une solution non-laminaire. Il est modélisé par :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_\varepsilon \varepsilon_{ij}^* \quad (8.60)$$

avec

$$f_\varepsilon = \exp(-20 A^2) \quad (8.61)$$

et

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon}{K} R_{ij} \quad (8.62)$$

La fonction d'amortissement retenue est toujours celle proposée dans la modélisation initiale. Cette correction ne suffit cependant pas en pratique pour obtenir une solution réaliste. Il est également intéressant d'abandonner la correction inhomogène sur les gradients de vitesse moyenne dans le terme rapide, en prenant donc une valeur nulle du coefficient  $c_I$  (annexe F). La prise en compte de ce terme réduit en effet de façon trop importante  $R_{22}$  à la paroi. Cette modification nécessite cependant *a priori* d'augmenter la contribution du terme d'écho de paroi, en changeant par exemple la valeur de  $C_{w2}$ . Le but de cette étude n'étant pas de modifier les coefficients des modèles pour obtenir le meilleur résultat possible, l'expression de  $C_{w2}$  n'est dans un premier temps pas changée. L'amélioration apportée par une augmentation de cette constante sera cependant montrée au paragraphe suivant. Les calculs sont toujours présentés sur le maillage à 50 points dans le demi-canal. Ce calcul nécessite un pas de temps beaucoup plus petit que précédemment et comme le montre l'évolution des résidus ci-dessous, il est nécessaire d'effectuer également un grand nombre d'itérations. Les évolutions des résidus sur le maillage à 50 points



sont les suivantes :

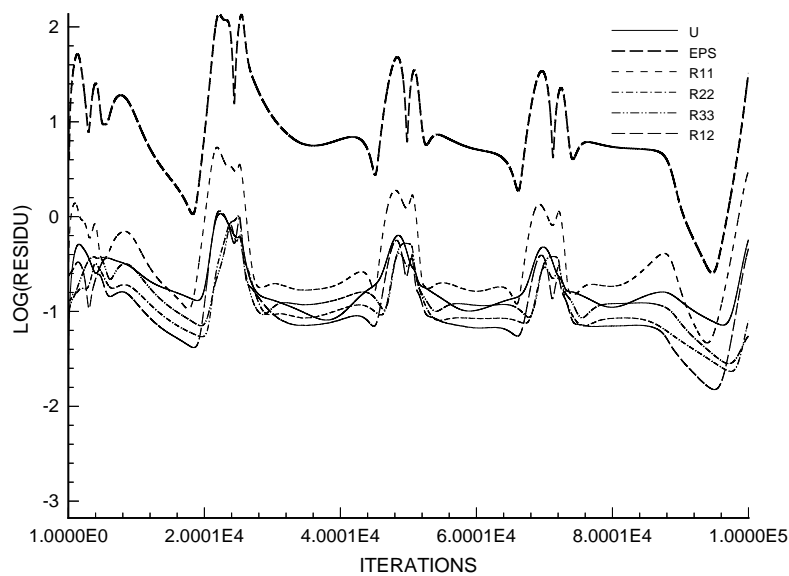


FIG. 8.52: Evolution des résidus. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$ .

La résolution du système évolue apparemment sur un cycle limite, qui ne permet pas d'espérer obtenir une décroissance linéaire des résidus. Après ces 100 000 itérations, les différentes quantités de l'écoulement sont présentées comme dans les cas précédents, bien qu'il ne s'agisse pas d'une

solution convergée.

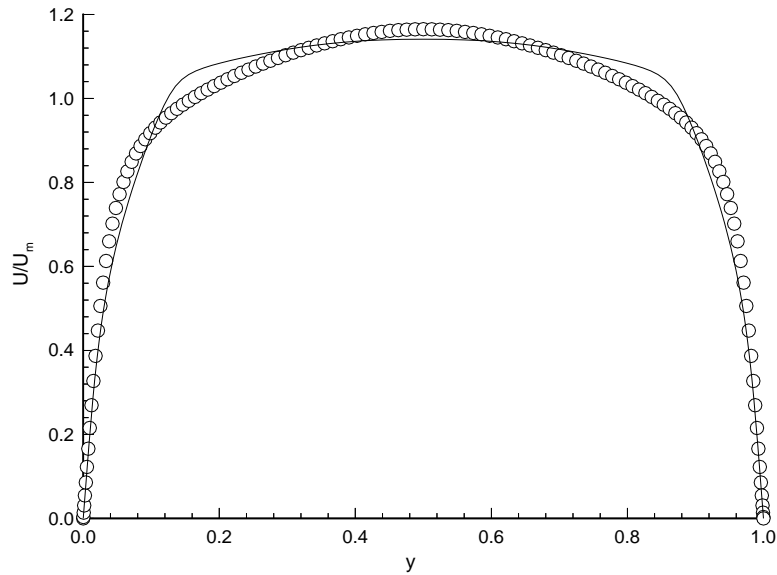


FIG. 8.53: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$ .

L'énergie cinétique turbulente et le taux de dissipation sont ici :

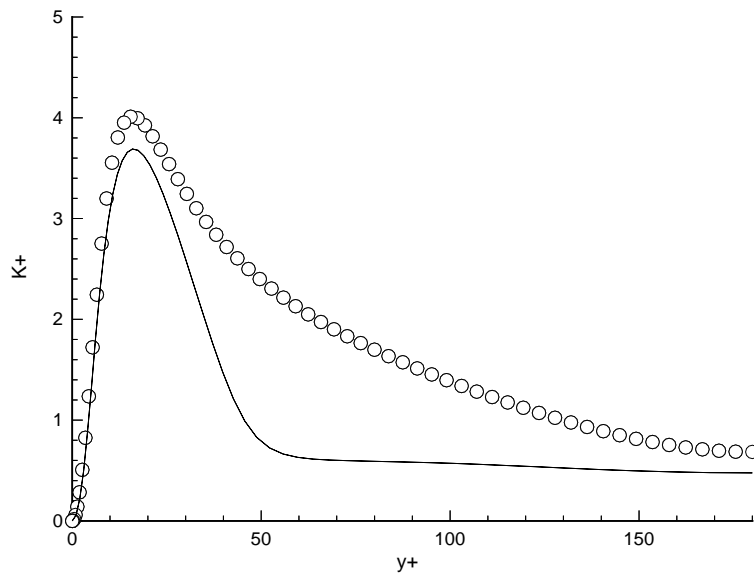


FIG. 8.54: Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$ .

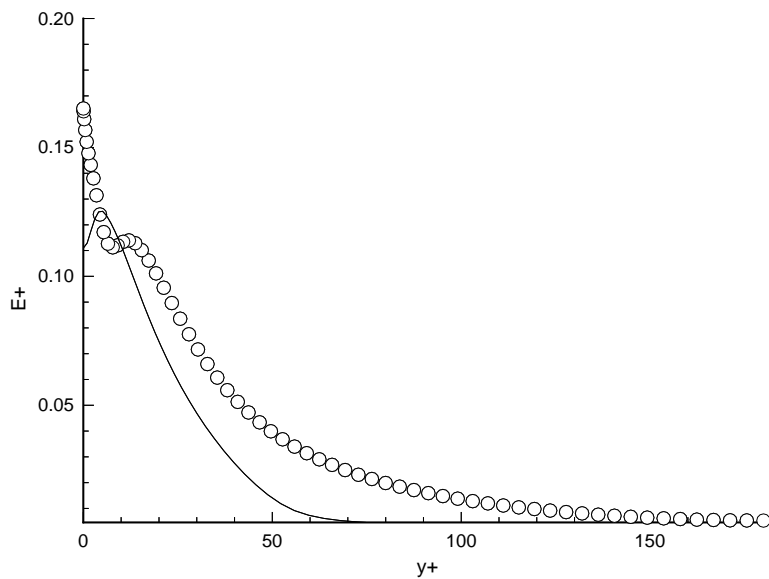


FIG. 8.55: Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$ .

La contrainte de cisaillement est encore sous estimée :

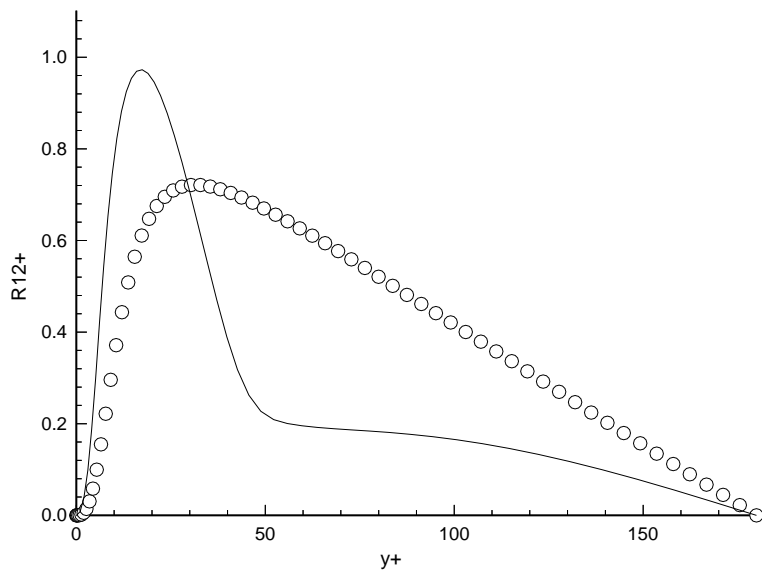


FIG. 8.56: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .

et les contraintes normales du tenseur de Reynolds évoluent suivant :

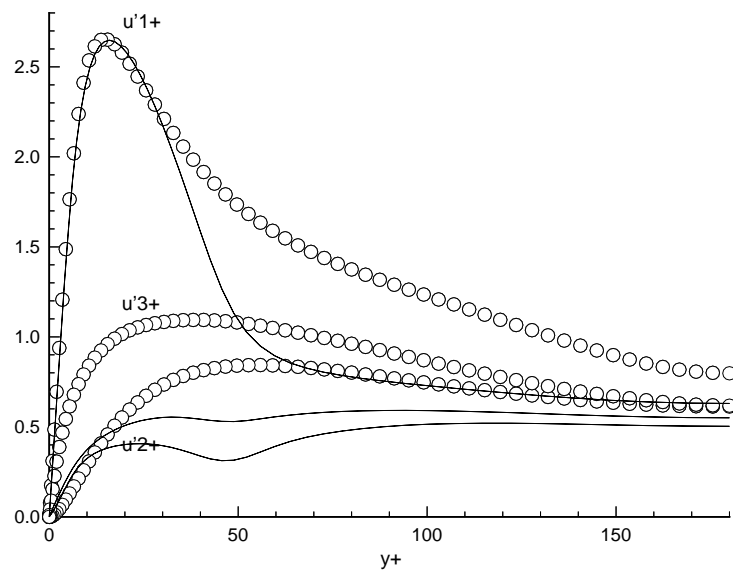


FIG. 8.57: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$ .

Il est clair *a priori* que la modification du coefficient  $c_I$  va de paire avec la modélisation du terme d'écho de paroi et en particulier que choisir  $c_I = 0$  reporte les corrections inhomogènes de façon plus importante sur le tenseur de réflexion de paroi. Cet équilibre est pris en compte ici en prenant pour coefficient  $C_{w2} = 0.2$  au lieu de  $C_{w2} = 0.02$ . Le tenseur des taux de dissipation

est modélisé comme dans le cas précédent. Dans ce cas les résidus évoluent de la façon suivante :

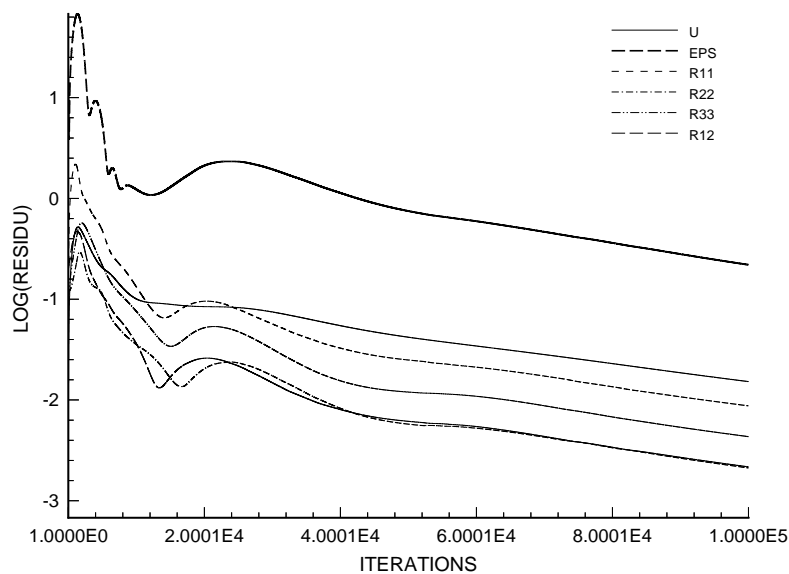


FIG. 8.58: *Evolution des résidus. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .*

Le pas de temps et les paramètres de calcul sont également identiques au cas précédent. La solution évolue cependant vers une solution avec, comme pour le modèle de Shima, une décroissance linéaire des résidus. Il nécessite cependant un pas de temps plus petit, de l'ordre de  $10^{-4}$  et un plus grand nombre d'itérations pour atteindre ce comportement. Le profil de vitesse moyenne

est le suivant :

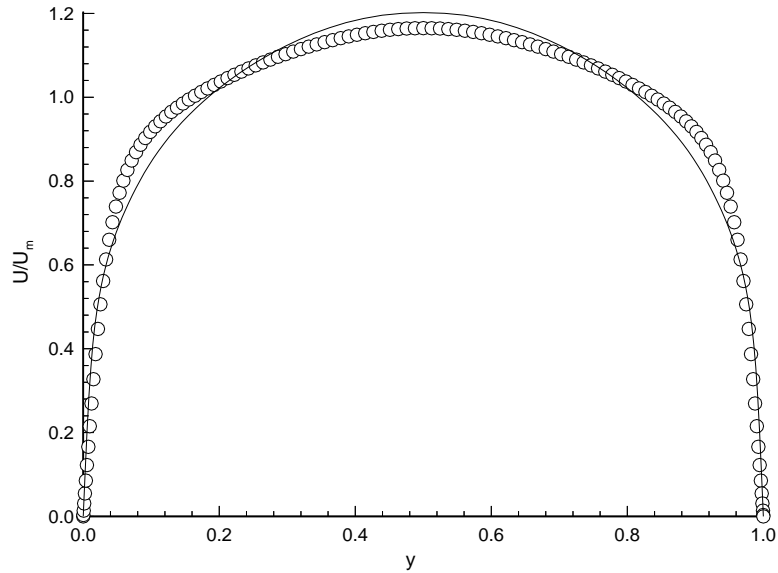


FIG. 8.59: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .

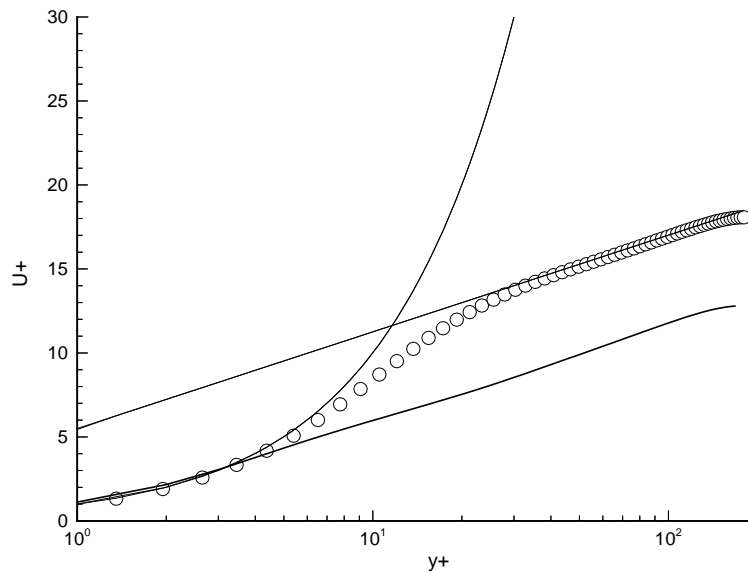


FIG. 8.60: Loi logarithmique. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .

L'énergie cinétique turbulente ne capte pas le bon comportement pariétal :

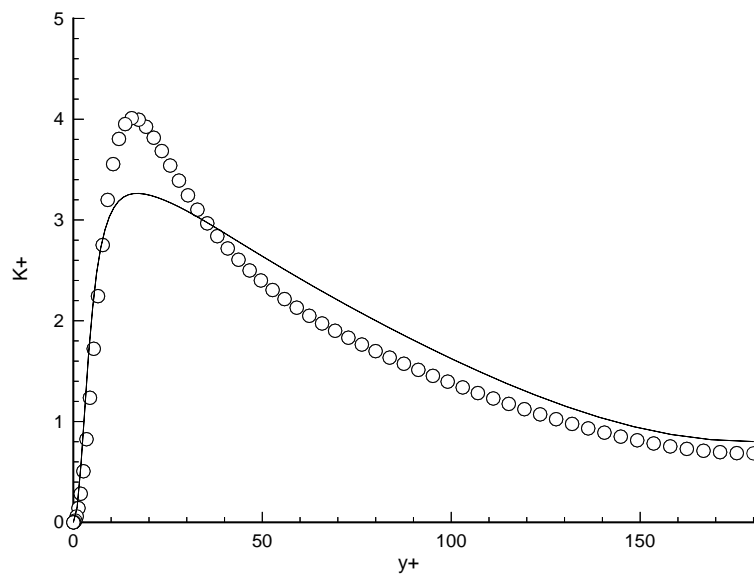


FIG. 8.61: *Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_1 = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .*

et la contribution du taux de dissipation est très importante ici :

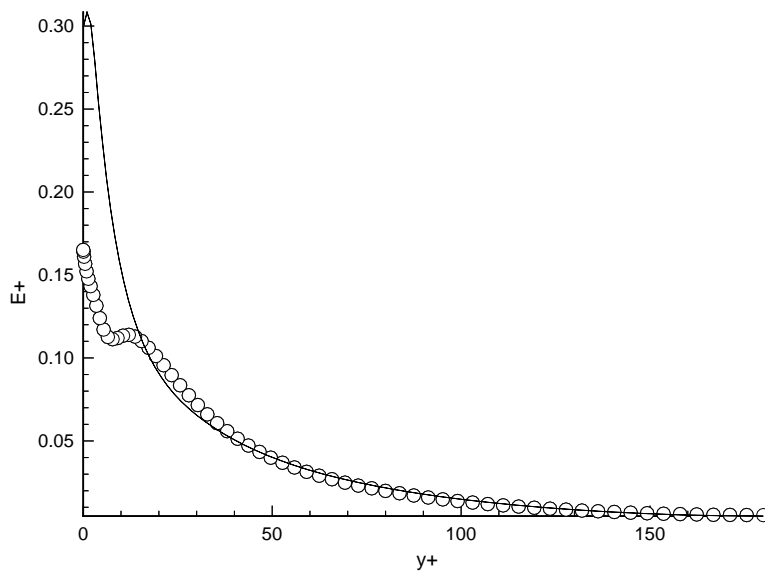


FIG. 8.62: Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_1 = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .



La contrainte de cisaillement du tenseur de Reynolds est surestimée à la paroi :

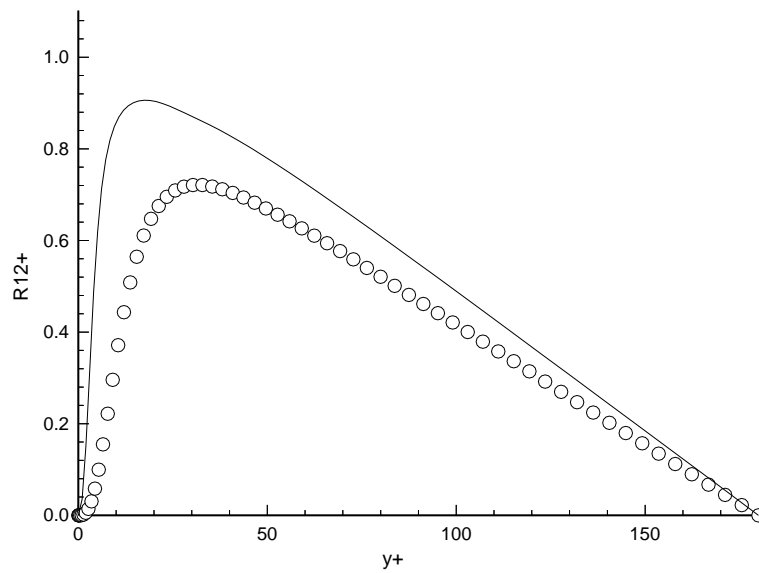


FIG. 8.63: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .

et les contraintes normales sont plus importantes que précédemment :

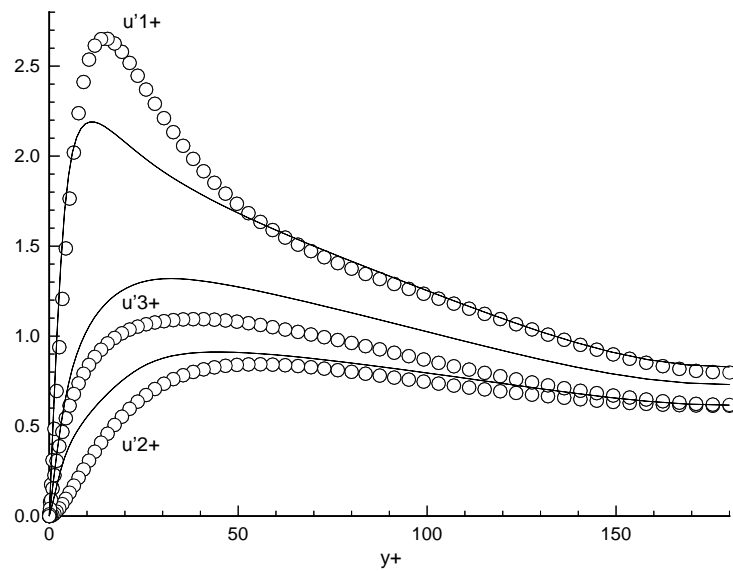


FIG. 8.64: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .

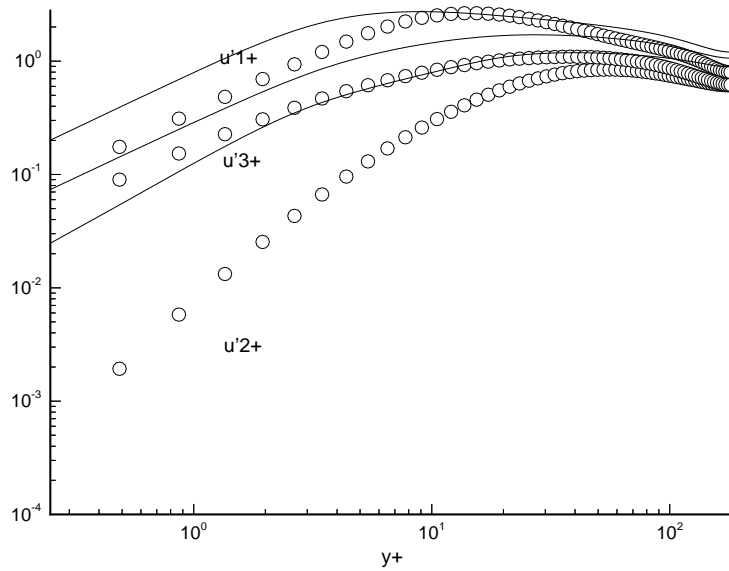


FIG. 8.65: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Comportement asymptotique. Modèle de Launder et Tselepidakis avec le taux de dissipation d'Hanjalic et Launder,  $c_I = 0$  et  $C_{w2} = 0.2$ .

La valeur de  $C_{w2}$  n'a pas été optimisée pour faire ces tests et est juste choisie pour montrer son influence sur le résultat obtenu. L'examen de cette solution en échelle logarithmique montre que les comportements asymptotiques de chacune des contraintes normales s'approchent de la même façon de la paroi et présentent par conséquent une allure similaire à celle du modèle linéaire de Shima.

## 8.5 Écoulement turbulent à faible nombre de Reynolds en présence de rotation

La configuration étudiée en présence de rotation correspond au cas des simulations directes de Kristoffersen et Andersson [69], pour lesquelles l'écoulement moyen en l'absence de rotation correspond approximativement au cas de Kim, Moin et Moser [68] présenté précédemment. Les difficultés de prédiction de l'écoulement de canal plan établi en l'absence de rotation avec les modèles non-linéaires rend l'examen de l'écoulement avec rotation moins justifié avec ces fermetures qu'avec le modèle linéaire. Les performances du modèle de Shima sont comparées aux données de Kristoffersen et Andersson pour deux des cas de rotation de ces simulations directes. Le premier cas correspond au plus petit nombre de Rossby ( $R_o = 0.05$ ) pour lequel l'action des forces de Coriolis ne peut plus être uniquement considérée comme une petite perturbation de l'écoulement sans rotation. Le second est le cas de rotation la plus intense proposée, soit  $R_o = 0.5$ . Les données sont adimensionnées par la vitesse débitante  $U_m$ . Les calculs sont effectués par la méthode couplée présentée au début de ce chapitre et qui assure à chaque itération la conservation du débit. Les maillages utilisés sont équivalents à ceux retenus en l'absence de

rotation. Il est intéressant dans un premier temps de comparer la résolution des modèles suivant les deux techniques imposées par les adimensionnalisations.

Le modèle de Chien, insensible à la présence de la rotation, admet, pour les mêmes paramètres de calculs que précédemment, l'évolution suivante des résidus, sur le maillage à 50 points dans le demi-canal :

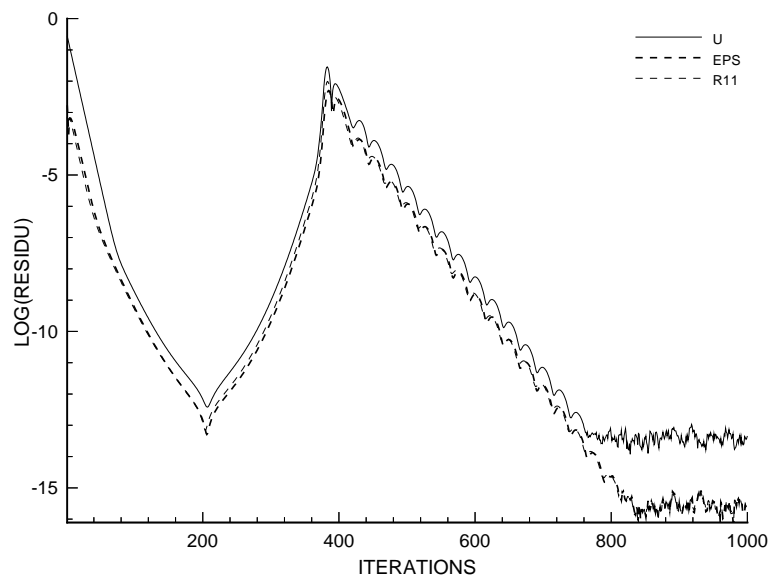


FIG. 8.66: Evolution des résidus. Modèle de Chien.

Le profil de vitesse moyenne dans le canal, adimensionné par la vitesse débitante, est le suivant :

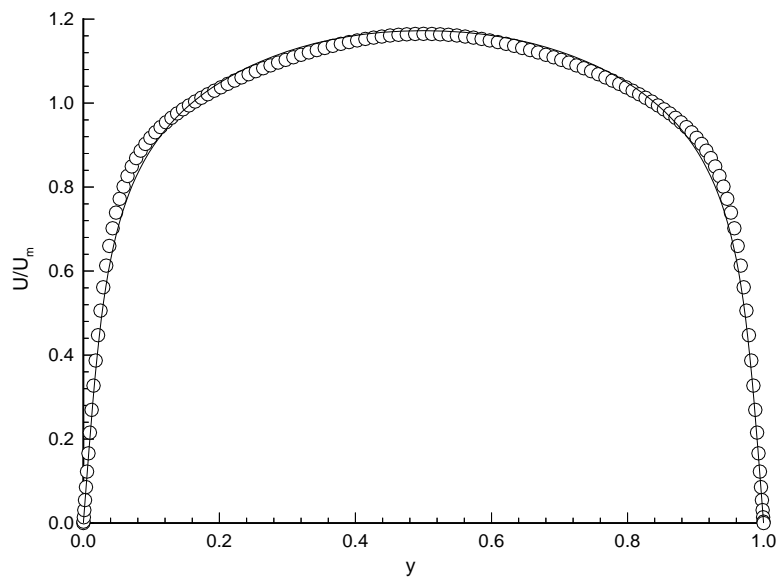


FIG. 8.67: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Chien.

Il faut noter que le nombre de Reynolds de l'écoulement proposé par Kim, Moin et Moser [68],  $Re_m = 5600.$ , correspond d'après les simulations directes à un rapport de la vitesse débitante sur la vitesse de frottement pariétal  $U_m/U_\tau$  voisin de 15.5. Le calcul effectué précédemment avec le modèle de Chien donne  $U_m/U_\tau = 16.3$ , ce qui explique le fait que la valeur de  $y^+$  au centre du canal sur ce calcul, ne soit pas exactement la même que dans les simulations de Kim, Moin

et Moser. Les résultats restent cependant très voisins des simulations directes :

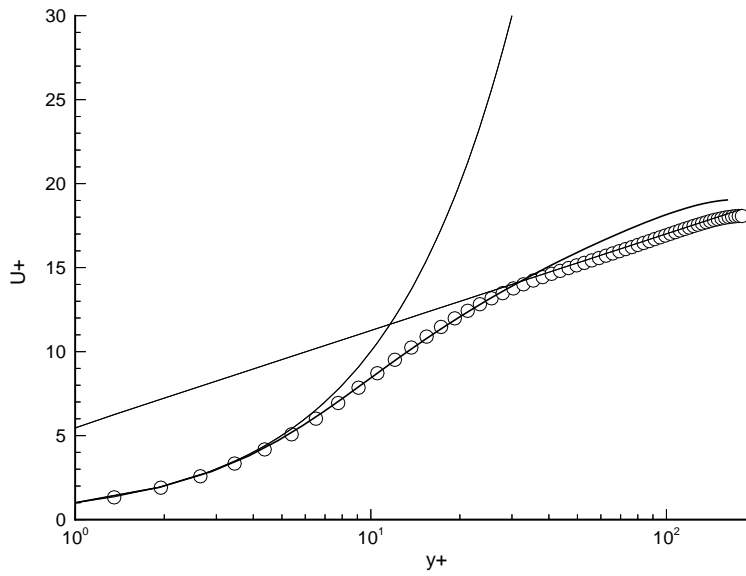


FIG. 8.68: *Loi logarithmique. Modèle de Chien.*

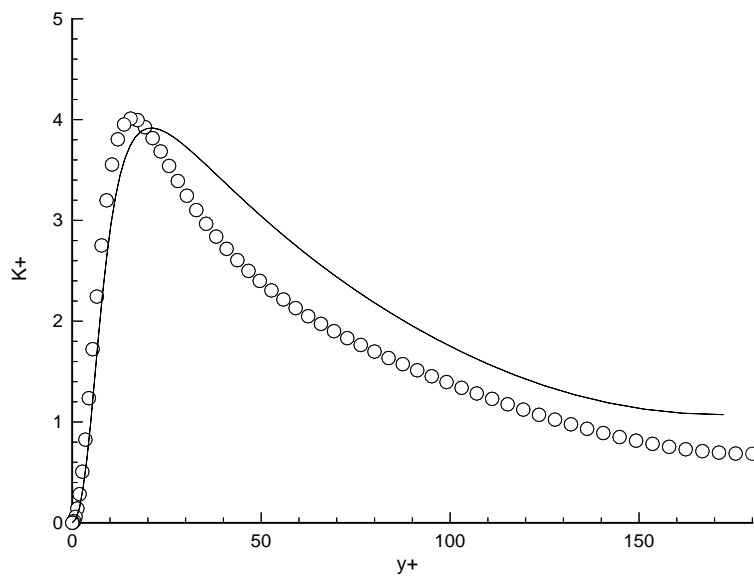


FIG. 8.69: *Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Chien.*

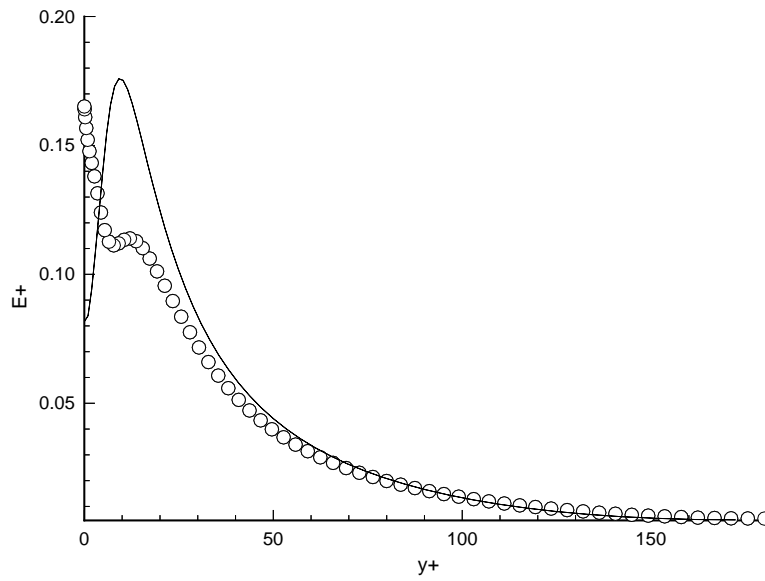


FIG. 8.70: Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Chien.

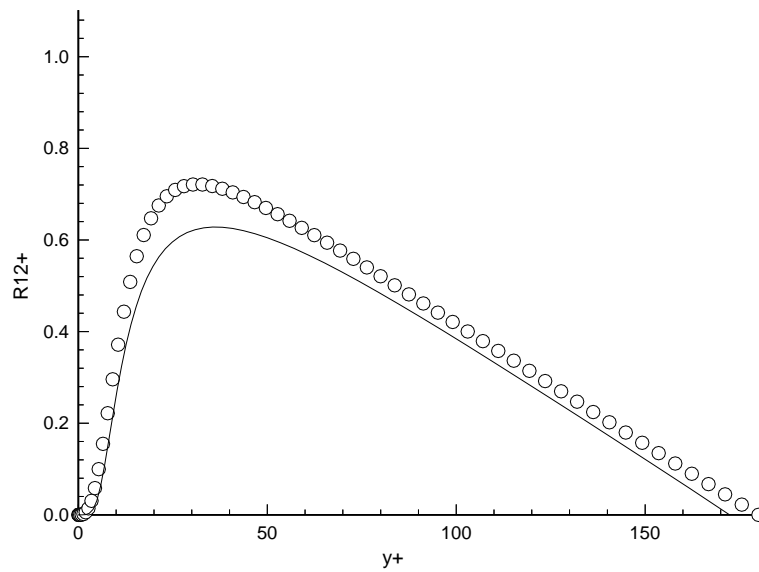


FIG. 8.71: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Chien.

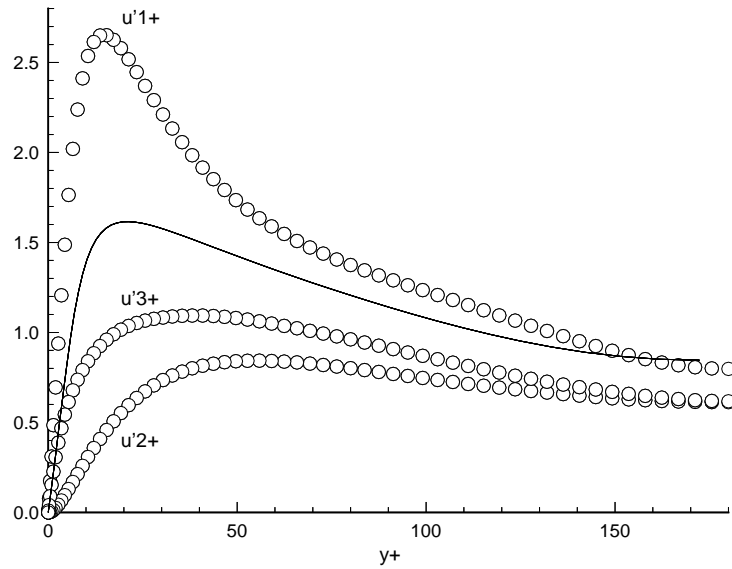


FIG. 8.72: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Chien.

La résolution du modèle de Shima, nécessite quant à elle un nombre moins important d'itérations pour réduire les résidus à la précision machine. Avec les mêmes paramètres que pour le calcul précédent, sur le maillage à 50 points dans le demi-canal, l'évolution des résidus est la suivante :

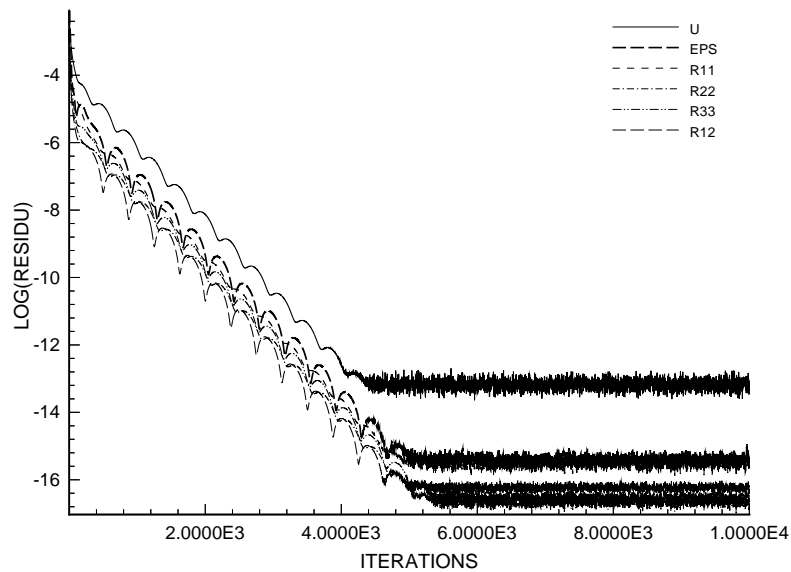


FIG. 8.73: Evolution des résidus. Modèle de Shima.



La résolution du modèle sur les maillages plus fins conduit aux mêmes évolutions des quantités de l'écoulement, qui restent voisins des calculs présentés au paragraphe précédent :

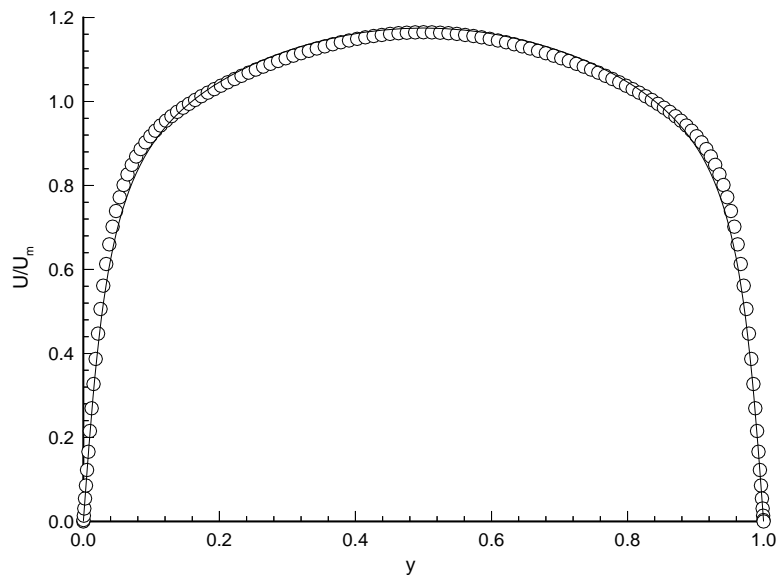


FIG. 8.74: Profil de vitesse moyenne dans le canal. Modèle de Shima.

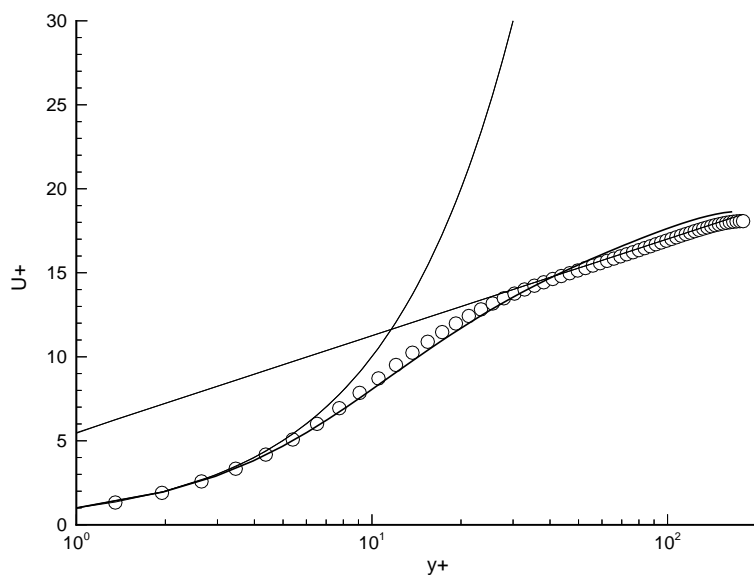


FIG. 8.75: Loi logarithmique. Modèle de Shima.

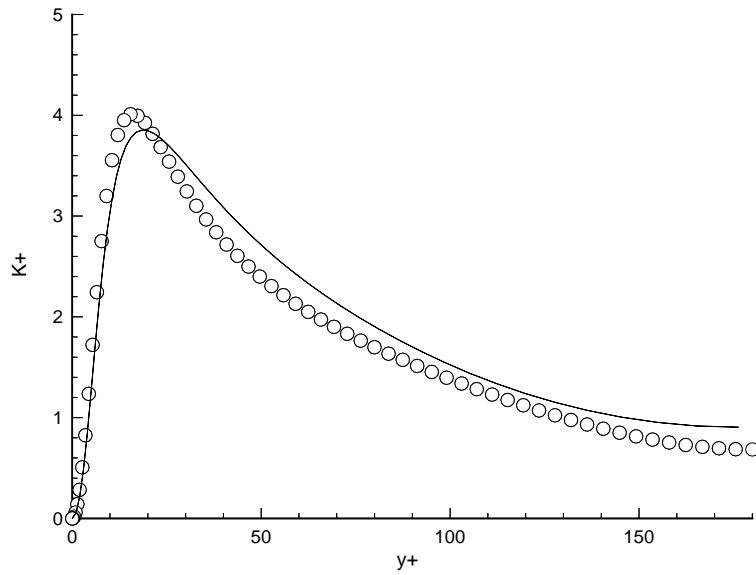


FIG. 8.76: *Energie cinétique turbulente  $K^+$ . Modèle de Shima.*

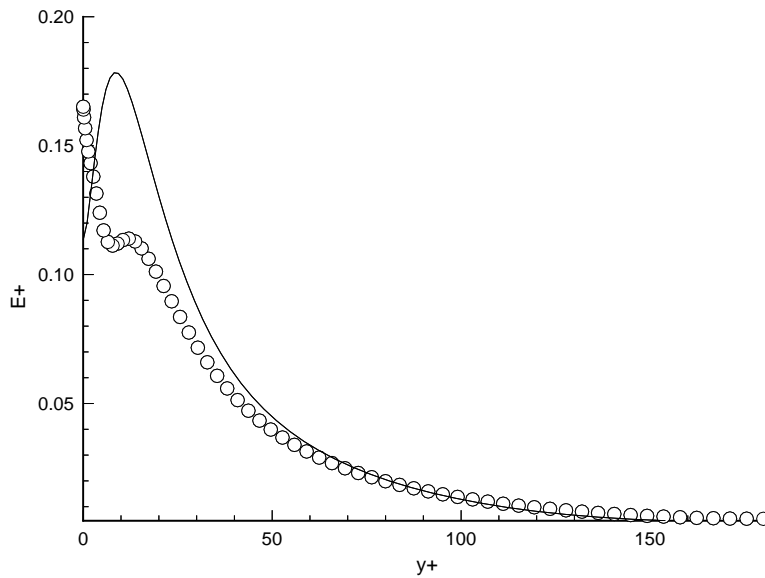


FIG. 8.77: *Taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente  $\varepsilon^+$ . Modèle de Shima.*

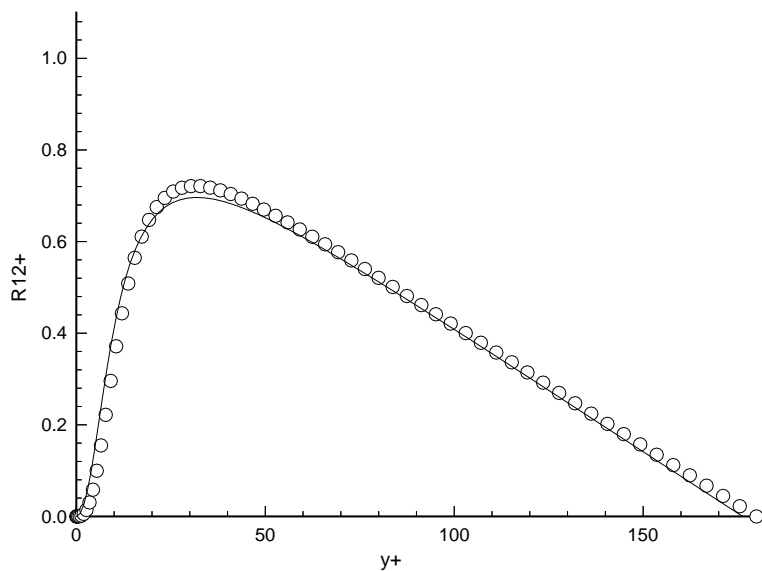


FIG. 8.78: Composante du cisaillement  $R_{12}^+$ . Modèle de Shima.

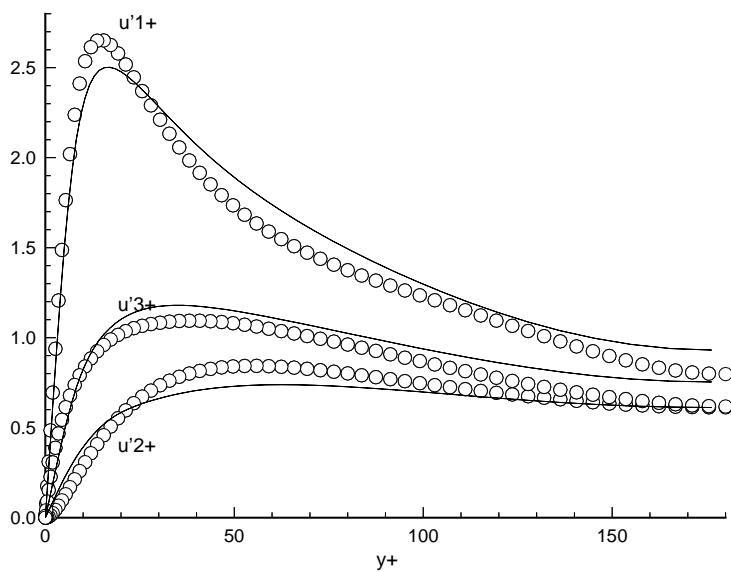


FIG. 8.79: Moyenne quadratique des fluctuations de vitesse. Modèle de Shima.

Le calcul de l'écoulement en présence de rotation est effectué avec le modèle de Shima, sur le même maillage. Le pas de temps utilisé est le même que précédemment et l'évolution des résidus

est la suivante pour l'intensité la plus importante de la rotation,  $R_o = 0.5$ , et le maillage à 50 points dans le demi-canal :

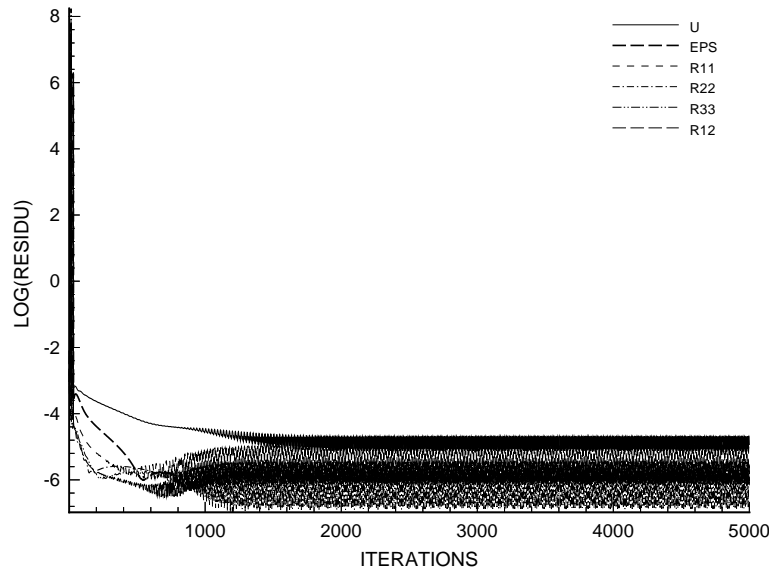


FIG. 8.80: Evolution des résidus en présence de rotation,  $R_o = 0.5$ .  
Modèle de Shima. Maillage symétrique.

Contrairement au calcul effectué en l'absence de rotation, les résidus saturent à un palier voisin de  $10^{-6}$ , loin de la précision machine atteinte précédemment. Cette saturation existe également sur les maillages plus fins. Elle est liée à la résolution des équations au voisinage de la paroi de suction, qui dans le cas d'une rotation intense entraîne une relaminarisation locale de l'écoulement. Les quantités turbulentes calculées dans cette région sont de faible intensité et les équilibres s'effectuent entre des valeurs numériques relativement petites. En adoptant un maillage dissymétrique, admettant une taille de première maille cinq fois plus grande sur la paroi de la zone de suction que sur la paroi de la zone de pression, cette saturation des résidus disparaît en effet. La figure ci-dessous donne un aperçu du maillage sur le profil de vitesse moyenne donné par le modèle de Chien, dont la résolution est tout à fait similaire à celle effectuée sur le maillage

symétrique.

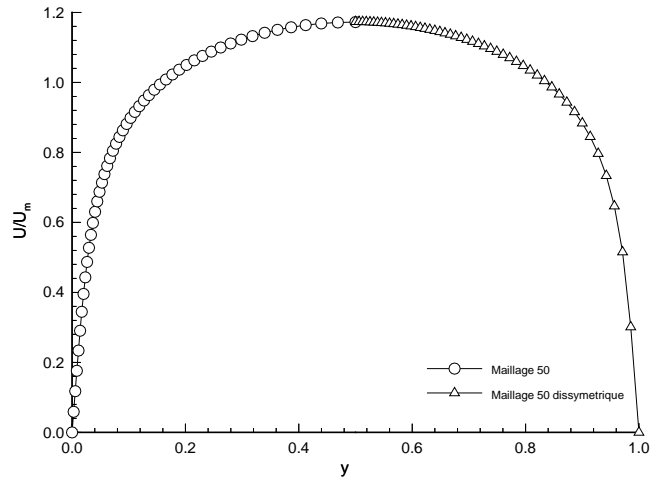


FIG. 8.81: *Maillage dissymétrique.*

Les résidus du modèle de Shima pour l'écoulement avec le nombre de rotation de  $R_o = 0.5$  sur ce maillage sont les suivants :

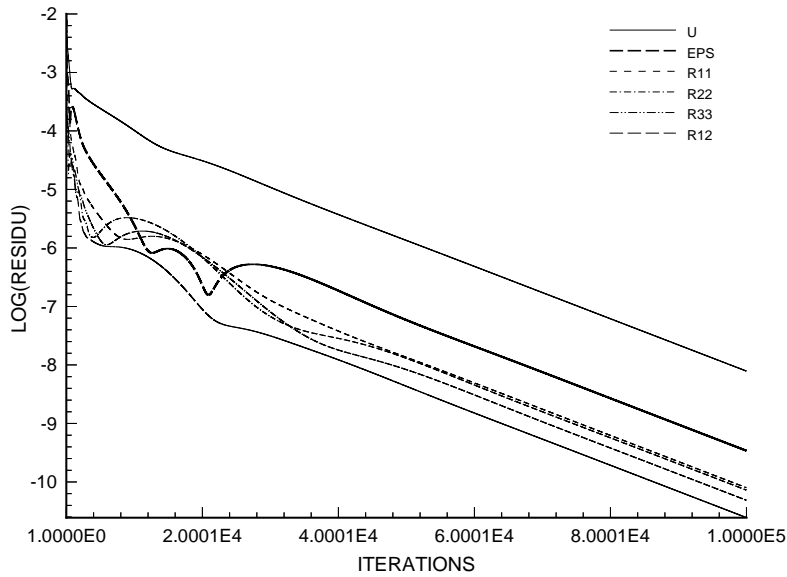


FIG. 8.82: *Evolution des résidus en présence de rotation,  $R_o = 0.5$ .  
Modèle de Shima. Maillage dissymétrique.*

Pour les mêmes paramètres de calcul, le nombre d'itérations nécessaire à la résolution des équations est plus important sur ce maillage dissymétrique, mais conduit à une allure générale

de la solution identique à celle effectuée sur le maillage symétrique. Les évolutions des quantités de l'écoulement sont ici présentées sur le maillage symétrique.

La présence de la rotation conduit à une dissymétrie de l'écoulement moyen et des quantités turbulentes à travers le canal, qui est relativement bien restitué par le modèle de Shima. L'évolution du profil de vitesse moyenne est la suivante :

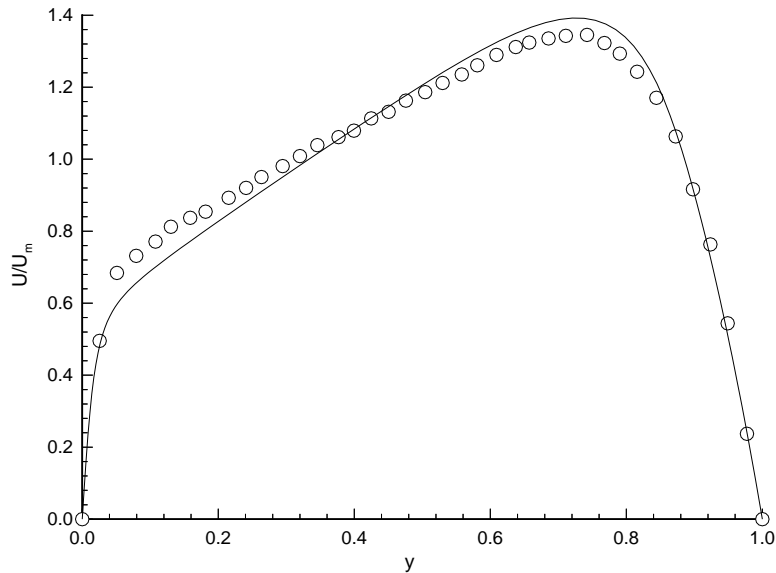


FIG. 8.83: *Profil de vitesse moyenne dans le canal en présence de rotation.  $R_o = 0.5$ . Modèle de Shima.*

La zone linéaire du milieu du profil, correspondant à une région de vortacité absolue nulle et par conséquent de pente  $2\Omega$  est légèrement surestimée par le modèle de Shima. Les lois de parois

évoluent suivant :

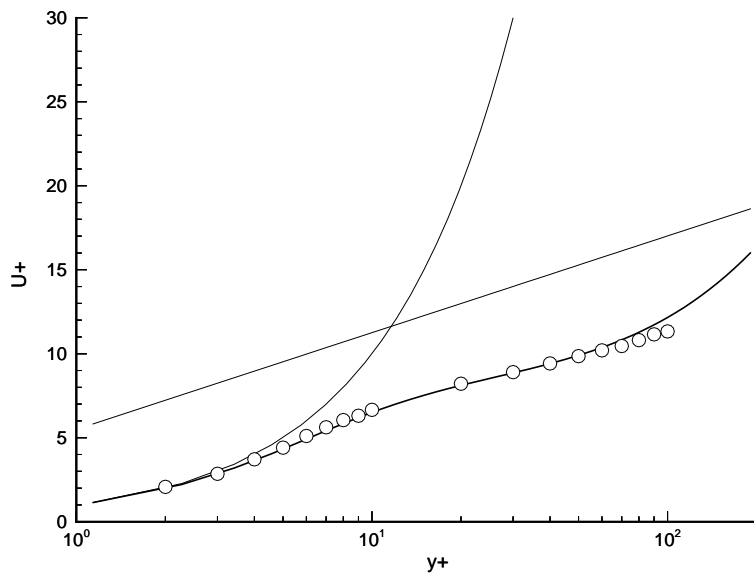


FIG. 8.84: Loi logarithmique. Côté de pression.  $R_o = 0.5$ . Modèle de Shima.

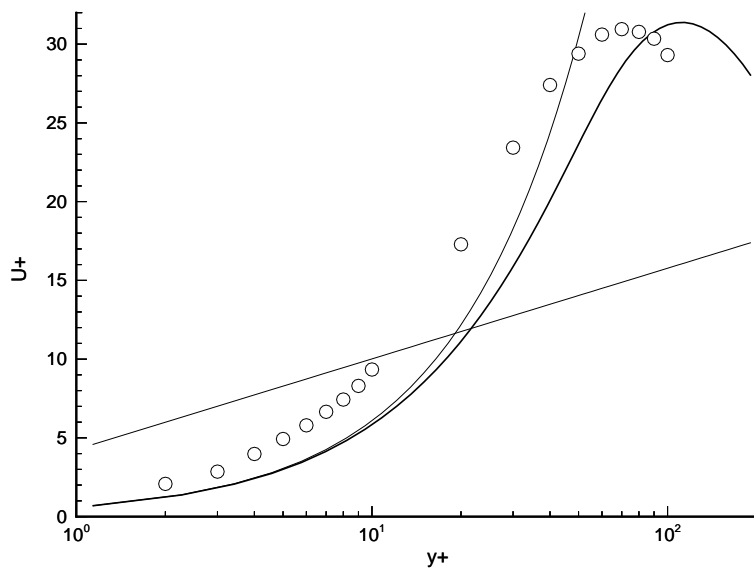


FIG. 8.85: Loi logarithmique. Côté de suction.  $R_o = 0.5$ . Modèle de Shima.

L'énergie cinétique turbulente montre une influence importante de la force de Coriolis sur son

évolution dans le canal. La dissymétrie est due principalement au cisaillement turbulent, dont l'intensité est plus importante sur la surface de pression (valeur négative) et est réduite sur la surface de succion (valeur positive), contribuant respectivement à augmenter et diminuer l'intensité de l'énergie cinétique turbulente.

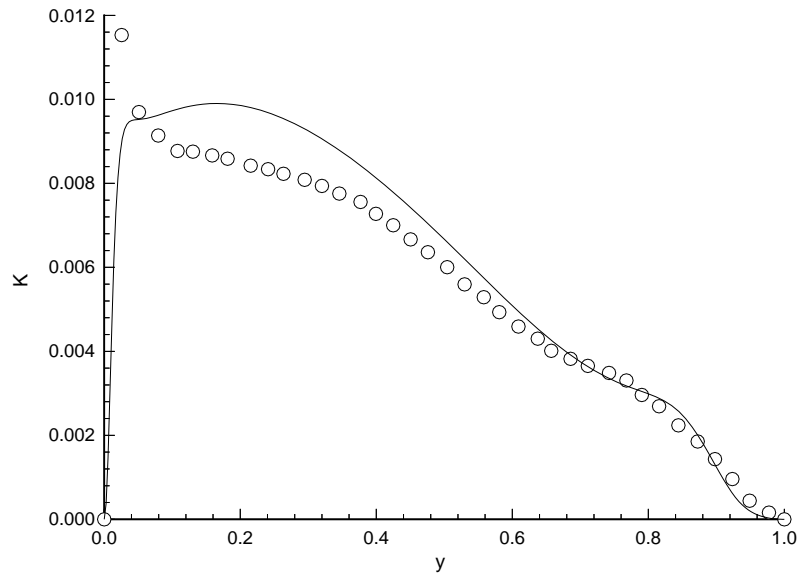


FIG. 8.86: *Energie cinétique turbulente.  $R_o = 0.5$ . Modèle de Shima.*

Les variables sont tracées suivant l'adimensionnalisation de  $U_m$ . Le profil du cisaillement turbu-



lent est fortement affecté par la présence de la rotation :

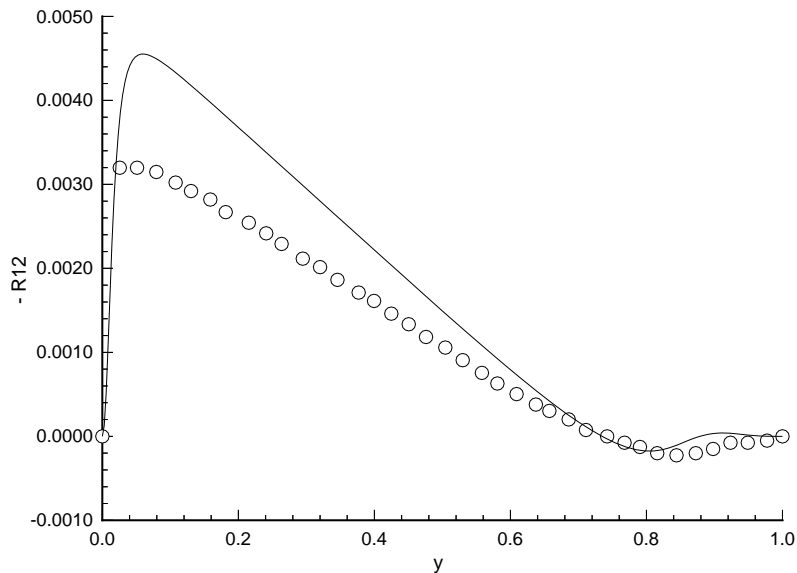


FIG. 8.87: *Composante du cisaillement.  $R_o = 0.5$ . Modèle de Shima.*

D'une manière générale, les contraintes normales du tenseur de Reynolds montrent les mêmes caractéristiques que l'énergie cinétique turbulente :

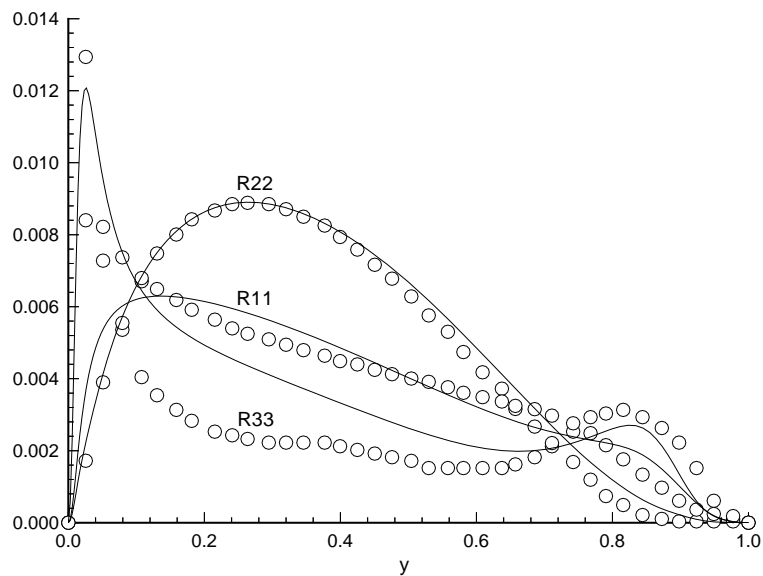


FIG. 8.88: *Contraintes normales du tenseur de Reynolds.  $R_o = 0.5$ . Modèle de Shima.*

Le niveau des contraintes est globalement augmenté du côté de pression alors que les maxima d'intensité sont déplacés vers l'intérieur du canal du côté de suction. Le terme de Coriolis a tendance à provoquer une dégénérescence de l'écoulement vers l'état laminaire au voisinage de la surface de suction.

La physique moins contraignante pour le modèle associée au nombre de Rossby plus faible,  $R_o = 0.05$ , permet de résoudre les équations de façon satisfaisante sur le maillage symétrique. Avec les mêmes paramètres de calcul, les évolutions des résidus sont les suivantes :

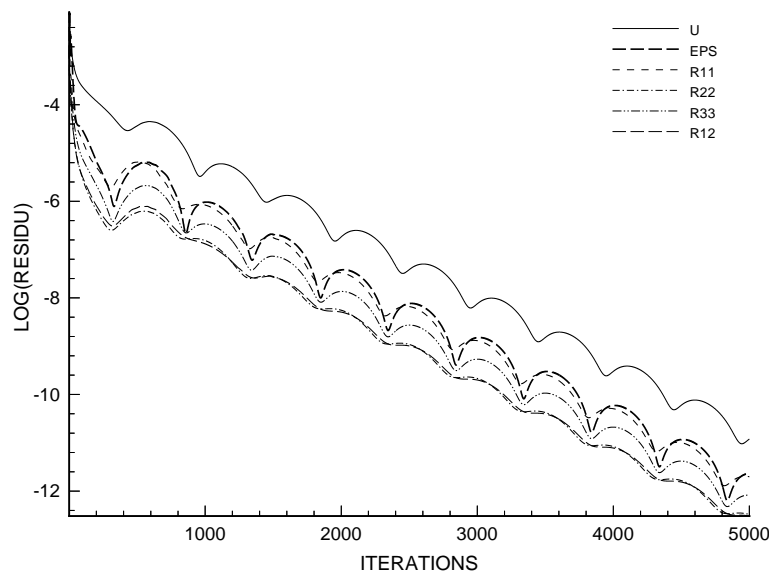


FIG. 8.89: Evolution des résidus en présence de rotation,  $R_o = 0.05$ .  
Modèle de Shima. Maillage symétrique.

Les tendances générales des évolutions des quantités turbulentes sont les mêmes que dans le cas

précédent et restent relativement bien restituées par le modèle de Shima.

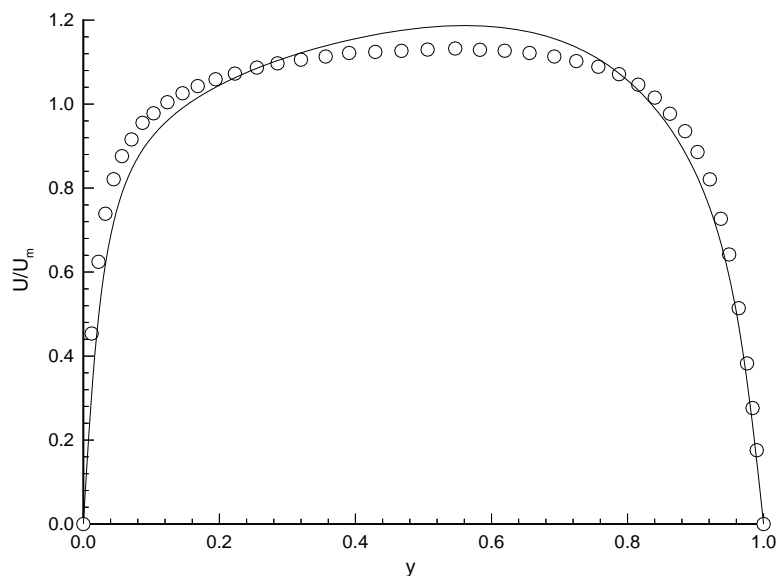


FIG. 8.90: Profil de vitesse moyenne dans le canal en présence de rotation.  $R_o = 0.05$ . Modèle de Shima.

Le profil calculé par le modèle accuse une influence plus marquée de la rotation que les profils de vitesse moyenne des simulations directes.

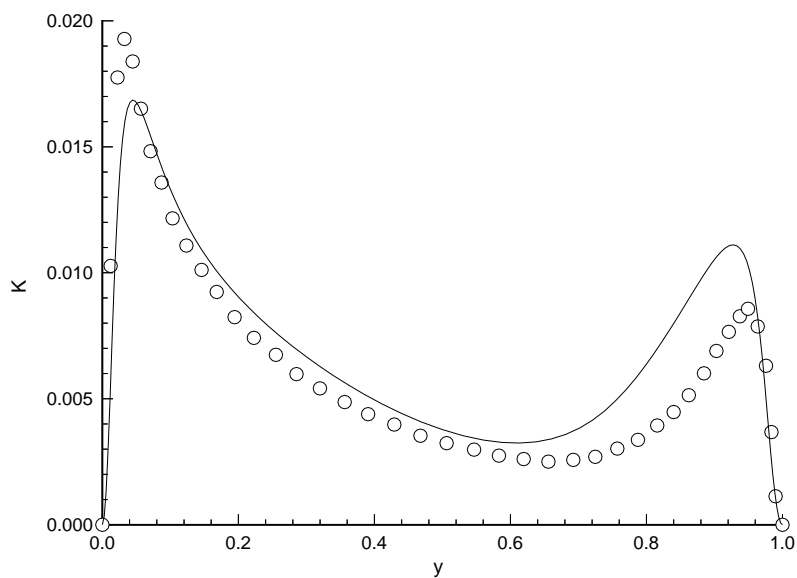


FIG. 8.91: Energie cinétique turbulente.  $R_o = 0.05$ . Modèle de Shima.

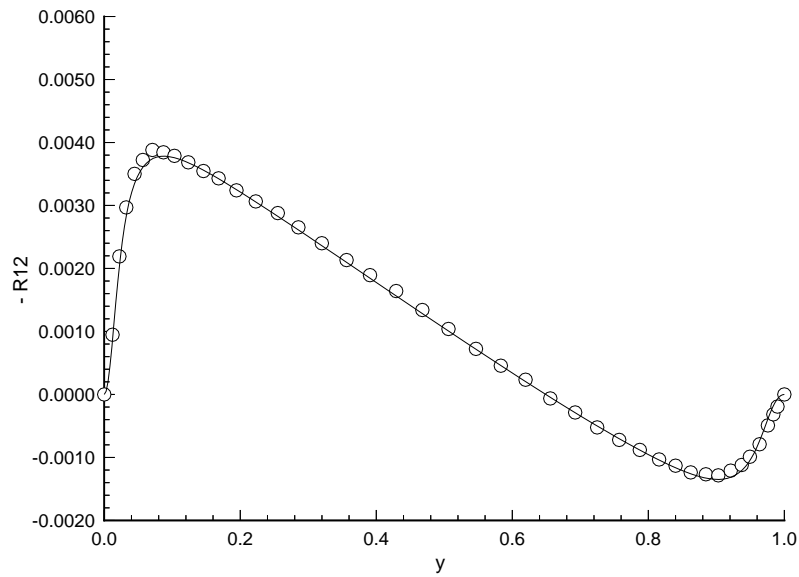


FIG. 8.92: Composante du cisaillement.  $R_o = 0.05$ . Modèle de Shima.

L'évolution du cisaillement est globalement bien restituée, mais la valeur du cisaillement semble légèrement trop importante au voisinage de la zone de suction par rapport aux simulations directes.

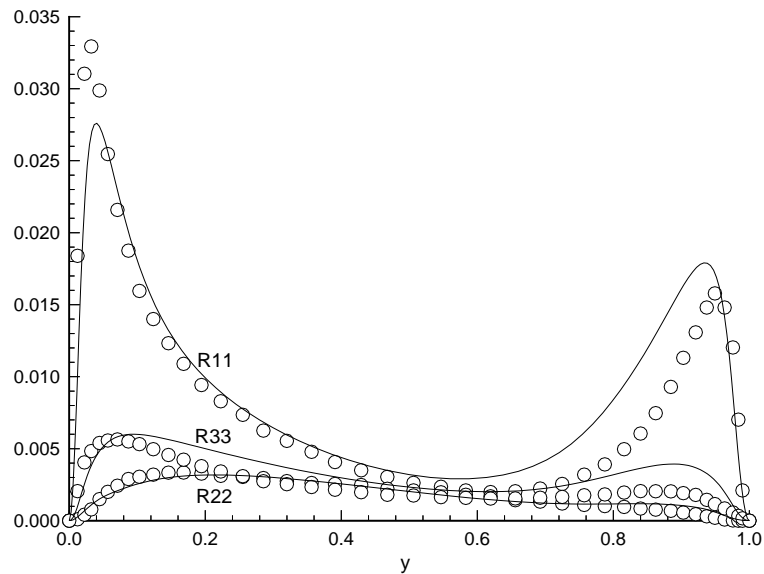


FIG. 8.93: Contraintes normales du tenseur de Reynolds.  $R_o = 0.05$ . Modèle de Shima.

Les composantes normales du tenseur de Reynolds ont tendance à être sous-estimées au voisinage de la paroi de pression et inversement sur-estimées du côté de suction.

Le modèle de Shima [140] a montré un comportement relativement satisfaisant sur l'ensemble des configurations bas-Reynolds étudiées dans ce chapitre. La résolution de ces équations nécessite évidemment un effort un peu plus important que le modèle bas-Reynolds à deux équations de transport de Chien [24]. Bien que l'écoulement du canal plan établi soit une configuration relativement simple, la résolution des modèles non-linéaires de Launder et Tselepidakis [79] et de Craft et Launder [32] est plus délicate que celle du modèle de Shima. La nécessité de modifier les expressions du tenseur des taux de dissipation dans le modèle de Launder et Tselepidakis et du terme lent dans le modèle de Craft et Launder incite à effectuer la validation d'un modèle du second ordre bas-Reynolds dans le cas tridimensionnel avec le modèle de Shima, ce qui est présenté dans le chapitre suivant.

---

## Chapitre 9

# Mise en oeuvre d'un modèle au second ordre

### 9.1 Présentation du code de calcul Horus et conventions

Ce chapitre présente la validation du modèle de Shima [140] dans le code de calcul Horus développé par le groupe de modélisation numérique du laboratoire de mécanique des fluides de l'école centrale de Nantes, sur la configuration du canal tridimensionnel de Davis et Gessner [40].

Les équations sont traitées par une transformation partielle dans laquelle les coordonnées curvilignes définissent les variables indépendantes et les composantes cartésiennes de la vitesse et la pression sont retenues comme variables dépendantes. Le code utilise plusieurs types de modèles de turbulence, depuis les modèles algébriques sans équation de transport (Baldwin et Lomax [4]), ceux à une équation de transport (Baldwin et Barth [3]), aux modèles à deux équations, de type  $K - \varepsilon$  (Chen et Patel [23], Nagano et Tagawa [98], Deng et Piquet [42]) ou de type  $K - \omega$  (Wilcox [176], Menter [95] [96]), jusqu'aux modèles au second ordre (Shima [140], Craft et Launder [32] [33], actuellement en cours de validation). Afin d'éviter l'utilisation de lois de paroi dans le contexte d'un écoulement tridimensionnel, l'ensemble des modèles de turbulence est formulé avec des extensions à faible nombre de Reynolds pour traiter le voisinage des parois.

Les équations sont discrétisées sous forme convective par des schémas aux différences finies, à l'exception de l'équation de continuité, traitée sous forme conservative par une méthode de type volume fini. Les variables dépendantes, c'est-à-dire la pression, la vitesse et les quantités turbulentes sont localisées au même point, au centre des cellules du maillage.

Le couplage vitesse-pression est résolu par une méthode PISO, de type correction de pression avec la technique de Rhie et Chow [113] de reconstruction des flux aux interfaces des cellules. Les systèmes linéaires sont calculés par des méthodes de gradient conjugué, de type CGS, avec un préconditionnement de type LU incomplet.

La localisation des inconnues est présentée ci-dessous avec les conventions de repérage des points du maillage et des variables dépendantes. Le maillage définit un réseau structuré de points. Le nombre total de points est noté  $\mathbf{NG}$  et est donné par le nombre de points par direction de maillage :

$$\mathbf{NG} = \mathbf{NG1} \times \mathbf{NG2} \times \mathbf{NG3}$$

La numérotation en indice déroulé est définie à partir des indices attachés aux directions du

maillage, soit :

$$(I, J, K) = I + (J-1) \times NG1 + (K-1) \times NG1 \times NG2$$

Les variables dépendantes, positionnées au centre des cellules du maillage, sont la pression et les composantes des vecteurs et tenseurs des modèles, dans le repère de référence. Ce sont des variables *cell-centered*. Les volumes de contrôle sont délimités par les lignes matérielles du réseau du maillage. Il existe  $NI = NGI + 1$  point de localisation des variables dépendantes par direction  $I$  du maillage. Le repérage d'un point cell-centered s'effectue de la façon suivante, en indice déroulé ( $L$ ) (figure 9.1) ou non déroulé ( $I, J, K$ ) (figure 9.2) :

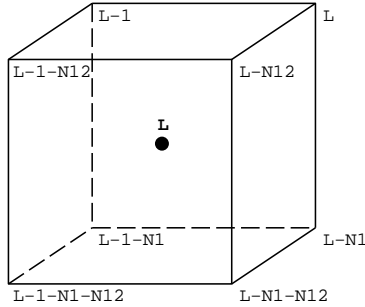


FIG. 9.1: Indices déroulés

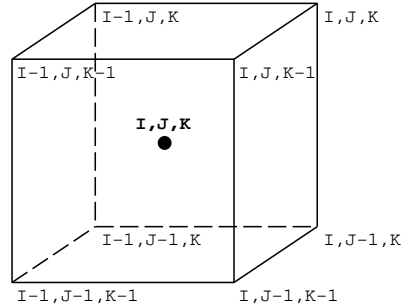


FIG. 9.2: Indices de boucles

Les indices cell-centered sont en gras et  $N12$  désigne le produit  $N1 \times N2$ . Un bilan de flux dans une cellule nécessite l'évaluation des quantités de l'écoulement aux interfaces des volumes de contrôle. Ces quantités, désignées comme variables secondaires, ne sont pas directement accessibles puisque les inconnues sont localisées aux centres des cellules. Elles doivent donc être reconstruites, à l'aide d'une interpolation s'appuyant sur les variables primaires cell-centered voisines. Localement, pour une cellule donnée, les quantités primaires sont indicées  $C$ , et les quantités interfaciales repérées par les conventions suivantes (figure 9.3) :

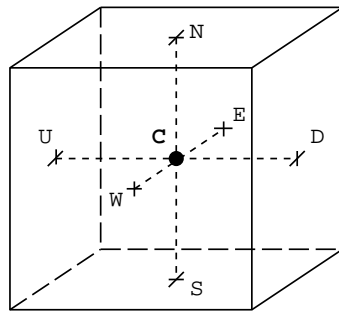


FIG. 9.3: Repérage local des interfaces

La numérotation des noeuds voisins peut être désignée globalement par les conventions suivantes, où  $NNN$  désigne le centre de la cellule de référence. La lettre  $P$  augmente l'indice dans une direction,  $M$  le diminue et  $N$  le laisse inchangé. Une cellule à cinq points est ainsi repérée localement par

(figure 9.4):

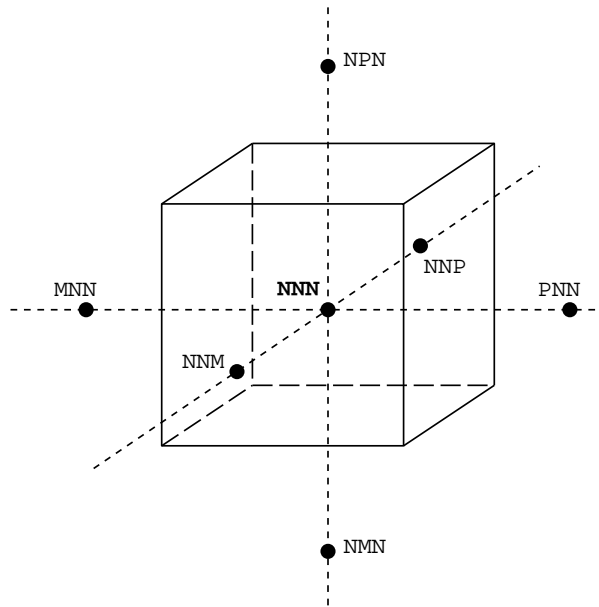


FIG. 9.4: *Repérage local des inconnues voisines*

La notation de l'ensemble des cellules adjacentes est ainsi facilement accessible.

L'écriture des équations du mouvement est présentée dans les deux paragraphes suivants. L'expression des principaux opérateurs intervenant dans la transformation partielle des équations en coordonnées curviligne est rappelée dans un premier temps. La formation des opérateurs de convection-diffusion est présentée ensuite dans le plan physique et dans le plan de calcul. Les principales particularités numériques associées au traitement d'un modèle au second ordre sont ensuite mentionnées ce qui conduit à préciser le traitement du couplage vitesse-pression-turbulence présent dans les équations [43]. La validation du modèle de Shima [140] sur le cas test de Davis et Gessner [40] est présentée en fin de chapitre.

## 9.2 Présentation d'un système de coordonnées curvilignes

Le recours à un système de coordonnées curvilignes pour traiter les géométries complexes présente l'avantage de simplifier le plan de calcul et par suite de faciliter le traitement des conditions aux limites.

Deux systèmes de coordonnées sont utilisés. Le système de référence est le système de coordonnées du plan physique  $X^i$ , et est orthogonal. Le système de coordonnées curvilignes correspond au plan de calcul  $\xi^i$ . La variation d'un point décrite par le vecteur  $R$  s'écrit dans le système de référence par :

$$dR = dX^i e_i \quad (9.1)$$

où les vecteurs  $e_i$  définissent la base de référence. Elle est supposée orthogonale, mais la direction et la norme de ses vecteurs de base sont susceptibles de bouger avec le point de coordonnée. Dans le système de coordonnées curvilignes, la variation du vecteur de coordonnées  $R$  s'écrit :

$$dR = \frac{\partial R}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (9.2)$$



La base curviligne dont les vecteurs sont tangents aux lignes de coordonnées  $\xi^i$  est donc définie par :

$$g_i = \frac{\partial R}{\partial \xi^i} \quad (9.3)$$

Il s'agit d'une base non-locale, qui n'est pas orthogonale.

$$dR = d\xi^i g_i \quad (9.4)$$

Cette base est covariante.

### 9.2.1 Expression des bases

#### Métriques covariantes et contravariantes

Le vecteur de base curviligne covariant est défini par :

$$g_i = \frac{\partial R}{\partial \xi^i} \quad (9.5)$$

La base réciproque ou contravariante est formée par les vecteurs contravariants, définis par le produit mixte :

$$g^i = \frac{1}{J} (g_j \wedge g_k) \quad (9.6)$$

où les indices  $(i, j, k)$  sont cycliques et  $J$  désigne le Jacobien de la transformation curviligne. Ce sont des gradients vecteurs.

Les bases covariante et réciproque satisfont :

$$g_i g^j = \delta_i^j \quad (9.7)$$

où  $\delta_i^j$  est le symbole de Kronecker.

Les produits scalaires des vecteurs de chacune des bases forment les tenseurs métriques. Le tenseur métrique covariant est donc défini par :

$$g_{ij} = g_i g_j \quad (9.8)$$

et le tenseur métrique contravariant par :

$$g^{ij} = g^i g^j \quad (9.9)$$

#### Composantes covariantes et contravariantes

Les composantes covariantes (respectivement contravariantes) des tenseurs sont obtenues par projection sur les bases covariantes (respectivement contravariantes). Ainsi les composantes covariantes sont associées à la base covariante, et réciproquement. Les composantes contravariantes et covariantes de vitesses sont définies par :

$$U^i = U g^i \quad (\text{composantes contravariantes}) \quad (9.10a)$$

$$U_i = U g_i \quad (\text{composantes covariantes}) \quad (9.10b)$$

si bien que le vecteur vitesse s'écrit :

$$U = U^i g_i \quad (9.11)$$

### Composantes physiques

Les vecteurs de base sont dimensionnels et dépendent des points où ils sont évalués. Les bases se déforment et la norme des vecteurs de base varient avec la localisation. Il peut être intéressant dans certains cas de définir des bases normées, afin que les composantes qui résultent de la projection d'une quantité sur cette base aient toutes les mêmes dimensions. Une telle base normée facilite l'accès aux composantes physiques et sont nommées bases physiques.

La base physique covariante est donc définie par :

$$g_{(i)} = \frac{g_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (9.12)$$

Sa base réciproque est associée à la base contravariante par :

$$g^{(i)} = g^i \sqrt{g_{ii}} \quad (9.13)$$

La base adimensionnelle contravariante peut également être définie, bien qu'elle présente d'un point de vue physique un intérêt moindre. Il vient :

$$g^{[i]} = \frac{g^i}{\sqrt{g^{ii}}} \quad (9.14)$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésien, la base physique est identique à la base classique. Ce n'est pas le cas d'un système de coordonnées cylindrique ou sphérique où les vecteurs de base, bien qu'ils soient orthogonaux, changent de norme suivant leur localisation. Si de tels systèmes forment le système de référence, il peut donc être intéressant d'évaluer les équations dans les bases physiques.

### 9.2.2 Dérivées

#### Symboles de Christoffel

La variation des vecteurs de base covariants par rapport au système de coordonnées curvilignes se met sous une forme simple en utilisant les symboles de Christoffel. Elle s'écrit en effet :

$$\frac{\partial g_i}{\partial \xi^j} = \Gamma_{ij}^n g_n \quad (9.15)$$

La dérivée d'un vecteur de base covariant étant par ailleurs la dérivée seconde du vecteur de coordonnée, il est clair que le symbole  $\Gamma_{ij}^n$  est symétrique par rapport à ses indices  $i$  et  $j$ . Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs. Ils définissent une connection. Ils s'expriment aisément en fonction des métriques covariantes et contravariantes :

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} g^{mn} \left[ \frac{\partial g_{mi}}{\partial \xi^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial \xi^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial \xi^m} \right] \quad (9.16)$$

L'une des propriétés importantes du symbole de Christoffel est la relation résultant de la dérivée du produit mixte des vecteurs covariants :

$$\Gamma_{in}^i = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^n} (J) \quad (9.17)$$

où  $J$  est le Jacobien de la transformation.

### Dérivées covariantes

Les variations spatiales des composantes contravariantes ou covariantes doivent prendre en compte le fait que les vecteurs de base covariants évoluent avec les coordonnées. Ceci est effectué en introduisant les dérivées covariantes des composantes contravariantes ou covariantes. Dans le cas d'un vecteur, elles s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial T}{\partial \xi^i} = \nabla_i T^k g_k \quad (9.18a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi^i} = \nabla_i T_k g^k \quad (9.18b)$$

et valent :

$$\nabla_i T^k = \frac{\partial T^k}{\partial \xi^i} + \Gamma_{ij}^k T^j \quad (9.19a)$$

$$\nabla_i T_k = \frac{\partial T_k}{\partial \xi^i} - \Gamma_{ki}^j T_j \quad (9.19b)$$

Les dérivées covariantes des composantes contravariantes font intervenir les symboles de Christoffel en une somme, alors qu'ils interviennent par des soustractions pour les composantes covariantes. Ceci est extensible à la dérivée covariante de toute composante covariante ou contravariante d'un tenseur d'ordre quelconque.

### Théorème de Ricci

Le théorème de Ricci énonce que les dérivées covariantes des tenseurs métriques covariants ou contravariants sont nulles.

$$\nabla_k g_{ij} = 0 \quad (9.20a)$$

$$\nabla_k g^{ij} = 0 \quad (9.20b)$$

### 9.2.3 Expression des opérateurs différentiels usuels

Les dérivées covariantes précédentes permettent d'accéder à l'expression des gradients de tenseurs. Pour un scalaire, il vient :

$$\text{grad}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} g^k \quad (9.21)$$

L'ensemble des expressions nécessaires à l'établissement des équations de Navier Stokes en coordonnées curvilignes n'est pas passé systématiquement en revue ici. Les opérateurs sont appliqués aux tenseurs d'ordre le plus faible possible, à titre d'exemple.

### Divergence

La divergence d'un vecteur est définie par :

$$\text{div}(T) = \frac{1}{J} \frac{\partial (JT^i)}{\partial \xi^k} \quad (9.22)$$

Cette forme conservative est utilisée dans le cas des écoulements incompressibles pour évaluer l'équation de continuité.

### Laplacien

Le laplacien d'un scalaire s'écrit sous forme conservative :

$$\Delta(\phi) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( J g^{ij} \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \right) \quad (9.23)$$

soit encore, en développant :

$$\Delta(\phi) = g^{ij} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + f^k \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \quad (9.24)$$

avec

$$f^k = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( J g^{ij} \right) \quad (9.25)$$

En pratique, il peut être préférable de travailler non pas avec les tenseurs métriques  $g^{ij}$ , mais à partir des vecteurs de base contravariants normés par le Jacobien :

$$b^i = J g^i \quad (9.26)$$

La décomposition de ces vecteurs sur la base de référence est notée

$$b^i = b_k^i e_k \quad (9.27)$$

Le tenseur métrique contravariant est quant à lui évalué par :

$$g^{ij} = \frac{1}{J^2} b_k^i b_k^j \quad (9.28)$$

Il faut noter que ces composantes satisfont la relation dite de compatibilité métrique :

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} (b_j^i) = 0 \quad (9.29)$$

avec sommation sur  $i$ . Par conséquent la transformation du gradient d'un scalaire devient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \frac{1}{J} b_i^j \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \quad (9.30a)$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (b_i^j \phi) \quad (9.30b)$$

Ces expressions permettent d'évaluer les coefficients métriques intervenant dans une dérivée seconde partielle :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{1}{J^2} b_i^n b_j^m \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^n \partial \xi^m} + f_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \quad (9.31)$$

L'expression conservative de  $f_{ij}^k$  fait également jouer la relation de compatibilité métrique, et s'écrit :

$$f_{ij}^k = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^n} \left( \frac{1}{J} b_i^n b_j^k \right) \quad (9.32)$$

Ces termes interviennent dans l'évaluation des tenseurs de diffusion des équations de transport au second ordre. Le choix d'une forme conservative ou convective est important d'un point de vue discret dans la mesure où les métriques ne sont pas nécessairement évaluées au même point dans les deux formulations, suivant le positionnement des variables primitives, le principe étant de ne pas interpoler les métriques de sorte d'assurer de façon discrète la relation de compatibilité métrique.

## 9.3 Formation des opérateurs de convection-diffusion

### 9.3.1 Plan physique

Les équations du mouvement sont décrites dans un système de coordonnées de référence orthogonal. La vitesse et le tenseur de Reynolds sont projetés dans la base covariante physique associée, si bien que les équations font intervenir leurs composantes contravariantes physiques. La base covariante physique ( $g^{(i)}$ ) diffère de la base covariante classique ( $g^i$ ) par les facteurs d'échelle  $h_i$  permettant d'obtenir des composantes physiques qui y sont projetées qu'elles soient toutes de la même dimension. Dans le cas d'un système de référence cartésien, ces facteurs d'échelle sont unitaires, si bien que la base physique et la base classique sont identiques. Ce n'est pas le cas d'un système de référence cylindrique pour lequel l'introduction d'un facteur  $1/r$  est nécessaire. L'équation de continuité s'écrit :

$$\nabla_{(i)} U^{(i)} = 0 \quad (9.33)$$

où  $\nabla_{(i)}$  désigne la  $i^{\text{e}}$  composante de la dérivée covariante d'un vecteur, dérivée dont l'expression est donnée en annexe R. L'équation du mouvement moyen se note quant à elle :

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + U^{(k)} \nabla_{(k)} U^{(i)} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{(i)} P + \nabla_{(j)} R^{(ij)} + \nu \Delta U^{(i)} \quad (9.34)$$

où  $\Delta$  désigne le laplacien vectoriel dans la base covariante, et les équations de la turbulence décrite par un modèle au second ordre s'écrivent :

$$\frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + U^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(ij)} = P^{(ij)} - \varepsilon^{(ij)} + \phi^{(ij)} + \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} \quad (9.35a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U^{(k)} \nabla_{(k)} \varepsilon = P^\varepsilon - \varepsilon^\varepsilon + \phi^\varepsilon + \nabla_{(k)} T^{(k)\varepsilon} \quad (9.35b)$$

Les tenseurs  $P^{(ij)}$ ,  $\varepsilon^{(ij)}$  et  $\phi^{(ij)}$  sont les termes de production, de dissipation et de redistribution des corrélations doubles de vitesse. Le tenseur  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  regroupe les tenseurs de diffusion turbulente, par les fluctuations de pression et de vitesse, et le terme de diffusion visqueuse.

Les notations sont analogues pour l'équation du taux de dissipation. Seuls les termes de convection-diffusion sont intéressants dans un premier temps, pour former les équations du système, ce qui justifie de noter les termes sources par :

$$S^{(ij)} = P^{(ij)} - \varepsilon^{(ij)} + \phi^{(ij)} \quad (9.36a)$$

$$S^\varepsilon = P^\varepsilon - \varepsilon^\varepsilon + \phi^\varepsilon \quad (9.36b)$$

Les implications éventuelles de ces termes seront présentées par la suite.

Dans l'équation du mouvement moyen, il est classique de travailler avec la pression turbulente, définie par :

$$P^t = \frac{1}{\rho} P + \frac{2}{3} K \quad (9.37)$$

ce qui facilite souvent l'écriture de la condition limite en pression, en permettant d'imposer une condition de Neumann aux parois. En notant  ${}^D R^{(ij)}$  le déviateur dimensionnel du tenseur de Reynolds, il vient :

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + U^{(k)} \nabla_{(k)} U^{(i)} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{(i)} P^t + \nabla_{(j)} {}^D R^{(ij)} + \nu \Delta U^{(i)} \quad (9.38)$$

ce qui se décompose suivant :

$$\begin{aligned}
 & \nu \frac{1}{h_k^2} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial (X^k)^2} - \left[ U^{(k)} - \nu f^{(k)} \right] \frac{1}{h_k} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial X^k} \\
 & = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{h_i} \frac{\partial P^t}{\partial X^i} + U^{(k)} \Gamma_{(nk)}^{(i)} U^{(k)} \\
 & + \frac{1}{h_j} \frac{\partial^D R^{(ij)}}{\partial X^j} + \Gamma_{(nj)}^{(i)} {}^D R^{(nj)} + \Gamma_{(nj)}^{(j)} {}^D R^{(in)} \\
 & - \nu \left[ 2 \Gamma_{(mn)}^{(i)} \frac{1}{h_n} \frac{\partial U^{(m)}}{\partial X^n} + \alpha_{nm} U^{(m)} \right]
 \end{aligned} \tag{9.39a}$$

avec

$$Q_{(m)}^{(n)} = \left[ \frac{1}{h_p} \frac{\partial \Gamma_{(mp)}^{(n)}}{\partial X^p} + \Gamma_{(mp)}^{(n)} \Gamma_{(pq)}^{(q)} + \Gamma_{(qp)}^{(n)} \Gamma_{(mp)}^{(q)} \right] \tag{9.40}$$

et dans le cas d'un système de coordonnées orthogonal, le laplacien fournit les coefficients des dérivées premières partielles suivantes :

$$f^{(1)} = K_{21} + K_{31} - K_{11} \tag{9.41a}$$

$$f^{(2)} = K_{32} + K_{12} - K_{22} \tag{9.41b}$$

$$f^{(3)} = K_{23} + K_{13} - K_{33} \tag{9.41c}$$

Les simplifications et le détail des équations pour un système de coordonnées orthogonal sont données en annexe R.

