



HAL
open science

Propriétés spectrales de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique intense

Arnaud Sourisse

► **To cite this version:**

Arnaud Sourisse. Propriétés spectrales de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique intense. Mathématiques [math]. Université de Nantes, 2006. Français. NNT : . tel-00088078

HAL Id: tel-00088078

<https://theses.hal.science/tel-00088078v1>

Submitted on 29 Jul 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2006

PROPRIÉTÉS SPECTRALES DE L'OPÉRATEUR DE DIRAC AVEC UN CHAMP MAGNÉTIQUE INTENSE

Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes

Spécialité : MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Présentée et soutenue publiquement par

Arnaud SOURISSE

*le 30 Juin 2006 à l'Université de Nantes
devant le jury ci-dessous*

| | | | | |
|--------------------|---|--------------------|------------|------------------------------|
| <i>Président</i> | : | Bernard HELFFER | Professeur | (Paris-Sud) |
| <i>Rapporteurs</i> | : | Jean NOURRIGAT | Professeur | (Reims) |
| | | Grigori ROZENBLIUM | Professeur | (Göteborg) |
| <i>Examineurs</i> | : | Mouez DIMASSI | MC-HDR | (Institut Galilée, Paris 13) |
| | | Abdermane MORAME | MC-HDR | (Nantes) |
| | | Jean NOURRIGAT | Professeur | (Reims) |
| | | Didier ROBERT | Professeur | (Nantes) |
| | | Xue Ping WANG | Professeur | (Nantes) |

Directeur de thèse : Xue Ping WANG
Laboratoire : Laboratoire Jean Leray (UMR 6629 UN-CNRS-ECN)

N° E.D. : 0366-259

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance envers Xue Ping Wang, mon directeur de thèse, pour m'avoir guidé sur ce sujet stimulant, pour sa disponibilité, ses conseils et sa patience tout au long de ces quatre années.

Je voudrais ensuite remercier Grigori Rozenblioum et Jean Nourrigat d'avoir accepté de rapporter ce travail ainsi que pour leurs commentaires. Je suis heureux de remercier Mouez Dimassi, Bernard Helffer, Abderemane Morame, Jean Nourrigat et Didier Robert pour leur disponibilité et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail en acceptant de siéger dans le jury.

En tant que pur produit de l'Université de Nantes, je voudrais ici remercier mes enseignants, devenus mes collègues, pour m'avoir communiqué leur dynamisme et leur enthousiasme à l'image d'Anne-Marie Charbonnel et Jean-Marc Patin. Je peux y ajouter François Nicoleau et Jacques Barbe qui m'ont également fait profiter de leur compétence en recherche en Théorie Spectrale.

Je ne pourrais partir sans remercier les membres du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray de l'Université de Nantes pour leur gentillesse et leur efficacité.

Je remercie la fine équipe des thésards dont l'effectif s'est renouvelé au cours de ces années mais dont la bonne humeur et l'humour restent des constantes pour ces joyeux mathématiciens.

Quant à Samuel Boissière, Frédéric Serier et Simon Moulin, je leur adresse un grand merci pour leur disponibilité et tous les bons moments passés dans nos bureaux, sur un terrain de badminton ou autour d'une bonne table ...

Pour finir, un très grand Merci à ma famille! Leur attention, leur curiosité, l'intérêt pour ce travail en ont fait des supporters inconditionnels et m'ont permis d'en arriver là.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction | I |
| Notations | IX |
| 1 Spectre de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B | 1 |
| 1.1 Spectre essentiel de \mathbb{D}_B | 2 |
| 1.2 Spectre discret de $-\Delta_B + B$ | 5 |
| 1.2.1 Minoration de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ | 9 |
| 1.2.2 Majoration de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ | 15 |
| 1.3 Asymptotique de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ | 19 |
| 1.4 Applications aux opérateurs de Pauli et de Dirac | 28 |
| 2 Perturbation à décroissance rapide | 31 |
| 2.1 Etude du noyau de $\mathbb{D}_B - 1$ | 34 |
| 2.2 Perturbation à support compact | 39 |
| 2.3 Perturbation à décroissance exponentielle | 44 |
| 2.3.1 Cas où $2\beta > d + 2$ | 45 |
| 2.3.2 Cas où $2\beta = d + 2$ | 47 |
| 2.3.3 Cas où $2\beta < d + 2$ | 50 |
| 3 Perturbation à décroissance polynomiale | 55 |
| 3.1 Champ magnétique à croissance faible | 57 |
| 3.1.1 Méthode de Weyl | 57 |
| 3.1.2 Etude pour des V_1 à décroissance polynomiale forte | 63 |
| 3.1.3 Application à l'opérateur de Dirac | 64 |
| 3.2 Champ magnétique à croissance forte | 65 |
| 4 Résonances en dimension trois | 67 |
| 4.1 Introduction | 67 |
| 4.2 Définition des résonances | 69 |
| 4.3 Réduction à un hamiltonien effectif | 77 |
| 4.3.1 Etude près de Λ_0^+ et Λ_0^- | 78 |
| 4.3.2 Etude près de Λ_q^+ et Λ_q^- (pour $q \geq 1$) | 88 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A | Annexe sur les valeurs propres | 95 |
| A.1 | Quelques résultats connus | 95 |
| A.2 | Démonstration de la Proposition 2.1 | 96 |
| B | Annexe sur les résonances | 101 |
| B.1 | Démonstration du Lemme 4.1 | 101 |
| B.2 | Quelques résultats connus | 103 |
| | Bibliographie | 104 |

Introduction

A l'origine inventée pour décrire l'électron, l'équation de Dirac fut obtenue par le physicien anglais Paul A. M. Dirac en 1928 et publiée dans [18], [19]. Elle fournit une description du mouvement relativiste d'une particule de spin $\frac{1}{2}$ dans \mathbb{R}^3 (comme les neutrinos) et permet de prévoir l'existence de l'antiparticule.

Une fois quantifiée, l'équation pour une particule dans un champ électromagnétique (E, B) s'écrit

$$i\hbar\partial_t\Psi(t, x) = (-i\hbar c\alpha \cdot (\nabla_x - iA(x)) + \beta mc^2 + V(x)Id) \Psi(t, x) \quad (1)$$

où A est un potentiel magnétique associé à B (i.e. $rot(A) = B$), V est un potentiel électrique associé à E (i.e. $E = -\nabla_x V$), m est la masse de la particule, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, α_k et β sont des matrices carrées d'ordre 4 qui anticommulent (appelées "*matrices de Dirac*"),

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{pour } k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad \beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix},$$

les σ_k sont des matrices carrées d'ordre 2, hermitiennes, dites *matrices de Pauli*

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et Ψ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ à valeurs dans \mathbb{C}^4 . Pour ne pas alourdir les écritures, on va supposer les constantes physiques m , c et \hbar égales à 1.

Le cas de l'opérateur bidimensionnel peut toujours être considéré comme un cas particulier de la dimension 3. En effet, si on travaille avec l'hamiltonien $H_0 = -i\alpha \cdot (\nabla_x - iA(x)) + \beta$ avec un champ magnétique ayant une direction constante, on peut supposer pour simplifier que B est supporté par l'axe (Ox_3) . En utilisant la relation $rot(A) = B$, on obtient que le champ B est indépendant de la variable x_3 . On peut alors considérer B comme une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} (c'est ce que l'on fera pour la suite). De plus, en ne regardant que le mouvement projeté sur le plan orthogonal à cette droite vectorielle, on obtient alors un opérateur bidimensionnel, encore noté H_0 . L'isomorphisme entre $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ et $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ permet d'écrire

II

H_0 sous forme matricielle $\begin{pmatrix} 1 & D^\star \\ D & -1 \end{pmatrix}$ avec $D = (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1) + i(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2)$ et $D^\star = (\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1) - i(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2)$. Le potentiel magnétique A est défini sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans lui-même, et est associé au champ magnétique B , il vérifie alors la relation $\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = B$. L'opérateur H_0 est un opérateur non borné sur l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$.

L'asymptotique du spectre de l'opérateur de Dirac, un peu moins étudiée que ses homologues non relativistes, les opérateurs de Schrödinger et de Pauli, n'en est pas moins riche ou moins compliquée. Le spectre des opérateurs de Schrödinger et de Dirac sans champ magnétique ou avec un B constant est connu. L'étude du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique variable a été réalisée par A. Iwatsuka dans [27] pour un champ B tendant vers une constante à l'infini, puis améliorée par B. Helffer et A. Morame dans [22]. Suite à ce dernier travail, B. Helffer, J. Nourrigat et X. P. Wang, dans [25], ont décrit le spectre essentiel de l'opérateur de Dirac bidimensionnel et tridimensionnel avec des champs magnétiques B variables. En particulier, appliquant leur résultat avec des B à croissance polynomiale, on obtiendra que le spectre essentiel de l'opérateur de Dirac bidimensionnel est un point.

L'asymptotique des valeurs propres pour un opérateur $-\Delta + V$ à résolvante compacte a déjà été produite. Pour tout champ magnétique B de classe C^1 , en remplaçant $-\Delta$ par l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique B , $-\Delta_B + V$ reste à résolvante compacte. Pour de tels opérateurs, dans [32], H. Matsumoto a obtenu l'asymptotique du nombre de valeurs propres comptées avec multiplicité, contenues dans $[0; \lambda]$, dans le cas où V tend vers l'infini à l'infini plus vite que B ou inversement quand B croît plus rapidement que V . Considérant des B tendant vers l'infini à l'infini et $V = 0$, Y. Colin de Verdière avait obtenu l'asymptotique du spectre discret dans [10] et [11]. M. Boyarchenko et S. Levendorskii ont réuni les résultats connus sous une même formule dans [8]. Grâce au résultat [[50], Prop 2.5], on ramènera l'étude du spectre discret de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique B à croissance polynomiale à celle de l'opérateur à résolvante compacte $-\Delta_B + B$, qui constitue le cas limite laissé ouvert de [32].

Une fois perturbé par un potentiel électrique tendant vers 0 à l'infini, on étudie les valeurs propres de l'opérateur de Dirac perturbé près du spectre essentiel. Les principales études mathématiques de la distribution asymptotique des valeurs propres près du spectre essentiel (pour les opérateurs de Schrödinger, Pauli ou Dirac) portent sur trois types de champs magnétiques B : tout d'abord les champs constants ([20], [34], [39], [41], [43], [51], [52]), les champs bornés (strictement positifs [29] ou pour des champs à moyenne

positive [42]), et enfin les champs positifs tendant vers 0 à l'infini ([28]). Dans la majorité de ces études, ce sont des potentiels électriques à décroissance polynomiale qui sont considérés à l'exception de rares travaux comme [43] de G. Raikov et S. Warzel, [42] de G. Raikov et [34] de M. Melgaard et G. Rozenblum qui eux donnent des résultats avec des potentiels électriques à décroissance au moins exponentielle. On reprendra les méthodes variationnelles de ces deux derniers travaux pour traiter le cas d'un champ magnétique radial à croissance polynomiale. Pour d'autres aspects de l'étude spectrale de ces opérateurs, on peut se référer aux ouvrages [2], [12], [13], [17], [26], [33], [35], [47], [53], sources de nombreuses informations.

Des études ont déjà été menées sur les résonances de l'opérateur de Dirac tridimensionnel parmi lesquelles on peut citer : B. Parisse [37], [38], dans le cadre semi-classique et sans champ magnétique ; E. Balslev et B. Helffer [4], qui ont travaillé avec des potentiels électriques et magnétiques à courte portée sur le principe d'absorption limite ; P. Seba [49], a utilisé la méthode de dilatation analytique, employée par J. Aguilar et J. M. Combes pour l'opérateur de Schrödinger, pour l'opérateur de Dirac sans champ magnétique. Dans [1], L. Amour, R. Brummelhuis et J. Nourrigat ont étudié les résonances de l'opérateur de Dirac tridimensionnel sans champ magnétique et avec un potentiel électrique V à croissance polynomiale en $|x|$ à l'infini, dans le cadre de limite non relativiste. Ils ont alors localisé les résonances près des valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger $-\frac{1}{2}\Delta + V$. Après une dilatation analytique effectuée dans la direction de B , dans [54], X. P. Wang a étudié les résonances de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique constant porté par l'axe (Ox_3) et obtenu l'existence de résonances de forme créées par la barrière du potentiel électrique. Récemment dans [5], J-F. Bony, V. Bruneau et G. Raikov ont défini les résonances pour l'opérateur de Schrödinger tridimensionnel avec le champ magnétique constant B en prolongeant la résolvante à partir du demi-plan complexe supérieur et étudié ces dernières près des niveaux de Landau pour un potentiel V à décroissance polynomiale en les variables x_1 et x_2 et décroissance exponentiellement rapide en x_3 . L'hamiltonien de Stark bidimensionnel a été étudié par M. Dimassi et V. Petkov, dans [16] avec un champ magnétique constant, et dans [15] avec un cadre semi-classique sans champ magnétique. X. P. Wang a de nouveau utilisé la méthode de Grushin dans [55] pour étudier les résonances de l'hamiltonien de Stark bidimensionnel avec un champ magnétique constant. Dans le dernier chapitre de cette thèse, après avoir défini les résonances à l'aide de la dilatation analytique, on reprendra la méthode de Grushin pour l'opérateur de Dirac tridimensionnel avec le champ magnétique B .

Pour les trois premiers chapitres, le sujet portera sur la distribution asymptotique des valeurs propres en dimension 2. L'étude présentée ici est

IV

celle de l'opérateur \mathbb{D}_B avec un champ magnétique non borné, elle s'apparente à la grande famille des méthodes variationnelles. Tout d'abord on auscultera son spectre en démontrant qu'un point isolé forme le spectre essentiel, puis en comptant les valeurs propres à l'infini. Ensuite, après avoir perturbé l'opérateur \mathbb{D}_B par un potentiel électrique, on déterminera la distribution asymptotique des valeurs propres s'accumulant près du point du spectre essentiel en distinguant trois types de décroissance du potentiel \mathbb{V} :

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}.$$

On supposera que les V_j sont des fonctions mesurables bornées tendant vers 0 à l'infini. On formulera des résultats dans le cas d'un potentiel électrique V_1 à support compact ou à décroissance exponentielle (ce que l'on appelle "la décroissance rapide" et fait l'objet du chapitre 2) et à décroissance polynomiale (autrement dit "la décroissance lente", ce qui constitue le chapitre 3). Au cours du chapitre 4, on travaillera avec P_0 l'opérateur de Dirac tridimensionnel avec un champ magnétique constant perturbé par un potentiel électrique V à décroissance polynomiale. A l'aide d'une dilatation analytique dans la direction du support de B , on définira les résonances comme étant les éléments du spectre discret des opérateurs $P(\theta)$ obtenus à partir de $P_0 + V$ par cette transformation. Utilisant la méthode de Grushin, on ramènera l'étude spectrale près d'un couple de niveaux de Landau-Dirac à celle d'un hamiltonien effectif près de 0.

L'étude se portera sur des champs magnétiques B ayant la régularité $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Avec cette condition réalisée, si A et \tilde{A} sont deux potentiels magnétiques associés à B , alors leur différence est égale au gradient d'une fonction de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Le changement de jauge étant un opérateur unitaire, H_0 est uniquement déterminé par le champ magnétique B à une équivalence unitaire près, et l'on notera alors pour la suite \mathbb{D}_B au lieu de H_0 . De plus, les hypothèses de [[9], Théo 2.1] sont vérifiées, ce qui assure que $(\mathbb{D}_B, C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2))$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint. On considérera alors son extension auto-adjointe que l'on notera encore \mathbb{D}_B . $\mathcal{D}(\mathbb{D}_B)$ représentera son ensemble de définition, et on écrira D_B (resp. D_B^*) à la place D (resp. D^*).

Lors du premier chapitre, on s'intéressera au champ magnétique B , variable, tendant vers l'infini en l'infini. Sous cette hypothèse, on commencera par obtenir que le spectre essentiel de l'opérateur non perturbé \mathbb{D}_B est réduit à un point isolé dans $\sigma(\mathbb{D}_B)$, à savoir $+1$ ou -1 suivant le signe de B à l'infini. Toujours au cours de cette section, l'étude du spectre discret de cet opérateur sera ramenée à celle de l'opérateur de Pauli grâce au résultat de I. Shigekawa, [[50], Prop 2.5], reliant ces deux derniers. Ceci correspond au cas non traité du travail de H. Matsumoto [32]. Dans ce dernier article, en notant $H(B, V) = -\Delta_B + V$, la méthode utilisée est l'étude du comporte-

ment asymptotique de $\text{Tr} (e^{-tH(B,V)})$ quand t tend vers 0. Si $B = o(V)$ à l'infini, on obtient $\text{Tr} (e^{-tH(B,V)}) \sim \text{Tr} (e^{-tH(0,V)})$ quand $t \downarrow 0$. Inversement avec $V = o(B)$, on obtient $\text{Tr} (e^{-tH(B,V)}) \sim \text{Tr} (e^{-tH(B,0)})$ quand $t \downarrow 0$ et on retrouvera les formules de [10] et [11]. Ici, on se base sur la méthode de Weyl employée par A. Iwatsuka et H. Tamura [28] et Y. Colin de Verdière [10]. En imposant une croissance polynomiale au champ B , on déterminera la distribution asymptotique des valeurs propres de \mathbb{D}_B . En notant $\mathcal{N}_{Dirac}^+(\lambda; B)$ (resp. $\mathcal{N}_{Dirac}^-(\lambda; B)$) le nombre de valeurs propres de \mathbb{D}_B dans $]1; \lambda[$ (resp. $] - \lambda; -1[$), comptées avec leur multiplicité, on démontrera l'énoncé suivant

Théorème 1.

Soient $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $d > 0$.

On suppose qu'il existe $f \in C^1(\mathbb{S}^1;]0; +\infty[)$ et $R_0 > 0$ tels que

$$B(x) \underset{|x| \rightarrow +\infty}{\sim} f\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^d \quad \text{et} \quad |\nabla B(x)| \leq C|x|^{d-1} \text{ pour } |x| \geq R_0.$$

Alors on a quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Dirac}^\pm(\lambda; B) \sim \frac{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right) \lambda^{2+\frac{4}{d}}$$

où ζ est la fonction de Riemann.

On peut retrouver ce résultat dans la section 1.4 du premier chapitre (Théorème 1.15), il sera obtenu comme corollaire de théorèmes sur le spectre discret de l'opérateur $-\Delta_B + B$.

Le but du second chapitre sera de regarder l'accumulation des nouveaux niveaux d'énergie, créés quand on perturbe l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B par un potentiel électrique \mathbb{V} , au voisinage du point constituant le spectre essentiel. L'article de M. Melgaard et G. Rozenblum [34] donnera le point de départ de cette étude. En effet, dès que le point $+1$ est isolé dans $\sigma(\mathbb{D}_B)$, un résultat issu de [34] permet de relier l'asymptotique recherchée à l'étude des valeurs propres d'un opérateur compact de type Toeplitz. Une fois établi, on pourra alors appliquer les techniques mises en oeuvre avec un champ magnétique constant respectivement par M. Melgaard et G. Rozenblum [34], par G. Raikov et S. Warzel [43], pour étudier le cadre d'un champ magnétique radial à croissance polynomiale et pour un potentiel \mathbb{V} à décroissance rapide. Enfin, par une méthode variationnelle de comparaison de ces opérateurs de type Toeplitz, on étendra ces résultats à certains champs magnétiques asymptotiquement radiaux homogènes à croissance polynomiale $B(x) = b|x|^d + \mathcal{O}(|x|^{d-\delta})$ avec $\delta > 0$. En découleront les asymptotiques pour $\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$, le nombre de valeurs propres de $\mathbb{D}_B - \mathbb{V}$ comprises dans l'intervalle $]\Lambda; 1 - \lambda[$, comptées avec leur multiplicité, lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$:

Théorème 2.

Soient $\Lambda \in]-1; 1[$, $b > 0$, $d > 0$, $\delta > 0$ et B un champ magnétique de la forme

$$B(x) = b|x|^d + \mathcal{O}(|x|^{d-\delta}) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

- Soit V_1 un potentiel à support compact, $V_1 \geq 0$ tel que $V_1 > 0$ sur un ouvert non vide, et $\delta > 0$. Alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

- Dans le cas d'un potentiel électrique V_1 à décroissance exponentielle (i.e. $\ln |V_1(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} -\mu|x|^{2\beta}$ avec $\mu > 0$), V_1 positif hors d'un compact, on distinguera trois cas suivant les valeurs de β .

- Si $2\beta > d+2$ et $\delta > 0$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{\beta(d+2)}{2\beta - (d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

- Si $2\beta = d+2$ et $\delta > 0$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln \left(1 + \frac{\mu(d+2)^2}{2b}\right)}.$$

- Si $2\beta < d+2$ et $\delta > d - 2\beta$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{b}{d+2} \left(\frac{|\ln \lambda|}{\mu} \right)^{\frac{d+2}{2\beta}}.$$

Cet énoncé est la réunion de deux résultats du second chapitre : le Théorème 2.2 et le Théorème 2.3. On en trouvera les énoncés dans l'introduction du Chapitre 2 et les démonstrations respectives en section 2.2 et 2.3.

Pour clore l'étude de l'asymptotique du spectre discret près du spectre essentiel, on perturbera \mathbb{D}_B par un potentiel à décroissance polynomiale. Réutilisant la méthode de Weyl, pour des champs magnétiques à croissance faible (i.e. négligeable devant $|x|$ à l'infini), on obtiendra l'asymptotique de $\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ sous forme classique, formule identique à celles obtenues dans [34], [43], [39] pour d'autres types de champs magnétiques. Pour y parvenir, on considérera des champs magnétiques et des potentiels électriques de classe C^1 vérifiant, hors d'un disque contenant l'origine :

$$(\mathcal{H}) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_-|x|^d \leq B(x) \leq C_+|x|^d \\ |\nabla B(x)| \leq C|x|^{d-1} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_-|x|^{-\gamma} \leq V(x) \leq v_+|x|^{-\gamma} \\ |\nabla V(x)| \leq C|x|^{-\gamma-1} \end{array} \right.$$

où les constantes C , C_{\pm} et v_{\pm} sont toutes strictement positives.

De plus, l'étude des opérateurs compacts de type Toeplitz permettra d'étendre ce résultat au champ magnétique de degré supérieur en concédant une hypothèse sur la périodicité du champ électromagnétique (E, B) et d'obtenir le résultat suivant :

Théorème 3.

Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $d \in [2k - 2; 3k - 2[$, $\Lambda < 1$ et $\gamma > 0$.

On suppose que B et V_1 sont deux fonctions de $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses (\mathcal{H}) ci-dessus.

Si de plus, une fois en coordonnées polaires (ρ, θ) , on suppose que, pour tout ρ fixé, les fonctions $\theta \mapsto B(\rho, \theta)$ et $\theta \mapsto V(\rho, \theta)$ sont $\frac{2\pi}{k}$ -périodiques, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{V_1 > \lambda} B(x) dx.$$

On retrouve ce résultat en introduction du Chapitre 3 sous la forme du Théorème 3.2 et sa démonstration en sections 3.1.3 et 3.2.

Le quatrième chapitre aborde les résonances de l'opérateur de Dirac $P_0 := \sum_{k=1}^3 \alpha_k (D_k - \mathbf{A}_k(x)) + \alpha_4$, défini sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ avec un champ magnétique constant $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, perturbé par \mathbb{V} un potentiel électrique P_0 -compact, de classe C^∞ qui admet une extension holomorphe dans la direction du champ magnétique.

On se propose d'étudier les résonances de $P_0 + V$ en les définissant par dilatation analytique en la direction (Ox_3) , comme X. P. Wang l'avait fait pour l'opérateur de Schrödinger dans [54]. On commence par étudier la famille $(P(\theta))_\theta$, obtenue à partir de $P_0 + V$ par dilatation analytique, on montre que le spectre discret de $P(\theta)$ est indépendant de θ . On définit alors l'ensemble des résonances de P comme la réunion des spectres discrets de $P(\theta)$. Pour étudier les résonances de forme engendrées par des barrières du potentiel électrique dans le champ magnétique intense, on introduit le paramètre de charge Z et on remplace V par ZV . Ensuite on utilise un changement de coordonnées symplectiques pour transformer $P(\theta)$ en

$$P(B, Z; \theta) = \alpha_1 \left(\sqrt{B}x_2 \right) + \alpha_2 \left(\sqrt{B}D_2 \right) + \alpha_4 + \alpha_3 \left(e^{-\theta} D_3 \right) + Z\tilde{V}_\theta I_4$$

où \tilde{V}_θ est l'opérateur pseudodifférentiel sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ défini par

$$V^W \left(x - h^{\frac{1}{2}} D_2, h^{\frac{1}{2}} x_2 - h D_1, e^\theta x_3 \right)$$

avec $h := B^{-1}$. Puis utilisant la méthode de Grushin comme X. P. Wang dans [54] et [55], on étudie le spectre discret de l'opérateur $P(B, Z; \theta)$ près des niveaux de Landau-Dirac Λ_0^+ et Λ_0^- à l'aide d'un hamiltonien effectif. Pour Ω un voisinage complexe des points Λ_0^+ et Λ_0^- , bien choisi et ne rencontrant pas $\sigma_{ess}(P(B, Z; \theta))$, on note par $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda)$ le problème de Grushin associé à $P(B, Z; \theta) - \lambda$.

VIII

Théorème 4. *Si $1 \ll Z < B^{\frac{1-\varepsilon}{2}}$ avec $\varepsilon \in]0; 1[$, et $\lambda \in \Omega$, alors $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda)$ admet une unique solution donnée par*

$$\mathcal{E}^{(0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} E^{(0)}(B, Z; \lambda) & E_{+}^{(0)}(B, Z; \lambda) \\ E_{-}^{(0)}(B, Z; \lambda) & E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda) \end{pmatrix}$$

où $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ est un opérateur pseudodifférentiel admettant pour développement asymptotique

$$\begin{aligned} & \lambda I_2 - \Lambda_0^+ \sigma_3 - e^{-\theta} D_3 \sigma_1 - ZV^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \\ & - hZ \sum_{j=0}^{\infty} h^{\frac{j}{2}} a_j^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} D_3; \sqrt{h}Z, \sqrt{h}\lambda) \end{aligned}$$

où les a_j sont des symboles à valeurs matricielles, bornés et holomorphes en les variables $\sqrt{h}Z$ et $\sqrt{h}\lambda$.

Ce résultat constitue le Théorème 4.8 de la section 4.3.1. On a un résultat similaire pour les couples $(\Lambda_q^+, \Lambda_q^-)$ pour $q \geq 1$, à savoir le Théorème 4.11 de la section 4.3.2.

Le but de cette réduction est de ramener l'étude des éléments du spectre discret de $P(B, Z; \theta)$ près des niveaux de Landau-Dirac Λ_0^\pm à l'étude de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ et de chercher à appliquer la méthode de [54]. En poursuivant cette étude, on considérera la partie principale

$$Q = \lambda I_2 - \Lambda_0^+ \sigma_3 - e^{-\theta} D_3 \sigma_1 - ZV^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3)$$

de cet opérateur et on se ramènera à un problème semi-classique avec l'étude de l'opérateur $\frac{1}{Z}Q$ et $Z \rightarrow \infty$. En imposant des conditions géométriques appropriées au potentiel V , on espère obtenir l'existence de résonances de forme près de Λ_0^\pm .

Notations

Voici quelques-unes des notations utilisées lors des trois premiers chapitres de ce manuscrit.

- b.o.n. signifie "base orthonormée", et s.e. signifie "sous-espace".
- $SEP(T, \mu)$ représente le sous-espace propre de l'opérateur T associé à la valeur propre μ .
- $\llbracket k; n \rrbracket$ désigne l'ensemble $\{p \in \mathbb{N} : k \leq p \leq n\}$.
- $E(t)$ désigne la partie entière du réel t .
- $\delta_{k,p}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si et seulement si $k = p$.
- Les opérateurs sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ (resp. sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$) seront représentés par des lettres \mathbb{T} (resp. par des majuscules T).
- Les produits scalaires sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ et $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ seront notés respectivement par (\cdot, \cdot) et $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- La norme sur les espaces \mathbf{L}^2 considérés sera notée $\| \cdot \|$, celles sur les espaces \mathbf{L}^∞ seront notées par $\| \cdot \|_\infty$, et $|\cdot|$ signifiera la norme du scalaire considéré.
- Si T est un opérateur compact, on comptera les valeurs propres, avec leur multiplicité, à l'aide de

$$n_+(\mu, T) = \text{rang}(E]_{\mu; +\infty}[T)) \text{ et } n_-(\mu, T) = \text{rang}(E]_{-\infty; -\mu}[T))$$

où $E_I(T)$ est la projection spectrale de T correspondant à l'intervalle I .

- On rappelle les différents opérateurs rencontrés dans le texte :
si $A = (A_1, A_2)$ est un potentiel magnétique associé à B , on note

$$\begin{aligned} D_B = D &= \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 \right) + i \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \\ \text{et } D_B^* = D^* &= \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 \right) - i \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}_B &= \begin{pmatrix} 1 & D_B^* \\ D_B & -1 \end{pmatrix} && \text{opérateur de Dirac} \\
&&& \text{à champ magnétique } B \\
\mathbb{D}_0 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} & -1 \end{pmatrix} && \text{opérateur de Dirac libre} \\
\mathbb{P}_B &= \begin{pmatrix} -\Delta_B - B & 0 \\ 0 & -\Delta_B + B \end{pmatrix} && \text{opérateur de Pauli} \\
&&& \text{à champ magnétique } B \\
-\Delta_B &= \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1 \right)^2 + \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2 \right)^2 && \text{opérateur de Schrödinger} \\
&&& \text{à champ magnétique } B
\end{aligned}$$

On notera par P_B (ou P s'il n'y a pas d'ambiguïté) la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur $\text{Ker}(-\Delta_B - B) = \text{Ker}(D_B)$.

On utilisera parfois aussi D_k à la place de $\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}$.

- Pour $\lambda > 1$, on désignera par $\mathcal{N}_{Dirac}^+(\lambda; B)$ (resp. $\mathcal{N}_{Dirac}^-(\lambda; B)$), le nombre de valeurs propres de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B , comptées avec leur multiplicité, et incluses dans l'intervalle $]1; \lambda[$ (resp. dans l'intervalle $]-\lambda; -1[$).

De même, $\mathcal{N}_{Pauli}(\lambda; B)$ sera le nombre de valeurs propres de l'opérateur de Pauli \mathbb{P}_B , comptées avec leur multiplicité, et incluses dans l'intervalle $]0; \lambda[$.

Pour finir, on notera $\mathcal{N}_{sch}(\lambda; B)$ le nombre de valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_B + B$, dans l'intervalle $]0; \lambda[$ et comptées avec leur multiplicité.

- Pour $\lambda > 0$, on adopte la notation employée dans [34] et [43] en désignant par $\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda | \mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ le nombre de valeurs propres de l'opérateur $\mathbb{D}_B - \mathbb{V}$ comprises entre $\Lambda \in]-\infty; 1[$ et $1 - \lambda$, comptées avec leur multiplicité, et de même pour $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda | \mathbb{D}_B - \mathbb{V})$:

$$\begin{aligned}
\text{i.e. } \mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda | \mathbb{D}_B - \mathbb{V}) &= E_{] \Lambda; 1 - \lambda[}(\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \\
\text{resp. } \mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda | \mathbb{D}_B - \mathbb{V}) &= E_{] 1 + \lambda; \Lambda[}(\mathbb{D}_B - \mathbb{V})
\end{aligned}$$

où \mathbb{V} est l'opérateur de multiplication, défini sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$, ayant pour représentation matricielle

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}.$$

- On s'intéressera aux classes de potentiels électriques à décroissance rapide suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \{f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurables bornées}\} \\
\mathcal{C}_{cpt} &= \{V \in \mathcal{M} : \text{supp}(V) \text{ compact et } \text{Int}(V^{-1}(\mathbb{R}^*)) \neq \emptyset\} \\
\mathcal{G}(\mu, \beta) &= \left\{ V \in \mathcal{M} : \ln |V(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} -\mu |x|^{2\beta} \right\} \text{ où } \mu > 0, \beta \in \mathbb{R}_+^*
\end{aligned}$$

- Dans le cas des potentiels électriques à décroissance rapide, on s'intéressera, pour $\delta > 0$, à la classe des champs magnétiques vérifiant :

$$(\mathcal{H}_{B \sim rhd}(\delta)) = \left\{ \begin{array}{l} B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tel que } B(x) = B_d(x) + \Psi(x) \\ \text{avec } \Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{d-\delta}) \text{ quand } |x| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

où $B_d \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est un champ radial tel qu'il existe $\varphi_d \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solution classique de $\Delta\varphi = B_d$ vérifiant pour $|x| \geq 1$, $\varphi_d(x) = \frac{b}{(d+2)^2}|x|^{d+2}$ avec $(b, d) \in]0; +\infty[^2$.

En particulier, pour $|x| > 1$, on a $B_d(x) = b|x|^{d+2}$.

- Dans le cas des potentiels électriques à décroissance polynomiale, on fera les hypothèses suivantes sur le couple (B, V) :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}_{B,d}) & \begin{cases} B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ C_-|x|^d \leq B(x) \leq C_+|x|^d & \text{pour } |x| \geq R_0 \\ |\nabla B(x)| \leq C|x|^{d-1} & \text{pour } |x| \geq R_0 \end{cases} \\
 (\mathcal{H}_{V,\gamma}) & \begin{cases} V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ v_-|x|^{-\gamma} \leq V(x) \leq v_+|x|^{-\gamma} & \text{pour } |x| \geq R_0 \\ |\nabla V(x)| \leq C|x|^{-\gamma-1} & \text{pour } |x| \geq R_0 \end{cases} \\
 (\mathcal{H}_{B,d,k}) & \begin{cases} B \text{ vérifie } (\mathcal{H}_{B,d}) \\ \text{et une fois exprimée en coordonnées polaires } (\rho, \theta), \\ \text{à } \rho \text{ fixé, la fonction } \theta \mapsto B(\rho, \theta) \text{ est } \frac{2\pi}{k}\text{-périodique} \end{cases} \\
 (\mathcal{H}_{V,\gamma,k}) & \begin{cases} V \text{ vérifie } (\mathcal{H}_{V,\gamma}) \\ \text{et une fois exprimée en coordonnées polaires } (\rho, \theta), \\ \text{à } \rho \text{ fixé, la fonction } \theta \mapsto V(\rho, \theta) \text{ est } \frac{2\pi}{k}\text{-périodique} \end{cases}
 \end{aligned}$$

où les constantes réelles d, γ, C, C_\pm et v_\pm sont strictement positives et $k \in \mathbb{N}^*$.

Voici à présent des notations utilisées au cours du quatrième chapitre :

- La partie réelle et la partie imaginaire d'un complexe z sont notées respectivement par $\Re z$ et $\Im z$.

On pose $\mathbb{C}_{++} := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0 \text{ et } \Im z > 0\}$.

- I_4 et I_2 sont les matrices carrées "unité" de taille respective 4×4 et 2×2 . L'opérateur Id est l'"identité" sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. Les opérateurs "identité" sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$ et $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C})$ seront respectivement notées Id_{x_2} et Id_{x_1, x_3} .

- On définira P_0 l'opérateur de Dirac avec le champ magnétique $\mathbf{B} = (0; 0; B)$ à l'aide des matrices de Dirac α_j suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{pour } j \in \{1; 2; 3\}, \quad \alpha_j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \\
 \text{où } \sigma_j & \text{ sont les matrices de Pauli} \\
 \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

- Pour le champ magnétique constant \mathbf{B} , les niveaux de Landau-Dirac seront notés $\Lambda_q^\pm := \pm\sqrt{1 + 2Bq}$ pour $q \geq 0$.

- On représentera le produit scalaire sur l'espace de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$ (resp. $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C})$) par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_2}$ (resp. $\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_1, x_3}$).

XII

- L'opérateur pseudodifférentiel de symbole de Weyl $a(x, \xi)$ est noté $a^W(x, D_x)$ et défini par

$$(a^W(x, D_x)f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) f(y) dy d\xi$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.

- Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\langle x \rangle := (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Chapitre 1

Spectre de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B

Comme annoncé dans l'introduction, au cours de ce chapitre, on s'intéressera au spectre de \mathbb{D}_B . Dans un premier temps, après avoir rappelé le résultat de I. Shigekawa [50] reliant les spectres de \mathbb{D}_B et de \mathbb{P}_B , on établira que $\sigma(\mathbb{D}_B)$ se réduit à un singleton et que ce point est isolé dans le spectre de \mathbb{D}_B . Enfin, appliquant la méthode de Weyl, on étudiera les valeurs propres de \mathbb{D}_B utilisant celles de l'opérateur de $H(B) = -\Delta_B + B$.

Le problème de l'asymptotique des valeurs propres de $-\Delta_B$, l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique B tendant vers l'infini en l'infini, a été étudié par Y. Colin de Verdière dans [10] puis amélioré dans [11] où l'auteur impose des hypothèses sur les dérivées secondes d'un potentiel magnétique associé à B . Puis, dans [32], H. Matsumoto, avec $-\Delta_B + V$ à résolvante compacte, a déterminé une asymptotique du nombre de valeurs propres dans le cas d'un V négligeable devant B à l'infini ou réciproquement. Ici, on s'interroge sur le cas limite non traité, à savoir $B = V$.

Appliquant le résultat de P. Chernoff, [[9], Théo 2.1], on déduit que $(\mathbb{D}_B, C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2))$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint. Son extension auto-adjointe, que l'on notera encore \mathbb{D}_B , a pour domaine de définition $\mathcal{D}(\mathbb{D}_B)$. Le champ B étant $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, on a l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{D}_B) \subset \mathbb{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$.

Le spectre de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B possède quelques propriétés bien connues : $\sigma(\mathbb{D}_B) \subset \mathbb{R} \setminus]-1; 1[$ (ou $\mathbb{R} \setminus]-m; m[$ si l'on a choisi de garder la masse m dans les calculs). Avec un champ magnétique constant b non nul, $\sigma(\mathbb{D}_b)$ est constitué d'une infinité de valeurs propres isolées, de multiplicités infinies. Ces dernières sont appelées "niveaux de Landau-Dirac" et s'expriment comme suit pour $b > 0$:

$$\Lambda_q^- := -\sqrt{1 + 2bq} \ , q \in \mathbb{N}^* \quad \Lambda_q^+ := \sqrt{1 + 2bq} \ , q \in \mathbb{N}.$$

Avec un $b < 0$, le point -1 appartient à $\sigma(\mathbb{D}_B)$ et $+1$ n'y est pas. Ainsi avec un champ b constant non nul, le spectre de \mathbb{D}_b est symétrique par rapport

à zéro, sauf en les points -1 et $+1$. Ce phénomène se nomme “la brisure de symétrie” (*symmetry breaking*).

Pour des champs magnétiques B quelconques, on possède l'égalité $\mathbb{D}_B^2 = \mathbb{P}_B + 1$. Le résultat de I. Shigekawa utilise cette relation avec l'opérateur de Pauli pour exprimer $\sigma(\mathbb{D}_B)$ à l'aide de $\sigma(\mathbb{P}_B)$ et permettre de retrouver les propriétés citées ci-dessus :

Proposition 1.1. *[[50], Prop 2.5]*

Si $B \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, alors le spectre de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B est donné par

$$\sigma(\mathbb{D}_B) = \{\sqrt{\lambda+1} : \lambda \in \sigma(-\Delta_B - B)\} \cup \{-\sqrt{\mu+1} : \mu \in \sigma(-\Delta_B + B)\},$$

et le spectre essentiel de \mathbb{D}_B par

$$\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B) = \{\sqrt{\lambda+1} : \lambda \in \sigma_{ess}(-\Delta_B - B)\} \cup \{-\sqrt{\mu+1} : \mu \in \sigma_{ess}(-\Delta_B + B)\}.$$

L'opérateur de Schrödinger à champ magnétique B sera désigné par $-\Delta_B$. En effet, si A et \tilde{A} sont deux potentiels magnétiques de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ associés au champ B , alors $\partial_1(A_2 - \tilde{A}_2) - \partial_2(A_1 - \tilde{A}_1) = 0$. Donc il existe une fonction de jauge $\kappa \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $A = \tilde{A} + \nabla\kappa$. Ainsi on obtient la relation $e^{i\kappa}(-i\nabla - A)e^{-i\kappa} = (-i\nabla - \tilde{A})$. Ceci entraîne que les opérateurs $(-i\nabla - A)^2$ et $(-i\nabla - \tilde{A})^2$ sont unitairement équivalents (via la conjugaison par l'opérateur de multiplication par $e^{-i\kappa}$). On dit alors que $(-i\nabla - A)^2$ est invariant par changement de jauge et on le représentera par $-\Delta_B$:

$$-\Delta_B = \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1} - A_1\right)^2 + \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2} - A_2\right)^2$$

où $A = (A_1, A_2)$ est un potentiel magnétique associé à B .

On a les relations $-\Delta_B - B = D_B^* D_B$ et $-\Delta_B + B = D_B D_B^*$.

Remarque. *La démonstration proposée par I. Shigekawa explicite les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B en fonction de ceux de l'opérateur de Pauli \mathbb{P}_B . En ce qui concerne le spectre essentiel, il construit une suite de Weyl associée à un élément de $\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B)$ à partir d'une suite de Weyl associée à l'élément de $\sigma_{ess}(\mathbb{P}_B)$ qui lui correspond.*

Cet énoncé et sa démonstration sont alors valables pour des champs magnétiques beaucoup moins réguliers que C^∞ . En particulier, ils seront corrects pour des champs ayant la régularité C^1 . Pour cette raison, dans la suite de ce manuscrit, on se permettra d'appliquer ce résultat pour des champs magnétiques de classe C^1 .

1.1 Spectre essentiel de \mathbb{D}_B

Pour un champ non constant, avec le résultat de I. Shigekawa, on vient de voir une façon d'obtenir $\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B)$ à partir de l'opérateur de Pauli. Deux

ans auparavant dans [25], B. Helffer, J. Nourrigat et X.P. Wang ont obtenu un résultat décrivant le spectre essentiel de l'opérateur de Dirac $H(B)$ défini par

$$H(B) = \alpha_1 \left(-i \frac{\partial}{\partial x_1} - A_1(x) \right) + \alpha_2 \left(-i \frac{\partial}{\partial x_2} - A_2(x) \right) + \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & D^* \\ 0 & 1 & D & 0 \\ 0 & D^* & -1 & 0 \\ D & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où D et D^* sont les mêmes opérateurs introduits avec notre opérateur \mathbb{D}_B et définis dans les Notations en (2). Ce résultat permet d'exprimer le spectre essentiel de $H(B)$ à l'aide d'opérateur de Dirac à champ constant $H(b)$:

Théorème 1.2. *[[25], Théo 1.6]*

Soit $B \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On note $\mathcal{B}_\infty := \left\{ b \in \mathbb{R} : \exists (x_n)_n, |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, B(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \right\}$

$$\text{et } \mathcal{S}_\infty := \begin{cases} \left\{ \pm \sqrt{1 + 2k|b|} : k \in \mathbb{N}, b \in \mathcal{B}_\infty \right\} & \text{si } 0 \notin \mathcal{B}_\infty \\] - \infty; -1] \cup [1; +\infty[& \text{si } 0 \in \mathcal{B}_\infty. \end{cases}$$

On pose $\varepsilon_0(x) = |B(x)|$ et pour $r \geq 1$, $\varepsilon_r(x) = \frac{\sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = r} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} B(x)|}{1 + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 < r} |D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} B(x)|}$.

Si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_0(x) = 0$ ou $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_1(x) = 0$, alors $\sigma_{ess}(H(B)) = \{-1; 1\} \cup \mathcal{S}_\infty$.

Si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \varepsilon_r(x) = 0$ pour un $r \geq 2$, alors $\{-1; 1\} \subset \sigma_{ess}(H_B)$.

En identifiant $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^4)$ à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}_{e_1, e_4}^2) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}_{e_2, e_3}^2)$, on peut obtenir une nouvelle écriture matricielle de $H(B)$:

$$\mathbb{D}_B \oplus \begin{pmatrix} 1 & D \\ D^* & -1 \end{pmatrix}.$$

Or, de l'équivalence

$$\mathbb{D}_B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & D \\ D^* & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

on peut obtenir que le spectre de $\begin{pmatrix} 1 & D \\ D^* & -1 \end{pmatrix}$ est le symétrique par rapport à 0 du spectre de \mathbb{D}_B . Après avoir exclu un des points $+1$ ou -1 , en utilisant les Lemmes 1.4 à 1.6, on sera en mesure de démontrer que pour des champs B vérifiant les hypothèses du Théorème de B. Helffer, J. Nourrigat et X.P. Wang [25] (ce qui inclut les champs à croissance polynomiale), on aura le résultat suivant :

Proposition 1.3. *On suppose que $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.*

Si $\lim_{|x| \rightarrow \infty} B(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B) = \{+1\}$ (resp. $\{-1\}$).

De plus, le point $+1$ (resp. -1) est un point isolé de $\sigma(\mathbb{D}_B)$.

Remarque. Pour cet énoncé, on ne fait pas l'hypothèse sur les fonctions ε_j associées à B . On propose ci-dessous une démonstration, ne faisant pas appel au Théorème 1.2 et valable dès que le champ B tend vers l'infini en l'infini.

[25] indique que $-\Delta_B + B$ ou $-\Delta_B - B$ n'est pas à résolvante compacte.

Démonstration de la Proposition 1.3. Pour effectuer le raisonnement, on supposera que la limite de B en l'infini est $+\infty$:

En appliquant la Proposition 1.1, on est ramené à prouver que 0 est un élément de $\sigma_{ess}(-\Delta_B - B)$ et un point isolé dans $\sigma(-\Delta_B - B)$, et 0 n'est pas dans $\sigma_{ess}(-\Delta_B + B)$. Le premier point va découler du Lemme¹ suivant issu de [50], que l'on retrouve également dans [[17], Lemme 2.12] :

Lemme 1.4. [[50], Lemme 3.4]

Si $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^2 B(x) = +\infty$, alors $\dim \text{Ker}(D_B^*) = \infty$.

Par conséquent, $\text{Ker}(-\Delta_B - B) = \text{Ker}(D_B^*)$ est de dimension infinie et $0 \in \sigma_{ess}(-\Delta_B - B)$. D'après la Proposition 1.1, on en déduit donc que $+1 \in \sigma_{ess}(\mathbb{D}_B)$. De plus, grâce au résultat suivant et au fait que l'opérateur $-\Delta + B$ est à résolvante compacte, on aura $0 \notin \sigma(-\Delta_B + B)$.

Lemme 1.5. [[30], Cor 1.4]

Si V est un potentiel inférieurement borné et $-\Delta + V$ est à résolvante compacte, alors pour tout potentiel magnétique $A \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, l'opérateur $-\Delta_B + V$ est également à résolvante compacte.

Le fait que $+1$ soit un point isolé dans $\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B)$ est une conséquence de ce dernier résultat :

Lemme 1.6. [[12], Théo 6.4]

Soit A de classe $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ un potentiel magnétique associé au champ B . Alors les opérateurs $-\Delta_B + B$ et $-\Delta_B - B$ ont le même spectre excepté peut-être en 0.

