



CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA PROPRIETE DE PLATITUDE SUR DES MODELES BOND GRAPHS NON LINEAIRES

Ali Achir

► To cite this version:

Ali Achir. CONTRIBUTION A L'ETUDE DE LA PROPRIETE DE PLATITUDE SUR DES MODELES BOND GRAPHS NON LINEAIRES. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Lille, 2005. Français. NNT: . tel-00092087

HAL Id: tel-00092087

<https://theses.hal.science/tel-00092087>

Submitted on 8 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

Année : 2005

N° d'ordre :

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE LILLE

Discipline : AUTOMATIQUE ET INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

par

Ali ACHIR

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA PROPRIÉTÉ DE PLATITUDE SUR DES MODÈLES BOND GRAPHS NON LINÉAIRES

Soutenue le 07-12-2005

Composition du jury :

M. Michel FLIESS	Rapporteur	Directeur de Recherche, LIX, École Polytechnique, Palaiseau
M. Sergio JUNCO	Rapporteur	Professeur à l'Université de Rosario, FCEIyA-UNR, Argentine
M ^{me} Geneviève DAUPHIN-TANGUY	Examineur	Professeur à l'École Centrale de Lille, LAGIS
M. Michel PETITOT	Examineur	Professeur, Université des Sciences et Technologies de Lille, LIFL, Lille
M. Xavier ROBOAM	Examineur	Directeur de Recherche au LEEI, ENSEEIHT, Toulouse
M. Nicolas VENUTI	Examineur	Directeur Général, Virtual Dynamics, Paris
M. Christophe SUEUR	Directeur de thèse	Professeur à l'École Centrale de Lille, LAGIS

Thèse préparée au Laboratoire d'Automatique, de Génie Informatique
et Signal, LAGIS, UMR 8146 - École Centrale de Lille

*À mon défunt père,
à toute ma famille,
et à mes chère(s) ami(e)s.*

Résumé

Cette thèse a pour objectif l'étude de la propriété de platitude sur des modèles bond graphs. La motivation principale est de contribuer à la résolution des problèmes liés à l'identification des sorties plates et au calcul de la paramétrisation différentielle à l'aide de l'utilisation des propriétés et des avantages offerts par une représentation graphique telle que le bond graph. Cette problématique est abordée dans les deux cas de modèles bond graphs linéaires et non linéaires et des outils adéquats ont été proposés.

Pour atteindre ces objectifs, de nouveaux concepts et outils ont été introduits. En particulier, grâce à l'introduction de la notion de modèle bond graph variationnel (BGV) à l'aide de l'utilisation de l'opérateur de *kähler*, il est devenu possible de calculer les sorties plates d'un modèle bond graph non linéaire par intégration des bases du module associé au modèle bond graph variationnel.

Par ailleurs, en définissant la notion d'anneau bond graph non commutatif, une nouvelle règle de gain connue sous le nom de "règle de *Riegle*" est introduite en bond graph. En montrant alors qu'un modèle BGV est un cas particulier d'anneau bond graph non commutatif, l'obtention graphique de la paramétrisation différentielle en utilisant la règle de *Riegle* et la notion de bicausalité est rendue possible.

Enfin, pour aller plus loin dans l'introduction de l'outil d'algèbre et de modules différentiels aux bond graphs, le cas des modèles bond graphs non linéaires régis par des équations différentielles polynômiales a été abordé. Dans ce contexte et grâce à la notion de causalité, il est possible de faire une analyse du système directement à partir de son modèle BG, choix des variables d'entrée, les dynamiques correspondant à ce choix, calcul des degrés de transcendance etc. Il est également montré que la règle de *Riegle* reste applicable à cette classe de modèles bond graphs.

Remerciements

Mes sincères remerciements vont à tous ceux qui m'ont apporté connaissance, soutien moral et physique, amitié et amour depuis le moment où j'ai embrassé la vie à ce jour. À commencer par :

Monsieur Michel Fliess, Directeur de Recherche au LIX, École Polytechnique, Palaiseau d'avoir accepté de rapporter ce travail malgré ses nombreuses occupations professionnelles. Une personne avec de grandes qualités humaines et scientifiques à travers ses différents travaux de qualité ainsi que pendant les cours européens d'automatique que j'ai suivis à l'École des Ponts et Chaussées de Paris où j'ai pu découvrir l'approche algébrique en automatique.

Monsieur Sergio Junco, professeur à l'Université Nationale de Rosario, FCEIyA-UNR, Argentine, École d'Ingénierie Électronique d'avoir accepté de rapporter ce travail et avec qui j'ai eu la chance de travailler lors de mes séjours à l'Université de Rosario et durant ses différents séjours à Lille. Son engouement pour la recherche et sa simplicité ont rendu notre collaboration amicale. Je le remercie aussi de tout ce qu'il a fait pour faciliter mes séjours en Argentine dont je garde un très bon souvenir.

Mon directeur de Thèse, Monsieur Christophe Sueur qui m'a soutenu tout le long de cette Thèse et qui n'a jamais manqué de m'orienter et de me conseiller. D'avoir porté un intérêt particulier à mon travail et de me laisser libre choix d'initiative. Je le remercie aussi pour sa disponibilité malgré ses nombreuses occupations professionnelles.

Madame Geneviève Dauphin-Tanguy, professeur à l'École Centrale de Lille et responsable de l'équipe Bond Graph du LAGIS qui m'a accueilli dans son équipe pendant ces années et qui m'a soutenu financièrement. Je la remercie pour la confiance qu'elle m'a témoignée et les nombreux conseils qu'elle m'a donnés. Ses qualités humaines et scientifiques ont permis le bon déroulement de cette Thèse.

Messieurs Xavier Roboam, Directeur de Recherche au LEEI, ENSEEIHT, Toulouse, M. Nicolas Vénuti, Directeur Général, Virtual Dynamics, Paris et M. Michel

Petitot, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille, LIFL, d'avoir accepté de participer au jury de cette thèse et d'apporter un point de vue sur ce travail d'un angle différent.

Tous les professeurs du DEA automatique et informatique industrielle qui ont su me donner de très bonnes bases pour commencer ce travail de recherche.

Tous les enseignants de l'université de Tizi-Ouzou, plus particulièrement, Messieurs Hammouche Kamel qui est devenu un de mes meilleurs amis, Saïd Djenoune et Chérif Amar-Yahia professeurs au département d'automatique de l'université de Tizi-Ouzou (Algérie).

Mes ami(e)s de Rosario dont certains sont des doctorants, Alejandro et toute sa famille (muchas gracias El Canalla), Silvina, Dario, Martin, Gustavo, et autres. Je n'oublierai jamais leur hospitalité.

Les membres de l'équipe Bond Graph avec qui j'ai partagé les bureaux, en particulier, Nicolas, Abdellali, Christophe, Chafik, Zakaria, Stefan et Anca ainsi que Farid, Wassim et Hicham.

Les membres du LAGIS durant mon passage, Patrick, Régine, Thierry, Brigitte, et pour les doctorants, Mouhamed, Thomas, Nima, Nadia, Eunjoo, Lionel et Salim.

Les directeurs des institutions où j'ai préparé ce travail, Monsieur Jean Claude Gentina, Directeur de l'École Centrale de Lille et Monsieur Philippe Vanheeghe, Directeur du LAGIS.

Ma chère mère, mon frère et mes sœurs, ma famille, Angélique et sa famille, mes ami(e)s, en particulier, je pense à Nadir, Sabine, Achour, Zakia, Guillaume, Vanissa, Djamel, Kamel, Mattieux, Abdenour, Rabah, Marie et Séverine.

Table des matières

Résumé	iv
Remerciements	vii
Table des matières	ix
Table des figures	xiv
Liste des tableaux	xv
Introduction générale	1
1 Rappels théoriques	5
1.1 Outil mathématique	5
1.1.1 Théorie des corps ordinaires	6
1.1.2 Théorie des corps différentiels	8
1.1.3 Modules différentiels	11
1.1.4 Définition algébrique des systèmes	12
1.1.5 Système linéaire	15
1.1.6 Système linéaire tangent ou variationnel	16
1.2 Platitude différentielle - Systèmes plats	17
1.2.1 Exemple introductif	17
1.2.2 Définition de la platitude	18
1.2.3 Propriétés de la platitude	19
1.2.4 Commandabilité et platitude	20
1.2.5 Quelques résultats connus sur la platitude	21
2 Les anneaux bond graphs non commutatifs	29
2.1 Quelques rappels sur la théorie BG classique	30

2.1.1	Chemin causal	30
2.1.2	Boucle causale	31
2.1.3	Représentations par variables d'état issues d'un modèle BG	32
2.1.4	Commandabilité	40
2.1.5	Calcul de la matrice de commandabilité	41
2.2	Modèles BGs variationnels (BGVs)	43
2.3	Les anneaux bond graphs non commutatifs	49
2.3.1	Anneaux et graphes	50
2.3.2	Graphes à coefficient dans un anneau - règle de Riegle	51
2.3.3	Les anneaux bond graphs non commutatifs	54
2.3.4	Application de la règle de Riegle aux modèles BGVs	55
3	Platitudo des modèles bond graphs linéaires	63
3.1	Exemple introductif	64
3.2	Méthode d'identification des sorties plates	67
3.2.1	Cas mono-entrée	67
3.2.2	Cas multi-entrées	68
3.3	Identification des sorties plates d'un modèle BG	70
3.3.1	Modèles BGs sans élément en causalité dérivée	70
3.3.2	Modèles BGs avec éléments en causalité dérivée	80
3.3.3	Modèles BGs avec éléments en causalité dérivée liés à l'entrée	84
3.4	Paramétrisation différentielle	86
3.4.1	Méthode indirecte	87
3.4.2	Méthode directe	92
4	Platitudo des modèles BGs non linéaires	97
4.1	Identification des sorties plates d'un modèle BG non linéaire	98
4.1.1	Cas mono-entrée	99
4.1.2	Cas multi-entrées	105
4.1.3	Cas où m-1 sorties plates sont connues	111
4.2	Paramétrisation différentielle	119
4.2.1	Méthode indirecte	120
4.2.2	Méthode directe	123
4.2.3	Décomposition en sous-systèmes	127

5 Une approche algébrique pour les BGs non linéaires	141
5.1 Interprétation algébrique des modèles BGs	142
5.1.1 Exemple introductif	142
5.1.2 Généralisation	146
5.2 Application à la surveillance de modèles BG non linéaires	147
5.2.1 Rappels	147
5.2.2 Interprétation de la condition de surveillabilité sur BG	148
5.2.3 Cas de systèmes non linéaires non polynômiaux	150
5.3 Extension de la règle de Riegler aux BGs non linéaires	154
5.3.1 Application au MCCESéparée	155
Index	167
Conclusion et perspectives	167
Références	167
A Méthodologie Bond Graph	177
A.1 Représentation des transferts de puissance	178
A.2 Variables mises en jeu	178
A.3 Éléments BGs	179
A.3.1 Les éléments passifs	179
A.3.2 Les éléments actifs : les sources	180
A.3.3 Les éléments de jonction	181
A.4 Procédure générale de construction de modèles BGs	182
A.5 Causalité	183
A.6 Bicausalité	186
A.7 Construction du modèle BG inverse	188
B Calcul de $u(t), x(t)$ en fonction de $y(t)$ par la méthode indirecte	191
B.1 Calcul $u(t)$ en fonction de $y(t)$	191
B.2 Calcul du vecteur $x(t)$ en fonction des sorties plates $y(t)$	192

Table des figures

1.1	Véhicule non holonome en mouvement plan	17
1.2	Schéma de commande en boucle fermée d'un système plat	20
1.3	Dispositif table-base	25
2.1	Exemple d'un chemin causal et d'une boucle causale	32
2.2	Représentation vectorielle d'un modèle BG	33
2.3	Circuit électrique équivalent du MCCESérie	39
2.4	Modèle BG du MCCESérie	39
2.5	Hacheur dévolteur avec charge	42
2.6	Modèle BG moyen du hacheur dévolteur avec charge	42
2.7	Modèle BG en causalité dérivée avec dualisation de la source	42
2.8	Gyrateur modulé à flux rentrant	46
2.9	Modèle BGV d'un gyrateur à flux rentrant	46
2.10	Gyrateur modulé à effort rentrant	47
2.11	Modèle BGV d'un gyrateur à flux entrant	47
2.12	Transformateur modulé à flux rentrant	47
2.13	Modèle BGV d'un transformateur à flux rentrant	48
2.14	Transformateur modulé à effort rentrant	48
2.15	Modèle BGV d'un transformateur à flux entrant	49
2.16	Réductions série et parallèle correspondant à l'addition et la multiplication	50
2.17	Réduction par bouclage correspondant au quasi-inverse	50
2.18	Interprétation graphique de la distribution à gauche	51
2.19	Équivalence graphique de l'identité $A(1 - BA)^{-1} = (1 - AB)^{-1}A$. .	51
2.20	Exemple de digraphe à poids appartenant à un anneau non commutatif	53
2.21	Schéma électromécanique équivalent du MCCESéparée	55
2.22	Modèle BG du MCCESéparée	56
2.23	Modèle BGV du MCCESéparée	57

2.24	Digraphe associé au modèle BGV du MCCESéparée	57
2.25	Sous BGs associé au le modèle BGV	59
3.1	Schéma électromécanique du MCC à aimant permanent	64
3.2	Modèle BG du MCC à aimant permanent	64
3.3	Schéma bloc de la forme canonique de commandabilité	67
3.4	Schéma bloc de la forme canonique de commandabilité multi-entrées	68
3.5	Schéma électromécanique du groupe Ward Leonard	72
3.6	Modèle BG du groupe Ward Leonard	73
3.7	Schéma électromécanique du MPP dans le repère (d, q)	76
3.8	Modèle BG du MPP dans le repère (d, q)	77
3.9	Gyrateur à flux rentrant et son modèle linéarisé	77
3.10	Modèle BG linéarisé du MPP	78
3.11	Pendule inversé sur un chariot	81
3.12	Modèle BG du PI	82
3.13	Modèle BG linéarisé d'un transformateur modulé	82
3.14	Modèle BG linéarisé du PI autour de l'équilibre instable	83
3.15	Modèle BG linéarisé du PI sans le chariot	86
3.16	Modèle BG du MPP avec placement de détecteurs sur les sorties plates	89
3.17	Modèle BG réduit	90
3.18	Modèle BG réduit	91
3.19	Modèle BG réduit	92
3.20	Modèle BG inverse du MPP par rapport aux sorties plates	94
4.1	Schéma électromécanique du MCCESérie	101
4.2	Modèle BG du MCCESérie	102
4.3	Modèle BGV du gyrateur modulé	102
4.4	Modèle BGV global du MCCESérie	103
4.5	Schéma électromécanique du MSSAP dans le repère (d, q)	107
4.6	Modèle BG du MSSAP	107
4.7	Modèle BGV du MSSAP	108
4.8	Circuit de puissance du convertisseur de tension ac-dc triphasé	113
4.9	Modèle BG de la cellule de commutation	113
4.10	Modèle BG du CTT - modèle moyen	114
4.11	Modèle BG du convertisseur de tension triphasé dans le référentiel $d-q$	116
4.12	Modèle BGV dans le repère $d-q$	116

4.13	Modèle BGV résultant du quotient	117
4.14	Schéma électromécanique équivalent du MCCESéparée	120
4.15	Modèle BG du MCCESéparée	121
4.16	Modèle BGV du MCCESéparée	121
4.17	Sous-modèle BGV inverse d'un élément I	124
4.18	Sous-modèle BGV d'un gyrateur	124
4.19	Sous-modèle BGV inverse d'un gyrateur	124
4.20	Modèle BGV inverse du MCCESéparée	125
4.21	Modèle BG du MSSAP	128
4.22	Les différents sous-modèles BG du MSSAP	129
4.23	Schéma de commande	129
4.24	Modèle BG inverse du sous-système mécanique	130
4.25	Modèle BG inverse BG du sous-système électrique 1	131
4.26	Résultats de simulation sans couple de charge	135
4.27	Résultats de simulation sans couple de charge	135
4.28	Résultats de simulation avec un couple de charge inconnu	136
4.29	Résultats de simulation avec un couple de charge inconnu	136
4.30	Résultats de simulation avec un couple de charge inconnu	137
4.31	Résultats de simulation avec un couple de charge connu	137
4.32	Résultats de simulation avec un couple de charge connu	138
4.33	Résultats de simulation avec un couple de charge connu	138
5.1	Modèle BG acausal du MCCESéparée	142
5.2	Modèle BG des dynamiques du MCCESéparée, entrées en effort	144
5.3	Modèle BG des dynamiques du MCCESéparée, entrées en flux	145
5.4	Modèle BG simplifié du MCCESéparée commandé par courant	145
5.5	Système hydraulique - un réservoir	149
5.6	Modèle BG du système hydraulique	149
5.7	Modèle BG bicausal du système hydraulique	150
5.8	Système hydraulique à deux réservoirs	151
5.9	Modèle BG du système hydraulique à deux réservoirs	152
5.10	Modèle BG polynômial acausal	152
5.11	Modèle BG polynômial causal	153
5.12	Modèle BG polynômial bicausal	154
5.13	Modèle BG acausal du MCCESéparée	155

5.14	Modèle BG du MCCESéparée commandé par tension	156
5.15	Modèle BG inverse du MCCESéparée commandé par tension	157
5.16	Modèle BG du MCCESéparée commandé par courant	159
5.17	Modèle BG simplifié du MCCESéparée commandé par courant	159
5.18	Modèle BG inverse du MCCESéparée commandé par courant	159
A.1	Représentation BG du transfert de puissance	178
A.2	Jonction 0	181
A.3	Jonction 1	181
A.4	Transformateur	182
A.5	Gyrateur	182
A.6	Deux situations de causalité	184
A.7	Possibilités d'affectation de la causalité	186
A.8	Modèle BG à mot d'un système	188
A.9	Modèle BG inverse d'un système	189

Liste des tableaux

A.1	Classification des différentes variables BGs	179
A.2	Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs	184
A.3	Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs - suite	185
A.4	Règles d'affectation de la bicausalité aux différents composants BGs .	187
A.5	Affectation de la causalité à l'élément SS	188

Introduction générale

Parmi les objectifs de l'automatique, l'un concerne la recherche des moyens de commande pour des systèmes physiques qui sont souvent de différentes natures, électriques, mécaniques, hydrauliques, thermiques, etc. La modélisation du système est alors la première étape de l'élaboration d'une loi de commande. Le modèle qui permet de décrire la réalité physique est généralement obtenu sur la base d'une description idéalisée du système et seuls les phénomènes dominants sont souvent pris en compte.

Dans bien des cas, les automaticiens utilisent des modèles mathématiques, qui malgré leur flexibilité perdent rapidement la signification physique du système et ne permettent pas généralement de faire un retour sur le modèle pour affiner la modélisation ou améliorer la conception du système pour simplifier sa commande.

Par ailleurs, la nature multi-disciplinaire des systèmes ne permet pas facilement la communication entre les experts des différents domaines. D'ailleurs les automaticiens se spécialisent de plus en plus dans un seul domaine particulier. Il y a là une nécessité prononcée d'un langage de modélisation répondant à ces besoins pour optimiser cette étape importante de modélisation.

Un des outils répondant à ces critères peut être le Bond Graph ou Graphe à Liens. En effet, ce langage est basé principalement sur la notion de transfert de puissance entre les différentes parties ou composants du système et sur la transformation de l'énergie dans ces composants (dissipation, stockage, conversion du domaine énergétique). Ces différents phénomènes qui sont analogues dans tous les domaines physiques sont codés graphiquement. Le caractère unifié du bond graph constitue un langage de communication universel entre les experts des différentes disciplines. Grâce à cette décomposition et la représentation graphique, il est facile de décomposer le système en parties ou sous-systèmes et de faire un retour sur n'importe quel sous-système pour améliorer sa conception ou tenir compte d'un phénomène physique négligé ou non pris en compte. Le modèle bond graph peut être alors considéré comme un modèle intermédiaire entre le système physique et le modèle mathématique

qui lui est associé.

Revenons maintenant au problème de commande. Malgré les nombreux résultats, il reste encore des systèmes pour lesquels on sait pas encore comment concevoir une loi de commande capable de répondre à des objectifs de commande de plus en plus gourmands. On ne se contente plus de faire fonctionner le système autour d'un seul point de fonctionnement. On désire le faire fonctionner dans milieux hostiles et perturbés. On tient de plus en plus compte des incertitudes du modèle, etc. Ces objectifs sont bien légitimes car de nos jours, il est nécessaire que le système soit simultanément rapide, précis et robuste.

Les résultats abondants de la commande linéaire ne permettent plus de répondre à ces exigences. Néanmoins, grâce aux récents développements de la théorie de la commande non linéaire, un certain nombre de solutions existent : en particulier, la synthèse de commandes à base des fonctions de Lyapunov, la commande par modes glissants et la commande par platitude, etc. Bien que ces méthodes soient suffisamment performantes, elles ne sont pas encore adoptées par la communauté industrielle à cause entre autres de la difficulté de mise en oeuvre et surtout l'argument principal des industriels "l'usage" ¹, i.e., facilité de maintenance ou de réglage.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de la propriété de platitude sur des modèles bond graphs. Cette propriété étudiée depuis peu par les automaticiens est initialement introduite par M. Fliess, Ph. Martin, J. Lévine et P. Rouchon, Fliess et al. (1995). La technique consiste à trouver une sortie d'un système appelée "sortie plate", qui résume toutes ses dynamiques et permet ainsi de faire la synthèse de la loi de commande d'une manière relativement simple. Cependant, cette technique de commande se heurte au problème d'identification de ces sorties plates, qui est un problème difficile en non linéaire et peu de chercheurs se lancent dans cette problématique. Dans bien des cas, les sorties plates ont souvent une signification physique et énergétique comme en témoignent plusieurs publications, R. M. Murray and Sluis (1995); Martin et al. (1997).

Bien que la méthodologie bond graph est reconnue comme étant une démarche efficace pour la modélisation de systèmes physiques comme en témoignent les différentes publications, il n'en est pas de même pour la commande. En effet, dans le cas des modèles bond graphs linéaires, un certain nombre de résultats existent, citons notamment les résultats relatifs à l'analyse des propriétés structurelles comme la com-

¹Usability

mandabilité et l'observabilité, Sueur and Dauphin-Tanguy (1989) et Dauphin-Tanguy et al. (1999), le découplage, Bertrand et al. (2001) et enfin le rejet de perturbation, Arib et al. (1999). En revanche dans le cas non linéaire, il existe peu de résultats, on peut citer à titre d'exemple, l'analyse directe sur le modèle bond graph de la stabilité interne, Junco (1993), la synthèse directe de certaines lois de commande non linéaires à partir du modèle bond graph, Junco (2001a), l'étude de la commandabilité de certaines classes de systèmes non linéaires, Rimaux (1995), inversion de modèles bond graphs Gawthrop (1995) et Fotsu-Ngwompu et al. (1996), synthèse de lois de commande par inversion de modèles bond graphs, Grandanegra et al. (2005).

Concernant l'étude de la propriété de platitude sur des modèles BGs, un premier travail réalisé par Pedraza and Delgado (1999) a permis de dégager un algorithme qui teste si une variable d'état est une sortie plate. Dans Richard et al. (2002), la bicausalité est utilisée pour vérifier la platitude d'un modèle bond graph à condition que les sorties plates sont déjà identifiées. Le problème de calcul des sorties plates à partir d'un modèle bond graph est abordé que dans la cas linéaire, Maligorne et al. (2001).

Alors la question suivante se pose : l'outil bond graph est-il inadapté ?, la réponse est non. Effectivement, le problème est similaire à celui qu'a connu la commande non linéaire et qui réside dans le fait que la théorie du linéaire n'est pas directement exposable en cas non linéaire, il a fallu alors trouver d'autres théories capables de prendre en compte les non linéarités comme par exemple, la théorie de Lyapunov, la géométrie différentielle et l'algèbre différentielle, etc.

L'objectif de ce travail est double. Dans un premier lieu, proposer des méthodes simples applicables directement sur des modèles bond graphs permettant le calcul des sorties plates ainsi que l'expression des variables d'état et de commande en fonction de ces sorties plates et de leurs dérivées. Le deuxième est de proposer des outils applicables sur des modèles bond graphs non linéaires basés sur des outils mathématiques plus généraux comme la théorie d'algèbre et des modules différentiels.

Ce mémoire est scindé en cinq chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous avons rappelé dans un premier lieu un certain nombre de notions d'algèbre nécessaires pour la suite des développements présentés dans ce mémoire. Dans un second lieu, nous avons rappelé la notion de platitude différentielle, ces propriétés ainsi qu'un résumé des différents résultats disponibles dans la littérature traitant de cette problématique. Enfin, nous avons proposé notre démarche retenue pour étudier la propriété de platitude

sur des modèles bond graphs.

- Dans le deuxième chapitre, nous avons d'abord rappelé un certain nombre de notions bond graphs puis proposé de nouveaux outils bond graphs en termes de la théorie de modules et d'algèbre différentiels valables pour des modèles bond graphs non linéaires. Ces outils permettent de tenir compte de la propriété de non commutativité qui est essentielle contrairement au cas linéaire stationnaire.
- Dans la première partie du troisième chapitre, nous avons proposé une méthode d'identification des sorties plates pour des modèles bond graphs linéaires stationnaires. Dans la deuxième partie nous avons abordé le problème de paramétrisation différentielle, et proposé deux méthodes graphiques permettant de retrouver les expressions des différentes variables d'état et de commande en fonction des sorties plates et de leurs dérivées. L'objectif principal de ce chapitre est de montrer les limites des méthodes bond graphs classiques. Il nous a permis par ailleurs de dégager des pistes pour étudier le cas des modèles bond graphs non linéaires.
- Dans le quatrième chapitre, nous avons abordé les modèles bond graphs non linéaires. Grâce à l'utilisation de la notion de modèle variationnel, nous avons proposé une méthode de calcul des sorties plates d'un modèle bond graph non linéaire par intégration des bases du module associé au modèle bond graph variationnel. Nous avons également traité le problème de la paramétrisation différentielle en utilisant dans un premier temps une règle graphique dite de Riegle. Puis, pour résoudre le même problème, nous avons utilisé une méthode de décomposition en sous-modèles élémentaires analogue à la commande en cascade pour réaliser la synthèse de la loi de commande.
- Dans le dernier chapitre, nous nous sommes intéressés aux modèles bond graphs régis par des équations différentielles polynômiales. Nous avons montré grâce à la notion de causalité qu'il est possible de retrouver un certain nombre d'indices structurels comme les degrés de transcendance différentiels. Nous avons exploité ces résultats pour tester les conditions de surveillabilité de systèmes non linéaires pour une instrumentation donnée (sorties données). Enfin, nous avons étendu la règle de Riegle à cette classe de modèles bond graphs.

Chapitre 1

Rappels théoriques

«L'homme connaît une quantité prodigieuse de choses qu'il ignore qu'il sait»

Paul Valéry

Dans ce premier chapitre, nous présentons dans un premier lieu l'outil mathématique d'algèbre et de modules différentiels sur lequel se base les différents développements présentés dans ce mémoire. Ce choix est motivé par le fait que la théorie algébrique est beaucoup plus adéquate à l'analyse et à la commande des systèmes à partir de leur modèle bond graph. Dans ce contexte, nous présentons un bref rappel sur les structures algébriques de base, à savoir, les notions de groupe, d'anneau, de corps et d'extensions de corps. Pour de plus amples détails, les références : Bourbaki (1959, 1961); Cohn (1985); Lam (2001), sont fortement recommandées. Puis ces mêmes notions sont développées plus en détail dans le cas différentiel, Kolchin (1973); Ritt (1950).

Dans un second lieu, nous nous intéresserons à la notion de platitude différentielle qui constitue l'objet principal de notre travail. Nous allons rappeler la définition de la platitude, ces propriétés, ainsi qu'un résumé des différents résultats disponibles dans la littérature traitant de cette problématique. Enfin, nous proposons la démarche retenue pour étudier cette notion (platitude) sur les modèles bond graphs.

1.1 Outil mathématique

L'algèbre différentielle est une discipline de mathématique ayant pour vocation la généralisation des méthodes d'algèbre abstraite (algèbre commutative) à l'étude

des systèmes d'équations différentielles non linéaires polynômiales. Elle est principalement basée sur les travaux de Ritt, Ritt (1950) et Kolchin, Kolchin (1973). Introduite en automatique en France en 1985 par Michel Fliess à propos du problème d'inversion entrées-sorties des systèmes non linéaires, Fliess (1986), elle s'est vite révélée très féconde sur de nombreux aspects de l'automatique¹. En particulier pour l'étude des propriétés structurelles telles que : l'observabilité, le découplage, la linéarisation, le rejet de perturbation, etc. C'est dans ce cadre qu'a pu être dégagée plus récemment la notion de système " différentiellement plat " très utile en pratique et qui fait l'objet de notre travail de thèse.

1.1.1 Théorie des corps ordinaires

Anneaux et corps

Un groupe est un ensemble muni d'une opération (loi de composition interne ²) vérifiant les axiomes suivant : associativité, existence d'élément neutre et d'élément symétrique. Un groupe est dit *Abélien* ou commutatif si sa loi de composition est commutative.

Un anneau est un groupe *Abélien* muni d'une seconde loi (externe) ³, associative et distributive par rapport à la loi du groupe. L'anneau est dit unitaire si sa deuxième loi admet un élément neutre. Cet élément est dit unité. Si de plus, elle est commutative, il est qualifié d'anneau commutatif. Si un produit nul nécessite l'un des facteurs nul (i.e., égal à l'élément neutre pour l'addition) l'anneau est dit intègre .

Par ailleurs, un idéal d'anneau est un sous-groupe d'un anneau, stable pour le produit (seconde loi). Un exemple élémentaire est donné par les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ de la forme $n\mathbb{Z}$ (ensemble des multiples de l'entier relatif n).

À titre d'exemple, on peut citer l'anneau des polynômes $\mathbb{R}[s]$ en l'indéterminée s et à coefficients dans $\mathbb{R}$, défini comme étant l'ensemble des sommes formelles de la forme :

$$\forall p(s) \in \mathbb{R}[s], \quad p(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i, \quad \text{où } a_i \in \mathbb{R}$$

¹La science de la commande des machines

²Souvent notée +

³Souvent appelée multiplication ”.”

Dans l'ensemble $\mathbb{R}[s]$, l'addition est définie par :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i s^i\right) + \left(\sum_{i=0}^n b_i s^i\right) = \sum_{i=0}^{\max(m,n)} (a_i + b_i) s^i$$

et la multiplication par :

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i s^i\right) \left(\sum_{i=0}^n b_i s^i\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}\right) s^k$$

À noter que $\mathbb{R}[s]$ constitue un anneau commutatif.

Un anneau dans lequel tout élément non nul admet un élément symétrique pour la multiplication (souvent appelé inverse) est un corps. En particulier, un corps est un anneau intègre. Si la multiplication (seconde loi) est commutative, le corps est dit commutatif.

Extension de corps

Une extension de corps est la donnée de deux corps E et F tels que $E \subseteq F$. Une extension est notée F/E ; le corps E est un sous-corps de F ; le corps F est un sur-corps de E .

Propriétés :

- Un élément $a \in F$ est dit algébrique sur E , s'il satisfait une équation algébrique à coefficients dans E . Par exemple $\sqrt{2}$ est racine de $x^2 - 2 = 0$, il est alors algébrique sur $\mathbb{Q}$. L'extension F/E est dite algébrique, si et seulement si, tout élément de F est algébrique sur E .
- Un élément $a \in F$ est dit transcendant sur E , s'il n'est pas algébrique sur E . C'est à dire, il n'existe pas de polynôme $p(x) \neq 0$ sur E tel que $p(a) = 0$. L'extension F/E est qualifiée de transcendante, si et seulement si, il existe au moins un élément de F qui est transcendant sur E . Par exemple, l'extension $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est transcendante, puisque e et π sont transcendants sur $\mathbb{Q}$.
- Soit $\zeta = (\zeta_i)_{i \in I}$, (I un ensemble quelconque d'indices) une famille quelconque d'éléments de F . On désigne par $E(\zeta)$ le plus petit sous corps de F contenant E et la famille ζ . La famille ζ est alors un système de générateurs de $E(\zeta)$ sur E . Dans ce cas, il existe $v \in \mathbb{N}$ et une famille $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_v)$ de F telle que $F = E(\zeta)$. On dit qu'une extension F/E est de type fini ou finiment engendrée, si F possède un système fini de générateurs par rapport à E . Une telle famille est dite E -algébriquement dépendante, si et seulement si, il existe un polynôme

$p(x_1, \dots, x_v) \neq 0$ à coefficients dans E , tel que $p(\zeta_1, \dots, \zeta_v) = 0$. Une famille qui n'est pas E -algébriquement dépendante est dite indépendante. Il est possible de définir des familles E -algébriquement indépendantes qui sont maximales par rapport à l'inclusion, de telles familles ou ensembles sont appelés des bases de transcendance de F/E . Deux bases de telle nature ont le même cardinal, i.e., le même nombre d'éléments, appelé degré de transcendance de F/E et noté $d^\circ \text{ tr } F/E$.

1.1.2 Théorie des corps différentiels

Anneaux et corps différentiels

Un corps différentiel ordinaire k est un corps commutatif muni d'une dérivation simple $\frac{d}{dt} : k \rightarrow k$ (i.e., contenant une seule dérivation, dans le cas contraire, il est dit partiel), vérifiant les règles usuelles (1.1), pour tout $a, b \in k$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} \in k \\ \frac{d(a+b)}{dt} = \frac{da}{dt} + \frac{db}{dt} \in k \\ \frac{d(ab)}{dt} = \frac{da}{dt}b + a\frac{db}{dt} \in k \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Un sous-corps différentiel C de k dont les éléments sont des constantes, i.e., $\forall c \in C, \dot{c} = 0$, est un corps de constantes.

Exemple 1. $\mathbb{R}(t)$ est le corps des fonctions rationnelles à variable t . Ce corps est un corps différentiel respectant la dérivation $\frac{d}{dt}$. Le sous-corps $\mathbb{R}$ des réels est un exemple trivial de corps différentiel de constantes.

De la même façon, un anneau différentiel est un anneau muni de la dérivation $\frac{d}{dt}$. Un exemple de tels anneaux est l'anneau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans k noté $k[\frac{d}{dt}]$. Les éléments de cet anneau sont des polynômes en l'indéterminée $\frac{d}{dt}$ de la forme (1.2), avec $a_i \in k$.

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} \quad (1.2)$$

Cet anneau est en général non commutatif sauf dans le cas où k est un corps de constantes. La multiplication dans $k[\frac{d}{dt}]$ est définie par la règle ⁴ (1.3).

⁴Dite de Leibniz

$$\frac{d}{dt}a = a \frac{d}{dt} + \dot{a} \quad \forall a \in k \quad (1.3)$$

En effet, la relation (1.3) est commutative, si et seulement si, k est un corps des constantes ($\dot{a} = 0$).

Extension de corps différentiels

Une extension de corps différentiels est la donnée de deux corps différentiels L et K tels que :

- K est un sous-corps de L .
- La dérivation dans K est la restriction dans K de la dérivation de L .

e.g., $\mathbb{R}\langle e^{-\alpha t} \rangle / \mathbb{R}$ est une extension de corps différentiels. En effet, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}\langle e^{-\alpha t} \rangle$.

Propriétés :

- un élément ζ de L est dit différentiellement algébrique sur K , s'il satisfait une équation différentielle $P(\zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^\alpha) = 0$, où P est un polynôme à coefficients dans K . L'extension L/K est dite différentiellement algébrique, si et seulement si, tout élément de L est différentiellement algébrique sur K .
- Un élément $a \in L$ est dit différentiellement transcendant sur K , s'il n'est pas différentiellement algébrique sur K . C'est à dire qu'il n'existe pas d'équation différentielle algébrique qui peut être satisfaite par a . L'extension L/K est qualifiée de différentiellement transcendante, si et seulement si, il existe au moins un élément de L qui est différentiellement transcendant sur K .

e.g., l'élément $a = e^{-\alpha t}$ appartenant à $\mathbb{R}\langle e^{-\alpha t} \rangle$ est différentiellement algébrique sur $\mathbb{R}$ car il est solution de $P(x) = \dot{x} + \alpha x = 0$ (α est une constante).

- Soit $\zeta = (\zeta_i)_{i \in I}$, une famille quelconque d'éléments de L . On désigne par $K\langle \zeta \rangle$ le corps différentiel engendré par K et la famille ζ , i.e., le plus petit sous-corps différentiel de L contenant K et la famille ζ . La famille ζ est alors un système de générateurs de $K\langle \zeta \rangle$ sur K . Dans ce cas, il existe $v \in \mathbb{N}$ et une famille $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_v)$ de L telle que $L = K\langle \zeta \rangle$. On dit qu'une extension L/K est de type fini ou finement engendrée, si L possède un système fini de générateurs par rapport à K . Une telle famille est dite différentiellement algébriquement dépendante, si et seulement si, il existe un polynôme différentiel $P(x_1, \dots, x_v, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_v, x_1^{(\alpha)}, \dots, x_v^{(\alpha)}) \neq 0$ à coefficients dans K , tel que $P(\zeta_1, \dots, \zeta_v) = 0$. Une famille qui n'est pas différentiellement algébriquement dépendante sur K est dite différentiellement indépendante. Il est possible de

définir des familles K -différentiellement algébriquement indépendantes qui sont maximales par rapport à l'inclusion. De telles familles sont appelées des bases de transcendance différentielles de l'extension différentielle L/K . Deux bases de telle nature ont le même cardinal, i.e., le même nombre d'éléments, appelé degré de transcendance différentiel de L/K , noté $d^\circ \text{ tr diff } L/K$.

Proposition 1. *Fliess et al. (1995)*

- *L'extension L/K est qualifiée de différentiellement algébrique, si et seulement si, $d^\circ \text{ tr diff } L/K = 0$.*
- *Le degré de transcendance (non différentiel) de l'extension L/K est fini.*

Matrices à coefficients dans un anneau

Définition 1.

Matrice entière *Une matrice entière U est une matrice dont ses éléments appartiennent à un anneau $\mathcal{A}$.*

Matrice unimodulaire *Une matrice entière U est dite unimodulaire si son inverse est aussi une matrice entière.*

Si on prend $\mathcal{A} = \mathbb{R}[s]$, et on substitue l'indéterminée s par l'opérateur $\frac{d}{dt}$, alors le produit à gauche (resp. à droite) par une matrice unimodulaire correspond à un changement de variable différentiellement inversible dans l'espace d'arrivée (resp. sur les inconnues de l'équation différentielle).

Théorème 1. *Une matrice entière carrée est unimodulaire si et seulement si son déterminant est inversible dans l'anneau.*

Dans le cas où l'anneau $\mathcal{A}$ est non commutatif, la notion de déterminant n'a pas plus de sens à cause de la non commutativité, Mehta (1989). Dans ce cas, on peut utiliser la notion de "déterminant de Dieudonné", Dieudonné (1943), ou une notion beaucoup plus ancienne appelée "désignant", Heyting (1927).

Néanmoins, les différentes formes matricielles, e.g., forme diagonale (Smith), forme triangulaire (Hermite) restent valables. Ces différentes formes sont obtenues à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes rappelées ci-dessous :

- ajouter à une ligne (respectivement, à une colonne) un multiple d'une autre ligne (resp. d'une autre colonne),

- multiplier une ligne (resp. une colonne) par un élément inversible dans l'anneau,
- échanger deux lignes (deux colonnes).

1.1.3 Modules différentiels

Soit k un corps différentiel ordinaire muni de la dérivation $\frac{d}{dt}$. Un module différentiel sur k (ou k -module différentiel) M est un $k[\frac{d}{dt}]$ -module gauche.

Dans un tel module, on a les propriétés suivantes :

- i) $\forall w \in M, \forall \pi \in k[\frac{d}{dt}] \quad \pi.w \in M$
- ii) $\forall w_1, w_2 \in M, \forall \pi \in k[\frac{d}{dt}] \quad \pi(w_1 + w_2) = \pi w_1 + \pi w_2$
- iii) $\forall w \in M, \forall \pi_1, \pi_2 \in k[\frac{d}{dt}] \quad (\pi_1 + \pi_2)w = \pi_1 w + \pi_2 w$

Le $k[\frac{d}{dt}]$ -module M est qualifié de gauche car les coefficients dans k de l'indéterminée $\frac{d}{dt}$ et ses puissances n'apparaissent qu'à gauche de n'importe quelle relation polynômiale.

Quoique l'anneau $k[\frac{d}{dt}]$ est en général non commutatif, il reste un anneau principal. Par conséquent, les $k[\frac{d}{dt}]$ -modules gauches de type fini possèdent des propriétés analogues à celles des modules de type fini sur des anneaux principaux commutatifs, Lam (2001).

Soit $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un k -module différentiel M . Le k -module différentiel noté $[\xi]$ engendré par la famille ξ est le plus petit sous-module différentiel sur k de M contenant ξ . Si $M = [\xi]$, la famille ξ est appelée système de générateurs du module M . Un module différentiel M est alors dit de type fini ou finiment engendré s'il admet un système fini de générateurs.

Il existe des familles linéairement différentiellement indépendantes sur k , maximales par rapport à l'inclusion. Ses familles ont le même cardinal appelé *rang* du module M , noté $\text{rg}M$.

Un $k[\frac{d}{dt}]$ -module Φ finiment engendré est dit libre⁵, si et seulement si, il admet une base, i.e., il existe un ensemble fini $z = (z_1, \dots, z_m)$ d'éléments de Φ tels que :

- tout élément w de Φ est $k[\frac{d}{dt}]$ -linéairement dépendant de z , i.e., w est combinaison linéaire de z et ses dérivées à coefficients dans k .
- les composantes de z sont $k[\frac{d}{dt}]$ -linéairement indépendantes, i.e., les composantes de z ainsi que leurs dérivées sont k -linéairement indépendantes.

⁵Valable pour un module défini sur un anneau principal, Cohn (1985)

Le rang d'un module libre est égal à $m = \text{card}(z)$

Un module différentiel T est dit de torsion si pour tout $\nu \in T$ il existe $a \in k[\frac{d}{dt}]$, $a \neq 0$ tel que $a\nu = 0$. Le rang d'un module de torsion est nul. Un module différentiel ne contenant pas de sous-module de torsion est dit libre.

Propriétés :

- Un $k[\frac{d}{dt}]$ -module M finiment engendré peut s'écrire :

$$M = T \oplus \Phi \quad (1.4)$$

où $\Phi = M/T$ est le sous-module libre et T est le sous-module de torsion. Le rang de M est par définition égal au rang de Φ . Ainsi, M est de rang zéro, si et seulement si, il est de torsion. Si par contre $T = 0$, alors M est dit de torsion libre.

- Pour un $k[\frac{d}{dt}]$ -module M finiment engendré, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 - M est de torsion,
 - la dimension de M considéré comme un k -espace vectoriel est finie.
- Tout sous-module d'un $k[\frac{d}{dt}]$ -module finiment engendré est finiment engendré.
- Tout module quotient d'un $k[\frac{d}{dt}]$ -module finiment engendré est aussi finiment engendré.
- Pour un $k[\frac{d}{dt}]$ -module M finiment engendré, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 - M est torsion libre,
 - M est libre.

Ces notions sont très importantes et permettent de reformuler les notions classiques de commandabilité et d'espace commandable et non commandable, d'observabilité, etc., à l'aide de la théorie des modules différentiels qui est beaucoup plus générale.

Remarque 1.

- L'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$ est différent de l'opérateur de Laplace.

1.1.4 Définition algébrique des systèmes

L'intérêt fondamental du formalisme d'algèbre et des modules différentiels réside dans ce nouveau point de vue de la notion de système dynamique qui permet d'utiliser

tous les outils et algorithmes de ce formalisme pour l'analyse et la commande, Fliess (1989, 1994, 1998); Bourlès and Fliess (1984); Bourlès and Marinescu (1999).

Système non linéaire

Un système non linéaire est une extension de corps différentiels L/K finiment engendrée, Fliess (1990a, 1989). Le corps K est appelé corps de base associé au système, il contient les coefficients de n'importe quel système d'équations correspondant au système L/K . Le corps L est appelé corps du système; il contient toutes les variables et toutes les expressions algébriques qui peuvent être construites à partir des variables du système.

Entrée : Une entrée du système L/K est un ensemble fini $u = (u_1, \dots, u_m)$ de L , tel que l'extension $L/K\langle u \rangle$ est différentiellement algébrique. Cela signifie que le système est influencé par l'entrée, puisque que tout élément de L satisfait une équation différentielle algébrique qui dépend (éventuellement) de l'entrée.

Une entrée est dite indépendante si, elle est un ensemble différentiellement algébriquement indépendant sur K . Dans ce cas :

$$d^{\circ} \text{ tr diff } L/K = d^{\circ} \text{ tr diff } K\langle u \rangle/K = \text{card } u = m$$

Puisque $d^{\circ} \text{ tr diff } L/K\langle u \rangle = 0$ par définition de la notion d'entrée; u est donc une base de transcendance différentielle de L/K .

Dynamiques : Une dynamique est un système L/K dont on a distingué, en général pour des raisons liées au fonctionnement du système lui-même, une entrée u particulière. On note une dynamique sous la forme $L/K\langle u \rangle$.

Sortie : Une sortie d'un système L/K ou d'une dynamique $L/K\langle u \rangle$ est un ensemble fini $y = (y_1, \dots, y_p)$ de L . Contrairement à la notion d'entrée, la notion de sortie est plus générale puisque toute famille finie de L peut être considérée comme sortie. En pratique ce sont les raisons liées au fonctionnement du système ou au problème de commande qui déterminent le choix de la sortie.

État et réalisation : Comme l'extension L/K est finiment engendrée et comme tout choix d'entrée u de L/K , l'extension $L/K\langle u \rangle$ est différentiellement algébrique, l'extension différentielle $L/K\langle u \rangle$ possède un degré de transcendance (non différentiel)

fini. Cela conduit à la définition de la notion d'état : un état de la dynamique $L/K\langle u \rangle$ est une base de transcendance $x = (x_1, \dots, x_n)$ de l'extension $L/K\langle u \rangle$.

La dimension d'un état correspondant à l'entrée u est $n = d^\circ \text{ tr } L/K\langle u \rangle$. Puisque on pouvait considérer plusieurs choix de l'entrée, la dimension de l'état peut être différente. L'entier $d^\circ \text{ tr diff } L/K$ représente le nombre de fonctions du temps qu'il faut choisir pour "déterminer" un système d'équations différentielles sous-déterminé. Pour une entrée u , l'entier $d^\circ \text{ tr } L/K\langle u \rangle$ correspond au nombre de conditions initiales nécessaires pour intégrer le système d'équations différentielles lorsque la fonction $t \rightarrow u(t)$ est connue ou imposée.

Puisque x est une base de transcendance de l'extension $L/K\langle u \rangle$, tout élément w de L est algébrique sur $K\langle u_1, \dots, u_m \rangle(x_1, \dots, x_n)$ et satisfait donc une équation algébrique à coefficients dans $K\langle u_1, \dots, u_m \rangle(x_1, \dots, x_n)$, de la forme :

$$P(w, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m, u_1^{(l)}, \dots, u_m^{(l)}) = 0 \quad (1.5)$$

En particulier les composantes de la dérivée de x et de y vérifient :

$$\begin{cases} F_i(\dot{x}_i, \dot{x}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha_i)}) = 0 & i = 1, \dots, n \\ H_i(y_j, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\beta)}) = 0 & j = 1, \dots, p \end{cases} \quad (1.6)$$

où les F_i et les H_i sont des polynômes à coefficients dans K .

L'équation (1.6) joue le rôle d'une représentation par variables d'état généralisée.

Exemple 2. *Fliess et al. (1995)* Soit $k = \mathbb{R}$, L/K est l'extension de corps différentiels engendrée par les quatre inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 reliées par les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 + \ddot{x}_3 \dot{x}_4 = 0 \\ \dot{x}_2 + (x_1 + \ddot{x}_3 x_4) x_4 = 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

On a $d^\circ \text{ tr diff } L/K = 2$: il est égal au nombre d'inconnues moins le nombre d'équations.

En posant $u_1 = x_3$ et $u_2 = \dot{x}_4$, l'extension L/K est différentiellement algébrique ayant pour représentation :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\ddot{u}_1 u_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + \ddot{u}_1 x_4) x_4 \\ \dot{x}_4 = u_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

La dimension de la cette dynamique est 3 et (x_1, x_2, x_4) est l'état généralisé. Cette dimension sera égale à 5 si on pose $u_1 = \ddot{x}_3$ et $u_2 = \dot{x}_4$. En effet, en posant $\dot{u}_1 = x_5$ on obtient :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -u_1 u_2 \\ \dot{x}_2 = -(x_1 + u_1 x_4) x_4 \\ \dot{x}_3 = x_5 \\ \dot{x}_4 = u_2 \\ \dot{x}_5 = u_1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Remarque 2. Ce qui précède n'est pas limité aux équations différentielles polynômiales. En effet, la plupart des équations non polynômiales usuelles ($\cos$, $\sin$, $\exp$, $\log$, ...) satisfont des équations différentielles polynômiales comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3. Soit la dynamique du pendule simple décrite par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + w^2 \sin(x) = 0$$

qui n'est pas a priori une équation différentielle polynômiale. Il est noté que $y = \sin(x)$ est une solution de l'équation différentielle polynômiale suivante :

$$\dot{x}^2 y^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2$$

Un procédure d'élimination directe montre que x satisfait l'équation différentielle polynômiale :

$$(x^{(3)})^2 + (\dot{x}\ddot{x})^2 = w^4 \dot{x}^2$$

1.1.5 Système linéaire

Les corps différentiels sont beaucoup plus généraux pour les systèmes linéaires où les modules différentiels sont beaucoup plus appropriés. Un système linéaire est par définition un $k[\frac{d}{dt}]$ -module gauche finiment engendré Λ , Fliess (1990b). Une dynamique linéaire avec une entrée $u = (u_1, \dots, u_m)$ est un système linéaire Λ qui contient u , tel que le module quotient $\Lambda/[u]$ est de torsion, Fliess (1990b). L'entrée u est considérée indépendante, i.e., le sous-module $[u]$ est libre et de rang m . Le rang de Λ est alors égal à m .