Les équations des modèles classiques au second ordre utilisent les termes de diffusion de Daly-Harlow ou d'Hanjalic et Launder, ce qui conduit, dans le cas d'une base de référence orthogonale quelconque aux décompositions suivantes :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(k)} T^{(ijk)} & = \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \\
 & + \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ik)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(jk)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \\
 & + \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \bar{R}^{(nk)} \\
 & + \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(ik)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(jk)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \tilde{R}^{(in)} \\
 & + \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}
 \end{aligned} \tag{9.42}$$

Les tenseur  $\tilde{R}^{(ij)}$  et  $\bar{R}^{(ij)}$  proviennent des modèles de diffusion et sont définis par :

$$\tilde{R}^{(ij)} = C_s \frac{K}{\varepsilon} R^{(ij)} \tag{9.43a}$$

$$\bar{R}^{(ij)} = \nu \delta_{ij} + C_s \frac{K}{\varepsilon} \tilde{R}^{(ij)} \tag{9.43b}$$

Le terme noté  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  est nul dans le cas s'un système de référence cartésien. Il contient les courbures du système de coordonnées orthogonal. Son expression est détaillée en annexe R et ne sera pas rappelée ici. C'est en effet un terme évalué de façon explicite, tout comme les termes source  $S^{(ij)}$ . Certains des gradients qui constituent  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  pourraient cependant justifier d'en impliciter une partie pour venir renforcer les coefficients des termes de convection-diffusion, mais ces contributions seraient différentes pour chacune des équations d'évolution du tenseur de Reynolds. Elles conduiraient à la formation d'opérateurs de convection-diffusion différents pour chacune des équations. Pour une question d'économie de place mémoire utilisée par le code Horus, cette construction n'est pas retenue, et c'est la raison pour laquelle le terme  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  est évalué de façon explicite.

Dans le terme de diffusion de type gradient de l'équation d'évolution du taux de dissipation, ce problème ne se pose pas, car il s'écrit sous la forme :

$$\nabla_{(k)} T^{\varepsilon(k)} = \left[ \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^n \partial X^m} + \left[ \nabla_{(n)} \overline{R}^{(kn)} - \overline{R}^{(nm)} \tilde{\Gamma}_{nm}^k \right] \frac{1}{h_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^k} \quad (9.44)$$

où

$$\tilde{\Gamma}_{nm}^k = \frac{h_k}{h_n h_m} \Gamma_{nm}^k \quad (9.45)$$

est fonction du tenseur de Christoffel  $\Gamma_{nm}^k$  du système de référence, et des dimensions associées à la base covariante physique. Ce symbole est symétrique suivant ses indices inférieurs  $(n, m)$ , contrairement au symbole de Christoffel physique, défini en annexe R, et noté  $\Gamma_{(nm)}^{(k)}$ .

Dans le cas d'un système de référence cartésien, l'ensemble des composantes du symbole de Christoffel est nul et les longueurs des vecteurs de la base physique sont unitaires. Ces termes doivent être pris en compte dans le cas d'un système de référence cylindrique et sont relativement simples. Les calculs sont effectués en annexe R. Contrairement aux termes de diffusion des équations du tenseur de Reynolds, les termes de diffusion de l'équation du taux de dissipation sont relativement similaires dans le cas d'une base orthogonale quelconque et d'une base cartésienne : les corrections portent uniquement sur les vitesses de convection.

La forme implicite standard des équations du mouvement turbulent s'écrit donc pour un modèle au second ordre et dans la base de référence orthogonale choisie, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial X^n \partial X^m} - \left[ U^{(k)} - \nabla_{(n)} \overline{R}^{(kn)} \right] \frac{1}{h_k} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^k} \\ &= \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} - S^{(ij)} + \Gamma_{(kn)}^{(i)} R^{(kj)} + \Gamma_{(kn)}^{(j)} R^{(ik)} \\ & - \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} \\ & - \left[ \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} \right] \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ik)}}{\partial X^n} - \left[ \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \right] \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(jk)}}{\partial X^n} \\ & + \left[ \overline{R}^{(jn)} \right] \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 R^{(ik)}}{\partial X^k \partial X^n} + \left[ \overline{R}^{(in)} \right] \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 R^{(jk)}}{\partial X^k \partial X^n} \end{aligned} \quad (9.46a)$$

et

$$\left[ \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^n \partial X^m} - \left[ U^{(k)} - \nabla_{(n)} \overline{R}^{(kn)} - \overline{R}^{(nm)} \tilde{\Gamma}_{nm}^k \right] \frac{1}{h_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^k} \quad (9.47a)$$

$$= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - S^\varepsilon$$

Les dérivées secondes se décomposent encore entre les dérivées doubles, formant l'opérateur de diffusion dans la base de référence, et les dérivées croisées, qui dans la base de référence sont traitées de façon explicite, et donc passées au second membre des équations.

### 9.3.2 Plan de calcul

Les équations du mouvement sont transformées dans un système de coordonnées curvilignes. Les coefficients métriques intervenant dans l'évaluation des dérivées premières des termes de convection satisfont :

$$\frac{1}{h_n} \frac{\partial \phi}{\partial X^n} = \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \quad (9.48)$$

et dans le calcul d'une dérivée partielle seconde, ce sont :

$$\frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^n \partial X^m} = \frac{1}{J^2} b_n^p b_m^q \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^p \partial \xi^q} + f_{nm}^q \frac{\partial \phi}{\partial \xi^q} \quad (9.49)$$

avec :

$$f_{nm}^q = \frac{1}{J} h_n H^n \left[ \frac{1}{J} h_n H^m B_n^p B_m^q \right] \quad (9.50)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left[ b_n^k U^{(n)} \right] = 0 \quad (9.51)$$

L'équation de quantité de mouvement se transforme quant à elle suivant :

$$\begin{aligned} & \nu \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial (\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial (\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \\ & - \left[ \frac{1}{J} b_n^k U^{(n)} - f^k \right] \frac{\partial U^{(i)}}{\partial \xi^k} \\ & = \frac{1}{J} b_i^k \frac{\partial P^t}{\partial \xi^k} + \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + U^{(k)} \Gamma_{(nk)}^{(i)} U^{(n)} \\ & + \frac{1}{J} b_j^k \frac{\partial^D R^{(ij)}}{\partial \xi^k} + \Gamma_{(nj)}^{(i)} {}^D R^{(nj)} + \Gamma_{(nj)}^{(j)} {}^D R^{(in)} \\ & - \nu \left[ 2 \left( g^{12} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right) + 2 \Gamma_{(mn)}^{(i)} \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial U^{(n)}}{\partial \xi^k} + \alpha_{nm} U^{(m)} \right] \end{aligned} \quad (9.52a)$$

où les coefficients métriques du laplacien vectoriel sont :

$$g^{ij} = \frac{1}{J^2} b_n^i b_n^j \quad (9.53a)$$

et

$$f^k = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^n} \left( \frac{1}{J} b_m^n b_m^k \right) \quad (9.53b)$$



Les équations d'évolution du tenseur de Reynolds s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_m^1 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial (\xi^1)^2} + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^2 b_m^2 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial (\xi^2)^2} + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^3 b_m^3 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial (\xi^3)^2} \quad (9.54a) \\
 & - \left[ \frac{1}{J} b_n^k \left( U^{(n)} - \nabla_{(n)} \overline{R}^{(nm)} \right) + f_{nm}^k \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} \\
 & = \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} - S^{(ij)} + \Gamma_{(kn)}^{(i)} R^{(kj)} + \Gamma_{(kn)}^{(j)} R^{(ik)} \\
 & - \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} \\
 & - \left[ \frac{1}{J} b_n^k \nabla_{(p)} \tilde{R}^{(jn)} - f_{np}^k \tilde{R}^{(jn)} \right] \frac{\partial R^{(ip)}}{\partial \xi^k} \\
 & - \left[ \frac{1}{J} b_n^k \nabla_{(p)} \tilde{R}^{(in)} - f_{np}^k \tilde{R}^{(in)} \right] \frac{\partial R^{(jp)}}{\partial \xi^k} \\
 & - \tilde{R}^{(jn)} \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_m^1 \frac{\partial^2 R^{(im)}}{\partial (\xi^1)^2} + \frac{1}{J^2} b_n^2 b_m^2 \frac{\partial^2 R^{(im)}}{\partial (\xi^2)^2} + \frac{1}{J^2} b_n^3 b_m^3 \frac{\partial^2 R^{(im)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \\
 & - \tilde{R}^{(in)} \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_m^1 \frac{\partial^2 R^{(jm)}}{\partial (\xi^1)^2} + \frac{1}{J^2} b_n^2 b_m^2 \frac{\partial^2 R^{(jm)}}{\partial (\xi^2)^2} + \frac{1}{J^2} b_n^3 b_m^3 \frac{\partial^2 R^{(jm)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \\
 & - \overline{R}^{(nm)} \frac{1}{J^2} \left[ \left( b_n^1 b_m^2 + b_n^2 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \left( b_n^1 b_m^3 + b_n^3 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \left( b_n^2 b_m^3 + b_n^3 b_m^2 \right) \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right] \\
 & - \tilde{R}^{(jn)} \frac{1}{J^2} \left[ \left( b_n^1 b_m^2 + b_n^2 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 R^{(im)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \left( b_n^1 b_m^3 + b_n^3 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 R^{(im)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \left( b_n^2 b_m^3 + b_n^3 b_m^2 \right) \frac{\partial^2 R^{(im)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right] \\
 & - \tilde{R}^{(in)} \frac{1}{J^2} \left[ \left( b_n^1 b_m^2 + b_n^2 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 R^{(jm)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \left( b_n^1 b_m^3 + b_n^3 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 R^{(jm)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \left( b_n^2 b_m^3 + b_n^3 b_m^2 \right) \frac{\partial^2 R^{(jm)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right]
 \end{aligned}$$

L'équation d'évolution du taux de dissipation s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_m^1 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (\xi^1)^2} + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^2 b_m^2 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (\xi^2)^2} + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^3 b_m^3 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (\xi^3)^2} \quad (9.55a) \\
 & - \left[ \frac{1}{J} b_n^k C^{(n)} + f_{nm}^k \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi^k} \\
 & = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - S^\varepsilon \\
 & - \overline{R}^{(nm)} \frac{1}{J^2} \left[ \left( b_n^1 b_m^2 + b_n^2 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + \left( b_n^1 b_m^3 + b_n^3 b_m^1 \right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + \left( b_n^2 b_m^3 + b_n^3 b_m^2 \right) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right]
 \end{aligned}$$

Les vitesses de convection sont notées  $C^{(i)}$  et sont définies par :

$$C^{(i)} = U^{(i)} - \check{R}^{(i)} \quad (9.56)$$

où  $\check{R}^{(i)}$  regroupe les contributions des gradients de  $\overline{R}^{(ij)}$  et les termes de courbures associés aux dérivées secondes de  $\overline{R}^{(ij)}$ . Ils s'écrivent donc :

$$\check{R}^{(1)} = \nabla_{(k)} \overline{R}^{(1k)} - K_{11} \overline{R}^{(11)} + K_{21} \overline{R}^{(22)} + K_{31} \overline{R}^{(33)} - 2 K_{12} \overline{R}^{(12)} - 2 K_{13} \overline{R}^{(13)} \quad (9.57a)$$

$$\check{R}^{(2)} = \nabla_{(k)} \overline{R}^{(2k)} + K_{12} \overline{R}^{(11)} - K_{22} \overline{R}^{(22)} + K_{32} \overline{R}^{(33)} - 2 K_{21} \overline{R}^{(12)} - 2 K_{23} \overline{R}^{(23)} \quad (9.57b)$$

$$\check{R}^{(3)} = \nabla_{(k)} \overline{R}^{(3k)} + K_{13} \overline{R}^{(11)} + K_{23} \overline{R}^{(22)} - K_{33} \overline{R}^{(33)} - 2 K_{31} \overline{R}^{(13)} - 2 K_{32} \overline{R}^{(23)} \quad (9.57c)$$

### 9.3.3 Opérateurs de diffusion et réalisabilité

Les opérateurs de convection-diffusion de la turbulence s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_m^1 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial (\xi^1)^2} + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^2 b_m^2 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial (\xi^2)^2} + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^3 b_m^3 \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \phi}{\partial (\xi^3)^2} \quad (9.58a) \\ & - \left[ \frac{1}{J} b_n^k C_\phi^{(n)} + f_{nm}^k \overline{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial \phi}{\partial \xi^k} \\ & = \frac{\partial \phi}{\partial t} - S\phi \end{aligned}$$

Les coefficients de diffusion communs peuvent être notés par :

$$D^{ii} = \frac{1}{J^2} \left[ b_n^i \overline{R}^{(nm)} b_m^i \right] \quad (9.59)$$

sans sommation sur  $i$ . Sachant que :

$$\overline{R}^{(nm)} = \nu \delta_{nm} + C_s \frac{K}{\varepsilon} \tilde{R}^{(nm)} \quad (9.60)$$

la positivité du coefficient de diffusion est directement liée à la positivité de la forme quadratique suivante :

$$b_n^i \overline{R}^{(nm)} b_m^i \quad (9.61)$$

ce qui est exactement la condition de réalisabilité sur le tenseur de Reynolds, qui demande à ce que ce tenseur soit une forme positive.

## 9.4 Particularités numériques associées à un modèle au second ordre

La principale différence des modèles au second ordre par rapport aux modèles à deux équations de transport réside dans la disparition de la notion de viscosité turbulente. Les équations des modèles au second ordre sont *a priori* plus proches de la physique de la turbulence, puisqu'elles privilégient les instabilités d'origine convective plutôt que l'augmentation de la diffusion apparente. Les termes sources des équations de quantité de mouvement contiennent les gradients des corrélations doubles, et sont par conséquent plus importants que dans le cas des modèles à deux équations de transport, où l'hypothèse de viscosité turbulente permet d'impliciter les contributions turbulentes. Contrairement aux modèles de type  $K - \varepsilon$ , la turbulence ne vient pas renforcer les coefficients des termes de diffusion. D'un point de vue numérique, ces aspects ont pour principale conséquence d'augmenter les nombres de Péclet locaux associés aux

équations de transport. Les schémas numériques associés aux discrétisations des équations de convection-diffusion risquent par conséquent de fournir une diffusion numérique plus importante que dans le cas des modèles basés sur l'hypothèse de Boussinesq si le maillage utilisé n'est pas suffisamment raffiné pour permettre d'atteindre la même précision numérique. En pratique il faut noter cependant que les termes turbulents, implicités dans les modèles à deux équations de transport, interviennent au premier ou au second ordre suivant le nombre de Péclet local du schéma de convection-diffusion, alors que pour une modélisation au second ordre, les gradients sont évalués par des schémas centrés, inconditionnellement au second ordre. La précision globale n'est pas entièrement dictée par le schéma de convection-diffusion dans la résolution des équations de quantité de mouvement [172].

La prédominance des termes sources des équations de quantité de mouvement associées à une modélisation au second ordre rend la résolution de ces équations différentes de celles obtenues avec une modélisation de type Boussinesq, non seulement parce que la discrétisation des termes de convection-diffusion est différente, mais également parce que la stabilité du couplage vitesse-pression-turbulence dépend de l'équilibre de gradients importants et souvent de signes opposés intervenant dans les termes sources. Certains auteurs préfèrent résoudre les équations de quantité de mouvement et de turbulence de manière couplée [127], alors que d'autres préfèrent exprimer une sorte de viscosité turbulente en sélectionnant dans les équations d'évolution des corrélations doubles certains termes reliant ces corrélations aux gradients de vitesse moyenne [86]. Ces termes peuvent être implicités dans les équations de quantité de mouvement afin de fournir un mécanisme stabilisateur d'origine diffusive.

Il est clair que l'algorithme de couplage vitesse-pression-turbulence doit permettre d'assurer les équilibres entre les gradients dans les termes sources des équations de quantité de mouvement tout au long des itérations. Contrairement aux modèles de type Boussinesq, le couplage ne s'effectue pas uniquement entre les vitesses et la pression, mais bien entre la vitesse, la pression et les corrélations doubles, qui jouent, dans les équations de quantité de mouvement un rôle similaire à la pression. L'algorithme de couplage doit respecter ces similitudes dans la résolution des équations de quantité de mouvement [43].

La résolution des équations de la turbulence présente quant à elle les mêmes caractéristiques que les équations de quantité de mouvement, avec notamment la présence de termes sources importants. Il est cependant plus aisé d'implicitiser certains termes pour en faciliter la résolution numérique. La construction des opérateurs de convection-diffusion a toutefois permis de souligner l'importance de la réalisabilité théorique des modèles, étroitement liée à la réalisabilité du schéma numérique. La présence, dans les modèles bas-Reynolds, des facteurs de bidimensionnalisation de la turbulence à l'approche des parois rend délicates les premières itérations des calculs dans la mesure où les initialisations du tenseur de Reynolds ne fournissent pas nécessairement des configurations réalisables satisfaisantes. Il apparaît souvent nécessaire d'agir sur ces facteurs scalaires dans les premières itérations.

## 9.5 Résolution du couplage vitesse-pression-turbulence

### 9.5.1 Discrétisation des équations

Les variables dépendantes sont évaluées au centre  $C$  des volumes de contrôle. Les équations de quantité de mouvement discrétisées conduisent à l'évaluation discrète suivante de la vitesse au centre  $C$  :

$$U^{(i)}(C) = \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{(i)}[nb(C)] - C_p(C) \left[ S^{*(i)} + \nabla_{(i)} P^t + \nabla_{(j)}^D \hat{R}^{(ij)} \right]_C \quad (9.62)$$

où les coefficients d'influence  $C_{nb}$  sont évalués aux points voisins et les termes sources étoilés comprennent les termes de courbure et les dérivées partielles croisées des termes de diffusion.

Les coefficients d'influence sont tous positifs si le schéma de discrétisation est inconditionnellement monotone. Les gradients de pression turbulents et du déviateur du tenseur de Reynolds s'écrivent de la façon suivante en coordonnées curvilignes :

$$\begin{aligned} & \left[ S^{*(i)} + \nabla_{(i)} P^t + \nabla_{(j)}^D \hat{R}^{(ij)} \right]_C \\ & = \\ & \left[ S^{*(i)} + \frac{1}{J} b_i^k \frac{\partial P^t}{\partial \xi^k} + \frac{1}{J} b_j^k \frac{\partial^D \hat{R}^{(ij)}}{\partial \xi^k} + \Gamma_{(nj)}^{(i)} \nabla^D \hat{R}^{(nj)} + \Gamma_{(nj)}^{(j)} \nabla^D \hat{R}^{(in)} \right]_C \end{aligned} \quad (9.63)$$

Il est clair que dans le cas d'un système de référence cartésien, les dérivées covariantes ne comprennent pas de termes de courbure. Ces gradients se mettent donc sous une forme complètement conservative.

Afin de traiter la pression et les composantes des tenseurs de Reynolds de façon analogue, ces termes de courbures sont inclus dans les termes source  $S^{*(i)}$ ,

$$S^{(i)} = S^{*(i)} + \Gamma_{(nj)}^{(i)} \nabla^D \hat{R}^{(nj)} + \Gamma_{(nj)}^{(j)} \nabla^D \hat{R}^{(in)} \quad (9.64)$$

si bien que les équilibres sont régis par les dérivées partielles :

$$U^{(i)}(C) = \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{(i)}[nb(C)] - C_p(C) \left[ S^{(i)} + \frac{1}{J} b_i^k \frac{\partial P^t}{\partial \xi^k} + \frac{1}{J} b_j^k \frac{\partial^D \hat{R}^{(ij)}}{\partial \xi^k} \right]_C \quad (9.65)$$

La formulation d'une équation de pression à partir de la contrainte d'incompressibilité nécessite de reconstruire les flux de masse aux interfaces du volume de contrôle. Cette technique classique, proposée par Rhie et Chow [113], permet d'éviter les solutions oscillantes en pression en reliant la pression au centre d'une maille à tous ses voisins par l'intermédiaire d'une interpolation de nature physique et conduit à introduire les pseudo-vitesses, définies en tout point par la relation :

$$\hat{U}^{(i)}(C) = \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{(i)}[nb(C)] - C_p(C) S^{(i)} \quad (9.66)$$

L'équation de continuité, exprimant le bilan des flux de masse dans le volume de contrôle, s'écrit :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \left[ b_n^k U^{(n)} \right] = 0 \quad (9.67)$$

où les  $b_n^k$  sont les métriques évaluées aux frontières des cellules. Elle s'écrit de façon discrète :

$$\frac{1}{J} \left[ \left( b_k^1 U^{(k)} \right)_d - \left( b_k^1 U^{(k)} \right)_u + \left( b_k^2 U^{(k)} \right)_n - \left( b_k^2 U^{(k)} \right)_s + \left( b_k^3 U^{(k)} \right)_w - \left( b_k^3 U^{(k)} \right)_e \right] = 0 \quad (9.68)$$

L'évaluation des flux de masse aux frontières des volumes de contrôle s'effectue à l'aide de l'expression des vitesses provenant de la discrétisation de l'équation de quantité de mouvement.

Il vient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J} \left[ \left( b_k^1 \hat{U}^{(k)} \right)_d - \left( b_k^1 \hat{U}^{(k)} \right)_u + \left( b_k^2 \hat{U}^{(k)} \right)_n - \left( b_k^2 \hat{U}^{(k)} \right)_s + \left( b_k^3 \hat{U}^{(k)} \right)_w - \left( b_k^3 \hat{U}^{(k)} \right)_e \right] \\
 & \qquad \qquad \qquad = \\
 & \frac{1}{J} \left\{ \left[ b_k^1 \left( \frac{1}{J} b_k^n \frac{\partial P^t}{\partial \xi^n} + \frac{1}{J} b_m^n \frac{\partial^D \hat{R}^{(km)}}{\partial \xi^n} \right) \right]_{(d-u)} \right. \\
 & \quad + \left[ b_k^2 \left( \frac{1}{J} b_k^n \frac{\partial P^t}{\partial \xi^n} + \frac{1}{J} b_m^n \frac{\partial^D \hat{R}^{(km)}}{\partial \xi^n} \right) \right]_{(n-s)} \\
 & \quad \left. + \left[ b_k^3 \left( \frac{1}{J} b_k^n \frac{\partial P^t}{\partial \xi^n} + \frac{1}{J} b_m^n \frac{\partial^D \hat{R}^{(km)}}{\partial \xi^n} \right) \right]_{(w-e)} \right\}
 \end{aligned} \tag{9.69}$$

Les  $\hat{U}^{(k)}$  sont évaluées aux interfaces des cellules par simple interpolation géométrique. Deux décompositions sont envisageables :

La première consiste à inclure les gradients des corrélations doubles dans les pseudo-vitesses qui sont ainsi interpolées linéairement aux interfaces par leur intermédiaire.

La seconde conserve aux dérivées partielles du tenseur de Reynolds le même rôle que les dérivées partielles en pression en les discrétisant explicitement aux interfaces, exactement comme pour la pression dans la technique de Rhie et Chow [113].

Cette seconde solution a été retenue car elle permet de traiter au niveau discret les gradients de pression comme les gradients de corrélations doubles, afin d'éviter l'apparition d'oscillations numériques sur le champ de vitesse. En effet, si le premier choix était retenu, les deux contributions prépondérantes à l'équilibre du terme source des équations de quantité de mouvement ne seraient pas calculées de la même façon. Le gradient de pression serait rediscrétisé aux interfaces, alors que les gradients de corrélations doubles seraient interpolés linéairement. Comme dans le cas du canal plan, ces deux contributions sont le plus souvent fortes et de signe opposé, ce qui numériquement pourrait conduire à l'évaluation d'un terme source petit, mais dont le signe varie d'un point de maillage à l'autre, risquant ainsi de conduire à des oscillations du champ de vitesse. En choisissant la deuxième technique, ce genre de comportement est *a priori* évité.

### 9.5.2 Algorithme de résolution

Les reconstructions identiques des gradients de pression et de corrélations doubles sont en fait nécessaires mais insuffisantes pour éviter toute oscillation du champ de vitesse. Elles doivent être associées à un algorithme de couplage permettant d'assurer, non seulement de façon itérative, mais aussi à chaque étape de la méthode de couplage, l'équilibre entre ces termes. Il convient pour cela de résoudre les équations de transport des quantités turbulentes avant l'équation de pression. Cet ordre, indifférent pour des modèles à deux équations de transport, apparaît fondamental ici. Ainsi, la correction du champ de vitesse porte sur des pressions et corrélations doubles évaluées en respectant le lien permanent entre pression et corrélation. L'algorithme PISO est le suivant :

- itération  $n$   
résolution de l'équation de quantité de mouvement

$$U_C^{i[n]} - \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{i[n]} = -C_p \left[ P_{,i}^{[n-1]} + R_{,j}^{ij[n-1]} \right]_C \tag{9.70a}$$

résolution des équations turbulentes

$$R_C^{ij[n]} - \sum_{C_{nb}} C_{nb} R_{nb}^{ij[n]} = S^{ij} \quad (9.70b)$$

résolution de l'équation de pression

$$\left( C_p P_{,i}^{[n]} \right)_{,i} = - \left( C_p R_{,j}^{ij[n]} \right)_{,i} \quad (9.70c)$$

correction du champ de vitesse

$$U_C^{i[n+1]} - \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{i[n]} = -C_p \left[ P_{,i}^{[n]} + R_{,j}^{ij[n]} \right]_C \quad (9.70d)$$

- itération  $n + 1$

résolution de l'équation de quantité de mouvement

$$U_C^{i[n+1]} - \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{i[n+1]} = -C_p \left[ P_{,i}^{[n-1]} + R_{,j}^{ij[n-1]} \right]_C \quad (9.70e)$$

Le traitement similaire de la pression et des corrélations apparaît fondamental et doit être respecté également dans les étapes de sous-relaxation et vis-à-vis des conditions aux limites en pression.

### 9.5.3 Coefficients de relaxation et conditions aux limites

La convergence non-linéaire est facilitée par l'utilisation de sous-relaxations de la pression et des corrélations doubles. Elles doivent toujours assurer l'équilibre entre la pression et les corrélations. L'étape de correction doit par conséquent s'effectuer de la façon suivante :

Si  $P^{[s]}$  et  $R^{ij[s]}$  désignent les solutions des systèmes linéaires issus de la discrétisation des équations de pression et des transport des tensions de Reynolds, les relaxations de la pression et des corrélations doubles s'écrivent respectivement

$$P^{[r]} = \alpha_p P^{[s]} + (1 - \alpha_p) P^{[n-1]} \quad (9.71a)$$

$$R^{ij[r]} = \alpha_r R^{ij[s]} + (1 - \alpha_r) R^{ij[n-1]} \quad (9.71b)$$

or  $P_{[s]}$  est calculée par :

$$\left( C_p P_{,i}^{[s]} \right)_{,i} = - \left( C_p R_{,j}^{ij[n]} \right)_{,i} \quad (9.72)$$

Par conséquent, lorsque la pression est sous-relaxée, les corrélations doubles doivent être également sous relaxées pour maintenir l'équilibre dans le terme source lors de l'étape de correction, ce qui impose aux paramètres de sous-relaxation d'être identiques.

$$U_C^{i[n+1]} - \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{i[n]} = -C_p \left[ \alpha_p P^{[s]} + (1 - \alpha_p) P_{,i}^{[n]} \right]_C - C_p \left[ \alpha_p R^{ij[s]} + (1 - \alpha_p) R_{,j}^{ij[n]} \right]_C \quad (9.73)$$

soit :

$$U_C^{i[n+1]} - \sum_{C_{nb}} C_{nb} U_{nb}^{i[n]} = -C_p \left[ \alpha_p (P^{[s]} + R^{ij[s]} + (1 - \alpha_p) (P_{,i}^{[n]} + R_{,j}^{ij[n]})) \right]_C \quad (9.74)$$

La condition aux limites à la paroi utilisée sur la pression pour les modèles à deux équations de transport porte sur la pression turbulente et impose par une condition de Neumann un gradient nul à la paroi, conformément à la forme analytique de l'équation de quantité de mouvement normale à la paroi à grand nombre de Reynolds. Une condition un peu moins forte, dite de demi-extrapolation, peut également être utilisée. Elle consiste à extrapoler linéairement à la paroi la valeur de la pression turbulente à partir de sa valeur sur les deux premières mailles. Cette condition, qui n'est pas physique, permet d'assurer un meilleur traitement numérique en régularisant l'évolution de la pression au voisinage des parois.

Dans le cas de la résolution de modèles au second ordre, la condition aux limites de pression doit toujours traduire l'équilibre entre le gradient de pression et le gradient des corrélations doubles au voisinage immédiat de la paroi. La construction d'une telle condition aux limites peut s'effectuer en s'appuyant sur l'expression de l'équation de transport de la composante de vitesse moyenne normale aux parois et une analyse de couche limite. Les lignes de maillage sont supposées localement orthogonales aux parois, ce qui permet d'assimiler la composante normale de vitesse avec la composante contravariante. Dans le cas où la paroi est située sur un plan à  $\xi^2$  constant, l'équation de transport de la composante contravariante  $V$  s'écrit sous la forme discrète suivante :

$$\begin{aligned}
 V = \hat{V} & - b_1^2 \left[ \frac{1}{J} C_p \left( b_1^1 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^3} \right. \right. \\
 & + b_1^1 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^3} \\
 & + b_2^1 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^3} \\
 & \left. \left. + b_3^1 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^3} \right) \right] \\
 & - b_2^2 \left[ \frac{1}{J} C_p \left( b_2^1 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^3} \right. \right. \\
 & + b_1^1 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^3} \\
 & + b_2^1 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^3} \\
 & \left. \left. + b_3^1 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^3} \right) \right] \\
 & - b_3^3 \left[ \frac{1}{J} C_p \left( b_3^1 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^3} \right. \right. \\
 & + b_1^1 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^3} \\
 & + b_2^1 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^3} \\
 & \left. \left. + b_3^1 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

avec

$$V = b_1^2 U^{(1)} + b_2^2 U^{(2)} + b_3^2 U^{(3)} \quad (9.75)$$

Les seuls termes prépondérants aux voisinage de la paroi sont les termes en dérivée en  $\xi^2$ , de sorte que la condition limite pour la pression vérifie :

$$\begin{aligned} & b_1^2 b_1^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_1^2 b_1^2 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^2} + b_1^2 b_2^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + b_1^2 b_3^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} \\ + & b_2^2 b_2^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_2^2 b_1^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + b_2^2 b_2^2 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^2} + b_2^2 b_3^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} \\ + & b_3^2 b_3^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_3^2 b_1^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} + b_3^2 b_2^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} + b_3^2 b_3^2 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^2} \\ = & 0 \end{aligned} \quad (9.76)$$

soit, en première approximation :

$$\begin{aligned} P_w = P_{w+1} + \frac{1}{b_1^2 b_1^2 + b_2^2 b_2^2 + b_3^2 b_3^2} \left[ & b_1^2 b_1^2 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^2} + b_2^2 b_2^2 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^2} + b_3^2 b_3^2 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^2} \right. \\ & \left. + 2 b_2^2 b_1^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + 2 b_3^2 b_1^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} + 2 b_3^2 b_2^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} \right] \end{aligned} \quad (9.77)$$

Sur cette condition aux limites, le traitement vis-à-vis du coefficient de relaxation de pression s'applique toujours en respectant une pondération cohérente avec celle effectuée dans l'étape de correction. Les gradients du tenseur de Reynolds sont par conséquent sous-relaxés suivant :

$$R^{(ij)}_{,\xi^2} = \alpha_p R^{(ij)}[s]_{w+1} + (1 - \alpha_p) R^{(ij)}[n - 1]_{w+1} \quad (9.78)$$

Des conditions aux limites similaires peuvent être écrites pour les surfaces à  $\xi^1$  et  $\xi^3$  constants.



## 9.6 Écoulement dans le canal tridimensionnel de Davis et Gessner

Le comportement du modèle de Shima est étudié dans le cas d'un écoulement évoluant dans une conduite de transition entre un canal de section circulaire et un canal de section rectangulaire. Cette configuration a été étudiée expérimentalement par Davis et Gessner [40], pour un nombre de Reynolds, basé sur le diamètre d'entrée et la vitesse débitante, notée  $U_b$ , de  $Re = 3.9 \times 10^5$ .

### 9.6.1 Présentation du cas test

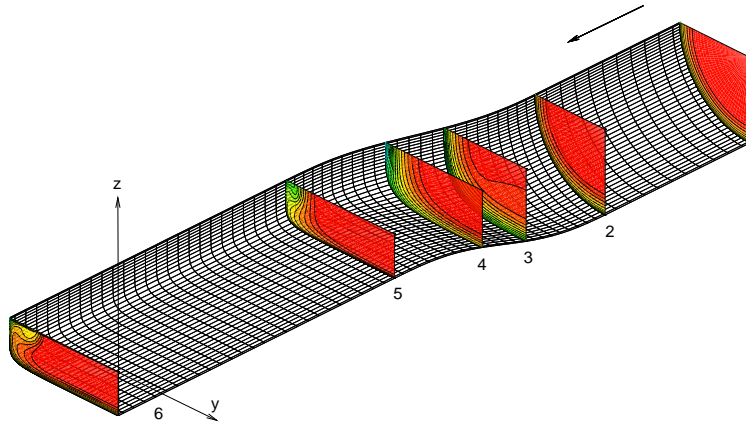


FIG. 9.5: Canal de Davis et Gessner. Contours de vitesse longitudinale sur les sections de mesure.

La section d'entrée est circulaire, d'un diamètre  $D = 2 R$  de  $D = 204.3$  mm. La section de sortie est de forme rectangulaire, de largeur  $D/2$  et de longueur  $3/2 D$ . La base de donnée expérimentale de Davis et Gessner contient les mesures des composantes de vitesse, de la pression et des contraintes de Reynolds en plusieurs sections longitudinales du canal. Ces coupes sont localisées principalement dans la région de transition, comme le montre la figure (9.5). La section du canal, identique en entrée et en sortie, augmente entre les sections 2 et 3 et diminue entre les section 3 et 5.

L'écoulement est caractérisé par une distorsion importante de l'écoulement moyen et du champ turbulent, imposé par le changement de forme de la section et des courbures longitudinales et transversales associées. L'écoulement est soumis à l'action combinée d'une contraction, imposée par le rapprochement des parois horizontales, et d'une expansion, associée à l'éloignement des parois verticales. Il en résulte la génération d'un écoulement secondaire, contrôlé par la pression, qui se traduit par un couplet de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs localisés d'après les mesures près des parois verticales du divergent et de part et d'autre du plan de symétrie horizontal. L'écoulement placé entre ces tourbillons est dirigé vers le centre du canal.

Les symétries verticales et horizontales de la géométrie permettent d'effectuer les calculs sur un quart du canal.

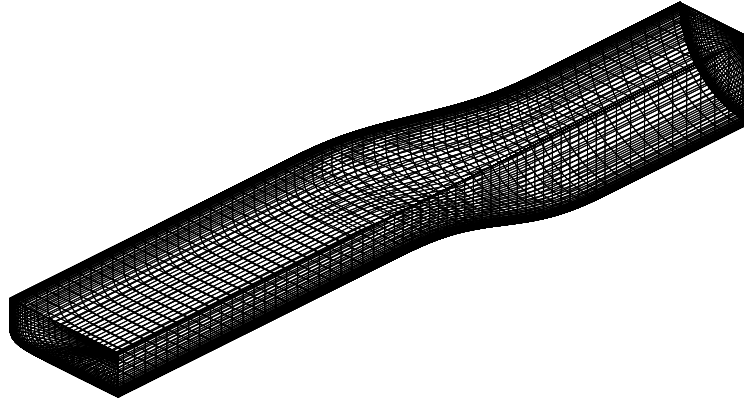


FIG. 9.6: Vue du maillage  $61 \times 39 \times 51$  et de la géométrie.

### 9.6.2 Principe de la validation

Cette configuration a été calculée récemment à l'aide de modèles de turbulence au second ordre, par Lien et Leschziner [86] et Sotiropoulos et Patel [145]. Les premiers retiennent un modèle hybride, de type Gibson et Launder, partout sauf dans la sous-couche visqueuse localisée au voisinage des parois et qui est traitée par un modèle bas-Reynolds à deux équations, de type viscosité turbulente. Les seconds proposent la résolution des équations jusqu'à la paroi et utilisent le modèle bas-Reynolds de Shima [140]. Les résultats de Sotiropoulos et Patel [145] servent d'initialisation aux calculs avec le modèle de Shima présentés ici.

Le principe de la validation effectuée ici consiste à fixer les paramètres de calcul et comparer les comportements de trois types de modèles. Parmi les modèles à deux équations de transport, le modèle double-zone  $K - \varepsilon$  de Chen et Patel [23] a été retenu. Ce modèle est composé d'un  $K - \varepsilon$  standard à grand nombre de Reynolds partout sauf au voisinage des parois, traité par le modèle à une équation de transport de Wolfsthein. La transition entre les deux zones n'est pas basée sur une ligne de maillage particulière, mais sur la valeur du nombre de Reynolds turbulent local. Il est également intéressant de regarder le comportement d'un modèle à deux équations de type  $K - \omega$ . Le modèle  $K - \omega$  standard de Wilcox [176] a été retenu. Il est basé sur une équation de transport pour l'énergie cinétique turbulente et pour une fréquence turbulente  $\omega$ , définie par  $\omega = \varepsilon/(\beta^*K)$ , avec  $\beta^* = 0.09$ . Ce modèle est relativement robuste, compte tenu de l'absence de toute fonction d'amortissement dans les équations pour traiter le voisinage des parois. Il nécessite cependant une initialisation différente de celle utilisée par les modèles basés sur l'équation de  $\varepsilon$ . Cette initialisation est effectuée par un calcul dans une conduite de section circulaire, correspondant à la section d'entrée du canal de Davis et Gessner, et pour lequel le profil de vitesse longitudinale correspond également aux données expérimentales de l'entrée du canal.

Le modèle au second ordre est le modèle bas-Reynolds de Shima [140] présenté précédemment.

Les termes convectifs sont discrétisés par le schéma Quick, formulation centrée au second ordre, utilisant des interpolations décentrées; les paramètres de relaxation attribués aux équations sont conservés pour l'ensemble des modèles. Le maillage enfin est identique et correspond à celui donné par Sotiropoulos et Patel [145], dont les résultats servent d'initialisation aux calculs présentés ici.

### 9.6.3 Présentation des résultats

Les courbes de convergence sont décrites par la norme L1 des résidus non-linéaires.

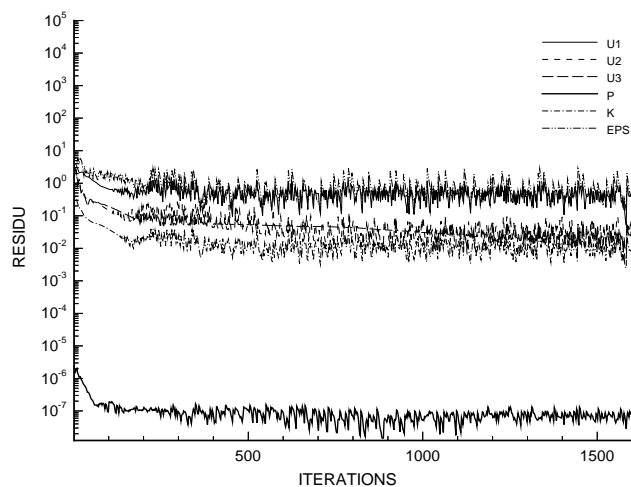


FIG. 9.7: Norme L1 des résidus non-linéaires. Modèle de Chen et Patel.

L'allure oscillante des courbes de convergence du modèle de Chen et Patel est probablement liée au fait que ce modèle est à deux zones.

Les calculs effectués avec le modèle  $K - \omega$  de Wilcox demandent un nombre un peu plus important d'itérations mais partent d'une solution où le tourbillon longitudinal n'est pas encore

formé.

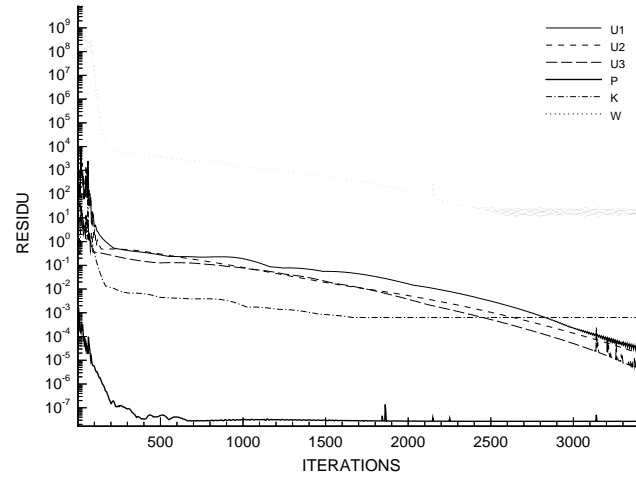


FIG. 9.8: *Courbes de convergence. Modèle de Wilcox.*

Après 3500 itérations, la réduction des résidus est satisfaisante.

Les courbes de convergence du modèle de Shima sont également basées sur la norme L1 des résidus non-linéaires. Les quantités moyennes sont présentées séparément des quantités turbulentes.

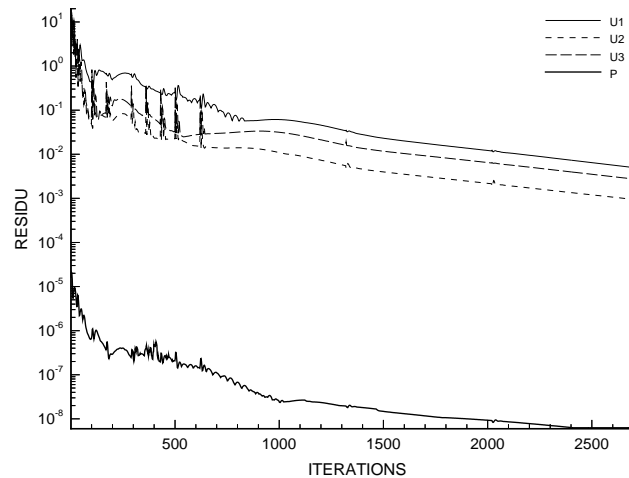


FIG. 9.9: *Courbes de convergence des quantités moyennes. Modèle de Shima.*

Les résidus sont réduits de trois ordres.

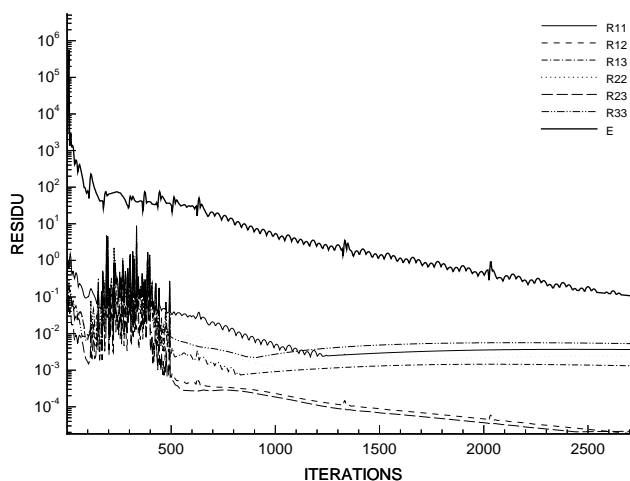


FIG. 9.10: *Courbes de convergence des quantités turbulentes. Modèle de Shima.*

Les quantités turbulentes ont une évolution un peu plus perturbée lors des premières itérations. La réduction des résidus sur les quantités turbulente est cependant également satisfaisante.

### Distribution de la pression statique

La distribution des coefficients de pression sur la circonférence est comparée aux données expérimentales sur les quatre stations de mesure localisées dans la zone de transition (voir figure (9.5)). Elle est tracée ci-dessous suivant l'abscisse curviligne. La symétrie de l'écoulement permet de ne tracer les distributions de pression que sur un quart de chaque section. L'abscisse curviligne est initialisée au centre de la paroi supérieure et normalisée par sa valeur au centre de la paroi latérale. La pression de référence est placée en entrée, à la station 1, à la paroi et sur le plan de

symétrie vertical, là où l'écoulement est le moins perturbé.

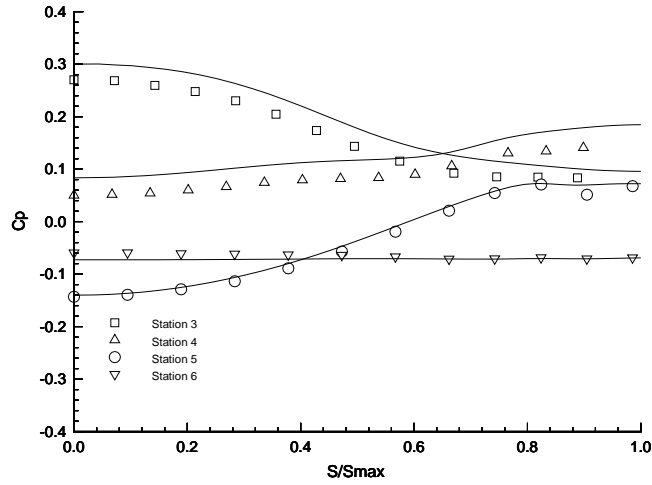


FIG. 9.11: Coefficients de pression. Modèle de Chen et Patel.

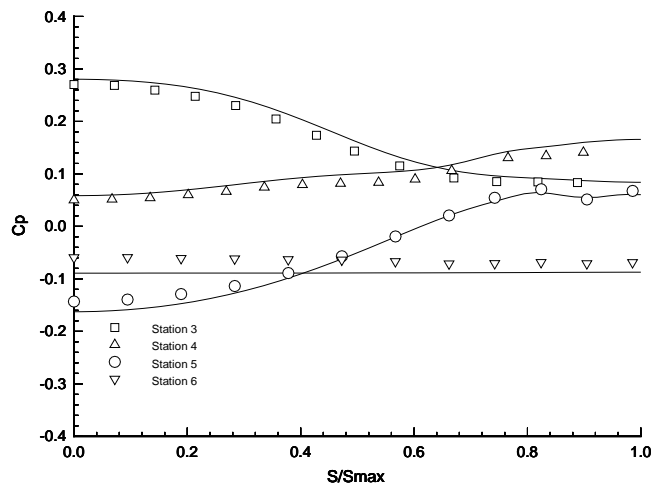


FIG. 9.12: Coefficients de pression. Modèle de Wilcox.

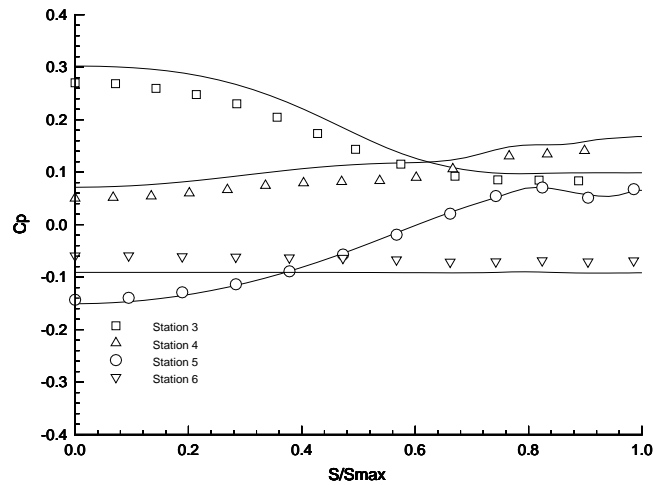


FIG. 9.13: Coefficients de pression. Modèle de Shima.

Le coefficient de pression est globalement le plus important à la station 3 où l'écoulement a subi une décélération due à l'augmentation de la section depuis la station 2. Il décroît jusqu'à la station 5 avec l'accélération de l'écoulement due au rétrécissement de la section. En sortie, à la station 6, le coefficient de pression est presque uniforme, ce qui montre une évolution vers l'écoulement en conduite de section constante.

La prédiction des coefficients de pression s'accorde généralement bien aux données expérimentales et est similaire pour l'ensemble des modèles. Le niveau global du coefficient de pression semble cependant surestimé sur les stations 3 et 4. L'évolution du coefficient de pression au voisinage des parois latérales est cependant mieux représenté sur le modèle au second ordre. Ceci s'observe notamment à partir de l'abscisse  $S = 0.6$ . La décroissance du coefficient de pression de la station 3 est mieux captée par le modèle de Shima que par le modèle de Chen et Patel. Le comportement du modèle de Wilcox est également plus proche des mesures expérimentales que celui du modèle de type  $K - \varepsilon$ . Les variations rapides du coefficient de pression au voisinage de l'abscisse  $S = 1.0$  à la station 5 sont également mieux représentées par le modèle au second ordre que par le modèle de Chen et Patel.

### Contours de vitesse moyenne

Les figures ci-dessous montrent l'évolution des contours de la composante longitudinale de vitesse moyenne aux stations 3,4,5 et 6. A la section 3, les contours de la vitesse longitudinale suivent approximativement la forme de la section. A la station suivante, la couche limite s'épaissit rapidement sur les parois verticales et inversement devient plus fine sur les parois horizontales. La formation du tourbillon longitudinal s'observe nettement sur les sections 5 et 6 dans lesquelles la zone où la vitesse longitudinale est la plus faible s'est déplacée depuis la paroi, comme sur la

section 4, vers le centre du canal.

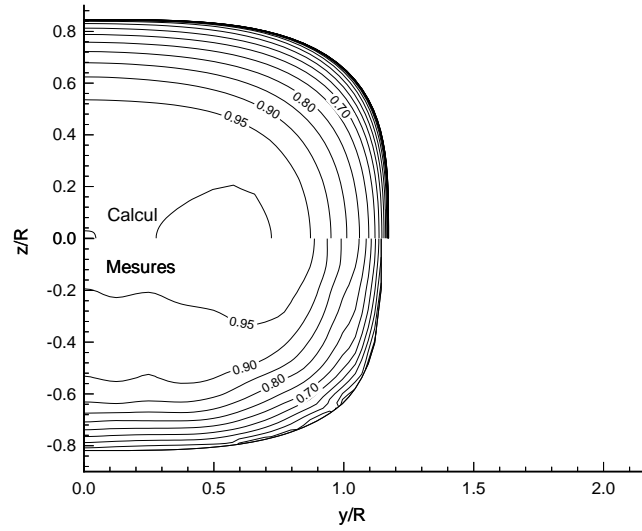


FIG. 9.14: *Contours de vitesse longitudinale. Section 3. Modèle de Chen et Patel.*

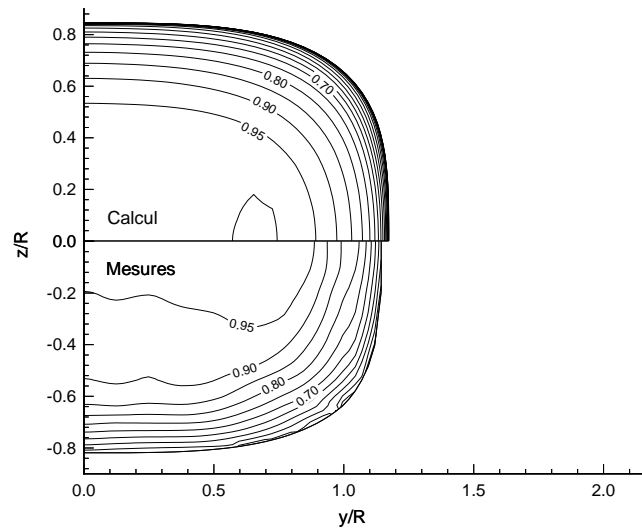


FIG. 9.15: *Contours de vitesse longitudinale. Section 3. Modèle de Wilcox.*



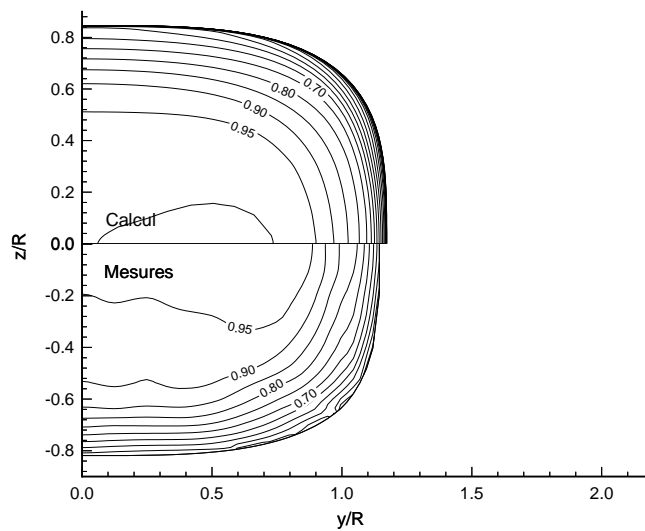


FIG. 9.16: *Contours de vitesse longitudinale. Section 3. Modèle de Shima.*

Les contours de vitesse longitudinale donnés par les différents modèles sont sensiblement équivalents sur la section 3.

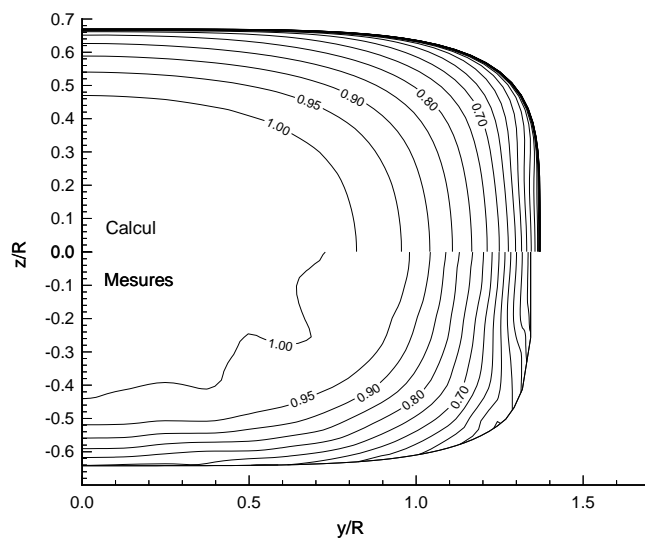


FIG. 9.17: *Contours de vitesse longitudinale. Section 4. Modèle de Chen et Patel.*

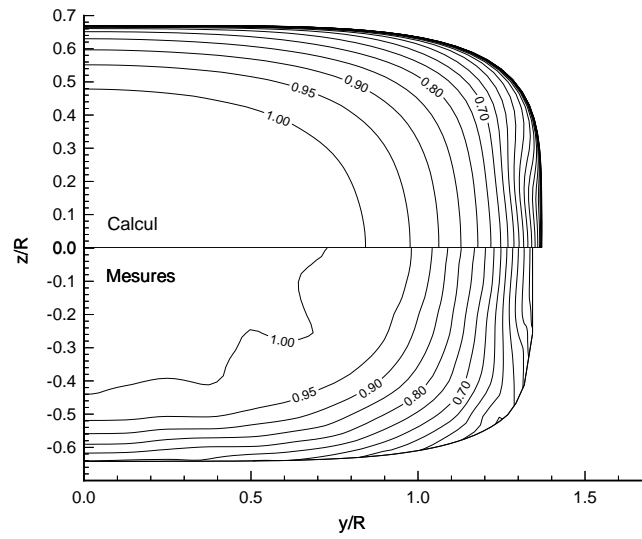


FIG. 9.18: *Contours de vitesse longitudinale. Section 4. Modèle de Wilcox.*

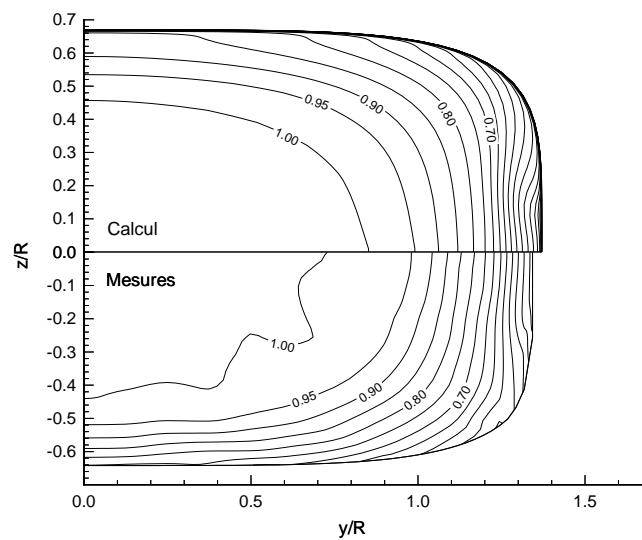


FIG. 9.19: *Contours de vitesse longitudinale. Section 4. Modèle de Shima.*

L'épaississement de la couche limite au voisinage de la paroi verticale n'est pas capturé par le modèle de Chen et Patel.

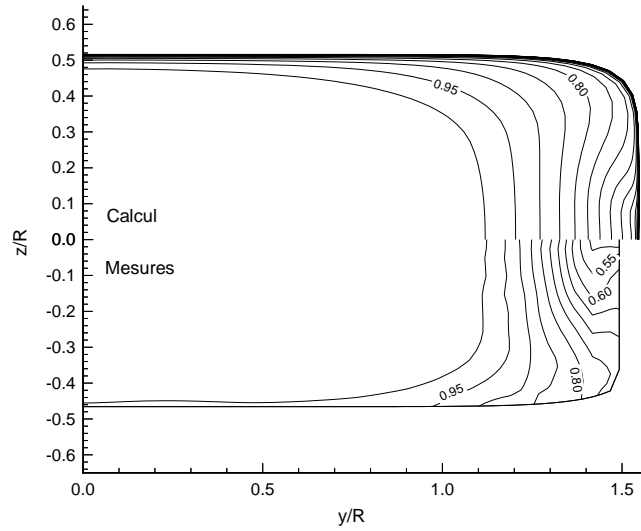


FIG. 9.20: *Contours de vitesse longitudinale. Section 5. Modèle de Chen et Patel.*

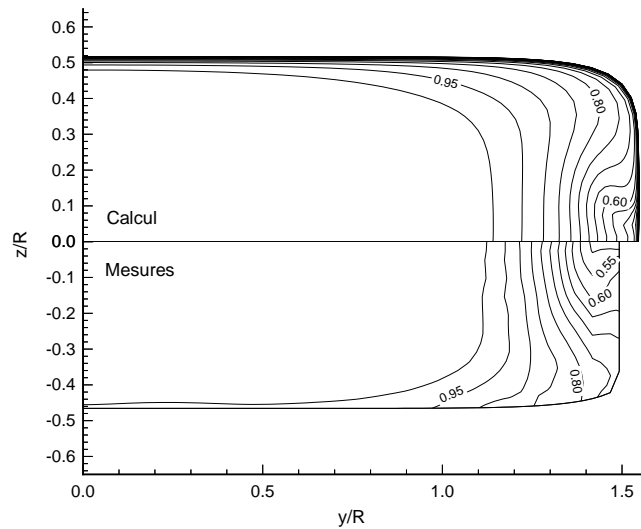


FIG. 9.21: *Contours de vitesse longitudinale. Section 5. Modèle de Wilcox.*

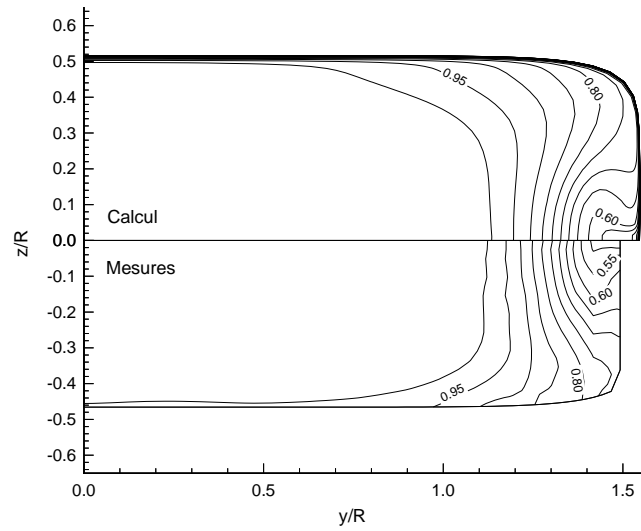


FIG. 9.22: *Contours de vitesse longitudinale. Section 5. Modèle de Shima.*

La section 5 est la plus intéressante pour comparer les différents modèles. Elle se situe juste en sortie de la zone de transition. Le modèle de type  $K - \varepsilon$  de Chen et Patel ne restitue pas les distorsions des contours de vitesse longitudinale. Il ne capture pas la présence du tourbillon longitudinal, au contraire du modèle de type  $K - \omega$  de Wilcox. L'intensité du tourbillon reste cependant plus faible que celle obtenue avec le modèle de type  $R_{ij} - \varepsilon$  de Shima. D'une façon

générale le tourbillon est moins intense que sur les mesures.

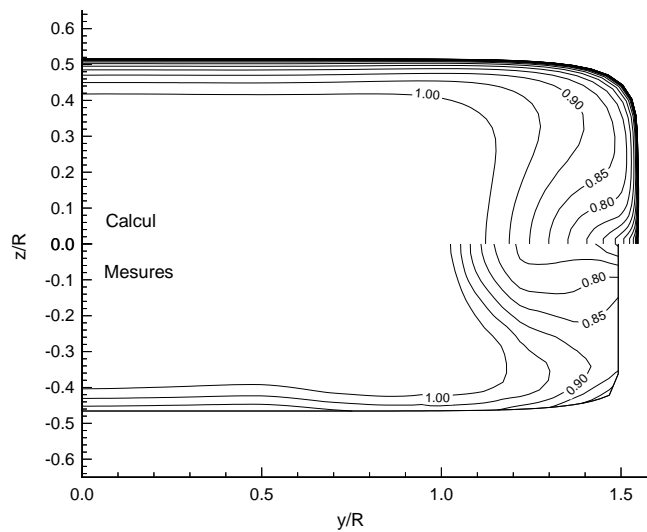


FIG. 9.23: *Contours de vitesse longitudinale. Section 6. Modèle de Chen et Patel.*

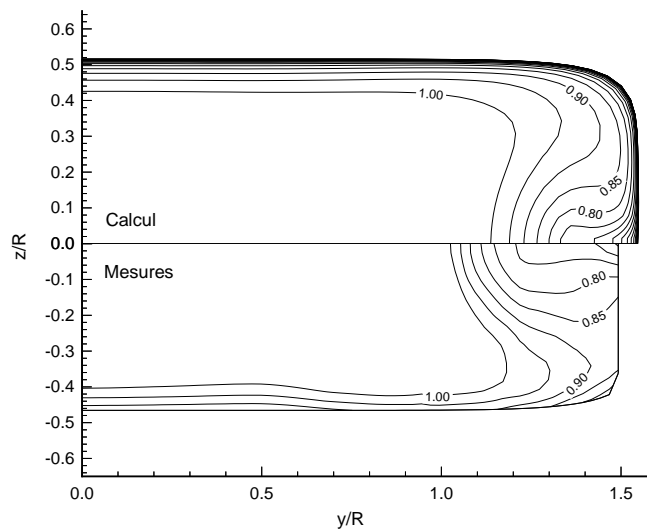


FIG. 9.24: *Contours de vitesse longitudinale. Section 6. Modèle de Wilcox.*

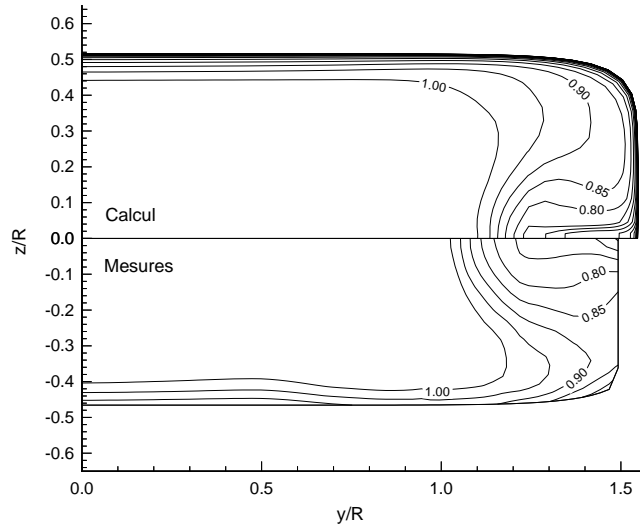


FIG. 9.25: *Contours de vitesse longitudinale. Section 6. Modèle de Shima.*

Sur la section de sortie, la hiérarchie des modèles, observée à la section précédente reste valable.

### Contours de vorticité longitudinale

La localisation du tourbillon longitudinal peut s'observer également sur les contours de vorticité longitudinale, comme le montre l'analyse de Davis [37]. Cette vorticité peut être générée par deux mécanismes. Le premier est lié à l'action des gradients de pression sur la couche limite. Le second est dû aux tensions de Reynolds, comme c'est le cas dans des conduites de section non-circulaire. Généralement, la vorticité provoquée ainsi est beaucoup moins importante que celle développée par l'action des gradients de pression. Ces mécanismes sont représentés dans l'équation du mouvement de la vorticité longitudinale, qui s'écrit, pour un écoulement stationnaire :

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + V \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + W \frac{\partial \Omega_x}{\partial z} = & \underbrace{\Omega_x \frac{\partial U}{\partial x}}_{(1)} + \underbrace{\Omega_y \frac{\partial U}{\partial y}}_{(2)} + \underbrace{\Omega_z \frac{\partial U}{\partial z}}_{(3)} \\
 & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( \overline{uv} - \overline{uw} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (-\overline{vw})}_{(5)} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v^2} - \overline{w^2})}_{(6)} + \nu \nabla^2 \Omega_x \quad (9.79)
 \end{aligned}$$

où

$$\Omega_x = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad \Omega_y = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \Omega_z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}$$

Le membre de gauche contribue à augmenter la vorticité longitudinale par convection. Le premier terme du membre de droite représente la production de vorticité longitudinale par l'étirement des structures vorticitaires. Les accélérations longitudinales contribuent à augmenter la vorticité.

Les seconds et troisièmes termes représentent l'augmentation de la vorticité transversale par l'action des gradients de pressions. Le quatrième terme comprend un gradient longitudinal et peut être supposé négligeable devant les autres. Les cinquième et sixième termes représentent la production de vorticité longitudinale respectivement par le cisaillement secondaire et par les inhomog nit s des anisotropies des contraintes normales du tenseur de Reynolds dans les directions transversales. Le dernier terme représente la diffusion de la vorticité longitudinale par les forces d'origine visqueuse [37].

En entrée, la vorticité longitudinale est nulle. A partir de la section 2, les courbures des parois créent des gradients de pression dans les directions transversales. Dans la première partie de la région de transition, l'écoulement est décéléré par l'augmentation de la section du canal. Les gradients de pression provoquent des valeurs négatives de la vorticité longitudinale dans le quart de section correspondant aux calculs, et inversement, positives dans le quart inférieur. Au voisinage immédiat des parois, l'adhérence du fluide impose la présence d'une couche mince où la vorticité change de signe [37]. Cette région, mentionnée par Davis, n'est pas capturée par les mesures. Dans la seconde partie de la zone de transition, la courbure des parois change, provoquant un changement de signe dans les gradients de pression. L'écoulement est par ailleurs accéléré par le rétrécissement de la section. La vorticité générée dans la première partie du canal, n'est pas détruite pour autant. Sur les station 4 et 5, les maxima de vorticité se déplacent au contraire vers le plan de symétrie horizontale, et s'intensifient. L'accélération de l'écoulement provoque en effet un étirement des structures vorticitaires, favorisé également par la courbure des parois latérales. La vorticité est ensuite diffusée par le mouvement turbulent jusqu'à la sortie.

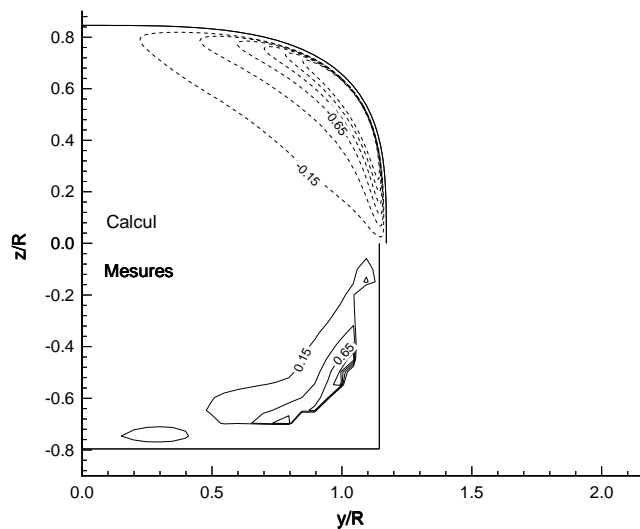


FIG. 9.26: Contours de vorticité longitudinale. Section 3. Modèle de Chen et Patel.

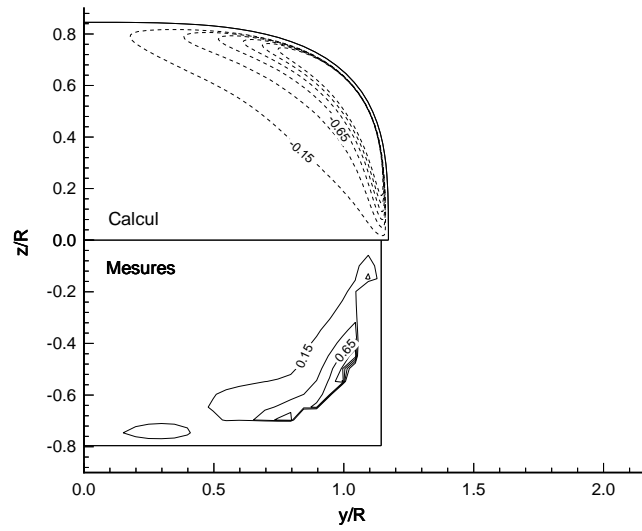


FIG. 9.27: *Contours de vorticité longitudinale. Section 3. Modèle de Wilcox.*

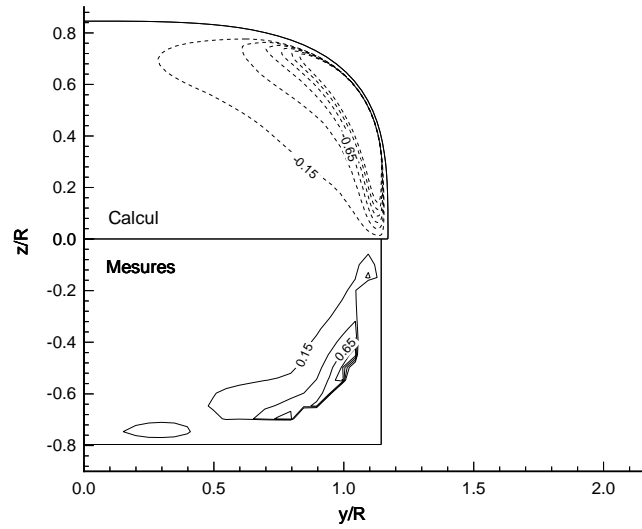


FIG. 9.28: *Contours de vorticité longitudinale. Section 3. Modèle de Shima.*

Comme précédemment, l'aspect des contours de vorticité longitudinale obtenus par les différents



modèles est similaire sur la station 3.

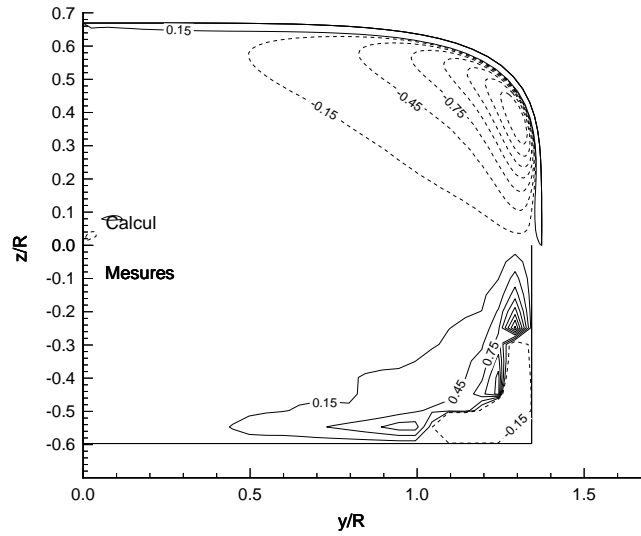


FIG. 9.29: *Contours de vorticité longitudinale. Section 4. Modèle de Chen et Patel.*

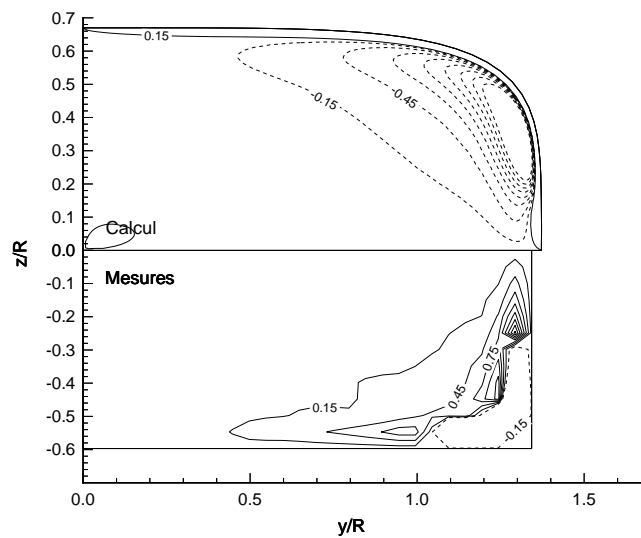


FIG. 9.30: *Contours de vorticité longitudinale. Section 4. Modèle de Wilcox.*

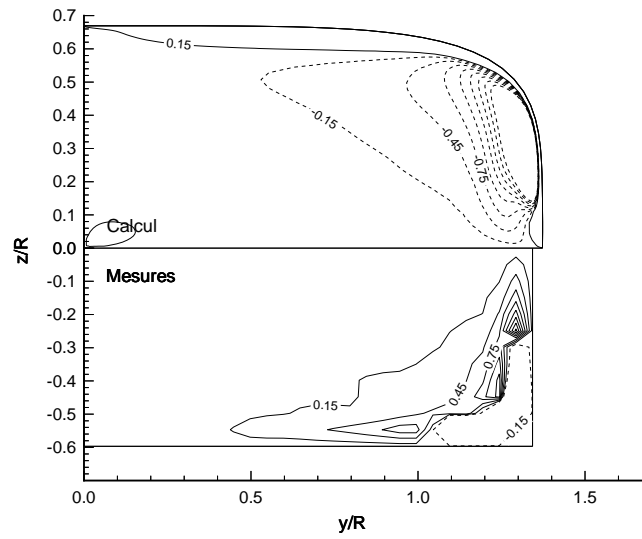


FIG. 9.31: *Contours de vorticité longitudinale. Section 4. Modèle de Shima.*

Des différences commencent à apparaître à la station 4. Les niveaux de vorticité prédits par le modèle de Chen et Patel sont moins intenses que ceux donnés par les deux autres modèles.

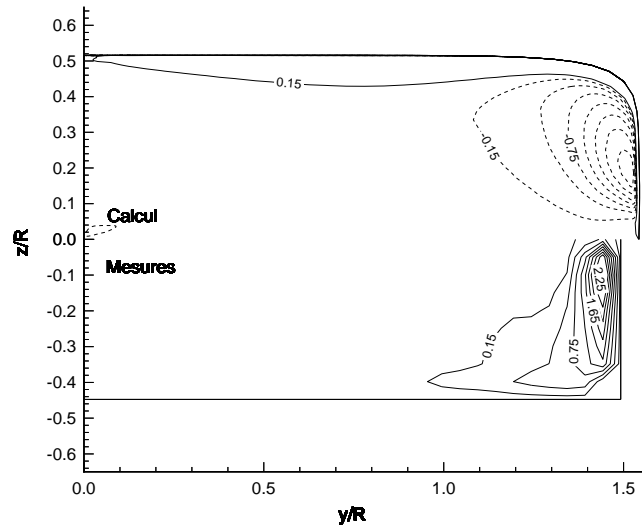


FIG. 9.32: *Contours de vorticité longitudinale. Section 5. Modèle de Chen et Patel.*

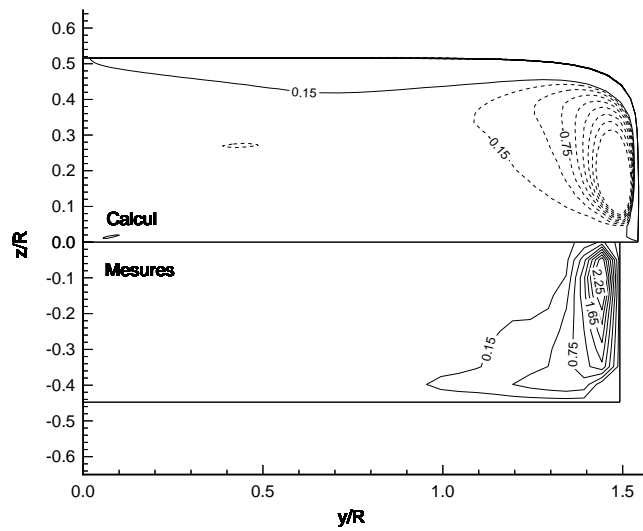


FIG. 9.33: Contours de vorticité longitudinale. Section 5. Modèle de Wilcox.

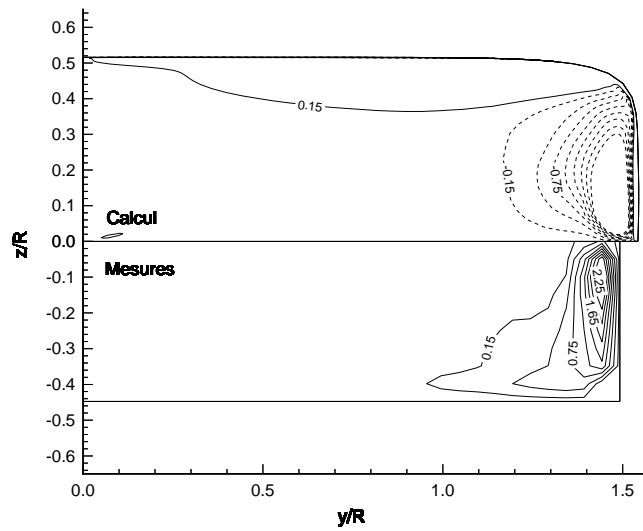


FIG. 9.34: Contours de vorticité longitudinale. Section 5. Modèle de Shima.

La station 5 conserve les mêmes caractéristiques que précédemment. Le modèle de type  $K - \varepsilon$  ne montre pas clairement la présence du tourbillon longitudinal, contrairement aux deux autres

modèles.

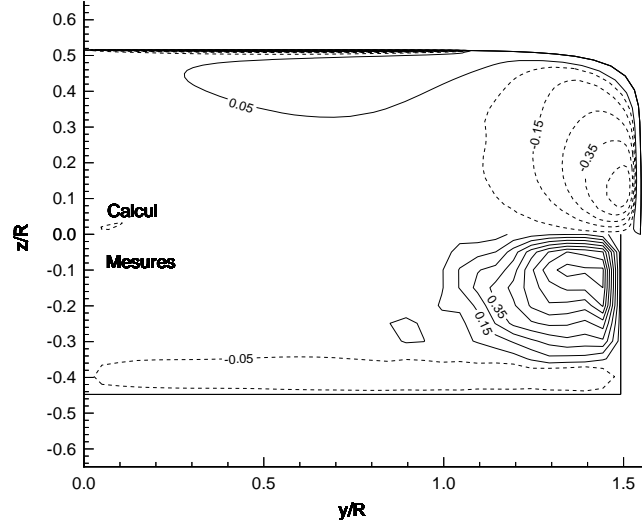


FIG. 9.35: Contours de vorticité longitudinale. Section 6. Modèle de Chen et Patel.

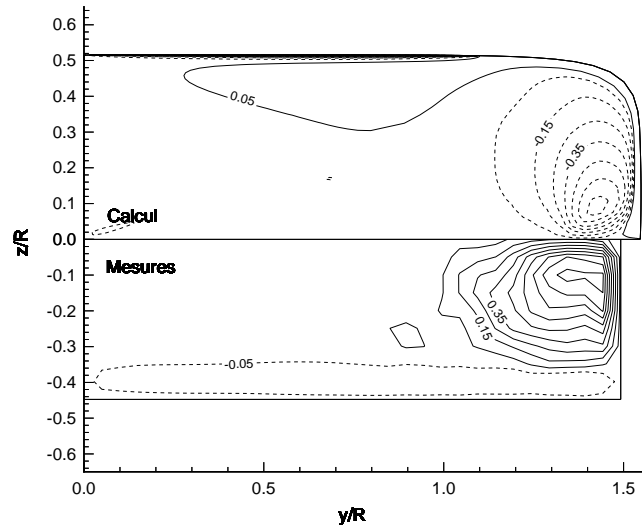


FIG. 9.36: Contours de vorticité longitudinale. Section 6. Modèle de Wilcox.

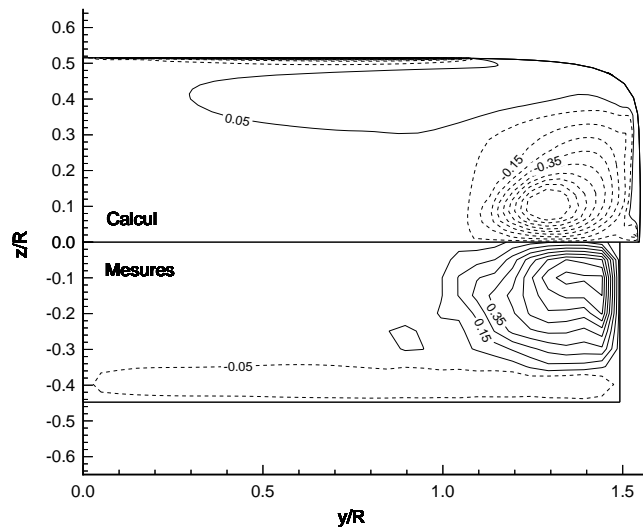


FIG. 9.37: *Contours de vorticité longitudinale. Section 6. Modèle de Shima.*

### Energie cinétique turbulente

Les contours d'énergie cinétique turbulente sont comparés aux données expérimentales disponibles sur les stations 5 et 6. Les mesures montrent en sortie de la zone de transition la présence d'une région proche de la paroi verticale où l'énergie cinétique turbulente est maximale. C'est également la région où les gradients de vitesse moyenne sont les plus importants. L'augmentation

de l'énergie cinétique turbulente est associée à la distorsion du mouvement moyen.

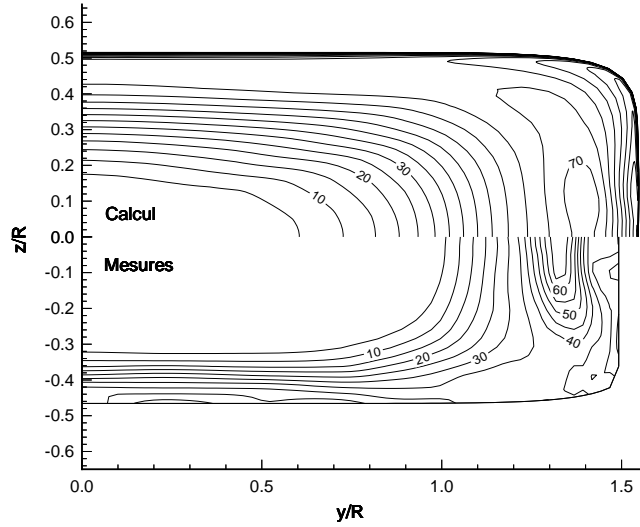


FIG. 9.38: *Energie cinétique turbulente  $K/U_b^2 \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Chen et Patel.*

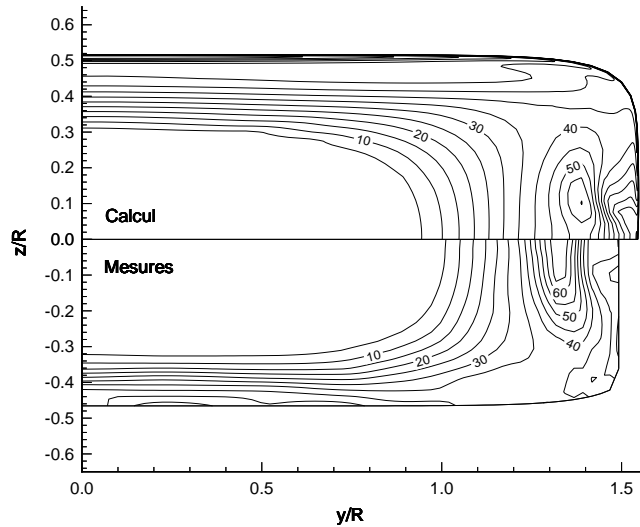


FIG. 9.39: *Energie cinétique turbulente  $K/U_b^2 \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Wilcox.*

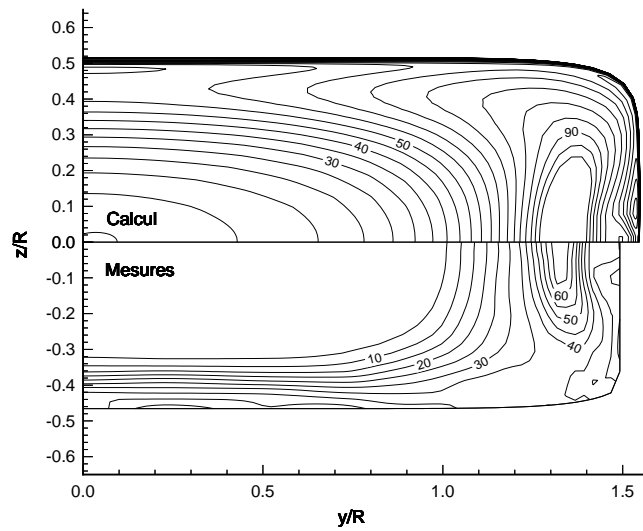


FIG. 9.40: *Energie cinétique turbulente  $K/U_b^2 \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.*

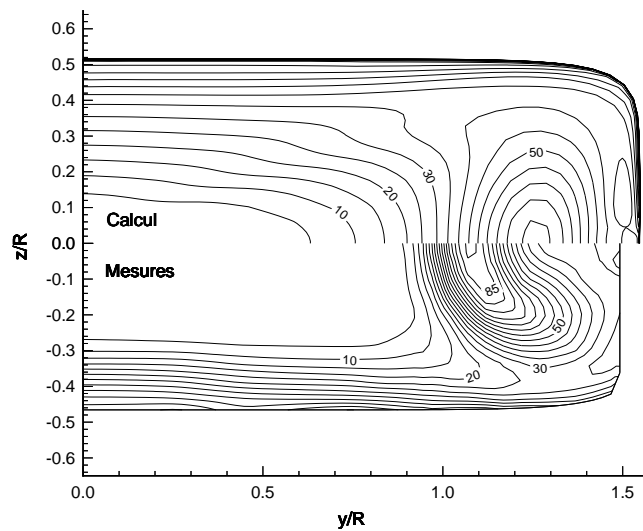


FIG. 9.41: *Energie cinétique turbulente  $K/U_b^2 \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Chen et Patel.*

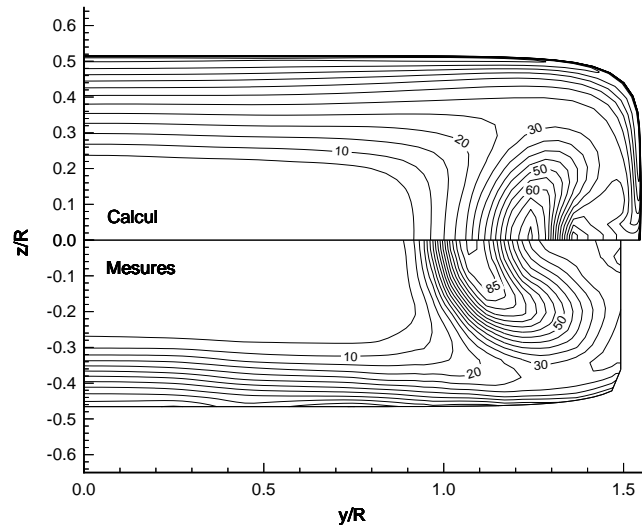


FIG. 9.42: *Energie cinétique turbulente  $K/U_b^2 \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Wilcox.*

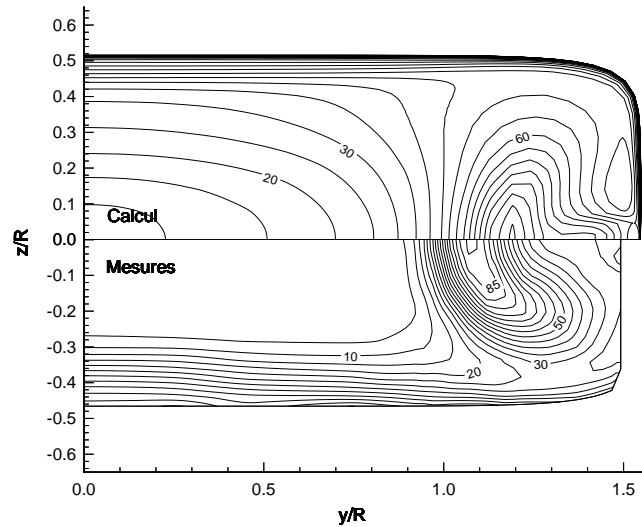


FIG. 9.43: *Energie cinétique turbulente  $K/U_b^2 \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.*

Les contours d'énergie cinétique turbulente calculés par le modèle  $K - \omega$  de Wilcox sont plus proches des données expérimentales que les prédictions des deux autres modèles, qui surestiment nettement l'énergie cinétique turbulente dans l'ensemble du canal. Le modèle de Shima présente cependant l'avantage par rapport au modèle de Chen et Patel de mieux restituer la forme des isocontours. Les modèles à deux équations localisent également les maxima d'énergie cinétique



turbulente plus près de la paroi verticale que le modèle de Shima. Ce décalage existe de façon plus marquée sur l'ensemble des modèles par rapport aux données expérimentales sur la section de sortie.

## Tenseur de Reynolds

Les composantes du tenseur de Reynolds ont été mesurées aux stations 5 et 6. Les contours de ces composantes données par le modèle de Shima sont représentés dans les figures suivantes. Les niveaux négatifs sont tracés par des lignes discontinues.

### Composantes normales

D'après les mesures, les amplitudes maximales des composantes des composantes normales du tenseur de Reynolds dans les directions transversales,  $R_{22}$  et  $R_{33}$  sont approximativement deux fois plus faible que celle de la composantes axiale  $R_{11}$ .

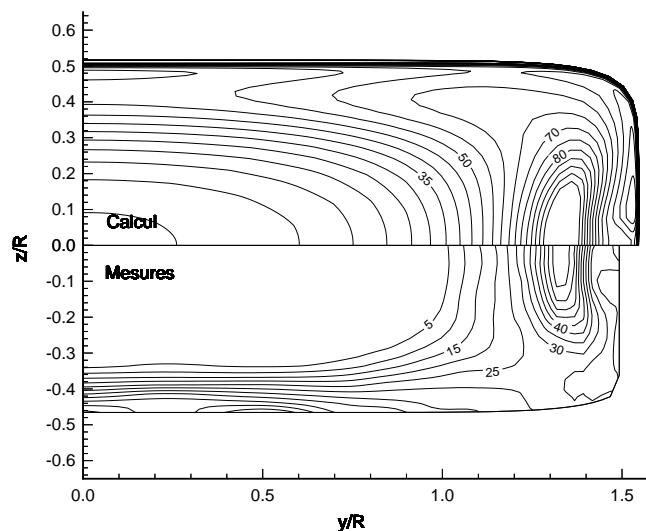


FIG. 9.44: Contours de  $R_{11} \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.

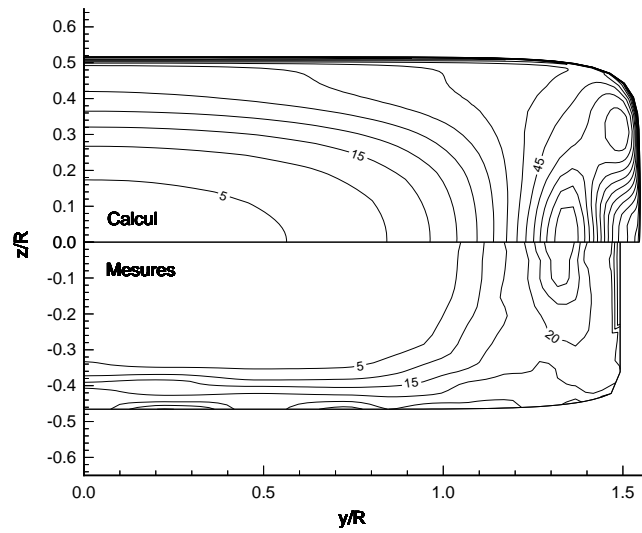


FIG. 9.45: Contours de  $R_{22} \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.

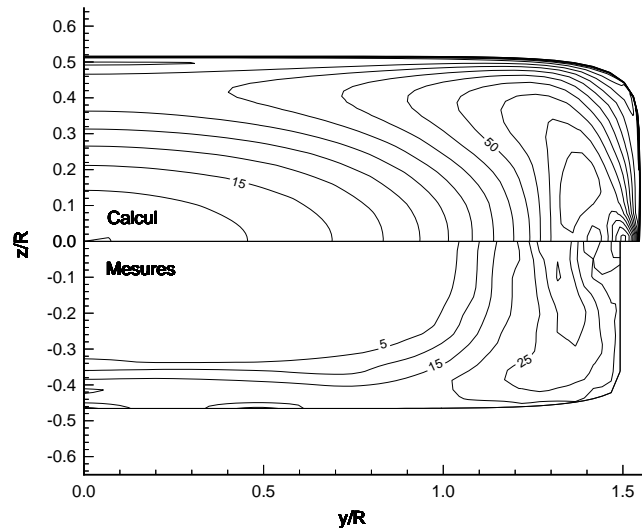


FIG. 9.46: Contours de  $R_{33} \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.