Ainsi, 0 est un point isolé de $\sigma(-\Delta_B - B)$, et la Proposition 1.1 assure que le point $+1$ est un point isolé de $\sigma(\mathbb{D}_B)$. Ceci achève la démonstration de la Proposition 1.3. \square

S'il n'y a pas de confusion possible, on notera indifféremment D_B ou D pour le même opérateur et de même pour D_B^* ou D^* .

Avant de s'attaquer aux perturbations de l'opérateur de Dirac par un champ électrique, on va finir cette étude du spectre de \mathbb{D}_B . On vient de déterminer $\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B)$, il reste à s'intéresser aux éléments du spectre discret de \mathbb{D}_B . Pour atteindre ce but, on exploitera la méthode de Weyl pour

¹A noter que dans leur article récent [46], G. Rozenblum et N. Shirokov ont obtenu que le noyau de D_B^* est de dimension infinie pour une classe de champ magnétique B plus importante.

déterminer $\sigma_d(-\Delta_B + B)$. Puis invoquant la supersymétrie, on obtiendra $\sigma_d(\mathbb{P}_B)$, et de la Proposition 1.1, on déduira $\sigma_d(\mathbb{D}_B)$.

1.2 Spectre discret de $-\Delta_B + B$

La *méthode de Weyl* consiste à partitionner l'espace \mathbb{R}^2 par des carrés et considérer la réalisation auto-adjointe de l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique sur chacun des carrés $Q_{j,p}$ avec condition de Dirichlet au bord. On se basera sur le travail [28] de A. Iwatsuka et H. Tamura pour donner une réponse au cas limite laissé vacant par H. Matsumoto dans [32]. En effet, étudiant le comportement asymptotique de la trace de l'opérateur de la chaleur, H. Matsumoto a obtenu des résultats sur l'asymptotique du spectre discret des opérateurs $-\Delta_B + V$ à résolvante compacte lorsque $B = o(V)$ ou $V = o(B)$. Pour des potentiels magnétiques A vérifiant $|\partial^\alpha A_k(x)| = o(V(x))$, il a montré que $\text{Tr}(e^{-t(-\Delta_A + V)}) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \text{Tr}(e^{-t(-\Delta + V)})$ et a conclu à l'asymptotique de $\mathcal{N}(\lambda)$, le nombre de valeurs propres dans $]0; \lambda[$ comptées avec leur multiplicité, en appliquant le Théorème Tauberien de Karamata.

Ici, on s'intéressera au cas où $V = B$ avec des champs magnétiques B qui divergent à l'infini vers $+\infty$, plus précisément à croissance polynomiale, et l'on obtiendra un encadrement de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$, la fonction de comptage des valeurs propres de $-\Delta_B + B$ comprises dans $] - \infty; \lambda[$, ces valeurs propres étant comptées avec multiplicité. De plus, en supposant que B est asymptotiquement homogène de degré d à l'infini, on donnera une formule explicite de l'équivalent de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$. Enfin, on terminera en appliquant ces résultats aux opérateurs de Pauli et de Dirac avec de tels champs magnétiques B .

Proposition 1.7.

Soit $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel qu'il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^2$ contenant l'origine et des constantes $(b_+, b_-, C, d) \in]0; +\infty[^4$ vérifiant que pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus K$,

$$b_-|x|^d \leq B(x) \leq b_+|x|^d \quad \text{et} \quad |\nabla B(x)| \leq C|x|^{d-1}. \quad (1.1)$$

De plus, on suppose que quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{k=1}^{E(\lambda^{\eta_d})} \int_{\mathcal{V}_k^-(\lambda; B) \cup \mathcal{V}_k^+(\lambda; B)} B(x) dx = o\left(\lambda^{1+\frac{2}{d}}\right) \quad (1.2)$$

où l'on définit $\mathcal{V}_k^-(\lambda; B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus K : \frac{\lambda(1 - g_-(\lambda))}{2k} < B(x) \leq \frac{\lambda}{2k} \right\}$ et $\mathcal{V}_k^+(\lambda; B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus K : \frac{\lambda}{2k} < B(x) \leq \frac{\lambda(1 + g_+(\lambda))}{2k} \right\}$, les fonctions positives g_\pm vérifient $g_\pm(\lambda) = C\lambda^{-\eta_d}$ quand $\lambda \rightarrow +\infty$ et la constante vaut

$\eta_d = \frac{1}{3d}$ si $d \in]1; +\infty[$ et $\frac{1}{3} - \varepsilon$ si $d \in]0; 1]$ et pour tout $\varepsilon \ll 1$.
Alors on a quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx,$$

où $T(x) = \#\{n \in \mathbb{N}^* : 2n + 1 < x\}$.

Remarques.

- 1) La formule ci-dessus ressemble à celles obtenues dans [10] et [11]. Y. Colin de Verdière a obtenu, également pour des champs magnétiques tendant vers $+\infty$ en l'infini, l'asymptotique suivante quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}(\lambda; B) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)}\right) dx$$

où $\mathcal{N}(\lambda; B)$ est le nombre de valeurs propres comptées avec multiplicité de l'opérateur $-\Delta_B$.

Le fait de regarder le spectre de $-\Delta_B + B$ au lieu de $-\Delta_B$ va alors procurer un décalage de -1 dans l'appel de l'application T : en effet, dans la Proposition 1.7, on obtient une formule faisant intervenir $T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right)$ à la place de $T\left(\frac{\lambda}{B(x)}\right)$ dans la formule ci-dessus.

- 2) L'intégrale se fait sur $\mathbb{R}^2 \setminus K$ pour éviter de rencontrer le(s) zéro(s) du champ B .
3) Sous ces hypothèses, on pourra montrer que le terme principal de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ est de l'ordre de $\lambda^{1+\frac{2}{d}}$.

En effet, par la définition de T , on a

$$T(\alpha) = k \iff 2(k-1) + 1 < \alpha \leq 2k + 1$$

et donc $\frac{\alpha}{2} - 1 \leq T(\alpha - 1) < \frac{\alpha}{2}$. En particulier, en notant $E(t)$ la partie entière de t , on a

$$T(\alpha - 1) = \begin{cases} E\left(\frac{\alpha}{2}\right) & \text{si } \alpha \notin 2\mathbb{N} \\ E\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 & \text{si } \alpha \in 2\mathbb{N}. \end{cases}$$

On en déduit que pour tout α , on a $\frac{\alpha}{2} - 1 \leq T(\alpha - 1) \leq E\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Donc en notant μ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 , et $I(\lambda)$ l'intégrale présente dans l'équivalent de $\mathcal{N}(\lambda)$, on a

$$I(\lambda) \leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) E\left(\frac{\lambda}{2B(x)}\right) dx \leq \frac{\lambda}{2} \mu\left(B^{-1}(] - \infty; \lambda]) \cap^c K\right).$$

D'après (1.1), on obtient $I(\lambda) \leq \frac{\lambda}{2} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \lambda \geq 2b_-|x|^d\right\}\right)$. D'où il existe $m_+ \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > 1$, on a $I(\lambda) \leq m_+ \lambda^{1+\frac{2}{d}}$. Et de même, on obtient $I(\lambda) \geq \int_{\{2B \leq \lambda\} \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx$. Il existe $\lambda_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a l'inclusion $\mathcal{E}_-(\lambda) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : 2b_+|x|^d \leq \lambda\right\} \subset \{2B \leq \lambda\}$. Ainsi pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a

$$I(\lambda) \geq \int_{\mathcal{E}_-(\lambda)} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx - \int_K B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx.$$

Donc il existe $c_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a

$$I(\lambda) \geq \frac{\lambda}{2} \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \lambda \geq 2b_+|x|^d\right\}\right) - \int_{\mathcal{E}_-(\lambda)} B(x) dx - c_0 \lambda.$$

D'après (1.1), on en déduit que $\int_{\mathcal{E}_-(\lambda)} B(x) dx \leq \frac{2\pi b_+}{d+2} \left(\frac{\lambda}{2b_+}\right)^{1+\frac{2}{d}}$.

L'égalité $\mu(\mathcal{E}_-(\lambda)) = \pi(2b_+)^{-\frac{2}{d}} \lambda^{\frac{2}{d}}$ entraîne la minoration de $I(\lambda)$ par $\pi(2b_+)^{-\frac{2}{d}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d+2}\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} - c_0 \lambda$.

Comme $\frac{1}{2} - \frac{1}{d+2} > 0$, on en déduit qu'il existe $m_- \in]0; +\infty[$ tel que

$$m_- \lambda^{1+\frac{2}{d}} \leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx \leq m_+ \lambda^{1+\frac{2}{d}}.$$

En remplaçant $T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right)$ par $T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right)$, on obtient le même encadrement et on en déduit qu'il existe $(\tilde{m}_-, \tilde{m}_+, \lambda_1) \in]0; +\infty[^3$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$, $\tilde{m}_- \lambda^{1+\frac{2}{d}} \leq \mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \leq \tilde{m}_+ \lambda^{1+\frac{2}{d}}$.

- 4) Ce travail se différencie du travail de M. Boyarchenko et S. Levendorskii [8] par le fait que ces derniers considèrent des champs magnétiques quasi-homogènes (i.e. vérifiant $B(t^{\gamma_1} x_1, t^{\gamma_2} x_2) = tB(x)$ avec $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^2$ et les γ_j rationnels) et qu'ils travaillent essentiellement avec des potentiels polynomiaux. Néanmoins leurs calculs effectués en [8] (paragraphe 3.4) peuvent s'adapter à notre cadre. Ici, la démonstration proposée semble "plus simple". Ceci s'explique par le fait que la classe des champs magnétiques considérés ici est plus ciblée.

A priori, la différence essentielle réside dans la construction de la partition de l'unité. Ils majorent Φ par $(\Psi^*(x))^2 = (1 + \sqrt{B(x)})^2$, alors que l'on utilise une fonction qui est un $o(B)$. La construction des petits carrés proposée ici est aussi plus explicite.

5) Les champs magnétiques B vérifiant (1.1) et asymptotiques homogènes de degré d remplissent² la condition (1.2). Ainsi le Théorème 1 de l'introduction sera vu comme une conséquence de la Proposition 1.7 (voir section 1.3). Cette dernière sera elle-même une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 1.8.

Soit $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses (1.1).

Alors il existe $(c, \lambda_0) \in]0; +\infty[^2$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda(1+g_+(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx [1 + c\lambda^{-\eta_d}] \\ \mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) &\geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g_-(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx [1 - c\lambda^{-\eta_d}] \end{aligned} \quad (1.3)$$

où η_d est la constante positive du Théorème 1.7.

Pour élaborer la démonstration de ce résultat, on va introduire les notations suivantes :

- $H(B) = -\Delta_B + B$ où $-\Delta_B$ représente l'opérateur de Schrödinger, avec champ magnétique B sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Pour un réel λ , $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ désigne le nombre de valeurs propres de l'opérateur $H(B)$, comptées avec multiplicité, contenues dans l'intervalle $] - \infty; \lambda[$.
- Les variables j , p et k désignent des entiers naturels. $[[j, p]]$ est l'ensemble des entiers compris entre j et p .
- $H_{jp}(B)$ représente la réalisation auto-adjointe de l'opérateur $H(B)$ sur $\mathbf{L}^2(Q_{jp}; \mathbb{C})$ avec les conditions de Dirichlet au bord. Les $Q_{j,p}$ seront des petits carrés de \mathbb{R}^2 , définis au début de la section §1.2.1. On désigne par $N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{jp})$ le nombre de valeurs propres de l'opérateur $H_{jp}(B)$, comptées avec multiplicité et plus petites que λ .
- Une fonction réelle positive sera dite à (dé)croissance de l'ordre de λ^a s'il existe $c_{\pm} \in]0; +\infty[$ tel que $c_- \lambda^a \leq f(t) \leq c_+ \lambda^a$.

Comme annoncée ci-dessus, la démonstration de la Proposition 1.8 se fera en appliquant la méthode de Weyl. Obtenue en deux temps, la minoration sera l'objet du paragraphe 1.2.1, et la majoration celui de la section 1.2.2. Puis on appliquera ce résultat pour déterminer un équivalent à la distribution asymptotique du spectre discret de l'opérateur de $H(B)$ avec un champ magnétique vérifiant (1.1) au cours de la section 1.3.

On minorera $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ de la façon suivante :

²On se reportera à la démonstration du Théorème 1.11 pour la justification.

- 1) L'idée est de recouvrir l'espace par une réunion de "couronnes carrées" \mathcal{C}_j d'épaisseur 1. Ces \mathcal{C}_j sont centrées à l'origine et formées de petits carrés $Q_{j,p}$ de côté de longueur³ $[E(j^\alpha)]^{-1}$ pour un α bien choisi⁴.
- 2) Sur chaque $Q_{j,p}$, on remplacera $H_{j,p}(B)$ par une combinaison barycentrique d'opérateurs de Schrödinger à champ magnétique constant. L'intervention de cette combinaison barycentrique vient du fait que les "domaines de niveau" de la fonction $T\left(\frac{\lambda}{B(\cdot)} - 1\right)$ partitionnent le plan.
- 3) On utilisera alors le résultat suivant, de Y. Colin de Verdière, pour obtenir un minorant de $\mathcal{N}(\lambda)$.

Théorème 1.9. *[[11], Théo 4.1]*

Soient Q_R un cube de côté R et H_b l'opérateur de Schrödinger à champ magnétique constant $b > 0$.

1. Il existe une constante $C_0 > 0$ indépendante de λ, R , telle que pour tout $\Lambda \in]0; \frac{R}{2}[$,

$$N_D(H_b < \lambda; Q_R) \geq \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{\Lambda}{R}\right)^2 b \mu(Q_R) T\left(\frac{\lambda}{b} - \frac{C_0}{\Lambda^2 b}\right).$$

2. De plus pour la majoration, on a

$$N_D(H_b < \lambda; Q_R) \leq \frac{1}{2\pi} b \mu(Q_R) T\left(\frac{\lambda}{b}\right).$$

- 4) Pour terminer, on évaluera la différence entre ce minorant et celui recherché.

Le plan de la majoration est identique : après avoir introduit des partitions de l'unité $(\varphi_{j,p})_{j,p}$, $\varphi_{j,p}$ valant 1 sur $Q_{j,p}$, à support dans un carré $\tilde{Q}_{j,p}$ de même centre et de côté $(1 + j^{-\beta}) [E(j^\alpha)]^{-1}$ pour un β bien choisi, on utilise la relation IMS⁵ pour obtenir une majoration de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$ par les $N_D(H(B) < \lambda; \tilde{Q}_{j,p})$. La suite se fait une nouvelle fois par l'emploi du Théorème de Colin de Verdière [Théo 1.9] et on conclut en estimant la différence avec le majorant voulu.

1.2.1 Minoration de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$

Etape 1 *Construction d'un recouvrement de \mathbb{R}^2 .*

Soit $\alpha \in]\max(0; \frac{d}{4} - \frac{1}{2}); \frac{d}{2}[$.

³On prend une longueur rationnelle pour faciliter les calculs, en particulier celui du nombre de carrés $Q_{j,p}$ formant \mathcal{C}_j .

⁴Le champ B tendant vers l'infini en l'infini, on choisira un réel $\alpha > 0$ pour pouvoir contrôler l'erreur que l'on commet en comparant $H_{j,p}(B)$ par l'opérateur à champ constant $H_{j,p}(B(x_{j,p}))$. Néanmoins, il ne devra pas être trop grand, $2\alpha < d$ pour ne pas minorer par 0!

⁵Voir en Annexe A pour un énoncé de la relation Ismagilov-Morgan-Sigal.

- On va construire les “couronnes carrées” \mathcal{C}_j par un procédé itératif :
On pose \mathcal{C}_1 le carré ouvert centré en 0 et de longueur de côté 2.

Soit $j \in \mathbb{N}^*$. On suppose construites les couronnes $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j$. La couronne

\mathcal{C}_{j+1} borde l'ensemble $\bigcup_{i=1}^j \overline{\mathcal{C}_i}$.

Elle a pour épaisseur 1, est formée de petits carrés ouverts $Q_{j,p}$, de centre $x_{j,p}$ et de longueur de côté $r_{j,p} = E(j^\alpha)^{-1}$.

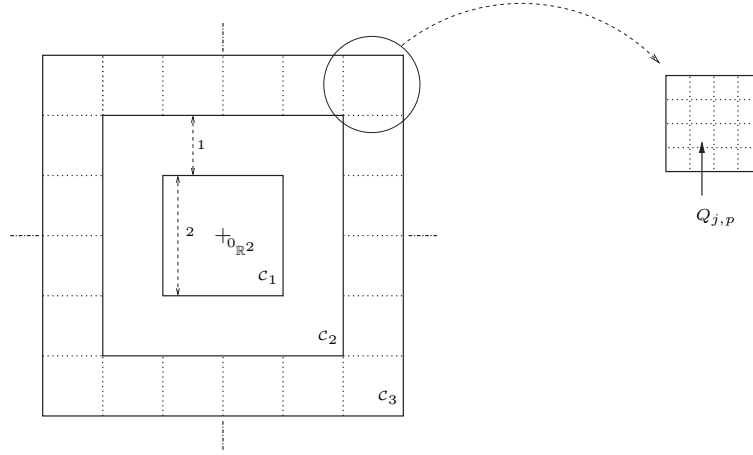


FIG. 1.1 – Recouvrement de \mathbb{R}^2 par les couronnes carrées \mathcal{C}_j

Pour $j \geq 2$, on note $\mathcal{N}_j^\#$ le nombre de carrés $Q_{j,p}$ contenus dans \mathcal{C}_j ,
 $n_j^\#$ le nombre de carrés $Q_{j,p}$ contenus dans un carré de côté 1,
et $N_j^\#$ le nombre de carrés de côté 1 inclus dans \mathcal{C}_j .

Les relations $N_{j+1}^\# = N_j^\# + 8$ et $N_2^\# = 12$ entraînent que $N_j^\# = 4(2j-1)$.
De plus, on a $n_j^\# = E(j^\alpha)^2$. Par conséquent, l'égalité $\mathcal{N}_j^\# = N_j^\# \cdot n_j^\#$ permet
d'obtenir $\mathcal{N}_j^\# = 4(2j-1)E(j^\alpha)^2$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathcal{C}_j$, on a les encadrements suivants

$$j-1 \leq |x| \leq j\sqrt{2} \quad \text{et donc} \quad b_-(j-1)^d \leq B(x) \leq b_+ 2^{\frac{d}{2}} j^d. \quad (1.4)$$

- On a $Q_{j,p} \cap Q_{k,q} = \emptyset$ si $(j,p) \neq (k,q)$, $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{j,p} \overline{Q_{j,p}}$ et par conséquent

$$\mathcal{N}(\lambda) \geq \sum_{j,p} N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}).$$

Il existe $J_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $K_z \subset \bigcup_{j=1}^{J_0-1} \overline{\mathcal{C}_j}$ et en particulier

$$\mathcal{N}(\lambda) \geq \sum_{\substack{j,p \\ j \geq J_0}} N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}). \quad (1.5)$$

• On pose $J_B^+(\lambda) = E\left(\lambda^{\frac{1}{d}}(2b_-)^{-\frac{1}{d}}\right) + 2$. D'après (1.1) et (1.4), pour tout $j \geq J_B^+(\lambda)$, on a $\inf_{y \in \mathcal{C}_j} B(y) > \lambda$. De l'inégalité $H(B) \geq 2B$, on en déduit que pour tout $j \geq J_B^+(\lambda)$, on a $N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}) = 0$. Il existe $\lambda_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $J_B^+(\lambda) \geq J_0$.

Ainsi dans (1.5) la sommation ne s'effectue que sur les j compris entre J_0 et $J_B(\lambda)$.

Pour la suite, on notera $\mathbb{N}_{0,\lambda} := \{(j,p) \in \mathbb{N}^2 : j \in [J_0, J_B^+(\lambda)] \text{ et } Q_{j,p} \in \mathcal{C}_j\}$.

• Pour simplifier, on notera $\mathcal{C}(j) = \bigcup_{i=1}^j \mathcal{C}_i$.

Etape 2 *Comparaison de $H_{jp}(B)$ avec un opérateur à champ magnétique constant.*

• Soit $y \in Q_{j,p}$. Quitte à faire un changement de jauge, on peut supposer que l'on travaille avec $E_{j,p,y} = (E_{j,p,y}^{(1)}, E_{j,p,y}^{(2)})$ comme potentiel magnétique associé à $B - B(y)$ où

$$\begin{cases} E_{j,p,y}^{(1)}(x) &= - \int_0^1 s (x^{(2)} - y^{(2)}) [B(y + s(x - y)) - B(y)] ds \\ E_{j,p,y}^{(2)}(x) &= \int_0^1 s (x^{(1)} - y^{(1)}) [B(y + s(x - y)) - B(y)] ds \end{cases}$$

Ainsi pour $l = 1, 2$, on a pour tout $(j,p) \in \mathbb{N}_{0,\lambda}$,

$$\sup_{x \in Q_{j,p}} |E_{j,p,y}^{(l)}(x)| \leq 2r_{j,p}^2 \sup_{x \in Q_{j,p}} |\nabla B(x)|.$$

De (1.1) et (1.4), on en déduit qu'il existe $c_1 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $(j,p) \in \mathbb{N}_{0,\lambda}$, on a $\sup_{x \in Q_{j,p}} |E_{j,p,y}^{(l)}(x)|^2 \leq c_1 j^{2d-2-4\alpha}$.

De plus, j étant majoré par $J_B^+(\lambda)$, on obtient pour tout $\lambda > \lambda_0$, que $\sup_{x \in Q_{j,p}} |E_{j,p,y}^{(l)}(x)|^2 \leq c_1 J_B^+(\lambda)^{\max(0; 2d-2-4\alpha)}$. Donc il existe $c_2 \in]0; +\infty[$ tel que pour $l = 1, 2$, pour tout $(j,p) \in \mathbb{N}_{0,\lambda}$ et pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a $\sup_{x \in Q_{j,p}} |E_{j,p,y}^{(l)}(x)|^2 \leq c_2 \lambda^{\max(0; 2-\frac{2+4\alpha}{d})}$.

• Soit $\tau \in]0; 1 - \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})[$, au sens des formes quadratiques, pour tout $\lambda > \lambda_0$ et tout $(j, p) \in \mathbb{N}_{0, \lambda}$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} H_{jp}(B) &\leq (1 + \lambda^{-\tau})H_{jp}(B(y)) + (1 + \lambda^\tau) |E_{j,p,y}|^2 \\ &\leq (1 + \lambda^{-\tau})H_{jp}(B(y)) + (1 + \lambda^\tau) 2c_2 \lambda^{\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})}. \end{aligned}$$

• Il existe $(c_3, c_4) \in]0; +\infty[^2$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$(1 + \lambda^{-\tau})^{-1} - 2c_2 \lambda^{\tau + \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d}) - 1} \geq 1 - c_3 \lambda^{-\tau} - c_4 \lambda^{\tau + \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d}) - 1}.$$

Ainsi on minore $N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p})$ par

$$\begin{aligned} &N_D(H_{j,p}(B(y)) < (1 + \lambda^{-\tau})^{-1} \lambda - 2c_2 \lambda^{\tau + \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d}) - 1}; Q_{j,p}) \\ &\geq N_D(H_{j,p}(B(y)) < \lambda \left[1 - c_3 \lambda^{-\tau} - c_4 \lambda^{\tau + \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d}) - 1} \right]; Q_{j,p}). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Pour obtenir un minorant, on utilise le résultat de Y. Colin de Verdière, [Théo 1.9].

• Soit $\mu \in]0; \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{d}[$.

On note alors que $C_0 (\lambda^{-\mu} r_{j,p})^{-2} = C_0 \lambda^{2\mu} E(j^\alpha)^2 \leq C_0 \lambda^{2\mu} J_B^+(\lambda)^{2\alpha}$. Donc il existe $c_5 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, pour tout $(j, p) \in \mathbb{N}_{0, \lambda}$, $C_0 (\lambda^{-\mu} r_{j,p})^{-2} \leq c_5 \lambda^{2\mu + \frac{2\alpha}{d}}$.

• On pose $g(\lambda) = c_3 \lambda^{-\tau} + c_4 \lambda^{\tau - 1 + \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})} + c_5 \lambda^{2\mu + \frac{2\alpha}{d} - 1}$. Ainsi en notant $\gamma = \min(\tau; 1 - \tau - \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d}); 1 - 2\mu - \frac{2\alpha}{d})$, il existe $c_0^- \in]1; +\infty[$ et $\lambda_1 > \lambda_0$ tels que pour tout $\lambda > \lambda_1$, on a $\frac{1}{c_0^-} \lambda^{-\gamma} \leq g(\lambda) \leq c_0^- \lambda^{-\gamma}$.

Pour simplifier l'écriture, on dira que $g(\lambda) = C \lambda^{-\gamma}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les ensembles $\tilde{\Omega}_k^-(\lambda)$ et $\Omega_k^-(\lambda)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_k^-(\lambda) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : T \left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1 \right) = k \right\} \\ \text{et } \Omega_k^-(\lambda) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : T \left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1 \right) = k \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la fonction T , on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}_k^-(\lambda) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 2k - 1 < \frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1 \leq 2k + 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 2k < \frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} \leq 2(k+1) \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\lambda(1-g(\lambda))}{2(k+1)} \leq B(x) < \frac{\lambda(1-g(\lambda))}{2k} \right\}. \end{aligned}$$

$$\text{De même } \Omega_k^-(\lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\lambda}{2(k+1)} \leq B(x) < \frac{\lambda}{2k} \right\}.$$

On note qu'il n'y a qu'un nombre fini de $\tilde{\Omega}_k^-(\lambda)$ non vide. En effet, si

$k > E \left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{2 \inf_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x)} \right)$, on a $\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) = \emptyset$.

On définit respectivement les entiers $\tilde{k}_{\max}(\lambda)$ et $k_{\max}(\lambda)$ par $E \left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{2 \inf_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x)} \right)$

et $E \left(\frac{\lambda}{2 \inf_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x)} \right)$.

• De plus, $\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_l^-(\lambda) = \emptyset$ si $k \neq l$ et $\mathbb{R}^2 = \bigcup_k \tilde{\Omega}_k^-(\lambda)$.

En utilisant l'égalité $Q_{j,p} = \bigcup_k \overline{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}}$, on va écrire

$$N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}) = \sum_k \frac{\mu(\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p})}{\mu(Q_{j,p})} N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}) \quad (1.7)$$

où μ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Ensuite, si $\mu(\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}) \neq 0$, on va chercher à remplacer $H_{jp}(B)$ par $H_{jp}(B(x_{j,p,k}))$ où le point $x_{j,p,k}$ est dans $\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}$ et obtenir (1.6). En appliquant le Théorème 1.9, on obtient pour minorant de $N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p})$:

$$\frac{1 - \lambda^{-\mu}}{2\pi} \sum_k \mu(\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}) B(x_{j,p,k}) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x_{j,p,k})} - 1\right)$$

autrement dit

$$N_D(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}) \geq \frac{1 - \lambda^{-\mu}}{2\pi} \sum_k \int_{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}} B(x_{j,p,k}) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx.$$

Les encadrements (1.4) donnent pour tout $x \in Q_{j,p}$,

$$\begin{aligned} |B(x_{j,p,k}) - B(x)| &\leq \sqrt{2} r_{jp} \sup_{y \in Q_{j,p}} |\nabla B(y)| \\ &\leq C\sqrt{2} r_{jp} \sup_{y \in Q_{j,p}} |x|^{-1} B(y) \\ &\leq C\sqrt{2} r_{jp} \max\left((\sqrt{2}j)^{d-1}, (j-1)^{d-1}\right). \end{aligned}$$

Donc, de nouveau en utilisant les inégalités (1.4), il existe $c_6 \in]0; +\infty[$ tel que

$$\sup_{x \in Q_{j,p}} |B(x_{j,p,k}) - B(x)| \leq c_6 j^{-(\alpha+1)} \inf_{y \in Q_{j,p}} B(y). \quad (1.8)$$

On nomme $\sum_{j,p,k} \int_{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}} |B(x_{j,p,k}) - B(x)| T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx$ par $I_1^-(\lambda)$.

L'inégalité (1.8) permet alors d'avoir

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}} |B(x_{j,p,k}) - B(x)| T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \\ & \leq c_6 \int_{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}} \left(j^{-(\alpha+1)} \inf_{y \in Q_{j,p}} B(y) \right) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \end{aligned}$$

et ainsi, on peut majorer $I_1^-(\lambda)$ par

$$c_6 \sum_{j,p,k} j^{-(\alpha+1)} \int_{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}} B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx$$

soit

$$I_1^-(\lambda) \leq c_6 \sum_{j,p} j^{-(\alpha+1)} \int_{Q_{j,p}} B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx.$$

Comme $B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) \leq \frac{\lambda(1-g(\lambda))}{2}$, il existe donc $c_7 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$

$$I_1^-(\lambda) \leq c_7 \sum_{j,p} j^{-(3\alpha+1)} \lambda(1-g(\lambda)) = c_7 \lambda(1-g(\lambda)) \sum_j \mathcal{N}_j^\# \cdot j^{-(3\alpha+1)}.$$

Donc il existe $c_8 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$I_1^-(\lambda) \leq \begin{cases} c_8 \lambda \left(1 + \lambda^{\frac{1-\alpha}{d}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1, \\ c_8 \lambda \ln(\lambda) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

De l'inégalité pour tout $(j,p) \in \mathbb{N}_{jp}$

$$\begin{aligned} N_D\left(H_{jp}(B) < \lambda; Q_{j,p}\right) & \geq \frac{1 - \lambda^{-\mu}}{2\pi} \int_{Q_{j,p}} B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \\ & - \sum_k \int_{\tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cap Q_{j,p}} |B(x_{j,p,k}) - B(x)| T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx, \end{aligned}$$

de la majoration de $I_1^-(\lambda)$ et du fait que $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx$

est de l'ordre de $\lambda^{1+\frac{2}{d}}$, on déduit qu'il existe $c_9 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout

$\lambda > \lambda_1$

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda(1-g(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \left[1 - \lambda^{-\mu} - c_9 \lambda^{-\frac{2}{d}} f(\lambda)\right] \quad (1.9)$$

$$\text{avec } f(\lambda) = \begin{cases} 1 + \lambda^{\frac{1-\alpha}{d}} & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln(\lambda) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

On a vu que pour tout $\lambda > \lambda_1$, $g(\lambda)$ possède une décroissance de l'ordre de $\lambda^{-\gamma}$ où l'exposant γ vérifie $\gamma = \min(\tau; 1 - \tau - \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d}); 1 - 2\mu - \frac{2\alpha}{d})$.

Si $d \in]1; +\infty[$, alors on choisit $\alpha = \frac{d-1}{2}$. Ainsi $\gamma = \min(\tau; 1 - \tau; \frac{1}{d} - 2\mu)$ et la décroissance de $\lambda^{-\mu} - c_9 \lambda^{-\frac{2}{d}} f(\lambda)$ est de l'ordre de $\lambda^{-\eta}$ où l'on pose $\eta = \min(\mu; \frac{1+\alpha}{d})$. Comme $\frac{1}{d} - 2\mu > 0$, on a $\eta = \mu$ et ceci même si $\alpha = 1$.

Si $d \in]0; 1]$, alors $\gamma = \min(\tau; 1 - \tau; 1 - 2\mu - \frac{2\alpha}{d}) = \min(\frac{1}{2}; 1 - 2\mu - \frac{2\alpha}{d})$ et $\eta = \min(\mu; \frac{1+\alpha}{d})$. Comme $\mu < 1$, on a $\eta = \mu$. Ainsi en prenant $\alpha = \frac{d}{2}\varepsilon$, on obtient $\mu = \gamma = \frac{1}{3} - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon \ll 1$.

1.2.2 Majoration de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$

Etape 1 Construction d'une partition de l'unité associée au recouvrement précédent de \mathbb{R}^2 .

- On reprend les couronnes carrées \mathcal{C}_j et les petits carrés $Q_{j,p}$ de la section 1.1.

- On dilate un peu ces derniers en posant $\tilde{Q}_{j,p}$ le carré de centre $x_{j,p}$ et de longueur de côté $(1 + j^{-\beta})E(j^\alpha)^{-1}$ où l'exposant $\beta > 0$ sera précisé un peu plus loin.

- On construit alors une partition de l'unité $(\varphi_{j,p})_{j,p}$ vérifiant $\varphi_{j,p} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\text{supp}(\varphi_{j,p}) \subset \tilde{Q}_{j,p}$ avec $\varphi_{j,p} = 1$ sur $Q_{j,p}$ et $\sum_{j,p} \varphi_{j,p}^2 = 1$,

$0 \leq \varphi_{j,p} \leq 1$.

- On notera par $\tilde{H}_{j,p}(B)$ la réalisation auto-adjointe de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique B sur $\mathbf{L}^2(\tilde{Q}_{j,p}; \mathbb{C})$ avec les conditions de Dirichlet au bord.

Etape 2 Ramener le problème sur \mathbb{R}^2 à celui sur les petits carrés $\tilde{Q}_{j,p}$.

- On utilise la relation IMS [[12], Théo 3.2] :

$$H(B) = \sum_{j,p} \varphi_{j,p} (H(B) - \Phi) \varphi_{j,p} \quad \text{où} \quad \Phi := \sum_{k,q} |\nabla \varphi_{k,q}|^2.$$

- On va utiliser l'inégalité variationnelle suivante

Lemme 1.10. $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \leq \sum_{j,p} N_D\left(\tilde{H}_{j,p}(B) - \Phi < \lambda; \tilde{Q}_{j,p}\right).$

Démonstration. On note par \tilde{h}_{jp} la réalisation auto-adjointe de l'opérateur $H(B) - \Phi$ sur $\mathbf{L}^2(\tilde{Q}_{j,p}, \mathbb{C})$ avec les conditions de Dirichlet, $E_{j,p}$ le s.e.v. de $\mathbf{L}^2(\tilde{Q}_{j,p}, \mathbb{C})$ engendré par les vecteurs propres de \tilde{H}_{jp} associés à une valeur propre inférieure à λ .

On considère $F_{j,p}$ le s.e.v. de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, formé des éléments de la forme $\varphi_{j,p}f$ où $f \in E_{j,p}$. Le s.e.v. de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$, obtenu comme étant la somme (vectorielle) des sous-espaces des $F_{j,p}$ sera noté \tilde{F} , on a $\tilde{F} \subset \mathcal{D}(H(B) - \Phi)$. En appelant F l'orthogonal de \tilde{F} dans $\mathcal{D}(H(B) - \Phi)$. On a

$$\text{codim}(F) = \dim(\tilde{F}) \leq \sum_{j,p} \dim(F_{j,p}) \leq \sum_{j,p} \dim(E_{j,p}).$$

Si $v \in F$, alors $v \perp \tilde{F}$ et pour tout (j, p) , on a $\varphi_{j,p}v \perp E_{j,p}$.

De plus, $\varphi_{j,p}v \in \mathcal{D}(\tilde{H}_{jp})$ et le Lemme de Glazman⁶ entraînent que $\langle \tilde{h}_{jp}(\varphi_{j,p}v), (\varphi_{j,p}v) \rangle \geq \lambda \|\varphi_{j,p}v\|^2$.

En utilisant la formule IMS et les propriétés de la partition de l'unité, on obtient

$$\begin{aligned} \langle (H(B) - \Phi)v, v \rangle &= \sum_{j,p} \langle (H(B) - \Phi)(\varphi_{j,p}v), (\varphi_{j,p}v) \rangle \\ &\geq \lambda \sum_{j,p} \|\varphi_{j,p}v\|^2 = \lambda \|v\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi le Lemme de Glazman assure que $\mathcal{N}(\lambda) \leq \text{codim}(F)$. Par conséquent, on obtient bien l'inégalité recherchée. \square

- Il existe $c_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour $(j, p) \in \mathbb{N}^2$, $\sup_{y \in \tilde{Q}_{j,p}} \Phi(y) \leq c_0 j^{2(\alpha+\beta)}$.

D'après l'inégalité (1.4), on obtient qu'il existe $J_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq J_1$, $\sup_{y \in \tilde{Q}_{j,p}} \Phi(y) \leq \inf_{y \in \tilde{Q}_{j,p}} B(y)$. Le champ magnétique B tendant vers l'infini en l'infini, on en déduit qu'il existe $J_0(\lambda) \geq J_1$ tel que pour tout $j \geq J_0(\lambda)$, on a $N_D(\tilde{H}_{j,p}(B) - \Phi < \lambda; \tilde{Q}_{j,p}) = 0$. Par conséquent, la somme présente dans le Lemme 1.10 est une somme finie. Et de plus, $J_0(\lambda)$ peut être choisi de la forme $E(c\lambda^{\frac{1}{d}})$.

Il existe $\lambda_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $J_0(\lambda) \geq J_1$.

- De nouveau, on notera $\mathbb{N}_{1,\lambda}$ l'ensemble des indices (j, p) tels que $j \in [[J_1, J_0(\lambda)]]$ et $Q_{j,p} \in \mathcal{C}_j$.

A l'aide du choix de $J_0(\lambda)$, on va scinder la somme du Lemme 1.10 en deux, d'une part Σ_1 une somme pour les indices (j, p) appartenant à $\mathbb{N}_{1,\lambda}$ et de l'autre Σ_2 une somme pour les indices (j, p) tels que $j \in [[1, J_0]]$, autrement dit

⁶Voir l'Annexe A pour un énoncé.

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{j,p \\ J_1 \leq j \leq J_0(\lambda)}} \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \sum_{\substack{j,p \\ j < J_1}}.$$

Etape 3 *Approximation de $\tilde{H}_{jp}(B)$ sur les carrés $\tilde{Q}_{j,p}$.*

On va suivre la même démarche que lors de la minoration.

• Soit $y \in \tilde{Q}_{j,p}$. Quitte à faire un changement de jauge, on peut supposer que l'on travaille avec $\tilde{E}_{j,p,y} = \left(\tilde{E}_{j,p,y}^{(1)}, \tilde{E}_{j,p,y}^{(2)} \right)$ comme potentiel magnétique associé à $B - B(y)$.

On obtient que pour $l = 1, 2$, il existe $c_1 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$ et tout $(j, p) \in \mathbb{N}_{jp}$, $\sup_{x \in \tilde{Q}_{jp}} \left| \tilde{E}_{j,p,y}^{(l)}(x) \right|^2 \leq c_1 \lambda^{\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})}$.

• Soit $\tau \in]0; 1 - \max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})[$, au sens des formes quadratiques, pour tout $\lambda > \lambda_0$ et tout $(j, p) \in \mathbb{N}_{1,\lambda}$, on a l'inégalité

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{jp}(B) &\geq (1 - \lambda^{-\tau}) \tilde{H}_{jp}(B(y)) + (1 - \lambda^\tau) \left| \tilde{E}_{j,p,y} \right|^2 \\ &\geq (1 - \lambda^{-\tau}) \tilde{H}_{jp}(B(y)) + (1 - \lambda^\tau) 2c_1 \lambda^{\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})}. \end{aligned}$$

• De plus, on a vu à la première étape que $\sup_{y \in \tilde{Q}_{j,p}} \Phi(y) \leq c_2 \lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}}$, ainsi

$$\tilde{H}_{jp}(B) - \Phi \geq (1 - \lambda^{-\tau}) \tilde{H}_{jp}(B(y)) + (1 - \lambda^\tau) 2c_1 \lambda^{\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})} - c_2 \lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}}.$$

Il existe $(c_3, c_4) \in]0; +\infty[^2$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$ et tout $(j, p) \in \mathbb{N}_{1,\lambda}$,

$$\begin{aligned} &(1 - \lambda^{-\tau})^{-1} + 2c_1 \lambda^{\tau-1+\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})} + c_2 \lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}-1} \\ &\leq 1 + c_3 \lambda^{-\tau} + c_4 \lambda^{\tau-1+\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})} + c_2 \lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}-1}. \end{aligned}$$

D'où on majore $N_D(H(B) - \Phi < \lambda; \tilde{Q}_{j,p})$ par

$$\begin{aligned} &N_D\left(\tilde{H}_{j,p}(B(y)) < (1 + \lambda^{-\tau})^{-1} \lambda + 2c_1 \lambda^{\tau+\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})} + c_2 \lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}}; \tilde{Q}_{j,p}\right) \\ &\leq N_D\left(\tilde{H}_{j,p}(B(y)) < \lambda \left[1 + c_3 \lambda^{-\tau} + c_4 \lambda^{\tau-1+\max(0; 2 - \frac{2+4\alpha}{d})} + c_2 \lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}-1}\right]; \tilde{Q}_{j,p}\right). \end{aligned}$$

Pour obtenir un majorant, on utilise le résultat de Y. Colin de Verdière, [Théorème 1.9]. En appliquant ce résultat à la somme

$$\Sigma_2 := \sum_{\substack{j,p \\ 1 \leq j \leq J_1}} N_D\left(\tilde{H}_{j,p}(B) - \Phi; \tilde{Q}_{j,p}\right)$$

on obtient qu'il existe $M \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\Sigma_2 \leq M\lambda$.

Par analogie avec $g(\lambda)$ et $\Omega_k^-(\lambda)$, on définit

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\lambda) &= c_3\lambda^{-\tau} + c_4\lambda^{\tau-1+\max(0;2-\frac{2+4\alpha}{d})} + c_2\lambda^{2\frac{\alpha+\beta}{d}-1} \\ \tilde{\Omega}_k^+(\lambda) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) = k \right\}.\end{aligned}$$

On a ainsi $\tilde{\Omega}_k^+(\lambda) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{2(k+1)} \leq B(x) < \frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{2k} \right\}$, et

les indices k varient de 0 à $\tilde{k}_{\max}(\lambda)$ où $\tilde{k}_{\max}(\lambda) = E\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{2 \inf_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x)}\right)$. Les

ensembles $\Omega_k(\lambda)$ gardent la même définition.

• Par analogie avec la relation (1.7), on va utiliser la relation

$$N_D\left(\tilde{H}_{jp}(B) < \lambda; \tilde{Q}_{j,p}\right) = \sum_k \frac{\mu\left(\tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cap \tilde{Q}_{j,p}\right)}{\mu\left(\tilde{Q}_{j,p}\right)} N_D\left(\tilde{H}_{jp}(B) < \lambda; \tilde{Q}_{j,p}\right).$$

Si $\mu\left(\tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cap \tilde{Q}_{j,p}\right) \neq 0$, on remplace $\tilde{H}_{jp}(B)$ par $\tilde{H}_{jp}(B(\tilde{x}_{j,p,k}))$ où $\tilde{x}_{j,p,k} \in \tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cap \tilde{Q}_{j,p}$. Ainsi en utilisant le Théorème 1.9, on obtient pour tout $(j,p) \in \mathbb{N}_{1,\lambda}$

$$N_D\left(\tilde{H}_{jp}(B) < \lambda; \tilde{Q}_{j,p}\right) \leq \frac{1}{2\pi} \sum_k \int_{\tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cap \tilde{Q}_{j,p}} B(\tilde{x}_{j,p,k}) T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(\lambda) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx + M\lambda \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j,p} \int_{\tilde{Q}_{j,p} \setminus Q_{j,p}} B(x) T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j,p,k} \int_{\tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cap \tilde{Q}_{j,p}} |B(\tilde{x}_{j,p,k}) - B(x)| T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx.\end{aligned}$$

◦ D'après les propriétés de T , on a

$$\sum_{j,p} \int_{\tilde{Q}_{j,p} \setminus Q_{j,p}} B(x) T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \leq \sum_{j,p} \mu\left(\tilde{Q}_{j,p} \setminus Q_{j,p}\right) \frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{2}.$$

Comme $\mu\left(\tilde{Q}_{j,p} \setminus Q_{j,p}\right) = E(j^\alpha)^{-2} [1 - (1 + j^{-\beta})^2]$, il existe $c_5 \in]0; +\infty[$ tel que

$$\sum_{j,p} \int_{\tilde{Q}_{j,p} \setminus Q_{j,p}} B(x) T\left(\frac{\lambda(1+\tilde{g}(\lambda))}{2B(x)} - 1\right) dx \leq c_5 \lambda \sum_j \mathcal{N}_j^\# \cdot j^{-2\alpha-\beta}.$$

On peut toujours supposer que $\beta \neq 2$, donc il existe $c_6 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, on ait

$$\sum_{j,p} \int_{\tilde{Q}_{j,p} \setminus Q_{j,p}} B(x) T \left(\frac{\lambda(1 + \tilde{g}(\lambda))}{2B(x)} - 1 \right) dx \leq c_6 \lambda \left(1 + \lambda^{\frac{2-\beta}{d}} \right).$$

o De plus, de même que (1.8), on montre qu'il existe $c_7 \in]0; +\infty[$ tel que

$$\sup_{x \in \tilde{Q}_{j,p}} |B(\tilde{x}_{j,p,k}) - B(x)| \leq c_7 j^{-(\alpha+1)} \inf_{y \in \tilde{Q}_{j,p}} B(y).$$

On nomme $\sum_{j,p,k} \int_{\tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cap \tilde{Q}_{j,p}} |B(\tilde{x}_{j,p,k}) - B(x)| T \left(\frac{\lambda(1 + \tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1 \right) dx$ par $I_1^+(\lambda)$

et on le majore par

$$\begin{aligned} c_7 \sum_{j,p} j^{-(\alpha+1)} \int_{\tilde{Q}_{j,p}} B(x) T \left(\frac{\lambda(1 + \tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1 \right) dx \\ \leq c_7 \frac{\lambda(1 + \tilde{g}(\lambda))}{2} \sum_{j,p} j^{-(\alpha+1)} \mu \left(\tilde{Q}_{j,p} \right). \end{aligned}$$

Donc il existe $c_8 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$I_1^+(\lambda) \leq \begin{cases} c_8 \lambda (1 + \lambda^{\frac{1-\alpha}{d}}) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ c_8 \ln(\lambda) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Comme $\alpha > \frac{d-2}{4}$ et $2(\alpha + \beta) < d$, on a $\beta < \frac{d+2}{4}$ et donc $\beta - 1 < \alpha$. Ainsi $\lambda^{\frac{1-\alpha}{d}} < \lambda^{\frac{2-\beta}{d}}$, et par conséquent, $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T \left(\frac{\lambda(1 + \tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1 \right) dx$ étant

de l'ordre de $\lambda^{1+\frac{2}{d}}$, il existe $c_9 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$,

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T \left(\frac{\lambda(1 + \tilde{g}(\lambda))}{B(x)} - 1 \right) dx \left[1 + c_9 \lambda^{-\frac{2}{d}} \left(1 + \lambda^{\frac{2-\beta}{d}} \right) \right].$$

La fonction \tilde{g} joue le rôle de la fonction g_+ de l'énoncé, et $\frac{\beta}{d}$ peut être remplacé par μ . Ainsi on a obtenu la Proposition 1.8.