Il existe alors une suite exacte, voir par exemple Lang (1993) définie par :

$$0 \longrightarrow \mathbf{N} \longrightarrow \Phi \longrightarrow \Lambda \longrightarrow 0$$

où, le module libre N qui est quelques fois appelé *le module de relations* doit être vu comme étant un ensemble d'équations définissant Λ .

Exemple 4. Soit le système d'équations linéaires suivant :

$$\sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} w_j = 0 \quad (1.10)$$

où $a_{ij} \in k[\frac{d}{dt}]$, $i = 1, \dots, \nu$. Les inconnues sont $w_1, \dots, w_{\mu}$. Soient Φ le sous-module libre engendré par $f_1, \dots, f_{\mu}$ et $N \subseteq \Phi$ le sous-module engendré par $\sum_{j=1}^{\mu} a_{ij} f_j$. Le module Λ correspondant à (1.10) est alors $\Lambda = \Phi/N$.

1.1.6 Système linéaire tangent ou variationnel

À une extension de corps différentiels L/K finiment engendrée est associée une application $d_{L/K} : L \mapsto \Omega_{L/K}$ appelée différentielle de *Kähler* où $\Omega_{L/K}$ est un $L[\frac{d}{dt}]$ -module gauche finiment engendré, telle que :

$$\begin{aligned} \forall a \in L \quad d_{L/K} \left(\frac{da}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} (d_{L/K} a) \\ \forall a, b \in L \quad d_{L/K} (a + b) &= d_{L/K} a + d_{L/K} b \\ d_{L/K} (a b) &= b d_{L/K} a + a d_{L/K} b \\ \forall c \in K \quad d_{L/K} c &= 0 \end{aligned}$$

Les éléments de K se comportent comme des constantes par rapport à $d_{L/K}$.

Le modèle tangent ou variationnel associé au système L/K est le $L[\frac{d}{dt}]$ -module gauche $\Omega_{L/K}$. Aux dynamiques $L/K\langle u \rangle$ sont associées les dynamiques variationnelles $\Omega_{L/K}$ avec les entrées variationnelles $d_{L/K} u = (d_{L/K} u_1, \dots, d_{L/K} u_m)$.

L'opérateur de *Kähler* permet entre autres de ramener plusieurs propriétés de l'extension L/K au cadre de la théorie des modules de $\Omega_{L/K}$.

Proposition 2. *Johnson (1969) Soit L/K une extension différentielle finiment engendrée. Les éléments $(z_1, z_2, \dots, z_s)$ de L forment une famille K -algébriquement indépendante (respectivement, différentiellement K -algébriquement indépendante), si et seulement si, les éléments $(d_{L/K} z_1, d_{L/K} z_2, \dots, d_{L/K} z_s)$ forment une famille L -linéairement indépendante (respectivement, différentiellement L -linéairement dépendante) de $\Omega_{L/K}$.*

Plusieurs propriétés structurelles découlent de ces notions, notamment les propriétés de platitude, d'inversion, d'observabilité, de découplage et linéarisation, etc. Une présentation plus détaillée est donnée dans Richard (1990), ch. 6.

1.2 Platitude différentielle - Systèmes plats

Le concept de système (différentiellement) plat a vu le jour au début des années 90, Fliess et al. (1992), Martin (1992). Il se réfère à l'existence de sorties plates ou linéarisantes qui résument les dynamiques du système non linéaire, i.e., toutes les variables du système peuvent être exprimées en fonction des sorties plates et d'un nombre fini de leurs dérivées sans avoir à intégrer aucune équation différentielle. Elle est étroitement liée à l'aptitude à linéariser un système non linéaire par un choix judicieux d'un bouclage dynamique endogène. Elle permet d'avoir une bijection entre les trajectoires de l'espace de la sortie plate et les trajectoires de l'espace d'état, les trajectoires peuvent ainsi être planifiées dans l'espace de la sortie plate et puis projetées dans l'espace d'état avec une relation algébrique. Dans la pratique, plusieurs classes de systèmes : mécaniques, chimiques et électriques sont plats et les sorties plates ont souvent une interprétation physique et énergétique. Cet aspect conjugué avec le caractère énergétique de la méthodologie bond graph constitue la motivation principale de ce sujet de thèse.

1.2.1 Exemple introductif

Soit le véhicule non holonome de la figure 1.1 emprunté de la référence, Lévine (2004a). On note (x, y) les coordonnées du point milieu de l'essieu arrière, et l la distance entre le point milieu de l'essieu avant et arrière. θ est l'angle entre l'axe du véhicule et l'axe Ox , φ l'angle de braquage des roues et u la vitesse de déplacement longitudinal. Les conditions de roulement sans glissement permettent d'aboutir au modèle cinématique (1.11).

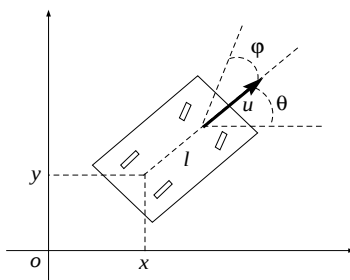


FIG. 1.1 – Véhicule non holonome en mouvement plan

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\theta) \\ \dot{y} = u \sin(\theta) \\ \dot{\theta} = \frac{u}{l} \tan(\varphi) \end{cases} \quad (1.11)$$

Le choix de variables $y_1 = x$ et $y_2 = y$ permet d'obtenir la paramétrisation différentielle (1.12) après un certain nombre d'opérations de dérivation et de substitution.

$$\begin{cases} x = y_1 \\ y = y_2 \\ \theta = \arctan\left(\frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2}\right) \\ u = \sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2} \\ \varphi = \arctan\left[\frac{l(\dot{y}_1 \ddot{y}_2 - \ddot{y}_1 \dot{y}_2)}{\sqrt{\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2}^3}\right] \end{cases} \quad (1.12)$$

Les variables $y_1 = x$ et $y_2 = y$ sont dites des sorties plates (ou des sorties linéarisantes).

1.2.2 Définition de la platitude

Sans perte de généralité, on considère un système non linéaire régi par la représentation par variables d'état (1.13).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ z = h(x, u) \end{cases} \quad (1.13)$$

avec : $x \in R^n, u \in R^m, z \in R^p$, et f est un champ de vecteur analytique de dimension appropriée et h est une fonction analytique.

Le système (1.13) est dit différentiellement plat ou simplement plat, s'il existe une famille d'éléments $y = (y_1, \dots, y_m)$ donnée par :

$$y = \lambda(x, u, \dot{u}, u^{(2)}, \dots, u^{(l)}) \quad (1.14)$$

telle que les vecteurs x , u et z peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x = \varphi(y, \dot{y}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}) \\ u = \phi(y, \dot{y}, y^{(2)}, \dots, y^{(k+1)}) \\ z = \psi(y, \dot{y}, y^{(2)}, \dots, y^{(k)}) \end{cases} \quad (1.15)$$

Ainsi, si l'on impose une trajectoire de référence arbitraire à une telle sortie y , on peut déduire de (1.15) les trajectoires correspondantes de toutes les variables du

système x et u , sans avoir à intégrer les équations différentielles du système. C'est cette dernière propriété qui permet d'apporter une solution particulièrement simple au problème de la planification de trajectoires, Fliess et al. (1995), Rouchon et al. (1998).

Remarque 3. *Les sorties plates ne sont pas toujours définies pour toutes valeurs de l'état. Un système peut être plat que sur un ouvert. Réciproquement, l'expression de l'état en fonction des sorties plates et de leurs dérivées peut n'être que locale.*

1.2.3 Propriétés de la platitude

- La définition ci-dessus n'est pas restreinte aux représentations par variables d'état explicites, mais à toute représentation par variables d'état de la forme :

$$\Phi(x, \dot{x}, \dots, x^{(n)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(m)}) = 0$$

- Mutatis mutandis pour les systèmes à événements discrets en remplaçant la dérivation par une avance.
- δ -platitude : quand y dépends de $u, \dot{u}, \dots, u^{(\delta)}$.
- Le nombre de sorties plates est égal au nombre d'entrées, (les entrées sont considérées indépendantes).
- Les sorties plates ne sont pas uniques. En effet, toute fonction $\xi = \psi(y)$ est aussi une sortie plate, avec ψ inversible.
- Commande en boucle ouverte : pour une trajectoire donnée (désirée) $y^*(t)$, il correspond une loi de commande $u(t) = \phi(y^*(t), \dot{y}^*(t), \dots, y^{*(k+1)}(t))$. La trajectoire $y^*(t)$ doit être au moins $(k+1)$ fois dérivable.
- Dérivée de la commande : on suppose que $y = \lambda(x, u, \dot{u})$, en posant $v = \dot{u}$ et en augmentant x par u , i.e., $X = [x^t, u^t]^t$ conduit à $\Phi(X, \dot{X}, v) = 0$ et $y = \lambda(X, v)$.
- Commande en boucle fermée : en posant $u = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(k)}, v)$, avec v la nouvelle entrée de commande, conduit à un système découplé de la forme $y^{(k+1)} = v$.
- Stabilisation : on pose $v = y^{*(k+1)} + \sum_{i=0}^k k_i (y^{*(i)} - y^{(i)})$, avec $K(s) = s^{k+1} + \sum_{i=0}^k k_i s^i$ Hurwitz.
- Implémentation : en pratique, un observateur est nécessaire en boucle fermée.
- Commande linéaire par platitude :

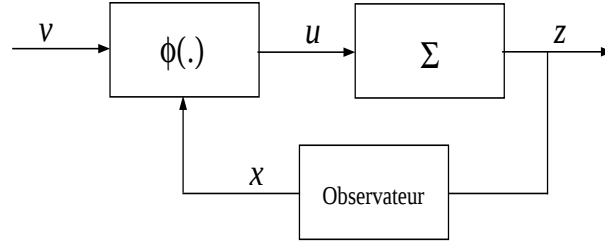


FIG. 1.2 – Schéma de commande en boucle fermée d'un système plat

- la première étape est la génération d'une trajectoire en boucle ouverte :
 $y^*(t) \rightarrow (x^*(t), u^*(t), z^*(t))$;
- la linéarisation du modèle autour de cette trajectoire conduit à :

$$\begin{cases} \delta \dot{x} = A(t)\delta x + B(t)\delta u \\ \delta y = C(t)\delta x + D(t)\delta u \end{cases}$$

avec $\delta x = x^* - x$, $\delta u = u^* - u$ et $\delta z = z^* - z$;

- élaboration d'une commande de la forme $u(t) = \psi(z^*(t), \dot{z}^*(t), \dots, z^{*(k+1)}(t)) - \delta u(t)$;
- enfin, pour la stabilisation, on pose : $\delta u(t) = K(p, t)\delta y(t)$.

1.2.4 Commandabilité et platitude

Dans le cadre analytique de la géométrie différentielle, on utilise souvent la notion d'accessibilité forte, d'une dynamique de la forme $\dot{x} = f(x, u)$. En revanche, dans le cadre algébrique, cette notion reçoit une définition beaucoup plus générale qui ne fait aucune distinction entre les variables : un système L/K est dit commandable ou fortement accessible, si et seulement si, le système tangent (variationnel) est commandable, i.e., le module $\Omega_{L/K}$ est libre, Fliess et al. (1995).

Par ailleurs, la commandabilité est étroitement liée à la notion de platitude. En effet, dans Fliess et al. (1995), il est montré qu'un système plat est toujours commandable, par contre l'inverse est faux.

Dans le cas linéaire, un système linéaire Λ est dit commandable, si et seulement si, le module Λ est libre, Fliess (1990b). Toute base z de Λ peut être considérée comme une sortie fictive, appelée sortie plate.

Pour un modèle linéaire de la forme (1.16) dite de *Kalman* :

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1.16}$$

où $A \in K^{n \times n}$ et $B \in K^{n \times m}$, il suit de Fliess (1990b) que (1.16) est commandable, i.e. $\text{rg}[B \ (A-s)B, \dots, (A-s)^{n-1}B] = n$, si et seulement si, le module correspondant Λ est libre. Le sous-module de torsion T correspond alors au sous-espace non commandable de *Kalman*.

Il existe alors un changement de coordonnées et un bouclage par retour d'état statique qui permet de transformer le système (1.16) à la fameuse forme canonique de *Brunovský*, i.e.,

$$\begin{cases} z_1^{\nu_1} = v_1 \\ z_2^{\nu_2} = v_2 \\ \vdots \\ z_m^{\nu_m} = v_m \end{cases}$$

où les $v_i, i = 1, \dots, m$ sont les variables de commande et les $\nu_i, i = 1, \dots, m$ sont les indices de commandabilité ou de *Kronecker*.

L'ensemble $z = (z_1, \dots, z_m)$ est le vecteur de sorties plates. Il est alors possible d'énoncer le théorème suivant :

Théorème 2. *Fliess et al. (1995) Un système linéaire est plat, si et seulement si, il est commandable.*

1.2.5 Quelques résultats connus sur la platitude

Plusieurs formalismes ont été introduits pour étudier la propriété de platitude. On retrouve les approches basées sur la théorie d'algèbre différentielle, Fliess et al. (1995), E. Fossas and Palau (1998), E. Aranda-Bricaire and Pomet (1995) et Jakubczyk (1993). Les approches basées sur la théorie de la géométrie différentielle de dimension finie, Charlet et al. (1991), Shadwick (1990) et Sluis (1993). Enfin, les approches basées sur la théorie de la géométrie différentielle de dimension infinie des jets , Fliess et al. (1999), van Nieuwstadt et al. (1998), Pomet (1993), da Silva and Filho (2001). Ces résultats sont rappelés ci-dessous.

Méthodes algébriques

Un système non linéaire L/K est dit différentiellement plat, s'il existe une famille $y = (y_1, \dots, y_m)$ d'éléments K -algébriquement indépendants d'un corps différentiel $\bar{L}$, extension algébrique de L , telle que l'extension $\bar{L}/\langle y \rangle$ soit (non différentiellement

algébrique), Richard (1990) et Fliess et al. (1995) pour plus de détail. Malheureusement, il n'existe pas d'algorithme basé sur cette définition permettant de calculer les sorties plates.

Une autre manière de procéder consiste à exploiter la notion de modèle tangent ou variationnel. Cette méthode est présentée dans E. Fossas and Palau (1998). Elle permet de calculer :

- La sortie plate d'un système non linéaire mono-entrée.
- La $m^{\text{ème}}$ sorties plate d'un système multi-entrée à condition que les $m - 1$ sorties plates sont déjà connues.

Soit un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (1.17)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}$. On suppose que (1.17) est commandable. Le système tangent qui lui est associé est :

$$d\dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial u} du \quad (1.18)$$

Alors, la base du module correspondant noté Ω contient un seul élément w .

En exploitant la propriété de l'équivalence entre la linéarisation par bouclage statique et dynamique Charlet et al. (1991), une condition de platitude est obtenue.

Proposition 3. *E. Fossas and Palau (1998) Le système (1.17) est linéarisable par bouclage statique, si et seulement si, le module Ω caractérisant (1.18) est engendré par une seule 1-forme qui est intégrable.*

$w \in \Omega$, donc :

$$w = Cdx + p\left(\frac{d}{dt}\right)du$$

Par ailleurs, il a été prouvé dans la même référence que $p\left(\frac{d}{dt}\right) = 0$. En utilisant alors la condition de linéarisation exacte par bouclage statique (degré relatif égal à n), le vecteur C vérifie le système d'équations algébriques suivant :

$$C \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} I \right)^k \frac{\partial F}{\partial u} = 0, \quad \forall k = 0, \dots, n-2 \quad (1.19)$$

Après intégration, on obtient la sortie plate telle que $dy = w$. Le vecteur C joue le rôle de facteur intégrant.

On suppose maintenant que $u \in \mathbb{R}^2$ et que la première sortie plate est connue (y_1 par exemple). Pour obtenir la deuxième sortie plate, on effectue un quotient de modules. Soit le module :

$$\Omega_2 = \Omega / \langle dy_1 \rangle \quad (1.20)$$

On se réduit alors à un système mono-entrée pour lequel il est possible d'appliquer l'algorithme précédent pour obtenir la deuxième base $\bar{w}_2$. Par conséquent, les bases de Ω sont :

$$\begin{cases} w_1 = dy_1 \\ w_2 = w_1 + p(\frac{d}{dt})dy_1 \end{cases} \quad (1.21)$$

$p(\frac{d}{dt})$ est choisie de telle sorte que w_2 soit intégrable.

Cette procédure peut être généralisée facilement au cas de $m - 1$ entrées.

Exemple 5. Soit le système non linéaire définie par les équations :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \\ \dot{x}_2 = u_2 \\ \dot{x}_3 = u_1 u_2 \end{cases}$$

Le système tangent qui lui est associé est le $K[\frac{d}{dt}]$ -module Ω défini par les générateurs $\{dx_1, dx_2, dx_3, du_1, du_2\}$ et les relations :

$$\begin{cases} d\dot{x}_1 = du_1 \\ d\dot{x}_2 = du_2 \\ d\dot{x}_3 = u_2 du_1 + u_1 du_2 \end{cases}$$

On peut remarquer que dx_1 est l'un des générateurs du module libre. On considère alors le module quotient $\Omega_1 = \frac{\Omega}{\langle dx_1 \rangle}$. La représentation par variables d'état de Ω_1 est :

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_2 = \bar{u}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 = u_1 d\bar{u}_2 \end{cases}$$

La base de Ω_1 est donnée par $\bar{w}_2 = u_1 d\bar{u}_2 - d\bar{x}_3$, d'où :

$$w_2 = u_1 du_2 - dx_3 + p(\frac{d}{dt})dx_1$$

où $p(\frac{d}{dt}) \in K[\frac{d}{dt}]$. Pour que w_2 soit K -intégrable, il suffit de choisir $p(\frac{d}{dt}) = x_2 \frac{d}{dt}$.

Dans ce cas :

$$\begin{cases} w_2 = dx_1 \\ w_2 = u_1 dx_2 - dx_3 + x_2 du_1 \end{cases}$$

et les sorties plates sont :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = u_1 x_2 - x_3 \end{cases}$$

Méthodes basées sur la théorie de la géométrie différentielle

Plusieurs contributions à l'étude de la problématique de la platitude ont été apportées en utilisant ce formalisme. Nous ne présentons ici qu'un résumé des différents résultats obtenus.

- Systèmes non linéaires affines par rapport aux entrées :
 - 1 entrée : équivalence entre la linéarisation statique et dynamique, Charlet et al. (1989, 1991) ;
 - $(n - 1)$ entrées + commandabilité au 1^{er} ordre : toujours plat, Charlet et al. (1989) ;
 - 2 entrées et 4 états, Pomet (1997).
- Systèmes sans dérive :
 - 2 entrées : rang du drapeau de l'algèbre de Lie, Martin and Rouchon (1994) ;
 - $(n - 2)$ entrées : toujours plat si commandable, Martin and Rouchon (1995).
- Non affine par rapport aux entrées : $(n - 1)$ entrées, Martin (1993).
- Condition nécessaire : variété réglée, Sluis (1993), Fliess et al. (1995).

Résultats récents

Les résultats les plus récents traitant de la problématique d'identification des sorties plates ont été présentés dans Lévine and Nguyen (2003) pour le cas linéaire. L'approche présentée consiste en l'élimination des entrées puis la caractérisation de toutes les transformations exprimant les variables du système linéaire en termes de la sortie plate et de ses dérivées. Ces transformations sont appelées matrices de définition et considérées comme étant les noyaux de matrices polynômiales. Une version simplifiée de cette méthode est présentée ci-dessous :

Soit le système linéaire commandable décrit par :

$$A(s)x = Bu$$

avec $s = \frac{d}{dt}$, $\dim x = n$, $\dim u = m$ et $\text{rg}[A(s), B] = n$ pour tout $s \in \mathbb{C}$.

Élimination des entrées : $\exists C \in M_{n \times (n-m)}$, avec $\text{rg } C = n - m$, tel que $C^T B = 0$.

Si y est le vecteur de sorties plates, alors :

$$x = P(s)y$$

d'où la caractérisation :

$$C^T A(s)P(s) = 0$$

posons $P(s) = U_2(s)\tilde{P}_2(s)$, avec $U_2(s)$ solution de $C^T A(s)U_2(s) = 0$, et $\tilde{P}_2(s)$ une matrice unimodulaire arbitraire. Par conséquent :

$$P(s) = U_2(s)\tilde{P}_2(s) \quad \text{et} \quad x = U_2(s)\tilde{P}_2(s)y$$

Exemple 6. *Lévine and Nguyen (2003)* Soit le dispositif table-base représenté, figure 1.3 et dont la représentation par variables d'état est donnée par l'équation (1.22), avec $u = F$.

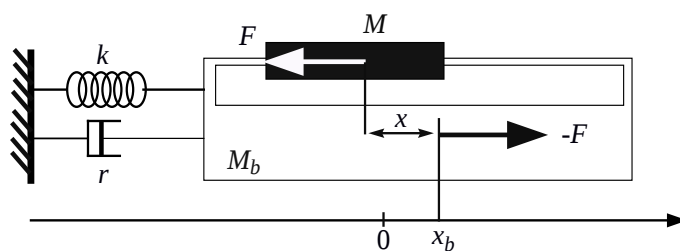


FIG. 1.3 – Dispositif table-base

$$\begin{cases} M\ddot{x} = u \\ M_B\ddot{x}_B = -u - k.x_B - r.\dot{x}_B \end{cases} \quad (1.22)$$

soit :

$$\begin{bmatrix} Ms^2 & 0 \\ 0 & M_Bs^2 + rs + k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u$$

On a : $C^T = [1 \ 1]$ et $C^T A(s) = [Ms^2 \ M_Bs^2 + rs + k]$

On cherche $U_2(s) = [\mu_1(s) \ \mu_2(s)]^T$ solution de :

$$Ms^2\mu_1(s) + (M_Bs^2 + rs + k)\mu_2(s) = 0$$

d'où : $\mu_1(s) = \frac{M_B}{k}s^2 + \frac{r}{k}s + 1$ et $\mu_2(s) = -\frac{M}{k}s^2$

soit :

$$x = \left(\frac{M_B}{k}s^2 + \frac{r}{k}s + 1\right)y \quad x_B = -\frac{M}{k}s^2y$$

Une extension au cas non linéaire a été présentée dans Lévine (2004b). Dans cette contribution, une caractérisation de systèmes différentiellement plats non linéaires donnés par une représentation par variables d'état implicite, où les variables d'entrée sont éliminées, a été présentée. Les isomorphismes de *Lie-Bäcklund* associés à un système plat appelés trivialisations sont localement caractérisés en termes de matrices polynômiales. Une condition nécessaire et suffisante consiste dans la fermeture de

l'idéal différentiel des formes différentielles engendrées par les différentielles de toutes les trivialisations possibles.

Soit le système non linéaire :

$$F(x, \dot{x}) = 0 \quad (1.23)$$

Le linéarisé tangent en un point quelconque $(x, \dot{x})$ d'une courbe intégrale est donné par :

$$F_{x,\dot{x}}(s)dx = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}s + \frac{\partial F}{\partial x}\right)dx = 0 \quad (1.24)$$

où dx est la différentielle de *Kähler* associée à x . On suppose que $\text{rang } F_{x,\dot{x}}(s) = n - m$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ et pour tout $(x, \dot{x})$ dans un ouvert dense. La matrice $F_{x,\dot{x}}(s)$ est une matrice polynômiale de s à coefficients dépendant du temps, donc sur un corps non commutatif : $s.(ts) = s + ts^2$ alors que $(ts).s = ts^2$

On a alors : $dx = P(s)dy$ i.e., $F_{x,\dot{x}}(s)P(s) = 0$.

La forme de Smith de $F_{x,\dot{x}}(s)$ est définie par :

$$V(s)F_{x,\dot{x}}(s)U(s) = (\Delta(s) \mid 0)$$

On posant $P(s) = U(s)\tilde{P}(s) = (U_1(s) \mid U_2(s))(\tilde{P}_1(s) \mid \tilde{P}_2(s))^T$, on obtient :

$$F_{x,\dot{x}}(s)(U_1(s)\tilde{P}_1(s) + U_2(s)\tilde{P}_2(s)) = \Delta(s)\tilde{P}_1(s) = 0$$

Ce qui implique $\tilde{P}_1(s) = 0$, par conséquent :

$$P(s) = \pi_2 U(s)\tilde{P}_2(s)$$

avec π_2 est tel que $\pi_2 U(s) = U_2(s)$. Alors :

$$dx = \pi_2 U(s)\tilde{P}_2(s)dy$$

la matrice $\tilde{P}_2(s)$ joue le rôle d'un facteur intégrant.

Exemple 7. *Considérons le véhicule non holonome de la figure 1.1.*

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos \theta \\ \dot{y} = u \sin \theta \\ \dot{\theta} = \frac{u}{l} \tan \varphi \end{cases} \quad (1.25)$$

Après élimination des entrées u et φ on trouve :

$$\dot{x}\sin\theta - \dot{y}\cos\theta = 0$$

Le linéarisé tangent est :

$$\begin{pmatrix} \sin\theta & s & -\cos\theta & s & \dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix} = 0$$

et sa forme de Smith :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\cos\theta}{\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta} s & \frac{\sin\theta}{\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta} s \end{pmatrix}$$

d'où le système de Pfaff :

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ d\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{\cos\theta}{\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta} s & \frac{\sin\theta}{\dot{x}\cos\theta - \dot{y}\sin\theta} s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{pmatrix}$$

qui est trivialement intégrable :

$$x = y_2, \quad y = y_1, \quad \theta = \arctang\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

Conclusion

Après cette synthèse sur les systèmes plats, on peut conclure que le problème lié principalement à l'identification des sorties plates est un problème difficile et ne semble pas être résolu complètement. Il est alors intéressant et utile d'étudier cette problématique sur des modèles bond graphs.

Deux raisons principales motivent cette démarche, la première réside dans le fait que les sorties plates ont souvent une signification physique et énergétique comme nous l'avons déjà mentionné précédemment qui s'accorde bien avec la méthodologie bond graph qui est basée sur la notion de puissance et d'énergie. La deuxième raison est d'apporter un certain sens physique à la théorie algébrique qui semble à première vue abstraite aux ingénieurs automaticiens.

La démarche retenue pour atteindre cet objectif est l'utilisation de la théorie d'algèbre et de modules différentiels. Ce choix s'explique par le fait que beaucoup de résultats théoriques d'analyse de modèles bond graphs disponibles dans la littérature

sont basés principalement sur la théorie algébrique qui se prête bien aux bond graphs. Notre premier objectif est désormais de proposer ou d'adapter des méthodes d'analyse de la platitude et de calcul de la paramétrisation différentielle directement sur des modèles bond graphs. Pour résoudre ce problème, nous avons introduit la notion d'anneau bond graph non commutatif qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 2

Les anneaux bond graphs non commutatifs

«Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions également commodes qui, l'une et l'autre, nous dispensent de réfléchir»

Henri Poincaré

L'outil bond graph (BG) fondé par Paynter, Paynter (1961) et formalisé par Karnopp et Rosenberg, Karnopp and Rosenberg (1975) et Breedveld, Breedveld (1984) est un langage graphique de modélisation des systèmes dynamiques. Un rappel sur les propriétés de base de la méthodologie BG est proposé en annexe A.1.

Malgré la littérature abondante utilisant ce formalisme pour la modélisation de systèmes continus, peu de travaux s'intéressent à son utilisation pour l'analyse et la commande.

Dans le cas linéaire, un certain nombre de résultats existent, citons notamment les résultats relatifs à l'analyse des propriétés structurelles comme la commandabilité et l'observabilité, Sueur and Dauphin-Tanguy (1989) et Dauphin-Tanguy et al. (1999), le découplage, Bertrand et al. (2001) et enfin le rejet de perturbation, Arib et al. (1999). En revanche dans le cas non linéaire, il existe peu de résultats, on peut citer à titre d'exemple, l'analyse directe sur le modèle BG de la stabilité interne, Junco (1993), la synthèse directe des lois de commande à partir du modèle BG, Junco (2001a).

Pour pouvoir intégrer de nouvelles techniques de commande non linéaires avancée comme la platitude, la linéarisation exacte, la passivité, etc. sur des modèles BGs, il est nécessaire de définir de nouveaux outils et règles graphiques permettant de tenir

compte de la complexité mathématique rencontrée dans ce types de modèles.

2.1 Quelques rappels sur la théorie BG classique

La structure causale du BG offre des caractéristiques intéressantes dues à l'analyse causale. Parmi ces caractéristiques on peut citer les notions de chemins causaux et de boucles causales, très utiles pour le calcul des fonctions de transfert, le calcul du polynôme caractéristique, Dauphin-Tanguy (2000), le placement de pôles, Rahmani et al. (1994b) et enfin le calcul des matrices de commandabilité et d'observabilité, Rahmani et al. (1992). La deuxième caractéristique importante est la notion de causalité dérivée et de dualisation des sources et des détecteurs. Cette notion permet entre autres d'effectuer les tests de commandabilité et d'observabilité, Sueur and Dauphin-Tanguy (1989). Enfin, la notion de bicausalité, Gawthrop (1995) permet de retrouver les modèles inverses qui sont exploités pour le calcul des lois de commande ou l'identification des paramètres du système.

2.1.1 Chemin causal

Définition 2. *Un chemin causal est une alternance de liens et d'éléments de base appelés noeuds, telle que :*

- tous les noeuds de la séquence ont une causalité complète et correcte,
- deux liens du chemin causal ont en un même noeud des orientations causales opposées (sauf lorsque le chemin causal rencontre un élément GY).

Un chemin causal est dit simple s'il est parcouru en suivant toujours la même variable. Il est dit mixte s'il faut changer de variable lors du parcours. C'est le cas en présence d'un élément GY (gyrateur). Il est qualifié d'indirect lorsque il passe par des éléments I, C et R .

Le gain d'un chemin causal T_i se définit comme étant la fonction liant la variable d'entrée de l'élément formant l'extrémité du chemin à la variable de sortie de l'élément correspondant à l'origine du chemin. Dans le cas linéaire stationnaire, il a pour expression :

$$T_i = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_i (m_i)^{k_i} \prod_j (r_j)^{l_j} \prod_e g_e \quad (2.1)$$

avec :

- n_0 et n_1 : nombre de changements d'orientations aux jonctions 0 (respectivement 1) quand on suit la variable flux (respectivement effort),
- m_i : module de l'élément TF_i (transformateur) traversé avec $k_i = +1$ ou -1 selon la causalité appliquée,
- r_j : module de l'élément GY_j (gyrateur) traversé avec $l_j = +1$ ou -1 selon la causalité appliquée,
- g_e : transmittances des éléments R, I et C traversés.

Définition 3.

a. Dans un BG ne comportant que des éléments en causalité intégrale, la longueur l d'un chemin causal allant d'un élément de l'ensemble $\{Se, Sf, R, C, I\}$ vers un élément de l'ensemble $\{De, Df, R, C, I\}$ est égale au nombre d'éléments I et C traversés $+1$ si le point d'arrivée est un élément I ou C .

b. Dans un BG en causalité intégrale préférentielle comportant des éléments I et C en causalité intégrale et dérivée, la longueur généralisée l_g d'un chemin causal est définie par :

$l_g = \text{nombre}(I \text{ et } C \text{ en causalité intégrale}) - \text{nombre}(I \text{ et } C \text{ en causalité dérivée}) + 1$ si le point d'arrivée est un élément I ou C en causalité intégrale.

2.1.2 Boucle causale

Définition 4. Une boucle causale est un chemin causal fermé entre deux éléments de l'ensemble (R, C, I) partant de la sortie d'un port et revenant à l'entrée de celui-ci sans parcourir le même lien dans la même direction plus d'une fois.

Dans le cas linéaire stationnaire, le gain d'une boucle causale a pour expression :

$$B_i = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_i (m_i)^{2k_i} \prod_j (r_j)^{2l_j} \prod_e g_e^2 \quad (2.2)$$

Les différents entiers n_0, n_1, k_i, l_j et gains m_i, r_j, g_e sont définis comme précédemment.

Définition 5. L'ordre n d'un modèle BG est égal au nombre d'éléments I et C en causalité intégrale quand la causalité intégrale préférentielle est assignée au modèle BG.

Ce dernier représente le nombre d'états ou de conditions initiales nécessaires pour intégrer le système d'équations différentielles décrivant les dynamiques du système.

Exemple 8. Soit le BG de la figure 2.1. Le chemin causal $u \longrightarrow y$ est indirect et mixte. Son gain a pour expression :

$$T = (-1)^{n_0+n_1} k \frac{1}{Ls} \frac{1}{Js} = \frac{k}{LJs^2}$$

avec $n_0 = n_1 = 0$. Sa longueur est égale à 2 car pour le parcourir, on doit traverser deux éléments dynamiques en causalité intégrale.

Le gain de la boucle causale formée par les deux éléments dynamiques $I : L$ et $I : J$ a pour expression :

$$B = (-1)^{n_0+n_1} k^2 \frac{1}{Ls} \frac{1}{Js} = -\frac{k^2}{LJs^2}$$

avec $n_0 = 0$ et $n_1 = 1$. Elle est aussi de longueur 2.

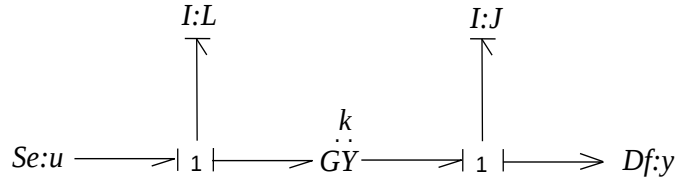


FIG. 2.1 – Exemple d'un chemin causal et d'une boucle causale

2.1.3 Représentations par variables d'état issues d'un modèle BG

Un modèle BG est composé d'éléments de base, associés à des ports, I , C (stockage d'énergie), R (dissipation d'énergie), MSe, MSf, Se, Sf (sources). Des éléments $0, 1$ (jonctions), MTF, TF (transformateurs) et MGY, GY (gyrateurs) composent la structure de jonction, qui échange l'énergie entre les différentes parties du système dynamique et qui doit assurer la conservation d'énergie. La représentation vectorielle d'un modèle BG est illustrée, figure 2.2 et est représentée par l'équation de jonction (2.3). Le vecteur de sortie n'est pas pris en compte *a priori* dans cette représentation vectorielle.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ z_d \\ D_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_i \\ \dot{x}_d \\ D_{out} \\ u \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

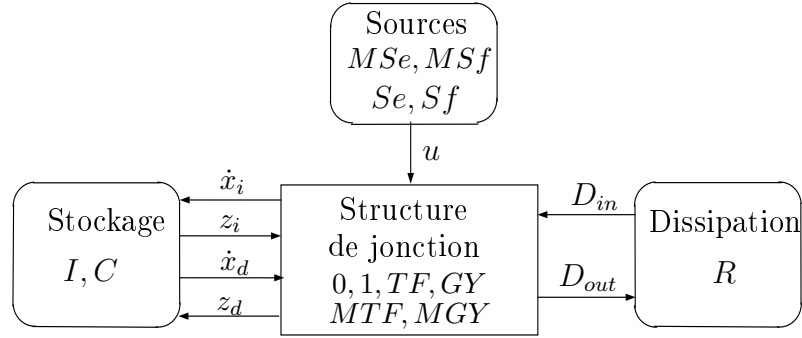


FIG. 2.2 – Représentation vectorielle d'un modèle BG

Le vecteur d'état x_i est composé des variables d'énergie p sur des éléments (I) et q sur des éléments (C) en causalité intégrale, x_d est le vecteur des variables associées aux éléments (I et C) en causalité dérivée, z_i et z_d sont leurs vecteurs d'état complémentaires (f sur I et e sur C) respectivement. D_{in} et D_{out} regroupent les efforts et les flux respectivement entrants et sortants des éléments de dissipation R .

S_{ij} sont des matrices de dimensions appropriées dont les éléments sont dérivés des jonctions 0 et 1 et des gains des transformateurs et des gyrateurs.

Les matrices S_{11} et S_{33} sont des matrices anti-symétriques, d'où les relations simplificatrices regroupées dans l'équation (2.4).

$$\begin{cases} S_{11} = -S_{11}^t \\ S_{33} = -S_{33}^t \end{cases} \quad (2.4)$$

La dualité entre l'effort et le flux de la représentation BG permet d'avoir les relations simplificatrices décrites par l'équation (2.5).

$$\begin{cases} S_{21} = -S_{12}^t \\ S_{31} = -S_{13}^t \end{cases} \quad (2.5)$$

Des lois élémentaires sont associées aux éléments BGs (R , I et C), appelées lois constitutives, exprimées par l'équation (2.6a) dans le cas non linéaire,

$$\begin{cases} D_{out} = \phi_L(D_{in}) \\ z_i = \phi_{F_i}(x_i) \\ z_d = \phi_{F_d}(x_d) \end{cases} \quad (2.6a)$$

et par l'équation (2.6b) dans le cas linéaire.

$$\begin{cases} D_{out} = LD_{in} \\ z_i = F_i x_i \\ z_d = F_d x_d \end{cases} \quad (2.6b)$$

Hypothèses simplificatrices

- Deux éléments I et C en causalité dérivée ne sont pas causalement liés (il n'existe pas de chemin causal entre eux), i.e., $S_{22} = 0$. Autrement, il suffit d'inverser la causalité le long du chemin causal pour leur conférer une causalité intégrale.
- Un élément R linéaire ne peut pas être relié à un élément dynamique I ou C en causalité dérivée, i.e., $S_{23} = 0$. En effet, il suffit d'inverser la causalité le long du chemin causal pour attribuer une causalité intégrale à cet élément dynamique, Karnopp and Rosenberg (1975). La dualité effort flux de l'approche BG permet de considérer $S_{32} = 0$.

Représentation par variables d'état explicites - Cas non linéaire

Lorsque des modèles BGs sans élément en causalité dérivée sont considérés, les matrices S_{14} et S_{24} deviennent nulles et l'équation (2.3) se réduit à la forme (2.7).

$$\begin{cases} \dot{x}_i = S_{11}z_i + S_{13}D_{out} + S_{14}u \\ D_{in} = S_{31}z_i + S_{33}D_{out} + S_{34}u \end{cases} \quad (2.7)$$

En remplaçant par les expressions des lois constitutives des éléments, l'équation (2.7) s'écrit :

$$\dot{x}_i = S_{11}\phi_F(x_i) + S_{13}\phi_L(D_{in}) + S_{14}u \quad (2.8a)$$

$$D_{in} = S_{31}\phi_F(x_i) + S_{33}\phi_L(D_{in}) + S_{34}u \quad (2.8b)$$

Si D_{in} peut être obtenu de l'équation (2.8b) en fonction de x_i et u , alors dans ce cas une représentation d'état explicite est possible. i.e.,

$$D_{in} = \phi_D(x_i, u) \quad (2.9)$$

En remplaçant dans l'équation (2.8a), on obtient la représentation par variable d'état (2.10).

$$\dot{x}_i = S_{11}\phi_F(x_i) + S_{13}\phi_L[\phi_D(x_i, u)] + S_{14}u \quad (2.10)$$

L'équation (2.10) représente bien un modèle non linéaire explicite de la forme $\dot{x}_i = F(x_i, u)$.

Remarque 4. Si le champs de dissipation est linéaire alors l'équation (2.9) s'écrit :

$$D_{in} = (I - S_{33}L)^{-1}[S_{31}\phi_F(x_i) + S_{34}u]$$

et l'équation (2.10) devient :

$$\dot{x}_i = [S_{11} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{31}]\phi_F(x_i) + [S_{14} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{34}]u \quad (2.11)$$

L'équation (2.11) représente un modèle non linéaire explicite affine en entrée de la forme :

$$\dot{x}_i = f(x_i) + G(x)u$$

Dans le cas où les éléments dynamiques sont linéaires, i.e., le champs de vecteur $\phi_{F_i}(x_i)$ est linéaire, on obtient un modèle affine en entrée et en état, i.e., de la forme :

$$\dot{x}_i = A(x_i)x_i + B(x)u$$

Cette forme est particulièrement intéressante pour la détermination du rang structural de la matrice $A(x_i)$ en utilisant le concept de causalité dérivée, proposé dans la référence Fossard and Normand-Cyrot (1993), ch. 2.

Représentation par variables d'état implicites - Cas non linéaire

Si D_{in} ne peut pas être obtenu à partir de l'équation (2.8b) en fonction de x_i et u , une représentation par variables d'état implicite ou généralisée peut alors être déduite. En notant $\theta = D_{in}$, l'équation (2.3) s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F(x_i, \theta, u) \\ 0 = g(x_i, \theta, u) \end{cases} \quad (2.12)$$

Les systèmes décrits par l'équation (2.12) sont appelés systèmes non linéaires descripteurs ou généralisés.

Le même cas de figure se présente quand des éléments en causalité dérivée subsistent après l'application de la procédure d'affectation de causalité intégrale préférentielle. La structure de jonction est alors caractérisée par l'équation (2.3). Si on envisage que les éléments en causalité dérivée ne sont pas liés aux sources ($S_{33} = 0$) et en tenant compte des hypothèses simplificatrices, alors l'équation (2.3) se réduit à :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = S_{11}z_i + S_{12}\dot{x}_d + S_{13}D_{out} + S_{14}u \\ z_d = S_{21}z_i \\ D_{in} = S_{31}z_i + S_{33}D_{out} + S_{34}u \end{cases} \quad (2.13)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que S_{21} est une matrice à coefficients constants. De la 3^{ème} relation de l'équation (2.6a) il vient :

$$x_d = \phi_{F_d}^{-1}(z_d)$$

En dérivant cette dernière relation par rapport au temps, on obtient :

$$\dot{x}_d = \frac{\partial \phi_{F_d}^{-1}(z_d)}{\partial z_d} S_{21} \frac{\partial \phi_{F_i}(x_i)}{\partial x_i} \dot{x}_i \quad (2.14)$$

Si la matrice S_{21} n'est pas à coefficients constants, elle ne fait qu'introduire d'autres termes dépendant de $\dot{x}_i$ dans l'équation (2.14). Dans le cas où le vecteur D_{in} peut être obtenu en fonction de x_i et u , équation (2.9) et en remplaçant par les lois constitutives des éléments, une équation d'état implicite découle de l'équation (2.13).

$$\left[I - S_{12} \frac{\partial \phi_{F_d}^{-1}(z_d)}{\partial z_d} S_{21} \frac{\partial \phi_{F_i}(x_i)}{\partial x_i} \right] \dot{x}_i = S_{11} \phi_F(x_i) + S_{13} \phi_L[\phi_D(x_i, u)] + S_{14}u \quad (2.15)$$

Le système modélisé par l'équation (2.15) est en général implicite et prend la forme :

$$W(x_i) \dot{x}_i = \phi_I(x_i, u)$$

En évoquant le théorème des fonctions implicites, ce dernier peut être localement transformé en un modèle explicite de la forme (2.16) si la matrice $W(x_i)$ est régulière dans un sous domaine de l'espace d'état.

$$\dot{x}_i = F(x_i, u) \quad (2.16)$$

Représentation par variables d'état explicites - Cas linéaire

Dans le cas des modèles BGs linéaires sans élément en causalité dérivée et à coefficients constants, les champs de stockage et de dissipation sont décrits par l'équation (2.6b). La version développée de l'équation (2.3) se simplifie à :

$$\dot{x}_i = S_{11}z_i + S_{13}D_{out} + S_{14}u \quad (2.17a)$$

$$D_{in} = S_{31}z_i + S_{33}D_{out} + S_{34}u \quad (2.17b)$$

L'ensemble des équations (2.6b), (2.17a) et (2.17b) peuvent être réduites à une représentation par variable d'état. Ceci nécessite que les vecteurs D_{in} , D_{out} et z_i doivent être éliminés. On obtient alors :

$$\dot{x}_i = [S_{11} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{31}]F_i x_i + [S_{14} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{34}]u \quad (2.18)$$

L'équation (2.18) est sous la forme classique $\dot{x}_i = Ax_i + Bu$ dite de Kalman.

Dans le cas où le modèle contient des éléments en causalité dérivée avec l'hypothèse $S_{24} = 0$ (pas d'éléments en causalité dérivée liés directement aux sources), la version développée de l'équation (2.3) devient :

$$\dot{x}_i = S_{11}z_i + S_{12}\dot{x}_d + S_{13}D_{out} + S_{14}u \quad (2.19a)$$

$$z_d = S_{21}z_i \quad (2.19b)$$

$$D_{in} = S_{31}z_i + S_{33}D_{out} + S_{34}u \quad (2.19c)$$

De l'équation (2.6b) et (2.19), il suit :

$$\dot{x}_d = -F_d^{-1}S_{12}^t F_i x_i \quad (2.20)$$

L'ensemble des équations (2.20), (2.19) et (2.19) peut être réduit à une représentation par variable d'état. Ceci nécessite que les vecteurs D_{in} , D_{out} et z soient éliminés, pour donner :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = [I + S_{12}F_d^{-1}S_{12}^t F_i]^{-1} [S_{11} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{31}]F_i x_i \\ + [S_{14} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{34}]u \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ce modèle est aussi sous la forme standard $\dot{x}_i = Ax_i + Bu$.

Représentation par variables d'état implicites - Cas linéaire

Dans le cas où D_{in} ne peut pas être obtenu à partir de l'équation (2.17b) en fonction de x_i et u , une représentation par variables d'état implicite ou généralisée peut alors être déduite. En posant $X = [x_i^t, D_{in}^t]^t$ et à partir des équations (2.17a) et (2.17b) on obtient :

$$E\dot{X}_i = AX + Bu \quad (2.22)$$

Les systèmes décrits par l'équation (2.22) sont aussi appelés systèmes linéaires descripteurs ou généralisés.

Dans le cas où la matrice S_{24} n'est plus nulle, en tenant compte des hypothèses simplificatrices, la version développée de l'équation (2.3) est :

$$\dot{x}_i = S_{11}z_i + S_{12}\dot{x}_d + S_{13}D_{out} + S_{14}u \quad (2.23a)$$

$$z_d = S_{21}z_i + S_{24}u \quad (2.23b)$$

$$D_{in} = S_{31}z_i + S_{33}D_{out} + S_{34}u \quad (2.23c)$$

De l'équation (2.6b) et (2.23b), il suit :

$$\dot{x}_d = -F_d^{-1}S_{12}^t F_i x_i + F_d^{-1}S_{24}\dot{u} \quad (2.24)$$

L'ensemble des équations (2.24), (2.23a) et (2.23c) peut être réduit à une représentation par variable d'état. Ceci nécessite que les vecteurs D_{in} , D_{out} et z soient éliminés, pour donner :

$$\begin{aligned} \dot{x}_i = [I + S_{12}F_d^{-1}S_{12}^t F_i]^{-1} [S_{11} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{31}] F_i x_i \\ + [S_{14} + S_{13}L(I - S_{33}L)^{-1}S_{34}] u + S_{12}F_d^{-1}S_{24}\dot{u} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Cette dernière représentation fait apparaître les dérivées de l'entrée dans la représentation d'état. Ce cas de figure peut aussi survenir dans le cas non linéaire.

Il est à noter que dans tous les cas présentés, les composants BGs peuvent être variants dans le temps. Dans ce cas, on obtient alors des modèles à paramètres à temps variant ou non stationnaires.

Exemple 9. *On se propose de calculer la représentation par variable d'état d'un moteur à courant continu à excitation série (MCCESérie) à partir de la représentation vectorielle de son BG associé. Ce type de moteur sera présenté en détail dans le chapitre 4.*

Le moteur considéré est constitué d'un circuit inducteur en série avec le circuit d'induit, figure 2.3, permettant de générer un couple électromagnétique entraînant une charge. En suivant la procédure classique de modélisation des systèmes électromécaniques, Karnopp and Rosenberg (1975), on aboutit au modèle BG de la figure 2.4.

La loi de conversion électromagnétique du moteur supposée sans perte est :

$$\tau_m = kL_e i_e i_a, \quad e = kL_e i_e \omega \quad (2.26)$$

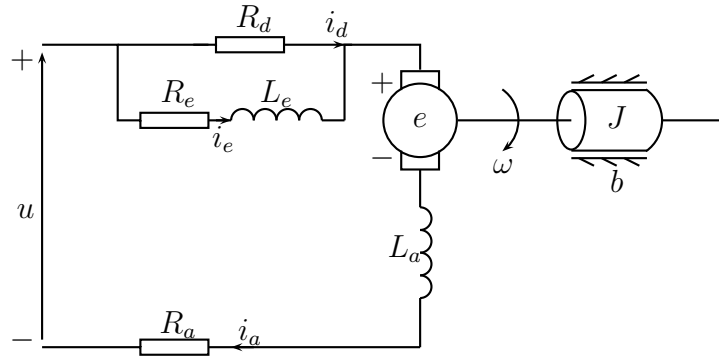


FIG. 2.3 – Circuit électrique équivalent du MCCESérie

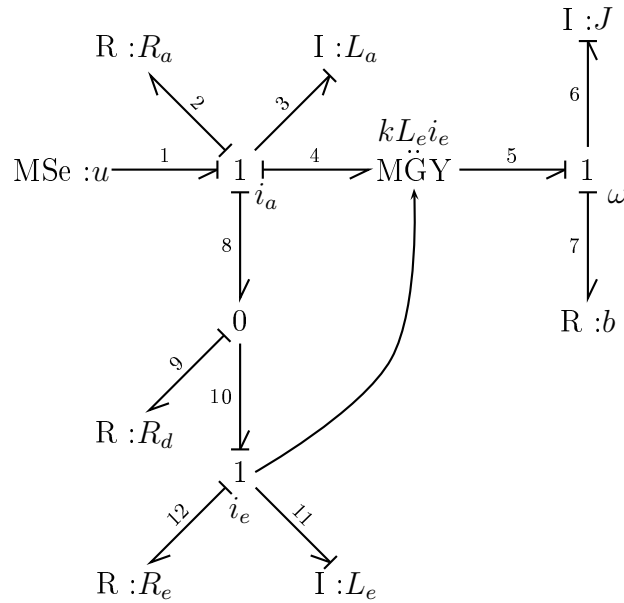


FIG. 2.4 – Modèle BG du MCCESérie

Les différents vecteurs sont :

$$x_i = \begin{bmatrix} p_{La} \\ p_J \\ p_{Le} \end{bmatrix}, \quad \dot{x}_i = \begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ e_{11} \end{bmatrix}, \quad z_i = \begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix}, \quad D_{in} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix}, \quad D_{out} = \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

et $u = [e_1]$.