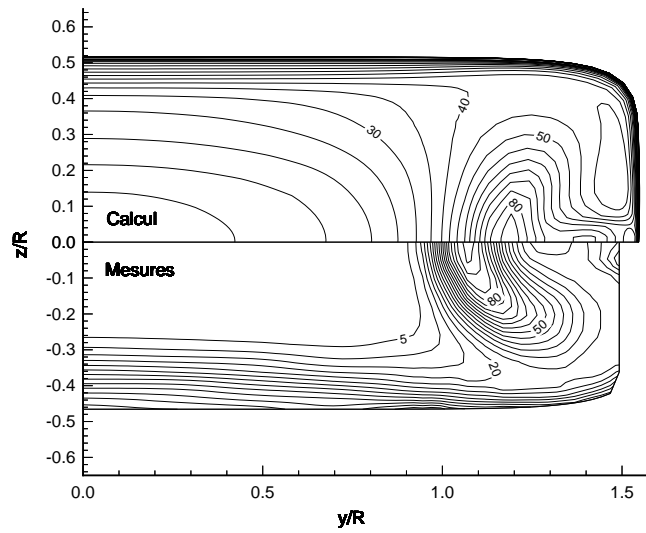


FIG. 9.47: Contours de  $R_{11} \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.

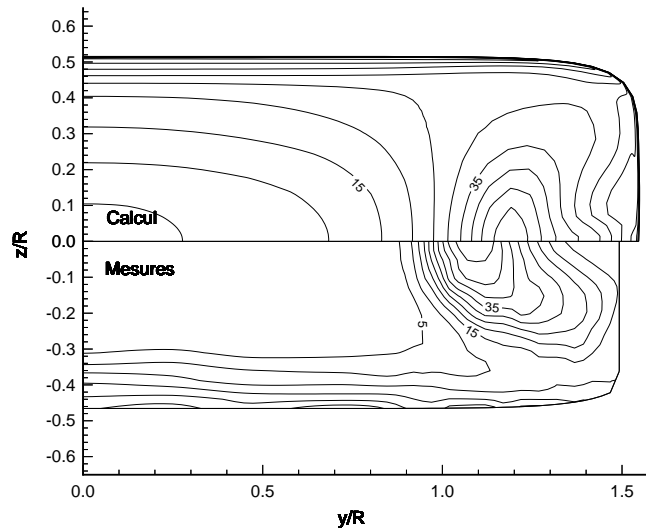


FIG. 9.48: Contours de  $R_{22} \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.

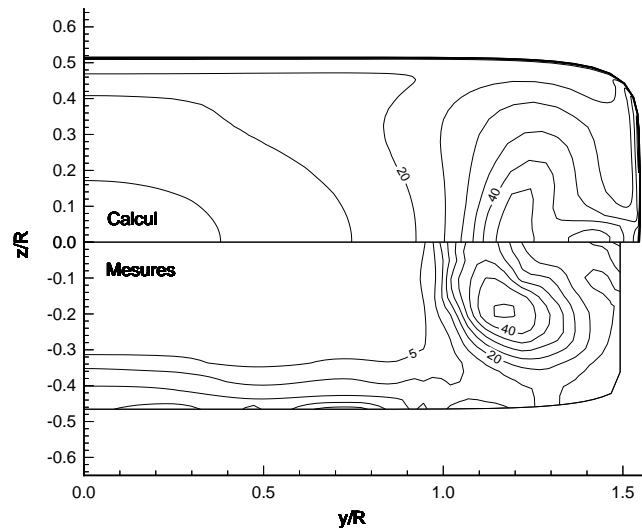


FIG. 9.49: Contours de  $R_{33} \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.

D'une façon générale, les niveaux de contrainte normale donnés par le modèle de Shima sont plus élevés dans l'ensemble du canal que sur les données expérimentales. La forme des isovalues et la localisation des maxima est du même ordre que pour l'énergie cinétique turbulente. Il est intéressant de regarder les anisotropies entre composantes normales.

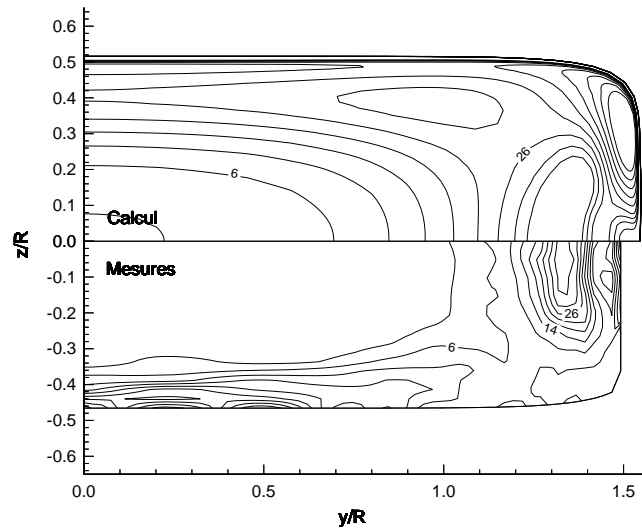


FIG. 9.50: Contours de  $(R_{11} - R_{22}) \times 10^4$ . Station 5. Anisotropie entre la composante axiale et la composante transversale horizontale. Modèle de Shima.

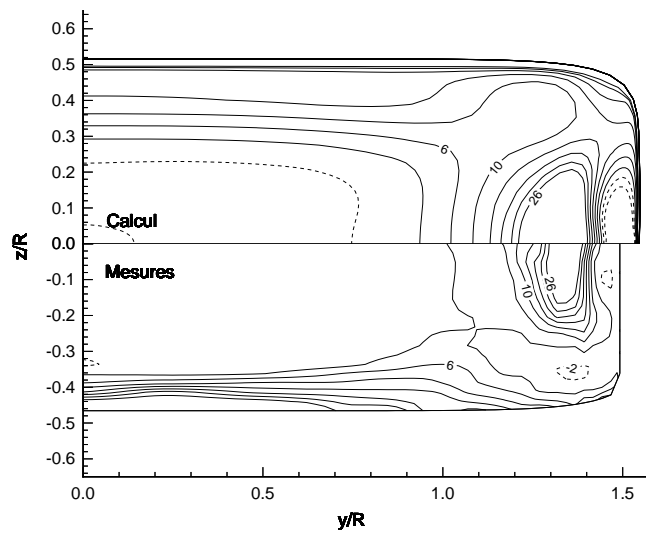


FIG. 9.51: *Contours de  $(R_{11} - R_{33}) \times 10^4$ . Station 5. Anisotropie entre la composante axiale et la composante transversale verticale. Modèle de Shima.*

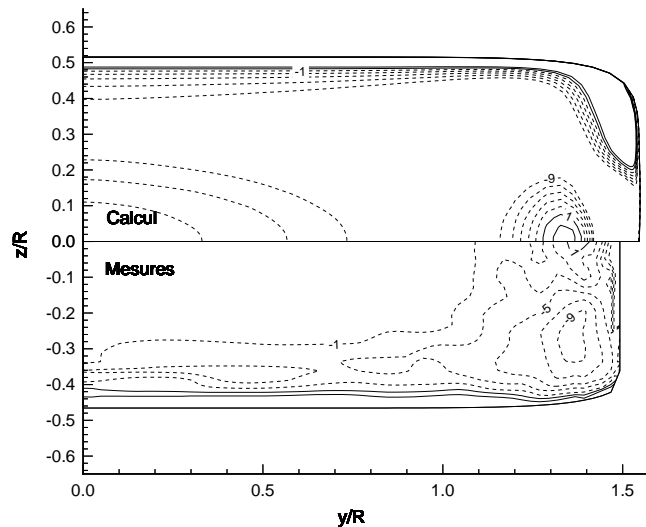


FIG. 9.52: *Contours de  $(R_{22} - R_{33}) \times 10^4$ . Station 5. Anisotropie entre les composantes transversales horizontale et verticale. Modèle de Shima.*

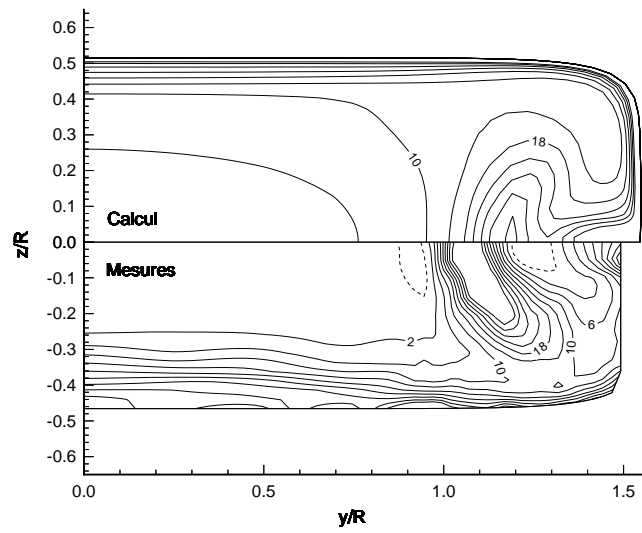


FIG. 9.53: Contours de  $(R_{11} - R_{22}) \times 10^4$ . Station 6. Anisotropie entre la composante axiale et la composante transversale horizontale. Modèle de Shima.

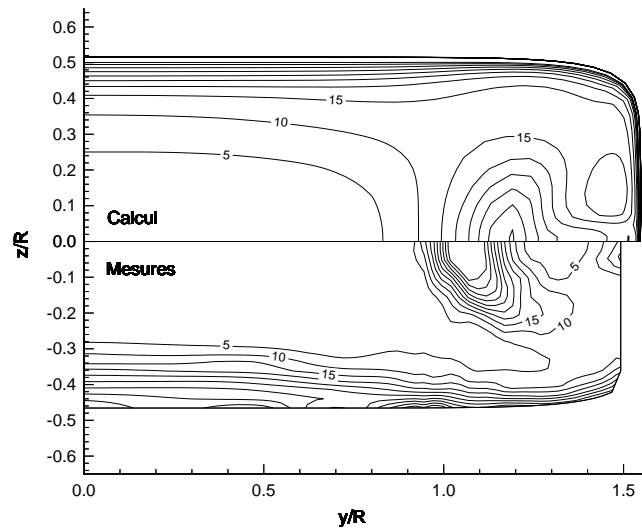


FIG. 9.54: Contours de  $(R_{11} - R_{33}) \times 10^4$ . Station 6. Anisotropie entre la composante axiale et la composante transversale verticale. Modèle de Shima.

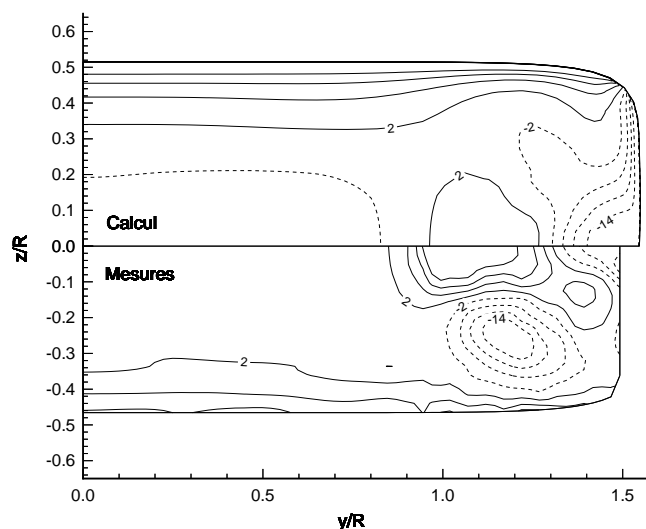


FIG. 9.55: Contours de  $(R_{22} - R_{33}) \times 10^4$ . Station 6. Anisotropie entre les composantes transversales horizontale et verticale. Modèle de Shima.

D'une façon générale, les calculs effectués avec le modèle de Shima reproduisent approximativement l'allure des contours des anisotropies des contraintes normales.

Sur la station 5, la région où l'anisotropie entre la composante axiale  $R_{11}$  et la composante transversale  $R_{22}$  est maximale est correctement localisée par le modèle, bien que son intensité soit sous-estimée. Le modèle capture également le déplacement de cette zone vers le centre du canal sur la station 6 et la décroissance de son intensité. La composante  $R_{11}$  reste cependant partout supérieure à la composante  $R_{22}$  contrairement aux données expérimentales où des régions où  $R_{22} > R_{11}$  apparaissent. Les mêmes tendances peuvent être observées pour les anisotropies entre  $R_{11}$  et  $R_{33}$  à ceci près que la région d'anisotropie négative au voisinage de la paroi verticale sur la station 5 est approximativement restituée. Son importance est toutefois surestimée par les calculs.

*Composantes de cisaillement*

Les composantes de cisaillement sont également mesurées sur les stations 5 et 6. Les contours négatifs sont tracés par des lignes discontinues.

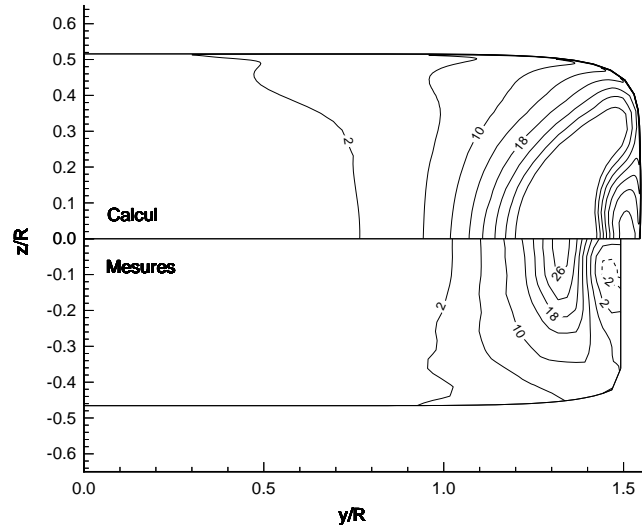


FIG. 9.56: Contours de  $R_{12} \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.

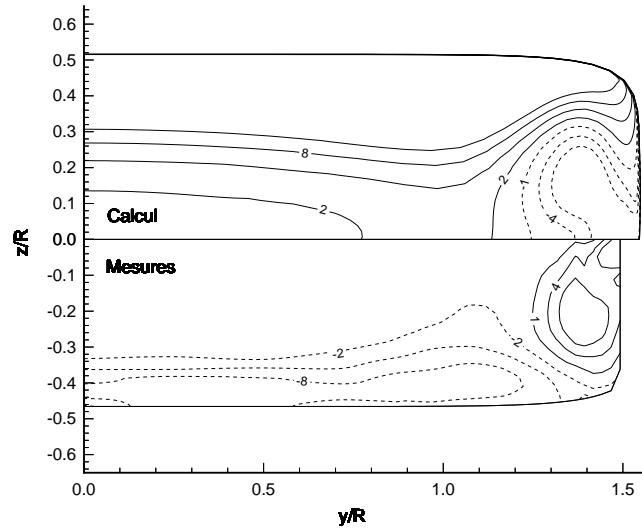


FIG. 9.57: Contours de  $R_{13} \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.



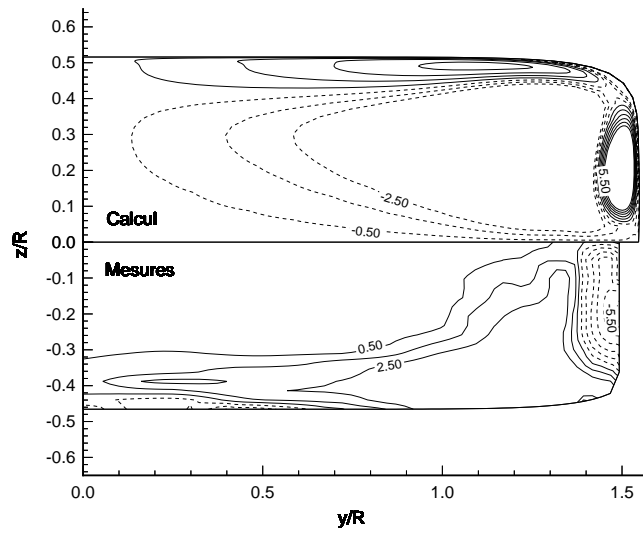


FIG. 9.58: Contours de  $R_{23} \times 10^4$ . Station 5. Modèle de Shima.

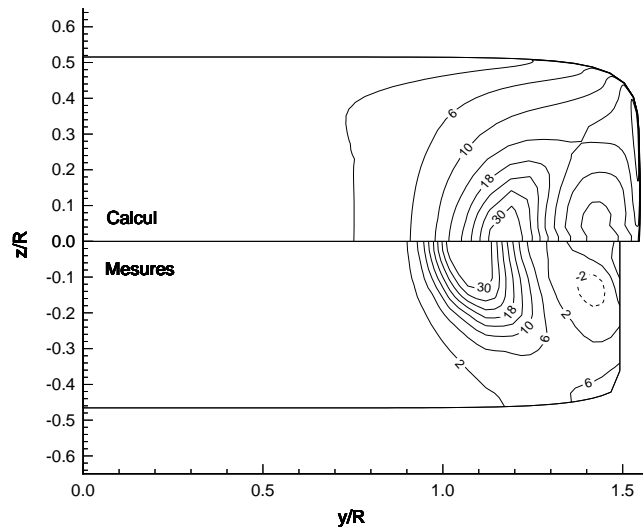


FIG. 9.59: Contours de  $R_{12} \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.

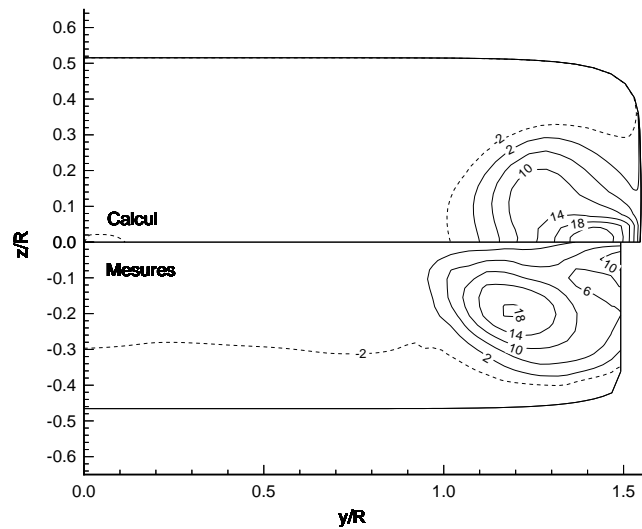


FIG. 9.60: Contours de  $R_{13} \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.

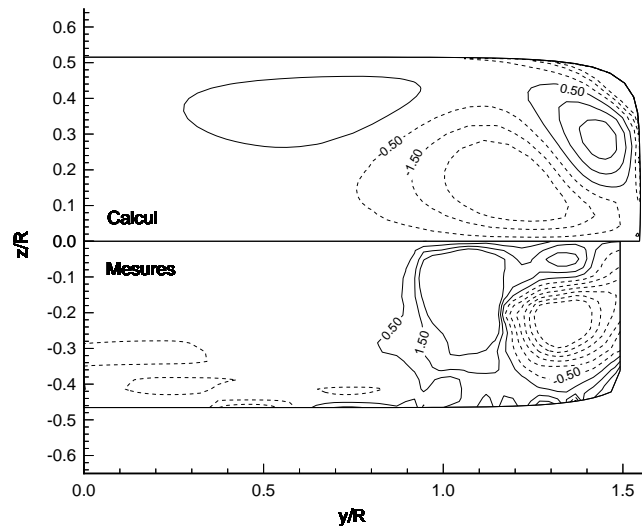


FIG. 9.61: Contours de  $R_{23} \times 10^4$ . Station 6. Modèle de Shima.

Les mesures montrent sur la station 5 une région au voisinage de la paroi verticale où le cisaillement  $R_{12}$  est négatif. Cette zone est plus importante sur la section de sortie. Le modèle de Shima, qui capture grossièrement l'aspect des contours du cisaillement sur ces sections ne montre cependant pas de région de valeurs négatives. La prédiction des contours de  $R_{13}$  et  $R_{23}$  sur la section 5 restitue globalement les tendances des données expérimentales. L'intensité des

cisaillements décroît cependant de façon plus importante que sur les mesures à la section de sortie.

#### 9.6.4 Commentaires

Les résultats obtenus sur le cas test de Davis et Gessner permettent de classer les performances des modèles suivant la hiérarchie attendue. Le modèle de type  $K - \varepsilon$  apparaît trop diffusif et ne capture pas la forme du tourbillon longitudinal au voisinage des parois verticales du canal, contrairement au modèle au second ordre. Le modèle à deux équations de type  $K - \omega$  paraît quant à lui nettement plus intéressant que la formulation de type  $K - \varepsilon$  dans la mesure où il restitue dans l'ensemble les caractéristiques de l'écoulement. L'intensité du tourbillon longitudinal développé par ce modèle semble néanmoins plus faible que celle obtenue avec le modèle de type  $R_{ij} - \varepsilon$ . Il faut noter par ailleurs que le calcul au second ordre est relativement robuste et effectué de façon standard, seul l'algorithme ayant été modifié pour respecter l'équilibre des termes sources. En particulier, il n'a pas été nécessaire d'effectuer une résolution couplée des équations ou d'avoir recours à une viscosité turbulente artificielle. Il serait intéressant de regarder la capacité des modèles  $K - \varepsilon$  et  $R_{ij} - \varepsilon$  à développer l'écoulement secondaire en partant d'une solution initiale similaire à celle utilisée pour le modèle  $K - \omega$  où le tourbillon n'est pas encore développé. L'influence de la méthode numérique pourrait enfin être testée en commençant par exemple par utiliser un maillage plus fin. Il pourrait être modifié en renforçant par section le nombre de points dans la zone du tourbillon longitudinal. L'influence du schéma numérique pourrait ensuite être regardée. Le comportement du modèle de type  $K - \omega$  par rapport aux modèles basés sur l'équation de transport de  $\varepsilon$  inciterait du point de vue de la modélisation à s'intéresser à des formulations hybrides.

---

## Chapitre 10

# Conclusion

Les principes de base de construction des modèles de turbulence ont été examinés dans un premier temps dans le cas des écoulements homogènes, cadre généralement retenu dans les premières étapes de la construction de fermetures. L'obtention des relations constitutives pour la turbulence a été présentée pour une modélisation algébrique du tenseur de Reynolds et sur les fermetures du tenseur des corrélations pression-déformation des modèles au second ordre. Les contraintes physiques et mathématiques - respect des propriétés tensorielles des termes exacts, indifférence matérielle, réalisabilité - que doivent vérifier les fermetures ont également été exposées. L'utilisation de ces techniques a été discutée avec la présentation des modélisations classiques des équations du tenseur de Reynolds et de l'équation du taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente.

L'étude du traitement particulier de la turbulence au voisinage des parois, puis des écoulements soumis à des forces de Coriolis a permis de souligner les avantages des fermetures au second ordre et de rappeler que les hypothèses de modélisation classiques présentent encore des difficultés de prédiction des écoulements rotationnels. Ces études ont conduit à proposer une fermeture portant sur l'équation de transport du tenseur du quatrième ordre représentant de façon exacte le tenseur des corrélations pression-déformation rapide dans une approximation homogène de l'écoulement. Le modèle nécessite la fermeture de trois termes correspondant, pour l'équation de ce tenseur, aux contributions lente et rapide du tenseur des corrélations pression-déformation et du tenseur des taux de dissipation dans l'équation des contraintes de Reynolds. Les performances de ce modèle ont été comparées aux formulations classiques sur des cas tests homogènes sélectionnés pour insister soit sur la contribution rapide soit sur le traitement du terme lent et du tenseur des taux de dissipation. Ces écoulements homogènes incluent non seulement des cas où la rotation est importante, mais également des configurations irrotationnelles. Les comparaisons ont montré un meilleur comportement du terme rapide du modèle proposé par rapport aux formulations classiques sur l'ensemble des configurations. Cette formulation s'adapte difficilement au cas des écoulements inhomogènes. Il serait intéressant de simplifier le traitement, en adoptant par exemple une fermeture algébrique du tenseur du quatrième ordre qui soit capable de prendre en compte de façon satisfaisante les écoulements cisailés en présence de fortes rotations, puisque que ce sont les configurations types du mouvement moyen les plus couramment rencontrées dans les écoulements réalistes.

L'étude des fermetures bas-Reynolds au voisinage des parois conserve par conséquent un traitement classique du tenseur des corrélations pression-déformation. Trois modèles ont été comparés dans le cas de l'écoulement de canal plan, pour lequel des expériences de simulation

directe permettent d'accéder au détail du budget des équations du tenseur de Reynolds. Ces formulations ont été choisies en raison de leur application aux écoulements évoluant pour des faibles nombres de Reynolds et en fonction de leur traitement du tenseur des corrélations pression-déformation. Le premier de ces modèles adopte une fonctionnelle tensoriellement linéaire, alors que les deux autres retiennent les termes non-linéaires dans le développement de la relation constitutive. L'intérêt de la prise en compte de ces termes est désormais bien connu dans le cas des écoulements homogènes. Elle est largement motivée par la possibilité de représenter l'état à deux composantes de la turbulence tout en respectant la contrainte de réalisabilité du modèle. Cet état limite a lieu dès lors que l'une des contraintes normales du tenseur de Reynolds s'annule et existe notamment dans le voisinage immédiat d'une paroi. Le caractère réalisable de la fermeture assure en principe que les solutions du modèle ont un sens physique en permettant notamment de ne jamais produire de contraintes normales négatives du tenseur de Reynolds. La validation de ces fermetures est actuellement bien établie dans le cas des écoulements homogènes. En revanche, son utilisation dans le contexte des écoulements turbulents inhomogènes à faible nombre de Reynolds reste encore relativement limitée. Le développement des corrections inhomogènes s'appuie généralement sur des calculs de simulation directe dans le cas du canal plan établi et des études de comportement asymptotiques au voisinage immédiat des parois. Les calculs effectués dans le cas du canal plan bas-Reynolds de Kim, Moin et Moser ont montré que les modèles ne convergent pas nécessairement vers une solution qui leur permettent de restituer les bons comportements asymptotiques aux parois et que dans l'ensemble du canal, la solution du système peut parfois rester assez éloignée des résultats de simulation directe. Le problème de l'accord sur les développements asymptotiques exacts réside dans le fait que les fermetures des différents termes présents dans les équations de transport sont construites en fonction des quantités exactes. Rien par contre n'oblige le modèle à satisfaire cette condition et par conséquent à fournir des solutions asymptotiquement correctes. Par ailleurs, il est bien évident que la vérification du bon comportement pariétal ne suffit pas à construire un modèle dont les solutions vont être consistantes avec les données de simulation directe dans tout le canal. D'un point de vue numérique, la résolution de l'écoulement de canal plan par les modèles non-linéaires s'est avérée plus délicate qu'avec le modèle linéaire. Les fermetures non-linéaires ont nécessité toutes les deux des modifications de leur expression pour fournir des solutions qui ne soient pas laminaires. Ces modifications sont de nature différentes dans les deux cas, et ont été effectuées uniquement pour isoler dans chacun des modèles, les mécanismes qui conduisent à la destruction de la turbulence. La convergence des modèles non-linéaires vers un état stationnaire reste également beaucoup plus difficile qu'avec le modèle linéaire, et il semble parfois que le système atteigne un cycle limite qui ne permet pas d'espérer obtenir une décroissance linéaire des résidus.

La validation d'un modèle de turbulence doit s'effectuer sur des écoulements réalistes, présentant une évolution plus complexe de ses caractéristiques et ne peut se contenter du cas très particulier de l'écoulement de canal plan établi. L'écoulement du canal de transition de Davis et Gessner traité à la fin de cette étude constitue un cas test intéressant. La géométrie est relativement simple alors que la configuration de l'écoulement permet de mettre en évidence dans une certaine mesure l'intérêt des fermetures au second ordre par rapport aux modèles classiques à deux équations de transport. Les résultats obtenus, s'ils restent perfectibles, n'ont nécessité aucun traitement numérique particulier des équations du tenseur de Reynolds et correspondent à une réduction satisfaisante des résidus non-linéaires. La résolution des équations apparaît par conséquent relativement robuste à condition que l'algorithme de couplage vitesse-pression-contraintes de Reynolds satisfasse à chaque instant les équilibres des gradients intervenant dans

---

les termes sources.



---

## Annexe A

# Méthodologie des fermetures statistiques en un point

En régime turbulent, les mouvements instantanés peuvent être décrits par les équations de Navier-Stokes. Cependant, la présence simultanée de structures tourbillonnaires de tailles et de fréquences caractéristiques différentes rend la simulation directe de l'écoulement turbulent encore difficilement applicable à des problèmes industriels. Il est alors intéressant de travailler sur une forme des équations de Navier-Stokes modifiées par des opérations de moyennes. La non-linéarité des termes convectifs de ces équations fait apparaître des corrélations inconnues entre les fluctuations turbulentes. On dispose alors d'un système ouvert d'équations. La fermeture de ce système s'effectue à l'aide de modèles de turbulence, fournissant des relations algébriques ou des équations aux dérivées partielles modélisant le comportement des corrélations turbulentes.

### A.1 Description statistique du mouvement

La description Eulérienne du mouvement écrit les variables dynamiques de l'écoulement comme fonction de l'espace et du temps. L'écoulement est supposé incompressible et la conservation des particules fluides dans un volume de contrôle est régie par les équations suivantes :

$$u_{i,i} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}\sigma_{ij,j} + f_i \quad (\text{A.2})$$

Le vecteur  $f_i$  désigne les forces de volume éventuellement appliquées à l'écoulement et linéaires par rapport aux vitesses, et  $u_i$  est la  $i$ ème composante de vitesse. Dans toute la suite, les notations indicielles seront adoptées, avec la convention de sommation sur les indices répétés, sauf indications contraires. La dérivée particulaire est définie par

$$\frac{d.}{dt} = \frac{\partial.}{\partial t} + u_k \frac{\partial.}{\partial x_k}$$

Le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$  s'écrit, pour un fluide Newtonien :

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{A.3})$$



où  $p$  est la pression statique, et  $\mu$  la viscosité dynamique, supposée constante, ainsi que la densité  $\rho$  du fluide.  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. L'hypothèse de fluide Newtonien conduit aux équations de Navier-Stokes, qui s'écrivent, pour un écoulement incompressible :

$$u_{i,i} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{du_i}{dt} = -\frac{1}{\rho}p_{,i} + \nu u_{i,jj} + f_i \quad (\text{A.5})$$

$\nu$  est la viscosité cinématique du fluide.

### A.1.1 Notion de moyenne de Reynolds

Le traitement de l'écoulement turbulent par des outils statistiques, introduit par O. Reynolds en 1895 [111], utilise une moyenne temporelle, suivant l'idée qu'une partie de l'écoulement turbulent peut être observée d'une façon globale sur un temps relativement long. Cette description est adaptée aux écoulements stationnaires, dont les propriétés statistiques sont indépendantes du temps, ou du moins évoluent beaucoup plus rapidement en espace qu'en temps. Une quantité instantanée  $\Phi(\underline{x}, t)$  de l'écoulement a pour moyenne :

$$\bar{\Phi}(\underline{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \Phi(\underline{x}, t) dt \quad (\text{A.6})$$

La méthode de résolution numérique d'un tel écoulement doit *a priori* évaluer également les différentes variables à un instant donné, de façon stationnaire. En pratique, l'intervalle de temps sur lequel s'opère la moyenne n'est pas infiniment long. Il est généralement admis que la période d'intégration est de l'ordre d'une centaine de fois supérieure à la durée de vie des plus grosses structures de l'écoulement.

Il est alors clair que cette moyenne temporelle peut être utilisée si l'écoulement est instationnaire, pourvu que pendant l'intervalle de temps de la moyenne, les quantités de l'écoulement n'évoluent pratiquement pas. Dans le cas d'une turbulence dont les variations temporelles sont trop rapides pour permettre d'accepter cette approximation, la moyenne temporelle devient inadéquate pour décrire le champ moyen. Ce dernier peut être vu comme une moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations d'un évènement et peut s'écrire comme :

$$\bar{\Phi}(\underline{x}, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Phi_n(\underline{x}, t) \quad (\text{A.7})$$

Cette moyenne est la plus générale.

Dans le cas particulier où le champ turbulent est invariant spatialement, la moyenne d'une quantité  $\Phi(\underline{x}, t)$  peut être traitée par une intégrale volumique sur l'ensemble de l'espace :

$$\bar{\Phi}(t) = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \int \int \Phi(\underline{x}, t) dV \quad (\text{A.8})$$

Cette moyenne s'applique à une turbulence homogène, dont les propriétés statistiques sont uniformes dans toutes les directions.

Lorsque la turbulence est stationnaire et homogène, ces trois moyennes sont équivalentes, et vérifient l'hypothèse d'ergodicité. Généralement, la turbulence est inhomogène, ce qui favorise le choix de la moyenne en temps pour traiter les équations de Navier-Stokes.

L'écart de la quantité instantanée à sa moyenne définit la fluctuation,

$$\phi' = \Phi - \bar{\Phi} \quad (\text{A.9})$$

Il est clair que la moyenne de la fluctuation est nulle,

$$\overline{\phi'} = 0 \quad (\text{A.10})$$

Lorsque la variable  $\Phi$  est déterminée par son équation d'évolution, il faut en évaluer la moyenne. Si  $\chi$  désigne le temps ou l'espace,  $\Psi$  une autre variable de l'écoulement, et  $\lambda$ , un scalaire quelconque, la moyenne de Reynolds satisfait les propriétés suivantes :

$$\overline{\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \chi} \quad (\text{A.11})$$

$$\quad (\text{A.12})$$

$$\overline{\Phi + \Psi} = \bar{\Phi} + \bar{\Psi} \quad (\text{A.13})$$

$$\overline{\lambda \Phi} = \lambda \bar{\Phi} \quad (\text{A.14})$$

$$\overline{\Phi \Psi} = \bar{\Phi} \bar{\Psi} \quad (\text{A.15})$$

Ces relations permettent d'établir les équations du mouvement.

### A.1.2 Equations du mouvement moyen

L'application de la moyenne de Reynolds aux équations de Navier-Stokes conduit aux équations de transport suivantes de quantités moyennes :

$$\overline{U_{i,i}} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{d\overline{U}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,i} - \overline{[u'_i u'_j]}_{,j} + \nu \overline{U}_{i,jj} + \overline{F}_i \quad (\text{A.17})$$

Ces équations, dites de Reynolds, ne diffèrent de la forme des équations instantanées que par l'apparition des corrélations doubles des fluctuations de vitesses. Ces corrélations proviennent de la non-linéarité du terme convectif et forment le tenseur de Reynolds, noté  $R_{ij}$  et symétrique en  $i$  et  $j$ . Sa demi-trace caractérise l'énergie cinétique de la turbulence, classiquement notée  $K$ .

Il faut également préciser que la dérivée particulaire suivant le mouvement moyen est désignée par l'opérateur suivant :

$$\frac{d.}{dt} = \frac{\partial.}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial.}{\partial x_k}$$

### A.1.3 Equations du mouvement fluctuant

Des équations régissant le mouvement instantané et le mouvement moyen se déduisent les équations d'évolution du mouvement fluctuant, qui s'écrivent :

$$u'_{i,i} = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{d u'_i}{dt} = -\frac{1}{\rho} p'_{,i} - u'_j \overline{U}_{i,j} + (u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j})_{,j} + \nu u'_{i,jj} + f'_i \quad (\text{A.19})$$

Dans toute la suite, l'exposant ' sera omis des quantités fluctuantes pour plus de clarté.

## A.2 Equations d'évolution des quantités statistiques

### A.2.1 Evolution des corrélations doubles

Les équations d'évolution du tenseur de Reynolds  $R_{ij} = \overline{u_i u_j}$  se déduisent des équations de transport des fluctuations de vitesse et s'écrivent, dans le cas d'une turbulence incompressible sous la forme :

$$\frac{dR_{ij}}{dt} = P_{ij} + G_{ij} + \Pi_{ij} + T_{ijk,k}^u - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^\nu \quad (\text{A.20})$$

où  $P_{ij}$ ,  $G_{ij}$ ,  $\Pi_{ij}$ ,  $T_{ijk,k}^u$  et  $d_{ij}^\nu$  désignent respectivement les termes de production par les gradients de vitesse moyenne, de production par les forces volumiques, de corrélation pression-vitesse, de transport turbulent, et de diffusion par viscosité moléculaire. Ils s'écrivent :

$$P_{ij} = -R_{ik} \overline{U_{j,k}} - R_{jk} \overline{U_{i,k}} \quad (\text{A.21a})$$

$$G_{ij} = (\overline{f_i u_j} + \overline{f_j u_i}) \quad (\text{A.21b})$$

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \overline{[u_i p_{,j} + u_j p_{,i}]} \quad (\text{A.21c})$$

$$T_{ijk}^u = -\overline{u_i u_j u_k} \quad (\text{A.21d})$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{u_{i,k} u_{j,k}} \quad (\text{A.21e})$$

$$d_{ij}^\nu = \nu \overline{[u_i u_j]_{,kk}} \quad (\text{A.21f})$$

Le tenseur  $\varepsilon_{ij}$  est classiquement nommé tenseur des taux de dissipation, bien qu'il ne représente pas exactement cette action, comme le montre sa définition. Si le tenseur des taux de déformations du champ fluctuant est noté :

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

le tenseur exact des taux de dissipation s'écrit :

$$\varepsilon_{ij}^r = \nu \overline{[u_{i,k} s_{jk} + u_{j,k} s_{ik}]} \quad (\text{A.22})$$

Il s'exprime aisément en fonction du tenseur  $\varepsilon_{ij}$ , en tenant compte du caractère incompressible de l'écoulement, comme :

$$\varepsilon_{ij}^r = \varepsilon_{ij} + \nu \overline{[u_i s_{jk} + u_j s_{ik}]_{,k}} \quad (\text{A.23})$$

Dans ce cas, si les corrélations des quantités du champ fluctuant sont indépendantes de leur localisation spatiale, les deux tenseurs sont rigoureusement identiques. C'est le cas lorsque les quantités statistiques sont invariantes par translation spatiale, c'est-à-dire lorsque la turbulence est homogène.

L'organisation des différentes contributions des termes sources de l'équation de transport du tenseur de Reynolds n'est évidemment pas unique. Les découpages proposés précédemment présentent l'avantage de faire apparaître explicitement la diffusion visqueuse. Les notations classiques proposent une réorganisation du terme de corrélation des gradients de pression fluctuante et des fluctuations de vitesses, en faisant intervenir le tenseur des corrélations pression-déformation,

$$\phi_{ij} = \frac{1}{\rho} \overline{p(u_{i,j} + u_{j,i})} \quad (\text{A.24})$$

de sorte que

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} - T_{ijk,k}^p \quad (\text{A.25})$$

avec le transport par les fluctuations de vitesse  $T_{ijk,k}^p$ , défini par:

$$T_{ijk,k}^p = \frac{1}{\rho} [\overline{p u_i} \delta_{jk} + \overline{p u_j} \delta_{ik}]_{,k} \quad (\text{A.26})$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

Les termes de transports turbulents et de transport par les fluctuations de vitesse sont généralement regroupés sous le même terme, noté :

$$d_{ij} = T_{ijk,k}^u + T_{ijk,k}^p \quad (\text{A.27})$$

Ils seront encore notés respectivement :

$$T_{ijk,k}^u = d_{ij}^u \quad (\text{A.28a})$$

$$T_{ijk,k}^p = d_{ij}^p \quad (\text{A.28b})$$

Nous reviendrons succinctement sur le choix de ces regroupements lors de la présentation des modèles.

### A.2.2 Evolution du tenseur des taux de dissipation

L'équation d'évolution du tenseur des taux de dissipation  $\varepsilon_{ij}$  peut également être formée à partir de l'évolution des fluctuations de vitesse. En adoptant les mêmes types de décomposition que précédemment, il vient :

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} = P_{ij}^{\varepsilon 1} + P_{ij}^{\varepsilon 2} + P_{ij}^{\varepsilon 3} + P_{ij}^{\varepsilon 4} + G_{ij}^{\varepsilon} - E_{ij}^{\varepsilon} + \phi_{ij}^{\varepsilon} + d_{ij}^{\varepsilon u} + d_{ij}^{\varepsilon p} + d_{ij}^{\varepsilon \nu} \quad (\text{A.29})$$

où les termes de production peuvent être scindés en quatre contributions :

$$P_{ij}^{\varepsilon 1} = -\nu (\overline{u_{i,m} u_{k,m}} \overline{U_{j,k}} + \overline{u_{j,m} u_{k,m}} \overline{U_{i,k}}) \quad (\text{A.30a})$$

$$P_{ij}^{\varepsilon 2} = -\nu (\overline{u_{i,m} u_{j,k}} + \overline{u_{j,m} u_{i,k}}) \overline{U_{k,m}} \quad (\text{A.30b})$$

$$P_{ij}^{\varepsilon 3} = -\nu (\overline{u_{k,m} u_{i,m}} \overline{U_{j,mk}} + \overline{u_{k,m} u_{j,m}} \overline{U_{i,mk}}) \quad (\text{A.30c})$$

$$P_{ij}^{\varepsilon 4} = -\nu (\overline{u_{i,k} u_{j,m} u_{k,m}} + \overline{u_{j,k} u_{i,m} u_{k,m}}) \quad (\text{A.30d})$$

Les deux premiers termes correspondent à une production par le mouvement moyen, le troisième est un terme de production inhomogène et le dernier traduit la production provenant du mouvement turbulent, par interaction des tourbillons entre eux. L'influence explicite des forces linéaires de volume intervient avec le tenseur

$$G_{ij}^{\varepsilon} = 2\nu [\overline{f_{i,k} u_{j,k}} + \overline{f_{j,k} u_{i,k}}] \quad (\text{A.31})$$

Le terme de dissipation s'écrit :

$$E_{ij}^{\varepsilon} = 2\nu \overline{u_{i,km} u_{j,km}} \quad (\text{A.32})$$

Le tenseur de redistribution est noté par :

$$\phi_{ij}^{\varepsilon} = \nu \frac{1}{\rho} \overline{p_{,m} (u_{i,jm} + u_{j,im})} \quad (\text{A.33})$$

Les trois contributions de la diffusion par le mouvement turbulent, par la pression, et par l'effet de la viscosité s'écrivent respectivement :

$$d_{ij}^{\varepsilon u} = -\nu (\overline{u_k u_{i,m} u_{j,m}})_{,k} \quad (A.34a)$$

$$d_{ij}^{\varepsilon p} = -\nu \frac{1}{\rho} [\overline{p_{,m} (u_{i,m} \delta_{jk} + u_{j,m} \delta_{ik})}]_{,k} \quad (A.34b)$$

$$d_{ij}^{\varepsilon \nu} = \nu^2 (\overline{u_{i,m} u_{j,m}})_{,kk} \quad (A.34c)$$

### A.2.3 Evolution de l'énergie cinétique turbulente

La trace de l'équation du tenseur de Reynolds fournit l'équation de l'énergie cinétique de la turbulence :

$$\frac{\overline{d}K}{dt} = P + G - \varepsilon + d + d^{\nu K} \quad (A.35)$$

avec les mêmes interprétations que précédemment.  $P$  désigne les termes de production par le mouvement moyen,  $G$ , l'influence explicite des forces de volume,  $\varepsilon$ , la dissipation,  $d$  le transport, et  $d^{\nu K}$ , les termes de diffusion.

$$P = -R_{mn} \overline{U}_{m,n} \quad (A.36a)$$

$$G = \overline{u_i f_i} \quad (A.36b)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{u_{i,j} u_{i,j}} \quad (A.36c)$$

$$d = -\frac{1}{2} (\overline{u_n u_n u_k})_{,k} - \frac{1}{\rho} \overline{u_n p_{,n}} \quad (A.36d)$$

$$d^{\nu K} = \nu K_{,jj} \quad (A.36e)$$

Le tenseur des corrélations pression-déformation est à trace nulle et n'intervient donc pas dans l'expression des termes sources de l'équation de l'énergie cinétique turbulente.

### A.2.4 Evolution du taux de dissipation

La trace de l'équation de transport du tenseur de dissipation fournit également l'équation du taux de dissipation :

$$\frac{\overline{d}\varepsilon}{dt} = P^\varepsilon + G^\varepsilon - E^\varepsilon + \phi^\varepsilon + d^{\varepsilon u} + d^{\varepsilon p} + d^{\varepsilon \nu} \quad (A.37)$$

avec de façon immédiate :

$$P^\varepsilon = P^{\varepsilon 1} + P^{\varepsilon 2} + P^{\varepsilon 3} + P^{\varepsilon 4}$$

où les deux premiers termes représentent la production par le mouvement moyen, le troisième est une action complémentaire inhomogène et le quatrième, un tenseur de production par action des étirements des structures turbulentes.

$$P^{\varepsilon 1} = -2 \nu \overline{u_{i,m} u_{j,m}} \overline{U}_{i,j} \quad (A.38a)$$

$$P^{\varepsilon 2} = -2 \nu \overline{u_{m,i} u_{m,j}} \overline{U}_{i,j} \quad (A.38b)$$

$$P^{\varepsilon 3} = -2 \nu \overline{u_j u_{i,m}} \overline{U}_{i,jm} \quad (A.38c)$$

$$P^{\varepsilon 4} = -2 \nu \overline{u_{i,j} u_{i,m} u_{j,m}} \quad (A.38d)$$

Les forces de volume se manifestent par :

$$G^\varepsilon = 2 \nu \overline{u_{i,j} f_{i,j}} \quad (\text{A.39})$$

La dissipation visqueuse s'écrit :

$$E^\varepsilon = 2 \nu^2 \overline{u_{i,jm} u_{i,jm}} \quad (\text{A.40})$$

Les corrélations avec la pression se mettent quant à elles sous la forme :

$$\phi^\varepsilon = \nu \frac{1}{\rho} \overline{p_{,j} (u_{i,ij})} \quad (\text{A.41})$$

et les termes de diffusion turbulente dus aux actions des fluctuations de vitesse et aux fluctuations de pression, les termes de diffusion visqueuse s'écrivent respectivement :

$$d^{\varepsilon u} = -\nu (\overline{u_m u_{i,j} u_{i,j}})_{,m} \quad (\text{A.42a})$$

$$d^{\varepsilon p} = -2 \nu \frac{1}{\rho} (\overline{p_{,i} u_{m,i}})_{,m} \quad (\text{A.42b})$$

$$d^{\varepsilon \nu} = \nu \varepsilon_{,mm} \quad (\text{A.42c})$$

Les interprétations de ces différents termes sont analogues à celles rappelées pour le tenseur des taux de dissipation.



---

## Annexe B

# Réduction d'une base fonctionnelle constituée de tenseurs du second ordre

Cette annexe rappelle l'expression du théorème de Cayley-Hamilton généralisé et donne l'ensemble des tenseurs indépendants formés à partir de deux tenseurs d'ordre deux quelconques. Les composantes de la base ainsi obtenue sont exprimées comme produits de ces deux tenseurs, développés à une certaine extension. Lorsque les extensions retenues sont les plus petites possibles, la base d'intégrité est dite minimale. En pratique, il n'y a pas lieu de retenir des extensions d'ordre supérieur à trois pour former une base complète et minimale à partir de deux tenseurs d'ordre deux. La réduction des extensions d'ordre supérieur à des combinaisons d'extensions d'ordre trois au plus, fait l'objet de cette annexe. Les relations obtenues sont ensuite appliquées à des bases tensorielles formées à partir des tenseurs des taux de déformation et des taux de rotation, largement utilisées dans les modèles classiques à deux équations de transport. Les relations de Cayley-Hamilton appliquées aux fonctionnelles basées sur le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds et linéaires suivant les gradients de vitesse moyenne, sont données dans le dernier paragraphe. L'hypothèse de linéarité, effectuée lors des modélisations classiques du tenseur des corrélations pression-déformation, permet en effet de ramener la manipulation de cette base à celle de deux bases indépendantes, formées chacune par deux tenseurs.

### B.1 Théorème de Cayley-Hamilton généralisé

Le théorème de Cayley-Hamilton, selon lequel une matrice vérifie son équation caractéristique, appliqué à un élément  $A$ , carré, de dimension trois, s'écrit de la façon suivante :

$$A^3 - A^2 tr(A) + \frac{1}{2}[(tr(A))^2 - tr(A^2)] A - det(A) Id = 0 \quad (B.1)$$

où  $Id$  désigne la matrice identité,  $tr$  l'opérateur trace et  $det$ , le déterminant, qui satisfait la relation :

$$det(A) = \frac{1}{6}[(tr(A))^3 + 2 tr(A^3) - 3 tr(A)tr(A^2)] \quad (B.2)$$

Soient trois matrices d'ordre trois,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . En appliquant le théorème de Cayley-Hamilton



à la somme  $A + \lambda B + \mu C$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des réels quelconques, il vient, en facteur de  $\lambda\mu$ , la relation suivante :

$$\begin{aligned} ABC + BCA + CAB + ACB + CBA + BAC = \\ (BC + CB)\{A\} + (CA + AC)\{B\} + (AB + BA)\{C\} \\ + A(\{BC\} - \{B\}\{C\}) + B(\{CA\} - \{C\}\{A\}) + C(\{AB\} - \{A\}\{B\}) \\ + [\{A\}\{B\}\{C\} - \{A\}\{BC\} - \{B\}\{CA\} - \{C\}\{AB\} + \{ABC\} + \{CBA\}]Id \end{aligned} \quad (B.3)$$

où l'opérateur  $\{.\}$  désigne la trace.

Les relations nécessaires à la détermination de la base d'intégrité formée par  $A$  et  $B$ , se déduisent de cette généralisation du théorème de Cayley-Hamilton par substitutions sur les matrices  $A, B$  et  $C$ . Ces relations sont les suivantes :

En choisissant  $A = C$  dans (B.3), il vient :

$$\begin{aligned} ABA + A^2B + BA^2 = & [\{A^2B\} - \{A\}\{AB\} - \frac{1}{2}\{B\}(\{A^2\} - \{A\}^2)]Id \\ & + A(\{AB\} - \{A\}\{B\}) \\ & + A^2\{B\} \\ & + \frac{1}{2}B(\{A^2\} - \{A\}^2) \\ & + (AB + BA)\{A\} \end{aligned} \quad (B.4)$$

La multiplication de cette équation par la matrice  $A$ , à gauche et à droite, conduit à deux équations, dont l'addition s'écrit, en substituant  $A^3$  par son expression donnée par le théorème de Cayley-Hamilton (B.1):

$$\begin{aligned} ABA^2 + A^2BA = & ABA\{A\} + \det(A)\{B\}Id \\ & + A(\{A^2B\} - \{A\}\{AB\}) + A^2\{AB\} \\ & - B \det(A) \end{aligned} \quad (B.5)$$

Pour simplifier l'écriture, Spencer et Rivlin [148] introduisent les matrices  $G(A, B)$  et  $H(A, B)$  telles que:

$$ABA = -A^2B - BA^2 + G(A, B) \quad (B.6)$$

et

$$ABA^2 + A^2BA = H(A, B) \quad (B.7)$$

Les relations (B.6) et (B.7) définissent alors ces fonctions :

$$\begin{aligned} G(A, B) = & [\{A^2B\} - \{A\}\{AB\} - \frac{1}{2}\{B\}(\{A^2\} - \{A\}^2)]Id \\ & + A(\{AB\} - \{A\}\{B\}) \\ & + A^2\{B\} \\ & + \frac{1}{2}B(\{A^2\} - \{A\}^2) \\ & + (AB + BA)\{A\} \end{aligned} \quad (B.8)$$

et

$$\begin{aligned} H(A, B) = & ABA\{A\} + \det(A)\{B\}Id \\ & + A(\{A^2B\} - \{A\}\{AB\}) + A^2\{AB\} \\ & - B \det(A) \end{aligned} \quad (B.9)$$

La matrice  $G(A, B)$  s'exprime donc comme polynôme de produits de matrices d'extension 1 et 2, au plus de degré 2. La fonction  $H(A, B)$  est quant à elle un polynôme de produits de matrices

d'extension 1 ou 2, au plus de degré 3. En effet elle s'écrit, en remplaçant l'extension  $ABA$  par un polynôme d'extensions 1 et 2, suivant (B.4) :

$$\begin{aligned}
 H(A, B) = & [\{A\}\{A^2B\} - \{A\}^2\{AB\} - \frac{1}{2}\{B\}(-2 \det(A) + \{A\}\{A^2\} - \{A\}^3)]Id \\
 & + A(\{A^2B\} - \{A\}^2\{B\}) \\
 & + A^2(\{AB\} - \{A\}\{B\}) \\
 & + \frac{1}{2}B(-2 \det(A) + \{A\}\{A^2\} - \{A\}^3) \\
 & + (AB + BA)\{A\}^2 \\
 & - (A^2B + BA^2)\{A\}
 \end{aligned} \tag{B.10}$$

Ces fonctions vont permettre d'obtenir la base fonctionnelle minimale au sens des extensions les plus petites possibles. La procédure de réduction des extensions fait l'objet du paragraphe suivant.

## **B.2 Tenseurs indépendants formés par deux tenseurs d'ordre trois**

### **B.2.1 Extension d'un produit de matrices**

Soit une matrice polynomiale, produit d'extension  $p$  de deux matrices  $A$  et  $B$  d'ordre trois. Elle s'écrit :

$$\forall p, 0 < n_p \leq 2, T_p(A^{\alpha_i}, B^{\beta_i}) = A^{n_1} B^{n_2} \dots A^{n_{p-1}} B^{n_p} \tag{B.11}$$

où

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^{p/2} n_{2j-1}, \quad \beta_i = \sum_{j=1}^{p/2} n_{2j}$$

sont les ordres de  $A$  et  $B$ .

### **B.2.2 Réduction des extensions**

D'une façon triviale, les seules extensions indépendantes d'ordre 1 sont :

$$Id, A, B, A^2, B^2 \tag{B.12}$$

De même, les extensions d'ordre 2 sont :

$$AB, BA, A^2B, B^2A, AB^2, BA^2, A^2B^2 \tag{B.13}$$

En notant  $X$ , produit de  $A$  et  $B$ , les extensions d'ordre supérieur à 2 sont nécessairement de la forme :

$$\begin{aligned}
 & AXA, \quad BXB, \quad AXB, \quad BXA, \\
 & A^2XA, \quad B^2XB, \quad A^2XB, \quad B^2XA, \\
 & AXA^2, \quad BXB^2, \quad AXB^2, \quad BXA^2, \\
 & A^2XA^2, \quad B^2XB^2, \quad A^2XB^2, \quad B^2XA^2
 \end{aligned} \tag{B.14}$$

La relation (B.6) montre que les groupements de type  $AXA$  et  $BXB$  ne sont pas à prendre en compte dans la base fonctionnelle. Ils s'expriment directement en fonction des extensions d'ordre immédiatement inférieur. Cela s'applique de façon immédiate aux groupements de type  $A^2XA^2$  et  $B^2XB^2$ .

De même la relation (B.7) indique qu'une seule des extensions du type  $AXA^2$  ou  $A^2XA$  est à retenir *a priori*.

Un groupement du type  $A^2XB^2$  s'écrit  $A^2XB^2 = A(AXB^2)$ . Par définition de la fonction  $G(X_1, X_2)$ , évaluée en  $(B, AX)$ , il vient :

$$A^2XB^2 = -A[B^2AX + BAXB - G(B, AX)] \quad (\text{B.15})$$

ce qui conduit en substituant les deux extensions du second membre par leur valeur en fonction de la fonction  $G$ , à la relation suivante :

$$3A^2XB^2 = -A^2G(B, X) - G(A, B)XB + AG(B, AX) - G(A, B^2)X + G(B, A^2X) \quad (\text{B.16})$$

Le second membre de cette expression fait intervenir des extensions au plus d'ordre 4, qui proviennent des second et troisième termes; ce sont  $ABXB$ ,  $BAXB$  et  $ABAX$ . Les extensions d'ordre 3 qui figurent dans cette expression sont de degré total moins élevé que  $A^2XB^2$  dans la mesure où  $A$  et  $B$  ne sont pas tous deux de degré 2 dans la même extension. Il est clair que les extensions d'ordre 4 se ramènent à des polynômes d'extensions d'ordre inférieur par des relations du type (B.4). En regroupant toutes les extensions d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un polynôme  $P_2(A, B, X)$ , il vient :

$$3A^2XB^2 = 2\{B\}A^2XB + 2\{A\}AXB^2 - (\{AB\} + \{A\}\{B\})AXB + P_2(A, B, X) \quad (\text{B.17})$$

Par conséquent les extensions du type  $A^2XB^2$  et  $B^2XA^2$  s'expriment directement en fonction d'extensions d'ordre inférieur ou de plus petit degré total.

Les seules extensions d'ordre supérieur à 2 qui peuvent être *a priori* retenues sont donc du type :

$$\begin{aligned} &AXB, \quad BXA, \\ &A^2XB, \quad B^2XA, \\ &AXA^2, \quad BXB^2, \quad AXB^2, \quad BXA^2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

D'une façon immédiate, les seules extensions d'ordre 3 indépendantes sont les suivantes :

$$ABA^2, BAB^2, AB^2A^2, BA^2B^2 \quad (\text{B.19})$$

Pour les extensions d'ordre 4, les réductions effectuées sur les extensions d'ordre 3 conduisent *a priori* à n'en retenir que quatre, soient :

$$A^2B^2AB, ABA^2B^2, B^2A^2BA, BAB^2A^2 \quad (\text{B.20})$$

En effet, les extensions

$$A^2BAB^2, B^2ABA^2, AB^2A^2B, BA^2B^2A$$

n'ont pas besoin d'être retenues dans la mesure où  $B^2AB$  et  $A^2BA$  s'expriment respectivement comme fonctions de  $BAB^2$  et  $ABA^2$  et d'extensions d'ordre inférieur, et que pour les mêmes raisons,  $B^2A^2B$  et  $A^2B^2A$  sont fonctions respectivement de  $BA^2B^2$  et  $AB^2A^2$  et de plus petites extensions.

Montrons qu'en fait ces extensions s'expriment en fonction d'extensions d'ordre inférieur et qu'il n'est donc pas nécessaire d'aller chercher des extensions d'ordre supérieur à trois dans le développement de la fonctionnelle.

Par définition, pour  $A$  et  $Y$ , tenseurs d'ordre trois quelconques,

$$AYA = -A^2Y - YA^2 + G(A, Y)$$

Une extension du type  $AB^2A^2Y$ , s'écrit alors :

$$AB^2A^2Y = AB^2[-AYA - YA^2 + G(A, Y)] \quad (\text{B.21})$$

Soit, en remplaçant  $A(B^2AY)A$  par une relation du type (B.6) dans cette expression :

$$AB^2A^2Y - A^2B^2AY = B^2(AY)A^2 - A(B^2Y)A^2 - G(A, B^2AY) + AB^2G(A, Y) \quad (\text{B.22})$$

Les extensions  $B^2(AY)A^2$  et  $B^2Y A^2$  peuvent encore être réduites, pour donner :

$$\begin{aligned} AB^2A^2Y - A^2B^2AY &= \frac{1}{3}[B^2G(A, AY) - G(B, A)AYA \\ &+ BG(A, BAY) - G(B, A^2)AY - AG(B, A)YA \\ &- ABG(A, BY) + AG(B, A^2)Y - AG(A, B^2Y) \\ &- 2G(A, B^2AY) + 2AB^2G(A, Y)] \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

De plus, la fonction  $H$  fournit la relation:

$$AB^2A^2Y + A^2B^2AY = H(A, B^2)Y \quad (\text{B.24})$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} 2AB^2A^2Y &= H(A, B^2)Y \\ &+ \frac{1}{3}[B^2G(A, AY) - G(B, A)AYA \\ &+ BG(A, BAY) - G(B, A^2)AY \\ &+ AG(B, A)YA - ABG(A, BY) \\ &+ AG(B, A^2)Y - AG(A, B^2Y) \\ &- 2G(A, B^2AY) + 2AB^2G(A, Y)] \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

et

$$\begin{aligned} 2A^2B^2AY &= H(A, B^2)Y \\ &- \frac{1}{3}[B^2G(A, AY) - G(B, A)AYA \\ &+ BG(A, BAY) - G(B, A^2)AY \\ &+ AG(B, A)YA - ABG(A, BY) \\ &+ AG(B, A^2)Y - AG(A, B^2Y) \\ &- 2G(A, B^2AY) + 2AB^2G(A, Y)] \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Il en est de même pour les extensions  $YA^2B^2A$  et  $YAB^2A^2$ . Soit, d'une façon analogue :

$$\begin{aligned} 2YA^2B^2A &= YH(A, B^2) \\ &+ \frac{1}{3}[G(A, YA)B^2 - AYAG(B, A) \\ &+ G(A, YAB)B - YAG(B, A^2) \\ &+ YAG(B, A)A - G(A, YB)BA \\ &+ YG(B, A^2)A - G(A, YB^2)A \\ &- 2G(A, YAB^2) + 2G(A, Y)B^2A] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

et

$$\begin{aligned} 2YAB^2A^2 &= YH(A, B^2) \\ &- \frac{1}{3}[G(A, YA)B^2 - AYAG(B, A) \\ &+ G(A, YAB)B - YAG(B, A^2) \\ &+ YAG(B, A)A - G(A, YB)BA \\ &+ YG(B, A^2)A - G(A, YB^2)A \\ &- 2G(A, YAB^2) + 2G(A, Y)B^2A] \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

ainsi que les expressions équivalentes obtenues en permutant  $A$  et  $B$ . Ces extensions d'ordre 4 s'expriment en fonction des extensions d'ordre inférieur ou de degré total inférieur. En effet, à titre d'exemple, l'extension  $A^2B^2AY$  s'écrit encore :

$$\begin{aligned}
 2A^2B^2AY &= -\frac{1}{3}\{A\}A^2BYA \\
 &\quad -\{A\}BA^2YA \\
 &\quad -2\{A\}A^2BAY \\
 &\quad +P_3(A, B, Y)
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

où  $P_3(A, B, Y)$  désigne un polynôme d'extensions de  $A, B$  et  $Y$  d'ordre inférieur ou égal à trois. Puisqu'on ne s'intéresse ici qu'aux extensions formées par les deux tenseurs  $A$  et  $B$ , il est clair que le tenseur  $Y$  ne peut prendre pour valeur que  $A, B, A^2$  ou  $B^2$ . Par conséquent, les réductions sur les extensions d'ordre trois de ces tenseurs réduisent toute extension de la forme  $A^2B^2AY$  à un polynôme d'extensions au plus d'ordre trois. Il en va de même des extensions de type  $AB^2A^2Y, YA^2B^2A$  ou  $YAB^2A^2$ .

Par conséquent, l'ensemble des extensions d'ordre 4 formées par les matrices  $A$  et  $B$  s'exprime en fonction des extensions d'ordre inférieur. Nécessairement, les extensions d'ordre encore supérieur s'expriment elles aussi en fonction des extensions d'ordre inférieur ou égal à trois. La base fonctionnelle minimale formée à partir des matrices  $A$  et  $B$  ne contient donc aucune extension de degré supérieur à trois.

### B.2.3 Bases d'intégrité minimales

En résumé, la base minimale d'intégrité matricielle est formée des 17 tenseurs suivants :

$$\begin{aligned}
 &Id \\
 &A, A^2, B, B^2 \\
 &AB, BA, AB^2, BA^2, A^2B, B^2A, A^2B^2, B^2A^2 \\
 &ABA^2, BAB^2, AB^2A^2, BA^2B^2
 \end{aligned} \tag{B.30}$$

La base d'intégrité invariante s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned}
 &\{A\}, \{A^2\}, \{A^3\}, \{B\}, \{B^2\}, \{B^3\} \\
 &\{AB\}, \{AB^2\}, \{BA^2\}, \{A^2B^2\}
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

## B.3 Application aux tenseurs des taux de déformation et de rotation

Ces relations vont être appliquées aux tenseurs des taux de déformation  $S$  et de rotation,  $W$ . Les relations de Cayley-Hamilton permettant de réduire la base tensorielle formée à partir de ces deux tenseurs sont simplifiées par la nature respectivement symétrique et antisymétrique de  $S$  et  $W$ . Dans le cas d'une turbulence incompressible, le tenseur  $S$  est également à trace nulle. Les bases d'intégrité matricielles et invariantes seront données dans le paragraphe ci-après et les principales relations de réduction des extensions seront récapitulées dans le paragraphe suivant.

### B.3.1 Bases minimales fonctionnelles et invariants

Tout comme précédemment, la base matricielle est formée par les 17 extensions suivantes :

$$\begin{aligned}
 & Id \\
 & S, S^2, W, W^2 \\
 & SW, WS, SW^2, WS^2, S^2W, W^2S, S^2W^2, W^2S^2 \\
 & SWS^2, WSW^2, SW^2S^2, WS^2W^2
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

et les invariants à retenir sont au nombre de 5, compte tenu des symétries des tenseurs :

$$\{S^2\}, \{S^3\}, \{W^2\}, \{SW^2\}, \{S^2W^2\} \tag{B.33}$$

### B.3.2 Relations de Cayley-Hamilton appliquées à la base

Toute opération sur cette base fait intervenir les relations de Cayley-Hamilton, dont on rappelle ici les principales relations pour les extensions d'ordre inférieur à 4.

- Extensions d'ordre 1

$$\begin{aligned}
 S^3 &= \frac{1}{2}\{S^2\}S + \frac{1}{3}\{S^3\}Id \\
 W^3 &= \frac{1}{2}\{W^2\}W
 \end{aligned}$$

Notons que la relation (B.2) devient  $\det(S) = \frac{1}{3}\{S^3\}$ .

- Extensions d'ordre 2

$$\begin{aligned}
 WS^3 - S^3W &= \frac{1}{2}\{S^2\}[WS - SW] \\
 W^2S^3 - S^3W^2 &= \frac{1}{2}\{S^2\}[W^2S - SW^2] \\
 W^3S^3 - S^3W^3 &= \frac{1}{4}\{S^2\}\{W^2\}[WS - SW] \\
 SW^3 - W^3S &= \frac{1}{2}\{W^2\}[SW - WS] \\
 S^2W^3 - W^3S^2 &= \frac{1}{2}\{W^2\}[S^2W - WS^2]
 \end{aligned}$$

- Extensions d'ordre 3

$$\begin{aligned}
 SWS &= -S^2W - WS^2 + \frac{1}{2}W\{S^2\} \\
 WSW &= -W^2S - SW^2 + \frac{1}{2}S\{W^2\} + \{W^2S\}Id \\
 S^2WS + SW^2S &= -\frac{1}{3}\{S^3\}W \\
 W^2SW + WSW^2 &= \{W^2S\}W \\
 S^2W^2S + SW^2S^2 &= \{SW^2\}S^2 + \{S^2W^2\}S - \frac{1}{3}\{S^3\}W^2 + \frac{1}{3}\{S^3\}\{W^2\}Id \\
 W^2S^2W + WS^2W^2 &= \{W^2S^2\}W \\
 SW^2S &= -S^2W^2 - W^2S^2 + \frac{1}{2}W^2\{S^2\} + \{SW^2\}S + \{W^2\}S^2 \\
 &+ [\{S^2W^2\} - \frac{1}{2}\{S^2\}\{W^2\}]Id \\
 WS^2W &= -W^2S^2 - S^2W^2 + \frac{1}{2}\{W^2\}S^2 + \{S^2\}W^2 \\
 &+ [\{S^2W^2\} - \frac{1}{2}\{S^2\}\{W^2\}]Id
 \end{aligned}$$

- Extensions d'ordre 4

$$\begin{aligned}
 2SW S^2 W^2 &= \{S^2 W^2\} SW \\
 &- \frac{1}{3}[\{SW^2\} (S^2 W + W S^2) + 2 \{SW^2\} S^2 W \\
 &- \{S^2 W^2\} (SW - WS) + \{S^2\}\{W^2\} SW \\
 &- \{SW^2\} SWS \\
 &- \{S^2\} W^2 SW \\
 &- \{W^2\} SWS^2 \\
 &- \left(\frac{3}{2} \{S^2\}\{SW^2\} + \frac{2}{3} \{W^2\}\{S^3\}\right) W]
 \end{aligned}$$

soit encore, en remplaçant  $SWS$  par son expression en fonction des extensions d'ordre inférieur :

$$\begin{aligned}
 2SW S^2 W^2 &= \{S^2 W^2\} SW \\
 &- \frac{1}{3}[2 \{SW^2\} (S^2 W + W S^2) + 2 \{SW^2\} S^2 W \\
 &- \{S^2 W^2\} (SW - WS) + \{S^2\}\{W^2\} SW \\
 &- \{S^2\} W^2 SW \\
 &- \{W^2\} SWS^2 \\
 &- (2 \{S^2\}\{SW^2\} + \frac{2}{3} \{W^2\}\{S^3\}) W]
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 2W^2 S^2 WS &= \{S^2 W^2\} WS \\
 &- \frac{1}{3}[2 \{SW^2\} (S^2 W + W S^2) + 2 \{SW^2\} W S^2 \\
 &+ \{S^2 W^2\} (SW - WS) - \{S^2\}\{W^2\} WS \\
 &- \{S^2\} WSW^2 \\
 &- \{W^2\} S^2 WS \\
 &- (2 \{S^2\}\{SW^2\} + \frac{2}{3} \{W^2\}\{S^3\}) W]
 \end{aligned}$$

Il faut remarquer que les extensions  $WSW^2$  et  $S^2WS$  s'expriment respectivement en fonction de  $W^2SW$  et  $SW S^2$  et d'extensions d'ordre inférieur, ce qui doit être écrit dans l'expression de  $W^2 S^2 WS$  pour l'exprimer dans la même base que  $SW S^2 W^2$ . Il peut également être noté que :

$$\begin{aligned}
 2(SW S^2 W^2 - W^2 S^2 WS) &= [SW - WS] \frac{1}{3} (5 \{S^2 W^2\} - \{S^2\}\{W^2\}) \\
 &+ [W S^2 - S^2 W] \frac{2}{3} \{SW^2\} \\
 &+ [W S W^2 - W^2 S W] \frac{1}{3} \{S^2\} \\
 &+ [S^2 W S - S W S^2] \frac{1}{3} \{W^2\}
 \end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{aligned}
 2W^2 S^2 WS &= \{S^2 W^2\} WS \\
 &- \frac{1}{3}[2 \{SW^2\} (S^2 W + W S^2) + 2 \{SW^2\} W S^2 \\
 &+ \{S^2 W^2\} (SW - WS) - \{S^2\}\{W^2\} WS \\
 &+ \{S^2\} W^2 SW \\
 &+ \{W^2\} SWS^2 \\
 &- (3 \{S^2\}\{SW^2\} + \frac{1}{3} \{W^2\}\{S^3\}) W]
 \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
 2SW^2 S^2 W &= \{SW^2\} S^2 W + \{S^2 W^2\} SW + \frac{1}{6} \{W^2\}\{S^3\} W \\
 &+ \frac{1}{3}[-\{S^2 W^2\} (SW - WS) + \{S^2\}\{W^2\} SW \\
 &+ \{SW^2\} SW^2 + \frac{1}{3} \{W^2\}\{S^3\} W \\
 &- \{SW^2\} SWS \\
 &- \{S^2\} W^2 SW \\
 &- \{W^2\} SWS^2]
 \end{aligned}$$

soit encore, en réduisant  $SWS$  :

$$\begin{aligned}
 2SW^2S^2W &= \{SW^2\}S^2W + \{S^2W^2\}SW + \frac{1}{6}\{W^2\}\{S^3\}W \\
 &+ \frac{1}{3}[-\{S^2W^2\}(SW - WS) + \{S^2\}\{W^2\}SW \\
 &+ \{SW^2\}(S^2W + WS^2) \\
 &+ \{SW^2\}SW^2 + (\frac{1}{3}\{W^2\}\{S^3\} - \frac{1}{2}\{S^2\})W \\
 &- \{S^2\}W^2SW \\
 &- \{W^2\}SW^2S^2
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 2WS^2W^2S &= \{SW^2\}WS^2 + \{S^2W^2\}WS + \frac{1}{6}\{W^2\}\{S^3\}W \\
 &+ \frac{1}{3}[\{S^2W^2\}(SW - WS) + \{S^2\}\{W^2\}WS \\
 &+ \{SW^2\}(S^2W + WS^2) \\
 &+ \{SW^2\}W^2S + (\frac{1}{3}\{W^2\}\{S^3\} - \frac{1}{2}\{S^2\}\{W^2\})W \\
 &- \{S^2\}WSW^2 \\
 &- \{W^2\}S^2WS
 \end{aligned}$$

et là encore, l'expression de cette extension dans la même base minimale que sa transposée conduit à :

$$\begin{aligned}
 2WS^2W^2S &= \{SW^2\}WS^2 + \{S^2W^2\}WS + \frac{1}{6}\{W^2\}\{S^3\}W \\
 &+ \frac{1}{3}[\{S^2W^2\}(SW - WS) + \{S^2\}\{W^2\}WS \\
 &+ \{SW^2\}(S^2W + WS^2) \\
 &+ \{SW^2\}W^2S + (\frac{2}{3}\{W^2\}\{S^3\} - \{S^2\}\{W^2\})W \\
 &+ \{S^2\}W^2SW \\
 &+ \{W^2\}S^2WS
 \end{aligned}$$

en remarquant que :

$$\begin{aligned}
 2(SW^2S^2W - WS^2W^2S) &= [SW - WS]\frac{1}{3}(-\{S^2W^2\} + \{S^2\}\{W^2\}) \\
 &- [WS^2 - S^2W]\frac{2}{3}\{SW^2\} \\
 &+ [WSW^2 - W^2SW]\frac{1}{3}\{S^2\} \\
 &+ [S^2WS - SW^2S]\frac{1}{3}\{W^2\}
 \end{aligned}$$

D'un point de vue pratique, il faut noter que les modèles classiques ne reposent pas sur la base tensorielle complète, mais effectuent une troncature généralement à l'ordre deux sur le degré total des extensions. Les relations de Cayley-Hamilton portant sur les extensions d'ordre quatre sont donc rarement manipulées et n'ont été donnée ici que pour connaître la forme générale des relations constitutives basées sur une fonctionnelle de ce type.

## B.4 Application au tenseur d'anisotropie et aux tenseurs des taux de déformation et de rotation

Les expressions précédentes concernent la réduction des extensions formées à partir de deux tenseurs d'ordre trois quelconques. Ce type de réduction peut être étendu à une combinaison d'un nombre supérieur de tenseurs.

Si la fonctionnelle isotrope en  $S$  et  $W$  est couramment utilisée dans les modèles non-linéaires à deux équations de transport, le développement classique du tenseur des corrélations pression-déformation conduit à une expression fonctionnelle en  $S$ ,  $W$  et  $b$ , tenseur d'anisotropie du tenseur



de Reynolds. Cette fonctionnelle est cependant par construction tensoriellement linéaire en  $S$  et  $W$ , ce qui revient à la décomposer comme somme de fonctionnelles en  $(b, S)$  et  $(b, W)$ , linéaires en fonction des gradients de vitesse moyenne. Les relations du paragraphe (B.2) s'appliquent alors séparément aux extensions formées par  $(b, S)$  d'une part, et  $(b, W)$  d'autre part. Ce paragraphe récapitule les bases tensorielles et invariants, issues de ces extensions et linéaires en  $S$  et  $W$ , et donne les principales relations nécessaires à leur manipulation.

#### B.4.1 Bases minimales fonctionnelles et invariants

La base tensorielle est composée d'une part des extensions en  $(b, S)$  :

$$\begin{aligned} & Id \\ & b, b^2, S, \\ & bS, Sb, b^2S, Sb^2, \\ & bSb^2 \end{aligned} \tag{B.34}$$

et d'autre part des extensions en  $(b, W)$  :

$$\begin{aligned} & W \\ & bW, Wb, b^2W, Wb^2, \\ & bWb^2 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Les invariants doivent être également linéaires en  $S$  et  $W$ . Ce sont les quatre suivants :

$$\{b^2\}, \{b^3\}, \{bS\}, \{b^2S\} \tag{B.36}$$

Rappelons qu'il est classique de noter les invariants du tenseur d'anisotropie de la façon suivante [89] :

$$\begin{aligned} II &= -\frac{1}{2} \{b^2\} \\ III &= \frac{1}{3} \{b^3\} \end{aligned} \tag{B.37}$$

#### B.4.2 Relations de Cayley-Hamilton appliquées à la base

Le théorème de Cayley-Hamilton s'applique sur le tenseur d'anisotropie avec les notations introduites précédemment :

$$b^3 = -IIb + III Id \tag{B.38}$$

De plus :

$$\det b = III \tag{B.39}$$

Les relations permettant de réduire les extensions sont basées principalement sur les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} bSb &= -b^2S - Sb^2 - IIS + \{bS\}b + \{b^2S\}Id \\ bSb^2 + b^2Sb &= \{bS\}b^2 + \{b^2S\}b - IIIS \\ b^2Sb^2 &= -II^2S + \{b^2S\}b^2 - III(bS + Sb) - II(b^2S + Sb^2) \\ &\quad + [II\{b^2S\} - III\{bS\}]Id \\ bWb &= -b^2W - Wb^2 - IIW \\ bWb^2 + b^2Wb &= -IIIW \\ b^2Wb^2 &= -II^2W - III(bW + Wb) - II(b^2W + Wb^2) \end{aligned}$$

Il est clair que la base linéaire en fonction des gradients de vitesse moyenne proposée au paragraphe précédent est minimale au sens des extensions. N'importe quel élément de la base choisie peut être changé pour une extension d'ordre plus élevé tant que les relations ci-dessus sont satisfaites.



---

## Annexe C

# Modèles algébriques explicites

Les équations d'évolution d'une turbulence homogène incompressible se mettent classiquement sous la forme suivante :

$$\frac{\bar{d}\varepsilon}{\bar{d}t} = C_{\varepsilon_1} P \frac{\varepsilon}{K} - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (C.1a)$$

$$\frac{\bar{d}R_{ij}}{\bar{d}t} = P_{ij} + G_{ij} - \varepsilon_{ij} + \phi_{ij} \quad (C.1b)$$

où le taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente est modélisé de façon classique.

$$\frac{\bar{d}}{\bar{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{V}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (C.2)$$

désigne la dérivée convective, et la production d'énergie cinétique turbulente est notée :

$$P = -R_{mn} S_{mn} \quad (C.3)$$

Les formulations classiques associent les modélisations du tenseur des corrélations pression-déformation et du tenseur des taux de dissipation (Lumley [89]). Le déviateur de ce dernier est supposé pouvoir s'exprimer comme une fonctionnelle isotrope du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds et des échelles scalaires de la turbulence, ce qui permet de le regrouper avec l'expression classique du terme lent. Il vient :

$$\frac{\bar{d}R_{ij}}{\bar{d}t} = P_{ij} + G_{ij} - \frac{2}{3}\varepsilon \delta_{ij} + \phi_{ij}^* \quad (C.4)$$

où

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij} - D\varepsilon_{ij} \quad (C.5)$$

Dans le cas d'un repère en rotation uniforme, les forces d'inertie de Coriolis s'écrivent :

$$G_{ij} = 2 [R_{ik} \theta_{jk} + R_{jk} \theta_{ik}] \quad (C.6)$$

où

$$\theta_{ij} = \varepsilon_{ijm} \Omega_m \quad (C.7)$$

désigne le tenseur de rotation des axes du repère. La production peut alors s'écrire sous la forme :

$$\tilde{P}_{aij} = -R_{ik} \tilde{V}_{a,j,k} - R_{jk} \tilde{V}_{ai,k} \quad (C.8)$$

où le gradient tildé est défini par :

$$\tilde{V}_{ai,j} = \bar{V}_{i,j} - 2\theta_{ij} \quad (\text{C.9})$$

La forme classique du tenseur des corrélations pression-déformation est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} \phi_{ij}^* &= \frac{\varepsilon}{2K} \left\{ \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S [b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \right\} \\ &+ \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 [b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{ik}^2 S_{jk} + b_{jk}^2 S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik} \bar{W}_{ajk} + b_{jk} \bar{W}_{aik}] \\ &+ \beta_7 [b_{ik}^2 \bar{W}_{ajk} + b_{jk}^2 \bar{W}_{aik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} \bar{W}_{akp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 \bar{W}_{apk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

où  $\bar{W}_a$  désigne le tenseur absolu des taux de rotation défini en fonction du tenseur relatif par :

$$\bar{W}_{aij} = \bar{W}_{ij} - \theta_{ij} \quad (\text{C.11})$$

Les coefficients de cette fonctionnelle dépendent *a priori* des invariants du tenseur d'anisotropie. Le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds étant défini par :

$$b_{ij} = \frac{1}{2K} R_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (\text{C.12})$$

son équation d'évolution s'écrit :

$$\frac{\bar{d} b_{ij}}{\bar{d} t} = \frac{1}{2K} \left[ \tilde{P}_{aij} + \phi_{ij}^* - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right] - \frac{\varepsilon}{K} \left( \frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) \left[ b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \quad (\text{C.13})$$

soit, en posant :

$$\tau = \frac{K}{\varepsilon} \quad (\text{C.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d} b_{ij}}{\bar{d} t} &= -\frac{2}{3} S_{ij} - \frac{1}{3} \tau \delta_{ij} - \tau \left( \frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) \left[ b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \right] \\ &- b_{ik} \tilde{V}_{ajk} - b_{jk} \tilde{V}_{aik} + \frac{1}{2K} \phi_{ij}^* \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

soit encore, en explicitant la production d'énergie cinétique turbulente :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{d} b_{ij}}{\overline{d} t} &= -\frac{2}{3} S_{ij} + 2 \{bS\} b_{ij} + \tau b_{ij} \\ &- [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} \{bS\} \delta_{ij}] - [\tilde{W}_{aik} b_{jk} + \tilde{W}_{ajk} b_{ik}] + \overline{\phi}_{ij}^* \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

avec

$$\overline{\phi}_{ij}^* = \frac{1}{2K} \phi_{ij} \quad (\text{C.17})$$

Dans le cas d'un repère tournant, il est nécessaire d'écrire des relations algébriques objectives pour que le seul tenseur des taux de rotation qui intervienne dans les expressions tensorielles soit le tenseur absolu. La dérivée de Jaumann, dérivée en corotation, permet ainsi d'écrire l'équation d'évolution du tenseur d'anisotropie sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}}{\mathcal{D} t} &= -\frac{2}{3} S_{ij} + 2 \{bS\} b_{ij} + \tau b_{ij} \\ &- [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} \{bS\} \delta_{ij}] - 2 [\overline{W}_{aik} b_{jk} + \overline{W}_{ajk} b_{ik}] + \overline{\phi}_{ij}^* \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

L'équation d'évolution scalaire du facteur d'échelle  $\tau$  n'est pas affectée par la rotation du repère.

## C.1 Technique de Pope

Lorsque les modèles des corrélations pression-déformation et du déviateur du tenseur des taux de dissipation sont supposés linéaires, la solution de l'équation algébrique peut être obtenue de façon analytique. Le principe de ce calcul, initialement exposé par Pope [105] et repris par Gatski et Speziale [49] dans le cas tridimensionnel, est brièvement rappelé ici. En supposant que le modèle algébrique est solution de l'équation de algébrique Rodi [118], il vérifie l'équilibre :

$$\frac{db_{ij}}{dt} = 0 \quad (\text{C.19})$$

soit,

$$\begin{aligned} b_{ij} \frac{\varepsilon}{K} \left( \frac{P}{\varepsilon} - \frac{1}{2} \beta_1^S - 1 \right) &= (\beta_3 - \frac{2}{3}) S_{ij} \\ &+ (\beta_4 - 1) [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ (\beta_6 - 1) [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, ainsi que les tenseurs des taux de dissipation et de rotation du mouvement moyen peuvent être adimensionnalisés de sorte que l'équation devienne :

$$b_{ij}^* = -S_{ij}^* - (b_{ik}^* S_{kj}^* + S_{ik}^* b_{kj}^* - \frac{2}{3} b_{mn}^* S_{mn}^* \delta_{ij}) + (b_{ik}^* W_{kj}^* - W_{ik}^* b_{kj}^*) \quad (\text{C.21})$$

La solution de cette équation est une fonctionnelle isotrope dépendant de  $S^*$  et  $W^*$ , et dont l'expression complète est donnée par la théorie des invariants (Spencer [147]) :

$$b_{ij}^* = \sum G_\lambda T_{ij}^{(\lambda)} \quad (\text{C.22})$$

avec :

$$\begin{aligned}
 T^{(1)} &= S^* & T^{(6)} &= W^{*2} S^* + S^* W^{*2} - \frac{2}{3} \{S^* W^{*2}\} Id \\
 T^{(2)} &= S^* W^* - W^* S^* & T^{(7)} &= W^* S^* W^{*2} - W^{*2} S^* W^* \\
 T^{(3)} &= S^{*2} - \frac{1}{3} \{S^{*2}\} Id & T^{(8)} &= S^* W^* S^{*2} - S^{*2} W^* S^* \\
 T^{(4)} &= W^{*2} - \frac{1}{3} \{W^{*2}\} Id & T^{(9)} &= W^{*2} S^{*2} + S^{*2} W^{*2} - \frac{2}{3} \{S^{*2} W^{*2}\} Id \\
 T^{(5)} &= W^* S^{*2} - S^{*2} W^* & T^{(10)} &= W^* S^{*2} W^{*2} - W^{*2} S^{*2} W^*
 \end{aligned} \tag{C.23}$$

La base d'intégrité invariante associée est constituée des cinq scalaires suivants :

$$\{S^{*2}\} \quad \{W^{*2}\} \{S^{*3}\} \quad \{S^* W^{*2}\} \quad \{S^{*2} W^{*2}\} \tag{C.24}$$

La substitution de cette solution dans l'équation algébrique permet de calculer l'ensemble des  $G_\lambda$  comme solution d'un système linéaire. Il vient :

$$\begin{aligned}
 G_1 &= -\frac{1}{2} (6 - 3 \{S^{*2}\} - 21 \{W^{*2}\} - 2 \{S^{*3}\} + 30 \{S^* W^{*2}\}) / D & G_6 &= -9/D \\
 G_2 &= -(3 + 3 \{S^{*2}\} - 6 \{W^{*2}\} + 2 \{S^{*3}\} + 6 \{S^* W^{*2}\}) / D & G_7 &= 9/D \\
 G_3 &= (6 - 3 \{S^{*2}\} - 12 \{W^{*2}\} - 2 \{S^{*3}\} - 6 \{S^* W^{*2}\}) / D & G_8 &= 9/D \\
 G_4 &= -3 (3 \{S^{*2}\} + 2 \{S^{*3}\} + 6 \{S^* W^{*2}\}) / D & G_9 &= 18/D \\
 G_5 &= 9/D & G_{10} &= 0
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

et

$$\begin{aligned}
 D &= 3 - \frac{7}{2} \{S^{*2}\} + \{S^{*2}\}^2 - \frac{15}{2} \{W^{*2}\} - 8 \{S^{*2}\} \{W^{*2}\} + 3 \{W^{*2}\}^2 \\
 &\quad - \{S^{*3}\} + \frac{2}{3} \{S^{*2}\} \{S^{*3}\} - 2 \{W^{*2}\} \{S^{*3}\} + 21 \{S^* W^{*2}\} \\
 &\quad + 24 \{S^{*2} W^{*2}\} + 2 \{S^{*2}\} \{S^* W^{*2}\} - 6 \{W^{*2}\} \{S^* W^{*2}\}
 \end{aligned} \tag{C.26}$$

Dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, la solution est beaucoup plus simple, puisque les seuls vecteurs de la base sont  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$  et  $T^{(3)}$  et que les seuls invariants indépendants sont  $\{S^{*2}\}$  et  $\{W^{*2}\}$ . La solution s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 G_1 &= -3 / (3 - 2 \{S^{*2}\} - 6 \{W^{*2}\}) \\
 G_2 &= -3 / (3 - 2 \{S^{*2}\} - 6 \{W^{*2}\}) \\
 G_3 &= 6 / (3 - 2 \{S^{*2}\} - 6 \{W^{*2}\})
 \end{aligned} \tag{C.27}$$

Les coefficients de ce modèle dépendent de façon complexe des invariants, et peuvent dans le cas tridimensionnel conduire dans certains cas à des valeurs localement singulières. Il est apparu nécessaire de régulariser ces expressions, ce que Gatski et Speziale ont effectué avec une approximation de Padé. Une solution alternative consiste à calculer le tenseur d'anisotropie par approximations successives.

## C.2 Développements en série de Taylor

La solution de l'équation algébrique, donnée sous une forme classique par Rodi, peut être cherchée sous la forme d'une série :

$$b_{ij} = \tau b_{ij}^{(1)} + \tau^2 b_{ij}^{(2)} + \tau^3 b_{ij}^{(3)} + O(\tau^4) \tag{C.28}$$

Les coefficients du modèle du tenseur des corrélations pression-déformation dépendent des invariants du tenseur d'anisotropie. Ils sont supposés se développer de façon polynômiale suivant :

Pour  $j = \{1, 2\}$  :

$$\beta_j^S = \beta_{j0}^S + \sqrt{F} \beta_{j1}^S + II \beta_{j2}^S + III \beta_{j3}^S + O(b^4) \quad (C.29a)$$

Pour  $j = \{1, 2\}$ :

$$\beta_j = \beta_j^{(1)} \{bS\} + \beta_j^{(2)} \{b^2S\} \quad (C.29b)$$

avec, pour  $n = \{1, 2\}$ :

$$\beta_j^n = \beta_{j0}^{(n)} + \sqrt{-II} \beta_{j1}^{(n)} + II \beta_{j2}^{(n)} + III \beta_{j3}^{(n)} + O(b^4) \quad (C.29c)$$

Pour  $j = \{3, 8\}$ :

$$\beta_j = \beta_{j0} + \sqrt{-II} \beta_{j1} + II \beta_{j2} + III \beta_{j3} + O(b^4) \quad (C.29d)$$

avec les notations classiques de Lumley [89]

$$II = -\frac{1}{2} b^2 \quad (C.30a)$$

$$III = \frac{1}{3} b^3 \quad (C.30b)$$

$$F = 1 + 9 II + 27 III \quad (C.30c)$$

L'équation d'évolution du taux  $\tau$  peut être déterminée à partir des équations de  $K$  et  $\varepsilon$ , modélisé par l'expression classique :

$$\frac{\bar{d}\tau}{\bar{d}t} = (C_{\varepsilon_2} - 1) - \frac{P}{\varepsilon} (C_{\varepsilon_1} - 1) \quad (C.31)$$

soit, en développant la production

$$\frac{\bar{d}\tau}{\bar{d}t} = (C_{\varepsilon_2} - 1) + 2 \{bS\} \tau (C_{\varepsilon_1} - 1) \quad (C.32)$$

Les invariants peuvent par conséquent être développés suivant :

$$II = -\frac{1}{2} \tau^2 b_{.nn}^{(1)2} + \tau^3 b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)} + O(\tau^4) \quad (C.33a)$$

$$III = \frac{1}{3} \tau^3 b_{.nm}^{(1)3} + O(\tau^4) \quad (C.33b)$$

$$F = 1 - \frac{9}{2} \tau^2 b_{.nn}^{(1)2} + 9 \tau^3 [b_{.nm}^{(1)3} - b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}] + O(\tau^4) \quad (C.33c)$$

$$\sqrt{F} = 1 - \frac{9}{4} \tau^2 b_{.nn}^{(1)2} + \frac{9}{2} \tau^3 [b_{.nm}^{(1)3} - b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}] + O(\tau^4) \quad (C.33d)$$

$$\sqrt{-II} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \tau \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \tau^2 \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{.pp}^{(1)2}}} + O(\tau^3) \quad (C.33e)$$

Les coefficients du modèle peuvent être développés en série de Taylor, il vient :

Pour  $j = \{1, 2\}$ :

$$\beta_j^S = (\beta_{j0}^S + \beta_{j1}^S) \quad (C.34a)$$

$$+ \tau^2 \left[ -\frac{9}{4} \beta_{j1}^S - \frac{1}{2} \beta_{j2}^S \right] b_{.nn}^{(1)2}$$

$$+ \tau^3 \left[ \left( \frac{9}{2} \beta_{j1}^S + \frac{1}{3} \beta_{j3}^S \right) b_{.nn}^{(1)3} - \left( \frac{9}{2} \beta_{j1}^S + \beta_{j2}^S \right) b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)} \right]$$

$$+ O(\tau^4)$$



Pour  $j = \{1, 2\}$ :

$$\begin{aligned} \beta_j &= \tau \left[ \beta_{j0}^{(1)} b_{nm}^{(1)} S_{mn} \right. \\ &+ \tau^2 \left[ \beta_{j0}^{(1)} b_{nm}^{(2)} S_{mn} + \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{j1}^{(1)} \right) \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} b_{nm}^{(1)} S_{mn} + \beta_{j0}^{(2)} b_{.nm}^{(1)2} S_{mn} \right] \\ &+ O(\tau^3) \end{aligned} \quad (C.34b)$$

Pour  $j = \{3, 8\}$ :

$$\begin{aligned} \beta_j &= \beta_{j0} \\ &+ \tau \left[ \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{j1} \right] \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} \\ &+ \tau^2 \left[ \left( -\frac{1}{2} \beta_{j2} \right) b_{.nn}^{(1)2} + \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} \beta_{j1} \right) \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{.pp}^{(1)2}}} \right] \\ &+ O(\tau^3) \end{aligned} \quad (C.34c)$$

ce qui sera par la suite noté:

Pour  $j = \{1, 2\}$ :

$$\begin{aligned} \beta_j^S &= C_{j0}^S + \tau^2 C_{j2}^S b_{.nn}^{(1)2} + \tau^3 \left[ C_{j31}^S b_{.nn}^{(1)3} + C_{j32}^S b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)} \right] \\ &+ O(\tau^4) \end{aligned} \quad (C.35a)$$

Pour  $j = \{1, 2\}$ :

$$\begin{aligned} \beta_j &= \tau C_{j0}^{(1)} b_{nm}^{(1)} S_{mn} + \tau^2 \left[ C_{j0}^{(1)} b_{nm}^{(2)} S_{mn} + C_{j1}^{(1)} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} b_{nm}^{(1)} S_{mn} + C_{j0}^{(2)} b_{.nm}^{(1)2} S_{mn} \right] \\ &+ O(\tau^3) \end{aligned} \quad (C.35b)$$

Pour  $j = \{3, 8\}$ :

$$\begin{aligned} \beta_j &= \beta_{j0} + \tau C_{j1} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} + \tau^2 \left[ C_{j21} b_{.nn}^{(1)2} + C_{j22} \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{.pp}^{(1)2}}} \right] \\ &+ O(\tau^3) \end{aligned} \quad (C.35c)$$

L'équation d'évolution objective du tenseur d'anisotropie peut également être développée en série de Taylor, suivant :

$$\frac{D_c b_{ij}}{D t} = \frac{D_c b_{ij}}{D t} \Big|_0 + \frac{D_c b_{ij}}{D t} \Big|_1 \tau + \frac{D_c b_{ij}}{D t} \Big|_2 \tau^2 + O(\tau^3) \quad (C.36)$$

Le développement à l'ordre zéro donne :

$$\frac{D_c b_{ij}}{D t} \Big|_0 = \left( 1 + \frac{1}{2} C_{10}^S \right) b_{ij}^{(1)} + \left( C_{30} - \frac{2}{3} \right) S_{ij} \quad (C.37a)$$

Au premier ordre, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{D_c b_{ij}}{D t} \Big|_1 &= \left( 1 + \frac{1}{2} C_{10}^S \right) b_{ij}^{(2)} + \frac{1}{2} C_{20}^S D b_{ij}^{(1)2} \\ &+ C_{31} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} S_{ij} \\ &+ (C_{40} - 1) [b_{ik}^{(1)} S_{jk} + b_{jk}^{(1)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ (C_{60} - 2) [b_{ik}^{(1)} \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^{(1)} \overline{W}_{akj}] \end{aligned} \quad (C.37b)$$

Le second ordre fait intervenir l'ensemble des termes quadratiques, soit :

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}}{\mathcal{D}t} \right|_2 &= \left( 1 + \frac{1}{2} C_{10}^S \right) b_{ij}^{(3)} + \frac{1}{2} C_{12}^S b_{.nn}^{(1)2} b_{ij}^{(1)} \\
 &+ \frac{1}{2} C_{20}^S [b_{ik}^{(2)} b_{jk}^{(1)} + b_{jk}^{(2)} b_{kj}^{(1)} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(2)} b_{mn}^{(1)} \delta_{ij}] \\
 &+ \left( 2 + C_{10}^{(1)} \right) b_{mn}^{(1)} S_{mn} b_{ij}^{(1)} \\
 &+ \left[ C_{321} b_{.nn}^{(1)2} + C_{322} \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{.pp}^{(1)2}}} \right] S_{ij} \\
 &+ (C_{40} - 1) [b_{jk}^{(2)} S_{jk} + b_{jk}^{(2)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(2)} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &+ C_{41} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} [b_{ik}^{(1)} S_{jk} + b_{jk}^{(1)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &+ C_{50} [b_{.ik}^{(1)2} S_{jk} + b_{.jk}^{(1)2} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{.mn}^{(1)2} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &+ (C_{60} - 2) [b_{ik}^{(2)} \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^{(2)} \overline{W}_{aik}] \\
 &+ C_{61} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} [b_{ik}^{(1)} \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^{(1)} \overline{W}_{aik}] \\
 &+ C_{70} [b_{.ik}^{(1)2} \overline{W}_{ajk} + b_{.jk}^{(1)2} \overline{W}_{aik}]
 \end{aligned} \tag{C.37c}$$

L'équation d'évolution du taux  $\tau$  s'écrit :

$$\frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} = (C_{\varepsilon 2} - 1) - \frac{P}{\varepsilon} (C_{\varepsilon 1} - 1) \tag{C.38}$$

ce qui conduit, en développant la production aux expressions suivantes :

$$\left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_0 = (C_{\varepsilon 2} - 1) \tag{C.39a}$$

$$\left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_1 = 0 \tag{C.39b}$$

$$\left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_2 = 2 (C_{\varepsilon 1} - 1) b_{mn}^{(1)} S_{mn} \tag{C.39c}$$

et

$$\left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_3 = 2 (C_{\varepsilon 1} - 1) b_{mn}^{(2)} S_{mn} \tag{C.39d}$$

Il faut noter que le rapport  $P/\varepsilon$  n'est pas nécessairement développé dans les modèles algébriques. Il est supposé dans ce cas faire partie de la solution asymptotique.