1.3 Asymptotique de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$

En ajoutant des hypothèses sur le champ B , on peut obtenir un équivalent de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$:

Démonstration de la Proposition 1.7. On étudie la différence

$$I_{\pm}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^2 \cap {}^c K_z} B(x) \left[T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) - T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) \right] dx.$$

Tout d'abord, on remarque que l'on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \cdot \Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \neq \emptyset &\iff \frac{\lambda}{2(k+1)} < \frac{\lambda(1-g_-(\lambda))}{2k} \\ &\iff 1 - \frac{1}{k+1} < 1 - g_-(\lambda) \iff k < \frac{1}{g_-(\lambda)} - 1, \\ \cdot \Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \neq \emptyset &\iff \frac{\lambda(1+g_+(\lambda))}{2(k+1)} < \frac{\lambda}{2k} \\ &\iff 1 + g_+(\lambda) < 1 + \frac{1}{k} \iff k < \frac{1}{g_+(\lambda)}. \end{aligned}$$

Comme $g_{\pm}(\lambda) \leq c\lambda^{-\eta_d}$, on obtient que si $k \leq E(c^{-1}\lambda^{\eta_d}) - 1$, alors $k < \max\left(\frac{1}{g_-(\lambda)} - 1; \frac{1}{g_+(\lambda)}\right)$. En posant $k_1(\lambda) := E(c^{-1}\lambda^{\eta_d}) - 1$, on a donc pour tout $k \in [[1; k_1(\lambda)]]$, $\Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_k^{\pm}(\lambda) \neq \emptyset$.

De plus, on note que pour tout $k \in [[2; k_1(\lambda)]]$, on a $\Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_{k+1}^+(\lambda) = \emptyset$, $\Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_{k-2}^-(\lambda) = \emptyset$. En effet,

$$\begin{aligned} \cdot \Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_{k-2}^-(\lambda) = \emptyset &\iff \frac{\lambda}{2k} < \frac{\lambda(1-g_-(\lambda))}{2(k-1)} \\ &\iff 1 - \frac{1}{k} < 1 - g_-(\lambda) \iff k < \frac{1}{g_-(\lambda)}, \\ \cdot \Omega_k(\lambda) \cap \tilde{\Omega}_{k+1}^+(\lambda) \neq \emptyset &\iff \frac{\lambda(1+g_+(\lambda))}{2(k+2)} < \frac{\lambda}{2(k+1)} \\ &\iff 1 + g_+(\lambda) < 1 + \frac{1}{k+1} \iff k < \frac{1}{g_+(\lambda)} - 1. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $k \in [[1; k_1(\lambda)]]$, on obtient les inclusions suivantes

$$\Omega_k(\lambda) \subset \tilde{\Omega}_k^-(\lambda) \cup \tilde{\Omega}_{k-1}^-(\lambda) \quad \text{et} \quad \Omega_k(\lambda) \subset \tilde{\Omega}_k^+(\lambda) \cup \tilde{\Omega}_{k+1}^+(\lambda).$$

Donc pour tout $k \in [[1; k_1(\lambda)]]$, et tout $x \in \Omega_k(\lambda)$, on a

$$\left| T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) - T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) \right| \leq 1.$$

On va choisir de décomposer $I_{\pm}(\lambda)$ en $J_{\pm}(\lambda) + L_{\pm}(\lambda)$ avec

$$L_{\pm}(\lambda) := \int_{\{2B \geq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\}} B(x) \left[T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) - T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) \right] dx.$$

Il existe $R_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $|x| \geq R_0$, on a $B(x) \geq b_-|x|^d$.

Donc il existe $\lambda_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\{2B \leq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\}$ est inclus dans $\{2b_-|x|^d \leq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\}$

$$\text{i.e.} \quad \{2B \leq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \left(0_{\mathbb{R}^2}; b_-^{-\frac{1}{d}} (\lambda k_1(\lambda)^{-1})^{\frac{1}{d}} \right). \quad (1.10)$$

En utilisant les majorations suivantes valables pour tout λ ,

$$\begin{aligned} J_{\pm}(\lambda) &\leq \int_{\{2B \leq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\}} B(x) \left| T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) - T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) \right| dx \\ &\leq \int_{\{2B \leq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\}} \left(B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) + B(x) T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) \right) dx \\ &\leq \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{2} \right) \mu(\{2B \leq \lambda k_1(\lambda)^{-1}\}), \end{aligned}$$

et (1.10), on en déduit qu'il existe $c_1 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a $J_{\pm}(\lambda) \leq c_1 \lambda^{1+2\frac{1-\eta d}{d}}$. D'où $J_{\pm}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} o\left(\lambda^{1+\frac{2}{d}}\right)$.

Il reste à étudier $L_{\pm}(\lambda)$. D'après le choix de $k_1(\lambda)$, on note que l'on peut réécrire cette intégrale sous la forme

$$L_{\pm}(\lambda) = \sum_{k=1}^{k_1(\lambda)-1} \int_{\mathcal{V}_k^{\pm}(\lambda; B)} B(x) dx.$$

En utilisant l'hypothèse (1.2), on obtient que $I_{\pm}(\lambda) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{=} o\left(\lambda^{1+\frac{2}{d}}\right)$. Or on a

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) &\leq \frac{1 + c\lambda^{-\eta d}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx + \frac{1 + c\lambda^{-\eta d}}{2\pi} I_+(\lambda), \\ \mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) &\geq \frac{1 - c\lambda^{-\eta d}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1\right) dx - \frac{1 - c\lambda^{-\eta d}}{2\pi} I_-(\lambda). \end{aligned}$$

Par conséquent, on en déduit l'équivalent annoncé pour $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$. \square

Parmi les champs B vérifiant les hypothèses de la Proposition 1.7, on compte les champs asymptotiquement homogènes de degré d . Pour ces derniers, on obtient une formule explicite de $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B)$:

Théorème 1.11. *Soit $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses (1.1) tel qu'il existe $f \in C^1(\mathbb{S}^1;]0; +\infty[)$ telle que quand $|x| \rightarrow +\infty$: $B(x) \sim f\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^d$.*

Alors on obtient quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \sim \frac{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right) \lambda^{1+\frac{2}{d}}$$

où ζ est la fonction de Riemann.

En particulier, en notant par $(\lambda_n(-\Delta_B + B))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante des valeurs propres de $-\Delta_B + B$, on a quand $n \rightarrow \infty$:

$$\lambda_n(-\Delta_B + B) \sim 2 \left(\frac{d+2}{\zeta \left(1 + \frac{2}{d}\right)} \right)^{\frac{d}{d+2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right)^{-\frac{d}{d+2}} n^{\frac{d}{d+2}}.$$

Démonstration du Théorème 1.11.

• On va tout d'abord vérifier que B vérifiant les hypothèses ci-dessus satisfait bien la condition de la Proposition 1.7.

Pour la suite, on va noter $B_d(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^d$ et $k_0(\lambda) = E(\lambda^{\eta_d})$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$.

Il existe $R_\varepsilon \in]r_z; +\infty[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $|x| \geq R_\varepsilon$, on a

$$(1 - \varepsilon)B_d(x) \leq B(x) \leq (1 + \varepsilon)B_d(x).$$

De plus, il existe $\lambda_{1,\varepsilon} \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_\varepsilon$ et pour tout $k \in [[1; k_0(\lambda)]]$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0; R_\varepsilon) \cap \mathcal{V}_k^\pm(\lambda; B) = \emptyset$.

Pour tout $\lambda > \lambda_{1,\varepsilon}$, on peut inclure $\mathcal{V}_k^-(\lambda; B)$ dans l'ensemble

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\lambda(1 - g_-(\lambda))}{(1 + \varepsilon)2k} \leq B_d(x) \leq \frac{\lambda}{(1 - \varepsilon)2k} \right\}.$$

Exprimé en coordonnées polaires, il s'écrit

$$\left\{ (\rho, \omega) \in]0; +\infty[\times \mathbb{S}^1 : \left(\frac{\lambda(1 - g_-(\lambda))}{(1 + \varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}} \leq \rho \leq \left(\frac{\lambda}{(1 - \varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}} \right\}.$$

De même, $\mathcal{V}_k^+(\lambda; B)$ peut être inclus dans

$$\left\{ (\rho, \omega) \in]0; +\infty[\times \mathbb{S}^1 : \left(\frac{\lambda}{(1 + \varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}} \leq \rho \leq \left(\frac{\lambda(1 + g_+(\lambda))}{(1 - \varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}} \right\}.$$

On pose $R_\varepsilon^-(\lambda) := \left(\frac{\lambda}{(1 - \varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}}$ et $r_\varepsilon^-(\lambda) := \left(\frac{\lambda(1 - g_\pm(\lambda))}{(1 + \varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}}$. On a

$$\text{pour tout } k \in [[1; k_0(\lambda)]], \quad \int_{\mathcal{V}_k^-(\lambda; B)} B(x) dx \leq \frac{1 + \varepsilon}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega) \left(\int_{r_\varepsilon^-(\lambda)}^{R_\varepsilon^-(\lambda)} \rho^{d+1} d\rho \right) d\omega.$$

En posant $\overline{f}_{\mathbb{S}^1} := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega$, on a pour tout $k \in [[1; k_0(\lambda)]]$,

$$\int_{\mathcal{V}_k^-(\lambda; B)} B(x) dx \leq \frac{1 + \varepsilon}{(1 - \varepsilon)^{1 + \frac{2}{d}}} \overline{f}_{\mathbb{S}^1} \left(\frac{\lambda}{2k} \right)^{1 + \frac{2}{d}} \left[1 - \left(\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^{1 + \frac{2}{d}} (1 - g_-(\lambda))^{1 + \frac{2}{d}} \right].$$

Il existe $\lambda_{2,\varepsilon} > \lambda_{1,\varepsilon}$ et $m_1 \in]0; +\infty[$ tels que pour tout $\lambda > \lambda_{1,\varepsilon}$, on a

$$\frac{1+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^{1+\frac{2}{d}}} \left[1 - \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{1+\frac{2}{d}} (1-g_-(\lambda))^{1+\frac{2}{d}} \right] \leq m_1 \varepsilon.$$

En faisant de même avec $\mathcal{V}_k^+(\lambda; B)$, on en déduit qu'il existe $m_2 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_{2,\varepsilon}$, on a

$$\sum_{k=1}^{k_0(\lambda)} \int_{\mathcal{V}_k^\pm(\lambda; B)} B(x) dx \leq m_2 \varepsilon \lambda^{1+\frac{2}{d}}.$$

Ainsi B vérifie l'hypothèse de la Proposition 1.7, et l'on a l'équivalence $\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \mathcal{N}_{Sch}^\infty(\lambda; B)$ en posant $\mathcal{N}_{Sch}^\infty(\lambda; B) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T \left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1 \right) dx$.

• Maintenant on va chercher à obtenir un équivalent de $\mathcal{N}_{as}(\lambda; B)$ quand λ tend vers l'infini.

On décompose $\mathcal{N}_{Sch}^\infty(\lambda; B)$ en $J(\lambda) + L(\lambda)$ avec

$$J(\lambda) = \int_{2B(x) \leq \lambda k_0(\lambda)^{-1}} B(x) T \left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1 \right) dx.$$

D'après les propriétés de la fonction T , on a

$$J(\lambda) \leq \frac{\lambda}{2} \mu \left(B^{-1} \left(\left[-\infty; \frac{\lambda k_0(\lambda)^{-1}}{2} \right] \right) \right).$$

Il existe $\tilde{R}_\varepsilon \geq R_\varepsilon$ tel que pour tout $r \geq \tilde{R}_\varepsilon$, $\{x \in \mathbb{R}^2 : B(x) \leq r\} \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : (1-\varepsilon)B_d(x) \leq r\}$. De plus, pour tout $\lambda \geq 1$, on a $\frac{\lambda k_0(\lambda)^{-1}}{2} \leq \lambda^{1-\eta_d}$. Ainsi, il existe $\lambda_{3,\varepsilon} > \lambda_{2,\varepsilon}$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_{3,\varepsilon}$, on a $\frac{1}{2} \lambda k_0(\lambda)^{-1} > \tilde{R}_\varepsilon$ et

$$\begin{aligned} \mu \left(B^{-1} \left(\left[-\infty; \frac{1}{2} \lambda k_0(\lambda)^{-1} \right] \right) \right) &\leq \mu \left(\{x \in \mathbb{R}^2 : (1-\varepsilon)2B_d(x) \leq \lambda^{1-\eta_d}\} \right) \\ &\leq \mu \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : |x|^d \leq \frac{\lambda^{1-\eta_d}}{2(1-\varepsilon)\inf_{\mathbb{S}^1} B_d} \right\} \right). \end{aligned}$$

Donc il existe $m_3 \in]0; +\infty[$ tel que $J(\lambda) \leq m_3 \lambda^{1+\frac{2}{d}-\frac{2\eta_d}{d}}$.

En utilisant les ensembles $\mathcal{W}_k(\lambda; B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus K : \frac{\lambda}{k_0(\lambda)} \leq 2B(x) \leq \frac{\lambda}{k} \right\}$, on va obtenir la décomposition de $L(\lambda)$ suivante :

$$L(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0(\lambda)-1} \int_{\mathcal{W}_k(\lambda; B)} B(x) dx.$$

Pour tout $\lambda > \lambda_{3,\varepsilon}$ et tout $k \in [[1; k_0(\lambda) - 1]]$, on a l'inclusion

$$\mathcal{W}_k(\lambda; B) \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \frac{\lambda}{k_0(\lambda)} \leq 2(1-\varepsilon)B_d(x) \leq \frac{\lambda}{k} \right\},$$

on en déduit alors l'inclusion de $\mathcal{W}_k(\lambda; B)$ dans l'ensemble

$$\left\{ (\rho, \omega) \in \mathbb{S}^1 \times]0; +\infty[: \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)2k_0(\lambda)f(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}} \leq \rho \leq \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}} \right\}.$$

En posant $R_\varepsilon(\lambda, k) := \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)2kf(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}}$ et $r_\varepsilon(\lambda) := \left(\frac{\lambda k_0(\lambda)^{-1}}{(1+\varepsilon)2f(\omega)} \right)^{\frac{1}{d}}$, on obtient pour tout $\lambda > \lambda_{3,\varepsilon}$, les majorants successifs de $L(\lambda)$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \sum_{k=1}^{k_0(\lambda)-1} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega) \left(\int_{r_\varepsilon(\lambda)}^{R_\varepsilon(\lambda,k)} \rho^{d+1} d\rho \right) d\omega \\ & \leq (1+\varepsilon) \frac{\overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{d+2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1+\frac{2}{d}} \sum_{k=1}^{k_0(\lambda)-1} \left[k^{-1-\frac{2}{d}} (1-\varepsilon)^{-1-\frac{2}{d}} - k_0(\lambda)^{-1-\frac{2}{d}} (1+\varepsilon)^{-1-\frac{2}{d}} \right] \\ & \leq (1+\varepsilon) \frac{\overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{d+2} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^{1+\frac{2}{d}} \left[(1-\varepsilon)^{-1-\frac{2}{d}} \sum_{k=1}^{k_0(\lambda)-1} k^{-1-\frac{2}{d}} - k_0(\lambda)^{-1-\frac{2}{d}} (1+\varepsilon)^{-1-\frac{2}{d}} \right]. \end{aligned}$$

La série de terme général $k^{-1-\frac{2}{d}}$ est convergente, et a pour somme $\zeta\left(1+\frac{2}{d}\right)$. Ainsi il existe $m_5 \in]0; +\infty[$ et $\lambda_{4,\varepsilon} > \lambda_{3,\varepsilon}$ tels que pour tout $\lambda > \lambda_{4,\varepsilon}$

$$L(\lambda) \leq (1+m_5\varepsilon) \frac{\overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{d+2} \zeta\left(1+\frac{2}{d}\right) \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1+\frac{2}{d}}.$$

Par conséquent, il existe $m_6 \in]0; +\infty[$ et $\lambda_{5,\varepsilon} > \lambda_{4,\varepsilon}$ tels que pour tout $\lambda > \lambda_{5,\varepsilon}$

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \leq (1+m_6\varepsilon) \frac{\zeta\left(1+\frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \overline{f_{\mathbb{S}^1}} \lambda^{1+\frac{2}{d}}.$$

En faisant de même pour la minoration, on obtient l'équivalence annoncée dans l'énoncé du Théorème 1.11. \square

En considérant un champ magnétique de la forme $B = B_d + \Psi$ avec $\Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{d-\delta})$ quand $|x| \rightarrow \infty$, on peut rechercher une première estimation du reste :

Théorème 1.12.

Soit $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses (1.1), de la forme $B_d + \Psi$ avec, pour $|x| \geq 1$, $B_d(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^d$ où $f \in C^1(\mathbb{S}^1;]0; +\infty[)$ et, quand $|x| \rightarrow$

∞ , $\Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{d-\delta})$ pour un certain $\delta > 0$.

Alors on obtient quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) = \frac{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{1+\frac{2}{d}-\min(\kappa_d; \eta_d)}\right)$$

où la constante η_d est celle définie lors de la Proposition 1.6

$$\text{et } \kappa_d = \begin{cases} \frac{2}{\frac{2}{d} + \delta + 1 - d} \frac{\delta}{d} & \text{si } d \in]0; 1] \\ \frac{2}{2+\delta} \frac{\delta}{d} & \text{si } d \in]1; +\infty[\end{cases}.$$

En particulier, on peut noter l'équivalence suivante :

$$\min(\kappa_d; \eta_d) = \kappa_d \iff \begin{cases} \delta \leq \frac{2}{5} & \text{si } d > 1, \\ \delta \leq \frac{1}{4} + \frac{8(1-d)}{d} & \text{si } d \in]0; 1]. \end{cases}$$

Démonstration du Théorème 1.12.

D'après la Proposition 1.8, on est amené à étudier

$$I_{\pm}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T\left(\frac{\lambda(1 \pm g_{\pm}(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx \quad \text{pour } \lambda > \lambda_0.$$

Il existe $(R_0, c_0) \in]0; +\infty[^2$ tel que pour tout $|x| \geq R_0$, $\left| \frac{\Psi(x)}{B_d(x) + \Psi(x)} \right| \leq c_0 |x|^{-\delta}$.

Soit $\varepsilon \in]0; \frac{\delta}{d}[$. On pose $R_{\Psi}(\lambda) := \lambda^{\frac{\varepsilon}{\delta}}$. On décompose $I_+(\lambda)$ en $J_+(\lambda) + L_+(\lambda)$ où l'on pose

$$J_+(\lambda) := \int_{|x| \geq R_{\Psi}(\lambda)} B(x) T\left(\frac{\lambda(1 + g_+(\lambda))}{B(x)} - 1\right) dx.$$

D'après les propriétés de T , on a $L_+(\lambda) \leq \frac{1}{2} \lambda(1 + g_+(\lambda)) \mu(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0; R_{\Psi}(\lambda)))$.

Donc il existe $c_1 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout λ ,

$$L_+(\lambda) \leq c_1 \lambda^{1+\frac{2\varepsilon}{\delta}}. \quad (1.11)$$

Il existe $\lambda_1 > \lambda_0$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_1$, $R_{\Psi}(\lambda) \geq R_0$. Ainsi pour tout $\lambda > \lambda_1$ et tout $|x| \geq R_{\Psi}(\lambda)$, $\left| \frac{\Psi(x)}{B_d(x) + \Psi(x)} \right| \leq c_0 \lambda^{-\varepsilon}$.

Pour tout $\lambda > \lambda_1$ et tout $|x| \geq R_{\Psi}(\lambda)$,

$$\frac{\lambda}{B(x)}(1 + g_+(\lambda)) \leq \frac{\lambda}{B_d(x)}(1 + g_+(\lambda))(1 + c_0 \lambda^{-\varepsilon}),$$

et donc en notant $\nu := \min(\varepsilon; \eta_d)$, il existe $c_2 \in]0; +\infty[$ tel que, pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$T\left(\frac{\lambda}{B(x)}(1+g_+(\lambda))-1\right) \leq T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1+c_2\lambda^{-\nu})-1\right).$$

Ainsi pour tout $\lambda > \lambda_1$, $J_+(\lambda) \leq \int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} B(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1+c_2\lambda^{-\nu})-1\right) dx$.

De nouveau, on fait une décomposition de l'intégrale précédente en utilisant la relation $B = B_d + \Psi$:

$$\int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} \Psi(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1+c_2\lambda^{-\nu})-1\right) dx \leq \frac{\lambda}{2}(1+c_2\lambda^{-\nu}) \int_{E(\lambda)} \frac{\Psi(x)}{B_d(x)} dx$$

où $E(\lambda) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq R_\Psi(\lambda) \text{ et } 2B_d(x) \leq \lambda(1+c_0\lambda^{-\nu})\}$. Il existe $c_3 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$, $E(\lambda) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\left(0; c_3\lambda^{\frac{1}{d}}\right)$. Ainsi il existe $c_4 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} \Psi(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1+c_2\lambda^{-\nu})-1\right) dx \leq c_4\lambda \int_0^{c_3\lambda^{\frac{1}{d}}} \rho^{1-\delta} d\rho.$$

Donc il existe $c_5 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} \Psi(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1+c_2\lambda^{-\nu})-1\right) dx \leq c_5\lambda^{1+\frac{2}{d}-\frac{\delta}{d}}. \quad (1.12)$$

Il reste à traiter $\tilde{J}_+(\lambda) := \int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} B_d(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1+c_2\lambda^{-\nu})-1\right) dx$.

On pose $k_\Psi(\lambda) := \max_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} T\left(\frac{\lambda(1+c_2\lambda^{-\nu})}{B_d(x)}-1\right)$. Il existe $(c_6, c_7) \in]0; +\infty[^2$

tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$, $c_6\lambda^{1-\frac{\varepsilon d}{\delta}} \leq k_\Psi(\lambda) \leq c_7\lambda^{1-\frac{\varepsilon d}{\delta}}$.

En utilisant $\mathcal{U}(\lambda; k) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq R_\Psi(\lambda), B_d(x) \leq \frac{\lambda(1+c_2\lambda^{-\nu})}{k}\right\}$, on a

$$\tilde{J}_+(\lambda) = \sum_{k=1}^{k_\Psi(\lambda)-1} \int_{\mathcal{U}(\lambda; k)} B_d(x) dx. \text{ En notant que}$$

$$\mathcal{U}(\lambda; k) = \left\{(\rho, \omega) \in \mathbb{S}^1 \times]0; +\infty[: R_\Psi(\lambda) \leq \rho \leq \left(\frac{\lambda(1+c_2\lambda^{-\nu})}{2kf(\omega)}\right)^{\frac{1}{d}}\right\},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}(\lambda; k)} B_d(x) dx &= \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega) \left(\int_{R_\Psi(\lambda)}^{\left(\frac{\lambda(1+c_2\lambda^{-\nu})}{2kf(\omega)}\right)^{\frac{1}{d}}} \rho^{d+1} d\rho \right) d\omega \\ &= \frac{2\pi \overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{d+2} \left(\frac{\lambda(1+c_2\lambda^{-\nu})}{2k} \right)^{\frac{d+2}{d}} - \frac{\lambda^{\frac{d+2}{d}-\frac{\varepsilon}{\delta}}}{d+2} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $\lambda > \lambda_1$, $\tilde{J}_+(\lambda)$ est égale à

$$\frac{2\pi \overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{d+2} \lambda^{\frac{d+2}{d}} (1 + c_2 \lambda^{-\nu})^{\frac{d+2}{d}} \sum_{k=1}^{k_{\Psi}(\lambda)-1} (2k)^{-\frac{d+2}{d}} - \frac{\int_{\mathbb{S}^1} f(\omega) d\omega}{d+2} \lambda^{\frac{d+2}{d} \frac{\varepsilon}{\delta}} (k_{\Psi}(\lambda) - 1).$$

La série de terme général $k^{-1-\frac{2}{d}}$ est convergente et l'on a quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\sum_{k=1}^{k_{\Psi}(\lambda)-1} k^{-\frac{d+2}{d}} = \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) + \mathcal{O}\left((k_{\Psi}(\lambda) - 1)^{-\frac{2}{d}}\right).$$

Et plus précisément, il existe $c_8 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\sum_{k=1}^{k_{\Psi}(\lambda)-1} k^{-\frac{d+2}{d}} \leq \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) - c_8 \lambda^{-\frac{2}{d} + \frac{2\varepsilon}{\delta}}.$$

Donc il existe $(c_9, c_{10}, c_{11}) \in]0; +\infty[^3$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$, on majore $\tilde{J}_+(\lambda)$ par

$$\frac{2\pi \overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} + c_9 \lambda^{1+\frac{2}{d}-\nu} - c_{10} \lambda^{1+\frac{2\varepsilon}{\delta}} - c_{11} k_{\Psi}(\lambda) \lambda^{(1+\frac{2}{d})\frac{\varepsilon}{\delta}}. \quad (1.13)$$

D'après (1.11), (1.12) et (1.13), pour tout $\lambda > \lambda_1$, on obtient

$$I_+(\lambda) \leq \frac{2\pi \overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} + c_1 \lambda^{1+\frac{2\varepsilon}{\delta}} + c_5 \lambda^{1+\frac{2}{d}-\frac{\delta}{d}} + c_9 \lambda^{1+\frac{2}{d}-\nu}.$$

Par conséquent, d'après la Proposition 1.8, il existe $c_{12} \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \leq \frac{2\pi \overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} + c_{12} \lambda^{1+\frac{2}{d}-\kappa}$$

où $\kappa = \min\left(\frac{\delta}{d}; \nu; \frac{2}{d} - \frac{2\varepsilon}{\delta}; \eta_d\right) = \min\left(\frac{\delta}{d}; \eta_d; \varepsilon; \frac{2}{d} - \frac{2\varepsilon}{\delta}\right)$. En prenant $\varepsilon = \frac{2}{2+\delta} \frac{\delta}{d}$, on obtient pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \leq \frac{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} + c_{10} \lambda^{1+\frac{2}{d}-\min(\eta_d; \frac{2}{2+\delta} \frac{\delta}{d})}.$$

On fait de même pour la minoration. Pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\begin{aligned} I_-(\lambda) &\geq \int_{|x| \geq R_{\Psi}(\lambda)} B_d(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1 - c_2 \lambda^{-\nu}) - 1\right) dx \\ &\quad - \int_{|x| \geq R_{\Psi}(\lambda)} |\Psi(x)| T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1 - c_2 \lambda^{-\nu}) - 1\right) dx. \end{aligned}$$

De même qu'en (1.12), il existe $c_{13} \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} |\Psi(x)| T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1 - c_2\lambda^{-\nu}) - 1\right) dx \leq c_{13}\lambda^{1+\frac{2}{d}-\frac{\delta}{d}}.$$

En posant $\tilde{\mathcal{U}}(\lambda; k) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq R_\Psi(\lambda), B_d(x) \leq \frac{\lambda(1-c_2\lambda^{-\nu})}{k}\right\}$ et $\tilde{k}_\Psi(\lambda) := \max_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} T\left(\frac{\lambda(1-c_2\lambda^{-\nu})}{B_d(x)} - 1\right)$, on a

$$\tilde{J}_-(\lambda) = \int_{|x| \geq R_\Psi(\lambda)} B_d(x) T\left(\frac{\lambda}{B_d(x)}(1 - c_2\lambda^{-\nu}) - 1\right) dx = \sum_{k=1}^{\tilde{k}_\Psi(\lambda)-1} \int_{\tilde{\mathcal{U}}(\lambda; k)} B_d(x) dx.$$

Mais il existe $c_{14} \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\sum_{k=1}^{\tilde{k}_\Psi(\lambda)-1} k^{-\frac{d+2}{d}} \geq \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) - c_{14}\lambda^{-\frac{2}{d} + \frac{2\varepsilon}{\delta}}.$$

De (1.13), on déduit qu'il existe $(c_{15}, c_{16}, c_{17}) \in]0; +\infty[^3$ pour tout $\lambda > \lambda_1$, on minore $\tilde{J}_-(\lambda)$ par

$$\frac{2\pi \overline{f_{\mathbb{S}^1}}}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} - c_{15}\lambda^{1+\frac{2}{d}-\nu} - c_{13}\lambda^{1+\frac{2}{d}-\frac{\delta}{d}} - c_{16}\lambda^{1+\frac{2}{d}\frac{\varepsilon}{\delta}} - c_{17}k_\Psi(\lambda)\lambda^{(1+\frac{2}{d})\frac{\varepsilon}{\delta}}.$$

On en déduit qu'il existe $c_{18} \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_1$,

$$\mathcal{N}_{Sch}(\lambda; B) \geq \frac{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega\right) \lambda^{1+\frac{2}{d}} - c_{18}\lambda^{1+\frac{2}{d}-\tilde{\kappa}}.$$

où $\tilde{\kappa} := \min\left(\eta_d; \varepsilon; \frac{2}{d}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta}\right); \frac{2}{d}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta}\right) + (d-1)\frac{\varepsilon}{\delta}\right)$.

Si $d \in]0; 1]$, on a les égalités

$$\tilde{\kappa} = \min\left(\eta_d; \varepsilon; \frac{2}{d}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta}\right) + (d-1)\frac{\varepsilon}{\delta}\right) = \min\left(\eta_d; \frac{\delta}{d} \frac{2}{\frac{2}{d} + \delta + 1 - d}\right).$$

Si $d > 1$, alors on a $\tilde{\kappa} = \min\left(\eta_d; \varepsilon; \frac{2}{d}\left(1 - \frac{\varepsilon}{\delta}\right)\right) = \min\left(\eta_d; \frac{\delta}{d} \frac{2}{2 + \delta}\right)$.

Ainsi on obtient l'estimation annoncée pour le reste. \square

1.4 Applications aux opérateurs de Pauli et de Dirac

En utilisant la supersymétrie⁷ [[12], Théo 6.4], on obtient

$$\sigma_d(-\Delta_B + B) \cap]0; +\infty[= \sigma_d(-\Delta_B - B) \cap]0; +\infty[.$$

⁷Voir en Annexe A pour l'énoncé.

1.4. APPLICATIONS AUX OPÉRATEURS DE PAULI ET DE DIRAC 29

Ainsi $\lambda_n(-\Delta_B + B) = \lambda_n(-\Delta_B - B)$, et l'on peut alors déterminer la distribution asymptotique des valeurs propres du spectre discret pour l'opérateur de Pauli \mathbb{P}_B . En effet, si $(\lambda_n(\mathbb{P}_B))_{n \in \mathbb{N}}$ désigne la suite croissante des valeurs propres positives de \mathbb{P}_B , on obtient alors

$$\lambda_{2n}(\mathbb{P}_B) = \lambda_{2n+1}(\mathbb{P}_B) = \lambda_n(-\Delta_B + B).$$

En posant $\mathcal{N}_{Pauli}(\lambda; B)$ le nombre de valeurs propres de \mathbb{P}_B dans $]0; \lambda[$ et comptées avec leur multiplicité, on en déduit alors le résultat :

Théorème 1.13.

Soit B un champ magnétique vérifiant les hypothèses de la Proposition 1.7, alors on a quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Pauli}(\lambda; B) \sim \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K_z} B(x) T \left(\frac{\lambda}{B(x)} - 1 \right) dx.$$

De plus, si B vérifie les hypothèses de la Proposition 1.11, alors on obtient quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Pauli}(\lambda; B) \sim \frac{\zeta \left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right) \lambda^{1+\frac{2}{d}}.$$

A noter que le résultat ci-dessus donne l'asymptotique quand $n \rightarrow +\infty$:

$$\lambda_n(\mathbb{P}_B) \sim 2^{\frac{2}{d+2}} \left(\frac{d+2}{\zeta \left(1 + \frac{2}{d}\right)} \right)^{\frac{d}{d+2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right)^{-\frac{d}{d+2}} n^{\frac{d}{d+2}}.$$

En utilisant le résultat de I. Shigekawa [Prop 1.1], on en déduit

Lemme 1.14.

Si $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} B(x) = +\infty$, alors le spectre discret de l'opérateur de Dirac \mathbb{D}_B est donné par

$$\left\{ \sqrt{\lambda+1} : \lambda \in \sigma(-\Delta_B + B) \right\} \cup \left\{ -\sqrt{\mu+1} : \mu \in \sigma(-\Delta_B + B) \right\}.$$

En notant $\mathcal{N}_{Dirac}^+(\lambda; B)$ (resp. $\mathcal{N}_{Dirac}^-(\lambda; B)$) le nombre de valeurs propres de \mathbb{D}_B , comptées avec multiplicité et contenues dans $]1; \lambda[$ (resp. $] - \lambda; -1[$), on obtient les égalités suivantes :

$$\mathcal{N}_{Dirac}^+(\lambda; B) = \mathcal{N}_{Dirac}^-(\lambda; B) = \mathcal{N}_{Pauli}(\lambda^2 - 1; B).$$

Théorème 1.15.

On suppose que le champ magnétique B vérifie les hypothèses de la Proposition 1.7, alors on obtient quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Dirac}^{\pm}(\lambda; B) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda^2}{B(x)} - 1\right) dx.$$

De plus, si B vérifie les hypothèses de la Proposition 1.11, alors on a quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Dirac}^{\pm}(\lambda; B) \sim \frac{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)}{2^{1+\frac{2}{d}}(d+2)} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right) \lambda^{2+\frac{4}{d}}.$$

Remarque. En notant respectivement par $(\lambda_n^+(\mathbb{D}_B))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\lambda_n^-(\mathbb{D}_B))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite croissante (resp. décroissante) des éléments positifs (resp. négatifs) du spectre discret de \mathbb{D}_B , on a quand $n \rightarrow \infty$:

$$\lambda_n^+(\mathbb{D}_B) = -\lambda_n^-(\mathbb{D}_B) \sim 2^{\frac{1}{2}} \left[\frac{d+2}{\zeta\left(1 + \frac{2}{d}\right)} \right]^{\frac{d}{2d+4}} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} f(\omega)^{-\frac{2}{d}} d\omega \right]^{-\frac{d}{2d+4}} n^{\frac{d}{2d+4}}.$$

Démonstration. D'après le Lemme 1.14 et la Proposition 1.7, on a quand $\lambda \rightarrow +\infty$:

$$\mathcal{N}_{Dirac}^{\pm}(\lambda; B) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda^2 - 1}{B(x)} - 1\right) dx.$$

Il ne reste plus qu'à établir que pour $\lambda \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda^2 - 1}{B(x)} - 1\right) dx \sim \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) T\left(\frac{\lambda^2}{B(x)} - 1\right) dx.$$

Pour cela, on étudie $I(\lambda) := \int_{\mathbb{R}^2 \setminus K} B(x) \left[T\left(\frac{\lambda^2 - 1}{B(x)} - 1\right) - T\left(\frac{\lambda^2}{B(x)} - 1\right) \right] dx$

de la même manière que lors du début de la Proposition 1.7, dans ce cas, on prendra $g(\lambda) = \lambda^{-1}$. Ainsi on en conclut aux équivalences recherchées. \square

Chapitre 2

Perturbation à décroissance rapide

Pour définir les différentes classes de potentiels étudiées, on utilise l'ensemble \mathcal{M} des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} mesurables bornées, et la condition

$$(\mathcal{H}_V) \quad \begin{cases} V \in \mathcal{M} \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0. \end{cases}$$

Les potentiels V_1 et V_2 étant bornés à valeurs réelles, l'opérateur \mathbb{V} est un opérateur borné symétrique sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. D'après le Théorème de Kato-Rellich, l'opérateur $\mathbb{D}_B - \mathbb{V}$ est auto-adjoint sur $\mathcal{D}(\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) = \mathcal{D}(\mathbb{D}_B)$.

$$\mathbb{V} := \begin{pmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{pmatrix}.$$

Comme $A \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$, le domaine de définition de $\mathcal{D}(\mathbb{D}_B)$ est inclus dans $\mathbb{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. Par conséquent, les potentiels V_1, V_2 vérifiant l'hypothèse (\mathcal{H}_V) , l'opérateur \mathbb{V} est \mathbb{D}_B -compact. Ainsi le Théorème de Weyl affirme que $\sigma_{ess}(\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) = \sigma_{ess}(\mathbb{D}_B)$.

Le résultat ci-dessous, dû à M. Melgaard et G. Rozenblum [34] dans le cas d'un champ magnétique constant, va permettre de relier le problème de l'asymptotique du nombre de valeurs propres pour l'opérateur de Dirac perturbé à celui d'un opérateur compact. Ce dernier est l'analogue des résultats utilisés par G. D. Raikov, [[42], Prop 3.1] ou A. Iwatsuka et H. Tamura dans [[29], Lemme 1.1] qui concernent l'opérateur de Pauli.

Ce sera le point clé de cette partie, à partir de ce dernier, on appliquera les techniques d'analyses des opérateurs *PWP* intervenant dans ces inégalités et également présentes lors de l'étude de l'opérateur de Pauli¹ \mathbb{P}_B . Ainsi les techniques et les résultats de G. D. Raikov et S. Warzel dans [43]

¹Wolfgang Pauli 1909-1958 : physicien suisse, Prix Nobel de Physique en 1945.

permettront d'étudier le cas de l'opérateur \mathbb{D}_B perturbé par \mathbb{V} avec V_1 à décroissance exponentielle lorsque B est égal au champ magnétique modèle B_d :

$B_d \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ radial tel qu'il existe $\varphi_d \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ solution classique de $\Delta\varphi = B_d$ vérifiant pour $|x| \geq 1$, $\varphi_d(x) = \frac{b}{(d+2)^2}|x|^{d+2}$ avec $(b, d) \in]0; +\infty[^2$.

Un tel champ B_d vérifie donc pour $|x| \geq 1$, $B_d(x) = b|x|^d$. Ensuite, on perturbera un peu le radial pour élargir la classe de champs B étudiés. En notant par $\mathcal{N}(a, b|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ le nombre de valeurs propres de $\mathbb{D}_B - \mathbb{V}$, comptées avec multiplicité et contenues dans $]a; b[$, on obtient

Proposition 2.1. [34]

On suppose que $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $B(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$.

Soient $(\Lambda_-, \Lambda_+) \in]-\infty; 1[\times]1; +\infty[$ et \mathbb{V} un opérateur vérifiant que V_1 et V_2 réalisent la condition (\mathcal{H}_V) .

Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, il existe $\lambda_\varepsilon \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$

$$\begin{aligned} n_+(\lambda, P_B W_\varepsilon^+ P_B) &\leq \mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \leq n_+(\lambda, P_B|V_1|P_B) + C \\ n_-(\lambda, P_B W_\varepsilon^- P_B) &\leq \mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \leq n_+(\lambda, P_B|V_1|P_B) + C \end{aligned}$$

où $W_\varepsilon^\pm := V_1 \left(1 - \varepsilon \cdot \text{sgn}(V_1) - \frac{1}{1 - \Lambda_\mp} V_1 \right)$ et P_B est la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur $\text{Ker}(D_B)$.

Remarques.

- 1) Comme pour un champ magnétique constant, $+1$ est un point isolé de spectre $\sigma(\mathbb{D}_B)$. La démonstration de ce résultat, identique à celle présentée dans [34], se fera par l'obtention d'une minoration puis d'une majoration au moyen d'une méthode variationnelle. Toutefois, on privilégiera un encadrement précis.

A noter que l'on peut étendre ce résultat aux champs B vérifiant $\liminf_{|x| \rightarrow +\infty} B(x) > 0$.

- 2) Les potentiels V_1 et W_ε^\pm ont le même signe à l'infini, et la même décroissance à l'infini. Si V_1 est à support compact, quitte à choisir Λ_\pm assez grand en module, on peut supposer V_1 et W_ε^\pm de même signe. Par la suite, on montrera que $n_+(\lambda, W)$ ne dépend que de λ et de la classe du potentiel W . Les inégalités ci-dessus permettront alors d'obtenir l'asymptotique de $\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ et $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ quand $\lambda \rightarrow 0^+$.
- 3) Pour mener les calculs de l'asymptotique de la distribution des valeurs propres s'accumulant près de $+1$, on supposera que V_1 est de signe constant à l'infini, ainsi si $V_1 \geq 0$, les potentiels V_1 et $|V_1|$ seront égaux hors d'un compact.

- 4) Le second encadrement donnera un équivalent dans le cadre d'un potentiel V_1 négatif (hors d'un compact).
- 5) Avec un champ B tendant vers $-\infty$, on obtiendra les mêmes encadrements en utilisant \tilde{P}_B la projection sur $\text{Ker}(D_B^*)$.

A l'aide de l'étude des valeurs propres de l'opérateur PV_1P , on va être en mesure d'établir des résultats sur les asymptotiques de $\mathcal{N}(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ et $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ pour un certain $\delta \in]0; +\infty[$:

$$(\mathcal{H}_{B \sim rhd}(\delta)) \quad \left\{ \begin{array}{l} B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \text{ tel que } B(x) = B_d(x) + \Psi(x) \\ \text{avec } \Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{d-\delta}) \text{ quand } |x| \rightarrow \infty. \end{array} \right.$$

De même que dans [43], on va s'intéresser aux classes de potentiels suivantes :

- $\mathcal{C}_{cpt} := \{V \in \mathcal{M} : \text{supp}(V) \text{ compact et contient un ouvert non vide}\}$
On dira que \mathbb{V} vérifie (\mathcal{H}_c) si V_2 vérifie (\mathcal{H}_V) , et $V_1 \in \mathcal{C}_{cpt}$.
- $\mathcal{G}(\mu, \beta) := \left\{ V \in \mathcal{M} : \ln |V(x)| \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} -\mu|x|^{2\beta} \right\}$ où $\mu > 0$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$
On dira que \mathbb{V} vérifie $(\mathcal{H}_{e,\mu,\beta})$ si V_2 vérifie (\mathcal{H}_V) et $V_1 \in \mathcal{G}(\mu, \beta)$.

Même si les inégalités fournies par la Proposition 2.1 ne nécessitent pas d'information sur le signe du potentiel V_1 , on fera les calculs sous l'une des deux conditions :

- (\mathcal{H}_+) Le potentiel V_1 est positif hors d'un compact de \mathbb{R}^2 ,
- (\mathcal{H}_-) Le potentiel V_1 est négatif hors d'un compact de \mathbb{R}^2 .

On va scinder le Théorème 2 de l'introduction en deux énoncés :

Théorème 2.2.

Soient B satisfaisant $(\mathcal{H}_{B \sim rhd}(\delta))$ pour un $\delta \in]0; +\infty[$, $V_2 \in \mathcal{M}$ et $V_1 \in \mathcal{C}_{cpt}$ vérifiant V_1 positif et $(\Lambda_-, \Lambda_+) \in]-\infty; 1[\times]1; +\infty[$.

Alors on a quand $\lambda \downarrow 0$: $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}$.

Si le potentiel V_1 est négatif, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

On établira ce résultat, comme application de la Proposition 2.1, en étudiant les valeurs propres de l'opérateur PV_1P en 3 étapes :

- On commencera avec notre champ magnétique modèle B_d et un potentiel électrique modèle, à savoir la fonction indicatrice d'une couronne.
- Ensuite on étendra ce résultat à toute la classe \mathcal{C}_{cpt} , en considérant toujours le champ B_d .

- Enfin, en se basant sur un résultat de N. Benkirane [6] sur les solutions de l'équation $\Delta\varphi = B$, on obtiendra la proposition ci-dessus à l'aide d'une méthode variationnelle.

Sur un même schéma de démonstration, on s'occupera également des potentiels électriques à décroissance exponentielle :

Théorème 2.3.

Soient B satisfaisant $(\mathcal{H}_{B \sim rhd}(\delta))$, $V_2 \in \mathcal{M}$ et $V_1 \in \mathcal{G}(\mu, \beta)$ satisfaisant (\mathcal{H}_+) et $(\mu, \Lambda_-, \Lambda_+) \in]0; +\infty[\times]-\infty; 1[\times]1; +\infty[$.

- Si $2\beta > d + 2$, $\delta > 0$, alors on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{\beta(d+2)}{2\beta - (d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

- Si $2\beta = d + 2$, $\delta > 0$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln \left(1 + \frac{\mu(d+2)^2}{2b}\right)}.$$

- Si $2\beta < d + 2$, $\delta > d - 2\beta$, alors on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{b}{d+2} \left(\frac{|\ln \lambda|}{\mu}\right)^{\frac{d+2}{2\beta}}.$$

Les équivalents de $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ et $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ sont identiques, on choisit de ne traiter que les $V_1 \geq 0$ pour le Théorème 2.2, et V_1 vérifiant (\mathcal{H}_+) pour le Théorème 2.3. Avec des potentiels V_1 négatifs (resp. négatifs hors d'un compact), une accumulation de valeurs propres à droite du point $+1$ serait créée et l'on posséderait le même équivalent.

2.1 Etude du noyau de $\mathbb{D}_B - 1$

A la section précédente, on vient de ramener le problème à l'étude du spectre de l'opérateur compact PV_1P . Pour faire cette étude, on va commencer par déterminer une base orthonormée (b.o.n.) de $\text{Ker}(D_B)$. Pour cela, on considère φ , solution de l'équation $\Delta\varphi = B$. Quitte à faire un changement de jauge, on supposera alors que le potentiel magnétique A est $\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)$.

Lemme 2.4.

- 1) [[21], Théo 2] $\mathcal{H}_\varphi = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) : f = ge^{-\varphi} \text{ où } g \text{ est holomorphe sur } \mathbb{C} \right\}$
est un s.e.v. fermé de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$.
- 2) [[17], section 2.4.1] La dimension de ce s.e.v. \mathcal{H}_φ est indépendante du choix de la solution considérée de $\Delta\varphi = B$.
- 3) On a $\mathcal{H}_\varphi = \text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1)$.

Démonstration. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned}
\psi \in \text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1) &\iff \psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) \text{ et } D_B(f) = 0_{\mathbf{L}^2} \\
&\iff \psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) \\
&\quad \text{et } [(D_1 - A_1(x)) + i(D_2 - A_2(x))](f) = 0_{\mathbf{L}^2} \\
&\iff \psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) \text{ et } e^{-\varphi}[D_1 + iD_2](fe^\varphi) = 0_{\mathbf{L}^2} \\
&\iff \psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) \text{ et } (D_1 + iD_2)(fe^\varphi) = 0_{\mathbf{L}^2} \\
&\iff \psi = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) \text{ et } (D_1 + iD_2)(fe^\varphi) = 0_{\mathcal{D}'}.
\end{aligned}$$

Pour la suite, on pose $v := fe^\varphi$.

L'opérateur différentiel $D_1 + iD_2$ étant un opérateur hypoelliptique, on obtient que

$$\text{suppsing}((D_1 + iD_2)v) = \text{suppsing}(v) \quad \text{i.e.} \quad \text{suppsing}(v) = \emptyset.$$

Ainsi v et $(D_1 + iD_2)v$ appartiennent à $C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Mais $(D_1 + iD_2)v = 0_{\mathbf{L}^2}$ entraîne également que $(D_1 + iD_2)v(x) = 0$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Donc on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $(D_1 + iD_2)v(x) = 0$, i.e. que v vérifie la *condition de Cauchy-Riemann*.

Par conséquent, la fonction v est holomorphe (en la variable $x_1 + ix_2$) sur \mathbb{C} , et on en déduit que $\{f \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) : f = ge^{-\varphi}, g \text{ holomorphe sur } \mathbb{C}\}$ coïncide avec $\text{Ker}(D_B)$, et \mathcal{H}_φ s'identifie à $\text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1)$. \square

Exprimé en coordonnées polaires (ρ, θ) , le laplacien sur \mathbb{R}^2 s'écrit $\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + \frac{1}{\rho^2}\partial_\theta^2$. Pour un champ magnétique B radial, on recherche φ radiale et l'on notera $\varphi(\rho)$ à la place de $\varphi(\rho, \theta)$. L'équation devient alors

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho\right)\varphi = B \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho)\varphi = B.$$

On obtient ainsi pour $\rho \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(\rho) &= \int_0^\rho t \int_0^1 uB(tu) du dt \\
\varphi'(\rho) &= \rho \int_0^1 uB(\rho u) du \\
\varphi''(\rho) &= B(\rho) - \int_0^1 uB(\rho u) du.
\end{aligned}$$

Le champ B étant continu, en prolongeant cette fonction par $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ et $\varphi''(0) = \frac{1}{2}B(0)$, on obtient une solution de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . De plus, dans le cas d'un champ B vérifiant $B(x) \sim B_d(x)$ quand $|x| \rightarrow \infty$, on a les asymptotiques suivantes quand $\rho \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\varphi(\rho) &\sim \frac{b}{(d+2)^2} \rho^{d+2} \\ \varphi'(\rho) &\sim \frac{b}{d+2} \rho^{d+1} \\ \varphi''(\rho) &\sim b \frac{d+1}{d+2} \rho^d.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Pour la suite, on va noter $\tilde{b} := \frac{b}{(d+2)^2}$ et choisir de travailler en utilisant les coordonnées polaires.