Les lois constitutives des éléments sont :

$$\begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ f_{11} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix}}_{F_i} \begin{bmatrix} p_{La} \\ p_J \\ p_{Le} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} e_2 \\ e_7 \\ e_9 \\ e_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_e \end{bmatrix}}_L \begin{bmatrix} f_2 \\ f_7 \\ f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

La matrice de jonction englobant les différentes matrices S_{ij} s'écrit :

$$\begin{bmatrix} e_3 \\ e_6 \\ e_{11} \\ \dots \\ f_2 \\ f_7 \\ f_9 \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -kL_e i_e & 0 & \vdots & -1 & 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ kL_e i_e & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{R_d} & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & \frac{1}{R_d} & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R_e} & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_3 \\ f_6 \\ f_{11} \\ \dots \\ e_2 \\ e_7 \\ e_9 \\ e_{12} \\ e_1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

On vérifie bien que les relations simplificatrices (2.4) et (2.5) sont satisfaites. Maintenant, grâce à la relation (2.11), on obtient la représentation par variable d'état du MCCESérie qui est non linéaire affine en entrée.

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{La} \\ \dot{p}_J \\ \dot{p}_{Le} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(R_a+R_d)}{L_a} p_{La} - \frac{k}{J} p_{Le} p_J + \frac{R_d}{L_e} p_{Le} \\ \frac{k}{L_a} p_{Le} p_{La} - \frac{b}{J} p_J \\ \frac{R_d}{L_a} p_{La} - \frac{(R_d+R_e)}{L_e} p_{Le} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Bien entendu, cette représentation peut être directement obtenue par une approche graphique, Karnopp et al. (2000).

2.1.4 Commandabilité

Un théorème très général a été proposé dans Sueur and Dauphin-Tanguy (1989). Il utilise la notion de dualisation des sources mentionnée précédemment, qui consiste à transformer une source d'effort (respectivement de flux) en une source de flux (respectivement d'effort). Démontré à partir de la structure de jonction du modèle BG, ce théorème peut s'interpréter graphiquement de la façon suivante :

Théorème 3. *Un système linéaire modélisé par BG est structurellement commandable, si et seulement si :*

1. *Tous les éléments dynamiques (I ou C) en causalité intégrale sont causalement atteints par une source de commande.*
2. *$\text{Rang-bg}(A|B) = n$.*

Le rang BG de $(A|B) = n - t$, avec t le nombre d'éléments dynamiques gardant leur causalité intégrale quand les assertions (1) et (2) suivantes sont appliquées :

1. La causalité dérivée est affectée au modèle BG.
2. La dualisation du nombre maximal de sources d'entrée est effectuée afin d'éliminer les causalités intégrales restantes et ce sans créer de conflits de causalité ou des boucles de causalité non solvables.

2.1.5 Calcul de la matrice de commandabilité

A partir d'un modèle BG linéaire stationnaire, on peut calculer chaque composante i des vecteurs colonnes $A^{k-1}B_j$ de la matrice de commandabilité P , pour $k = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, m$ à l'aide de la formule (2.30), Rahmani et al. (1994b).

$$(A^{k-1}B_j)_i = \sum_{h \in H} G_k(u_j, x_i) \quad \text{où } i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m \quad 1 \leq k \leq n \quad (2.30)$$

avec :

1. $G_k(u_j, x_i)$ représente la partie constante (sans l'opérateur s) du gain du chemin causal de longueur k liant la source de commande u_j à l'élément dynamique en causalité intégrale x_i .
2. H est la liste de tous les chemins causaux de longueur k liant la source de commande u_j à un élément dynamique x_i .

Exemple 10. *Considérons le hacheur dévolteur (Buck) alimentant une charge, représenté figure 2.5.*

Le modèle BG moyen du hacheur est reproduit, figure 2.6, soit avec une approche indirecte, Allard et al. (1997) ou par une approche plus directe, Garcia-Gomez et al. (1997) .

Il y a $n = 3$ éléments dynamiques en causalité intégrale. Le vecteur d'état s'écrit $x = (p_{L_1}, p_{L_2}, q_c)^t$.

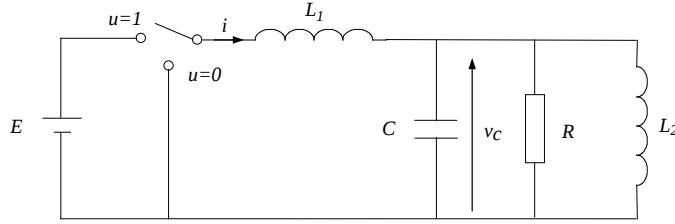


FIG. 2.5 – Hacheur dévolteur avec charge

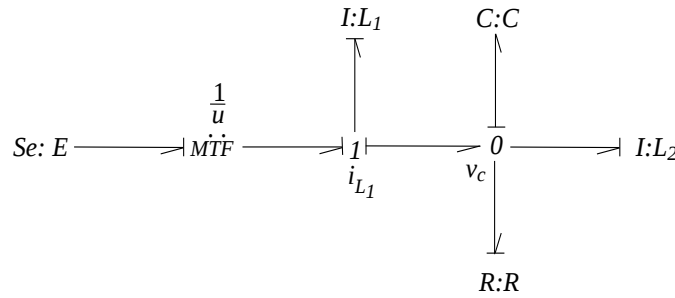


FIG. 2.6 – Modèle BG moyen du hacheur dévolteur avec charge

a. Test de commandabilité :

Étape 1 : les trois éléments sont atteignables par la source d'effort Se .

Étape 2 : la mise en causalité dérivée du BG 2.6 laisse l'élément $I : L_1$ en causalité intégrale, donc $\text{rang-bg}(A) = 3 - 1 = 2$. La dualisation de la source permet de mettre l'élément $I : L_1$ en causalité dérivée, figure 2.7. Le modèle est donc commandable par la source d'effort Se .

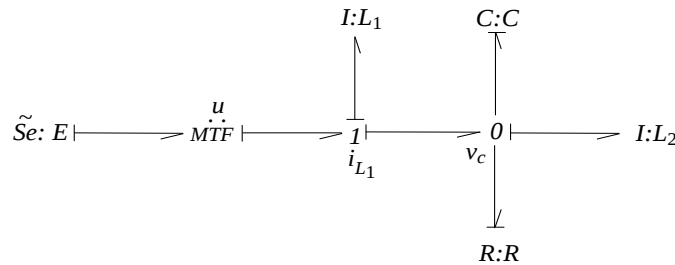


FIG. 2.7 – Modèle BG en causalité dérivée avec dualisation de la source

b. Calcul de la matrice de commandabilité :

Vecteur b : les composantes du vecteur b sont calculées sur le modèle BG de la figure 2.6 en évaluant les gains des chemins causaux de longueur 1 liant la source de commande Se aux éléments dynamiques $I : L_1$, $I : L_2$ et $C : C$ respectivement. Il suit :

$$b = \begin{bmatrix} u \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur Ab : d'une manière analogue, les composantes du vecteur Ab sont calculées en évaluant les gains des chemins causaux de longueur 2 liant la source de commande Se aux éléments dynamiques $I : L_1$, $I : L_2$ et $C : C$ respectivement. On obtient :

$$Ab = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{u}{L_1} \end{bmatrix}$$

Vecteur A^2b : pour le vecteur A^2b on trouve :

$$A^2b = \begin{bmatrix} \frac{-u}{L_1 C} \\ \frac{u}{L_1 C} \\ \frac{-u}{RL_1 C} \end{bmatrix}$$

Finalement, on aboutit à la matrice de commandabilité ci-dessous, qui est bien de rang plein.

$$P = \begin{bmatrix} u & 0 & \frac{-u}{L_1 C} \\ 0 & 0 & \frac{u}{L_1 C} \\ 0 & \frac{u}{L_1} & \frac{-u}{RL_1 C} \end{bmatrix}$$

2.2 Modèles BGs variationnels (BGVs)

Pour étudier la propriété de platitude sur des modèles BGs non linéaires, nous allons introduire la notion de modèle BG variationnel. Pour le construire, considérons pour simplifier un modèle BG sans élément en causalité dérivée ayant comme représentation par variable d'état, l'équation (2.31).

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2.31}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^t$, $u = (u_1, \dots, u_m)^t$ avec $m < n$.

L'association au modèle BG décrit par l'équation (2.31) d'un modèle (tangent) variationnel en utilisant les différentielles de *Kähler*, cf. chapitre 1, conduit à un modèle linéaire décrit par la représentation par variables d'état (2.32).

$$sdx = A(x, u)dx + B(x, u)du \quad (2.32)$$

où $A(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $B(x, u) = \frac{\partial f}{\partial u}$ et dx , du sont les différentielles de *Kähler* de x et u et représentent les nouveaux vecteurs d'état et de commande respectivement. Le système (2.32) est bien linéaire puisque les coefficients des matrices A , B se comportent comme des constantes.

Proposition 4. *Grâce à la linéarité de l'opérateur de Kähler, le modèle BGV se construit par simple connection des sous-modèles variationnels (des images) des composants.*

Remarque 5. *Puisque les jonctions 0 et 1 sont régies par des équations linéaires, elles ne subissent aucune modification.*

Preuve 1. *La preuve de la proposition 4 découle de la représentation vectorielle d'un modèle BG. Elle est similaire au cas des modèles BGs linéarisés autour d'un point de fonctionnement, Rimaux (1995).*

Remarque 6. *Si x représente une variable d'énergie associée à un élément dynamique en causalité intégrale, sx est alors une variable d'effort (élément I) ou de flux (élément C).*

Construction des modèles BGVs

Pour construire les sous-modèles variationnels des différents composant BGs, il suffit d'appliquer l'opérateur de *kähler* aux différentes lois constitutives de ses composants et interpréter graphiquement le résultats. Les sous-modèles BGVs des différents composants sont proposés dans ce qui suit :

Élément C en causalité intégrale

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{e_c} \\ \xrightarrow{f_c} \end{array} C \quad \begin{array}{l} e_c = \psi_c(\int f_c dt) = \psi_c(q_c) \\ de_c = \frac{\partial \psi_c}{\partial q_c} dq_c = \frac{\partial \psi_c}{\partial q_c} (\int df_c dt) \end{array} \quad (2.33)$$

L'élément C résultant est linéaire non stationnaire de fonction caractéristique :

$$de_c = \left(\frac{\partial \psi_c}{\partial q_c} s^{-1} \right) df_c$$

L'inversion de cette relation mathématique donne :

$$df_c = \left(\frac{\partial \psi_c}{\partial q_c} \cdot s^{-1}\right)^{-1} de_c = \left[\left(\frac{\partial \psi_c}{\partial q_c}\right)^{-1} s + \left(\frac{\partial \dot{\psi}_c}{\partial q_c}\right)^{-1}\right] de_c$$

Remarquons le terme $\left(\frac{\partial \dot{\psi}_c}{\partial q_c}\right)^{-1}$ qui apparaît et qui peut être considéré comme étant un élément R en causalité conductance. L'ajout de cet élément R correspond à l'interprétation graphique de la règle de multiplication dans l'anneau non commutatif $\mathcal{C}^\infty[s]$.

Élément C en causalité dérivée

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_c} \\ \xleftarrow{f_c} \end{array} \rightarrow C$$

$$\begin{aligned} f_c &= \frac{d}{dt} \cdot \psi_c^{-1}(e_c) \\ df_c &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \psi_c^{-1}}{\partial e_c}\right) de_c \\ df_c &= \left[\left(\frac{\partial \psi_c^{-1}}{\partial e_c}\right) s + \left(\frac{\partial \dot{\psi}_c^{-1}}{\partial e_c}\right)\right] de_c \\ df_c &= \left[\left(\frac{\partial \psi_c}{\partial q_c}\right)^{-1} s + \left(\frac{\partial \dot{\psi}_c}{\partial q_c}\right)^{-1}\right] de_c \end{aligned} \quad (2.34)$$

Élément I en causalité intégrale

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_I} \\ \xleftarrow{f_I} \end{array} \rightarrow I$$

$$\begin{aligned} f_I &= \psi_I(\int e_I dt) = \psi_I(p_I) \\ df_I &= \frac{\partial \psi_I}{\partial p_I} dp_I = \frac{\partial \psi_I}{\partial p_I} \int de_I dt \end{aligned} \quad (2.35)$$

L'élément I résultant est linéaire non stationnaire de fonction caractéristique :

$$df_I = \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial p_I} s^{-1}\right) de_I$$

L'inversion de cette relation mathématique donne :

$$de_I = s \left(\frac{\partial \psi_I}{\partial p_I}\right)^{-1} df_I = \left[\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial p_I}\right)^{-1} s + \left(\frac{\partial \dot{\psi}_I}{\partial p_I}\right)^{-1}\right] df_I$$

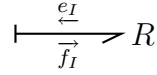
Pour cet élément, le terme $\left(\frac{\partial \dot{\psi}_I}{\partial p_I}\right)^{-1}$ qui apparaît peut être considéré comme étant un élément R en causalité résistance.

Élément I en causalité dérivée

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{e_I} \\ \xleftarrow{f_I} \end{array} \rightarrow I$$

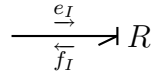
$$\begin{aligned} e_I &= \frac{d}{dt} \cdot \psi_I^{-1}(f_I) \\ de_I &= \frac{d}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \psi_I^{-1}}{\partial f_I}\right) df_I \\ de_I &= \left[\left(\frac{\partial \psi_I^{-1}}{\partial f_I}\right) s + \left(\frac{\partial \dot{\psi}_I^{-1}}{\partial f_I}\right)\right] df_I \\ de_I &= \left[\left(\frac{\partial \psi_I}{\partial p_I}\right)^{-1} s + \left(\frac{\partial \dot{\psi}_I}{\partial p_I}\right)^{-1}\right] df_I \end{aligned} \quad (2.36)$$

Élément R en causalité résistance



$$\begin{aligned} e_R &= \psi_R(f_R) \\ de_R &= \left(\frac{\partial \psi_R}{\partial f_R}\right) df_R \end{aligned} \quad (2.37)$$

Élément R en causalité conductance



$$\begin{aligned} f_R &= \psi_R^{-1}(e_R) \\ df_R &= \left(\frac{\partial \psi_R^{-1}}{\partial e_R}\right) de_R \end{aligned} \quad (2.38)$$

Gyrateur modulé MGY à flux rentrant

Un exemple de gyrateur modulé est représenté figure 2.8, où $r = \phi(x, u)$ est une fonction non linéaire dépendant de l'état et de l'entrée dans le cas plus général. La dénomination *flux ou effort rentrant* est relative au sens du flux de puissance.

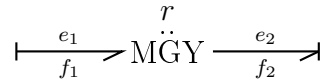


FIG. 2.8 – Gyrateur modulé à flux rentrant

Ses équations caractéristiques sont décrites par l'équation (2.39).

$$e_1 = r f_2 \quad e_2 = r f_1 \quad (2.39)$$

Leurs différentielles sont exprimées par l'équation (2.40).

$$\begin{cases} de_1 = f_2 dr + r df_2 \\ de_2 = f_1 dr + r df_1 \end{cases} \quad (2.40)$$

Ces équations suggèrent de construire le modèle BGV en augmentant le gyrateur initial par une source d'effort modulée de chaque côté, figure (2.9).

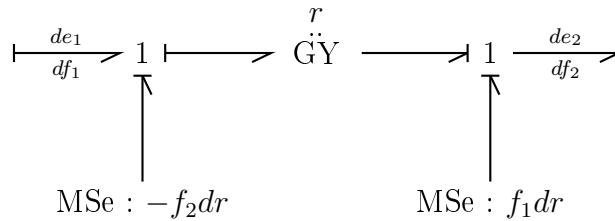


FIG. 2.9 – Modèle BGV d'un gyrateur à flux rentrant

Les coefficients modulant les sources f_1 et f_2 sont calculés à partir du modèle non linéaire initial.

Gyrateur modulé MGY à effort rentrant

Considérons le gyrateur modulé représenté figure 2.10.

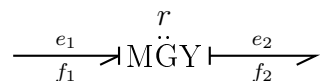


FIG. 2.10 – Gyrateur modulé à effort rentrant

Ses équations caractéristiques sont :

$$f_1 = \frac{1}{r}e_2 \quad f_2 = \frac{1}{r}e_1 \quad (2.41)$$

Leurs différentielles sont exprimées par l'équation (2.42).

$$\begin{cases} df_1 = \frac{1}{r}de_2 - \frac{e_2}{r^2}dr \\ df_2 = \frac{1}{r}de_1 - \frac{e_1}{r^2}dr \end{cases} \quad (2.42)$$

Ces équations suggèrent de construire le modèle BGV en augmentant le gyrateur initial d'une source de flux modulée de chaque côté, figure 2.11.

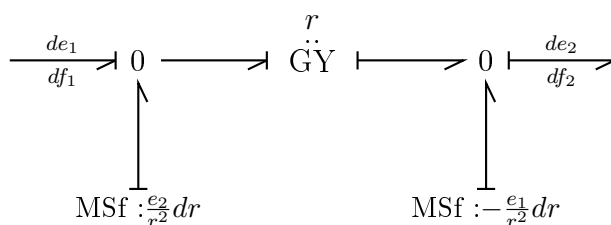


FIG. 2.11 – Modèle BGV d'un gyrateur à flux entrant

Les valeurs des efforts e_1 et e_2 modulant les sources de flux sont également calculés à partir du modèle non linéaire initial.

Transformateur modulé MTF à flux rentrant

Considérons le transformateur modulé de la figure 2.12, où $m = \varphi(x, u)$ est une fonction non linéaire dépendant de l'état et de l'entrée dans le cas plus général.

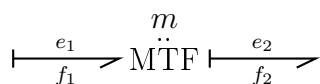


FIG. 2.12 – Transformateur modulé à flux rentrant

Ses équations caractéristiques sont représentées par l'équation (2.43).

$$e_1 = me_2 \quad f_2 = mf_1 \quad (2.43)$$

Leurs différentielles sont :

$$\begin{cases} de_1 = e_2 dm + m de_2 \\ df_2 = f_1 dm + m df_1 \end{cases} \quad (2.44)$$

Ces équations suggèrent de construire le modèle BGV en augmentant le transformateur initial d'une source d'effort modulée d'un côté et d'une source de flux modulée de l'autre, figure 2.13.

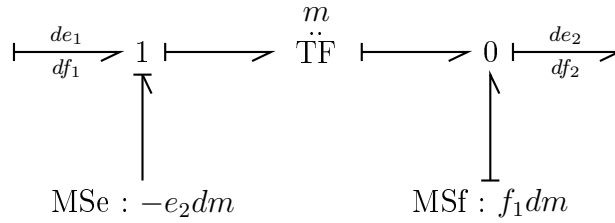


FIG. 2.13 – Modèle BGV d'un transformateur à flux rentrant

Transformateur modulé MTF à effort rentrant

Soit le transformateur modulé représenté figure(2.14).

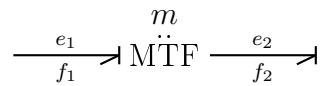


FIG. 2.14 – Transformateur modulé à effort rentrant

Ses équations caractéristiques s'écrivent :

$$e_2 = \frac{1}{m} e_1 \quad f_1 = \frac{1}{m} f_2$$

Leurs différentielles ont pour expression, l'équation (2.45).

$$\begin{cases} de_2 = \frac{1}{m} de_1 - \frac{e_1}{m^2} dm \\ df_1 = \frac{1}{m} df_2 - \frac{f_2}{m^2} dm \end{cases} \quad (2.45)$$

Ces équations suggèrent de construire le modèle BGV en augmentant le gyrateur initial par une source de flux modulée de chaque côté, figure (2.15).

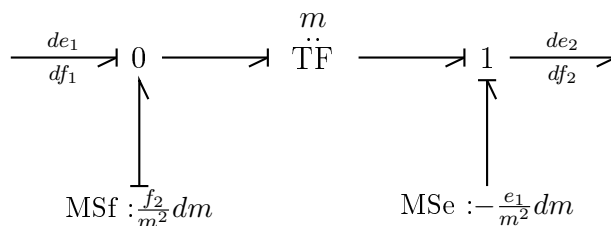


FIG. 2.15 – Modèle BGV d'un transformateur à flux entrant

Un modèle BGV peut être aussi construit pour les sources d'effort et de flux modulées. Considérons une source d'effort $MSe : \Gamma(\eta)$ modulée par une variable η par exemple. Dans ce cas, l'effort fourni par la source s'écrit : $e = \Gamma(\eta)$, d'où $de = \frac{\partial \Gamma}{\partial \eta} d\eta$. De la même manière, on peut construire un modèle BGV d'une source de flux modulée.

La mise en oeuvre pratique de la construction d'un modèle BGV est relativement simple. En effet, comme la construction des sous-modèles BGVs des composants linéaires est immédiate, il suffit donc de s'occuper des composants non linéaires. Dans la section 2.3.4, nous allons montrer comment construire le modèle BGV du moteur à courant continu à excitation série, voir aussi Achir et al. (2003) pour la construction du modèle BGV du moteur synchrone saillant à aimant permanent.

Comme nous allons le voir, il est aussi possible d'appliquer une règle de gain sur ce type de modèles grâce notamment à l'introduction de la notion d'anneau BG non commutatif. Par ailleurs, l'ajout des éléments R discuté ci-dessus et qui représente l'effet de la règle de multiplication dans l'anneau non commutatif $\mathcal{C}^\infty[s]$ permet d'appliquer directement cette règle de gain sur les modèles BGVs.

2.3 Les anneaux bond graphs non commutatifs

L'objectif de cette section est de proposer de nouveaux outils BG permettant de tenir compte de l'aspect non commutatif qui survient dans le cas des modèles BG variationnels présentés ci-dessus, ainsi que des modèles BGs non linéaires polynômiaux étudiés au ch. 5.

Pour atteindre cet objectif, nous allons exploiter un certain nombre de résultats de la théorie des graphes à coefficients non constants.

Nous allons d'abord définir la notion d'anneau bond graph non commutatif qui

va nous permettre de caractériser les BGVs puis proposer une nouvelle règle de gain connue sous le nom de la Règle de Riegle pour ce type de BGV.

Cette règle de gain a été utilisée avec succès aux digraphes dans, Achir et al. (2004) puis aux BGs dans Achir and Sueur (2005b).

2.3.1 Anneaux et graphes

L'algèbre est un outil important pour la résolution des problèmes pratiques de mathématiques. Elle permet en particulier d'éviter les répétitions, les preuves ou les définitions interminables où seulement des changements subtiles se sont produits dans le problème à résoudre. Les graphes peuvent jouer le même rôle visuel dans la théorie combinatoire des anneaux. En effet, les opérations élémentaires " + " ou " . " correspondent dans le sens de la théorie des systèmes à des réductions séries ou parallèles respectivement, figure 2.16.

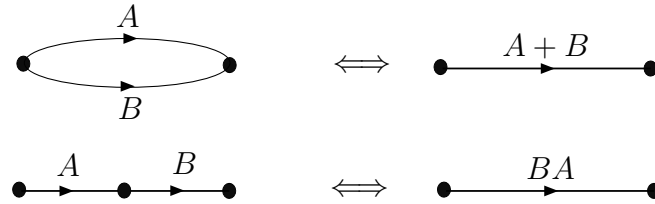


FIG. 2.16 – Réductions série et parallèle correspondant à l'addition et la multiplication

Une autre propriété connue est observée par la simple réduction par bouclage, figure 2.17. Celle-ci entraîne l'obtention d'une inverse de la forme $(1 - A)^{-1}$ qui correspond au quasi-inverse en algèbre.

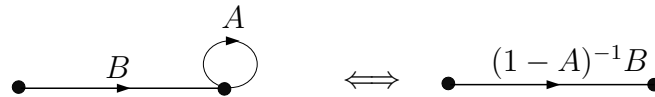


FIG. 2.17 – Réduction par bouclage correspondant au quasi-inverse

Une autre identité est la distribution à gauche : $A(B + C) = AB + AC$ qui peut avoir l'interprétation graphique 2.18.

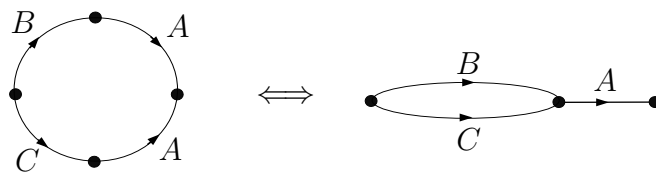
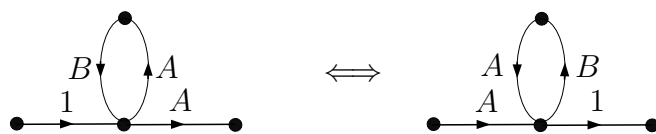


FIG. 2.18 – Interprétation graphique de la distribution à gauche

Nous avons aussi, l'identité : $A(1 - BA)^{-1} = (1 - AB)^{-1}A$ ayant pour interprétation graphique 2.19.

FIG. 2.19 – Équivalence graphique de l'identité $A(1 - BA)^{-1} = (1 - AB)^{-1}A$

Ces opérations élémentaires sont très utiles dans la théorie des graphes. Ces notions font l'objet du paragraphe suivant.

2.3.2 Graphes à coefficient dans un anneau - règle de Riegle

Un anneau graphe G sur un anneau R est un R -module M représenté par un ensemble d'équations linéaires de la forme (2.46), où les a_{ij} , a_{i0} sont dans R et η_i , η_j et η_0 sont dans M , Pliam (1989).

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \eta_j + a_{i0} \eta_0 \quad (2.46)$$

Étant donné un noeud source η_0 et un noeud puits η_n , il est possible sous certaines conditions d'obtenir une relation de la forme (2.47), connue sous nom de la formule de gain.

$$\eta_n = T \eta_0 \quad (2.47)$$

A partir des travaux de Mason, Mason (1956) sur les graphes scalaires, i.e., $R \equiv \mathbb{R}$, une formule de gain a été développée pour les graphes sur anneaux ou corps commutatifs. Si l'anneau R est non commutatif, cette règle n'est plus valide. Une

règle plus générale connue sous le nom de la règle de Riegle est alors utilisée. Ces deux règles sont rappelées ci-dessous.

1. Règle de Mason Chen (1976)

Pour un anneau graphe sur un corps ou un anneau commutatif, l'expression du gain est donnée par (2.48).

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{k \in H} \Delta_k T_k \quad (2.48)$$

H est l'ensemble des chemins entre les noeuds u_0 et u_n , Δ est défini par :

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \dots,$$

où la somme est prise sur des cycles disjoints. Δ_k est défini comme Δ pour le sous-graphe ne touchant pas le $k^{\text{ème}}$ chemin. T_k est le produit des gains des arcs le long du $k^{\text{ème}}$ chemin, et les L_i sont les gains des cycles.

Cette règle a été déjà adaptée aux BGs dans Borne et al. (1992). Soient u et y les variables choisies respectivement comme entrée et comme sortie. La relation entrée-sortie s'exprime, en notant s l'opérateur de dérivation $\frac{d}{dt}$,

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{\sum_i T_i(s) D_i(s)}{D(s)} \quad (2.49)$$

avec :

$$D(s) = 1 - \sum_i B_i - \sum_i B_i B_j - \sum_i B_i B_j B_k - \dots$$

- $\sum_i B_i$: somme des gains des boucles causales entre deux éléments R, C ou I .
- $\sum_i B_i B_j, \sum_i B_i B_j B_k$: sommes des produits 2 à 2, 3 à 3, etc., des gains de boucles causales disjointes.
- $T_i(s)$: gain de la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action.
- $D_i(s)$: se calcule comme $D(s)$ quand on enlève du BG la $i^{\text{ème}}$ chaîne d'action.

2. Règle de Riegle

Cette règle est originellement introduite dans le cadre des graphes dont les coefficients sont des matrices à coefficients constants, Riegle and Lin (1972) puis étendue au cas des graphes à coefficients appartenant à un anneau ou un corps non commutatif, Pliam (1989).

Pour un anneau graphe sur un anneau ou un corps non commutatif, l'expression du gain est :

$$T = \sum_{k \in H} P_k \quad (2.50)$$

où :

- P_k est le gain (le produit) du $k^{\text{ème}}$ chemin entre les noeuds u_0 et u_n , et est donné par (2.51), où le produit est pris dans l'ordre des n arcs le long du $k^{\text{ème}}$ chemin.
- A_i^k est le $i^{\text{ème}}$ opérateur (gain) de l'arc i le long du $k^{\text{ème}}$ chemin.
- S_i^k est le gain propre du noeud suivant immédiatement l'arc $A_i^{(k)}$ avec les arcs restant le long du $k^{\text{ème}}$ chemin supprimés.

$$P_k = \prod_{i=n}^1 (1 - S_i^k)^{-1} A_i^k \quad (2.51)$$

Exemple 11. *Considérons le digraphe de la figure 2.20.*

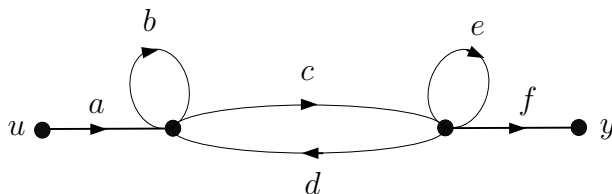


FIG. 2.20 – Exemple de digraphe à poids appartenant à un anneau non commutatif

Appliquons d'abord la règle Mason en supposant que les différents opérateurs des arcs appartient à un corps commutatif, il suit :

$$y = \frac{T_1 D_1}{D} u$$

Il existe 3 boucles de gains respectifs $B_1 = b$, $B_2 = e$ et $B_3 = cd$ avec B_1 et B_2 sont disjointes.

Avec $T_1 = fca$, $D_1 = 1$ et $D = 1 - e - b - cd - be$, on a alors :

$$y = \frac{fca}{1 - e - b - cd - be} u$$

Appliquons maintenant la règle de Riegle (les différents opérateurs appartiennent à un anneau non commutatif). Les deux gains propres des noeuds 1 et 2 sont :

$S_1 = (1 - e - cS_2^{-1}d)^{-1}$ et $S_2 = (1 - b)^{-1}$. Pour obtenir la relation de transfert entre u et y , partons du noeud puits y vers le noeud source u et appliquons la formule 2.51, il suit :

$$y = f[1 - e - c(1 - b)^{-1}d]^{-1}c(1 - b)^{-1}a.u$$

Supposons maintenant que toutes les inverses existent et que les opérateurs appartient à un anneau commutatif, après simplification on obtient :

$$y = \frac{fca}{1 - e - b - cd - be}u$$

On peut alors conclure que la règle de Rieggle est une généralisation de la règle de Mason au cas non commutatif.

2.3.3 Les anneaux bond graphs non commutatifs

Définition 6. : Un anneau BG sur un anneau ou un corps non commutatif k est un k -module Ω décrit par un ensemble d'équations linéaires de la forme (2.52).

$$x_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j + \sum_{k=1}^m b_{i,k}u_k \quad 0 \leq i \leq n \quad (2.52)$$

Les $a_{i,j}$, $b_{i,k}$ sont dans k et x_i , x_j et u_k sont dans Ω . Ces dernières représentent les variables associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale et les efforts et les flux associés aux sources.

Pour pouvoir appliquer la règle de Rieggle précédente sur des modèles BG, nous allons définir les notions de gain d'un chemin causal et de gain propre d'un élément dynamique pour un anneau BG sur un anneau non commutatif.

Définition 7. Dans un anneau BG défini sur un anneau ou un corps non commutatif, le gain d'un chemin causal reliant la variable d'arrivée x_j et la variable de départ x_i a pour expression :

$$x_j = (-1)^{(n_0+n_1)} \prod_{i,j,e} [(m_i)^{k_i}, (r_j)^{l_j}, g_e] x_i \quad (2.53)$$

Les différents entiers n_0, n_1, k_i, l_j et gains m_i, r_j, g_e sont définis comme précédemment pour le cas classique, cf. équation (2.1). Ce qui change ici c'est l'ordre du produit qui tient compte de l'ordre dans lequel les éléments sont traversés.

Définition 8. Le gain propre d'un élément dynamique en causalité intégrale d'un anneau BG défini sur un anneau ou un corps non commutatif est égal à la somme des gains des boucles causales qui le traversent.

Il est à noter que le calcul des gains des boucles causales doit également tenir compte de l'ordre dans lequel les éléments sont traversés.

2.3.4 Application de la règle de Riegle aux modèles BGVs

Un modèle BGV peut être considéré comme étant un anneau BG non commutatif. En effet, l'équation (2.32) peut être réécrite sous la forme :

$$sdx = [A(x, u)s^{-1}]sdx + B(x, u)du \quad (2.54)$$

L'équation (2.54) représente bien un anneau BG sur l'anneau non commutatif $\mathcal{C}^\infty[s^{-1}]$. Il est alors possible d'effectuer le calcul des relations de transfert et de paramétrisation différentielle d'un modèle BG à partir de son modèle BGV associée en appliquant les résultats présentés ci-dessous. Cette démarche est illustrée dans l'exemple suivant :

Exemple 12. *On se propose de calculer les relations de transfert entrées-sorties du moteur à courant continu à excitation séparée (MCCESéparée) représenté, figure 2.21. Nous allons d'abord construire le modèle BGV à partir de son modèle BG non linéaire puis appliquer la règle de Riegle pour calculer les relations de transfert, premièrement sur le digraphe associée au modèle BGV puis directement sur le modèle BGV.*

Modèle BG du MCCESéparée

Le circuit équivalent du MCCESéparée est représenté figure 2.21.

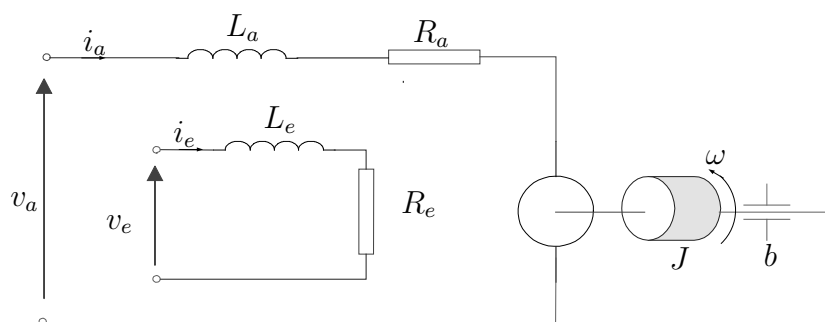


FIG. 2.21 – Schéma électromécanique équivalent du MCCESéparée

L'application de la procédure standard de modélisation par BG des systèmes électriques et mécaniques, Karnopp and Rosenberg (1975) conduit au modèle BG représenté figure 2.22. Ce modèle est non linéaire à cause de la présence

du gyrateur modulé qui modélise le phénomène de conversion d'énergie électromagnétique considéré sans perte.

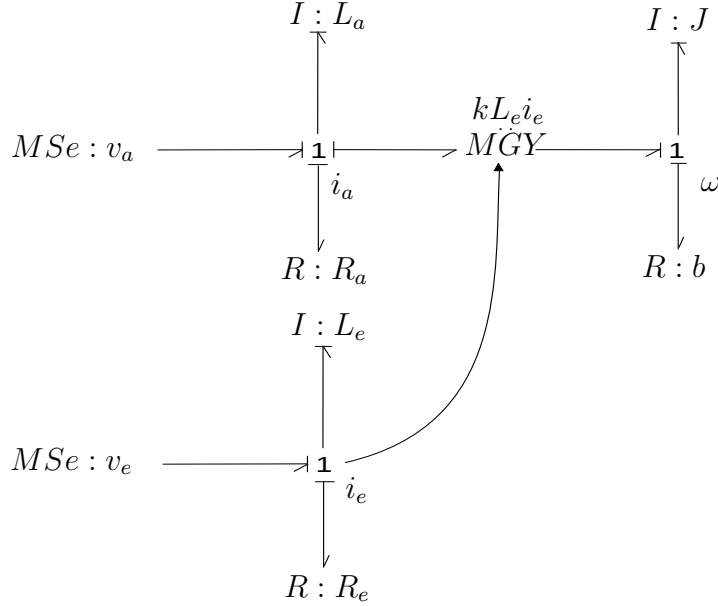


FIG. 2.22 – Modèle BG du MCCESéparée

Modèle BGV du MCCESéparée

La seule non linéarité apparaît sur le gain de gyrateur modulé. Pour construire le modèle BGV, il suffit alors de remplacer ce gyrateur par son équivalent variationnel proposé précédemment ainsi que toutes les variables du modèle par leur équivalent variationnel. e.g., la vitesse ω devient $d\omega$, le courant i_a devient di_a etc. On aboutit alors au modèle BGV global du MCCESéparée représenté figure 2.23.

Les variables de ce modèle BGV peuvent être décomposées en variables d'entrée $du = (dv_e, dv_a)^t = (du_1, du_2)^t$, variables d'état $dx = (dp_{L_e}, dp_{L_a}, dp_J)^t = (dx_1, dx_2, dx_3)^t$ et variables de sortie $dy = (dp_{L_e}, dp_J)^t = (dy_1, dy_2)^t$.

Application au digraphe variationnel du MCCESéparée

Étant donné que la formule de gain de Riegle a été initialement introduite dans le cadre des graphes, il est alors naturel de commencer à l'appliquer sur le digraphe associé au MCCESéparée. Ce digraphe peut être construit de deux façons équivalentes, à partir du modèle BGV ou à l'aide des équations d'état dérivées de ce dernier modèle BGV.

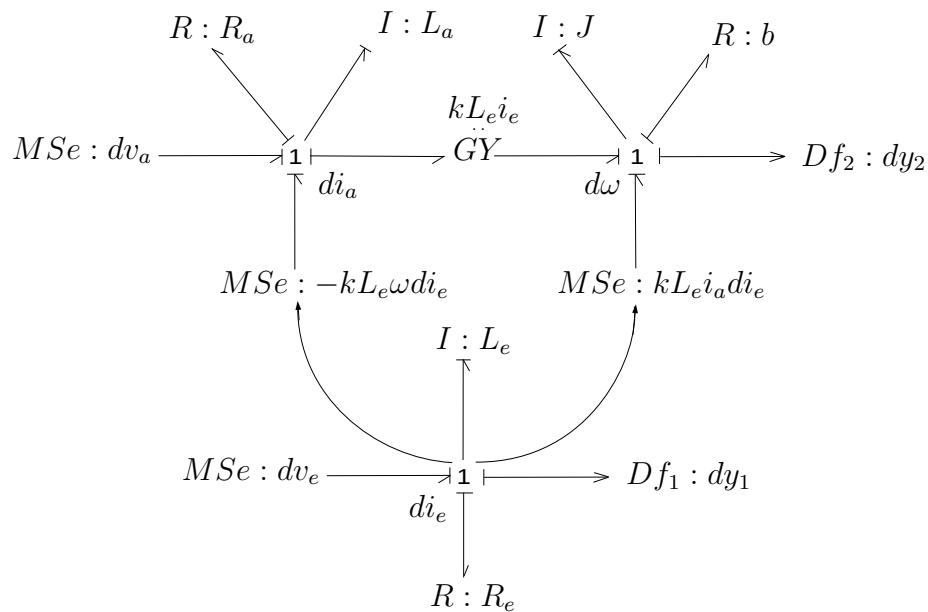


FIG. 2.23 – Modèle BGV du MCCESéparée

Pour pouvoir appliquer directement la règle de Riegle, on va choisir comme variables associées aux noeuds, la dérivée par rapport au temps des variables d'énergie qui correspondent à l'effort ou au flux aux éléments dynamiques, figure 2.24.

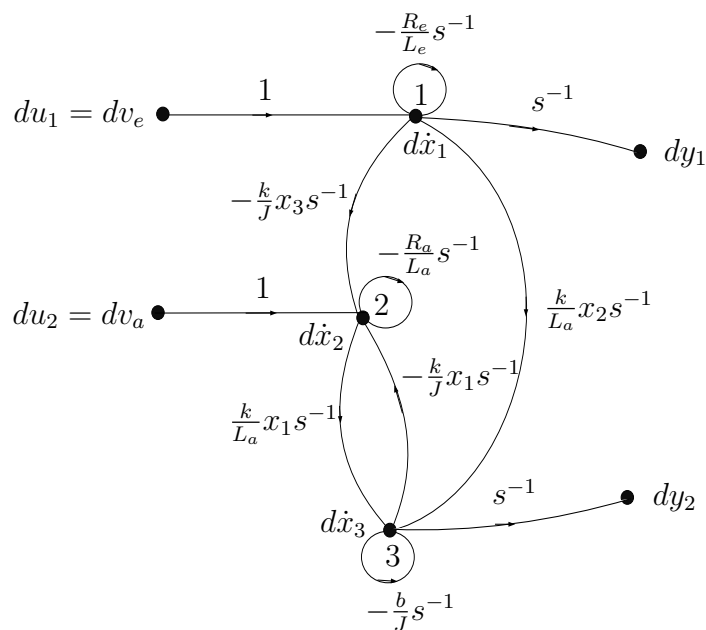


FIG. 2.24 – Digraphe associé au modèle BGV du MCCESéparée

A partir de ce digraphe, on peut voir clairement que les gains (opérateurs) des arcs appartiennent à un anneau non commutatif $R = \mathcal{C}^\infty[s^{-1}]$. Par conséquent, la règle de Mason ne peut pas être utilisée.

Les relations de transfert entrées-sorties peuvent être écrites sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

En utilisant la règle de Riegle et en notant S_i , $i = 1, 2, 3$, les gains propres des noeuds 1, ..3, les éléments T_{ij} , $i, j = 1, 2$ sont calculés comme suit (en effectuant le parcours de la sortie vers l'entrée) :

- T_{11} ; chemin $du_1 \rightarrow d\dot{x}_1 \rightarrow dy_1$

$$dy_1 = s^{-1}[1 - S_1]^{-1}du_1 = s^{-1}[1 + \frac{Re}{Le}s^{-1}]^{-1}du_1$$

- T_{12} est égal à 0, parce qu'il n'existe pas de chemin liant du_2 à dy_1 .

- T_{21} ; deux chemins $du_1 \rightarrow d\dot{x}_1 \rightarrow d\dot{x}_2 \rightarrow d\dot{x}_3 \rightarrow dy_2$ et $du_1 \rightarrow d\dot{x}_1 \rightarrow d\dot{x}_3 \rightarrow dy_2$

$$dy_2 = s^{-1}[1 - S_3]^{-1}(\frac{k}{L_a}x_1s^{-1})[1 - S_2]^{-1}(-\frac{k}{J}x_3s^{-1})[1 - S_1]^{-1}du_1 \\ + s^{-1}[1 - S_3]^{-1}(\frac{k}{L_a}x_2s^{-1})[1 - S_1]^{-1}du_1$$

- T_{22} ; chemin $du_2 \rightarrow d\dot{x}_2 \rightarrow d\dot{x}_3 \rightarrow dy_2$

$$dy_2 = s^{-1}[1 - S_3]^{-1}(\frac{k}{L_a}x_1s^{-1})[1 - S_2]^{-1}du_2$$

Les différents gains propres des noeuds sont :

$$\begin{cases} S_1 = -\frac{Re}{Le}s^{-1} \\ S_2 = -\frac{Ra}{La}s^{-1} \\ S_3 = -\frac{b}{J}s^{-1} + \frac{k}{La}s^{-1}[1 + \frac{Ra}{La}s^{-1}]^{-1}(-\frac{k}{J}x_1s^{-1}) \end{cases}$$

Pour paramétrer les entrées en fonction des sorties et de leurs dérivées, on peut inverser ces relations à l'aide de la formule (2.56).

$$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1} & 0 \\ -T_{22}^{-1}T_{21}T_{11}^{-1} & T_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Après un certain nombre d'opérations de calcul, on obtient :

$$T_{11}^{-1} = (1 + \frac{Re}{Le}s^{-1})s = (s + \frac{Re}{Le}) \\ T_{22}^{-1} = [1 + \frac{Ra}{La}s^{-1}](\frac{k}{La}x_1s^{-1})^{-1}[s + \frac{b}{J}] + \frac{k}{J}x_1 \\ T_{22}^{-1}T_{21}T_{11}^{-1} = -\frac{k}{J}x_3 + [1 + \frac{Ra}{La}s^{-1}](\frac{k}{La}x_1s^{-1})^{-1}(\frac{k}{La}x_2)$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} du_1 = (s + \frac{R_e}{L_e})dy_1 \\ du_2 = (1 + \frac{R_e}{L_e}s^{-1})(\frac{k}{L_a}x_1s^{-1})^{-1}[(s + \frac{b}{J})dy_2 - \frac{k}{L_a}x_2dy_1] + \frac{k}{J}x_1dy_2 + \frac{k}{J}x_3dy_1 \end{cases} \quad (2.57)$$

Cet ensemble de formes différentielles de premier ordre (système de Pfaff) seront intégrées pour obtenir la paramétrisation recherchée. Cette étape sera présentée en détail dans le chapitre 4.

Remarque 7. Cette paramétrisation n'est pas toujours possible. Cela survient quand l'opération d'inversion, relation (2.56) n'est pas possible. Par contre si le système est plat, l'inversion et l'intégration sont toujours possibles. De plus l'inversion peut être effectuée graphiquement sur le modèle BG à l'aide du concept de bicausalité, cf. ch. 4.

Application au modèle BGV du MCCESéparée

Pour pouvoir appliquer la formule de gain de Riegle directement sur des modèles BGVs, nous proposons une équivalence entre le gain propre d'un noeud et celui d'un élément BG.

Définition 9. Le gain propre d'un élément dynamique BG est égal à la somme des gains de toutes les boucles causales qui le traversent.

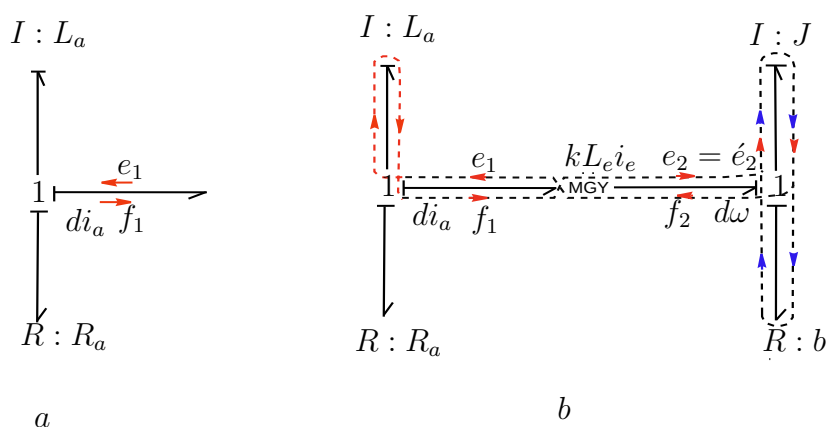


FIG. 2.25 – Sous BGs associé au le modèle BGV

Considérons le sous BG de la figure 2.25-a. En écrivant l'équation de jonction, on obtient la relation (2.58).

$$f_1 = \frac{1}{L_a}s^{-1}[1 + \frac{R_a}{L_a}s^{-1}]^{-1}e_1 \quad (2.58)$$

Maintenant, considérons l'élément $I : J$ de la figure 2.25-b. Son gain propre peut être calculé en additionnant les gains des deux boucles causales $I : J \leftrightarrow R : b$ et $I : J \leftrightarrow MGY : kL_e i_e \leftrightarrow I : L_a$. Le calcul du gain de la première boucle est direct puisque tous les opérateurs sont constants, il est égal à $-\frac{b}{J}s^{-1}$. Pour le gain de la deuxième boucle, on part de n'importe quelle variable (source ou puits), par exemple e_2 et e'_2 et on calcule le gain entre ces deux variables.

$$\begin{aligned} e_2 &= kL_e i_e f_1 = kL_e i_e \cdot \frac{1}{L_a} s^{-1} [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}]^{-1} e_1 = kL_e i_e \cdot \frac{1}{L_a} s^{-1} (1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1})^{-1} kL_e i_e f_2 \\ &= kL_e i_e \cdot \frac{1}{L_a} s^{-1} [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}]^{-1} kL_e i_e \frac{1}{J} s^{-1} e'_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, le gain propre de l'élément $I : J$ est égal à :

$$-\frac{b}{J}s^{-1} + \frac{k}{L_a} L_e i_e s^{-1} (1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1})^{-1} \frac{k}{J} L_e i_e s^{-1}$$

Maintenant, il est possible de poursuivre les mêmes calculs développés précédemment sur le BG de la figure 2.23. Considérons le gain T_{22} correspondant au chemin causal $MSe : dv_a \rightarrow I : L_a \rightarrow MGY : kL_e i_e \rightarrow I : J \rightarrow dy_2$.