Le développement du tenseur d'anisotropie conduit à l'approximation suivante de la dérivée particulière objective, au second ordre :

$$\frac{\mathcal{D}_c b_{ij}}{\mathcal{D}t} = b_{ij}^{(1)} \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} + \left[ \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}^{(1)}}{\mathcal{D}t} + 2 b_{ij}^{(2)} \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right] \tau + \left[ \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}^{(2)}}{\mathcal{D}t} + 3 b_{ij}^{(3)} \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right] \tau + O(\tau^3) \tag{C.40}$$

En développant l'équation de transport issue des modèles du second ordre, il vient :

$$0 = \left. \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}}{\mathcal{D}t} \right|_0 - b_{ij}^{(1)} \left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_0 \quad (\text{C.41})$$

$$\left[ \left. \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}}{\mathcal{D}t} \right|_1 - \left( \left. \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}^{(1)}}{\mathcal{D}t} \right|_0 + 2 b_{ij}^{(2)} \left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_0 \right) \right] \tau \quad (\text{C.42})$$

$$\left[ \left. \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}}{\mathcal{D}t} \right|_2 - \left( \left. \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}^{(2)}}{\mathcal{D}t} \right|_0 + 3 b_{ij}^{(3)} \left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_0 + b_{ij}^{(1)} \left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_2 \right) \right] \tau^2 \quad (\text{C.43})$$

$$+ O(\tau^3) \quad (\text{C.44})$$

Pour que cette équation soit vérifiée pour tout  $\tau$ , il suffit que chaque coefficient du développement soit nul. L'ordre zéro fournit le premier terme du développement, soit :

$$b_{ij}^{(1)} = - \frac{(C_{30} - \frac{2}{3})}{1 + \frac{1}{2} C_{10}^S - \left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_0} S_{ij} \quad (\text{C.45})$$

On pose :

$$b_{ij}^{(1)} = -C_\mu S_{ij} \quad (\text{C.46})$$

Il s'agit d'une expression dont la forme est identique aux modèles de type Boussinesq. Le premier ordre impose :

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(2)} &= -|C_\mu| f_\mu C_{31} \sqrt{\{S^2\}} S_{ij} \\ &+ C_\mu f_\mu (C_{60} - 2) [S_{ik} W_{akj} - W_{aik} S_{kj}] \\ &+ C_\mu f_\mu [2(C_{40} - 1) - \frac{1}{2} C_\mu C_{20}^S] {}^D S_{,ij}^2 \\ &- C_\mu f_\mu \frac{\mathcal{D}_c S_{ij}}{\mathcal{D}t} \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

avec

$$f_\mu = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} C_{10}^S - 2 \left. \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \right|_0} \quad (\text{C.48})$$

Ce développement comprend l'ensemble des groupements tensoriels du second ordre à l'exception de  ${}^D W_{,ij}^2$ . L'équation d'évolution du temps  $\tau$  n'apparaît que par l'intermédiaire de son terme constant à cet ordre. Les contributions non-linéaires du terme rapide n'interviennent pas encore à ce niveau, contrairement au terme lent. L'ensemble des termes de ces modèles ne commencent

à intervenir que dans le coefficient du second ordre de la série, avec :

$$\begin{aligned}
 \left[1 + \frac{1}{2}C_{10}^S - 3 \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \Big|_0\right] b_{ij}^{(3)} &= \left[ \frac{1}{2}C_{12}^S b_{.nn}^{(1)2} + \frac{\mathcal{D}_c \tau}{\mathcal{D}t} \Big|_0^2 - (C_{10}^S + 2) \{b^{(1)}S\} \right] b_{ij}^{(1)} \\
 &- [C_{321} b_{.nn}^{(1)2} + C_{322} \frac{b_{nm}^{(1)} b_{nm}^{(2)}}{\sqrt{b_{.pp}^{(1)2}}}] S_{ij} \\
 &- C_{41} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} [b_{ik}^{(1)} S_{jk} + b_{jk}^{(1)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &- C_{50} [b_{.ik}^{(1)2} S_{jk} + b_{.jk}^{(1)2} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{.mn}^{(1)2} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &- C_{61} \sqrt{b_{.nn}^{(1)2}} [b_{ik}^{(1)} \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^{(1)} \overline{W}_{aik}] \\
 &- C_{70} [b_{.ik}^{(1)2} \overline{W}_{ajk} + b_{.jk}^{(1)2} \overline{W}_{aik}] \\
 &- \frac{1}{2} C_{20}^S [b_{ik}^{(1)} b_{jk}^{(2)} + b_{jk}^{(1)} b_{kj}^{(2)} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(1)} b_{mn}^{(2)} \delta_{ij}] \\
 &+ \frac{\mathcal{D}_c b_{ij}^{(2)}}{\mathcal{D}t} \\
 &- (C_{40} - 1) [b_{ik}^{(2)} S_{jk} + b_{jk}^{(2)} S_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn}^{(2)} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 &- (C_{60} - 2) [b_{ik}^{(2)} \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^{(2)} \overline{W}_{aik}]
 \end{aligned} \tag{C.49}$$

En se contentant du second ordre du développement, le modèle prend la forme :

$$\begin{aligned}
 b_{ij} &= G_1 \frac{K}{\varepsilon} S_{ij} \\
 &+ G_2 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [S_{ik} \overline{W}_{akj} + S_{jk} \overline{W}_{aik}] \\
 &+ G_3 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [S_{ik} S_{jk} - \frac{1}{3} S_{mn} S_{nm} \delta_{ij}] \\
 &+ G_4 \frac{K^2}{\varepsilon^2} [\overline{W}_{aik} \overline{W}_{akj} - \frac{1}{3} \overline{W}_{amn} \overline{W}_{anm} \delta_{ij}] \\
 &+ G'_1 \frac{K^2}{\varepsilon^2} \left[ \frac{\mathcal{D}_c S_{ij}}{\mathcal{D}t} \right]
 \end{aligned}$$

avec

$$G_4 = 0 \tag{C.50}$$

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G'_1$
Speziale [152]	-0.09	-0.027	0.027	0	0
Yoshizawa [180]	-0.09	-0.032	-0.142	-0.192	0
Rubinstein et Barton [123]	-0.0845	-0.023	0.110	0.094	0

TAB. C.1: Constantes de modèles classiques



---

## Annexe D

# Modèle de Shima

Cette annexe rappelle l'expression du modèle de Shima [140]. L'équation de transport du tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\overline{d}R_{ij}}{dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^{\nu} + d_{ij}^u \quad (D.1)$$

avec

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} + d_{ij}^p$$

Les termes de diffusion turbulente sont modélisés par l'approximation de Daly et Harlow des corrélations triples :

$$d_{ij}^u = [C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{kn} R_{ij,n}]_{,k} \quad (D.2)$$

avec  $C_s = 0.22$

Les corrélations de pression sont scindées suivant le tenseur des corrélations pression-déformation et le terme de diffusion de pression, soit :

$$\phi_{ij} = \Pi_{ij} - d_{ij}^p \quad (D.3)$$

Les modélisations classiques sont appliquées aux termes lent et rapide :

$$\frac{1}{\varepsilon} \phi_{ij}^S = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S [b_{,ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \quad (D.4a)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} \phi_{ij}^R &= \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 [b_{,ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{,ik}^2 S_{jk} + b_{,jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{,mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{,ik}^2 W_{jk} + b_{,jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} W_{kp} b_{,pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (D.4b)$$

Les coefficients proposés dépendent du nombre de Reynolds, défini par :

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (D.5)$$

et des invariants du tenseur  $a_{ij}$ , qui s'expriment en fonction des ceux de  $b_{ij}$  suivant :

$$A_2 = 4 b_{mn} b_{mn} \quad (D.6a)$$

$$A_3 = 8 b_{mp} b_{pn} b_{mn} \quad (D.6b)$$

$$A = F \quad (D.6c)$$

Ils s'écrivent :

$$c_1 = 1 + 2.58 A A_2^{1/4} [1 - \exp\{-(0.0067 R_t)^2\}] \quad (D.7a)$$

$$c_2 = 0.75 A^{1/2} \quad (D.7b)$$

Le modèle choisi est linéaire et correspond aux valeurs suivantes des coefficients :

$$\beta_1^S = -2 c_1 \quad (D.8a)$$

$$\beta_2^S = 0 \quad (D.8b)$$

et

$$\beta_1 = 0 \quad (D.8c)$$

$$\beta_2 = 0 \quad (D.8d)$$

$$\beta_3 = \frac{2}{3} c_2 \quad (D.8e)$$

$$\beta_4 = c_2 \quad (D.8f)$$

$$\beta_5 = 0 \quad (D.8g)$$

$$\beta_6 = c_2 \quad (D.8h)$$

$$\beta_7 = 0 \quad (D.8i)$$

$$\beta_8 = 0 \quad (D.8j)$$

Le traitement des termes de parois s'effectue de façon classique avec les termes de réflexion suivants :

$$\phi_{ij}^{P(s)} = C_{w1} \frac{\varepsilon}{K} \left[ R_{mn} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{kj} n_k n_j - \frac{3}{2} R_{ki} n_k n_i \right] \frac{K^{3/2}}{C_l \varepsilon d} \quad (D.9a)$$

$$\phi_{ij}^{P(r)} = C_{w2} \left[ \phi_{mn}^R n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj}^R n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki}^R n_k n_i \right] \frac{K^{3/2}}{C_l \varepsilon d} \quad (D.9b)$$

où  $d$  désigne la distance à la paroi,  $C_l = 2.5$  et

$$C_{w1} = -\frac{2}{3} c_1 + 1.67 \quad (D.10a)$$

$$C_{w2} = \max\left[\frac{2}{3} (c_2 - 1) + 0.5, 0\right] / c_2 \quad (D.10b)$$

Pour éviter toute singularité le dénominateur peut être remplacé par  $\max(1/4, c_2)$ .

Le terme de diffusion de pression est négligé.

Le tenseur des taux de dissipation est supposé isotrope :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad (D.11)$$

---

L'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon$  est modélisée par :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = (C_{\varepsilon 1} + \psi_1 + \psi_2) \frac{\varepsilon P}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon}{K} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ \left( \nu \delta_{mn} + C_{\varepsilon} R_{mn} \frac{K}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_n} \right] \quad (D.12)$$

avec

$$C_{\varepsilon 1} = 1.45 \quad (D.13a)$$

$$C_{\varepsilon 2} = 1.90 \quad (D.13b)$$

$$\psi_1 = 1.5 A \left( \frac{P}{\varepsilon} - 1 \right) \quad (D.13c)$$

$$\psi_2 = 0.35 (1 - 0.3 A_2) \exp[-(0.002 R_t)^{1/2}] \quad (D.13d)$$

et la pseudo-dissipation est définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_n} \right)^2 \quad (D.14)$$





---

## Annexe E

# Modèle de Craft et Launder

Cette annexe rappelle l'expression du modèle de Craft et Launder [32]. L'équation de transport du tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\overline{d}R_{ij}}{dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^{\nu} + d_{ij}^u \quad (E.1)$$

avec

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} + d_{ij}^p$$

Les termes de diffusion turbulente sont modélisés par l'approximation d'Hanjalic et Launder des corrélations triples :

$$d_{ij}^u = [C_s \frac{K}{\varepsilon} (R_{kn}R_{ij,n} + R_{in}R_{jk,n} + R_{jn}R_{ik,n})],_k \quad (E.2)$$

avec  $C_s = 0.11$

Les corrélations de pression sont scindé suivant un tenseur  $\phi_{ij}^*$ , modélisé comme les fermetures classiques du tenseur des corrélations pression-déformation et un terme proportionnel à la trace du terme de diffusion de pression, soit :

$$\phi_{ij}^* = \Pi_{ij} - d_{kk}^p \frac{R_{ij}}{2K} \quad (E.3)$$

avec

$$\phi_{ij}^* = \phi_{ij}^{*S} + \phi_{ij}^{*R} + \phi_{ij}^{*P(s)} + \phi_{ij}^{*P(r)} \quad (E.4)$$

Les modélisations classiques sont appliquées aux termes lent et rapide, soient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \phi_{ij}^{*S} = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S [b_{.ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \quad (E.5a)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} \phi_{ij}^{*R} &= \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 [b_{.ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn}S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{.ik}^2 S_{jk} + b_{.jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{.ik}^2 W_{jk} + b_{.jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik}W_{kp}b_{pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk}b_{jp}] \end{aligned} \quad (E.5b)$$

Les auteurs expriment ces fonctionnelles en fonction du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  défini par

$$a_{ij} = 2 b_{ij}$$

et des tenseurs de production  $P_{ij}$  et  $D_{ij}$  (annexe N). Les coefficients proposés dépendent du nombre de Reynolds, défini par :

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (E.6)$$

et des invariants du tenseur  $a_{ij}$ , qui s'expriment en fonction des ceux de  $b_{ij}$  suivant :

$$A_2 = 4 b_{mn} b_{mn} \quad (E.7a)$$

$$A_3 = 8 b_{mp} b_{pn} b_{mn} \quad (E.7b)$$

$$A = F \quad (E.7c)$$

Ils font intervenir deux fonctions d'amortissement suivant le nombre de Reynolds et ces invariants,  $f_{R_t}$  et  $f_A$ ,

$$f_{R_t} = \min\left(\frac{R_t}{160}, 1\right) \quad (E.8a)$$

$$f_A = \begin{cases} (A/14)^{(1/2)} & A < 0.05 \\ A/(0.7)^{(1/2)} & 0.05 < A < 0.7 \\ A^{(1/2)} & 0.7 < A \end{cases} \quad (E.8b)$$

et s'écrivent :

$$c_1 = 3.1 f_A f_{R_t} \min(A_2^{(1/2)}, 0.5) \quad (E.9a)$$

$$c'_1 = 1.1 \quad (E.9b)$$

$$c_2 = \min(A^{(3/2)}, 0.55) \quad (E.9c)$$

$$c'_2 = \min(A^{(3/2)}, 0.6) \quad (E.9d)$$

Les coefficients scalaires des groupements tensoriels du terme lent sont :

$$c_{s1} = -(A + c_1) \quad (E.10a)$$

$$c_{s2} = -c'_1 c_1 \quad (E.10b)$$

La partie du terme rapide qui reprend le modèle de Fu, Launder et Tselepidakis [47] possède les coefficients suivants :

$$flt_1 = -\frac{3}{5} \quad (E.11a)$$

$$flt_2 = \frac{3}{10} \quad (E.11b)$$

$$flt_3 = -\frac{1}{5} \quad (E.11c)$$

$$flt_4 = -c_2 A_2 \quad (E.11d)$$

$$flt_5 = -3 c_2 \quad (E.11e)$$

et l'extension non-linéaire proposée par Craft et Launder admet les coefficients suivant :

$$cl_1 = c'_2 \left( \frac{7}{15} - \frac{A_2}{4} \right) \quad (E.12a)$$

$$cl_2 = c'_2 0.1 \quad (E.12b)$$

$$cl_3 = -c'_2 0.05 \quad (E.12c)$$

$$cl_4 = c'_2 0.1 \quad (E.12d)$$

$$cl_5 = c'_2 0.1 \quad (E.12e)$$

$$cl_6 = c'_2 0.2 \quad (E.12f)$$

Ce modèle se met sous la forme fonctionnelle classique rappelée ci-dessus, et correspond aux valeurs suivantes des coefficients :

$$\beta_1^S = 2 c_{s1} \quad (E.13a)$$

$$\beta_2^S = 4 c_{s2} \quad (E.13b)$$

et

$$\beta_1 = \{bS\} [4 (flt_3 - flt_2) - 4 (cl_2 + \frac{2}{3} cl_3 + cl_4 - 5 cl_5)] + \{b^2 S\} [-8 (cl_3 + 3 cl_5)] \quad (E.13c)$$

$$\beta_2 = \{bS\} [4 cl_2] - \{b^2 S\} [24 cl_5] \quad (E.13d)$$

$$\beta_3 = -\frac{2}{3} flt_1 + 2 \{b^2\} flt_3 - \frac{2}{3} cl_1 - \frac{8}{9} cl_4 + 4 cl_5 - 2 \{b^2\} (cl_4 - 5 cl_5) + 8 \{b^3\} cl_5 \quad (E.13e)$$

$$\beta_4 = -flt_1 - cl_1 - \frac{8}{3} cl_4 + \frac{28}{3} cl_5 \quad (E.13f)$$

$$\beta_5 = -6 flt_3 + 2 cl_4 - 28 cl_5 \quad (E.13g)$$

$$\beta_6 = -flt_1 - \frac{4}{3} flt_3 - 2 flt_4 - cl_1 - \frac{4}{3} cl_4 + \frac{8}{3} cl_5 + \frac{8}{9} cl_6 \quad (E.13h)$$

$$\beta_7 = -2 flt_3 - 2 cl_4 + 8 cl_5 + \frac{8}{3} cl_6 \quad (E.13i)$$

$$\beta_8 = -8 flt_5 + 24 cl_5 + 8 cl_6 \quad (E.13j)$$

Le traitement des termes de parois implique deux termes de réflexion. Au vecteur normal à la paroi a été préféré un vecteur qui doit identifier les directions de forme inhomogénéité. Il s'écrit en fonction du gradient de l'échelle caractéristique de la turbulence, défini par :

$$N_i = \frac{\partial(k^{3/2}/\varepsilon)}{\partial x_i} \quad (E.14)$$

suivant :

$$d_i = \frac{N_i}{\alpha + (N_n N_n)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \alpha = 0.5 \quad (E.15)$$

Ce paramètre peut d'après les auteurs, s'avérer insuffisant dans le cas de très fortes homogénéités, et dans la modélisation du tenseur des taux de dissipation, il lui sera préféré le vecteur :

$$d_i^a = \frac{N_i^a}{\alpha + (N_n^a N_n^a)^{1/2}} \quad \text{avec} \quad \alpha = 0.5 \quad (E.16)$$

où

$$N_i^a = \frac{\partial(k^{3/2} A^{1/2}/\varepsilon)}{\partial x_i} \quad (E.17)$$

Les termes de paroi s'écrivent :

$$\phi_{ij}^{*P(s)} = C_{w1} \frac{\varepsilon}{K} \left[ R_{mn} d_k d_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{kj} d_k d_j - \frac{3}{2} R_{ki} d_k d_i \right] \quad (E.18a)$$

$$\phi_{ij}^{*P(r)} = C_{w2} A K (\bar{U}_{i,j} + \bar{U}_{j,i}) d_n d_n \quad (E.18b)$$

où  $C_{w1} = 2.2$  et  $C_{w2} = -0.7$ .

Seule la trace du terme de diffusion de pression a besoin d'être modélisée. L'expression proposée par Craft et Launder d'après les données de simulation directe s'écrit :

$$d_{kk}^p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p u_k}}{\partial x_k} \quad (E.19a)$$

avec

$$\frac{1}{\rho} \overline{p u_k} = -(0.3 d_k + 1.3 d_k^a) \sqrt{\nu \varepsilon K A} [c_{pd1} + c_{pd2} R_t^{-1/4} \exp(-R_t/40)] \quad (E.19b)$$

avec  $c_{pd1} = 1$  et  $c_{pd2} = 0.4$ .

Le tenseur des taux de dissipation se décompose en trois contributions :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_h \frac{\varepsilon_{kk}^*}{2\varepsilon}) [(1 - f_\varepsilon)(\varepsilon'_{ij} + \varepsilon''_{ij})/D + \frac{2}{3} f_\varepsilon \varepsilon \delta_{ij}] + f_h \varepsilon_{ij}^* \quad (E.20)$$

avec les fonctions d'amortissement suivantes :

$$f_R = (1 - A) \min[(R_t/80)^2, 1] \quad (E.21a)$$

$$f_\varepsilon = \sqrt{A} \quad (E.21b)$$

$$f_h = 1 - \exp(-R_t/50) \quad (E.21c)$$

et

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon \frac{R_{ij}}{K} + 2\nu \frac{R_{mn}}{K} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_m} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_n} \delta_{ij} + 2\nu \frac{R_{in}}{K} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_j} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_n} + 2\nu \frac{R_{jn}}{K} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_n} \quad (E.22a)$$

$$\varepsilon''_{ij} = \frac{\varepsilon}{K} \left[ 2 R_{mn} d_n^a d_m^a \delta_{ij} - R_{in} d_n^a d_j^a - R_{jn} d_n^a d_i^a \right] f_R \quad (E.22b)$$

$$\varepsilon_{ij}^* = 0.2 \nu \left[ \frac{\partial \sqrt{KA}}{\partial x_n} \frac{\partial \sqrt{KA}}{\partial x_n} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial \sqrt{KA}}{\partial x_i} \frac{\partial \sqrt{KA}}{\partial x_j} \right] \quad (E.22c)$$

où

$$D = (\varepsilon'_{kk} + \varepsilon''_{kk})/(2\varepsilon) \quad (E.23)$$

L'équation de transport du taux de dissipation  $\tilde{\varepsilon}$  est modélisée par :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\varepsilon}}{dt} = & C_{\varepsilon 1} \frac{\tilde{\varepsilon} P}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{K} - C'_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon - \tilde{\varepsilon}) \tilde{\varepsilon}}{K} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ \left( \nu \delta_{mn} + C_\varepsilon R_{mn} \frac{K}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial x_n} \right] \\ & + C_{\varepsilon 3} \nu R_{ij} \frac{K}{\varepsilon} U_{k,in} U_{k,jn} + C_{\varepsilon 4} \nu \frac{R_{ij}}{\varepsilon} K_{,i} U_{l,k} U_{l,kj} + C_{\varepsilon 5} \sqrt{A} (1 - A) \frac{\varepsilon}{\sqrt{K}} R_{ij} A_{,i} \left( \frac{K^{3/2} A^{1/2}}{\varepsilon} \right)_{,j} \end{aligned} \quad (E.24)$$

avec

$$C_{\varepsilon 1} = 1.0 \quad (E.25a)$$

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.7 A_d \sqrt{A_2}} \quad \text{où} \quad A_d = A + 0.8 \max(0.6 - A, 0) \quad (E.25b)$$

$$C'_{\varepsilon 2} = 1.0 \quad (E.25c)$$

$$C_{\varepsilon 3} = 0.57 \quad (E.25d)$$

$$C_{\varepsilon 4} = 0.09 \quad (E.25e)$$

$$C_{\varepsilon 5} = 1.0 \quad (E.25f)$$

$$C_{\varepsilon} = 0.11 \quad (E.25g)$$

et la pseudo-dissipation est définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_n} \right)^2 - \frac{1}{2} f_h \varepsilon_{nn}^* \quad (E.26)$$

Cette modélisation a été proposée en 1995. Une version plus récente a subi quelques évolutions, notamment dans le traitement des termes de paroi et l'équation d'évolution du paramètre de dissipation [33]. Les termes de réflexion de paroi proposés s'écrivent maintenant :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^{*P(s)} &= C_{w1} \frac{\varepsilon}{K} \left[ R_{mn} d_k d_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{kj} d_k d_j - \frac{3}{2} R_{ki} d_k d_i \right] \\ &+ C'_{w1} \frac{K^2}{\varepsilon} \left[ R_{mn} \frac{\sqrt{A}}{\partial x_m} \frac{\sqrt{A}}{\partial x_n} \delta_{ij} - \frac{3}{2} R_{ik} \frac{\sqrt{A}}{\partial x_k} \frac{\sqrt{A}}{\partial x_j} - \frac{3}{2} R_{jk} \frac{\sqrt{A}}{\partial x_k} \frac{\sqrt{A}}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (E.27a)$$

$$\phi_{ij}^{*P(r)} = C_{w2} K \bar{V}_{m,n} d_n d_m (d_i d_j - \frac{1}{3} d_k d_k \delta_{ij}) \quad (E.27b)$$

où les coefficients dépendent maintenant du nombre de Reynolds turbulent, soit :

$$C_{w1} = 1.9 f'_{R_t} \quad \text{avec} \quad f'_{R_t} = \min(1, \max(0, 1 - (R_t - 55)/20)) \quad (E.28a)$$

$$C'_{w1} = 0.22 \quad (E.28b)$$

$$C_{w2} = 5 f_A \quad (E.28c)$$

La trace du terme de diffusion de pression est également modifiée et s'écrit :

$$\frac{1}{\rho} \overline{p u_k} = -(0.5 d_k + 1.1 d_k^a) \sqrt{\nu \varepsilon K A A_2} [c_{pd1} A_2 + c_{pd2} R_t^{-1/4} \exp(-R_t/40)] \quad (E.28d)$$

avec

$$c_{pd1} = 1 + 2 \exp(-R_t/40) \quad (E.29a)$$

$$c_{pd2} = 0.4 \quad (E.29b)$$

L'équation de  $\tilde{\varepsilon}$  conserve la même forme, seuls les coefficients ont été modifiés.

$$C_{\varepsilon 1} = 1.0 \quad (E.30a)$$

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.7 A_d \sqrt{A_2}} \quad \text{où} \quad A_d = \max(0.2, A) \quad (E.30b)$$

$$C'_{\varepsilon 2} = 1.0 \quad (E.30c)$$

$$C_{\varepsilon 3} = 1.55 \quad (E.30d)$$

$$C_{\varepsilon 4} = 1.0 \quad (E.30e)$$

$$C_{\varepsilon 5} = 1.0 \quad (E.30f)$$

$$C_{\varepsilon} = 0.09 \quad (E.30g)$$

---

## Annexe F

# Modèle de Launder et Tselepidakis

Cette annexe rappelle l'expression du modèle de Launder et Tselepidakis [79]. L'équation de transport du tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\frac{\overline{d}R_{ij}}{dt} = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^{\nu} + d_{ij}^u \quad (F.1)$$

avec

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} + d_{ij}^p$$

Les termes de diffusion turbulente sont modélisés par l'approximation de Daly et Harlow des corrélations triples :

$$d_{ij}^u = [C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{kn} R_{ij,n-k}] \quad (F.2)$$

avec  $C_s = 0.22$

Les corrélations de pression sont scindées suivant le tenseur des corrélations pression-déformation et le terme de diffusion de pression, soit :

$$\phi_{ij} = \Pi_{ij} - d_{ij}^p \quad (F.3)$$

Les modélisations classiques sont appliquées aux termes lent et rapide :

$$\frac{1}{\varepsilon} \phi_{ij}^S = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S [b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \quad (F.4a)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2K} \phi_{ij}^R &= \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 [b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{ik}^2 S_{jk} + b_{jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{ik}^2 W_{jk} + b_{jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} W_{kp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (F.4b)$$

Les auteurs expriment ces fonctionnelles en fonction du tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  défini par

$$a_{ij} = 2 b_{ij}$$



et des tenseurs de production  $P_{ij}$  et  $D_{ij}$  (annexe N). Les coefficients proposés dépendent du nombre de Reynolds, défini par :

$$R_t = \frac{K^2}{\nu \varepsilon} \quad (F.5)$$

et des invariants du tenseur  $a_{ij}$ , qui s'expriment en fonction des ceux de  $b_{ij}$  suivant :

$$A_2 = 4 b_{mn} b_{mn} \quad (F.6a)$$

$$A_3 = 8 b_{mp} b_{pn} b_{mn} \quad (F.6b)$$

$$A = F \quad (F.6c)$$

Le terme lent est quadratique et le terme rapide correspond à la forme tensorielle adoptée par Fu, Launder et Tselepidakis [47], mais avec

$$r = \min(0.6, A)$$

Les coefficients s'écrivent :

$$c_1 = 6.3 A \sqrt{f_A} (1 - f_{R_t}) \quad (F.7a)$$

$$c'_1 = 0.7 \quad (F.7b)$$

$$c_2 = \min(0.6, A) \quad (F.7c)$$

Les fonctions d'amortissement du terme lent sont définies par :

$$f_A = \min(0.6, A_2) \quad (F.8a)$$

$$f_{R_t} = \max(0., 1 - \frac{R_t}{140}) \quad (F.8b)$$

Les coefficients scalaires des groupements tensoriels du terme lent sont :

$$c_{s1} = -c_1 \quad (F.9a)$$

$$c_{s2} = -c'_1 c_1 \quad (F.9b)$$

Le terme rapide possède les coefficients suivants :

$$flt_1 = -\frac{3}{5} \quad (F.10a)$$

$$flt_2 = \frac{3}{10} \quad (F.10b)$$

$$flt_3 = -\frac{1}{5} \quad (F.10c)$$

$$flt_4 = -c_2 A_2 \quad (F.10d)$$

$$flt_5 = -3 c_2 \quad (F.10e)$$

Ce modèle se met sous la forme fonctionnelle classique rappelée ci-dessus, et correspond aux valeurs suivantes des coefficients :

$$\beta_1^S = 2 c_{s1} \quad (F.11a)$$

$$\beta_2^S = 4 c_{s2} \quad (F.11b)$$

et

$$\beta_1 = \{bS\} [4 (flt_3 - flt_2)] \quad (F.11c)$$

$$\beta_2 = 0 \quad (F.11d)$$

$$\beta_3 = -\frac{2}{3} flt_1 + 2 \{b^2\} flt_3 \quad (F.11e)$$

$$\beta_4 = -flt_1 \quad (F.11f)$$

$$\beta_5 = -6 flt_3 \quad (F.11g)$$

$$\beta_6 = -flt_1 - \frac{4}{3} flt_3 - 2 flt_4 \quad (F.11h)$$

$$\beta_7 = -2 flt_3 \quad (F.11i)$$

$$\beta_8 = -8 flt_5 \quad (F.11j)$$

Seul le terme rapide se voit corrigé par un terme de réflexion de forme classique :

$$\phi_{ij}^{P(s)} = 0 \quad (F.12a)$$

$$\phi_{ij}^{P(r)} = C_{w2} \frac{l}{d} \left[ \phi_{mn}^R n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{kj}^R n_k n_j - \frac{3}{2} \phi_{ki}^R n_k n_i \right] \quad (F.12b)$$

où  $C_{w2} = 0.02$ ,  $d$  désigne la distance à la paroi et  $l$  est une échelle caractéristique de la turbulence, définie par :

$$l = \frac{K}{\varepsilon} (R_{mn} n_n n_m)^{1/2} \quad (F.13)$$

avec  $n$ , le vecteur normal aux parois. Les inhomogénéités sont par ailleurs prises en compte dans l'expression du gradient de vitesse moyenne intervenant dans le terme rapide en y remplaçant les gradients de vitesse moyenne par :

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial x_j} + c_I l \frac{\partial l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \bar{V}_i}{\partial x_j \partial x_k} \quad (F.14)$$

avec  $c_I = 0.3$ .

Seule la trace du terme de diffusion de pression est modélisée en fonction du terme de diffusion visqueuse par :

$$d_{ij}^p = \frac{1}{3} \left[ d_{mn}^\nu n_k n_m \delta_{ij} - d_{kj}^\nu n_k n_j - d_{ki}^\nu n_k n_i \right] \quad (F.15)$$

Le tenseur des taux de dissipation se décompose en deux contributions :

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_\varepsilon) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_\varepsilon \varepsilon_{ij}^* \quad (F.16)$$

avec la fonction d'amortissement suivante :

$$f_\varepsilon = \exp(-20 A^2) \quad (F.17)$$

et

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\varepsilon}{K} \frac{(R_{ij} + R_{ik} n_j n_k + R_{jk} n_i n_k + R_{mn} n_n n_m n_i n_j)}{(1 + \frac{3}{2K} R_{mn} n_n n_m)} \quad (F.18)$$

L'équation de transport du taux de dissipation  $\varepsilon$  est modélisée par :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{d\varepsilon}}{\overline{dt}} &= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon P}{K} - C_{\varepsilon 2} \frac{\tilde{\varepsilon} \varepsilon}{K} + \frac{\partial}{\partial x_m} \left[ \left( \nu \delta_{mn} + C_{\varepsilon} R_{mn} \frac{K}{\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_n} \right] \\ &+ 2 C_{\varepsilon 3} \nu R_{ij} \frac{K}{\varepsilon} U_{k,in} U_{k,jn} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ C_{\varepsilon 4} \nu \frac{\tilde{\varepsilon}}{K} \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] \end{aligned} \quad (F.19)$$

avec

$$C_{\varepsilon 1} = 1.0 \quad (F.20a)$$

$$C_{\varepsilon 2} = \frac{1.92}{1 + 0.63 \sqrt{A_2 A}} \quad (F.20b)$$

$$C_{\varepsilon 3} = 0.43 \quad (F.20c)$$

$$C_{\varepsilon} = 0.92 \quad (F.20d)$$

et la pseudo-dissipation est définie par :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left( \frac{\partial \sqrt{K}}{\partial x_n} \right)^2 \quad (F.21)$$

Un terme correctif est appliqué à l'équation de transport du tenseur de Reynolds, qui revient à modifier la modélisation du tenseur des taux de dissipation. Le coefficient proposé par Launder et Tselepidakis s'écrit :

$$c_1^* = -0.05 \quad (F.22)$$

et

$$\varepsilon_{ij} = (1 - f_{\varepsilon}) \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + f_{\varepsilon} \varepsilon_{ij}^* + \varepsilon'_{ij} \quad (F.23)$$

avec

$$\varepsilon'_{ij} = 2 c_1^* ((\varepsilon - \tilde{\varepsilon})) \left[ 2 b_{ij} + b_{mn} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} b_{kj} n_k n_j - \frac{3}{2} b_{ki} n_k n_i \right] \quad (F.24)$$

---

## Annexe G

# Equations de Navier-Stokes en repère relatif

Cette annexe rappelle l'expression des équations du mouvement en repère tournant. La notion d'indifférence matérielle et son application à la modélisation algébrique du tenseur de Reynolds ou son équation de transport est brièvement abordée.

L'écoulement turbulent incompressible est décrit dans un repère tournant à chaque instant par les équations de Navier-Stokes :

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (G.1a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \nabla^2 v - \dot{\Omega} \wedge x - \Omega \wedge (\Omega \wedge x) - B - 2\Omega \wedge v \quad (G.1b)$$

Le vecteur  $\Omega(t)$  désigne le taux de rotation du repère d'inertie par rapport au repère de référence Galiléen, et  $B$  est l'accélération rectiligne de l'origine du repère relatif. L'équation de continuité n'est pas affectée par le changement de repère.

La décomposition classique du champ turbulent en parties moyenne et fluctuante conduit aux équations moyennes suivantes :

$$\nabla \cdot \bar{V} = 0 \quad (G.2a)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} + \nu \nabla^2 \bar{V} - \nabla R - \dot{\Omega} \wedge x - \Omega \wedge (\Omega \wedge x) - B - 2\Omega \wedge \bar{V} \quad (G.2b)$$

en notant  $R = \overline{u u}$  le tenseur de Reynolds, et

$$v = \bar{V} + u \quad (G.3a)$$

$$P = \bar{P} + p \quad (G.3b)$$

La force centrifuge peut s'écrire sous la forme d'un gradient :

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge x) = \text{grad} \left( \frac{|\Omega \wedge x|^2}{2} \right) \quad (G.4)$$

ce qui permet d'introduire la pression modifiée :

$$\bar{P}^* = \bar{P} - \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} \quad (G.5)$$

où  $r$  désigne la distance du point  $x$  à l'axe de la rotation.

L'équation d'évolution des fluctuations de vitesse s'obtient en soustrayant l'équation de quantité de mouvement moyenne de l'équation instantanée :

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (G.6a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla u = -u \nabla u - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u - u \nabla \bar{V} - \nabla R - 2 \Omega \wedge u \quad (G.6b)$$

Il est clair que le mouvement fluctuant est explicitement affecté par la seule accélération de Coriolis. Les accélérations Eulériennes, centrifuge et l'accélération de translation agissent indirectement sur les fluctuations de vitesse par l'intermédiaire de leur action sur le champ de vitesse moyenne.

Par analogie entre les écoulements turbulents stratifiés et ceux soumis à des effets de rotation, Bradshaw [12] définit un nombre de Richardson pour les écoulements cisailés en repère tournant :

$$R_i = -2 \frac{\Omega}{S} \left( 1 - 2 \frac{\Omega}{S} \right) \quad (G.7)$$

Il n'est cependant pas entièrement justifié de corriger les modèles en introduisant des échelles dépendant de ce terme pour prendre en compte la rotation du repère. Speziale et Mhuiris [158] ont montré en effet que le nombre de Richardson n'est pas un paramètre de similitude pour la forme complète des équations de Navier-Stokes en repère relatif. L'état d'équilibre d'une turbulence cisailée en présence de rotation ne dépend du rapport entre le taux de cisaillement du mouvement moyen et le taux de rotation des axes que par le nombre de Rossby

$$R_o = \frac{\Omega}{S} \quad (G.8)$$

Ce résultat est confirmé par les expériences de simulations de grosses structures de Bardina, Ferziger et Reynolds [5], qui montrent en particulier que pour les nombres de Rossby de  $\Omega/S = 0$  et de  $\Omega/S = 0.5$ , les évolutions de l'énergie cinétique turbulente à partir d'un état turbulent isotrope sont bien différentes, alors que le paramètre de Richardson les prédit en similitude.

L'action de la force de Coriolis sur l'écoulement peut avoir un effet stabilisateur ou déstabilisateur, tout comme la force centrifuge dans le cas d'une turbulence en présence de courbures dans la direction de l'écoulement. Bien que les mécanismes d'instabilités soient différents dans les deux cas, les écoulements cisailés en présence de courbures ou de rotations sont couramment mis en parallèle.

La construction de fermetures en repère tournant doit pouvoir prendre en compte le comportement de la turbulence en rotation. Si dans le cadre de la mécanique des milieux continus, le concept d'indifférence matérielle est largement utilisé dans le développement des relations constitutives du milieu, son application aux écoulements turbulents n'est pas aussi justifiée. Les équations de Navier-Stokes ne s'écrivent pas de la même façon dans un repère fixe et dans un repère en rotation et la turbulence y évolue différemment. Toute quantité invariante par changement de repère est dite matériellement indifférente, ou encore objective. Ses composantes dans les deux repères sont liées à chaque instant par la transformation des vecteurs de base. Les deux quantités non-objectives les plus importantes du point de vue de la modélisation sont le tenseur des taux de rotation et la dérivée particulaire.

Si le tenseur des taux de déformation est objectif, il n'en est pas de même du tenseur des taux de rotation [158]. Le vecteur axial de rotation du repère relatif par rapport au repère de

référence s'écrit en fonction du tenseur de rotation des axes de la façon suivante :

$$\Omega_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_{jk} \quad (\text{G.9})$$

Le tenseur des taux de rotation dans le repère mobile est défini par :

$$\overline{W}_{ij} = \frac{1}{2} (\overline{V}_{i,j} - \overline{V}_{j,i}) \quad (\text{G.10})$$

Il est associé à la vorticité locale, notée :

$$\overline{w}_i = \text{rot} (\overline{V}_i) \quad (\text{G.11})$$

par la relation

$$\overline{W}_{ij} = -\varepsilon_{ijn} \overline{w}_n \quad (\text{G.12})$$

La vorticité absolue, quantité objective, est définie par la somme suivante :

$$\overline{w}_{ai} = \overline{w}_i + 2 \Omega_i \quad (\text{G.13})$$

et le tenseur des taux de rotation objectif s'écrit :

$$\overline{W}_{aij} = \overline{W}_{ij} - \varepsilon_{ijn} \Omega_n \quad (\text{G.14})$$

(voir annexe H). Ces résultats classiques imposent en particulier que toute expression objective qui est supposée dépendre du tenseur des taux de rotation doit faire intervenir en réalité le tenseur absolu  $\overline{W}_{aij}$  et non  $\overline{W}_{ij}$ .

La dérivée particulaire

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \overline{V} \cdot \nabla u \quad (\text{G.15})$$

n'est pas une quantité objective, contrairement à la dérivée d'Oldroyd, définie pour un vecteur par :

$$\frac{\mathcal{D}u}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \overline{V} \cdot \nabla u - u \cdot \nabla \overline{V} \quad (\text{G.16})$$

Cette dérivée permet d'écrire l'équation d'évolution des fluctuations de vitesse sous une forme qui reste inchangée, que l'écoulement soit décrit dans un référentiel Galiléen ou non.

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (\text{G.17a})$$

$$\frac{\mathcal{D}u}{\mathcal{D}t} = -u \cdot \nabla u - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u - 2 u \cdot (S + \overline{W}_a) - \nabla R \quad (\text{G.17b})$$

Les dérivées en corotation (dérivées de Jaumann) conduisent également à des expressions objectives et s'écrivent pour un vecteur :

$$\frac{\mathcal{D}_c u}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \overline{V} \cdot \nabla u - u \cdot \overline{W} \quad (\text{G.18})$$

où  $\overline{W}$  est le tenseur des taux de rotation relatif. Dans ce cas, l'équation d'évolution des fluctuations de vitesse devient :

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (\text{G.19a})$$

$$\frac{\mathcal{D}_c u}{\mathcal{D}t} = -u \cdot \nabla u - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 u - u \cdot (S + 2 \overline{W}_a) - \nabla R \quad (\text{G.19b})$$

Les dérivées de Jaumann et d'Oldroyd permettent toutes deux de fournir des expressions objectives des équations de transport de quantité de mouvement. Elles sont liées dans le cas d'un vecteur par :

$$\frac{\mathcal{D}u}{\mathcal{D}t} = \frac{\mathcal{D}_c u}{\mathcal{D}t} - u \cdot S \quad (G.20)$$

Dans le cas de dérivées particulières de tenseurs, elles s'écrivent respectivement :

$$\frac{\mathcal{D}_c R_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{DR_{ij}}{Dt} - [R_{ik} W_{jk} + R_{jk} W_{ik}] \quad (G.21a)$$

et

$$\frac{\mathcal{D}R_{ij}}{\mathcal{D}t} = \frac{DR_{ij}}{Dt} - [R_{ik} \bar{V}_{j,k} + R_{jk} \bar{V}_{i,k}] \quad (G.21b)$$

Leurs expressions ne diffèrent que par la prise en compte du groupement objectif

$$- [R_{ik} S_{jk} + R_{jk} S_{ik}] \quad (G.22)$$

dans la dérivée. Toute fermeture objective d'un tenseur objectif qui est supposé dépendre de la dérivée particulière doit par conséquent le faire par l'intermédiaire de quantités de ce type. C'est la cas par exemple du modèle algébrique quadratique pour le tenseur de Reynolds proposé par Speziale [152].

Les équations de Navier-Stokes ne sont pas indépendantes du repère dans lequel elles sont décrites, pas plus que les équations d'évolution du tenseur de Reynolds. La turbulence placée dans un repère en rotation présente des caractéristiques distinctes de celle évoluant en repère fixe. En revanche, dans le cas où la turbulence est bidimensionnelle, c'est-à-dire lorsque l'évolution des fluctuations de vitesse est invariante dans une direction, Speziale et Mac Giolla Mhuiris [158] ont montré que les équations doivent être invariantes pour toute rotation agissant dans cette direction. Les forces de Coriolis peuvent en effet être absorbées dans la pression en définissant une fonction de courant pour le mouvement évoluant dans les plans normaux à l'axe de rotation [67], ce qui rend l'équation de fluctuation de vitesse identique, que le référentiel soit Galiléen ou non. Cette propriété d'invariance est connue en tant que principe d'indifférence matérielle dans la limite d'une turbulence bidimensionnelle.

Loin du voisinage immédiat de parois solides, l'existence d'une telle limite bidimensionnelle peut survenir lorsque la configuration de l'écoulement satisfait des critères énoncés dans le théorème de Taylor-Proudman [52], d'après lequel un écoulement stationnaire placé dans un repère en rotation évolue sous l'action des forces de Coriolis vers un état bidimensionnel, dans le plan normal à l'axe de la rotation. Le champ moyen, en particulier, devient bidimensionnel, perdant la composante de vitesse dans l'axe de rotation. C'est également le cas des fluctuations de vitesse, conduisant la turbulence vers un état bidimensionnel à deux composantes. Ce théorème est vérifié expérimentalement avec une bonne approximation lorsque la vitesse de rotation du repère est grande devant la fréquence caractéristique des fluctuations turbulentes.

Ce comportement est différent de celui observé lorsque la turbulence est brusquement soumise à une forte rotation, turbulence dont l'étude peut s'effectuer dans le cadre de la théorie de distorsion rapide. Avec cette approximation (voir annexe K), une turbulence initialement isotrope n'est affectée par l'action d'une rotation rapide que par l'intermédiaire de la viscosité. Les quantités turbulentes restent isotropes, mais subissent une décroissance visqueuse linéaire [112]. Ce comportement est valable pour des petits temps d'évolution à partir de l'application de la rotation, et en particulier lorsque le temps caractéristique de la turbulence est grand devant le temps du mouvement moyen. Il faut noter que pour des grands nombres de Reynolds,

---

cette décroissance visqueuse est négligeable, ce qui laisse une turbulence, initialement isotrope, inchangée sous l'effet d'une rotation rapide. Dans le cas où la turbulence est initialement anisotrope, elle subit le même décroissance visqueuse, mais ses structures sont également affectées par l'action de la rotation. Les états asymptotiques obtenus après application d'une rotation rapide sur une turbulence initialement axisymétrique conservent les trois composantes de fluctuation de vitesse. L'approximation de distorsion rapide ne satisfait pas les hypothèse du théorème de Taylor-Proudman parce qu'elle affecte le champ fluctuant sur un temps caractéristique de l'ordre de celui de la rotation imposée. Les variations rapides du champ turbulent qui en résulte sont cependant tout aussi difficile à restituer par les modèles au second ordre de type classique.

L'information contenue dans le tenseur de Reynolds n'est pas suffisante pour rendre compte de la dimension du champ turbulent et renseigne uniquement sur ce que Kassinos et Reynolds [67] appellent la componentialité, c'est-à-dire sur l'état des composantes des fluctuations de vitesse. Cette analyse a également été effectuée par Cambon, Jacquin et Lubrano [18] d'après une étude spectrale de la turbulence en présence de rotation, et conduisent à la formulation de modèles faisant intervenir des variables supplémentaires pour restituer au mieux l'action de la rotation dans les modèles de fermeture en un point.





---

## Annexe H

# Changement de repère et objectivité

Cette annexe récapitule les principales caractéristiques d'un changement de repère par transformation Eulérienne et rappelle la notion d'objectivité appliquée à un tenseur du second ordre. Avant de traiter une équation de transport, les principales dérivées objectives utilisées sont données avec leur formalisme associé. L'ensemble de ces notions est enfin appliqué aux équations d'évolution du tenseur de Reynolds.

### H.1 Changement de repère

#### H.1.1 Transformations Euclidiennes classiques

Soit une particule  $M$  de coordonnées  $X$  dans un référentiel  $\{E\}$ . Tout changement de repère dans l'espace Euclidien peut être décomposé en une rotation et une translation dépendantes du temps, et est décrit par le groupe de transformations suivant :

$$X_i = P_{ji}(t) x_j + B_i(t) \quad (\text{H.1})$$

où

- $X$  désigne la position de  $M$  dans le repère fixe  $\{E\}$
- $x$ , celle dans le repère mobile  $\{e\}$
- $B(t)$  est une translation quelconque, dépendante du temps
- $P(t)$ , une transformation orthogonale directe quelconque

Les vecteurs de base sont transformés par la rotation  $P_{ji}(t)$  :

$$e_i = P_{ij}(t) E_j \quad (\text{H.2})$$

$P(t)$  étant une matrice orthogonale, notons que :

$$P_{im} P_{jm} = \delta_{ij} \quad (\text{H.3a})$$

$$P_{mi} P_{mj} = \delta_{ij} \quad (\text{H.3b})$$

Lorsque la translation  $B$  est indépendante du temps, le changement de repère est dit Galiléen. En dérivant (H.3a), il vient :

$$\dot{P}_{im} P_{jm} + \dot{P}_{jm} P_{im} = 0 \quad (\text{H.4a})$$

$$\dot{P}_{mi} P_{mj} + \dot{P}_{mj} P_{mi} = 0 \quad (\text{H.4b})$$

Le cadre de l'étude est précisé au paragraphe suivant, où on s'intéressera aux lois de transformation sur la vitesse et le gradient de vitesse de la particule  $M$ .

### H.1.2 Notion d'objectivité

Un tenseur  $T$  est dit objectif - ou encore matériellement indifférent - si ses composantes, vues dans deux repères de référence sont liées à chaque instant par les transformations usuelles associées à une rotation de coordonnées. Le tenseur et son transformé vérifient donc une relation du type :

$$\bar{T}_{ij} = P_{im}(t) T_{mn} P_{jn}(t) \quad (H.5)$$

## H.2 Règles de transformations d'un repère de référence à un repère mobile

Ce paragraphe récapitule les relations sur les vitesses, les gradients de vitesse et les accélérations d'une particule vue d'un repère de référence et d'un repère relatif. Au risque de paraître redondant, ces expressions sont examinées lorsque le repère de référence est d'inertie et lorsqu'il ne l'est pas. On dispose donc de trois référentiels,  $\{E\}$ ,  $\{e\}$ , et  $\{\bar{e}\}$ , dont les caractéristiques seront précisées au paragraphe suivant. Pour plus de clarté, le repère intermédiaire  $\{e\}$  sera appelé repère mobile et  $\{\bar{e}\}$ , repère relatif.

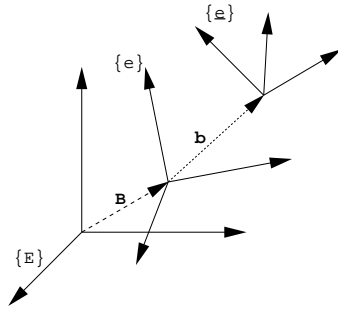


FIG. H.1: Repères  $\{E\}$ ,  $\{e\}$ , et  $\{\bar{e}\}$ .

### H.2.1 Notations

Le passage du repère fixe  $\{E\}$  au repère mobile  $\{e\}$  est régi par les transformations suivantes :

$$x_i = P_{ij} (X_j - B_j) \quad (H.6a)$$

$$e_i = P_{ij} E_j \quad (H.6b)$$

Etant donné que le référentiel  $\{E\}$  est fixe, la dérivation de (H.6b) par rapport au temps conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{de_i}{dt} &= \dot{P}_{ij} E_j \\ &= \dot{P}_{ij} P_{mj} e_m \end{aligned} \quad (H.7)$$

On note le tenseur des taux de rotation du repère de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \dot{P}_{im} P_{jm} \\ &= -\varepsilon_{ijm} \Omega_m \end{aligned} \quad (H.8)$$

de telle sorte que :

$$\frac{de_i}{dt} = \Omega_{ij} e_j \quad (H.9)$$

où  $\Omega_{ij}$  est un tenseur antisymétrique, et  $\Omega_m$  son vecteur axial associé.  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation des axes de  $\{e\}$  autour de ceux de  $\{E\}$ . Le transformé de  $\Omega$  dans le repère initial sera indiqué par la suite de la façon suivante :

$$\Omega_{ij}^P \equiv P_{ni} \Omega_{mn} P_{mj} \quad (H.10)$$

On peut noter immédiatement que :

$$\Omega_{ij}^P = \dot{P}_{mi} P_{mj} \quad (H.11)$$

Le passage du repère mobile  $\{e\}$  au repère relatif  $\{\bar{e}\}$  s'écrit :

$$\bar{x}_i = \bar{P}_{ij} (x_j - \bar{b}_j) \quad (H.12a)$$

$$\bar{e}_i = \bar{P}_{ij} e_j \quad (H.12b)$$

La position  $\bar{x}$  du point  $M$  dans le repère  $\{\bar{e}\}$  est relative vis-à-vis du repère  $\{e\}$ . La dérivation de (H.12b) doit tenir compte ici de l'évolution des vecteurs de base  $e$  au cours du temps. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}_i}{dt} &= \dot{\bar{P}}_{ij} e_j + \bar{P}_{ij} \frac{de_j}{dt} \\ &= \dot{\bar{P}}_{ik} e_k - \bar{P}_{ij} \varepsilon_{jkm} \Omega_m e_k \\ &= [\dot{\bar{P}}_{ik} - \bar{P}_{ip} \varepsilon_{pkm} \Omega_m] \bar{P}_{jk} \bar{e}_j \end{aligned} \quad (H.13)$$

Par conséquent, le tenseur de rotation des axes du repère relatif  $\{\bar{e}\}$  a pour composantes dans la base  $\bar{e}$  :

$$\bar{\Omega}_{ij} = \bar{P}_{jk} \dot{\bar{P}}_{ik} - \bar{P}_{jk} \bar{P}_{ip} \varepsilon_{pkm} \Omega_m \quad (H.14)$$

De même que précédemment, son transformé dans le repère mobile  $\{e\}$  est défini par :

$$\bar{\Omega}_{ij}^P \equiv \bar{P}_{ni} \bar{\Omega}_{mn} \bar{P}_{mj} \quad (H.15)$$

et s'écrit :

$$\bar{\Omega}_{ij}^P = \bar{P}_{kj} \dot{\bar{P}}_{ki} + \varepsilon_{ijm} \Omega_m \quad (H.16)$$

soit encore :

$$\bar{\Omega}_{ij}^P = \bar{P}_{kj} \dot{\bar{P}}_{ki} - \Omega_{ij} \quad (H.17)$$

### H.2.2 Vitesse et gradient de vitesse

La vitesse de la particule  $M$  par rapport aux repères fixe et mobile est définie respectivement par :

$$\vartheta_j(X, t) \equiv \dot{X}_j \quad (H.18a)$$

$$V_i(x, t) \equiv \dot{x}_i \quad (H.18b)$$

En dérivant (H.6a), on écrit la relation entre ces deux vitesses, il vient :

$$V_i(x, t) = P_{ij} [\vartheta_j(X, t) - \dot{B}_j] + \dot{P}_{ij} [X_j - B_j] \quad (H.19)$$

La relation entre les gradients de vitesses s'écrit alors :

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial X_k} [P_{im} \vartheta_m(X, t) + \dot{P}_{im} X_m] \frac{\partial X_k}{\partial x_j} \quad (\text{H.20})$$

$$\begin{aligned} &= [P_{im} \frac{\partial \vartheta_m}{\partial X_k} + \dot{P}_{im} \delta_{mk}] P_{jk} \\ &= P_{im} \frac{\partial \vartheta_m}{\partial X_n} P_{jn} + \dot{P}_{im} P_{jm} \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

La vitesse de  $M$  dans le repère relatif  $\{\bar{e}\}$  est définie d'une façon analogue par :

$$\bar{V}_i(\bar{x}, t) \equiv \dot{\bar{x}}_i \quad (\text{H.22})$$

où  $\bar{V}_i(\bar{x}, t)$  est la  $i^{\text{e}}$  composante de la vitesse  $\bar{V}$  dans les axes relatifs de  $\{\bar{e}\}$ . On peut alors noter que les expressions (H.19) et (H.20) s'appliquent d'une façon analogue aux cas de  $V$  et  $\bar{V}$ , soit :

$$\bar{V}_i(\bar{x}, t) = \bar{P}_{ij} [V_j(x, t) - \dot{\bar{b}}_j] + \dot{\bar{P}}_{ij} [x_j - \bar{b}_j] \quad (\text{H.23})$$

et

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{\partial}{\partial X_k} [\bar{P}_{im} V_m(X, t) + \dot{\bar{P}}_{im} X_m] \frac{\partial X_k}{\partial \bar{x}_j} \quad (\text{H.24})$$

$$\begin{aligned} &= [\bar{P}_{im} \frac{\partial V_m}{\partial X_k} + \dot{\bar{P}}_{im} \delta_{mk}] \bar{P}_{jk} \\ &= \bar{P}_{im} \frac{\partial \vartheta_m}{\partial X_n} \bar{P}_{jn} + \dot{\bar{P}}_{im} \bar{P}_{jk} \end{aligned} \quad (\text{H.25})$$

En effet, la dérivation de (H.12a) s'écrit ::

$$\dot{x}_i e_i + x_i \dot{e}_i = \dot{\bar{x}}_j \bar{P}_{ji} e_i + \bar{x}_j \dot{e}_j + \dot{\bar{b}}_i e_i + \bar{b}_i \dot{e}_i \quad (\text{H.26})$$

or, d'après (H.9) et (H.13), il vient :

$$\dot{x}_i - x_j \varepsilon_{jim} \Omega_m = \dot{\bar{x}}_j \bar{P}_{ji} + \bar{x}_j [\dot{\bar{P}}_{ji} - \bar{P}_{jp} \varepsilon_{pim} \Omega_m] + \dot{\bar{b}}_i + \bar{b}_j \varepsilon_{jim} \Omega_m \quad (\text{H.27})$$

soit encore :

$$[\dot{x}_i - \dot{\bar{b}}_i] - \varepsilon_{jim} \Omega_m [x_j - \bar{b}_j] = \dot{\bar{x}}_j \bar{P}_{ji} + \bar{x}_j [\dot{\bar{P}}_{ji} - \bar{P}_{jp} \varepsilon_{pim} \Omega_m] \quad (\text{H.28})$$

L'expression (H.12a) permet d'extraire la vitesse  $\dot{\bar{x}}_j$ ,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_q &= \bar{P}_{qi} [\dot{x}_i - \dot{\bar{b}}_i] - \bar{P}_{qi} \varepsilon_{jim} \Omega_m [x_j - \bar{b}_j] - [\dot{\bar{P}}_{ji} - \bar{P}_{jp} \varepsilon_{pim} \Omega_m] \bar{P}_{qi} \bar{P}_{jn} [x_n - \bar{b}_n] \\ &= \bar{P}_{qi} [\dot{x}_i - \dot{\bar{b}}_i] - \bar{P}_{ji} \bar{P}_{qi} \bar{P}_{jn} [x_n - \bar{b}_n] - [\bar{P}_{qi} \varepsilon_{jim} \Omega_m [x_j - \bar{b}_j] - \bar{P}_{qi} \varepsilon_{pim} \Omega_m] [x_p - \bar{b}_p] \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

qui devient, compte tenu de (H.4a) :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_q &= \bar{P}_{qi} [\dot{x}_i - \dot{\bar{b}}_i] + \dot{\bar{P}}_{qi} \bar{P}_{ji} \bar{P}_{jn} [x_n - \bar{b}_n] \\ &= \bar{P}_{qi} [\dot{x}_i - \dot{\bar{b}}_i] + \dot{\bar{P}}_{qi} [x_i - \bar{b}_i] \end{aligned} \quad (\text{H.30})$$

ce qui est bien (H.23). La relation (H.24) est alors immédiate.

### H.2.3 Tenseurs des taux de déformation et de rotation

A partir des expressions (H.20) ou (H.24), il est possible d'exprimer les relations correspondantes pour les tenseurs des taux de déformation et de rotation. Elles s'écrivent encore d'une façon analogue pour les deux transformations envisagées. Dans le cas du passage du repère mobile  $\{e\}$  au repère relatif  $\{\bar{e}\}$ , il vient :

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \\ &= \bar{P}_{im} S_{mn} \bar{P}_{jn}\end{aligned}\tag{H.31}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{W}_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \bar{x}_j} - \frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \bar{x}_i} \right) \\ &= \bar{P}_{im} W_{mn} \bar{P}_{jn} + \bar{P}_{im} \dot{\bar{P}}_{jm}\end{aligned}\tag{H.32}$$

Le tenseur  $\bar{S}_{ij}$  est objectif, dans la mesure où il vérifie la loi de transformation usuelle pour une rotation de coordonnées. Il n'en est pas de même pour le tenseur des taux de rotation  $\bar{W}_{ij}$  dont la transformation fait intervenir des termes supplémentaires, contenant des informations sur la rotation du fluide. On peut noter que le terme qui empêche le tenseur  $\bar{W}$  d'être objectif est, pour la première transformation :

$$P_{im} \dot{P}_{jm} = -\Omega_{ij}\tag{H.33}$$

ce qui confirme que  $\bar{W} + \Omega$  est le tenseur absolu, et pour la seconde transformation :

$$\bar{P}_{im} \dot{\bar{P}}_{jm} = -\bar{\Omega}_{ij} + \bar{P}_{ik} \bar{P}_{jp} \varepsilon_{pkm} \Omega_m\tag{H.34}$$

### H.2.4 Accélération

Avant de dériver les vitesses, écrivons les relations inverses de (H.31) et de (H.23), soit l'expression de la vitesse dans le repère de référence en fonction de la vitesse vue du repère mobile. Dans un premier temps, on s'intéresse à la loi de transformation depuis le repère fixe, jusqu'au repère mobile. L'équation (H.19) s'écrit :

$$\vartheta_j(X, t) E_j = [P_{ij} V_i(x, t) + \dot{P}_{ij} x_i + \dot{B}_j] E_j\tag{H.35}$$

La vitesse absolue,  $\vartheta_j(X, t)$ , se décompose suivant une vitesse relative, écrite dans le repère fixe,  $\dot{P}_{ij} V_i(x, t)$ , et une vitesse d'entraînement. Cette dernière se scinde en deux contributions, l'une due à la rotation des axes du repère,  $\dot{P}_{ij} x_i$ , et l'autre à leur translation,  $\dot{B}_j$ . On peut noter que la vitesse d'entraînement par la rotation solide peut encore s'exprimer suivant :

$$\dot{P}_{ij} x_i = \Omega_{jk}^P P_{ik} x_i$$

En dérivant (H.35), il vient :

$$\dot{\vartheta}_j(X, t) E_j = [2 \dot{P}_{ij} V_i(x, t) + P_{ij} \dot{V}_i(x, t) + \ddot{P}_{ij} x_i + \ddot{B}_j] E_j\tag{H.36}$$

ou encore :

$$\dot{\vartheta}_j(X, t) = 2 \dot{P}_{ij} P_{ip} [\vartheta_p - \dot{B}_p] + (2 \dot{P}_{ij} \dot{P}_{ip} + \ddot{P}_{ij} P_{ip}) [X_p - B_p] + \dot{P}_{ij} \dot{V}_i + \ddot{B}_j\tag{H.37}$$

La forme de (H.36) permet de déduire facilement  $\dot{V}_i(x, t)$  de  $\dot{\vartheta}_j(X, t)$  :

$$\dot{V}_i = P_{ij} \dot{\vartheta}_j - 2 \dot{P}_{jm} P_{im} V_j - P_{im} \ddot{P}_{jm} x_j - P_{ij} \ddot{B}_j \quad (H.38)$$

Une interprétation des termes de (H.37) apparaît plus nettement en faisant intervenir le tenseur transformé  $\Omega_{ij}^P$ . En effet, compte tenu des égalités suivantes :

$$\dot{\Omega}_{ij}^P = \ddot{P}_{mi} P_{mj} + \dot{P}_{mi} \dot{P}_{mj} \quad (H.39a)$$

$$\Omega_{ij}^{P2} = -\dot{P}_{mi} \dot{P}_{mj} \quad (H.39b)$$

il vient :

$$\dot{\vartheta}_j = 2 \Omega_{jp}^P [\vartheta_p - \dot{B}_p] + (\dot{\Omega}_{jp}^P - \Omega_{jp}^{P2}) [X_p - B_p] + P_{ij} \dot{V}_i + \ddot{B}_j \quad (H.40)$$

Par définition,

$$2 \Omega_{jp}^P [\vartheta_p - \dot{B}_p] \quad \text{est l'accélération de Coriolis} \quad (H.41a)$$

$$\dot{\Omega}_{jp}^P [X_p - B_p] \quad \text{est l'accélération d'Euler} \quad (H.41b)$$

$$- \Omega_{jp}^{P2} [X_p - B_p] \quad \text{est l'accélération centripète} \quad (H.41c)$$

Il est immédiat que (H.38) devient :

$$\dot{V}_i = P_{ij} \dot{\vartheta}_j - 2 \Omega_{ji} V_j - (\dot{\Omega}_{ji} + \Omega_{ji}^2) x_j - P_{ij} \ddot{B}_j \quad (H.42)$$

Bien que les écritures soient encore analogues, détaillons l'ensemble de ces expressions pour la transformation depuis  $e$  jusqu'à  $\bar{e}$ . L'équation (H.23) s'écrit :

$$V_j(x, t) e_j = [\bar{P}_{ij} \bar{V}_i(\bar{x}, t) + \dot{\bar{P}}_{ij} \bar{x}_i + \dot{\bar{b}}_j] e_j \quad (H.43)$$

En dérivant, il vient :

$$\begin{aligned} & [\dot{V}_j(x, t) - \varepsilon_{ijm} \Omega_m V_i(x, t)] e_j \\ &= \\ & [2 \dot{\bar{P}}_{ij} \bar{V}_i(\bar{x}, t) + \bar{P}_{ij} \dot{\bar{V}}_i(\bar{x}, t) + \ddot{\bar{P}}_{ij} \bar{x}_i + \ddot{\bar{b}}_j - \varepsilon_{ijm} \Omega_m (\bar{P}_{pi} \bar{V}_p(\bar{x}, t) - \dot{\bar{P}}_{pi} \bar{x}_p + \dot{\bar{b}}_i)] e_j \end{aligned} \quad (H.44)$$

soit :

$$\dot{V}_j(x, t) = 2 \dot{\bar{P}}_{ij} \bar{V}_i(\bar{x}, t) + \bar{P}_{ij} \dot{\bar{V}}_i(\bar{x}, t) + \dot{\bar{P}}_{ij} \bar{x}_i + \ddot{\bar{b}}_j \quad (H.45)$$

ce qui se regroupe encore suivant :

$$\dot{V}_j = 2 \dot{\bar{P}}_{ij} [V_p - \dot{\bar{b}}_p] + (2 \dot{\bar{P}}_{ij} \dot{\bar{P}}_{ip} + \ddot{\bar{P}}_{ij} \bar{P}_{ip}) [x_p - \bar{b}_p] + \dot{\bar{P}}_{ij} \dot{\bar{V}}_i + \ddot{\bar{b}}_j \quad (H.46)$$

Notons

$$\tilde{\Omega}_{ij}^P = \bar{\Omega}_{ij}^P + \Omega_{ij} \quad (H.47)$$

D'une façon analogue au calcul effectué pour la transformation précédente, il vient :

$$\dot{V}_j = 2 \tilde{\Omega}_{jp}^P [V_p - \dot{\bar{b}}_p] + (\dot{\tilde{\Omega}}_{jp}^P - \tilde{\Omega}_{jp}^{P2}) [x_p - \bar{b}_p] + \bar{P}_{ij} \dot{\bar{V}}_i + \ddot{\bar{b}}_j \quad (H.48)$$

En développant, il vient :

$$\dot{\bar{P}}_{mj} \dot{\bar{P}}_{mi} + \bar{P}_{mj} \ddot{\bar{P}}_{mi} = \dot{\tilde{\Omega}}_{ij}^P + \dot{\Omega}_{ij} \quad (H.49a)$$

$$\dot{\bar{P}}_{mi} \dot{\bar{P}}_{mj} = -\tilde{\Omega}_{ij}^{P2} - \bar{\Omega}_{ik}^P \Omega_{kj} - \bar{\Omega}_{kj}^P \Omega_{ik} - \Omega_{ij}^2 \quad (H.49b)$$

ce qui permet d'écrire l'expression (H.46) sous la forme :

$$\dot{V}_j = 2(\bar{\Omega}_{jp}^P + \Omega_{jp}) [V_p - \dot{\bar{b}}_p] + (\dot{\bar{\Omega}}_{jp}^P - \bar{\Omega}_{jp}^{P2} + \dot{\Omega}_{jp} - \Omega_{jp}^2 - \bar{\Omega}_{jk}^P \Omega_{kp} - \bar{\Omega}_{kp}^P \Omega_{jk}) [x_p - \bar{b}_p] + \dot{P}_{ij} \dot{V}_i + \ddot{\bar{b}}_j \quad (\text{H.50})$$

soit encore, en faisant intervenir le vecteur rotation des axes mobiles :

$$\begin{aligned} \dot{V}_j &= 2(\bar{\Omega}_{jp}^P - \varepsilon_{jpm} \Omega_m) [V_p - \dot{\bar{b}}_p] \\ &+ (\dot{\bar{\Omega}}_{jp}^P - \varepsilon_{jpm} \dot{\Omega}_m - \bar{\Omega}_{jp}^{P2} + \Omega^2 \delta_{jp} - \Omega_j \Omega_p - \bar{\Omega}_{jk}^P \varepsilon_{kpm} \Omega_m - \bar{\Omega}_{kp}^P \varepsilon_{jkm} \Omega_m) [x_p - \bar{b}_p] \\ &+ \dot{P}_{ij} \dot{V}_i + \ddot{\bar{b}}_j \end{aligned} \quad (\text{H.51})$$

Disposant des expressions de l'accélération, de la vitesse et de ses gradients dans les différents repères, il est intéressant de regarder quelles sont les formulations objectives de ces quantités. Ce formalisme est écrit par la suite pour les équations de Navier-Stokes incompressibles et homogènes. Il faut noter enfin que jusqu'à présent la vitesse, et en particulier les dérivées sont liées à une description Lagrangienne du mouvement, où on prend en compte le déplacement d'une particule  $M$ . Pour une description Eulérienne, les quantités de type  $\phi$  désigne la dérivée convective de la variable  $\phi$ .

### H.3 Application aux équations de Navier-Stokes

On considère un écoulement turbulent incompressible régi par les équations de Navier-Stokes et de continuité. Le mouvement est décrit dans un repère mobile, ce qui conduit d'après (H.38) aux expressions suivantes :

$$v_{i,i} = 0 \quad (\text{H.52a})$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu v_{i,kk} - 2 P_{im} \dot{P}_{km} v_k - P_{im} \ddot{P}_{km} x_k - P_{im} \ddot{B}_m \quad (\text{H.52b})$$

où  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. En notation vectorielle :

$$\nabla \cdot v = 0 \quad (\text{H.53a})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \nabla v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 v - 2 \Omega \wedge v - \dot{\Omega} \wedge x - \Omega \wedge (\Omega \wedge x) - \ddot{B} \quad (\text{H.53b})$$

La vitesse et la pression sont décomposées classiquement en une moyenne de Reynolds et une partie fluctuante, notées :

$$v = \langle V \rangle + u \quad (\text{H.54a})$$

$$P = \langle P \rangle + p \quad (\text{H.54b})$$

En prenant la moyenne des équations (H.52a), (H.52b) et (H.53a), il vient :

$$\langle V_i \rangle_{,i} = 0 \quad (\text{H.55a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} &= -\langle u_i u_k \rangle_{,k} - \frac{1}{\rho} \langle P \rangle_{,i} + \nu \langle V_i \rangle_{,kk} \\ &\quad - 2 P_{im} \dot{P}_{km} \langle V_k \rangle - P_{im} \ddot{P}_{km} x_k - P_{im} \ddot{B}_m \end{aligned} \quad (\text{H.55b})$$



où  $R_{ij} = \langle u_i u_j \rangle$  est le tenseur de Reynolds. Des égalités précédentes se déduisent les équations de transport des quantités fluctuantes :

$$u_{i,i} = 0 \quad (H.56a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + \langle u_i u_k \rangle_{,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} - 2 P_{im} \dot{P}_{km} u_k \quad (H.56b)$$

L'équation d'évolution de la fluctuation de vitesse dépend explicitement du choix du repère par l'intermédiaire de la force de Coriolis. Les autres forces d'inertie n'y ont qu'un effet indirect au travers de l'évolution du champ de vitesse moyenne. L'équation de continuité quant à elle est objective. Par la suite, la dérivée convective par le mouvement moyen sera notée :

$$\frac{D.}{Dt} = \frac{\partial.}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial.}{\partial x_k} \quad (H.57)$$

Ecrivons l'équation (H.56b) sous une forme un peu différente :

$$\frac{Du_i}{Dt} = [\langle u_i u_k \rangle_{,k} - (u_i u_k)_{,k}] - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} - u_k \left[ \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + 2 P_{im} \dot{P}_{km} \right] \quad (H.58)$$

Le terme de production par le mouvement moyen est modifié dans le cas d'un repère tournant pour inclure l'effet de la force de Coriolis. On peut poser :

$$\langle \tilde{V}_i \rangle_{a,k} = \frac{\partial \langle V_i \rangle}{\partial x_k} + 2 P_{im} \dot{P}_{km} \quad (H.59)$$

qui conduit à définir la vitesse moyenne :

$$\langle \tilde{V} \rangle = \langle V \rangle + 2 \Omega \wedge x \quad (H.60)$$

De la sorte, l'équation d'évolution de la fluctuation de vitesse s'écrit :

$$\frac{Du_i}{Dt} = [\langle u_i u_k \rangle_{,k} - (u_i u_k)_{,k}] - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} - u_k \langle \tilde{V}_i \rangle_{a,k} \quad (H.61)$$

L'équation d'évolution du tenseur de Reynolds s'écrit alors dans le repère mobile :

$$\frac{\partial \overline{R}_{ij}}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \overline{R}_{ij}}{\partial x_k} + \overline{R}_{ik} \langle \tilde{V}_j \rangle_{a,k} + \overline{R}_{jk} \langle \tilde{V}_i \rangle_{a,k} = \overline{S}_{ij} \quad (H.62)$$

où  $\overline{S}_{ij}$  désigne la somme des termes sources, exceptés les termes de production.

La transformée de la dérivée particulaire du tenseur de Reynolds est la suivante :

$$\frac{D\overline{R}_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \overline{R}_{ij}}{\partial t} + \langle V_k \rangle \frac{\partial \overline{R}_{ij}}{\partial x_k} \quad (H.63a)$$

$$\begin{aligned} &= P_{im} \frac{\partial R_{mn}}{\partial t} P_{jn} + \dot{P}_{im} R_{mn} P_{jn} + P_{im} R_{mn} \dot{P}_{jn} + P_{im} \frac{\partial X_p}{\partial t} \frac{\partial R_{mn}}{\partial X_p} P_{jn} \\ &\quad + [P_{km} (\vartheta_m - \dot{B}_m) + \dot{P}_{kq} (X_q - B_q)] \frac{\partial X_p}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial X_p} [P_{im} R_{mn} P_{jn}] \\ &= P_{im} \left[ \frac{\partial R_{mn}}{\partial t} + \langle \vartheta_k \rangle \frac{\partial R_{mn}}{\partial X_k} \right] P_{jn} + \dot{P}_{im} R_{mn} P_{jn} + P_{im} R_{mn} \dot{P}_{jn} \quad (H.63b) \end{aligned}$$

Les termes restants expriment le fait que la dérivée particulaire du tenseur de Reynolds, objectif, n'est pas elle-même objective. Il est cependant aisé de vérifier que le premier membre de l'équation (H.62) définit une dérivée objective.

---

## Annexe I

# Evolution du tenseur de Reynolds dans ses axes propres

Soit  $\{e_\alpha\}$  la base des vecteurs propres du tenseur de Reynolds. Dans toute cette annexe, la convention de sommation sur les indices répétés ne s'applique pas aux indices grecs.

$$R = R_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \quad (I.1)$$

La dérivée de ce tenseur s'écrit :

$$\dot{R} = R_{\alpha\beta} \dot{e}_\alpha e_\beta + R_{\alpha\beta} e_\alpha \dot{e}_\beta + \dot{R}_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \quad (I.2)$$

Les dérivées du tenseur de base s'expriment en fonction du tenseur de rotation des axes propres  $\theta_{mn}$ , défini en fonction du vecteur rotation des axes propres par  $\theta_{mn} = \varepsilon_{mnp} \Omega_p$ , suivant :

$$\dot{e}_\alpha = \theta_{\alpha k} e_k \quad (I.3)$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{R} &= \left(\dot{R}\right)_{\alpha\beta} e_\alpha e_\beta \\ &= \left[\dot{R}_{\alpha\beta} + R_{\alpha k} \theta_{k\beta} + R_{\beta k} \theta_{k\alpha}\right] e_\alpha e_\beta \end{aligned} \quad (I.4)$$

Puisque le tenseur de Reynolds est évalué dans ses axes propres, il est diagonal, et la relation devient :

$$\left(\dot{R}\right)_{\alpha\beta} = \dot{R}_{\alpha\beta} + (R_{\alpha\alpha} - R_{\beta\beta}) \theta_{\alpha\beta} \quad (I.5)$$

Les axes propres de la dérivée première du tenseur de Reynolds sont les axes propres du tenseur de Reynolds.

Le calcul de la dérivée seconde s'effectue de façon similaire et conduit à :

$$\begin{aligned} \left(\ddot{R}\right)_{\alpha\beta} &= \ddot{R}_{\alpha\beta} + 2 \left[\dot{R}_{\alpha k} \theta_{k\beta} + \dot{R}_{\beta k} \theta_{k\alpha}\right] + 2 \left[R_{\alpha k} \dot{\theta}_{k\beta} + R_{\beta k} \dot{\theta}_{k\alpha}\right] \\ &\quad - 2 R_{nn} \left[\theta^2_{,\alpha\beta} - \frac{1}{3} \theta^2_{nn} \delta_{\alpha\beta}\right] - \theta^2_{nn} \left[R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{nn} \delta_{\alpha\beta}\right] \\ &\quad + 3 \left[\theta^2_{,\alpha k} R_{k\beta} + \theta^2_{,\beta k} R_{k\alpha} - \frac{2}{3} \theta^2_{,nm} R_{nm} \delta_{\alpha\beta}\right] \end{aligned} \quad (I.6)$$

ce qui se réduit dans les axes principaux à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \left(\ddot{R}\right)_{\alpha\beta} &= \ddot{R}_{\alpha\beta} - 4K \left[ \theta^2_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \theta^2_{nn} \delta_{\alpha\beta} \right] - \theta^2_{nn} \left[ R_{\alpha\beta} - \frac{2}{3} K \delta_{\alpha\beta} \right] \\ &+ 3 \left[ \theta^2_{\alpha k} R_{k\beta} + \theta^2_{\beta k} R_{k\alpha} - \frac{2}{3} \theta^2_{nm} R_{nm} \delta_{\alpha\beta} \right] \end{aligned} \quad (I.7)$$

L'équation d'évolution du tenseur de Reynolds s'écrit par conséquent :

$$\begin{aligned} \left(\ddot{R}\right)_{\alpha\beta} &= -R_{\alpha\alpha} \tilde{V}_{\alpha\beta,\alpha} - R_{\beta\beta} \tilde{V}_{\alpha\alpha,\beta} + 2\bar{V}_{ap,q} [X_{\alpha qp\beta} + X_{\beta qp\alpha}] + \phi^S_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta} \\ &+ T^u_{\alpha\beta k,k} + T^p_{\alpha\beta k,k} + T^\nu_{\alpha\beta k,k} \end{aligned} \quad (I.8)$$

soit en distinguant les composantes normales des composantes extra-diagonales :

$$\begin{aligned} \dot{R}_{\alpha\alpha} &= -2 R_{\alpha\alpha} S_{\alpha\alpha} + 4\bar{V}_{ap,q} X_{\alpha qp\beta} + \phi^S_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\alpha\alpha} \\ &+ [T^u_{\alpha\alpha k} + T^p_{\alpha\alpha k} + T^\nu_{\alpha\alpha k}]_{,k} \end{aligned} \quad (I.9a)$$

$$\begin{aligned} (R_{\alpha\alpha} - R_{\beta\beta}) \theta_{\alpha\beta} &= -R_{\alpha\alpha} \tilde{V}_{\alpha\beta,\alpha} - R_{\beta\beta} \tilde{V}_{\alpha\alpha,\beta} + 2\bar{V}_{ap,q} X_{\alpha qp\beta} + \phi^S_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta} \\ &+ [T^u_{\alpha\beta k} + T^p_{\alpha\beta k} + T^\nu_{\alpha\beta k}]_{,k} \end{aligned} \quad (I.9b)$$

avec  $\alpha$  différent de  $\beta$ .

---

## Annexe J

# Approche spectrale de la turbulence

Les modèles classiques de turbulence font appel à une description statistique en un point des quantités de l'écoulement. Cela ne permet pas de décrire les caractéristiques des différentes échelles de la turbulence et donne une information en moyenne du point de vue des grosses structures. Pour avoir accès à la physique des différentes échelles et rendre compte de leur contribution au mouvement turbulent, il devient nécessaire d'utiliser une description statistique faisant intervenir plusieurs points. Généralement, la complexité inhérente à cette formulation incite à se limiter à la statistique en deux points. Les informations captées sont en effet considérées comme suffisamment intéressantes. Cette annexe s'inspire du cours de B.Aupoix [2] et de la thèse de C.Cambon [15], dont elle reprend les notations.

Les différentes échelles turbulentes peuvent alors être convenablement décrites par une analyse de Fourier, dans le cas d'un écoulement homogène.

### J.1 Transformation de Fourier

La transformée de Fourier d'une grandeur  $\phi(\underline{x})$  est définie comme

$$\hat{\phi}(\underline{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int \phi(\underline{x}) e^{-I\underline{k}\cdot\underline{x}} d\underline{x} \quad (\text{J.1})$$

où  $\underline{x}$  désigne la position de la particule fluide dans l'espace physique et  $\underline{k}$  le nombre d'onde. La transformée inverse s'écrit immédiatement

$$\phi(\underline{x}) \equiv \int \hat{\phi}(\underline{k}) e^{I\underline{k}\cdot\underline{x}} d\underline{k} \quad (\text{J.2})$$

Rappelons quelques propriétés de la transformée de Fourier, notée  $TF$ , concernant les dérivées :

D'une façon immédiate :

$$TF \left[ \frac{\partial \phi(\underline{x})}{\partial x_p} \right] = I k_p \hat{\phi}(\underline{k}) \quad (\text{J.3})$$

et

$$\frac{\partial \hat{\phi}(\underline{k})}{\partial x_p} = -I TF [x_p \phi(\underline{x})] \quad (\text{J.4})$$

Le produit de deux quantités physiques devient un produit de convolution dans l'espace de Fourier, ce qui se note :

$$\begin{aligned}\hat{\phi} \otimes \hat{\phi} &\equiv TF[\phi\phi](\underline{k}) \\ &= \int \int \hat{\phi}(\underline{p}) \hat{\phi}(\underline{q}) \delta(\underline{k} - \underline{p} - \underline{q}) d\underline{p} d\underline{q}\end{aligned}\quad (\text{J.5})$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac,  $\delta(\underline{k}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-I\underline{k}\cdot\underline{x}} d\underline{x}$ . Bien que l'écriture soit incorrecte, le Dirac sera omis dans les intégrales et on notera par la suite :

$$TF[\phi\phi](\underline{k}) = \int \hat{\phi}(\underline{p}) \hat{\phi}(\underline{q}) d\underline{p} \quad (\text{J.6})$$

## J.2 Equations du mouvement turbulent dans l'espace physique

Les équations de fluctuation de vitesse d'une turbulence incompressible et homogène placée dans un repère en rotation uniforme  $\underline{\Omega}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{V}_k u_{i,k} &= -\frac{1}{\rho} p_{,i} - u_k \bar{V}_{i,k} + \nu u_{i,kk} - 2\varepsilon_{imn} \Omega_m u_n - [u_i u_k - \overline{u_i u_k}]_{,k} \\ u_{k,k} &= 0\end{aligned}\quad (\text{J.7})$$

Lorsqu'on se place dans le cas d'une turbulence homogène, les gradients de vitesse moyenne sont uniformes - ils ne dépendent que du temps - et les corrélations doubles de fluctuations sont nulles. On peut poser :

$$\bar{V}_k = \bar{V}_k^0 + x_p \bar{V}_{k,p} \quad (\text{J.8})$$

où  $\bar{V}_k^0$  est la  $k^e$  composante de vitesse moyenne relative à un instant de référence arbitraire. En notant comme d'habitude  $\tilde{V}_{a,k} = \bar{V}_k + 2\varepsilon_{kmn} \Omega_m x_n$ , l'équation devient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + [\bar{V}_k^0 + x_p \bar{V}_{k,p}] u_{i,k} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} - u_k \tilde{V}_{ai,k} + \nu u_{i,kk} - [u_i u_k]_{,k} \quad (\text{J.9})$$

soit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{V}_k^0 u_{i,k} = -\frac{1}{\rho} p_{,i} - u_k \tilde{V}_{ai,k} - [u_i u_k]_{,k} - x_p \bar{V}_{k,p} u_{i,k} + \nu u_{i,kk} \quad (\text{J.10})$$

On note

$$\frac{d^0 u_i}{dt} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} - \bar{V}_k^0 u_{i,k} \quad (\text{J.11})$$

la dérivée temporelle dans le repère mobile. Les équations peuvent alors s'écrire comme un problème aux valeurs initiales dans un repère lié à la particule fluide.

Le terme de fluctuation de pression est exprimé en fonction du champ des vitesses par l'équation de Poisson, qui s'écrit de la façon suivante pour une turbulence homogène incompressible :

$$\frac{1}{\rho} p_{,ii} = -[u_i u_k]_{,ki} - 2\bar{V}_{ak,i} u_{i,k} \quad (\text{J.12})$$

où  $\bar{V}_{ak,i} \equiv \bar{V}_{k,i} - \varepsilon_{kim} \Omega_m$  désigne les composantes du gradient relatif de vitesse moyenne absolue.

## J.3 Passage dans l'espace spectral

### J.3.1 Transformée de Fourier des équations du mouvement turbulent

#### Continuité et fluctuation de vitesse

L'équation de continuité se transforme aisément :

$$k_i \hat{u}_i(\underline{k}) = 0 \quad (\text{J.13})$$

ce qui impose en particulier au champ de vitesse d'évoluer dans un plan normal au nombre d'onde correspondant.

Les gradients de vitesse moyenne d'une turbulence homogène étant uniforme, la transformée de Fourier de l'équation d'évolution des fluctuations de vitesse s'écrit :

$$\frac{d^0 \hat{u}_i}{dt} = -I \frac{1}{\rho} k_i \hat{p} - \hat{u}_k \tilde{V}_{ai,k} + \bar{V}_{k,p} \frac{\partial(k_k \hat{u}_i)}{\partial k_p} - \nu k^2 \hat{u}_i - I k_k \int u_i(\underline{k} - \underline{p}) - u_k(\underline{p}) d\underline{p} \quad (\text{J.14})$$

La transformée de Fourier de l'équation de Poisson conduit à

$$\frac{1}{\rho} \hat{p} = -2I \bar{V}_{ak,i} \frac{k_k}{k^2} \hat{u}_i + \frac{k_i k_k}{k^2} \int \hat{u}_i(\underline{k} - \underline{p}) - \hat{u}_k(\underline{p}) d\underline{p} \quad (\text{J.15})$$

Dans l'espace physique, l'intégration de l'équation de Poisson conduit à une intégrale de Green, qui montre que la pression en un point de l'écoulement est liée à l'ensemble de l'écoulement. Dans l'espace de Fourier, la pression peut s'exprimer de façon locale.

Éliminons la pression dans l'équation de transport de fluctuation de vitesse. En introduisant le projecteur dans le plan orthogonal au nombre d'onde,  $P_{ij}(\underline{k}) \equiv \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$ , il vient :

$$\frac{d^0 \hat{u}_i}{dt} = -\hat{u}_k \tilde{V}_{ai,k} + k_k \bar{V}_{k,p} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_p} - \nu k^2 \hat{u}_i + 2 \frac{k_i k_p}{k^2} \bar{V}_{ap,k} \hat{u}_k - I k_k P_{ip}(\underline{k}) \int u_p(\underline{k} - \underline{p}) u_k(\underline{p}) d\underline{p} \quad (\text{J.16})$$

Le champ de vitesse constitue l'ensemble des inconnues du problème; la pression s'en déduit par l'intermédiaire de l'équation de Poisson.

#### Remarque sur la dérivée particulière

Dans les équations précédentes, la dérivée en temps a été définie dans le repère tournant, comme

$$\frac{d^0 u_i}{dt} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{V}_n^0 u_{i,n} \quad (\text{J.17})$$

On note que dans le cas d'une turbulence homogène, sa transformée de Fourier est immédiate, et conduit à la quantité :

$$\frac{d^0 \hat{u}_i}{dt} \equiv \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + I \bar{V}_n^0 k_n \hat{u}_i \quad (\text{J.18})$$

La dérivée particulière dans l'espace physique est définie par :

$$\frac{\bar{d}u_i}{dt} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{V}_n u_{i,n} \quad (\text{J.19})$$

La transformée de Fourier du second membre de l'équation de quantité de mouvement fluctuante montre que la transformée de Fourier de la dérivée particulaire a pour expression :

$$TF \left[ \frac{\bar{d}}{dt} \Big|_{\underline{X}} \right] = \left( \frac{\partial}{\partial t} - \bar{V}_{m,n} k_m \frac{\partial}{\partial k_n} \right) TF[.] \quad (\text{J.20})$$

Elle est définie par

$$TF \left[ \frac{\bar{d}\phi}{dt} \Big|_{\underline{X}} \right] \equiv \frac{1}{(2\pi^3)} \int \frac{\bar{d}\phi}{dt} \Big|_{\underline{X}} e^{-I\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\underline{x} \quad (\text{J.21})$$

que l'on notera

$$\frac{\bar{d}\hat{\phi}}{dt} \Big|_{\underline{K}} \equiv TF \left[ \frac{\bar{d}\phi}{dt} \Big|_{\underline{X}} \right] \quad (\text{J.22})$$

où

$\underline{X}$  désigne la position de la particule  $X$  à l'instant initial  $t = 0$ . L'ensemble de ces positions définit la configuration initiale.

$\underline{x}$  est la position de  $X$  au temps  $t$ .

Soit  $F$  le tenseur des déformations. Il vient :

$$\frac{\bar{d}\hat{\phi}}{dt} \Big|_{\underline{K}} = \frac{1}{(2\pi^3)} \int \frac{\bar{d}\phi}{dt} \Big|_{\underline{X}} e^{-I\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} detF d\underline{X} \quad (\text{J.23})$$

Puisque l'écoulement est incompressible,  $detF = 1$ . Notons également que pour une turbulence homogène  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \underline{K}\cdot\underline{X}$ . Dans ce cas,

$$\frac{\bar{d}\hat{\phi}}{dt} \Big|_{\underline{K}} = \frac{1}{(2\pi^3)} \int \frac{\bar{d}\phi}{dt} \Big|_{\underline{X}} e^{-I\underline{K}\cdot\underline{X}} d\underline{X} \quad (\text{J.24})$$

Cette égalité montre que la transformée de Fourier de la dérivée particulaire est bien la dérivée particulaire dans l'espace spectral.

### Equation d'évolution du nombre d'onde

La relation  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \underline{K}\cdot\underline{X}$  entraîne :

$$\frac{\partial x_i}{\partial X_j}(\underline{X}, t) = \frac{\partial K_j}{\partial k_i}(\underline{k}, t) \quad (\text{J.25})$$

Le fait que  $\underline{X}$  et  $\underline{k}$  soient des variables indépendantes impose que le tenseur des déformations ne dépende que du temps. La relation  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = \underline{K}\cdot\underline{X}$  entraîne :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (\text{J.26})$$

Dans ce cas, il vient :

$$\begin{aligned} K_j &= F_{ij}(t)k_i \\ x_i &= F_{ij}(t)X_j \end{aligned} \quad (\text{J.27})$$

Supposer que  $F_{ij}$  ne dépend que du temps revient à supposer que le gradient de vitesse moyenne est uniforme. En effet,

$$F_{ij}(t) = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (\text{J.28})$$

et

$$\begin{aligned} \dot{F}_{ij}(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] \\ &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \end{aligned} \quad (\text{J.29})$$

Or la vitesse est définie par  $\vec{V} = \dot{\underline{x}}$ . Si  $\chi_r$  définit le mouvement de la configuration initiale à la configuration actuelle,  $\underline{x} = \chi_r(X, t)$  et

$$\vec{V} = \left. \frac{\partial \chi_r}{\partial t} \right|_X \quad (\text{J.30})$$

Alors la transformation vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\dot{F}_{ij} = \bar{V}_{i,k} F_{kj} \quad (\text{J.31})$$

On note qu'à l'instant initial,  $k_i \equiv K_i$ , ce qui entraîne nécessairement  $F_{ij}(0) = \delta_{ij}$ . Par définition de la dérivée particulaire dans l'espace de Fourier,

$$\left. \frac{\bar{d}k_i}{dt} \right|_{\underline{K}} = \dot{k}_i - \bar{V}_{n,i} k_n \quad (\text{J.32})$$

D'une façon immédiate,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\bar{d}K_j}{dt} \right|_{\underline{K}} &= \dot{K}_j - \bar{V}_{i,n} k_i F_{nj} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{J.33})$$

Or les nombres d'onde sont transformés suivant :

$$K_j = F_{ij}(t)k_i \quad (\text{J.34})$$

soit

$$\dot{K}_j = \bar{V}_{i,n} F_{nj} k_i + F_{ij} \dot{k}_i \quad (\text{J.35})$$

et par conséquent

$$F_{ij} \dot{k}_i = 0 \quad (\text{J.36})$$



Sachant que dans le cas d'un écoulement incompressible, la transformation est isovolume,  $\det(F) = 1$ , ce système est homogène et de Cramer, et sa seule solution est la solution triviale, soit  $\dot{k}_i = 0$ .