Lemme 2.5.

Si $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ est radial et $C_{B,n} := \|\rho^n e^{in\theta} e^{-\varphi(\rho)}\|^{-1}$, alors la famille $(C_{B,n} \rho^n e^{in\theta} e^{-\varphi(\rho)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une b.o.n. de $\text{Ker}(D_B)$.

Remarque. Les éléments de cette b.o.n. seront notés Q_n .

Démonstration. On va montrer que l'espace de Hilbert $\text{Ker}(D_B)$ admet la famille $(C_{B,n} (x_1 + ix_2)^n e^{-\varphi})_{n \in \mathbb{N}}$ comme système orthonormé. Par définition des $C_{B,n}$, les éléments Q_n sont normés. De plus, φ étant radiale, on obtient que $\langle Q_n, Q_m \rangle = \delta_{n,m}$. Il reste alors à voir que la famille orthonormée $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $[\text{Vect}(Q_k; k \in \mathbb{N})]^\perp = \{0\}$.

Soit $f \in \text{Ker}(D_B)$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\langle f, Q_k \rangle = 0$.

Comme $f \in \text{Ker}(D_B)$, il existe v fonction holomorphe sur \mathbb{C} en la variable $x_1 + ix_2$ telle que $f = v e^{-\varphi}$. En passant en coordonnées polaires dans les produits scalaires $\langle f, Q_k \rangle$, on obtient que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}0 &= C_{B,k} \iint_{(0,\infty) \times (0;2\pi)} f(\rho, \theta) \rho^{k+1} e^{-ik\theta} e^{-\varphi(\rho)} d\rho d\theta \\ &= C_{B,k} \iint_{(0,\infty) \times (0;2\pi)} v(\rho e^{i\theta}) e^{-\varphi(\rho)} \rho^{k+1} e^{-ik\theta} e^{-\varphi(\rho)} d\rho d\theta \\ &= C_{B,k} \int_0^\infty \rho^{k+1} e^{-2\varphi(\rho)} \left[\int_0^{2\pi} v(\rho e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \right] d\rho.\end{aligned}$$

Comme v est une fonction entière, on peut la développer en série entière :

$$v(z) = \sum_{q=0}^{\infty} a_q z^q \text{ où la convergence est uniforme sur toute boule de rayon fini}$$

centrée à l'origine. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v(\rho e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \sum_{q=0}^{\infty} a_q (\rho e^{i\theta})^q e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{q=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_q \rho^q e^{i(q-k)\theta} d\theta \\ &= \sum_{q=0}^{\infty} a_q 2\pi \delta_{qk} = 2\pi a_k. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 = 2\pi a_k \int_0^{\infty} \rho^{k+1} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho$.

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\infty} \rho^{k+1} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho \neq 0$, on obtient que tous les coefficients a_k sont nuls.

Par conséquent, v est la fonction nulle, et donc $f = 0$.

On en conclut que la famille $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme bien une b.o.n. de $\text{Ker}(D_B)$. \square

Pour calculer l'asymptotique de $n_+(\lambda, PV_1P)$, on va utiliser des potentiels radiaux modèles. En effet, si $V_- \leq V \leq V_+$, le Principe du Min-Max assure que la n^{e} valeur propre de l'opérateur compact PVP vérifie l'encadrement $\mu_n(PV_-P) \leq \mu_n(PVP) \leq \mu_n(PV_+P)$, et ainsi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on a $n_+(\lambda, PV_-P) \leq n_+(\lambda, PVP) \leq n_+(\lambda, PV_+P)$.

En travaillant avec des potentiels V_1 radiaux, la matrice de PVP , exprimée dans la base $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$, est diagonale et plus précisément les coefficients de cette matrice sont donnés par $\langle Q_j, VQ_k \rangle = \delta_{j,k} \langle Q_k, VQ_k \rangle$. Ainsi les valeurs propres de l'opérateur PVP sont exactement les produits scalaires $\langle Q_k, VQ_k \rangle$.

Pour la suite, on notera par $(\gamma_k(V))_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de ces valeurs propres. A priori, $\gamma_k(V)$ n'est pas égale à $\mu_k(PVP)$, i.e. la suite $(\gamma_k(V))_{k \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement décroissante. Mais on a la relation

$$n_+(\lambda, PVP) = \#\{k \in \mathbb{N} : \gamma_k(V) > \lambda\} = \#\{k \in \mathbb{N} : \ln \gamma_k(V) > \ln \lambda\}$$

qui permettra d'obtenir un équivalent de $n_+(\lambda, PVP)$.

Déterminer $\ln \gamma_k(V)$ ou $\gamma_k(V)$ va nécessiter des renseignements sur les constantes de normalisation $C_{B,n}$, ce sera l'objet du prochain énoncé :

Lemme 2.6.

1) Si $B = B_d$, alors il existe $c_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{2\pi}{d+2} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{d+2}\right)}{(2\tilde{b})^{\frac{2n+2}{d+2}}} - c_0 \leq C_{B,n}^{-2} \leq \frac{2\pi}{d+2} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{d+2}\right)}{(2\tilde{b})^{\frac{2n+2}{d+2}}} + c_0.$$

2) Si $B = B_d$ et $\alpha \in]0; +\infty[$, alors on a quand $n \rightarrow \infty$:

$$\frac{C_{B,n}}{C_{B,n+\alpha}} \sim (2\tilde{b})^{-\frac{\alpha}{d+2}} \left(\frac{2n}{d+2}\right)^{\frac{\alpha}{d+2}}.$$

- 3) Si B est radial et quand $|x| \rightarrow \infty$, $B(x) \sim B_d(x)$, alors quand $n \rightarrow \infty$, on a :
- $$\ln C_{B,n} \sim -\frac{n}{d+2} \ln n.$$

Démonstration.

- En revenant à la définition de B_d , on va utiliser l'égalité

$$C_{B,n}^{-2} = 2\pi \int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-2\tilde{b}\rho^{d+2}} d\rho + 2\pi \int_0^1 \rho^{2n+1} \left(e^{-2\varphi_d(\rho)} - e^{-2\tilde{b}\rho^{d+2}} \right) d\rho.$$

En effectuant un changement de variable dans l'intégrale $\int_0^\infty t^q e^{-at^p} dt$, on peut se ramener à l'intégrale définissant la fonction Γ et obtenir la formule

$$\int_0^\infty t^q e^{-at^p} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right)}{pa^{\frac{q+1}{p}}} \text{ où } (a, p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \times]-1; +\infty[. \quad (2.2)$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \rho^{2n+1} \left(e^{-2\varphi_d(\rho)} - e^{-2\tilde{b}\rho^{d+2}} \right) d\rho \right| \leq \int_0^1 \left| e^{-2\varphi_d(\rho)} - e^{-2\tilde{b}\rho^{d+2}} \right| d\rho.$$

En posant $c_0 := 2\pi \sup_{t \in [0;1]} \left| e^{-2\varphi_d(t)} - e^{-2\tilde{b}t^{d+2}} \right|$ et en appliquant (2.2), on aboutit à l'encadrement désiré.

- Le second résultat s'obtient en utilisant la formule de Stirling

$$\Gamma(k) = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k} (1 + O(k^{-1})) \quad \text{quand } k \rightarrow \infty.$$

- Soit $\varepsilon > 0$. D'après (2.1), il existe $R_\varepsilon \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\rho \geq R_\varepsilon$, $(1 - \varepsilon)\varphi_d(\rho) \leq \varphi(\rho) \leq (1 + \varepsilon)\varphi_d(\rho)$. Ainsi on obtient l'encadrement

$$C_{(1+\varepsilon)B_d,n}^{-2} + 2\pi \int_0^{R_\varepsilon} t^{2n+1} \left[e^{-2\varphi(t)} - e^{-2(1+\varepsilon)\varphi_d(t)} \right] dt \leq C_{B,n}^{-2}$$

$$C_{B,n}^{-2} \leq C_{(1-\varepsilon)B_d,n}^{-2} + 2\pi \int_0^{R_\varepsilon} t^{2n+1} \left[e^{-2\varphi(t)} - e^{-2(1-\varepsilon)\varphi_d(t)} \right] dt.$$

En posant $C_\varepsilon^\pm := 2\pi \sup_{t \in [0; R_\varepsilon]} \left| e^{-2\varphi(t)} - e^{-(1 \mp \varepsilon)\varphi_d(t)} \right|$, et en utilisant la formule (2.2), on obtient l'encadrement

$$\frac{2\pi}{(1+\varepsilon)^{\frac{2n+2}{d+2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{d+2}\right)}{(\tilde{b})^{\frac{2n+2}{d+2}} (d+2)} - R_\varepsilon^{2n+2} C_\varepsilon^- \leq C_{B,n}^{-2}$$

$$C_{B,n}^{-2} \leq \frac{2\pi}{(1-\varepsilon)^{\frac{2n+2}{d+2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{d+2}\right)}{(\tilde{b})^{\frac{2n+2}{d+2}} (d+2)} + R_\varepsilon^{2n+2} C_\varepsilon^+. \quad (2.3)$$

D'après la formule de Stirling, on obtient alors quand $n \rightarrow \infty$:

$$\ln \left(\Gamma \left(\frac{2n+2}{d+2} \right) \right) = \frac{2n}{d+2} \ln(n) [1 + o(1)].$$

Ainsi en passant au logarithme népérien dans (2.3), on obtient l'existence d'un rang $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(\varepsilon)$,

$$(1 - \varepsilon) \frac{2n}{d+2} \ln n \leq \ln \left(C_{B,n}^{-2} \right) \leq (1 + \varepsilon) \frac{2n}{d+2} \ln n.$$

Et ceci pour tout $\varepsilon > 0$. Par conséquent quand $n \rightarrow \infty$:

$$\ln \left(C_{B,n}^{-2} \right) \sim \frac{2n}{d+2} \ln n.$$

Ceci achève la preuve. \square

2.2 Perturbation à support compact

Etape 1

On établit un résultat pour les potentiels modèles de la classe \mathcal{C}_{cpt} à savoir les fonctions indicatrices de couronnes de \mathbb{R}^2 .

Lemme 2.7.

Si $B = B_d$ et $V = c\chi_{[\alpha,\beta]}(|\cdot|)$ avec $(c, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha < \beta$, alors on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PVP) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Démonstration.

En posant $m_{\alpha,\beta,\varphi_d} = \min_{\rho \in [\alpha,\beta]} e^{-2\varphi_0(\rho)}$, on peut alors minorer $\gamma_n(V) = 2\pi c C_{B_d,n}^2 \int_{\alpha}^{\beta} \rho^{2n+1} e^{-2\varphi_0(\rho)} d\rho$ par $2\pi c C_{B_d,n}^2 m_{\alpha,\beta,\varphi_d} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^{2n+1} d\rho$, i.e.

$$\gamma_n(V) \geq \frac{2\pi c m_{\alpha,\beta,\varphi_d}}{2n+2} (\beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2}) C_{B_d,n}^2. \quad (2.4)$$

Pour obtenir une majoration de $\gamma_n(V)$, on étudie la fonction F_n définie sur $]0; +\infty[$ par $F_n(\rho) := \rho^{2n+1} e^{-2\varphi_d(\rho)}$. C'est une fonction de classe C^1 sur $]0; +\infty[$ qui admet pour dérivée

$$F_n'(\rho) = [2n+1 - 2\rho\varphi_d'(\rho)] \rho^{2n} e^{-2\varphi_d(\rho)}.$$

En définissant $G(\rho) = 2\rho\varphi_0'(\rho)$, on a l'équivalence

$$\rho_0(n) \text{ est un point critique de } F_n \iff 2n+1 = G(\rho).$$

La fonction G est dérivable sur $]0; +\infty[$ avec $G'(\rho) = 2\rho B_d(\rho)$. Comme B_0 tend vers l'infini en l'infini, on obtient l'existence d'un $\rho_1 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\rho \in]\rho_1; +\infty[$, $G'(\rho) > 0$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a l'unicité de la solution $\rho_0(n)$ de l'équation $2n + 1 = G(\rho)$.

La stricte croissance de G entraîne que $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_0(n) = +\infty$. Donc il existe $n_1 \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_1$, $\rho_0(n) \geq \beta$.

De plus, pour tout $n \geq n_1$, F_n est croissante sur $]0; \rho_0(n)]$ et décroissante sur $]\rho_0(n); +\infty[$, ce qui assure que pour tout $n \geq n_0$, $\gamma_n(V)$ est majoré par $2\pi c(\beta - \alpha)C_{B_d, n}^2 F_n(\beta)$, d'où

$$\gamma_n(V) \leq 2\pi c(\beta - \alpha)C_{B_d, n}^2 \beta^{2n+2} e^{-2\varphi(\beta)}. \quad (2.5)$$

A l'aide des inégalités (2.4) et (2.5), on peut alors minorer $\ln \gamma_n(V)$ par $\ln(2\pi c m_{\alpha, \beta, \varphi_d}) - \ln(2n + 2) + 2 \ln(C_{B_d, n}) + \ln(\beta^{2n+2} - \alpha^{2n+2})$ et le majorer par $\ln(2\pi c(\beta - \alpha)) - 2\varphi_d(\beta) + (2n + 2) \ln(\beta) + 2 \ln(C_{B_d, n})$.

Soit $\delta \in]0; 1[$. Comme $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, on a $\ln \left[1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2n+2} \right] = o(1)$ quand $n \rightarrow \infty$. D'après le lemme précédent, on obtient qu'il existe $n_0(\delta) \geq n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0(\delta)$

$$-(1 + \delta) \frac{2}{d+2} n \ln n \leq \ln \gamma_n(V) \leq -(1 - \delta) \frac{2}{d+2} n \ln n.$$

On a alors l'encadrement

$$\begin{aligned} \# \left\{ n \in \mathbb{N}^* : -2 \frac{1 + \delta}{d+2} n \ln n > \ln \lambda \right\} - n_0(\delta) &\leq n_+(\lambda, PVP) \\ n_+(\lambda, PVP) &\leq \# \left\{ n \in \mathbb{N}^* : -2 \frac{1 - \delta}{d+2} n \ln n > \ln \lambda \right\} + n_0(\delta). \end{aligned} \quad (2.6)$$

On peut conclure en utilisant le résultat suivant :

Lemme 2.8. *[[34], Lemme 6.3]*

$$\text{Quand } \mu \downarrow 0, \text{ on a : } \# \{ n \in \mathbb{N} : n^{-n} > \mu \} \sim \frac{|\ln \mu|}{\ln |\ln \mu|}.$$

Ainsi pour $\tau \in]0; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \# \{ n \in \mathbb{N}^* : -\tau n \ln n > \ln \lambda \} &= \# \left\{ n \in \mathbb{N}^* : -n \ln n > \frac{1}{\tau} \ln \lambda \right\} \\ &= \# \left\{ n \in \mathbb{N}^* : -n \ln n > \ln \left(\lambda^{\frac{1}{\tau}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

On en déduit que quand $\lambda \downarrow 0$:

$$\# \{ n \in \mathbb{N}^* : -\tau n \ln n > \ln \lambda \} \sim \frac{|\ln \left(\lambda^{\frac{1}{\tau}} \right)|}{\ln |\ln \left(\lambda^{\frac{1}{\tau}} \right)|}.$$

D'où quand $\lambda \downarrow 0$, on a : $\# \{n \in \mathbb{N}^* : -\tau n \ln n > \ln \lambda\} \sim \frac{1}{\tau} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}$.

D'après l'encadrement (2.6), pour tout $\delta \in]0; 1[$, il existe $\lambda_0(\delta) \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\delta)[$

$$(1 - 2\delta) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|} \leq n_+(\lambda, PVP) \leq (1 + 2\delta) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Ceci étant vrai pour tout $\delta \in]0; 1[$, on en conclut que pour $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PVP) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

□

Etape 2

On étend maintenant le Lemme 2.7 à toutes les fonctions V à support compact :

Lemme 2.9.

Si $B = B_d$, $V \in \mathcal{C}_{cpt}$ et $V \geq 0$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PVP) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Démonstration.

Le potentiel V étant positif et à support compact, il existe $(\beta_+, c_+) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $V \leq c_+ \chi_{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| \leq \beta_+\}}$.

Ainsi $n_+(\lambda, PVP) \leq n_+(\lambda, Pc_+ \chi_{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| \leq \beta_+\}}P)$.

Soit $\delta \in]0; 1[$. D'après le Lemme 2.7, il existe $\lambda_0(\delta) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\delta)[$,

$$n_+(\lambda, Pc_+ \chi_{[0; \beta_+]}P) + C \leq (1 + \delta) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Ainsi pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\delta)[$, on a $n_+(\lambda, PVP) \leq (1 + \delta) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}$.

Pour minorer $n_+(\lambda, PVP)$, la difficulté intervient si 0 n'est pas dans le support de V . En effet, si $0 \in \text{supp}(V)$, on minore V par une fonction du type $c_- \chi_{\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq |x| \leq \beta_-\}}$ et on conclut comme lors de la majoration. Mais si $0 \notin \text{supp}(V)$, on n'est pas sûr de pouvoir minorer V par une fonction radiale V_- , et par conséquent, la difficulté est de déterminer les valeurs propres de l'opérateur PV_-P associé à ce minorant.

Pour palier au cas où $0 \notin \text{supp}(V)$, on va utiliser une méthode variationnelle après avoir translaté V pour obtenir un potentiel tel que 0 appartienne à son support. On va procéder comme suit :

Soit $x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)})$ un point de l'intérieur du support de V . On définit

V_0 le potentiel à support compact tel que $V(x) = V_0(x + x_0)$. Ainsi $0 \in \text{supp}(V_0)$. On remarque que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V(x) |f(x^{(1)} + ix^{(2)})|^2 e^{-2\varphi_d(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^2} V_0(y) |f(y^{(1)} + iy^{(2)} - z_0)|^2 e^{-2\tilde{\varphi}_0(y)} dy \quad (2.7)$$

où l'on a posé $z_0 = x_0^{(1)} + ix_0^{(2)}$ et $\tilde{\varphi}_0 := \varphi_d(\cdot - x_0)$.

Le champ magnétique associé à $\tilde{\varphi}_0$ est $\tilde{B} := B_d(\cdot - x_0)$, $\tilde{B} \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On va noter respectivement P_B et $P_{\tilde{B}}$ les projections orthogonales de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur $\text{Ker}(D_B)$ et $\text{Ker}(D_{\tilde{B}})$. Les opérateurs \mathbb{D}_B et $\mathbb{D}_{\tilde{B}}$ étant unitairement équivalents, à l'aide de la conjugaison par l'opérateur de translation $\tau_{x_0} : f(x) \mapsto f(x - x_0)$, on en déduit que $n_+(\lambda, P_B V P_B) = n_+(\lambda, P_{\tilde{B}} V_0 P_{\tilde{B}})$.

Comme pour $|x| \rightarrow \infty$, $\tilde{\varphi}_0(x) \sim \varphi_d(x)$, il existe $R_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $|x| \geq R_0$, $\frac{1}{2}\varphi_d(x) \leq \tilde{\varphi}_0(x)$. Ainsi il existe $\varphi_- \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que pour tout $|x| \geq 2R_0$, $\varphi_-(x) = \frac{1}{2}\tilde{\varphi}_0(x)$.

Par analogie avec la notation des espaces de Segal-Bargmann, [21], on note par $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi})$ l'espace des fonctions holomorphes en la variable $x_1 + ix_2$ qui sont dans l'espace à poids $\mathbf{L}^2(e^{-2\varphi} dx)$, i.e.

$$\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}) = \{f \text{ holomorphe sur } \mathbb{C} \text{ en } x + iy : fe^{-\varphi} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})\}.$$

L'inégalité $e^{-2\tilde{\varphi}_0} \leq e^{-2\varphi_-}$ entraîne $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_-}) \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\tilde{\varphi}_0})$.

Comme φ_- est de classe C^2 , on définit $B_- := \Delta\varphi_-$. On note par P_{B_-} la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ sur le s.e. $\{fe^{-\varphi_-} : f \in \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_-})\}$.

De plus V tendant vers 0 à l'infini, l'opérateur $P_{B_-} V P_{B_-}$ est compact. Ainsi en appliquant le Lemme A.4, on note que $n_+(\lambda, P_B V P_B)$ est égale à

$$\max \{ \dim(\mathcal{L}) : \mathcal{L} \subset \text{Ker}(D(B)); \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, \langle P_B V P_B u, u \rangle > \lambda \|u\|^2 \} = \max \{ \dim(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}); \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}, \langle V f e^{-\varphi}, f e^{-\varphi} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi}\|^2 \}.$$

On a $\langle V f e^{-\varphi}, f e^{-\varphi} \rangle = \langle V e^{-2(\tilde{\varphi}_0 - \varphi_-)} f e^{-\varphi_-}, f e^{-\varphi_-} \rangle$ et $\|f e^{-\tilde{\varphi}_0}\| \geq \|f e^{-\varphi_-}\|$.

En posant $V^- := V e^{-2(\tilde{\varphi}_0 - \varphi_-)}$, on obtient alors

$$\left(\langle V^- f e^{-\varphi_-}, f e^{-\varphi_-} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi_-}\|^2 \right) \Rightarrow \left(\langle V f e^{-\tilde{\varphi}_0}, f e^{-\tilde{\varphi}_0} \rangle > \lambda \|f e^{-\tilde{\varphi}_0}\|^2 \right).$$

Ainsi on en déduit que l'on peut majorer $n_+(\lambda, P_B V P_B)$ par

$$\max \{ \dim(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}); \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}, \langle V^- f e^{-\varphi_-}, f e^{-\varphi_-} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi_-}\|^2 \}.$$

De plus, l'inclusion $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_-}) \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\tilde{\varphi}_0})$ permet de majorer $n_+(\lambda, P_B V P_B)$ par

$$\max \{ \dim(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_-}); \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}, \langle V^- f e^{-\varphi_-}, f e^{-\varphi_-} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi_-}\|^2 \}.$$

Par conséquent, on obtient $n_+(\lambda, P_B V P_B) \leq n_+(\lambda, P_{B_-} V^- P_{B_-})$. D'après le Lemme 2.7, quitte à remplacer B_d par B_- , on en déduit que pour $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, P_B V P_B) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

□

Etape 3

Pour cette dernière étape, on va démontrer la Proposition 2.2 en utilisant un résultat de N. Benkirane sur la surjectivité du Laplacien. L'énoncé qui suit est la version pour l'opérateur $A = \Delta$, présent dans [[36], p24]. Les espaces de Hölder à poids $C_a^{\mu+l}(\mathbb{R}^2)$ sont définis par :

$$u \in C_a^{\mu+l}(\mathbb{R}^2) \iff \begin{cases} (i) & \langle x \rangle^{a+|\alpha|} |\partial_x^\alpha u| \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^2), \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, |\alpha| \leq l \\ (ii) & \sup_{\substack{\langle y \rangle \leq 2 \langle x \rangle \leq 4 \langle y \rangle \\ x \neq y, |\alpha| \leq l}} \langle x \rangle^{a+|\alpha|+\mu} \left| \frac{\partial_x^\alpha u(x) - \partial_x^\alpha u(y)}{|x-y|^\mu} \right| < +\infty. \end{cases}$$

Lemme 2.10. [[6], Prop VI.3]

L'application $\Delta : C_a^{\mu+2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_{a+2}^\mu(\mathbb{R}^2)$ est surjective si $a < 0$, $a \notin \mathbb{Z}$ et $\mu \in]0; 1[$.

Comme $\Psi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ et $\Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{d-\delta})$ quand $\lambda \downarrow 0$, on a $\Psi \in C_{-(d-\delta)}^\mu(\mathbb{R}^2)$. Quitte à remplacer δ par $\tilde{\delta} \in]0; \delta[$, on peut toujours supposer que $d - \delta \notin \mathbb{N}$.

D'après le lemme précédent, il existe donc $\Phi \in C_{-(d-\delta)-2}^{\mu+2}(\mathbb{R}^2)$ solution de l'équation $\Delta \Phi = \Psi$. Ainsi $\varphi := \varphi_0 + \Phi$ est solution de l'équation $\Delta \varphi = B$.

Comme pour $\lambda \downarrow 0$, on a $\Phi(x) = o(\varphi_0(x))$, il existe $R_0 \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $|x| \geq R_0$, on a $\frac{1}{2}\varphi_0(x) \leq \varphi(x) \leq 2\varphi_0(x)$. Ainsi il existe deux fonctions $\varphi_\pm \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ telles que pour tout $|x| \geq 2R_0$, $\varphi_\pm(x) = 2^{\pm 1}\varphi_0(x)$.

Comme $e^{-2\varphi_+} \leq e^{-2\varphi} \leq e^{-2\varphi_-}$ hors d'un compact, on obtient les inclusions

$$\mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_-}) \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}) \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_+}). \quad (2.8)$$

Comme φ_\pm est de classe C^2 , on définit $B_\pm := \Delta \varphi_\pm$. On note par P_{B_\pm} la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C})$ sur le s.e. $\{f e^{-\varphi_\pm} : f \in \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_\pm})\}$.

Comme V_1 tend vers 0 à l'infini, les opérateurs $P_{B_\pm} V_1 P_{B_\pm}$ sont compacts. En appliquant le Lemme A.4, on obtient les égalités

$$\begin{aligned} n_+(\lambda, P_B V_1 P_B) &= \max \{ \dim(\mathcal{L}) : \mathcal{L} \subset \text{Ker}(D(B)); \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, \\ &\quad \langle P_B V_1 P_B u, u \rangle > \lambda \|u\|^2 \} \\ &= \max \{ \dim(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}); \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}, \\ &\quad \langle V_1 f e^{-\varphi}, f e^{-\varphi} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi}\|^2 \}. \end{aligned}$$

On a $\langle V_1 f e^{-\varphi}, f e^{-\varphi} \rangle = \langle V_1 e^{-2(\varphi-\varphi_+)} f e^{-\varphi_+}, f e^{-\varphi_+} \rangle$ et $\|f e^{-\varphi}\| \geq \|f e^{-\varphi_+}\|$.

En posant $V_1^+ := V_1 e^{-2(\varphi-\varphi_+)}$, on obtient alors

$$(\langle V_1 f e^{-\varphi}, f e^{-\varphi} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi}\|^2) \Rightarrow (\langle V_1^+ f e^{-\varphi_+}, f e^{-\varphi_+} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi_+}\|^2).$$

Ainsi on en déduit

$$n_+(\lambda, P_B V_1 P_B) \leq \max \left\{ \dim(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}); \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}, \right. \\ \left. \langle V_1^+ f e^{-\varphi_+}, f e^{-\varphi_+} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi_+}\|^2 \right\}.$$

De plus, d'après l'inclusion (2.8), on a

$$n_+(\lambda, P_B V_1 P_B) \leq \max \left\{ \dim(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_+}); \forall f \in \mathcal{F} \setminus \{0\}, \right. \\ \left. \langle V_1^+ f e^{-\varphi_+}, f e^{-\varphi_+} \rangle > \lambda \|f e^{-\varphi_+}\|^2 \right\}.$$

Par conséquent, on obtient $n_+(\lambda, P_B V_1 P_B) \leq n_+(\lambda, P_{B_+} V_1^+ P_{B_+})$. On fait de même pour obtenir la minoration $n_+(\lambda, P_B V_1 P_B) \geq n_+(\lambda, P_{B_-} V_1^- P_{B_-})$ où $V_1^- := V_1 e^{-2(\varphi - \varphi_-)}$.

Les potentiels V_1, V_1^\pm étant tous dans la classe \mathcal{C}_{cpt} , d'après l'étape 2, on en déduit que pour $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, P_B V_1 P_B) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Ainsi on obtient bien l'asymptotique annoncée pour $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$. En faisant de même avec $V_1 \leq 0$, on obtient le même équivalent pour $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$, et le Théorème 2.2 est démontré.

En reprenant cette troisième étape, on peut étendre ce résultat :

Corollaire 2.11.

Soient $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que $B(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$, $V \in \mathcal{C}_{cpt}$ avec $V_1 \geq 0$ et

$\Lambda_- \in]-\infty; 1[$.

On suppose qu'il existe $(b_-, b_+, d, R) \in]0; +\infty[^4$ et φ solution de $\Delta\varphi = B$ sur \mathbb{R}^2 tels que pour tout $|x| \geq R$, $b_-|x|^{d+2} \leq \varphi(x) \leq b_+|x|^{d+2}$.

Alors quand $\lambda \downarrow 0$, on a : $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}$.

2.3 Perturbation à décroissance exponentielle

Les potentiels modèles utilisés pour ces classes $\mathcal{G}(\mu, \beta)$ sont les gaussiennes $G_\mu^{(\beta)}$ définies par $G_\mu^{(\beta)}(x) = e^{-\mu|x|^{2\beta}}$. On va être amené à distinguer trois cas suivant la rapidité de décroissance de $G_\mu^{(\beta)}$ par rapport à $e^{-2\varphi}$. Dans le cas des potentiels V_1 à *décroissance exponentielle rapide* (i.e. $2\beta > d+2$), les valeurs propres de l'opérateur décroissent exponentiellement et la connaissance de l'équivalent du Lemme 2.6 (deuxième partie) va nous permettre de conclure. Dans le cas où $G_\mu^{(\beta)}$ et $e^{-2\varphi}$ décroissent aussi rapidement vers 0 (i.e. $2\beta = d+2$), on obtiendra le résultat par application de la formule (2.2). Enfin, pour la dernière situation, on se servira d'une étude de phase type "Laplace" à l'image de G.D. Raikov et S. Warzel dans [43]

pour obtenir une majoration des $\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right)$ et de l'*Inégalité de Jensen* pour en avoir une minoration.

Lemme 2.12. [LL, Théo 2.2] Inégalité de Jensen

Soient J une fonction convexe de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , τ une mesure positive, Ω un ensemble τ -mesurable tel que $0 < \tau(\Omega) < \infty$, et $f \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$.

On note pour $g \in \mathbf{L}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\langle g \rangle := \frac{1}{\tau(\Omega)} \int_{\Omega} g(t) d\tau(t)$.

Alors $\langle J \circ f \rangle \geq J(\langle f \rangle)$.

2.3.1 Cas où $2\beta > d + 2$

Etape 1

Lemme 2.13.

Si $B = B_d$ et $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]\frac{d+2}{2}; +\infty[$, alors on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) \sim \frac{\beta(d+2)}{2\beta - (d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Démonstration.

Les valeurs propres de l'opérateur $PG_\mu^{(\beta)}P$ sont données par les quotients

$$\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) = \frac{\int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-\mu\rho^{2\beta}} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho}{\int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho}.$$

En définissant φ_μ par $\varphi_\mu(\rho) := \varphi(\rho) + \frac{\mu}{2}\rho^{2\beta}$, on a alors $\varphi_\mu(\rho) \sim \frac{\mu}{2}\rho^{2\beta}$ quand $\rho \rightarrow \infty$. D'après le Lemme 2.6, on obtient quand $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \ln \left(\int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-2\varphi_\mu(\rho)} d\rho \right) &\sim \frac{n}{\beta} \ln n \\ \text{et } \ln \left(\int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho \right) &\sim \frac{2n}{d+2} \ln n. \end{aligned}$$

Soit $\delta \in]0; 1[$. Il existe donc $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(\delta)$, on ait

$$(1 + \delta) \frac{d+2-2\beta}{\beta(d+2)} n \ln n \leq \ln \left(\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) \right) \leq (1 - \delta) \frac{d+2-2\beta}{\beta(d+2)} n \ln n.$$

On minore $n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P)$ par $\# \left\{ n \in \mathbb{N} : (1 - \delta) \frac{d+2-2\beta}{\beta(d+2)} n \ln(n) > \ln \lambda \right\}$
 et on majore $n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P)$ par $\# \left\{ n \in \mathbb{N} : (1 + \delta) \frac{d+2-2\beta}{\beta(d+2)} n \ln(n) > \ln \lambda \right\}$.
 Mais d'après le Lemme 2.8, on a vu que si $\tau > 0$, alors pour $\mu \downarrow 0$,
 $\# \{ n \in \mathbb{N} : -\tau n \ln n > \ln \mu \} \sim \frac{1}{\tau} \frac{|\ln \mu|}{\ln |\ln \mu|}$.

Par conséquent, il existe $\lambda_0(\delta) \in]0; 1[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\delta)[$, on ait les inégalités

$$\begin{aligned} \# \left\{ n \in \mathbb{N} : (1 + \delta) \frac{d+2-2\beta}{\beta(d+2)} n \ln n > \ln \lambda \right\} &\leq (1 + 2\delta) \frac{\beta(d+2)}{(1+\delta)(2\beta-(d+2))} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|} \\ \# \left\{ n \in \mathbb{N} : (1 - \delta) \frac{d+2-2\beta}{\beta(d+2)} n \ln n > \ln \lambda \right\} &\geq (1 - 2\delta) \frac{\beta(d+2)}{(1-\delta)(2\beta-(d+2))} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}. \end{aligned}$$

Donc il existe $\lambda_1(\delta) \in]0; \lambda_0(\delta)[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_1(\delta)[$,

$$\begin{aligned} (1 - 2\delta) \frac{\beta(d+2)}{2\beta-(d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|} &\leq n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) \\ n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) &\leq (1 + 2\delta) \frac{\beta(d+2)}{2\beta-(d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}. \end{aligned}$$

Et ceci pour tout $\delta \in]0; 1[$. Par conséquent, on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) \sim \frac{\beta(d+2)}{2\beta-(d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

□

Etape 2

Lemme 2.14.

Si $B = B_d$, $V \in \mathcal{G}(\mu, \beta)$ avec $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]\frac{d+2}{2}; +\infty[$, V vérifiant (\mathcal{H}_+) , alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PVP) \sim \frac{\beta(d+2)}{2\beta-(d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Démonstration.

Soit $\delta \in]0; \frac{1}{2}[$. Comme V est positif à l'infini, il existe $(C_\delta^\pm, R_\delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tel que $V_\delta^- \leq V \leq V_\delta^+$ où $V_\delta^\pm(x) = G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)}(x) \pm C_\delta^\pm \chi_{[0, R_\delta]}(|x|)$. Ainsi

$$n_+(\lambda, PV_\delta^-P) \leq n_+(\lambda, PVP) \leq n_+(\lambda, PV_\delta^+P).$$

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\gamma_k(V_\delta^\pm) = \gamma_k(G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)}) \pm C_\delta^\pm \gamma_k(\chi_{[0, R_\delta]})$. D'après les calculs des Lemmes 2.7 et 2.13, on a $\gamma_k(\chi_{[0, R_\delta]}) \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\gamma_k(G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)})\right)$. Donc il existe $k_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0(\delta)$,

$$(1 - \delta)\gamma_k(G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)}) \leq \gamma_k(V_\delta^\pm) \leq (1 + \delta)\gamma_k(G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)}).$$

Donc $n_+(\lambda, PV_\delta^+P) \leq \#\left\{n \in \mathbb{N} : (1 + \delta)\gamma_n(G_{(1-\delta)\mu}^{(\beta)}) > \lambda\right\} + k_0(\delta)$. Le Lemme 2.13 entraîne qu'il existe $\lambda_0(\delta) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\delta)[$

$$n_+(\lambda, PV_\delta^+P) + C \leq (1 + \delta) \frac{\beta(d+2)}{2\beta-(d+2)} \frac{\left|\ln \frac{\lambda}{1+\delta}\right|}{\ln \left|\ln \frac{\lambda}{1+\delta}\right|}.$$

Ainsi il existe $(M_+, \lambda_1(\delta)) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_1(\delta)[$,

$$n_+(\lambda, PV_\delta^+P) \leq (1 + M_+\delta) \frac{\beta(d+2)}{2\beta - (d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}. \quad (2.9)$$

De même, il existe $(M_-, \lambda_2(\delta)) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \lambda_1(\delta)[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_2(\delta)[$

$$n_+(\lambda(1+\varepsilon), P(1-\varepsilon)V_\delta^-P) \geq (1 - M_-\delta) \frac{\beta(d+2)}{2\beta - (d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}. \quad (2.10)$$

On déduit donc de (2.9) et (2.10) l'asymptotique recherchée. \square

Étape 3

Dans le cadre des potentiels électriques à décroissance exponentielle rapide, la troisième étape est rigoureusement identiquement à celle proposée lors d'une perturbation par un \mathbb{V} à support compact (section 6.3) car l'asymptotique dans le Lemme 2.14 ne dépend pas du coefficient b , mais uniquement de β et d .

De même que pour les potentiels à support compact, on peut écrire le Corollaire suivant :

Corollaire 2.15.

Soient $B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tel que $B(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$, $V \in \mathcal{G}(\mu, \beta)$ avec V_1 vérifiant

(\mathcal{H}_+) et $(\mu, \beta) \in]0; +\infty[\times]\frac{d+2}{2}; +\infty[$, $(\Lambda_-, \Lambda_+) \in]-\infty; 1[\times]1; +\infty[$.

On suppose qu'il existe $(b_-, b_+, d, R) \in]0; +\infty[^4$ et φ solution de $\Delta\varphi = B$ sur \mathbb{R}^2 tels que pour tout $|x| \geq R$, $b_-|x|^{d+2} \leq \varphi(x) \leq b_+|x|^{d+2}$.

Si $V_1 \geq 0$, alors quand $\lambda \downarrow 0$: $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1-\lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim \frac{\beta(d+2)}{2\beta - (d+2)} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}$.

2.3.2 Cas où $2\beta = d+2$

Étape 1

Lemme 2.16.

Si B est radial tel que pour $|x| \rightarrow \infty$, $B(x) \sim B_d(x)$ et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+\left(\lambda, PG_\mu^{\left(\frac{d+2}{2}\right)}P\right) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln\left(1 + \frac{\mu(d+2)^2}{2b}\right)}.$$

Démonstration.

De nouveau, on a $\gamma_n\left(G_\mu^{\left(\frac{d+2}{2}\right)}\right) = 2\pi C_{B,n}^2 \int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-(\mu\rho^{d+2} + 2\varphi(\rho))} d\rho$ et

on note par I_n l'intégrale précédente.

Soit $\varepsilon \in]0; \varepsilon_0[$ où $\varepsilon_0 \ll 1$.

D'après l'équivalent (2.1), il existe $c_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\rho \in]0; +\infty[$

$$\begin{cases} (1 - \varepsilon)2\tilde{b}\rho^{d+2} - c_\varepsilon \leq 2\varphi(\rho) \leq (1 + \varepsilon)2\tilde{b}\rho^{d+2} + c_\varepsilon \\ (1 - \varepsilon)(\mu + 2\tilde{b})\rho^{d+2} - c_\varepsilon \leq \mu\rho^{d+2} + 2\varphi(\rho) \leq (1 + \varepsilon)(\mu + 2\tilde{b})\rho^{d+2} + c_\varepsilon. \end{cases}$$

Ceci permet, en utilisant la formule (2.2), d'aboutir à l'encadrement suivant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e^{-c_\varepsilon}(1 + \varepsilon)^{-\frac{2n+2}{d+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{d+2}\right)}{(\mu + 2\tilde{b})^{\frac{2n+2}{d+2}}(d+2)} &\leq I_n \\ I_n &\leq e^{c_\varepsilon}(1 + \varepsilon)^{-\frac{2n+2}{d+2}} \frac{\Gamma\left(\frac{2n+2}{d+2}\right)}{(\mu + 2\tilde{b})^{\frac{2n+2}{d+2}}(d+2)}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{-2c_\varepsilon} \left[\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}} \leq \gamma_n \left(G_\mu^{(\frac{d+2}{2})} \right) \leq e^{2c_\varepsilon} \left[\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}}.$$

Or il existe $c_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0; \varepsilon_0[$, $\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} \leq 1 + c_0\varepsilon$ et $\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} \geq 1 - c_0\varepsilon$. D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{-2c_\varepsilon} \left[(1 - c_0\varepsilon) \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}} \leq \gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) \leq e^{2c_\varepsilon} \left[(1 + c_0\varepsilon) \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}}.$$

On minore $n_+ \left(\lambda, PG_\mu^{(\frac{d+2}{2})} P \right)$ par $\# \left\{ n \in \mathbb{N} : e^{-2c_\varepsilon} \left[(1 - c_0\varepsilon) \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}} > \lambda \right\}$

et on le majore par $\# \left\{ n \in \mathbb{N} : e^{2c_\varepsilon} \left[(1 + c_0\varepsilon) \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}} > \lambda \right\}$.

Or l'expression $(\star) e^{\pm 2c_\varepsilon} \left[(1 \pm c_0\varepsilon) \frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right]^{\frac{2n+2}{d+2}} > \lambda$ est équivalente à

$$\pm 2c_\varepsilon + \frac{2n+2}{d+2} \left[\ln(1 \pm c_0\varepsilon) + \ln \left(\frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} \right) \right] > \ln \lambda.$$

En notant $(\star\star)$ la quantité entre crochets ci-dessus, et en remarquant que

$\frac{2\tilde{b}}{\mu + 2\tilde{b}} < 1$, pour ε_0 suffisamment petit, on a pour tout $\varepsilon \in]0; \varepsilon_0[$, $(\star\star) < 0$.

Ainsi

$$(\star) \iff n < \frac{d+2}{2} \frac{\ln \lambda \mp 2c_\varepsilon}{\ln(1 \pm c_0\varepsilon) + \ln\left(\frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}\right)} - 2.$$

Il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\frac{\ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}}{\ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}} + \ln(1 + c_0\varepsilon)} \leq 1 + c_1\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}}{\ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}} + \ln(1 - c_0\varepsilon)} \geq 1 - c_1\varepsilon.$$

De plus, il existe $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\varepsilon)[$,

$$\begin{cases} \frac{d+2}{2} \frac{\ln \lambda - 2c_\varepsilon}{\ln(1+c_0\varepsilon) + \ln\left(\frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}\right)} - 2 \leq (1+c_2\varepsilon) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\left|\ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}\right|} \\ \frac{d+2}{2} \frac{\ln \lambda + 2c_\varepsilon}{\ln(1-c_0\varepsilon) + \ln\left(\frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}\right)} - 2 \geq (1-c_2\varepsilon) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\left|\ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}}\right|}. \end{cases}$$

Comme $\left| \ln \frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}} \right| = \ln \left(1 + \frac{\mu}{2\tilde{b}} \right)$, on obtient pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\varepsilon)[$

$$(1 - c_2\varepsilon) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln\left(1 + \frac{\mu}{2\tilde{b}}\right)} \leq n_+ \left(\lambda, PG_\mu^{(\frac{d+2}{2})} P \right) \leq (1 + c_2\varepsilon) \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln\left(1 + \frac{\mu}{2\tilde{b}}\right)}.$$

Ceci est vrai pour tout $\varepsilon \in]0; \varepsilon_0[$ et achève la démonstration. \square

Remarque. Si le champ magnétique vaut $B(x) = b|x|^d$, alors on a une formule explicite des $\gamma_n \left(G_\mu^{(\frac{d+2}{2})} \right)$, à savoir $\gamma_n \left(G_\mu^{(\frac{d+2}{2})} \right) = \left(\frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}} \right)^{\frac{2n+2}{d+2}}$.

De plus, comme $\frac{2\tilde{b}}{\mu+2\tilde{b}} < 1$, la suite $\left(\gamma_n G_\mu^{(\frac{d+2}{2})} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors décroissante à partir du rang $n = 0$, i.e. $\gamma_n \left(G_\mu^{(\frac{d+2}{2})} \right) = \mu_n \left(G_\mu^{(\frac{d+2}{2})} \right)$.

Étape 2

Lemme 2.17.

Si B est radial tel que pour $|x| \rightarrow \infty$, $B(x) \sim B_d(x)$ et $V \in \mathcal{G}(\mu, \frac{d+2}{2})$ avec $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, alors on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+ \left(\lambda, PG_\mu^{(\frac{d+2}{2})} P \right) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln \left(1 + \frac{\mu(d+2)^2}{2b} \right)}.$$

Démonstration.

On raisonne comme pour le Lemme 2.14. Soit $\delta \in]0; \frac{1}{2}[$. Il existe $(C_\delta^\pm, R_\delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que :

$$V_\delta^- \leq V \leq V_\delta^+ \quad \text{où} \quad V_\delta^\pm(x) = G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)}(x) \pm C_\delta^\pm \chi_{[0, R_\delta]}(|x|).$$

Il existe $k_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0(\delta)$

$$(1 - \delta)\gamma_k \left(G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)} \right) \leq \gamma_k(V_\delta^\pm) \leq (1 + \delta)\gamma_k \left(G_{(1\mp\delta)\mu}^{(\beta)} \right).$$

Puis en utilisant l'inégalité $n_+(\lambda, PV_\delta^-P) \leq n_+(\lambda, PVP) \leq n_+(\lambda, PV_\delta^-P)$ et le Lemme 2.16, on aboutit à l'équivalence recherchée. \square

Etape 3

En appliquant le Lemme 2.10 à la fonction Ψ , on en déduit qu'il existe $\Phi \in C_{-(d-\delta)-2}^{\mu+2}(\mathbb{R}^2)$ solution sur \mathbb{R}^2 de l'équation $\Delta\Phi = \Psi$. Donc il existe $m_\pm \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, $-m_-|x|^{d+2-\delta} \leq \Phi(x) \leq m_+|x|^{d+2-\delta}$. On pose $\varphi_\pm := \varphi_d \pm m_\pm|x|^{d+2-\delta}$. On a $\varphi_\pm \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ et on note $B_\pm := \Delta\varphi_\pm$. D'après l'inégalité ci-dessus, on a $\varphi_- \leq \varphi \leq \varphi_+$ et donc les inclusions

$$\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_-}) \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}) \subset \mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi_+}).$$

Par conséquent, on en déduit que

$$n_+(\lambda, P_{B_-}V_1^-P_{B_-}) \leq n_+(\lambda, P_BV_1P_B) \leq n_+(\lambda, P_{B_+}V_1^+P_{B_+})$$

avec $V_1^\pm = V_1e^{-2(\varphi-\varphi_\pm)} = V_1e^{\mp 2m_\pm|x|^{d+2-\delta}}$.

Mais les potentiels V_1, V_1^\pm étant tous dans la classe $\mathcal{G}(\mu, \beta)$, d'après le Lemme 2.17, on en déduit que pour $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, P_BV_1P_B) \sim \frac{d+2}{2} \frac{|\ln \lambda|}{\ln |\ln \lambda|}.$$

Ainsi on obtient l'asymptotique souhaitée pour $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ lors du Théorème 2.3.

2.3.3 Cas où $2\beta < d+2$

Dans ce cas, $e^{-2\varphi}$ décroît plus vite que V .