En appliquant la formule de gain de Riegle, il suit :

$$\begin{aligned} Jd\omega &= s^{-1}(1 - 0)^{-1} \cdot [1 + \frac{b}{J}s^{-1} - \frac{k}{L_a} L_e i_e s^{-1} (1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1})^{-1} \frac{k}{J} L_e i_e s^{-1}]^{-1} \\ &\quad \cdot kL_e i_e \cdot \frac{1}{L_a} s^{-1} [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}]^{-1} \cdot 1 \cdot dv_a \end{aligned}$$

En remplaçant $L_e i_e$ par x_1 on obtient :

$$T_{22} = s^{-1} [1 + \frac{b}{J}s^{-1} - \frac{k}{L_a} x_1 s^{-1} [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}]^{-1} (-\frac{k}{J} x_1 s^{-1})]^{-1} (\frac{k}{L_a} x_1 s^{-1}) [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}]^{-1}$$

Le résultat obtenu est identique au précédent, et des calculs analogues peuvent être conduits pour obtenir la paramétrisation recherchée. Il est par contre plus avantageux de travailler sur le modèle BG pour deux raisons : la première est que le modèle BGV est simple à obtenir et la deuxième est la possibilité de garder la signification physique des variables.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit dans un premier lieu la notion d'anneau BG sur un anneau ou un corps non commutatif ainsi que les modèles BG variationnels (qui seront utilisés dans le 4^{ème} chapitre pour déterminer les sorties plates des modèles BG non linéaires). Ensuite nous avons montré que les modèles variationnels sont bien un cas particulier d'anneaux BG non commutatifs.

Dans un second lieu, nous avons introduit une nouvelle règle de gain valable pour les anneaux BGs non commutatifs et qui peut être considérée comme étant une extension de la règle de Mason dans le cas commutatif. Cette règle va nous permettre de résoudre le problème de paramétrisation différentielle des modèles BGs différentiellement plats, cf. ch. 4.

Enfin, cette contribution est introduite dans le cadre de la théorie d'algèbre et de modules différentiels. Elle peut permettre de développer d'autres méthodes graphiques d'analyse et de commande sur des modèles BGs non linéaires.

Chapitre 3

Platitude des modèles bond graphs linéaires

«La chose la plus importante est de ne pas s'arrêter de s'interroger. La curiosité a sa propre raison d'exister».

Albert Einstein

Bien que la commande linéaire classique possède une panoplie de méthodes lui permettant de résoudre la quasi-totalité des problèmes de commande linéaire posés, la commande par platitude peut apporter une contribution et des avantages significatifs grâce en particulier à sa capacité à résoudre les problèmes liés à la planification de trajectoire et au dimensionnement des actionneurs d'une manière très satisfaisante.

Par ailleurs, le problème d'identification de sorties plates ou de la paramétrisation différentielle dans le cas linéaire ne pose pas de problèmes particuliers à part la nécessité d'avoir recours à un ordinateur pour traiter des modèles de grande dimension. Néanmoins, l'utilisation des méthodes graphiques et plus particulièrement la méthodologie bond graph (BG) peut apporter plusieurs avantages. À titre d'exemple, le calcul des sorties plates et de la paramétrisation différentielle se fait directement sur le modèle BG sans avoir recours aux équations d'état du système, une réduction considérable des calculs et enfin un cadre de travail plus proche de la physique du système. Dans ce qui suit, nous allons aborder les problèmes d'identification des sorties plates et de la paramétrisation différentielle pour les différents cas de modèles BGs linéaires présentés dans le chapitre 2.

3.1 Exemple introductif

Pour introduire la notion de platitude et son mode d'emploi, on considère un simple moteur à courant continu à aimant permanent (MCC) dont le schéma électromécanique est représenté, figure 3.1. Par soucis de simplicité, le phénomène de conversion d'énergie électromagnétique est supposé sans perte. Dans ce cas, la conversion d'énergie est régie par l'équation (3.1).

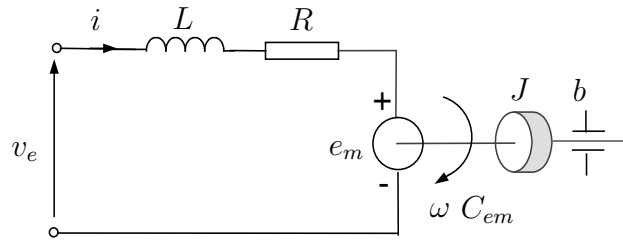


FIG. 3.1 – Schéma électromécanique du MCC à aimant permanent

$$\begin{cases} e_m = k\omega \\ C_{em} = ki \end{cases} \quad (3.1)$$

Les variables ω , e_m et C_{em} représentent respectivement, la vitesse angulaire du moteur, la force électromotrice induite et le couple électromécanique .

En suivant la procédure standard de modélisation des systèmes physiques par BG, Karnopp and Rosenberg (1975) et sous l'hypothèse simplificatrice ci-dessus, on aboutit au modèle BG du MCC à aimant permanent représenté, figure 3.2.

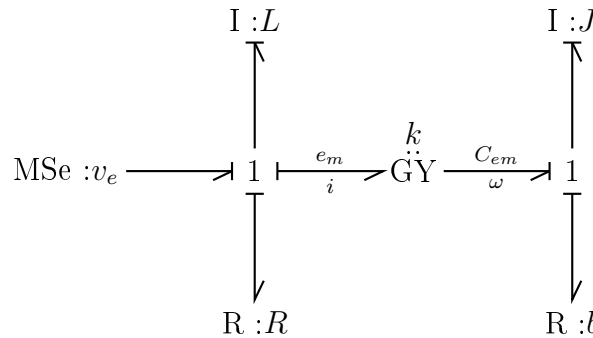


FIG. 3.2 – Modèle BG du MCC à aimant permanent

Ce modèle n'est rien d'autre qu'une représentation graphique ordonnée des phénomènes de transformation d'énergie, i.e., stockage dans les éléments $I : L$ et $I : J$, dissipation dans les éléments $R : R$, $R : b$ et finalement conversion bidirectionnelle du domaine énergétique modélisé par le gyrateur $GY : k$. Au cours du temps, la puissance fournie par la source d'effort $MSe : v_e$ parcourt ces différents éléments et se transforme en énergie qui subit leurs actions allouées.

Par commodité on peut choisir comme variables d'état, non pas les variables d'énergie associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale mais leurs variables complémentaires, i.e., $x = (i, \omega)^t \equiv (x_1, x_2)^t$ et comme variable de commande $u = v_e$.

Une représentation par variables d'état est obtenue par simple application de la procédure d'écriture des équations d'état à partir du modèle BG, Karnopp and Rosenberg (1975). Ceci est effectué en utilisant les équations aux jonctions 1 et les lois constitutives des différents éléments. On parvient alors à la représentation par variables d'état (3.2).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{k}{L}x_2 + \frac{u}{L} \\ \dot{x}_2 = \frac{k}{J}x_1 - \frac{b}{J}x_2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Un choix naturel de sortie plate peut être la vitesse mécanique de rotation du moteur ; i.e., $y = x_2$. Après un certain nombre de dérivations successives, on parvient à une paramétrisation de toutes les variables du modèle à l'aide de la sortie plate et de ses dérivées, équations (3.3a) et (3.3b).

$$\begin{cases} x_1 = \frac{J}{k}(s + \frac{b}{J})y = \frac{J}{k}(\dot{y} + \frac{b}{J}y) \\ x_2 = y \end{cases} \quad (3.3a)$$

$$\begin{aligned} u &= \frac{J}{k} \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) s + \left(\frac{Rb}{LJ} + \frac{k^2}{LJ} \right) \right] y \\ &= \frac{J}{k} \left[\ddot{y} + \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) \dot{y} + \left(\frac{Rb}{LJ} + \frac{k^2}{LJ} \right) y \right] \end{aligned} \quad (3.3b)$$

L'équation (3.3a) permet de choisir une trajectoire de vitesse du moteur satisfaisant une limitation du courant i . Quant à l'équation (3.3b), elle permet d'ajouter une contrainte supplémentaire à cette trajectoire de vitesse pour que la tension d'alimentation ne dépasse pas une certaine limite. Ce problème est connu sur le nom de planification de trajectoire. Cette même équation, i.e., (3.3b) permet de dimensionner l'alimentation du moteur et de réaliser la commande en boucle fermée pour assurer le suivi de trajectoire.

Suivi de trajectoire en utilisant la platitude

A partir des conditions initiales et finales de la vitesse angulaire du moteur $y(t_i) = \dot{y}(t_i) = 0$, $y(t_f) = y_f$ et $\dot{y}(t_f) = 0$, on va construire une trajectoire de référence pour la vitesse angulaire (la sortie plate) par interpolation polynômiale par exemple :

$$y^*(t) = y_f \left(\frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{t - t_i}{t_f - t_i} \right)$$

On en déduit alors les trajectoires du courant et de la tension de référence (en boucle ouverte) que le moteur est effectivement capable de reproduire en l'absence de perturbations et d'erreurs de modèle.

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{J}{k}(\dot{y}^* + \frac{b}{J}y^*) \\ \dot{x}_1^* = \frac{J}{k}(\ddot{y}^* + \frac{b}{J}\dot{y}^*) \\ u^* = \frac{J}{k} \left[\ddot{y}^* + \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) \dot{y}^* + \left(\frac{Rb}{LJ} + \frac{k^2}{LJ} \right) y^* \right] \end{cases}$$

et ainsi vérifier les contraintes sur la tension et le courant, i.e.,

$$|u^*| < U_{max}, \quad |x_1^*| < I_{max} \quad \text{et} \quad |\dot{x}_1^*| \leq \delta$$

En posant alors $v = \ddot{y}$ dans la l'équation (3.3b), le système se voit transformé en chaîne de deux intégrateurs pour lesquels on peut prescrire un régulateur de la forme :

$$v = \ddot{y}^* + k_D(\dot{y}^* - \dot{y}) + k_P(y^* - y)$$

Les coefficients k_D et k_P sont choisis de manière à satisfaire les performances désirées du système bouclé.

Cette procédure est étendue avec succès au cas des modèles BGs non linéaires, en particulier celui des machines électriques à courant continu dans Junco (2001b) et Junco et al. (2002).

Dans ce qui précède, et bien que l'exemple soit linéaire, aucune hypothèse de linéarité n'est supposée. La platitude est une propriété très générale, comme nous avons déjà pu le voir au premier chapitre. En revanche, le problème d'identification des sorties plates et de paramétrisation différentielle est beaucoup plus difficile dans le cas non linéaire.

3.2 Méthode d'identification des sorties plates

Dans le cas où on en dispose d'un modèle d'état du système (c'est aussi le cas des modèles BGs), il est plus judicieux d'utiliser une approche état pour l'identification des sorties plates.

Dans ce cas, la résolution de cette problématique se ramène souvent à l'utilisation de la forme canonique commandable pour lesquelles les sorties plates sont triviales, cf. ch. 1, § 1.3.

Cependant, c'est plutôt la forme canonique de commandabilité qui est accessible graphiquement sur un modèle BG, Rahmani et al. (1992).

Dans ce qui suit, nous allons proposer une méthode d'identification des sorties plates directement à partir d'un modèle BG linéaire basée sur l'utilisation de cette forme canonique et ce dans les deux cas suivants :

3.2.1 Cas mono-entrée

On considère le schéma bloc de la forme canonique de commandabilité, figure 3.3 dont sa représentation par variable d'état est décrite par l'équation (3.4).

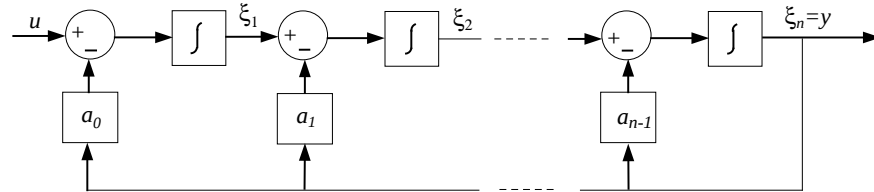


FIG. 3.3 – Schéma bloc de la forme canonique de commandabilité

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -a_0\xi_n + u \\ \dot{\xi}_2 = \xi_1 - a_1\xi_n \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n = \xi_{n-1} - a_{n-1}\xi_n \end{cases} \quad (3.4)$$

La représentation d'état (3.4) peut s'écrire sous une forme plus compacte :

$$\dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{B}u \quad (3.5)$$

avec :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 5. *La sortie plate de la représentation par variable d'état (3.4) est proportionnelle à la dernière variable d'état ξ_n , i.e : $y = \lambda \xi_n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$*

Preuve 2. *En effet, on a :*

$$\begin{cases} \xi_n &= \frac{1}{\lambda} y \\ \xi_{n-1} &= \frac{1}{\lambda} (s + a_{n-1}) y \\ &\vdots \\ \xi_1 &= \frac{1}{\lambda} [s^{n-1} + a_{n-1}s^{n-2} + \dots + a_2s + a_1] y \\ u &= \frac{1}{\lambda} [s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0] y \end{cases} \quad (3.6)$$

3.2.2 Cas multi-entrées

La généralisation de la forme canonique présentée précédemment au cas multi-entrées ($m > 1$) repose sur l'utilisation de l'algorithme de Luenberger. Dans ce cas, une formulation du doublet $(\bar{A}, \bar{B})$ peut être représentée par les équations (3.7,3.8) dont la matrice $\bar{A}$ est partitionnée de telle sorte que ses sous blocs diagonaux soient sous une forme compagne et la matrice $\bar{B}$ est une généralisation du cas mono-entrée.

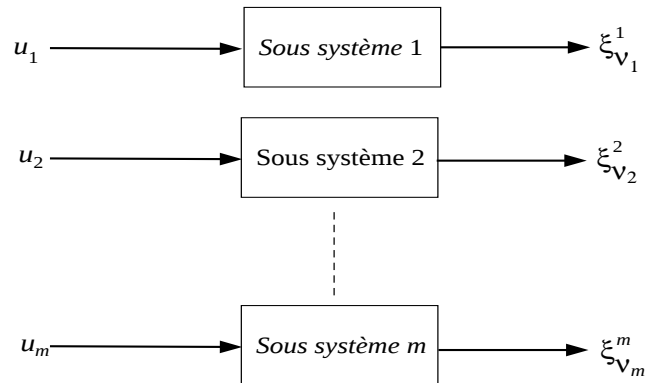


FIG. 3.4 – Schéma bloc de la forme canonique de commandabilité multi-entrées

Les sous-systèmes 1 à m ont le même schéma bloc que dans le cas mono-entrée et de dimensions $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ respectivement.

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & & & \times & \vdots & & & \times & \vdots & & & \times \\ 1 & \ddots & & \times & \vdots & & & \times & \vdots & & & \times \\ & \ddots & 0 & \times & \vdots & & & \times & \vdots & & & \times \\ & & 1 & \times & \vdots & & & \times & \vdots & & & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \times & \vdots & 0 & & \times & \vdots & & & \times \\ & & & \times & \vdots & 1 & \ddots & \times & \vdots & & & \times \\ & & & \times & \vdots & & \ddots & 0 & \times & \vdots & & \times \\ & & & \times & \vdots & & & 1 & \times & \vdots & & \times \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & \times & \vdots & & & \times & \vdots & 0 & & \times \\ & & & \times & \vdots & & & \times & \vdots & 1 & \ddots & \times \\ & & & \times & \vdots & & & \times & \vdots & & \ddots & 0 & \times \\ & & & \times & \vdots & & & \times & \vdots & & & 1 & \times \end{array} \right] \quad (3.7)$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Proposition 6. *Le vecteur sorties plates de la représentation par variable d'état de la figure 3.4 est $y = (\xi_{\nu_1}^1, \xi_{\nu_2}^2, \dots, \xi_{\nu_m}^m)^t$.*

3.3 Identification des sorties plates d'un modèle BG

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode proposée ci-dessus à l'identification des sorties plates des différents types de modèles BG présentés au chapitre 2.

3.3.1 Modèles BGs sans élément en causalité dérivée

La représentation par variables d'état issue de ce type de modèles BGs est de la forme décrite par l'équation (3.9), cf. ch. 2.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + \sum_{i=1}^m b_i u_i \\ z = Cx \end{cases} \quad (3.9)$$

avec $x \in R^n, u \in R^m, z \in R^p$ représentent respectivement, les vecteurs des variables d'état, des variables d'entrée et des variables de sortie.

A, B, C sont des matrices à coefficients constants et de dimensions appropriées.

Cas mono-entrée

Pour ce ramener à la forme canonique décrite précédemment, on considère le changement de base suivant :

$$x = P\xi \quad (3.10)$$

P est une matrice inversible. En utilisant la règle de multiplication dans $\mathbb{R}[s]$, il suit :

$$\dot{x} = sP\xi = (Ps + \dot{P})\xi = AP\xi + bu$$

Comme P est à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}$, alors :

$$\dot{\xi} = P^{-1}AP\xi + P^{-1}bu \quad (3.11)$$

Par identification, on a $\bar{A} = P^{-1}AP$ et $\bar{b} = P^{-1}b$.

Il reste alors à calculer la matrice de changement de coordonnées P correspondante. Soit :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{bmatrix}$$

Il suit : $P^{-1}b = \bar{b} \Leftrightarrow P\bar{b} = b \Leftrightarrow p_1 = b$

$$\text{et } P^{-1}AP = \bar{A} \Leftrightarrow P\bar{A} = AP \Leftrightarrow \begin{cases} p_2 = Ab \\ : \\ p_n = A^{n-1}b \end{cases}$$

Par conséquent :

$$P = [b \ Ab \ \dots \ A^{n-1}b]$$

Remarque 8. La matrice P doit être de rang plein, ce qui correspond à la commandabilité de (3.9) ou la liberté du module Ω représenté par l'équation (3.12).

$$[A - s]x + bu = 0 \quad (3.12)$$

On peut alors énoncer le théorème suivant :

Théorème 4. Un modèle BG linéaire est plat, si et seulement si, il est commandable.

Grâce à la proposition 5, pour retrouver la sortie plate du modèle initial, il suffit de calculer la dernière ligne de la matrice P^{-1} à une constante près. i.e.,

$$y = \lambda \xi_n = (0, \dots, 0, \lambda) \xi = (0, \dots, 0, \lambda) P^{-1}x = Cx$$

Théorème 5. Le vecteur ligne C vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} CA^{l-1}b = 0 & \text{pour } l = 0, 1, \dots, n-1 \\ CA^{n-1}b \neq 0 \end{cases}$$

Comme la sortie plate est proportionnelle à la dernière variable d'état ξ_n , il n'est pas nécessaire que la deuxième condition, i.e., $CA^{n-1}b \neq 0$ soit égale à 1.

Les composantes des vecteurs colonnes $A^{l-1}b$, ($l = 0, \dots, n$) peuvent être obtenues graphiquement à partir du modèle BG en utilisant la formule suivante :

$$\{A^{l-1}b\}_i = \sum_H G_l(u, x_i) \quad i = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad 0 \leq l \leq n \quad (3.13)$$

avec :

- $G_l(u, x_i)$ est la partie constante du gain du chemin causal de longueur l entre la source de commande u et l'élément dynamique x_i .
- H est l'ensemble de tous les chemins causaux de longueur l liant la source de commande u à un élément dynamique x_i .

Test graphique de platitude

Une formulation graphique du théorème 4, i.e., de commandabilité d'un modèle BG, Sueur and Dauphin-Tanguy (1989) est :

- Tous les éléments dynamiques sont atteignables par la source d'entrée.
- Tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée (la dualisation de la source est autorisée pour éliminer d'éventuels conflits de causalité).

Exemple 13. *Considérons le groupe Ward Leonard (GWL), figure 3.5, composé d'une génératrice jouant le rôle d'un amplificateur de tension pour le moteur à courant continu à aimant permanent supposé linéaire. La génératrice est commandée par un champ magnétique et alimentée par une machine primaire (moteur asynchrone) supposée ici à vitesse constante égale à ω_g . Dans le cas où ω_g n'est pas constante, le modèle devient non linéaire.*

Les lois de conversion électromagnétique de la génératrice et du moteur sont :

$$\begin{cases} e_g = k_g \omega_g \phi_g \\ \phi_g = k_e i_e \end{cases}, \quad \begin{cases} e_m = k_m \omega_m \\ \tau_m = k_m i_m \end{cases} \quad (3.14)$$

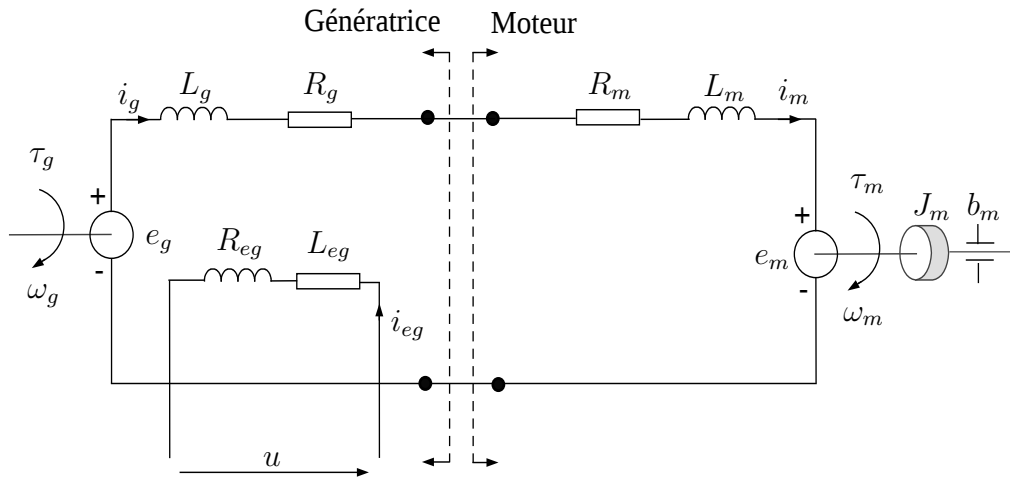


FIG. 3.5 – Schéma électromécanique du groupe Ward Leonard

Le modèle BG correspondant au GWL de la figure 3.5 est alors :

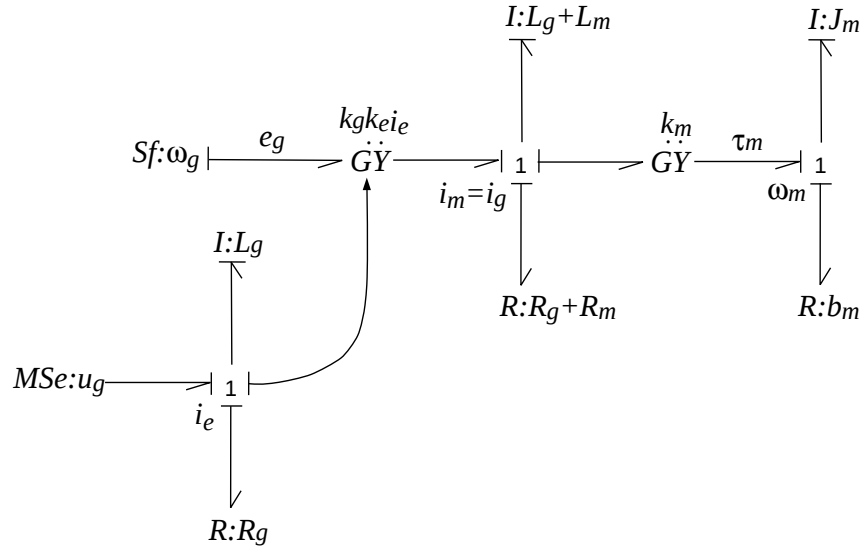


FIG. 3.6 – Modèle BG du groupe Ward Leonard

Pour cet exemple, on peut choisir indifféremment les variables d'énergie ou leurs variables complémentaires comme variables d'état. Dans ce dernier cas, on a $x = (i_e, i_m, \omega_m)^t$ et la variable de commande est u_g .

La sortie plate a pour expression :

$$y = C_1 i_e + C_2 i_m + C_3 \omega_m$$

Les coefficients $C_i, i = 1, \dots, 3$ vérifient :

Chemins causaux de longueur un :

$$C_1 G_1(u_g, i_e) + C_2 G_1(u_g, i_m) + C_3 G_1(u_g, \omega_m) = 0$$

Les gains $G_1(u_g, i_m)$ et $G_1(u_g, \omega_m)$ sont nuls car il n'existe pas de chemin causal liant la variable de commande u_g associée à la source d'effort $Mse : u_g$ aux variables d'état i_m et ω_m associées aux éléments dynamiques $I : L_g + L_m$ et $I : J_m$ respectivement, par conséquent $C_1 = 0$.

Chemins causaux de longueur deux :

$$C_2 G_2(u_g, i_m) + C_3 G_2(u_g, \omega_m) = 0$$

Il n'existe pas de chemin causal de longueur 2 entre la source de commande u_g et l'élément dynamique $I : J_m$ donc $G_2(u_g, \omega_m) = 0$ par conséquent $C_2 = 0$.

Chemins causaux de longueur trois :

$$G_3(u_g, \omega_m) \neq 0$$

Comme $G_3(u_g, \omega_m) = \frac{k_m k_g k_e \omega_m}{L_{eg}(L_m + L_g)} \neq 0$ il suffit de choisir $C_3 = 1$.

La sortie plate est alors :

$$y = \omega$$

Dans le cas de l'exemple précédent, la sortie plate est prévisible car il existe un chemin causal de longueur 3 passant par tous les éléments dynamiques.

Proposition 7. *Une variable BG représentée par un élément De ou Df est une sortie plate d'un système linéaire (SISO), si seulement si, la longueur du plus court chemin causal entre cette variable et la source d'entrée de commande est égal à l'ordre du modèle n .*

Preuve 3. *En effet, dans ce cas, la matrice de changement de base P est triangulaire inférieure (les variables d'état sont choisies dans l'ordre du parcours du chemin causal). Par conséquent, sauf le dernier coefficient C_n est non nul. D'où le résultat. ■*

Cas de modèles multi-entrées

On peut démontrer d'une manière similaire au cas mono-entrée que la matrice de passage nécessaire pour obtenir cette forme dite première forme de commandabilité est la matrice de commandabilité multi-entrées obtenue à l'aide de l'algorithme de *Luenberger*.

A la fin de l'exécution de cet algorithme on obtient :

$$P = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & A^{\nu_1-1}b_1 & b_2 & \dots & A^{\nu_2-1}b_2 & \dots & b_m & \dots & A^{\nu_m-1}b_m \end{bmatrix}$$

où $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ sont les indices de commandabilité.

D'après la proposition (6), les composantes du vecteur de sorties plates s'écrivent :

$$y_j = \sum_{i=1}^n C_{ij} x_i \quad j = 1, \dots, m \quad (3.15)$$

Les coefficients C_{ij} sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 6.

Le vecteur C_j défini par $y_j = C_j x$ satisfait le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_j A^{l-1} B = 0, & l = 0, 1, \dots, \nu_j - 1 \\ C_j A^{\nu_j-1} b_j \neq 0 \\ C_j A^{l-1} b_k = 0 & l = \nu_j, \dots, \nu_k, \quad \nu_j < \nu_k, \quad j \neq k \end{cases} \quad (3.16)$$

qui est une extension du cas mono-entrée.

Les composantes des vecteurs colonnes $A^{l-1} b_j$, ($l = 0, \dots, \nu_j$) sont obtenues graphiquement à partir du modèle BG en utilisant la formule suivante :

$$\{A^{l-1} b_j\}_i = \sum_H G_l(u_j, x_i) \quad j = 1, \dots, m, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

avec :

- $G_l(u_j, x_i)$ est la partie constante du gain du chemin causal de longueur l entre la source de commande u_j et l'élément dynamique x_i .
- H est l'ensemble de tous les chemins causaux de longueur l liant la source de commande u_j à un élément dynamique x_i .

Test de platitude

Une formulation BG du théorème 4 dans le cas multi-entrées est la suivante :

- Tous les éléments dynamiques sont atteignables par les sources d'entrée.
- Tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée (la dualisation des source est autorisée pour éliminer d'éventuels conflits de causalité).

Proposition 8. *Un ensemble de variables BGs représentées par des détecteurs De ou Df constituent un vecteur de sorties plates si la somme des longueurs des chemins causaux disjoints les plus courts entre les entrées et les sorties plates est égale à n .*

Exemple 14. *On se propose d'appliquer cette méthode à l'identification des sorties plates d'un moteur pas à pas (MPP) emprunté de la référence Bodson and Chiasson (1998) autour d'un point de fonctionnement. Le schéma électromécanique du moteur est représenté figure 3.7. Il correspond aux équations de tension (3.18) et de la dynamique mécanique du rotor donnée par l'équation (3.19). Ce modèle représente le MPP vu depuis un repère fixe (d, q) lié au stator.*

$$\begin{cases} v_d = Ri_d + L \frac{di_d}{dt} - n_p \omega Li_q \\ v_q = Ri_q + L \frac{di_q}{dt} + n_p \omega Li_d + n_p \omega k_m \end{cases} \quad (3.18)$$

$$J\dot{\omega} = n_p k_m i_q - b\omega - \tau_L \quad (3.19)$$

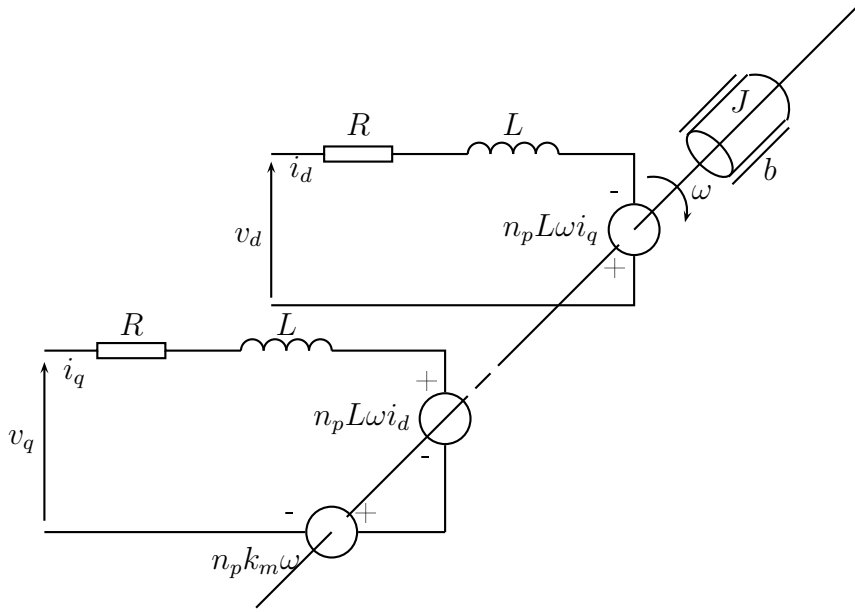
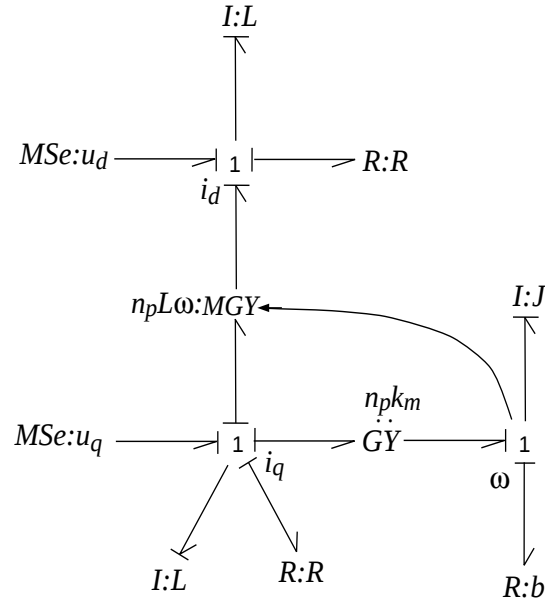


FIG. 3.7 – Schéma électromécanique du MPP dans le repère (d, q)

Son modèle BG est représenté figure 3.8 suit directement du Schéma électromécanique de la figure 3.7.

Modèle BG linéarisé du MPP

Le modèle BG linéarisé du MPP autour d'un point de fonctionnement $x_o = (i_{do}, i_{qo}, \omega_o)^t$ est obtenu directement à partir du modèle BG initial par simple connexion des modèles linéarisés des composants non linéaires du modèle BG 3.8 initial, voir Karnopp and Rosenberg (1975); Rimaux (1995). La non linéarité se présente ici sous la forme d'un gyrateur modulé à flux rentrant. Son modèle linéarisé est composé d'un gyrateur de gain constant égal à la valeur du gain au point de fonctionnement augmenté de deux sources d'effort modulées 3.9. Par exemple $e_1 = e_{1o} + \Delta e_1$, où e_{1o} est la valeur de l'effort e_1 au point de fonctionnement et Δe_1 représente ses variations autour du ce même point de fonctionnement. Ce qui conduit au modèle BG linéarisé global du MPP représenté figure 3.10.

FIG. 3.8 – Modèle BG du MPP dans le repère (d, q)

Pour alléger les notations, les variables du modèle initial sont réutilisées sur le modèle linéarisé. Elles sont décomposées en variables d'état $x = (i_d, i_q, \omega)^t$ et de commande $u = (v_d, v_q)^t$.

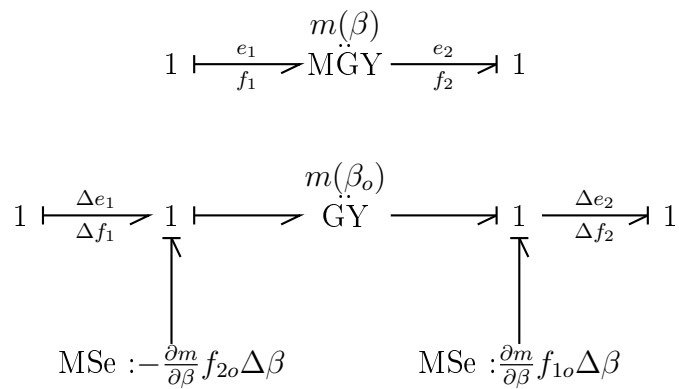


FIG. 3.9 – Gyrateur à flux rentrant et son modèle linéarisé

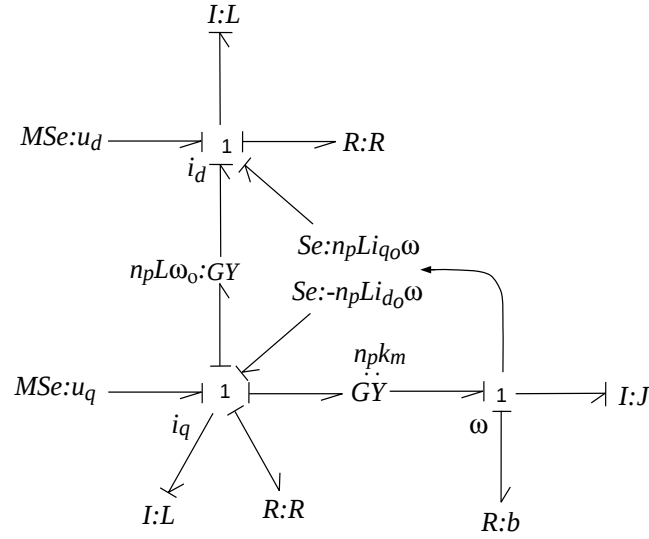


FIG. 3.10 – Modèle BG linéarisé du MPP

Test de platitude

Le théorème 7 ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante de commandabilité graphique simple qui étend les conditions du théorème 4 au cas de modèles BGs contenant des sources modulées. Nous nous limitons au cas de sources modulées par les variables d'état.

Théorème 7. *Rimaux (1995) Un modèle BG linéaire sans élément en causalité dérivée contenant des sources modulées par des variables d'état est commandable, si et seulement si, les conditions suivantes sont vérifiées :*

- Tous les éléments dynamiques sont atteignables par au moins une source d'entrée.
- Tous les éléments dynamiques admettent une causalité dérivée lors de l'affectation de la causalité dérivée préférentielle (en dualisant les sources de commande si nécessaire). La dualisation des sources modulées est autorisée seulement dans le cas où elles sont liées par un chemin causal à une source de commande.

En vertu du théorème 7, le modèle BG de la figure 3.10 est commandable donc plat. En effet, les trois éléments dynamiques sont atteignables par les sources d'entrée et ils admettent tous la causalité dérivée à travers les éléments R (sans même avoir recours à la dualisation des sources).

Sorties plates du MPP

Une expression particulière de l'équation (3.15) est :

$$\begin{cases} y_1 = C_{11}i_d + C_{12}i_q + C_{13}\omega \\ y_2 = C_{21}i_d + C_{22}i_q + C_{23}\omega \end{cases}$$

Les indices de commandabilité peuvent être calculés directement sur le modèle BG, Sueur and Dauphin-Tanguy (1995) et Rahmani (1993). Une paire d'indices de commandabilité est $\nu_1 = 1$ et $\nu_2 = 2$. Les différents coefficients C_{ij} , $i, j = 1, \dots, 3$ vérifient les conditions du théorème 6.

Première sortie plate

$$\begin{cases} C_{11}G_1(u_d, i_d) + C_{12}G_1(u_d, i_q) + C_{13}G_1(u_d, \omega) \neq 0 \\ C_{11}G_1(u_q, i_d) + C_{12}G_1(u_q, i_q) + C_{13}G_1(u_q, \omega) = 0 \\ C_{11}G_2(u_q, i_d) + C_{12}G_2(u_q, i_q) + C_{13}G_2(u_q, \omega) = 0 \end{cases}$$

$G_1(u_d, i_q) = G_1(u_d, \omega) = 0$ car il n'existe aucun chemin causal liant la source de commande u_d aux variables d'état i_q et ω . Par conséquent C_{11} peut être choisi égal à 1, car $G_1(u_d, i_d) = \frac{1}{L_d} \neq 0$.

Pour des raisons analogues, $G_1(u_q, i_d) = G_1(u_q, \omega) = 0$. Ce qui donne $C_{12} = 0$. Finalement, $G_2(u_q, i_d) = G_2(u_q, i_q) = 0$, d'où $C_{13} = 0$. La première sortie plate est alors :

$$y_1 = i_d$$

Deuxième sortie plate

$$\begin{cases} C_{21}G_1(u_d, i_d) + C_{22}G_1(u_d, i_q) + C_{23}G_1(u_d, \omega) \neq 0 \\ C_{21}G_1(u_q, i_d) + C_{22}G_1(u_q, i_q) + C_{23}G_1(u_q, \omega) = 0 \\ C_{21}G_2(u_q, i_d) + C_{22}G_2(u_q, i_q) + C_{23}G_2(u_q, \omega) = 0 \end{cases}$$

Les différents gains sont déjà calculés, il en résulte que $C_{21} = 0$ car $G_1(u_d, i_d) \neq 0$. En suivant le même raisonnement, on obtient $C_{22} = 0$. Enfin, C_{23} peut être choisi égal à 1.

Par conséquent, la deuxième sortie plates est :

$$y_2 = \omega$$

Ce résultat est prévisible d'après la proposition 8 car le modèle BG de la figure 3.10 contient deux chemins causaux disjoints dont la somme de leurs longueurs est égale à 3 (nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale).

3.3.2 Modèles BGs avec éléments en causalité dérivée

Ce cas de figure apparaît lors de l'application de la procédure d'affectation de causalité intégrale préférentielle au modèle BG qui astreint certains éléments à recevoir une causalité dérivée. En supposant qu'il n'existe pas d'élément en causalité dérivée lié directement aux sources de commande, la représentation par variable d'état prend la forme généralisée décrite par l'équation (3.20), cf. ch. 2.

$$W\dot{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (3.20)$$

Il est bien connu, que dans le cas où les variables d'état x ne sont associées qu'aux éléments dynamiques en causalité intégrale, la matrice W est toujours inversible. Par conséquent, l'équation (3.20) prend la forme classique :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.21)$$

avec : $A = W^{-1}\tilde{A}$ et $B = W^{-1}\tilde{B}$

Il est alors possible d'appliquer les algorithmes présentés précédemment. Les composantes des vecteurs colonnes $A^{l-1}b_j$, ($l = 0, \dots, \nu_j$) sont obtenues graphiquement à partir du modèle BG en utilisant la formule (3.22).

$$[A^{l-1}b_j]_i = \sum_H \frac{G_l(du_j, dx_i)\Delta_{i,j}}{\Delta^{r_i}} \quad (3.22)$$

avec :

- r_i : le nombre de fois qu'on passe par l'élément i ,
- $\Delta = 1 - \sum_i B_i + \sum_{i,j} B_i B_j - \sum_{i,j,k} B_i B_j B_k + \dots$,
- $\sum_i B_i$: somme des parties constantes des gains de boucles de longueur 0 present 1 à 1,
- $\sum_{i,j} B_i B_j$: somme des parties constantes des gains de boucles disjointes de longueur 0 present 2 à 2,
- $\sum_{i,j,k} B_i B_j B_k$: somme des parties constantes des gains de boucles disjointes de longueur 0 present 3 à 3,
- $G_l(du_j, dx_i)$: la partie constante du gain du chemin causal généralisé de longueur l liant la variable d'entrée du_j à la variable d'état dx_i ,
- $\Delta_{i,j}$: se calcule comme Δ quand on a enlevé le $i^{\text{ème}}$ chemin causal,
- H est l'ensemble de tous les chemins causaux de longueur généralisée l liant la source de commande u_j à l'élément dynamique x_i .

Exemple 15. *Considérons le système pendule inversé (PI) représenté figure 3.11, composé d'un chariot de masse M supportant une barre rigide de longueur $2l$ et de masse m possédant un moment d'inertie J par rapport à son centre de masse égal à $\frac{ml^2}{3}$. Le chariot se déplace en translation sans frottement sur un rail dans la direction horizontale sous l'action d'une force variable F .*

Modèle BG du PI Le modèle BG du PI est présenté figure 3.12 satisfaisant les équations aux vitesses (3.23).

$$\begin{cases} X = D + l\sin\theta \Rightarrow \dot{X} = V + l\omega\cos\theta \\ Y = l\cos\theta \Rightarrow \dot{Y} = -l\omega\sin\theta \end{cases} \quad (3.23)$$

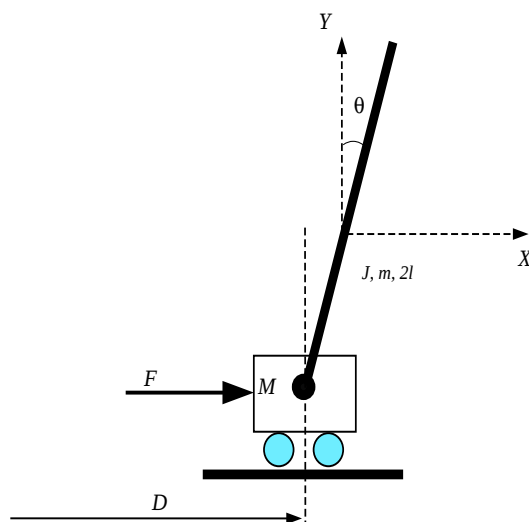


FIG. 3.11 – Pendule inversé sur un chariot

Modèle BG linéarisé du PI Il est bien connu que sans l'approximation des petits angles, le système PI n'est pas plat. Le modèle BG linéarisé du PI autour de l'équilibre instable ($\theta = \omega = 0$) est obtenu comme dans le cas de l'exemple précédent. Par contre, les non linéarités se présentent ici sous forme de transformateurs modulés à flux rentrants dont leurs modèles linéarisés sont construits comme indiqué à la figure 3.13.

Par conséquent, le modèle BG linéarisé du PI autour de l'équilibre instable est construit comme représenté, figure 3.14. Pour alléger les notations, nous gardons les mêmes variables pour le modèle linéarisé représentant ici les variations autour du point d'équilibre.

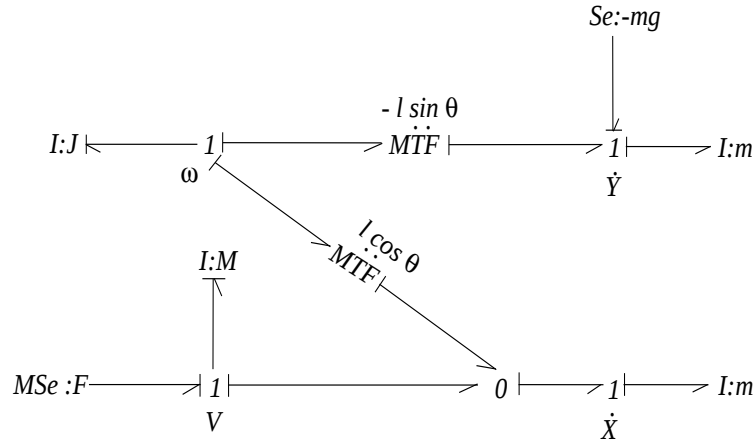
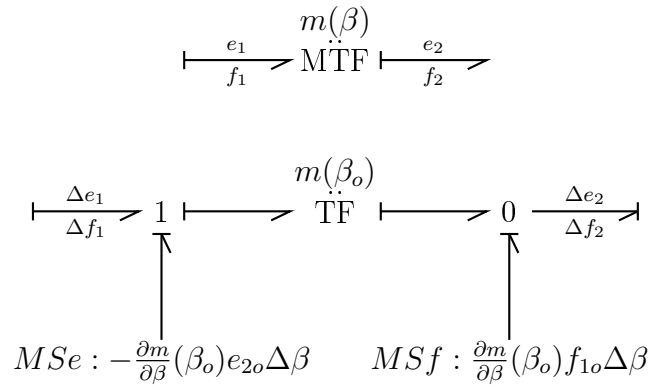
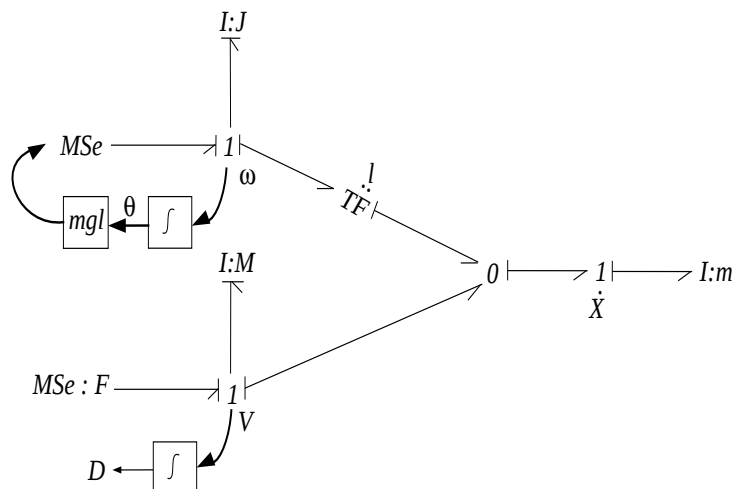
FIG. 3.12 – Modèle BG du PI 

FIG. 3.13 – Modèle BG linéarisé d'un transformateur modulé

Remarque 9. Dans le cas des systèmes mécaniques, il est souvent nécessaire de prendre en compte dans le vecteur d'état non seulement les variables associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale mais aussi l'intégrale de ces variables qui représentent les déplacements ou les angles.

Test de platitude Le modèle BG résultant est commandable, donc plat. En effet, les conditions du théorème 7 sont satisfaites. Les deux éléments dynamiques $I : J$ et $I : M$ et les deux intégrateurs sont atteignables par l'entrée. Il est également possible d'imposer une causalité dérivée aux l'éléments dynamiques $I : J$ et $I : M$ en dualisant la source modulée et la source de commande respectivement.



Sortie plate du modèle BG du PI

L'expression de la sortie plate est :

$$y = C_1 D + C_2 V + C_3 \theta + C_4 \omega$$

La première contrainte s'écrit :

$$C_1 G_1(u, D) + C_2 G_1(u, V) + C_3 G_1(u, \theta) + C_4 G_1(u, \omega) = 0$$

$G_1(u, D) = G_1(u, \theta) = 0$ car il n'existe aucun chemin causal de longueur 1 liant la source de commande u aux variables d'état D et θ .

$$G_1(u, V) = \frac{1}{M} \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ avec } \Delta = 1 + \frac{m}{M} + \frac{m^2}{J} \text{ et } \Delta_1 = 1 + \frac{m^2}{J}$$

$$G_1(u, \omega) = -\frac{mI}{MI} \frac{1}{\Lambda}$$

$$C_1 G_2(u, D) + C_2 G_2(u, V) + C_3 G_2(u, \theta) + C_4 G_2(u, \omega) = 0$$

$G_2(u, V) = G_2(u, \omega) = 0$ car il n'existe aucun chemin causal de longueur 2 liant la source de commande u aux variables d'état V et ω .

$$G_2(u, D) = \frac{1}{M} \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ avec } \Delta = 1 + \frac{m}{M} + \frac{ml^2}{J} \text{ et } \Delta_1 = 1 + \frac{ml^2}{J}$$

$$G_2(u, \theta) = -\frac{ml}{MJ} \frac{1}{\Delta}$$

La troisième contrainte s'écrit :

$$C_1 G_3(u, D) + C_2 G_3(u, V) + C_3 G_3(u, \theta) + C_4 G_3(u, \omega) = 0$$

$G_3(u, D) = G_3(u, \theta) = 0$ car il existe aucun chemin causal de longueur 3 liant la source de commande u aux variables d'état D et θ .

$$G_3(u, V) = \frac{m^3 l^3 g}{M^2 J^2} \frac{1}{\Delta^2}$$

$$G_3(u, \omega) = -\frac{m^3 l^3 g}{M^2 J^2} \frac{1}{\Delta^2} - \frac{m^2 l^2 g}{M J^2} \frac{1}{\Delta^2}$$

La quatrième contrainte s'écrit :

$$C_1 G_4(u, D) + C_2 G_4(u, V) + C_3 G_4(u, \theta) + C_4 G_4(u, \omega) \neq 0$$

$G_4(u, D) = G_4(u, \theta) = 0$ car il n'existe aucun chemin causal de longueur 4 liant la source de commande u aux variables d'état D et θ .

$$G_4(u, D) = \frac{m^3 l^3 g}{M^2 J^2} \frac{1}{\Delta^2}$$

$$G_4(u, \omega) = -\frac{m^3 l^3 g}{M^2 J^2} \frac{1}{\Delta^2} - \frac{m^2 l^2 g}{M J^2} \frac{1}{\Delta^2}$$

La résolution de ces équations donne $C_2 = C_4 = 0$ et $C_1(J + ml^2) - C_3 ml = 0$.