Dans ce cas, l'équation d'évolution du nombre d'onde est la suivante :

$$\left. \frac{d\bar{k}_n}{dt} \right|_{\underline{K}} = -\bar{V}_{m,n} k_m \quad (\text{J.37})$$

On rappelle que  $\bar{V}_{m,n}$  est le gradient relatif de vitesse relative.

### J.3.2 Moments du second ordre

#### Définition

Les corrélations doubles de vitesse s'écrivent par définition de la transformée de Fourier :

$$\overline{\hat{u}_i(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{p})} = \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int \overline{u_i(\underline{x}) u_j(\underline{y})} e^{-I(\underline{k}, \underline{x} + \underline{p}, \underline{y})} d\underline{x} d\underline{y} \quad (\text{J.38})$$

où  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  sont deux variables indépendantes. Elles peuvent être remplacées par  $\underline{x}$  et  $\underline{x} + \underline{r}$ . Dans ce cas, le fait que l'écoulement soit homogène rend les corrélations doubles dépendantes uniquement du vecteur  $\underline{r}$  :

$$\overline{\hat{u}_i(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{p})} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \overline{u_i u_j(\underline{r})} e^{-I(\underline{p}, \underline{r})} d\underline{r} \delta(\underline{k} + \underline{p}) \quad (\text{J.39})$$

On note classiquement  $\Phi_{ij}(\underline{k}) \equiv \overline{\hat{u}_i(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{p})} \delta(\underline{k} + \underline{p})$ , soit encore :

$$\Phi_{ij}(\underline{k}) \equiv \overline{\hat{u}_i(-\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{k})} \quad (\text{J.40})$$

#### Propriétés

L'équation de continuité impose

$$\begin{aligned} k_i \Phi_{ij}(\underline{k}) &= k_j \Phi_{ij}(\underline{k}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{J.41})$$

Par définition, le tenseur spectral des corrélations doubles en un point est Hermitien :

$$\Phi_{ij}(\underline{k}) = \Phi_{ij}^*(-\underline{k}) \quad (\text{J.42})$$

L'homogénéité rend ce tenseur symétrique puisque :

$$\Phi_{ij}(\underline{k}) = \Phi_{ij}(-\underline{k}) \quad (\text{J.43})$$

Pour un écoulement homogène, les quantités statistiques ne dépendent pas des positions des points où elles sont mesurées mais uniquement de l'écart entre ces points. Elles ne dépendent donc que de la taille des structures turbulentes et donc de leur orientation et non de leur localisation dans l'écoulement.

### J.3.3 Corrélations triples de vitesse

#### Définition

D'une façon analogue aux corrélations doubles, on peut définir le tenseur spectral des corrélations triples de vitesses dans le cas d'une turbulence homogène par :

$$\Phi_{ijn}(\underline{p}, \underline{q}) \equiv \overline{I \hat{u}_i(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{p}) \hat{u}_n(\underline{q})} \delta(\underline{k} + \underline{p} + \underline{q}) \quad (\text{J.44})$$

#### Propriétés

L'équation de continuité impose :

$$\begin{aligned} (p_i + q_j) \Phi_{ijn}(\underline{p}, \underline{q}) &= p_j \Phi_{ijn}(\underline{p}, \underline{q}) \\ &= q_n \Phi_{ijn}(\underline{p}, \underline{q}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{J.45})$$

### J.3.4 Equation d'évolution des moments du second ordre

Cette équation est déduite de l'équation de transport des amplitudes de Fourier de fluctuation de vitesse, en multipliant l'équation de  $\hat{u}_i(-\underline{k})$  par  $\hat{u}_j(\underline{k})$ , celle de  $\hat{u}_j(\underline{k})$  par  $\hat{u}_i(-\underline{k})$ , et en moyennant la somme. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d^0 \Phi_{ij}(\underline{k})}{dt} &= - 2 \nu k^2 \Phi_{ij}(\underline{k}) \\ &- \tilde{V}_{aj,k} \Phi_{ik}(\underline{k}) - \tilde{V}_{ai,k} \Phi_{kj}(\underline{k}) \\ &+ 2 \bar{V}_{am,n} \left[ \frac{k_j k_n}{k^2} \Phi_{im}(\underline{k}) + \frac{k_i k_n}{k^2} \Phi_{mj}(\underline{k}) \right] \\ &- P_{nq} k_m \int [\delta_{iq} \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) + \delta_{jq} \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \\ &+ \bar{V}_{m,n} \frac{\partial k_m \Phi_{ij}(\underline{k})}{\partial k_n} \end{aligned} \quad (\text{J.46})$$

ce qui s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{d} \Phi_{ij}(\underline{k})}{dt} &= - 2 \nu k^2 \Phi_{ij}(\underline{k}) \\ &- \tilde{V}_{aj,k} \Phi_{ik}(\underline{k}) - \tilde{V}_{ai,k} \Phi_{kj}(\underline{k}) \\ &+ 2 \bar{V}_{am,n} \left[ \frac{k_j k_n}{k^2} \Phi_{im}(\underline{k}) + \frac{k_i k_n}{k^2} \Phi_{mj}(\underline{k}) \right] \\ &- \frac{k_m k_n}{k^2} \int [k_i \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) + k_j \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \\ &+ k_m \int [\Phi_{imj}(\underline{p}, \underline{k}) + \Phi_{jmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \end{aligned} \quad (\text{J.47})$$

où par définition :

$$\Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) = I \overline{\hat{u}_n(-\underline{p} - \underline{k}) \hat{u}_m(\underline{p}) \hat{u}_j(\underline{k})} \quad (\text{J.48})$$

dont le conjugué s'écrit :

$$\Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k}) = -I \overline{\hat{u}_n(-\underline{p} + \underline{k}) \hat{u}_m(\underline{p}) \hat{u}_j(-\underline{k})} \quad (\text{J.49})$$

L'interprétation des différents termes est donnée par la suite, par rapport à l'équation de transport du tenseur de Reynolds.

Il convient de remarquer que la dérivée particulaire est obtenue à partir de la dérivée dans le repère mobile après une transformation eulérienne consistant en une translation en temps, les gradients relatifs de vitesse moyenne relative étant constants dans le cas d'une turbulence homogène. Dans ce cas particulier, nous avons vu au paragraphe précédent, que la transformée inverse de la dérivée particulaire dans l'espace de Fourier est bien la dérivée particulaire dans l'espace physique. La dérivée particulaire étant la dérivée retenue pour décrire l'ensemble des équations d'évolution, la seconde expression du transport des corrélations doubles dans l'espace de Fourier sera la seule retenue.

## J.4 Correspondances avec les fermetures classiques en un point

L'équation d'évolution du tenseur de Reynolds peut être directement déduite de l'équation de transport du tenseur spectral par intégration sur l'ensemble des nombre d'onde. La réciproque de la transformée de Fourier donne les corrélations en deux points :

$$\overline{u_i u_j}(\underline{r}) = \int \Phi_{ij}(\underline{k}) e^{-I \underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{k} \quad (\text{J.50})$$

Le tenseur de Reynolds correspond à une corrélation en un point, soit :

$$\overline{u_i u_j} = \int \Phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k} \quad (\text{J.51})$$

Les intégrations des termes de production et du terme visqueux sont immédiates.

### J.4.1 Corrélation pression-déformation

La contribution spectrale au tenseur de corrélation pression-déformation peut être obtenue par l'équation de Poisson, qui s'écrit dans l'espace de Fourier :

$$\frac{1}{\rho} \hat{p}(\underline{k}) = -2I \overline{V}_{am,n} \frac{k_m}{k^2} \hat{u}_n(\underline{k}) + \frac{k_n k_m}{k^2} \int \hat{u}_n(\underline{k} - \underline{p}) \hat{u}_m(\underline{p}) d\underline{p} \quad (\text{J.52})$$

et le tenseur de corrélation pression-déformation s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{ij}(\underline{k}) &= 2 \overline{V}_{am,n} \int \left[ \frac{k_m k_j}{k^2} \Phi_{in}(\underline{k}) + \frac{k_m k_i}{k^2} \Phi_{jn}(\underline{k}) \right] d\underline{k} \\ &- \int \int \left[ \frac{k_j k_m k_n}{k^2} \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k}) + \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) \right] d\underline{p} d\underline{k} \end{aligned} \quad (\text{J.53})$$

Classiquement, la pression scinde en deux le terme de corrélation pression-déformation. Le premier terme, linéaire explicitement en fonction du gradient de vitesse moyenne est dit terme

rapide. Il répond immédiatement à toute variation du champ moyen. Le second est par opposition dit lent. Il est non-linéaire, et désigne le transfert dû aux interactions triadiques de la turbulence sur elle-même. Ils seront notés respectivement :

$$\hat{\phi}_{ij}^R(\underline{k}) \equiv 2\bar{V}_{am,n} \left[ \frac{k_m k_j}{k^2} \Phi_{in}(\underline{k}) + \frac{k_m k_i}{k^2} \Phi_{jn}(\underline{k}) \right] d\underline{k} \quad (\text{J.54})$$

et

$$\hat{\phi}_{ij}^S(\underline{k}) \equiv - \int \left[ \frac{k_j k_m k_n}{k^2} \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k}) + \frac{k_i k_m k_n}{k^2} \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) \right] d\underline{p} \quad (\text{J.55})$$

Introduisons ces notations dans l'équation de transport du tenseur spectral des corrélations de vitesse :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\Phi}_{ij}(\underline{k})}{dt} = & - 2\nu k^2 \Phi_{ij}(\underline{k}) \\ & - \tilde{V}_{aj,k} \Phi_{ik}(\underline{k}) - \tilde{V}_{ai,k} \Phi_{kj}(\underline{k}) \\ & + \hat{\phi}_{ij}^R(\underline{k}) \\ & + \hat{\phi}_{ij}^S(\underline{k}) \\ & + k_m \int [\Phi_{imj}(\underline{p}, \underline{k}) + \Phi_{jmi}^*(\underline{p}, \underline{k})] d\underline{p} \end{aligned} \quad (\text{J.56})$$

#### J.4.2 Transfert

Il reste deux termes de l'équation spectrale homogène qui n'ont pas de correspondance dans l'équation du tenseur de Reynolds. Ce sont les tenseurs :

$$\xi_{ij}(\underline{k}) \equiv \bar{V}_{m,n} \frac{\partial}{\partial k_n} (k_m \Phi_{ij}(\underline{k})) \quad (\text{J.57})$$

et

$$\varpi_{ij}(\underline{k}) \equiv \delta_{ni} k_m \int \Phi_{nmj}(\underline{p}, \underline{k}) d\underline{p} + \delta_{nj} k_m \int \Phi_{nmi}^*(\underline{p}, \underline{k}) d\underline{p} \quad (\text{J.58})$$

En effet, l'intégration de ces termes sur l'ensemble des nombres d'onde est nulle.

Le tenseur  $\varpi_{ij}(\underline{k})$  faisant intervenir les interactions triadiques s'interprète comme un terme d'échange entre les différents nombre d'onde constituant le triangle  $\underline{k} + \underline{p} + \underline{q}$ .

Ces termes, du fait de leur intégration nulle sur l'espace spectral, ne contribuent pas directement au budget du tenseur de Reynolds. Ils correspondent à un transfert du spectre du tenseur de Reynolds entre les différents nombres d'onde sans aucune production ou destruction du tenseur de Reynolds. C'est pourquoi ils sont nommés les termes de transfert. Le premier terme est linéaire et représente le changement d'orientation des échelles turbulentes sous l'action du mouvement moyen. Il fait intervenir les nombres d'onde d'une façon locale. Le terme non-linéaire concerne tous les vecteurs formant le triangle  $\underline{k} + \underline{p} + \underline{q} = 0$ .



---

## Annexe K

# Théorie de distorsion rapide

Le concept de base de la Théorie de Distorsion Rapide (RDT) a été introduit par Prandtl [108] et Taylor [167] pour étudier la distorsion de la turbulence dans un tunnel. Cette annexe présente dans un premier temps les hypothèses qui constituent le cadre de la théorie de distorsion rapide et rappelle la forme des équations du mouvement sous cette approximation. Le type de solution analytique obtenue dans le cadre d'une turbulence homogène est présenté ensuite pour trois des configurations les plus classiques de l'écoulement moyen. La description de ces écoulements de distorsion rapide ne fait par contre pas l'objet de cette annexe qui renvoie pour chacun des cas aux principales analyses déjà effectuées. Du fait du caractère non-linéaire des équations de Navier-Stokes, l'état du mouvement fluctuant dépend d'une façon complexe des gradients de vitesse moyenne et de sa propre histoire. Cependant, dans certaines conditions, la contribution de cette dernière peut être négligée, en particulier lorsque le taux de déformation du mouvement moyen est suffisamment élevé ou que la période de cette distorsion est suffisamment courte. Dans ce cas, la déformation du mouvement moyen ne se propage pas de façon sensible par le phénomène de cascade énergétique jusqu'aux petites structures. Cette approche permet de négliger les interactions non-linéaires. C'est la base de la théorie de distorsion rapide.

Les équations ainsi linéarisées peuvent être résolues analytiquement pour des cas simples d'écoulement moyens incompressibles, pour une turbulence homogène.

### K.1 Equations de base

Une turbulence homogène est invariante par translation spatiale. Ceci suppose en pratique que l'écoulement a lieu loin de parois, dans un milieu infini, de telle sorte que le problème mathématique se ramène à un problème aux valeurs initiales.

Le fait que les propriétés du mouvement fluctuant soient invariantes par translation implique en particulier que le tenseur des corrélations doubles en un point soit indépendant de la position initiale. Les gradients de vitesse moyenne doivent également être uniformes. Dans ce cas, l'équation du mouvement moyen s'écrit, dans un repère éventuellement en rotation par rapport à un repère fixe :

$$\overline{V}_{i,i} = 0 \quad (K.1a)$$

$$\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial \tau} + \overline{V}_k \overline{V}_{i,k} = -\frac{1}{\rho} \overline{P}_{,i} - 2 \varepsilon_{imn} \Omega_m \overline{V}_n \quad (K.1b)$$

et ce pour un écoulement incompressible.

Il apparaît clairement que l'hypothèse d'homogénéité limite les interactions entre le mouvement fluctuant et le mouvement moyen. Si ce dernier agit sur le champ fluctuant, il n'y a pas de retour du mouvement fluctuant au mouvement moyen. Il s'en suit que les phénomènes non-linéaires sont uniquement dus à l'interaction du champ fluctuant avec lui-même.

La théorie de distorsion rapide se propose de déterminer la réponse de la turbulence à une déformation du champ moyen en négligeant dans les équations aux fluctuations, les termes qui ne dépendent pas explicitement des gradients de vitesse moyenne. Les équations d'évolution des fluctuations de vitesse s'écrivent pour une turbulence incompressible :

$$u_{i,i} = 0 \quad (K.2a)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \bar{V}_k u_{i,k} = -[u_i u_k - \overline{u_i u_k}]_{,k} - u_k \bar{V}_{i,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} - 2 \varepsilon_{imn} \Omega_m u_n + \nu u_{i,kk} \quad (K.2b)$$

Les composantes, dans le repère relatif, de la vitesse et de la vorticité moyenne absolue s'écrivent :

$$\bar{V}_{ai} = \bar{V}_i + \varepsilon_{imn} \Omega_m x_n \quad (K.3a)$$

$$\bar{W}_{ai} = \bar{W}_i + 2 \Omega_i \quad (K.3b)$$

On notera  $\tilde{V}_{ai}$  la quantité :

$$\tilde{V}_{ai} = \bar{V}_i + 2 \varepsilon_{imn} \Omega_m x_n \quad (K.4)$$

L'équation du mouvement fluctuant prend alors la forme suivante :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \bar{V}_k u_{i,k} = -[u_i u_k - \overline{u_i u_k}]_{,k} - u_k \tilde{V}_{ai,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} \quad (K.5)$$

Lorsqu'on se place dans le cas d'une turbulence homogène, les gradients de vitesse moyenne sont uniformes - ils ne dépendent que du temps - et les gradients de corrélation double de fluctuations sont nuls. On peut poser :

$$\bar{V}_k = \bar{V}_k^0 + x_p \bar{V}_{k,p} \quad (K.6)$$

où  $\bar{V}_k^0$  est la k<sup>e</sup> composante de vitesse moyenne relative à un instant de référence. Il vient :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + [\bar{V}_k^0 + x_p \bar{V}_{k,p}] u_{i,k} = -[u_i u_k]_{,k} - u_k \tilde{V}_{ai,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} \quad (K.7)$$

On peut également définir un changement de coordonnées consistant en une translation en temps, de façon à faire disparaître le terme constant  $\bar{V}_k^0$  des équations.

Soit la transformation :

$$\begin{cases} t = \tau \\ \xi_k = x_k - \bar{V}_k^0 \tau \end{cases} \quad (K.8)$$

La dérivée particulaire devient

$$\frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + x_p \bar{V}_{k,p} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \quad (K.9)$$

Soit  $\underline{X}$  la position occupée à l'instant initial  $t = 0$  par la particule  $X$ . La dérivée particulaire dans l'espace physique est notée par la suite :

$$\frac{\bar{d}}{dt} \Big|_{\underline{X}} = \frac{\partial}{\partial t} + x_p \bar{V}_{k,p} \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (K.10)$$

Enfin, les équations aux fluctuations sont linéarisées selon la théorie de distorsion rapide :

$$\left. \frac{d\hat{u}_i}{dt} \right|_{\underline{X}} = -u_k \tilde{V}_{ai,k} - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu u_{i,kk} \quad (\text{K.11})$$

Pour une turbulence homogène, les gradients de vitesse moyenne étant uniformes, la transformée de Fourier de l'équation aux fluctuations de vitesse s'écrit pour les amplitudes :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \bar{V}_{k,p} x_p \hat{u}_{i,k} = -\hat{u}_k \tilde{V}_{ai,k} - \frac{1}{\rho} I k_i \hat{p} - k^2 \nu \hat{u}_i + I k_k u_i \hat{u}_k \quad (\text{K.12})$$

avec par définition :

$$x_p \hat{u}_{i,k} = \int_{\underline{m}+\underline{n}} \hat{x}_p(\underline{m}, t) u_{i,k}(\underline{n}, t) d\underline{m} \quad (\text{K.13})$$

$$= -k_k \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial k_p} \quad (\text{K.14})$$

Le terme de fluctuation de pression est exprimé en fonction du champ des vitesses par l'équation de Poisson, qui s'écrit de la façon suivante pour une turbulence homogène :

$$\frac{1}{\rho} p_{,ii} = -[u_i u_k]_{,ki} - 2 \bar{V}_{ak,i} u_{i,k} \quad (\text{K.15})$$

où

$$\bar{V}_{ak,i} = \bar{V}_{k,i} - \varepsilon_{kim} \Omega_m \quad (\text{K.16})$$

Puisque  $\bar{V}_{ak,i}$  est uniforme, la transformée de Fourier de cette équation fournit :

$$-\frac{1}{\rho} \hat{p} = 2 \bar{V}_{ak,i} \frac{I k_k}{k^2} \hat{u}_i + \frac{k_i k_k}{k^2} u_i \hat{u}_k \quad (\text{K.17})$$

En remplaçant  $\hat{p}$  ainsi dans l'équation de fluctuation de vitesse, il vient :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \bar{V}_{k,p} x_p \hat{u}_{i,k} = -\hat{u}_k \tilde{V}_{ai,k} - 2 \bar{V}_{ap,k} \frac{k_i k_p}{k^2} \hat{u}_k - k^2 \nu \hat{u}_i + I k_k P_{ip}(\underline{k}) u_p \hat{u}_k \quad (\text{K.18})$$

en notant

$$P_{ip}(\underline{k}) = \delta_{ip} - \frac{k_i k_p}{k^2} \quad (\text{K.19})$$

l'opérateur de projection dans le plan perpendiculaire au nombre d'onde. La linéarisation de cette équation pour le problème de distorsion rapide conduit à :

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \bar{V}_{k,p} x_p \hat{u}_{i,k} = -\hat{u}_k \tilde{V}_{ai,k} - 2 \bar{V}_{ap,k} \frac{k_i k_p}{k^2} \hat{u}_k - k^2 \nu \hat{u}_i \quad (\text{K.20})$$

Elle peut encore se noter :

$$\left. \frac{d\hat{u}_i}{dt} \right|_{\underline{K}} = M_{ik}(t) \hat{u}_k \quad (\text{K.21})$$

où  $\underline{K}$  désigne la position occupée à l'instant initial par le nombre d'onde et l'opérateur  $M_{ik}(t)$ , défini par :

$$M_{ik}(t) = \tilde{V}_{ak,i} + \frac{k_i k_p}{k^2} \left( \bar{V}_{ap,k} - \bar{V}_{ak,k} \right) - \nu k^2 \delta_{ik} - 2 P_{ij}(\underline{k}) S_{jk} \quad (\text{K.22})$$



Dans le cas d'une turbulence homogène, la transformée de Fourier de la dérivée particulaire est bien la dérivée particulaire dans l'espace spectral (voir annexe J), et par définition, l'équation d'évolution du nombre d'onde s'écrit, en tenant compte du caractère incompressible de l'écoulement :

$$\left. \frac{d\mathbf{k}_i}{dt} \right|_{\underline{K}} = -\overline{V}_{k,i} k_k \quad (\text{K.23})$$

où  $\overline{V}_{k,i}$  est le gradient relatif de la vitesse relative. La résolution de ces équations permet d'accéder à l'ensemble des quantités statistiques homogènes utilisées dans la hiérarchie des modèles en un point.

## K.2 Exemples de solutions analytiques

Des études de distorsion rapide ont été effectuées par Batchelor et Proudman [6] dans le cadre de déformations irrotationnelles, par Townsend [169] dans le cas du cisaillement pur et l'action d'une rotation pure a été analysée par Mansour, Shih et Reynolds [93] et Cambon, Jacquin et Lubrano [18].

Des solutions analytiques de déformation pure et de cisaillement pur peuvent être obtenues dans le cadre d'une turbulence homogène à l'aide de transformations dans l'espace spectral. L'expression des amplitudes de Fourier des fluctuations de vitesse est rappelée ci-dessous pour la déformation pure, le cisaillement pur et la rotation pure. Les notation sont précisées en annexe J.

### K.2.1 Déformation pure

Un écoulement moyen de déformation pure est caractérisé par le fait que la partie anti-symétrique du tenseur des déformations est nul. Il n'y a pas de rotation moyenne. En se plaçant dans les axes principaux des contraintes, cela revient à imposer un gradient de vitesse moyenne de la forme :

$$\overline{V}_{i,j} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{K.24})$$

avec  $s_{ii} = 0$ . En notant  $e_\alpha$  les composantes du vecteur total de déformation, définies par :

$$e_\alpha = \exp\left(\int_0^t s_{\alpha\alpha}(t') dt'\right) \quad (\text{K.25})$$

sans sommation sur les indices répétés, l'intégration des amplitudes de Fourier conduit à :

$$\hat{u}_1(\underline{k}, t) = \frac{I}{\frac{K_1^2}{e_1^2} + \frac{K_2^2}{e_2^2} + \frac{K_3^2}{e_3^2}} \left( \frac{K_3}{e_3} \hat{w}_2 - \frac{K_2}{e_2} \hat{w}_3 \right) \quad (\text{K.26a})$$

$$\hat{u}_2(\underline{k}, t) = \frac{I}{\frac{K_1^2}{e_1^2} + \frac{K_2^2}{e_2^2} + \frac{K_3^2}{e_3^2}} \left( \frac{K_1}{e_1} \hat{w}_3 - \frac{K_3}{e_3} \hat{w}_1 \right) \quad (\text{K.26b})$$

$$\hat{u}_3(\underline{k}, t) = \frac{I}{\frac{K_1^2}{e_1^2} + \frac{K_2^2}{e_2^2} + \frac{K_3^2}{e_3^2}} \left( \frac{K_2}{e_2} \hat{w}_1 - \frac{K_1}{e_1} \hat{w}_2 \right) \quad (\text{K.26c})$$

où les  $\hat{w}_i$  désignent les amplitudes de Fourier des fluctuations de vorticité. Elles s'écrivent très simplement en fonction des amplitudes de Fourier des fluctuations de vitesse dans l'espace spectral :

$$\hat{w}_i = -I \varepsilon_{ipq} k_p \hat{u}_q \quad (K.27)$$

et dans le cas d'une déformation pure, elle évolue suivant :

$$\hat{w}_\alpha(\underline{k}, t) = e^{(-\Gamma(t))} e_\alpha \hat{w}_\alpha(\underline{K}, 0) \quad (K.28)$$

avec  $\Gamma(t) = \int_0^t \nu k^2 dt'$ . Ceci conduit aux expressions suivantes des amplitudes de Fourier des vitesses en fonction de leur expressions initiales :

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\underline{k}, t) = & \frac{e^{(-\Gamma(t))}}{\frac{K_1^2}{e_1^2} + \frac{K_2^2}{e_2^2} + \frac{K_3^2}{e_3^2}} \left[ \left( \frac{e_2}{e_3} K_3^2 + \frac{e_3}{e_2} K_2^2 \right) \hat{u}_1(\underline{K}, 0) \right. \\ & \left. - \frac{e_2}{e_3} K_1 K_3 \hat{u}_3(\underline{K}, 0) - \frac{e_3}{e_2} K_1 K_2 \hat{u}_2(\underline{K}, 0) \right] \end{aligned} \quad (K.29a)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_2(\underline{k}, t) = & \frac{e^{(-\Gamma(t))}}{\frac{K_1^2}{e_1^2} + \frac{K_2^2}{e_2^2} + \frac{K_3^2}{e_3^2}} \left[ \left( \frac{e_3}{e_1} K_1^2 + \frac{e_1}{e_3} K_3^2 \right) \hat{u}_2(\underline{K}, 0) \right. \\ & \left. - \frac{e_3}{e_1} K_2 K_1 \hat{u}_1(\underline{K}, 0) - \frac{e_1}{e_3} K_2 K_3 \hat{u}_3(\underline{K}, 0) \right] \end{aligned} \quad (K.29b)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_3(\underline{k}, t) = & \frac{e^{(-\Gamma(t))}}{\frac{K_1^2}{e_1^2} + \frac{K_2^2}{e_2^2} + \frac{K_3^2}{e_3^2}} \left[ \left( \frac{e_1}{e_2} K_2^2 + \frac{e_2}{e_1} K_1^2 \right) \hat{u}_3(\underline{K}, 0) \right. \\ & \left. - \frac{e_1}{e_2} K_3 K_2 \hat{u}_2(\underline{K}, 0) - \frac{e_2}{e_1} K_3 K_1 \hat{u}_1(\underline{K}, 0) \right] \end{aligned} \quad (K.29c)$$

Il faut noter que l'action de la viscosité se traduit d'une façon identique sur chacune des composantes par l'intermédiaire du facteur  $e^{(-\Gamma(t))}$ . Ce terme d'amortissement visqueux n'agit cependant pas de façon isotrope dans l'espace spectral et dépend de la forme de la déformation imposée. Suivant un axe de contraction, le terme visqueux décroît vers une limite nulle. Ce n'est pas le cas dans un plan de contraction, où la limite asymptotique dépend de la direction du nombre d'onde dans ce plan.

A partir des expressions des amplitudes de Fourier de fluctuations de vitesse, la solution du tenseur spectral des vitesses en fonction du tenseur spectral initial est immédiate. Le passage dans l'espace physique peut s'effectuer par une intégration numérique. Une méthode de type Simpson est suffisante. Les composantes statistiques peuvent également être développées en séries de Taylor au voisinage des petits temps pour une turbulence initialement isotrope (Lee [81]).

### K.2.2 Cisaillement pur

Un écoulement homogène de cisaillement pur est constitué de couches planes de fluide glissant les unes sur les autres. Il peut être caractérisé par le champ de vitesse moyenne suivant :

$$\bar{V}_1 = S x_2 \quad (K.30a)$$

$$\bar{V}_2 = 0 \quad (K.30b)$$

$$\bar{V}_3 = 0 \quad (K.30c)$$

si l'axe 2 correspond à la direction de l'écoulement. L'intensité  $S$  du cisaillement est supposée constante. La résolution des équations d'évolution des amplitudes de Fourier des fluctuations de vitesse conduit à :

$$\hat{u}_1(\underline{k}, t) = e^{(-\Gamma(t))} \left[ \hat{u}_1(\underline{K}, 0) + \frac{K^2}{K_1^2 + K_3^2} Q_1(\underline{K}, t) \hat{u}_2(\underline{K}, 0) \right] \quad (K.31a)$$

$$\hat{u}_2(\underline{k}, t) = e^{(-\Gamma(t))} \frac{K^2}{k^2} \hat{u}_2(\underline{K}, 0) \quad (K.31b)$$

$$\hat{u}_3(\underline{k}, t) = e^{(-\Gamma(t))} \left[ \hat{u}_3(\underline{K}, 0) + \frac{K_1 K_3}{K_1^2 + K_3^2} Q_3(\underline{K}, t) \hat{u}_2(\underline{K}, 0) \right] \quad (K.31c)$$

avec

$$\Gamma(t) = \nu t \left[ K^2 + t S K_1 \left( \frac{1}{3} t S K_1 - K_2 \right) \right] \quad (K.32)$$

fonction paire du nombre d'onde et

$$Q_1(\underline{K}, t) = -\frac{K_3^2}{K_1 \sqrt{K_1^2 + K_3^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{t S K_1 \sqrt{K_1^2 + K_3^2}}{K^2 - t S K_1 K_2} \right) + \frac{t S K_1^2 (K^2 - 2 K_2^2 + t S K_1 K_2)}{K^2 k^2} \quad (K.33a)$$

$$Q_3(\underline{K}, t) = \frac{K^2}{K_1 \sqrt{K_1^2 + K_3^2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{t S K_1 \sqrt{K_1^2 + K_3^2}}{K^2 - t S K_1 K_2} \right) + \frac{t S (K^2 - 2 K_2^2 + t S K_1 K_2)}{k^2} \quad (K.33b)$$

Là encore la viscosité agit différemment suivant la position du nombre d'onde dans l'espace spectral (Reynolds [112]).

### K.2.3 Rotation pure

La théorie de distorsion rapide s'applique également au cas d'un écoulement turbulent auquel on impose une rotation rapide, sans déformation moyenne du champ relatif. On considère une rotation uniforme d'axe  $x_2$ , tournant dans le sens direct. Etant donné qu'il n'y a pas de déformation moyenne du champ relatif, le gradient relatif de vitesse moyenne relative est nul et le nombre d'onde reste à chaque instant identique au nombre d'onde initial.

Lorsque la rotation est telle que

$$\underline{\Omega} \cdot \underline{K} = 0 \quad (K.34)$$

la solution du système différentiel régissant l'évolution des amplitudes de Fourier de fluctuation de vitesse s'écrit :

$$\hat{u}_i(\underline{k}, t) = e^{-\nu K^2 t} \hat{u}_i(\underline{K}, 0) \quad (K.35)$$

ce qui montre que la turbulence n'est pas affectée par la force de Coriolis, hormis l'action de la viscosité, qui fait décroître les composantes linéairement et de façon identique. Ce résultat rejoint le principe d'indifférence matérielle d'une turbulence bidimensionnelle dont la vorticité est alignée avec l'axe de rotation moyenne.

Lorsque la rotation agit sur une turbulence tridimensionnelle dans l'espace spectral,

$$\underline{\Omega} \cdot \underline{K} \neq 0 \quad (K.36)$$

et la solution du système différentiel s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(\underline{k}, t) = & e^{-\nu K^2 t} \left[ \hat{u}_1(\underline{K}, 0) \left( \cos(\lambda t) - \frac{K_1 K_3}{K K_2} \sin(\lambda t) \right) \right. \\ & \left. - \hat{u}_3(\underline{K}, 0) \frac{K}{K_2} \left( 1 - \frac{K_1^2}{K^2} \right) \sin(\lambda t) \right] \end{aligned} \quad (K.37a)$$

$$\hat{u}_2(\underline{k}, t) = e^{-\nu K^2 t} \left[ \hat{u}_2(\underline{K}, 0) \cos(\lambda t) + \left( \frac{K_1}{K} \hat{u}_3(\underline{K}, 0) - \frac{K_3}{K} \hat{u}_1(\underline{K}, 0) \right) \sin(\lambda t) \right] \quad (K.37b)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_3(\underline{k}, t) = & e^{-\nu K^2 t} \left[ \hat{u}_3(\underline{K}, 0) \left( \cos(\lambda t) + \frac{K_1 K_3}{K K_2} \sin(\lambda t) \right) \right. \\ & \left. + \hat{u}_1(\underline{K}, 0) \frac{K}{K_2} \left( 1 - \frac{K_3^2}{K^2} \right) \sin(\lambda t) \right] \end{aligned} \quad (K.37c)$$

où la pulsation  $\lambda$  est constante et définie par :

$$\lambda = 2 \frac{\underline{\Omega} \cdot \underline{k}}{k} \quad (K.38)$$

Le tenseur spectral des vitesses peut être formé à partir de ces solutions. Il s'exprime en fonction du nombre d'onde et des fonctions sinusoidales en temps avec la fréquence  $2\lambda$ , et dépend du tenseur spectral initial. Si la turbulence est initialement isotrope, les termes en facteur de  $\sin(2\lambda t)$  et  $\cos(2\lambda t)$  s'annulent et le tenseur spectral des vitesses devient :

$$\phi_{ij}(\underline{k}, t) = e^{-\nu K^2 t} \phi_{ij}(\underline{K}, 0) \quad (K.39)$$

La rotation rapide n'affecte pas une turbulence initialement isotrope, en dehors de la décroissance visqueuse. Son action est isotrope dans l'espace spectral.

De façon à introduire de l'anisotropie dans la turbulence initiale, on se place dans le cas d'une turbulence axisymétrique. Deux configurations initiales ont été envisagées, pour effectuer les intégrations analytiques dans l'espace physique, selon que l'axe d'axisymétrie initiale soit parallèle ou normal à l'axe de la rotation moyenne. L'expression du tenseur spectral initial est donnée par Sreenivasan et Narasimha [162] avec l'hypothèse que les densités spectrales initiales sont indépendantes de la direction de l'axisymétrie et ne dépendent que de la norme du nombre d'onde. Il s'écrit :

$$\phi_{ij}(\underline{K}, 0) = B_1(K) P_{ij}(\underline{K}) + B_2(K) H_{ij}(\underline{K}, \underline{e}) \quad (K.40)$$

avec

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \frac{K_i K_j}{K^2} \quad (K.41a)$$

$$H_{ij} = e_i e_j + \frac{(\underline{K} \cdot \underline{e})^2}{K^2} \delta_{ij} - (\underline{K} \cdot \underline{e}) \frac{(e_i K_j + e_j K_i)}{K^2} \quad (K.41b)$$

Les densités spectrales sont indépendantes du temps puisque le nombre d'onde est invariant ici. Cette expression est très simple et permet d'effectuer des intégrations analytiques des quantités spectrales qui soient indépendantes de la forme des spectres initiaux. Il est ainsi possible d'accéder aux quantités statistiques en un point utilisées dans les modélisations classiques au second ordre. Ces solutions restituent une évolution du tenseur de Reynolds qui présente les mêmes caractéristiques que les solutions numériques calculées par Cambon et Jacquin [17].



---

## Annexe L

# Modélisation classique du tenseur des corrélations pression-déformation par $X_{ijpq}$

Cette annexe rappelle la formation du terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation homogène à l'aide du tenseur du quatrième ordre  $\overline{X}_{ijpq}$ .

Dans le cas d'une turbulence homogène, la partie rapide du tenseur des corrélations pression-déformation s'écrit sous forme exacte en fonction du tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$  suivant :

$$\overline{\phi}_{ij}^R = 2 (S_{pq} + \overline{W}_{apq}) [\overline{X}_{iqpj} + \overline{X}_{jqpi}] \quad (\text{L.1})$$

Le modèle classique du tenseur  $\overline{X}_{ijpq}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{X}_{ijpq} = & C_1 \delta_{ij} \delta_{pq} + C_2 (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \\ & + C_3 \delta_{ij} b_{pq} + C_4 \delta_{pq} b_{ij} \\ & + C_5 (\delta_{ip} b_{jq} + \delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip} + \delta_{jp} b_{iq}) \\ & + C_6 \delta_{ij} b_{.pq}^2 + C_7 \delta_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_8 (\delta_{ip} b_{.jq}^2 + \delta_{iq} b_{.jp}^2 + \delta_{jq} b_{.ip}^2 + \delta_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_9 b_{ij} b_{pq} + C_{10} (b_{ip} b_{jq} + b_{iq} b_{jp}) \\ & + C_{11} b_{ij} b_{.pq}^2 + C_{12} b_{pq} b_{.ij}^2 \\ & + C_{13} (b_{ip} b_{.jq}^2 + b_{iq} b_{.jp}^2 + b_{jq} b_{.ip}^2 + b_{jp} b_{.iq}^2) \\ & + C_{14} b_{.ij}^2 b_{.pq}^2 + C_{15} (b_{.ip}^2 b_{.jq}^2 + b_{.iq}^2 b_{.jp}^2) \end{aligned} \quad (\text{L.2})$$

En exprimant ce modèle dans la forme exacte du tenseur des corrélations pression-déformation,

il vient :

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_{ij}^R &= 2 S_{pq} \quad [2 (C_1 + C_2) \delta_{ip} \delta_{jq} \\
&+ (C_3 + C_4 + 2 C_5) (\delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip}) + 2 C_5 \delta_{ij} b_{pq} \\
&+ (C_6 + C_7 + 2 C_8) (\delta_{iq} b_{jp}^2 + \delta_{jq} b_{ip}^2) + 2 C_8 \delta_{ij} b_{pq}^2 \\
&+ 2 (C_9 + C_{10}) b_{ip} b_{jq} + 2 C_{10} b_{pq} b_{ij} \\
&+ (C_{11} + C_{12} + 2 C_{13}) (b_{iq} b_{jp}^2 + b_{jq} b_{ip}^2) + 2 C_{13} b_{pq} b_{ij}^2 + 2 C_{13} b_{pq}^2 b_{ij} \quad (L.3) \\
&+ 2 (C_{14} + C_{15}) b_{ip}^2 b_{jq}^2 + 2 C_{15} b_{pq}^2 b_{ij}^2] \\
&+ 2 \overline{W}_{apq} [(C_3 - C_4) (\delta_{iq} b_{jp} + \delta_{jq} b_{ip}) \\
&+ (C_6 - C_7) (\delta_{iq} b_{jp}^2 + \delta_{jq} b_{ip}^2) \\
&+ (C_{11} - C_{12}) (b_{iq} b_{jp}^2 + b_{jq} b_{ip}^2)]
\end{aligned}$$

Etant donné les relations de Cayley-Hamilton généralisées selon lesquelles :

$$b_{ip} S_{pk} b_{kj} = -b_{ik}^2 S_{kj} - S_{ik} b_{kj}^2 + b_{mn} S_{mn} b_{ij} - II S_{ij} + b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij} \quad (L.4a)$$

$$b_{ip}^2 S_{pk} b_{kj} + b_{ip} S_{pk} b_{kj}^2 = -III S_{ij} + b_{mn} S_{mn} b_{ij}^2 + b_{mn}^2 S_{mn} b_{ij} \quad (L.4b)$$

$$\begin{aligned}
b_{ip}^2 S_{pk} b_{kj}^2 &= -II^2 S_{ij} + b_{mn}^2 S_{mn} b_{ij}^2 - II (b_{ik}^2 S_{kj} + S_{ik} b_{kj}^2) \quad (L.4c) \\
&+ II b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij} - III (b_{ik} S_{kj} + S_{ik} b_{kj}) + III b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}
\end{aligned}$$

le tenseur devient :

$$\begin{aligned}
\overline{\Phi}_{ij}^R &= [4 \{bS\} (C_9 + 2 C_{10}) + 2 \{b^2S\} (C_{11} + C_{12} + 4 C_{13})] b_{ij} \quad (L.5) \\
&+ [2 \{bS\} (C_{11} + C_{12} + 4 C_{13}) + 4 \{b^2S\} (C_{14} + 2 C_{15})]^D b_{ij}^2 \\
&+ [4 (C_1 + C_2) - 4 II (C_9 + C_{10}) - 2 III (C_{11} + C_{12} + 2 C_{13}) - 4 II^2 (C_{14} + C_{15})] S_{ij} \\
&+ [2 (C_3 + C_4 + 2 C_5) - 4 III (C_{14} + C_{15})] [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\
&+ [2 (C_6 + C_7 + 2 C_8) - 4 (C_9 + C_{10}) - 4 II (C_{14} + C_{15})] [b_{ik}^2 S_{jk} + b_{jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\
&- [2 (C_3 - C_4)] (b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}) \\
&- [2 (C_6 - C_7)] [b_{ik}^2 \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^2 \overline{W}_{aik}] \\
&- [2 (C_{11} - C_{12})] [b_{ik} \overline{W}_{akp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 \overline{W}_{apk} b_{jp}] \\
&+ \frac{4}{3} [\{bS\} ((C_3 + C_4 + 5 C_5) - II (C_{11} + C_{12} + 4 C_{13}) + III (C_{14} + C_{15})) \\
&+ \{b^2S\} (C_6 + C_7 + C_9 + C_{10} + 5 C_8) - II (C_{14} + 3 C_{15})] \delta_{ij}
\end{aligned}$$

Pour que la contrainte d'incompressibilité soit satisfaite par ce modèle, il est nécessaire et suffisant que les deux relations suivantes soient vérifiées :

$$C_3 + C_4 + 5 C_5 - II (C_{11} + C_{12} + 4 C_{13}) + III (C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (L.6a)$$

$$C_6 + C_7 + 5 C_8 + C_9 + C_{10} - II (C_{14} + 3 C_{15}) = 0 \quad (L.6b)$$

Ces relations sont contenues dans le système imposant la contrainte d'incompressibilité sur  $\overline{X}_{ijpq}$ . En effet, dans le cas d'une turbulence homogène et incompressible, le tenseur d'ordre quatre est défini par :

$$\overline{X}_{ijpq} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 R_{ij}}{\partial r_p \partial r_q} \frac{dV}{r} \quad (L.7)$$

et l'incompressibilité de la turbulence impose :

$$\overline{X}_{njqn} = 0 \quad (L.8)$$

ce qui s'écrit, d'après la modélisation de  $\overline{X}_{ijpq}$ , par les trois relations :

$$C_1 + 4C_2 - 2II C_8 + III(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) = 0 \quad (L.9a)$$

$$C_3 + C_4 + 5C_5 - II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + III(C_{14} + C_{15}) = 0 \quad (L.9b)$$

$$C_6 + C_7 + 5C_8 + C_9 + C_{10} - II(C_{14} + 3C_{15}) = 0 \quad (L.9c)$$

L'application de ces deux dernières contraintes suffit à fournir une expression du terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation qui satisfasse l'incompressibilité et les symétries tensorielles :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{ij}^R &= [4\{bS\}(C_9 + 2C_{10}) + 2\{b^2S\}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13})] b_{ij} \quad (L.10) \\ &+ [2\{bS\}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + 4\{b^2S\}(C_{14} + 2C_{15})] b_{ij}^2 \\ &+ [4(C_1 + C_2) - 4II(C_9 + C_{10}) - 2III(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) - 4II^2(C_{14} + C_{15})] S_{ij} \\ &+ [-6C_5 + 2II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - 6III(C_{14} + C_{15})] (b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}) \\ &+ [-6(C_8 + C_9 + C_{10}) - 2II(C_{14} - C_{15})] (b_{ik}^2 S_{jk} + b_{jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}) \\ &- 2[-2C_4 - 5C_5 + II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - III(C_{14} + C_{15})] (b_{ik} \overline{W}_{ajk} + b_{jk} \overline{W}_{aik}) \\ &- 2[-(2C_7 + C_9 + C_{10} + 5C_8) + II(C_{14} + 3C_{15})] (b_{ik}^2 \overline{W}_{ajk} + b_{jk}^2 \overline{W}_{aik}) \\ &- 2[C_{11} - C_{12}] (b_{ik} \overline{W}_{akp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 \overline{W}_{apk} b_{jp}) \end{aligned}$$

Une modélisation directe du terme rapide du tenseur des corrélations pression-déformation en fonction du tenseur d'anisotropie et des gradients de vitesse moyenne conduit à l'expression :

$$\begin{aligned} \overline{\phi}_{ij} &= \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 [b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}] \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{ik}^2 S_{jk} + b_{jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{ik}^2 W_{jk} + b_{jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{ik} W_{kp} b_{pj}^2 + b_{ik}^2 W_{pk} b_{jp}] \end{aligned} \quad (L.11)$$

Il est clair que

$$\beta_1 = 4\{bS\}(C_9 + 2C_{10}) + 2\{b^2S\}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) \quad (L.12a)$$

$$\beta_2 = 2\{bS\}(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) + 4\{b^2S\}(C_{14} + 2C_{15}) \quad (L.12b)$$



$$\beta_3 = 4(C_1 + C_2) - 4II(C_9 + C_{10}) - 2III(C_{11} + C_{12} + 2C_{13}) - 4II^2(C_{14} + C_{15}) \quad (L.12c)$$

$$\beta_4 = -6C_5 + 2II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - 6III(C_{14} + C_{15}) \quad (L.12d)$$

$$\beta_5 = -6(C_8 + C_9 + C_{10}) - 2II(C_{14} - C_{15}) \quad (L.12e)$$

$$\beta_6 = 2(-2C_4 - 5C_5 + II(C_{11} + C_{12} + 4C_{13}) - III(C_{14} + C_{15})) \quad (L.12f)$$

$$\beta_7 = 2(-2C_7 + C_9 + C_{10} + 5C_8) + II(C_{14} + 3C_{15}) \quad (L.12g)$$

$$\beta_8 = 2(C_{11} - C_{12}) \quad (L.12h)$$

Sachant que les coefficients  $C_1$  et  $C_2$  interviennent uniquement sous la somme  $C_1 + C_2$ , cette relation peut s'écrire à l'aide de 12 inconnues scalaires, en posant :

$$B_1 = 2C_9 \quad (L.13a)$$

$$B_2 = 2C_{10} \quad (L.13b)$$

$$B_3 = 2(C_{11} + C_{12}) \quad (L.13c)$$

$$B_4 = 2C_{13} \quad (L.13d)$$

$$B_5 = 2C_{14} \quad (L.13e)$$

$$B_6 = 2C_{15} \quad (L.13f)$$

$$B_7 = 4(C_1 + C_2) \quad (L.13g)$$

$$B_8 = 2C_5 \quad (L.13h)$$

$$B_9 = 2C_8 \quad (L.13i)$$

$$B_{10} = 2C_7 \quad (L.13j)$$

$$B_{11} = 2C_4 \quad (L.13k)$$

$$B_{12} = 2(C_{11} - C_{12}) \quad (L.13l)$$

et il vient :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_{ij}^R &= [2\{bS\}(B_1 + 2B_2) + \{b^2S\}(B_3 + 4B_4)]b_{ij} \quad (L.14) \\ &+ [\{bS\}(B_3 + 4B_4) + 2\{b^2S\}(B_5 + 2B_6)]^D b_{.ij}^2 \\ &+ [B_7 - 2II(B_1 + B_2) - III(B_3 + 2B_4) - 2II^2(B_5 + B_6)]S_{ij} \\ &+ [-3B_8 + II(B_3 + 4B_4) - 3III(B_5 + B_6)](b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}) \\ &+ [-3(B_1 + B_2 + B_9) - II(B_5 - B_6)](b_{.ik}^2S_{jk} + b_{.jk}^2S_{ik} - \frac{2}{3}b_{.mn}^2S_{mn}\delta_{ij}) \\ &+ [-2B_{11} - 5B_8 + II(B_3 + 4B_4) - III(B_5 + B_6)](b_{ik}\overline{W}_{ajk} + b_{jk}\overline{W}_{aik}) \\ &+ [-(2B_{10} + B_1 + B_2 + 5B_9) + II(B_5 + 3B_6)](b_{.ik}^2\overline{W}_{ajk} + b_{.jk}^2\overline{W}_{aik}) \\ &+ [B_{12}](b_{ik}\overline{W}_{akp}b_{.pj}^2 + b_{.ik}^2\overline{W}_{apk}b_{jp}) \end{aligned}$$

Il faut noter que ce modèle ne vérifie pas la limite isotrope, contrairement au modèle formé à partir de  $X_{ijpq}$ . L'application de cette contrainte conduit à imposer

$$B_7 = \frac{2}{5} \quad (L.15)$$

et réduit le nombre de degré de liberté à 11. Il est clair qu'il est préférable de faire porter la modélisation du terme rapide sur  $\overline{X}_{ijpq}$ . La seule chose qui peut être choisie librement est la base

---

tensorielle du terme rapide. La formulation qui a été retenue est minimale au sens de Spencer et Rivlin [148]. Les extensions des produits de matrices sont d'ordre le plus faible possible.

Dans tout ce qui précède, la vérification de la contrainte de normalisation sur  $\overline{X}_{ijpq}$  par rapport au tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds n'a pas été prise en compte. Elle constitue en effet une contrainte à imposer sur le tenseur du quatrième ordre et n'apparaît pas explicitement dans la modélisation directe du tenseur des corrélations pression-déformation.



---

## Annexe M

# Écritures du modèle classique du tenseur des corrélations pression-déformation

Le tenseur des corrélations pression-déformation est classiquement modélisé avec une fonctionnelle dépendant des gradients de vitesse moyenne par l'intermédiaire des tenseurs des taux de déformations et de rotations, et de l'état turbulent par l'intermédiaire du tenseur de Reynolds ou de son déviateur. Les correspondances entre les fonctionnelles utilisant le tenseur de Reynolds ou son déviateur adimensionnel font l'objet de cette annexe.

### M.1 Expression en fonction du tenseur d'anisotropie

La forme classique du modèle faisant intervenir le déviateur du tenseur de Reynolds est la suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{q}^2} \Phi_{ij} &= \beta_1 b_{ij} \\ &+ \beta_2 {}^D b_{.ij}^2 \\ &+ \beta_3 S_{ij} \\ &+ \beta_4 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_5 [b_{.ik}^2 S_{jk} + b_{.jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \beta_6 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ &+ \beta_7 [b_{.ik}^2 W_{jk} + b_{.jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \beta_8 [b_{.ik}^2 W_{pk} b_{jp} + b_{.jp}^2 W_{pk} b_{ik}] \end{aligned} \tag{M.1}$$

où les mêmes notations sont utilisées, à savoir :

- Le préfixe  ${}^D$  désigne le déviateur du tenseur auquel il se raccorde.
- La notation contractée  $b_{.ij}^2$  désigne le produit  $b_{ik} b_{kj}$

Le tenseur  $b_{ij}$  est adimensionnel et est défini par :

$$b_{ij} = \frac{1}{\bar{q}^2} R_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tag{M.2}$$

## M.2 Expression en fonction du tenseur de Reynolds

La forme correspondante du modèle, fonction du tenseur de Reynolds s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ij} &= \alpha_1 \quad D R_{ij} \\
 &+ \alpha_2 \quad \frac{1}{\bar{q}^2} \quad D R_{,ij}^2 \\
 &+ \alpha_3 \quad \bar{q}^2 \quad S_{ij} \\
 &+ \alpha_4 \quad [R_{ik}S_{jk} + R_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}R_{mn}S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &+ \alpha_5 \quad \frac{1}{\bar{q}^2} \quad [R_{,ik}^2S_{jk} + R_{,jk}^2S_{ik} - \frac{2}{3}R_{,mn}^2S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &+ \alpha_6 \quad [R_{ik}W_{jk} + R_{jk}W_{ik}] \\
 &+ \alpha_7 \quad \frac{1}{\bar{q}^2} \quad [R_{,ik}^2W_{jk} + R_{,jk}^2W_{ik}] \\
 &+ \alpha_8 \quad (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 \quad [R_{,ik}^2W_{pk}R_{jp} + R_{,jp}^2W_{pk}R_{ik}]
 \end{aligned} \tag{M.3}$$

## M.3 Correspondance entre les bases tensorielles

Les relations entre les deux bases fonctionnelles sont obtenues à partir de la définition du tenseur d'anisotropie (M.2).

### M.3.1 Passage de la base de Reynolds à la base du tenseur d'anisotropie

Par définition :

$$b_{ij} = \frac{1}{\bar{q}^2}R_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$$

Ce qui entraîne :

$$b_{,ij}^2 = (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 R_{,ij}^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{\bar{q}^2}R_{ij} + \frac{1}{9}\delta_{ij} \tag{M.4}$$

La trace de ce tenseur s'écrit donc :

$$b_{,nn}^2 = (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 R_{,nn}^2 - \frac{1}{3} \tag{M.5}$$

et son déviateur devient :

$${}^D b_{,ij}^2 = (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 [{}^D R_{,ij}^2] - \frac{2}{3}\frac{1}{\bar{q}^2}[{}^D R_{ij}] \tag{M.6}$$

Le quatrième vecteur de la base s'écrit :

$$[b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}] = \frac{1}{\bar{q}^2}[R_{ik}S_{jk} + R_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}R_{mn}S_{mn}\delta_{ij}] - \frac{2}{3}S_{ij} \tag{M.7}$$

et

$$[b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}] = \frac{1}{\bar{q}^2}[R_{ik}W_{jk} + R_{jk}W_{ik}] \quad (\text{M.8})$$

Les termes non-linéaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} [b_{.ik}^2 S_{jk} + b_{.jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] &= (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 [R_{.ik}^2 S_{jk} + R_{.jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} R_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\ &- \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{q}^2} [R_{ik} S_{jk} + R_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} R_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ \frac{2}{9} S_{ij} \end{aligned} \quad (\text{M.9})$$

$$\begin{aligned} [b_{.ik}^2 W_{jk} + b_{.jk}^2 W_{ik}] &= (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 [R_{.ik}^2 W_{jk} + R_{.jk}^2 W_{ik}] \\ &- \frac{2}{3} \frac{1}{\bar{q}^2} [R_{ik} W_{jk} + R_{jk} W_{ik}] \end{aligned} \quad (\text{M.10})$$

et

$$\begin{aligned} [b_{.ik}^2 W_{pk} b_{jp} + b_{.jp}^2 W_{pk} b_{ik}] &= (\frac{1}{\bar{q}^2})^3 [R_{.ik}^2 W_{pk} R_{jp} + R_{.jp}^2 W_{pk} R_{ik}] \\ &- \frac{1}{3} (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 [R_{.ik}^2 W_{jk} + R_{.jk}^2 W_{ik}] \\ &+ \frac{2}{9} (\frac{1}{\bar{q}^2}) [R_{ik} W_{jk} + R_{jk} W_{ik}] \end{aligned} \quad (\text{M.11})$$

avec les invariants suivants :

$$\{b^2\} = (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 \{R^2\} - \frac{1}{3} \quad (\text{M.12})$$

$$\{b^3\} = (\frac{1}{\bar{q}^2})^3 \{R^3\} - (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 \{R^2\} + \frac{2}{9} \quad (\text{M.13})$$

et

$$\{bS\} = (\frac{1}{\bar{q}^2}) \{RS\} \quad (\text{M.14})$$

$$\{b^2 S\} = (\frac{1}{\bar{q}^2})^2 [\{R^2 S\} + \frac{2}{3} (\frac{1}{\bar{q}^2}) \{RS\}] \quad (\text{M.15})$$

### M.3.2 Passage de la base du tenseur d'anisotropie à la base de Reynolds

D'une façon triviale, les relations inverses s'écrivent :

$$R_{ij} = \bar{q}^2 (b_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij}) \quad (\text{M.16})$$

soit :

$${}^D R_{ij} = \bar{q}^2 b_{ij} \quad (\text{M.17})$$

et

$${}^D R_{.ij}^2 = (\bar{q}^2)^2 [{}^D b_{.ij}^2] + \frac{2}{3} [b_{ij}] \quad (\text{M.18})$$

Les termes linéaires donnent :

$$[R_{ik} S_{jk} + R_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} R_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] = \bar{q}^2 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] + \frac{2}{3} \bar{q}^2 S_{ij} \quad (\text{M.19})$$

et

$$[R_{ik} W_{jk} + R_{jk} W_{ik}] = \bar{q}^2 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \quad (\text{M.20})$$

Les termes non-linéaires s'écrivent :

$$\begin{aligned} [R_{.ik}^2 S_{jk} + R_{.jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} R_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] &= \frac{2}{9} (\bar{q}^2)^2 S_{ij} \\ &+ \frac{2}{3} (\bar{q}^2)^2 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ (\bar{q}^2)^2 [b_{.ik}^2 S_{jk} + b_{.jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{.mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \end{aligned} \quad (\text{M.21})$$

$$[R_{.ik}^2 W_{jk} + R_{.jk}^2 W_{ik}] = \frac{2}{3} (\bar{q}^2)^2 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] + (\bar{q}^2)^2 [b_{.ik}^2 W_{jk} + b_{.jk}^2 W_{ik}] \quad (\text{M.22})$$

et

$$[R_{.ik}^2 W_{pk} R_{jp} + R_{.jp}^2 W_{pk} R_{ik}] = \frac{1}{9} (\bar{q}^2)^3 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] + \frac{1}{3} (\bar{q}^2)^3 [b_{.ik}^2 W_{jk} + b_{.jk}^2 W_{ik}] + (\bar{q}^2)^3 [b_{.ik}^2 W_{pk} b_{jp} + b_{.jp}^2 W_{pk} b_{ik}] \quad (\text{M.23})$$

avec les invariants suivants :

$$\{R^2\} = (\bar{q}^2)^2 [\{b^2\} + \frac{1}{3}] \quad (\text{M.24})$$

$$\{R^3\} = (\bar{q}^2)^3 [\{b^3\} + \{b^2\} + \frac{1}{9}] \quad (\text{M.25})$$

et

$$\{RS\} = (\bar{q}^2) \{bS\} \quad (\text{M.26})$$

$$\{R^2S\} = (\bar{q}^2)^2 [\{b^2S\} + \frac{2}{3} \{bS\}] \quad (\text{M.27})$$

## M.4 Correspondance entre les coefficients

Les relations précédentes conduisent aux correspondances suivantes entre les coefficients des deux expressions de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \beta_1 - \frac{2}{3}\beta_2 & \alpha_2 &= \beta_2 \\ \alpha_3 &= \beta_3 - \frac{2}{3}\beta_4 + \frac{2}{9}\beta_5 & \alpha_5 &= \beta_5 \\ \alpha_4 &= \beta_4 - \frac{2}{3}\beta_5 & \alpha_7 &= \beta_7 - \frac{1}{3}\beta_8 \\ \alpha_6 &= \beta_6 - \frac{2}{3}\beta_7 + \frac{1}{9}\beta_8 & \alpha_8 &= \beta_8 \end{aligned} \quad (\text{M.28})$$

soit de façon évidente :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 & \beta_2 &= \alpha_2 \\ \beta_3 &= \alpha_3 + \frac{2}{3}\alpha_4 + \frac{2}{9}\alpha_5 & \beta_5 &= \alpha_5 \\ \beta_4 &= \alpha_4 + \frac{2}{3}\alpha_5 & \beta_7 &= \alpha_7 + \frac{1}{3}\alpha_8 \\ \beta_6 &= \alpha_6 + \frac{2}{3}\alpha_7 + \frac{1}{9}\alpha_8 & \beta_8 &= \alpha_8 \end{aligned} \quad (\text{M.29})$$

---

## Annexe N

# Écriture des modèles de type Umist sous la forme classique

Les modèles de type Umist désignent l'écriture du tenseur des corrélations pression-déformation homogène  $\Phi_{ij}$  comme fonctionnelle du tenseur de Reynolds et des tenseurs de production  $P_{ij}$  et  $D_{ij}$ , tels que les modèles de Fu, Launder et Tselepidakis [47] ou Craft et Launder [32]. Cette annexe en donne la correspondance avec l'expression homogène classique.

### N.1 Expression du terme lent

La forme du terme lent du modèle est la suivante :

$$\Phi_{ij}^S = \beta_{a1}^S a_{ij} + \beta_{a2}^S {}^D a_{ij}^2 \quad (\text{N.1})$$

où

$$a_{ij} = 2 b_{ij} \quad (\text{N.2})$$

Par conséquent

$${}^D a_{ij}^2 = 4 {}^D b_{ij}^2 \quad (\text{N.3})$$

La forme classique est la suivante :

$$\Phi_{ij}^S = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S {}^D b_{ij}^2 \quad (\text{N.4})$$

Par conséquent les coefficients vérifient :

$$\beta_1^S = 2\beta_{a1}^S \quad (\text{N.5a})$$

$$\beta_2^S = 2\beta_{a2}^S \quad (\text{N.5b})$$

### N.2 Expression du terme rapide

Le modèle rapide se scinde en deux contributions. La première correspond au modèle classique de Fu, Launder et Tselepidakis [47] (FLT), et la seconde, à une correction réalisable de ce dernier, telle que l'ont proposé Craft et Launder [32] (CL). Ces deux termes seront examinés séparément.



### N.2.1 Modèle de type Fu, Launder et Tselepidakis

La forme générale du terme rapide FLT est la suivante :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{ij} &= flt_1 \quad [P_{ij} - \frac{1}{3}P_{kk}\delta_{ij}] \\
 &+ flt_2 \quad P_{kk} a_{ij} \\
 &+ flt_3 \quad \frac{1}{K} \quad [2 R_{kj}R_{li}S_{kl} - R_{kl}(R_{ik}S_{jl} + R_{jk}S_{il} + R_{ik}W_{jl} + R_{jk}W_{il})] \\
 &+ flt_4 \quad [P_{ij} - D_{ij}] \\
 &+ flt_5 \quad a_{mi}a_{nj} [P_{mn} - D_{mn}]
 \end{aligned} \tag{N.6}$$

ce qui est noté sous la forme suivante :

$$\Phi_{ij} = flt_m T_{ij}^{(m)}$$

avec sommation sur les indices répétés, si bien que :

$$T_{ij}^{(1)} = [P_{ij} - \frac{1}{3}P_{kk}\delta_{ij}] \tag{N.7}$$

$$T_{ij}^{(2)} = [P_{kk} a_{ij}] \tag{N.8}$$

$$T_{ij}^{(3)} = \frac{1}{K} [2 R_{kj}R_{li}S_{kl} - R_{kl}(R_{ik}S_{jl} + R_{jk}S_{il} + R_{ik}W_{jl} + R_{jk}W_{il})] \tag{N.9}$$

$$T_{ij}^{(4)} = [P_{ij} - D_{ij}] \tag{N.10}$$

$$T_{ij}^{(5)} = a_{mi}a_{nj} [P_{mn} - D_{mn}] \tag{N.11}$$

### Expression des tenseurs en fonction du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds

Par définition des termes de production, constituant le premier tenseur :

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(1)} &= - \bar{q}^2 \quad [\frac{2}{3}S_{ij}] \\
 &- \bar{q}^2 \quad [b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &- \bar{q}^2 \quad [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.12}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 P_{ij} &= -\bar{q}^2 [\frac{2}{3}S_{ij} + b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik}] \\
 &- \bar{q}^2 [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.13}$$

et

$$\begin{aligned}
 D_{ij} &= -\bar{q}^2 [\frac{2}{3}S_{ij} + b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik}] \\
 &+ \bar{q}^2 [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.14}$$

Le tenseur d'anisotropie  $a_{ij}$  a été présenté avec le terme lent, et il vient :

$$T_{ij}^{(2)} = -4\bar{q}^2 b_{mn}S_{mn}b_{ij} \tag{N.15}$$

Le terme suivant nécessite un peu plus de développement, compte tenu des extensions retenues dans la fonctionnelle des modèles classiques. De façon immédiate, ce troisième terme peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(3)} &= 2 (\bar{q}^2)^2 [b_{ik}S_{kp}b_{pj} - \frac{1}{3}b_{.mn}^2S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &- (\bar{q}^2)^2 [b_{.ik}^2S_{jk} + b_{.jk}^2S_{ik} - \frac{2}{3}b_{.mn}^2S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &- \frac{2}{3} (\bar{q}^2)^2 [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}] \\
 &- (\bar{q}^2)^2 [b_{.ik}^2W_{jk} + b_{.jk}^2W_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.16}$$

L'extension d'ordre trois peut être écrite en fonction des extensions d'ordre inférieures à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, selon l'égalité :

$$\begin{aligned}
 [b_{ik}S_{kp}b_{pj} - \frac{1}{3}b_{.mn}^2S_{mn}\delta_{ij}] &= b_{mn}S_{mn}b_{ij} \\
 &+ \frac{1}{2} b_{.nn}^2S_{ij} \\
 &- [b_{.ik}^2S_{jk} + b_{.jk}^2S_{ik} - \frac{2}{3}b_{.mn}^2S_{mn}\delta_{ij}]
 \end{aligned} \tag{N.17}$$

Par conséquent, le troisième terme devient :

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(3)} &= - (\bar{q}^2)^2 [b_{.ik}^2S_{jk} + b_{.jk}^2S_{ik} - 2b_{ik}S_{kp}b_{pj}] \\
 &- (\bar{q}^2)^2 [b_{.ik}^2W_{jk} + b_{.jk}^2W_{ik}] \\
 &- \frac{2}{3} (\bar{q}^2)^2 [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.18}$$

Le quatrième terme se réduit immédiatement au tenseur suivant :

$$T_{ij}^{(4)} = -2 (\bar{q}^2) [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}] \tag{N.19}$$

et le dernier terme s'écrit :

$$T_{ij}^{(5)} = -8 (\bar{q}^2) [b_{.ik}^2W_{pk}b_{pj} + b_{.jp}^2W_{pk}b_{ik}] \tag{N.20}$$

### Correspondance entre les coefficients

Le modèle classique s'écrit en fonction du tenseur d'anisotropie suivant :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\bar{q}^2} \Phi_{ij} &= \beta_1 b_{ij} \\
 &+ \beta_2 D b_{.ij}^2 \\
 &+ \beta_3 S_{ij} \\
 &+ \beta_4 [b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &+ \beta_5 [b_{.ik}^2S_{jk} + b_{.jk}^2S_{ik} - \frac{2}{3}b_{.mn}^2S_{mn}\delta_{ij}] \\
 &+ \beta_6 [b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}] \\
 &+ \beta_7 [b_{.ik}^2W_{jk} + b_{.jk}^2W_{ik}] \\
 &+ \beta_8 [b_{.ik}^2W_{pk}b_{jp} + b_{.jp}^2W_{pk}b_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.21}$$

ce qui correspond aux coefficients :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -4 b_{mn}S_{mn}(flt_2 - flt_3) & \beta_2 &= 0 \\
 \beta_3 &= -\frac{2}{3} flt_1 + 2 b_{.nn}^2 flt_3 & \beta_4 &= -flt_1 \\
 \beta_5 &= -6 flt_3 & \beta_6 &= -flt_1 - \frac{4}{3} flt_3 - 2 flt_4 \\
 \beta_7 &= -2 flt_3 & \beta_8 &= -8 flt_5
 \end{aligned} \tag{N.22}$$

### Coefficients des modèles de type FLT

Les coefficients proposés par FLT sont les suivants :

$$flt_1 = -\frac{3}{5} \quad (N.23a)$$

$$flt_2 = \frac{3}{10} \quad (N.23b)$$

$$flt_3 = -\frac{1}{5} \quad (N.23c)$$

$$flt_4 = -c_2 A_2 \quad (N.23d)$$

$$flt_5 = -3 c_2 \quad (N.23e)$$

avec  $A_2 = a_{nn}^2$ ,  $A_3 = a_{nn}^3$  et  $c_2 = r$  où  $r = 0.7$  pour FLT et  $c_2 = \min(0.55, A_3^{3/2})$  pour CL, avec  $A = 1 - 9/8 (A_2 - A_3)$ . Dans tous les cas :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -2 b_{mn} S_{mn} & \beta_2 &= 0 \\ \beta_3 &= \frac{2}{5} + \frac{4}{5} II & \beta_5 &= \frac{6}{5} \\ \beta_4 &= \frac{3}{5} & \beta_7 &= \frac{2}{5} \\ \beta_6 &= \frac{13}{15} - 16 c_2 II & \beta_8 &= 24 c_2 \end{aligned} \quad (N.24)$$

### N.2.2 Modèle de type Craft et Launder

Le terme supplémentaire proposé par CL s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{c_2} &= cl_1 \quad [P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij}] \\ &+ cl_2 \quad P_{kk} [a_{ij} - \frac{1}{2} D a_{ij}^2] \\ &+ cl_3 \quad a_{mn} P_{mn} a_{ij} \\ &+ cl_4 \quad \frac{1}{K} [R_{ik} P_{jk} + R_{jk} P_{ik} - \frac{2}{3} R_{mn} P_{mn} \delta_{ij}] \\ &+ cl_5 \quad \frac{1}{K^2} [(R_{il} R_{jk} - \frac{1}{3} R_{ml} R_{km} \delta_{ij}) (6D_{kl} + 26K S_{kl})] \\ &+ cl_6 \quad \frac{1}{K^2} [(R_{il} R_{jk}) (D_{lk} - P_{lk})] \end{aligned} \quad (N.25)$$

ce qui est encore noté sous la forme suivante :

$$\Phi_{ij} = flt_m T_{ij}^{(m)}$$

avec sommation sur les indices répétés. Les vecteurs de la base tensorielle sont donc :

$$T_{ij}^{(1)} = [P_{ij} - \frac{1}{3} P_{kk} \delta_{ij}] \quad (N.26)$$

$$T_{ij}^{(2)} = P_{kk} [a_{ij} - \frac{1}{2} D a_{ij}^2] \quad (N.27)$$

$$T_{ij}^{(3)} = [a_{mn} P_{mn} a_{ij}] \quad (\text{N.28})$$

$$T_{ij}^{(4)} = [R_{ik} P_{jk} + R_{jk} P_{ik} - \frac{2}{3} R_{mn} P_{mn} \delta_{ij}] \quad (\text{N.29})$$

$$T_{ij}^{(5)} = [(R_{il} R_{jk} - \frac{1}{3} R_{ml} R_{km} \delta_{ij})(6D_{kl} + 26K S_{kl})] \quad (\text{N.30})$$

$$T_{ij}^{(6)} = [(R_{il} R_{jk})(D_{lk} - P_{lk})] \quad (\text{N.31})$$

### Expression des tenseurs en fonction du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds

Comme précédemment, les termes de production s'écrivent :

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(1)} = & - \bar{q}^2 \left[ \frac{2}{3} S_{ij} \right] \\ & - \bar{q}^2 \left[ b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right] \\ & - \bar{q}^2 \left[ b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik} \right] \end{aligned} \quad (\text{N.32})$$

Les correspondances entre les deux déviateurs sont triviales :

$$a_{ij} = 2 b_{ij} \quad (\text{N.33})$$

et

$${}^D a^2_{.ij} = 4[{}^D b^2_{.ij}] \quad (\text{N.34})$$

ce qui donne immédiatement :

$$P_{kk} a_{ij} = -4 \bar{q}^2 b_{mn} S_{mn} [b_{ij}] \quad (\text{N.35})$$

et

$$P_{kk} {}^D a^2_{.ij} = -8 \bar{q}^2 b_{mn} S_{mn} [{}^D b^2_{.ij}] \quad (\text{N.36})$$

soit :

$$T_{ij}^{(2)} = -4 \bar{q}^2 b_{mn} S_{mn} [b_{ij} - {}^D b^2_{.ij}] \quad (\text{N.37})$$

Le troisième terme devient quant à lui :

$$T_{ij}^{(3)} = -8 \bar{q}^2 \left[ \frac{1}{3} b_{mn} S_{mn} + b^2_{.nm} S_{mn} \right] b_{ij} \quad (\text{N.38})$$

Le quatrième terme fait intervenir la production et s'écrit :

$$\begin{aligned} T_{ij}^{(4)} = & -(\bar{q}^2)^2 \left[ \begin{aligned} & \frac{4}{9} S_{ij} \\ & + 2 [b_{ik} S_{pk} b_{jp} - \frac{1}{3} b^2_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ & + \frac{4}{3} [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\ & + [(b^2_{.ik} S_{jk} + b^2_{.jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b^2_{mn} S_{mn} \delta_{ij}) \\ & + \frac{2}{3} [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\ & + [b^2_{.ik} W_{jk} + b^2_{.jk} W_{ik}] \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (\text{N.39})$$

soit, en réduisant les extensions suivant (N.17),

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(4)} = & - 4 \bar{q}^2 b_{mn} S_{mn} b_{ij} \\
 & - 2 \bar{q}^2 \left[ \frac{4}{9} + b_{,nn}^2 \right] S_{ij} \\
 & - \frac{8}{3} \bar{q}^2 [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 & + 2 \bar{q}^2 [(b_{,ik}^2 S_{jk} + b_{,jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}) \\
 & - \frac{4}{3} \bar{q}^2 [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\
 & - 2 \bar{q}^2 [b_{,ik}^2 W_{jk} + b_{,jk}^2 W_{ik}]
 \end{aligned} \tag{N.40}$$

Le cinquième terme peut également voir ses extensions réduites par le théorème de Cayley-Hamilton, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(5)} = & 4 \bar{q}^2 [ \\
 & [5 b_{mn} S_{mn} - 6 b_{,mn}^2 S_{mn}] b_{ij} \\
 & - 6 b_{mn} S_{mn} b_{,ij}^2 \\
 & + [1 + 2 b_{,mn}^3 + \frac{5}{2} b_{,mn}^2] S_{ij} \\
 & + \frac{7}{3} [b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{mn} S_{mn} \delta_{ij}] \\
 & - 7 [b_{,ik}^2 S_{jk} + b_{,jk}^2 S_{ik} - \frac{2}{3} b_{,mn}^2 S_{mn} \delta_{ij}] \\
 & + \frac{2}{3} [b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}] \\
 & + 2 [b_{,ik}^2 W_{jk} + b_{,jk}^2 W_{ik}] \\
 & + 6 [b_{,ik}^2 W_{pk} b_{pj} + b_{,jk}^2 W_{pk} b_{ik}] \\
 & ]
 \end{aligned} \tag{N.41}$$

Le sixième terme s'écrit quant à lui :

$$\begin{aligned}
 T_{ij}^{(6)} = & 8 \frac{1}{(\bar{q}^2)} [ \\
 & \frac{1}{9} (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \\
 & + \frac{1}{3} (b_{,ik}^2 W_{jk} + b_{,jk}^2 W_{ik}) \\
 & + (b_{,ik}^2 W_{pk} b_{jp} + b_{,jp}^2 W_{pk} b_{ik}) \\
 & ]
 \end{aligned} \tag{N.42}$$

### Correspondance entre les coefficients

La contribution de la modélisation complémentaire du modèle CL à la forme proposée par FLT consiste à ajouter respectivement aux coefficients de la fonctionnelle classique, les termes suivants :

$$\begin{aligned}
 \beta_1 &= -4 b_{mn} S_{mn} (cl_2 + \frac{2}{3} cl_3 + cl_4 - 5 cl_5) - 8 b_{,mn}^2 S_{mn} (cl_3 + 3 cl_5) \\
 \beta_2 &= 4 b_{mn} S_{mn} cl_2 - 24 b_{,mn}^2 S_{mn} cl_5 \\
 \beta_3 &= (-\frac{2}{3} cl_1 - \frac{8}{9} cl_4 + 4 cl_5) - 2 b_{,nn}^2 (cl_4 - 5 cl_5) + 8 b_{,nn}^3 cl_5 \\
 \beta_4 &= -cl_1 - \frac{8}{3} cl_4 + \frac{28}{3} cl_5 \\
 \beta_5 &= 2 cl_4 - 28 cl_5 \\
 \beta_6 &= -cl_1 - \frac{4}{3} cl_4 + \frac{8}{3} cl_5 + \frac{8}{9} cl_6 \\
 \beta_7 &= -2 cl_4 + 8 cl_5 + \frac{8}{3} cl_6 \\
 \beta_8 &= 24 cl_5 + 8 cl_6
 \end{aligned} \tag{N.43}$$

### Coefficients des modèles de type CL

Les coefficients proposés par CL pour cette contribution supplémentaire sont les suivants :

$$cl_1 = \left(\frac{7}{15} - \frac{A_2}{4}\right) c'_2 \quad (N.44a)$$

$$cl_2 = 0.1 c'_2 \quad (N.44b)$$

$$cl_3 = -0.05 c'_2 \quad (N.44c)$$

$$cl_4 = 0.1 c'_2 \quad (N.44d)$$

$$cl_5 = 0.1 c'_2 \quad (N.44e)$$

$$cl_6 = 0.2 c'_2 \quad (N.44f)$$

avec

$$c'_2 = \min(0, 6, A_2^{(3/2)}) \quad (N.45)$$



---

## Annexe O

# Etude du terme lent du tenseur de corrélation pression - déformation

Le terme lent du tenseur de corrélation pression-déformation traduit le phénomène de retour à l'isotropie d'une turbulence homogène incompressible initialement anisotrope. La modélisation classique exprime ce terme comme fonctionnelle du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds et de ses invariants. Dans un premier temps, le modèle correspondant est rappelé sous sa forme générale. La notion de réalisabilité est ensuite introduite pour chercher à imposer une forme particulière aux coefficients de la fonctionnelle. Cette procédure n'étant pas unique, trois méthodes parmi les plus simples sont discutées, afin d'en regarder l'influence sur le comportement des équations modélisées. Ces dernières sont analysées comme systèmes dynamiques puis calibrées sur les expériences de Choi et Lumley [25] et de Le Penven, Gence et Comte-Bellot [104]. Les modèles sont enfin comparés à trois modèles classiques : le modèle de Rotta [122], le modèle de Sarkar et Speziale [124], et celui de Yamamoto et Arakawa [179], dont les expressions sont rappelées pour mémoire. Dans toute la suite l'écoulement est supposé avoir un nombre de Reynolds turbulent suffisamment élevé pour en négliger les effets sur la modélisation du terme de retour à l'isotropie.

### O.1 Equations du mouvement

#### O.1.1 Expression générale du retour à l'isotropie

Le problème du retour à l'isotropie d'une turbulence homogène incompressible anisotrope en l'absence de gradients de vitesse moyenne est gouverné par les équations suivantes :

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial t} = \phi_{ij}^S - \varepsilon_{ij} + d_{ij}^\nu \quad (O.1a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = P^{\varepsilon^4} - E^\varepsilon + \phi^\varepsilon + d^{\nu\varepsilon} \quad (O.1b)$$

soit, en modélisant le taux de dissipation de façon classique et en regardant l'évolution du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds :

$$\frac{\partial K}{\partial t} = -\varepsilon \quad (O.2a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (O.2b)$$



$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{K} b_{ij} + \frac{1}{2K} [\phi_{ij}^S - {}^D \varepsilon_{ij}] \quad (O.2c)$$

en négligeant les termes de diffusion visqueuse. Il est intéressant de remplacer le taux de dissipation  $\varepsilon$  par l'inverse du temps caractéristique de la décroissance de la turbulence, noté :

$$\sigma = \frac{\varepsilon}{2K} \quad (O.3)$$

et de modéliser le déviateur du tenseur des taux de dissipation avec le terme lent, soit :

$$\phi_{ij}^S - {}^D \varepsilon_{ij} = \varepsilon \overline{\phi}_{ij}^{*S} \quad (O.4)$$

La trace du tenseur de Reynolds est notée  $\overline{q}^2 = 2K$ . Les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{\partial \overline{q}^2}{\partial t} = -\overline{q}^2 \sigma \quad (O.5a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2(1 - C_{\varepsilon 2}) \sigma^2 \quad (O.5b)$$

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial t} = \sigma [2 b_{ij} + \overline{\phi}_{ij}^{*S}] \quad (O.5c)$$

Les équations d'évolution des invariants du tenseur d'anisotropie s'écrivent :

$$\frac{\partial \overline{q}^2}{\partial t} = -\overline{q}^2 \sigma \quad (O.6a)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 2(1 - C_{\varepsilon 2}) \sigma^2 \quad (O.6b)$$

$$\frac{\partial II}{\partial t} = \sigma [4 II - \{b\phi\}] \quad (O.6c)$$

$$\frac{\partial III}{\partial t} = \sigma [6 II + \{b^2\phi\}] \quad (O.6d)$$

De ce système peuvent se déduire les équations de transport des paramètres

$$F = 1 + 9 II + 27 III \quad (O.7a)$$

et

$$\Delta = 4 II^3 + 27 III^2 \quad (O.7b)$$

qui permettent respectivement de délimiter les frontières bidimensionnelles et axisymétriques du domaine de réalisabilité. Il vient :

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = 6\sigma [2\Delta - 2\{b\phi\} II^2 + 9\{b^2\phi\} III] \quad (O.8a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 9\sigma [2(2 II + 9 III) - \{b\phi\} + 3\{b^2\phi\}] \quad (O.8b)$$

Il faut noter qu'en l'absence de gradients de vitesse moyenne, le temps caractéristique du retour à l'isotropie peut permettre d'adimensionnaliser l'échelle de temps de la turbulence suivant :

$$d\sigma = \frac{\varepsilon}{\overline{q}^2} dt \quad (O.9)$$

L'expression du temps  $\sigma$  en fonction de  $t$  peut être obtenue directement par résolution des équations d'évolution de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation. L'étude du système dynamique des équations de retour à l'isotropie peut donc s'effectuer directement avec l'équation d'évolution  $db_{ij}/d\sigma$

### O.1.2 Modélisation classique

Le terme lent s'exprime comme fonctionnelle isotrope du tenseur d'anisotropie  $b_{ij}$ , et s'écrit d'une façon générale :

$$\overline{\phi}_{ij}^{*S} = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S (b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij}) \quad (O.10)$$

où les coefficients sont des fonctions polynomiales des invariants de  $b_{ij}$ . Pour simplifier l'écriture, on note :

$$\begin{aligned} B_1 &= \beta_1^S + 2 \\ B_2 &= \beta_2^S \end{aligned} \quad (O.11)$$

Les équations du mouvement deviennent respectivement :

$$\frac{db_{ij}}{d\sigma} = [B_1 b_{ij} + B_2 (b_{ij}^2 + \frac{2}{3} II \delta_{ij})] \quad (O.12)$$

soit, dans l'espace des phases,

$$\frac{dII}{d\sigma} = [2 B_1 II - 3 B_2 III] \quad (O.13a)$$

$$\frac{dIII}{d\sigma} = [3 B_1 III + \frac{2}{3} B_2 II^2] \quad (O.13b)$$

et

$$\frac{d\Delta}{d\sigma} = 6 B_1 \Delta \quad (O.14a)$$

$$\frac{dF}{d\sigma} = 9 [(2 II + 9 III) B_1 + (2 II^2 - 3 III) B_2] \quad (O.14b)$$

Il est évident que le système des équations ci-dessus peut s'écrire différemment, en fonction du choix des paramètres, par exemple :

$$\frac{dF}{d\sigma} = 9 [F (\frac{2}{3} B_1 - \frac{1}{9} B_2) + (\frac{2}{3} + 2 II) B_1 + (\frac{1}{9} + II + 2 II^2) B_2] \quad (O.15)$$

ou

$$\frac{dF}{d\sigma} = [\frac{1}{9} B_2 F^2 + (B_1 - (\frac{2}{9} + 9 III) B_2) F + \frac{3}{2} (III - \frac{2}{27})(9 B_1 - (1 - 54 III) B_2)] \quad (O.16)$$

Le comportement du système dynamique est étudié dans le plan des invariants en s'intéressant plus particulièrement à l'évolution des solutions à l'intérieur du domaine de réalisabilité, décrite par les équations d'évolution de  $F$  et  $\Delta$ .

## O.2 Contraintes de réalisabilité

### O.2.1 Expression en fonction des invariants

La notion de réalisabilité est limitée ici à un critère indirect, qui consiste à éviter que les solutions du modèle ne puissent sortir du domaine de réalisabilité en imposant que les paramètres

$F$  et  $\Delta$  admettent des valeurs qui ne correspondent à aucun état physique. La frontière axisymétrique est définie par :

$$\Delta \leq 0 \quad (O.17)$$

Il est clair d'après l'équation d'évolution de  $\Delta$  que quels que soient les coefficients du terme lent du tenseur des corrélations pression-déformation, la propriété suivante est toujours satisfaite :

$$\Delta = 0 \Rightarrow \frac{d\Delta}{d\sigma} = 0 \quad (O.18)$$

ce qui assure qu'un point situé sur la frontière axisymétrique ne puisse pas la franchir. Cette contrainte n'est généralement pas difficile à satisfaire puisqu'elle traduit le fait que l'ensemble des valeurs propres du tenseur de Reynolds sont réelles.

Le comportement du modèle n'est pas le même dans le cas de la frontière bidimensionnelle, pour laquelle :

$$F = 0 \quad (O.19)$$

Les valeurs admissibles de ce paramètre sont :

$$0 \leq F \leq 1 \quad (O.20)$$

Lorsque  $F = 0$ , la turbulence évolue dans un plan et elle est isotrope lorsque  $F = 1$ , c'est-à-dire lorsque les invariants  $II$  et  $III$  sont nuls. On peut noter que le point isotrope constitue bien un état limite pour le paramètre  $F$ , et ce quels que soient les coefficients du terme lent, le système de retour à l'isotropie assurant que :

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{II=0, III=0} = 0 \quad (O.21)$$

Ce n'est pas immédiatement le cas de la frontière bidimensionnelle pour laquelle :

$$\left. \frac{dF}{d\sigma} \right|_{F=0} \sim 9 \left( \frac{1}{3} + II \right) [2 B_1 + \left( \frac{1}{6} + II \right) B_2] \quad (O.22a)$$

sinon, pour  $III$ ,

$$\left. \frac{dF}{d\sigma} \right|_{F=0} \sim \frac{3}{2} \left( III - \frac{2}{27} \right) [9 B_1 - (1 - 54 III) B_2] \quad (O.22b)$$

Si l'un ou l'autre de ces équivalents tend vers une limite nulle à l'approche de la frontière bidimensionnelle, cette dernière constitue bien une valeur extrême locale du paramètre  $F$ . Ces expressions sont identiques sur la frontière uniquement, et traduisent dans son voisinage un comportement différent du système des équations pour les invariants. Elles imposent respectivement les conditions suivantes de réalisabilité :

$$F = 0 \Rightarrow 2 B_1 + \left( \frac{1}{6} + II \right) B_2 = 0 \quad (O.23a)$$

et

$$F = 0 \Rightarrow 9 B_1 - (1 - 54 III) B_2 = 0 \quad (O.23b)$$

Afin d'éviter d'introduire *a priori* une singularité explicite dans l'écriture des coefficients, on choisit d'exprimer  $B_1$  en fonction de  $B_2$ . L'approche de la limite bidimensionnelle est restituée

de la façon la plus simple, linéairement en fonction de  $F$ . Les coefficients ont alors la forme suivante, respectivement :

$$B_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + II\right) B_2 + F B_{1F}(II, F) \quad (O.24a)$$

et

$$B_1 = \left(\frac{1}{9} - 6 III\right) B_2 + F B_{1F}(III, F) \quad (O.24b)$$

où aucune forme n'est précisée ni pour  $B_2$ , ni pour  $B_{1F}$ , dans aucun des deux cas. Le choix de l'une ou l'autre des formulations peut s'effectuer en examinant leur influence sur le comportement du système (O.13a). Les non-linéarités y interviennent effectivement différemment, ce qui en change les caractéristiques. Il faut noter qu'il existe d'autres façons d'imposer la réalisabilité sur les invariants par l'intermédiaire de ces équivalents. En considérant ces derniers comme fonction polynomiale de  $II$  ou de  $III$ , il est possible de les annuler pour toute valeur de  $II$  - respectivement de  $III$  - en imposant à chaque coefficient du polynôme d'être nul sur la limite bidimensionnelle, avec  $F = 0$ . Dans ce cas, il est immédiat que les coefficients  $B_1$  et  $B_2$  s'annulent avec  $F$ . Cette interprétation peut conduire à choisir :

$$B_1 = B_{1F} F \quad (O.25a)$$

$$B_2 = B_{2F} F \quad (O.25b)$$

Cette dernière façon de procéder présente l'avantage de ne pas dépendre d'une forme particulière des équations suivant les paramètres retenus, et donc de pouvoir s'appliquer à des systèmes plus complexes.

## O.2.2 Troncature

Dans toute la suite, les coefficients inconnus sont supposés pouvoir s'exprimer comme fonction de  $(II, F)$ ,  $(III, F)$  ou bien encore de  $(II, III)$  selon le cas, sans que leur forme soit précisée *a priori*. Afin de minimiser les non-linéarités du modèle, les coefficients  $B_2$ ,  $B_{1F}$  et  $B_{2F}$  seront considérés comme constants, puis éventuellement modifiés si nécessaire, sans pour autant que leur forme corresponde à un ordre de troncature particulier du développement du terme lent en fonction du tenseur d'anisotropie. Il semble en effet préférable dans un premier temps de regarder l'influence des combinaisons non-linéaires imposées par la contrainte de réalisabilité choisie sans que l'écriture de la fonctionnelle soit figée à un ordre donné.

## O.3 Solutions asymptotiques

### O.3.1 Points fixes du système des invariants complet

Pour chacune des deux formulations, une analyse des points fixes du système (O.13a) est présentée. Les points fixes d'un système sont les solutions d'équilibre asymptotique. Dans le cas d'une turbulence retournant vers un état isotrope, le modèle non-linéaire ne doit pas comprendre d'autre point fixe stable que le point isotrope capable d'attirer une condition initiale réalisable. Il est également clair que le nombre de point fixe est susceptible d'augmenter avec les non-linéarités.

**O.3.2 Cas fonction de II**

On pose :

$$B_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + II\right) B_2 + F B_{1F} \tag{O.26}$$

Le système des invariants prend la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dII}{d\sigma} &= 2\left(B_{1F} - \frac{1}{12} B_2\right) II - 3 B_2 III \\ &+ 18\left(B_{1F} - \frac{1}{12} B_2\right) II^2 + 54 B_{1F} II III \end{aligned} \tag{O.27a}$$

$$\begin{aligned} \frac{dIII}{d\sigma} &= 3\left(B_{1F} - \frac{1}{12} B_2\right) III \\ &+ 81 B_2 III^2 + \frac{2}{3} B_2 II^2 + 27 III III\left(B_{1F} - \frac{1}{18} B_2\right) \end{aligned} \tag{O.27b}$$

Sur la limite de réalisabilité, la solution la plus simple consiste à choisir  $B_{1F} = 0$ . Dans ce cas, le système précédent admet trois points fixes :

- le point isotrope  $(0, 0)$
- un point S intérieur au domaine,  $(II_\infty - \frac{5}{6} + \frac{1}{3}\sqrt{6}, III_\infty - \frac{11}{27} + \frac{1}{6}\sqrt{6})$
- un point P extérieur au domaine,  $(II_\infty - \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\sqrt{6}, III_\infty - \frac{11}{27} - \frac{1}{6}\sqrt{6})$

Le point S est voisin du point isotrope comparativement aux dimensions du domaine. On peut vérifier que lorsque le coefficient  $B_2$  est choisi pour rendre le point isotrope asymptotiquement stable, le point S est un point selle. Dans ce cas, il est clair qu'il n'existe qu'un domaine restreint de conditions initiales réalisables, situé entre le point S et le point isotrope, qui conduit asymptotiquement vers le point isotrope. Le point P est de type parabolique, toutes ses valeurs propres sont positives.

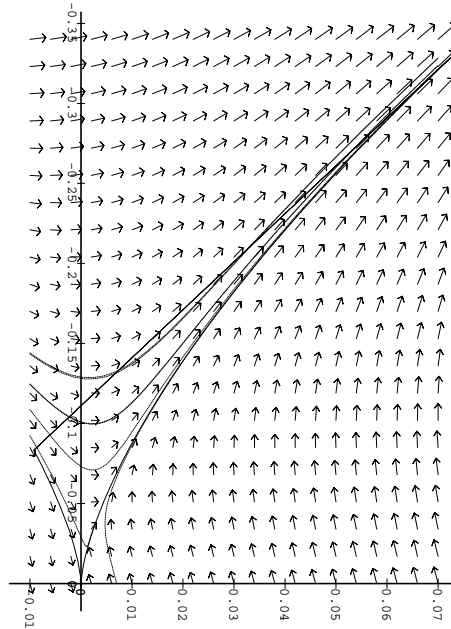


FIG. O.1: *Modèle pour  $B_{1F} = 0$*

Lorsque  $B_{1F}$  n'est pas nul, le système des invariants admet au moins deux points fixes,

- le point isotrope  $(0, 0)$
- un point S intérieur au domaine,  $(II_\infty, III_\infty)$ , dépendant des relations entre les deux coefficients  $B_2$  et  $B_{1F}$ . Ces dernières sont précisées par l'analyse de stabilité du point isotrope.

L'analyse de stabilité est basée sur l'étude des valeurs propres de la matrice obtenue par linéarisation du second membre du système des équations différentielles au voisinage du point fixe considéré. Le point est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de la matrice sont négatives. Pour le point isotrope, la matrice linéarisée s'écrit :

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{6}(B_2 - 12 B_{1F}) & -3 B_2 \\ 0 & \frac{1}{4}(B_2 - 12 B_{1F}) \end{vmatrix} \quad (\text{O.28})$$

dont les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -\frac{1}{6}(B_2 - 12 B_{1F}) \quad (\text{O.29a})$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{4}(B_2 - 12 B_{1F}) \quad (\text{O.29b})$$

Par conséquent le point isotrope est un point fixe stable si et seulement si :

$$B_{1F} < \frac{1}{12} B_2 \quad (\text{O.30})$$

On peut alors poser :

$$B_{1F} = \frac{1}{12} B_2 C \quad (\text{O.31})$$

avec

$$\begin{cases} B_2 > 0 & \Rightarrow C < 1 \\ B_2 < 0 & \Rightarrow C > 1 \end{cases} \quad (\text{O.32})$$

D'après les observations expérimentales de Le Penven, Gence et Comte-Bellot [104], il est nécessaire que le taux de décroissance de la turbulence diminue avec  $III$ , ce qui impose  $B_2 > 0$ .