Etape 1

Lemme 2.18.

Si $B = B_d$ et $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \frac{d+2}{2}[$, alors on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) \sim \frac{b}{d+2} \mu^{-\frac{d+2}{2\beta}} |\ln \lambda|^{\frac{d+2}{2\beta}}.$$

Démonstration.

La convexité de la fonction exponentielle permet d'appliquer l'Inégalité de Jensen. En effet, en posant $J = \exp$, $d\tau = 2\pi C_{B,n}^2 \rho^{2n+1} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho$ et $f(\rho) = -\mu\rho^{2\beta}$, on obtient d'après le Lemme 2.7 :

$$\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) \geq \exp \left[-\mu 2\pi C_{B,n}^2 \int_0^\infty \rho^{2n+1+2\beta} e^{-2\varphi(\rho)} d\rho \right].$$

Soit $\delta \in]0; 1[$. En appliquant le lemme 2.6, il existe $n_\delta \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_\delta$,

$$\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) \geq \exp \left[-\mu \left(2\tilde{b} \right)^{-\frac{2\beta}{d+2}} \left(\frac{2n}{d+2} \right)^{\frac{2\beta}{d+2}} (1+\delta) \right]. \quad (2.11)$$

Pour obtenir une majoration, on écrit $\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right)$ sous la forme

$$\begin{aligned} \gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) &= 2\pi C_{B,n}^2 \int_0^\infty e^{\Phi_n(\rho)} d\rho \text{ avec} \\ \Phi_n(\rho) &:= (2n+1) \ln \rho - \mu \rho^{2\beta} - 2\varphi(\rho). \end{aligned}$$

Cette fonction “de phase” Φ_n est de classe C^1 sur $]0; +\infty[$. On va découper l’intégrale de $\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right)$ en deux :

Tout d’abord, on a $\Phi'_n(\rho) = \frac{2n+1}{\rho} - 2\beta\mu\rho^{2\beta-1} - 2\varphi'(\rho)$. Les limites de $\Phi'_n(\rho)$ en 0^+ et en $+\infty$ étant respectivement $+\infty$ et $-\infty$, le Théorème des Valeurs Intermédiaires entraîne que l’équation $\Phi'_n(\rho) = 0$ admet une solution. Ces solutions se situent dans un compact $[l_n; r_n]$ de \mathbb{R}_+^* , on notera alors par $\rho_0(n)$ le plus petit des points critiques de Φ_n , $\rho_0(n) \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme $d+2 > 2\beta$, il existe $\rho_\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\rho > \rho_\delta$,

$$\begin{cases} (1-\delta)2(d+2)\tilde{b}\rho^{d+2} \leq 2\beta\mu\rho^{2\beta} + 2\rho\varphi'(\rho) \leq (1+\delta)2(d+2)\tilde{b}\rho^{d+2} \\ (1-\delta)2\tilde{b}\rho^{d+2} \leq \mu\rho^{2\beta} + 2\varphi(\rho) \leq (1+\delta)2\tilde{b}\rho^{d+2}. \end{cases}$$

Alors pour tout $\rho > \rho_\delta$, $\Phi_n(\rho) \leq (2n+1) \ln \rho - (1-\delta)2\tilde{b}\rho^{d+2}$.

De plus, $\rho_0(n)$ étant solution de l’équation $2n+1 = 2\beta\mu\rho^{2\beta} + 2(d+2)\tilde{b}\rho^{d+2}$, il existe $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0(\delta)$,

$$\rho_\delta \leq (1+\delta)^{-\frac{1}{d+2}} \left(\frac{2n+1}{2\tilde{b}(d+2)} \right)^{\frac{1}{d+2}} \leq \rho_0(n) \leq (1-\delta)^{-\frac{1}{d+2}} \left(\frac{2n+1}{2\tilde{b}(d+2)} \right)^{\frac{1}{d+2}}.$$

D’où pour tout $n \geq n_0(\delta)$,

$$\begin{aligned} \Phi_n(\rho_0(n)) &\leq (2n+1) \ln \left[(1-\delta)^{-\frac{1}{d+2}} \left(\frac{2n+1}{2\tilde{b}(d+2)} \right)^{\frac{1}{d+2}} \right] - \frac{1-\delta}{1+\delta} \left(\frac{2n+1}{d+2} \right) \\ \text{i.e. } \Phi_n(\rho_0(n)) &\leq \frac{2n+1}{d+2} \left(\ln \left[\frac{2n+1}{2\tilde{b}(d+2)} \right] - \left[\ln(1+\delta) + \frac{1-\delta}{1+\delta} \right] \right). \end{aligned}$$

$$\text{Comme } \int_{\rho_0(n)}^\infty e^{\Phi_n(\rho)} d\rho \leq e^{-\mu\rho_0(n)^{2\beta}} \int_{\rho_0(n)}^\infty \rho^{2n+1} e^{-2\tilde{b}\rho^{d+2}} d\rho \leq \frac{e^{-\mu\rho_0(n)^{2\beta}}}{2\pi C_{B,n}^2}$$

$$\text{et } \int_0^{\rho_0(n)} e^{\Phi_n(\rho)} d\rho \leq \rho_0(n) e^{\Phi_n(\rho_0(n))}$$

on obtient que pour tout $n \geq n_0(\delta)$, on peut faire la majoration

$$2\pi C_{B,n}^2 \int_{\rho_0(n)}^{\infty} e^{\Phi_n(\rho)} d\rho \leq \exp \left[-\mu \left(\frac{2n+1}{2(d+2)\tilde{b}} \right)^{\frac{2\beta}{d+2}} (1+\delta)^{-\frac{2\beta}{d+2}} \right]$$

de même on majore $2\pi C_{B,n}^2 \int_0^{\rho_0(n)} e^{\Phi_n(\rho)} d\rho$ par la quantité $A_{n,\delta}$ définie par

$$2\pi(1-\delta)^{-\frac{1}{d+2}} \left(\frac{2n+1}{2(d+2)\tilde{b}} \right)^{\frac{1}{d+2}} \left[e^{\frac{2n+1}{d+2} \left(\ln \left[\frac{2n+1}{2(d+2)\tilde{b}} \right] - \ln(1-\delta) - \frac{1-\delta}{1+\delta} \right)} \right].$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n,\delta}}{e^{-\mu \left(\frac{n}{\tilde{b}(d+2)} \right)^{\frac{2\beta}{d+2}} (1+\delta)^{-\frac{2\beta}{d+2}}}} = 0$, on obtient qu'il existe $n_1(\delta) \geq n_0(\delta)$ tel que pour tout $n \geq n_1(\delta)$,

$$\gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) \leq (1+\delta) \exp \left[-\mu \left(\frac{n}{\tilde{b}(d+2)} \right)^{\frac{2\beta}{d+2}} (1+\delta)^{-\frac{2\beta}{d+2}} \right]. \quad (2.12)$$

On pose $\xi := \mu \left(\tilde{b}(d+2) \right)^{-\frac{2\beta}{d+2}}$.

De (2.11) et (2.12), on obtient qu'il existe $n_2(\delta) \geq n_1(\delta)$ tel que pour tout $n \geq n_2(\delta)$,

$$-(1+\delta)\xi n^{\frac{2\beta}{d+2}} \leq \ln \gamma_n \left(G_\mu^{(\beta)} \right) \leq -(1-\delta)\xi n^{\frac{2\beta}{d+2}}$$

On minore $n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P)$ par $\# \left\{ n \in \mathbb{N} : -(1-\delta)\xi n^{\frac{2\beta}{d+2}} > \ln \lambda \right\} - n_2(\delta)$ et on le majore par $\# \left\{ n \in \mathbb{N} : -(1+\delta)\xi n^{\frac{2\beta}{d+2}} > \ln \lambda \right\} + n_2(\delta)$.

Or $-(1 \pm \delta)\xi n^{\frac{2\beta}{d+2}} > \ln \lambda \iff n < \left(\frac{|\ln \lambda|}{(1 \pm \delta)\xi} \right)^{\frac{d+2}{2\beta}}$, ce qui donne

$$\# \left\{ n \in \mathbb{N} : -(1 \pm \delta)\xi n^{\frac{2\beta}{d+2}} > \ln \lambda \right\} = E \left((1 \pm \delta)^{-\frac{d+2}{2\beta}} \xi^{-\frac{d+2}{2\beta}} |\ln \lambda|^{\frac{d+2}{2\beta}} \right) + 1.$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda_0(\delta) \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0(\delta)[$

$$(1-c\delta)(d+2)\tilde{b} \left[\frac{|\ln \lambda|}{\mu} \right]^{\frac{d+2}{2\beta}} \leq n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) \leq (1+c\delta)(d+2)\tilde{b} \left[\frac{|\ln \lambda|}{\mu} \right]^{\frac{d+2}{2\beta}}.$$

Et ceci pour tout $\delta \in]0; 1[$. Par conséquent, on a quand $\lambda \downarrow 0$:

$$n_+(\lambda, PG_\mu^{(\beta)}P) \sim \frac{b}{d+2} \left(\frac{|\ln \lambda|}{\mu} \right)^{\frac{d+2}{2\beta}}$$

□

Étape 2**Lemme 2.19.**

Si $B = B_d$ et $V \in \mathcal{G}(\mu, \beta)$ avec $(\mu, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times]0; \frac{d+2}{2}[$, alors quand $\lambda \downarrow 0$, on a :

$$n_+(\lambda, PVP) \sim \frac{b}{d+2} \mu^{-\frac{d+2}{2\beta}} |\ln \lambda|^{\frac{d+2}{2\beta}}.$$

Démonstration.

Une nouvelle fois, on raisonne comme lors de l'étape 2 de la section 2.3.1. Soit $\delta \in]0; \frac{1}{2}[$. Il existe $(C_\delta^\pm, R_\delta) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ tels que :

$$V_\delta^- \leq V \leq V_\delta^+ \quad \text{où} \quad V_\delta^\pm(x) = C_\delta^\pm \left(G_{(1 \mp \delta)\mu}^{(\beta)}(x) \pm \chi_{[0, R_\delta]}(|x|) \right).$$

Il existe $k_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0(\delta)$

$$(1 - \delta)\gamma_k \left(G_{(1 \mp \delta)\mu}^{(\beta)} \right) \leq \gamma_k(V_\delta^\pm) \leq (1 + \delta)\gamma_k \left(G_{(1 \mp \delta)\mu}^{(\beta)} \right).$$

Puis en utilisant l'inégalité $n_+(\lambda, PV_\delta^-P) \leq n_+(\lambda, PVP) \leq n_+(\lambda, PV_\delta^+P)$ et le Lemme 2.18, on aboutit à l'équivalence désirée. \square

Étape 3

Il s'agit de la démonstration du Théorème 2.3 dans le cas $2\beta < d + 2$. Comme auparavant, on utilisera la méthode variationnelle détaillée au cours de l'étape 1 de la section 2.3.1. On sera donc amené à utiliser le fait que V_1 et V_1^\pm sont tous dans la classe de potentiels $\mathcal{G}(\mu, \beta)$, ce qui sera vérifié avec un B vérifiant $\Psi(x) = o(|x|^{2\beta})$ quand $|x| \rightarrow \infty$, et a fortiori si $\Psi(x) = \mathcal{O}(|x|^{d-\delta})$ pour $\delta \in]d - 2\beta; +\infty[$ quand $|x| \rightarrow \infty$.

Chapitre 3

Perturbation à décroissance polynomiale

Au cours de ce chapitre, on va se concentrer sur les potentiels électriques à décroissance polynomiale. Ce cadre a été propice à de nombreuses études notamment par G.D. Raikov de [39] à [43] ou A. Iwatsuka et H. Tamura dans [28] et [29] pour l'opérateur de Pauli. Ces études menées pour des champs magnétiques bornés ont abouti à des formules quasi-classiques. Ici, on traite de champs magnétiques non bornés, on reprend la méthode de Weyl pour obtenir de nouveau une formule quasi-classique sous les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}_{B,d}) & \begin{cases} B \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ C_- |x|^d \leq B(x) \leq C_+ |x|^d & \text{pour } |x| \geq R_0 \\ |\nabla B(x)| \leq C |x|^{d-1} & \text{pour } |x| \geq R_0 \end{cases} \\
 (\mathcal{H}_{V,\gamma}) & \begin{cases} V \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\ v_- |x|^{-\gamma} \leq V(x) \leq v_+ |x|^{-\gamma} & \text{pour } |x| \geq R_0 \\ |\nabla V(x)| \leq C |x|^{-\gamma-1} & \text{pour } |x| \geq R_0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

où les constantes R_0 , C , C_{\pm} et v_{\pm} sont des éléments de $]0; +\infty[$. Avec des champs magnétiques à croissance faible, on obtient :

Proposition 3.1.

Soient $d \in]0; 1[$, $\gamma > 0$, $\Lambda_+ > 1$ et $\Lambda_- < 1$.

Si B et V_1 vérifient respectivement $(\mathcal{H}_{B,d})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$, alors on obtient quand $\lambda \downarrow 0$:

$$N(\Lambda_-, 1 - \lambda |\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim N(1 + \lambda, \Lambda_+ |\mathbb{D}_B + \mathbb{V}) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{V_1 > \lambda} B(x) dx.$$

Le cas $d = 0$, qui correspond à un champ magnétique encadré par deux constantes positives, est une conséquence directe du [[28], Lemme 2.6] et de

la Proposition 2.1.

En ajoutant une hypothèse de périodicité : pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}_{B,d,k}) & \left\{ \begin{array}{l} B \text{ vérifie } (\mathcal{H}_{B,d}) \\ \text{et une fois exprimée en coordonnées polaires } (\rho, \theta), \\ \text{à } \rho \text{ fixé, la fonction } \theta \mapsto B(\rho, \theta) \text{ est } \frac{2\pi}{k}\text{-périodique} \end{array} \right. \\ (\mathcal{H}_{V,\gamma,k}) & \left\{ \begin{array}{l} V \text{ vérifie } (\mathcal{H}_{V,\gamma}) \\ \text{et une fois exprimée en coordonnées polaires } (\rho, \theta), \\ \text{à } \rho \text{ fixé, la fonction } \theta \mapsto V(\rho, \theta) \text{ est } \frac{2\pi}{k}\text{-périodique} \end{array} \right. \end{aligned}$$

On peut alors démontrer l'énoncé suivant :

Théorème 3.2.

Soient $d > 0$, $\gamma > 0$, $\Lambda_+ > 1$ et $\Lambda_- < 1$.

Soit k un entier naturel non nul tel que $d \in [2k - 2; 3k - 2[$.

Si B et V_1 vérifient respectivement $(\mathcal{H}_{B,d,k})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma,k})$, alors quand $\lambda \downarrow 0$, on obtient :

$$N(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \sim N(1 + \lambda, \Lambda_+|\mathbb{D}_B + \mathbb{V}) \sim \frac{1}{2\pi} \int_{V_1 > \lambda} B(x) dx.$$

Comme pour les chapitres précédents, on n'effectuera la démonstration que pour une accumulation de valeurs propres à gauche du point du spectre essentiel.

Parmi les couples (B, V) respectant ces dernières hypothèses, on peut citer les couples radiaux : à savoir, $B(x) = P(|x|)$ où P est une fonction à croissance polynomiale de degré d et V également radiale à décroissance polynomiale. On peut noter que les couples modèles associés, $B = B_d$ et $V(x) = c|x|^{-\gamma}$ peuvent être étudiés avec les techniques mises en place au chapitre précédent. Cependant, lors de la perturbation de ce couple modèle (correspondant à la troisième étape $B = B_d + \Delta\Psi$), on utilise que $Ve^{\pm 2\Psi}$ et V possèdent la même décroissance, ce qui demande que Ψ soit borné et est très restrictif. On va alors chercher à appliquer une méthode différente.

Sous les hypothèses $(\mathcal{H}_{B,d,k})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma,k})$, la classe des (B, V) étudiés est plus large et contient des couples non radiaux. Par exemple, on peut regarder le cas d'un champ s'écrivant, en coordonnées polaires, comme $\rho^d P(\omega^k)$ où P est un polynôme trigonométrique, et de même d'un potentiel V se décomposant sous la forme $\rho^{-\gamma} Q(\omega^k)$ où Q est aussi un polynôme trigonométrique.

Pour démontrer la Proposition 3.1, on étudie l'accumulation des valeurs propres négatives de l'opérateur $-\Delta_B - B - V_1$ près de 0 en reprenant l'idée de l'article [29], à savoir la méthode de Weyl utilisée avec un champ magnétique dont le gradient tend vers 0 à l'infini (les champs magnétiques à croissance faible). Une fois ce résultat établi, ramenant ce problème à

l'étude des opérateurs compacts $P_B V_1 P_B$, on pourra atteindre des champs magnétiques à croissance plus élevée au prix d'hypothèses de périodicité en variable angulaire en B et V , au §3.2. Enfin, on conclura en appliquant ce résultat à l'opérateur de Dirac pour obtenir le Théorème 3.2.

3.1 Champ magnétique à croissance faible

3.1.1 Méthode de Weyl

Pour ce premier résultat, on utilise uniquement les hypothèses $(\mathcal{H}_{B,d})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$. Avec des champs magnétiques à croissance faible, leur gradient tendant vers zéro à l'infini, on peut appliquer la méthode de Weyl comme dans l'article [28]. Pour estimer le cardinal du spectre discret de l'opérateur \mathbb{D}_B , au premier chapitre, on avait pu considérer des champs B dont le degré était aussi élevé que possible car le paramètre λ utilisé tendait vers l'infini. Ici, au contraire, on s'intéresse aux valeurs propres près du point du spectre essentiel : le potentiel V_1 est à décroissance polynomiale et le paramètre λ tend vers zéro.

Lemme 3.3.

Soient $d \in]0; 1[$, $\gamma \in]0; \frac{1-d}{3}[$, B et V vérifiant respectivement $(\mathcal{H}_{B,d})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_\varepsilon[$:

$$\begin{aligned} \frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1+\varepsilon)\lambda} B(x) dx &\leq N(-\Delta_B - B - V < -\lambda) \\ N(-\Delta_B - B - V < -\lambda) &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1-\varepsilon)\lambda} B(x) dx. \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration de ce Lemme étant très proche de celle réalisée pour obtenir la Proposition 1.8, on suivra un plan de démonstration identique.

Minoration de $N(-\Delta_B - B - V < -\lambda)$:

- Le gradient $\nabla B(x)$ tendant vers 0 à l'infini, on peut considérer le même recouvrement de \mathbb{R}^2 que [28], à savoir un recouvrement formé par des carrés tous de même taille (sauf celui centré à l'origine), de longueur de côté

$$R = \lambda^{-\nu} \text{ avec } 2\nu > 1 \text{ et } 1 + 4\nu < \frac{1-d}{\gamma}. \quad (3.1)$$

Soit $\lambda_0 > 0$ tel que $R_0 < \lambda_0^{-\nu}$. On considère $\lambda \in]0; \lambda_0[$.

On note par $Q_{1,1}$ le carré centré à l'origine et de rayon $r = 2\lambda^{-\nu}$. A lui seul, il constitue la première couronne \mathcal{C}_1 .

Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose les couronnes $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_j$ construites. La

couronne \mathcal{C}_{j+1} borde l'ensemble $\bigcup_{k=1}^j \overline{\mathcal{C}_k}$. Elle n'est formée que de carrés $Q_{j,p}$ ouverts de centre $x_{j,p}$ et de côté $R = \lambda^{-\nu}$.

Si $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $x \in \mathcal{C}_j$, on a $(j-1)\lambda^{-\nu} \leq |x| \leq \sqrt{2}j\lambda^{-\nu}$ et donc $b_-\lambda^{-d\nu}(j-1)^d \leq B(x) \leq b_+2^d\lambda^{-d\nu}j^d$.

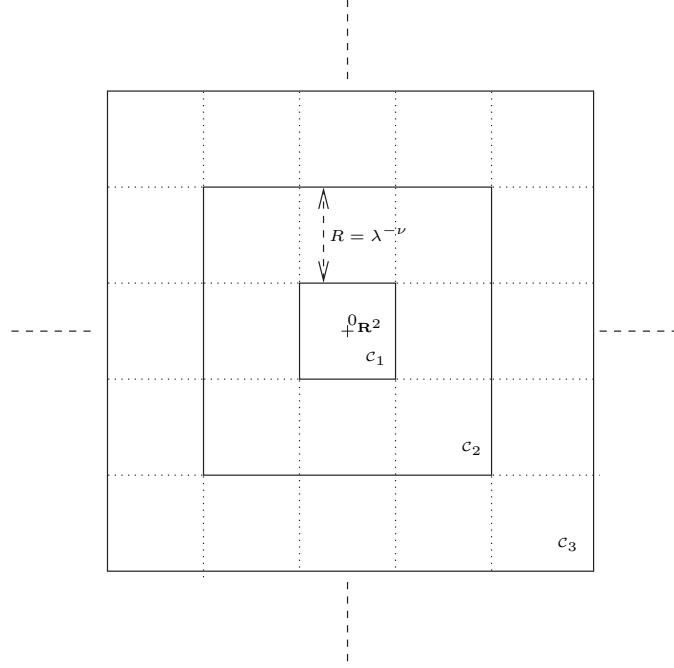


FIG. 3.1 – Recouvrement de \mathbb{R}^2 par des carrés de même taille

Pour tout $\lambda \in]0; \lambda_0[$, on a ainsi

$$N(-\Delta_B - B - V < -\lambda) \geq \sum_{\substack{j,p \\ j \geq 2}} N_D(-\Delta_B - B - V < -\lambda; Q_{j,p}).$$

- Pour alléger les notations, on introduit les notations suivantes : $\alpha = (j, p)$, $H(B, V) = -\Delta_B - B - V$ et $I_{V,\varepsilon,\lambda} = \left\{ \alpha : \overset{\circ}{Q}_\alpha \cap \{V > (1+4\varepsilon)\lambda\} \neq \emptyset \right\}$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $\alpha \in I_{V,\varepsilon,\lambda}$, il existe $(y_{\alpha,\varepsilon}, z_{\alpha,\varepsilon}) \in \left(\overset{\circ}{Q}_\alpha\right)^2$ tel que

$$V(z_{\alpha,\varepsilon}) > (1+4\varepsilon)\lambda \quad \text{et} \quad \int_{Q_\alpha \cap \{V > (1+4\varepsilon)\lambda\}} B(x) dx = \mu(Q_\alpha \cap \{V > (1+4\varepsilon)\lambda\}) B(y_{\alpha,\varepsilon}).$$

Pour la suite, on note $V_{\alpha,\varepsilon} = V(z_{\alpha,\varepsilon})$ et $B_{\alpha,\varepsilon} = B(y_{\alpha,\varepsilon})$.
 Au sens des formes quadratiques, on a

$$H_\alpha(B, 0) \leq 2H_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, 0) + 2|E_{\alpha,\varepsilon}(B)|^2$$

où $E_{\alpha,\varepsilon}(B)$ représente l'erreur commise en approximant le champ B sur Q_α par la constante $B_{\alpha,\varepsilon}$.

En notant de même $E_{\alpha,\varepsilon}(V)$, on a au sens des formes quadratiques

$$\begin{aligned} H_\alpha(B, V) &\leq H_\alpha(B, 0) - V_{\alpha,\varepsilon} + |E_{\alpha,\varepsilon}(V)| \\ \text{et donc } H_\alpha(B, V) &\leq 2H_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, 0) + 2|E_{\alpha,\varepsilon}(B)|^2 - V_{\alpha,\varepsilon} + |E_{\alpha,\varepsilon}(V)|. \end{aligned}$$

On minore alors $N_D(H_\alpha(B, V) < -\lambda; Q_\alpha)$ par

$$N_D\left(H_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, 0) < \frac{V_{\alpha,\varepsilon} - |E_{\alpha,\varepsilon}(V)| - \lambda}{2} - |E_{\alpha,\varepsilon}(B)|^2; Q_\alpha\right).$$

D'après la définition¹ des erreurs relatives $E_{\alpha,\varepsilon}(\cdot)$ et les hypothèses $(\mathcal{H}_{B,d})$, $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$, on a

$$\begin{aligned} |E_{\alpha,\varepsilon}(V)| &\leq c_1 R \cdot \sup_{Q_\alpha} |\nabla V| & \text{et } |E_{\alpha,\varepsilon}(B)| &\leq c_2 R^2 \cdot \sup_{Q_\alpha} |\nabla B| \\ |E_{\alpha,\varepsilon}(V)| &\leq C_1 \lambda^{-\nu} (j \lambda^{-\nu})^{-\gamma-1} & |E_{\alpha,\varepsilon}(B)|^2 &\leq C_2 \lambda^{-4\nu} (j \lambda^{-\nu})^{2(d-1)} \\ |E_{\alpha,\varepsilon}(V)| &\leq C_1 j^{-\gamma-1} \lambda^{\gamma\nu} & |E_{\alpha,\varepsilon}(B)|^2 &\leq C_2 \lambda^{-2\nu(d+1)} j^{2(d-1)}. \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités suivantes

$$\frac{1 + 2\nu(d+1)}{1-d} > \frac{1 + (d+1)}{1-d} > \frac{2}{1-d} > 2 \quad \text{et} \quad \frac{2(1-\gamma\nu)}{1+\gamma} < \frac{2-\gamma}{1+\gamma} < 2,$$

on obtient $\frac{2(1-\gamma\nu)}{1+\gamma} < \frac{1+2\nu(d+1)}{1-d}$.

On pose $J_\varepsilon(\lambda) := E\left(C_2^{\frac{1}{2(1-d)}} \varepsilon^{-\frac{1}{2(1-d)}} \lambda^{-\frac{1+2\nu(1+d)}{2(1-d)}}\right) + 1$.

Pour $j \geq J_\varepsilon(\lambda)$, on a $\max\left[|E_{\alpha,\varepsilon}(B)|^2; |E_{\alpha,\varepsilon}(V)|\right] \leq \varepsilon\lambda$.

D'après le Théorème 1.9, pour tout $\mu \in]0; \frac{1}{2}[$, on a :

$$\begin{aligned} N_D(H_\alpha(B, V) < -\lambda; Q_\alpha) &\geq \\ \frac{(1-\mu)^2}{2\pi} B_{\alpha,\varepsilon} \lambda^{-2\nu} T &\left(1 + \frac{V_{\alpha,\varepsilon} - (1+3\varepsilon)\lambda}{2B_{\alpha,\varepsilon}} - \frac{C_0 \lambda^{2\nu}}{\mu^2 B_{\alpha,\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Comme $2\nu < 1$, il existe $\tilde{\lambda}_\varepsilon^0 \in]0; \lambda_0[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon^0[$, $\frac{2C_0 \lambda^{2\nu}}{\mu^2} \leq \varepsilon\lambda$.
 Avec $\mu = \varepsilon$, on obtient

$$N_D(H_\alpha(B, V) < -\lambda; Q_\alpha) \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\pi} B_{\alpha,\varepsilon} \lambda^{-2\nu} T\left(1 + \frac{V_{\alpha,\varepsilon} - (1+4\varepsilon)\lambda}{2B_{\alpha,\varepsilon}}\right).$$

¹Voir la démonstration de la Proposition 1.8 (minoration - étape 2).

Par le choix des points $z_{\alpha,\varepsilon}$, $T\left(1 + \frac{V_{\alpha,\varepsilon} - (1+4\varepsilon)\lambda}{2B_{\alpha,\varepsilon}}\right) \geq 1$. Ainsi pour $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon^0[$,

$$\begin{aligned} N_D(H_\alpha(B, V) < -\lambda; Q_\alpha) &\geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\pi} B_{\alpha,\varepsilon} \mu(Q_\alpha) \\ &\leq \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\pi} B_{\alpha,\varepsilon} \mu(Q_\alpha \cap \{V > (1+4\varepsilon)\lambda\}). \end{aligned}$$

D'après le choix de $y_{\alpha,\varepsilon}$, on obtient

$$N_D(H_\alpha(B, V) < -\lambda; Q_\alpha) \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\pi} \int_{Q_\alpha \cap \{V > (1+4\varepsilon)\lambda\}} B(x) dx.$$

En notant $\mathcal{C}(\varepsilon, \lambda) := \bigcup_{j \leq J_\varepsilon(\lambda)} \mathcal{C}_j$, on a donc pour tout $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon^0[$,

$$\sum_{j \geq j_\varepsilon(\lambda)} N_D(H_\alpha(B, V) < -\lambda; Q_\alpha) \geq \frac{(1-\varepsilon)^2}{2\pi} \int_{\{V > (1+4\varepsilon)\lambda\} \setminus \mathcal{C}(\varepsilon, \lambda)} B(x) dx.$$

On a les inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}(\varepsilon, \lambda)} B(x) dx &\leq b_+ \int_{|x| \leq 2J_\varepsilon(\lambda)\lambda^{-\nu}} \langle x \rangle^d dx \leq c_4 \lambda^{-\nu(d+2)} J_\varepsilon(\lambda)^{d+2} \\ \int_{V > (1+4\varepsilon)\lambda} B(x) dx &\geq b_- \int_{V > (1+4\varepsilon)\lambda} \langle x \rangle^d dx \geq c_5 \lambda^{-\frac{d+2}{\gamma}}. \end{aligned}$$

De plus, on a les équivalences suivantes (à prendre quand $\lambda \downarrow 0$) :

$$\begin{aligned} \lambda^{-\nu(d+2)} J_\varepsilon(\lambda)^{d+2} = o\left(\lambda^{-\frac{d+2}{\gamma}}\right) &\iff \lambda^{-\nu(d+2)} \lambda^{-(1+2\nu(1+d))\frac{d+2}{2(1-d)}} = o\left(\lambda^{-\frac{d+2}{\gamma}}\right) \\ &\iff \frac{(d+2)[2\nu(1-d)+1+2\nu(1+d)]}{2(1-d)} < \frac{d+2}{\gamma} \iff (d+2)(1+4\nu) < \frac{(1-d)(d+2)}{\gamma} \\ &\iff 1+4\nu < \frac{1-d}{\gamma}. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\tilde{\lambda}_\varepsilon^1 \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon^0[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon^1[$:

$$\int_{\mathcal{C}(\varepsilon, \lambda)} B(x) dx \leq \varepsilon \int_{V > (1+4\varepsilon)\lambda} B(x) dx.$$

D'après (3.1), on en déduit que pour tout $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon^1[$,

$$N(H(B, V) < -\lambda) \geq \frac{1-2\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1+4\varepsilon)\lambda} B(x) dx.$$

Quitte à changer ε en $\frac{\varepsilon}{4}$, on aboutit à la minoration désirée.

Majoration de $N(-\Delta_B - B - V < -\lambda)$:

Soit $\varepsilon \in]0; 1[$.

On dilate un peu les carrés $Q_{j,p}$ pour obtenir les carrés $\tilde{Q}_{j,p}$:

$\tilde{Q}_{j,p}$ est centré en $x_{j,p}$ et de longueur de côté $(1 + \varepsilon)R$.

On utilise une partition de l'unité $(\varphi_{j,p})_{j,p}$, associée au recouvrement $(Q_{j,p})_{j,p}$ utilisé lors de la minoration : $\varphi_{j,p} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\text{supp}(\varphi_{j,p}) \subset \tilde{Q}_{j,p}$, avec $0 \leq \varphi_{j,p} \leq 1$, $\varphi_{j,p} = 1$ sur $Q_{j,p}$ et $\sum_{j,p} \varphi_{j,p}^2 = 1$.

La relation IMS donne alors

$$H(B, V) = \sum_{j,p} \varphi_{j,p} (H(B, V) - \Phi) \varphi_{j,p} \quad \text{où } \Phi := \sum_{k,q} |\nabla \varphi_{k,q}|^2.$$

Le Lemme 1.10 assure alors la majoration suivante

$$N(H(B, V) < -\lambda) \leq \sum_{j,p} N_D \left(\tilde{H}_{j,p}(B, V) - \Phi < -\lambda; \tilde{Q}_{j,p} \right). \quad (3.2)$$

Il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout j, p , on ait

$$\sup_{\tilde{Q}_{j,p}} |\Phi| \leq C_\varepsilon \lambda^{2\nu}. \quad (3.3)$$

Comme $2\nu > 1$, il existe $\lambda_\varepsilon^0 > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon^0[$, pour tout p :

$$\sup_{\tilde{Q}_{j,p}} |\Phi| \leq \frac{1}{2} \lambda.$$

On pose $J_{0,\varepsilon}(\lambda) := E \left(2^{\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2}} \lambda^{\nu - \frac{1}{\gamma}} \right) + 1$. Pour tout $j \geq J_{0,\varepsilon}(\lambda)$, on obtient $\sup_{\tilde{Q}_{j,p}} |V(x)| < \frac{1}{2} \lambda$.

Donc pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon^0[$ et tout $j \geq J_{0,\varepsilon}(\lambda)$, on a $N_D(H(B, V) - \Phi < -\lambda) = 0$. Ainsi la somme (3.2) est finie pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon^0[$:

$$N(H(B, V) < -\lambda) \leq \sum_{\substack{j,p \\ j \leq J_{0,\varepsilon}(\lambda)}} N_D \left(\tilde{H}_{j,p}(B, V) - \Phi < -\lambda; \tilde{Q}_{j,p} \right).$$

D'après (3.1) et (3.3), il existe $\lambda_\varepsilon^1 \in]0; \lambda_\varepsilon^0[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon^1[$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\Phi(x)| \leq \varepsilon \lambda.$$

Pour ne pas alourdir les notations, on va poser $\alpha = (j, p)$ et définir l'ensemble $J_{V,\varepsilon,\lambda} = \left\{ \alpha : \overset{\circ}{Q}_\alpha \cap \{V > (1 - 4\varepsilon)\lambda\} \neq \emptyset \right\}$.

Pour tout $\alpha \in J_{V,\varepsilon,\lambda}$, il existe $(y_{\alpha,\varepsilon}, z_{\alpha,\varepsilon}) \in \left(\overset{\circ}{Q}_\alpha \right)^2$ tel que

$$V(z_{\alpha,\varepsilon}) > (1 - 4\varepsilon)\lambda \quad \text{et} \quad \mu(Q_\alpha) B(y_{\alpha,\varepsilon}) = \int_{Q_\alpha} B(x) dx.$$

Pour la suite, on note $V_{\alpha,\varepsilon} = V(z_{\alpha,\varepsilon})$ et $B_{\alpha,\varepsilon} = B(y_{\alpha,\varepsilon})$.
Au sens des formes quadratiques, on a

$$\tilde{H}_\alpha(B, 0) \geq (1 - \varepsilon)\tilde{H}_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, 0) + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(B) \right|^2$$

où $\tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(B)$ est un potentiel magnétique associé à $B - B_{\alpha,\varepsilon}$.
On a donc

$$\tilde{H}_\alpha(B, V) \geq (1 - \varepsilon)\tilde{H}_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, V_{\alpha,\varepsilon}) + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(B) \right|^2 - \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(V) \right| - \Phi.$$

D'après les définitions des erreurs relatives $\tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}$, on a :

$$\begin{aligned} \sup_{\tilde{Q}_\alpha} \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(V) \right| &\leq c_1(1 + \varepsilon)R \cdot \sup_{\tilde{Q}_\alpha} |\nabla V| \\ \text{et} \quad \sup_{\tilde{Q}_\alpha} \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(B) \right| &\leq c_2(1 + \varepsilon)^2 R^2 \cdot \sup_{\tilde{Q}_\alpha} |\nabla B|. \end{aligned}$$

Donc il existe $\tilde{c}_{1,\varepsilon} > 0$ et $\tilde{c}_{2,\varepsilon} > 0$ tels que pour tout $\lambda \in]0, \lambda_\varepsilon^1[$:

$$\left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(V) \right| \leq \tilde{c}_{1,\varepsilon} j^{-\gamma-1} \lambda^{\gamma\nu} \quad \text{et} \quad \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(B) \right|^2 \leq \tilde{c}_{2,\varepsilon} j^{2(d-1)} \lambda^{-2\nu(d+1)}.$$

On pose $J_{1,\varepsilon}(\lambda) := E \left(\tilde{c}_{2,\varepsilon}^{\frac{1}{2(1-d)}} (\varepsilon^2)^{-\frac{1}{2(1-d)}} \lambda^{-\frac{1+2\nu(1+d)}{2(1-d)}} \right) + 1$.

Ainsi pour tout $j \geq J_{1,\varepsilon}(\lambda)$, on a :

$$\sup_{\tilde{Q}_\alpha} \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(B) \right| \leq \varepsilon^2 \lambda \quad \sup_{\tilde{Q}_\alpha} \left| \tilde{E}_{\alpha,\varepsilon}(V) \right| \leq \varepsilon(1 - \varepsilon)\lambda \quad \sup_{\tilde{Q}_\alpha} |\Phi| \leq \varepsilon(1 - \varepsilon)\lambda$$

et donc pour tout $j \geq J_{1,\varepsilon}(\lambda)$:

$$\begin{aligned} N_D \left(\tilde{H}_\alpha(B, V) - \Phi < -\lambda; \tilde{Q}_\alpha \right) &\leq N_D \left(\tilde{H}_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, V_{\alpha,\varepsilon}) < -\left(\frac{1}{1-\varepsilon} - 3\varepsilon\right)\lambda; \tilde{Q}_{j,p} \right) \\ &\leq N_D \left(\tilde{H}_\alpha(B_{\alpha,\varepsilon}, V_{\alpha,\varepsilon}) < -(1-4\varepsilon)\lambda; \tilde{Q}_\alpha \right). \end{aligned}$$

En appliquant le Théorème 1.9, on obtient pour tout $\alpha \in \mathcal{J}_{V,\varepsilon,\lambda}$:

$$\begin{aligned} N_D \left(\tilde{H}_\alpha(B, V) - \Phi < -\lambda; \tilde{Q}_\alpha \right) &\leq \frac{1}{2\pi} \mu(\tilde{Q}_\alpha) B_{\alpha,\varepsilon} T \left(1 + \frac{V_{\alpha,\varepsilon} - (1-4\varepsilon)\lambda}{B_{\alpha,\varepsilon}} \right) \\ &= \frac{(1 + \varepsilon)^2}{2\pi} \mu(Q_\alpha) B_{\alpha,\varepsilon} \\ &\leq \frac{(1 + \varepsilon)^2}{2\pi} \int_{Q_\alpha} B(x) dx. \end{aligned}$$

Comme lors de la minoration, on obtient pour tout $\lambda \in]0, \lambda_\varepsilon^1[$:

$$\sum_{\substack{\alpha \\ J_{1,\varepsilon}(\lambda) \leq j \leq J_{0,\varepsilon}(\lambda)}} N_D \left(\tilde{H}_\alpha(B, V) - \Phi < -\lambda; \tilde{Q}_\alpha \right) \leq \frac{(1 + \varepsilon)^2}{2\pi} \int_{V > (1-4\varepsilon)\lambda} B(x) dx.$$

On conclut de même en montrant que pour $\lambda \downarrow 0$:

$$\sum_{j < J_{1,\varepsilon}^\alpha(\lambda)} N_D(\tilde{H}_\alpha(B, V) - \Phi < -\lambda; \tilde{Q}_\alpha) = o\left(\int_{V > (1-4\varepsilon)\lambda} B(x) dx\right).$$

Ainsi il existe $\lambda_\varepsilon^2 \in]0; \lambda_\varepsilon^1[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon^2[$:

$$N(H(B, V) < -\lambda) \leq \frac{1+4\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1-4\varepsilon)\lambda} B(x) dx.$$

Ceci achève la preuve. \square

3.1.2 Etude pour des V_1 à décroissance polynomiale forte

Il reste à étendre ce résultat à tous les potentiels V_1 vérifiant $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$ sans restriction sur le degré de décroissance γ . Pour y parvenir, on va exprimer la quantité $N(-\Delta_B - B - V_1 < -\lambda)$ en fonction des opérateurs compacts PV_1P à l'aide du résultat suivant, établi par G.D. Raikov, [[42], Prop 3.1], pour des champs magnétiques admissibles de moyenne non nulle :

Lemme 3.4. [[42]]

Soient $\varepsilon \in]0; 1[$, $d \in]0; 1[$ et $\gamma > 0$.

Si B et V vérifient respectivement $(\mathcal{H}_{B,d})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$, alors il existe $C_\varepsilon > 0$ et $\lambda_\varepsilon > 0$ tels que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$

$$n_+(\lambda, PVP) \leq N(-\Delta_B - B - V < -\lambda) \leq n_+((1-\varepsilon)\lambda, PVP) + C_\varepsilon.$$

Ici, P est toujours la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur le noyau de D_B , i.e. sur le noyau de $-\Delta_B - B$.

Ainsi l'addition de ce lemme et du Lemme 3.3 permet d'obtenir l'encadrement suivant pour $\gamma \in]0; \frac{1-d}{3}[$ et il existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$:

$$\frac{1-2\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1+2\varepsilon)\lambda} B(x) dx \leq n_+(\lambda, PVP) \leq \frac{1+2\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1-2\varepsilon)\lambda} B(x) dx \quad (3.4)$$

Ensuite, on fait intervenir la section 2.2 de [28] en appliquant [[28], Prop 2.3] et [[28], Lemme 2.4] pour des champs magnétiques à croissance faible. Ainsi on peut encadrer $n_+(\lambda^2, (PVP)^2)$ à l'aide de $n_+(\lambda^2, PV^2P)$, et obtenir la formule quasi-classique : en effet, on obtient alors les mêmes inégalités que (3.4) pour $\gamma \in]0; \frac{2(1-d)}{3}[$, quitte à remplacer ε par 2ε . En itérant ce procédé, on obtient le résultat suivant :

Lemme 3.5.

Soient $d \in]0; 1[$, $\gamma > 0$, B et V vérifiant respectivement $(\mathcal{H}_{B,d})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$. Alors pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$, il existe $\lambda_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$:

$$\frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1+\varepsilon)\lambda} B(x) dx \leq n_+(\lambda, PVP) \leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{V > (1-\varepsilon)\lambda} B(x) dx.$$

3.1.3 Application à l'opérateur de Dirac

Ayant obtenu un encadrement de $n_+(\lambda, PV_1P)$, on va appliquer la Proposition 2.1. En effet, les potentiels W_ε^+ et $|V_1|$ ont le même comportement à l'infini que V_1 , à savoir qu'il existe un compact K_0 et $\lambda_\varepsilon > 0$ tels que pour $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$

$$\begin{aligned} \{(1-2\varepsilon)V_1 > \lambda\} \cap {}^c K_0 &\subset \{W_\varepsilon^+ > \lambda\} \\ \{|V_1| > \lambda\} &\subset \{V_1 > \lambda\} \cup K_0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\tilde{\lambda}_\varepsilon \in]0; \lambda_\varepsilon[$ tel que pour $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon[$, on a :

$$\begin{aligned} n_+(\lambda, P|V_1|P) &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{|V_1| > (1-\varepsilon)\lambda} B(x) dx \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{V_1 > (1-\varepsilon)\lambda} B(x) dx + \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{K_0} B(x) dx \\ \text{et } n_+(\lambda, PW_\varepsilon^+P) &\geq \frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{W_\varepsilon^+ > (1+\varepsilon)\lambda} B(x) dx \\ &\geq \frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{V_1 > (1+\varepsilon)\lambda} B(x) dx - \frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{K_0} B(x) dx. \end{aligned}$$

Donc il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \tilde{\lambda}_\varepsilon[$:

$$\begin{aligned} \frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{V_1 > (1+\varepsilon)\lambda} B(x) dx - C_\varepsilon &\leq N(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \\ N(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) &\leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{V_1 > (1-\varepsilon)\lambda} B(x) dx + C_\varepsilon. \end{aligned}$$

On aboutit donc au résultat suivant :

Lemme 3.6.

Soient $d \in]0; 1[$, $\gamma > 0$, $\delta \in]0; 1[$.

Si B et V_1 vérifient respectivement $(\mathcal{H}_{B,d})$ et $(\mathcal{H}_{V,\gamma})$, alors il existe $C_\delta > 0$ et $\lambda_\delta > 0$ tels que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\delta[$:

$$\frac{1-\varepsilon}{2\pi} \int_{V_1 > (1+\varepsilon)\lambda} B(x) dx \leq N(\Lambda, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \leq \frac{1+\varepsilon}{2\pi} \int_{V_1 > (1-\varepsilon)\lambda} B(x) dx.$$

Après avoir encadré les intégrales $\int_{V_1 > (1 \pm \varepsilon)\lambda} B(x) dx$ à l'aide de $\int_{V_1 > \lambda} B(x) dx$,

on en déduit la Proposition 3.1.

3.2 Champ magnétique à croissance forte

Pour donner une asymptotique relative à de tels champs magnétiques, on va travailler sur les opérateurs compacts PVP . En effet, on vient d'étendre le résultat du Lemme 3.3 à tous les potentiels électriques à décroissance polynomiale en étant amené à comparer les quantités $n_+(\lambda, PVP)$ et $n_+(\lambda^2, PV^2P)$. On peut alors se poser la question de comparer de tels opérateurs non plus en modifiant le potentiel électrique mais en augmentant le degré du champ magnétique étudié. Ce sera l'idée de base pour obtenir un résultat avec des degrés de B qui sont supérieurs à 1.

Démonstration du Théorème 3.2.

On s'attache au cas où $k \geq 2$ (le cas $k = 1$ correspondant à l'étude faite à la section précédente).

D'après l'hypothèse $(\mathcal{H}_{B,d,k})$, il existe un champ \tilde{B}_k vérifiant $(\mathcal{H}_{B,\tilde{d}})$ tel que $B(\rho, \theta) = k^2 \tilde{B}_k(\rho^k, k\theta) \rho^{2(k-1)}$ et $\tilde{d} = \frac{d-2(k-1)}{k} \in [0; 1[$.

Utilisant la $\frac{2\pi}{k}$ -périodicité de φ , on définit la fonction Ψ_k sur $(0; +\infty) \times (0; 2\pi)$ par

$$\Psi_k(\rho, \theta) = \varphi(\rho^{\frac{1}{k}}, \frac{\theta}{k}).$$

C'est une solution de l'équation $\Delta \Psi_k = \tilde{B}_k$.

Pour commencer, on va revenir à la définition des quantités $n_+(\lambda, PVP)$ et utiliser le résultat suivant

$$\forall f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \exists ! g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, f(z) = z^{-\frac{1}{k}} g\left(z^{\frac{1}{k}}\right).$$

L'existence d'une telle fonction g holomorphe est donnée par la relation $g(y) = yf(y^k)$ valable pour tout $y \in \mathbb{C}$. Quant à l'unicité, elle découle de l'application du Principe du Prolongement Analytique.

On remarque que $f(z)$ est un élément de $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\Psi_k})$ si et seulement si $z^{k-2}g(z)$ est dans $\mathcal{HL}^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi})$. De plus, en notant par g_j l'unique fonction holomorphe associée à f_j , on obtient que la dimension de chacun des sous-espaces $\text{Vect}(f_j : 1 \leq j \leq N)$, $\text{Vect}(z^{k-2}g_j : 1 \leq j \leq N)$ et $\text{Vect}(g_j : 1 \leq j \leq N)$ est la même.