Si on choisie $C_1 = 1$ alors $C_3 = \frac{J+ml^2}{ml}$, la sortie plate est alors :

$$y = D + \frac{J + ml^2}{ml} \theta$$

Si on considère que la barre du pendule est homogène alors $J = \frac{ml^2}{3}$ et la sortie plate se réduit à :

$$y = D + \frac{4}{3} l \theta$$

qui représente le centre d'oscillation du pendule.

3.3.3 Modèles BGs avec éléments en causalité dérivée liés à l'entrée

La présence d'éléments dynamiques en causalité dérivée liés directement aux entrées fait apparaître des dérivées de l'entrée dans la représentation d'état, cf. ch. 2, i.e.,

$$\dot{x} = Ax + \sum_{i=0}^{\alpha} B_i s^i u \quad (3.24)$$

Dans ce cas, il est toujours possible de considérer des changements de coordonnées généralisés successifs de la forme (3.28), Fliess (1990b),

$$\tilde{x} = x - B_\alpha s^{\alpha-1} u \quad (3.25)$$

qui conduisent à la représentation par variable d'état dite classique ou Kalmanienne (3.26).

$$\tilde{x} = \tilde{A}x + \tilde{B}u \quad (3.26)$$

où $\tilde{A} = A$ et $\tilde{B} = \sum_{i=0}^{\alpha} A^i B_i$.

Par ailleurs, s'il existe d'autres éléments en causalité dérivée qui ne sont pas liés aux entrées, la représentation par variables d'état prend la forme (3.27), avec W régulière.

$$W\dot{x} = Ax + \sum_{i=0}^{\alpha} B_i s^i u \quad (3.27)$$

Dans ce cas, les changements de coordonnées généralisés nécessaires pour obtenir la forme classique ont pour expression :

$$\tilde{x} = x - W^{-1} B_\alpha s^{\alpha-1} u \quad (3.28)$$

conduisant à la représentation par variable d'état (3.26). Cependant :

$$\tilde{A} = A \quad \text{et} \quad \tilde{B} = \sum_{i=0}^{\alpha} (W^{-1} A)^i W^{-1} B_i$$

Il est alors possible d'utiliser les algorithmes précédents pour calculer les sorties plates en termes des nouvelles coordonnées puis de retourner vers les coordonnées initiales par des changements de coordonnées inverses successifs.

Cette procédure peut s'appliquer directement sur les modèles BGs car les composantes des différents vecteurs $(W^{-1} A)^i W^{-1} B_i, i = 0, \dots, \alpha$ peuvent être calculées à l'aide de la formule (3.22) en considérant cette fois-ci des chemins causaux de longueurs $i + 1$.

Exemple 16. *Considérons le pendule inverse (PI) sans le chariot dont le modèle BG est représenté figure 3.15. Une différence remarquable par rapport au modèle BG précédent est que la source de commande $MSf : \dot{D}$ est directement liée à l'élément dynamique $(I : m)$ en causalité dérivée. Les variables d'état sont $x = (\theta, \omega)^t$ et la commande est $u = D$.*

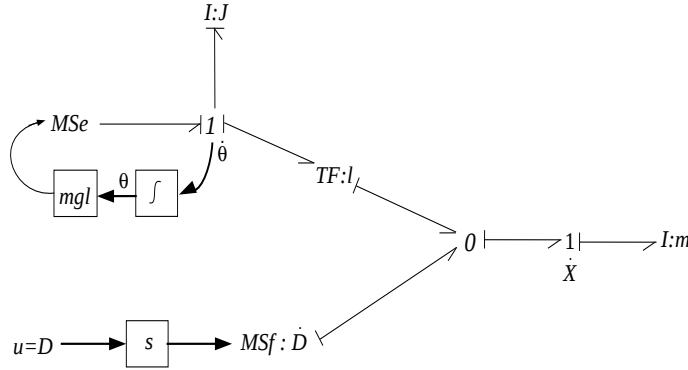


FIG. 3.15 – Modèle BG linéarisé du PI sans le chariot

Dans les nouvelles coordonnées (forme de Kalman), la sortie plate s'écrit :

$$y = C_1 \tilde{\theta} + C_2 \tilde{\omega}$$

Les coefficients C_1 et C_2 vérifient :

$$\begin{cases} C_1 G_{-1}(D, \theta) + C_2 G_{-1}(D, \omega) = 0 \\ C_1 G_0(D, \theta) + C_2 G_0(D, \omega) \neq 0 \end{cases}$$

$G_{-1}(D, \theta) = 0$ car il n'existe pas de chemin causal de longueur généralisée égale à -1, par conséquent $C_2 = 0$. Comme $G_0(D, \theta) \neq 0$, il suffit alors de choisir $C_1 = 1$ pour obtenir $y = \tilde{\theta}$.

Le changement de coordonnées généralisé est : $\tilde{x} = x - (W^{-1}B_1 + (W^{-1}A)W^{-1}B_1)u - W^{-1}B_2\dot{u}$. Les différents vecteurs $W^{-1}B_1$, $W^{-1}B_2$ et $(W^{-1}A)W^{-1}B_1$ sont calculés en utilisant la formule (3.22). Il suit :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{ml}{J(1+\frac{ml^2}{J})} \\ 0 \end{bmatrix} D - \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{J(1+\frac{ml^2}{J})} \end{bmatrix} \dot{D} \quad (3.29)$$

On obtient alors $y = \tilde{\theta} = \theta + \frac{3ml}{4}D$, qui est proportionnelle à $y = D + \frac{4l}{3}\theta$.

3.4 Paramétrisation différentielle

Dans cette section, nous allons aborder le problème de la paramétrisation des variables du système en particulier les variables d'état et d'entrée en fonction des sorties plates et de leurs dérivées. Nous allons proposer deux méthodes pour obtenir

cette paramétrisation directement sur le modèle BG. La première est basée sur le calcul de déterminants de matrices particulières sur le modèle BG direct et la deuxième en utilisant la règle de Mason sur le modèle BG inverse.

Nous considérons des modèles BG plats dont la représentation par variables d'état est de la forme (3.30), où W est une matrice régulière.

$$\begin{cases} W\dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (3.30)$$

avec $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^m$ représentent respectivement, les vecteurs des variables d'état, des variables d'entrée et des variables de sorties plates.

W, A, B, C sont des matrices à coefficients constants et de dimensions appropriées.

D'une manière plus compacte, l'équation (3.30) s'écrit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Ws - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Comme le système est plat, $\det(P(s))$ est constant (indépendant de s) et la solution de (3.31) prend la forme :

$$\begin{cases} u = \Phi(s)y \\ x = \Psi(s)y \end{cases} \quad (3.32)$$

où $\Phi(s) \in \mathbb{R}^{m \times m}[s]$ et $\Psi(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}[s]$ sont des matrices ayant pour coefficients des polynômes appartenant à $\mathbb{R}[s]$. Dans ce qui suit, nous allons montrer comment calculer les différents termes des matrices $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ directement à partir du modèle BG.

3.4.1 Méthode indirecte

Le système de Cramer (3.31) a pour solution :

$$\begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} = \frac{1}{\det P(s)} \text{Com} \begin{bmatrix} Ws - A & -B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

avec $\det(P(s)) \neq 0$.

A partir des calculs des matrices cofacteurs, les coefficients $\Phi_{ij}(s)$ et $\Psi_{ij}(s)$ des matrices $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ sont obtenues graphiquement à l'aide des propositions suivantes :

Proposition 9. *Le polynôme $\Phi_{ij}(s), i, j = 1, \dots, m$ de la matrice $\Phi(s)$ est égal au déterminant de la matrice système du modèle obtenu en supprimant la $i^{\text{ème}}$ entrée et la $j^{\text{ème}}$ sortie plate, divisé par une constante $(-1)^{(i+j)}K$, où K est égal au déterminant de la matrice système.*

Proposition 10. *Le polynôme $\Psi_{ij}(s), i, j = 1, \dots, m$ de la matrice $\Psi(s)$ est égal au déterminant de la matrice système du modèle obtenu en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ sortie plate par la sortie associée à la $i^{\text{ème}}$ variable d'état, divisé par une constante $(-1)^{(i+j)}K$, où K est égal au déterminant de la matrice système.*

La preuve de ces deux propositions est reportée à l'annexe B.

Pour calculer le déterminant de la matrice système sur un modèle BG, nous allons utiliser la formule (3.34), Rahmani (1993).

$$\det S(s) = \sum_{q=1}^d (-1)^{\sigma(q)} \left(\prod_{k=1}^t \tilde{G}_k(u_i, y_i) P_{A_r}(s) \right)_q \quad (3.34)$$

où $i, j \in \{1, \dots, t\}$

$\tilde{G}_k(u_i, y_i)$ est la partie constante du gain du $k^{\text{ème}}$ ($k = 1, \dots, t$) chemin causal entrée-sortie appartenant à l'ensemble des t chemins causaux entrées-sorties disjoints. d est le nombre de choix de t chemins causaux (E/S) disjoints. $P_{A_r}(s)$ représente le polynôme caractéristique, Rahmani et al. (1994a) du modèle BG réduit, obtenu en supprimant les t chemins causaux (E/S) disjoints associés au $q^{\text{ème}}$, ($q = 1, \dots, d$) choix. $\sigma(q)$ est le nombre de permutations élémentaires. Par définition, $\sigma(q) = 0$, s'il existe un unique choix de t chemins causaux (E/S) disjoints.

Exemple 17. *On se propose d'appliquer les résultats ci-dessus à la paramétrisation différentielle du MPP considéré précédemment. Les deux sorties plates déjà identifiées sont représentées par deux détecteurs de flux, figure 3.16.*

Pour commencer, nous allons d'abord calculer le déterminant K de la matrice système :

Calcul du déterminant de $P(s)$:

Il existe un seul choix de chemins causaux entrées-sorties disjoints, à savoir :

$$\begin{cases} MSe : u_d \rightarrow I : L \rightarrow Df : i_d \\ MSe : u_q \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : J \rightarrow Df : \omega \end{cases}$$

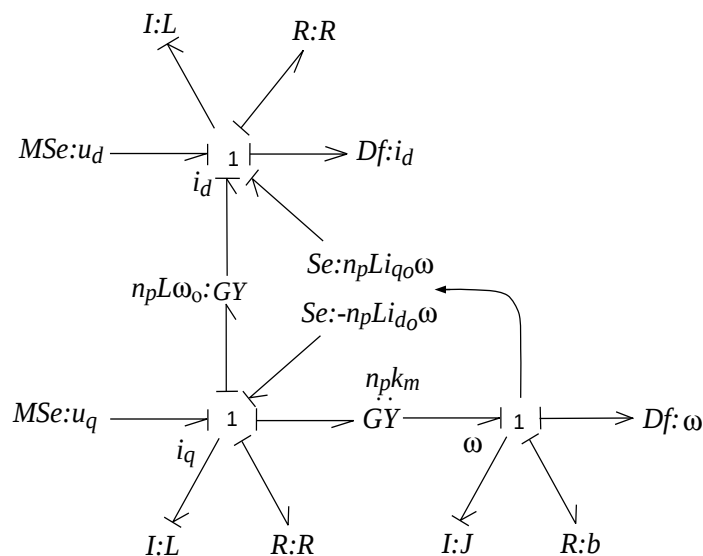


FIG. 3.16 – Modèle BG du MPP avec placement de détecteurs sur les sorties plates

D'après la formule (3.34), il suffit donc de calculer le produit des gains des chemins causaux entrées-sorties disjoints, le polynôme caractéristique du BG réduit vaut 1. Le déterminant de la matrice système est alors :

$$K = (-1)^0 \left[\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} n_p k_m \frac{1}{J} \right] = \frac{n_p k_m}{J L^2}$$

Paramétrisation états-sorties :

Les relations polynômiales entre les variables d'états et les sorties plates peuvent s'écrire sous la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Psi_{21}(s) & \Psi_{22}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Les coefficients $\Psi_{21}(s)$ et $\Psi_{22}(s)$ sont obtenus graphiquement à l'aide de la proposition 10.

– Calcul de $\Psi_{21}(s)$:

D'après la proposition 10, $y_1 = i_q$ et $y_2 = \omega$. Avec ce choix de sorties, il ne subsiste aucune paire de chemins causaux entrées-sorties disjoints. Par conséquent, $\Psi_{21} = 0$.

– Calcul de $\Psi_{22}(s)$:

Dans ce cas $y_1 = i_d$ et $y_2 = i_q$. Le déterminant de la matrice système corres-

pondant à ce choix de sorties est calculé comme suit :

Nous avons un seul choix de chemins causaux entrées-sorties disjoints :

$$\begin{cases} MSe : u_d \rightarrow I : L \rightarrow Df : dy_1 \\ MSe : u_q \rightarrow I : L \rightarrow Df : dy_2 \end{cases}$$

de gains respectifs $\frac{1}{L}$. En supprimant cette paire de chemins causaux, on obtient le modèle BG réduit représenté, figure 3.17 dont le polynôme caractéristique est égal à $(s + \frac{b}{J})$.

$$\begin{array}{ccc} R:b & \xleftarrow{\quad} & 1 \xrightarrow{\quad} I:J \\ & \omega & \end{array}$$

FIG. 3.17 – Modèle BG réduit

Le déterminant de la matrice système correspondant à ce choix de sorties est alors égal à $\frac{1}{L^2}(s + \frac{b}{J})$. En divisant par K on obtient :

$$\Psi_{22}(s) = \frac{J}{n_p k_m} (s + \frac{b}{J})$$

Finalement :

$$\begin{cases} i_d = y_1 \\ \omega = y_2 \\ i_q = \frac{J}{n_p k_m} (s + \frac{b}{J}) y_2 = \frac{J}{n_p k_m} (\dot{y}_2 + \frac{b}{J} y_2) \end{cases}$$

Paramétrisation entrées-sorties :

Les relations polynômiales entre les variables d'entrée et les sorties plates peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Les différents coefficients $\Phi_{11}(s)$, $\Phi_{12}(s)$, $\Phi_{21}(s)$ et $\Phi_{22}(s)$ sont calculés graphiquement à l'aide de la proposition 9.

– Calcul de $\Phi_{11}(s)$:

En supprimant la première entrée $MSe : u_d$ et la première sortie plate $Df : i_d$, il subsiste un seul chemin causal entrée-sortie défini par :

$MSe : u_q \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : J \rightarrow Df : d\omega$. Son gain est égal à

$\frac{n_p k_m}{JL}$. Le modèle BG réduit résultant de la suppression de ce chemin causal est représenté, figure 3.18 dont le polynôme caractéristique est égal à $(s + \frac{R}{L})$.

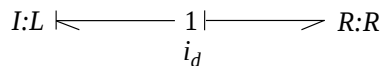


FIG. 3.18 – Modèle BG réduit

Le coefficient recherché est alors égal à $\Phi_{11}(s) = L(s + \frac{R}{L})$

– Calcul de $\Phi_{12}(s)$:

En supprimant la première entrée $MSe : u_d$ et la deuxième sortie plate $Df : \omega$, il subsiste deux chemins causaux entrée-sortie définis par :

$$\begin{cases} MSe : u_q \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p L \omega_o \rightarrow I : L \rightarrow Df : di_d \\ MSe : u_q \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : J \rightarrow Se : n_p Li_{q_0} \omega \rightarrow I : L \rightarrow Df : di_d \end{cases}$$

Le gain du premier chemin causal est égal à $\frac{n_p L \omega_o}{L^2}$. Le modèle BG réduit résultant de la suppression de ce chemin causal est identique à celui représenté en figure 3.17 dont le polynôme caractéristique est égal à $(s + \frac{b}{J})$.

Le gain du deuxième chemin causal est égal à $\frac{n_p^2 k_m i_{q_0}}{JL}$. En supprimant ce deuxième chemin, il ne reste plus de BG réduit. On obtient alors :

$$\Phi_{12}(s) = -\frac{JL \omega_o}{k_m} (s + \frac{b}{J}) - n_p Li_{q_0}$$

– Calcul de $\Phi_{21}(s)$:

En supprimant la deuxième entrée $MSe : u_q$ et la première sortie plate $Df : i_d$, il subsiste un seul chemin causal entrée-sortie défini par :

$$MSe : u_d \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p L \omega_o \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : J \rightarrow Df : \omega.$$

Son gain est égal à $-\frac{n_p^2 L k_m \omega_o}{JL^2}$, d'où $\Phi_{21}(s) = n_p L \omega_o$

– Calcul de $\Phi_{22}(s)$:

En supprimant la deuxième entrée $MSe : u_q$ et la deuxième sortie plate $Df : \omega$, il subsiste un seul chemin causal entrée-sortie défini par :

$MSe : u_d \rightarrow I : L \rightarrow Df : i_d$ dont le gain est égal à $\frac{1}{L}$. Le modèle BG réduit résultant de la suppression de ce chemin causal est représenté figure 3.19 et a pour polynôme caractéristique :

$$s^2 + (\frac{R}{L} + \frac{b}{J})s + \frac{Rb}{JL} + \frac{n_p^2 k_m^2}{JL} + \frac{n_p^2 k_m i_{d_0}}{J}$$

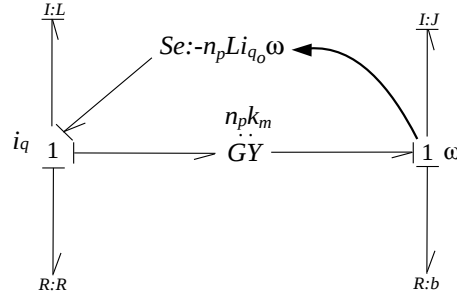


FIG. 3.19 – Modèle BG réduit

d'où :

$$\Phi_{22}(s) = \frac{JL}{n_p k_m} \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) s + \frac{Rb}{JL} + \frac{n_p^2 k_m^2}{JL} + \frac{n_p^2 k_m i_{d_0}}{J} \right]$$

Finalement :

$$\begin{cases} u_d = L \left[\dot{y}_1 - \frac{J\omega_o}{k_m} + \frac{R}{L} y_1 - \left(\frac{b\omega_o}{k_m} + n_p i_{q_0} \right) y_2 \right] \\ u_q = \frac{JL}{n_p k_m} \left[\ddot{y}_2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) \dot{y}_2 + \left(\frac{Rb}{JL} + \frac{n_p^2 k_m^2}{JL} + \frac{n_p^2 k_m i_{d_0}}{J} \right) y_2 + \frac{n_p^2 k_m \omega_o}{J} y_1 \right] \end{cases}$$

3.4.2 Méthode directe

La notion de bicausalité introduite par Gawthrop (1995) permet en particulier de retrouver le modèle BG inverse d'un système. Dans ce contexte, l'inverse d'un système dynamique peut être considéré comme étant un nouveau système, pour lequel, étant donné la sortie du système initial comme entrée, il reproduira exactement l'entrée du système initial comme sortie. Pour ce faire, de nouveaux composants BGs, à savoir les composants "source détecteur" notés SS sont introduits, cf. annexe A.1.

Grâce à la notion de bicausalité, la paramétrisation différentielle peut être alors obtenue graphiquement et directement à partir du modèle BG inverse. Dans ce cas, cette paramétrisation s'obtient par simple application de la règle de Mason, cf. ch.2 sur le modèle BG inverse. Cette idée est inspirée de la référence Marquis-Favre et al. (2001), où la bicausalité est utilisée pour calculer les matrices de transfert et de transmission d'un modèle BG mono-entrée. Dans cette section, nous allons étendre cette méthode au cas multi entrée où l'inversion bicausale s'effectue le long des chemins causaux entrées-sorties disjoints les plus courts. Une propriété intéressante propre aux modèles BGs plats, est que le modèle BG inverse ne contient aucun élément en causalité intégrale, Richard et al. (2002). Par conséquent, lors de l'application de

la règle de Mason, nous n'allons pas rencontrer des boucles causales, ce qui simplifie considérablement les calculs.

Procédure de construction du modèle BG inverse

Cette procédure est tirée de la référence Fotsu-Ngwompu et al. (1996). Nous n'avons gardé que les 3 premières étapes. Les étapes 4 et 5 proposées dans la même référence ne se présentent pas dans le cas des systèmes plats.

- sur le modèle BG causal, déterminer l'ensemble des chemins causaux entrées-sorties plates disjoints les plus courts,
- sur le modèle BG acausal, remplacer les sources (associées aux commandes) et les détecteurs (associées aux sorties plates) par des éléments SS ,
- propager la bicausalité le long de ces chemins causaux entrées sorties plates disjoints les plus courts sans créer de conflits de causalité.

Remarque 10.

S'il existe plusieurs choix de chemins causaux entrées sorties-plates disjoints, la procédure peut s'appliquer indifféremment sur l'un de ces ensembles.

Exemple 18. *On se propose d'appliquer cette méthode à la paramétrisation différentielle du MPP considéré précédemment, figure 3.16.*

Construction du modèle BG inverse

On suit étape par étape la procédure précédente :

Il existe un seul choix de chemins causaux entrées-sorties plates disjoints les plus courts, à savoir :

$$\begin{cases} MSe : u_d \rightarrow I : L \rightarrow Df : i_d \\ MSe : u_d \rightarrow I : L \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : J \rightarrow Df : \omega \end{cases}$$

En remplaçant les deux sources d'entrée et les deux détecteurs par des éléments SS et en inversant le modèle BG de la figure 3.16 le long de ces deux chemins causaux disjoints, le modèle BG inverse de la figure 3.20.

Remarque 11. *Puisque tous les éléments dynamiques ont une causalité dérivée, l'application de la règle de Mason se réduit au calcul de la somme des gains des chemins causaux sorties-entrées et sorties-états.*

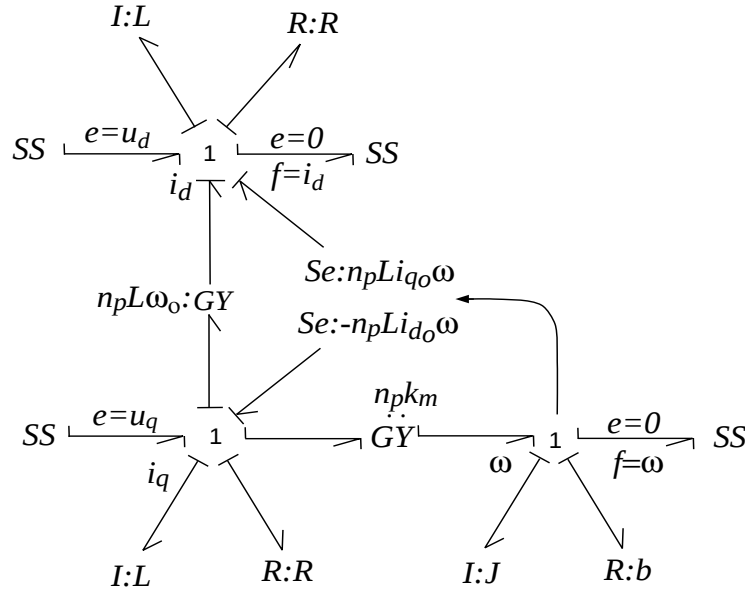


FIG. 3.20 – Modèle BG inverse du MPP par rapport aux sorties plates

Paramétrisation états-sorties

Les relations polynômiales entre les variables d'états et les sorties plates sont :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \Psi_{21}(s) & \Psi_{22}(s) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$\Psi_{21}(s) = 0$ car il n'existe aucun chemin causal liant la sortie plate y_1 à la variable d'état i_q , il reste alors à calculer le gain $\Psi_{22}(s)$ qui est égal à la somme des gains des chemins causaux liant la deuxième sortie plate y_2 à la variable d'état i_q . Il existe deux chemins causaux donnés par :

$$\begin{cases} SS : \omega \rightarrow I : J \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow i_q \\ SS : \omega \rightarrow R : b \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow i_q \end{cases}$$

Par conséquent : $i_q = (Js \frac{1}{n_p k_m} + R \frac{1}{n_p k_m}) \omega \Rightarrow \Psi_{22}(s) = \frac{J}{n_p k_m} (s + \frac{b}{J})$

Paramétrisation entrées sorties plates

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Les différents coefficients $\Phi_{11}(s)$, $\Phi_{12}(s)$, $\Phi_{21}(s)$ et $\Phi_{22}(s)$ sont calculés graphiquement à l'aide de la règle de Mason.

Calcul de $\Phi_{11}(s)$:

Nous avons deux chemins causaux liant la sortie plate $SS : i_d$ à la variable d'entrée $SS : u_d$:

$$\begin{cases} SS : i_d \rightarrow I : L \rightarrow SS : u_d \\ SS : i_d \rightarrow I : R \rightarrow SS : u_d \end{cases}$$

La somme de leurs gains est $u_d = (Ls + R)i_d \Rightarrow \Phi_{11}(s) = L(s + \frac{R}{L})$

Calcul de $\Phi_{12}(s)$:

Il existe trois chemins causaux liant la sortie plate $SS : \omega$ à l'entrée $SS : u_d$:

$$\begin{cases} SS : \omega \rightarrow I : J \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow GY : n_p L \omega_o \rightarrow SS : u_d \\ SS : \omega \rightarrow R : b \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow GY : n_p L \omega_o \rightarrow SS : u_d \\ SS : \omega \rightarrow Se : n_p L i_{q_o} \rightarrow SS : u_d \end{cases}$$

Il suit : $u_d = \left[-(Js + b) \left(\frac{1}{n_p k_m} \right) n_p L \omega_o - n_p L i_{q_o} \right] \omega \Rightarrow \Phi_{12}(s) = -\frac{JL\omega_o}{k_m} \left(s + \frac{b}{J} \right) - n_p L i_{q_o}$

Calcul de $\Phi_{21}(s)$:

Nous avons un seul chemin causal liant la sortie plate $SS : i_d$ à la variable d'entrée $SS : u_q$:

$$SS : i_d \rightarrow GY : n_p L \omega_o \rightarrow SS : u_q$$

Dont le gain est : $u_q = n_p L \omega_o i_d \Rightarrow \Phi_{21}(s) = n_p L \omega_o$

Calcul de $\Phi_{22}(s)$: Dans ce cas, il existe six chemins causaux liant la sortie plate $SS : \omega$ à l'entrée $SS : u_q$:

$$\begin{cases} SS : \omega \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow SS : u_q \\ SS : \omega \rightarrow Se : -n_p L i_{d_o} \rightarrow SS : u_q \\ SS : \omega \rightarrow I : J \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : L \rightarrow SS : u_q \\ SS : \omega \rightarrow I : J \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : R \rightarrow SS : u_q \\ SS : \omega \rightarrow R : b \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : L \rightarrow SS : u_q \\ SS : \omega \rightarrow R : b \rightarrow GY : n_p k_m \rightarrow I : R \rightarrow SS : u_q \end{cases}$$

La somme de leurs différents gain est :

$$u_q = \left[(Js + b) \left(\frac{1}{n_p k_m} \right) (Ls + R) + n_p k_m + n_p L i_{d_o} \right] \omega$$

$$\Rightarrow \Phi_{22}(s) = \frac{JL}{n_p k_m} \left[s^2 + \left(\frac{R}{L} + \frac{b}{J} \right) s + \frac{Rb}{JL} + \frac{n_p^2 k_m^2}{JL} + \frac{n_p^2 k_m i_{d_o}}{J} \right]$$

Nous avons abouti au même résultat que précédemment. Cependant, la deuxième méthode semble être plus immédiate. De plus, il est possible de l'étendre aux cas de modèles BG non commutatifs, cf. ch. 4 et aux modèles BG non linéaires polynômiaux cf. ch.5.

Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons proposé une méthode graphique d'identification des sorties plates pour sur des modèles BGs linéaires. Cette méthode est basée principalement sur l'utilisation de la forme canonique. L'application de cette méthode est relativement simple sur des modèles BG de dimension raisonnable et ne nécessite pas d'écrire les équations d'état du système comparée aux méthodes analytiques qui en plus nécessitent l'utilisation d'un logiciel de calcul formel comme Maple, Mathematica ou Matlab.

Dans la deuxième partie, nous avons abordé le problème de la paramétrisation différentielle, et proposé deux méthodes graphiques permettant de retrouver les expressions des différentes variables d'état et de commande en fonction des sorties plates et de leurs dérivées. Ces deux méthodes graphiques simple d'application montrent bien l'avantage d'utiliser une approche BG comparée à la méthode analytique présentée au chapitre 1.

Par ailleurs, ce chapitre nous a permis de dégager des pistes pour étudier le cas des modèles BGs non linéaires. C'est au cours de ce travail que nous avons remarqué l'intérêt de la notion de non commutativité. Ceci nous a orienté vers l'utilisation de la théorie d'algèbre et de modules différentiels pour en tenir compte de la notion de non commutativité qui apparaît dans le cas des modèles variationnels et non linéaires. Dans les chapitres suivants, nous allons étendre ces résultats à certaines classes de systèmes non linéaires.

Chapitre 4

Platitudes des modèles BGs non linéaires

«Ne me dites pas que ce problème est difficile. S'il n'était pas difficile, ce ne serait pas un problème».

Ferdinand Foch

Introduction

L'identification des sorties plates d'un système non linéaire reste encore un problème ouvert. Il n'existe pas à l'heure actuelle une solution définitive et générale à ce problème. Un moyen efficace permettant d'apporter une solution satisfaisante consiste en l'utilisation de la notion de modèle tangent (variationnel), Lévine (2004b) généralement défini en utilisant la théorie de la géométrie différentielle et des jets infinis. Cette définition est difficilement exploitable sur des modèles BGs car plusieurs notions comme les distributions involutives, crochets de Lie, etc., ne sont pas accessibles graphiquement sur ce type de modèles.

Dans la première partie de ce chapitre, nous allons alors proposer une méthode similaire basée sur la théorie d'algèbre et de modules différentiels. Cette méthode se prête bien aux modèles BGs grâce à l'aspect algébrique. Dans un second lieu, nous nous intéresserons au problème de la paramétrisation différentielle. Pour atteindre cet objectif, nous allons utiliser la notion d'anneau BG présentée au chapitre 2 et la notion de bicausalité. Enfin, nous allons montrer comment intégrer nos techniques de platitude dans une autre méthode de synthèse de lois de commande par BG, proposée par Junco et al. (2003). Cette dernière, semblable à la commande en cascade, est

basée sur la décomposition en sous-systèmes élémentaires.

4.1 Identification des sorties plates d'un modèle BG non linéaire

Dans cette section, nous allons proposer une procédure de calcul des sorties plates d'un système non linéaire à partir de son BGV associé, Achir et al. (2003). Cette procédure comporte trois étapes :

1. Construction du modèle BGV du système.
2. Calcul des bases (1-formes différentielles) du module associé au modèle BGV.
3. Intégration de l'ensemble des 1-formes différentielles.

Nous nous limiterons à des modèles BGs sans élément en causalité dérivée, i.e., dont la représentation par variables d'état est de la forme (4.1), cf. chapitre 2, § 3.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (4.1)$$

où $x \in R^n, u \in R^m$ représentent respectivement, les vecteurs des variables d'état associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale et les variables d'entrée associées aux sources de commande. f est un champs de vecteur analytique de dimension appropriée.

Le module noté $\Omega_{L/K}$ ou simplement Ω associé au système (4.1) grâce aux différentielles de *Kähler*, cf. ch. 2, est décrit par l'équation (4.2), où $s = \frac{d}{dt}$.

$$sdx = A(x, u)dx + B(x, u)du \quad (4.2)$$

où $A(x, u) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $B(x, u) = \frac{\partial f}{\partial u}$ et dx, du sont les différentielles de *Kähler* de x et de u et représentent les nouveaux vecteurs d'état et de commande respectivement.

Remarque 12. *Si le module $\Omega_{L/K}$ (modèle BGV) résultant est libre (de rang m), i.e., il admet m bases indépendantes, alors le modèle BG non linéaire initial est fortement accessible, Fliess et al. (1995). Si de plus, ces bases sont intégrables, il est alors plat.*

4.1.1 Cas mono-entrée

Considérons le changement de coordonnées (4.3).

$$d\xi = P^{-1}(\eta)dx \quad \text{ou} \quad dx = P(\eta)d\xi \quad (4.3)$$

où $\eta = [x^t, u^t]^t$.

En appliquant le changement de coordonnées (4.3) au modèle (4.2), on aboutit à la représentation par variables d'état (4.4).

$$sd\xi = \bar{A}(\eta)d\xi + \bar{B}(\eta)du \quad (4.4)$$

Avec : $\bar{A}(\eta) = P^{-1}(\eta)[A(\eta) - s]P(\eta)$ et $\bar{B}(\eta) = P^{-1}(\eta)B(\eta)$

La représentation par variable d'état (4.4) devient une forme canonique si les matrices $\bar{A}(\eta)$ et $\bar{B}(\eta)$ sont choisies comme suit :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & * \\ 1 & 0 & 0 & \dots & * \\ 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}, \bar{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il reste alors à calculer la matrice de changement de coordonnées $P(\eta)$ adéquate. Soit :

$$P(\eta) = \begin{bmatrix} p_1(\eta) & p_2(\eta) & p_3(\eta) & \dots & p_n(\eta) \end{bmatrix}$$

Il suit : $P(\eta)\bar{B}(\eta) = B(\eta) \implies p_1(\eta) = B(\eta)$

et $P(\eta)\bar{A}(\eta) = [A(\eta) - s]P(\eta)$

$$\implies \begin{cases} p_2(\eta) = [A(\eta) - s]B(\eta) \\ \vdots \\ p_n(\eta) = [A(\eta) - s]^{n-1}B(\eta) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$P(\eta) = [B(\eta), (A(\eta) - s)B(\eta), \dots, (A(\eta) - s)^{n-1}B(\eta)]$$

Remarque 13. La matrice de passage $P(\eta)$ doit être de rang plein, ce qui équivaut à la liberté du module $\Omega_{L/K}$.

La base du module associé à (4.4) est alors proportionnelle à la dernière variable $d\xi_n$, i.e., $\omega = d\xi_n = (0, \dots, *)d\xi$.

En revenant aux coordonnées initiales, la base ω est combinaison linéaire des variables $dx_i, i = 1, \dots, n$, i.e.,

$$\omega = \sum_{i=1}^n C_i dx_i \quad (4.5)$$

Par ailleurs, $\omega = C(\eta)dx = C(\eta)P(\eta)d\xi$, d'où $C(\eta)P(\eta) = (0, \dots, *)$. Par conséquent, $C(\eta)$ satisfait l'ensemble d'équations algébriques (4.6).

$$\begin{cases} C(\eta)[A(\eta) - s]^{l-1}B(\eta) = 0 \\ C(\eta)[A(\eta) - s]^{n-1}B(\eta) \neq 0 \end{cases} \quad \text{pour } l = 1, \dots, n-1 \quad (4.6)$$

Les composantes du vecteur colonne $[A(\eta) - s]^{l-1}B(\eta)$ peuvent être déterminées graphiquement à partir du modèle BGV à l'aide de la formule suivante :

$$\{[A(\eta) - s]^{l-1}B(\eta)\}_i = \sum_H G_l(du, dx_i) \quad (4.7)$$

où $G_l(du, dx_i) = \prod_{k=n}^1 (\tilde{G}_k - \gamma s)$ représente le gain du chemin causal de longueur l liant la variable d'entrée du à la variable d'état dx_i .

- $\tilde{G}_k$ est la partie constante du gain du chemin causal élémentaire liant l'élément k à l'élément $k-1$ le long du chemin causal considéré.
- $\gamma = 1$ si l'élément i est parcouru plus d'une fois et $\gamma = 0$ dans le cas contraire.
- H est l'ensemble de tous les chemins causaux de longueur l liant la variable d'entrée du à la variable d'état dx_i .

Si la forme différentielle (4.5) obtenue est intégrable, le système non linéaire d'origine (4.1) est alors plat.

Rappelons qu'une forme différentielle de premier ordre est intégrable si et seulement si, l'équation (4.8) est satisfaite pour tout $i \neq j$, Cartan (1977).

$$\frac{\partial C_i(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial C_j(x)}{\partial x_i} \quad (4.8)$$

Proposition 11. *Une variable BG représentée par un élément De ou Df est une sortie plate d'un modèle BG à une seule source d'entrée, si et seulement si, la longueur du plus court chemin causal entre cette variable et la source d'entrée est égale à l'ordre du modèle.*

Preuve 4. Dans ce cas de figure, le module associé au modèle BGV, i.e., $\Omega_{L/K}$ est toujours libre. En effet la matrice $P(\eta)$ est de rang plein car elle est triangulaire supérieure si les variables d'état sont ordonnées suivant leur succession le long du chemin causal trouvé. Tous les coefficients $C_i(\eta)$ sont alors égaux à zéro pour $i = 1, \dots, n-2$ et la condition d'intégrabilité devient triviale parce que la base de $\Omega_{L/K}$ est réduite à une seule variable. ■

Exemple 19. On se propose d'appliquer l'algorithme présenté ci-dessus pour calculer la sortie plate du moteur à courant continu à excitation série vu au chapitre 2. Dans un tel moteur, le circuit d'induit est connecté en série avec le circuit inducteur. En parallèle avec la résistance d'induit R_e , il y a un circuit by-pass contenant une résistance R_d commandé par un interrupteur. L'ouverture et la fermeture de cet interrupteur permet d'inclure ou d'exclure cette résistance du circuit. La résistance R_d permet d'affaiblir le champs d'induit, qui est utilisé pour augmenter la vitesse du moteur à faibles charges.

Modèle BG du MCCESérie

Le schéma électromécanique du MCCESérie est représenté, figure 4.1. Son modèle BG correspondant est rappelé, figure 4.2, cf. chapitre 2.

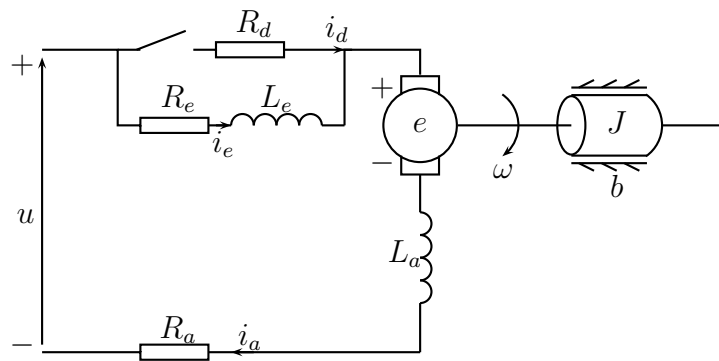


FIG. 4.1 – Schéma électromécanique du MCCESérie

Les variables décrivant ce modèle BG peuvent être décomposées en variables d'état $x = (i_e, i_a, \omega)^t$ et de commande u .

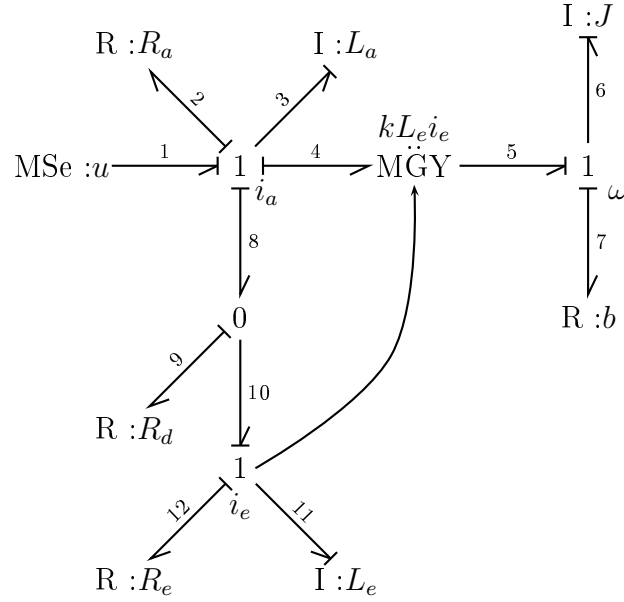


FIG. 4.2 – Modèle BG du MCCESérie

Modèle BGV du MCCESérie *La seule non linéarité du modèle apparaît sur le gain du gyrateur modulé dont le sous-modèle BGV est construit comme indiqué à la figure 4.3, cf. chapitre 2.*

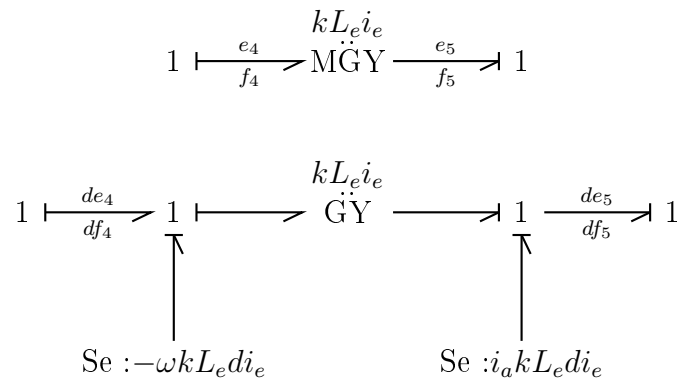


FIG. 4.3 – Modèle BGV du gyrateur modulé

Le modèle BGV global est alors obtenu par simple connection des sous-modèles BGVs de tous les composants, figure 4.4.

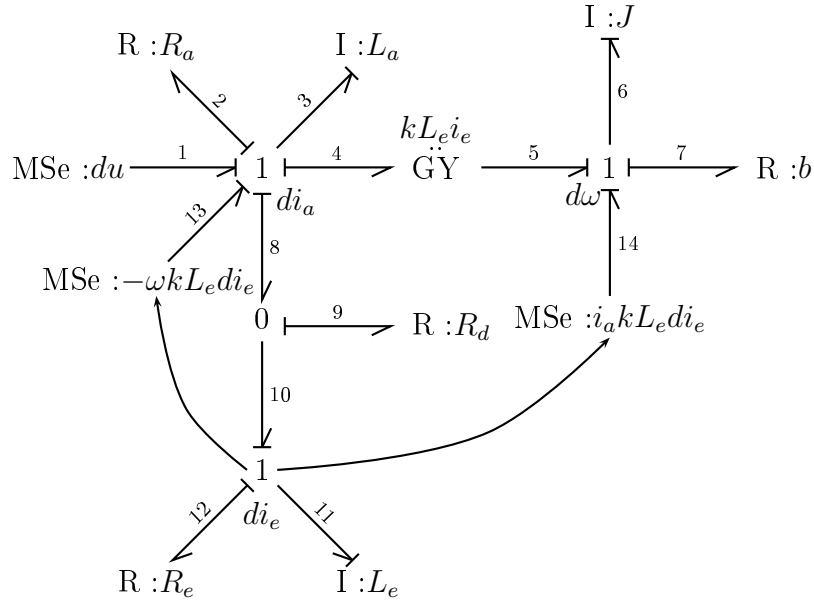


FIG. 4.4 – Modèle BGV global du MCCESérie

Les variables correspondant au modèle BGV sont $dx = (di_e, di_a, d\omega)^t$ et du .

Calcul de la sortie plate du MCCESérie

Une expression de l'équation (4.5) est :

$$w = C_1 di_e + C_2 di_a + C_3 d\omega$$

Les inconnues C_i , $i = 1, \dots, 3$ vérifient les contraintes algébriques de l'équation (4.6) dont les différents coefficients sont calculés à l'aide de la formule (4.7).

Chemins causaux de longueur un :

$$C_1 G_1(du, di_e) + C_2 G_1(du, di_a) + C_3 G_1(du, d\omega) = 0$$

Il existe un seul chemin causal de longueur 1 liant l'élément dynamique $I : L_a$ à la source de commande $MSe : du$, par conséquent $C_2 = 0$.

Chemins causaux de longueur deux :

$$C_1 G_2(du, di_e) + C_2 G_2(du, di_a) + C_3 G_2(du, d\omega) = 0$$

Il existe deux chemins causaux de longueur 2 liant les deux éléments dynamiques $I : L_e$ et $I : J$ à la source de commande $Mse : du$, de gains respectifs $G_2(du, di_e) = \frac{R_d}{L_a L_e}$ et $G_2(du, d\omega) = \frac{k L_e}{L_a J} i_e$. Il en résulte :

$$C_1 \frac{R_d}{L_e} + C_3 \frac{k L_e}{J} i_e = 0$$

Si on choisit $C_3 = J$ alors $C_1 = -\frac{k L_e^2}{R_d} i_e$.

Enfin, on obtient la 1-forme différentielle :

$$dy = J d\omega - \frac{k L_e^2}{R_d} i_e di_e$$

qui est trivialement intégrable car $\frac{\partial(J)}{\partial i_e} = \frac{\partial(\frac{k L_e^2}{R_d} i_e)}{\partial \omega} = 0$.

La sortie plate du MCCESérie est alors : $y = J\omega - \frac{k L_e^2}{2 R_d} i_e^2$ qui est une grandeur p généralisée.

Remarque 14. Dans le cas où l'interrupteur est ouvert $R_d = \infty$, la sortie plate se réduit à $y = J\omega$ qui est un résultat tout à fait logique car il subsiste un seul chemin causal liant la source de commande à la sortie plate passant par tous les éléments dynamiques en causalité intégrale.

Dans Junco et al. (2005) nous avons intégré ce résultat à la synthèse d'une loi de commande en cascade grâce à la platitude et la décomposition du modèle BG du système en sous modèles. Cette méthode de décomposition est également détaillée dans la section 4.2.3.

4.1.2 Cas multi-entrées

Similairement au cas linéaire multi-entrées, les bases du module $\Omega_{L/K}$, i.e., du modèle BGV sont proportionnelles aux dernières variables $(d\xi_{1v_1}, \dots, d\xi_{mv_m})$ de la forme canonique, où $v_j, j = 1, \dots, m$ représentent les indices de *Kronecker* ordonnés dans un ordre croissant.

Dans le système de coordonnées originelles, ces bases ont pour expressions :

$$\omega_j = \sum_{i=1}^n C_{i,j}(\eta) dx_i \quad j = 1, \dots, m \quad (4.9)$$

D'une manière analogue au cas mono-entrée, les vecteurs lignes $C_j(\eta)$ satisfont l'ensemble de contraintes (relations) algébriques (4.10).

$$\begin{cases} C_j(\eta)[A(\eta) - s]^{l-1}B(\eta) = 0 & \text{pour } l = 1, \dots, v_j - 1 \\ C_j(\eta)[A(\eta) - s]^{v_j-1}b_j(\eta) \neq 0 \\ C_j(\eta)[A(\eta) - s]^{l-1}b_k(\eta) = 0 & \text{pour tout } l = v_j, \dots, v_k \quad v_j < v_k \quad j \neq k \end{cases} \quad (4.10)$$

Les composantes des vecteurs colonnes $[A(\eta) - s]^{l-1}b_j(\eta)$ peuvent être déterminées graphiquement à partir du modèle BGV à l'aide de la formule suivante :

$$\{[A(\eta) - s]^{l-1}b_j(\eta)\}_i = \sum_H G_l(du_j, dx_i) \quad (4.11)$$

où $G_l(du_j, dx_i) = \prod_{k=n}^1 (\tilde{G}_k - \gamma s)$ représente le gain du chemin causal de longueur l liant la variable d'entrée du_j à la variable d'état dx_i . $\tilde{G}_k(t)$, γ et H sont définis comme précédemment, cf. relation (4.7).

Intégration

L'intégrabilité de l'ensemble des 1-formes différentielles, (4.9), i.e., $\{w_1, \dots, w_m\}$ signifie, qu'il existe un ensemble de coordonnées locales dy_i tel que :

$$\{w_1, \dots, w_m\} = \{dy_1, \dots, dy_m\}$$

C'est cet ensemble de coordonnées locales qui devient après intégration le vecteur de sorties plates du système non linéaire originel (4.1).

Le théorème suivant fournit la condition d'intégrabilité d'un ensemble de 1-formes différentielles.

Théorème 8. *Cartan (1977)*

Un ensemble de formes différentielles $(w_1, \dots, w_m)$, de classe $\mathcal{C}^1$ et $\text{rang}(w_1, \dots, w_m) = m$ (w_i sont indépendantes) est intégrable ou fermé si et seulement si :

$$dw_i \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_m = 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) est connue sous le nom de "condition de *Frobenius*", où $\wedge$ représente le produit extérieur. À titre d'exemple, étant donné deux 1-formes différentielles $\omega_1 = \sum_{i=1}^n P_i(x)dx_i$ et $\omega_2 = \sum_{j=1}^n Q_j(x)dx_j$, le produit extérieur de ω_1 et ω_2 a pour expression :

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (P_i Q_j - P_j Q_i) dx_i \wedge dx_j \quad (4.13)$$

Par ailleurs, la différentielle extérieure d de ω_1 par exemple est :

$$d\omega_1 = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial P_j}{\partial x_i} - \frac{\partial P_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \quad (4.14)$$

Si la condition (4.12) est satisfaite, alors il existe une matrice unimodulaire $U(x)$ telle que :

$$d U(x) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_m \end{pmatrix} = 0$$

La matrice unimodulaire $U(x)$ joue le rôle de facteur intégrant.

Exemple 20. *Le système considéré emprunté à Bodson and Chiasson (1998) consiste en un moteur synchrone saillant à aimant permanent (MSSAP).*

Modèle BG du MSSAP

Le schéma électromécanique équivalent de la figure 4.5 correspond aux équations de tension (4.15) et à la dynamique mécanique du rotor, équation (4.16). Ce modèle représente le MSSAP vu à partir du repère d - q (après la transformation de Park).

$$\begin{cases} v_d = R i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - n_p \omega L_q i_q \\ v_q = R i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + n_p \omega L_d i_d + n_p \omega k_m \end{cases} \quad (4.15)$$

$$J \dot{\omega} = n_p [k_m + (L_d - L_q) i_d] i_q - b \omega - \tau_L \quad (4.16)$$

Le modèle BG du MSSAP, figure 4.6 découle du schéma électromécanique équivalent de la figure 4.5. Les gyrateurs modulés évaluent les forces électromagnétiques dues à la vitesse angulaire du rotor et le moment électromagnétique de

torsion engendré par les courants i_d et i_q respectivement.