En retenant l'égalité limite O.31, il est possible de clarifier la situation des autres points fixes notés  $(II_\infty, III_\infty)$ , dont les coordonnées ne dépendent maintenant que de la constante  $C$ , non nulle. Lorsque  $II_\infty \neq \frac{2}{3C}$ ,  $II_\infty$  est solution de l'équation :

$$L(II_\infty, C) = 0 \quad (\text{O.33})$$

avec

$$L(II_\infty, C) = 108 C^2 II_\infty^3 + 9(9C^2 - 28C + 4) II_\infty^2 + 6(3C^2 - 5C + 10) II_\infty + (C - 1)^2 \quad (\text{O.34a})$$

$$III_\infty = -\frac{1}{9} \frac{II_\infty(3C - 2) + C - 1}{3C II_\infty - 2} \quad (\text{O.34b})$$

Il faut noter que pour de tels points,

$$F_{\infty} = \frac{18 II_{\infty}^2 - 15 II_{\infty} - 2}{3C II_{\infty} - 2} \quad (O.35)$$

et

$$\Delta_{\infty} = \frac{1}{3} II_{\infty}^2 \frac{L(II_{\infty}, C)}{3C II_{\infty} - 2^2} \quad (O.36)$$

ce qui signifie que  $\Delta_{\infty} = 0$ . Ces points sont nécessairement situés sur la limite axisymétrique de réalisabilité ou sur son prolongement à l'extérieur du domaine.

Il est clair que puisque  $L(II_{\infty}, C)$  est un polynôme d'ordre trois en  $II_{\infty}$ , il existe au moins une solution réelle. Pour que cette solution soit unique, il faut et il suffit que le discriminant associé à l'équation réduite associée soit négatif. C'est le cas lorsque

$$C > 0.09 \quad (O.37)$$

et par conséquent, il convient de chercher l'emplacement de ce point fixe supplémentaire pour

$$0.09 < C < 1 \quad (O.38)$$

Pour cet intervalle, la valeur de  $II_{\infty}$  varie approximativement entre 0 et  $-0.014$ , ce qui situe le point fixe au voisinage du point isotrope.

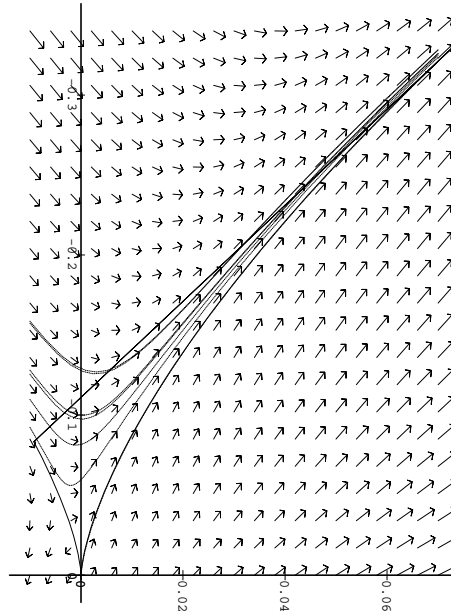


FIG. O.2: Modèle pour  $C = 1/2$ .

Regardons le cas où il existe des valeurs réelles de  $C$  pour lesquelles l'identité  $II_{\infty} = \frac{2}{3C}$  est vérifiée. Le système des invariants s'écrit :

$$\frac{dII}{d\sigma} = B_2 \left[ \left( \frac{3}{2}C - 1 \right) II^2 + \frac{9}{2}C III + \frac{1}{6}(C - 1) II - 3 III \right] \quad (O.39a)$$

$$\frac{dIII}{d\sigma} = B_2 \left[ \frac{2}{3} II^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2}C - 1 \right) III + \frac{27}{4}C III^2 + \frac{1}{4}(C - 1) III \right] \quad (O.39b)$$

Par conséquent, il existe  $C$  tel que  $II_\infty = \frac{2}{3C}$ , si et seulement si  $III_\infty$  vérifie :

$$\frac{1}{9} \frac{1}{C^2} (C^2 + 5C - 4) = 0 \quad (O.40a)$$

$$\frac{1}{C^2} \left[ \frac{8}{27} + \frac{1}{4} C III_\infty (C^2 + 5C - 4) + \frac{27}{4} C III_\infty^2 \right] = 0 \quad (O.40b)$$

soit :

$$III_\infty^2 = -\frac{32}{729} \frac{1}{C^3} \quad (O.41a)$$

$$C = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{41} \quad (O.41b)$$

Par conséquent la seule solution réelle correspond à :

$$III_\infty^2 = -\frac{32}{27^2} \frac{1}{C^3} \quad (O.42a)$$

$$C = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{41} \quad (O.42b)$$

soit

$$III_\infty^2 = \pm \frac{4\sqrt{2}}{9} \frac{1}{3 - C^{3/2}} \quad (O.43a)$$

$$C = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{41} \quad (O.43b)$$

Ces deux points sont également axisymétriques, puisque  $4II_\infty^3 + 27III_\infty^2 = 0$ . Seul le point correspondant à  $III_\infty > 0$  est réalisable, étant donné que  $-\frac{16}{27} \frac{1}{\sqrt{(5+\sqrt{41})}} < -\frac{1}{108}$ . Notons que  $C$  est bien inférieur à 1, ce qui conserve au point isotrope sa stabilité. Le point fixe axisymétrique réalisable est un point selle, dont la présence perturbera l'écoulement à l'intérieur du domaine de réalisabilité, d'une façon plus ou moins importante selon la condition initiale choisie. Seule une condition initiale appartenant au voisinage immédiat de l'isotropie sera en mesure de traduire le comportement de retour vers l'état isotrope.

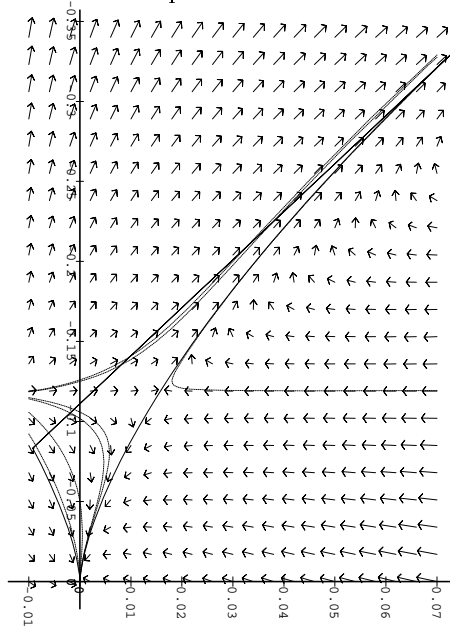




FIG. O.3: Modèle pour  $C = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} 41^{1/2}$ .

La forme des coefficients n'est pas adaptée au problème du retour vers l'isotropie, puisque la prise en compte de l'éloignement de la limite de réalisabilité par  $B_{1F}$  ne permet pas de changer l'existence du doublet point S, point isotrope, bien que sa localisation dans le domaine de réalisabilité varie selon le rapport entre  $B_2$  et  $B_{1F}$ .

### O.3.3 Cas fonction de III

Dans ce cas,

$$B_1 = \left(\frac{1}{9} - 6 III\right) B_2 + F B_{1F} \quad (O.44)$$

Exprimer les coefficients du modèle en fonction de  $(III, F)$  change radicalement le comportement du système. Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dII}{d\sigma} &= 2(B_{1F} + \frac{1}{9} B_2) II - 3 B_2 III \\ &+ 18 B_{1F} II^2 + (54 B_{1F} - 12 B_2) IIII \end{aligned} \quad (O.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dIII}{d\sigma} &= 3(B_{1F} + \frac{1}{9} B_2) III \\ &- 9(2 B_2 - 9 B_{1F}) III^2 + \frac{2}{3} B_2 II^2 + 27 II III B_{1F} \end{aligned} \quad (O.45b)$$

De même que pour le cas précédent, regardons dans un premier temps le système modélisé avec les coefficients définis sur la limite de réalisabilité, stable dès lors que  $B_{1F} = 0$ . Il admet trois points asymptotiques :

- le point isotrope  $(0, 0)$
- le point unidimensionnel 1C  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27})$
- le point bidimensionnel isotrope 2D  $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{108})$

La matrice linéarisée au voisinage du point fixe isotrope s'écrit :

$$M_{lin0} = \begin{vmatrix} \frac{2}{9} B_2 & -3 B_2 \\ 0 & \frac{1}{3} B_2 \end{vmatrix} \quad (O.46)$$

Les valeurs propres associées à chacune des linéarisations au voisinage de chacun des points valent respectivement :

$$\lambda_0 = \left\{ \frac{2}{9} B_2, \frac{1}{3} B_2 \right\} \quad (O.47a)$$

$$\lambda_{1C} = \{-B_2, -2 B_2\} \quad (O.47b)$$

$$\lambda_{2D} = \{0, B_2\} \quad (O.47c)$$

Il suffit donc d'imposer  $B_2 < 0$  pour que le point isotrope soit asymptotiquement stable. Dans ce cas de figure, le point 1C est alors instable, et le point 2D isotrope, stable. Ce cas est rejeté

par la contrainte de Le Penven, Gence et Comte-Bellot [104], qui impose d'après l'expression de  $M_{lin0}$ , l'inégalité  $B_2 > 0$ . Le point isotrope n'est alors même plus stable, ce qui montre la nécessité d'ajouter une constante supplémentaire qui modifie les valeurs propres de  $M_{lin0}$  de façon à pouvoir les choisir négatives avec  $B_2 > 0$ . La présence de  $B_{1F}$  permet ce choix.

Lorsque  $B_{1F}$  n'est pas nul, il faut considérer deux cas, selon que  $B_{1F} = \frac{2}{9} B_2$  ou non.

Supposons  $B_{1F} \neq 0$ . Le système des invariants admet quatre points fixes :

- le point isotrope  $(0, 0)$
- le point unidimensionnel 1C  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{27})$
- le point bidimensionnel isotrope 2D  $(-\frac{1}{12}, -\frac{1}{108})$
- le point S défini par  $(II_\infty = -\frac{1}{3} \frac{(B_2+9B_{1F})^2}{(B_2-9B_{1F})^2}, III_\infty = -\frac{2}{27} \frac{(B_2+9B_{1F})^3}{(2B_2-9B_{1F})^3})$

Il faut remarquer que le point S vérifie l'égalité  $4II_\infty^3 + 27III_\infty^2 = 0$ , ce qui signifie qu'il se situe sur la limite de réalisabilité axisymétrique s'il est réalisable, ou dans son prolongement s'il ne l'est pas. De même que précédemment, la stabilité du point fixe isotrope est examinée à l'aide des valeurs propres de la matrice du second membre linéarisé au voisinage du point isotrope. Elle s'écrit :

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{9} B_2 + 2 B_{1F} & -3 B_2 \\ 0 & \frac{1}{3} B_2 + 3 B_{1F} \end{vmatrix} \quad (O.48)$$

Ses valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \frac{2}{9} B_2 + 2 B_{1F} \quad (O.49a)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} B_2 + 3 B_{1F} \quad (O.49b)$$

Il est clair que le point isotrope est un point fixe stable si et seulement si :

$$B_2 + 9 B_{1F} < 0 \quad (O.50)$$

et il est possible de choisir  $B_2 > 0$ .

Les valeurs propres associées aux autres points fixes sont respectivement :

$$\lambda_{1C} = \{-B_2, -2 B_2\} \quad (O.51a)$$

$$\lambda_{2D} = \{B_2, -\frac{9}{4} B_{1F}\} \quad (O.51b)$$

$$\lambda_S = \left\{ 9 \frac{B_2 B_{1F} (B_2 + 9 B_{1F})}{(2 B_2 - 9 B_{1F})^2}, 2 \frac{B_2 (B_2 + 9 B_{1F})}{(2 B_2 - 9 B_{1F})^2} \right\} \quad (O.51c)$$

Le signe de  $B_2$  reste déterminant, et choisir  $B_2 > 0$  rend le point 1C stable. Le point 2D isotrope est instable si et seulement si  $B_{1F} < 0$ , condition toujours vérifiée pourvu que les conditions  $B_2 + 9B_{1F} < 0$  et  $B_2 > 0$  soient satisfaites. L'existence d'au moins deux points stables n'est pas acceptable.

Pour modifier la nature de la stabilité du point 1C, il faut changer la forme du modèle, en faisant intervenir par exemple d'autre non-linéarités. En remarquant que les valeurs propres de la matrice jacobienne linéarisée au voisinage de ce point ne dépendent pas de  $B_{1F}$ , on peut penser

que l'introduction de non-linéarités à ce niveau ne conduira pas - du fait de la linéarisation - à en modifier la stabilité. Ces non-linéarités introduiront par contre un nombre de points fixes plus importants, éventuellement à l'extérieur du domaine, et dont il faut analyser également la stabilité. Il paraît cependant possible de changer la stabilité de 1C en rendant  $B_2$  fonction de  $(III, F)$ . L'expression la plus simple reste linéaire :

$$B_2 = B_{21} + III B_{23}$$

Dans ce cas, le système des invariants admet au moins quatre points fixes, qui sont :

- le point isotrope,
- le point 1C,
- le point 2D,
- un point bidimensionnel défini par  $(II_\infty = \frac{1 - B_{23} + 27 B_{21}}{9 B_{23}}, III_\infty = -\frac{B_{21}}{B_{23}})$
- $(II_\infty, III_\infty)$  vérifiant un système d'équations polynômiales qu'il est inutile de préciser ici.

D'après l'analyse précédente, il est intéressant de poser :

$$B_{1F} = -\frac{1}{9} C B_{21} \quad (O.52)$$

Le voisinage du point isotrope n'est pas modifié puisque la matrice linéarisée associée s'écrit :

$$M_{in0} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} B_{21}(C-1) & -3 B_{21} \\ 0 & \frac{1}{3} B_{21}(C-1) \end{vmatrix} \quad (O.53)$$

Etant donné que  $B_{21} > 0$ , les valeurs propres sont négatives si et seulement si  $C > 1$ . Les deux points fixes 1C et 2D ont respectivement les valeurs propres suivantes :

$$\lambda_{1C} = \left\{ -(B_{21} + \frac{2}{27} B_{23}), -(2 B_{21} + \frac{2}{27} B_{23}) \right\} \quad (O.54a)$$

$$\lambda_{2D} = \left\{ \frac{1}{2} B_{21}, B_{21} \right\} \quad (O.54b)$$

Il est clair que pour que 1C soit instable, il est nécessaire et suffisant que  $B_{23} < -\frac{2}{27} B_{21}$ . Cette contrainte peut être notée :

$$B_{23} = -\frac{2}{27} G B_{21} \quad (O.55)$$

où  $G > 1$ . Le point fixe bidimensionnel prend alors la forme suivante :

$$II_\infty = -\frac{1}{9} \frac{2+G}{G} \quad (O.56a)$$

$$III_\infty = \frac{2}{27} \frac{1}{G} \quad (O.56b)$$

Il se situe sur la frontière de réalisabilité bidimensionnelle, du côté des  $III > 0$ . Les valeurs propres associées à la matrice linéarisée associée sont :

$$\lambda_D = \left\{ \frac{2}{9} B_{21} \frac{C(G-1)}{G}, -\frac{1}{9} B_{21} \frac{(G-1)(G+8)}{G} \right\} \quad (O.57)$$

Il s'agit donc d'un point selle, pour lequel il est intéressant de regarder les axes propres. Les vecteurs propres associés s'écrivent :

$$E_{\lambda_{D1}} = [-3, 1] \quad (O.58a)$$

$$E_{\lambda_{D2}} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{G^2 + G(2C+7) + 4(C-2)}{C} \right] \quad (O.58b)$$

Par conséquent, la droite  $F = 0$  est axe propre, l'orientation du second axe varie avec la valeur des coefficients du modèle. On peut constater déjà que la présence de ce point instable conduit une turbulence peu tridimensionnelle à ne pas retourner directement vers l'isotropie, mais à suivre la direction de cet axe à l'intérieur du domaine. Seule une condition initiale placée au voisinage immédiat du point isotrope retournera sans ambiguïté vers l'état isotrope. Il n'est pas possible de tester la pertinence d'un tel comportement pour des états fortement anisotropes initialement, étant donné que les expériences dont on dispose ne se situent qu'au voisinage de l'isotropie. Il faut cependant noter qu'il existe *a priori* un autre point fixe au moins à ce système, dont la situation est entièrement déterminé avec le choix des constantes. Le problème étant d'accepter ou non un comportement des invariants du fait du point fixe axisymétrique, son étude, qui permettrait éventuellement de guider un choix de  $(C, G)$ , reste superflue.

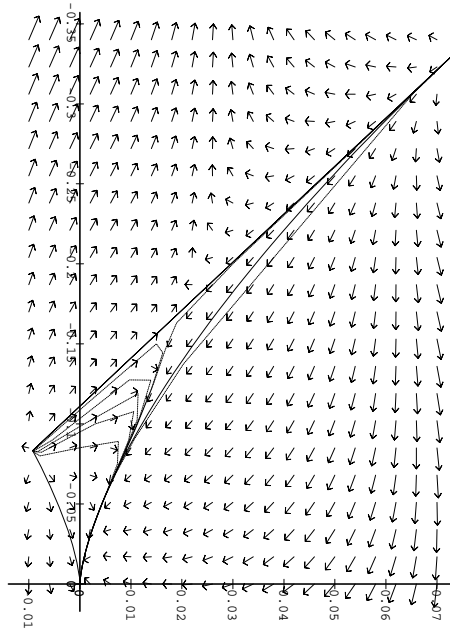


FIG. O.4: *Modèle pour  $C = 3$  et  $G = 4$ .*

Lorsque  $B_{1F} = \frac{2}{9} B_2$ , le point isotrope est stable si et seulement si  $B_2 < 0$ . Les deux autres points sont tous les deux instables, indépendamment de la valeur de  $B_2$ . Cependant la condition  $B_2 < 0$  reste incompatible avec la contrainte de Le Penven, Gence et Comte-Bellot. Ce cas est donc à rejeter.

Aucune des deux formulations précédentes ne donne entièrement satisfaction. Elles montrent en tout cas la grande sensibilité du modèle au choix de ses coefficients, ainsi qu'une complexité croissante de la topographie de l'espace des phases avec l'addition de termes non linéaires.

### O.3.4 Cas fonction de $F$ uniquement

La dernière façon de prendre compte la condition de réalisabilité examinée ici impose aux coefficients d'être proportionnels au paramètre  $F$ . Le système des invariants s'écrit alors :

$$\frac{dII}{d\sigma} = [2 B_{1F} II - 3 B_{2F} III](1 + 9 II + 27 III) \quad (O.59a)$$

$$\frac{dIII}{d\sigma} = [3 B_{1F} III + \frac{2}{3} B_{2F} II^2](1 + 9 II + 27 III) \quad (O.59b)$$

Il est clair que dans ce cas les points fixes du système quadratique sont les points fixes donnés par le modèle quadratique à coefficients constants, et l'ensemble des points vérifiant  $F$ . Les points fixes du modèle à coefficients constants sont les suivants :

- le point isotrope  $(0, 0)$
- un point axisymétrique  $(II_\infty = -3(\frac{B_{1F}}{B_{2F}})^2, III_\infty = -2(\frac{B_{1F}}{B_{2F}})^3)$

La matrice Jacobienne linéarisée au voisinage de l'isotropie s'écrit :

$$M_{lin,0} = \begin{vmatrix} 2 B_{1F} & -3 B_{2F} \\ 0 & 3 B_{1F} \end{vmatrix} \quad (O.60)$$

ce qui montre que pour que le point isotrope soit un point fixe stable, il est nécessaire et suffisant que

$$B_{1F} < 0 \quad (O.61)$$

La contrainte de Le Penven, Gence et Comte-Bellot [104] est satisfaite si

$$B_{2F} > 0 \quad (O.62)$$

Dans ce cas le second point fixe vérifie toujours

$$III_\infty \geq 0 \quad (O.63a)$$

$$F_\infty = -54(B - \frac{1}{6})(B + \frac{1}{3})^2 \quad (O.63b)$$

avec

$$B = \frac{B_{1F}}{B_{2F}} \quad (O.64)$$

Par conséquent,  $F_\infty < 0$  si et seulement si  $B > 1/6$ , et  $1 < F_\infty$  si et seulement si  $B < -1/2$ . Il est donc incompatible de sortir le point fixe axisymétrique de la carte des invariants en imposant  $F_\infty < 0$  et de conserver au point fixe isotrope son caractère stable. Le seul moyen est de choisir  $B < -1/2$  pour que  $1 < F_\infty$ . Les valeurs propres associées sont :

$$\lambda_1 = 54 B_{1F}(B - 1/6)(B + 1/3)^2 \quad (O.65a)$$

$$\lambda_2 = -324 B_{1F}(B - 1/6)(B - 1/3)^2 \quad (O.65b)$$

et les vecteurs propres sont respectivement :

$$E_{\lambda_1} = [1, B] \tag{O.66a}$$

$$E_{\lambda_2} = [1, -4/3B] \tag{O.66b}$$

Il s'agit par conséquent d'un point selle, loin du domaine de réalisabilité puisque  $III_\infty > 0.25$ . Les valeurs propres associées aux points  $F_\infty = 0$  sont :

$$\lambda_1 = 0 \tag{O.67a}$$

$$\lambda_2 = (III_\infty - \frac{2}{27})[27 B_{1F} + B_{2F}(III_\infty - \frac{1}{54})] \tag{O.67b}$$

Etant donné que pour toute valeur de  $III_\infty$ ,  $(III_\infty - \frac{2}{27}) < 0$ , ces points sont instables si et seulement si  $27 B_{1F} + B_{2F}(III_\infty - \frac{1}{54}) < 0$ . Il suffit alors de choisir  $B < -\frac{1}{486}$  pour que la valeur propre soit positive sur l'ensemble de points asymptotiques du domaine de réalisabilité.

Ce type de choix présente l'avantage de réduire considérablement la difficulté de localisation des points fixes, mais rend la ligne  $F = 0$  singulière. Toute condition initiale rigoureusement bidimensionnelle ne peut évoluer vers un autre état.

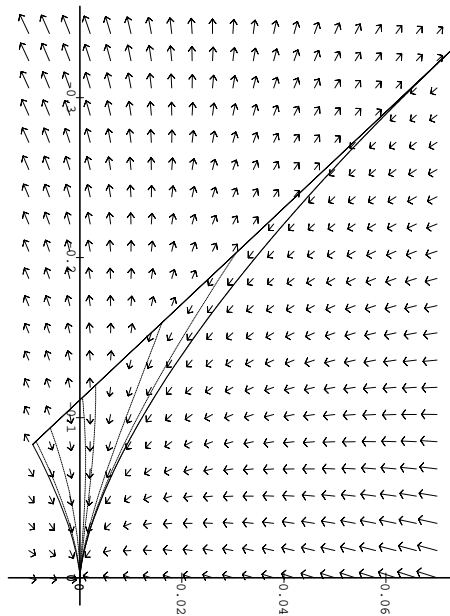


FIG. O.5: *Modèle pour  $B = -1$ .*

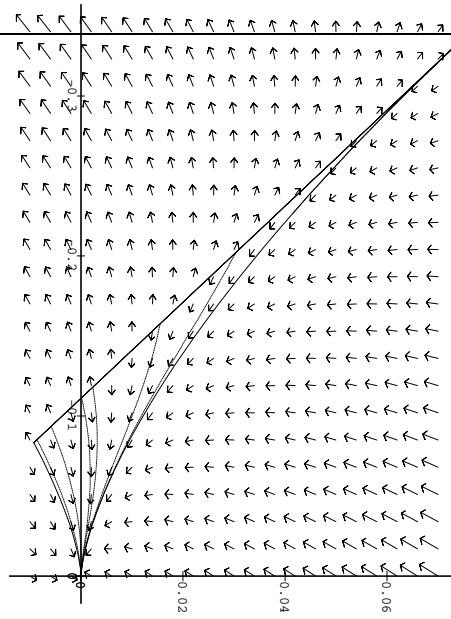


FIG. O.6: Modèle pour la limite  $B = -2$ .

### O.3.5 Fonctionnelle incomplète

L'augmentation importante du nombre de point fixes pour le modèle quadratique incite à ne conserver dans la fonctionnelle que le terme matriciel linéaire en fonction du tenseur d'anisotropie, c'est-à-dire  $b_{ij}$ . Ceci revient à choisir  $B_2 = 0$ . Il est intéressant de regarder le type d'évolution qu'apporte le terme quadratique en comparant le comportement du modèle fonctionnel linéaire au modèle présenté en III.1.3. L'équation de transport de  $F$  s'écrit :

$$\frac{dF}{d\sigma} = 18[F\frac{2}{3}B_1 + 2(\frac{1}{3} + II)B_1] \quad (O.68)$$

soit encore :

$$\frac{dF}{d\sigma} = 18[(2II + 9III)B_1] \quad (O.69)$$

Par conséquent, pour que la condition de réalisabilité bidimensionnelle soit satisfaite, il est nécessaire que :

$$B_1 \rightarrow 0, F \rightarrow 0 \quad (O.70)$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$B_1 = F B_{1F} \quad (O.71)$$

Dans ce cas le système des invariants s'écrit :

$$\frac{dII}{d\sigma} = [2 B_{1F} II (1 + 9 II + 27 III)] \quad (O.72a)$$

$$\frac{dIII}{d\sigma} = [3 B_{1F} II (1 + 9 II + 27 III)] \quad (O.72b)$$

Il est clair par conséquent que les points fixes sont :

- le point isotrope
- tout couple  $(II_\infty, III_\infty)$  tel que  $(1 + 9 II_\infty + 27 III_\infty) = 0$

Le point fixe isotrope est stable si et seulement si

$$B_{1F} < 0 \quad (O.73)$$

puisque les valeurs propres de la matrice Jacobienne sont :

$$\lambda_1 = 2 B_{1F} \quad (O.74a)$$

$$\lambda_2 = 3 B_{1F} \quad (O.74b)$$

Les autres points ont pour valeurs propres associées :

$$\lambda_1 = 0 \quad (O.75a)$$

$$\lambda_2 = 27 B_{1F} (III_\infty, \frac{2}{27}) \quad (O.75b)$$

Il est clair que pour l'ensemble des points réalisables de ces point asymptotiques, l'une des valeurs propres associées est nulle, et l'autre positive. Ce point est donc instable.

La différence majeure entre le modèle linéaire et le modèle quadratique réside dans l'incapacité du modèle linéaire d'infléchir le taux de décroissance de la turbulence avec  $III$ . Cette différence sera plus ou moins grande selon le choix de  $B_{2F}$ . Le système linéaire n'admet, en dehors de la ligne bidimensionnelle qu'un seul point fixe, contrairement au modèle quadratique. Cependant, un choix judicieux du rapport entre les inconnues du modèle peut permettre de rejeter ce point suffisamment loin de la carte des invariants pour qu'il n'influence pas directement le comportement de la solution à l'intérieur du domaine.

## O.4 Tests des formulations et commentaires

Après avoir regardé le comportement qualitatif du système des invariants sur l'ensemble du domaine de réalisabilité, il est intéressant de comparer de façon plus locale la capacité de prédiction du modèle comparativement aux modèles classiques sur des situations pour lesquelles on possède également des mesures expérimentales. Ces dernières permettent dans un premier temps d'ajuster les constantes du modèle sur une situation particulière.

Le modèle linéaire LIN possède une seule constante, qui a été ajustée aux expériences de Choi et Lumley [25] en distorsion plane et de l'expérience de contraction de Le Penven, Gence et Comte-Bellot [104], de la façon suivante :

$$B_{1F} = B_{1pp} + \text{signe}(III) B_{1pm} \quad (O.76)$$

avec

$$B_{1pp} = 1.40 \quad (O.77a)$$

$$B_{1pm} = 0.879 \quad (O.77b)$$



Le modèle quadratique correspondant QUAD possède réellement deux constantes, qui sont calibrées sur les mêmes situations initiales :

$$B_{1pp} = -2.20 \quad (O.78a)$$

$$B_{1pm} = 1.40 \quad (O.78b)$$

$$B_{2pp} = -5.73 \quad (O.78c)$$

$$B_{2pm} = 7.29 \quad (O.78d)$$

Les comportements de ces expressions sont comparés aux comportements de modèles classiques, dont les expressions sont rappelées ci-dessous. Les modèles sont de la forme :

$$\Phi_{ij} = \beta_1^S b_{ij} + \beta_2^S D b_{,ij}^2 \quad (O.79)$$

Le modèle de Rotta [122], linéaire, est le plus populaire des modèles classiques. Il est adapté au cas de turbulences faiblement anisotrope. Il propose :

$$\beta_1^S = -3.0 \quad \beta_1 = \beta_2^S = 0 \quad (O.80)$$

Le modèle de Sarkar et Speziale [124] est non-linéaire. Il a été développé en 1989 sur l'étude du comportement dynamique des équations pour les invariants, comme généralisation du modèle de Rotta. La réalisabilité y a été imposée au sens de Pope - réalisabilité dite au sens faible - par la relation entre les constantes  $\beta_1^S$  et  $\beta_2^S$ . Il s'écrit :

$$\beta_1^S = -C_1 \quad \beta_1 = \beta_2^S = -3(C_1 - 2) \quad (O.81)$$

avec  $C_1 = 3.4$ . Ce modèle se révèle performant pour saisir l'évolution à partir d'un état d'élongation ou de contraction.

Le modèle de Yamamoto et Arakawa [179], développé en 1991 se présente comme une extension du modèle de Sarkar et Speziale, dans lequel la constante  $\beta_1^S$ , a été construite comme fonction des invariants  $II$  et  $III$ , pour mieux reproduire les expériences de Choi et Lumley et de Le Penven, Gence et Comte-Bellot, lorsque  $III$  est soit positif soit négatif, et y ajuster le taux de décroissance de la turbulence. Il s'écrit :

$$\beta_1^S = -2 + 12 F(-0.65 II^{0.4} + \text{signe}(III) |III|^{0.45}) \quad \beta_1 = \beta_2^S = 3(\beta_1 + 2) \quad (O.82)$$

Les calculs sont effectués dans l'espace des phases ( $II, III$ ) . Le temps caractéristique est le temps adimensionnel  $\sigma$ . La méthode numérique utilisée est une méthode de Runge-Kutta à quatre pas, du second ordre en temps. Le pas de temps est pour chaque calcul identique, puisque le temps est adimensionnel.

D'une façon générale, les modèles les plus simples restituent assez bien le parcours de la carte des invariants, du moins dans son ensemble. Un modèle linéaire n'est bien sûr pas parfait, mais la prise en compte du caractère non-linéaire du retour à l'isotropie par les moyens présentés précédemment introduit des phénomènes supplémentaires à la physique et dont l'influence n'est pas nécessairement négligeable. La modélisation à grand nombre de Reynolds du retour à l'isotropie par les techniques classiques de fonctionnelles isotropes est confrontée en résumé à deux difficultés :

- la modélisation correcte d'un retour à l'isotropie à partir de solutions initiales à la fois de type extension et de type contraction.

- la modélisation du comportement de l'écoulement pour un état initial fortement anisotrope.

Le premier point est la plupart du temps obtenu par correction d'un modèle particulier conformément à une base de données expérimentales. Cette correction *a posteriori* est optimisée pour rendre les non-linéarités parasites négligeables.

Le second point suppose, par extension de ce qui est observé au voisinage de l'isotropie, que le taux de décroissance de la turbulence est d'autant plus élevé que la quadrique associée au tenseur de Reynolds est de type disque, et que le comportement global de l'écoulement est de même nature que pour de faibles anisotropies.

A cette fin, l'apport principal d'une fonctionnelle complète, c'est-à-dire quadratique en fonction du tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds, est de permettre cet ajustement du taux de décroissance de la turbulence.

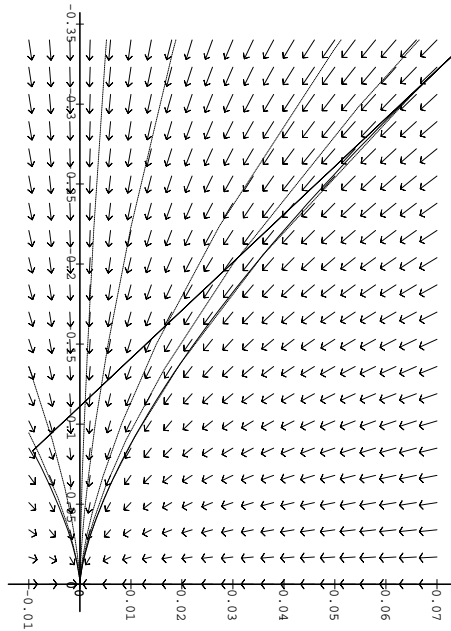


FIG. O.7: *Rotta*

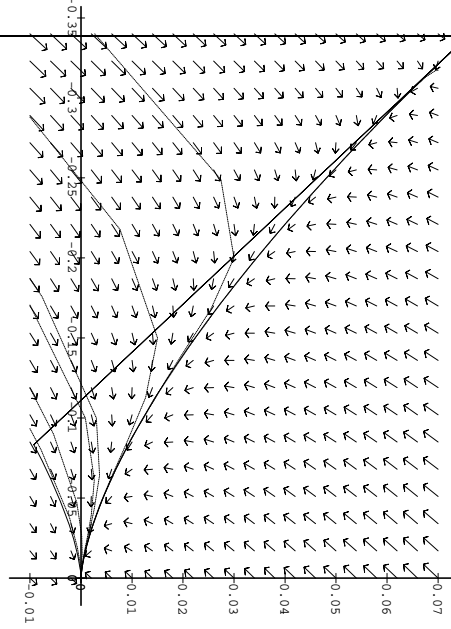


FIG. O.8: *Sarkar et Speziale*

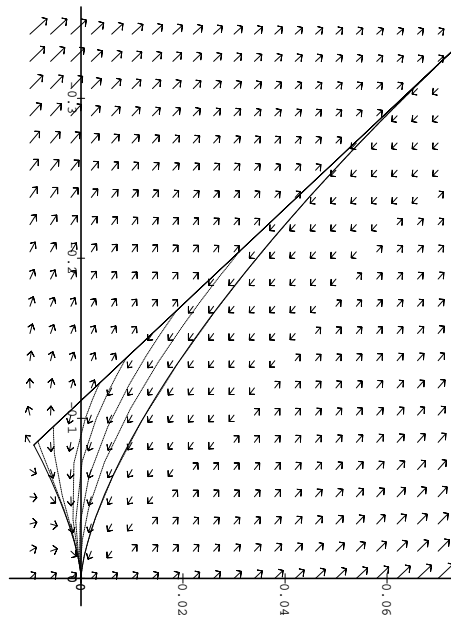


FIG. O.9: *Yamamoto et Arakawa*

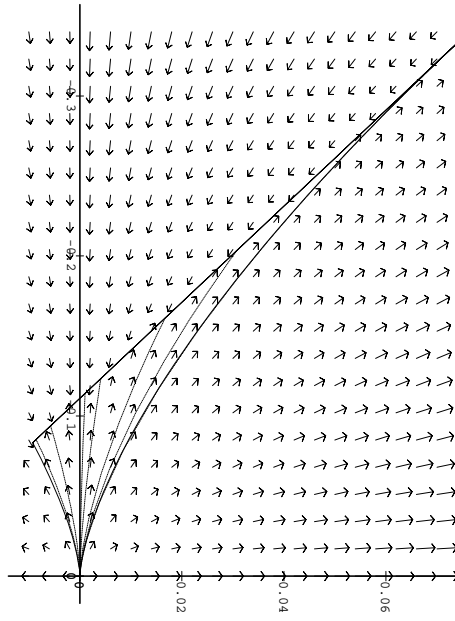


FIG. O.10: *Modèle LIN*

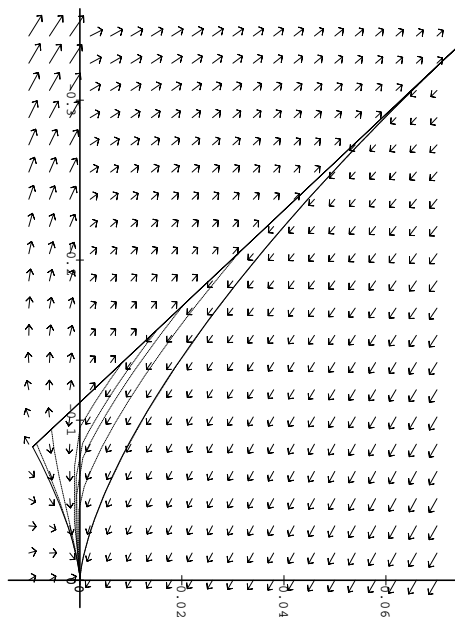


FIG. O.11: *Modèle QUAD*



---

## Annexe P

# Matrice de passage de $X_{27}$ à $Y_{16}$

Cette annexe présente les contraintes de base du tenseur d'ordre quatre  $X_{ijpq}$  à l'aide d'une matrice de passage.

### P.1 Vecteurs de base

*A priori*, sans vérifier aucune propriété particulière, le tenseur  $X_{ijpq}$  possède 81 composantes. La vérification des contraintes de base, formées par la symétrie des deux derniers indices, due à la relation d'incompressibilité et par la symétrie des deux premiers indices, conduit à ne retenir que 27 composantes indépendantes. Il s'agit des scalaires constituant le vecteur suivant :

$$X_{27} = [ \begin{array}{cccccccccc} X_{1111}, & X_{1112}, & X_{1113}, & X_{1122}, & X_{1123}, & X_{1133}, & X_{1211}, & X_{1212}, & X_{1213}, \\ X_{1222}, & X_{1223}, & X_{1233}, & X_{1311}, & X_{1312}, & X_{1322}, & X_{2211}, & X_{2212}, & X_{2213}, \\ X_{2222}, & X_{2223}, & X_{2233}, & X_{2311}, & X_{2312}, & X_{2322}, & X_{3311}, & X_{3312}, & X_{3322} \end{array} ]$$

Lorsqu'à ces conditions de symétries et d'incompressibilité s'ajoute celle de normalisation sur  $R_{ij}$  et  $Y_{pq}$ , le nombre de composantes indépendantes de  $X_{ijpq}$  n'est plus que de 16. Ce choix permet de conserver les équations de transport des tenseurs d'ordre deux dans le modèle homogène et incompressible. Les équations de transport retenues sont celles formant le vecteur :

$$Y_{16} = [ \begin{array}{cccccccccc} R_{11}, & R_{22}, & R_{33}, & R_{12}, & R_{13}, & R_{23}, \\ X_{1111}, & X_{1112}, & X_{1113}, & X_{1122}, & X_{1123}, & X_{1211}, & X_{1212}, & X_{1222}, \\ X_{1311}, & X_{1312}, & X_{1322}, & X_{2212}, & X_{2213}, & X_{2222}, & X_{2311}, & X_{2322}, \\ Y_{11}, & Y_{33}, & Y_{12}, & Y_{13}, & Y_{23} \end{array} ]$$

Le passage d'un vecteur à l'autre s'obtient en appliquant la relation de normalisation sur le système  $X_{27}$ , dans la base de  $Y_{16}$ . Soit  $P$  la matrice de passage, définie par :

$$X_{27} = P Y_{16}$$

Le calcul de cette matrice a été effectué par le logiciel Maple V.2.

### P.2 Matrice de passage

La matrice de passage de la base des variables indépendantes  $Y_{16}$  à la base  $X_{27}$  s'écrit :



---

## Annexe Q

# Comparaison du modèle rapide de X27 avec le modèle de Johansson

Cette annexe commente le choix des coefficients de la fonctionnelle (JO) proposée par Johansson [63] par rapport aux contraintes de base. Son influence est également estimée en fonction de la calibration effectuée, et comparée au modèle X27. Les fonctionnelles sont tensoriellement identiques (7.49) et sont mises sous la même forme pour faciliter les comparaisons.

### Q.1 Rappel des contraintes de base

Le système des contraintes de base satisfaisant les symétries indicielles s'écrit pour la contrainte d'incompressibilité :

$$\frac{1}{15}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + \frac{1}{15}c_5 + \frac{1}{15}c_6 = 0 \quad (Q.1a)$$

$$\frac{2}{15}c_6 + c_8 + \frac{7}{15}c_{10} + c_{15} = 0 \quad (Q.1b)$$

$$c_{11} + c_{12} + 2c_{14} + 7c_{15} = 0 \quad (Q.1c)$$

$$\frac{1}{15}c_3 + \frac{7}{15}c_5 + c_7 + \frac{1}{15}c_9 + c_{14} = 0 \quad (Q.1d)$$

$$\frac{2}{15}c_5 + c_7 + \frac{7}{15}c_9 + c_{16} = 0 \quad (Q.1e)$$

$$\frac{1}{15}c_4 + \frac{7}{15}c_6 + c_8 + \frac{1}{15}c_{10} + c_{14} = 0 \quad (Q.1f)$$

$$c_{11} + c_{13} + 2c_{14} + 7c_{16} = 0 \quad (Q.1g)$$

et pour la normalisation :

$$\frac{1}{3}c_1 + \frac{2}{15}c_2 + c_7 + c_8 + \frac{1}{15}c_9 + \frac{1}{15}c_{10} = 0 \quad (Q.2a)$$



$$\frac{7}{15}c_2 + \frac{1}{15}c_9 + \frac{1}{15}c_{10} = 0 \quad (Q.2b)$$

$$\frac{1}{3}c_3 + \frac{4}{15}c_5 + c_{12} = 0 \quad (Q.2c)$$

$$\frac{1}{3}c_4 + \frac{4}{15}c_6 + c_{13} = 0 \quad (Q.2d)$$

$$\frac{7}{15}c_5 + \frac{2}{15}c_9 + c_{15} = 0 \quad (Q.2e)$$

$$\frac{7}{15}c_6 + \frac{2}{15}c_{10} + c_{16} = 0 \quad (Q.2f)$$

$$7c_7 + \frac{3}{5}c_9 + c_{11} = 0 \quad (Q.2g)$$

$$7c_8 + \frac{3}{5}c_{10} + c_{11} = 0 \quad (Q.2h)$$

$$7c_{12} + 4c_{15} - 1 = 0 \quad (Q.2i)$$

$$7c_{13} + 4c_{16} = 0 \quad (Q.2j)$$

$$7c_{14} + 2c_{15} + 2c_{16} = 0 \quad (Q.2k)$$

La limite isotrope est satisfaite lorsque :

$$-\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{3}c_5 - \frac{1}{3}c_6 - \frac{1}{6}c_9 - \frac{1}{6}c_{10} + \frac{1}{4}c_{12} + \frac{1}{4}c_{13} - \frac{3}{2}c_{14} - c_{15} - c_{16} - \frac{1}{28} = 0 \quad (Q.3a)$$

$$-\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{6}c_3 - \frac{1}{6}c_4 - 5c_7 - 5c_8 - \frac{1}{3}c_9 - \frac{1}{3}c_{10} - c_{11} - 2c_{12} - 2c_{13} + 2c_{14} + \frac{3}{14} = 0 \quad (Q.3b)$$

## Q.2 Résolution des contraintes de base

La résolution du système des contraintes de base conduit à exprimer l'ensemble des coefficients de la fonctionnelle en fonction d'un seul paramètre. Soit  $c_{15}$  le coefficient indéterminé :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -\frac{270}{49}c_{15} - \frac{19}{147} & c_5 &= -\frac{45}{49}c_{15} + \frac{5}{147} & c_9 &= -\frac{30}{7}c_{15} - \frac{5}{42} & c_{13} &= -\frac{4}{7}c_{15} - \frac{4}{315} \\
 c_2 &= \frac{60}{49}c_{15} + \frac{13}{588} & c_6 &= -\frac{45}{49}c_{15} - \frac{11}{294} & c_{10} &= -\frac{30}{7}c_{15} - \frac{1}{28} & c_{14} &= -\frac{4}{7}c_{15} - \frac{2}{315} \\
 c_3 &= \frac{120}{49}c_{15} - \frac{67}{147} & c_7 &= \frac{55}{49}c_{15} + \frac{127}{4410} & c_{11} &= -\frac{37}{7}c_{15} - \frac{41}{315} & c_{15} &= c_{15} \\
 c_4 &= \frac{120}{49}c_{15} + \frac{10}{147} & c_8 &= \frac{55}{49}c_{15} + \frac{191}{8820} & c_{12} &= -\frac{4}{7}c_{15} + \frac{1}{7} & c_{16} &= c_{15} + \frac{1}{45}
 \end{aligned} \tag{Q.4}$$

Les coefficients de JO sont exprimés également en fonction d'un seul paramètre  $\alpha$ , et s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -650\alpha - \frac{25}{49} & c_5 &= -155\alpha + \frac{3}{49} & c_9 &= -70\alpha - \frac{5}{42} & c_{13} &= -28\alpha - \frac{8}{315} \\
 c_2 &= 160\alpha + \frac{23}{196} & c_6 &= -155\alpha - \frac{13}{98} & c_{10} &= -70\alpha - \frac{1}{28} & c_{14} &= 0 \\
 c_3 &= 600\alpha - \frac{11}{147} & c_7 &= 37\alpha + \frac{61}{1470} & c_{11} &= -\frac{259}{3}\alpha - \frac{41}{315} & c_{15} &= \frac{49}{3}\alpha \\
 c_4 &= 600\alpha + \frac{22}{49} & c_8 &= 37\alpha + \frac{101}{2940} & c_{12} &= -28\alpha + \frac{41}{315} & c_{16} &= \frac{49}{3}\alpha + \frac{1}{45}
 \end{aligned} \tag{Q.5}$$

Le seul degré de liberté retenu dans (Q.4) est directement lié à l'inconnue du modèle JO (Q.5) par  $c_{15} = \frac{49}{3}\alpha$ . Lorsque  $c_{15}$  est remplacé par son expression en fonction de  $\alpha$  dans (Q.4), il vient :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -90\alpha - \frac{19}{147} & c_5 &= -15\alpha + \frac{5}{147} & c_9 &= -70\alpha - \frac{5}{42} & c_{13} &= -\frac{28}{3}\alpha - \frac{4}{315} \\
 c_2 &= 20\alpha + \frac{13}{588} & c_6 &= -15\alpha - \frac{11}{294} & c_{10} &= -70\alpha - \frac{1}{28} & c_{14} &= -\frac{28}{3}\alpha - \frac{2}{315} \\
 c_3 &= 40\alpha - \frac{67}{147} & c_7 &= \frac{55}{3}\alpha + \frac{127}{4410} & c_{11} &= -\frac{259}{3}\alpha - \frac{41}{315} & c_{15} &= \frac{49}{3}\alpha \\
 c_4 &= 40\alpha + \frac{10}{147} & c_8 &= \frac{55}{3}\alpha + \frac{191}{8820} & c_{12} &= -\frac{28}{3}\alpha + \frac{1}{7} & c_{16} &= \frac{49}{3}\alpha + \frac{1}{45}
 \end{aligned} \tag{Q.6}$$

Dès lors, il est évident que les deux propositions ne sont pas équivalentes, puisqu'en particulier le modèle X27 conduit à

$$c_{14} = -\frac{28}{3}\alpha - \frac{2}{315} \tag{Q.7}$$

Il est clair que pour que ce coefficient soit nul comme il l'est pour le modèle JO, il est nécessaire et suffisant que

$$\alpha = -\frac{1}{1470} \tag{Q.8}$$

Cela signifie que les coefficients (Q.5) proposés par JO ne satisfont pas le système des contraintes de base. En remplaçant les coefficients de JO par leurs valeurs dans les systèmes

(Q.1a) et (Q.2a), il apparait que la contrainte d'incompressibilité est satisfaite, mais que la normalisation n'est pas vérifiée quel que soit le paramètre  $\alpha$ . Le système se réduit en effet à la relation :

$$\alpha = -\frac{1}{1470} \quad (\text{Q.9})$$

Par conséquent, les modèles X27 et JO ne sont équivalents que pour cette valeur du paramètre  $\alpha$ . Ce n'est cependant pas la valeur retenue par Johansson, pour lequel

$$\alpha = -\frac{1}{200} \quad (\text{Q.10})$$

Le paramètre  $\alpha$  est en effet calibré sur une optimisation numérique d'un calcul de déformation rapide axisymétrique.

Bien qu'ils diffèrent sur la contrainte de normalisation, les modèles X27 et JO satisfont tous deux la limite isotrope.

### Q.3 Vérification de la contrainte de normalisation faible

La contrainte de normalisation satisfaite par le modèle JO est élaborée à partir d'un critère moins contraignant que celui présenté précédemment et qui porte directement sur le tenseur modélisé,  $B_{ijpqmn}$ . Il s'agit de la contrainte de normalisation faible, présentée au chapitre 7. Appliquée au modèle X27, elle conduit aux coefficients suivants :

$$\begin{aligned} c_1 &= -60c_{14} - \frac{1950}{49}c_{15} - \frac{25}{49} & c_7 &= 2c_{14} + \frac{111}{49}c_{15} + \frac{61}{1470} & c_{13} &= -2c_{14} - \frac{12}{7}c_{15} - \frac{8}{315} \\ c_2 &= 15c_{14} + \frac{480}{49}c_{15} + \frac{23}{196} & c_8 &= 2c_{14} + \frac{111}{49}c_{15} + \frac{101}{2940} & c_{14} &= c_{14} \\ c_3 &= 60c_{14} + \frac{1800}{49}c_{15} - \frac{11}{147} & c_9 &= -\frac{30}{7}c_{15} - \frac{5}{42} & c_{15} &= c_{15} \\ c_4 &= 60c_{14} + \frac{1800}{49}c_{15} + \frac{22}{49} & c_{10} &= -\frac{30}{7}c_{15} - \frac{1}{28} & c_{16} &= c_{15} + \frac{1}{45} \\ c_5 &= -15c_{14} - \frac{465}{49}c_{15} - \frac{3}{49} & c_{11} &= -\frac{37}{7}c_{15} - \frac{41}{315} & & \\ c_6 &= -15c_{14} - \frac{465}{49}c_{15} - \frac{13}{98} & c_{12} &= -2c_{14} - \frac{12}{7}c_{15} + \frac{41}{315} & & \end{aligned} \quad (\text{Q.11})$$

Le système possède un degré de liberté supplémentaire, par rapport au système précédent. En remplaçant  $c_{15}$  par l'expression choisie dans JO, il vient :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -60c_{14} - 650\alpha - \frac{25}{49} & c_7 &= 2c_{14} + 37\alpha + \frac{61}{1470} & c_{13} &= -2c_{14} - 28\alpha - \frac{8}{315} \\
 c_2 &= 15c_{14} + 160\alpha + \frac{23}{196} & c_8 &= 2c_{14} + 37\alpha + \frac{101}{2940} & c_{14} &= c_{14} \\
 c_3 &= 60c_{14} + 600\alpha - \frac{11}{147} & c_9 &= -70\alpha - \frac{5}{42} & c_{15} &= \frac{49}{3}\alpha \\
 c_4 &= 60c_{14} + 600\alpha + \frac{22}{49} & c_{10} &= -70\alpha - \frac{1}{28} & c_{16} &= \frac{49}{3}\alpha + \frac{1}{45} \\
 c_5 &= -15c_{14} - 155\alpha - \frac{3}{49} & c_{11} &= -\frac{259}{3}\alpha - \frac{41}{315} & & \\
 c_6 &= -15c_{14} - 155\alpha - \frac{13}{98} & c_{12} &= -2c_{14} - 28\alpha + \frac{41}{315} & &
 \end{aligned} \tag{Q.12}$$

Il est immédiat que les coefficients de JO (Q.5) s'identifient avec la solution donnée par la normalisation faible (Q.12) lorsque  $c_{14} = 0$ . Le modèle formé avec ces coefficients, (Q.12), ne satisfait la contrainte de normalisation classique, que lorsque :

$$c_{14} = -\frac{28}{3}\alpha - \frac{2}{315} \tag{Q.13}$$

Cette contrainte supplémentaire permet bien de retrouver le système (Q.6) vérifiant l'ensemble des contraintes de base. Elle permet également d'établir que le système des coefficients de JO et celui des coefficients de X27 découlent bien des mêmes principes, le second étant élaboré avec des critères plus contraignants que le premier, puisqu'il porte directement sur le tenseur inconnu et non sur l'équation d'évolution dans laquelle il intervient.

Les remarques précédentes permettent de choisir  $c_{14}$  plutôt que  $c_{15}$  comme degré de liberté pour le modèle X27. La correspondance avec  $\alpha$ , le degré de liberté de JO est immédiate et donnée par la relation (Q.13), soit :

$$\alpha = -\frac{1}{1470} - \frac{3}{28}c_{14} \tag{Q.14}$$

## Q.4 Remarque sur la calibration des modèles

Rappelons que la calibration du modèle X27 a été effectuée en deux étapes. La première étape consiste en un ajustement du coefficient par rapport à une solution de distorsion rapide. Il s'agit de la solution analytique de déformation axisymétrique, appliquée à une turbulence initialement isotrope. Son expression est développée en série de Taylor au voisinage des temps petits, jusqu'à l'ordre deux. Le modèle pour  $B_{ijpqmn}$ , dans lequel les arguments de la fonctionnelle proviennent de la solution de distorsion rapide, est également développé au second ordre. L'accord des développements s'effectue sur l'ordre deux lorsque :

$$c_{14} = \frac{4}{77} \tag{Q.15}$$

Ceci correspond à

$$\alpha = -\frac{101}{16170}$$

soit approximativement

$$\alpha \simeq -0.0062$$

Cette proposition de calibration est ensuite modifiée numériquement par un calcul rapide dans les mêmes conditions, où un accord plus global est recherché, notamment par rapport au comportement asymptotique. L'optimisation numérique effectuée conduit à retenir :

$$c_{14} \simeq 0.04 \tag{Q.16}$$

ce qui correspond à

$$\alpha \simeq -0.00496$$

La calibration proposée dans le modèle JO pour  $\alpha$ , est la suivante :

$$\alpha = -\frac{1}{200} \quad \text{soit} \quad \alpha \simeq -0.005 \tag{Q.17}$$

ce qui correspond à

$$c_{14} = \frac{127}{3150} \quad \text{soit} \quad \alpha \simeq 0.0403$$

et reste très voisin de la calibration précédente, ce qui montre, compte tenu de l'approximation de la calibration numérique, que ces choix traduisent les mêmes phénomènes.

Afin de quantifier l'influence du choix de la contrainte de normalisation faible pour les coefficients de la fonctionnelle, les modèles X27 et JO ont été comparés dans des cas standards de turbulence homogène incompressible, en approximation de distorsion rapide, et pour une calibration équivalente. Le coefficient de X27 est choisi de façon à vérifier la relation (Q.13). Le modèle de JO propose  $\alpha = -\frac{1}{200}$ , valeur utilisée ici pour les deux modèles, et qui correspond pour X27 à  $c_{14} = \frac{127}{3150}$ . Les configurations testées sont les cas de contraction axisymétrique, déformation plane et cisaillement en présence de rotation. Les conditions initiales sont isotropes, connues analytiquement sur le plan spectral. Les calculs ne montrent aucune différence sensible si bien que le tracé des évolutions des différents tenseurs est superflu. Le fait que JO ne satisfasse pas la contrainte de normalisation forte n'est donc pas d'une grande importance quant à la prédiction du modèle sur les cas tests rapides classiques. Ceci signifie que la condition sur les équations de transport, utilisée pour obtenir les coefficients du modèle JO à partir des contraintes d'incompressibilité et de symétries est suffisante pour assurer d'une certaine manière la normalisation de  $X_{ijpq}$  par rapport à ses contractions  $R_{ij}$  et  $Y_{pq}$ . Il faut cependant rappeler que cette condition de normalisation faible est facilement applicable parce que le modèle choisi est linéaire. Son fondement est également cohérent avec le cas de la turbulence homogène, mais n'a pas de sens en dehors du cadre de l'approximation de distorsion rapide d'une turbulence homogène.

---

## Annexe R

# Règles de transformation dans la base covariante physique

Cette annexe détaille l'écriture des équations d'un modèle de type  $R_{ij} - \varepsilon$  dans la base covariante adimensionnelle associée à un système de coordonnées curvilignes. Dans un premier paragraphe sont données les principales règles de transformation, sans aucune hypothèse sur le système de coordonnées physiques, ainsi que l'expression des opérateurs nécessaires à l'écriture d'un modèle classique du second ordre. Le second paragraphe particularise ces différentes expressions au cas d'un système de coordonnées orthogonales et fournit l'expression des termes convectifs des équations du mouvement. Les termes de diffusion du tenseur de Reynolds sont exprimés de façon exacte puis en adoptant un modèle de type Hanjalic et Launder [55]. L'application de ces termes au cas d'un système de coordonnées cylindrique fait l'objet du troisième paragraphe et simplifie considérablement les équations. Enfin, la transformation dans un système de coordonnées curvilignes général est effectuée en mettant en évidence les différences avec les expressions obtenues après transformation à partir d'un système de référence cartésien.

### R.1 Cas d'une base covariante physique quelconque

Soit un système de coordonnées curvilignes  $[X^i]$ . La base covariante associée est dimensionnelle et définie par la métrique :

$$g_i = \frac{\partial R}{\partial X^i} \quad (\text{R.1})$$

où  $R$  désigne un vecteur de coordonnées. Cette base peut être normée à l'aide du tenseur métrique covariant  $g_{ij}$ , ce qui introduit la base covariante physique, notée :

$$g^{(i)} = \frac{g_i}{\sqrt{g_{ii}}} \quad (\text{R.2})$$

Par la suite, on notera  $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ . La base contravariante physique associée est alors reliée à la base contravariante  $g^i$  par :

$$g^{(i)} = \sqrt{g_{ii}} g^i \quad (\text{R.3})$$

et satisfait la relation classique :

$$g^{(i)} g^{(j)} = \delta_i^j \quad (\text{R.4})$$

Les composantes physiques contravariantes seront notées d'un exposant entre parenthèses. Dans le cas du vecteur vitesse, elles s'écrivent :

$$U = U^{(i)} g_{(i)} \quad (R.5a)$$

$$\text{soit } U^{(i)} = U g^{(i)} \quad (R.5b)$$

### R.1.1 Définition du symbole de Christoffel physique

La dérivée partielle du vecteur contravariant s'écrit dans la base contravariante à l'aide du symbole de Christoffel, dont l'expression, symétrique suivant les indices inférieurs, a été rappelée au chapitre 9 :

$$\frac{\partial g_i}{\partial X^j} = \Gamma_{ij}^k g_k \quad (R.6)$$

Ici le vecteur de base est  $g_{(i)}$  et sa dérivée par rapport aux coordonnées curvilignes s'écrit :

$$\frac{\partial g_{(i)}}{\partial X^j} = \left[ \frac{h_k}{h_i} \Gamma_{ij}^k - \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial X^j} \delta_i^k \right] g_{(k)} \quad (R.7)$$

Nash et Patel [100] introduisent les paramètres de courbure  $K_{ij}$  définis par :

$$K_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \frac{\partial h_i}{\partial X^j} \quad (R.8)$$

Il est clair qu'ils ne sont pas symétriques, contrairement aux symboles de Christoffel classiques. Il vient :

$$\frac{1}{h_j} \frac{\partial g_{(i)}}{\partial X^j} = \left[ \frac{h_k}{h_i h_j} \Gamma_{ij}^k - K_{ij} \delta_i^k \right] g_{(k)} \quad (R.9)$$

ce qui conduit à introduire le symbole de Christoffel de l'espace physique par l'expression :

$$\frac{1}{h_j} \frac{\partial g_{(i)}}{\partial X^j} = \Gamma_{(ij)}^{(k)} g_{(k)} \quad (R.10)$$

Bien que sa définition soit analogue au cas dimensionnel, il faut noter que la symétrie des indices  $i, j$  n'est plus satisfaite par  $\Gamma_{(ij)}^{(k)}$  étant donné que  $K_{ij}$  n'est pas symétrique. Il va cependant permettre d'exprimer les dérivées contravariantes et donc les gradients physiques de façon relativement simple et similaire au cas dimensionnel.

### R.1.2 Gradients et dérivées covariantes physiques

#### Scalaire

Le gradient physique d'un scalaire est défini par :

$$\nabla_{(k)} \phi = \nabla \phi g_{(k)} \quad (R.11)$$

et sera également noté par

$$\phi_{(,k)} = \nabla_{(k)} \phi \quad (R.12)$$

Il s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \nabla_{(k)} \phi &= \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial X^p} g^p g_k \\ &= \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial X^k} \end{aligned} \quad (R.13)$$

puisque  $g^p g_k = \delta_k^p$ .

### Vecteur

Dans le cas d'un vecteur  $T$ , la démarche est la même, qui conduit à chercher les composantes contravariantes de

$$\nabla_{(k)}T = \nabla T g^{(k)} \quad (\text{R.14})$$

Il faut noter que lorsque  $T$  est exprimé dans la base covariante, les composantes du gradient sont mixtes et définies par :

$$\nabla T = \nabla_{(k)}T^{(i)} g_{(i)} \otimes g^{(k)} \quad (\text{R.15})$$

ce qui permet de noter la dérivée covariante des composantes contravariantes de la façon suivante :

$$\nabla_{(k)}T^{(i)} = T^{(i)}_{\cdot(k)} \quad (\text{R.16})$$

où le point précise qu'il s'agit d'une composante physique, mixte à droite. La dérivée covariante sera par la suite toujours définie en respectant cet ordre.

L'expression de la dérivée covariante physique d'un vecteur s'obtient de façon immédiate en dérivant le vecteur :

$$\frac{\partial T}{\partial X^j} = h_i \left[ \frac{\partial}{\partial X^j} \left( \frac{T^{(i)}}{h_i} \right) + \frac{1}{h_n} \Gamma_{jn}^i T^{(n)} \right] g_{(i)} \quad (\text{R.17})$$

Par conséquent, en développant, il vient :

$$\nabla_{(j)}T^{(i)} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^j} + \frac{h_i}{h_j h_n} \Gamma_{jn}^i T^{(n)} - K_{ij} T^{(i)} \quad (\text{R.18})$$

En introduisant le symbole de Christoffel physique, la dérivée covariante physique s'écrit :

$$\nabla_{(j)}T^{(i)} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^j} + \Gamma_{(nj)}^{(i)} T^{(n)} \quad (\text{R.19})$$

expression analogue à la définition classique.

### Tenseur du second ordre

De façon immédiate, puisque la dérivée covariante est définie par :

$$\nabla T = \nabla_{(k)}T^{(ij)} g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(k)} \quad (\text{R.20})$$

il est clair que

$$\nabla_{(k)}T^{(ij)} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^k} + \Gamma_{(nk)}^{(i)} T^{(nj)} + \Gamma_{(nk)}^{(j)} T^{(in)} \quad (\text{R.21})$$

sans aucune hypothèse de symétrie du tenseur  $T$ . L'expression de la dérivée covariante d'un tenseur d'ordre quelconque est ainsi facilement accessible.

### R.1.3 Divergences

L'expression de la divergence est immédiate dans la mesure où il s'agit de la trace du gradient.



### Vecteur

Dans le cas d'un vecteur, il vient :

$$\nabla_{(i)} T^{(i)} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^i} + \Gamma_{(ni)}^{(i)} T^{(n)} \quad (\text{R.22})$$

avec sommation sur  $i$ . La définition du symbole de Christoffel physique permet d'écrire :

$$\Gamma_{(ni)}^{(i)} = \frac{1}{h_n} \Gamma_{ni}^i - K_{ni} \delta_i^n \quad (\text{R.23})$$

Le symbole de Christoffel classique est en outre relié au Jacobien  $J$  de la transformation par :

$$\Gamma_{ni}^i = \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial X^n} \quad (\text{R.24})$$

Par conséquent,

$$\Gamma_{(ni)}^{(i)} = \frac{1}{h_n} \frac{1}{J} \frac{\partial J}{\partial X^n} - K_{nn} \quad (\text{R.25})$$

Le symbole  $K_{nn}$  s'exprime en fonction de  $h_n$ , ce qui permet de regrouper l'ensemble sous la forme conservative suivante :

$$\Gamma_{(ni)}^{(i)} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^n} \left( \frac{J}{h_n} \right) \quad (\text{R.26})$$

La divergence physique du tenseur peut s'écrire par conséquent, soit sous une forme mettant en évidence la différence avec l'expression classique :

$$\nabla_{(i)} T^{(i)} = \frac{1}{h_i} \frac{1}{J} \frac{\partial (J T^{(i)})}{\partial X^i} - K_{ii} T^{(i)} \quad (\text{R.27})$$

soit sous une forme conservative :

$$\nabla_{(i)} T^{(i)} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J T^{(i)}}{h_i} \right) \quad (\text{R.28})$$

### Tenseur du second ordre

La divergence physique des composantes physiques d'un tenseur du second ordre s'écrit immédiatement :

$$\nabla_{(j)} T^{(ij)} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^j} + \Gamma_{(nj)}^{(i)} T^{(nj)} + \Gamma_{(nj)}^{(j)} T^{(in)} \quad (\text{R.29})$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme :

$$\nabla_{(j)} T^{(ij)} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^j} \left( \frac{J T^{(ij)}}{h_j} \right) + \Gamma_{(nj)}^{(i)} T^{(nj)} \quad (\text{R.30})$$

### R.1.4 Laplaciens

#### Scalaire

Par définition le Laplacien est la divergence du gradient, soit :

$$\Delta\phi = \text{div}[\text{grad}(\phi)] \quad (\text{R.31})$$

D'après l'expression de la divergence d'un vecteur obtenue précédemment, il vient :

$$\Delta\phi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J \text{grad}^{(i)}(\phi)}{h_i} \right) \quad (\text{R.32})$$

et puisque  $\text{grad}^{(i)}(\phi) = \text{grad}(\phi) g^{(i)}$ , il vient :

$$\Delta\phi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J}{h_i h_j} g^{(ij)} \frac{\partial\phi}{\partial X^j} \right) \quad (\text{R.33})$$

Cette forme conservative peut être développée de façon à faire apparaître les dérivées doubles curvilignes et dans ce cas le Laplacien devient :

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_i h_j} g^{(ij)} \frac{\partial^2\phi}{\partial X^i \partial X^j} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J}{h_i h_j} g^{(ij)} \right) \frac{\partial\phi}{\partial X^j} \quad (\text{R.34})$$

Le terme en facteur de la dérivée première peut être simplifié en utilisant le théorème de Ricci selon lequel la dérivée covariante du tenseur métrique contravariant est nulle.

$$\nabla_{(n)} g^{(ij)} = 0 \quad (\text{R.35})$$

ce qui s'écrit encore dans le cas de la divergence :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J g^{(ij)}}{h_i} \right) = -\Gamma_{(ni)}^{(j)} g^{(in)} \quad (\text{R.36})$$

et le coefficient de la dérivée première dans le Laplacien s'écrit :

$$\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J}{h_i h_j} g^{(ij)} \right) = -\frac{1}{h_j} g^{(in)} [\Gamma_{(ni)}^{(j)} + K_{ji} \delta_n^j] \quad (\text{R.37})$$

En remplaçant le symbole de Christoffel physique par le symbole de Christoffel classique, il vient :

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_i h_j} g^{(ij)} \frac{\partial^2\phi}{\partial X^i \partial X^j} + f^{(k)} \frac{1}{h_k} \frac{\partial\phi}{\partial X^k} \quad (\text{R.38})$$

avec

$$f^{(k)} = -g^{(mn)} \frac{h_k}{h_n h_m} \Gamma_{mn}^k \quad (\text{R.39})$$

L'expression du Laplacien physique d'un scalaire est par conséquent analogue à celle du Laplacien classique.

### Vecteur

Le Laplacien vecteur s'obtient également en évaluant la divergence du gradient du vecteur, tenseur du second ordre. En exprimant le gradient en fonction de la dérivée physique covariante, il vient :

$$\text{grad}(T) = \nabla_{(j)} T^{(i)} g_{(i)} \otimes g^{(j)} \quad (R.40a)$$

$$= \nabla_{(j)} T^{(i)} g^{(jn)} g_{(i)} \otimes g_{(n)} \quad (R.40b)$$

L'expression de la divergence de ce tenseur conduit alors au Laplacien vectoriel :

$$\Delta T = \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^n} \left( \frac{J}{h_n} \nabla_{(j)} T^{(i)} g^{(jn)} \right) + \Gamma_{(kn)}^{(i)} g^{(jn)} \nabla_{(j)} T^{(k)} \right] g_{(i)} \quad (R.41)$$

En explicitant la dérivée physique covariante, l'expression suivante de la n<sup>e</sup> composante physique du Laplacien vectoriel s'écrit, après développement, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta T^{(n)} &= \frac{1}{h_p h_q} g^{(pq)} \frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial X^p \partial X^q} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial X^k} f^{(k)} \\ &+ \frac{2}{h_k} g^{(kp)} \Gamma_{(mp)}^{(n)} \frac{\partial T^{(m)}}{\partial X^k} \\ &+ Q_{(m)}^{(n)} T^{(m)} \end{aligned} \quad (R.42)$$

avec

$$f^{(k)} = -g^{(mn)} \frac{h_k}{h_n h_m} \Gamma_{mn}^k \quad (R.43a)$$

$$Q_{(m)}^{(n)} = \left[ \frac{1}{h_p} \frac{\partial (g^{(kp)} \Gamma_{(mk)}^{(n)})}{\partial X^p} + g^{(kp)} \Gamma_{(mk)}^{(n)} \Gamma_{(pq)}^{(q)} + g^{(kp)} \Gamma_{(qp)}^{(n)} \Gamma_{(mk)}^{(q)} \right] \quad (R.43b)$$

Les regroupements qui sont choisis ici permettent d'obtenir des expressions sous forme simple dans le cas d'un système de coordonnées orthogonales, ce que nous verrons par la suite. Ils mettent aussi en évidence le fait que les deux premiers termes sont calculés avec le même opérateur que pour le Laplacien scalaire. Il s'agit du Laplacien de la n<sup>e</sup> composante physique du vecteur  $T$ . Dans toute la suite, cet opérateur sera noté  $\nabla^2$ .

### R.1.5 Dérivée seconde covariante

Les opérateurs qui ont été calculés jusqu'à présent sont les seuls opérateurs nécessaires dans le cadre de modèles à deux équations de transport, de type  $K - \varepsilon$ . Les équations des modèles du second ordre nécessitent en outre d'évaluer des termes diffusifs qui ne sont pas des Laplaciens. Dans l'équation d'évolution du taux de dissipation turbulente, les termes de diffusion sont généralement modélisés par une hypothèse de type gradient. Les termes de diffusion du tenseur de Reynolds sont évalués par la divergence d'un tenseur du troisième ordre. Dans la base covariante physique, les équations exactes s'écrivent en effet :

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U}^{(k)} \nabla_{(k)} \varepsilon = P^\varepsilon - \varepsilon^\varepsilon + T_{(k)}^{\varepsilon(k)} \quad (R.44a)$$

$$\frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + \overline{U}^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(ij)} = P^{(ij)} + \phi^{(ij)} - \varepsilon^{(ij)} + T_{(k)}^{(ijk)} \quad (R.44b)$$

où  $P^\varepsilon$  et  $\varepsilon^\varepsilon$  sont les termes de production et de dissipation de  $\varepsilon$  et  $P^{(ij)}$ ,  $\phi^{(ij)}$  et  $\varepsilon^{(ij)}$  sont respectivement les composantes contravariantes des tenseurs de production, de corrélation pression-déformation et des taux de dissipation. Les deux derniers termes des équations regroupent le transport turbulent, la diffusion de pression et la diffusion visqueuse. L'opérateur  $\nabla_{(k)}$  désigne la dérivée covariante physique. Si les termes de diffusion sont exprimés dans la base covariante, il est immédiat que leur divergence s'écrit :

$$T_{(k)}^{\varepsilon(k)} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{\varepsilon(k)}}{\partial X^k} + \Gamma_{(nk)}^{(k)} T_{(k)}^{\varepsilon(k)} \quad (R.45a)$$

$$T_{(k)}^{(ijk)} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(ijk)}}{\partial X^k} + T^{(ijk)} \Gamma_{(kn)}^{(n)} + T^{(njk)} \Gamma_{(kn)}^{(i)} + T^{(ink)} \Gamma_{(kn)}^{(j)} \quad (R.45b)$$

Aucune hypothèse de symétrie n'a été prise en compte pour le tenseur  $T$ . L'application de ces relations suppose d'avoir écrit le terme de diffusion dans la base covariante. C'est immédiatement le cas lorsqu'une modélisation classique de type gradient est retenue. En effet, les modèles de Daly et Harlow et d'Hanjalic et Launder s'écrivent en notation indicielle et en cartésien de la façon suivante :

$$T_k^\varepsilon = \bar{R}_{nk} \varepsilon_{,n} \quad (R.46a)$$

$$T_{ijk} = \tilde{R}_{in} R_{jk,n} + \tilde{R}_{jn} R_{ik,n} + \bar{R}_{nk} R_{ij,n} \quad (R.46b)$$

avec

$$\tilde{R}_{ij} = C_s \frac{K}{\varepsilon} R_{ij} \quad (R.47a)$$

$$\bar{R}_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \nu \delta_{ij} \quad (R.47b)$$

Dans la base covariante, ces expressions deviennent :

$$T^{\varepsilon(k)} = \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(n)} \varepsilon \quad (R.48a)$$

$$T^{(ijk)} = \tilde{R}^{(in)} \nabla_{(n)} R^{(jk)} + \tilde{R}^{(jn)} \nabla_{(n)} R^{(ik)} + \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(n)} R^{(ij)} \quad (R.48b)$$

Une évaluation explicite de ces termes permet donc d'appliquer les opérateurs de divergence précédents à ces expressions. La situation est différente dans le cas d'un schéma où une partie de ces termes est implicite. Il est en effet nécessaire de mettre en évidence dans ces termes les dérivées croisées et les gradients, qui sont évalués de façon explicite, alors que les dérivées doubles sont implicites. L'opérateur de dérivation  $\nabla$  a jusqu'à présent été appliqué à des composantes contravariantes. Il convient d'en connaître l'expression pour un tenseur mixte, puisque la dérivée covariante conduit à des expressions mixtes à droite, c'est-à-dire dont les premiers indices correspondent à une projection dans la base covariante, et le dernier à une composante covariante.

La connaissance de ces opérateurs permet alors de calculer les termes de diffusion en regroupant les dérivées secondes des dérivées simples. Ils s'écrivent en effet :

$$\nabla_{(k)} T^{\varepsilon(k)} = \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(n)} \varepsilon + \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(k)} (\nabla_{(n)} \varepsilon) \quad (R.49a)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(k)} T^{(ijk)} &= \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \nabla_{(n)} R^{(jk)} + \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} \nabla_{(n)} R^{(ik)} + \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(n)} R^{(ij)} \\ &+ \tilde{R}^{(in)} \nabla_{(k)} (\nabla_{(n)} R^{(jk)}) + \tilde{R}^{(jn)} \nabla_{(k)} (\nabla_{(n)} R^{(ik)}) + \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(k)} (\nabla_{(n)} R^{(ij)}) \end{aligned} \quad (R.49b)$$

Le paragraphe suivant montre un exemple de calcul de dérivée covariante d'une composante mixte avec le tenseur du troisième ordre et le paragraphe qui le suit précise le calcul de la dérivée seconde covariante pour la dissipation et le tenseur de Reynolds. La forme complète des termes de dissipation des équations du second ordre sera précisée plus tard, dans le cas particulier d'un système de coordonnées orthogonales.

### Dérivée covariante d'un tenseur mixte de type $g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(k)}$ .

La procédure d'obtention de cette expression est identique à celle déjà utilisée pour les composantes contravariantes et peut être aisément étendue à n'importe quelle composante mixte. Soit

$$T = T_{..(n)}^{(ij)} g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(n)} \quad (R.50a)$$

$$= T_{..(n)}^{(ij)} g^{(np)} g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g_{(p)} \quad (R.50b)$$

La dérivation conduit à :

$$\begin{aligned} \nabla_{(m)} T &= \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial T_{..(n)}^{(ij)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(km)}^{(i)} T_{..(n)}^{(kj)} + \Gamma_{(km)}^{(j)} T_{..(n)}^{(ik)} \right] g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(n)} \\ &+ \left[ T_{..(n)}^{(ij)} \left( \frac{1}{h_m} \frac{\partial g^{(np)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(km)}^{(p)} g^{(nk)} \right) \right] g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g_{(p)} \end{aligned} \quad (R.51)$$

Le théorème de Ricci permet d'écrire la dérivée du tenseur métrique covariant :

$$\frac{1}{h_m} \frac{\partial g^{(np)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(km)}^{(p)} g^{(nk)} = -\Gamma_{(km)}^{(n)} g^{(kp)} \quad (R.52)$$

ce qui conduit à :

$$\nabla_{(m)} T = \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial T_{..(n)}^{(ij)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(km)}^{(i)} T_{..(n)}^{(kj)} + \Gamma_{(km)}^{(j)} T_{..(n)}^{(ik)} - \Gamma_{(nm)}^{(k)} T_{..(k)}^{(ij)} \right] g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(n)} \quad (R.53)$$

Les composantes sont associées à des termes comprenant le symbole de Christoffel physique, qui sont additionnés à la dérivée curviligne pour les composantes covariante et soustraits pour les composantes contravariantes. Le gradient du tenseur mixte d'ordre trois s'écrit donc :

$$\text{grad}(T) = \nabla_{(m)} T_{..(n)}^{(ij)} g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(n)} \otimes g^{(m)} \quad (R.54)$$

Il est également clair à partir de ces calculs que la dérivée covariante d'une composante covariante d'un vecteur  $T$  s'écrit :

$$\nabla_{(m)} T_{(n)} = \frac{1}{h_m} \frac{\partial T_{(n)}}{\partial X^m} - \Gamma_{(nm)}^{(k)} T_{(k)} \quad (R.55)$$

### Application au calcul des dérivées secondes covariantes

Le calcul de la dérivée seconde covariante d'un scalaire est immédiat avec ces résultats. Il vient :

$$\nabla_{(m)} (\nabla_{(n)} \phi) = \frac{1}{h_m} \frac{\partial (\nabla_{(n)} \phi)}{\partial X^m} - \Gamma_{(nm)}^{(k)} (\nabla_{(k)} \phi) \quad (R.56)$$

soit :

$$\nabla_{(m)}(\nabla_{(n)}\phi) = \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^n \partial X^m} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial X^k} [K_{km} \delta_{kn} + \Gamma_{(nm)}^{(k)}] \quad (\text{R.57})$$

ce qui se simplifie lorsque le symbole de Christoffel physique est remplacé par le symbole de Christoffel classique :

$$\nabla_{(m)}(\nabla_{(n)}\phi) = \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^n \partial X^m} - \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial \phi}{\partial X^k} \Gamma_{nm}^k \quad (\text{R.58})$$

Il faut noter que cette expression est symétrique suivant les indices  $n$  et  $m$ .

Dans le cas d'un vecteur, la dérivée seconde covariante s'écrit :

$$\begin{aligned} \nabla_{(m)}(\nabla_{(n)}T^{(i)}) &= \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial X^n \partial X^m} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^k} \frac{h_k}{h_n h_m} \Gamma_{mn}^k \\ &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial X^n} \Gamma_{(km)}^{(i)} + \frac{1}{h_m} \frac{\partial T^{(k)}}{\partial X^m} \Gamma_{(kn)}^{(i)} \\ &+ T^{(p)} \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(i)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} \right] \end{aligned} \quad (\text{R.59})$$

Le gradient d'un tenseur du second ordre s'écrit :

$$\text{grad}(T) = T_{..(n)}^{(ij)} g_{(i)} \otimes g_{(j)} \otimes g^{(n)} \quad (\text{R.60})$$

avec

$$T_{..(k)}^{(ij)} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^k} + \Gamma_{(nk)}^{(i)} T^{(nj)} + \Gamma_{(nk)}^{(j)} T^{(in)} \quad (\text{R.61})$$

La dérivée covariante de cette expression conduit alors à :

$$\begin{aligned} \nabla_{(m)}(\nabla_{(n)}T^{(ij)}) &= \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 T^{(ij)}}{\partial X^n \partial X^m} - \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^k} \frac{h_k}{h_n h_m} \Gamma_{mn}^k \\ &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial T^{(ik)}}{\partial X^n} \Gamma_{(km)}^{(j)} + \frac{1}{h_m} \frac{\partial T^{(ik)}}{\partial X^m} \Gamma_{(kn)}^{(j)} \\ &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial T^{(kj)}}{\partial X^n} \Gamma_{(km)}^{(i)} + \frac{1}{h_m} \frac{\partial T^{(kj)}}{\partial X^m} \Gamma_{(kn)}^{(i)} \\ &+ T^{(pk)} [\Gamma_{(pn)}^{(i)} \Gamma_{(km)}^{(j)} + \Gamma_{(pm)}^{(i)} \Gamma_{(kn)}^{(j)}] \\ &+ T^{(ip)} \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(j)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(j)} - \Gamma_{(pk)}^{(j)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} \right] \\ &+ T^{(pj)} \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(i)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} \right] \end{aligned} \quad (\text{R.62})$$

Il faut noter que les deux derniers termes ne sont pas symétriques suivant les indices  $n$  et  $m$ . Pour que l'application de la dérivée covariante soit commutative, il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} & T^{(ip)} \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(j)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(j)} - \Gamma_{(pk)}^{(j)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} - \frac{1}{h_n} \frac{\partial \Gamma_{(pm)}^{(j)}}{\partial X^n} + \Gamma_{(pm)}^{(k)} \Gamma_{(kn)}^{(j)} - \Gamma_{(pk)}^{(j)} \Gamma_{(mn)}^{(k)} \right] \\ & + T^{(pj)} \left[ \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(i)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} - \frac{1}{h_n} \frac{\partial \Gamma_{(pm)}^{(i)}}{\partial X^n} + \Gamma_{(pm)}^{(k)} \Gamma_{(kn)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(mn)}^{(k)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{R.63})$$

Ces relations font intervenir le tenseur de Riemann-Christoffel physique, antisymétrique en  $(m, n)$ , défini par :

$$\begin{aligned} C_{(pnm)}^{(i)} &= \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(i)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} \\ &- \frac{1}{h_n} \frac{\partial \Gamma_{(pm)}^{(i)}}{\partial X^n} - \Gamma_{(pm)}^{(k)} \Gamma_{(kn)}^{(i)} + \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(mn)}^{(k)} \end{aligned} \quad (\text{R.64})$$

La condition de permutation de dérivées physiques covariantes croisées d'un tenseur du second ordre s'écrit alors :

$$T^{(ip)} C_{(pnm)}^{(j)} + T^{(pj)} C_{(pnm)}^{(i)} = 0 \quad (\text{R.65})$$

Cette relation est satisfaite dès lors que les conditions d'Euclidicité de la base covariante physique sont vérifiées.

Les dérivées secondes peuvent alors se noter sous une forme mettant en évidence ce tenseur :

$$\begin{aligned} \nabla_{(mn)} T^{(ij)} &= \frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 T^{(ij)}}{\partial X^n \partial X^m} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^k} \left[ -\tilde{\Gamma}_{mn}^k \delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{ip} B_{(q)mn}^{(jk)} + \delta_{jq} B_{(p)mn}^{(ik)} \right] \\ &+ T^{(pq)} \left[ R_{(pq)mn}^{(ij)} + \frac{1}{2} (\delta_{jq} C_{(qnm)}^{(j)} + \delta_{jq} C_{(pnm)}^{(i)}) \right] \end{aligned} \quad (\text{R.66})$$

avec

$$B_{(q)mn}^{(jk)} = \Gamma_{(qm)}^{(j)} \delta_{nk} + \Gamma_{(qn)}^{(j)} \delta_{mk} \quad (\text{R.67a})$$

$$\begin{aligned} R_{(pq)mn}^{(ij)} &= \left[ \Gamma_{(pn)}^{(i)} \Gamma_{(km)}^{(j)} + \Gamma_{(pm)}^{(i)} \Gamma_{(kn)}^{(j)} \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \delta_{ip} (D_{(qmn)}^{(j)} + D_{(qnm)}^{(j)}) + \frac{1}{2} \delta_{jq} (D_{(pmn)}^{(i)} + D_{(pnm)}^{(i)}) \right] \end{aligned} \quad (\text{R.67b})$$

tenseurs symétriques en  $(m, n)$ . Le tenseur de Riemann-Christoffel est composé des tenseurs  $D_{(pnm)}^{(i)}$  définis par :

$$D_{(pnm)}^{(i)} = \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(i)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} \quad (\text{R.68})$$

de telle sorte que le tenseur de Riemann-Christoffel s'écrit :

$$C_{(pnm)}^{(i)} = D_{(pnm)}^{(i)} - D_{(pmn)}^{(i)} \quad (\text{R.69})$$

Il faut noter que la convention de notation du tenseur de Riemann-Christoffel classique proposée par Lichnerovich [85] porte sur la quantité de signe opposé.

### Relations d'Euclidicité de la base covariante physique

Les relations d'Euclidicité exigent que les dérivées croisées curvilignes permutent. Soit un tenseur

$$T = T^{(i)}g_{(i)} \quad (\text{R.70})$$

Sa dérivée s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial X^p} = \left[ \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^p} + h_p \Gamma_{(np)}^{(i)} T^{(n)} \right] g_{(i)} \quad (\text{R.71})$$

et par conséquent la dérivée seconde se calcule suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial X^p \partial X^q} &= \left[ \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial X^p \partial X^q} \right. \\ &+ \frac{1}{h_p h_q} \left( \frac{\partial T^{(n)}}{\partial X^p} \Gamma_{(nq)}^{(i)} + \frac{\partial T^{(n)}}{\partial X^q} \Gamma_{(np)}^{(i)} + \frac{h_m}{h_p h_q} \Gamma_{pq}^m T^{(n)} \Gamma_{(nm)}^{(i)} \right) \left. \right] g_{(i)} \quad (\text{R.72}) \\ &+ \frac{1}{h_p h_q} T^{(n)} \left[ \frac{1}{h_q} \frac{\partial \Gamma_{(np)}^{(i)}}{\partial X^q} + \Gamma_{(np)}^{(m)} \Gamma_{(mq)}^{(i)} - \Gamma_{(pq)}^{(m)} \Gamma_{(nm)}^{(i)} \right] g_{(i)} \end{aligned}$$

Les dérivées croisées permutent dès lors que l'égalité :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^p \partial X^q} = \frac{\partial^2 T}{\partial X^q \partial X^p} \quad (\text{R.73})$$

est satisfaite. Puisque les deux premiers termes de l'équation (R.72) sont symétriques suivant les indices  $(p, q)$ , cette condition se traduit par :

$$T^{(n)} g_{(i)} C_{(ipq)}^{(n)} = 0 \quad (\text{R.74})$$

où  $C_{(ipq)}^{(n)}$  désigne le tenseur de Riemann-Christoffel, tenseur de courbure défini par :

$$\begin{aligned} C_{(npq)}^{(i)} &= \frac{1}{h_q} \frac{\partial \Gamma_{(np)}^{(i)}}{\partial X^q} - \frac{1}{h_p} \frac{\partial \Gamma_{(nq)}^{(i)}}{\partial X^p} \\ &+ \Gamma_{(np)}^{(k)} \Gamma_{(kq)}^{(i)} - \Gamma_{(nq)}^{(k)} \Gamma_{(kp)}^{(i)} - \Gamma_{(pq)}^{(k)} \Gamma_{(nk)}^{(i)} + \Gamma_{(qp)}^{(k)} \Gamma_{(nk)}^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{R.75})$$

Il est clair que  $C_{(ipq)}^{(n)}$  est antisymétrique en  $(p, q)$  et donc

$$C_{(ipp)}^{(n)} = 0 \quad (\text{R.76})$$

sans sommation sur  $p$ . De même,

$$\begin{aligned} C_{(npq)}^{(n)} &= \frac{1}{h_q} \left[ \frac{\partial K_{nn}}{\partial X^q} - \frac{\partial K_{nn}}{\partial X^q} \right] \delta_{np} - \frac{1}{h_p} \left[ \frac{\partial K_{nn}}{\partial X^p} - \frac{\partial K_{nn}}{\partial X^p} \right] \delta_{nq} \\ &+ \frac{1}{2} [K_{pq} \delta_{pk} - K_{qp} \delta_{qk}] \delta_{nk} [K_{nn} - K_{nn}] \end{aligned} \quad (\text{R.77})$$

se réduit à :

$$C_{(npq)}^{(n)} = 0 \quad (\text{R.78})$$

Par conséquent les seules composantes non trivialement nulles du tenseur de Riemann-Christoffel physique correspondent aux cas où  $p$  et  $q$  sont distincts ainsi que les indices  $m$  et  $n$ .



## R.2 Application à une base covariante orthogonale

Les relations établies aux paragraphes précédents sont particularisées au cas d'un système de coordonnées orthogonales. Dans ce cas, les métriques se simplifient suivant :

$$g_{ij} = h_i h_j \delta^{ij} \quad (R.79a)$$

$$g^{(ij)} = \delta^{ij} \quad (R.79b)$$

### R.2.1 Expression des symboles de Christoffel classique et physique

Par définition, le symbole de Christoffel classique s'exprime en fonction des tenseurs métriques covariant et contravariant suivant :

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} g^{mn} \left[ \frac{\partial g_{mi}}{\partial X^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial X^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X^m} \right] \quad (R.80)$$

Il s'écrit directement dans le cas du système orthogonal en fonction des longueurs  $h_k$ , soit :

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{h_n} \left[ \frac{\partial h_i}{\partial X^j} \delta_{in} + \frac{\partial h_j}{\partial X^i} \delta_{jn} \right] - \frac{1}{2} \frac{1}{h_n^2} \left[ h_j \frac{\partial h_i}{\partial X^n} + h_i \frac{\partial h_j}{\partial X^n} \right] \delta_{ij} \quad (R.81)$$

et en introduisant la notation du coefficient de courbure  $K_{ij}$ , il vient :

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{h_i h_j}{h_n} \left[ K_{ij} \delta_{in} + K_{ji} \delta_{jn} - \frac{1}{2} (K_{in} + K_{jn}) \delta_{ij} \right] \quad (R.82)$$

Il est évident que si tous les indices  $i, j$  et  $n$  sont distincts,  $\Gamma_{ij}^n = 0$ . Les seuls symboles non nuls correspondent aux termes de type suivant :

$$\Gamma_{ij}^i = h_j K_{ij} \quad (R.83a)$$

$$\Gamma_{ii}^j = -\frac{h_i^2}{h_j} K_{ij} \quad (R.83b)$$

$$\Gamma_{ii}^i = h_i K_{ii} \quad (R.83c)$$

où  $i$  et  $j$  sont différents.

L'expression du symbole de Christoffel physique s'en déduit facilement :

$$\Gamma_{(ij)}^{(n)} = K_{ji} \delta_{jn} - \frac{1}{2} (K_{in} + K_{jn}) \delta_{ij} \quad (R.84)$$

Ces deux symboles peuvent être exprimés sous forme de trois matrices d'ordre trois. Dans les expressions physiques, le symbole de Christoffel classique n'apparaît qu'en facteur des normes des vecteurs covariants, ce qui justifie la notation suivante :

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^n = \frac{h_n}{h_i h_j} \Gamma_{ij}^n \quad (R.85)$$

Il vient :

$$\tilde{\Gamma}^1 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{12} & -K_{21} & 0 \\ K_{13} & 0 & -K_{31} \end{bmatrix} \quad (R.86a)$$

$$\tilde{\Gamma}^2 = \begin{bmatrix} -K_{12} & K_{21} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{23} & -K_{32} \end{bmatrix} \quad (R.86b)$$

$$\tilde{\Gamma}^3 = \begin{bmatrix} -K_{13} & 0 & K_{31} \\ 0 & -K_{23} & K_{32} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \quad (R.86c)$$

et le symbole physique se compose des termes suivants :

$$\Gamma^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & -K_{21} & 0 \\ K_{13} & 0 & -K_{31} \end{bmatrix} \quad (R.87a)$$

$$\Gamma^{(2)} = \begin{bmatrix} -K_{12} & K_{21} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & -K_{32} \end{bmatrix} \quad (R.87b)$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{bmatrix} -K_{13} & 0 & K_{31} \\ 0 & -K_{23} & K_{32} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (R.87c)$$

L'expression des différents opérateurs est simplifiée.

## R.2.2 Dérivées covariantes et gradients

### Scalaire

Le gradient d'un scalaire n'est pas affecté par l'orthogonalité du système de coordonnées.