Par conséquent, en notant P et P_k les projections orthogonales de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur $\text{Ker}(D_B)$, resp. $\text{Ker}(D_{\tilde{B}_k})$, et W_k la fonction définie sur $(0; 2\pi)$ par

$W_k(\rho, \theta) = V_1 \left(\rho^{\frac{1}{k}}, \frac{\theta}{k} \right)$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
n_+(\lambda, P_k W_k P_k) &= \max\{\dim(F) : F \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\Psi_k}), \forall f \in F \\
&\quad \langle W_k f e^{-\Psi_k}, f e^{-\Psi_k} \rangle < \lambda \|f e^{-\Psi_k}\|^2\} \\
&= \max\{\dim(G) : G \subset \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}), \forall g \in G \\
&\quad \langle V_1 z^{k-2} g e^{-\varphi}, z^{k-2} g e^{-\varphi} \rangle < \lambda \|z^{k-2} g e^{-\varphi}\|^2\} \\
&= \max\{\dim(G) : G \subset z^{k-2} \mathcal{H}L^2(\mathbb{C}, e^{-2\varphi}), \forall g \in G \\
&\quad \langle V_1 g e^{-\varphi}, g e^{-\varphi} \rangle < \lambda \|g e^{-\varphi}\|^2\}.
\end{aligned}$$

On va noter $n_+(\lambda; k)$ le membre de droite de la dernière égalité.

Or toute fonction holomorphe s'écrivant de manière unique $f(z) = f_0(z) + z^{k-2} f_1(z)$ où $f_0(z)$ est un polynôme de degré au plus $k-3$ et $f_1(z)$ une fonction holomorphe, on obtient l'encadrement suivant

$$n_+(\lambda, P V_1 P) - (k-2) \leq n_+(\lambda; k) \leq n_+(\lambda, P V_1 P).$$

Ainsi $n_+(\lambda, P V_1 P) - (k-2) \leq n_+(\lambda, P_k W_k P_k) \leq n_+(\lambda, P V_1 P)$.

Appliquant le résultat du paragraphe précédent, on en déduit l'asymptotique désirée pour un potentiel $V_1 \frac{2\pi}{k}$ -périodique. \square

Chapitre 4

Résonances en dimension trois

Ce chapitre est consacré à l'étude des résonances pour l'opérateur de Dirac, en dimension 3, avec un champ magnétique constant. Le problème des résonances pour l'opérateur de Dirac a déjà été étudié dans les travaux de B. Parisse dans [37] et [38], en limite semi-classique, dans [4] de E. Balslev et B. Helffer avec des potentiels électriques et magnétiques à courte portée pour le principe d'absorption limite. Quant à P. Seba, il a utilisé la méthode de dilatation analytique usuelle pour l'opérateur de Dirac sans champ magnétique dans [49]. Dans [1], L. Amour, R. Brummelhuis et J. Nourrigat ont étudié les résonances en limite non relativiste de l'opérateur de Dirac tridimensionnel sans champ magnétique et avec un potentiel électrique V à croissance polynomiale en $|x|$. Après une dilatation analytique effectuée dans la direction de B , dans [54], X.P. Wang a étudié les résonances de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique constant porté par l'axe (Ox_3) et obtenu l'existence de résonances de forme créées par la barrière du potentiel électrique. Dans [5], J-F. Bony, V. Bruneau et G. Raikov ont défini les résonances pour l'opérateur de Schrödinger tridimensionnel avec un champ magnétique constant B à l'aide d'un prolongement de la résolvante à partir du demi-plan complexe supérieur et étudié ces dernières près des niveaux de Landau pour un potentiel V à décroissance polynomiale en les variables x_1 et x_2 et à décroissance exponentiellement rapide en x_3 .

On utilise ici la dilatation analytique dans la direction du champ magnétique pour étudier les résonances de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique constant.

4.1 Introduction

On considère un champ magnétique constant porté par la troisième composante, $\mathbf{B}(x) = (0; 0; B)$, et $\mathbf{A}(x) = (-\frac{B}{2}x_2; \frac{B}{2}x_1; 0)$ un potentiel magnétique

associé. On supposera $B > 0$.

L'opérateur de Dirac à champ magnétique \mathbf{B} se définit par

$$P_0 = \sum_{k=1}^3 \alpha_k (D_k - \mathbf{A}_k(x)) + \alpha_4$$

où l'on rappelle que les *matrices de Dirac* α_k vérifient

$$\alpha_k \alpha_l + \alpha_l \alpha_k = 2\delta_{k,l} I_4 \quad \text{pour } (k, l) \in \{1; 2; 3\}^2. \quad (4.1)$$

L'opérateur P_0 est essentiellement auto-adjoint à partir de $C_0^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$, on note encore P_0 son extension auto-adjointe. On sait¹ que le spectre de P_0 est donné par

$$\sigma(P_0) = \sigma_{ess}(P_0) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[.$$

On perturbe P_0 par un potentiel réel P_0 -compact, à savoir l'opérateur de multiplication par un potentiel électrique $\mathbb{V} = V(x) \cdot Id$:

$$P = P_0 + \mathbb{V}.$$

L'opérateur \mathbb{V} étant P_0 -compact, on a $\mathcal{D}(P_0) = \mathcal{D}(P)$ et d'après le Théorème de Weyl, $\sigma_{ess}(P) = \sigma_{ess}(P_0) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

On va effectuer une dilatation analytique en la variable x_3 . Pour θ réel, cette transformation correspond à la conjugaison de P par U_θ , l'opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ défini par

$$U_\theta F(x) := e^{-\frac{\theta}{2}} F(x_1, x_2, e^{-\theta} x_3),$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} P_0(\theta) &:= U_\theta^{-1} P_0 U_\theta = U_{-\theta} P_0 U_\theta \\ &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k (D_k - \mathbf{A}_k(x)) + \alpha_3 (e^{-\theta} D_3) + \alpha_4. \end{aligned}$$

On remarque que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'opérateur U_α est unitaire sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ et on a $U_\alpha^* = U_\alpha^{-1} = U_{-\alpha}$. On va travailler avec V dans une classe de potentiels analytiques par dilatation, à savoir que l'on suppose que V est une fonction réelle telle que

- $\mathcal{D}(P_0) \subset \mathcal{D}(\mathbb{V})$.
- $\mathbb{V} (P_0 + i)^{-1}$ est un opérateur compact.
- la fonction $\theta \mapsto V_\theta(x) := U_\theta^{-1} V(x) U_\theta = V(x_1, x_2, e^\theta x_3)$ définie (4.2) pour $\theta \in \mathbb{R}$ se prolonge en une fonction holomorphe en la variable $\theta \in \{z \in \mathbb{C} : |\Im \theta| < \frac{\pi}{4}\}$ à valeurs opérateurs P_0 -compact.

¹Voir par exemple [53].

On note pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$P(\theta) := U_\theta^{-1} P U_\theta = P_0(\theta) + V_\theta I_4 \quad (4.3)$$

$P(\theta)$ se prolonge d'une manière naturelle en une famille d'opérateurs pour $\theta \in \{z \in \mathbb{C} : |\Im \theta| < \frac{\pi}{4}\}$. On remarque que le domaine de définition de $P(\theta)$ est indépendant de θ et on a

$$\mathcal{D}(P(\theta)) = \mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(P_0) \subset \mathbf{H}_{loc}^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4).$$

Le but du second paragraphe est d'étudier les éléments du spectre discret de $P(\theta)$ et de définir les résonances de P . Pour cela, on localise d'abord le spectre essentiel de $P(\theta)$,

$$\sigma_{ess}(P(\theta)) = \bigcup_{\substack{q \geq 0 \\ \varepsilon \in \{+1; -1\}}} \left\{ \varepsilon \sqrt{1 + 2Bq + e^{-2\theta} t^2} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On montre ensuite que la famille $(P(\theta))_\theta$ est holomorphe au sens de Kato, on obtient que $\sigma_d(P(\theta))$ est "localement indépendant" de θ (dans le sens de la Proposition 4.4).

Dans le troisième paragraphe, on introduit un paramètre de charge Z négligeable devant \sqrt{B} . Après avoir remplacé V par ZV , on effectue le changement de coordonnées symplectiques correspondant à \mathbf{W}_B (voir ci-dessous pour sa définition) pour obtenir l'opérateur $P(B, Z; \theta)$. Grâce à la méthode de Grushin, on étudie le spectre discret de $P(B, Z; \theta)$, près des niveaux de Landau-Dirac Λ_q^+ et Λ_q^- , à l'aide d'un hamiltonien effectif. On commencera par le cas des deux premiers niveaux de Landau-Dirac ($q=0$) [section 4.3.1] avant de s'intéresser aux autres couples $(\Lambda_q^+, \Lambda_q^-)$ pour $q \geq 1$ [section 4.3.2]. Dans ce paragraphe 4.3, on travaillera avec des opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$. On rappelle que $a(x, \xi)$ est dit "symbole de Weyl" de T si

$$Tf(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \iint_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) f(y) dy d\xi$$

pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}^m)$. On notera alors $T = a^W(x, D_x)$.

4.2 Définition des résonances

Pour obtenir une localisation de $\sigma(P_0(\theta))$, on va simplifier les calculs en effectuant un changement de coordonnées symplectiques bien choisi. Ce dernier définit, sur les symboles des opérateurs pseudodifférentiels, le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x_1 \mapsto x_1 - \frac{1}{\sqrt{B}} \xi_2 & \xi_1 \mapsto \frac{\sqrt{B}}{2} x_2 + \frac{1}{2} \xi_1 \\ x_2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{B}} x_2 - \frac{1}{B} \xi_1 & \xi_2 \mapsto \frac{B}{2} x_1 + \frac{\sqrt{B}}{2} \xi_2 \\ x_3 \mapsto x_3 & \xi_3 \mapsto \xi_3 \end{cases}$$

Ceci correspond à la conjugaison par la transformation unitaire

$$\mathbf{W}_B = \mathcal{W}_B \cdot I_4 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$$

cet opérateur n'agit pas sur la variable x_3 et plus précisément, pour $f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ et $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\left(\mathbf{W}_B f\right)_j(x) = \left(\mathcal{W}_B f_j\right)(x) := \frac{B^{\frac{3}{4}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i\varphi_B(x_1, x_2; y_1, y_2)} f_j(y_1, y_2, x_3) dy_1 dy_2$$

avec $\varphi_B(x_1, x_2; y_1, y_2) := -\frac{B}{2}x_1x_2 + By_1x_2 + \sqrt{B}x_1y_2 - \sqrt{B}y_1y_2$.

On transforme alors respectivement les opérateurs $D_1 + \frac{B}{2}x_2$ et $D_2 - \frac{B}{2}x_1$ en $\sqrt{B}x_2$ et $\sqrt{B}D_2$:

$$\mathcal{W}_B^* \left(D_1 + \frac{B}{2}x_2 \right) \mathcal{W}_B = \sqrt{B}x_2 \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_B^* \left(D_2 - \frac{B}{2}x_1 \right) \mathcal{W}_B = \sqrt{B}D_2.$$

Ainsi cette transformation unitaire change $P_0(\theta)$ et $P(\theta)$ en :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0(\theta) &= \mathbf{W}_B^* \left(P_0(\theta) \right) \mathbf{W}_B \\ &= \alpha_1 \left(\sqrt{B}x_2 \right) + \alpha_2 \left(\sqrt{B}D_2 \right) + \alpha_4 + \alpha_3 \left(e^{-\theta} D_3 \right) \\ \text{et } \tilde{P}(\theta) &= \mathbf{W}_B^* \left(P_0(\theta) + V_\theta \cdot I_4 \right) \mathbf{W}_B \\ &= \tilde{P}_0(\theta) + V^W \left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{B}}D_2, \frac{1}{\sqrt{B}}x_2 - \frac{1}{B}D_1, e^\theta x_3 \right) \cdot I_4 \end{aligned}$$

où $V^W \left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{B}}D_2, \frac{1}{\sqrt{B}}x_2 - \frac{1}{B}D_1, e^\theta x_3 \right)$ est l'opérateur pseudodifférentiel de symbole de Weyl $V \left(x_1 - \frac{1}{\sqrt{B}}\xi_2, \frac{1}{\sqrt{B}}x_2 - \frac{1}{B}\xi_1, e^\theta x_3 \right)$.

On obtient une nouvelle écriture de l'opérateur $\tilde{P}_0(\theta)$ grâce à la décomposition de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ en produit tensoriel $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2, \mathbb{C}) \otimes \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}, \mathbb{C}^4)$:

$$\tilde{P}_0(\theta) = Id_{x_1, x_3} \otimes H_2 + \left(e^{-\theta} D_3 \right) \otimes \alpha_3 Id_{x_2}$$

où $H_2 := \alpha_1 \left(\sqrt{B}x_2 \right) + \alpha_2 \left(\sqrt{B}D_2 \right) + \alpha_4$ est un opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}, \mathbb{C}^4)$.

En étudiant le spectre de H_2 , on peut obtenir le résultat suivant :

Lemme 4.1. *Le spectre de l'opérateur H_2 est purement ponctuel, constitué de valeurs propres de multiplicité finie, isolées : les niveaux de Landau-Dirac*

$$\sigma(H_2) = \sigma_d(H_2) = \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{ \Lambda_q^-; \Lambda_q^+ \} \quad \text{où} \quad \Lambda_q^\pm := \pm \sqrt{1 + 2Bq}.$$

De plus, Λ_q^\pm est une valeur propre double pour $q \geq 1$, simple pour $q = 0$, et il existe une base orthonormée (b.o.n.) de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$ formée de vecteurs propres de H_2 .

Au cours de la démonstration (voir en Annexe B), on a pu construire $(\tilde{F}_k^\varepsilon)_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \varepsilon \in \{-, +\}}}$ une b.o.n. de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$ vérifiant

$$\alpha_3 \tilde{F}_k^\varepsilon = \tilde{F}_k^{-\varepsilon} \quad \text{et} \quad H_2 \tilde{F}_k^\varepsilon = \lambda_k^\varepsilon \tilde{F}_k^\varepsilon \quad (4.4)$$

où $\lambda_0^\varepsilon = \Lambda_0^\varepsilon$ et $\lambda_{2k}^\varepsilon = \lambda_{2k-1}^\varepsilon = \Lambda_k^\varepsilon$ si $k \geq 1$ et $\varepsilon \in \{-, +\}$.

On pose $\Theta := \{\theta \in \mathbb{C} : |\Im \theta| < \frac{\pi}{4}\}$. A l'aide de $\tilde{P}_0(\theta)$, on va obtenir le résultat suivant

Lemme 4.2. *Pour $\theta \in \Theta$, on a*

$$\sigma(P_0(\theta)) = \sigma_{ac}(P_0(\theta)) = \bigcup_{\substack{q \geq 0 \\ \varepsilon \in \{-1, +1\}}} \left\{ \varepsilon \sqrt{1 + 2Bq + e^{-2\theta t^2}} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Remarques. 1) Comme $|2\Im \theta| < \pi$, on obtient que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + 2Bq + e^{-2\theta t^2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Ici, pour tout $q \in \mathbb{N}$, la fonction $\sqrt{\cdot}$ est la racine carrée complexe définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et qui coïncide avec la fonction racine carrée réelle sur la demi-droite \mathbb{R}_+ .

2) En notant $z_q^\pm(t) := \pm \sqrt{1 + 2Bq + e^{-2\theta t^2}}$, on peut remarquer que $z_q^\pm(0) = \Lambda_q^\pm$. Pour $\Im \theta > 0$, les branches $z_q^+(\mathbb{R})$ ne rencontrent pas l'ensemble $\mathbb{C}_{++} := \{z \in \mathbb{C} : \Re z > 0, \Im z > 0\}$ et sont asymptotes, à l'infini, à une même demi-droite $e^{-\theta} \mathbb{R}_+$ en restant toujours au-dessus de cette dernière.

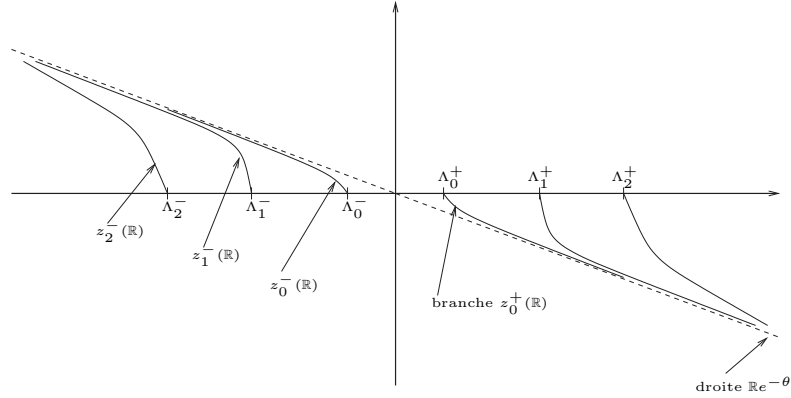
De même, $z_q^-(\mathbb{R})$ ne rencontre pas $\mathbb{C}_{--} := \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 0, \Im z < 0\}$ et est asymptote, à l'infini, à une même demi-droite $e^{-\theta} \mathbb{R}_-$ en restant toujours au-dessous de cette dernière. On peut retrouver ces informations sur la figure (4.1).

Démonstration. \mathbf{W}_B étant une transformation unitaire, les spectres de $P_0(\theta)$ et $\tilde{P}_0(\theta)$ sont identiques. D'après les notations du Lemme 4.1, on sait que les sous-espaces $G_k := \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}) \otimes \tilde{F}_k^+ + \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}) \otimes \tilde{F}_k^-$ sont stables pour l'opérateur $\tilde{P}_0(\theta)$ et la représentation matricielle de $\tilde{P}_0(\theta)|_{G_k}$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_k^+ & e^{-\theta} D_3 \\ e^{-\theta} D_3 & \lambda_k^- \end{pmatrix},$$

et on peut considérer $\tilde{P}_0(\theta)|_{G_k}$ comme un opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}^2)$. De plus, comme $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}}^\perp G_k$, on a

$$\sigma(\tilde{P}_0(\theta)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sigma(\tilde{P}_0(\theta)|_{G_k}). \quad (4.5)$$

FIG. 4.1 – Spectre de $P_0(\theta)$ pour $\Im\theta > 0$

En appliquant la transformée de Fourier en la variable x_3 , on change l'opérateur différentiel $\tilde{P}_0(\theta)|_{G_k}$ en $\tilde{\tilde{P}}_0(\theta)|_{G_k}$ dont la représentation matricielle dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, \xi_3}^2; \mathbb{C}^2)$ est

$$\begin{pmatrix} \lambda_k^+ & e^{-\theta} \xi_3 \\ e^{-\theta} \xi_3 & \lambda_k^- \end{pmatrix}.$$

A ξ_3 fixé, les valeurs propres de cette matrice étant les solutions complexes de l'équation $z^2 = (\lambda_k^+)^2 + e^{-2\theta} \xi_3^2$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \sigma\left(\tilde{\tilde{P}}_0(\theta)|_{G_k}\right) &= \sigma\left(\tilde{P}_0(\theta)|_{G_k}\right) = \sigma_{ac}\left(\tilde{P}_0(\theta)|_{G_k}\right) \\ &= \bigcup_{\varepsilon \in \{-1, +1\}} \left\{ \varepsilon \sqrt{(\lambda_k^+)^2 + e^{-2\theta} t^2} : t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Comme $|2\Im\theta| < \pi$, on a $\{(\lambda_k^+)^2 + e^{-2\theta} t^2 : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, et on peut prendre pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour $\sqrt{\cdot}$ la racine carrée complexe définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ telle que $\sqrt{1} = 1$. Ainsi en utilisant l'égalité (4.5) et les relations entre λ_q^+ et Λ_q^+ , on en déduit l'expression souhaitée pour le spectre de l'opérateur $P_0(\theta)$. \square

Lemme 4.3. *On suppose que V vérifie (4.2).*

- 1) Si $\theta \in \Theta$, alors $\sigma_{ess}(P(\theta)) = \sigma_{ess}(P_0(\theta))$.
- 2) La famille $(P(\theta))_{\theta \in \Theta}$ est holomorphe au sens de Kato.

Démonstration. 1) Comme V vérifie les conditions (4.2), $V_\theta I_4$ est $P_0(\theta)$ -compact. L'opérateur $P_0(\theta)$ étant fermé, en appliquant un résultat de M. Schechter, [[48], Théo 4.6], on obtient $\sigma_{ess}(P(\theta)) = \sigma_{ess}(P_0(\theta))$.

2) Pour $\theta \in \Theta$, l'ensemble de définition de $P(\theta)$ est indépendant de θ , égal à $\mathcal{D}(P_0)$ et l'opérateur $P(\theta)$ est fermé. De plus, de la première partie

de ce lemme, on obtient que $\sigma(P(\theta)) \neq \mathbb{C}$.

D'après (4.2), l'application $\theta \mapsto V_\theta$ est holomorphe pour $\theta \in \Theta$. On en déduit donc que pour $\Psi \in \mathcal{D}(P_0)$, l'application $\theta \mapsto P(\theta)\Psi$ est holomorphe sur Θ à valeurs dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$.

Donc la famille $(P(\theta))_{\theta \in \Theta}$ est holomorphe de type (A). Et par conséquent, elle est holomorphe au sens de Kato. \square

Pour le prochain résultat, analogue au Théorème de Aguilar-Balslev-Combes de [[24], Théo 16.4], on va travailler avec \mathcal{A} un ensemble de vecteurs analytiques pour les transformations U_θ :

$$\mathcal{A} := \left\{ \Psi \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) : \theta \mapsto U_\theta \Psi \text{ est holomorphe sur } \Theta \right. \\ \left. \text{à valeurs dans } \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \right\}.$$

D'après [[24], Ex 16.3], il existe un tel ensemble dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. En effet, \mathcal{A} contient les éléments de la forme

$$\left(p_1(x)e^{-\alpha_1 x^2}; p_2(x)e^{-\alpha_2 x^2}; p_3(x)e^{-\alpha_3 x^2}; p_4(x)e^{-\alpha_4 x^2} \right)$$

où $\alpha_j > 0$ et $p_j \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ et $x^2 := x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Pour θ_1 et θ_2 deux éléments de Θ , on définit les sous-ensembles de \mathbb{C}

$$\Theta_{1,2} := \{ \theta \in \mathbb{C} : \min(\Im\theta_1, \Im\theta_2) < \Im\theta < \max(\Im\theta_1, \Im\theta_2) \} \\ \Omega_{\theta_1, \theta_2} := \mathbb{C} \setminus \bigcup_{\theta \in \Theta_{1,2}} \sigma_{ess}(P(\theta)) \\ \Omega := \{ z \in \mathbb{C} : \Re z \cdot \Im z > 0 \text{ ou } |\Re z| < 1 \}$$

et pour $(r, z) \in]0; +\infty[\times \mathbb{C}$, on note $\mathcal{B}(r, z)$ la boule ouverte de centre z et de rayon r .

Proposition 4.4. *On suppose que la condition (4.2) est satisfaite.*

1) Si $\theta_0 \in \Theta$, les éléments du spectre discret de $P(\theta_0)$ sont indépendants de θ_0 . Plus précisément, ils vérifient les deux propriétés suivantes :

- Si $\tilde{\theta} \in \Theta$ proche de θ_0 et $z_0 \in \sigma_d(P(\theta_0)) \cap \Omega_{\theta_0, \tilde{\theta}}$, alors $z_0 \in \sigma_d(P(\tilde{\theta})) \cap \Omega_{\theta_0, \tilde{\theta}}$.
- De plus, la multiplicité algébrique de z_0 en tant que valeur propre de $P(\theta_0)$ est égale à la multiplicité algébrique de z_0 en tant que valeur propre de $P(\tilde{\theta})$.

2) Pour $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}^2$, on note $F_{\varphi, \psi}(z) := \langle (P - z)^{-1} \varphi, \psi \rangle$.

$F_{\varphi, \psi}$ est bien définie sur $\Omega \setminus \sigma_d(P)$.

Si θ_1 et θ_2 sont dans Θ avec $\min(\Im\theta_1, \Im\theta_2) > 0$, alors $F_{\varphi, \psi}$ admet un prolongement méromorphe de $\Omega \setminus \sigma_d(P)$ à $\Omega_{\theta_1, \theta_2}$ et on obtient

$$\bigcup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}^2} \{ y \in \Omega_{\theta_1, \theta_2} : y \text{ est un pôle de } F_{\varphi, \psi} \} = \bigcap_{\theta \in \Theta_{1,2}} (\sigma_d(P(\theta)) \cap \Omega_{\theta_1, \theta_2}).$$

Remarques. 1) On pose $\tilde{\Omega} := \{ z \in \mathbb{C} : \Re z \cdot \Im z < 0 \text{ ou } |\Re z| < 1 \}$.

Si on suppose que $\max(\Im\theta_1, \Im\theta_2) < 0$, alors les éléments matriciels $F_{\varphi, \psi}$ de la résolvante de P admettent un prolongement méromorphe de $\tilde{\Omega} \setminus \sigma_d(P)$ dans $\Omega_{\theta_1, \theta_2}$.

2) Pour $\theta \in \Theta$ avec $\Im\theta > 0$, on vient d'obtenir l'inclusion :

$$\sigma_d(P(\theta)) \subset \mathbb{R} \cup \left\{ \varepsilon \sqrt{1 + e^{-2i\alpha t^2}} : (\varepsilon, t, \alpha) \in \{-1; +1\} \times \mathbb{R} \times]0; \Im\theta[\right\}.$$

Démonstration de la Proposition 4.4.

1) Soient $z_0 \in \sigma_d(P(\theta_0))$ et $\mu_0 \ll 1$ tels que $\sigma_d(P(\theta_0)) \cap \mathcal{B}(z_0, 2\mu_0) = \{z_0\}$. Il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\tilde{\theta} \in \mathcal{B}(\theta_0, \delta_0)$, l'opérateur

$$\left[Id + (P(\theta_0) - z)^{-1} \left((e^{-\tilde{\theta}} - e^{-\theta_0}) \alpha_3 D_3 + (V_{\tilde{\theta}} - V_{\theta_0}) I_4 \right) \right]^{-1} (P(\theta_0) - z)^{-1}$$

est bien défini pour z sur le contour $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \mu_0\}$ et vaut $(P(\tilde{\theta}) - z)^{-1}$. Ainsi la projection $\Pi(\tilde{\theta}) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_0} (P(\tilde{\theta}) - z)^{-1} dz$ existe

bien pour $\tilde{\theta} \in \mathcal{B}(\theta_0; \delta_0)$.

La famille $(P(\theta))_{\theta \in \Theta}$ étant holomorphe au sens de Kato, il existe $\tilde{\delta}_0 \in]0; \delta_0[$ tel que l'application $\theta \mapsto \Pi(\theta)$ est holomorphe pour $\theta \in \mathcal{B}(\theta_0, \tilde{\delta}_0)$.

Comme $z_0 \in \sigma_d(P(\theta_0))$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $(P(\theta_0) - z_0)^{N_0} \Pi(\theta_0) = 0$. Les opérateurs $P(\theta)$ et $P(\theta_0)$ étant unitairement équivalents (via la conjugaison par $U_{\Re\theta - \Re\theta_0}$), pour θ proche de θ_0 avec $\Im\theta = \Im\theta_0$, on obtient

$$(P(\theta) - z_0)^{N_0} \Pi(\theta) = 0.$$

Ainsi pour $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}^2$, l'application $\theta \mapsto \langle (P(\theta) - z_0)^{N_0} \Pi(\theta) \varphi, \psi \rangle$ est holomorphe en la variable θ , pour θ proche de θ_0 et identiquement nulle si $\Im\theta = \Im\theta_0$.

Donc pour θ proche de θ_0 , $\langle (P(\theta) - z_0)^{N_0} \Pi(\theta) \varphi, \psi \rangle = 0$. La densité de \mathcal{A} dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ entraîne que $(P(\theta) - z_0)^{N_0} \Pi(\theta) = 0$ pour θ proche de θ_0 .

Donc $\mathcal{B}(z_0, \mu_0) \cap \sigma_d(P(\theta)) = \{z_0\}$ pour θ proche de θ_0 .

L'égalité des multiplicités algébriques, autrement dit $\text{rang}(\Pi(\theta)) = \text{rang}(\Pi(\theta_0))$, découle du fait que $(\Pi(\theta))_{\theta \in \mathcal{B}(\theta_0, \tilde{\delta}_0)}$ est une famille holomorphe de projections.

Et on a donc obtenu que $\sigma_d(P(\theta))$ est localement constant.

2) Soit \mathcal{U} un ouvert connexe de \mathbb{C} tel que $\mathcal{U} \subset \Omega_{\theta_1, \theta_2}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_+ &:= \mathcal{U} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -1 \text{ et } \Im z > 0\} \neq \emptyset \\ \text{et } \mathcal{U} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re z > -1 \text{ et } \Im z < 0\} &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathcal{U}_+ \cap \{z \in \mathbb{C} : \text{Arg}(z) \in]\varepsilon; \pi[\} \neq \emptyset. \quad (4.6)$$

On note par $\mathcal{U}_+^\varepsilon$ cet ensemble et

$$\Theta_{1,2}^\varepsilon := \{\theta \in \mathbb{C} : -\varepsilon < \Im\theta < \max(\Im\theta_1, \Im\theta_2)\}.$$

D'après (4.6), le Lemme 4.3 et la première partie de cette proposition, on a :

$$\mathcal{U}_+^\varepsilon \cap \left(\bigcup_{\theta \in \Theta_{1,2}^\varepsilon} \sigma(P(\theta)) \right) = \emptyset.$$

Pour $\theta \in \mathbb{R} \cap \Theta_{1,2}^\varepsilon$, $z \in \mathcal{U}_+^\varepsilon$ et $(f, g) \in \mathcal{A}^2$, en utilisant (4.3), on a :

$$\langle (P - z)^{-1} f, g \rangle = \langle (P(\theta) - z)^{-1} U_{-\theta} f, U_{-\bar{\theta}} g \rangle. \quad (4.7)$$

On note alors $F_{f,g}(z, \theta)$ le membre de droite de l'égalité ci-dessus.

Les hypothèses sur les éléments de \mathcal{A} et l'holomorphie au sens de Kato de la famille $(P(\theta))_{\theta \in \Theta_{1,2}^\varepsilon}$ entraînent que, pour $z \in \mathcal{U}_+^\varepsilon$, l'application $F_{f,g}(z, \bullet)$ est holomorphe sur $\Theta_{1,2}^\varepsilon$. On en déduit que l'égalité (4.7) reste valable pour $\theta \in \Theta_{1,2}^\varepsilon$, donc pour $\theta \in \Theta_{1,2}$.

Pour $\theta \in \Theta_{1,2}$ fixé, $F_{f,g}(\bullet, \theta)$ admet un prolongement méromorphe depuis $\mathcal{U}_+^\varepsilon$ à \mathcal{U} avec des singularités au plus algébriques. Ainsi il en sera de même pour $F_{f,g}$.

Comme \mathcal{U}_+ ne rencontre ni $\sigma(P)$ ni $\sigma(P(\theta))$ pour $\theta \in \Theta_{1,2}$, $F_{f,g}$ et $F_{f,g}(\bullet, \theta)$ sont holomorphes sur \mathcal{U}_+ . Donc leurs prolongements méromorphes depuis $\mathcal{U}_+^\varepsilon$ à \mathcal{U} coïncident aux prolongements méromorphe depuis \mathcal{U}_+ à \mathcal{U} .

Les éléments de $\sigma_d(P(\theta)) \cap \mathcal{U}$ étant des pôles de $F_{\varphi,\psi}(\bullet, \theta)$ pour certains φ , ψ bien choisis, de même que [[15], §5], on peut obtenir l'équivalence

$$z \in \bigcup_{(\varphi,\psi) \in \mathcal{A}^2} \{y \in \mathcal{U} : y \text{ est un pôle de } F_{\varphi,\psi}\} \iff z \in \bigcap_{\theta \in \Theta_{1,2}} (\sigma_d(P(\theta)) \cap \mathcal{U}). \quad (4.8)$$

On peut faire de même avec un ouvert connexe $\tilde{\mathcal{U}} \subset \Omega_{\theta_1, \theta_2}$ tel que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ et } \Im z < 0\} &\neq \emptyset \\ \text{et } \tilde{\mathcal{U}} \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re z < 1 \text{ et } \Im z > 0\} &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

L'équivalence (4.8) est valable pour tous les ouverts connexes \mathcal{U} et $\tilde{\mathcal{U}}$ de $\Omega_{\theta_1, \theta_2}$ vérifiant les conditions ci-dessus. On en déduit donc que l'égalité (4.8) reste valable en remplaçant \mathcal{U} par $\Omega_{\theta_1, \theta_2}$. Ainsi on obtient l'égalité annoncée. \square

Avec la proposition précédente, on a obtenu que les valeurs propres de $P(\theta)$ sont "localement indépendantes" par rapport au paramètre θ , ce qui justifie la définition ci-dessous

Définition 4.5. Pour θ_1 et θ_2 dans Θ , les éléments de $\bigcup_{\theta \in \Theta_{1,2}} \sigma_d(P(\theta)) \cap \Omega_{\theta_1, \theta_2}$ seront appelés les "résonances" de l'opérateur P dans $\Omega_{\theta_1, \theta_2}$.

Pour finir avec ce paragraphe, on va faire le lien entre les valeurs propres réelles de $P(\theta)$ et celle de P :

Proposition 4.6. *Si la condition (4.2) est satisfaite et $\theta \in \Theta$ avec $\Im\theta \neq 0$, alors on a l'égalité*

$$\sigma_{pp}(P) \cap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{ \Lambda_q^+; \Lambda_q^- \} \right) = \sigma_d(P(\theta)) \cap \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Remarques. 1) *En particulier, comme $\sigma_d(P) \subset]-1; 1[$, la relation (4.9) assure que $\sigma_d(P) = \sigma_d(P(\theta)) \cap]-1; 1[$.*

2) *On retrouve un résultat connu² : les points du spectre ponctuel contenus dans $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \{ \Lambda_q^+; \Lambda_q^- \}$ sont des valeurs propres de multiplicité finie et les seuls points d'accumulations possibles pour ces éléments de $\sigma_{pp}(P)$ sont les niveaux de Landau-Dirac Λ_q^\pm .*

Démonstration de la Proposition 4.6. Soit $\theta \in \Theta$ tel que $\Im\theta > 0$.

On a vu que $\sigma_d(P(\theta))$ est localement constant pour $\theta \in \Theta$, donc si $\lambda \in \sigma_d(\theta_n)$ avec $\theta_n \in \Theta$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta$, alors $\lambda \in \sigma_d(P(\theta))$.

Si $\lambda \in]-1; 1[$, alors pour tout $\mu \in \Theta$, on a $\lambda \notin \sigma_{ess}(P(\mu))$. A l'aide du chemin continu $\gamma : t \mapsto t\theta$, $\gamma([0; 1]) \subset \Theta$, on obtient $\lambda \in \sigma_d(P(\gamma(0))) = \sigma_d(P)$ si et seulement si $\lambda \in \sigma_d(P(\gamma(1))) = \sigma_d(P(\theta))$. Donc on en conclut l'égalité annoncée dans la remarque 1) ci-dessus.

Soit $q \in \mathbb{N}$.

Pour $\mu \in]\Lambda_q^+; \Lambda_{q+1}^+[$ et $\mu \notin \sigma_d(P(\theta))$, grâce à l'égalité (4.7), on a vu que, pour $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}^2$, $F_{\varphi, \psi}$ admet un prolongement analytique depuis \mathbb{C}_{++} à $\mathbb{C}_{++} \cup \mathcal{V}_\mu$ où \mathcal{V}_μ est un voisinage de μ vérifiant $\mathcal{V}_\mu \cap \sigma_d(P(\theta)) = \{\mu\}$.

En particulier, on a $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \langle (P - \mu - i\varepsilon)^{-1} \varphi, \psi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon F_{\varphi, \psi}(\mu + i\varepsilon) = 0$.

D'après [[24], Théo 6.10], on en déduit que $\mu \notin \sigma_{pp}(P)$.

Réciproquement, si $\mu \in \sigma_d(P(\theta)) \cap]\Lambda_q^+; \Lambda_{q+1}^+[$, il existe un vecteur non nul $\eta_\mu \in \mathcal{D}(P_0)$ tel que $P(\theta)\eta_\mu = \mu\eta_\mu$. On se donne $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\sigma_d(P(\theta)) \cap \mathcal{B}(\mu, 2\varepsilon_0) = \{\mu\}$, et on pose $\Gamma_0 = \{z \in \mathbb{C} : |z - \mu| = \varepsilon_0\}$. Ainsi la projection $\oint_{\Gamma_0} (P(\theta) - z)^{-1} dz$ est bien définie et pour certain φ , la quantité

$\int_{\Gamma_0} \langle (P(\theta) - z)^{-1} \eta_\mu, \varphi \rangle dz$ est non nulle. Donc $z \mapsto \langle (P(\theta) - z)^{-1} \eta_\mu, \varphi \rangle$ admet un pôle en $z = \mu$.

Comme \mathcal{A} est dense dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, il existe une suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathcal{A} qui converge vers η_μ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$. D'où pour n assez grand,

$\int_{\Gamma_0} \langle (P(\theta) - z)^{-1} \eta_n, \varphi \rangle dz \neq 0$ et donc $z \mapsto \langle (P(\theta) - z)^{-1} \eta_n, \varphi \rangle$ possède un pôle en $z = \mu$.

De l'égalité (4.7), on obtient

$$\langle (P - z)^{-1} U_\theta \eta_n, U_{\bar{\theta}} \varphi \rangle = \langle (P(\theta) - z)^{-1} \eta_n, \varphi \rangle. \quad (4.10)$$

²Voir par exemple [[45], Théo 1.2].

D'où $z \mapsto \langle (P - z)^{-1} U_\theta \eta_n, U_{\bar{\theta}} \varphi \rangle$ admet un pôle en $z = \mu$. Ainsi la relation

$$\langle E_{\{\mu\}}(P) U_\theta \eta_n, U_{\bar{\theta}} \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} i\varepsilon \langle (P - \mu - i\varepsilon)^{-1} U_\theta \eta_n, U_{\bar{\theta}} \varphi \rangle$$

et (4.10) assurent que $E_{\{\mu\}}(P) \neq 0$ et donc $\mu \in \sigma_{pp}(P)$.

Ainsi on obtient l'égalité $\sigma_{pp}(P) \cap]\Lambda_q^+ \Lambda_{q+1}^+[= \sigma_d(P(\theta_0)) \cap]\Lambda_q^+; \Lambda_{q+1}^+[$ et on fait de même pour conclure à cette même égalité sur $]\Lambda_{q+1}^-; \Lambda_q^-[$.

Si $\Im\theta < 0$, on produit le même raisonnement en prolongeant analytiquement $F_{\varphi, \psi}$ à partir $\{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0 \text{ et } \Re z > 0\}$ à un voisinage complexe de $\mu \in]\Lambda_q^+; \Lambda_{q+1}^+[\cap (\mathbb{R} \setminus \sigma_d(P(\theta)))$. \square

4.3 Réduction à un hamiltonien effectif

A partir de maintenant, on fixe le paramètre $|\theta| \ll 1$ et $\Im\theta > 0$, et l'on pose $h := \frac{1}{B}$. On introduit également un paramètre de charge Z vérifiant :

$$1 \ll Z < B^{\frac{1-\varepsilon}{2}} \quad (4.11)$$

où $\varepsilon \in]0; 1[$.

On remplace alors V par ZV . On introduit ce paramètre Z dans l'optique de pouvoir étudier la partie principale Q de l'hamiltonien³ effectif $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ à l'aide d'un problème d'analyse semi-classique, en considérant $\frac{1}{Z}Q$ et Z tendant vers $+\infty$. On suppose que V est dans la classe suivante

$$\left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) : \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \gamma \in \mathbb{N}^3, \exists C_\gamma > 0, \right. \\ \left. \forall x \in \mathbb{R}^3, |\partial_x^\gamma f(x)| \leq C_\gamma \langle x \rangle^{-\varepsilon_0 - |\gamma|} \right\} \quad (4.12)$$

avec $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$. De plus, on suppose que V admet une extension holomorphe dans la direction x_3 sur un domaine $K_3 := \{z \in \mathbb{C} : |\Im z| \leq \delta |\Re z| + R\}$ pour certains $\delta > 0$, $R > 0$ et que (4.12) est vérifiée sur $\mathbb{R}^2 \times K_3$, autrement dit

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^3, \exists C_\gamma > 0 : \forall X = (x_1, x_2, z) \in \mathbb{R}^2 \times K_3, \\ |\partial_X^\gamma V(X)| \leq C_\gamma \langle X \rangle^{-\varepsilon_0 - |\gamma|}. \quad (4.13)$$

En utilisant le changement de coordonnées symplectiques défini au début du paragraphe §4.2, on transforme le nouvel opérateur $P(\theta)$ en un opérateur que l'on notera $P(B, Z; \theta)$:

$$P(B, Z; \theta) = Id_{x_1, x_3} \otimes H_2 + \left(e^{-\theta} D_3 \right) \otimes \alpha_3 + Z \tilde{V}_\theta$$

³Voir le Théorème 4.8 pour l'expression de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ et Théorème 4.11 pour l'expression de $E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda)$

où $\tilde{V}_\theta = \tilde{V}_\theta \cdot Id$ avec \tilde{V}_θ l'opérateur pseudodifférentiel sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C})$ de symbole de Weyl

$$V^W\left(x - h^{\frac{1}{2}}\xi_2, h^{\frac{1}{2}}x_2 - h\xi_1, e^\theta x_3\right).$$

On rappelle que $(\tilde{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une b.o.n. de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$ et vérifie⁴

$$\begin{aligned} SEP(H_2, \Lambda_0^\pm) &= Vect\left(\tilde{F}_0^\pm\right) \text{ et } \tilde{F}_q^- = \alpha_3\left(\tilde{F}_q^+\right) \\ \text{et pour } q \geq 1, \quad SEP(H_2, \Lambda_q^\pm) &= Vect\left(\tilde{F}_{2q-1}^\pm, \tilde{F}_{2q}^\pm\right). \end{aligned}$$

Ces sous-espaces propres ne sont pas stables par α_3 , on va alors considérer les sous-espaces

$$\begin{aligned} E_0 &:= Vect\left(\tilde{F}_0^+, \tilde{F}_0^-\right) \\ \text{et pour } q \geq 1, \quad E_q &:= Vect\left(\tilde{F}_{2q-1}^-, \tilde{F}_{2q}^-, \tilde{F}_{2q-1}^+, \tilde{F}_{2q}^+\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Les sous-espaces $(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}; \mathbb{C}) \otimes E_q) \cap \mathcal{D}(P_0)$ sont stables par $P(B, 0; \theta)$. On remarque que E_q est un s.e.v. de dimension 4 si $q \geq 1$, alors que E_0 est de dimension 2. On formulera alors un problème de Grushin différent pour $q = 0$ et pour $q \geq 1$.

4.3.1 Etude près de Λ_0^+ et Λ_0^-

Soit $\delta \in]0; 1[$.

On cherche à travailler dans $\Omega_{0,B}^\delta$, un voisinage des niveaux de Landau-Dirac Λ_0^+ et Λ_0^- qui ne rencontre pas $(\sigma(P(B, 0; \theta)) \setminus \{z_0^+(\mathbb{R}), z_0^-(\mathbb{R})\})$ et plus particulièrement vérifie

$$dist(\Omega_{0,B}^\delta; \sigma(P(B, 0; \theta)) \setminus \{z_0^+(\mathbb{R}), z_0^-(\mathbb{R})\}) \geq \frac{C}{\sqrt{B}}.$$

On peut construire un tel ensemble de la façon suivante :

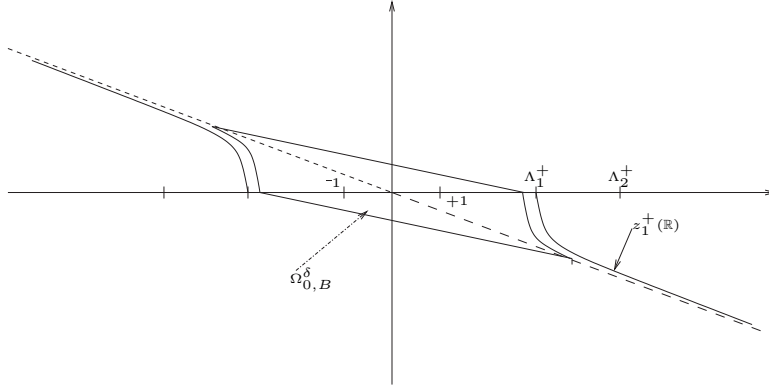
On définit pour $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{z}_{\delta,1}^\pm(t) = z_1^\pm(t) \mp \delta(\Lambda_1^\pm - 1)$. La branche $\tilde{z}_{\delta,1}^+(\mathbb{R})$ est "au-dessous" de $z_1^+(\mathbb{R})$ et intersecte $e^{-\theta}\mathbb{R}_+$ au point $\tilde{z}_{\delta,1}^+(t_0)$ avec $t_0 > 0$.

$\tilde{z}_{\delta,1}^-(\mathbb{R})$ étant le symétrique de $\tilde{z}_{\delta,1}^+(\mathbb{R})$ par rapport à l'origine du plan complexe, on obtient que $\tilde{z}_{\delta,1}^-(\mathbb{R})$ est "au-dessus" de $z_1^-(\mathbb{R})$ et intersecte $e^{-\theta}\mathbb{R}_-$ au point $\tilde{z}_{\delta,1}^-(t_0)$.

On définit alors $\Omega_{0,B}^\delta$ comme étant l'ensemble ouvert connexe comportant l'origine, dont la frontière est délimitée par les segments $[\tilde{z}_{\delta,1}^+(0); \tilde{z}_{\delta,1}^-(t_0)]$, $[\tilde{z}_{\delta,1}^-(0); \tilde{z}_{\delta,1}^+(t_0)]$ et les arcs $\tilde{z}_{\delta,1}^+([0; t_0])$, $\tilde{z}_{\delta,1}^-([0; t_0])$.

Voir la figure (4.2) pour un dessin.

⁴On rappelle que $SEP(H_2, \mu)$ désigne le sous-espace propre de H_2 associé à la valeur propre μ .

FIG. 4.2 – Ensemble $\Omega_{0,B}^\delta$ avec $\Im\theta > 0$

On note aussi que $\Omega_{0,B}^\delta \setminus \{\Lambda_0^+, \Lambda_0^-\} \cap \sigma(H_2) = \emptyset$.

Utilisant les produits tensoriels avec les éléments de base de E_0 , on définit l'opérateur T_0 suivant :

$$\begin{aligned} T_0 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1,x_3}^2; \mathbb{C}^2) &\longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \\ f = (f_1, f_2) &\longmapsto f_1 \otimes \tilde{F}_0^+ + f_2 \otimes \tilde{F}_0^- \end{aligned}$$

En notant $\langle \cdot, \cdot \rangle_{x_2}$ le produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}, \mathbb{C}^4)$, on utilise les produits scalaires avec les vecteurs de base de E_0 pour définir l'opérateur S_0 :

$$\begin{aligned} S_0 : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) &\longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1,x_3}^2; \mathbb{C}^2) \\ g &\longmapsto \left(\langle g, \tilde{F}_0^+ \rangle_{x_2}, \langle g, \tilde{F}_0^- \rangle_{x_2} \right) \end{aligned}$$

On considère le problème de Grushin associé aux premiers niveaux de Landau-Dirac Λ_0^+ et Λ_0^- :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(0)}(\lambda) &: \mathcal{D}(P(B)) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1,x_3}^2; \mathbb{C}^2) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1,x_3}^2; \mathbb{C}^2) \\ \mathcal{P}^{(0)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} P(B, Z; \theta) - \lambda & T_0 \\ S_0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

On note par $\mathbf{\Pi}_0$ l'opérateur composé $T_0 \circ S_0$. Il s'agit de la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1,x_3}^2, \mathbb{C}) \otimes E_0$.