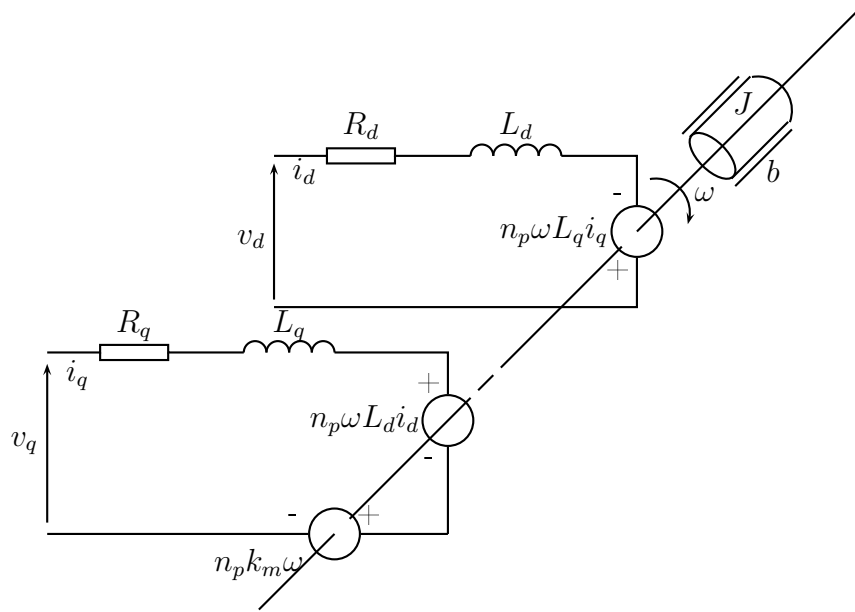


FIG. 4.5 – Schéma électromécanique du MSSAP dans le repère (d, q)

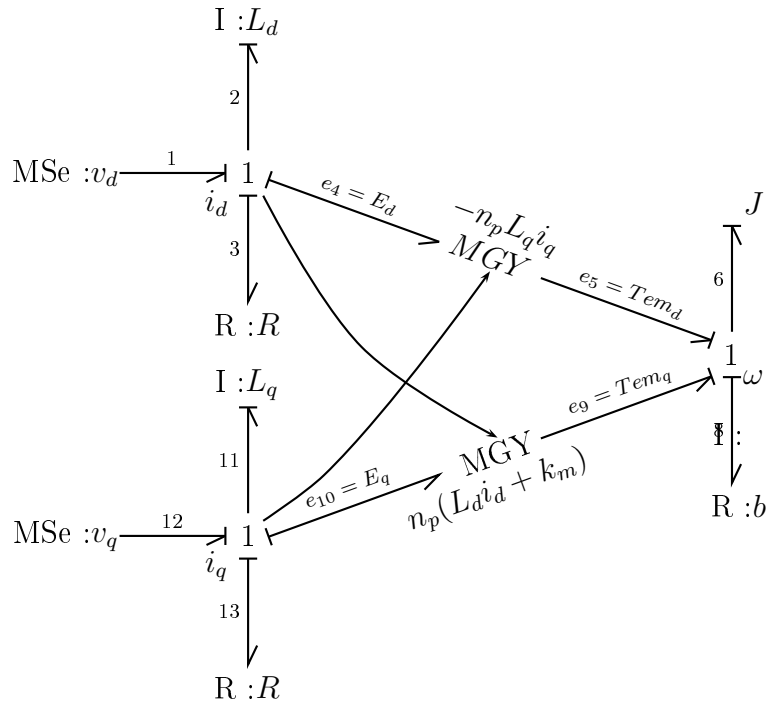


FIG. 4.6 – Modèle BG du MSSAP

Modèle BGV du MSSAP

Les non linéarités apparaissent sur les gains des gyrateurs modulés. Les sous-modèles BGVs sont construits comme indiqué au chapitre 2 conduisent au modèle VBG de la figure 4.7.

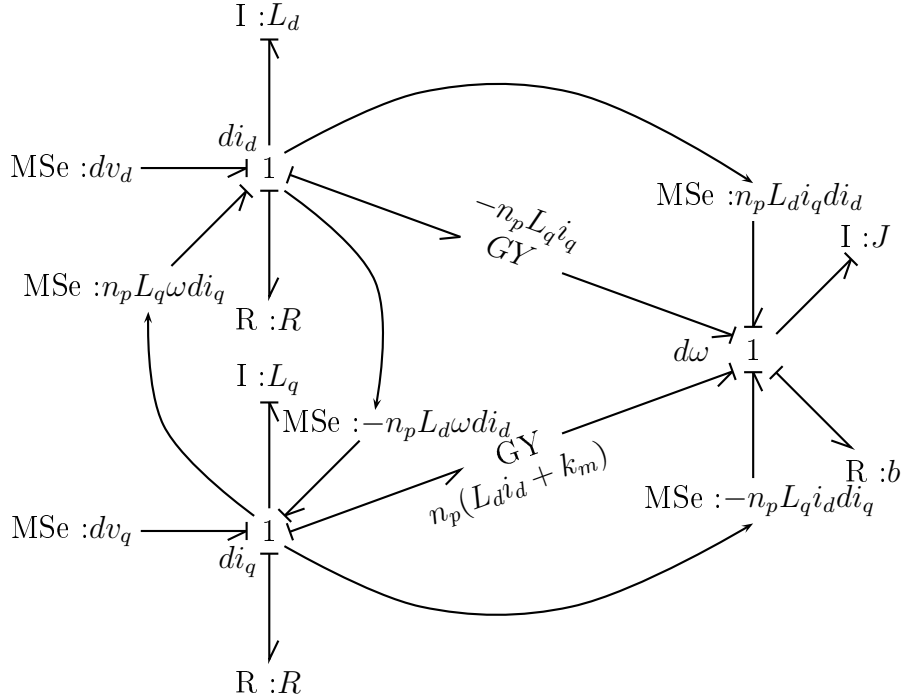


FIG. 4.7 – Modèle BGV du MSSAP

Les variables associées au modèle BGV sont décomposées en variables d'état $dx = (di_q, di_d, d\omega)^t$ et de commande $du = (dv_q, dv_d)^t$.

Sorties plates du MSSAP

Les bases du module associé au modèle BGV prennent la forme (4.9), et vérifient les conditions de l'équation (4.10). Il existe deux chemins causaux : $MSe : dv_q \rightarrow I : L_q \rightarrow I : J \rightarrow d\omega$ et $MSe : dv_d \rightarrow I : L_d \rightarrow di_d$, de longueurs respectives $\nu_1 = 2$ et $\nu_2 = 1$. Les différents coefficients de l'équation (4.10) sont calculés comme suit :

Première base

A partir de l'équation (4.9), la première base s'écrit :

$$w_1 = C_{11} di_q + C_{12} di_d + C_{13} d\omega$$

En outre, elle vérifie les conditions de l'équation (4.10).

Chemins causaux de longueur un :

$$\begin{cases} C_{11}G_1(dv_q, di_q) + C_{12}G_1(dv_q, di_d) + C_{13}G_1(dv_q, d\omega) = 0 \\ C_{11}G_1(dv_d, di_q) + C_{12}G_1(dv_d, di_d) + C_{13}G_1(dv_d, d\omega) = 0 \end{cases}$$

Puisqu'il n'existe aucun chemin causal de longueur 1 liant la source d'entrée MSe : dv_q aux éléments dynamiques $I : d\omega$ et $I : di_d$, alors les gains $G_1(dv_q, di_d)$ et $G_1(dv_q, d\omega)$ sont égaux à zéro. Ce qui implique $C_{11} = 0$. Pour des raisons analogues, $G_1(dv_d, di_q)$ et $G_1(dv_d, d\omega)$ sont nuls. Par conséquent $C_{12} = 0$.

Chemins causaux de longueur deux :

$$C_{11}G_2(dv_q, di_q) + C_{12}G_2(dv_q, di_d) + C_{13}G_2(dv_q, d\omega) \neq 0$$

Puisque C_{11} et C_{12} sont égaux à zéro, le seul gain nécessaire est $G_2(dv_q, d\omega)$. Il est égal à la somme des gains des deux chemins causaux de longueur 2 liant la source d'entrée MSe : dv_q à l'élément dynamique $I : d\omega$. En utilisant la formule (4.7), $G_2(dv_q, d\omega) = \frac{1}{j}n_p(k_m + L_d i_d) \frac{1}{L_q} - \frac{1}{j}n_p L_q i_d \frac{1}{L_q} = \frac{1}{j}n_p[k_m + (L_d - L_q)i_d] \frac{1}{L_q} \neq 0$. Si C_{13} est choisie égal à 1, la première base est alors :

$$\omega_1 = d\omega$$

Deuxième base

La deuxième base s'écrit :

$$w_2 = C_{21}di_q + C_{22}di_d + C_{23}d\omega$$

Les conditions de l'équation (4.10) s'écrivent :

Chemins causaux de longueur un :

$$\begin{cases} C_{21}G_1(dv_d, di_q) + C_{22}G_1(dv_d, di_d) + C_{23}G_1(dv_d, d\omega) \neq 0 \\ C_{21}G_1(dv_q, di_q) + C_{22}G_1(dv_q, di_d) + C_{23}G_1(dv_q, d\omega) = 0 \end{cases}$$

$G_1(dv_d, di_q) = G_1(dv_d, d\omega) = 0$, parce qu'il n'existe aucun chemin causal de longueur 1 liant la source d'entrée MSe : dv_d aux éléments dynamiques $I : di_q$ et $I : d\omega$ respectivement.

$G_1(dv_d, di_d) = \frac{1}{L_d}$, car il existe un chemin causal de longueur 1 liant la source d'entrée $MSe : dv_d$ à l'élément dynamique $I : L_d$ de gain $\frac{1}{L_d}$. Par conséquent $C_{22} \neq 0$.

Concernant la deuxième condition, les différents gains sont $G_1(dv_q, di_d) = G_1(dv_q, d\omega) = 0$ et $G_1(dv_q, di_q) = \frac{1}{L_q}$. Par conséquent $C_{21} = 0$.

Chemins causaux de longueur deux :

$$C_{21}G_2(dv_q, di_q) + C_{22}G_2(dv_q, di_d) + C_{23}G_2(dv_q, d\omega) = 0$$

Le premier gain nécessaire est $G_2(dv_q, di_d) = \frac{1}{L_d}n_pL_q\omega\frac{1}{L_q} = \frac{1}{L_d}n_p\omega$. Le deuxième gain a été déjà calculé ; $G_2(dv_q, d\omega) = \frac{1}{J}n_p[k_m + (L_d - L_q)i_d]\frac{1}{L_q}$. Par conséquent C_{22} et C_{23} peuvent être choisis comme suit : $C_{22} = \frac{L_d}{L_q}[k_m + (L_d - L_q)i_d]$, $C_{23} = -JL_q\omega$. Ainsi, la deuxième base est :

$$\omega_2 = \frac{L_d}{L_q}[k_m + (L_d - L_q)i_d]di_d - JL_q\omega d\omega$$

Intégration

La condition d'intégrabilité (4.12) s'écrit :

$$\begin{cases} d\omega_1 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \\ d\omega_2 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0 \end{cases}$$

L'équation (4.14) permet de conclure que $d\omega_1 = 0$ et $d\omega_2 = 0$, ce qui implique que le système ci-dessus est trivialement satisfait. Par conséquent, l'ensemble des 1-formes différentielles (ω_1, ω_2) est intégrable. Il reste alors à trouver une matrice unimodulaire $U(x)$ telle que :

$$d U(x) \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = 0$$

Une solution est obtenue pour :

$$U(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{JL_q^2\omega}{L_d[k_m + (L_d - L_q)i_d]} & \frac{L_q}{L_d[k_m + (L_d - L_q)i_d]} \end{pmatrix}$$

Finalement, les sorties plates du MSSAP sont :

$$\begin{cases} y_1 = \omega \\ y_2 = i_d \end{cases} \quad (4.17)$$

Remarque 15.

Il existe un deuxième choix de chemins causaux disjoints $MSe : dv_q \rightarrow I : L_q \rightarrow di_q$ et $MSe : dv_d \rightarrow I : L_d \rightarrow I : J \rightarrow d\omega$, de longueurs respectives $\nu_1 = 1$ et $\nu_2 = 2$ qui peut conduire à une autre matrice de passage et à une autre paire de sorties plates (i_q, ω) .

4.1.3 Cas où $m-1$ sorties plates sont connues

Dans cette section, nous allons présenter une version BG de la méthode dû à E. Fossas and Palau (1998) rappelée dans le premier chapitre qui consiste à retrouver la $m^{\text{ème}}$ sortie plate d'un système connaissant les $m - 1$ autres sorties plates, Achir and Sueur (2005a). Cette méthode est composée de 4 étapes :

1. Construction de modèle BGV du système à partir de son modèle BG non linéaire.
2. Choix des $m - 1$ bases triviales (1-formes différentielles) du module Ω associés au modèle BGV et effectuer un quotient de module.
3. Calcul de la base du module quotient Ω_m résultant.
4. Intégration de l'ensemble des 1-formes différentielles.

Nous allons considérer des modèles BGs à m sources d'entrée, on suppose que $m - 1$ sorties plates $(y_1, \dots, y_{m-1})$ ont été déjà identifiées.

Pour pouvoir identifier la dernière sortie plate, nous allons utiliser construire le module quotient Ω_m défini par :

$$\Omega_m = \frac{\Omega}{\langle y_1, \dots, y_{m-1} \rangle}$$

Le modèle BGV correspondant au module Ω_m possède une seule source d'entrée et il peut être obtenu graphiquement à partir du ce modèle BGV en imposant les variables $y_1, \dots, y_{m-1}$ et leurs dérivées égales à zéro.

Il est alors possible d'appliquer la procédure proposée au § 4.1.1 pour identifier la $m^{\text{ème}}$ base, $\bar{\omega}_m$.

Les bases de Ω sont alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = dy_1 \\ \omega_2 = dy_2 \\ \vdots \\ \omega_m = \bar{\omega}_m + \sum_{i=1}^{m-1} p_i(s) dy_i \end{array} \right. \quad (4.18)$$

Les polynômes $p_i(s)$, $i = 1, \dots, m - 1$ sont choisis de telle sorte que le système (4.18) soit intégrable, cf. théorème 8.

Les avantages de notre approche BG sont :

- elle permet de construire facilement le modèle BGV du système,
- elle aide au choix des bases triviales du module BGV et la construction du module quotient,
- elle simplifie l'algorithme de calcul de la base du module quotient résultant.

Exemple 21. *On considère le convertisseur de tension triphasé à commande MLI (modulation par largeur d'impulsion) de la figure 4.8 emprunté de Tzann-Shin (2003). Ces derniers sont largement utilisés dans plusieurs applications industrielles. Ceci est dû à leurs hautes performances et caractéristiques intéressantes telles que leur capacité à délivrer des courants sinusoïdaux avec un facteur de puissance unitaire, simplicité dans le circuit de commande et la capacité d'échange de puissance bidirectionnelle. Par conséquent, ils remplacent de plus en plus les ponts de diodes et thyristors conventionnels dont le facteur de puissance augmente d'une manière inversement proportionnelle à l'angle d'amorçage.*

Modèle BG du convertisseur de tension triphasé (CTT)

Le circuit de puissance du convertisseur de tension considéré est représenté, figure 4.8. C représente la capacité du filtre de la partie continue, R et L représentent respectivement la résistance et l'inductance de l'inducteur. Les tensions et les courants d'entrée sont représentés par les notations e_k et i_k , $k = a, b, c$ respectivement. On suppose qu'une charge résistive R_L est branchée aux bornes de la sortie. Les fonctions des interrupteurs bipolaires p_a, p_b et p_c définies par l'équation (4.19) représentent les actions des six interrupteurs.

$$p_k = \begin{cases} 1 & S_k \text{ fermé} \\ -1 & \bar{S}_k \text{ fermé} \end{cases} \quad (4.19)$$

On suppose que les interrupteurs sont idéaux, i.e., leurs résistances de conduction sont négligeables.

En considérant l'hypothèse ci-dessus, chaque paire d'interrupteurs peut être modélisée par un transformateur de gain $\frac{1}{2}p_k$, $k = a, b, c$. Le modèle BG de la cellule de commutation est représenté, figure 4.9. En effet, il est facile de s'apercevoir à partir du circuit de la figure 4.8 que $i_o = \sum_k \frac{1}{2}p_k i_k$, $k = a, b, c$.

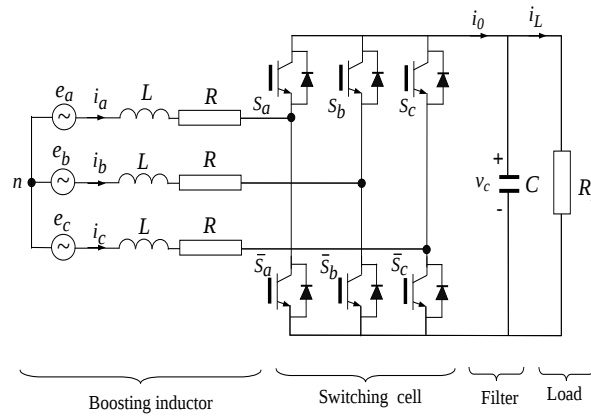


FIG. 4.8 – Circuit de puissance du convertisseur de tension ac-dc triphasé

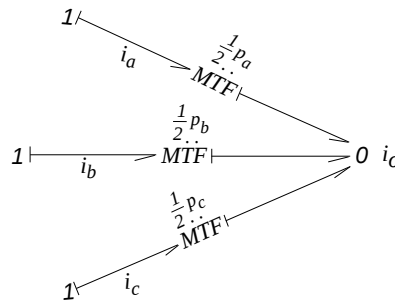


FIG. 4.9 – Modèle BG de la cellule de commutation

Le modèle BG global du convertisseur est obtenu par simple connexion des sous-modèles BG correspondant aux sous-systèmes de la figure 4.8, incluant l'inducteur, la cellule de commutation, le filtre dc et la charge. Le modèle BG résultant est représenté, figure 4.10.

Le modèle BG de la figure 4.10 est un modèle hybride et à temps variant sous l'effet de l'alimentation triphasée. Nous allons alors utiliser la notion de modèle moyen et la transformation de Park pour obtenir un modèle continu et à temps invariant.

Le modèle moyen garde la même structure que le modèle initial de la figure 4.10 dans lequel les variables d'état sont remplacées par leurs valeurs moyennes et les fonctions discrètes des interrupteurs $p_k, k = a, b, c$ sont remplacées par les fonctions des rapports cycliques à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, Tzann-Shin (2004).

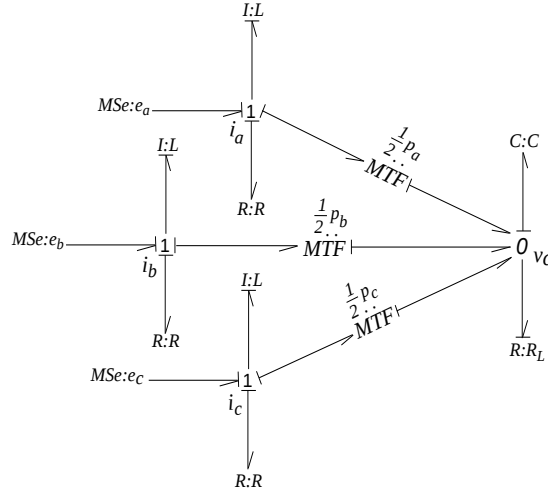


FIG. 4.10 – Modèle BG du CTT - modèle moyen

Pour éviter l'introduction de notations supplémentaires, les mêmes notations sont utilisées pour les variables moyennes. Par conséquent, le modèle BG de la figure 4.10 représente aussi le modèle BG moyen du CTT dans le référentiel a - b - c .

Modèle BG moyen du CTT dans le référentiel d - q

Sous une alimentation triphasée équilibrée donnée par l'équation (4.20), le modèle BG dans le référentiel d - q est obtenu par l'application de la transformation de Park sur le modèle BG de la figure 4.10.

$$\begin{cases} e_a = E_m \cos \omega t \\ e_b = E_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ e_c = E_m \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{cases} \quad (4.20)$$

La matrice de transformation est donnée par :

$$T = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \omega t & \cos(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \\ \sin \omega t & \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & \sin(\omega t - \frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix}$$

Les variables transformées sont définies comme suit :

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} = T \bar{e}_s, \quad \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = T \bar{i}_s, \quad \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} = T \bar{p}_s$$

avec $\bar{e}_s = (e_a \ e_b \ e_c)^t$, $\bar{i}_s = (i_a \ i_b \ i_c)^t$ et $\bar{p}_s = (p_a \ p_b \ p_c)^t$.

L'application de la transformation de Park aux équations de tension satisfaites par les jonctions 1 du modèle BG de la figure 4.10 donne :

$$\begin{bmatrix} e_d \\ e_q \end{bmatrix} = T\bar{e}_s = T(L\frac{d}{dt} + R)\bar{i}_s + T\frac{1}{2}v_c\bar{p}_s$$

En utilisant la règle de dérivation de Leibnitz, il suit :

$$TL\frac{d}{dt}\bar{i}_s = L\left[\frac{d}{dt} - \omega\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right]T\bar{i}_s \quad (4.21)$$

Par conséquent, les équations de tension dans le repère d-q ont pour expression :

$$\begin{bmatrix} E_m \\ 0 \end{bmatrix} = (L\frac{d}{dt} + R)\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} + \frac{v_c}{2}\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \end{bmatrix} - L\omega\begin{bmatrix} i_q \\ -i_d \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

L'équation de courant satisfaite par la jonction 0 est :

$$C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R_L} = \frac{1}{2}\bar{p}_s^t\bar{i}_s \quad (4.23)$$

Puisque $\bar{p}_s^t T^t T \bar{i}_s = \frac{2}{3}p_s^t \bar{i}_s$, l'équation (4.23) peut être réécrite comme suit :

$$C\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R_L} = \frac{3}{4}\bar{p}_s^t T^t T \bar{i}_s$$

En notant $C' = \frac{2}{3}C$ et $R' = \frac{3}{2}R_L$, l'expression finale de l'équation de courant est :

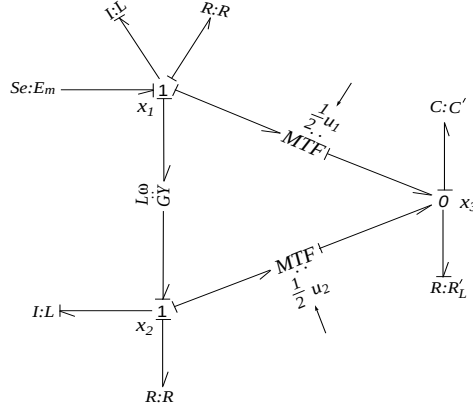
$$C'\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R'_L} = \frac{1}{2}(u_d i_d + u_q i_q) \quad (4.24)$$

Le modèle BG du convertisseur de tension triphasé dans le référentiel d-q représenté à la figure 4.11 découle des équations (4.22) et (4.24).

Les variables du modèle BG sont décomposées en vecteur de commande $u = (u_d, u_q)^t = (u_1, u_2)^t$ et vecteur d'état $x = (i_d, i_q, v_c)^t = (x_1, x_2, x_3)^t$

Identification des sorties plates du CTT

La procédure d'identification des sorties plates est effectuée en 4 étapes : construction du modèle BGV, obtention d'une base triviale du module associé au modèle BGV, application d'un quotient de modules pour se ramener au cas mono-entrée, identification de la base du module quotient résultant, puis pour terminer, détermination des sorties plates du modèle BG non linéaire originel par intégration.

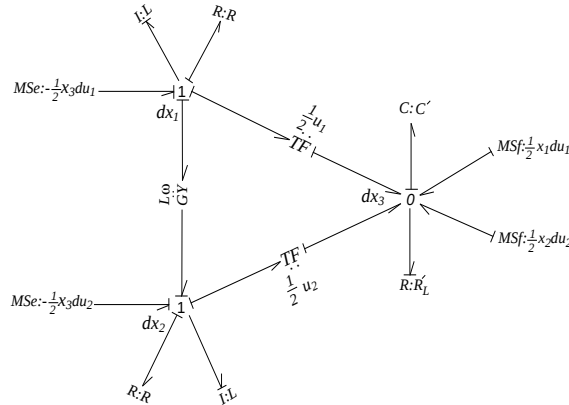
FIG. 4.11 – Modèle BG du convertisseur de tension triphasé dans le référentiel $d-q$

1. *Construction du modèle BGV :*

Le modèle BGV est obtenu à l'aide des différentielles de Kähler à partir du modèle non linéaire de la figure 4.11. Grâce à la linéarité de l'opérateur de Kähler, le modèle BGV est construit par simple connection des sous-modèles BGVs des composants. Les sous-modèles BGVs des composants linéaires sont obtenus d'une manière triviale, la seule difficulté réside ici dans les transformateurs modulés dont leurs équivalents variationnels ont été proposés au chapitre 2.

Ces transformations conduisent au modèle BGV du convertisseur triphasé présenté figure 4.12.

Les variables correspondantes sont $du = (du_1, du_2)^t$ et $dx = (dx_1, dx_2, dx_3)^t$.

FIG. 4.12 – Modèle BGV dans le repère $d-q$

2. Modèle BGV quotient

Le modèle BGV de la figure 4.12 est caractérisé par le module Ω et un choix naturel comme première base est la variation infinitésimale de la tension dv_c aux bornes de la capacité C' , i.e.,

$$dy_1 = dx_3 \quad (4.25)$$

Pour obtenir la deuxième base on effectue un quotient de modules défini par :

$$\Omega_2 = \Omega / \langle dy_1 \rangle \quad (4.26)$$

Le modèle BGV associé au module quotient est obtenu en imposant $dx_3 = d\dot{x}_3 = 0$. Ceci signifie que le flux et l'effort dans l'élément $C : C'$ et $R : R_L$ sont égaux à zéro. En les supprimant, la jonction 0 fournit la relation algébrique (4.27) liant du_1 à du_2 .

$$\frac{1}{2}u_1 dx_1 + \frac{1}{2}u_2 dx_2 + \frac{1}{2}x_1 du_1 + \frac{1}{2}x_2 du_2 = 0 \quad (4.27)$$

En résolvant cette équation par rapport à du_2 et en remplaçant du_2 dans le modèle BGV de la figure 4.12, on construit le modèle BGV de la figure 4.13.

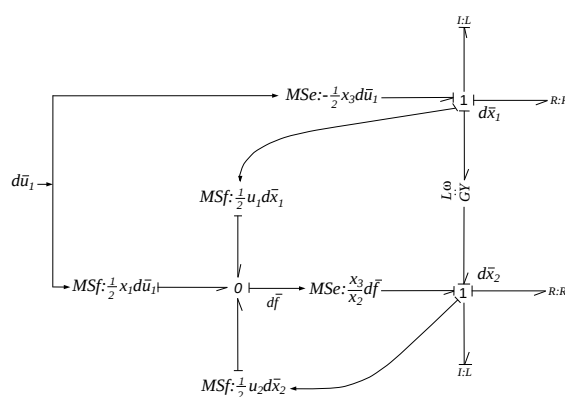


FIG. 4.13 – Modèle BGV résultant du quotient

3. Identification des sorties plates

Le modèle BGV de la figure 4.13 possède une seule entrée. Il est alors possible d'appliquer la procédure proposée au § 4.2.1 pour identifier la seconde

base ayant pour expression :

$$d\bar{y}_2 = C_1 d\bar{x}_1 + C_2 d\bar{x}_2$$

Par ailleurs, elle vérifie la condition :

$$C_1 G_1(d\bar{u}_1, d\bar{x}_1) + C_2 G_1(d\bar{u}_1, d\bar{x}_2) = 0$$

avec $G_1(d\bar{u}_1, d\bar{x}_1) = -\frac{x_3}{2L}$ et $G_1(d\bar{u}_1, d\bar{x}_2) = -\frac{1}{2L} \frac{x_1 x_3}{x_2}$ les gains des chemins causaux de longueur 1, liant la source d'entrée $d\bar{u}_1$ aux variables d'état $d\bar{x}_1$ et $d\bar{x}_2$ respectivement. Si $C_1 = x_1$ alors $C_2 = x_2$. Par conséquent, la deuxième base du module Ω_m est donnée par l'équation (4.28).

$$d\bar{y}_2 = x_1 d\bar{x}_1 + x_2 d\bar{x}_2 \quad (4.28)$$

Les bases de Ω sont alors :

$$\begin{cases} dy_1 = dx_3 \\ d\bar{y}_2 = x_1 d\bar{x}_1 + x_2 d\bar{x}_2 + p(s) dy_1 \end{cases} \quad (4.29)$$

4. Intégration :

Il est clair que l'intégrabilité de l'équation (4.29) implique que $p(s) = 0$.

Les sorties plates du modèle originel sont alors :

$$\begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (4.30)$$

Ces sorties plates ont bien une signification physique, la première est la tension aux bornes de la capacité C' et la deuxième représente l'énergie électromagnétique normalisée emmagasinée dans le circuit inducteur.

Dans cet exemple nous avons voulu montrer toutes les étapes de calcul des sorties plates d'un système physique par l'approche BG proposée. Outre la facilité d'obtention des différents modèles BG, BGV et quotient, cette méthode aide au choix des sorties plates triviales qui apparaissent plus clairement sur le modèle BG. Enfin, cette méthode ne nécessite pas l'utilisation d'un logiciel de calcul formel qui souvent ne déposent pas de bibliothèque nécessaires pour effectuer ce type de calculs. Dans Achir et al. (2005b) nous avons utilisé cette méthode pour retrouver les sorties plates du moteur asynchrone commandé par les courants statoriques. Ces dernières sont exploitées pour élaborer une commande par platitude assurant un suivi de trajectoire de vitesse en maintenant constante l'amplitude du flux rotorique.

4.2 Paramétrisation différentielle

Après avoir identifié les sorties plates, la deuxième étape consiste à retrouver les expressions algébriques des différentes variables du système (états, entrées) en fonction des sorties plates et de leurs dérivées. À part la méthode présentée au chapitre 1, § 3.1 présentée dans la référence Lévine (2004b), il n'existe pas dans la littérature de méthode systématique pour résoudre ce problème. Souvent, la démarche suivie consiste à dériver les sorties plates un certain nombre de fois et combiner les expressions obtenues afin d'aboutir à la paramétrisation recherchée. Nous allons ici proposer une méthode systématique pour résoudre ce problème directement sur le modèle BGV.

Nous considérons des modèles BG décrit par la représentation par variables d'état (4.31).

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (4.31)$$

avec : $x \in R^n$, $u \in R^m$ et $y \in R^m$. f est un champ de vecteur analytique de dimension appropriée et h est une fonction analytique.

Le modèle tangent Ω associé au système (4.31) est décrit par l'équation (4.32).

$$sdx = A(\eta)dx + B(\eta)du \quad (4.32)$$

Souvent, les bases de ce module Ω ont pour expression :

$$dy = C(\eta)dx + D(\eta)du \quad (4.33)$$

D'une manière plus compacte, les équations (4.32) et (4.33) s'écrivent :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 - A(\eta)s^{-1} & -B(\eta) \\ C(\eta) & D(\eta) \end{bmatrix}}_{P(s^{-1})} \begin{bmatrix} sdx \\ du \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ dy \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Comme le système (4.31) est plat, la solution de (4.34) est de la forme :

$$\begin{cases} sdx = \Psi(s)dy \\ du = \Phi(s)dy \end{cases} \quad (4.35)$$

où $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ sont des matrices de dimensions appropriées à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty[s]$.

Il suffit alors d'intégrer le système de 1-formes différentielles (4.35) pour obtenir la paramétrisation différentielle du système non linéaire originel.

Dans ce qui suit, nous allons proposer deux méthodes de résolution du système d'équations (4.34) directement sur le modèle BG. La première utilise le modèle BGV direct et la deuxième le modèle BGV inverse.

4.2.1 Méthode indirecte

La résolution du système d'équations algébriques (4.34) peut être calculée à partir du modèle BGV du système à l'aide de la règle de Riegler présentée au chapitre 2. Cette méthode est qualifiée d'indirecte car il faut appliquer la règle sur le modèle BGV direct pour calculer les différents coefficients de la matrice $P(s^{-1})$ puis inverser cette dernière par calcul formel pour aboutir aux relations (4.35) recherchées, Achir et al. (2004).

Dans l'exemple qui suit, nous allons montrer d'une manière détaillée comment appliquer cette méthode sur un modèle BGV.

Exemple 22. Soit le circuit équivalent du MCCESéparée représenté, figure 4.14.

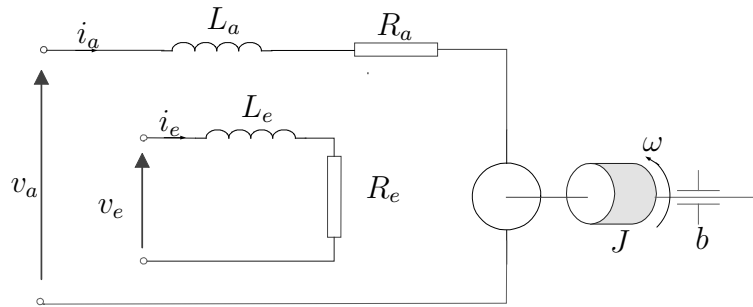


FIG. 4.14 – Schéma électromécanique équivalent du MCCESéparée

Le modèle BG du MCCESéparée est rappelé, figure 4.15. Ce modèle est non linéaire à cause de la présence du gyrateur modulé.

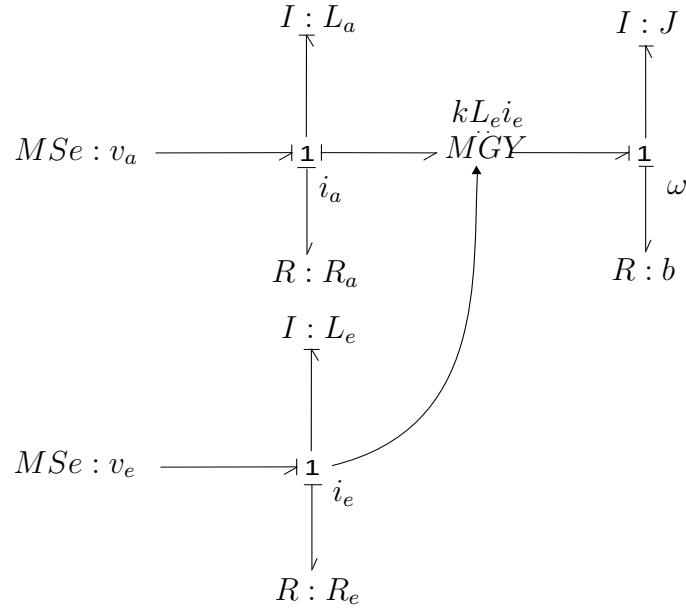


FIG. 4.15 – Modèle BG du MCCESéparée

La figure 4.16 représente son modèle BGV dont la construction est détaillée dans le chapitre 2.

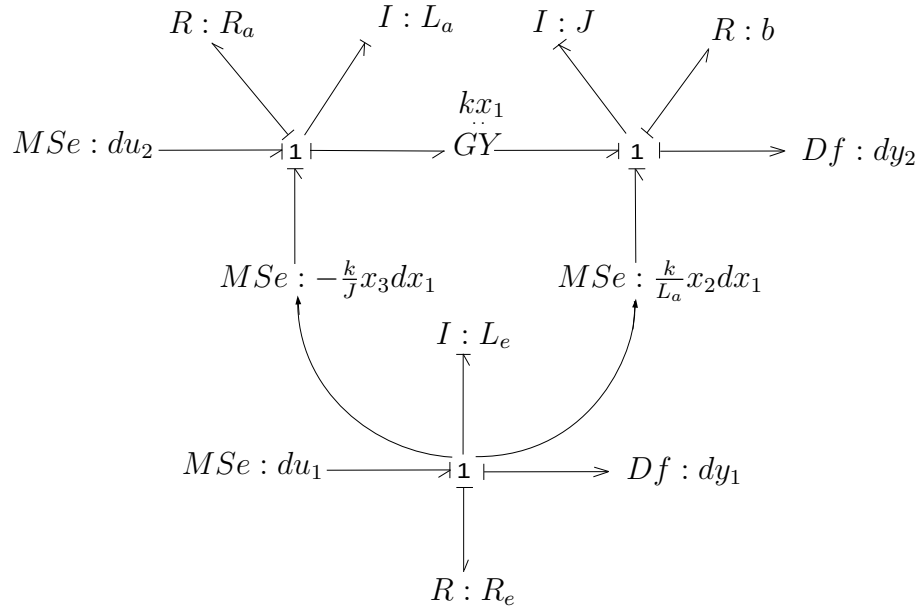


FIG. 4.16 – Modèle BGV du MCCESéparée

On distingue les variables d'entrée $du = (dv_e, dv_a)^t = (du_1, du_2)^t$, les variables d'état $dx = (dp_{L_e}, dp_{L_a}, dp_J)^t = (dx_1, dx_2, dx_3)^t$ et enfin les variables de sortie $dy = (di_e, d\omega)^t = (dy_1, dy_2)^t$.

Les relations entrées-sorties peuvent être écrites dans une forme plus compacte, équation (4.36).

$$\begin{bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

En utilisant la règle de Riegle et on notant par S_i , $i = 1, \dots, 3$, les gains propres des éléments $I : L_e$, $I : L_a$ et $I : J$, les différents coefficients T_{ij} , $i, j = 1, 2$ sont calculés comme suit :

– T_{11} ; chemin $Mse : du_1 \rightarrow I : L_e \rightarrow Df : dy_1$

$$dy_1 = \frac{1}{L_e} s^{-1} [1 - S_1]^{-1} du_1 = \frac{1}{L_e} s^{-1} [1 + \frac{Re}{L_e} s^{-1}]^{-1} du_1 \implies T_{11} = \frac{1}{L_e} s^{-1} [1 + \frac{Re}{L_e} s^{-1}]^{-1}$$

– T_{12} est égal à 0, car il n'existe pas de chemin causal liant du_2 à dy_1 .

– T_{21} ; deux chemins :

$$du_1 \rightarrow I : L_e \rightarrow MSe : -\frac{k}{J} x_3 dx_1 \rightarrow I : L_a \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : J \rightarrow Df : dy_2 \text{ et } du_1 \rightarrow MSe : -\frac{k}{L_a} x_2 dx_1 \rightarrow I : J \rightarrow Df : dy_2$$

$$dy_2 = \frac{1}{J} s^{-1} [1 - S_3]^{-1} (kx_1 \frac{1}{L_a} s^{-1}) [1 - S_2]^{-1} (-kx_3 \frac{1}{J} s^{-1}) [1 - S_1]^{-1} du_1 + \frac{1}{J} s^{-1} [1 - S_3]^{-1} (kx_2 \frac{1}{L_a} s^{-1}) [1 - S_1]^{-1} du_1$$

– T_{22} ; chemin $du_2 \rightarrow I : L_a \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : J \rightarrow Df : dy_2$

$$dy_2 = \frac{1}{J} s^{-1} [1 - S_3]^{-1} (kx_1 \frac{1}{L_a} s^{-1}) [1 - S_2]^{-1} du_2$$

Pour paramétrer les entrées en fonction des sorties et de leurs dérivées, on peut inverser ces relations à l'aide de la formule (4.37).

$$\begin{bmatrix} T_{11} & 0 \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} T_{11}^{-1} & 0 \\ -T_{22}^{-1} T_{21} T_{11}^{-1} & T_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Les différents gains propres des éléments dynamiques sont :

$$\begin{cases} S_1 = -\frac{R_e}{L_e} s^{-1} \\ S_2 = -\frac{R_a}{L_a} s^{-1} \\ S_3 = -\frac{b}{J} s^{-1} + (\frac{k}{L_a} x_1 s^{-1}) [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}]^{-1} (-\frac{k}{J} x_1 s^{-1}) \end{cases}$$

Après un certain nombre d'opérations de calcul, on obtient :

$$\begin{aligned} T_{11}^{-1} &= (1 + \frac{R_e}{L_e} s^{-1}) s = (s + \frac{R_e}{L_e}) \\ T_{22}^{-1} &= [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}] (\frac{k}{L_a} x_1 s^{-1})^{-1} [s + \frac{b}{J}] + \frac{k}{J} x_1 \\ T_{22}^{-1} T_{21} T_{11} &= -\frac{k}{J} x_3 + [1 + \frac{R_a}{L_a} s^{-1}] (\frac{k}{L_a} x_1 s^{-1})^{-1} (\frac{k}{L_a} x_2) \end{aligned}$$

par conséquent :

$$\begin{cases} du_1 = (s + \frac{R_e}{L_e})dy_1 \\ du_1 = (1 + \frac{R_e}{L_e}s^{-1})[(\frac{k}{L_a}x_1s^{-1})^{-1}(s + \frac{b}{J})dy_2 - (\frac{k}{J}x_1s^{-1})^{-1}(\frac{k}{L_a}x_2)dy_1] \\ \quad \quad \quad + \frac{k}{J}x_1dy_2 + \frac{k}{J}x_3dy_1 \end{cases} \quad (4.38)$$

L'application de cette méthode sur le modèle BGV est moins immédiate par rapport aux digraphes mais la difficulté principale réside dans l'étape d'inversion i.e., équation (4.37). Dans ce qui suit, nous allons proposer une solution alternative à ce problème.

4.2.2 Méthode directe

Dans cette section, nous allons étendre le concept de bicausalité, Gawthrop (1995) aux modèles BGV (anneaux BGs non commutatifs). On peut alors appliquer la règle de Riegle directement sur le modèle BGV inverse pour obtenir la paramétrisation recherchée sans avoir recours à l'inversion formelle, Achir and Sueur (2005b).

Lors de l'inversion, les éléments dynamiques en causalité intégrale reçoivent en général une causalité dérivée contrairement aux autres composants TF et GY qui quand à eux reçoivent la bicausalité. Il est alors nécessaire de développer un sous-modèle BGV inverse pour chaque composant.

Pour commencer, considérons un élément I non linéaire dont la loi constitutive est décrite par l'équation (4.39).

$$\begin{array}{c} \Uparrow \\ f_I \Big|_{e_I} \quad I \end{array} \quad f = \psi(p) = \psi(s^{-1}e) \quad (4.39)$$

En multipliant des deux cotés par l'opérateur de *Kähler*, on obtient :

$$df = \frac{\partial \psi}{\partial p} dp = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right) s^{-1} de \quad (4.40)$$

L'application de la causalité dérivée revient à inverser la relation (4.40). En utilisant la règle de multiplication, il suit :

$$de = \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^{-1} sdf + \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^{-1} \right] df \quad (4.41)$$

On obtient alors un élément I augmenté d'un élément R en causalité résistance, figure 4.17.

$$\begin{array}{ccc}
 I : \left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^{-1} & \xleftarrow{\quad} & 1 \\
 & \uparrow & \\
 & & R : \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial p} \right)^{-1} \right]
 \end{array}$$

FIG. 4.17 – Sous-modèle BGV inverse d'un élément I

Considérons à présent le gyrateur variationnel de la figure 4.18.

$$\begin{array}{c}
 k(x) \\
 \begin{array}{ccc}
 \vdash \frac{de_1}{df_1} \rightharpoonup & \ddot{G}Y & \dashv \frac{de_2}{df_2} \vdash
 \end{array}
 \end{array}$$

FIG. 4.18 – Sous-modèle BGV d'un gyrateur

Ses relations constitutives s'écrivent :

$$\begin{cases} de_1 = k(x)df_2 \\ de_2 = k(x)df_1 \end{cases}$$

Supposons qu'après l'application de la bicausalité, on obtient le cas de figure 4.19.

$$\begin{array}{c}
 k(x) \\
 \begin{array}{ccc}
 \vdash \frac{de_1}{df_1} \rightharpoonup & \ddot{G}Y & \vdash \frac{de_2}{df_2} \vdash
 \end{array}
 \end{array}$$

FIG. 4.19 – Sous-modèle BGV inverse d'un gyrateur

Les nouvelles relations constitutives ont pour expressions :

$$\begin{cases} de_1 = k(x)df_2 \\ df_1 = \frac{1}{k(x)}de_2 \end{cases}$$

La seule condition pour effectuer cette opération réside dans l'existence d'une inverse du gain $k(x)$. Ce qui est toujours possible si $k(x)$ appartient à un corps.

Une procédure analogue peut être conduite pour construire les différents sous-modèles BGVs inverses des autres éléments C , R et TF .

Exemple 23. En inversant le modèle BGV de la figure 4.16 le long des chemins causaux entrées-sorties les plus courts, on obtient alors le modèle BGV inverse représenté, figure 4.20.

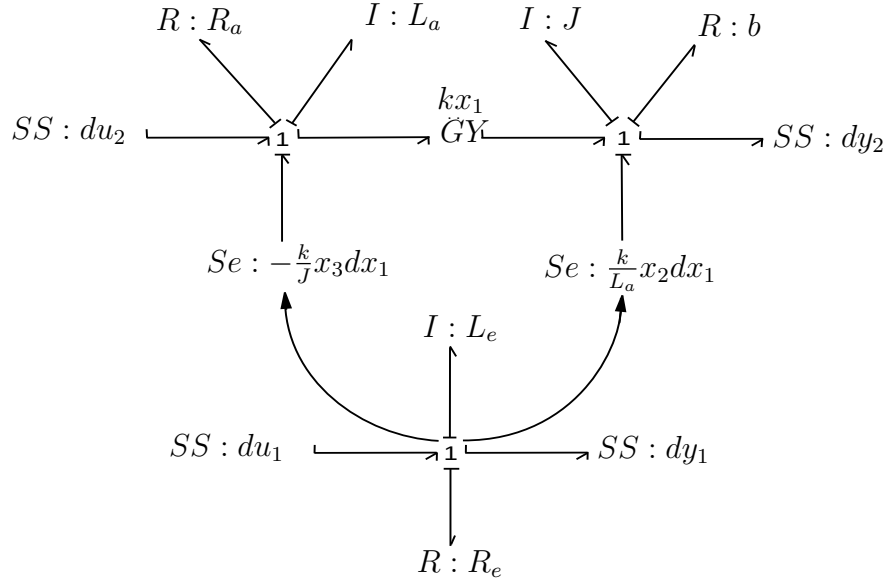


FIG. 4.20 – Modèle BGV inverse du MCCESéparée

Remarque 16. Les éléments dynamiques ont tous reçus une causalité dérivée car l'inversion est effectuée par rapport aux sorties plates, voir aussi Richard et al. (2002). Par conséquent, le modèle BGV inverse ne contient pas de boucles causales ce qui simplifie considérablement l'application de la règle de Riegle.

Paramétrisation états-sorties plates

Pour l'élément dynamique $I : J$, il suit : $dx_3 = Jd\omega = Jdy_2$.

D'une manière similaire, pour l'élément $I : L_e$ on obtient : $dx_1 = L_e di_e = L_e dy_1$.

Pour l'élément dynamique $I : L_a$, on doit d'abord identifier tous les chemins causaux liant les sorties plates à la variable dx_2 , pour pouvoir appliquer la règle de Riegle. Il existe trois chemins causaux explicités ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} SS : dy_2 \rightarrow R : b \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : L_a \\ SS : dy_2 \rightarrow I : J \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : L_a \\ SS : dy_2 \rightarrow Se : \frac{k}{L_a} x_2 dx_1 \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : L_a \end{array} \right.$$

Par conséquent : $dx_2 = L_a(kx_1)^{-1}[sJ + b]dy_2 - L_a(kx_1)^{-1}\frac{k}{L_a}x_2dy_1$

$$\Leftrightarrow k\frac{L_e}{L_a}y_1dx_2 = J(s + \frac{b}{J})dy_2 - k\frac{L_e}{L_a}x_2dy_1$$

L'intégration de ce système de trois 1-formes différentielles donne :

$$\begin{cases} x_1 = L_e y_1 \\ x_2 = \frac{L_a J}{k L_e y_1}(\dot{y}_2 + \frac{b}{J}y_2) \\ x_3 = J y_2 \end{cases}$$

Paramétrisation entrées-sorties plates

Entrée 1 : Nous avons deux chemins causaux,

$$\begin{cases} Sf : di_e \rightarrow I : L_e \rightarrow De : du_1 \\ Sf : di_e \rightarrow R : R_e \rightarrow De : du_1 \end{cases}$$

d'où : $du_1 = sL_e di_e + R_e di_e = (s + \frac{R_e}{L_e})dy_1$

Entrée 2 :

i) Dans ce cas, nous avons trois chemins causaux liant $Sf : di_e$ à $De : du_2$,

$$\begin{cases} SS : di_e \rightarrow Se : -kL_e \omega di_e \rightarrow De : du_2 \\ SS : di_e \rightarrow Se : kL_e i_a di_e \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow R : R_a \rightarrow De : du_2 \\ SS : di_e \rightarrow Se : kL_e i_a di_e \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : L_a \rightarrow De : du_2 \end{cases}$$

il suit :

$$\begin{aligned} du_2 &= kL_e \omega di_e + (sL_a + R_a)(kx_1)^{-1}(-kL_e i_a)di_e \\ &\Leftrightarrow du_2 = \frac{k}{J}y_2 dy_1 - (s + \frac{R_a}{L_a})(\frac{kx_1}{L_a})^{-1}(\frac{kx_2}{L_a})dy_1 \end{aligned}$$

ii) Cinq chemins causaux liant $Sf : d\omega$ à $De : du_2$:

$$\begin{cases} Sf : \omega \rightarrow R : b \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : L_a \rightarrow De : du_2 \\ Sf : \omega \rightarrow R : b \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow R : R_a \rightarrow De : du_2 \\ Sf : \omega \rightarrow I : J \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow R : R_a \rightarrow De : du_2 \\ Sf : \omega \rightarrow I : J \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow I : L_a \rightarrow De : du_2 \\ Sf : \omega \rightarrow GY : kx_1 \rightarrow De : du_2 \end{cases}$$

La somme de leurs différents gain est :

$$\begin{aligned} du_2 &= (sL_a)(kx_1)^{-1}bd\omega + R_a(kx_1)^{-1}bd\omega + R_a(kx_1)^{-1}(sJ)d\omega \\ &\quad + (sL_a)(kx_1)^{-1}(sJ)d\omega + (kx_1)d\omega \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow du_2 = (s + \frac{R_a}{L_a})(\frac{kx_1}{L_a})^{-1}(s + \frac{b}{J})dy_2 + \frac{kx_1}{J}dy_2$$

Finalemment :

$$du_2 = (s + \frac{R_a}{L_a})(\frac{kx_1}{L_a})^{-1}[(s + \frac{b}{J})dy_2 - \frac{kx_2}{L_a}dy_1] + \frac{kx_1}{J}dy_2 + \frac{k}{J}y_2dy_1$$

En résumé, nous avons :

$$\begin{cases} du_1 = (s + \frac{R_e}{L_e})dy_1 \\ du_2 = (s + \frac{R_a}{L_a})(\frac{kx_1}{L_a})^{-1}(s + \frac{b}{J})dy_2 + \frac{kx_1}{J}dy_2 \end{cases}$$

Après intégration on obtient :

$$\begin{cases} u_1 = \dot{y}_1 + \frac{R_e}{L_e}y_1 \\ u_2 = \frac{L_a}{ky_1}(\ddot{y}_2 + (\frac{R_a}{L_a} - \frac{\dot{y}_1}{y_1})(y_2 + \frac{b}{J}y_2) + \frac{k^2}{L_aJ}y_2y_1^2) \end{cases}$$

4.2.3 Décomposition en sous-systèmes

Cette méthode a été originellement introduite dans Junco (2001a) pour la synthèse de la commande en cascade de modèles BGs non linéaires mono-entrée, mono sortie. Elle fut ensuite modifiée pour effectuer directement la commande backstepping sur les modèles BGs dans Junco et al. (2002), avant d'être liée à la platitude dans Junco et al. (2003). Elle consiste à :

- décomposer le modèle BG en sous-modèles élémentaires,
- pour chaque sous-modèle établir une loi (bloc) de commande correspondant à un objectif de commande local,
- construire le schéma de commande global par simple concaténation de tous les blocs de commande élémentaires,
- étudier la stabilité du système global bouclé.