### Vecteur

En exprimant tout en fonction des  $K_{ij}$ , il vient :

$$\nabla_{(j)} T^{(i)} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^j} + K_{jn} T^{(n)} \delta_{ij} - K_{ji} T^{(j)} \quad (R.88)$$

ce qui s'écrit matriciellement par :

$$\begin{aligned} & \nabla T \\ & = \\ & \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} + K_{12}T^{(2)} + K_{13}T^{(3)} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} - K_{21}T^{(2)} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} - K_{31}T^{(3)} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{12}T^{(1)} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{21}T^{(1)} + K_{23}T^{(3)} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} - K_{32}T^{(3)} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{13}T^{(1)} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} - K_{23}T^{(2)} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} + K_{32}T^{(2)} + K_{31}T^{(1)} \end{array} \right] \quad (R.89) \end{aligned}$$

**Tenseur du second ordre**

Le gradient d'un tenseur du second ordre devient quant à lui :

$$\nabla_{(k)} T^{(ij)} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^k} + K_{kn} (T^{(in)} \delta_{jk} + T^{(nj)} \delta_{ik}) - (K_{kj} T^{(ik)} + K_{ki} T^{(kj)}) \quad (R.90)$$

L'ensemble des composantes s'écrit donc :

$$\nabla_{(1)} T^{(11)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} + (T^{(12)} + T^{(21)}) K_{12} + (T^{(13)} + T^{(31)}) K_{13} \quad (R.91a)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(12)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + (T^{(22)} - T^{(11)}) K_{12} + (T^{(32)}) K_{13} \quad (R.91b)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(13)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + (T^{(22)} - T^{(11)}) K_{12} + (T^{(32)}) K_{13} \quad (R.91c)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(21)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(21)}}{\partial X^1} + (T^{(22)} - T^{(11)}) K_{12} + (T^{(23)}) K_{13} \quad (R.91d)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(22)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} - (T^{(12)} + T^{(21)}) K_{12} \quad (R.91e)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(23)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - (T^{(13)}) K_{12} - (T^{(21)}) K_{13} \quad (R.91f)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(31)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(31)}}{\partial X^1} + (T^{(32)}) K_{12} + (T^{(33)} - T^{(11)}) K_{13} \quad (R.91g)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(32)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(32)}}{\partial X^1} - (T^{(31)}) K_{12} - (T^{(12)}) K_{13} \quad (R.91h)$$

$$\nabla_{(1)} T^{(33)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} - (T^{(13)} + T^{(31)}) K_{13} \quad (R.91i)$$

et suivant la seconde direction :

$$\nabla_{(2)} T^{(11)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - (T^{(12)} + T^{(21)}) K_{21} \quad (R.92a)$$

$$\nabla_{(2)} T^{(12)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + (T^{(11)} - T^{(22)}) K_{21} + (T^{(13)}) K_{23} \quad (R.92b)$$

$$\nabla_{(2)} T^{(13)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - (T^{(23)}) K_{21} - (T^{(12)}) K_{23} \quad (R.92c)$$

$$\nabla_{(2)} T^{(21)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(21)}}{\partial X^2} + (T^{(11)} - T^{(22)}) K_{21} + (T^{(31)}) K_{23} \quad (R.92d)$$

$$\nabla_{(2)} T^{(22)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} + (T^{(12)} + T^{(21)}) K_{21} + (T^{(23)} + T^{(32)}) K_{23} \quad (R.92e)$$

$$\nabla_{(2)}T^{(23)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + (T^{(13)}) K_{21} + (T^{(33)} - T^{(22)}) K_{23} \quad (R.92f)$$

$$\nabla_{(2)}T^{(31)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(31)}}{\partial X^2} - (T^{(32)}) K_{21} - (T^{(21)}) K_{23} \quad (R.92g)$$

$$\nabla_{(2)}T^{(32)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(32)}}{\partial X^2} + (T^{(31)}) K_{21} + (T^{(33)} - T^{(22)}) K_{23} \quad (R.92h)$$

$$\nabla_{(2)}T^{(33)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} - (T^{(23)} + T^{(32)}) K_{23} \quad (R.92i)$$

et enfin :

$$\nabla_{(3)}T^{(11)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} - (T^{(13)} + T^{(31)}) K_{31} \quad (R.93a)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(12)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} - (T^{(32)}) K_{31} - (T^{(13)}) K_{32} \quad (R.93b)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(13)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + (T^{(11)} - T^{(33)}) K_{31} + (T^{(12)}) K_{32} \quad (R.93c)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(21)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(21)}}{\partial X^3} - (T^{(23)}) K_{31} - (T^{(31)}) K_{32} \quad (R.93d)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(22)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} - (T^{(23)} + T^{(32)}) K_{32} \quad (R.93e)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(23)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} + (T^{(21)}) K_{31} + (T^{(22)} - T^{(33)}) K_{32} \quad (R.93f)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(31)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(31)}}{\partial X^3} + (T^{(33)} - T^{(11)}) K_{31} + (T^{(21)}) K_{32} \quad (R.93g)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(32)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(32)}}{\partial X^3} + (T^{(12)}) K_{31} + (T^{(22)} - T^{(33)}) K_{32} \quad (R.93h)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(33)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} + (T^{(13)} + T^{(31)}) K_{31} + (T^{(23)} + T^{(32)}) K_{32} \quad (R.93i)$$

### R.2.3 Divergences

#### Vecteur

La forme conservative de la divergence d'un vecteur n'est pas affectée par l'orthogonalité du système de coordonnées. Seule l'expression du Jacobien est simplifiée, puisque :

$$J = h_1 h_2 h_3 \quad (R.94)$$

L'équation de continuité s'écrit ainsi sous forme conservative comme :

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_2 h_3 T^{(1)})}{\partial X^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 T^{(2)})}{\partial X^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 T^{(3)})}{\partial X^3} \right] = 0 \quad (R.95)$$

### Tenseur du second ordre

La divergence s'écrit, en conservant le Jacobien dans l'expression, de la façon suivante :

$$\nabla_{(j)} T^{(ij)} = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^j} \left[ \frac{J T^{(ij)}}{h_j} \right] + K_{jn} T^{(nj)} \delta_{ij} - K_{ji} T^{(jj)} \quad (R.96)$$

et la forme développée s'écrit :

$$\nabla_{(j)} T^{(ij)} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial X^j} + K_{jn} (T^{(nj)} \delta_{ij} + T^{(in)}) - K_{ji} T^{(jj)} - K_{jj} T^{(ij)} \quad (R.97)$$

Elle se développe suivant :

$$\begin{aligned} \nabla_{(n)} T^{(1n)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} & (R.98a) \\ &+ (T^{(12)} + T^{(21)}) K_{12} + (T^{(13)} + T^{(31)}) K_{13} + (T^{(13)}) K_{23} \\ &+ (T^{(11)} - T^{(22)}) K_{21} + (T^{(11)} - T^{(33)}) K_{31} + (T^{(12)}) K_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(n)} T^{(2n)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(21)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} & (R.98b) \\ &+ (T^{(22)} - T^{(11)}) K_{12} + (T^{(23)}) K_{13} + (T^{(23)} + T^{(32)}) K_{23} \\ &+ (T^{(12)} + T^{(21)}) K_{21} + (T^{(21)}) K_{31} + (T^{(22)} - T^{(33)}) K_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(n)} T^{(3n)} &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(31)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(32)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} & (R.98c) \\ &+ (T^{(32)}) K_{12} + (T^{(33)} - T^{(11)}) K_{13} + (T^{(33)} - T^{(22)}) K_{23} \\ &+ (T^{(31)}) K_{21} + (T^{(13)} + T^{(31)}) K_{31} + (T^{(23)} + T^{(32)}) K_{32} & (R.98d) \end{aligned}$$

## R.2.4 Laplaciens

### Scalaire

Le Laplacien scalaire se simplifie de façon immédiate et s'écrit :

$$\Delta \phi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial X^i} \left( \frac{J}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial X^i} \right) \quad (R.99)$$

ou encore

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (X^i)^2} + f^{(k)} \frac{1}{h_k} \frac{\partial \phi}{\partial X^k} \quad (\text{R.100})$$

avec

$$f^{(k)} = -\delta_{mn} \frac{h_k}{h_n h_m} \Gamma_{mn}^k \quad (\text{R.101})$$

selon que la forme conservative soit retenue ou non. Le développement de la forme conservative conduit alors à :

$$\Delta\phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial X^1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} \right) + \frac{\partial}{\partial X^2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} \right) + \frac{\partial}{\partial X^3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \right) \right] \quad (\text{R.102})$$

tandis que, puisque les coefficients  $f^{(k)}$  vérifient :

$$f^{(k)} = (K_{nk} + K_{mk}) - K_{kk} \quad (\text{R.103})$$

où les indices  $(k, m, n)$  sont cycliques, soit encore,

$$f^{(1)} = K_{21} + K_{31} - K_{11} \quad (\text{R.104a})$$

$$f^{(2)} = K_{32} + K_{12} - K_{22} \quad (\text{R.104b})$$

$$f^{(3)} = K_{23} + K_{13} - K_{33} \quad (\text{R.104c})$$

la forme mettant en évidence les dérivées secondes doubles s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^{12}} + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^{22}} + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^{32}} \\ &+ (K_{21} + K_{31} - K_{11}) \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} \\ &+ (K_{32} + K_{12} - K_{22}) \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} \\ &+ (K_{23} + K_{13} - K_{33}) \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \end{aligned} \quad (\text{R.105})$$

Cet opérateur est noté  $\nabla^2$  par la suite.

### Vecteur

Le Laplacien vecteur se simplifie quant à lui suivant :

$$\begin{aligned} \Delta T^{(n)} &= \frac{1}{h_k^2} \frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial (X^k)^2} + \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial X^k} f^{(k)} \\ &+ 2 \left[ \frac{1}{h_k} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial X^k} K^{kn} - \frac{1}{h_n} \frac{\partial T^{(n)}}{\partial X^n} K_{nk} \right] \\ &+ Q_{(k)}^{(n)} T^{(k)} \end{aligned} \quad (\text{R.106})$$

avec le même coefficient  $f^{(k)}$  que pour les scalaires. Les deux premiers termes sont en fait  $\nabla^2(T^{(n)})$ . Les coefficients  $Q_{(m)}^{(n)}$  sont définis par la relation (R.43a), dans laquelle le tenseur métrique contravariant est l'identité tensorielle :

$$Q_{(m)}^{(n)} = \left[ \frac{1}{h_p} \frac{\partial \Gamma_{(mp)}^{(n)}}{\partial X^p} + \Gamma_{(mp)}^{(n)} \Gamma_{(pq)}^{(q)} + \Gamma_{(qp)}^{(n)} \Gamma_{(mp)}^{(q)} \right] \quad (R.107)$$

Ces coefficients se développent en fonction des coefficients  $K_{ij}$  pour donner directement :

$$Q_{(m)}^{(n)} = \frac{1}{h_n} \frac{\partial K_{nm}}{\partial X^n} - \frac{1}{h_m} \frac{\partial K_{mn}}{\partial X^m} - K_{km}(K_{kn} + K_{mn}) + K_{kn}K_{mn} \quad (R.108a)$$

$$Q_{(n)}^{(n)} = -(K_{nm}^2 + K_{mn}^2 + K_{nk}^2 + K_{kn}^2) \quad (R.108b)$$

où les indices  $(k, m, n)$  sont cycliques, soit

$$Q_{(1)}^{(1)} = -(K_{12}^2 + K_{21}^2 + K_{13}^2 + K_{31}^2) \quad (R.109a)$$

$$Q_{(2)}^{(1)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{32}(K_{31} + K_{21}) + K_{31}K_{12} \quad (R.109b)$$

$$Q_{(3)}^{(1)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{23}(K_{21} + K_{31}) + K_{13}K_{21} \quad (R.109c)$$

$$Q_{(1)}^{(2)} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{31}(K_{32} + K_{12}) + K_{32}K_{21} \quad (R.109d)$$

$$Q_{(2)}^{(2)} = -(K_{12}^2 + K_{21}^2 + K_{23}^2 + K_{32}^2) \quad (R.109e)$$

$$Q_{(3)}^{(2)} = \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{13}(K_{32} + K_{12}) + K_{23}K_{12} \quad (R.109f)$$

$$Q_{(1)}^{(3)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{21}(K_{13} + K_{23}) + K_{31}K_{23} \quad (R.109g)$$

$$Q_{(2)}^{(3)} = \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{12}(K_{23} + K_{13}) + K_{32}K_{13} \quad (R.109h)$$

$$Q_{(3)}^{(3)} = -(K_{13}^2 + K_{31}^2 + K_{23}^2 + K_{32}^2) \quad (R.109i)$$

Chen et Patel [22] notent ces coefficients  $Q_{(m)}^{(n)} = \alpha_{nm}$ . Le développement du Laplacien vectoriel s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \Delta T^{(1)} &= \nabla^2(T^{(1)}) + 2 \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} K_{12} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} K_{21} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} K_{13} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} K_{31} \right] \\ &+ \alpha_{11} T^{(1)} + \alpha_{12} T^{(2)} + \alpha_{13} T^{(3)} \end{aligned} \quad (R.110a)$$

$$\begin{aligned}\Delta T^{(2)} &= \nabla^2(T^{(2)}) + 2\left[\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2}K_{21} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1}K_{12} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2}K_{23} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3}K_{32}\right] \\ &+ \alpha_{21}T^{(1)} + \alpha_{22}T^{(2)} + \alpha_{23}T^{(3)}\end{aligned}\quad (R.110b)$$

$$\begin{aligned}\Delta T^{(3)} &= \nabla^2(T^{(3)}) + 2\left[\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3}K_{31} - \frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1}K_{13} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3}K_{32} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2}K_{23}\right] \\ &+ \alpha_{31}T^{(1)} + \alpha_{32}T^{(2)} + \alpha_{33}T^{(3)}\end{aligned}\quad (R.110c)$$

### R.2.5 Relations d'Euclidicité

Les relations d'Euclidicité peuvent être simplifiées et exprimées uniquement en fonction des coefficients  $K_{ij}$ . Le tenseur de Riemann-Christoffel devient :

$$\begin{aligned}C_{(mpq)}^{(n)} &= \left[\frac{1}{h_q}\frac{\partial K_{pn}}{\partial X^q} + K_{pq}(K_{pn} - K_{qn})\right]\delta_{pm} \\ &- \left[\frac{1}{h_p}\frac{\partial K_{qn}}{\partial X^p} + K_{qp}(K_{qn} - K_{pn})\right]\delta_{qm} \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_p}\frac{\partial(K_{nm} + K_{qm})}{\partial X^p} - (K_{np} + K_{qp})K_{pm} + (K_{nm} + K_{qm})K_{qp}\right]\delta_{nq} \\ &- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{h_q}\frac{\partial(K_{nm} + K_{pm})}{\partial X^q} - (K_{nq} + K_{pq})K_{qm} + (K_{nm} + K_{pm})K_{pq}\right]\delta_{np} \\ &+ \frac{1}{2}(K_{nk} + K_{qk})K_{pk}\delta_{pm}\delta_{nq} \\ &- \frac{1}{2}(K_{nk} + K_{pk})K_{qk}\delta_{qm}\delta_{np}\end{aligned}\quad (R.111)$$

D'après le paragraphe précédent, les dérivées secondes permutent lorsque les composantes de ce tenseur, pour lesquelles  $p \neq q$  et  $n \neq m$  sont nulles. Deux cas doivent alors être traités, suivant les valeurs du couple  $(\delta_{pm}, \delta_{qn})$ . Le premier correspond au cas où les seuls symboles de Kronecker non nuls sont  $\delta_{pm}$  et  $\delta_{qn}$  et le second où le seul non nul est  $\delta_{pm}$ . Envisager  $\delta_{pm} = 0$  revient à reporter les conditions sur le couple  $(\delta_{qm}, \delta_{pn})$ , qui fournit des conditions identiques à celles du couple  $(\delta_{pm}, \delta_{qn})$ , étant donné l'antisymétrie du tenseur de Riemann-Christoffel.

Le premier cas se réduit à :

$$\begin{aligned}C_{(ppn)}^{(n)} &= \frac{1}{h_n}\frac{\partial K_{pn}}{\partial X^n} + \frac{1}{h_p}\frac{\partial K_{np}}{\partial X^p} + K_{pn}^2 + K_{np}^2 + K_{nk}K_{pk} - K_{pn}K_{nn} - K_{np}K_{pp} \\ &= 0\end{aligned}\quad (R.112)$$

avec  $p \neq n$ . Il fournit trois relations :

$$\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{12}^2 + K_{21}^2 + K_{13}K_{23} = 0\quad (R.113a)$$



$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{13}^2 + K_{31}^2 + K_{12}K_{32} = 0 \quad (R.113b)$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 + K_{23}^2 + K_{21}K_{31} = 0 \quad (R.113c)$$

Le second cas se réduit à :

$$\begin{aligned} C_{(mpq)}^{(n)} &= \frac{1}{h_q} \frac{\partial K_{pn}}{\partial X^q} + K_{pq}(K_{pn} - K_{qn}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (R.114)$$

avec  $p$ ,  $n$  et  $m$  distincts. Les six relations résultantes s'écrivent :

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} + K_{21}(K_{23} - K_{13}) = 0 \quad (R.115a)$$

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} + K_{31}(K_{32} - K_{12}) = 0 \quad (R.115b)$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^2} + K_{12}(K_{13} - K_{23}) = 0 \quad (R.115c)$$

$$\frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} + K_{32}(K_{31} - K_{21}) = 0 \quad (R.115d)$$

$$\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} + K_{13}(K_{12} - K_{32}) = 0 \quad (R.115e)$$

$$\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} + K_{23}(K_{21} - K_{31}) = 0 \quad (R.115f)$$

Ces relations permettent d'assurer que les dérivées secondes croisées covariantes permutent et peuvent être utilisées afin de simplifier l'écriture des termes de diffusion des équations du mouvement.

## R.2.6 Dérivées secondes covariantes

### Scalaire

Les dérivées secondes covariantes d'un scalaire permutent et s'écrivent dans le cas d'un système de coordonnées orthogonal :

$$\nabla_{(11)}\phi = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (X^1)^2} - K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \quad (R.116a)$$

$$\nabla_{(12)}\phi = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^1 \partial X^2} - K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} \quad (R.116b)$$

$$\nabla_{(13)}\phi = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^1 \partial X^3} - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \quad (R.116c)$$

$$\nabla_{(22)}\phi = \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (X^2)^2} + K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} - K_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \quad (R.116d)$$

$$\nabla_{(23)}\phi = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2 \partial X^3} - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \quad (R.116e)$$

$$\nabla_{(33)}\phi = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial (X^3)^2} + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \quad (R.116f)$$

### Vecteur

Le développement des composantes forme, sans imposer l'Euclidicité, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla_{(11)}T^{(1)} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial (X^1)^2} & (R.117a) \\ &- K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\ &+ 2 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} + 2 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} \\ &- T^{(1)}(K_{12}^2 + K_{13}^2) + T^{(2)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12}K_{21}\right) + T^{(3)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13}K_{31}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(11)}T^{(2)} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial (X^1)^2} & (R.117b) \\ &- K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\ &- 2 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} \\ &- T^{(1)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12}K_{21}\right) - T^{(2)}(K_{12}^2) + T^{(3)}(K_{12}K_{23} - K_{12}K_{13} - K_{13}K_{32}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(11)}T^{(3)} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial (X^1)^2} & (R.117c) \\ &- K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\ &- 2 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} \\ &- T^{(1)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13}K_{31}\right) + T^{(2)}(K_{13}K_{32} - K_{12}K_{13} - K_{12}K_{23}) - T^{(3)}(K_{13}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(12)}T^{(1)} &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial X^1 \partial X^2} & (R.118a) \\ &- K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} \\ &- K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + T^{(1)}K_{12}K_{21} - T^{(2)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2 + K_{23}K_{13}\right) + T^{(3)}(K_{12}K_{23} - K_{12}K_{13}) \\
 \nabla_{(12)}T^{(2)} &= \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.118b) \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} + K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} \\
 & + T^{(1)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2\right) + T^{(2)}K_{12}K_{21} + T^{(3)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(12)}T^{(3)} &= \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.118c) \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(1)}K_{12}K_{13} - T^{(2)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} - K_{21}K_{13}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(21)}T^{(1)} &= \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.119a) \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} + K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(1)}K_{12}K_{21} + T^{(2)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2\right) + T^{(3)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{13}}{\partial X^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(21)}T^{(2)} &= \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.119b) \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} + K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(1)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2 + K_{23}K_{13}\right) + T^{(2)}K_{12}K_{21} + T^{(3)}(K_{21}K_{13} - K_{21}K_{23})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(21)}T^{(3)} &= \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.119c) \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2}
 \end{aligned}$$

$$- T^{(1)}\left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^2} - K_{12}K_{23}\right) - T^{(2)}K_{21}K_{23}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(13)}T^{(1)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.120a) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\ &- K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} + K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\ &+ T^{(1)}K_{13}K_{31} + T^{(2)}(K_{13}K_{32} - K_{12}K_{13}) - T^{(3)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 + K_{32}K_{12}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(13)}T^{(2)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.120b) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\ &- K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\ &- T^{(1)}K_{12}K_{13} - T^{(3)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} - K_{12}K_{31}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(13)}T^{(3)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.120c) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\ &+ K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} + K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} \\ &+ T^{(1)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2\right) + T^{(2)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1}\right) + T^{(3)}K_{13}K_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(31)}T^{(1)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.121a) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\ &- K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} + K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\ &+ T^{(1)}K_{13}K_{31} + T^{(2)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3}\right) + T^{(3)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(31)}T^{(2)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.121b) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & - T^{(1)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} - K_{13} K_{32} \right) + T^{(3)} K_{31} K_{32} \\
 \nabla_{(31)} T^{(3)} &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial X^1 \partial X^3} \tag{R.121c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} + K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(1)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{32} K_{12} + K_{31}^2 \right) + T^{(2)} (K_{31} K_{12} - K_{31} K_{32}) + T^{(3)} K_{13} K_{31} \\
 \nabla_{(22)} T^{(1)} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial (X^2)^2} \tag{R.122a} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} - K_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} \\
 & - T^{(1)} K_{21}^2 - T^{(2)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12} K_{21} \right) + T^{(3)} (K_{21} K_{13} - K_{21} K_{23} - K_{23} K_{31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(22)} T^{(2)} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial (X^2)^2} \tag{R.122b} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} - K_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & + 2 K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} + 2 K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} \\
 & - T^{(1)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12} K_{21} \right) - T^{(2)} (K_{21}^2 + K_{23}^2) + T^{(3)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23} K_{32} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(22)} T^{(3)} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial (X^2)^2} \tag{R.122c} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} - K_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(1)} (K_{31} K_{23} - K_{21} K_{23} - K_{21} K_{13}) - T^{(2)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23} K_{32} \right) - T^{(3)} (K_{23}^2)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(23)} T^{(1)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.123a}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} - K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(2)} K_{23} K_{21} - T^{(3)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} - K_{32} K_{21} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(23)} T^{(2)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.123b}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} + K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(1)} (K_{23} K_{31} - K_{21} K_{23}) + T^{(2)} K_{23} K_{32} - T^{(3)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{31} K_{21} + K_{23}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(23)} T^{(3)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.123c}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(1)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} \right) + T^{(2)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 \right) + T^{(3)} K_{23} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(32)} T^{(1)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.124a}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} - K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & - T^{(2)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} - K_{23} K_{31} \right) + T^{(3)} K_{31} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(32)} T^{(2)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.124b}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} + K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(1)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} \right) + T^{(2)} K_{23} K_{32} - T^{(3)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} + K_{32}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(32)} T^{(3)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.124c}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} + K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(1)}(K_{32}K_{21} - K_{31}K_{32}) - T^{(2)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 + K_{31}K_{21}\right) + T^{(3)}K_{23}K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(33)}T^{(1)} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial (X^3)^2} \quad (R.125a)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & - T^{(1)}K_{31}^2 + T^{(2)}(K_{31}K_{12} - K_{31}K_{32} - K_{32}K_{21}) - T^{(3)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13}K_{31}\right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(33)}T^{(2)} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial (X^3)^2} \quad (R.125b)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(1)}(K_{32}K_{21} - K_{31}K_{32} - K_{31}K_{12}) - T^{(2)}(K_{32}^2) - T^{(3)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(33)}T^{(3)} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial (X^3)^2} \quad (R.125c)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial X^3} \\
 & + 2 K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial X^3} + 2 K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(1)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13}K_{31}\right) + T^{(2)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right) - T^{(3)}(K_{31}^2 + K_{32}^2)
 \end{aligned}$$

### Tenseur symétrique du second ordre

Le développement des dérivées secondes est limité au cas d'un tenseur symétrique ici puisque c'est le seul cas qui apparaisse dans les modèles. Aucune des hypothèses d'Euclidicité n'est appliquée aux expressions.

$$\nabla_{(11)}T^{(11)} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial (X^1)^2} \quad (R.126a)$$

$$- K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3}$$

$$\begin{aligned}
 & + 4 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + 4 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} \\
 & - 2 T^{(11)} (K_{12}^2 + K_{13}^2) + 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12} K_{21} \right) \\
 & + 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13} K_{31} \right) + 2 T^{(22)} K_{12}^2 \\
 & + 4 T^{(23)} K_{12} K_{13} + 2 T^{(33)} K_{13}^2
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(11)} T^{(12)} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial (X^1)^2} \tag{R.126b}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} + 2 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + 2 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(11)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12} K_{21} \right) - T^{(12)} (4 K_{12}^2 + K_{13}^2) \\
 & + T^{(13)} (K_{12} K_{23} - K_{13} K_{32} - 3 K_{12} K_{13}) + T^{(22)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12} K_{21} \right) \\
 & + T^{(23)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13} K_{31} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(11)} T^{(13)} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial (X^1)^2} \tag{R.126c}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} + 2 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + 2 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(11)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13} K_{31} \right) + T^{(12)} (K_{13} K_{32} - K_{12} K_{23} - 3 K_{12} K_{13}) \\
 & - T^{(13)} (4 K_{13}^2 + K_{12}^2) \\
 & + T^{(23)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12} K_{21} \right) + T^{(33)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13} K_{31} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(11)} T^{(22)} = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial (X^1)^2} \tag{R.126d}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\
 & - 4 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} \\
 & + 2 T^{(11)} K_{12}^2 - 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12} K_{21} \right) \\
 & - 2 T^{(22)} K_{12}^2 \\
 & + 2 T^{(23)} (K_{12} K_{23} - K_{12} K_{13} - K_{13} K_{32})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \nabla_{(11)}T^{(23)} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial (X^1)^2} & (R.126e) \\
 &- K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 &- 2 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - 2 K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} \\
 &+ 2 T^{(11)} K_{12} K_{13} - T^{(12)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13} K_{31} \right) \\
 &- T^{(13)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^1} - K_{12} K_{21} \right) + T^{(22)} (K_{13} K_{32} - K_{12} K_{13} - K_{12} K_{23}) \\
 &- T^{(23)} (K_{12}^2 + K_{13}^2) + T^{(33)} (K_{12} K_{23} - K_{12} K_{13} - K_{13} K_{32})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(11)}T^{(33)} &= \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial (X^1)^2} & (R.126f) \\
 &- K_{11} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 &- 4 K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} \\
 &+ 2 T^{(11)} K_{13}^2 - 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^1} - K_{13} K_{31} \right) \\
 &+ 2 T^{(23)} (K_{13} K_{32} - K_{12} K_{23} - K_{12} K_{13}) - 2 T^{(33)} K_{13}^2 & (R.126g)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(12)}T^{(11)} &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^2} & (R.127a) \\
 &- K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} \\
 &- 2 K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + 2 K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + 2 K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 &+ 2 T^{(11)} K_{12} K_{21} - 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2 + K_{23} K_{13} \right) \\
 &+ 2 T^{(13)} (K_{12} K_{23} - K_{12} K_{13}) - 2 T^{(22)} K_{12} K_{21} \\
 &- 2 T^{(23)} K_{21} K_{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(21)}T^{(11)} &= \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^2} & (R.127b) \\
 &- K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} \\
 &- 2 K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + 2 K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + 2 K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 &+ 2 T^{(11)} K_{12} K_{21} + 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2T^{(13)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{13}}{\partial X^2}\right) - 2T^{(22)}K_{12}K_{21} \\
 & - 2T^{(23)}K_{21}K_{13} \\
 \nabla_{(12)}T^{(12)} & = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial X^1\partial X^2} \tag{R.127c} \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(11)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2\right) + 4T^{(12)}K_{12}K_{21} \\
 & + T^{(13)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} + K_{21}K_{13}\right) - T^{(22)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2 + K_{23}K_{13}\right) \\
 & + T^{(23)}(2K_{12}K_{23} - K_{12}K_{13}) + T^{(33)}K_{23}K_{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(21)}T^{(12)} & = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial X^1\partial X^2} \tag{R.127d} \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & - T^{(11)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2 + K_{23}K_{13}\right) + 4T^{(12)}K_{12}K_{21} \\
 & + T^{(13)}(2K_{21}K_{13} - K_{21}K_{23}) + T^{(22)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2\right) \\
 & + T^{(23)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{13}}{\partial X^2} + K_{12}K_{23}\right) + T^{(33)}K_{23}K_{13}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(12)}T^{(13)} & = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial X^1\partial X^2} \tag{R.127e} \\
 & - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} + K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(11)}K_{12}K_{13} - T^{(12)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} - 2K_{21}K_{13}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + T^{(13)}K_{12}K_{21} - T^{(22)}K_{12}K_{23} \\
& - T^{(23)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2 + 2K_{23}K_{13}\right) + T^{(33)}(K_{12}K_{23} - K_{12}K_{13}) \\
\nabla_{(21)}T^{(13)} & = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.127f) \\
& - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
& - K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
& - K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} + K_{13}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} \\
& - T^{(11)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{13}}{\partial X^2} - K_{12}K_{23}\right) + T^{(12)}(K_{21}K_{13} + K_{21}K_{23}) \\
& + T^{(13)}K_{12}K_{21} - T^{(22)}K_{12}K_{23} \\
& + T^{(23)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2 - K_{23}K_{13}\right) + T^{(33)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{13}}{\partial X^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{(12)}T^{(22)} & = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.127g) \\
& - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} \\
& + 2K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - 2K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + 2K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} \\
& - 2T^{(11)}K_{12}K_{21} + 2T^{(12)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2\right) \\
& - 2T^{(13)}K_{12}K_{23} + 2T^{(22)}K_{12}K_{21} \\
& + 2T^{(23)}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{(21)}T^{(22)} & = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial X^1\partial X^2} & (R.127h) \\
& - K_{12}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} - K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} \\
& + 2K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - 2K_{12}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + 2K_{23}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} \\
& - 2T^{(11)}K_{12}K_{21} - 2T^{(12)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2 + K_{23}K_{13}\right) \\
& - 2T^{(13)}K_{12}K_{23} + 2T^{(22)}K_{12}K_{21} \\
& + 2T^{(23)}(K_{21}K_{13} - K_{21}K_{23})
\end{aligned}$$

$$\nabla_{(12)}T^{(23)} = \frac{1}{h_1h_2}\frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial X^1\partial X^2} \quad (R.127i)$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{23} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + K_{23} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(11)} K_{21} K_{13} + T^{(12)} (K_{12} K_{13} + K_{12} K_{23}) \\
 & + T^{(13)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^1} + K_{12}^2 - K_{23} K_{13} \right) - T^{(22)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} - K_{21} K_{13} \right) \\
 & + T^{(23)} K_{12} K_{21} + T^{(33)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(21)} T^{(23)} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^2} \tag{R.127j}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{12} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & - K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{23} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + K_{23} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(11)} K_{21} K_{13} - T^{(12)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^2} - 2 K_{12} K_{23} \right) \\
 & - T^{(13)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^2} + K_{21}^2 + 2 K_{23} K_{13} \right) + T^{(22)} K_{21} K_{23} \\
 & + T^{(23)} K_{12} K_{21} + T^{(33)} (K_{21} K_{13} - K_{21} K_{23})
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(12)} T^{(33)} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^2} \tag{R.127k}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} \\
 & - 2 K_{23} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - 2 K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & + 2 T^{(12)} K_{23} K_{13} + 2 T^{(13)} K_{12} K_{13} \\
 & - 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^1} - K_{21} K_{13} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(21)} T^{(33)} = \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^2} \tag{R.127l}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{12} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} - K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} \\
 & - 2 K_{23} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - 2 K_{13} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & + 2 T^{(12)} K_{23} K_{13} - 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^2} - K_{12} K_{23} \right)
 \end{aligned}$$

$$+ 2T^{(23)}K_{21}K_{23}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(13)}T^{(11)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128a) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\ &- 2K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + 2K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + 2K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\ &+ 2T^{(11)}K_{13}K_{31} + 2T^{(12)}(K_{13}K_{32} - K_{12}K_{13}) \\ &- 2T^{(13)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 + K_{12}K_{32}\right) \\ &- 2T^{(23)}K_{12}K_{31} - 2T^{(33)}K_{13}K_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(31)}T^{(11)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128b) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\ &- 2K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + 2K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + 2K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\ &+ 2T^{(11)}K_{13}K_{31} + 2T^{(12)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3}\right) \\ &+ 2T^{(13)}\left(\frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2\right) \\ &- 2T^{(23)}K_{12}K_{31} - 2T^{(33)}K_{13}K_{31} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(13)}T^{(12)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128c) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\ &- K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\ &- K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} + K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\ &+ T^{(11)}K_{12}K_{13} + T^{(12)}K_{13}K_{31} \\ &- T^{(13)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} - 2K_{12}K_{31}\right) + T^{(22)}(K_{13}K_{32} - K_{12}K_{13}) \\ &- T^{(23)}\left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 + 2K_{12}K_{32}\right) - T^{(33)}K_{13}K_{32} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{(31)}T^{(12)} &= \frac{1}{h_1h_3} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128d) \\ &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} + K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\
 & - T^{(11)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} - K_{13} K_{32} \right) + T^{(12)} K_{13} K_{31} \\
 & + T^{(13)} (K_{12} K_{31} + K_{31} K_{32}) + T^{(22)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} \right) \\
 & + T^{(23)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2 - K_{12} K_{32} \right) - T^{(33)} K_{13} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(13)} T^{(13)} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} \tag{R.128e}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} - K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(11)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 \right) + T^{(12)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} + K_{12} K_{31} \right) \\
 & + 4 T^{(13)} K_{13} K_{31} + T^{(22)} K_{12} K_{32} \\
 & + T^{(23)} (2 K_{13} K_{32} - K_{12} K_{13}) - T^{(33)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 + K_{12} K_{32} \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(31)} T^{(13)} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} \tag{R.128f}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} - K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} + K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & - T^{(11)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2 + K_{12} K_{32} \right) + T^{(12)} (2 K_{31} K_{12} - K_{31} K_{32}) \\
 & + 4 T^{(13)} K_{13} K_{31} + T^{(22)} K_{12} K_{32} \\
 & + T^{(23)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} + K_{13} K_{32} \right) + T^{(33)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(13)} T^{(22)} = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^3} \tag{R.128g}$$

$$- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - 2 K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & + 2 T^{(12)} K_{12} K_{13} + 2 T^{(13)} K_{12} K_{32} \\
 & - 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} - K_{12} K_{31} \right) \\
 \nabla_{(31)} T^{(22)} & = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128h) \\
 & - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - 2 K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} - K_{13} K_{32} \right) + 2 T^{(13)} K_{32} K_{12} \\
 & + 2 T^{(23)} K_{31} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(13)} T^{(23)} & = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128i) \\
 & - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} - K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(11)} K_{31} K_{12} + T^{(12)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 - K_{32} K_{12} \right) \\
 & + T^{(13)} (K_{13} K_{12} + K_{13} K_{32}) + T^{(22)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} \right) \\
 & + T^{(23)} K_{13} K_{31} - T^{(33)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} - K_{31} K_{12} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(31)} T^{(23)} & = \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128j) \\
 & - K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{12} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} - K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} \\
 & - T^{(11)} K_{31} K_{12} - T^{(12)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2 + 2 K_{32} K_{12} \right) \\
 & - T^{(13)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{12}}{\partial X^3} - 2 K_{13} K_{32} \right) + T^{(22)} (K_{31} K_{12} - K_{31} K_{32}) \\
 & + T^{(23)} K_{13} K_{31} + T^{(33)} K_{31} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(13)}T^{(33)} &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128k) \\
 &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 &+ 2 K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - 2 K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + 2 K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} \\
 &- 2 T^{(11)} K_{13} K_{31} - 2 T^{(12)} K_{13} K_{32} \\
 &+ 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^1} + K_{13}^2 \right) \\
 &+ 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^1} \right) + 2 T^{(33)} K_{13} K_{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(31)}T^{(33)} &= \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^3} & (R.128l) \\
 &- K_{13} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} - K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 &+ 2 K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - 2 K_{13} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + 2 K_{32} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} \\
 &- 2 T^{(11)} K_{13} K_{31} - 2 T^{(12)} K_{13} K_{32} \\
 &- 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{13}}{\partial X^3} + K_{31}^2 + K_{32} K_{12} \right) \\
 &+ 2 T^{(23)} (K_{31} K_{12} - K_{31} K_{32}) + 2 T^{(33)} K_{13} K_{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(22)}T^{(11)} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial (X^2)^2} & (R.129a) \\
 &+ K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} - K_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\
 &- 4 K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} \\
 &- 2 T^{(11)} K_{21}^2 - 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12} K_{21} \right) \\
 &+ 2 T^{(13)} (K_{21} K_{13} - K_{21} K_{23} - K_{23} K_{31}) + 2 T^{(22)} K_{21}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(22)}T^{(12)} &= \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial (X^2)^2} & (R.129b) \\
 &+ K_{21} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} - K_{22} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 &+ 2 K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - 2 K_{21} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} + 2 K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 &+ T^{(11)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12} K_{21} \right) - T^{(12)} (4 K_{21}^2 + K_{23}^2)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + T^{(13)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23}K_{32}\right) - T^{(22)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12}K_{21}\right) \\
 & + T^{(23)}(K_{21}K_{13} - K_{23}K_{31} - 3K_{21}K_{23})
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(22)}T^{(13)} = \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial (X^2)^2} \quad (R.129c)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} - K_{22}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} + K_{23}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & - 2K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} - 2K_{23}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(11)}(K_{23}K_{31} - K_{21}K_{13} - K_{21}K_{23}) - T^{(12)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23}K_{32}\right) \\
 & - T^{(13)}(K_{21}^2 + K_{23}^2) + 2T^{(22)}K_{21}K_{23} \\
 & - T^{(23)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12}K_{21}\right) + T^{(33)}(K_{21}K_{13} - K_{21}K_{23} - K_{23}K_{31})
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(22)}T^{(22)} = \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial (X^2)^2} \quad (R.129d)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} - K_{22}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} + K_{23}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\
 & + 4K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} + 4K_{23}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & + 2T^{(11)}K_{21}^2 + 2T^{(12)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12}K_{21}\right) \\
 & + 4T^{(13)}K_{21}K_{23} - 2T^{(22)}(K_{23}^2 + K_{21}^2) \\
 & + 2T^{(23)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23}K_{32}\right) + 2T^{(33)}K_{23}^2
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(22)}T^{(23)} = \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial (X^2)^2} \quad (R.129e)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} - K_{22}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + K_{23}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + 2K_{21}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - 2K_{23}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} + 2K_{23}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(12)}(K_{23}K_{31} - K_{21}K_{13} - 3K_{21}K_{23}) \\
 & + T^{(13)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{21}}{\partial X^2} - K_{12}K_{21}\right) - T^{(22)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23}K_{32}\right) \\
 & - T^{(23)}(4K_{23}^2 + K_{21}^2) + T^{(33)}\left(\frac{1}{h_2}\frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23}K_{32}\right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(22)}T^{(33)} = \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial (X^2)^2} \quad (R.129f)$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{21}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} - K_{22}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} + K_{23}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 4 K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} \\
 & + 2 T^{(13)} (K_{23} K_{31} - K_{21} K_{23} - K_{21} K_{13}) + 2 T^{(22)} K_{23}^2 \\
 & - 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^2} - K_{23} K_{32} \right) - 2 T^{(33)} K_{23}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(23)} T^{(11)} &= \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial X^2 \partial X^3} & (R.130a) \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - 2 K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & + 2 T^{(12)} K_{21} K_{23} - 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} - K_{21} K_{32} \right) \\
 & + 2 T^{(23)} K_{21} K_{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(32)} T^{(11)} &= \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial X^2 \partial X^3} & (R.130b) \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - 2 K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} - K_{23} K_{31} \right) + 2 T^{(13)} K_{31} K_{32} \\
 & + 2 T^{(23)} K_{21} K_{31}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(23)} T^{(12)} &= \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial X^2 \partial X^3} & (R.130c) \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & - K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} - K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} + K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(11)} (K_{23} K_{31} - K_{21} K_{23}) + T^{(12)} K_{23} K_{32} \\
 & - T^{(13)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 + 2 K_{21} K_{31} \right) + T^{(22)} K_{21} K_{23} \\
 & - T^{(23)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} - 2 K_{21} K_{32} \right) - T^{(33)} K_{23} K_{31}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(32)} T^{(12)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial X^2 \partial X^3} \quad (R.130d)$$

$$\begin{aligned}
& - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
& - K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
& - K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} - K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} + K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\
& + T^{(11)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} \right) + T^{(12)} K_{23} K_{32} \\
& + T^{(13)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 - K_{21} K_{31} \right) - T^{(22)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} - K_{23} K_{31} \right) \\
& + T^{(23)} (K_{21} K_{32} + K_{31} K_{32}) - T^{(33)} K_{23} K_{31}
\end{aligned}$$

$$\nabla_{(23)} T^{(13)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130e}$$

$$\begin{aligned}
& - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
& + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
& - K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} - K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} + K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} \\
& + T^{(11)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} \right) + T^{(12)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 - K_{21} K_{31} \right) \\
& + T^{(13)} K_{32} K_{23} - T^{(22)} K_{21} K_{32} \\
& + T^{(23)} (K_{21} K_{23} + K_{31} K_{23}) - T^{(33)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} - K_{21} K_{32} \right)
\end{aligned}$$

$$\nabla_{(32)} T^{(13)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130f}$$

$$\begin{aligned}
& - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
& + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
& - K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} - K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} + K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} \\
& + T^{(11)} (K_{21} K_{32} - K_{31} K_{32}) - T^{(12)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 + 2 K_{21} K_{31} \right) \\
& + T^{(13)} K_{32} K_{23} - T^{(22)} K_{21} K_{32} \\
& - T^{(23)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} - 2 K_{23} K_{31} \right) + T^{(33)} K_{31} K_{32}
\end{aligned}$$

$$\nabla_{(23)} T^{(22)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130g}$$

$$- K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + 2 K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} + 2 K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & + 2 T^{(12)} (K_{23} K_{31} - K_{21} K_{23}) \\
 & - 2 T^{(13)} K_{21} K_{32} + 2 T^{(22)} K_{23} K_{32} \\
 & - 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 + K_{21} K_{31} \right) - 2 T^{(33)} K_{23} K_{32} \\
 \nabla_{(32)} T^{(22)} & = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130h} \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + 2 K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} + 2 K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & + 2 T^{(12)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} \right) \\
 & - 2 T^{(13)} K_{21} K_{32} + 2 T^{(22)} K_{23} K_{32} \\
 & + 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 \right) - 2 T^{(33)} K_{23} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(23)} T^{(23)} & = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130i} \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} - K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} - K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(11)} K_{21} K_{31} + T^{(12)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} + K_{21} K_{32} \right) \\
 & + T^{(13)} (2 K_{23} K_{31} - K_{21} K_{23}) + T^{(22)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 \right) \\
 & + 4 T^{(23)} K_{23} K_{32} - T^{(33)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 + K_{21} K_{31} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(32)} T^{(23)} & = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130j} \\
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} - K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} - K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} + K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & + K_{21} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} \\
 & + T^{(11)} K_{21} K_{31} + T^{(12)} (2 K_{21} K_{32} - K_{31} K_{32})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + T^{(13)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{21}}{\partial X^3} + K_{23} K_{31} \right) - T^{(22)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 + K_{21} K_{31} \right) \\
 & + 4 T^{(23)} K_{23} K_{32} + T^{(33)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(23)} T^{(33)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130k}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} + 2 K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + 2 K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & - 2 T^{(12)} K_{31} K_{23} \\
 & + 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^2} \right) - 2 T^{(22)} K_{23} K_{32} \\
 & + 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^2} + K_{23}^2 \right) + 2 T^{(33)} K_{23} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(32)} T^{(33)} = \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial X^2 \partial X^3} \tag{R.130l}$$

$$\begin{aligned}
 & - K_{23} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} - K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{23} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} + 2 K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} + 2 K_{31} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} \\
 & - 2 T^{(12)} K_{31} K_{23} \\
 & + 2 T^{(13)} (K_{21} K_{32} - K_{31} K_{32}) - 2 T^{(22)} K_{23} K_{32} \\
 & - 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{23}}{\partial X^3} + K_{32}^2 + K_{21} K_{31} \right) + 2 T^{(33)} K_{23} K_{32}
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(33)} T^{(11)} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial (X^3)^2} \tag{R.131a}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} \\
 & - 4 K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 T^{(11)} K_{31}^2 + 2 T^{(12)} (K_{12} K_{31} - K_{21} K_{32} - K_{31} K_{32}) \\
 & - 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13} K_{31} \right) + 2 T^{(33)} K_{31}^2
 \end{aligned}$$

$$\nabla_{(33)} T^{(12)} = \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial (X^3)^2} \tag{R.131b}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & - 2 K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} - 2 K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + T^{(11)}(K_{21}K_{32} - K_{31}K_{32} - K_{12}K_{31}) - T^{(12)}(K_{31}^2 + K_{32}^2) \\
 & - T^{(13)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right) + T^{(22)}(K_{12}K_{31} - K_{21}K_{32} - K_{31}K_{32}) \\
 & - T^{(23)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13}K_{31}\right) + 2T^{(33)}K_{31}K_{32} \\
 \nabla_{(33)}T^{(13)} & = \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial (X^3)^2} \tag{R.131c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^1} + K_{32}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^2} - K_{33}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} \\
 & - 2K_{31}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} + 2K_{31}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(11)}}{\partial X^3} + 2K_{32}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(11)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13}K_{31}\right) + T^{(12)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right) \\
 & - T^{(13)}(4K_{31}^2 + K_{32}^2) \\
 & + T^{(23)}(K_{12}K_{31} - K_{21}K_{32} - 3K_{31}K_{32}) - T^{(33)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13}K_{31}\right) \\
 \nabla_{(33)}T^{(22)} & = \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial (X^3)^2} \tag{R.131d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^1} + K_{32}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^2} - K_{33}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} \\
 & - 4K_{32}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & + 2T^{(12)}(K_{21}K_{32} - K_{31}K_{32} - K_{12}K_{31}) \\
 & - 2T^{(22)}K_{32}^2 \\
 & - 2T^{(23)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right) + 2T^{(33)}K_{32}^2 \\
 \nabla_{(33)}T^{(23)} & = \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial (X^3)^2} \tag{R.131e}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K_{31}\frac{1}{h_1}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^1} + K_{32}\frac{1}{h_2}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^2} - K_{33}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & - 2K_{32}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} + 2K_{32}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(22)}}{\partial X^3} + 2K_{31}\frac{1}{h_3}\frac{\partial T^{(12)}}{\partial X^3} \\
 & + T^{(12)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13}K_{31}\right) \\
 & + T^{(13)}(K_{21}K_{32} - K_{12}K_{31} - 3K_{31}K_{32}) + T^{(22)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right) \\
 & - T^{(23)}(4K_{32}^2 + K_{31}^2) - T^{(33)}\left(\frac{1}{h_3}\frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23}K_{32}\right) \\
 \nabla_{(33)}T^{(33)} & = \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial (X^3)^2} \tag{R.131f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + K_{31} \frac{1}{h_1} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^1} + K_{32} \frac{1}{h_2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^2} - K_{33} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial X^3} \\
& + 4 K_{31} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial X^3} + 4 K_{32} \frac{1}{h_3} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial X^3} \\
& + 2 T^{(11)} K_{31}^2 + 4 T^{(12)} K_{31} K_{32} \\
& + 2 T^{(13)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{31}}{\partial X^3} - K_{13} K_{31} \right) + 2 T^{(22)} K_{32}^2 \\
& + 2 T^{(23)} \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial K_{32}}{\partial X^3} - K_{23} K_{32} \right) - 2 T^{(33)} (K_{32}^2 + K_{31}^2)
\end{aligned}$$

Il est clair que lorsque les relations d'Euclidicité sont vérifiées, les dérivées secondes croisées permutent.

### R.2.7 Termes de convection

Les opérateurs précédents permettent de formuler les opérateurs de convection utilisés dans le cadre d'une modélisation du second ordre.

#### Scalaire

D'une façon immédiate, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} \phi &= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{h_k} V^{(k)} \frac{\partial \phi}{\partial X^k} \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial \phi}{\partial X^3}
\end{aligned} \tag{R.132}$$

#### Vectoriel

Là encore, les regroupements sont immédiats :

$$\frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} T^{(i)} = \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t} + \frac{1}{h_k} V^{(k)} \frac{\partial T^{(i)}}{\partial X^k} + T^{(k)} [K_{ik} V^{(i)} - K_{ki} V^{(k)}] \tag{R.133}$$

L'écriture de ces termes pour chacune des équations scalaires de quantité de mouvement moyen est la suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} V^{(1)} &= \frac{\partial V^{(1)}}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial V^{(1)}}{\partial X^3} \\
&+ (K_{12} V^{(1)} - K_{21} V^{(2)}) V^{(2)} + (K_{13} V^{(1)} - K_{31} V^{(3)}) V^{(3)}
\end{aligned} \tag{R.134a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V^{(2)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} V^{(2)} &= \frac{\partial V^{(2)}}{\partial t} \\
&+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial V^{(2)}}{\partial X^3} \\
&+ (K_{23} V^{(2)} - K_{32} V^{(3)}) V^{(3)} + (K_{21} V^{(2)} - K_{12} V^{(1)}) V^{(1)}
\end{aligned} \tag{R.134b}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V^{(3)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} V^{(3)} &= \frac{\partial V^{(3)}}{\partial t} & (R.134c) \\
 &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial V^{(3)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial V^{(3)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial V^{(3)}}{\partial X^3} \\
 &+ (K_{31} V^{(3)} - K_{13} V^{(1)}) V^{(1)} + (K_{32} V^{(3)} - K_{23} V^{(2)}) V^{(2)}
 \end{aligned}$$

**Tenseur du second ordre**

La forme indicielle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(ij)} &= \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + \frac{1}{h_k} V^{(k)} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^k} & (R.135) \\
 &+ R^{(in)} [V^{(j)} K_{jn} - V^{(n)} K_{nj}] + R^{(jn)} [V^{(i)} K_{in} - V^{(n)} K_{ni}]
 \end{aligned}$$

Dans le cas des équations d'évolution du tenseur de Reynolds, il vient donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(11)} &= \frac{\partial R^{(11)}}{\partial t} & (R.136a) \\
 &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^3} \\
 &+ 2 R^{(12)} [V^{(1)} K_{12} - V^{(2)} K_{21}] + 2 R^{(13)} [V^{(1)} K_{13} - V^{(3)} K_{31}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(22)} &= \frac{\partial R^{(22)}}{\partial t} & (R.136b) \\
 &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} \\
 &+ 2 R^{(12)} [V^{(2)} K_{21} - V^{(1)} K_{12}] + 2 R^{(23)} [V^{(2)} K_{23} - V^{(3)} K_{32}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(33)} &= \frac{\partial R^{(33)}}{\partial t} & (R.136c) \\
 &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} \\
 &+ 2 R^{(13)} [V^{(3)} K_{31} - V^{(1)} K_{13}] + 2 R^{(23)} [V^{(3)} K_{32} - V^{(2)} K_{23}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(12)} &= \frac{\partial R^{(12)}}{\partial t} & (R.136d) \\
 &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} \\
 &+ R^{(11)} [V^{(2)} K_{21} - V^{(1)} K_{12}] + R^{(13)} [V^{(2)} K_{23} - V^{(3)} K_{32}] \\
 &+ R^{(22)} [V^{(1)} K_{12} - V^{(2)} K_{21}] + R^{(23)} [V^{(1)} K_{13} - V^{(3)} K_{31}]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(13)} &= \frac{\partial R^{(13)}}{\partial t} & (R.136e) \\ &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} \\ &+ R^{(11)} [V^{(3)} K_{11} - V^{(1)} K_{13}] + R^{(12)} [V^{(3)} K_{32} - V^{(2)} K_{23}] \\ &+ R^{(23)} [V^{(1)} K_{12} - V^{(2)} K_{21}] + R^{(33)} [V^{(1)} K_{13} - V^{(3)} K_{31}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial t} + V^{(k)} \nabla_{(k)} R^{(23)} &= \frac{\partial R^{(23)}}{\partial t} & (R.136f) \\ &+ \frac{1}{h_1} V^{(1)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} V^{(2)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} V^{(3)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} \\ &+ R^{(12)} [V^{(3)} K_{31} - V^{(1)} K_{13}] + R^{(22)} [V^{(3)} K_{32} - V^{(2)} K_{23}] \\ &+ R^{(13)} [V^{(2)} K_{21} - V^{(1)} K_{12}] + R^{(33)} [V^{(2)} K_{23} - V^{(3)} K_{32}] \end{aligned}$$

Il faut noter que dans les termes extra-diagonaux, le coefficient de courbure intervient sur quatre termes supplémentaires par rapport à l'écriture cartésienne, alors que ce nombre se réduit à deux sur les composantes normales.

## R.2.8 Termes de diffusion

### Scalaire

Les termes de diffusion moléculaire sont des Laplaciens. La prise en compte de la diffusion turbulente par une hypothèse de type gradient modifie donc légèrement la forme des termes de diffusion. La forme du terme de diffusion scalaire a déjà été présentée dans les paragraphes précédents. Il s'écrit, en développant les termes dont une partie est implicite dans le schéma :

$$\nabla_{(k)} T^{\varepsilon(k)} = \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(n)} \varepsilon + \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(k)} (\nabla_{(n)} \varepsilon) \quad (R.137)$$

La dérivée covariante seconde est symétrique, ce qui permet de développer ce terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \nabla_{(k)} T^{\varepsilon(k)} &= \bar{R}^{(11)} \nabla_{(11)} \varepsilon + \bar{R}^{(22)} \nabla_{(22)} \varepsilon + \bar{R}^{(33)} \nabla_{(33)} \varepsilon \\ &+ \nabla_{(k)} \bar{R}^{(1k)} \nabla_{(1)} \varepsilon + \nabla_{(k)} \bar{R}^{(2k)} \nabla_{(2)} \varepsilon + \nabla_{(k)} \bar{R}^{(3k)} \nabla_{(3)} \varepsilon \\ &+ 2 (\bar{R}^{(12)} \nabla_{(12)} \varepsilon + \bar{R}^{(13)} \nabla_{(13)} \varepsilon + \bar{R}^{(23)} \nabla_{(23)} \varepsilon) \end{aligned} \quad (R.138)$$

Les dérivées doubles covariantes font intervenir les dérivées partielles secondes correspondantes ainsi que toutes les dérivées partielles premières. Les dérivées croisées covariantes ne font par contre intervenir que les dérivées partielles croisées et les dérivées partielles premières des mêmes

indices. Ceci permet d'écrire le terme de diffusion sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(k)} T^{\varepsilon(k)} &= \bar{R}^{(11)} \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (X^1)^2} + \bar{R}^{(22)} \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (X^2)^2} + \bar{R}^{(33)} \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (X^3)^2} \\
 &+ (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(1k)} - K_{11} \bar{R}^{(11)} + K_{21} \bar{R}^{(22)} + K_{31} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{12} \bar{R}^{(12)} - 2 K_{13} \bar{R}^{(13)}) \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^1} \\
 &+ (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(2k)} + K_{12} \bar{R}^{(11)} - K_{22} \bar{R}^{(22)} + K_{32} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{21} \bar{R}^{(12)} - 2 K_{23} \bar{R}^{(23)}) \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^2} \\
 &+ (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(3k)} + K_{13} \bar{R}^{(11)} + K_{23} \bar{R}^{(22)} - K_{33} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{31} \bar{R}^{(13)} - 2 K_{32} \bar{R}^{(23)}) \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^3} \\
 &+ 2 \bar{R}^{(12)} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^1 \partial X^2} + 2 \bar{R}^{(13)} \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^1 \partial X^3} + 2 \bar{R}^{(23)} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^2 \partial X^3}
 \end{aligned} \tag{R.139}$$

Cette expression permet d'apprécier la différence du terme de diffusion dans un repère physique orthogonal avec l'expression cartésienne où les normes sont unitaires. Les coefficients des termes convectifs font apparaître de plus les coefficients d'étirements  $K_{ij}$  qui sont nuls en cartésien.

### Vitesse

Les termes de diffusion des équations de transport vectorielles que sont les équations de Navier-Stokes Reynolds sont *a priori* évalués par un Laplacien vectoriel dont l'expression a été donnée précédemment. Cette écriture est précisée par la suite dans le cas des modèles à deux équations de transport, à concept de viscosité turbulente. Dans le cas des modèles du second ordre, elle est immédiate dans la mesure où la viscosité dynamique est supposée constante.

### Tenseur de Reynolds

Dans le cas où les termes de diffusion sont traités par le modèle d'Hanjalic et Launder, ils s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(k)} T^{(ijk)} &= \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \nabla_{(n)} R^{(jk)} + \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} \nabla_{(n)} R^{(ik)} + \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(n)} R^{(ij)} \\
 &+ \tilde{R}^{(in)} \nabla_{(kn)} R^{(jk)} + \tilde{R}^{(jn)} \nabla_{(kn)} R^{(ik)} + \bar{R}^{(nk)} \nabla_{(kn)} R^{(ij)}
 \end{aligned} \tag{R.140}$$

Cette expression est analogue à l'expression cartésienne, en remplaçant l'ensemble des dérivées cartésiennes par des dérivées covariantes. Les dérivées secondes covariantes font intervenir les dérivées partielles premières et secondes correspondantes, ainsi que des termes directement en

facteur du tenseur de Reynolds. Elle se met par conséquent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(k)} T^{(ijk)} &= \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \\
 &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ik)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(jk)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \\
 &+ \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \bar{R}^{(nk)} \\
 &+ \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(ik)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(jk)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \tilde{R}^{(in)} \\
 &+ \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}
 \end{aligned} \tag{R.141}$$

où  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  contient d'une part les termes de courbures provenant de la décomposition des dérivées premières covariantes et d'autre part les termes incluant les dérivées premières du tenseur de Reynolds ainsi que les tenseurs de courbure contenus dans l'expression des dérivées secondes covariantes de tenseur de Reynolds. Rappelons par ailleurs les notations :

$$\tilde{R}^{(ij)} = C_s \frac{K}{\varepsilon} R^{(ij)} \tag{R.142a}$$

$$\bar{R}^{(ij)} = \nu \delta_{ij} + C_s \frac{K}{\varepsilon} \tilde{R}^{(ij)} \tag{R.142b}$$

Leurs dérivées covariantes sont identiques, puisque la viscosité moléculaire est constante et que le repère est orthogonal. En conservant les notations introduites au paragraphe général, le reste  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  se met sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} &= \left[ \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \right] \left[ \Gamma_{(pn)}^{(i)} R^{(pj)} + \Gamma_{(pn)}^{(j)} R^{(ip)} \right] \\
 &+ \left[ \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} \right] \left[ \Gamma_{(pn)}^{(i)} R^{(pk)} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} R^{(ip)} \right] + \left[ \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \right] \left[ \Gamma_{(pn)}^{(j)} R^{(pk)} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} R^{(jk)} \right] \\
 &+ \bar{R}^{(nk)} \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{jq} \right) + R^{(pq)} R_{(pq)kn}^{(ij)} \right] \\
 &+ \tilde{R}^{(jn)} \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{kq} + B_{(q)kn}^{(k\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{kq} \right) + R^{(pq)} R_{(pq)kn}^{(ik)} \right] \\
 &+ \tilde{R}^{(in)} \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{kp} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{kp} + B_{(p)kn}^{(k\alpha)} \delta_{jq} \right) + R^{(pq)} R_{(pq)kn}^{(kj)} \right]
 \end{aligned} \tag{R.143}$$

Le détail de chacune de ces composantes ne sera effectué que pour le cas d'une base de référence cylindrique.

## R.2.9 Equations du mouvement d'un modèle à deux équations

### Continuité

La forme conservative de l'équation de continuité a déjà été présentée lors du calcul de la divergence d'un vecteur. Elle s'écrit :

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_2 h_3 U^{(1)})}{\partial X^1} + \frac{\partial(h_1 h_3 U^{(2)})}{\partial X^2} + \frac{\partial(h_1 h_2 U^{(3)})}{\partial X^3} \right] = 0 \quad (\text{R.144})$$

### Equations du mouvement moyen

Les modèles linéaires de type  $K-\varepsilon$  expriment le tenseur de Reynolds en fonction des gradients de vitesse moyenne par une hypothèse newtonienne avec une viscosité turbulente isotrope. Les composantes contravariantes du tenseur de Reynolds s'écrivent ainsi :

$$R^{(ij)} = \frac{2}{3} K \delta_{ij} - \nu_t (\nabla_{(j)} U^{(i)} + \nabla_{(i)} U^{(j)}) \quad (\text{R.145})$$

où  $K$  est l'énergie cinétique de la turbulence et  $\nu_t$ , la viscosité turbulente. Le détail de chacune de ces composantes conduit à :

$$R^{(11)} = \frac{2}{3} K - 2 \nu_t \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} + K_{12} U^{(2)} + K_{13} U^{(3)} \right] \quad (\text{R.146a})$$

$$R^{(22)} = \frac{2}{3} K - 2 \nu_t \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} + K_{21} U^{(1)} + K_{23} U^{(3)} \right] \quad (\text{R.146b})$$

$$R^{(33)} = \frac{2}{3} K - 2 \nu_t \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} + K_{32} U^{(2)} + K_{31} U^{(1)} \right] \quad (\text{R.146c})$$

$$R^{(12)} = -\nu_t \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^2} - K_{12} U^{(1)} - K_{21} U^{(2)} \right] \quad (\text{R.146d})$$

$$R^{(13)} = -\nu_t \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^3} - K_{13} U^{(1)} - K_{31} U^{(3)} \right] \quad (\text{R.146e})$$

$$R^{(23)} = -\nu_t \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^3} - K_{23} U^{(2)} - K_{32} U^{(3)} \right] \quad (\text{R.146f})$$

Ces expressions sont introduites dans les équations du mouvement moyen, qui s'écrivent sous forme convective de la façon suivante :

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + [U^{(k)} - \nabla_{(k)} \nu_t] \nabla_{(k)} U^{(i)} = -\nabla_{(i)} \left[ \frac{1}{\rho} P + \frac{2}{3} K \right] + \nabla_{(j)} \nu_t \nabla_{(i)} U^{(j)} + (\nu + \nu_t) \Delta U^{(i)} \quad (\text{R.147})$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + [U^{(k)} - \nabla_{(k)} \nu_t] \frac{1}{h_k} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial X^k} &= - [U^{(k)} - \nabla_{(k)} \nu_t] \Gamma_{(nk)}^{(i)} U^{(n)} \\ &\quad - \nabla_{(i)} \left[ \frac{1}{\rho} P + \frac{2}{3} K \right] + \nabla_{(j)} \nu_t \nabla_{(i)} U^{(j)} + (\nu + \nu_t) \Delta U^{(i)} \end{aligned} \quad (\text{R.148})$$

En notant  $P^t$  la pression turbulente  $P^t = P/\rho + 2/3 K$ , les équations de chacune des composantes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^2} & (R.149a) \\
 + & \left[ U^{(3)} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^3} + (K_{12} U^{(1)} - K_{21} U^{(2)}) U^{(2)} + (K_{13} U^{(1)} - K_{31} U^{(3)}) U^{(3)} \\
 = & \\
 - & \frac{1}{h_1} \frac{\partial P^t}{\partial X^1} \\
 + & \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} + 2 K_{12} U^{(2)} + 2 K_{13} U^{(3)} \right] \\
 + & \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^1} - K_{12} U^{(1)} - K_{21} U^{(2)} \right] \\
 + & \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^1} - K_{13} U^{(1)} - K_{31} U^{(3)} \right] \\
 + & (\nu + \nu_t) \left[ \nabla^2(U^{(1)}) + 2 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^1} K_{12} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} K_{21} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^1} K_{13} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} K_{31} \right) \right. \\
 + & \left. \alpha_{11} U^{(1)} + \alpha_{12} U^{(2)} + \alpha_{13} U^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^1} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} & (R.149b) \\
 + & \left[ U^{(3)} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^3} + (K_{23} U^{(2)} - K_{32} U^{(3)}) U^{(3)} + (K_{21} U^{(2)} - K_{12} U^{(1)}) U^{(1)} \\
 = & \\
 - & \frac{1}{h_2} \frac{\partial P^t}{\partial X^2} \\
 + & \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^2} - K_{21} U^{(2)} - K_{12} U^{(1)} \right] \\
 + & \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} + 2 K_{21} U^{(1)} + 2 K_{23} U^{(3)} \right] \\
 + & \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \left[ \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^2} - K_{23} U^{(2)} - K_{32} U^{(3)} \right] \\
 + & (\nu + \nu_t) \left[ \nabla^2(U^{(2)}) + 2 \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^2} K_{21} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} K_{12} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^2} K_{23} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} K_{32} \right) \right. \\
 + & \left. \alpha_{21} U^{(1)} + \alpha_{22} U^{(2)} + \alpha_{23} U^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^1} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^2} \quad (R.149c)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} + (K_{31} U^{(3)} - K_{13} U^{(1)}) U^{(1)} + (K_{32} U^{(3)} - K_{23} U^{(2)}) U^{(2)} \\
 & = \\
 & - \frac{1}{h_3} \frac{\partial P^t}{\partial X^3} \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^3} - K_{31} U^{(3)} - K_{13} U^{(1)} \right] \\
 & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^3} - K_{32} U^{(3)} - K_{23} U^{(2)} \right] \\
 & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} + 2 K_{32} U^{(2)} + 2 K_{31} U^{(1)} \right] \\
 & + (\nu + \nu_t) \left[ \nabla^2 (U^{(3)}) + 2 \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^3} K_{31} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} K_{13} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^3} K_{32} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} K_{23} \right) \right. \\
 & \left. + \alpha_{31} U^{(1)} + \alpha_{32} U^{(2)} + \alpha_{33} U^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

Il faut noter que les vitesses de convection peuvent être modifiées en regroupant la composante du gradient de viscosité turbulente dans le second membre avec la convection correspondante, ce qui conduit à multiplier par un facteur deux le terme de viscosité turbulente de la  $i^{\text{e}}$  composante de vitesse de convection dans l'équation d'évolution de  $U^{(i)}$ . Ce choix conduit à construire des opérateurs de convection-diffusion différents pour chaque équation de quantité de mouvement, ce qui nécessite un stockage plus important en mémoire. Pour cette raison, il ne sera pas retenu par la suite.

### Equation d'évolution de la dissipation

Le modèle de diffusion est classiquement de type gradient et s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^1} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^2} \\
 & + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^3} = S_\varepsilon + \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla^2 \varepsilon
 \end{aligned} \tag{R.150}$$

### Equation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente

L'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente s'écrit de la même façon :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial K}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial K}{\partial X^1} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial K}{\partial X^2} \\
 & + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial K}{\partial X^3} = S_K + \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \nabla^2 K
 \end{aligned} \tag{R.151}$$

L'ensemble des équations d'un modèle à deux équations de transport peut se mettre sous

une forme convective générale suivant :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= \frac{1}{\left(\nu + \frac{\nu_t}{d_\phi}\right)} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{c_\phi^1}{d_\phi} \frac{1}{h_1} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^1} \right] \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial X^1} \right. \\ &+ \left. \left[ U^{(2)} - \frac{c_\phi^2}{d_\phi} \frac{1}{h_2} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^2} \right] \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial X^2} + \left[ U^{(3)} - \frac{c_\phi^3}{d_\phi} \frac{1}{h_3} \frac{\partial \nu_t}{\partial X^3} \right] \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial X^3} - S_\phi \right] \end{aligned} \quad (\text{R.152})$$

## R.2.10 Equations du mouvement d'un modèle du second ordre

### Continuité

La forme conservative de l'équation de continuité s'écrit toujours :

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_2 h_3 U^{(1)})}{\partial X^1} + \frac{\partial (h_1 h_3 U^{(2)})}{\partial X^2} + \frac{\partial (h_1 h_2 U^{(3)})}{\partial X^3} \right] = 0 \quad (\text{R.153})$$

### Equations du mouvement moyen

Les équations de Navier-Stokes-Reynolds s'écrivent dans la base physique sous la forme :

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} + U^{(k)} \nabla_{(k)} U^{(i)} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{(i)} P - \nabla_{(j)} R^{(ij)} + \nu \Delta U^{(i)} \quad (\text{R.154})$$

Les trois équations sont donc :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^3} \\ &+ (K_{12} U^{(1)} - K_{21} U^{(2)}) U^{(2)} + (K_{13} U^{(1)} - K_{31} U^{(3)}) U^{(3)} \\ &= \\ &- \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_1} \frac{\partial P}{\partial X^1} \\ &- \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} \\ &- (2 R^{(12)}) K_{12} + (2 R^{(13)}) K_{13} + (R^{(13)}) K_{23} \\ &- (R^{(11)} - R^{(22)}) K_{21} - (R^{(11)} - R^{(33)}) K_{31} - (R^{(12)}) K_{32} \\ &+ \nu \left[ \nabla^2 (U^{(1)}) + 2 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^1} K_{12} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} K_{21} + \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^1} K_{13} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} K_{31} \right) \right. \\ &+ \left. \alpha_{11} U^{(1)} + \alpha_{12} U^{(2)} + \alpha_{13} U^{(3)} \right] \end{aligned} \quad (\text{R.155a})$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^3} \\ &+ (K_{23} U^{(2)} - K_{32} U^{(3)}) U^{(3)} + (K_{21} U^{(2)} - K_{12} U^{(1)}) U^{(1)} \\ &= \end{aligned} \quad (\text{R.155b})$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_2} \frac{\partial P}{\partial X^2} \\
 & - \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} \\
 & - (R^{(22)} - R^{(11)}) K_{12} - (R^{(23)}) K_{13} - (2 R^{(23)}) K_{23} \\
 & - (2 R^{(12)}) K_{21} - (R^{(12)}) K_{31} - (R^{(22)} - R^{(33)}) K_{32} \\
 & + \nu \left[ \nabla^2(U^{(2)}) + 2 \left( \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^2} K_{21} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} K_{12} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^2} K_{23} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} K_{32} \right) \right. \\
 & \left. + \alpha_{21} U^{(1)} + \alpha_{22} U^{(2)} + \alpha_{23} U^{(3)} \right] \\
 \\
 & \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial X^3} \tag{R.155c} \\
 & + (K_{31} U^{(3)} - K_{13} U^{(1)}) U^{(1)} + (K_{32} U^{(3)} - K_{23} U^{(2)}) U^{(2)} \\
 & = \\
 & - \frac{1}{\rho} \frac{1}{h_3} \frac{\partial P}{\partial X^3} \\
 & - \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} \\
 & - (R^{(23)}) K_{12} - (R^{(33)} - R^{(11)}) K_{13} - (R^{(33)} - R^{(22)}) K_{23} \\
 & - (R^{(13)}) K_{21} - (2 R^{(13)}) K_{31} - (2 R^{(23)}) K_{32} \\
 & + \nu \left[ \nabla^2(U^{(3)}) + 2 \left( \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^3} K_{31} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial X^1} K_{13} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^3} K_{32} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial X^2} K_{23} \right) \right. \\
 & \left. + \alpha_{31} U^{(1)} + \alpha_{32} U^{(2)} + \alpha_{33} U^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

### Equation d'évolution de la dissipation

Les termes de convection ont déjà été présentés. Les termes sources explicites sont des scalaires et quels que soient les opérateurs qui les évaluent, ils se notent  $S_\varepsilon$ . Les termes de diffusion



sont également détaillés, pour un modèle de type gradient.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^3} \\
&= S_\varepsilon \\
&+ (\bar{R}^{(11)}) \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (X^1)^2} + (\bar{R}^{(22)}) \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (X^2)^2} + (\bar{R}^{(33)}) \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (X^3)^2} \\
&+ (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(1k)} - K_{11} \bar{R}^{(11)} + K_{21} \bar{R}^{(22)} + K_{31} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{12} \bar{R}^{(12)} - 2 K_{13} \bar{R}^{(13)}) \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^1} \\
&+ (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(2k)} + K_{12} \bar{R}^{(11)} - K_{22} \bar{R}^{(22)} + K_{32} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{21} \bar{R}^{(12)} - 2 K_{23} \bar{R}^{(23)}) \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^2} \\
&+ (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(3k)} + K_{13} \bar{R}^{(11)} + K_{23} \bar{R}^{(22)} - K_{33} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{31} \bar{R}^{(13)} - 2 K_{32} \bar{R}^{(23)}) \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial X^3} \\
&+ 2 (\bar{R}^{(12)}) \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^1 \partial X^2} + 2 (\bar{R}^{(13)}) \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^1 \partial X^3} + 2 (\bar{R}^{(23)}) \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X^2 \partial X^3}
\end{aligned} \tag{R.156}$$

### Equation d'évolution des corrélations doubles

Seuls les termes susceptibles d'être évalués de façon implicite sont détaillés. Les autres termes se calculent aisément en appliquant les opérateurs présentés précédemment.

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R^{(11)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^3} \\
&+ 2 R^{(12)} [U^{(1)} K_{12} - U^{(2)} K_{21}] + 2 R^{(13)} [U^{(1)} K_{13} - U^{(3)} K_{31}] \\
&= P^{(11)} + \phi^{(11)} - \varepsilon^{(11)} \\
&+ \nabla_{(1)}^c T^{(111)} + \nabla_{(2)}^c T^{(112)} + \nabla_{(3)}^c T^{(113)} \\
&+ \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(13)}] \\
&+ \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(23)}] \\
&+ \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(33)}] \\
&+ \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial (X^1)^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial (X^2)^2} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial (X^3)^2} [\bar{R}^{(33)}] \\
&+ \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\bar{R}^{(33)}] \\
&+ \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(13)}] \\
&+ \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(13)}] \\
&+ \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(13)}]
\end{aligned} \tag{R.157a}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(12)}] \\
 \\
 & \frac{\partial R^{(22)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} \tag{R.157b} \\
 & + 2 R^{(12)} [U^{(2)} K_{21} - U^{(1)} K_{12}] + 2 R^{(23)} [U^{(2)} K_{23} - U^{(3)} K_{32}] \\
 & = P^{(22)} + \phi^{(22)} - \varepsilon^{(22)} \\
 & + \nabla_{(1)}^c T^{(221)} + \nabla_{(2)}^c T^{(222)} + \nabla_{(3)}^c T^{(223)} \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial (X^1)^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial (X^2)^2} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial (X^3)^2} [\bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{2}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(22)}] \\
& \frac{\partial R^{(33)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} \tag{R.157c} \\
& + 2 R^{(13)} [U^{(3)} K_{31} - U^{(1)} K_{13}] + 2 R^{(23)} [U^{(3)} K_{32} - U^{(2)} K_{23}] \\
& = P^{(33)} + \phi^{(33)} - \varepsilon^{(33)} \\
& + \nabla_{(1)}^c T^{(331)} + \nabla_{(2)}^c T^{(332)} + \nabla_{(3)}^c T^{(333)} \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(13)}] \\
& + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial (X^1)^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial (X^2)^2} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial (X^3)^2} [\bar{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\bar{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{2}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{2}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{2}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(23)}] + \frac{2}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(23)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(33)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial R^{(12)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} \tag{R.157d} \\
& + R^{(11)} [U^{(2)} K_{21} - U^{(1)} K_{12}] + R^{(13)} [U^{(2)} K_{23} - U^{(3)} K_{32}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + R^{(22)} [U^{(1)}K_{12} - U^{(2)}K_{21}] + R^{(23)} [U^{(1)}K_{13} - U^{(3)}K_{31}] \\
 & = P^{(12)} + \phi^{(12)} - \varepsilon^{(12)} \\
 & + \nabla_{(1)}^c T^{(121)} + \nabla_{(2)}^c T^{(122)} + \nabla_{(3)}^c T^{(123)} \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^1)^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^2)^2} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^3)^2} [\bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)}] \\
 & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \tilde{R}^{(22)}] \\
 & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(22)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(12)}] \\
& \frac{\partial R^{(13)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} \tag{R.157e} \\
& + R^{(11)} [U^{(3)} K_{11} - U^{(1)} K_{13}] + R^{(12)} [U^{(3)} K_{32} - U^{(2)} K_{23}] \\
& + R^{(23)} [U^{(1)} K_{12} - U^{(2)} K_{21}] + R^{(33)} [U^{(1)} K_{13} - U^{(3)} K_{31}] \\
& = P^{(13)} + \phi^{(13)} - \varepsilon^{(13)} \\
& + \nabla_{(1)}^c T^{(131)} + \nabla_{(2)}^c T^{(132)} + \nabla_{(3)}^c T^{(133)} \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(13)}] \\
& + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^1)^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^2)^2} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^3)^2} [\bar{R}^{(33)}] \\
& + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\bar{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(11)} + \nabla_{(3)} \tilde{R}^{(13)}] \\
& + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(13)} + \nabla_{(3)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(13)}] \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(13)}] \\
& + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(13)}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(11)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(12)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial R^{(23)}}{\partial t} + \frac{1}{h_1} U^{(1)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} + \frac{1}{h_2} U^{(2)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} + \frac{1}{h_3} U^{(3)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} \tag{R.157f} \\
 & + R^{(12)} [U^{(3)} K_{31} - U^{(1)} K_{13}] + R^{(22)} [U^{(3)} K_{32} - U^{(2)} K_{23}] \\
 & + R^{(13)} [U^{(2)} K_{21} - U^{(1)} K_{12}] + R^{(33)} [U^{(2)} K_{23} - U^{(3)} K_{32}] \\
 & = P^{(23)} + \phi^{(23)} - \varepsilon^{(23)} \\
 & + \nabla_{(1)}^c T^{(231)} + \nabla_{(2)}^c T^{(232)} + \nabla_{(3)}^c T^{(233)} \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(11)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(12)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \bar{R}^{(13)} + \nabla_{(2)} \bar{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^1)^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^2)^2} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^3)^2} [\bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{2}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\bar{R}^{(11)}] + \frac{2}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\bar{R}^{(22)}] + \frac{2}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\bar{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(12)} + \nabla_{(3)} \tilde{R}^{(13)}] \\
 & + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(22)} + \nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] \\
 & + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)} + \nabla_{(3)} \tilde{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(33)}] \\
 & + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^1} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^2} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial X^3} [\nabla_{(1)} \tilde{R}^{(23)}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^1} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^2} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial X^3} [\nabla_{(2)} \tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^1} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^2} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial X^3} [\nabla_{(3)} \tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial (X^1)^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial (X^2)^2} [\tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial (X^3)^2} [\tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(23)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(23)}] + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(12)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(22)}] + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(13)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(23)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^1 \partial X^2} [\tilde{R}^{(13)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(22)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(33)}] \\
& + \frac{1}{h_1 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^1 \partial X^3} [\tilde{R}^{(12)}] + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial^2 R^{(33)}}{\partial X^2 \partial X^3} [\tilde{R}^{(22)}]
\end{aligned}$$

### R.3 Application à un système de coordonnées cylindriques

Le cas d'un système de coordonnées orthogonales s'applique au cas des coordonnées cylindriques. Les axes de coordonnées sont placés dans les directions indiquées sur la figure R.1.

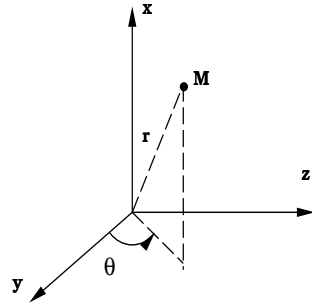


FIG. R.1: repère cylindrique.

Les coordonnées curvilignes sont donc

$$\begin{aligned}
X^1 &= x \\
X^2 &= r \\
X^3 &= \theta
\end{aligned} \tag{R.158}$$

La base covariante associée est dimensionnelle et notée :

$$\begin{aligned} g_1 &= e_x \\ g_2 &= e_r \\ g_3 &= e_\theta \end{aligned} \tag{R.159}$$

Si  $[i_a]$  désigne une base liée aux coordonnées cartésiennes  $\{x_a\}$ , la transformation cylindrique fournit la matrice Jacobienne suivante :

$$\frac{\partial x_a}{\partial X^i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -r \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix} \tag{R.160}$$

et que les normes des vecteurs de la base cylindrique sont respectivement  $\|e_x\| = 1$ ,  $\|e_r\| = 1$  et  $\|e_\theta\| = r$ . Par conséquent, les étirements sont définis par :

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \\ h_2 &= 1 \\ h_3 &= r \end{aligned} \tag{R.161}$$

Par conséquent, le tenseur de courbure  $K_{ij}$  est extrêmement simple :

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{R.162}$$

Le seul terme non nul est donc  $K_{32}$ . Ceci simplifie considérablement les expressions des symboles de Christoffel, puisque les seuls termes non nuls des symboles classiques sont :

$$\Gamma_{23}^3 = \frac{1}{r} \tag{R.163a}$$

$$\Gamma_{32}^3 = \frac{1}{r} \tag{R.163b}$$

$$\Gamma_{33}^2 = -r \tag{R.163c}$$

Par conséquent, il vient :

$$\tilde{\Gamma}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{R.164a}$$

$$\tilde{\Gamma}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \tag{R.164b}$$

$$\tilde{\Gamma}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \end{bmatrix} \tag{R.164c}$$

et les symboles de Christoffel physiques se réduisent à :

$$\Gamma^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{R.165a}$$



$$\Gamma^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \quad (R.165b)$$

$$\Gamma^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (R.165c)$$

Il est immédiat également que les relations d'Euclidicité sont satisfaites. Les expressions des principaux opérateurs se voient ainsi simplifiées.

### R.3.1 Gradients

#### Scalaire

$$\nabla\phi = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \end{bmatrix} \quad (R.166)$$

#### Vecteur

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} & \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial\theta} \\ \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} & \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial\theta} - \frac{1}{r} T^{(3)} \\ \frac{\partial T^{(3)}}{\partial x} & \frac{\partial T^{(3)}}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial\theta} + \frac{1}{r} T^{(2)} \end{bmatrix} \quad (R.167)$$

#### Tenseur symétrique du second ordre

Les termes faisant intervenir la dérivée suivant la troisième direction sont modifiés par rapport à une écriture dans une base cartésienne de référence. Il vient :

$$\nabla_{(1)} T^{(ij)} = \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial x} \quad (R.168)$$

et

$$\nabla_{(2)} T^{(ij)} = \frac{\partial T^{(ij)}}{\partial r} \quad (R.169)$$

Dans la troisième direction, il vient :

$$\nabla_{(3)} T^{(11)} = \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial\theta} \quad (R.170a)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(12)} = \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} T^{(13)} \quad (R.170b)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(13)} = \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T^{(12)} \quad (R.170c)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(22)} = \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} T^{(23)} \quad (R.170d)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(23)} = \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T^{(22)} - T^{(33)}) \quad (R.170e)$$

$$\nabla_{(3)}T^{(33)} = \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} T^{(23)} \quad (R.170f)$$

### R.3.2 Divergences

Le Jacobien est défini par :

$$J = r \quad (R.171)$$

#### Vecteur

La divergence d'un vecteur s'écrit :

$$\nabla_{(i)}T^{(i)} = \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rT^{(2)})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial \theta} \quad (R.172)$$

#### Tenseur symétrique du second ordre

$$\nabla_{(n)}T^{(1n)} = \frac{\partial T^{(11)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} T^{(12)} \quad (R.173a)$$

$$\nabla_{(n)}T^{(2n)} = \frac{\partial T^{(12)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (T^{(22)} - T^{(33)}) \quad (R.173b)$$

$$\nabla_{(n)}T^{(3n)} = \frac{\partial T^{(13)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} T^{(23)} \quad (R.173c)$$

### R.3.3 Laplaciens

#### Scalaire

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (R.174)$$

Soit encore, sous forme conservative :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \quad (R.175)$$

**Vecteur**

$$\Delta T^{(1)} = \nabla^2 T^{(1)} \quad (R.176a)$$

$$\Delta T^{(2)} = \nabla^2 T^{(2)} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(2)} \quad (R.176b)$$

$$\Delta T^{(3)} = \nabla^2 T^{(3)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(3)} \quad (R.176c)$$

avec l'opérateur :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (R.177)$$

en effet, les coefficients d'étirement  $f^{(k)}$  et de courbure  $\alpha_{nm}$  s'écrivent :

$$f^{(1)} = 0 \quad f^{(2)} = \frac{1}{r} \quad f^{(3)} = 0 \quad (R.178)$$

et

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = 0 & \alpha_{21} = 0 & \alpha_{31} = 0 \\ \alpha_{12} = 0 & \alpha_{22} = -\frac{1}{r^2} & \alpha_{32} = 0 \\ \alpha_{13} = 0 & \alpha_{23} = 0 & \alpha_{33} = -\frac{1}{r^2} \end{array} \quad (R.179)$$

### R.3.4 Dérivée covariante seconde

**Scalaire**

$$\nabla_{(11)}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (R.180a)$$

$$\nabla_{(12)}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial r} \quad (R.180b)$$

$$\nabla_{(13)}\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial \theta} \quad (R.180c)$$

$$\nabla_{(22)}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \quad (R.180d)$$

$$\nabla_{(23)}\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (R.180e)$$

$$\nabla_{(33)}\phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad (R.180f)$$

**Vecteur**

Les seuls termes faisant intervenir les termes de courbures sont ceux qui comprennent au moins une dérivée suivant la troisième direction.

$$\nabla_{(11)}T^{(i)} = \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial x^2} \quad (R.181)$$

$$\nabla_{(12)}T^{(i)} = \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial x r} \quad (R.182)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x \partial \theta} \quad (R.183a)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial x} \quad (R.183b)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(3)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial x} \quad (R.183c)$$

$$\nabla_{(22)}T^{(i)} = \frac{\partial^2 T^{(i)}}{\partial r^2} \quad (R.184)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(1)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \theta} \quad (R.185a)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(2)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} T^{(3)} \quad (R.185b)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(3)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(2)} \quad (R.185c)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(1)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} \quad (R.186a)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(2)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(2)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(2)} \quad (R.186b)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(3)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(3)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(3)}}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(3)} \quad (R.186c)$$

### Tenseur symétrique du second ordre

Seules les dérivées suivant la troisième composante modifient les expressions. Les relations d'Euclidicité sont satisfaites. Il vient :

$$\nabla_{(11)}T^{(ij)} = \frac{\partial^2 T^{(ij)}}{\partial x^2} \quad (R.187)$$

$$\nabla_{(12)}T^{(ij)} = \frac{\partial^2 T^{(ij)}}{\partial x \partial r} \quad (R.188)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(11)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial x \partial \theta} \quad (R.189a)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(12)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial x} \quad (R.189b)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(13)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial x} \quad (R.189c)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(22)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial x \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial x} \quad (R.189d)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(23)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial T^{(22)}}{\partial x} - \frac{\partial T^{(33)}}{\partial x} \right) \quad (R.189e)$$

$$\nabla_{(13)}T^{(33)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial x \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial x} \quad (R.189f)$$

$$\nabla_{(22)}T^{(ij)} = \frac{\partial^2 T^{(ij)}}{\partial r^2} \quad (R.190)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(11)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial \theta} \quad (R.191a)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(12)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} T^{(13)} \quad (R.191b)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(13)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(12)} \quad (R.191c)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(22)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} T^{(23)} \quad (R.191d)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(23)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial T^{(22)}}{\partial r} - \frac{\partial T^{(33)}}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} (T^{(22)} - T^{(33)}) \quad (R.191e)$$

$$\nabla_{(23)}T^{(33)} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial r \partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} T^{(23)} \quad (R.191f)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(11)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(11)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(11)}}{\partial r} \quad (R.192a)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(12)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(12)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(12)} \quad (R.192b)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(13)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(13)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(13)}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial T^{(12)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} T^{(13)} \quad (R.192c)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(22)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(22)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(22)}}{\partial r} - \frac{4}{r^2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (T^{(22)} - T^{(33)}) \quad (R.192d)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(23)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(23)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial T^{(22)}}{\partial \theta} - \frac{\partial T^{(33)}}{\partial \theta} \right) - \frac{4}{r^2} T^{(23)} \quad (R.192e)$$

$$\nabla_{(33)}T^{(33)} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T^{(33)}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T^{(33)}}{\partial r} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial T^{(23)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (T^{(22)} - T^{(33)}) \quad (R.192f)$$

### R.3.5 Equations du mouvement d'un modèle à deux équations

#### Continuité

L'équation de continuité se simplifie suivant :

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r U^{(2)})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} = 0 \quad (R.193)$$

#### Equations du mouvement moyen

Le tenseur de Reynolds s'écrit avec une hypothèse de viscosité turbulente isotrope comme :

$$R^{(11)} = \frac{2}{3} K - 2 \nu_t \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} \quad (R.194a)$$

$$R^{(22)} = \frac{2}{3} K - 2 \nu_t \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} \quad (R.194b)$$

$$R^{(33)} = \frac{2}{3}K - 2\nu_t \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} \quad (R.194c)$$

$$R^{(12)} = -\nu_t \left( \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} \right) \quad (R.194d)$$

$$R^{(13)} = -\nu_t \left( \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \theta} \right) \quad (R.194e)$$

$$R^{(23)} = -\nu_t \left( \frac{\partial U^{(3)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} U^{(3)} \right) \quad (R.194f)$$

Les composantes cylindriques ont les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right] \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \left[ U^{(2)} - \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \right] \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} \\ & + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \theta} \\ & = \\ & - \frac{\partial P^t}{\partial x} + \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x} \\ & + (\nu + \nu_t) \nabla^2(U^{(1)}) \end{aligned} \quad (R.195a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right] \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} + \left[ U^{(2)} - \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \right] \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} \\ & + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} (U^{(3)})^2 \\ & = \\ & - \frac{\partial P^t}{\partial r} + \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial U^{(3)}}{\partial r} - \frac{1}{r} U^{(3)} \right] \\ & + (\nu + \nu_t) \left[ \nabla^2(U^{(2)}) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} U^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (R.195b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right] \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x} + \left[ U^{(2)} - \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \right] \frac{\partial U^{(3)}}{\partial r} \\ & + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} U^{(3)} U^{(2)} \\ & = \\ & - \frac{1}{r} \frac{\partial P^t}{\partial \theta} + \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} U^{(3)} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} U^{(2)} \right] \\ & + (\nu + \nu_t) \left[ \nabla^2(U^{(3)}) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} U^{(3)} \right] \end{aligned} \quad (R.195c)$$

**Equation d'évolution de la dissipation**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \\ & = S_\varepsilon + \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla^2 \varepsilon \end{aligned} \quad (R.196)$$

**Equation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K}{\partial t} + \left[ U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{\partial \nu_t}{\partial x} \right] \frac{\partial K}{\partial x} + \left[ U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{\partial \nu_t}{\partial r} \right] \frac{\partial K}{\partial r} + \left[ U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{r} \frac{\partial \nu_t}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r} \frac{\partial K}{\partial \theta} \\ & = S_K + \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \nabla^2 K \end{aligned} \quad (R.197)$$

**R.3.6 Equations du mouvement d'un modèle du second ordre**

**Continuité**

L'équation de continuité s'écrit toujours :

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r U^{(2)})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} = 0 \quad (R.198)$$

**Equations du mouvement moyen**

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} + U^{(2)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r} U^{(3)} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \theta} \\ & = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \\ & - \frac{\partial R^{(11)}}{\partial x} - \frac{\partial R^{(12)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} R^{(12)} \\ & + \nu \nabla^2 U^{(1)} \end{aligned} \quad (R.199a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x} + U^{(2)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial r} + \frac{1}{r} U^{(3)} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} U^{(3)2} \\ & = \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \\ & - \frac{\partial R^{(12)}}{\partial x} - \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} (R^{(22)} - R^{(33)}) \end{aligned} \quad (R.199b)$$

$$\begin{aligned}
 & + \nu [\nabla^2 U^{(2)} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} U^{(2)}] \\
 & = \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial x} + U^{(2)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial r} + \frac{1}{r} U^{(3)} \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} U^{(3)} U^{(2)} \quad (R.199c) \\
 & - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \\
 & - \frac{\partial R^{(13)}}{\partial x} - \frac{\partial R^{(23)}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \theta} - \frac{2}{r} R^{(23)} \\
 & + \nu [\nabla^2 U^{(3)} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} U^{(3)}]
 \end{aligned}$$

### Equation d'évolution de la dissipation

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U^{(1)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + U^{(2)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r} U^{(3)} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \\
 & = S_\varepsilon \\
 & + \nu \left[ \overline{R}^{(11)} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \overline{R}^{(22)} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r^2} + \overline{R}^{(33)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2} \right. \\
 & + (\nabla_{(n)} \overline{R}^{(1n)}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (R.200) \\
 & + (\nabla_{(n)} \overline{R}^{(2n)} + \frac{1}{r} \overline{R}^{(33)}) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \\
 & + (\nabla_{(n)} \overline{R}^{(3n)} - \frac{2}{r} \overline{R}^{(23)}) \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} \\
 & \left. + 2 \overline{R}^{(12)} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial r} + 2 \overline{R}^{(13)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial \theta} + 2 \overline{R}^{(23)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \theta^2} \right]
 \end{aligned}$$

### Equation d'évolution des corrélations doubles

Les termes de convection des équations du tenseur de Reynolds exposées précédemment dans le cas d'un système de référence orthogonal quelconque se simplifient dans la mesure où seule la composante  $K_{32}$  du tenseur de courbure est non nulle. La forme des termes de diffusion quant à elle reste inchangée, seules les expressions des dérivées covariantes des tenseurs  $\overline{R}^{(ij)}$  et  $\tilde{R}^{(ij)}$  sont simplifiées puisque la courbure ne fait intervenir que la composante  $K_{32}$ . Ces termes ne sont cependant pas séparés des contributions des dérivées de  $\overline{R}^{(ij)}$  et  $\tilde{R}^{(ij)}$ . Il ne semble donc pas nécessaire de donner à nouveau l'ensemble des équations du tenseur de Reynolds, les simplifications des termes de courbure n'en réduisant pas considérablement l'expression de convection-diffusion donnée précédemment. Il est par contre intéressant de détailler ici la forme des gradients  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$ , regroupant ce qui peut être considéré comme les écarts formels des



termes de diffusions cylindriques à la forme cartésienne correspondante. Dans le cas d'un repère de référence quelconque, rappelons que ces termes s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} &= \left[ \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \right] \left[ \Gamma_{(pn)}^{(i)} R^{(pj)} + \Gamma_{(pn)}^{(j)} R^{(ip)} \right] \\
&+ \left[ \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} \right] \left[ \Gamma_{(pn)}^{(i)} R^{(pk)} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} R^{(ip)} \right] + \left[ \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \right] \left[ \Gamma_{(pn)}^{(j)} R^{(pk)} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} R^{(jp)} \right] \\
&+ \bar{R}^{(nk)} \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{jq} \right) + R^{(pq)} R_{(pq)kn}^{(ij)} \right] \\
&+ \tilde{R}^{(jn)} \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{kq} + B_{(q)kn}^{(k\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{kq} \right) + R^{(pq)} R_{(pq)kn}^{(ik)} \right] \\
&+ \tilde{R}^{(in)} \left[ \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{kp} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{kp} + B_{(p)kn}^{(k\alpha)} \delta_{jq} \right) + R^{(pq)} R_{(pq)kn}^{(kj)} \right]
\end{aligned} \tag{R.201}$$

avec les notations adoptées précédemment, et en particulier :

$$B_{(q)mn}^{(jk)} = \Gamma_{(qm)}^{(j)} \delta_{nk} + \Gamma_{(qn)}^{(j)} \delta_{mk} \tag{R.202a}$$

$$\begin{aligned}
R_{(pq)mn}^{(ij)} &= \left[ \Gamma_{(pn)}^{(i)} \Gamma_{(km)}^{(j)} + \Gamma_{(pm)}^{(i)} \Gamma_{(kn)}^{(j)} \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} \delta_{ip} (D_{(qmn)}^{(j)} + D_{(qnm)}^{(j)}) + \frac{1}{2} \delta_{jq} (D_{(pmn)}^{(i)} + D_{(pnm)}^{(i)}) \right]
\end{aligned} \tag{R.202b}$$

où le tenseur de Riemann-Christoffel intervient par l'intermédiaire du tenseur  $D_{(pnm)}^{(i)}$  :

$$D_{(pnm)}^{(i)} = \frac{1}{h_m} \frac{\partial \Gamma_{(pn)}^{(i)}}{\partial X^m} + \Gamma_{(pn)}^{(k)} \Gamma_{(km)}^{(i)} - \Gamma_{(pk)}^{(i)} \Gamma_{(nm)}^{(k)} \tag{R.203}$$

Les trois premiers termes de  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  proviennent des termes de courbures des dérivées premières covariantes du tenseur de Reynolds. Ce sont des expressions qui seront vues comme des polynômes du tenseur de Reynolds, les tenseurs  $\bar{R}^{(ij)}$  et  $\tilde{R}^{(ij)}$  étant toujours traités comme des variables différentes du tenseur de Reynolds. Dans aucune des expressions des termes de diffusion, en effet, le facteur  $K/\varepsilon$  intervenant dans  $\bar{R}^{(ij)}$  et  $\tilde{R}^{(ij)}$  n'est mis en évidence, puisque ce sont des tenseurs qui sont traités de façon explicite.