De plus, on remarque que $S_0 \circ T_0 = Id_{x_1,x_3}$.

On pose $\widehat{\mathbf{\Pi}}_0 := Id - \mathbf{\Pi}_0$. D'après le choix de E_0 , les sous-espaces $Im(\widehat{\mathbf{\Pi}}_0)$ et $Im(\mathbf{\Pi}_0)$ sont stables par $P(B, 0; \theta)$. On définit la résolvante réduite

$$\widehat{R}_0(B, Z; \lambda) := \left(\widehat{\mathbf{\Pi}}_0 P(B, Z; \theta) \widehat{\mathbf{\Pi}}_0 - \lambda \right)^{-1} \widehat{\mathbf{\Pi}}_0.$$

On remarque alors que l'on a les relations suivantes

$$\text{Ker} \left(\widehat{R}_0(B, Z; \lambda) \right) = \text{Ker} \left(\widehat{\Pi}_0 \right) = \text{Im} \left(\Pi_0 \right) = \text{Im} \left(T_0 \right) \quad (4.16)$$

$$\text{et } \text{Im} \left(\widehat{R}_0(B, Z; \lambda) \right) = \text{Im} \left(\widehat{\Pi}_0 \right) = \text{Ker} \left(\Pi_0 \right) = \text{Ker} \left(S_0 \right) \quad (4.17)$$

On commence par obtenir une estimation sur la norme de la résolvante réduite

Lemme 4.7. *Si B et Z vérifient (4.11), V satisfait (4.13), alors $\widehat{R}_0(B, Z; \lambda)$ existe pour $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$ et il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\| \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{B}}$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de B , Z et de $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$.

Démonstration. Soit $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$.

On va commencer par montrer qu'il existe $\widetilde{C} > 0$ vérifiant

$$\left\| \widehat{R}_0(B, 0; \lambda) \right\| \leq \frac{\widetilde{C}}{\sqrt{B}}.$$

Pour cela, en reprenant la démonstration du Lemme 4.2, on peut localiser $\sigma \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 \right)$ et obtenir

$$\sigma \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 \Big|_{\text{Im}(\widehat{\Pi}_0)} \right) = \bigcup_{q \geq 1} \{z_q^+(\mathbb{R}), z_q^-(\mathbb{R})\}.$$

Ainsi, d'après le choix de $\Omega_{0,B}^\delta$, on obtient

$$\text{dist} \left(\Omega_{0,B}^\delta, \sigma \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 \Big|_{\text{Im}(\widehat{\Pi}_0)} \right) \right) \geq c_{\delta,\theta} \sqrt{B}$$

pour une certaine constante $c_{\delta,\theta} > 0$.

De plus, en utilisant la décomposition de l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$ par les sous-espaces stables $(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}) \otimes E_q) \cap \mathcal{D}(P_0)$ et la transformée de Fourier en x_3 , on montre que pour $F \in \text{Im} \left(\widehat{\Pi}_0 \right) \cap \mathcal{D} \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 \right)$,

$$\left\| \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right) F \right\| \geq c_{\delta,\theta} \sqrt{B} \|F\|.$$

Comme $\lambda \notin \sigma \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 \Big|_{\text{Im}(\widehat{\Pi}_0)} \right)$, on en déduit que

$$\left\| \widehat{R}_0(B, 0; \lambda) \right\| \leq \left\| \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right)^{-1} \Big|_{\text{Im}(\widehat{\Pi}_0)} \right\| \cdot \left\| \widehat{\Pi}_0 \right\| \leq c_{\delta,\theta}^{-1} B^{-\frac{1}{2}}.$$

De plus, on a la majoration

$$\left\| Z \widehat{R}_0(B, 0; \lambda) \widetilde{V}_\theta \widehat{\Pi}_0 \right\| \leq \frac{Z \left\| \widetilde{V}_\theta \right\|}{\sqrt{B}} c_{\delta,\theta}^{-1} \leq \widetilde{C}_{\delta,\theta} B^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Donc pour B assez grand, l'opérateur $Id + Z\widehat{R}_0(B, 0; \lambda)\widetilde{V}_\theta\widehat{\Pi}_0$ est inversible avec une norme bornée uniformément par rapport aux paramètres B , Z et λ .

Avec l'équation des résolvantes réduites

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, Z; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right)^{-1} - \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right)^{-1} \\ &= \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right)^{-1} \left[-Z \widehat{\Pi}_0 \widetilde{V}_\theta \widehat{\Pi}_0 \right] \left(\widehat{\Pi}_0 P(B, Z; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right)^{-1} \end{aligned}$$

on obtient

$$\widehat{R}_0(B, Z; \lambda) = \left[Id + Z \widehat{R}_0(B, 0; \lambda) \widetilde{V}_\theta \widehat{\Pi}_0 \right]^{-1} \widehat{R}_0(B, 0; \lambda). \quad (4.18)$$

On en déduit donc l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de B , Z et λ telle que

$$\left\| \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) \right\| \leq CB^{-\frac{1}{2}}. \quad \square$$

On utilise les notations de M. Dimassi dans [14]. Pour k et d dans \mathbb{N}^* , on introduit $S^0(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$, la classe des symboles définis sur \mathbb{R}^{2d} à valeurs dans les matrices carrées d'ordre k , avec un petit paramètre $0 < h_0 \ll 1$:

$$\begin{aligned} S^0(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{M}_k(\mathbb{C})) := & \left\{ a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d} \times]0; h_0[, \mathcal{M}_k(\mathbb{C})) : \forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^d)^2, \right. \\ & \exists C_{\alpha, \beta} > 0, \left\| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi; h) \right\|_{\mathcal{M}_k(\mathbb{C})} \leq C_{\alpha, \beta} \\ & \left. \text{uniformément en } h \in]0; h_0[\right\} \end{aligned}$$

Si le symbole $a(\cdot; h)$ dépend d'un paramètre supplémentaire $z \in \mathcal{Z}$, alors $a(\cdot; h) \in S^0(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$ si et seulement si la constante $C_{\alpha, \beta}$ est indépendante de $z \in \mathcal{Z}$.

Pour une famille $(L_q)_q$ d'éléments de $S^0(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$, on dira que l'opérateur

pseudodifférentiel L admet pour développement asymptotique $\sum_{q=0}^{\infty} h^q L_q$ si

pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $R_{N+1} \in S^0(\mathbb{R}^{2d}, \mathcal{M}_k(\mathbb{C}))$ tel que $L - \sum_{q=0}^N h^q L_q =$

$h^{N+1} R_{N+1}$.

On est maintenant en mesure d'inverser $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda)$:

Théorème 4.8. *Si B et Z vérifient (4.11), V satisfait (4.13) et $\lambda \in \Omega_{0, B}^\delta$, alors le "problème de Grushin" $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda)$ admet une unique solution donnée par*

$$\mathcal{E}^{(0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} E^{(0)}(B, Z; \lambda) & E_+^{(0)}(B, Z; \lambda) \\ E_-^{(0)}(B, Z; \lambda) & E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

où $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ est l'opérateur pseudodifférentiel admettant pour développement asymptotique

$$\begin{aligned} & \lambda I_2 - \Lambda_0^+ \sigma_3 - e^{-\theta} D_3 \sigma_1 - ZV^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \cdot I_2 \\ & - hZ \sum_{j=0}^{\infty} h^{\frac{j}{2}} a_j^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} D_3; \sqrt{h}Z, \sqrt{h}\lambda) \end{aligned}$$

avec $a_j \in S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ et sont holomorphes en les variables $\sqrt{h}Z$ et $\sqrt{h}\lambda$.

Remarque. En notant $\Delta_{12} := (\partial_1)^2 + (\partial_2)^2$, on obtiendra que

$$a_0^W = \frac{1}{4} (\Delta_{12} V)^W(x_1, -hD_1, e^{-\theta} x_3) \cdot I_2 + \sqrt{h} Z b_0^W$$

où b_0 est un élément de $S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$ de la forme

$$\begin{aligned} & b_0(x_1, h\xi_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} \xi_3; \sqrt{h}Z, \sqrt{h}\lambda) = (\partial_1 V(x_1, h\xi_1, e^\theta x_3))^2 r_{11} + \\ & (\partial_1 V(x_1, h\xi_1, e^\theta x_3) \partial_2 V(x_1, h\xi_1, e^\theta x_3)) r_{12} + (\partial_2 V(x_1, h\xi_1, e^\theta x_3))^2 r_{22} \end{aligned}$$

avec r_{ij} des symboles dans $S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$.

On va pouvoir ramener l'étude du spectre discret de $P(B, Z; \theta)$ dans le domaine $\Omega_{0,B}^\delta$ à l'étude près de la valeur propre 0 pour le nouvel opérateur $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$:

Corollaire 4.9. *On suppose que les hypothèses du Théorème 4.8 sont satisfaites.*

Alors : $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$ est une valeur propre de $P(B, Z; \theta)$ si et seulement si 0 est une valeur propre de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$.

De plus, les multiplicités algébriques de ces valeurs propres sont identiques.

Remarque. *D'après la remarque qui suit la Proposition 4.4, on sait que $\sigma_d(P(B, Z; \theta)) \cap \Omega_{0,B}^\delta$ est un sous-ensemble de*

$$\Omega_{0,B}^\delta \cap \left\{ \varepsilon \sqrt{1 + e^{-2i\alpha t^2}} : (\varepsilon, t, \alpha) \in \{-1; +1\} \times \mathbb{R} \times [0; \mathfrak{S}\theta] \right\}.$$

Démonstration du Théorème 4.8. Soit $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$.

On cherche à inverser l'opérateur $\mathcal{P}_0(\lambda)$ en posant comme première approximation

$$\mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda) := \begin{pmatrix} \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) & T_0 \\ S_0 & e_0^{(0)}(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $e_0^{(0)}(\lambda) := \lambda I_2 - \left\{ \Lambda_0^+ \sigma_3 + e^{-\theta} D_3 \sigma_1 + Z S_0 \widetilde{\mathbb{V}}_\theta T_0 \right\}$ est un opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$.

En effectuant le produit $\mathcal{P}_0(\lambda) \cdot \mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda)$, on a alors

$$\begin{pmatrix} (P(B, Z; \theta) - \lambda) \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + T_0 S_0 & (P(B, Z; \theta) - \lambda) T_0 + T_0 e_0^{(0)}(\lambda) \\ S_0 \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) & S_0 T_0 \end{pmatrix}.$$

De (4.16) et (4.17), on obtient $S_0 \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) = 0$.

De plus,

$$\begin{aligned}
& (P(B, Z; \theta) - \lambda) \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + T_0 S_0 \\
&= (P(B, Z; \theta) - \lambda) \widehat{\Pi}_0 \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + \widehat{\Pi}_0 \\
&= \left(\Pi_0 P(B, Z; \theta) \widehat{\Pi}_0 + \widehat{\Pi}_0 P(B, Z; \theta) \widehat{\Pi}_0 - \lambda \right) \widehat{\Pi}_0 \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + \Pi_0 \\
&= \Pi_0 P(B, Z; \theta) \widehat{\Pi}_0 \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + \widehat{\Pi}_0 + \Pi_0 \\
&= \Pi_0 \left(P(B, 0; \theta) + Z \widetilde{V}_\theta \right) \widehat{\Pi}_0 \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + Id.
\end{aligned}$$

Comme $Im \left(P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 \right) \subset Im \left(\widehat{\Pi}_0 \right)$, on a $\Pi_0 P(B, 0; \theta) \widehat{\Pi}_0 = 0$. De plus, $\Pi_0 \widetilde{V}_\theta \widehat{\Pi}_0 = \left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right] \widehat{\Pi}_0$, ce qui donne

$$(P(B, Z; \theta) - \lambda) \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) + T_0 S_0 = Id + Z \left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right] \widehat{R}_0(B, Z; \lambda).$$

Comme \widetilde{F}_0^\pm sont les vecteurs propres associés à ± 1 et $\alpha_3 \widetilde{F}_0^\pm = \widetilde{F}_0^\mp$, on obtient $H_2 T_0 = T_0 \sigma_3$ et $\alpha_3 T_0 = T_0 \sigma_1$. D'où

$$\begin{aligned}
(P(B, Z; \theta) - \lambda) T_0 + T_0 e_0^{(0)}(\lambda) &= Z \widetilde{V}_\theta T_0 - Z T_0 S_0 \widetilde{V}_\theta T_0 = Z \widehat{\Pi}_0 \widetilde{V}_\theta T_0 \\
&= Z \left[\widehat{\Pi}_0, \widetilde{V}_\theta \right] T_0 = -Z \left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right] T_0.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(0)}(\lambda) \cdot \mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id_{x_1, x_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z \left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right] \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) & -Z \left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right] T_0 \\ & 0 \end{pmatrix} \\
&= I + K_0(\lambda).
\end{aligned}$$

On veut montrer que $\|K_0(\lambda)\| < 1$ pour pouvoir inverser $I + K_0(\lambda)$, pour cela on étudie $\left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right]$.

On rappelle qu'en notant (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{C}^4 et f_0 un vecteur propre (de norme un) de l'oscillateur harmonique associé à $+1$, on a $\widetilde{F}_0^+ = f_0 e_1$ et $\widetilde{F}_0^- = f_0 e_3$.

Pour $G \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, on a

$$\begin{aligned}
\left[\Pi_0, \widetilde{V}_\theta \right] G &= \Pi_0 \left(\widetilde{V}_\theta G \right) - \widetilde{V}_\theta \left(\Pi_0 G \right) \\
&= \left\langle \widetilde{V}_\theta G, \widetilde{F}_0^+ \right\rangle \widetilde{F}_0^+ + \left\langle \widetilde{V}_\theta G, \widetilde{F}_0^- \right\rangle \widetilde{F}_0^- - \widetilde{V}_\theta \left(\left\langle G, \widetilde{F}_0^+ \right\rangle \widetilde{F}_0^+ + \left\langle G, \widetilde{F}_0^- \right\rangle \widetilde{F}_0^- \right) \\
&= \left\langle \widetilde{V}_\theta G_1, f_0 \right\rangle f_0 e_1 + \left\langle \widetilde{V}_\theta G_3, f_0 \right\rangle f_0 e_3 - \widetilde{V}_\theta \left(\left\langle G_1, f_0 \right\rangle f_0 e_1 + \left\langle G_3, f_0 \right\rangle f_0 e_3 \right) \\
&= \left(\left\langle \widetilde{V}_\theta \cdot, f_0 \right\rangle f_0 - \widetilde{V}_\theta \left(\langle \cdot, f_0 \rangle f_0 \right) \right) (G_1 e_1 + G_3 e_3).
\end{aligned}$$

Comme f_0 est un vecteur propre de l'oscillateur harmonique, de norme 1, et V vérifie (4.13), on est dans le cadre de travail de l'article [[54], démonstration Théo 2.2] de X.P. Wang, on obtient alors

$$\left\| \left\langle \tilde{V}_\theta \cdot, f_0 \right\rangle f_0 - \tilde{V}_\theta \left(\langle \cdot, f_0 \rangle f_0 \right) \right\| = \mathcal{O} \left(B^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Donc $\left\| \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] \right\| = \mathcal{O} \left(B^{-\frac{1}{2}} \right)$. Allié à l'hypothèse (4.11) et au Lemme 4.2, cela entraîne

$$\left\| Z \left[\mathbf{\Pi}_0, \tilde{V}_\theta \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \right\| \leq \tilde{C} B^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}.$$

Ainsi pour $B \gg 1$, l'opérateur $I + K_0(\lambda)$ est inversible et son inverse est de la forme

$$(I + K_0(\lambda))^{-1} = \begin{pmatrix} A(\lambda) & -ZA(\lambda)\hat{\mathbf{\Pi}}_0\tilde{V}_\theta T_0 \\ 0 & Id_{x_1, x_3} \end{pmatrix}$$

où $A(\lambda) := \left[1 - Z \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \right]^{-1}$.

Ainsi $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda) \left[\mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda) \cdot (I + K_0(\lambda))^{-1} \right] = I$ et donc on obtient comme expression de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$:

$$\begin{aligned} E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda) &= e_0^{(0)}(\lambda) - ZS_0A(\lambda)\hat{\mathbf{\Pi}}_0\tilde{V}_\theta T_0 \\ &= \lambda I_2 - \left\{ \Lambda_0^+ \sigma_3 + e^{-\theta} D_3 \sigma_1 + ZS_0\tilde{V}_\theta T_0 + ZS_0A(\lambda)\hat{\mathbf{\Pi}}_0\tilde{V}_\theta T_0 \right\}. \end{aligned}$$

Comme $\left\| Z \left[\mathbf{\Pi}_0, \tilde{V}_\theta \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \right\| < 1$, on peut écrire $A(\lambda)$ comme somme d'une série convergente

$$A(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(Z \left[\mathbf{\Pi}_0, \tilde{V}_\theta \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \right)^j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(Z \left[\mathbf{\Pi}_0, \tilde{V}_\theta \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \right)^j.$$

Comme $\mathbf{\Pi}_0 \cdot \hat{R}_0(B, Z; \lambda) = \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \cdot \mathbf{\Pi}_0 = 0$, on remarque que pour tout $j \geq 2$

$$\left(Z \left[\mathbf{\Pi}_0, \tilde{V}_\theta \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \right)^j = 0$$

et ainsi $A(\lambda) = 1 + Z \left[\mathbf{\Pi}_0, \tilde{V}_\theta \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda)$.

D'où

$$\begin{aligned} E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda) &= \lambda I_2 - \Lambda_0^+ \sigma_3 - e^{-\theta} D_3 \sigma_1 - ZS_0\tilde{V}_\theta T_0 \\ &\quad - ZS_0\hat{\mathbf{\Pi}}_0\tilde{V}_\theta T_0 - Z^2 S_0 \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \hat{\mathbf{\Pi}}_0 \tilde{V}_\theta T_0. \end{aligned}$$

Or $S_0\hat{\mathbf{\Pi}}_0 = 0$ entraîne $ZS_0\hat{\mathbf{\Pi}}_0\tilde{V}_\theta T_0 = 0$ et ainsi

$$\begin{aligned} E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda) &= \lambda I_2 - \Lambda_0^+ \sigma_3 - e^{-\theta} D_3 \sigma_1 - ZS_0\tilde{V}_\theta T_0 \\ &\quad - Z^2 S_0 \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] T_0. \end{aligned}$$

De plus, pour $G \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$:

$$\begin{aligned} S_0 \tilde{V}_\theta T_0(G) &= S_0 \tilde{V}_\theta \left(G_1 \otimes \tilde{F}_0^+ + G_2 \otimes \tilde{F}_0^- \right) \\ &= S_0 \left(\tilde{V}_\theta(G_1 \otimes f_0) e_1 + \tilde{V}_\theta(G_2 \otimes f_0) e_3 \right) \\ &= \left(\left\langle \tilde{V}_\theta(G_1 \otimes f_0), f_0 \right\rangle, \left\langle \tilde{V}_\theta(G_2 \otimes f_0), f_0 \right\rangle \right) \\ &= \left\langle \tilde{V}_\theta(\cdot \otimes f_0), f_0 \right\rangle I_2(G). \end{aligned}$$

De nouveau, en se servant de l'article [54], on sait que $\left\langle \tilde{V}_\theta(\cdot \otimes f_0), f_0 \right\rangle$ est un opérateur pseudodifférentiel sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2, \mathbb{C})$ dont le symbole est donné par

$$V(x_1, -h\xi_1, e^\theta x_3) + \frac{h}{4} (\Delta_{12} V)(x_1, -h\xi_1, e^\theta x_3) + \mathcal{O}(h^2)$$

et donc $Z S_0 \tilde{V}_\theta T_0$ est un opérateur pseudodifférentiel admettant pour développement asymptotique

$$Z \sum_{k=0}^{\infty} h^k m_k^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \quad (4.20)$$

avec $m_k \in S^0(\mathbb{R}^4; \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$, $m_0 = V \cdot I_2$ et $m_1 = \frac{1}{4} (\Delta_{12} V) \cdot I_2$.

Il reste à étudier $Z S_0 \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] \hat{R}_0(B, Z; \lambda) \left[\tilde{V}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] T_0$. On commence par écrire le symbole de \tilde{V}_θ sous la forme

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\theta(x, \xi) &= V\left(x_1 - h^{\frac{1}{2}} \xi_2, h^{\frac{1}{2}} x_2 - h \xi_1, e^\theta x_3\right) \\ &= V(Y) - h^{\frac{1}{2}} \xi_2 (\partial_1 V)(Y) + h^{\frac{1}{2}} x_2 (\partial_2 V)(Y) \\ &\quad + \frac{h}{2} \xi_2^2 (\partial_1^2 V)(Y) + \frac{h}{2} x_2^2 (\partial_2^2 V)(Y) - h x_2 \xi_2 (\partial_{12}^2 V)(Y) \\ &\quad + h^{\frac{3}{2}} \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 = 3} \frac{(-1)^{\alpha_2}}{\alpha_1! \alpha_2!} \xi_2^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} (\partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} V)(Y) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (4.21)$$

où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ et l'on a noté $Y = (x_1, -h\xi_1, e^\theta x_3)$.

Comme $V(x_1, -h\xi_1, e^\theta x_3)$ ne dépend pas des variables x_2, ξ_2 , on obtient que l'opérateur $V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3)$ n'agit pas sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}^2, \mathbb{C}^4)$ et donc

$$\hat{\mathbf{\Pi}}_0 \left(V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) I_4 \right) T_0 = 0 \text{ et } S_0 \left(V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) I_4 \right) \hat{\mathbf{\Pi}}_0 = 0.$$

De l'équation (4.18), on obtient l'écriture de $\hat{R}_0(B, Z; \lambda)$ comme somme de la série convergente

$$\hat{R}_0(B, Z; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z^k \left(\hat{R}_0(B, 0; \lambda) \nabla_\theta \hat{\mathbf{\Pi}}_0 \right)^k \hat{R}_0(B, 0; \lambda).$$

Il reste à obtenir un développement asymptotique pour $\widehat{R}_0(B, 0; \lambda)$. Pour cela, on utilise la notion d'opérateur pseudodifférentiel avec des symboles à valeurs opérateurs, développée par A. Balazard-Konlein dans [3]. On considère $\widehat{r}_0(\lambda) := h^{-\frac{1}{2}} \widehat{R}_0(B, 0; \lambda)$ comme un opérateur en les variables x_1, x_3 à valeurs dans $\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4))$. Comme

$$\widehat{R}_0(B, Z; \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Z^k h^{\frac{k+1}{2}} \left(\widehat{r}_0(\lambda) \mathbb{V}_\theta \widehat{\Pi}_0 \right)^k \widehat{r}_0(\lambda), \quad (4.22)$$

le développement de $\widehat{r}_0(\lambda)$ et l'expression (4.21) assurent que l'opérateur recherché $Z S_0 \left[\widetilde{\mathbb{V}}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] \widehat{R}_0(B, Z; \lambda) \left[\widetilde{\mathbb{V}}_\theta, \mathbf{\Pi}_0 \right] T_0$ admet bien un développement asymptotique de la forme $Z h^{\frac{3}{2}} \sum_{j=0}^{\infty} h^{\frac{j}{2}} b_j^W(x_1, h D_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} D_3; \sqrt{h Z}, h^{\frac{1}{2}} \lambda)$.

De plus, l'holomorphie en la variable $\sqrt{h Z}$ découle de (4.22) et celle en la variable $\sqrt{h} \lambda$ découle du fait que $\widehat{r}_0(\lambda)$ est holomorphe en $\sqrt{h} \lambda$ pour $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$. Enfin, on peut remarquer que le symbole du premier terme b_0^W est de la forme

$$\begin{aligned} b_0 \left(x_1, h \xi_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} \xi_3; \sqrt{h Z}, \sqrt{h} \lambda \right) &= (\partial_1 V(x_1, h \xi_1, e^\theta x_3))^2 r_{11} + \\ &(\partial_1 V(x_1, h \xi_1, e^\theta x_3) \partial_2 V(x_1, h \xi_1, e^\theta x_3)) r_{12} + (\partial_2 V(x_1, h \xi_1, e^\theta x_3))^2 r_{22} \end{aligned}$$

avec r_{ij} des symboles dans $S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_2(\mathbb{C}))$.

Par conséquent, ce dernier développement et (4.20) permettent d'obtenir la décomposition attendue pour $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$. \square

Démonstration du Corollaire 4.9. Si $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$ est une valeur propre de $P(B, Z; \theta)$, alors il existe un vecteur propre associé $u_\lambda \in \mathcal{D}(P(B)) \setminus \{0\}$. Ainsi on a

$$\mathcal{P}^{(0)}(\lambda) \begin{pmatrix} u_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ S_0(u_\lambda) \end{pmatrix}$$

en multipliant par $\mathcal{E}^{(0)}(\lambda)$, on obtient donc le système

$$E_+^{(0)}(B, Z; \lambda) (S_0 u_\lambda) = u_\lambda \quad (4.23)$$

$$E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda) (S_0 u_\lambda) = 0. \quad (4.24)$$

L'égalité (4.23) assure que le vecteur $S_0(u_\lambda)$ est non nul et (4.24) montre qu'il s'agit d'un vecteur propre de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ associé à la valeur propre 0.

Si 0 est une valeur propre de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$, alors il existe un vecteur propre associé $v_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2, \mathbb{C}^2) \setminus \{0\}$. Ainsi on a

$$\mathcal{E}^{(0)}(\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_+^{(0)}(B, Z; \lambda) v_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \mathcal{P}^{(0)}(\lambda) \begin{pmatrix} E_+^{(0)}(B, Z; \lambda)v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (P(B, Z; \theta) - \lambda) \left(E_+^{(0)}(B, Z; \lambda)v_0 \right) \\ S_0 E_+^{(0)}(B, Z; \lambda)v_0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'égalité $v_0 = S_0 E_+^{(0)}(B, Z; \lambda)v_0$ assure que le vecteur $E_+^{(0)}(B, Z; \lambda)v_0$ est non nul et l'égalité $(P(B, Z; \theta) - \lambda) \left(E_+^{(0)}(B, Z; \lambda)v_0 \right) = 0$ assure qu'il s'agit d'un vecteur propre de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$.

On a donc obtenu que $\lambda \in \Omega_{0,B}^\delta$ est une valeur propre de $P(B, Z; \theta)$ si et seulement si 0 est une valeur propre de $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$ avec l'égalité des multiplicités géométriques.

Pour obtenir l'égalité des multiplicités algébriques, on étudie le rang du projecteur $\Pi(\theta) = -\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\lambda} (P(B, Z; \theta) - z)^{-1} dz$ où $\Gamma_\lambda := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| = \varepsilon\}$ et $\varepsilon \ll 1$ pour avoir $\sigma(\dot{P}(B, Z; \theta)) \cap \mathcal{B}(\lambda, 2\varepsilon) = \{\lambda\}$.

D'après [[23], Appendice 2], on sait que $\text{rang} \left(-\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\lambda} (E_{+-}^{(0)}(B, Z; z))^{-1} dz \right) \leq \text{rang}(\Pi(\theta))$.

Comme $\mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda)$ est l'inverse de $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda)$, on obtient la relation

$$(P(B, Z; \theta) - z)^{-1} = E^{(0)}(B, Z; z) - E_+^{(0)}(B, Z; z) \left(E_{+-}^{(0)}(B, Z; z) \right)^{-1} E_-^{(0)}(B, Z; z).$$

$E^{(0)}(B, Z; z)$ étant holomorphe en la variable z , on a

$$\text{rang}(\Pi(\theta)) = \text{rang} \left(\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\lambda} E_+^{(0)}(B, Z; z) \left(E_{+-}^{(0)}(B, Z; z) \right)^{-1} E_-^{(0)}(B, Z; z) dz \right).$$

De plus

$$\begin{aligned} \text{rang}(\Pi(\theta)) &= \text{Tr}(\Pi(\theta)) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\lambda} \text{Tr} \left(E_+^{(0)}(B, Z; z) \left(E_{+-}^{(0)}(B, Z; z) \right)^{-1} E_-^{(0)}(B, Z; z) \right) dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\lambda} \text{Tr} \left(\left(E_{+-}^{(0)}(B, Z; z) \right)^{-1} E_-^{(0)}(B, Z; z) E_+^{(0)}(B, Z; z) \right) dz. \end{aligned}$$

Comme $E_-^{(0)}(B, Z; z) E_+^{(0)}(B, Z; z) = I_2 + Z S_0 \tilde{\mathbb{V}}_\theta \hat{R}_0(B, Z; z) \hat{R}_0(B, Z; z) \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_0 = I_2 + \mathcal{O}(h^2)$, on en déduit que $\text{rang}(\Pi(\theta)) \geq \text{rang} \left(-\frac{1}{2i\pi} \oint_{\Gamma_\lambda} (E_{+-}^{(0)}(B, Z; z))^{-1} dz \right)$.

Ainsi on a obtenu l'égalité des rangs, autrement dit, la multiplicité de λ valeur propre pour $P(B, Z; \theta)$ est égale à celle de 0 valeur propre pour l'opérateur $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$. \square

4.3.2 Étude près de Λ_q^+ et Λ_q^- (pour $q \geq 1$)

Soit $\delta \in]0; 1[$.

On pose pour $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{z}_{\delta, q+1}^+(t) = z_{q+1}^+(t) - \delta (\Lambda_{q+1}^+ - \Lambda_q^+)$ et $\tilde{z}_{\delta, q-1}^+(t) = z_{q-1}^+(t) - \delta (\Lambda_q^+ - \Lambda_{q-1}^+)$.

Comme pour la définition de $\Omega_{0,B}^\delta$, on peut remarquer que $\tilde{z}_{\delta, q+1}^+(\mathbb{R})$ est “au-dessous” de $z_{q+1}^+(\mathbb{R})$ et $\tilde{z}_{\delta, q-1}^+(\mathbb{R})$ est “au-dessus” de $z_{q-1}^+(\mathbb{R})$.

On note $\omega_{\delta, q}^+$ le point d’intersection de $\tilde{z}_{\delta, q-1}^+(\mathbb{R})$ et $\tilde{z}_{\delta, q+1}^+(\mathbb{R})$. L’ensemble $G_{\delta, q}^+$ est l’ensemble borné, convexe et fermé dont la frontière est formée par $[\tilde{z}_{\delta, q-1}^+(0), \tilde{z}_{\delta, q+1}^+(0)]$ et les arcs $\tilde{z}_{\delta, q-1}^+([0; t_0])$, $\tilde{z}_{\delta, q+1}^+([0; t_0])$.

On note $\tilde{G}_{\delta, q}^+$ l’intérieur de la réunion de $G_{\delta, q}^+$ avec son symétrique par rapport au point Λ_q^+ .

Enfin, on appellera $\Omega_{q,B}^\delta$ la réunion de $\tilde{G}_{\delta, q}^+$ et de son symétrique par rapport à 0.

Ainsi défini, l’ensemble $\Omega_{q,B}^\delta$ vérifie qu’il existe une constante $C_{\delta, \theta, q} > 0$ telle que la distance entre $\Omega_{q,B}^\delta$ et $\sigma(P(B, 0; \theta)) \setminus \{z_q^+(\mathbb{R}), z_q^-(\mathbb{R})\}$ est supérieure à $C_{\delta, \theta, q} B^{-\frac{1}{2}}$.

(Voir la figure (4.3))

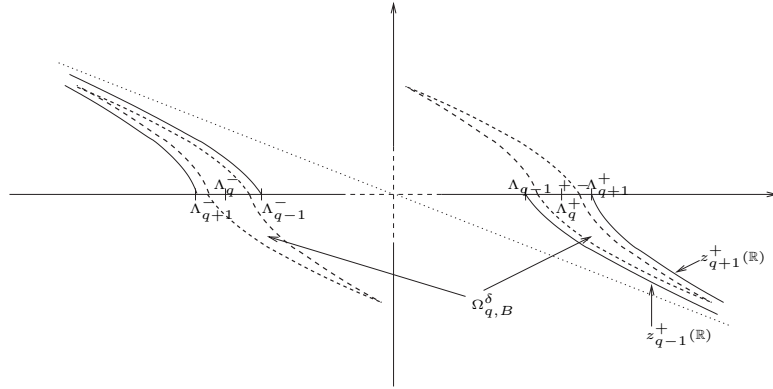


FIG. 4.3 – Ensemble $\Omega_{q,B}^\delta$ pour $\Im\theta > 0$

On a $\Omega_{q,B}^\delta \setminus \{\Lambda_q^+, \Lambda_q^-\} \cap \sigma(H_2) = \emptyset$.

De même que T_0 et S_0 , on définit l’opérateur T_q suivant :

$$\begin{aligned}
 T_q : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}^4) &\longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \\
 f = (f_1, f_2, f_3, f_4) &\longmapsto f_1 \otimes \tilde{F}_{2q-1}^+ + f_2 \otimes \tilde{F}_{2q}^+ + f_3 \otimes \tilde{F}_{2q-1}^- + f_4 \otimes \tilde{F}_{2q}^-
 \end{aligned}$$

et l'opérateur S_q par :

$$S_q : \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}^4)$$

$$g \longmapsto \left(\left\langle g, \tilde{F}_{2q-1}^+ \right\rangle_{x_2}, \left\langle g, \tilde{F}_{2q}^+ \right\rangle_{x_2}, \left\langle g, \tilde{F}_{2q-1}^- \right\rangle_{x_2}, \left\langle g, \tilde{F}_{2q}^- \right\rangle_{x_2} \right).$$

On considère le problème de Grushin :

$$\mathcal{P}^{(q)}(\lambda) : \mathcal{D}(P(B)) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}^4) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}^4)$$

$$\mathcal{P}^{(q)}(\lambda) = \begin{pmatrix} P(B, Z; \theta) - \lambda & T_q \\ S_q & 0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

On note par $\mathbf{\Pi}_q$ l'opérateur composé $T_q \circ S_q$. Il s'agit de la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}) \otimes E_q$.

On remarque alors que $S_q \circ T_q = Id_{x_1, x_3}$.

On pose $\hat{\mathbf{\Pi}}_q := Id - \mathbf{\Pi}_q$ et on définit la résolvante réduite

$$\hat{R}_q(B, Z; \lambda) := \left(\hat{\mathbf{\Pi}}_q P(B, Z; \theta) \hat{\mathbf{\Pi}}_q - \lambda \right)^{-1} \hat{\mathbf{\Pi}}_q.$$

De même que lors de l'étude de $\hat{R}_0(B, Z; \lambda)$, on obtient un résultat identique pour majorer la norme de la résolvante réduite $\hat{R}_q(B, Z; \lambda)$:

Lemme 4.10. *Si B et Z vérifient (4.11), V satisfait (4.13) et $\lambda \in \Omega_{q, B}^\delta$, alors*

$$\left\| \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{B}}$$

où la constante $C > 0$ est indépendante de B , Z et de $\lambda \in \Omega_{q, B}^\delta$.

La démonstration de ce Lemme étant identique au Lemme 4.7, on ne la présentera pas.

Pour simplifier l'énoncé et la démonstration du résultat suivant, on va renommer les vecteurs définissant E_q comme suit :

$$\varphi_1^{(q)} = \tilde{F}_{2q-1}^+ \quad \varphi_2^{(q)} = \tilde{F}_{2q}^+ \quad \varphi_3^{(q)} = \tilde{F}_{2q-1}^- \quad \varphi_4^{(q)} = \tilde{F}_{2q}^-.$$

Théorème 4.11. *Si B et Z vérifient (4.11), V satisfait (4.13) et $\lambda \in \Omega_{q, B}^\delta$, alors le "problème de Grushin" $\mathcal{P}^{(q)}(\lambda)$ admet une unique solution donnée par*

$$\mathcal{E}^{(q)}(\lambda) = \begin{pmatrix} E^{(q)}(B, Z; \lambda) & E_+^{(q)}(B, Z; \lambda) \\ E_-^{(q)}(B, Z; \lambda) & E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda) \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

où $E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda)$ est l'opérateur pseudodifférentiel admettant pour développement asymptotique

$$\lambda I_4 - \Lambda_q^+ \alpha_4 - e^{-\theta} D_3 \alpha_3 - ZV^W \left(x_1; -hD_1, e^\theta x_3 \right) \cdot I_4$$

$$- hZ \sum_{j=0}^{\infty} h^{\frac{j}{2}} a_j^W \left(x_1, hD_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} D_3; \sqrt{h}Z, \sqrt{h}\lambda \right)$$

avec $a_j \in S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_4(\mathbb{C}))$ et sont holomorphes en les variables $\sqrt{h}Z$ et $\sqrt{h}\lambda$.

Remarque. De même que pour le Théorème 4.8, on va obtenir que a_0^W est de la forme $\frac{1}{4}M_B^{(q)}(\Delta_{12}V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \cdot I_4 + \sqrt{h}Zb_0^W$ où b_0 est un élément de $S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_4(\mathbb{C}))$ et $M_B^{(q)} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ est la matrice hermitienne définie par

$$M_B^{(q)} = \left(\left\langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_j^{(q)}, \varphi_i^{(q)} \right\rangle \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$$

en notant $\mathbb{H}_{osc} = (D_2^2 + x_2^2) I_4$.

De même que lors de l'étude près des premiers niveaux de Landau-Dirac, on ramène l'étude spectrale près de Λ_q^+ et Λ_q^- à celle de l'opérateur $E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda)$ près de 0 via le résultat suivant :

Corollaire 4.12. Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

On suppose que les hypothèses du Théorème 4.10 sont satisfaites.

Alors : $\lambda \in \Omega_{q,B}^\delta$ est une valeur propre de $P(B, Z; \theta)$ si et seulement si 0 est une valeur propre de $E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda)$.

De plus, les multiplicités algébriques de ces valeurs propres sont identiques.

Remarques. 1) La démonstration étant identique à celle que Corollaire 4.9, elle ne sera pas développée.

2) De même que pour l'étude près de Λ_0^\pm , on rappelle que les éléments du spectre discret de $P(B, Z; \theta)$ contenus dans $\Omega_{q,B}^\delta$ se situent dans l'ensemble $\Omega_{q,B}^\delta \cap \{z \in \mathbb{C} : \Re z \cdot \Im z < 0\}$.

Démonstration du Théorème 4.11. On cherche à inverser l'opérateur $\mathcal{P}^{(q)}(\lambda)$ en posant comme première approximation

$$\mathcal{E}_0^{(q)}(\lambda) := \begin{pmatrix} \widehat{R}_q(B, Z; \lambda) & T_q \\ S_q & e_0^{(q)}(\lambda) \end{pmatrix}$$

où $e_0^{(q)}(\lambda) := \lambda I_4 - \left\{ \Lambda_q^+ \alpha_4 + e^{-\theta} D_3 \alpha_3 + Z S_q \widetilde{V}_\theta T_q \right\}$ est un opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^4)$.

Le produit $\mathcal{P}^{(q)}(\lambda) \cdot \mathcal{E}_0^{(q)}(\lambda)$ donne alors

$$\begin{pmatrix} \left(\widetilde{P}(B, Z; \theta) - \lambda \right) \widehat{R}_q(B, Z; \lambda) + T_q S_q & \left(\widetilde{P}(B, Z; \theta) - \lambda \right) T_q + T_q e_0^{(q)}(\lambda) \\ S_q \widehat{R}_q(B, Z; \lambda) & S_q T_q \end{pmatrix}.$$

De nouveau, comme pour l'étude du produit $\mathcal{P}^{(0)}(\lambda) \cdot \mathcal{E}_0^{(0)}(\lambda)$, on montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{(q)}(\lambda) \cdot \mathcal{E}_0^{(q)}(\lambda) &= \begin{pmatrix} Id + Z \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_q, \widetilde{V}_\theta \end{bmatrix} \widehat{R}_q(B, Z; \lambda) & -Z \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_q, \widetilde{V}_\theta \end{bmatrix} T_q \\ 0 & Id_{x_1, x_3} \end{pmatrix} \\ &= I + K_q(\lambda). \end{aligned}$$

On veut montrer que $\|K_q(\lambda)\| < 1$ pour pouvoir inverser $I + K_q(\lambda)$, pour cela on étudie $[\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta]$.

On va utiliser l'écriture des vecteurs $\varphi_j^{(q)}$ suivante

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(q)} &= c_1 f_{q+1} \cdot e_1 && + c_4 f_q \cdot e_4 \\ \varphi_2^{(q)} &= && c_2 f_q \cdot e_2 + c_3 f_{q+1} \cdot e_3 \\ \varphi_3^{(q)} &= && -c_4 f_q \cdot e_2 + c_1 f_{q+1} \cdot e_3 \\ \varphi_4^{(q)} &= c_3 f_{q+1} \cdot e_1 && - c_2 f_q \cdot e_4\end{aligned}$$

où l'on rappelle que f_j est un vecteur propre, normé, de l'oscillateur harmonique associé à la valeur propre $2j - 1$, et (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique de \mathbb{C}^4 .

Pour $G \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^4)$, on a

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta] G &= \mathbf{\Pi}_q (\tilde{\mathbf{V}}_\theta G) - \tilde{\mathbf{V}}_\theta (\mathbf{\Pi}_q G) \\ &= \sum_{j=1}^4 \left(\langle \tilde{\mathbf{V}}_\theta G, \varphi_j^{(q)} \rangle \varphi_j^{(q)} - \tilde{\mathbf{V}}_\theta \left(\langle G, \varphi_j^{(q)} \rangle \varphi_j^{(q)} \right) \right).\end{aligned}$$

D'après l'écriture des vecteurs $\varphi_j^{(q)}$ ci-dessus, et d'après [[54], Théo 2.2], on obtient $\left\| \langle [\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta] G, e_k \rangle \right\| = \mathcal{O}(B^{-\frac{1}{2}})$. On en déduit que $\left\| [\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta] \right\| \leq \frac{C}{\sqrt{B}}$, ce qui entraîne $\left\| Z [\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta] \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \right\| \leq \tilde{C} B^{-\frac{1+\varepsilon}{2}}$.

Ainsi pour $B \gg 1$, l'opérateur $I + K_q(\lambda)$ est inversible et son inverse est de la forme

$$(I + K_q(\lambda))^{-1} = \begin{pmatrix} A^{(q)}(\lambda) & -ZA^{(q)}(\lambda) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \tilde{\mathbf{V}}_\theta T_q \\ 0 & Id_{x_1, x_3} \end{pmatrix}$$

où $A^{(q)}(\lambda) := \left[1 - Z [\tilde{\mathbf{V}}_\theta, \mathbf{\Pi}_q] \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \right]^{-1}$.