Le premier avantage de cette méthode réside dans le principe de décomposition du modèle BG du système qui peut être effectuée selon la nature physique, i.e., mécanique, électrique, hydraulique. Le second réside dans le calcul de la loi de commande relative à chaque sous-système qui se fait d'une manière élémentaire par inversion et bouclage et qui permet de satisfaire un objectif local de poursuite de trajectoire.

La difficulté principale de cette méthode réside dans l'étude de stabilité. En effet, l'utilisation des fonctions de Lyapunov par le même auteur se heurte souvent au problème connu du choix de ces dernières. Nous avons alors proposé le critère de stabilité de Borne-Gentina, Gentina and Borne (1972) qui est beaucoup plus adéquat à la forme particulière de la dynamique de l'erreur du système en boucle fermée.

Dans l'exemple suivant, nous allons appliquer cette méthode à la commande d'un moteur synchrone saillant à aimant permanent, Achir et al. (2003).

Exemple 24. Soit le modèle BG du MSSAP, figure 4.21.

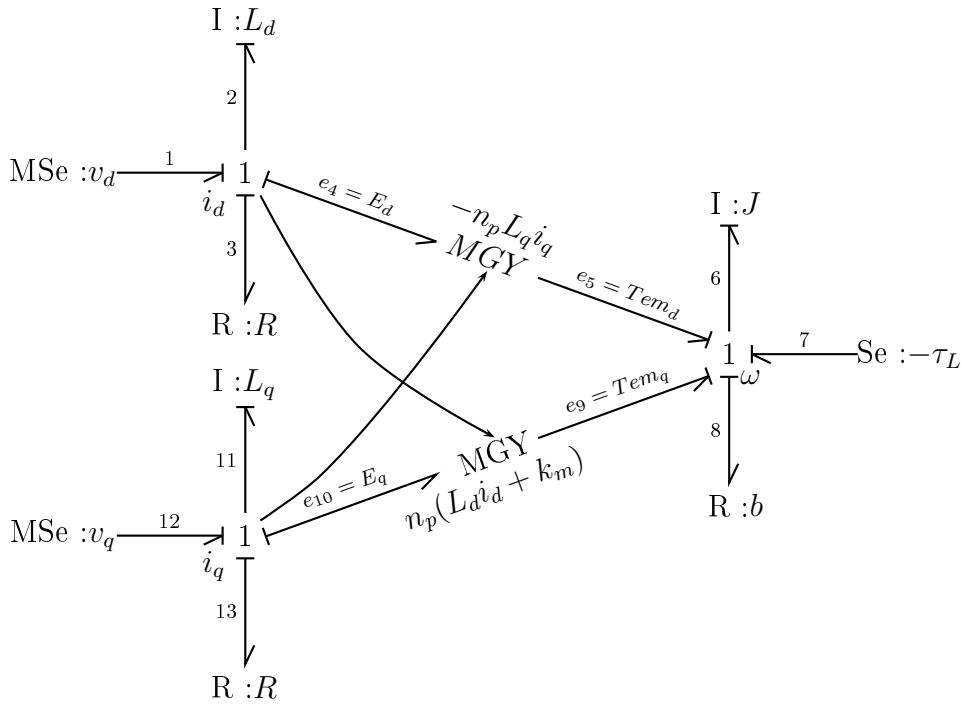


FIG. 4.21 – Modèle BG du MSSAP

Le modèle BG de la figure 4.21 suggère clairement la décomposition de la machine en un système mécanique et deux sous-systèmes électriques, qui interagissent à travers les gyrateurs modulés. Les cinq sous-systèmes sont explicitement représenté à la figure 4.22.

En suivant une procédure similaire à celle présentée dans Junco et al. (2003), les trois sous modèles sont considérés indépendants et un compensateur est conçu pour chaque sous-système pour assurer l'objectif de commande locale puis, les sous blocs résultants sont reliés au moyen des équations des sous-systèmes qui représentent les différents couplages pour construire le schéma de commande complet représenté, figure 4.23.

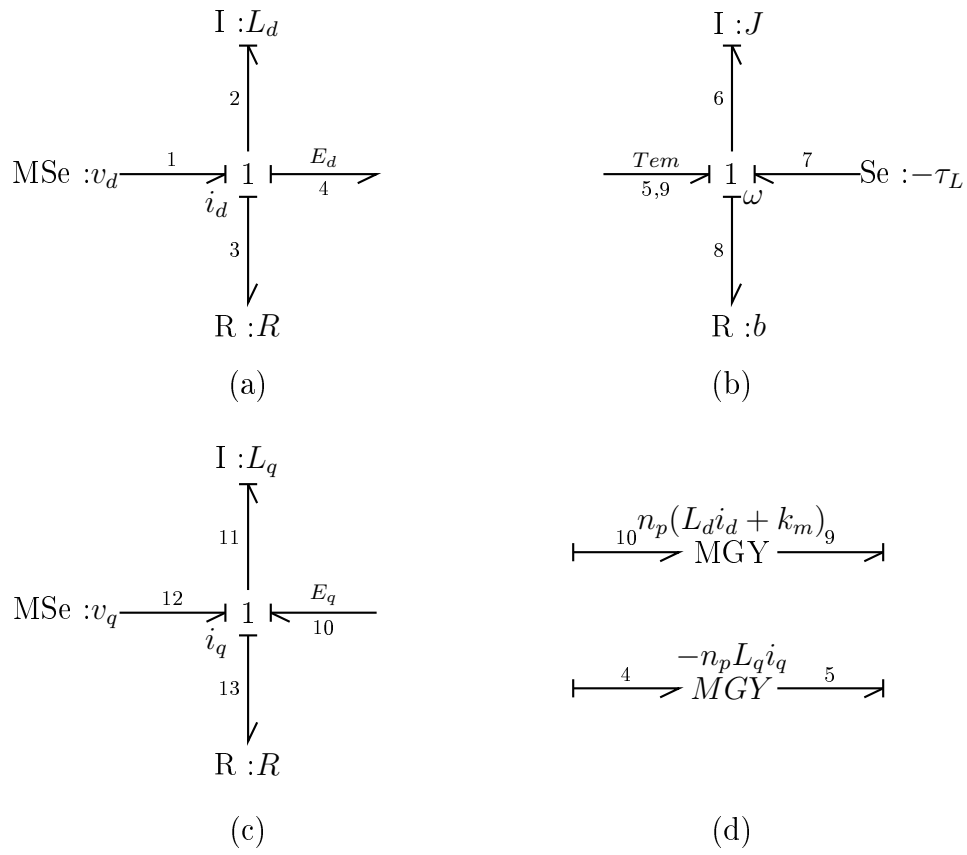


FIG. 4.22 – Les différents sous-modèles BG du MSSAP

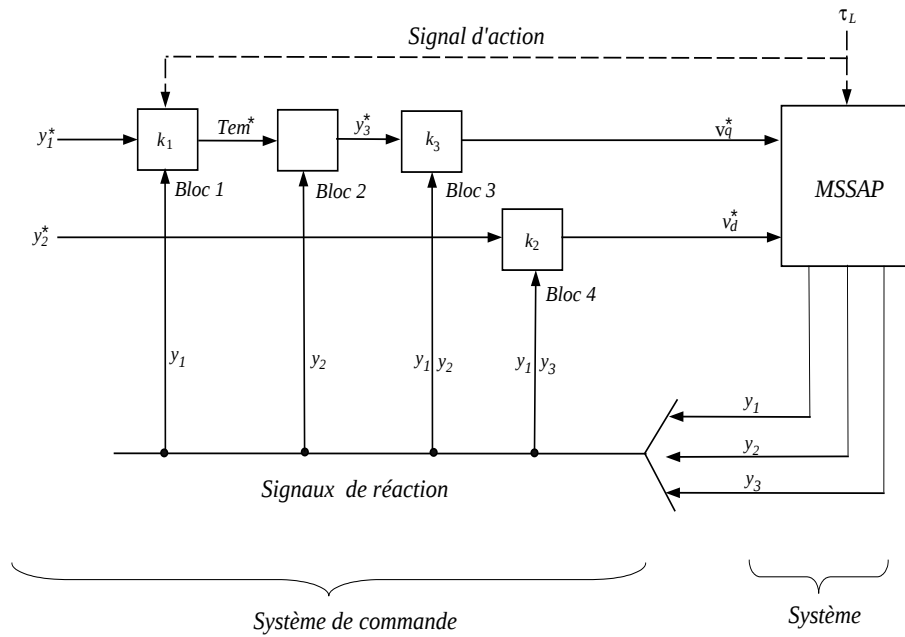


FIG. 4.23 – Schéma de commande

Sous-système mécanique

La sortie plate du sous système mécanique, figure 4.22-b est $y_1 = \omega$ parce qu'il existe un chemin causal de longueur 1 reliant l'entrée virtuelle $SS : TF$ à la sortie $SS : \omega$ en passant par tous les éléments dynamiques en causalité intégrale, voir remarque 1. Par conséquent, la paramétrisation (4.42) est calculée à partir du modèle BG inverse de la figure 4.24 en utilisant le concept de bicausalité Gawthrop (1995).

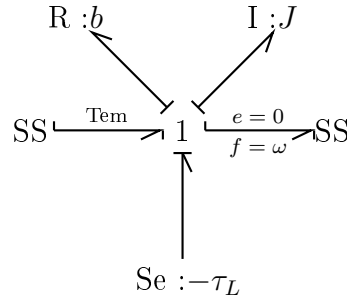


FIG. 4.24 – Modèle BG inverse du sous-système mécanique

$$Tem = J\dot{y}_1 + by_1 + \tau_L \quad (4.42)$$

Pour assurer un suivi de trajectoire de vitesse y_1^* , un régulateur est conçu pour assurer une erreur de poursuite $e_1 = y_1^* - y_1$ asymptotiquement stable pour les deux cas de figure suivants :

- Dans le cas où la perturbation est estimée $\hat{\tau}_L$, la lois de commande du premier bloc de la figure 4.23 est :

$$Tem^* = J\dot{y}_1^* + Jk_1y_1^* + (b - Jk_1)y_1 + \hat{\tau}_L \quad (4.43)$$

dont la dynamique de l'erreur de poursuite $\dot{e}_1 + k_1e_1 = 0$ est asymptotiquement stable pour $k_1 > 0$ et converge vers 0. Nous avons supposé que $\hat{\tau}_L - \tau_L = 0$.

- Dans le cas où la perturbation est inconnue (non mesurée) mais constante, une action intégrale peut être ajoutée. La nouvelle loi de commande du premier bloc de la figure 4.23, a pour expression :

$$Tem^* = J\dot{y}_1^* + Jk_1y_1^* + (b - Jk_1)y_1 + \frac{J}{T_i} \int (y_1^* - y_1) dt \quad (4.44)$$

qui conduit à la dynamique de l'erreur de poursuite d'une trajectoire de vitesse suivante :

$$\ddot{e}_1 + k_1\dot{e}_1 + \frac{1}{T_i}e_1 = 0$$

Les constantes k_1 et T_i sont choisies positives afin que l'erreur $e_1(t)$ converge asymptotiquement vers zéro.

Sous-système électrique 1

D'après la proposition (11), la sortie plate du sous-système électrique 1, figure 4.22-a est $y_2 = i_d$. La paramétrisation différentielle (4.45) est calculée à partir du modèle BG inverse de la figure 4.25.

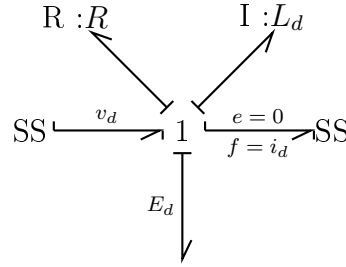


FIG. 4.25 – Modèle BG inverse BG du sous-système électrique 1

$$v_d = L_d \dot{y}_2 + R y_2 + E_d \quad (4.45)$$

Pour assurer un suivi de trajectoire pour y_2^* , la dynamique de l'erreur $e_2 = y_2^* - y_2$, i.e., $\dot{e}_2 + k_2 e_2 = 0$ doit être asymptotiquement stable. Ceci est obtenu pour $k_2 > 0$. La loi de commande appropriée pour le sous-système électrique 1 est :

$$v_d^* = L_d \dot{y}_2^* + k_2 L_d y_2^* + (R - k_2 L_d) y_2 + E_d \quad (4.46)$$

Sous-système électrique 2

D'une manière analogue au cas précédent, la sortie plate du second sous-système électrique, figure 4.22-c est $y_3 = i_q$ et la loi de commande correspondante est donnée par la relation (4.47), avec $k_3 > 0$.

$$v_q^* = L_q \dot{y}_3^* + k_3 L_q y_3^* + (R - k_3 L_q) y_3 + E_q \quad (4.47)$$

Couplages

À partir des sous-modèles BGs de la figure 4.22-d, il suit :

$$\begin{aligned} E_d &= e_4 = -n_p L_q i_q \omega = -n_p L_q y_3 y_1 \\ E_q &= e_{10} = n_p (L_d i_d + k_m) \omega = n_p (L_d y_2 + k_m) y_1 \end{aligned}$$

Pour alimenter le deuxième bloc de la figure 4.23, y_3 doit être exprimée en fonction de Tem . À partir du modèle BG de la figure 4.21, on a :

$$Tem = Tem_d + Tem_q = -n_p L_q i_q i_d + n_p (L_d i_d + k_m) i_q = n_p [(L_d - L_q) y_2 + k_m] y_3 \quad (4.48)$$

Comme la relation (4.48) est statique, alors :

$$y_3^* = \frac{Tem^*}{n_p [(L_d - L_q) y_2 + k_m]} \quad (4.49)$$

Analyse de stabilité

Pour vérifier la stabilité du système global bouclé, on doit calculer les erreurs au niveau de chaque bloc après bouclage.

Dans le cas où la perturbation est estimée, la dynamique de l'erreur peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & \chi_1(e_2, t) \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

où $\chi_1(e_2, t) = \frac{n_p}{J} [(L_d - L_q)(y_2^* - e_2) + k_m]$ est calculé à partir des équations (4.43) et (4.48).

L'équation (4.50) est de la forme $\dot{e} = A(e, t)e$, avec $e = (e_1, e_2, e_3)^t$. Elle admet un seul point d'équilibre $e = 0$ puisque $A(e, t)$ est de rang plein. Comme tous les coefficients non constants sont isolés dans la dernière colonne, alors on peut utiliser le critère de Borne-Gentina, Gentina and Borne (1972) pour conclure sur la stabilité de la dynamique de l'erreur. Une condition de stabilité est obtenue quand tous les déterminants mineurs de la matrice $A^*(e, t)$ définie par $a_{ij}^* = |a_{ij}|$ si $i \neq j$ et $a_{ij}^* = a_{ij}$ si $i = j$ sont de signes alternés. Le premier mineur étant négatif.

$$A^*(t) = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & |\chi_1(e_2, t)| \\ 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = \det[-k_1] = -k_1 < 0$, $\Delta_2 = \det \begin{bmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{bmatrix} = k_1 k_2 > 0$ and $\Delta_3 = \det(A^*) = -k_1 k_2 k_3 < 0$ pour tout $k_1, k_2, k_3 > 0$. Par conséquent, l'erreur est globalement asymptotiquement stable.

Dans le cas où la perturbation est inconnu mais constante, on peut poser $\dot{e}_1 = \dot{e}_1 + k'e_1$, $k' > 0$; la dynamique de l'erreur peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_1 - k') & (k_1 - k')k' - \frac{1}{T_i} & 0 & \chi_2(e_2, t) \\ 1 & -k' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

où $\chi_2(e_2, t) = \frac{n_p}{J}[(L_d - L_q)[(k_2 + k_3)e_2 + (\dot{y}_2^* - k_3 y_2^*)] + k_m]$ qui est calculé cette fois à partir des équations (4.44) et (4.48). La dynamique de l'erreur $\dot{e} = A(e, t)e$ avec $e = (e_1, e_1, e_2, e_3)^t$ admet aussi un seul point d'équilibre $e = 0$ et le critère de Borne-Gentina peut encore être utilisé.

$$A^*(t) = \begin{pmatrix} -(k_1 - k') & |(k_1 - k')k' - \frac{1}{T_i}| & 0 & |\chi_2(e_2, t)| \\ 1 & -k' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = -(k_1 - k') < 0 \text{ si } k' < k_1$$

$$\Delta_2 = (k_1 - k')k' - |(k_1 - k')k' - \frac{1}{T_i}| > 0 \text{ si } T_i > \frac{1}{(k_1 - k')k'} \text{ et } \frac{1}{2(k_1 - k')k'} < T_i < \frac{1}{(k_1 - k')k'}$$

$$\Delta_3 = -k_2 \Delta_2 < 0$$

$$\Delta_4 = k_2 k_3 \Delta_2 > 0.$$

L'erreur est alors globalement asymptotiquement stable pour $T_i \in]\frac{2}{k_1^2}, \frac{4}{k_1^2}[\cup]\frac{4}{k_1^2}, \infty[$.

Synthèse des trajectoires de référence

La trajectoire de vitesse de référence $\omega^*(t)$ satisfaisant $\omega^*(t_0) = \omega_0$ et $\omega^*(t_f) = \omega_f$ rad/s peut être construite en utilisant une méthode d'interpolation polynômiale (interpolation de Bezier par exemple).

Quand à la trajectoire du courant $i_a^*(t)$, elle peut être choisie telle que le couple $T_{em}(t)$ est maximal à vitesse constante et satisfaisant les contraintes sur les courants et les tensions, Verl and Bodson (1998). On peut par exemple considérer la contrainte sur les courants :

$$i_d^2 + i_q^2 \leq I_{max}^2$$

En utilisant alors la technique standard du multiplicateur de Lagrange, on aboutit à une fonction quadratique pour le courant i_d^* donnée par :

$$2i_d^{*2} + \frac{k_m}{(L_d - L_q)} i_d^* - I_{max} = 0$$

Pour un I_{max} donnée, on peut obtenir la trajectoire i_d^* du courant i_d .

Résultats de simulation

Les performances du schéma de commande proposé, figure 4.23 sont testés par des simulations. Les paramètres du MSSAP utilisé sont : $R = 2\Omega$, $L_d = 0.04244$ H, $L_q = 0.07957$ H, $n_p = 2$, $J = 0.03$ Kg m², $b = 0.001$ Nm/rad/s et $k_m = 0.311$. Les paramètres du contrôleur sont choisis égales à $k_1 = 2 \times 150$, $k_2 = 300$ et $k_3 = 150$.

Les trajectoires de références sont :

$$\begin{cases} y_1^*(t) = 100 t^2(3 - 2t) \\ y_2^*(t) = -2.84 t^2(3 - 2t) \end{cases}$$

Le premier test concerne la poursuite de trajectoire sans couple de charge. Les résultats de simulation sont représentés, figures 4.26 et 4.27. Ils montrent que le contrôleur proposé assure de très bonnes performances de poursuite de trajectoire ; la vitesse et les courants statoriques suivent bien leurs trajectoires respectives.

Dans le second test, une perturbation inconnue mais constante est appliquée au moteur à l'instant $t = 0.3$ s. Les résultats de simulation sont rapportés sur les figures 4.28, 4.29 et 4.30. Dans ce cas, le paramètre T_i est réglé de telle sorte à satisfaire la condition de stabilité calculée précédemment et assurer ainsi une erreur de poursuite de trajectoire nulle. Pour $T_i > 1/150^2$, le couple de charge inconnu est complètement rejeté. Des simulation réalisées pour des valeurs de T_i inférieure à cette valeur ont conduit à des oscillations de grande amplitude pour le courant i_q .

Dans le dernier test, un couple de charge connu (mesuré) est appliqué au moteur. Les résultats de simulation donnés par les figures 4.31, 4.32 et 4.33 sont très satisfaisants.

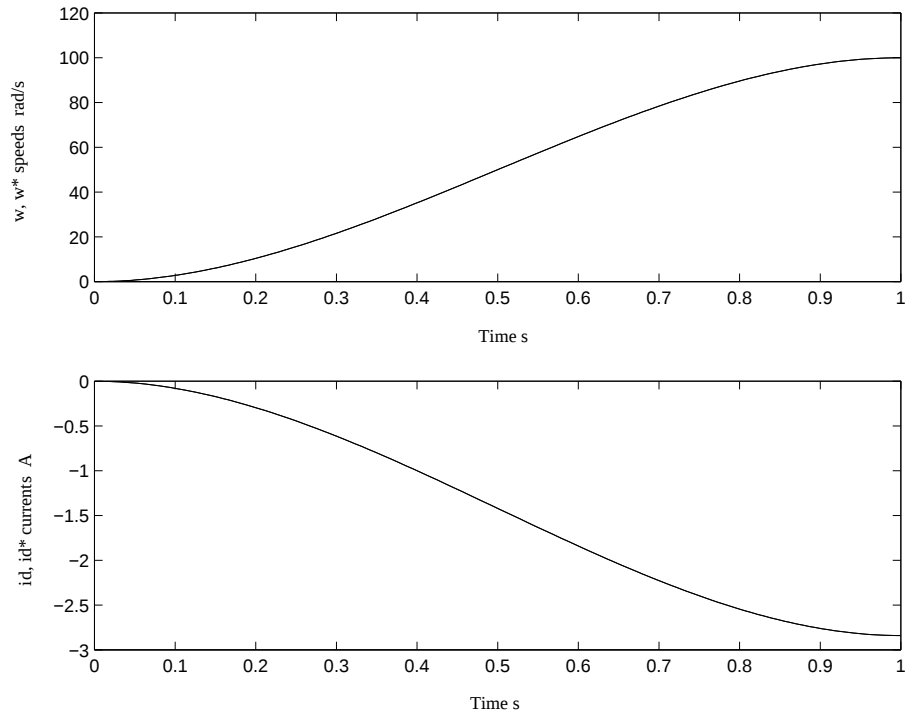


FIG. 4.26 – Résultats de simulation sans couple de charge

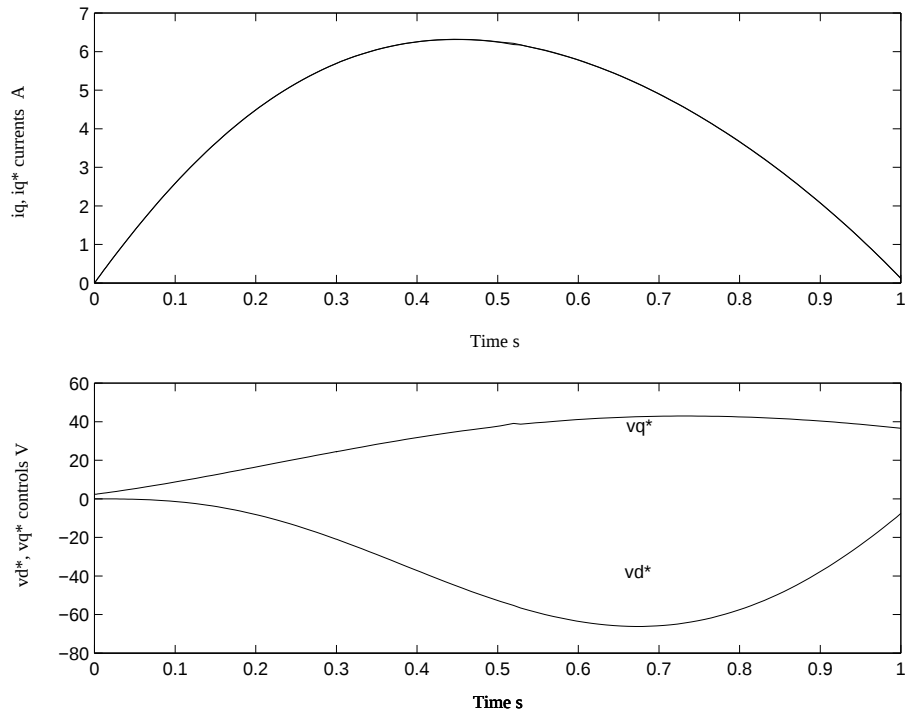


FIG. 4.27 – Résultats de simulation sans couple de charge

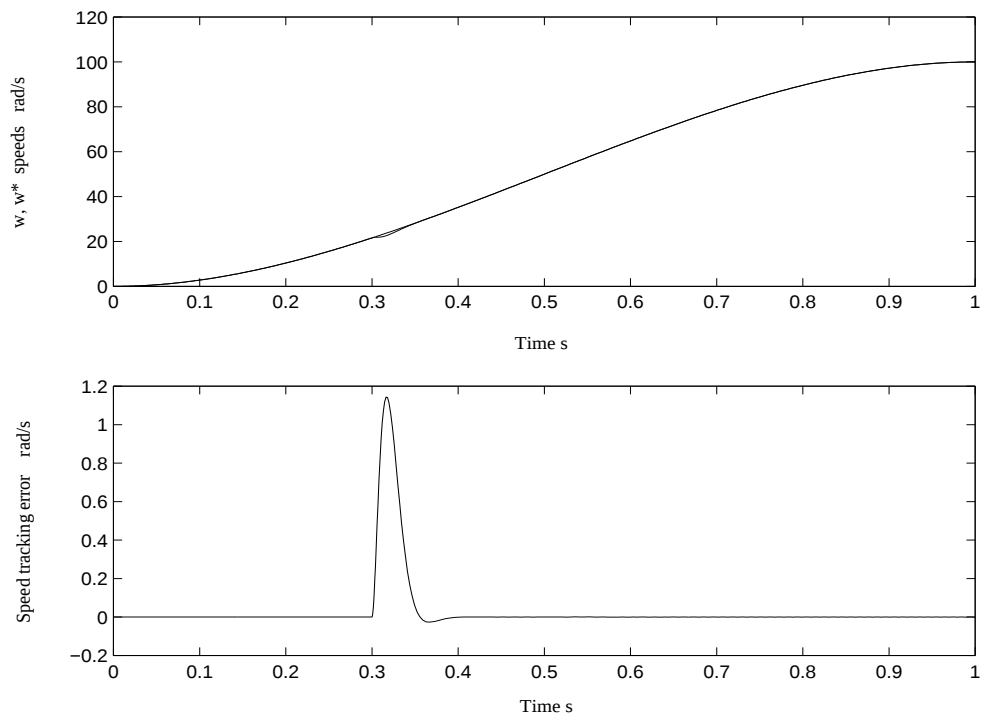


FIG. 4.28 – Résultats de simulation avec un couple de charge inconnu

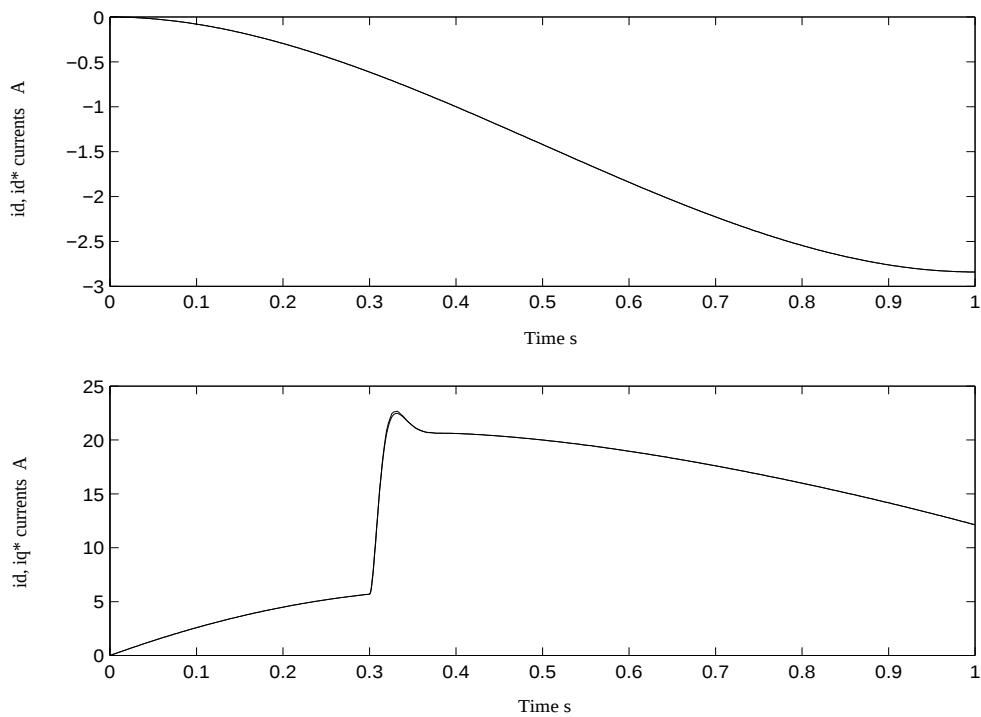


FIG. 4.29 – Résultats de simulation avec un couple de charge inconnu

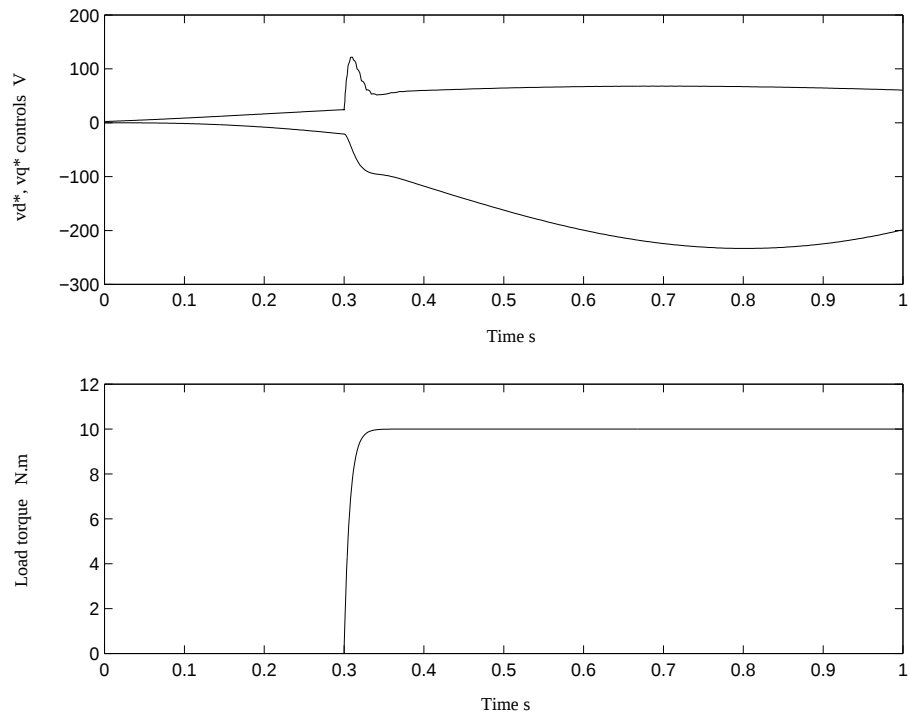


FIG. 4.30 – Résultats de simulation avec un couple de charge inconnu

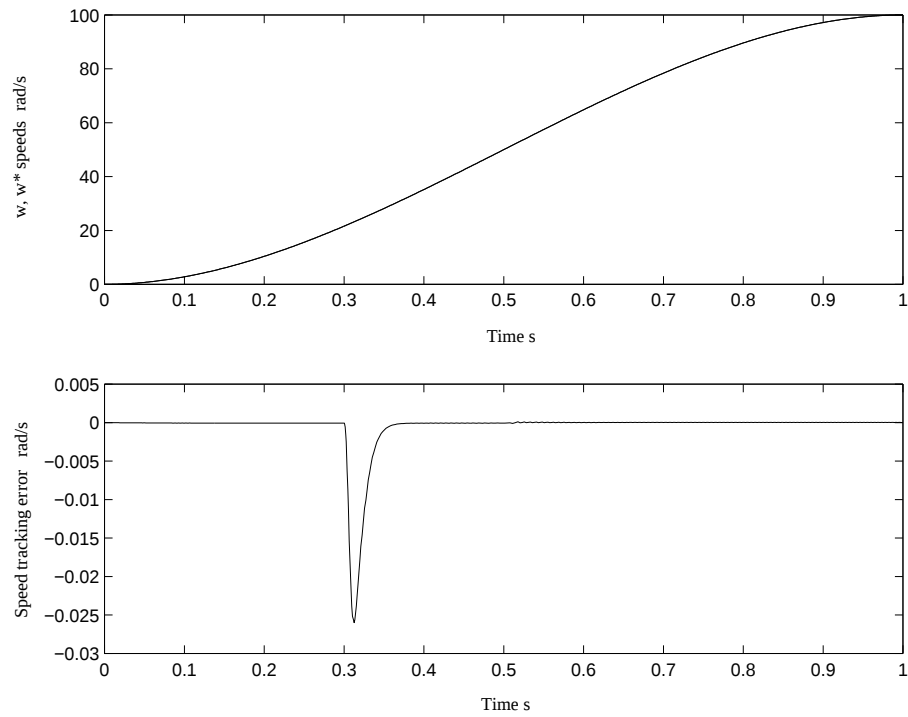


FIG. 4.31 – Résultats de simulation avec un couple de charge connu

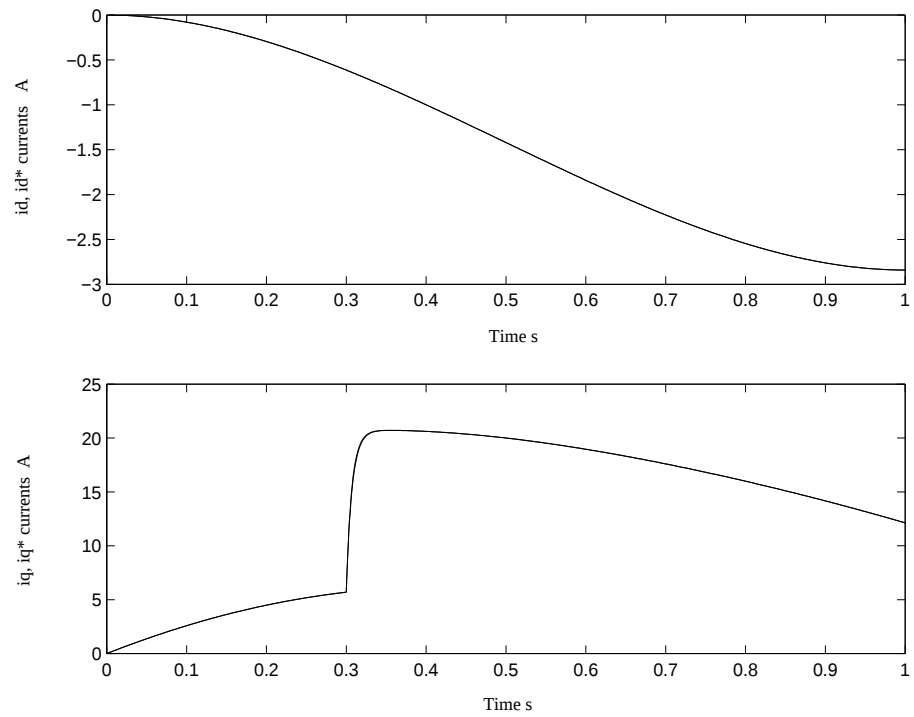


FIG. 4.32 – Résultats de simulation avec un couple de charge connu

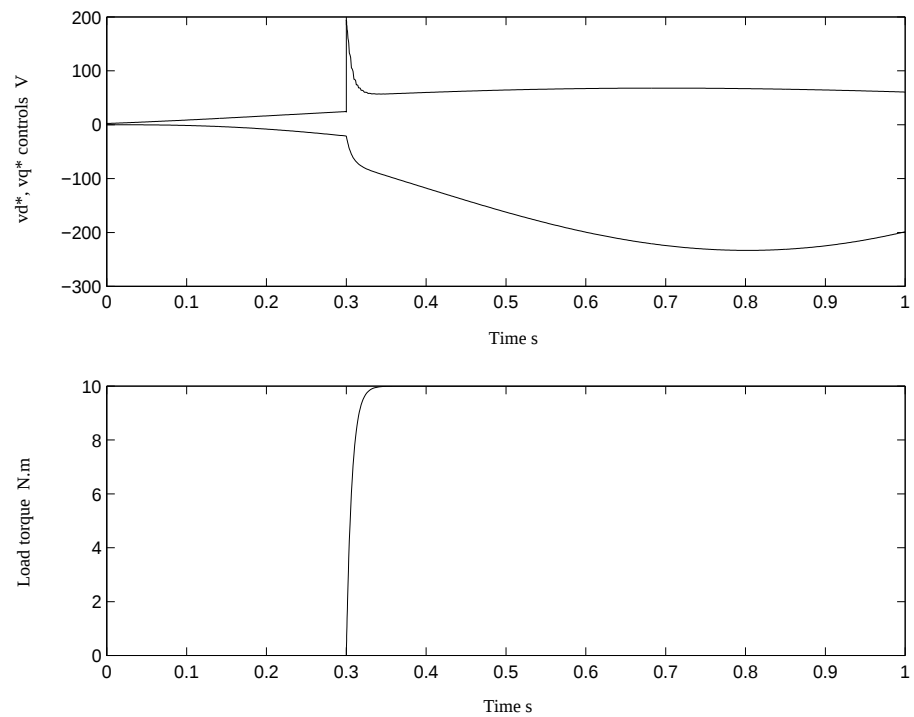


FIG. 4.33 – Résultats de simulation avec un couple de charge connu

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème d'identification des sorties plates et de la paramétrisation différentielle sur des modèles BGs non linéaires. L'utilisation du modèle variationnel semble efficace mais nécessite l'intégration de formes différentielles. Concernant la tâche de l'identification des sorties plates, cette technique semble incontournable contrairement au problème de la paramétrisation différentielle qui quant à lui peut être résolu en utilisant la méthode de décomposition ou en utilisant la règle de Riegler directement sur le modèle BG non linéaire, ce qui sera montré dans le chapitre suivant.

Chapitre 5

Une approche algébrique pour les BGs non linéaires

«Un grand architecte semble être mathématicien.»

James Jeans

Les propriétés structurelles fournissent des informations précieuses sur le système à commander et décident du choix de la stratégie de commande à adopter.

Durant les récentes dernières années, les avancées de la théorie de la commande non linéaire ont donné lieu à l'approche algébrique basée sur la théorie d'algèbre différentielle. Cette dernière est originellement introduite dans Fliess (1986) pour résoudre le problème d'inversion entrées-sorties. Elle est utilisée avec succès dans d'autres problèmes de l'automatique, Cruz-Victoria et al. (2004) pour la surveillance des systèmes non linéaires.

Comme nous l'avons vu dans la première partie du ch. 1, cette approche apporte plusieurs concepts nouveaux permettant une analyse directe des propriétés structurelles du système. En particulier, des nouvelles définitions des notions de système, de dynamiques, du choix des entrées et des sorties et de nouvelles notions importantes comme le degré de transcendance (non différentiel) différentiel, Fliess et al. (1995); Richard (1990).

Conjuguée à la méthodologie BG, l'approche algébrique peut offrir un cadre privilégié d'analyse des principales propriétés structurelles d'un système à partir de son modèle BG.

Notre premier objectif de ce chapitre se situe dans cette optique, i.e., proposer des outils graphiques pratiques permettant de mettre en évidence toutes ces notions

sur les modèles BGs non linéaires polynômiaux et montrer comment exploiter ces résultats pour résoudre d'autres problèmes d'automatique comme la surveillance des processus par exemple.

Enfin nous avons montré qu'il est possible d'appliquer la règle de Riegler sur ce type de modèle pour le calcul de la paramétrisation différentielle.

5.1 Interprétation algébrique des modèles BGs

Dans un premier lieu, nous allons introduire d'une manière intuitive autour d'un exemple simple un certain nombre de notions de la théorie algébrique en automatique, cf. ch. 1 avant de proposer des définitions générales.

5.1.1 Exemple introductif

BGs et extension de corps différentiels

Considérons le modèle BG acausal du MCCESéparée représenté, figure 5.1, El-Osta et al. (2005).

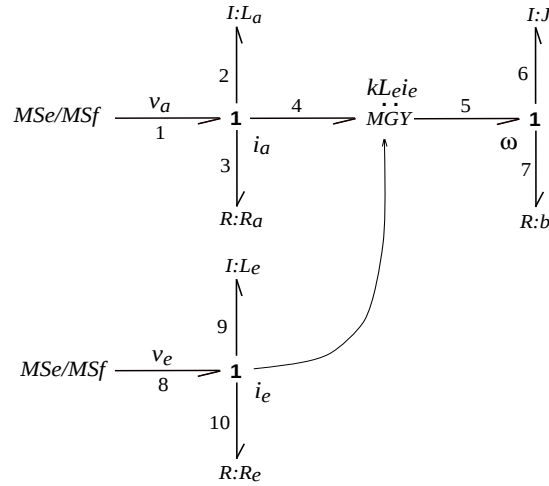


FIG. 5.1 – Modèle BG acausal du MCCESéparée

Les trois jonctions 1 caractérisées par l'égalité des flux et la conservation de la puissance fournissent le système d'équations (5.1).

$$\begin{cases} e_1 - e_2 - e_3 - e_4 = 0 \\ e_5 - e_6 - e_7 = 0 \\ e_8 - e_9 - e_{10} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

Pour oublier le sens physique des variables, nous allons les noter comme suit $w_1 := v_e$, $w_2 := v_a$, $w_3 := i_e$, $w_4 := i_a$ et $w_5 := \omega$.

Après avoir éliminé les variables dépendantes grâce aux lois constitutives des éléments, le système d'équations (5.1) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} w_2 - L_a \dot{w}_4 - R_a w_4 - k L_e w_3 w_5 = 0 \\ k L_e w_3 w_4 - J \dot{w}_5 - b w_5 = 0 \\ w_1 - L_e \dot{w}_3 - R_e w_3 = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

L'équation (5.2) constitue l'une des relations différentielles reliant les générateurs $w_1, w_2, \dots, w_5$ de l'extension de corps différentiels $K\langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \rangle / K$ avec $K = \mathbb{R}$ car $L_e, L_a, J, R_e, R_a, b \in \mathbb{R}$.

En conclusion, un modèle BG acausal peut être considéré comme étant une représentation graphique d'une extension de corps différentiels.

Degré de transcendance différentiel

L'équation (5.2) consiste en un système sous-déterminé de trois équations différentielles indépendantes à cinq variables. Le nombre nécessaire de variables à imposer (à spécifier) pour pouvoir le transformer en un système d'équations différentielles déterminé est égal à 2. Ces variables sont souvent choisies comme entrées et leur nombre est appelé degré de transcendance différentiel. Le même résultat peut être obtenu graphiquement à partir du modèle BG de la figure 5.1. En effet, ce modèle BG contient cinq variables mais en revanche, seulement trois équations différentielles peuvent être obtenues puisque ce modèle BG ne possède que trois jonctions qui permettent d'écrire trois équations différentielles. Par conséquent :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 \rangle / \mathbb{R} = 2$$

Dynamiques - choix d'entrée

Plusieurs variables peuvent être choisies comme entrées. Un premier choix peut être par exemple, $u_1 := v_e$ et $u_2 := v_a$. Ce choix correspond au fonctionnement en moteur commandé par tension. Avec ce choix d'entrée on obtient le modèle BG de la figure 5.2.

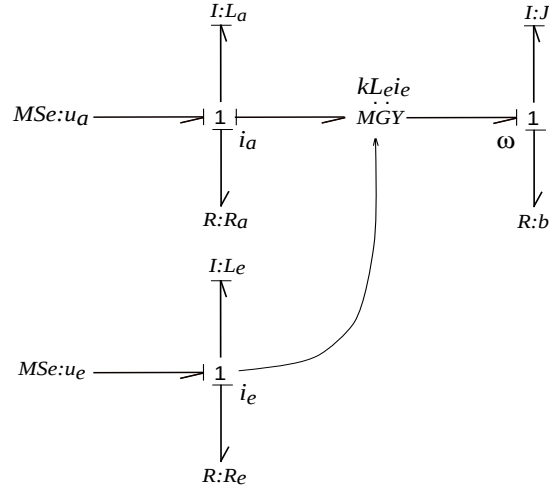


FIG. 5.2 – Modèle BG des dynamiques du MCCESéparée, entrées en effort

En notant $x_1 = i_e$, $x_2 = i_a$ et $x_3 = \omega$, le modèle BG de la figure 5.2 représente l'extension différentielle :

$$\mathbb{R}\langle u_1, u_2, x_1, x_2, x_3 \rangle / \mathbb{R}\langle u_1, u_2 \rangle$$

En effet, dans ce cas les équations issues du modèle BG sont :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{L_e} u_1 - \frac{R_e}{L_e} x_1 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{L_a} u_2 - \frac{R_a}{L_a} x_2 - k \frac{L_e}{L_a} x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = k \frac{L_e}{J} x_1 x_2 - \frac{b}{J} x_3 \end{cases} \quad (5.3)$$

Par ailleurs :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle u_1, u_2, x_1, x_2, x_3 \rangle / \mathbb{R}\langle u_1, u_2 \rangle = 0$$

car l'équation (5.3) consiste en un système de trois équations différentielles indépendantes à trois inconnues x_1, x_2 et x_3 . Alors, les variables u_1 et u_2 sont bien des entrées, cf. ch. 1.

Pour résoudre (intégrer) le système (5.3), trois conditions initiales sont nécessaires. Cet entier correspond au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale. Il est appelé dimension de la dynamique et est égal à :

$$n = d^0 \text{ tr } \mathbb{R}\langle u_1, u_2, x_1, x_2, x_3 \rangle / \mathbb{R}\langle u_1, u_2 \rangle = 3$$

Un autre choix d'entrée est $u_1 := i_e$ et $u_2 := i_a$. Ce choix correspond en fonctionnement en moteur avec commande en courant. Avec ce choix, on obtient le modèle

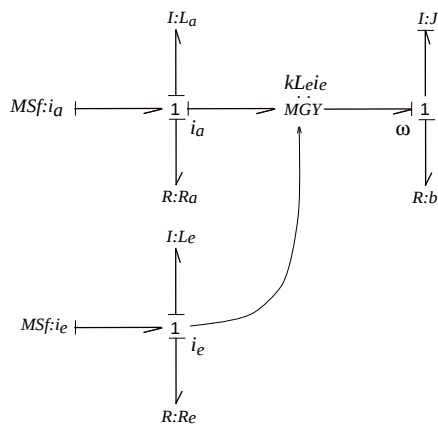


FIG. 5.3 – Modèle BG des dynamiques du MCCESéparée, entrées en flux

BG de la figure 5.3.

En tenant compte de ce qui précède, le modèle BG, figure 5.3 peut être simplifié comme montré, figure 5.4

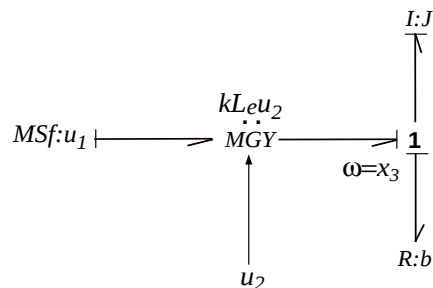


FIG. 5.4 – Modèle BG simplifié du MCCESéparée commandé par courant

Nous avons trois variables u_1, u_2 et x_3 . Cependant, on peut écrire une seule équation différentielle à une inconnue x_3 puisque il subsiste un seul élément dynamique en causalité intégrale. Par conséquent $d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle u_1, u_1, x_3 \rangle / \mathbb{R}\langle u_1, u_2 \rangle = 0$.

En effet, l'équation de la dynamique du moteur est :

$$\dot{x}_3 = k \frac{L_e}{J} u_1 u_2 - \frac{b}{J} x_3 \quad (5.4)$$

La dimension de cette dynamique est :

$$n = d^0 \text{ tr } \mathbb{R}\langle u_1, u_2, x_3 \rangle / \mathbb{R}\langle u_1, u_2 \rangle = 1$$

qui est égal exactement au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale.