Ces trois restes de dérivées première comprennent néanmoins deux sortes de contributions, compte tenu des courbures des gradients covariants. La première contribution contient donc les dérivées premières des tenseurs  $\bar{R}^{(ij)}$  et  $\tilde{R}^{(ij)}$  et la seconde, les termes de courbures associés, que l'on nommera "termes constants". Le développement des dérivées covariantes de  $\bar{R}^{(ij)}$  et  $\tilde{R}^{(ij)}$  de ces trois restes semble judicieux dans la mesure où il permet un regroupement avec une partie des trois derniers termes de  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$ , provenant des dérivées covariantes secondes du tenseur de Reynolds, et qu'il simplifie l'expression des "termes constants" de  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$ .

Les termes sont décomposés ainsi sous la forme :

$$\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \tag{R.204a}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \overline{R}^{(nk)} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{jq} \right) \right. \\
& + \tilde{R}^{(jn)} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{kq} + B_{(q)kn}^{(k\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{kq} \right) \\
& + \tilde{R}^{(in)} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{kp} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{kp} + B_{(p)kn}^{(k\alpha)} \delta_{jq} \right) \left. \right] \\
& + R^{(pq)} \\
& + \left[ \overline{R}^{(nk)} R_{(pq)kn}^{(ij)} + \tilde{R}^{(jn)} R_{(pq)kn}^{(ik)} + \tilde{R}^{(in)} R_{(pq)kn}^{(kj)} \right] \\
& + R^{(pq)} \\
& + \left[ \nabla_{(k)} \overline{R}^{(nk)} \left( \delta_{jq} \Gamma_{(pn)}^{(i)} + \delta_{ip} \Gamma_{(qn)}^{(j)} \right) \right. \\
& + \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} \left( \delta_{kq} \Gamma_{(pn)}^{(i)} + \delta_{ip} \Gamma_{(qn)}^{(k)} \right) \\
& + \left. \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \left( \delta_{jq} \Gamma_{(pn)}^{(k)} + \delta_{kp} \Gamma_{(qn)}^{(j)} \right) \right]
\end{aligned}$$

ce qui peut se noter, pour regrouper les dérivés partielles premières et les termes constants du tenseur de Reynolds, comme :

$$\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} = D_1^{(ij)} + C^{(ij)} + C_c^{(ij)} \quad (R.205)$$

Parmi le facteur du terme constant peuvent encore être séparées les contributions des dérivées partielles et de termes constants. Il vient :

$$\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial R^{(pq)}}{\partial X^\alpha} \quad (R.206a)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \overline{R}^{(nk)} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{jq} \right) \right. \\
& + \tilde{R}^{(jn)} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{ip} \delta_{kq} + B_{(q)kn}^{(k\alpha)} \delta_{ip} + B_{(p)kn}^{(i\alpha)} \delta_{kq} \right) \\
& + \tilde{R}^{(in)} \left( -\tilde{\Gamma}_{(kn)}^{(\alpha)} \delta_{kp} \delta_{jq} + B_{(q)kn}^{(j\alpha)} \delta_{kp} + B_{(p)kn}^{(k\alpha)} \delta_{jq} \right) \left. \right] \\
& + R^{(pq)} \\
& + \left[ \left( \Gamma_{(\alpha k)}^{(n)} \overline{R}^{(\alpha k)} + \Gamma_{(\alpha k)}^{(k)} \overline{R}^{(\alpha n)} \right) \left( \delta_{jq} \Gamma_{(pn)}^{(i)} + \delta_{ip} \Gamma_{(qn)}^{(j)} \right) \right. \\
& + \left. \left( \Gamma_{(\alpha k)}^{(n)} \tilde{R}^{(\alpha j)} + \Gamma_{(\alpha k)}^{(j)} \tilde{R}^{(\alpha n)} \right) \left( \delta_{kq} \Gamma_{(pn)}^{(i)} + \delta_{ip} \Gamma_{(qn)}^{(k)} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \Gamma_{(\alpha k)}^{(n)} \tilde{R}^{(\alpha i)} + \Gamma_{(\alpha k)}^{(i)} \tilde{R}^{(\alpha n)} \right) \left( \delta_{jq} \Gamma_{(pn)}^{(k)} + \delta_{kp} \Gamma_{(qn)}^{(j)} \right) \\
& + \left[ \overline{R}^{(nk)} R_{(pq)kn}^{(ij)} + \tilde{R}^{(jn)} R_{(pq)kn}^{(ik)} + \tilde{R}^{(in)} R_{(pq)kn}^{(kj)} \right] \\
& + R^{(pq)} \\
& + \left[ \frac{1}{h_k} \frac{\partial \overline{R}^{(nk)}}{\partial X^k} \left( \delta_{jq} \Gamma_{(pn)}^{(i)} + \delta_{ip} \Gamma_{(qn)}^{(j)} \right) \right. \\
& + \frac{1}{h_k} \frac{\partial \tilde{R}^{(jn)}}{\partial X^k} \left( \delta_{kq} \Gamma_{(pn)}^{(i)} + \delta_{ip} \Gamma_{(qn)}^{(k)} \right) \\
& \left. + \frac{1}{h_k} \frac{\partial \tilde{R}^{(in)}}{\partial X^k} \left( \delta_{jq} \Gamma_{(pn)}^{(k)} + \delta_{kp} \Gamma_{(qn)}^{(j)} \right) \right]
\end{aligned}$$

ce qui peut se noter :

$$\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} = D_1^{(ij)} + C_0^{(ij)} + C_1^{(ij)} \quad (R.207)$$

Les contributions des dérivées premières se développent ainsi dans le cas de la base cylindrique :

$$\begin{aligned}
D_1^{(11)} = \frac{1}{r} \left[ \right. & \overline{R}^{(33)} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial r} & -2 \overline{R}^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \theta} \\
& +2 \tilde{R}^{(11)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial x} & +2 \tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial r} & +2 \tilde{R}^{(13)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \theta} \\
& & & \left. -2 \tilde{R}^{(12)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.208a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1^{(12)} = \frac{1}{r} \left[ \right. & 2 \tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial x} & +(\tilde{R}^{(22)} + \overline{R}^{(33)}) \frac{\partial R^{(12)}}{\partial r} & +(\tilde{R}^{(23)} - 2 \overline{R}^{(23)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \theta} \\
& -(\tilde{R}^{(13)} + 2 \overline{R}^{(13)}) \frac{\partial R^{(13)}}{\partial x} & +2 \overline{R}^{(23)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial r} & -(\tilde{R}^{(22)} + 2 \overline{R}^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \theta} \\
& +\tilde{R}^{(11)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial x} & +\tilde{R}^{(22)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} & +\tilde{R}^{(13)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \theta} \\
& & -\tilde{R}^{(13)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial r} & -\tilde{R}^{(12)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \theta} \\
& -\tilde{R}^{(11)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial x} & -\tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial r} & -2 \tilde{R}^{(13)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \theta} \left. \right] \quad (R.209a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1^{(13)} = \frac{1}{r} \left[ \right. & \overline{R}^{(33)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial r} & -(\tilde{R}^{(23)} + 2\overline{R}^{(23)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \theta} \\
 & +2(\tilde{R}^{(13)} + \overline{R}^{(13)}) \frac{\partial R^{(12)}}{\partial x} & +(\tilde{R}^{(23)} + 2\overline{R}^{(23)}) \frac{\partial R^{(12)}}{\partial r} & +(\tilde{R}^{(33)} + 2\overline{R}^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \theta} \\
 & & +\tilde{R}^{(13)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} \\
 & +2\tilde{R}^{(11)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial x} & +2\tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial r} & +3\tilde{R}^{(13)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \theta} \\
 & & & \left. -\tilde{R}^{(12)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.210a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1^{(22)} = \frac{1}{r} \left[ \right. & 2\tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial x} & +(2\tilde{R}^{(22)} + \overline{R}^{(33)}) \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} & +2(\tilde{R}^{(23)} - \overline{R}^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \theta} \\
 & -2\tilde{R}^{(23)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial x} \\
 & -4\overline{R}^{(13)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial x} & -(4\overline{R}^{(23)} + 2\tilde{R}^{(23)}) \frac{\partial R^{(23)}}{\partial r} & -(4\overline{R}^{(33)} + 2\tilde{R}^{(22)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \theta} \\
 & -2\tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial x} & -2\tilde{R}^{(22)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial r} & -4\tilde{R}^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \theta} \left. \right] \quad (R.211a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1^{(23)} = \frac{1}{r} & \left[ 2 \tilde{R}^{(12)} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial x} + (2 \tilde{R}^{(22)} - \tilde{R}^{(33)} + \bar{R}^{(23)}) \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} \right. \\
 & + 2 (\tilde{R}^{(23)} - \bar{R}^{(23)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \theta} \\
 & + \tilde{R}^{(23)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial x} \\
 & - \tilde{R}^{(33)} \frac{\partial R^{(13)}}{\partial x} \\
 & + (2 \bar{R}^{(13)} + \tilde{R}^{(13)}) \frac{\partial R^{(22)}}{\partial x} + 2 (\bar{R}^{(23)} + \tilde{R}^{(23)}) \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} \\
 & + (2 \bar{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \theta} \\
 & - (2 \bar{R}^{(13)} + \tilde{R}^{(13)}) \frac{\partial R^{(33)}}{\partial x} - (2 \bar{R}^{(23)} + \tilde{R}^{(23)}) \frac{\partial R^{(33)}}{\partial r} \\
 & \left. - (2 \bar{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(22)} + 2 \tilde{R}^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.212a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_1^{(33)} = \frac{1}{r} & \left[ \bar{R}^{(33)} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial r} - 2 (\bar{R}^{(23)} + \tilde{R}^{(23)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \theta} \right. \\
 & + 2 \tilde{R}^{(33)} \frac{\partial R^{(12)}}{\partial x} \\
 & + 2 \tilde{R}^{(33)} \frac{\partial R^{(22)}}{\partial r} \\
 & \left. + 4 (\tilde{R}^{(13)} + \bar{R}^{(13)}) \frac{\partial R^{(23)}}{\partial x} + 4 (\tilde{R}^{(23)} + \bar{R}^{(23)}) \frac{\partial R^{(23)}}{\partial r} + (6 \tilde{R}^{(33)} + 4 \bar{R}^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.213a)
 \end{aligned}$$

Ces évaluations montrent que certaines des dérivées premières pourraient être implicites dans les équations, mais que ce fait conduirait à des opérateurs de convection-diffusion différents pour chacune des équations et ne sera donc pas retenue pour les calculs. Le calcul des termes sources constants conduit à :

$$C^{(11)} = -\frac{1}{r^2} 2 \tilde{R}^{(12)} R^{(12)} \quad (R.214a)$$

$$C^{(12)} = -\frac{1}{r^2} \left[ (\bar{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(22)}) R^{(12)} - 2 \bar{R}^{(23)} R^{(13)} + \tilde{R}^{(12)} R^{(22)} + (2 \tilde{R}^{(13)} - \tilde{R}^{(12)}) R^{(33)} \right] \quad (R.214b)$$

$$C^{(13)} = -\frac{1}{r^2} \left[ (-2 \bar{R}^{(23)} + \tilde{R}^{(23)}) R^{(12)} + \bar{R}^{(33)} R^{(13)} - \tilde{R}^{(13)} R^{(22)} + (2 \tilde{R}^{(12)} + \tilde{R}^{(13)}) R^{(33)} \right] \quad (R.214c)$$

$$C^{(22)} = -2 \frac{1}{r^2} \left[ (\bar{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(22)}) R^{(22)} + 2 (\tilde{R}^{(23)} - \bar{R}^{(23)}) R^{(23)} - (\bar{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(22)}) R^{(33)} \right] \quad (R.214d)$$

$$C^{(23)} = -2 \frac{1}{r^2} \left[ \overline{R}^{(23)} R^{(22)} + (\tilde{R}^{(22)} + \tilde{R}^{(33)} + 2 \overline{R}^{(23)}) R^{(23)} - \overline{R}^{(23)} R^{(33)} \right] \quad (R.214e)$$

$$C^{(33)} = -2 \frac{1}{r^2} \left[ -(\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(22)} + (\overline{R}^{(23)} - 2 \tilde{R}^{(23)}) R^{(23)} + (\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(22)} \right] \quad (R.214f)$$

En développant les termes issus des dérivées covariantes des  $C_c^{(ij)}$ , il vient :

$$C_0^{(11)} = 0 \quad (R.215a)$$

$$C_0^{(12)} = -\frac{1}{r^2} \left[ (\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(12)} + 2 \tilde{R}^{(13)} R^{(23)} \right] \quad (R.215b)$$

$$C_0^{(13)} = -\frac{1}{r^2} \left[ -\tilde{R}^{(23)} R^{(12)} + \overline{R}^{(33)} R^{(13)} - \tilde{R}^{(13)} R^{(22)} + \tilde{R}^{(13)} R^{(33)} \right] \quad (R.215c)$$

$$C_0^{(22)} = -2 \frac{1}{r^2} \left[ (\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(22)} + \tilde{R}^{(23)} R^{(23)} - (\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(33)} \right] \quad (R.215d)$$

$$C_0^{(23)} = -2 \frac{1}{r^2} \left[ -\overline{R}^{(23)} R^{(22)} + 2 (\tilde{R}^{(33)} + \overline{R}^{(33)}) R^{(23)} + \overline{R}^{(23)} R^{(33)} \right] \quad (R.215e)$$

$$C_0^{(33)} = -2 \frac{1}{r^2} \left[ -(\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(22)} - 2 \tilde{R}^{(23)} R^{(23)} + (\overline{R}^{(33)} + \tilde{R}^{(33)}) R^{(22)} \right] \quad (R.215f)$$

Il est préférable de calculer ces termes constants plutôt que les précédents. Les contributions des dérivées partielles s'écrivent :

$$C_1^{(11)} = -\frac{1}{r} \left[ 2 R^{(13)} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial r} - R^{(12)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.216a)$$

$$C_1^{(12)} = -\frac{1}{r} \left[ 2 R^{(13)} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial x} + (R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial r} + 2 R^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + 2 R^{(13)} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial r} - R^{(12)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + R^{(13)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.217a)$$

$$C_1^{(13)} = -\frac{1}{r} \left[ -2 R^{(12)} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial x} - (R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial r} - 2 R^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. - R^{(12)} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial r} \right. \\ \left. + R^{(13)} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial r} - 2 R^{(12)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.218a)$$

$$C_1^{(22)} = -\frac{1}{r} \left[ 2 R^{(23)} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial x} \right. \\ \left. + 2 R^{(13)} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial x} + 3 R^{(23)} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial r} - 2 (R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. + 2 R^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.219a)$$

$$C_1^{(23)} = -\frac{1}{r} \left[ -R^{(12)} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial x} \quad -2(R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial r} \quad -2R^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. - (R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial x} \right. \\ \left. + R^{(13)} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial x} \quad + 2R^{(23)} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial r} \quad -2(R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial \theta} \right] \quad (R.220a)$$

$$C_1^{(33)} = -\frac{1}{r} \left[ -2R^{(12)} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial x} \quad -2(R^{(22)} - R^{(33)}) \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial r} \quad -6R^{(23)} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{R}^{(33)}}{\partial \theta} \right. \\ \left. -2R^{(23)} \frac{\partial \tilde{R}^{(13)}}{\partial x} \quad -2R^{(23)} \frac{\partial \tilde{R}^{(23)}}{\partial r} \right] \quad (R.221a)$$

L'ensemble des coefficients des termes de diffusion est ainsi entièrement détaillé dans le cas d'une base de référence cylindrique. D'une façon évidente, le tenseur  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  ne présente pas d'avantage à être implicite partiellement, puisqu'il conduirait à des opérateurs de convection-diffusion différents pour l'ensemble des équations du tenseur de Reynolds. Ce procédé, plus couteux en place mémoire, n'est pas retenu dans le code, ce qui permet d'évaluer  $\nabla_{(k)}^c T^{(ijk)}$  de façon complètement explicite.

## R.4 Transformation curviligne

Soit  $(e_i)$  la base de référence, associée aux coordonnées  $(X^i)$ . Cette base covariante est orthogonale et ses vecteurs sont de norme  $h_l$ . La variation d'un vecteur  $R$  dans cette base s'écrit :

$$dR = dX^i e_i \quad (R.222)$$

Soit un système de coordonnées curvilignes  $(\xi^i)$  quelconques. La variation du vecteur  $R$  devient :

$$dR = d\xi^i g_i \quad (R.223)$$

où les vecteurs  $g_i$  définissent la base covariante. Ces vecteurs s'expriment en fonction de la base de référence suivant :

$$g_i = \frac{\partial X^l}{\partial \xi^i} e_l \quad (R.224)$$

Soit  $e_{(l)}$  la base covariante physique du système de référence. La décomposition du vecteur curviligne covariant s'écrit :

$$g_i = h_l \frac{\partial X^l}{\partial \xi^i} e_{(l)} \quad (R.225)$$

La base réciproque formée par les vecteurs contravariants est définie suivant :

$$g^i = \frac{\partial \xi^l}{\partial X^i} e^l \\ = \frac{1}{h_l} \frac{\partial \xi^l}{\partial X^i} e^{(l)} \quad (R.226)$$

Il est souvent intéressant de travailler avec les vecteurs contravariants normés par le Jacobien  $J$  de la transformation et qui représentent les vecteurs orientés d'une surface élémentaire. Il sont notés :

$$b^i = J g^i \quad (R.227)$$

La projection de ces vecteurs dans la base de référence physique est définie par :

$$b^i = b_l^i e^{(l)} \quad (R.228)$$

avec :

$$b_l^i = \frac{J}{h_l} \frac{\partial \xi^i}{\partial X^l} \quad (R.229)$$

Dans le cas d'une base de référence cartésienne,  $h_l = 1$ .

### R.4.1 Calcul du Jacobien de la transformation

Le Jacobien de la transformation est défini par le produit mixte des vecteurs covariants, soit :

$$J = g_i \cdot [g_j \wedge g_k] \quad (R.230)$$

où les indices  $i, j$  et  $k$  sont dans l'ordre cyclique. En exprimant les vecteurs covariants dans la base de référence physique, il vient :

$$J = h_l h_m h_n \frac{\partial X^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^k} e^{(l)} \cdot [e^{(m)} \wedge e^{(n)}] \quad (R.231)$$

où les indices  $(i, j, k)$  sont cycliques. En notant  $J_c$  le Jacobien du système de coordonnées de référence, il vient :

$$J = J_c \varepsilon_{lmn} \frac{\partial X^l}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^k} \quad (R.232)$$

où  $\varepsilon_{lmn}$  est l'alternateur unitaire. En développant cette expression, il vient :

$$J = J_c \frac{\partial X^1}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial X^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^k} \right) \quad (R.233a)$$

$$= J_c \frac{\partial X^2}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} \right) \quad (R.233b)$$

$$= J_c \frac{\partial X^3}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} \right) \quad (R.233c)$$

Le Jacobien peut être vu comme le volume d'une maille élémentaire. Pour restituer cette propriété d'un point de vue discret, il est intéressant d'exprimer le Jacobien sous forme conservative. Ce n'est pas le cas des expressions précédentes si le Jacobien  $J_c$  est fonction des coordonnées  $(X^i)$ . Dans le cas d'un repère cartésien, le Jacobien est unitaire et indépendant des coordonnées et le problème ne se pose pas. Dans le cas d'un système de référence cylindrique, par contre, le Jacobien a une dimension et s'écrit :

$$J_c = h_1 h_2 h_3 \quad (R.234)$$

soit encore

$$J_c = X^2 \quad (R.235)$$



avec les conventions du paragraphe précédent. Dans ce cas, la forme conservative du Jacobien de la transformation curviligne s'écrit :

$$J = \frac{1}{2} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^k} \right) \quad (R.236a)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} \right) \quad (R.236b)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^i} \left( \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^k} - \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} \right) \quad (R.236c)$$

Il est clair que si les formulations continues convectives et conservatives sont identiques, il n'en est pas de même pour les formulations discrètes. Les différences entre les deux formulations sont liées à l'interpolation du terme de convection dans la formulation convective et ne sont pas négligeables lorsque le maillage est étiré dans la direction de convection ou présente des fortes courbures [110]. La discrétisation conservative doit être retenue pour assurer la conservation dans un volume élémentaire.

#### R.4.2 Calcul des métriques

Le vecteur surface orienté présenté précédemment est également défini par le produit vectoriel :

$$b^i = [g_j \wedge g_k] \quad (R.237)$$

Par conséquent, ses composantes dans la base physique de référence s'écrivent :

$$b_l^i = h_m h_n \varepsilon_{lmn} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^k} \quad (R.238)$$

avec les indices  $(i, j, k)$  en ordre cyclique. Elles peuvent encore s'écrire :

$$b_l^i = \frac{J_c}{h_l} \varepsilon_{lmn} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^n}{\partial \xi^k} \quad (R.239)$$

Tout comme dans le cas du Jacobien, ces vecteurs peuvent être évalués de façon convective ou conservative. Dans le cas d'un système de référence cartésien, le Jacobien et les normes des vecteurs de base sont unitaires, ce qui permet de former une expression directement conservative. Il faut noter que les relations de compatibilité métrique, qui assurent dans le cas cartésien qu'un champ uniforme sera conservé, prennent dans le cas cartésien la forme :

$$\frac{\partial b_l^i}{\partial \xi^i} = 0 \quad (R.240)$$

pour toute composante  $l$ . Dans le cas d'un système orthogonal dimensionnel, il est immédiat que les relations de compatibilité métrique peuvent s'écrire *a priori* :

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{h_l}{J_c} b_l^i \right) = 0 \quad (R.241)$$

Cette écriture porte cependant sur une formulation non conservative du vecteur surface orienté. Il convient d'assurer de façon discrète la compatibilité métrique sur la forme conservative de ces vecteurs. Dans le cas du système de référence cylindrique choisi, les vecteurs s'écrivent :

$$b_1^i = X^2 \left[ \frac{\partial X^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^k} \right] \quad (R.242a)$$

$$b_2^i = X^2 \left[ \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} \right] \quad (R.242b)$$

$$b_3^i = \left[ \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} \right] \quad (R.242c)$$

et se mettent sous forme conservative :

$$b_1^i = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial (X^2)^2}{\partial \xi^k} \right] \quad (R.243a)$$

$$b_2^i = X^2 \left[ \frac{\partial X^3}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^3}{\partial \xi^k} \right] \quad (R.243b)$$

$$b_3^i = \left[ \frac{\partial X^1}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^2}{\partial \xi^k} - \frac{\partial X^2}{\partial \xi^j} \frac{\partial X^1}{\partial \xi^k} \right] \quad (R.243c)$$

Par conséquent, les relations métriques s'expriment précisément par :

$$\frac{\partial b_1^i}{\partial \xi^i} = 0 \quad (R.244a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{b_2^i}{r} \right) = 0 \quad (R.244b)$$

$$\frac{\partial b_3^i}{\partial \xi^i} = 0 \quad (R.244c)$$

où les métriques doivent être évaluées de façon discrète par une formulation conservative. La forme de la relation de compatibilité géométrique en coordonnées cylindriques incite à travailler avec de nouveaux vecteurs métriques, satisfaisant une relation de compatibilité géométrique similaire au cas cartésien, à savoir :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \frac{1}{J} \frac{\partial (b_i^l \phi)}{\partial \xi^l} \quad (R.245)$$

avec sommation sur  $i$ . Ces vecteurs s'expriment en fonction des vecteurs surface orientée.

### R.4.3 Gradient

Les composantes physiques du gradient d'un scalaire s'écrivent :

$$\nabla_{(i)} \phi = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial X^i} \quad (R.246)$$

Par conséquent sa transformation dans le système de coordonnées curvilignes est immédiate :

$$\frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \frac{1}{J} b_i^l \frac{\partial \phi}{\partial \xi^l} \quad (R.247)$$

Dans le cas d'un système de référence cartésien, le relation de compatibilité métrique permet d'accéder à une forme conservative de ce gradient, soit :

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \frac{1}{J} \frac{\partial (b_i^l \phi)}{\partial \xi^l} \quad (\text{R.248})$$

Pour approcher cette expression dans le cas du système de coordonnées cylindriques et utiliser la relation de compatibilité géométrique, il convient d'utiliser les vecteurs métriques appropriés, définis précédemment par :

$$B_i^l = \frac{b_l^i}{H^l} \quad (\text{R.249})$$

où les facteurs d'échelle  $H^l$  sont définis par :

$$H^l = \begin{vmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{vmatrix} \quad (\text{R.250})$$

Leur calcul discret peut s'effectuer de façon totalement conservative. Dans ce cas, les relations de compatibilité géométrique s'écrivent :

$$\frac{\partial B_l^i}{\partial \xi^i} = 0 \quad (\text{R.251})$$

et l'expression du gradient devient :

$$\frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial X^i} = \frac{1}{J} H^i \frac{\partial (B_i^l \phi)}{\partial \xi^l} \quad (\text{R.252})$$

Il n'est pas possible, contrairement au cas cartésien, d'avoir une forme complètement conservative des gradients évalués à partir d'une base de référence cylindrique.

#### R.4.4 Divergence

La transformation curviligne considérée est partielle dans la mesure où les composantes des vecteurs et tenseurs sont évaluées dans la base covariante de référence. Les équations portent sur les composantes contravariantes physiques de ces différents termes. Dans le cas d'un système de référence cartésien, les composantes cartésiennes sont retenues dans les équations et dans le cas d'un système de coordonnées cylindriques, il s'agit des composantes cylindriques. L'expression de la divergence est immédiate :

$$\text{div}(T) = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (b_i^l T^{(l)}) \quad (\text{R.253})$$

Cette expression est similaire à celle utilisée pour le cas cartésien.

#### R.4.5 Laplacien

Le Laplacien d'un scalaire s'écrit comme la divergence de son gradient, et il vient :

$$\Delta \phi = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{1}{J} b_k^i b_k^j \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \right) \quad (\text{R.254})$$

ce qui peut encore se développer sous la forme :

$$\Delta \phi = \frac{1}{J^2} b_k^i b_k^j \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{1}{J} b_k^i b_k^j \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^j} \quad (\text{R.255})$$

Cette relation a exactement la même forme qu'en partant d'une base cartésienne.

### R.4.6 Dérivée seconde

L'obtention de la transformation de la dérivée partielle seconde est relativement immédiate, connaissant les expressions des gradients. Il vient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{1}{J} h_i b_i^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left( \frac{1}{J} h_j b_j^n \frac{\partial \phi}{\partial \xi^n} \right) \quad (\text{R.256})$$

ce qui se développe suivant :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{1}{J^2} h_i h_j b_i^m b_j^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^n \partial \xi^m} + \frac{1}{J} h_i b_i^m \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left( \frac{1}{J} h_j b_j^n \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^n} \quad (\text{R.257})$$

Cette expression ressemble au cas cartésien à ceci près que le coefficient des dérivées premières ne peut pas se mettre sous forme conservative. Cette expression possède le désavantage de ne pas traiter les composantes  $b_j^m$  et  $b_i^n$  de la même façon. En partant de la seconde expression du gradient où les métriques sont calculées de façon conservative, il vient :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{1}{J^2} h_i h_j H^i H^j B_i^m B_j^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^n \partial \xi^m} + \frac{1}{J} h_i H^i \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left( \frac{1}{J} h_j H^j B_i^m B_j^n \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^n} \quad (\text{R.258})$$

Le terme en facteur des dérivées secondes dans l'espace de calcul est identique au cas cartésien. La relation de compatibilité métrique sur  $B_i^n$  a été utilisée afin de les regrouper dans le coefficient d'étirement sous une même dérivée, argument employé également pour écrire les dérivées secondes dans le cas cartésien sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^i \partial X^j} = \frac{1}{J^2} h_i h_j b_i^m b_j^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^n \partial \xi^m} + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^m} \left( \frac{1}{J} b_i^m b_j^n \right) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^n} \quad (\text{R.259})$$

La différence entre ces deux expressions réside dans le calcul des métriques et l'introduction des distances  $h_i$  et  $H^i$ .

### R.4.7 Equations du mouvement d'un modèle à deux équations

#### Continuité

L'expression de l'opérateur divergence conduit à l'équation de continuité suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[ b_1^1 U^{(1)} + b_2^1 U^{(2)} + b_3^1 U^{(3)} \right] \\ & + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[ b_1^2 U^{(1)} + b_2^2 U^{(2)} + b_3^2 U^{(3)} \right] \\ & + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[ b_1^3 U^{(1)} + b_2^3 U^{(2)} + b_3^3 U^{(3)} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{R.260})$$

#### Equations de quantité de mouvement

Les équations sont écrites sous la forme convective mettant en évidence les opérateurs de convection-diffusion, les termes explicites étant rejetés au second membre.

$$(\nu + \nu_t) \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial (\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial (\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \quad (\text{R.261a})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial U^{(1)}}{\partial(\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_1^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_1^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^1(\nu + \nu_t) \right] \\
&+ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial(\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_2^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_3^2 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^2(\nu + \nu_t) \right] \\
&+ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial(\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_2^3 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b_3^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^3(\nu + \nu_t) \right] \\
&+ \frac{1}{J} \left[ b_1^1 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^3} \right] \\
&+ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} + (K_{12}U^{(1)} - K_{21}U^{(2)}) U^{(2)} + (K_{13}U^{(1)} - K_{31}U^{(3)}) U^{(3)} \\
&- \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) + 2K_{12}U^{(2)} + 2K_{13}U^{(3)} \right] \\
&- \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) - K_{12}U^{(1)} - K_{21}U^{(2)} \right] \\
&- \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) - K_{13}U^{(1)} - K_{31}U^{(3)} \right]
\end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 -(\nu + \nu_t) & \left[ 2(g^{12} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3}) \right. \\
 & + \frac{2}{J} K_{12} (b_1^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) - \frac{2}{J} K_{21} (b_2^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) \\
 & + \frac{2}{J} K_{13} (b_1^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) - \frac{2}{J} K_{31} (b_3^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) \\
 & \left. + \alpha_{11} U^{(1)} + \alpha_{12} U^{(2)} + \alpha_{13} U^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

L'équation de  $U^{(2)}$  s'écrit :

$$(\nu + \nu_t) \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial (\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial (\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \quad (R.262a)$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{\partial U^{(2)}}{\partial (\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
 & \quad + b_2^1 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
 & \quad \left. \left. + b_3^1 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^1 (\nu + \nu_t) \right] \\
 & + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial (\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^2 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
 & \quad + b_2^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
 & \quad \left. \left. + b_3^2 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^2 (\nu + \nu_t) \right] \\
 & + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial (\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
 & \quad + b_2^3 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
 & \quad \left. \left. + b_3^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^3 (\nu + \nu_t) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{J} \left[ b_2^1 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^3} \right] \\
& + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} + (K_{23}U^{(2)} - K_{32}U^{(3)}) U^{(3)} + (K_{21}U^{(2)} - K_{12}U^{(1)}) U^{(1)} \\
& - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) - K_{21} U^{(2)} - K_{12} U^{(1)} \right] \\
& - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) + 2 K_{21} U^{(1)} + 2 K_{23} U^{(3)} \right] \\
& - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) - K_{13} U^{(1)} - K_{31} U^{(3)} \right] \\
& - (\nu + \nu_t) \left[ 2 (g^{12} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3}) \right. \\
& \quad + \frac{2}{J} K_{21} (b_2^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) - \frac{2}{J} K_{12} (b_1^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) \\
& \quad + \frac{2}{J} K_{23} (b_2^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) - \frac{2}{J} K_{32} (b_3^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) \\
& \quad \left. + \alpha_{21} U^{(1)} + \alpha_{22} U^{(2)} + \alpha_{23} U^{(3)} \right]
\end{aligned}$$

et l'équation de  $U^{(3)}$  :

$$\begin{aligned}
& (\nu + \nu_t) \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial (\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial (\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \tag{R.263a} \\
& = \frac{\partial U^{(3)}}{\partial (\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
& \quad + b_1^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
& \quad \left. \left. + b_1^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^1 (\nu + \nu_t) \right] \\
& + \frac{\partial U^{(3)}}{\partial (\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_2^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
& \quad + b_2^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
& \quad \left. \left. + b_2^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^2 (\nu + \nu_t) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial U^{(3)}}{\partial(\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 \left( U^{(1)} - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
 & \quad + b_2^3 \left( U^{(2)} - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
 & \quad \left. \left. + b_3^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^3 (\nu + \nu_t) \right] \\
 & + \frac{1}{J} \left[ b_3^1 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial P^t}{\partial \xi^3} \right] \\
 & + \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} + (K_{31} U^{(3)} - K_{13} U^{(1)}) U^{(1)} + (K_{32} U^{(3)} - K_{23} U^{(2)}) U^{(2)} \\
 & - \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) - K_{31} U^{(3)} - K_{13} U^{(1)} \right] \\
 & - \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) - K_{32} U^{(3)} - K_{23} U^{(2)} \right] \\
 & - \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \left[ \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3}) + 2 K_{32} U^{(2)} + 2 K_{31} U^{(1)} \right] \\
 & - (\nu + \nu_t) \left[ 2 (g^{12} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3}) \right. \\
 & \quad + \frac{2}{J} K_{31} (b_3^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) - \frac{2}{J} K_{13} (b_1^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3}) \\
 & \quad + \frac{2}{J} K_{32} (b_3^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) - \frac{2}{J} K_{23} (b_2^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3}) \\
 & \quad \left. + \alpha_{31} U^{(1)} + \alpha_{32} U^{(2)} + \alpha_{33} U^{(3)} \right]
 \end{aligned}$$

### Equation d'évolution de la dissipation

L'expression de l'équation de la dissipation est simplement :

$$(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}) \left[ g^{11} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial(\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial(\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial(\xi^3)^2} \right] \quad (\text{R.264})$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial \varepsilon}{\partial(\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad + b_2^1 \left( U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
&\quad \left. \left. + b_3^1 \left( U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^1 \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial \varepsilon}{\partial(\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^2 \left( U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad + b_2^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
&\quad \left. \left. + b_3^2 \left( U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^2 \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial \varepsilon}{\partial(\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 \left( U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad + b_2^3 \left( U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
&\quad \left. \left. + b_3^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^3 \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \right] \\
&- S_\varepsilon + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \left[ 2 \left( g^{12} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right) \right]
\end{aligned}$$

### Equation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente

L'expression de l'équation de l'énergie cinétique turbulente s'écrit de la même façon :

$$\begin{aligned}
&\left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \left[ g^{11} \frac{\partial^2 K}{\partial(\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 K}{\partial(\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 K}{\partial(\xi^3)^2} \right] \tag{R.265} \\
&= \frac{\partial K}{\partial(\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 \left( U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
&\quad + b_2^1 \left( U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
&\quad \left. \left. + b_3^1 \left( U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^1 \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial K}{\partial(\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^2 \left( U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
 & \quad + b_2^2 \left( U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
 & \quad \left. \left. + b_3^2 \left( U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^2 \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \right] \\
 & + \frac{\partial K}{\partial(\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 \left( U^{(1)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_1^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right. \right. \\
 & \quad + b_2^3 \left( U^{(2)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_2^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \\
 & \quad \left. \left. + b_3^3 \left( U^{(3)} - \frac{1}{\sigma_K} \frac{1}{J} (b_3^1 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial \nu_t}{\partial \xi^3}) \right) \right\} - f^3 \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \right] \\
 & - S_K + \frac{\partial K}{\partial t} - \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_K} \right) \left[ 2 \left( g^{12} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 K}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

avec les notations suivantes :

$$g^{ij} = \frac{1}{J^2} b_k^i b_k^j \quad (\text{R.266})$$

et

$$f^j = \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left( \frac{1}{J} b_k^i b_k^j \right) \quad (\text{R.267})$$

#### R.4.8 Equations du mouvement d'un modèle du second ordre

##### Continuité

L'équation de continuité s'écrit toujours :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left[ b_1^1 U^{(1)} + b_2^1 U^{(2)} + b_3^1 U^{(3)} \right] \\
 & + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left[ b_1^2 U^{(1)} + b_2^2 U^{(2)} + b_3^2 U^{(3)} \right] \\
 & + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left[ b_1^3 U^{(1)} + b_2^3 U^{(2)} + b_3^3 U^{(3)} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (\text{R.268})$$

##### Equations de quantité de mouvement

Les équations sont regroupées de façon analogue au cas précédent. Il vient :

$$\begin{aligned}
 & -\nu \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial (\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial (\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \\
 & + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial (\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 U^{(1)} + b_2^1 U^{(2)} + b_3^1 U^{(3)} \right\} - \nu f^1 \right]
 \end{aligned} \quad (\text{R.269a})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial(\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^2 U^{(1)} + b_2^2 U^{(2)} + b_3^2 U^{(3)} \right\} - \nu f^2 \right] \\
& + \frac{\partial U^{(1)}}{\partial(\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 U^{(1)} + b_2^3 U^{(2)} + b_3^3 U^{(3)} \right\} - \nu f^3 \right] \\
= & - \frac{1}{\rho J} \left[ b_1^1 \frac{\partial P}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial P}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial P}{\partial \xi^3} \right] \\
& - \frac{\partial U^{(1)}}{\partial t} - (K_{12} U^{(1)} - K_{21} U^{(2)}) U^{(2)} - (K_{13} U^{(1)} - K_{31} U^{(3)}) U^{(3)} \\
& - \frac{1}{J} \left( b_1^1 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial R^{(11)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& - \frac{1}{J} \left( b_2^1 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& - \frac{1}{J} \left( b_3^1 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& + (2 R^{(12)}) K_{12} + (2 R^{(13)}) K_{13} + (R^{(13)}) K_{23} \\
& + (R^{(11)} - R^{(22)}) K_{21} - (R^{(11)} - R^{(33)}) K_{31} - (R^{(12)}) K_{32} \\
+ \nu & \left[ 2 \left( g^{12} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right) \right. \\
& + \frac{2}{J} K_{12} \left( b_1^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3} \right) - \frac{2}{J} K_{21} \left( b_2^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& + \frac{2}{J} K_{13} \left( b_1^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3} \right) - \frac{2}{J} K_{31} \left( b_3^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& \left. + \alpha_{11} U^{(1)} + \alpha_{12} U^{(2)} + \alpha_{13} U^{(3)} \right]
\end{aligned}$$

L'équation de  $U^{(2)}$  devient quant à elle :

$$- \nu \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial(\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial(\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial(\xi^3)^2} \right] \tag{R.270a}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial(\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 U^{(1)} + b_2^1 U^{(2)} + b_3^1 U^{(3)} \right\} - \nu f^1 \right] \\
& + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial(\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^2 U^{(1)} + b_2^2 U^{(2)} + b_3^2 U^{(3)} \right\} - \nu f^2 \right] \\
& + \frac{\partial U^{(2)}}{\partial(\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 U^{(1)} + b_2^3 U^{(2)} + b_3^3 U^{(3)} \right\} - \nu f^3 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{J} \left[ b_2^1 \frac{\partial P}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial P}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial P}{\partial \xi^3} \right] \\
&\quad - \frac{\partial U^{(2)}}{\partial t} - (K_{21}U^{(2)} - K_{12}U^{(1)}) U^{(1)} - (K_{23}U^{(2)} - K_{32}U^{(3)}) U^{(3)} \\
&\quad - \frac{1}{J} \left( b_1^1 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial R^{(12)}}{\partial \xi^3} \right) \\
&\quad - \frac{1}{J} \left( b_2^1 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial R^{(22)}}{\partial \xi^3} \right) \\
&\quad - \frac{1}{J} \left( b_3^1 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^3} \right) \\
&\quad + (R^{(22)} - R^{(11)}) K_{12} - (R^{(23)}) K_{13} - (2 R^{(23)}) K_{23} \\
&\quad + (2 R^{(12)}) K_{21} - (R^{(12)}) K_{31} - (R^{(22)} - R^{(33)}) K_{32} \\
&+ \nu \left[ 2 \left( g^{12} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \right) \right. \\
&\quad + \frac{2}{J} K_{21} \left( b_2^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3} \right) - \frac{2}{J} K_{12} \left( b_1^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3} \right) \\
&\quad + \frac{2}{J} K_{23} \left( b_2^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3} \right) - \frac{2}{J} K_{32} \left( b_3^1 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi^3} \right) \\
&\quad \left. + \alpha_{21} U^{(1)} + \alpha_{22} U^{(2)} + \alpha_{23} U^{(3)} \right]
\end{aligned}$$

et l'équation de  $U^{(3)}$  devient :

$$\begin{aligned}
&-\nu \left[ g^{11} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial (\xi^1)^2} + g^{22} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial (\xi^2)^2} + g^{33} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial (\xi^3)^2} \right] \tag{R.271a} \\
&\quad + \frac{\partial U^{(3)}}{\partial (\xi^1)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^1 U^{(1)} + b_2^1 U^{(2)} + b_3^1 U^{(3)} \right\} - \nu f^1 \right] \\
&\quad + \frac{\partial U^{(3)}}{\partial (\xi^2)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^2 U^{(1)} + b_2^2 U^{(2)} + b_3^2 U^{(3)} \right\} - \nu f^2 \right] \\
&\quad + \frac{\partial U^{(3)}}{\partial (\xi^3)} \left[ \frac{1}{J} \left\{ b_1^3 U^{(1)} + b_2^3 U^{(2)} + b_3^3 U^{(3)} \right\} - \nu f^3 \right] \\
&= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{J} \left[ b_3^1 \frac{\partial P}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial P}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial P}{\partial \xi^3} \right] \\
&\quad - \frac{\partial U^{(3)}}{\partial t} - (K_{31}U^{(3)} - K_{13}U^{(1)}) U^{(1)} - (K_{32}U^{(3)} - K_{23}U^{(2)}) U^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{J} \left( b_1^1 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial R^{(13)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& -\frac{1}{J} \left( b_2^1 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial R^{(23)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& -\frac{1}{J} \left( b_3^1 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial R^{(33)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& + (R^{(23)}) K_{12} - (R^{(33)} - R^{(11)}) K_{13} - (R^{(33)} - R^{(22)}) K_{23} \\
& + (R^{(13)}) K_{21} - (2 R^{(13)}) K_{31} - (2 R^{(23)}) K_{32} \\
+ \nu & \left[ 2 (g^{12} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} + g^{13} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + g^{23} \frac{\partial^2 U^{(3)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3}) \right. \\
& + \frac{2}{J} K_{31} \left( b_3^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3} \right) - \frac{2}{J} K_{13} \left( b_1^1 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^1} + b_1^2 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^2} + b_1^3 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& + \frac{2}{J} K_{32} \left( b_3^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_3^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_3^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3} \right) - \frac{2}{J} K_{23} \left( b_2^1 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^1} + b_2^2 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^2} + b_2^3 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi^3} \right) \\
& \left. + \alpha_{31} U^{(1)} + \alpha_{32} U^{(2)} + \alpha_{33} U^{(3)} \right]
\end{aligned}$$

### Equation d'évolution de la dissipation

La transformation de l'équation d'évolution du taux de dissipation est relativement immédiate et s'écrit :

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_m^1 \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (\xi^1)^2} - \left[ \frac{1}{J^2} b_n^2 b_m^2 \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (\xi^2)^2} - \left[ \frac{1}{J^2} b_n^3 b_m^3 \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial (\xi^3)^2} \quad (R.272a) \\
& + \left[ \frac{1}{J} C^{(n)} b_n^k - f_{nm}^k \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi^k} \\
& = S_\varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\
& + \left[ \frac{1}{J^2} (b_n^1 b_m^2 + b_n^2 b_m^1) \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \\
& + \left[ \frac{1}{J^2} (b_n^1 b_m^3 + b_n^3 b_m^1) \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} \\
& + \left[ \frac{1}{J^2} (b_n^2 b_m^3 + b_n^3 b_m^2) \bar{R}^{(nm)} \right] \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \quad (R.272b)
\end{aligned}$$

avec

$$C^{(1)} = U^{(1)} - (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(1k)} - K_{11} \bar{R}^{(11)} + K_{21} \bar{R}^{(22)} + K_{31} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{12} \bar{R}^{(12)} - 2 K_{13} \bar{R}^{(13)}) \quad (R.273a)$$

$$C^{(2)} = U^{(2)} - (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(2k)} + K_{12} \bar{R}^{(11)} - K_{22} \bar{R}^{(22)} + K_{32} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{21} \bar{R}^{(12)} - 2 K_{23} \bar{R}^{(23)}) \quad (\text{R.273b})$$

$$C^{(3)} = U^{(3)} - (\nabla_{(k)} \bar{R}^{(3k)} + K_{13} \bar{R}^{(11)} + K_{23} \bar{R}^{(22)} - K_{33} \bar{R}^{(33)} - 2 K_{31} \bar{R}^{(13)} - 2 K_{32} \bar{R}^{(23)}) \quad (\text{R.273c})$$

### Equation d'évolution des corrélations doubles

Les équations d'évolution des corrélations doubles ont été décomposées de la façon suivante dans le plan physique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + U^{(n)} \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^n} &= S^{(ij)} - \Gamma_{(kn)}^{(i)} R^{(kj)} - \Gamma_{(kn)}^{(j)} R^{(ik)} \\ &+ \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} \\ &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \bar{R}^{(nk)} \\ &+ \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ik)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(jk)}}{\partial X^n} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \\ &+ \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \bar{R}^{(nk)} \\ &+ \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(ik)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{h_n h_k} \frac{\partial^2 R^{(jk)}}{\partial X^k \partial X^n} \cdot \tilde{R}^{(in)} \end{aligned} \quad (\text{R.274})$$

Les dérivées premières et secondes se transforment de la façon suivante dans le plan de calcul :

$$\frac{1}{h_n} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial X^n} = \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} \quad (\text{R.275a})$$

$$\frac{1}{h_n h_m} \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial X^n \partial X^m} = \frac{1}{J^2} b_n^p b_m^q \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^p \partial \xi^q} + f_{(nm)}^q \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^q} \quad (\text{R.275b})$$

ce qui conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + U^{(n)} \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} &= S^{(ij)} - \Gamma_{(kn)}^{(i)} R^{(kj)} - \Gamma_{(kn)}^{(j)} R^{(ik)} \\ &+ \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} \\ &+ \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} \cdot \nabla_{(p)} \bar{R}^{(np)} \\ &+ \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial R^{(ik)}}{\partial \xi^k} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(jn)} + \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial R^{(jk)}}{\partial \xi^k} \cdot \nabla_{(k)} \tilde{R}^{(in)} \\ &+ \left[ \frac{1}{J^2} b_n^q b_p^k \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^q \partial \xi^k} + f_{(np)}^k \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} \right] \cdot \bar{R}^{(np)} \end{aligned} \quad (\text{R.276})$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^q b_p^k \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial \xi^q \partial \xi^k} + f_{(np)}^k \frac{\partial R^{(ip)}}{\partial \xi^k} \right] \cdot \tilde{R}^{(jn)} \\
 & + \left[ \frac{1}{J^2} b_n^q b_p^k \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial \xi^q \partial \xi^k} + f_{(np)}^k \frac{\partial R^{(jp)}}{\partial \xi^k} \right] \cdot \tilde{R}^{(in)}
 \end{aligned}$$

Les dérivées premières peuvent être regroupées et les dérivées secondes doubles séparées des dérivées secondes croisées, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial t} + U^{(n)} \frac{1}{J} b_n^k \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} & = S^{(ij)} - \Gamma_{(kn)}^{(i)} R^{(kj)} - \Gamma_{(kn)}^{(j)} R^{(ik)} & (R.277) \\
 & + \nabla_{(k)}^c T^{(ijk)} \\
 & + \left[ \nabla_{(p)} \bar{R}^{(np)} \frac{1}{J} b_n^k - \bar{R}^{(np)} f_{(np)}^k \right] \frac{\partial R^{(ij)}}{\partial \xi^k} \\
 & + \left[ \nabla_{(p)} \tilde{R}^{(jn)} \frac{1}{J} b_n^k - \tilde{R}^{(jn)} f_{(np)}^k \right] \frac{\partial R^{(ip)}}{\partial \xi^k} \\
 & + \left[ \nabla_{(p)} \tilde{R}^{(in)} \frac{1}{J} b_n^k - \tilde{R}^{(in)} f_{(np)}^k \right] \frac{\partial R^{(jp)}}{\partial \xi^k} \\
 & + \bar{R}^{(np)} \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_p^1 \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial^2 \xi^1} + \frac{1}{J^2} b_n^2 b_p^2 \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial^2 \xi^2} + \frac{1}{J^2} b_n^3 b_p^3 \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial^2 \xi^3} \right] \\
 & + \tilde{R}^{(jn)} \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_p^1 \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial^2 \xi^1} + \frac{1}{J^2} b_n^2 b_p^2 \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial^2 \xi^2} + \frac{1}{J^2} b_n^3 b_p^3 \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial^2 \xi^3} \right] \\
 & + \tilde{R}^{(in)} \left[ \frac{1}{J^2} b_n^1 b_p^1 \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial^2 \xi^1} + \frac{1}{J^2} b_n^2 b_p^2 \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial^2 \xi^2} + \frac{1}{J^2} b_n^3 b_p^3 \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial^2 \xi^3} \right] \\
 & + \bar{R}^{(np)} \frac{1}{J^2} \left[ (b_n^1 b_p^2 + b_n^2 b_p^1) \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right. \\
 & + (b_n^1 b_p^3 + b_n^3 b_p^1) \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + (b_n^2 b_p^3 + b_n^3 b_p^2) \frac{\partial^2 R^{(ij)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \left. \right] \\
 & + \tilde{R}^{(jn)} \frac{1}{J^2} \left[ (b_n^1 b_p^2 + b_n^2 b_p^1) \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right. \\
 & + (b_n^1 b_p^3 + b_n^3 b_p^1) \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + (b_n^2 b_p^3 + b_n^3 b_p^2) \frac{\partial^2 R^{(ip)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \left. \right] \\
 & + \tilde{R}^{(in)} \frac{1}{J^2} \left[ (b_n^1 b_p^2 + b_n^2 b_p^1) \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} \right. \\
 & + (b_n^1 b_p^3 + b_n^3 b_p^1) \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial \xi^1 \partial \xi^3} + (b_n^2 b_p^3 + b_n^3 b_p^2) \frac{\partial^2 R^{(jp)}}{\partial \xi^2 \partial \xi^3} \left. \right]
 \end{aligned}$$

Il est clair qu'un opérateur de convection diffusion commun à toutes les équations d'évolution du tenseur de Reynolds peut être aisément formé à partir du modèle de diffusion de Daly-Harlow, les contributions de symétries supplémentaires apportées par le modèle d'Hanjalic et Launder pouvant alors être évaluées de façon explicite.





---

## Annexe S

# Corrections numériques sur les invariants

Cette annexe précise les corrections numériques qui sont imposées aux invariants du tenseur d'anisotropie. Ces corrections sont indépendantes du comportement réalisable ou non du modèle de turbulence utilisé. Dans le cas d'un modèle réalisable, on peut espérer qu'elles n'interviennent que lors des premières itérations dans le cas où les conditions initiales ne fournissent pas un champ turbulent suffisamment réaliste au voisinage des parois. Elles permettent alors au modèle  $R_{ij} - \varepsilon$  d'adapter l'écoulement progressivement. Dans le cas d'un modèle non - réalisable, ces corrections ne peuvent pas être utilisées pour pallier cette caractéristique, et sont effectivement appliquées pour des raisons analogues aux modèles réalisables, dans la mesure où le type d'écoulement étudié ne comprend pas de difficultés particulières pour la condition de réalisabilité.

### S.1 Rappel de la condition de réalisabilité scalaire

Rappelons que le tenseur d'anisotropie du tenseur de Reynolds est noté :

$$b_{ij} = \frac{1}{q^2} \overline{u_i u_j} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (S.1)$$

Ses invariants sont au nombre de deux dans le cas d'une turbulence incompressible et peuvent être définis suivant :

$$II = -\frac{1}{2} b_{mn} b_{mn} \quad (S.2a)$$

$$III = \frac{1}{3} b_{mn} b_{np} b_{pm} \quad (S.2b)$$

Les conditions de réalisabilité scalaires exposées par Lumley en 1978 [89] s'écrivent :

$$-\frac{1}{3} \leq II \leq 0 \quad (S.3a)$$

$$-\frac{1}{108} \leq III \leq \frac{2}{27} \quad (S.3b)$$

Ces contraintes de réalisabilité sont classiquement exprimées en fonction des paramètres  $F$  et  $\Delta$  définis par :

$$F = 1 + 9II + 27III \quad (S.4a)$$

$$\Delta = 4II^3 + 27III^2 \quad (S.4b)$$

Ils caractérisent l'approche de l'état à deux composantes et axisymétrique, respectivement  $F = 0$  et  $\Delta = 0$ . Leur domaine d'admissibilité s'écrit d'après (S.3a) et (S.3b) :

$$0 \leq F \leq 1 \quad (S.5a)$$

$$\Delta \leq 0 \quad (S.5b)$$

La carte des invariants  $II$  et  $III$  proposée par Lumley [89] représente les états réalisables, domaine intérieur délimité par les frontières d'équations (S.5a) et (S.5b).

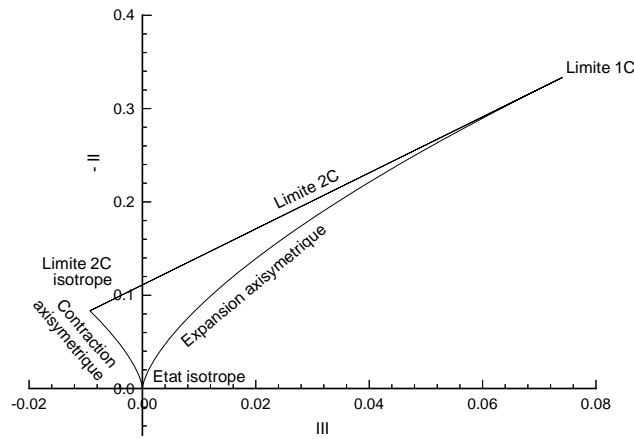


FIG. S.1: Carte des invariants de Lumley.

Les corrections vont être établies suivant les trois configurations possibles du paramètre d'aplatissement  $F$ , qui dans tous les modèles joue un rôle prépondérant par rapport au facteur d'axisymétrie.

## S.2 Vérification de la limite bidimensionnelle

Dans un premier temps, on peut supposer que la condition portant sur  $F$  (S.5a) est respectée, mais que  $\Delta > 0$ . Ceci signifie que le tenseur de Reynolds possède deux racines complexes conjuguées et que la racine réelle est positive.

Si  $0 \leq F \leq 1$ , deux cas se présentent :

- Si  $III \leq 0$  alors

$$III = -\left[\frac{4}{27}(-II)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$II = \frac{1}{9}(F - 1) + \frac{2}{3}\sqrt{3}\left[(-II)^{\frac{3}{2}}\right]$$

- Si  $0 \leq III$  alors

$$III = \left[ \frac{4}{27} (-II)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

et

$$II = \frac{1}{9}(F - 1) - \frac{2}{3}\sqrt{3}[(-II)^{\frac{3}{2}}]$$

Les états respectant ces conditions sont solutions d'une équation polynômiale de degré trois, dont la forme générale est :

$$X^3 + \alpha X + \beta = 0 \tag{S.6}$$

où  $X = \sqrt{-II}$  et les coefficients sont :

- $\alpha = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } III \leq 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \text{si } 0 \leq III \end{cases}$
- $\beta = \frac{1}{9}(F - 1) \alpha$

Les solutions de l'équation (S.6) sont obtenues par l'intermédiaire de son équation réduite, dont l'expression est :

$$Y^3 + pY + q = 0 \tag{S.7}$$

en posant  $Y = X + \frac{1}{3}$  et

- $p = -\frac{1}{3}\alpha^2$
- $q = -\frac{4}{27}\alpha^3 + \beta$

Lorsque le discriminant  $D$  de cette équation est positif ou nul, il existe trois racines réelles, sinon deux des racines sont complexes. Ce discriminant est  $D = 4p^3 + 27q^2$ , soit en remplaçant  $p$  et  $q$  par leurs valeurs,  $D = F^2/4 - F + 15/16$ , équation du second degré en  $F$ , dont les deux racines sont réelles  $(3/2, 5/2)$  et sont en dehors de l'intervalle d'étude  $0 \leq F \leq 1$ , où  $D > 0$ . Dans ce cas, l'équation (S.7) n'admet qu'une seule racine réelle dont l'expression est :

$$Y = Z - \frac{1}{3}p \frac{1}{Z} \text{ avec } Z = \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{D} - q \right) \right]^{\frac{1}{3}} \tag{S.8}$$

avec

$$II = -(Y + \frac{1}{3})^2 \tag{S.9}$$

si bien que les nouvelles expressions des invariants vérifient (variables surmontée d'un tilde):

- Si  $III \leq 0$  alors

$$\tilde{II} = -\frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1+d^2}{d} \right)^2$$

avec  $d = (2(F - 2) + \sqrt{4F^2 - 16F + 15})^{1/3}$  et

$$\tilde{III} = \sqrt{\frac{4}{27}(-\tilde{II})^3}$$

- Si  $0 \leq III$  alors

$$\tilde{II} = -\frac{3}{4} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1+d^2}{d} \right)^2$$

avec  $d = (2(F-2) - \sqrt{4F^2 - 16F + 15})^{1/3}$  et

$$I\tilde{II} = -\sqrt{\frac{4}{27}(-\tilde{II})^3}$$

Ces points satisfont la contrainte axisymétrique  $\Delta = 0$ .

### S.3 Vérification d'aucun des critères

Ce cas correspond aux valeurs du paramètre d'aplatissement  $F$  supérieures à 1. Aucune des valeurs propres du tenseur de Reynolds ne satisfait le critère de réalisabilité dans la mesure où deux d'entre elles sont complexes et la troisième est négative. Trois cas peuvent être envisagés.

- $0 < II$ . Numériquement, cette zone ne peut jamais être atteinte puisque le second invariant est une somme de carrés. S'il faut attribuer des valeurs numériques aux invariants dans ce cas, le plus simple est de les initialiser avec les caractéristiques isotropes. Il faut noter que le troisième invariant admettrait des valeurs éventuellement négatives, contrairement aux deux autres sous-cas.
- $-\frac{1}{3} \leq II \leq 0$ . Seul le second invariant a une valeur admissible. Le troisième invariant sera alors corrigé par simple projection sur la limitante axisymétrique. Il est nécessairement positif :

$$\tilde{II} = II$$

$$I\tilde{II} = \sqrt{\frac{4}{27}(-II)^3}$$

- $II \leq -\frac{1}{3}$ . Dans ce cas ni le second, ni le troisième invariant ne satisfont leur intervalle réalisable. Le plus simple est de ramener chacun de ces états sur le point  $1C$ , correspondant au couple :

$$\tilde{II} = -\frac{1}{3}$$

$$I\tilde{II} = \frac{2}{27}$$

et pour lequel  $F = 0$  et  $\Delta = 0$ .

### S.4 Vérification de la limite axisymétrique

Ce cas correspond aux valeurs du paramètre d'aplatissement  $F$  négatives. Il est le plus fréquemment rencontré au voisinage des parois et le plus critique numériquement puisqu'une large majorité des corrections pariétales des modèles fait intervenir ce facteur  $F$  ou encore sa racine carrée. Trois cas peuvent à nouveau être envisagés, suivant les valeurs de  $III$ .

- $-1/108 < III < 2/27$ . Le troisième invariant admet des valeurs correctes. Le second invariant sera alors corrigé par simple projection sur la limite à deux composantes. Il

vient :

$$\tilde{II} = \frac{1}{9}(F - 1 - 27 III)$$

$$\tilde{III} = III$$

- $2/27 < III$ . Le plus simple est de ramener chacun de ces points sur le point 1C.
- $III < -1/108$ . Le plus simple est de ramener chacun de ces points sur le point 2C isotrope, correspondant au couple :

$$\tilde{II} = -\frac{1}{12}$$

$$\tilde{III} = -\frac{1}{108}$$

avec encore  $F = 0$  et  $\Delta = 0$ .

## S.5 Conclusion

Les critères de corrections présentés dans cette annexe ont été établis par rapport à la carte des invariants donnée par Lumley [89] et ne constitue rien d'autre qu'une correction *a posteriori* sur les valeurs numériques des invariants du tenseur d'anisotropie. Elles ont été données par rapport aux limites analytiques de réalisabilité et il convient dans tous les cas où les invariants sont recalculés de s'assurer que les erreurs d'arrondis sur ces expressions fournissent des points localisés effectivement à l'intérieur du domaine de réalisabilité. En pratique, ceci s'effectue en calculant les expressions par rapport à une frontière intérieure ou en imposant également de façon explicite les corrections sur les paramètres  $F$  et  $A$ .

Ces corrections sont effectuées pour intervenir dans deux cas en particulier. D'une part lors des erreurs d'arrondis des évaluations numériques de  $F$  et  $A$ , qui peuvent conduire notamment au voisinage de la limite à deux composantes à des valeurs négatives du paramètre d'aplatissement  $F$ . D'autre part lors des premières itérations du calcul, correspondant à un cas éventuellement numériquement difficile pour la réalisabilité. Elles ne sont pas conçues pour pallier les défauts de réalisabilité du modèle utilisé.



---

# Bibliographie

- [1] R. Abid and C.G. Speziale. Predicting equilibrium states with Reynolds stress closures in channel flow and homogeneous flow. *Phys. Fluids, Series A*, 5(7):1776–1782, 1993.
- [2] B. Aupoix. *Homogeneous turbulence two-point closures and applications to one-point closures*. Lecture Notes for Von Karman Institute, AGARD Lecture Series n 86, 1987. North Atlantic Treaty Organisation.
- [3] B.S. Baldwin and T.J. Barth. A one equation turbulence transport model for high Reynolds number wall-bounded flows. *AIAA Paper*, 91-0610, 1991.
- [4] B.S. Baldwin and H. Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*, 78-0257, 1978.
- [5] J. Bardina, J.H. Ferziger, and W.C. Reynolds. Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous, incompressible turbulent flows. Technical Report TF-19, Stanford University, Thermosciences Division, 1983.
- [6] G.K. Batchelor and I. Proudman. The effect of rapid distorsion of a fluid in turbulent motion. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 7:83–103, 1954.
- [7] G.K. Batchelor and A.A. Townsend. Decay of vorticity in isotropic turbulence. In *Proc. Roy. Soc. London*, volume A 190, pages 539–558, 1948.
- [8] Bernard and C.G. Speziale. Bounded energy states in homogeneous turbulent shear flow - an alternative view. Technical Report 90-66, ICASE, 1990.
- [9] J.P. Bertoglio. Homogeneous turbulent field within a rotating frame. *AIAA Journal*, 20:1175–1181, 1982.
- [10] J.P. Bertoglio. Homogeneous turbulent field within a rotating frame. *AIAA Journal*, 20:1175–1181, 1982.
- [11] T.V. Boussinesq. *Mém. pres Acad. Sci.*, 3(Paris XXIII):46, 1877.
- [12] P. Bradshaw. The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 36:177–191, 1969.
- [13] A. Cadiou and J. Piquet. Distorsion rapide d’une turbulence en rotation pure. *C R. Acad. Sc. Paris*, 318:1301–1304, 1994.
- [14] A. Cadiou and J. Piquet. Modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation par une équation de transport. *C R. Acad. Sc. Paris*, 321:323–330, 1995.



- [15] C. Cambon. *Etude Spectrale d'un Champ Turbulent Incompressible, soumis a des Effets couplés de Déformation et de Rotation, imposés extérieurement*. PhD thesis, Lyon I, 1982.
- [16] C. Cambon, J.P. Bertoglio, F.S. Godefert, and L. Le Penven. Modelling turbulent flows. In *ERCOTAC Bulletin*, volume 14-25, pages 30–40, 1993.
- [17] C. Cambon and L. Jacquin. Spectral approach to non-isotropic turbulence subjected to rotation. *J. Fluid Mech.*, 202, 1989.
- [18] C. Cambon, L. Jacquin, and J.L. Lubrano. Toward a new Reynolds stress model for rotating turbulent flows. *Phys. Fluids, Series A*, 4(4):812–824, 1991.
- [19] C. Cambon, L. Jacquin, and J. Mathieu. Analyse spectrale de la turbulence homogène en rotation. *C R. Acad. Sc. Paris*, 2:1131–1134, 1986.
- [20] F.H. Champagne, V.G. Harris, and S. Corrsin. Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 41:81–139, 1970.
- [21] D. Chapman and G. Kuhn. The limiting behaviour of turbulence near a wall. *J. Fluid Mech.*, 170:265–292, 1986.
- [22] H.C. Chen and V.C. Patel. Calculation of trailing-edge, stern and wake flows by a time-marching solution of the partially-parabolic equations. Technical Report 285, IIHR Report, 1985.
- [23] H.C. Chen and V.C. Patel. Practical near-wall turbulence models for complex flows including separation. *AIAA Journal*, 87-1300, 1987.
- [24] K.Y. Chien. Prediction of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model. *AIAA Journal*, 20:33–38, 1982.
- [25] K.S. Choi and J.L. Lumley. Return to isotropy of homogeneous turbulence. In *Turbulence and chaotic phenomena in fluids*. Elsevier Science Publisher B. V. North Holland, t. tatsumi edition, 1984.
- [26] P.Y. Chou. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuations. *Quart. of Appl. Math.*, 3:38–54, 1945.
- [27] Clark. *Spectral Self-Similarity of Homogeneous Anisotropic Turbulence*. PhD thesis, Los Alamos, 1992.
- [28] G. Comte-Bellot and S. Corrsin. The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence. *J. Fluid Mech.*, 25:657–682, 1966.
- [29] D.E. Cormack, L.G. leal, and J.H. seinfeld. An evaluation of mean Reynolds stress turbulence models: the triple velocity correlation. *ASME J. Fluids Eng.*, 100:47–54, 1978.
- [30] T. Craft and B.E. Launder. A new model for the pressure/scalar- gradient correlation and its application to homogeneous and inhomogeneous free shear flows. volume 17-1, 1989.
- [31] T. Craft and B.E. Launder. Computation of impinging flows using second-moment closures. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 2, pages 51–56, 1991.

- 
- [32] T. Craft and B.E. Launder. Improvements in Reynolds-stress modelling for complex flow geometries. In *Tenth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 20-5, 1995.
- [33] T. Craft and B.E. Launder. A Reynolds-stress closure designed for complex geometries. a paraître dans. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 1996.
- [34] S.C. Crow. Viscoelastic properties of fine-grained incompressible turbulence. *J. Fluid Mech.*, 33:1–15, 1968.
- [35] B.J. Daly and F.H. Harlow. Transport equations in turbulence. *Phys. Fluids*, 23(11):2634–2649, 1970.
- [36] B.I. Davidov. Statistical dynamics of an incompressible turbulent fluid. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 36, 1961.
- [37] D.O. Davis. Experimental investigation of turbulent flow through a circular-to-rectangular transition duct. *NASA Technical memorandum*, 105210, 1990.
- [38] D.O. Davis. *Experimental investigation of turbulent flow through a circular-to-rectangular transition duct*. PhD thesis, Univ. of Washington, 1991.
- [39] D.O. Davis and F.B. Gessner. Experimental investigation of turbulent flow through a circular-to-rectangular transition duct. *AIAA Paper*, 90, 1990.
- [40] D.O. Davis and F.B. Gessner. Experimental investigation of turbulent flow through a circular-to-rectangular transition duct. *AIAA Journal*, 30:367–375, 1992.
- [41] A.O. Demurem and S. Sarkar. Persepective: Systematic study of Reynolds stress closure models in the computation of plane channel flows. *ASME J. Fluids Eng.*, 115:5–12, 1993.
- [42] G.B. Deng and J. Piquet.  $k - \varepsilon$  turbulence model for low-Reynolds number wall-bounded shear flow. *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, 26-2, 1991.
- [43] G.B. Deng and M. Visonneau. Evaluation of eddy-viscosity and second-moment turbulence closures for steady flows around ships. In *Symposium on Naval Hydrodynamics*, 1996.
- [44] C.DuP. Donaldson. Calculation of turbulent shear flows for atmospheric and vortex motion. *AIAA Journal*, 10:4–12, 1972.
- [45] A.C. Eringen. Tensor analysis. In *Continuum Physics*, volume 1. Academic Press, eringen edition, 1971.
- [46] S. Fu, B.E. Launder, and M.A. Leschziner. Modelling strongly swirling recirculating jet flow with Reynolds-stress transport closures. In *Seventh Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 17-6, pages 1–6, 1987.
- [47] S. Fu, B.E. Launder, and D.P. Tselepidakis. Accomodating the effects of high strain rates in modelling the pressure-strain correlation. *UMIST Mechanical Engineering Department Report TFD/87/5*, 1987.
- [48] J.M. Galmes and B. Lakshminarayana. Turbulence modeling for three-dimensional shear flows over curved rotating bodies. *AIAA Journal*, 22(10):1420–1428, 1984.
-

- [49] T.B. Gatski and C.G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. Technical Report 92-58, ICASE, 1992.
- [50] J.N. Gence and J. Mathieu. The return to isotropy of an homogeneous turbulence having been submitted to two successive plane strains. *J. Fluid Mech.*, 101:555–566, 1980.
- [51] M.M. Gibson and B.E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *J. Fluid Mech.*, 86:491–511, 1978.
- [52] H.P. Greenspan. *Theory of rotating fluids*. Cambridge U. Press, 1969.
- [53] C. Hah. Turbulence closure and prediction of wake in a rotating wall shear layer. *AIAA Journal*, 20(11):1599–1605, 1982.
- [54] M. Hallback, Groth, and A.V. Johansson. An algebraic model for nonisotropic turbulent dissipation rate in Reynolds stress closure. *Phys. Fluids, Series A*, 2(10):1859–1886, 1990.
- [55] K. Hanjalic and B.E. Launder. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flow. *J. Fluid Mech.*, 54(4):609–638, 1972.
- [56] K. Hanjalic and B.E. Launder. Contribution towards a Reynolds stress closure for low Reynolds number turbulence. *J. Fluid Mech.*, 74:593–610, 1976.
- [57] Horiuti. Higher-order terms in the anisotropic representation of Reynolds stresses. *Phys. Fluids, Series A*, 2(10):1708–1710, 1991.
- [58] Hunt and Carruthers. Rapid distortion theory and the 'problems' of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 212:497–532, 1990.
- [59] J. Hunt. Developments in computational modelling of turbulent flows. In *ERCRAFTAC Bulletin*, volume 26-28, pages 1–76, 1990.
- [60] E. Hytopoulos and R.L. Simpson. Critical evaluation a recent second-order closure models. In *31st AIAA Aerospace sciences*, pages 1–18, 1993.
- [61] L. Jacquin. *Etude Théorique et Expérimentale de la Turbulence Homogène en Rotation*. PhD thesis, Lyon I, 1987.
- [62] L. Jacquin, O. Leuchter, C. Cambon, and J. Mathieu. Homogeneous turbulence in the presence of rotation. *J. Fluid Mech.*, 220:1–52, 1990.
- [63] A.V. Johansson. The hierarchy of one-point closures and the modelling of rotational effects. In *Fifth European Turbulence Conference*, pages 251–255, 1994.
- [64] A.V. Johansson and M. Hallbäck. Rapid pressure strain in Reynolds stress closure. *J. Fluid Mech.*, 269:143–168, 1994.
- [65] J.P. Johnston, R.M. Halleen, and D.K. Lezius. Effects of spanwise rotation on the structure of two-dimensional fully developed turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 56(3):533–557, 1972.
- [66] W.P. Jones and B.E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 15:301–314, 1972.

- 
- [67] S.C. Kassinos and W.C. Reynolds. A structure-based model for the rapid distortion of homogeneous turbulence. Technical Report TF-61, Stanford University, Thermosciences Division, 1995.
- [68] J. Kim, P. Moin, and R. Moser. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 177:133–166, 1987.
- [69] R. Kristoffersen and H.I. Andersson. Direct simulations of low-Reynolds-number turbulent flow in a rotating channel. *J. Fluid Mech.*, 256:163–197, 1993.
- [70] B.E. Launder. Second moment closure: present ... and future? *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 10(4):282–300, 1989.
- [71] B.E. Launder. Current capabilities for modelling turbulence in industrial flows. *Applied Scientific Research*, 48:247–269, 1991.
- [72] B.E. Launder. Advanced turbulence models for industrial applications. In *Summer School on Turbulence and Transition*, 1995.
- [73] B.E. Launder and S.P. Li. On the elimination of wall topography parameters from second-moment closure. *Phys. Fluids*, 6(2):999–1006, 1994.
- [74] B.E. Launder, G.J. Reece, and W. Rodi. Progress in the development of a Reynolds stress turbulent closure. *J. Fluid Mech.*, 183:63–63, 1975.
- [75] B.E. Launder and N. Shima. Second-moment closure for the near-wall sublayer: development and application. *AIAA Journal*, 27(10):1319–1325, 1989.
- [76] B.E. Launder and D.B. Spalding. *Mathematical models of turbulence*. Academic Press, 1972.
- [77] B.E. Launder and D.P. Tselepidakis. Directions in second-moment modelling of near-wall turbulence. *AIAA Paper*, (0219):1–10, 1991.
- [78] B.E. Launder and D.P. Tselepidakis. Progress and paradoxes in modelling near-wall turbulence. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 29-1, pages 1–6, 1991.
- [79] B.E. Launder and D.P. Tselepidakis. Application of a new second-moment closure to turbulent channel flow rotating in orthogonal mode. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 15(1):1–10, 1994.
- [80] B.E. Launder, D.P. Tselepidakis, and B.A. Younis. A second-moment closure of rotating channel flow. *J. Fluid Mech.*, 183:63–75, 1987.
- [81] M.J. Lee. A contribution toward rational modeling of the pressure-strain-rate correlation. *Phys. Fluids, Series A*, 2(4):630–633, 1990.
- [82] M.J. Lee, J. Kim, and P. Moin. Structure of turbulence at high shear rate. *J. Fluid Mech.*, 216:561–583, 1990.
- [83] M.J. Lee and W.C. Reynolds. Numerical experiments on the structure of homogeneous turbulence. Technical Report TF-24, Stanford University, Thermosciences Division, 1985.
-

- [84] Leslie. Analysis of strongly sheared, nearly homogeneous turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 98(2):436–448, 1990.
- [85] A. Lichnerowicz. *Eléments de calcul tensoriel*. Armand Colin Collection, 1964.
- [86] F.S. Lien and M.A. Leschziner. Computational modelling of multiple vortical separation from streamlined body at high incidence. In *Tenth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 4-19, 1996.
- [87] J.L. Lumley. Toward a turbulent constitutive relation. *J. Fluid Mech.*, 41(2):413–434, 1970.
- [88] J.L. Lumley. The pressure-strain correlations. *Phys. Fluids*, 18(6):750–751, 1975.
- [89] J.L. Lumley. *Computational Modeling of Turbulent Flows*, volume 18. Advances in Applied Mechanics, 1978.
- [90] J.L. Lumley. Turbulence modeling. *ASME J. Appl. Mech.*, 50:1097–1103, 1983.
- [91] J.L. Lumley and G.R. Neuman. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 82:161–179, 1977.
- [92] N.N. Mansour, J. Kim, and P. Moin. Reynolds-stress and dissipation-rates budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.*, 194:15–44, 1988.
- [93] N.N. Mansour, T.H. Shih, and W.C. Reynolds. The effect of rotation on initially anisotropic homogeneous flows. *Phys. Fluids, Series A*, 3:2421–2425, 1991.
- [94] Maxey. Distorsion of turbulence in flows with parallel streamlines. *J. Fluid Mech.*, 124:261–282, 1982.
- [95] F.R. Menter. Influence of free stream values on  $k - \omega$  turbulence model prediction. *AIAA Journal*, 30-6, 1992.
- [96] F.R. Menter. Zonal two-equations  $k - \omega$  turbulence models for aerodynamic flows. *AIAA Paper*, 93-2906, 1993.
- [97] R.R. Mills and S. Corrsin. Effect of contraction on turbulence and temperature fluctuations generated by a warm grid. *J. Fluid Mech.*, 32:657–674, 1959.
- [98] Y. Nagano and M. Tagawa. An improved  $k - \varepsilon$  model for boundary layer flows. *ASME J. Fluids Eng.*, 112:33–39, 1990.
- [99] D. Naot, A. Shavit, and M. Wolfsthein. Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. *Phys. Fluids*, 16:738–743, 1973.
- [100] J.F. Nash and V.C. Patel. Three-dimensional turbulent boundary layers. Technical report, SBC Technical Books, 1972.
- [101] M.A. Niederschulte, R.J. Adrian, and T.J. Hanratty. Measurements of turbulent flow in a channel at low Reynolds numbers. *Experiments in Fluids*, 9:222–230, 1990.
- [102] V.C. Patel, W. Rodi, and G. Scheuerer. Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows : A review. *AIAA Journal*, 23(9):1308–1319, 1984.

- 
- [103] L. Le Penven and J.N. Gence. *C R. Acad. Sc. Paris*, page 297, 1983.
- [104] L. Le Penven, J.N. Gence, and G. Comte-Bellot. On the approach to isotropy of homogeneous turbulence: effect of the partition of kinetic energy among the velocity components. In *Frontiers in Fluid Mech.*, volume 1. S.H. Davis, J.L. Lumley, Springer Verlag edition, 1985.
- [105] S.B. Pope. A more general effective viscosity hypothesis. *J. Fluid Mech.*, 72:331–340, 1975.
- [106] S.B. Pope. An explanation of the turbulent round-jet/plane-jet anomaly. *AIAA Journal*, 16:279–281, 1978.
- [107] S.B. Pope. Pdf methods for turbulent reacting flows. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 11:119–192, 1985.
- [108] L. Prandtl. Attaining a steady air stream in wind tunnels. *NACA Technical Memo.*, 726, 1933.
- [109] M. Prud'homme and S. Elghobashi. Prediction of wall-bounded turbulent flows with an improved version of Reynolds-stress model. In *Fourth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 1, pages 7–12, 1983.
- [110] P. Queutey. *Résolution des équations de Navier-Stokes tridimensionnelles. Application au calcul sur des corps en incidence*. PhD thesis, Université de Nantes, 1989.
- [111] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Serie A*, 186:123–164, 1895.
- [112] W.C. Reynolds. *Fundamentals of Turbulence for Turbulence Modelling and Simulation*. Lecture Notes for Von Karman Institute, AGARD Lecture Series n 86, 1987. North Atlantic Treaty Organisation.
- [113] C.M. Rhie and W.L. Chow. A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation. *AIAA Paper*, 0998, 1982.
- [114] J.R. Ristorcelli. A representation for the turbulent mass flux contribution to Reynolds-stress and two equation closure for compressible turbulence. Technical Report 93-88, ICASE, 1993.
- [115] J.R. Ristorcelli and J.L. Lumley. Synopsis of a rapid-pressure model materially frame indifferent in the 2D limit. Technical Report TR-FDA 91-15, Cornell University, 1991.
- [116] J.R. Ristorcelli, J.L. Lumley, and R. Abid. A rapid-pressure correlation representation consistent with the Taylor-Proudman theorem materially-frame-indifferent in the 2d limit. Technical Report 94-1, ICASE, 1994.
- [117] R.S. Rivlin. Further remarks on the stress deformation relations for isotropic materials. *J. Arch. Ratl. Mech. Anal.*, 4:681–702, 1955.
- [118] W. Rodi. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *ZAMM*, 56:219–221, 1976.
-

- [119] W. Rodi. Some current approaches in turbulence modelling. *AGARD Technical Status Review on Appraisal of the suitability of turbulence models in flow calculations*, pages 1–10, 1990.
- [120] M.M. Rogers, P. Moin, and W.C. Reynolds. The structure and modeling of the hydrodynamic and passive scalar fields in homogeneous turbulent shear flow. Technical Report TF-25, Stanford University, Thermosciences Division, 1986.
- [121] Rose. Eddy diffusivity, eddy noise and subgrid-scale modelling. *J. Fluid Mech.*, 81:719–734, 1977.
- [122] J. Rotta. Statistische theorie nichthomogener turbulenz. *ZAMM*, 5:136–139, 1951.
- [123] R. Rubinstein and J.M. Barton. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalisation group. *Phys. Fluids, Series A*, 2:1472–1476, 1990.
- [124] S. Sarkar and C.G. Speziale. A simple nonlinear model for the return to isotropy in turbulence. *Phys. Fluids, Series A*, 2:84–93, 1990.
- [125] R. Schiestel. *Modélisation et simulation des écoulements turbulents*. Hermès, 1993.
- [126] U. Schumann. Realisability of Reynolds stress turbulence models. *Phys. Fluids, Series A*, 20:721–725, 1977.
- [127] S. Sebag, V. Maupu, and D. Laurence. Non orthogonal calculation procedures using second moment closure. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 20-3, 1991.
- [128] Shao, Michard, and J.P. Bertoglio. Effects of solid body rotation on the transport of turbulence. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 30-5, 1991.
- [129] T.H. Shih. Constitutive relations and realizability of single-point turbulence closures. In *Summer School on Turbulence and Transition*, 1995.
- [130] T.H. Shih and J.L. Lumley. Modeling the pressure correlation terms in Reynolds stress and scalar flux equations. Technical Report TR-FDA 85-03, Cornell University, 1985.
- [131] T.H. Shih and J.L. Lumley. Second order modelling of near-wall turbulence. *Phys. Fluids*, 29(4):971–975, 1986.
- [132] T.H. Shih and J.L. Lumley. Critical comparison of second-order closures with direct numerical simulations of homogeneous turbulence. *AIAA Journal*, 31(4):663–670, 1993.
- [133] T.H. Shih and J.L. Lumley. Remarks on turbulent constitutive relations. Technical Report 93-12, ICOMP, 1993.
- [134] T.H. Shih and J.L. Lumley. Applications of direct numerical simulation of turbulence in second order closures. Technical Report 95-2, ICOMP, 1995.
- [135] T.H. Shih and W.C. Reynolds. A spectrum model for weakly anisotropic turbulence. *Phys. Fluids, Series A*, 2(8):1500–1502, 1990.
- [136] T.H. Shih, A. Shabbir, and J.L. Lumley. Realisability in second moment turbulence closure revisited. Technical Report 93-51, ICOMP, 1993.

- 
- [137] T.H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. A realizable Reynolds stress algebraic equation model. Technical Report 92-27, ICOMP, 1992.
- [138] T.H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. Modeling of wall-bounded complex flows and free shear flows. Technical Report 94-3, ICOMP, 1994.
- [139] T.H. Shih, J. Zhu, and J.L. Lumley. A new Reynolds stress algebraic equation model. Technical Report 94-15, ICOMP, 1994.
- [140] N. Shima. Prediction of turbulent boundary layers with a second moment closure: Part i - effects of periodic pressure gradient, wall transpiration, and free-stream turbulence. *ASME J. Fluids Eng.*, 115:56–63, 1993.
- [141] N. Shima. Prediction of turbulent boundary layers with a second moment closure: Part ii - effects of streamline curvature and spanwise rotation. *ASME J. Fluids Eng.*, 115:64–69, 1993.
- [142] N. Shima. Modeling of asymptotic near-wall behavior of the Reynolds stress dissipation. In *Tenth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 2, pages 13–18, 1995.
- [143] C.C. Shir. A preliminary numerical study of atmospheric turbulent flows in the idealized planetary boundary layer. *J. Atm. Sci.*, 30:1327–1339, 1973.
- [144] Smith. On isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors. *Int. J. Engng Sci.*, 9:899–916, 1971.
- [145] F. Sotiropoulos and V.C. Patel. Prediction of turbulent flow through a transition duct using a second-moment closure. *AIAA Journal*, 32:2194–2204, 1994.
- [146] F. Sotiropoulos and V.C. Patel. Turbulence anisotropy and near-wall modeling in predicting three-dimensional shear-flows. *AIAA Journal*, 33:504–514, 1995.
- [147] A.J.M. Spencer. Theory of invariants. In *Continuum Physics*, volume 1. Academic Press, eringen edition, 1971.
- [148] A.J.M. Spencer and R.S. Rivlin. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2:309–336, 1959.
- [149] A.J.M. Spencer and R.S. Rivlin. Further results in the theory of matrix polynomials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, pages 214–230, 1960.
- [150] C.G. Speziale. Some interesting poperties of 2d turbulence. *Phys. Fluids*, 24:1425–1427, 1981.
- [151] C.G. Speziale. Second-order closure models for rotating turbulent flows. Technical Report 85-49, ICASE, 1985.
- [152] C.G. Speziale. Turbulence modeling in non-inertial frames of reference. Technical Report 88-18, ICASE, 1988.
- [153] C.G. Speziale. A critical evaluation of two-equation models for near-wall turbulence. Technical Report 90-46, ICASE, 1990.
-



- [154] C.G. Speziale, R. Abid, and P.A. Durbin. New results on the realizability of Reynolds stress-turbulence closures. Technical Report 93-76, ICASE, 1993.
- [155] C.G. Speziale, T. Gatski, and N. Mac Giolla Mhuiris. A critical comparison of turbulence models for homogeneous shear flows in a rotating frame. *Phys. Fluids, Series A*, 9:1678–1684, 1990.
- [156] C.G. Speziale, T.B. Gatski, and S. Sarkar. On testing models for the pressure-strain correlation of turbulence using direct simulations. *Phys. Fluids, Series A*, 4(12):2887–2899, 1992.
- [157] C.G. Speziale and Mac Giolla Mhuiris. On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence. *J. Fluid Mech.*, 209:591–615, 1989.
- [158] C.G. Speziale and N. Mac Giolla Mhuiris. Scaling laws for homogeneous turbulent shear flows in a rotating frame. Technical Report 88-34, ICASE, 1988.
- [159] C.G. Speziale, S. Sarkar, and T.S. Gatski. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *J. Fluid Mech.*, 227:245–272, 1991.
- [160] C.G. Speziale and Thangam. Analysis of an rng based turbulence model for separated flows. Technical report, ICASE, 19.
- [161] C.G. Speziale and S. Thangam. Numerical study of secondary flows and roll-cell instabilities in rotating channel flow. *J. Fluid Mech.*, 130:377–395, 1983.
- [162] K.R. Sreenivasan and R. Narasimha. Rapid distortion of axisymmetric turbulence. *J. Fluid Mech.*, 84(3):497–516, 1978.
- [163] Tagawa, Nagano, and Tsuji. Turbulence model for the dissipation components of Reynolds stresses. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume 29-3, 1991.
- [164] D. Taulbee. An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. *Phys. Fluids, Series A*, 4(11):2555–2561, 1992.
- [165] S. Tavoularis and S. Corrsin. Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient. *J. Fluid Mech.*, 104:311–347, 1981.
- [166] S. Tavoularis and U. Karnik. Further experiments on the evolution of turbulent stresses and scales in uniformly sheared turbulence. *J. Fluid Mech.*, 204:457–472, 1989.
- [167] G.I. Taylor. Statistical theory of turbulence. *Proc. Roy. Soc. London*, 151:421–444, 1935.
- [168] H. Tennekes and J.L. Lumley. *A first Course in Turbulence*. MIT Press, 1972.
- [169] A.A. Townsend. *The structure of turbulent shear flow*. Cambridge Univ. Press, 1976.
- [170] H.J. Tucker and A.J. Reynolds. The distortion of turbulence by irrotational plane strain. *J. Fluid Mech.*, 32:657–674, 1968.
- [171] R. Du Vachat. Realisability inequalities in turbulent flows. *Phys. Fluids, Series A*, 20:551–556, 1977.

- 
- [172] M. Visonneau. . . , 1995.
- [173] J. Weinstock. Theory of the pressure-strain-rate correlation for Reynolds stress turbulence closures. part 1 off-diagonal element. *J. Fluid Mech.*, 105:369–396, 1981.
- [174] J. Weinstock. Theory of the pressure-strain-rate correlation for Reynolds stress turbulence closures. part 2 diagonal elements. *J. Fluid Mech.*, 116:1–29, 1982.
- [175] R.A. Wigeland and H.M. Nagib. Grid generated turbulence with and without rotation about the streamwise direction. Technical Report IIT Fluids and Heat Transfert Rep. R 78-1, Illinois inst. techn., 1978.
- [176] D.C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26:1299–1310, 1988.
- [177] D.C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*. DCW Industries., 1993.
- [178] V. Yakhot and S.A. Orszag. Renormalization group analysis of turbulence. *J. Sci. Comput.*, 1:1–51, 1986.
- [179] M. Yamamoto and C. Arakawa. Study on the pressure-strain term in Reynolds-stress model. In *Eighth Symposium on Turbulent Shear Flows*, volume III-17, 1991.
- [180] A. Yoshizawa. Statistical analysis of the derivation of the Reynolds stress from its eddy-viscosity representation. *Phys. Fluids*, 27:1377–1387, 1984.
- [181] E.C. Young. *Vector and tensor analysis*. Pure and applied mathematics, Marcel Dekker, 1978.
- [182] Zheng. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors.  
part i: Two dimensional orthotropic and relative isotropic functions and three dimensional relative isotropic functions. *Int. J. Engng Sci.*, 31(10):1399–1409, 1993.
- [183] Zheng. On transversely isotropic, orthotropic and relative isotropic functions of symmetric tensors, skew-symmetric tensors and vectors.  
part v: The irreducibility of the representations for three dimensional orthotropic functions and the summary. *Int. J. Engng Sci.*, 31(10):1445–1453, 1993.
- [184] Zheng and A.J.M. Spencer. On the canonical representations for kronecker powers of orthogonal tensors with application to material symmetry problems. *Int. J. Engng Sci.*, 31(4):617–635, 1993.
- [185] Zheng and A.J.M. Spencer. Tensors which characterize anisotropies. *Int. J. Engng Sci.*, 31(5):679–693, 1993.
- [186] Zhou, Vahala, and Thangam. Development of a recursion rng-based turbulence model. Technical Report 93-51, ICASE, 1993.
-

**Résumé :** La modélisation statistique en un point d'écoulements turbulents incompressibles constitue le cadre de ce travail.

Dans un premier temps, l'étude du comportement de modèles homogènes classiques de type  $R_{ij} - \varepsilon$  a été effectuée pour des écoulements soumis à des effets de rotation. Cette étude a permis de s'intéresser plus particulièrement à la modélisation du tenseur des corrélations pression-déformation et de discuter des contraintes d'objectivité, de réalisabilité, et de vérification des états limites de distorsions rapides. Les modèles choisis ont été testés sur des écoulements homogènes classiques et comparés à des résultats de simulation directe. Les difficultés de prédiction des écoulements fortement rotationnels par ces formulations classiques ont conduit au développement d'un modèle homogène basé sur l'équation de transport du tenseur des corrélations pression-déformation, dont l'expression est déduite d'une description spectrale de la turbulence. Ce modèle nécessite la fermeture de trois termes, correspondant au tenseur des taux de dissipation et aux termes lent et rapide de l'équation d'évolution du tenseur de Reynolds. Ses performances ont été comparées aux modèles classiques dans les cas homogènes précédents et pour des écoulements de distorsions rapides. Les comparaisons ont montré notamment un meilleur comportement du terme rapide de ce modèle par rapport aux formulations classiques.

La prise en compte des effets de paroi constitue la deuxième partie du travail de thèse. Trois modèles du second ordre bas-Reynolds ont été appliqués au cas du canal plan établi. Les comportements asymptotiques des modèles ont été comparés à l'aide de développements de Taylor au voisinage des parois et de résultats de simulation directe. L'extension du modèle développé précédemment pour des écoulements homogènes a également été effectuée dans le cas du canal plan.

Le niveau inhabituel de la fermeture proposée rend difficile son application à des configurations tridimensionnelles. La dernière partie de ce travail est par conséquent consacrée à la validation de fermetures bas-Reynolds classiques, dans le cas d'écoulements en géométrie complexe. Le comportement de l'un des modèles du second ordre étudié précédemment dans le cas du canal plan est validé sur un cas test tridimensionnel caractérisé par un tourbillon longitudinal intense.

**Mots clefs :** *Turbulence, fermeture statistique, approximation homogène, modèle de turbulence au second ordre, réalisabilité, distorsion rapide, modélisation à faible nombre de Reynolds.*

## CONTRIBUTION TO THE STUDY OF SECOND-ORDER TURBULENCE MODELLING

**Abstract :** This work is devoted to one-point turbulence modelling for incompressible turbulent flows.

The behaviour of classical second-order closures for homogeneous turbulence was first observed in the case of flows with superimposed rotation. This study was focussed on pressure-strain modelling and allowed a discussion of objectivity and realisability constraints and of verification of rapid distortion limit. The closure models were performed on classical homogeneous flows and compared to direct numerical simulations. The difficulty of predicting strongly rotating flows with classical models lead to the development of an homogeneous model based on a transport equation for the pressure-strain correlation. This equation was obtained with the help of a spectral description of turbulence. Three closure hypotheses were formulated for the corresponding dissipative, slow and rapid terms, according to the classical terminology for Reynolds-stress equations. The model's performances were compared to those of more classical ones on the same homogeneous test case as before, as well as on rapidly distorted flows. The calculations show better behaviour than classical models especially as far as rapid approximation is concerned.

The influence of walls and inhomogeneous mechanisms are nevertheless two relevant effects one has to take into account for predicting realistic flows. The second part of the work is devoted to their analysis. The model presented earlier was then adapted to the fully-developed channel flow.

The unusual level of this type of closure makes its application difficult to three-dimensional flows. Therefore the last part of this work is concerned with the validation of classical low-Reynolds closures to simulate flows in complex geometries. One of the second order closure previously examined in the case of the channel flow is validated in a three-dimensional test case characterized by a strong streamline vortex.

**Key words :** *Turbulence, one-point statistic model, homogeneous approximation, second-order turbulence model, realisability, rapid distortion, low-Reynolds number closure.*