Ainsi $\mathcal{P}^{(q)}(\lambda) \left[\mathcal{E}_0^{(q)}(\lambda) \cdot (I + K_q(\lambda))^{-1} \right] = I$ et donc on obtient comme expression de $E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda)$:

$$\begin{aligned}E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda) &= e_0^{(q)}(\lambda) - Z S_q A^{(q)}(\lambda) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \tilde{\mathbf{V}}_\theta T_q \\ &= \lambda I_4 - \left\{ \Lambda_q^+ \alpha_4 + e^{-\theta} D_3 \alpha_3 + Z S_q \tilde{\mathbf{V}}_\theta T_q + Z S_q A^{(q)}(\lambda) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \tilde{\mathbf{V}}_\theta T_q \right\}.\end{aligned}$$

De même que pour l'étude près de Λ_0^\pm , comme $\left\| Z [\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta] \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \right\| < 1$, et $\mathbf{\Pi}_q \cdot \hat{R}_q(B, Z; \lambda) = \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \cdot \mathbf{\Pi}_q = 0$, on en déduit donc

$$A^{(q)}(\lambda) = 1 + Z [\mathbf{\Pi}_q, \tilde{\mathbf{V}}_\theta] \hat{R}_q(B, Z; \lambda).$$

D'où

$$\begin{aligned}
E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda) &= \lambda I_4 - \Lambda_q^+ \alpha_4 - e^{-\theta} D_3 \alpha_3 - Z S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q \\
&\quad - Z S_q \hat{\mathbf{\Pi}}_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q - Z^2 S_q \left[\tilde{\mathbb{V}}_\theta, \mathbf{\Pi}_q \right] \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \hat{\mathbf{\Pi}}_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q \\
&= \lambda I_4 - \Lambda_q^+ \alpha_4 - e^{-\theta} D_3 \alpha_3 - Z S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q \\
&\quad - Z^2 S_q \left[\tilde{\mathbb{V}}_\theta, \mathbf{\Pi}_q \right] \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \left[\tilde{\mathbb{V}}_\theta, \mathbf{\Pi}_q \right] T_q.
\end{aligned}$$

Pour $G \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2; \mathbb{C}^4)$, on a

$$\begin{aligned}
S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q G &= \left(\left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_1 \varphi_1^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_4 \varphi_4^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \right\rangle ; \right. \\
&\quad \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_2 \varphi_2^{(q)}, \varphi_2^{(q)} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_3 \varphi_3^{(q)}, \varphi_2^{(q)} \right\rangle ; \\
&\quad \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_3 \varphi_3^{(q)}, \varphi_3^{(q)} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_2 \varphi_2^{(q)}, \varphi_3^{(q)} \right\rangle ; \\
&\quad \left. \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_4 \varphi_4^{(q)}, \varphi_4^{(q)} \right\rangle + \left\langle \tilde{\mathbb{V}}_\theta G_1 \varphi_1^{(q)}, \varphi_4^{(q)} \right\rangle \right).
\end{aligned}$$

Ainsi en revenant à la décomposition des $\varphi_j^{(q)}$ dans la base canonique de \mathbb{C}^4 , on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\langle S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q G, e_1 \right\rangle \\
&\quad = \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_1|^2 G_1 + c_3 \bar{c}_1 G_4 \right) f_{q+1}, f_{q+1} \right\rangle + \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_4|^2 G_1 - c_2 \bar{c}_4 G_4 \right) f_q, f_q \right\rangle \\
&\left\langle S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q G, e_2 \right\rangle \\
&\quad = \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_2|^2 G_2 + c_1 \bar{c}_3 G_3 \right) f_q, f_q \right\rangle + \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_3|^2 G_2 - c_4 \bar{c}_2 G_3 \right) f_{q+1}, f_{q+1} \right\rangle \\
&\left\langle S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q G, e_3 \right\rangle \\
&\quad = \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_4|^2 G_3 - c_2 \bar{c}_4 G_2 \right) f_q, f_q \right\rangle + \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_1|^2 G_3 + c_3 \bar{c}_1 G_3 \right) f_{q+1}, f_{q+1} \right\rangle \\
&\left\langle S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q G, e_4 \right\rangle \\
&\quad = \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_3|^2 G_4 + c_1 \bar{c}_3 G_1 \right) f_{q+1}, f_{q+1} \right\rangle + \left\langle \tilde{V}_\theta \left(|c_2|^2 G_4 - c_4 \bar{c}_1 G_1 \right) f_q, f_q \right\rangle.
\end{aligned}$$

Comme f_q et f_{q+1} sont des vecteurs propres de l'oscillateur harmonique, de norme 1, on se retrouve, de nouveau, dans le cadre du travail [54], et ainsi on obtient que $\left\langle \tilde{V}_\theta(\cdot \otimes f_q), f_q \right\rangle$ et $\left\langle \tilde{V}_\theta(\cdot \otimes f_{q+1}), f_{q+1} \right\rangle$ sont des opérateurs pseudodifférentiels sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_1, x_3}^2, \mathbb{C})$ donnés respectivement par

les développements asymptotiques

$$\begin{aligned}
& \left\langle \tilde{V}_\theta(\cdot \otimes f_q), f_q \right\rangle \\
&= V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) + (2q-1)\frac{h}{4}(\Delta_{12}V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty} h^j b_{j,q}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3) \\
& \left\langle \tilde{V}_\theta(\cdot \otimes f_{q+1}), f_{q+1} \right\rangle \\
&= V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) + (2q+1)\frac{h}{4}(\Delta_{12}V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty} h^j b_{j,q+1}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3)
\end{aligned}$$

où les $b_{j,k}^W$ sont des opérateurs pseudodifférentiels à symbole dans $S^0(\mathbb{R}^4, \mathbb{C})$.
On en déduit donc

$$\begin{aligned}
& \left\langle S_q \tilde{V}_\theta T_q G, e_1 \right\rangle \\
&= V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \left[(|c_1|^2 + |c_4|^2)G_1 + (c_3\bar{c}_1 - c_2\bar{c}_4)G_4 \right] \\
&+ (2q+1)\frac{h}{4}(\Delta_{12}V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \left[|c_1|^2 G_1 + c_3\bar{c}_1 G_4 \right] \\
&+ (2q-1)\frac{h}{4}(\Delta_{12}V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \left[|c_4|^2 G_1 - c_2\bar{c}_4 G_4 \right] \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty} h^j b_{j,q}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3) \left(|c_1|^2 G_1 - c_2\bar{c}_4 G_4 \right) \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty} h^j b_{j,q+1}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3) \left(|c_4|^2 G_1 + c_3\bar{c}_1 G_4 \right).
\end{aligned}$$

On peut simplifier cette expression grâce aux égalités suivantes

$$\begin{aligned}
|c_1|^2 + |c_4|^2 &= \left\| \varphi_1^{(q)} \right\|^2 = 1 \\
c_3\bar{c}_1 - c_2\bar{c}_4 &= \langle \varphi_4, \varphi_1 \rangle = 0 \\
(2q+1)|c_1|^2 + (2q-1)|c_4|^2 &= \left\langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_1^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \right\rangle \\
(2q+1)c_3\bar{c}_1 - (2q-1)c_2\bar{c}_4 &= \left\langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_4^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Ceci donne

$$\begin{aligned}
& \left\langle S_q \tilde{V}_\theta T_q G, e_1 \right\rangle \\
&= V^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) (G_1) \\
&+ \frac{h}{4}(\Delta_{12}V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) \left[\left\langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_1^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \right\rangle G_1 + \left\langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_4^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \right\rangle G_4 \right] \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty} h^j b_{j,q}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3) \left(|c_1|^2 G_1 - c_2\bar{c}_4 G_4 \right) \\
&+ \sum_{j=2}^{\infty} h^j b_{j,q+1}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3) \left(|c_4|^2 G_1 + c_3\bar{c}_1 G_4 \right).
\end{aligned}$$

En faisant de même avec les autres projections $\langle S_q \tilde{\mathbb{V}} T_q G, e_k \rangle$, on obtient le développement asymptotique

$$S_q \tilde{\mathbb{V}} T_q = V(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) I_4 + \frac{h}{4} (\Delta_{12} V)^W(x_1, -hD_1, e^\theta x_3) M_B^{(q)} + \sum_{j=2}^{\infty} h^j B_{j,q}^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3)$$

où $B_{j,q} \in S^0(\mathbb{R}^4, \mathcal{M}_4(\mathbb{C}))$ et $M_B^{(q)} = \left(\langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_j^{(q)}, \varphi_i^{(q)} \rangle \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$ est une matrice hermitienne de la forme

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_1^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \rangle & 0 & 0 & \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_4^{(q)}, \varphi_1^{(q)} \rangle \\ 0 & \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_2^{(q)}, \varphi_2^{(q)} \rangle & \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_3^{(q)}, \varphi_2^{(q)} \rangle & 0 \\ 0 & \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_2^{(q)}, \varphi_3^{(q)} \rangle & \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_3^{(q)}, \varphi_3^{(q)} \rangle & 0 \\ \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_1^{(q)}, \varphi_4^{(q)} \rangle & 0 & 0 & \langle \mathbb{H}_{osc} \varphi_4^{(q)}, \varphi_4^{(q)} \rangle \end{pmatrix}.$$

De même que lors de l'étude près de Λ_0^\pm , on conclut en utilisant le développement asymptotique de $S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q$:

$$S_q \tilde{\mathbb{V}}_\theta \hat{R}_q(B, Z; \lambda) \tilde{\mathbb{V}}_\theta T_q = \sum_{j=3}^{\infty} h^{\frac{j}{2}} a_j^W(x_1, hD_1, e^\theta x_3, h^{\frac{1}{2}} e^{-\theta} D_3; \sqrt{h} Z, h^{\frac{1}{2}} \lambda)$$

où $a_j \in S^0(\mathbb{R}^4; \mathcal{M}_4(\mathbb{C}))$. Par conséquent, on obtient bien la décomposition attendue pour $E_{+-}^{(q)}(B, Z; \lambda)$. \square

Le but de la réduction à un hamiltonien effectif est de chercher à obtenir, comme X.P. Wang dans [54], l'existence de résonances de forme près des niveaux de Landau-Dirac. Pour cela, on considère Q la partie principale de l'opérateur $E_{+-}^{(0)}(B, Z; \lambda)$, et on se ramène à un problème semi-classique en étudiant $\frac{1}{Z} Q$ où $Z \rightarrow \infty$. En imposant des conditions géométriques au potentiel V , on espère pouvoir obtenir l'existence de résonances de forme près Λ_0^\pm .

Annexe A

Annexe sur les valeurs propres

A.1 Quelques résultats connus

- Voici la relation IMS, Ismagilov-Morgan-Sigal :

Théorème A.1.

Soient $(J_a)_{a \in A}$ une partition de l'unité et l'opérateur $H = -\Delta + V$ pour un potentiel $V \in K_\nu$.

Alors on a la formule de localisation suivante :

$$H = \sum_{a \in A} J_a H J_a - \sum_{a \in A} |\nabla J_a|^2.$$

En dimension $\nu = 2$, la classe K_ν est celle des fonctions mesurables à valeurs réelles V telles que

$$\lim_{\alpha \downarrow 0} \left[\sup_x \int_{|x-y| \leq \alpha} \ln|x-y|^{-1} |V(y)| dy \right] = 0.$$

- Voici le Lemme de Glazman (issu de [7] p. 435) :

On note par $N(\mu)$ le nombre de valeurs propres d'un opérateur A , comptées avec multiplicité, plus petites que μ .

Lemme A.2. [[7], Lemme 3.1]

Soient \mathcal{D}_A le domaine de définition de l'opérateur A et \mathcal{D} un sous-espace de \mathcal{D}_A tel que A soit essentiellement auto-adjoint sur \mathcal{D} .

Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < \inf \sigma_{ess}(A)$, on a

$$N(\lambda - 0) = \sup \{ \dim L : L \subset \mathcal{D}, \langle Au, u \rangle < \lambda \|u\|^2, \forall u \in L \setminus \{0\} \}$$

- Voici un résultat de supersymétrie appliqué à l'opérateur de Pauli :

Théorème A.3. *[[12], Théo 6.4]*

Si $A \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, alors les opérateurs $-\Delta_B + B$ et $-\Delta_B - B$ ont le même spectre excepté éventuellement en 0.

A.2 Démonstration de la Proposition 2.1

On va maintenant se pencher sur la démonstration du résultat théorique de ce travail, à savoir la Proposition 2.1 qui, par la méthode variationnelle employée par M. Melgaard et G. Rozenblum, ramène le problème de l'asymptotique de $\mathcal{N}(\Lambda_1, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ à celui de l'opérateur de type Toeplitz PV_1P où P est la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ sur $\text{Ker}(D)$. N'ayant pas de confusion possible, on écrit ici P en lieu et place de P_B . On désigne par \mathbb{P} la projection orthogonale de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$ sur $\text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1)$. On a

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1) \iff \begin{cases} D^*u_2 = 0 \\ Du_1 - 2u_2 = 0 \end{cases}.$$

En utilisant le fait que $\text{Ker}(D^*) = \text{Ker}(DD^*) = \text{Ker}(-\Delta_B + B) = \{0\}$, on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1) &\iff \begin{cases} D^*u_2 = 0 \\ D^*Du_1 - 2D^*u_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} D^*u_2 = 0 \\ D^*Du_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} u_2 = 0 \\ Du_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi $\text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1) = \left\{ \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) : Q \in \text{Ker}(D) \right\}$. La \mathbb{D}_B -compacité de l'opérateur \mathbb{V} entraîne que $\mathbb{P}\mathbb{V}\mathbb{P}$ est un opérateur compact sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. En utilisant la décomposition $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) = \text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1) \oplus E$, la représentation matricielle de l'opérateur $\mathbb{P}\mathbb{V}\mathbb{P}$ peut s'écrire $\begin{pmatrix} PV_1P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. En particulier, on en déduit que $n_+(\lambda, \mathbb{P}\mathbb{V}\mathbb{P}) = n_+(\lambda, PV_1P)$.

• Minoration

Soit $\varepsilon \in]0; 1[$.

On va utiliser la formulation variationnelle suivante où $N(l, r|T)$ désigne le cardinal de $\sigma(T) \cap]l; r[$:

Lemme A.4. *[[34], Lemme 2.1]*

Soient T un opérateur autoadjoint sur un espace de Hilbert \mathcal{H} , et $(l, r) \in \mathbb{R}^2$ tels que $l < r$.

Alors en posant $s := \frac{r+l}{2}$ et $t := \frac{r-l}{2}$, on a

$$N(l, r|T) = \max \dim \{ \mathcal{L} \subset \mathcal{D}(T) : \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, \|(T - s)u\|_{\mathcal{H}}^2 < t^2 \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \}.$$

De plus, si T est un opérateur compact sur \mathcal{H} et $s \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$n_+(s, T) = \max \dim \{ \mathcal{L} \subset \mathcal{H} : \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, \langle Tu, u \rangle_{\mathcal{H}} > s \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \}.$$

On définit les réels $\gamma := 1 - \Lambda_-$, $\mu_\lambda := \frac{1 - \lambda + \Lambda_-}{2}$ et $\tau_\lambda := 1 - \lambda - \mu_\lambda$.

On va utiliser le Lemme A.3 en prenant \mathcal{L} un sous-espace de $\text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1)$. Comme $(1 - \mu_\lambda)^2 - \tau_\lambda^2 = \lambda\gamma$, pour $u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}$, l'inégalité

$$\|(\mathbb{D}_B - \mathbb{V} - \mu_\lambda)u\|^2 < \tau_\lambda^2 \|u\|^2 \quad (\text{A.1})$$

s'écrit $0 > \lambda\gamma \|u\|^2 + \|\mathbb{V}u\|^2 - 2(1 - \mu_\lambda) \text{Re}(u, \mathbb{V}u)$.

Comme $u \in \mathcal{L}$, il existe $u_1 \in \text{Ker}(D)$ tel que $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De plus V_1 étant à valeurs réelles, on a $\text{Re}(u, \mathbb{V}u) = \langle u_1, V_1 u_1 \rangle$. Le potentiel V_2 étant également à valeurs réelles, on obtient $\|\mathbb{V}u\|^2 = \langle u, \mathbb{V}^2 u \rangle$. Ainsi (A.1) est équivalente à

$$\lambda \|u\|^2 < \langle u_1, W_\lambda u_1 \rangle \quad (\text{A.2})$$

où W_λ est le potentiel de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} défini par

$$W_\lambda := 2 \frac{\lambda + \tau_\lambda}{\gamma} V_1 - \frac{1}{\gamma} V_1^2 = V_1 \left[1 + \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{1 - \Lambda_-} V_1 \right].$$

Ainsi il existe $\lambda_\varepsilon \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$, on a $W_\lambda \leq W_\varepsilon^+$ avec $W_\varepsilon^+ = V_1 \left[1 - \varepsilon \cdot \text{sgn}(V_1) - \frac{1}{1 - \Lambda_-} V_1 \right]$. L'inégalité $\lambda \|u\|^2 < \langle u, W_\varepsilon^+ u \rangle$ entraîne donc (A.2).

D'où $\{ \mathcal{L} \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) : \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, \langle W_\varepsilon^+ u, u \rangle > \lambda \|u\|^2 \}$ est un sous-ensemble de $\{ \mathcal{L} \subset \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2) : \forall u \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, \langle W_\lambda u, u \rangle > \lambda \|u\|^2 \}$.

On en déduit donc que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$,

$$n_+(\lambda, PW_\varepsilon^+ P) \leq n_+(\lambda, PW_\lambda P) \leq \mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda |\mathbb{D}_B - \mathbb{V}|). \quad (\text{A.3})$$

La minoration est donc obtenue pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$.

On fait de même pour étudier la minoration de $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+ |\mathbb{D}_B - \mathbb{V}|)$. En posant $\tilde{\gamma} := \Lambda_+ - 1$, $\tilde{\mu}_\lambda := \frac{\Lambda_+ + 1 + \lambda}{2}$ et $\tilde{\tau}_\lambda := \frac{\Lambda_+ - 1 - \lambda}{2}$, et en prenant toujours $\mathcal{L} \subset \text{Ker}(\mathbb{D}_B - 1)$, on a toujours l'inégalité (A.2) avec

$$W_\lambda = \frac{2(1 - \tilde{\mu}_\lambda)}{\tilde{\gamma}} V_1 - \frac{1}{\tilde{\gamma}} V_1^2 = -V_1 \left[1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{V_1}{\tilde{\gamma}} \right].$$

Mais en notant $W_\varepsilon^- := V_1 \left[1 - \varepsilon \cdot \text{sgn}(V_1) + \frac{1}{\tilde{\gamma}} V_1 \right]$, l'inégalité (A.2) équivaut à $-\lambda \|u_1\|^2 > \langle u_1, -W_\lambda u_1 \rangle$. On en déduit qu'il existe $\lambda_\varepsilon \in]0; +\infty[$ tel que pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$, $\langle u_1, -W_\lambda u_1 \rangle \geq \langle u_1, W_\varepsilon^- u_1 \rangle$. Par conséquent, pour tout $\lambda \in]0; \lambda_\varepsilon[$,

$$n_-(\lambda, PW_\varepsilon^- P) \leq \mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+ |\mathbb{D}_B - \mathbb{V}|).$$

• **Majoration**

Cette fois, on va utiliser la \mathbb{D}_B -compacité de l'opérateur \mathbb{V} et la caractérisation variationnelle suivante

Lemme A.5. *[[34], Lemme 2.1]*

On adopte les notations du Lemme A.4.

Si T est un opérateur autoadjoint sur \mathcal{H} , alors

$$N(l, r|T) = \min \text{codim} \{ \mathcal{L} \subset \mathcal{D}(T) : \forall u \in \mathcal{L}, \|(T - s)u\|_{\mathcal{H}}^2 \geq t^2 \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \}.$$

De plus, si T est un opérateur compact sur \mathcal{H} et $s \in \mathbb{R}_+^$, alors*

$$n_+(s, T) = \min \text{codim} \{ \mathcal{L} \subset \mathcal{H} : \forall u \in \mathcal{L}, \langle Tu, u \rangle_{\mathcal{H}} \leq s \|u\|_{\mathcal{H}}^2 \}.$$

On convient de noter $\Lambda_-(B) := \sup_{\substack{\mu \in \sigma(\mathbb{D}_B) \\ \mu < 1}} \mu$ et $\Lambda_+(B) := \inf_{\substack{\mu \in \sigma(\mathbb{D}_B) \\ \mu > 1}} \mu$.

Soit $\Lambda_0 \in]\Lambda_-(B); 1[$. Comme $+1$ est le seul point d'accumulation possible de $\sigma(\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$, on obtient que $N(\Lambda_0, \Lambda_- | \mathbb{D}_B - \mathbb{V})$ est fini. On définit également les réels $\gamma := 1 - \Lambda_0$, $\mu_\lambda := \frac{1 - \lambda + \Lambda_0}{2}$ et $\tau_\lambda := 1 - \lambda - \mu_\lambda$.

On note par \mathcal{K} le noyau de $\mathbb{D}_B - 1$ et par \mathcal{K}^\perp son sous-espace orthogonal dans $(\mathcal{D}(\mathbb{D}_B), (\cdot, \cdot))$.

Ainsi pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{D}_B)$, on utilise la décomposition $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in \mathcal{K}$ et $u_2 \in \mathcal{K}^\perp$. L'inégalité $\|(\mathbb{D}_B - \mathbb{V} - \mu_\lambda)u\|^2 \geq \tau_\lambda^2 \|u\|^2$ est alors équivalente à $E(u, \lambda)$

$$\|(\mathbb{D}_B - \mathbb{V} - \mu_\lambda)u\|^2 - \tau_\lambda^2 \|u_1\|^2 - \tau_\lambda^2 \|u_2\|^2 \geq 0.$$

On décompose $E(u, \lambda)$ en 6 termes :

$$\begin{aligned} E(u, \lambda) = & \underbrace{\|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2 - \tau_\lambda^2 \|u_2\|^2}_{T_1(u, \lambda)} - \underbrace{2\text{Re}((1 - \mu_\lambda)u_1, \mathbb{V}(u_1 + u_2))}_{T_2(u, \lambda)} \\ & - \underbrace{2\text{Re}((\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2, \mathbb{V}u_2)}_{T_3(u, \lambda)} - \underbrace{2\text{Re}((\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2, \mathbb{V}u_1)}_{T_4(u, \lambda)} + \gamma\lambda \|u_1\|^2 + \|\mathbb{V}(u_1 + u_2)\|^2. \end{aligned}$$

Soit $\delta \in]0; 1[$. Appliquant le Lemme A.4 à l'opérateur compact $\mathbb{P}|\mathbb{V}|\mathbb{P}$, on obtient l'existence d'un sous-espace vectoriel $\widetilde{\mathcal{M}}_\delta$ de $\mathcal{D}(\mathbb{D}_B)$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\delta, (u, \mathbb{P}|\mathbb{V}|\mathbb{P}u) \leq \lambda\delta \|u\|^2 \\ n_+(\lambda\delta, \mathbb{P}|V_1|P) \leq \text{codim}_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)}(\widetilde{\mathcal{M}}_\delta) \leq n_+(\lambda, \mathbb{P}|V_1|P) \\ \widetilde{\mathcal{M}}_\delta \text{ est de la forme } \mathcal{M}_\delta \oplus_{\perp} \mathcal{H} \text{ avec } \mathcal{M}_\delta = \mathbb{P}\widetilde{\mathcal{M}}_\delta. \end{array} \right.$$

Mais $\text{codim}_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)}(\widetilde{\mathcal{M}}_\delta)$ majorant $\text{codim}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_\delta)$, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall v \in \mathcal{M}_\delta, (v, \mathbb{V}v) \leq \lambda\delta \|v\|^2 \\ \text{codim}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_\delta) \leq n_+(\lambda, \mathbb{P}|V_1|P). \end{array} \right.$$

A partir de maintenant, on va supposer que $u_1 \in \mathcal{M}_\delta$.

• De $\mu_\lambda \notin \sigma(\mathbb{D}_B)$, on a $\|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\| \geq [\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\})] \|u_2\|$.
De plus

$$\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\}) \geq \tau_\lambda + \Omega_\pm \text{ où } \Omega_\pm := \min[\Lambda^+(B) - 1, \Lambda_0 - \Lambda^-(B)].$$

$$\text{Ainsi } T_1(u, \lambda) \geq \left[1 - \frac{\tau_\lambda^2}{\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\})^2} \right]^2 \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2.$$

Comme $\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\}) \leq 1 - \Lambda_-(B)$ et $\Lambda_-(B) < 0$, on en déduit que $1 - \Lambda_-(B) > 1$ et $\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\})^2 \leq (1 - \Lambda_-(B))^2$.

Comme $\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\})^2 - \tau_\lambda^2 \geq (\tau_\lambda + \Omega_\pm)^2 - \tau_\lambda^2 \geq \Omega_\pm^2$, on obtient $1 - \frac{\tau_\lambda^2}{\text{dist}(\mu_\lambda, \sigma(\mathbb{D}_B) \setminus \{1\})^2} \geq \frac{\Omega_\pm^2}{(1 - \Lambda_-(B))^2}$. D'où $T_1(u, \lambda) \geq c_\pm \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2$ avec $c_\pm := \frac{\Omega_\pm^2}{(1 - \Lambda_-(B))^2}$.

• L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\text{Re}(u_1, \mathbb{V}u_2) = \text{Re}(\mathbb{V}u_1, u_2)$ et associée aux inégalités

$$\|V_1 u_1\| \leq \sqrt{\|V_1\|_\infty} \sqrt{(u_1, |V_1|u_1)} \text{ et } \|u_2\| \leq \frac{1}{\Omega_\pm} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|$$

donne

$$\text{Re}(u_1, \mathbb{V}u_2) \leq \sqrt{\|V_1\|_\infty} \sqrt{(u_1, |V_1|u_1)} \frac{1}{\Omega_\pm} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|.$$

Mais u_1 étant dans \mathcal{M}_δ , on en déduit que

$$\text{Re}(u_1, \mathbb{V}u_2) \leq \frac{1}{\Omega_\pm} \sqrt{\lambda\delta\|\mathbb{V}\|_\infty} \|u_1\| \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|.$$

Pour $k \in \mathbb{R}_+^*$, on majore $2(1 - \mu_\lambda)\text{Re}(u_1, \mathbb{V}u_2)$ par

$$\left(\frac{4 \cdot 16k}{\Omega_\pm^2} (1 - \mu_\lambda)^2 \|\mathbb{V}\|_\infty \lambda\delta \|u_1\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{16k} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donc

$$2(1 - \mu_\lambda)\text{Re}(u_1, \mathbb{V}u_2) \leq \frac{128k}{\Omega_\pm^2} (1 - \mu_\lambda)^2 \|\mathbb{V}\|_\infty \lambda\delta \|u_1\|^2 + \frac{1}{8k} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2.$$

Ceci donne $T_2(u, \lambda) \leq c(k)\lambda\delta\|u_1\|^2 + \frac{1}{8k}\|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2$ où l'on a posé

$$c(k) := \left[\frac{128k}{\Omega_\pm^2} (1 - \Lambda^-(B)) \|\mathbb{V}\|_\infty + 2 \right] (1 - \Lambda^-(B)).$$

• D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $T_3(u, \lambda) \leq 2\|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\| \cdot \|\mathbb{V}u_2\|$ et donc

$$T_3(u, \lambda) \leq \frac{1}{8k} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2 + 8k \|\mathbb{V}u_2\|^2.$$

On pose $\mu := \frac{1+\Lambda_0}{2}$ de sorte que $\mu_\lambda = \mu + \frac{\lambda}{2}$.

Comme \mathbb{V} est \mathbb{D}_B -compact, $\mathbb{V}(\mathbb{D}_B - \mu)^{-1}$ est un opérateur compact sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}^2)$. D'où \mathbb{V} est un opérateur compact sur l'espace \mathcal{K}^\perp muni de la norme $|\cdot|_\perp := \|(\mathbb{D}_B - \mu) \cdot\|$. Ainsi \mathbb{V}^2 est un opérateur compact sur $(\mathcal{K}^\perp, |\cdot|_\perp)$, et

$$\begin{aligned} n_+ \left(\frac{1}{128k^2}, \mathbb{V}^2 \right) &= \max \dim \{ \mathcal{L} \subset \mathcal{K}^\perp : \forall v \in \mathcal{L} \setminus \{0\}, (\mathbb{V}^2 v, v) > \frac{1}{128k^2} |v|_\perp \} \\ &\leq \max \dim \{ \mathcal{M} \subset \mathcal{D}(\mathbb{D}_B) : \forall v \in \mathcal{M} \setminus \{0\}, \|\mathbb{V}v\|^2 > \frac{1}{128k^2} \|(\mathbb{D}_B - \mu)v\|^2 \}. \end{aligned}$$

Le membre de droite de cette inégalité étant fini, il existe un s.e.v. \mathcal{M}_k de \mathcal{K}^\perp de codimension finie tel que $\|\mathbb{V}v\|^2 \leq \frac{1}{128k^2} \|(\mathbb{D}_B - \mu)v\|^2$, pour tout $v \in \mathcal{M}_k$. En se servant du fait que

$$\|(\mathbb{D}_B - \mu)v\| \leq \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)v\| + \frac{\lambda}{2} \|v\| \text{ et } 1 + \frac{\lambda}{2\Omega_\pm} < 2,$$

on montre que pour $u_2 \in \mathcal{M}_k$, on a $T_3(u, \lambda) \leq \frac{1}{4k} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2$.

• De même que pour $T_3(\mu, \lambda)$, on peut majorer $T_4(\mu, \lambda)$ par la quantité $2\|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\| \cdot \|\mathbb{V}u_1\|$. En reprenant les calculs effectués pour $T_2(\mu, \lambda)$, on obtient alors

$$T_4(u, \lambda) \leq \frac{1}{8k} \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2 + 8k\lambda\delta \|\mathbb{V}\|_\infty \|u_1\|^2.$$

On en déduit donc que $E(u, \lambda)$ est minorée par

$$[\gamma - \delta(8k\|\mathbb{V}\|_\infty + c(k))] \lambda \|u_1\|^2 + [c_\pm - \frac{1}{2k}] \|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda)u_2\|^2.$$

On va maintenant fixer les constantes ε et k :

on choisit $k_0 > 0$ tel que $c_\pm - \frac{1}{2k_0} > 0$,

puis $\varepsilon_0 \in]0; 1[$ tel que $\gamma - \varepsilon_0(8k_0\|\mathbb{V}\|_\infty + c(k_0)) > 0$.

Ainsi pour tout $u \in \mathcal{M}_{\varepsilon_0} \oplus_{\perp} \mathcal{M}_{k_0}$, on a $\|(\mathbb{D}_B - \mu_\lambda - \mathbb{V})u\| \geq \tau_\lambda \|u\|$.

De plus $\text{codim}_{\mathcal{D}(\mathbb{D}_B)} \left(\mathcal{M}_{\varepsilon_0} \oplus_{\perp} \mathcal{M}_{k_0} \right) \leq \text{codim}_{\mathcal{K}}(\mathcal{M}_{\varepsilon_0}) + \text{codim}_{\mathcal{K}^\perp}(\mathcal{M}_{k_0})$, ce qui donne

$$\text{codim}_{\mathcal{D}(\mathbb{D}_B)} \left(\mathcal{M}_{\varepsilon_0} \oplus_{\perp} \mathcal{M}_{k_0} \right) \leq n_+(\lambda, P|V_1|P) + \text{codim}_{\mathcal{K}^\perp}(\mathcal{M}_{k_0}).$$

D'après le Lemme A.4, on obtient

$$\mathcal{N}(\Lambda_0, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \leq n_+(\lambda, P|V_1|P) + \text{codim}_{\mathcal{K}^\perp}(\mathcal{M}_{k_0}).$$

Ainsi en posant $C := \text{codim}_{\mathcal{K}^\perp}(\mathcal{M}_{k_0}) + N(\Lambda_0, \Lambda_-|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$, on en déduit que

$$\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V}) \leq n_+(\lambda, P|V_1|P) + C. \quad (\text{A.4})$$

Des inégalités (A.3) et (A.4), on en déduit l'encadrement annoncé pour $\mathcal{N}(\Lambda_-, 1 - \lambda|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$.

On fait de même pour obtenir un majorant de $\mathcal{N}(1 + \lambda, \Lambda_+|\mathbb{D}_B - \mathbb{V})$, et ainsi obtenir l'encadrement désiré.

Annexe B

Annexe sur les résonances

B.1 Démonstration du Lemme 4.1

On cherche donc à déterminer le spectre de

$$H_2 = \alpha_1(\sqrt{B}x_2) + \alpha_2(\sqrt{B}D_2) + \alpha_4$$

en tant qu'opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}, \mathbb{C}^4)$.

L'écriture matricielle de l'opérateur H_2 est donnée par

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{B}(x_2 - iD_2) \\ 0 & 1 & \sqrt{B}(x_2 + iD_2) & 0 \\ 0 & \sqrt{B}(x_2 - iD_2) & -1 & 0 \\ \sqrt{B}(x_2 + iD_2) & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notant par (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de \mathbb{C}^4 , on décompose l'espace $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$ en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}_{e_1, e_4}^2) \oplus \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}_{e_2, e_3}^2)$ pour réécrire H_2 sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{B}(x_2 - iD_2) \\ \sqrt{B}(x_2 + iD_2) & -1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{B}(x_2 + iD_2) \\ \sqrt{B}(x_2 - iD_2) & -1 \end{pmatrix}.$$

En posant $\mathbb{D}_{B,+}$, resp. $\mathbb{D}_{B,-}$, le premier, respectivement le second, opérateur présent dans cette somme, on remarque que

$$\sigma(H_2) = \sigma(\mathbb{D}_{B,+}) \cup \sigma(\mathbb{D}_{B,-}) \quad (\text{B.1})$$

De plus, de l'équivalence suivante

$$\mathbb{D}_{B,+} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \iff \mathbb{D}_{B,-} \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} -v \\ u \end{pmatrix}$$

on montre que $\sigma(\mathbb{D}_{B,-})$ est le symétrique par rapport à 0 de $\sigma(\mathbb{D}_{B,+})$.

En notant l'oscillateur harmonique $H_{osc} := D_2^2 + x_2^2$, opérateur sur $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C})$, on a

$$\mathbb{D}_{B,+}^2 = \begin{pmatrix} 1 + B(H_{osc} - 1) & 0 \\ 0 & 1 + B(H_{osc} + 1) \end{pmatrix}.$$

On sait que le spectre de H_{osc} est purement ponctuel, constitué de valeurs propres simples, $\sigma(H_{osc}) = \sigma_d(H_{osc}) = \{2q - 1 : q \in \mathbb{N}^*\}$ avec

$$SEP(H_{osc}, 2q - 1) = Vect(\tilde{f}_q)$$

où $\tilde{f}_q(t) = H_{q-1}(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$ avec H_k le polynôme d'Hermite d'ordre k et la norme vérifie $\|\tilde{f}_q\|_{q \geq 1}^2 = \sqrt{\pi} 2^{q-1} (q-1)!$.

En normalisant $(\tilde{f}_q)_{q \geq 1}$, on obtient la famille $(f_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ qui forme une b.o.n. de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C})$.

Le spectre des opérateurs $1 + B(H_{osc} - 1)$ et $1 + B(H_{osc} + 1)$ est constitué de valeurs propres simples, plus précisément

$$\begin{aligned} \sigma(1 + B(H_{osc} - 1)) &= \sigma_d(1 + B(H_{osc} - 1)) = \{1 + 2B(q - 1) : q \in \mathbb{N}^*\} \\ &\text{avec } SEP(1 + B(H_{osc} - 1), 1 + 2B(q - 1)) = Vect(\tilde{f}_q) \\ \sigma(1 + B(H_{osc} + 1)) &= \sigma_d(1 + B(H_{osc} + 1)) = \{1 + 2Bq : q \in \mathbb{N}^*\} \\ &\text{avec } SEP(1 + B(H_{osc} - 1), 1 + 2Bq) = Vect(\tilde{f}_q). \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbb{D}_{B,+}^2) &= \sigma_d(\mathbb{D}_{B,+}^2) = \{1 + 2Bk : k \in \mathbb{N}\} \\ &\text{avec } SEP(\mathbb{D}_{B,+}^2, +1) = Vect\left(\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\text{et pour } q \geq 1, SEP(\mathbb{D}_{B,+}^2, 1 + 2Bq) = Vect\left(\begin{pmatrix} \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{f}_q \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

A l'aide de ces vecteurs propres de $\mathbb{D}_{B,+}^2$ et en s'inspirant de la démonstration d'I. Shigekawa [[50], Prop 2.5], on construit les vecteurs propres de $\mathbb{D}_{B,+}$:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbb{D}_{B,+}) &= \sigma_d(\mathbb{D}_{B,+}) = \{\Lambda_0^+\} \cup \{\Lambda_q^\pm : q \geq 1\} \\ &\text{avec } SEP(\mathbb{D}_{B,+}, \Lambda_0^+) = Vect\left(\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\text{et pour } q \geq 1, SEP(\mathbb{D}_{B,+}, \Lambda_q^\pm) = Vect\left(\begin{pmatrix} (\Lambda_q^+ \pm 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 2iq\sqrt{B} \tilde{f}_q \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

D'après (B.1), on en déduit que $\sigma(H_2) = \sigma_d(H_2) = \{\Lambda_q^\pm : q \in \mathbb{N}\}$ avec

$$SEP(H_2, \Lambda_0^+) = Vect \left(\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ et } SEP(H_2, \Lambda_0^-) = Vect \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

et pour $q \geq 1$

$$SEP(H_2, \Lambda_q^\pm) = Vect \left(\begin{pmatrix} (\Lambda_q^+ \pm 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \\ 0 \\ 2iq\sqrt{B}\tilde{f}_q \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -2iq\sqrt{B}\tilde{f}_q \\ (\Lambda_q^+ \mp 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

On posera alors pour la suite :

$$\begin{aligned} F_0^+ &:= \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_0^- := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{f}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et pour } q \geq 1, \\ F_{2q-1}^+ &:= \begin{pmatrix} (\Lambda_q^+ + 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \\ 0 \\ 2iq\sqrt{B}\tilde{f}_q \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{2q-1}^- := \alpha_3(F_{2q-1}^+) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2iq\sqrt{B}\tilde{f}_q \\ (\Lambda_q^+ + 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \end{pmatrix} \\ F_{2q}^+ &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -2iq\sqrt{B}\tilde{f}_q \\ (\Lambda_q^+ - 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F_{2q}^- := \alpha_3(F_{2q}^+) = \begin{pmatrix} (\Lambda_q^+ - 1) \tilde{f}_{q+1} \\ 0 \\ 0 \\ 2iq\sqrt{B}\tilde{f}_q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, en normalisant ces vecteurs F_k^\pm , on obtient que la famille $(\tilde{F}_k^\pm)_{k \in \mathbb{N}}$ réalise une b.o.n. de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_{x_2}; \mathbb{C}^4)$.

B.2 Quelques résultats connus

On rappelle un résultat issu de [48], utilisé pour la démonstration du Lemme 4.3 :

Lemme B.1. [[48], Théo 4.6]

Soit A un opérateur fermé sur un espace de Banach.

Si B est A -compact, alors $\sigma_{\text{ess}}(A) = \sigma_{\text{ess}}(A + B)$.

On rappelle le Théorème de Fredholm analytique :

Théorème B.2. [[44], Théo VI.14]

Soient D un ouvert connexe de \mathbb{C} et $f : D \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ une fonction analytique

à valeurs opérateurs telle que $f(z)$ est opérateur compact pour tout $z \in D$.

Alors on a soit

(a) $(I - f(z))^{-1}$ n'existe pour aucun $z \in D$

soit

(b) $(I - f(z))^{-1}$ existe pour tout $z \in D \setminus S$ où S est un sous-ensemble discret de D . Dans ce cas, $(I - f(z))^{-1}$ est méromorphe dans D , analytique dans $D \setminus S$, les résidus aux pôles sont des opérateurs de rang fini, et si $z \in S$, alors $f(z)\psi = \psi$ admet une solution non nulle dans \mathcal{H} .

Théorème B.3. [[24], Théo 6.10]

Soit A un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et λ une valeur propre plongée.

La projection P_λ sur l'espace propre est donné par

$$P_\lambda = s - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^\pm} (-i\varepsilon)(A - \lambda - i\varepsilon)^{-1}.$$

Bibliographie

- [1] L. AMOUR, R. BRUMMELHUIS et J. NOURRIGAT, *Resonances of the Dirac Hamiltonian in the non relativistic limit*, Ann. Henri Poincaré 2, No.3, 583–603 (2001).
- [2] J. AVRON, I. HERBST et B. SIMON : *Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions*, Duke Math. J. 45, No.4, 847–883 (1978).
- [3] A. BALAZARD-KONLEIN : *Calcul fonctionnel pour des opérateurs h -admissibles à symboles opérateur et application*, Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Nantes, 1985.
- [4] E. BALSLEV et B. HELFFER : *Limiting Absorption Principle and Resonances for the Dirac Operator*, Adv. Appl. Math. 13, No.2, 186-215 (1992).
- [5] J.F. BONY, V. BRUNEAU et G. RAIKOV : *Resonances and spectral shift function near the Landau levels*, arXiv 0603731.
- [6] N. BENKIRANE : *Propriétés d'indice en théorie höldérienne pour des opérateurs elliptiques dans \mathbb{R}^n* , Thèse de doctorat de 3^{ème} cycle, Nantes, 1987.
- [7] F. A. BEREZIN et M. A. SHUBIN : *The Schrödinger equation*, Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [8] M. BOYARCHENKO et S. LEVENDORSKII : *Beyond the classical Weyl and Colin de Verdière's formulas for Schrödinger operators with polynomial magnetic and electric fields*, arXiv 0406071 v1.
- [9] P. R. CHERNOFF : *Schrödinger and Dirac operators with singular potentials and hyperbolic equations*, Pac. J. Math. 72, No.2, 361–382 (1977).
- [10] Y. COLIN DE VERDIÈRE : *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques bidimensionnelles*, Prépublication de l'Inst. Fourier n°33, 1985.
- [11] Y. COLIN DE VERDIÈRE : *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Commun. Math. Phys. 105, 327–335 (1986).

- [12] H. L. CYCON, R. G. FROESE, W. KIRSCH et B. SIMON : *Schrödinger Operators with application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer-Verlag (1987).
- [13] J. M. COMBES, R. SCHRADER et R. SEILER : *Classical Bounds and Limits for Energy Distributions of Hamiltonian Operators in Electromagnetic Fields*, Ann. Phys. 111, No.1, 1–18 (1978).
- [14] M. DIMASSI : *Développements asymptotiques de l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique fort*, Commun. Partial Differ. Equations 26, No.3-4, 595–627 (2001).
- [15] M. DIMASSI et V. PETKOV : *Spectral shift function and resonances for non semi-bounded and Stark hamiltonians*, J. Math. Pures Appl. IX. Sér. 82, No.10, 1303–1342 (2003).
- [16] M. DIMASSI et V. PETKOV : *Resonances for magnetic Stark Hamiltonians in two dimensional case*, Int. Math. Res. Not. 2004, No.77, 4147–4179 (2004).
- [17] M. DIMASSI et G. D. RAIKOV : *Spectral asymptotics for quantum Hamiltonians in strong magnetic fields*, Cubo Mat. Educ. 3, No.2, 317–393 (2001).
- [18] P. A. M. DIRAC : *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. Roy. Soc. London A117, 610–624, 1928.
- [19] P. A. M. DIRAC : *The Quantum Theory of the Electron, Part II*, Proc. Roy. Soc. London A118, 351–361, 1928.
- [20] N. FILONOV et A. PUSHNITSKI : *Spectral asymptotics of Pauli operators and orthogonal polynomials in complex domains*, arXiv 0504044 v1.
- [21] B. C. HALL : *Holomorphic methods in analysis and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Contemp. Math. 260, 1–59 (2000).
- [22] B. HELFFER et A. MOHAMED : *Caractérisation du spectre essentiel de l'opérateur de Schrödinger avec un champ magnétique*, Ann. Inst. Fourier 38, No.2, 95–112 (1988).
- [23] B. HELFFER et J. SJÖSTRAND : *Résonances en limite semi-classique*, Bull. Soc. Math. France, Suppl. n°24/25, 1986.
- [24] P. D. HISLOP et I. M. SIGAL : *Introduction to Spectral Theory : with Applications to Schrödinger Operators*, Springer, Applied Mathematical Sciences n°113.
- [25] B. HELFFER, J. NOURRIGAT et X. P. WANG : *Sur le spectre de l'équation de Dirac (dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3) avec champ magnétique*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., IV. Sér.22, No.4, 515–533 (1989).

- [26] V. IVRII : *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer, Monographs in Math., 1998.
- [27] A. IWATSUKA : *The essential spectrum of the two-dimensional Schrödinger operators with perturbed constant magnetic fields*, J. Math. Kyoto Univ, 23, 475–480 (1983).
- [28] A. IWATSUKA et H. TAMURA : *Asymptotic Distribution of eigenvalues for Pauli operators with nonconstant magnetic fields*, Duke Math. J. 93, No.3, 535–574 (1998).
- [29] A. IWATSUKA et H. TAMURA : *Asymptotic Distribution of negative eigenvalues for two dimensional Pauli operators with nonconstant magnetic fields*, Ann. Inst. Fourier 48, No.2, 479–515 (1998).
- [30] V. KONDRATIEV et M. SHUBIN, *Discreteness of spectrum for magnetic Schrödinger operators*, Commun. Partial Differ. Equations 27, No.3-4, 477–525 (2002).
- [31] E. H. LIEB et M. LOSS : *Analysis*, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [32] H. MATSUMOTO : *Classical and Non-classical Eigenvalue Asymptotics for Magnetic Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. 95, No.2, 460–482 (1991).
- [33] M. MELGAARD et G. ROZENBLUM : *Spectral estimates for magnetic operators*, Math. Scand. 79, No.2, 237–254 (1996).
- [34] M. MELGAARD et G. ROZENBLUM : *Eigenvalues asymptotics for even-dimensional perturbed Dirac and Schrödinger operators with constant magnetic fields of full rank*, Commun. Partial Differ. Equations 28, No.3-4, 697–736 (2003).
- [35] A. MOHAMED et G. D. RAIKOV : *On the Spectral Theory of the Schrödinger Operators with Electromagnetic Potential, Pseudo-differential Calculus and Mathematical Physics*, Adv. Partial Differ. Eq., Academic Press, 5, 298–390 (1994).
- [36] F. NICOLEAU : *Théorie de la diffusion pour l'opérateur de Schrödinger en présence d'un champ magnétique*, Thèse de doctorat de 3^{eme} cycle, Nantes, 1991.
- [37] B. PARISSÉ : *Résonances pour l'opérateur de Dirac*, Helvetica Physica Acta, 64 (1991), 557–591.
- [38] B. PARISSÉ : *Résonances pour l'opérateur de Dirac II*, Helvetica Physica Acta, 65 (1992), 1077–1118.
- [39] G. D. RAIKOV : *Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator in strong constant magnetic field*, Commun. Partial Differ. Equations 23, No.9-10, 1583–1619 (1998).

- [40] G. D. RAIKOV : *Eigenvalue asymptotics for the Pauli operator in strong nonconstant magnetic fields*, Ann. Inst. Fourier 49, No.5, 1603–1636 (1999).
- [41] G. D. RAIKOV : *Eigenvalue asymptotics for the Dirac operator in strong constant magnetic fields*, Math. Phys. Electron. J. 5, Paper No.2, 22p. (1999).
- [42] G. D. RAIKOV : *Spectral asymptotics for the perturbed 2D Pauli operator with oscillating magnetic fields. I. Non-zero mean value of the magnetic field*, Markov Process. Related Fields 9, No.4, 775–794 (2003).
- [43] G. D. RAIKOV et S. WARZEL : *Quasi-classical versus non-classical spectral asymptotics for magnetic Schrödinger operators with decreasing electric potentials*, Rev. Math. Phys. 14, No 10, 1051–1072 (2002).
- [44] M. REED et B. SIMON : *Methods of Modern Mathematical Physics. I. Functional Analysis*, Academic Press, New York 1972.
- [45] S. RICHARD et R. TIEDRA DE ALDECOA : *On perturbations of Dirac operators with variable magnetic field of constant direction*, J. Math. Phys. 45, No.11, 4164–4173 (2004).
- [46] G. ROZENBLUM et N. SHIROKOV : *Infiniteness of zero modes for the Pauli operator with singular magnetic field*, J. Funct. Anal. 233, No.1, 135-172 (2006).
- [47] G. ROZENBLUM et M. SOLOMYAK : *On the Number of Negative Eigenvalues for the Two-Dimensional Magnetic Schrödinger Operator*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2, vol. 189, 205–217 (1999).
- [48] M. SCHECHTER : *Spectra of partial differential operators*, 1971.
- [49] P. SEBA : *The complex scaling method for Dirac resonances*, Lett. Math. Phys. 16, No.1, 51–59 (1988).
- [50] I. SHIGEKAWA : *Spectral Properties of Schrödinger Operators with Magnetic Fields for a Spin $\frac{1}{2}$ Particule*, J. Funct. Anal. 101, No.2, 255–285 (1991).
- [51] A. V. SOBOLEV : *Asymptotic behaviour of the energy levels of a quantum particle in a homogeneous magnetic field, perturbed by a decreasing electric field, I*, J. Sov. Math. 35, 2201–2211 (1986).
- [52] H. TAMURA : *Asymptotic distribution of eigenvalues for Schrödinger operators with homogeneous magnetic fields*, Osaka J. Math. 25, No.3, 633–647 (1988).

- [53] B. THALLER : *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics ; Springer-Verlag : Berlin, 1992.
- [54] X. P. WANG : *Barrier Resonances in Strong Magnetic Fields*, Commun. Partial Differ. Equations 17, No.9-10, 1539–1566 (1992).
- [55] X. P. WANG : *On the Magnetic-Stark Resonances in Two Dimensional Case*, Lect. Notes Phys. 403, 211–233 (1992).

Propriétés spectrales de l'opérateur de Dirac avec un champ magnétique intense

Mots clés : opérateur de Dirac, champ magnétique, valeur propre, résonance.

Résumé : On étudie l'opérateur de Dirac bidimensionnel avec un champ magnétique tendant vers l'infini en l'infini. Le spectre d'un tel opérateur est uniquement composé de valeurs propres et en particulier le spectre essentiel est réduit à un point. Pour un champ magnétique à croissance polynomiale, on donne l'équivalent des valeurs propres à l'infini.

Quand on perturbe cet opérateur par un potentiel électrique tendant vers zéro à l'infini avec une décroissance polynomiale, exponentielle ou à support compact, des valeurs propres sont créées près du point du spectre essentiel. On étudie le comportement asymptotique du spectre discret de l'opérateur perturbé près de ce point.

Pour l'opérateur de Dirac tridimensionnel avec un champ magnétique constant, on définit les résonances à l'aide de la méthode de dilatation analytique. Grâce à la méthode de Grushin, on étudie les résonances près des niveaux de Landau-Dirac à l'aide d'un hamiltonien effectif.

Spectral properties of Dirac operators with strong magnetic fields

Keywords : Dirac operators, magnetic fields, eigenvalues, resonances.

Abstract : We study bidimensional Dirac operator with magnetic fields which grow unboundedly at infinity. The spectrum of such operator is composed only of eigenvalues and in particular the essential spectrum is reduced to one point. For power-like increasing magnetic field, we give an equivalent of the eigenvalues at infinity.

When we perturb this operator by an electric potential which decays to zero at infinity with power-like decay, exponential decay or with compact support, some eigenvalues are created near essential spectrum. We investigate the asymptotic behaviour of the discrete spectrum near this point.

For tridimensional Dirac operator with constant magnetic fields, we define resonances with analytical dilatation. Using Grushin's method, we study the resonances near Landau-Dirac levels with the help of effective hamiltonian.