Regardons maintenant ce qui se passe au niveau des sorties. Dans le cas de la figure 5.2, un choix de sorties est $y_1 = i_e$ et $y_2 = \omega$. Les équations de la sortie sont :

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

Dans le cas de la figure 5.3, un choix de sorties peut être $y_1 := v_e$ et $y_2 = v_a$. Avec ce choix, nous obtenons comme équations de la sortie :

$$\begin{cases} y_1 = L_e \dot{u}_1 + R_e u_1 \\ y_2 = L_a \dot{u}_2 + R_a u_2 - k L_e u_1 x_3 \end{cases}$$

À noter que dans ce cas, les équations de sortie dépendent des dérivées de l'entrée qui peuvent d'ailleurs apparaître dans l'équation d'état. On parle alors de représentation par variables d'état généralisée, cf. ch. 1.

5.1.2 Généralisation

Degré de transcendance différentiel

D'un point de vue BG, le degré de transcendance différentiel de l'extension différentielle L/K (modèle BG acausal) est égal au nombre de variables d'entrée plus le nombre de variables associées aux éléments dynamiques (une seule variable pour tous les éléments qui partagent la même jonction) moins le nombre de jonctions contenant au moins un élément dynamique.

On suppose que le modèle BG est complètement simplifié (il n'y a plus de jonction redondante). Souvent, cet entier est égal au nombre de sources de commande.

Pour une dynamique $L/K\langle u \rangle$ (modèle BG causal), cet entier est égal à zéro dès qu'il est possible d'affecter la causalité intégrale préférentielle au modèle BG.

Cet entier représente le nombre nécessaire de variables à connaître (à spécifier) afin de transformer un système d'équations différentielles sous-déterminé en un système déterminé.

Degré de transcendance non différentiel

Le degré de transcendance non différentiel (algébrique) d'une extension différentielle $L/K\langle u \rangle$ est égal au nombre d'éléments dynamiques en causalité intégrale. Cet entier représente le nombre de conditions initiales nécessaires afin d'intégrer un système d'équations différentielles déterminé.

5.2 Application à la surveillance de modèles BG non linéaires

5.2.1 Rappels

Dans ce qui suit, nous allons rappeler quelques résultats concernant les conditions de surveillabilité, Diop and Martínez-Guerra (2001) d'une classe de systèmes non linéaires de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, \bar{u}) \\ y = H(x, \bar{u}) \end{cases} \quad (5.5)$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état et $\bar{u} = (u, f)^t = (u_1, \dots, u_{m-\mu}, f_1, \dots, f_\mu)^t$ représente le vecteur d'entrées connues u , et le vecteurs de fautes f , $y = (y_1, \dots, y_p)^t \in \mathbb{R}^p$ représente le vecteur de sorties, F et H sont des fonctions polynômiales connues.

Remarque 17. *Le vecteur de fautes f peut être considéré comme une entrée inconnue et le problème est de détecter et d'isoler chaque composante du vecteur de fautes f .*

Définition 10. *Cruz-Victoria et al. (2004) Le système non linéaire (5.5) est dit surveillable s'il est possible d'estimer le vecteur de fautes f à partir des vecteurs u et y et de leurs dérivés, i.e., il est surveillable si f est algébriquement observable par rapport à u et y .*

Le vecteur f est dit algébriquement observable si chacune de ces composantes f_i est algébrique sur le corps différentiel $K\langle u, y \rangle$, i.e., chaque composante f_i satisfait une équation différentielle polynômiale à coefficients dans $K\langle u, y \rangle$.

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de surveillabilité pour la classe de systèmes non linéaires considérée.

Théorème 9. *Cruz-Victoria et al. (2004) Le système (5.5) est dit surveillable si et seulement si :*

$$d^0 \text{ tr diff } K\langle u, y \rangle / K\langle u \rangle = \mu \quad (5.6)$$

où μ est le nombre de composantes du vecteur de fautes f .

La preuve de ce théorème découle du lemme suivant et est proposée dans Cruz-Victoria et al. (2004).

Lemme 1. *Kolchin (1973) Soient K , L et M trois corps différentiels, avec $K \subseteq L \subseteq M$ alors :*

$$d^0 \text{ tr diff } (M/K) = d^0 \text{ tr diff } (M/L) + d^0 \text{ tr diff } (L/K)$$

Comme nous allons le remarquer, la méthodologie BG permet de distinguer d'une manière naturelle les actionneurs, les composants et les capteurs. Ceci est dû au fait que les modèles BGs sont composés d'éléments élémentaires. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des fautes d'actionneurs.

5.2.2 Interprétation de la condition de surveillabilité sur BG

A partir d'un modèle BG, on peut calculer les degrés de transcendance différentiels pour des extensions différentielles de la forme $K\langle x, u \rangle / K$ où des dynamiques $K\langle x, u \rangle / K\langle u \rangle$. Cependant, pour le problème de surveillance, les degrés de transcendance sont calculés à partir du système entrée-sortie $K\langle u, y \rangle / K\langle u \rangle$; i.e., les variables d'états x sont éliminées. Pour surmonter cette difficulté, nous allons proposer une autre façon de calculer ces degrés de transcendance grâce au lemme 1. Nous pourrions alors appliquer les conditions du théorème 9 pour tester la surveillabilité des actionneurs directement sur le modèle BG sans avoir à parcourir les différents chemins causaux comme proposé dans Ould-Bouamama et al. (2001).

Proposition 12. *Puisque $K\langle u \rangle \subseteq K\langle \bar{u} \rangle$ et à partir du lemme 1, il suit :*

$$\begin{aligned} d^0 \text{ tr diff } K\langle u, y \rangle / K\langle u \rangle &= d^0 \text{ tr diff } K\langle \bar{u}, x, y \rangle / K\langle u \rangle \\ &\quad - d^0 \text{ tr diff } K\langle \bar{u}, x, y \rangle / K\langle u, y \rangle \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ainsi, les degrés de transcendance différentiels du côté droit de l'équation i.e., $d^0 \text{ tr diff } K\langle \bar{u}, x, y \rangle / K\langle u \rangle$ et $d^0 \text{ tr diff } K\langle \bar{u}, x, y \rangle / K\langle u, y \rangle$ sont accessibles sur le modèle BG.

Souvent, l'équation de sortie n'est pas une équation différentielle comme dans le cas de la classe de systèmes considérée (5.5). Par conséquent :

$$d^0 \text{ tr diff } K\langle \bar{u}, x, y \rangle / K\langle u \rangle = d^0 \text{ tr diff } K\langle \bar{u}, x \rangle / K\langle u \rangle$$

Exemple 25. *Considérons le simple système hydraulique de la figure 5.5, composé d'un réservoir d'eau avec une section d'une conduite connectée à son fond et par laquelle l'eau peut couler. Le réservoir est alimenté en eau via une pompe hydraulique. Il est supposé que l'écoulement dans la conduite est laminaire.*

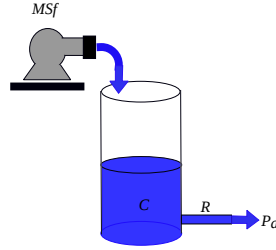


FIG. 5.5 – Système hydraulique - un réservoir

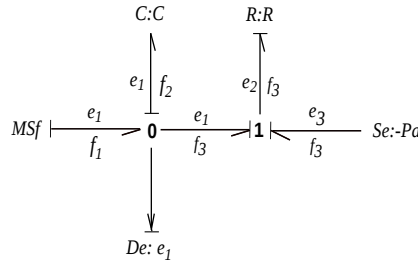


FIG. 5.6 – Modèle BG du système hydraulique

Son modèle BG causal est représenté, figure 5.6.

On pose alors $x = e_1$, $\bar{u} = (f_1, e_3)^t$ avec $u = e_3$ i.e., $\mu = 1$ et $y = e_1$, il suit :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle \bar{u}, x, y \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle = 1$$

En effet, le modèle BG de la figure 5.6 comporte deux variables inconnues e_1 et f_1 mais décrit par une seule équation différentielle fournie par la jonction 0.

Concernant le deuxième terme, i.e., $d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle \bar{u}, x, y \rangle / \mathbb{R}\langle u, y \rangle$, on doit d'abord imposer la variable mesurée par le détecteur en utilisant la bicausalité. On obtient alors le résultat de la figure 5.7, où *SS* représente le composant BG source-détecteur, Gawthrop (1995), annexe A. Il suit :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle \bar{u}, x, y \rangle / \mathbb{R}\langle u, y \rangle = 0$$

car, il ne reste plus d'élément dynamique en causalité intégrale et par conséquent, on ne peut écrire aucune équation différentielle.

Grâce à la proposition 12, il en découle :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle u, y \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle = 1$$

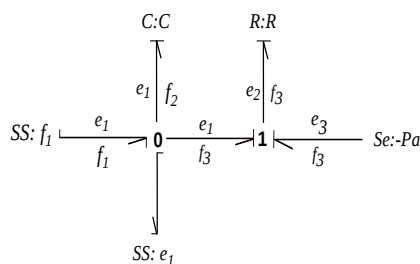


FIG. 5.7 – Modèle BG bicausal du système hydraulique

Finalement, l'actionneur du système hydraulique (la pompe) est surveillable avec l'instrumentation disponible (capteur de pression).

5.2.3 Cas de systèmes non linéaires non polynômiaux

Il est toujours possible de transformer un système d'équations différentielles non linéaires *a priori* non polynômiales en un système d'équations différentielles non linéaires polynômiales. Il suffit de trouver une équation différentielle polynômiale dont la solution est la fonction non linéaire non polynômiale à éliminer.

Pour les fonctions trigonométriques, on peut effectuer des changements de coordonnées, transformation de *Park* par exemple, Richard (1990) (cas des machines électriques à courants alternatifs sinusoïdaux). On peut encore trouver des équations différentielles dont les fonctions *sinus* ou *cosinus* sont des solutions, Fliess (1990a) (cas du pendule simple).

Nous allons montrer dans ce qui suit qu'il est également possible de procéder de la même façon pour la fonction racine carrée rencontrée surtout dans les modèles de systèmes hydrauliques. Pour obtenir un modèle BG régi par des équations différentielles polynômiales, nous allons augmenter le modèle BG initial d'un sous-modèle BG qui représente l'équation différentielle dont la solution est la fonction racine carrée.

Exemple 26. *Le système considéré dans cet exemple est composé de deux réservoirs d'eau en cascade comme indiqué schématiquement, figure 5.8. Le premier réservoir C_1 est alimenté en eau via une pompe commandée MSf_1 (le système hydraulique précédent). Le deuxième réservoir C_2 est alimenté en eau via une deuxième pompe commandée MSf_2 et une sortie (une conduite) R_2 , située au fond du premier réservoir C_1 . Le deuxième réservoir C_2 fournit de l'eau à l'environnement via une valve*

R_2 . Le régime hydraulique (l'écoulement) dans cette dernière, i.e., R_2 est considéré turbulent. Le modèle BG correspondant à ce système est proposé, figure 5.9.

Ce modèle ne relève pas a priori du cadre de l'algèbre différentielle, puisque ces équations contiennent la fonction racine carrée due à l'écoulement considéré turbulent dans la valve R_1 . Pour éviter cette situation, on procède comme suit : supposons pour simplifier que $e_3 > -e_5$, la loi constitutive de l'élément R_2 est alors :

$$f_6 = R_2(e_3 + e_5) = k\sqrt{e_3 + e_5}$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$2f_6\dot{f}_6 - k^2\dot{e}_3 = 0 \quad (5.8)$$

où $\dot{e}_5 = 0$, (par soucis de simplicité, la pression atmosphérique est supposée constante).

Par conséquent, $\sqrt{e_3 + e_5}$ est solution de l'équation différentielle polynômiale (5.8) qui est représentée graphiquement dans le modèle BG, figure 5.10.

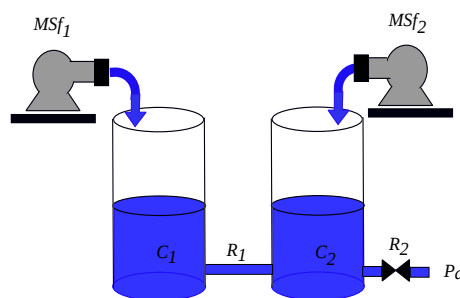


FIG. 5.8 – Système hydraulique à deux réservoirs

En effet, en posant $e_7 = 1.f_6$ et $\dot{e}_3 = \frac{f_4}{C_2}$, l'équation (5.8) peut être immédiatement tirée à partir du modèle BG de la figure 5.10 par simple lecture d'équations d'état à partir de modèles BGs, Karnopp and Rosenberg (1975). I et C représentent l'inertie de la masse du fluide et la capacité hydraulique respectivement.

Le modèle BG de la figure 5.10 est maintenant décrit par un ensemble d'équations différentielles polynômiales. Pour oublier le sens des variables, on note $w_1 := f_1$, $w_2 := f_5$, $w_3 := e_5$, $w_4 := e_1$, $w_5 := e_3$ et $w_6 := f_6$. Il constitue une des réalisations possibles de l'extension différentielle $\mathbb{R}\langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 \rangle / \mathbb{R}$. Comme ce modèle

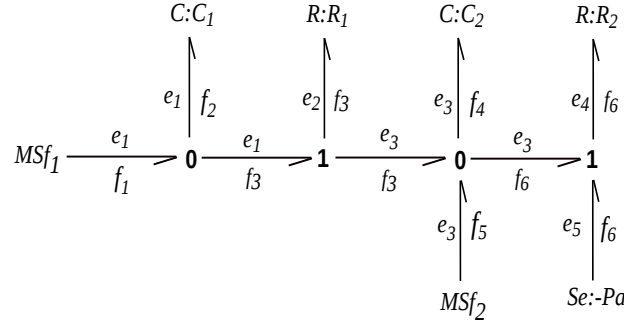


FIG. 5.9 – Modèle BG du système hydraulique à deux réservoirs

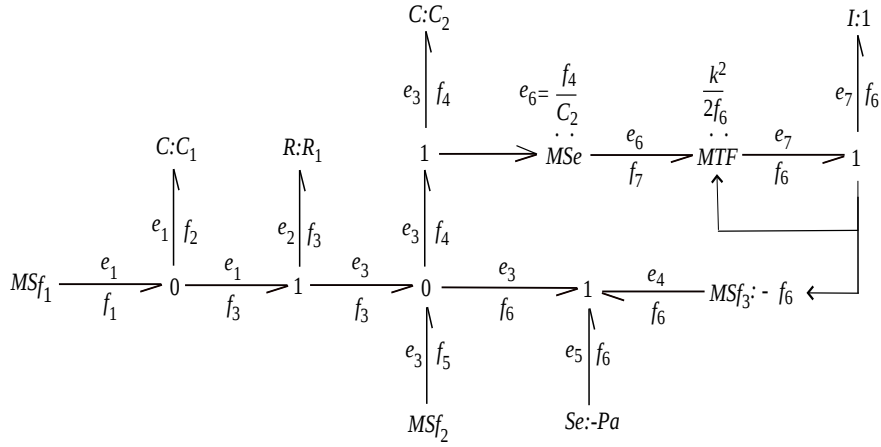


FIG. 5.10 – Modèle BG polynômial acausal

BG peut être décrit par trois équations différentielles à six variables, alors :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6 \rangle / \mathbb{R} = 3$$

Trois variables d'entrée sont donc nécessaires pour rendre ce système d'équations différentielles déterministe. Un choix naturel est $u_1 := w_1$, $u_2 = w_2$ et $u_3 = w_3$.

Soient alors u_1 , u_2 les fautes qui peuvent affecter les actionneurs (MSf_1 , MSf_2), le problème est de vérifier la condition de surveillabilité de ces actionneurs en exploitant l'information fournie par l'instrumentation existante. Les deux capteurs disponibles (sorties) sont : $y_1 = e_1$ et $y_2 = e_2$. Avec ce choix d'entrées et de sorties, on obtient le modèle BG causal de la figure 5.11.

D'après le problème de surveillance posé, les variables du modèle BG sont décomposées comme suit : $x = (e_1, e_3, f_6)^t$, $\bar{u} = (f_1, f_5, e_5)^t$ avec $u = e_5$, i.e., $\mu = 2$ (nombre de fautes) et $y = (e_1, e_3)^t$. Cette situation correspond au modèle BG causal

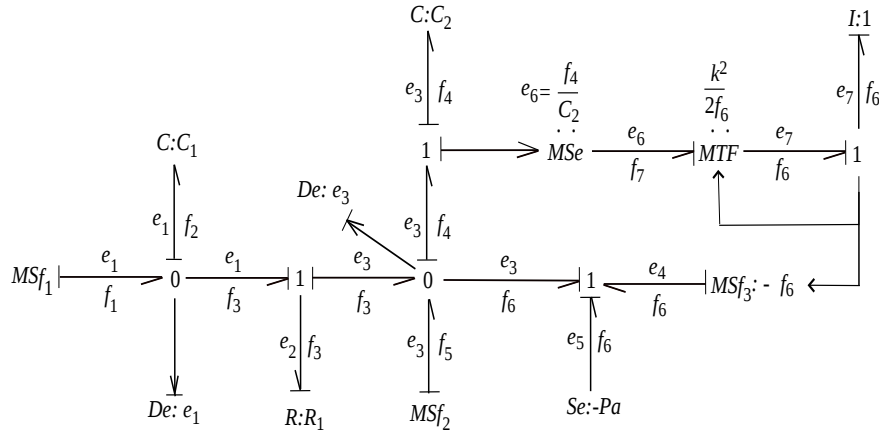


FIG. 5.11 – Modèle BG polynômial causal

de la figure 5.11. Il suit :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle \bar{u}, x, y \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle = 2$$

En effet, nous avons trois variables associées aux éléments dynamiques C_1, C_2 et $I : 1$ en causalité intégrale et deux variables associées aux sources MSf_1 et MSf_3 reliées par trois équations différentielles matérialisées par les jonctions 0 et 1.

Concernant le deuxième terme, i.e.,

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle \bar{u}, x, y \rangle / \mathbb{R}\langle u, y \rangle$$

il faut imposer les variables mesurées par les détecteurs en utilisant le concept de bicausalité comme illustré, figure 5.12. Il suit :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle \bar{u}, x, y \rangle / \mathbb{R}\langle u, y \rangle = 0$$

En effet, il subsiste un seul élément dynamique $I : 1$ en causalité intégrale qui permet d'écrire une seule équation différentielle à une inconnue f_6 . Une conséquence de la proposition 12, est :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle u, y \rangle / \mathbb{R}\langle u \rangle = 2$$

Finalement, les deux actionneurs du système hydraulique (les deux pompes) sont surveillables avec l'instrumentation disponible (les deux capteurs de pression).

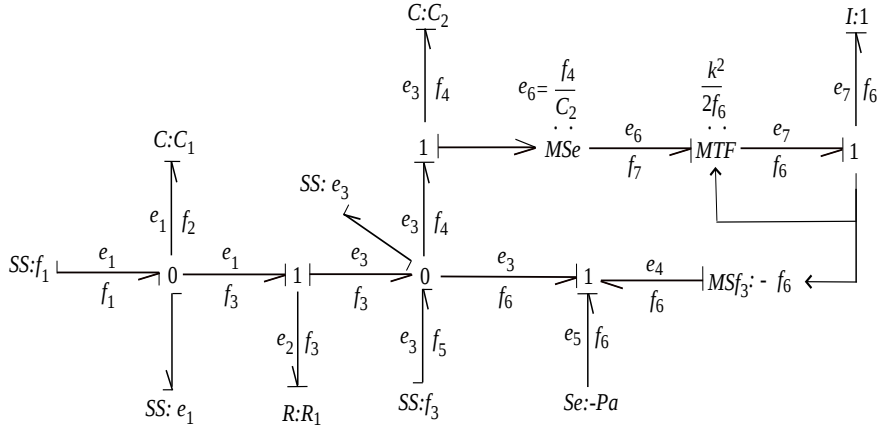


FIG. 5.12 – Modèle BG polynômial bicausal

5.3 Extension de la règle de Riegle aux BGs non linéaires

Un système non linéaire est une extension de corps différentiels L/K finiment engendrée, cf. ch. 1 §1.5.1. Supposons que les équations de la dynamique du système $L/K\langle u \rangle$ prennent la forme explicite (5.9).

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j + \sum_{k=1}^m b_{i,k} u_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.9)$$

avec $a_{i,j}, b_{i,k} \in K$, x_i, x_j, u_k appartiennent à un corps différentiel L et représentent les différentes variables d'état et d'entrée associées aux éléments dynamiques en causalité intégrale et aux sources d'entrée, respectivement.

Pour un couple de variables entrée-sortie (u, y) donné, l'expression du gain est :

$$y = Tu = \sum_{k \in H} G_k u \quad (5.10)$$

où G_k est le gain du $k^{\text{ème}}$ chemin causal reliant la variable d'entrée u à la variable de sortie y donné par l'équation (5.11), où le produit est pris dans l'ordre de parcours des éléments du $k^{\text{ème}}$ chemin causal. A_i^k est le gain du chemin causal élémentaire liant l'élément i à l'élément $i - 1$ le long du $k^{\text{ème}}$ chemin causal, et S_i^k est le gain propre de l'élément suivant immédiatement A_i^k avec les liens restant le long du $k^{\text{ème}}$ chemin causal sont supprimés. H représente l'ensemble de tous les chemins causaux entrée-sortie

$$G_k = A_n^k \prod_{i=n-1}^1 (1 - S_i^k)^{-1} A_i^k \quad (5.11)$$

L'utilité de cette règle réside dans la mise en oeuvre du calcul des relations de transfert ou de la paramétrisation différentielle des variables d'entrée et d'état en fonction des sorties plates. La première tâche est réalisée à partir du modèle BG direct et la deuxième à partir du modèle BG inverse (obtenu par bicausalité), Gawthrop (1995). Cette règle constitue une extension au cas des modèles BG non linéaires polynômiaux de la règle de Riegler que nous avons introduit dans le cas des modèles BGs linéaires non stationnaires, Achir et al. (2005a) ou des modèles BGs variationnels, Achir and Sueur (2005b). Il est cependant possible d'obtenir cette paramétrisation différentielle à partir du modèle BG inverse, Junco (2001b) et Junco et al. (2002) en exploitant les équations aux jonctions ainsi que les lois constitutives des éléments et des opérations de substitutions si nécessaire.

5.3.1 Application au MCCESéparée

Considérons encore une fois le modèle BG acausal du MCCESéparée représenté, figure 5.13.

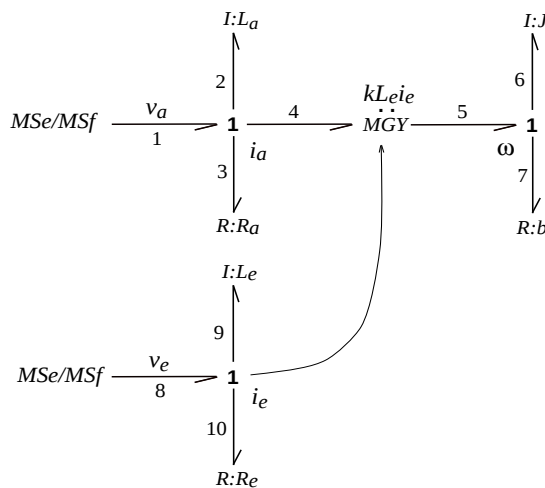


FIG. 5.13 – Modèle BG acausal du MCCESéparée

Les différents coefficients du modèle $L_a, L_e, R_a, R_e, k, b, J$ sont des réels i.e., $K = \mathbb{R}$ et les non linéarités sont telles que les équations différentielles qui en résultent sont polynômiales.

Les variables de ce modèle engendrent le corps différentiel $L = \mathbb{R}\langle v_a, v_e, i_a, i_e, \omega \rangle$.

Ce modèle BG contient cinq variables et peut être décrit par trois équations différentielles. Par conséquent :

$$d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle v_a, v_e, i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R} = 2$$

Deux entrées sont donc nécessaires. On distingue les deux choix suivants :

Commande en tension

La commande en tension de cette machine correspond au choix d'entrée $u = (u_a, u_e)$. Avec ce choix, les dynamiques $\mathbb{R}\langle v_a, v_e, i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R}\langle u_a, u_e \rangle$ sont obtenues en affectant la causalité comme indiqué, figure 5.14.

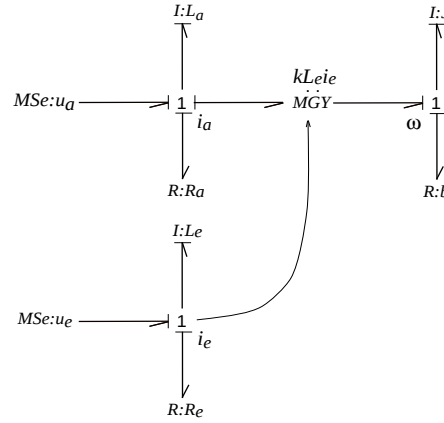


FIG. 5.14 – Modèle BG du MCCESéparée commandé par tension

Nous avons $n = d^0 \text{ tr } \mathbb{R}\langle u_a, u_e, i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R}\langle u_a, u_e \rangle = 3$ car ce modèle BG contient trois éléments dynamiques en causalité intégrale, i.e., nous avons trois variables d'état (i_a, i_e, ω) .

Notons que $d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle u_a, u_e, i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R}\langle u_a, u_e \rangle = 0$ car le modèle BG accepte une causalité correcte (pas de conflits de causalité).

Pour calculer la paramétrisation différentielle, nous allons inverser le modèle BG de la figure 5.14 par rapport aux sorties plates $y_1 = \omega$ et $y_2 = i_e$. Cette inversion est effectuée le long des chemins causaux entrées-sorties disjoints les plus courts. À la fin de cette étape, on obtient le modèle BG de la figure 5.15.

Posons alors $x_1 = i_a, x_2 = i_e, x_3 = \omega, u_1 = u_a$ et $u_2 = u_e$.

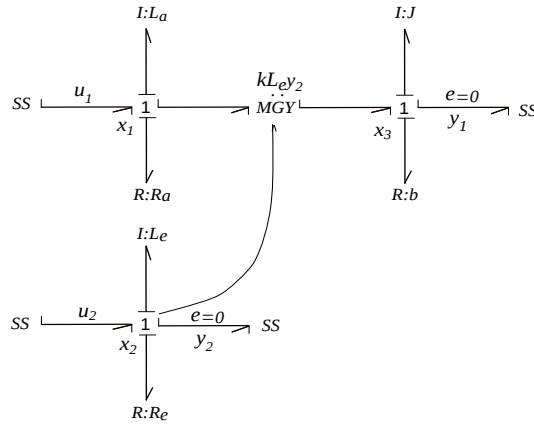


FIG. 5.15 – Modèle BG inverse du MCCESéparée commandé par tension

Paramétrisation états-sorties plates

Nous avons immédiatement : $x_3 = y_1$ et $x_2 = y_2$.

Concernant la variable x_1 , nous devons identifier les différents chemins causaux liant la variable x_1 aux sorties plates. Il existe deux chemins causaux à savoir :

$$\begin{cases} Sf : y_1 \rightarrow R : b \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow Df : x_1 \\ Sf : y_1 \rightarrow I : J \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow Df : x_1 \end{cases}$$

Par conséquent : $x_1 = (kL_e y_2)^{-1}(\frac{d}{dt}J + b)y_1$.

d'où :

$$x_1 = \frac{J}{kL_e y_2}(\dot{y}_1 + \frac{b}{J}y_1)$$

Enfin :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{J}{kL_e y_2}(\dot{y}_1 + \frac{b}{J}y_1) \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_1 \end{cases}$$

Paramétrisation entrées-sorties plates

Entée 1 : cinq chemins causaux liant $Sf : y_1$ à $De : u_1$

$$\begin{cases} Sf : y_1 \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow De : u_1 \\ Sf : y_1 \rightarrow I : J \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow R : R_a \rightarrow De : u_1 \\ Sf : y_1 \rightarrow I : J \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow L : L_a \rightarrow De : u_1 \\ Sf : y_1 \rightarrow R : b \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow R : R_a \rightarrow De : u_1 \\ Sf : y_1 \rightarrow R : b \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow L : L_a \rightarrow De : u_1 \end{cases}$$

La somme de leurs gains respectifs donne :

$$u_1 = \left[\left(\frac{d}{dt} L_a + R_a \right) (k L_e y_2)^{-1} \frac{d}{dt} J \right. \\ \left. + \left(\frac{d}{dt} L_a + R_a \right) (k L_e y_2)^{-1} b + (k L_e y_2) \right]$$

En utilisant la règle de multiplication : $\frac{d}{dt} a = a \frac{d}{dt} + \dot{a}, \forall a \in C^\infty$, il suit :

$$u_1 = \frac{L_a J}{k L_e y_2} \left[\left(\frac{d}{dt} - \frac{\dot{y}_2}{y_2} + \frac{R_a}{L_a} \right) \left(\frac{d}{dt} + \frac{b}{J} \right) + (k L_e y_2)^2 \right] y_1 \\ = \frac{L_a J}{k L_e y_2} \left[\ddot{y}_1 + \left(\frac{R_a}{L_a} - \frac{\dot{y}_2}{y_2} \right) \left(\dot{y}_1 + \frac{b}{J} y_1 \right) + (k L_e y_2)^2 y_1 \right]$$

Entrée 2 : deux chemins causaux, à savoir :

$$\begin{cases} Sf : y_2 \rightarrow I : L_e \rightarrow De : u_2 \\ Sf : y_2 \rightarrow R : R_e \rightarrow De : u_2 \end{cases}$$

d'où :

$$u_2 = \left(\frac{d}{dt} L_e + R_e \right) y_2 = L_e \left(\dot{y}_2 + \frac{R_e}{L_e} y_2 \right)$$

Finalement :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{L_a J}{k L_e y_2} \left[\ddot{y}_1 + \left(\frac{R_a}{L_a} - \frac{\dot{y}_2}{y_2} \right) \left(\dot{y}_1 + \frac{b}{J} y_1 \right) + (k L_e y_2)^2 y_1 \right] \\ u_2 = L_e \left(\dot{y}_2 + \frac{R_e}{L_e} y_2 \right) \end{cases}$$

Commande en courant

La commande en courant correspond au choix d'entrée $u = (i_a, i_e)$. Avec ce choix, les dynamiques $\mathbb{R}\langle i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R}\langle i_a, i_e \rangle$ sont représentées par le BG de la figure 5.16. Nous avons $d^0 \text{ tr diff } \mathbb{R}\langle i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R}\langle i_a, i_e \rangle = 0$. Car, le modèle BG, figure 5.16 admet une causalité intégrale préférentielle correcte. Donc, le couple (i_a, i_e) est bien une entrée.

Les dynamiques vérifient $n = d^0 \text{ tr } \mathbb{R}\langle i_a, i_e, \omega \rangle / \mathbb{R}\langle i_a, i_e \rangle = 1$ car il existe un seul élément en causalité intégrale $I : J$.

Le modèle BG, figure 5.16 peut être simplifié comme illustré, figure 5.17. Les sorties plates sont $y_1 = \omega$ et $y_2 = u_2$.

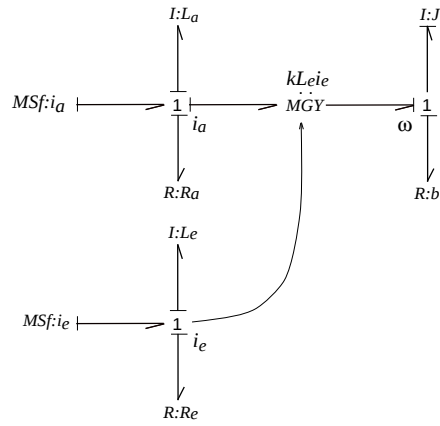


FIG. 5.16 – Modèle BG du MCCESéparée commandé par courant

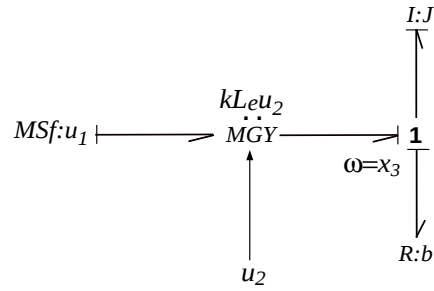


FIG. 5.17 – Modèle BG simplifié du MCCESéparée commandé par courant

En inversant ce modèle par rapport aux sorties plates, on obtient le modèle BG de la figure 5.18, avec $x_3 = \omega$.

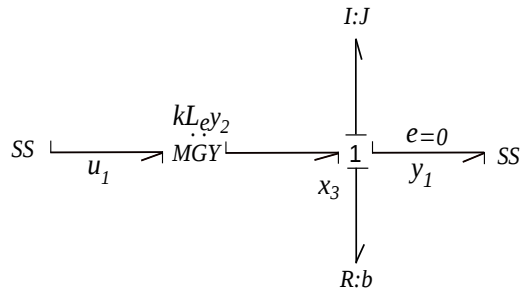


FIG. 5.18 – Modèle BG inverse du MCCESéparée commandé par courant

La paramétrisation états-sorties plates est immédiate. Pour la paramétrisation entrées-sorties, il suffit de calculer celle de u_1 car $u_2 = y_2$.

Il existe deux chemins causaux, à savoir :

$$\begin{cases} Sf : y_1 \rightarrow R : b \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow Df : u_1 \\ Sf : y_1 \rightarrow I : J \rightarrow MGY : kL_e y_2 \rightarrow Df : u_1 \end{cases}$$

d'où : $u_1 = (kL_e y_2)^{-1}(\frac{d}{dt}J + b)y_1$, i.e.,

$$u_1 = \frac{J}{kL_e y_2}(\dot{y}_1 + \frac{b}{J}y_1)$$

Finalement :

$$\begin{cases} x_3 = y_1 \\ u_1 = \frac{J}{kL_e y_2}(\dot{y}_1 + \frac{b}{J}y_1) \\ u_2 = y_2 \end{cases}$$

Remarque 18. *En pratique, puisqu'il n'est pas possible de commander le moteur directement en courant, ce deuxième choix suggère plutôt de considérer le système (MCCESéparée) comme une cascade de deux sous-systèmes couplés : l'un mécanique et l'autre électrique. Dans ce cas, on retrouve la méthode de décomposition présentée au ch. 4.*

Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons montré qu'il est possible de faire une l'analyse des principales propriétés structurelles d'un système non linéaire directement à partir de son modèle BG associé. Cette analyse est basée sur l'exploitation des résultats obtenus grâce à la théorie algébrique en l'automatique. L'intérêt de cette démarche est de mettre à disposition de l'ingénieur automaticien un outil simple, puissant et moins abstrait pour l'analyse et la synthèse de lois de commande directement du modèle BG dont la construction est souvent aisée. En effet, notre démarche ne nécessite pas de connaissances approfondies de la théorie algébrique et réduit considérablement la complexité du problème à résoudre.

Conclusion et perspectives

Dans ce thèse nous avons apporté une contribution à l'étude de la propriété de platitude sur des modèles bond graphs non linéaires. Avant de dresser le bilan acquis le long de ce travail et les perspectives, résumons d'abord notre apport.

Dans le cas des modèles bond graphs linéaires, nous avons voulu être plus général en prenant en compte plusieurs cas de modèles bond graphs. À savoir, les modèles bond graphs contenant des éléments en causalité dérivée liés éventuellement à une source d'entrée, i.e., faisant apparaître généralement les dérivées de l'entrée dans la représentation d'état. Nous avons proposé pour chaque cas un algorithme d'identification des sorties plates qui ne suppose pas *a priori* la connaissance de ces dernières, contrairement à certains travaux de la littérature. Ces algorithmes simples sont applicables directement sur le modèle bond graph et ne nécessitent pas l'écriture *a priori* des équations d'état du système.

Par ailleurs, nous avons proposé deux méthodes d'obtention de la paramétrisation différentielle qui constitue la deuxième étape nécessaire pour mettre en oeuvre une commande par platitude. Cette paramétrisation est obtenue par simple application de règles graphiques de calcul de déterminants sur des modèles bond graphs et de l'utilisation de la règle de Mason.

Grâce à la théorie d'algèbre et des modules différentiels, nous avons introduit la notion de modèle bond graph variationnel qui nous a permis d'étendre les algorithmes précédents au cas non linéaire. Les sorties plates du système originel sont alors obtenues par intégration des bases du module associé au modèle bond graph variationnel.

Cependant, ces modèles ne se comportent plus comme des modèles bond graphs linéaires. Pour tenir compte de cette particularité, nous avons introduit la notion d'anneau bond graph non commutatif et montré que le modèle bond graph variationnel est bien un cas particulier d'anneau bond graph non commutatif. Il semble alors évident qu'un modèle bond graph linéaire stationnaire est un anneau bond

graph commutatif. Ce nouveau formalisme est très intéressant car il s'accorde parfaitement avec la théorie des modules différentiels.

Nous avons muni ces modèles (anneaux bond graphs non commutatifs) d'une règle de gain appelé règle de Riegler et qui nous a permis de prendre en compte l'aspect non commutatif et ainsi d'étendre les méthodes de paramétrisation différentielle déjà proposées au cas de modèles bond graphs variationnels.

Pour palier au problème d'intégration des formes différentielles surtout dans le cas de la paramétrisation différentielle, nous nous sommes intéressés aux modèles bond graphs non linéaires régis par des équations différentielles polynômiales. Ce qui nous a permis d'étendre la règle de Riegler à cette classe de modèles bond graphs.

Grâce à la notion de causalité, nous avons proposé des procédures graphiques de calcul des degrés de transcendance différentiels, le choix des entrées et des dynamiques que nous avons exploité pour tester les conditions de surveillabilité des systèmes non linéaires.

Ce travail de longue haleine a nécessité entre autre la maîtrise d'outils mathématiques nouveaux mais aussi l'aptitude à adapter ces outils aux modèles bond graphs. Le premier thème est bien couvert dans la littérature, il n'en est point du deuxième. Ce travail peut alors ouvrir de nouvelles perspectives et encourager la communauté bond graph à s'approprier ces nouveaux outils. Malgré les critiques connus vis à vis du bond graph, nous espérons par ailleurs que cette modeste contribution peut convaincre des capacités du bond graph à appréhender les nouveaux outils d'automatique avancée et apporter une contribution non négligeable.

En perspectives, un certain nombre de problèmes restent à résoudre, classés comme suit :

Modèles BG linéaires

- Simplifier davantage l'algorithme d'identification des sorties plates dans le cas multi-entrées, en particulier l'étape de calcul des indices de commandabilité,
- Éventuellement chercher de nouveaux algorithmes.

Modèles BG variationnels

- tenir compte des causalités dérivées,
- tester graphiquement la liberté du module associé au modèle BGV,

Modèles BG non linéaires

- appliquer certains algorithmes d'algèbre différentielle sur les modèles BG polynômiaux comme la recherche des bases de Gröbner par exemple,

- utilisation de la règle de Riegler pour le calcul des relations de redondances analytiques (ARRs).

Index

- Abélien, 6
- Affectation de la bicausalité, 186
- Affectation de la causalité, 185
- Algébriquement dépendant (indépendant), Critère de stabilité de Borne-Gentina, 132
- 8
- Algèbre différentielle, 21
- Anneau, 6
- Anneau de polynômes $\mathbb{R}[s]$, 6
- Anneau différentiel, 8
- Anneau graphe non commutatif, 51
- Base de transcendance, 8
- Base de transcendance différentielle, 10
- Bicausalité, 92, 186
- Bond graph, 29, 177
- Boucle causale, 31
- Boucle fermée, 19
- Boucle ouverte, 19
- Causalité, 183
- Changement de coordonnées généralisé, 85
- Chemin causal, 30
- Commandabilité structurelle, 41
- Condition de *Frobenius*, 106
- Condition de platitude en linéaire, 71
- Construction d'un modèle BGV, 44
- Construction d'un modèle BG, 182
- Construction d'un modèle BG inverse, 189
- Convertisseur de tension triphasé, 112
- Corps, 7
- Corps de constantes, 8
- Corps différentiel, 8
- Décomposition, 127
- Dérivée de l'entrée, 19
- Désignant, 10
- Déterminant de Dieudonné, 10
- Déterminant de la matrice système, 88
- Déterminants mineurs, 132
- Degré de transcendance, 8, 146
- Degré de transcendance différentiel, 10, 146
- Delta-platitude, 19
- Différentielle de *Kähler*, 16
- Différentielle extérieure, 106
- Différentiellement algébrique, 9
- Différentiellement algébriquement dépendant (indépendant), 9
- Différentiellement transcendant, 9
- Dynamiques, 13, 143
- Ecoulement laminaire, 148
- Ecoulement turbulent, 151
- Élément *C*, 179
- Élément *I*, 180
- Élément *R*, 179
- Élément algébrique (transcendant), 7
- Entrée, 13

- Etat, 14
- Extension de corps, 7
- Extension de corps différentiels, 9
- extension de corps différentiels, 142
- Finiment engendré, 7
- Forme différentielle, 100
- Générateurs, 7
- Géométrie différentielle, 21
- Gain d'un chemin causal, 30, 54
- Gain d'une boucle causale, 31
- Gain propre, 54
- Groupe, 6
- Groupe Ward Leonard, 72
- Gyrateur, 182
- Hacheur dévolteur, 41
- Hybride, 113
- Idéal d'anneau, 6
- Intègre, 6
- Jets -infinis, 21
- Jonction 0, 181
- Jonction 1, 181
- Loi de composition, 6
- Lois constitutives linéaires, 34
- Lois constitutives non linéaires, 33
- Longueur d'un chemin causal, 31
- Matrice cofacteur, 87
- Matrice de commandabilité, 41
- Matrice de passage, 70
- Matrice système, 87
- Modèle BG réduit, 90
- Modèle BG sans élément en causalité dérivée, 70
- Modèle BG avec éléments en causalité dérivée, 80
- Modèle BG avec éléments en causalité dérivée liés à l'entrée, 84
- Modèle BG inverse, 93
- Modèle BG linéarisé, 76
- Modèle BG variationnel, 43
- Modèle BGV d'un élément C , 44
- Modèle BGV d'un élément I , 45
- Modèle BGV d'un élément MGY , 46
- Modèle BGV d'un élément MSe, MSf , 49
- Modèle BGV d'un élément MTF , 47
- Modèle BGV d'un élément R , 46
- Modèle BGV inverse d'un élément I , 123
- Modèle moyen, 113
- Modèles BG non polynômiaux, 150
- Module de torsion, 12
- Module différentiel, 11
- Module libre, 11
- Module quotient, 111
- Moteur CC à aimant permanent, 64
- Moteur CC à excitation série, 38
- Moteur pas à pas, 75
- Moteur synchrone saillant à aimant permanent (MSSAP), 106
- Ordre d'un modèle BG, 31
- Paramétrisation différentielle, 86
- Pendule simple sur un chariot, 81
- Platitude, 17
- Principes du bond graph, 177
- Produit extérieur, 106
- Prolongations, 21

-
- Règle de Mason, 52
Règle de multiplication dans $k[\frac{d}{dt}]$, 8
Règle de Riegler, 52, 154
Représentation d'état explicites, 34
Représentation d'état généralisée, 14
Représentation d'état implicites, 35
Représentation des transferts de puissance,
178
- Sortie, 13
Sortie plate, 18
Sorties plates d'un modèle BG linéaire,
67
Sorties plates d'un modèle BG non linéaire,
98
- Sources, 180
Stabilisation, 19
Structure de jonction, 32
Suite exacte, 15
Surveillabilité, 147
Surveillabilité sur des BGs, 148
Système à événements discrets, 19
Système de Pfaff, 105
Système linéaire, 15
Système linéaire tangent, 16
Système non linéaire, 13
Système plat, 18
Système sans dérive, 24
- Test graphique de platitude en linéaire,
72
- Trajectoire, 20
Transformateur, 182
Transformation de Park, 115
- Unitaire, 6
Variété réglée, 24
Variables BGs, 178

Bibliographie

- Achir, A., Andaloussi, C., and Sueur, C. (2005a). Flatness based control of linear time varying bond graphs. *16th IFAC Word Congress, Prague, Czech Republic*.
- Achir, A., Junco, S., Donaire, A., and Sueur, C. (2005b). Planitud diferencial y control del motor de inducción por retroalimentación dinámica sobre modelos bond graph. *XI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control, Río Cuarto - Argentina*.
- Achir, A. and Sueur, C. (2005a). Bg-supported flatness based control design of three-phase pwm ac-dc voltage-source converters. *17th IMACS Word Conference, Paris, France*.
- Achir, A. and Sueur, C. (2005b). Non commutative ring bond graphs : application to flatness. *Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM '05, SCS-WMC, New Orleans, Louisiana*, 37(1) :59–64.
- Achir, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (2003). Bond graph and flatness based control of non salient permanent magnet synchronous motor. *Journal of Systems and Control Engineering*, 16 :461–476.
- Achir, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (2004). Ring bond graphs over non commutative rings : application to variational bond graphs. *International Mediterranean Modeling Multiconference, I3M - IMAACA, Genoa, Italy*.
- Allard, B., Morel, H., Lautier, P., and Retif, J. M. (1997). Bond graphs for average modelling of power electronic converters. *Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'97, Phoenix*, 29(1) :201–206.
- Arib, J., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (1999). Disturbance rejection by static state feedback on bond graph models. *IFAC'99, Beijing, China*, pages 297–301.

- Bertrand, J. M., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (2001). Input-output decoupling with stability for bond graph models. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 1 :39–58.
- Bodson, M. and Chiasson, J. (1998). Differential-geometric methods for control of electric motors. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8 :923–954.
- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J. P., Rotella, F., and Zambettakis, I. (1992). Modélisation et identification des processus. *Editions Technip, Paris*, Tome 2.
- Bourbaki, N. (1959). *Éléments de Mathématiques : Algèbre Commutative*. Hermann, Paris.
- Bourbaki, N. (1961). *Éléments de Mathématiques : Algèbre Commutative*. Hermann, Paris.
- Bourlès, H. and Fliess, M. (1984). Finite poles and zeros of linear systems : an intrinsic approach. *International Journal of Control*, 68 :897–922.
- Bourlès, H. and Marinescu, B. (1999). Poles and zeros at infinity of linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 No : 10 :1981–1985.
- Breedveld, P. (1984). Essential gyrators and equivalence rules for 3-port junction. *Journal of The Franklin Institute*, 318 (2) :77–89.
- Cartan, H. (1977). *Cours de calcul différentiel*. Hermann, Paris.
- Charlet, B., Lévine, J., and Marino, R. (1989). On dynamic feedback linearisation. *Systems and Control Letters*, 13 :143–151.
- Charlet, B., Lévine, J., and Marino, R. (1991). Sufficient conditions for dynamic state feedback linearisation. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 29 :38–57.
- Chen, W. K. (1976). *Applied Graph Theory*. Amsterdam : North Holland.
- Cohn, P. (1985). *Free rings and their relations*. 2nd ed., Academic press, London.
- Cruz-Victoria, J. C., Martínez-Guerra, R., and Carrido, R. (2004). Nonlinear system diagnosis. 2nd IFAC Symposium on System Structure and Control, Oaxaca, Mexico, pages 635–640.

- da Silva, P. P. and Filho, C. C. (2001). Relative flatness and flatness of implicit systems. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 39(6) :1929–1951.
- Dauphin-Tanguy, G. (2000). *Les Bond Graphs*. Hermes Science, Paris.
- Dauphin-Tanguy, G., Rahmani, A., and Sueur, C. (1999). Bond graph aided design of controlled systems. *Simulation Practice and Theory*, 7, No 5-6 :493–513.
- Dieudonné, J. (1943). Les déterminants sur un corps non commutatif. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 71 :27–45.
- Diop, S. and Martínez-Guerra, R. (2001). On an algebraic and differential approach of non-linear systems diagnosis. *Proc. of the IEEE Conference of Decision and Control, CDC01, Orlando, Florida, USA*, pages 585–589.
- E. Aranda-Bricaire, C. H. M. and Pomet, J. B. (1995). A linear algebraic framework for dynamic feedback linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(1) :127–132.
- E. Fossas, J. F. and Palau, A. (1998). Flatness, tangent systems and flat outputs. *Proceedings of the American Control Conference, Philadelphia, Pennsylvania, USA*, pages 313–317.
- El-Osta, W., Achir, A., and Sueur, C. (2005). Diagnosability analysis based on transcendence degrees and bg models. *International Mediterranean Modeling Multiconference, I3M - IMAACA, Marseille, France*.
- Fliess, M. (1986). A note on the invertibility of nonlinear input-output differential systems. *Systems and Control Letters*, 8 :147–151.
- Fliess, M. (1989). Automatique et corps différentiels. *Forum Mathematicum*, 1 :227–238.
- Fliess, M. (1990a). Generalized controller canonical form for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35 No : 9 :994 – 1001.
- Fliess, M. (1990b). Some basic structural properties of generalized linear systems. *System and Control Letters*, 15 :391–396.
- Fliess, M. (1994). Une interprétation algébrique de la transformation de laplace et des matrices de transfert. *Linear Algebra and its Applications*, 203-204 :429–442.

- Fliess, M. (1998). Some new interpretations of controllability and their practical implications. *Proc. of the IFAC Conference on System Structure and Control, Nantes, France*, pages 49–58.
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon., P. (1992). Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, I-315 :619–624.
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon., P. (1995). Flatness and defect of nonlinear systems : introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6) :1327–1361.
- Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., and Rouchon, P. (1999). A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(5) :922–937.
- Fossard, A. J. and Normand-Cyrot, D. (1993). *Systèmes non linéaires : 1. modélisation - estimation*. Masson, Paris.
- Fotsu-Ngwompu, R., Scavarda, S., and Thomasset, D. (1996). Inversion of linear time invariant siso systems modelled by bond graph. *Journal of The Franklin Institute*, 333(2) :157–174.
- Garcia-Gomez, J., Dauphin-Tanguy, G., and Rombaut, C. (1997). Bond graph approach for modelling switching losses of power semiconductor devices. *Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'97, Phoenix*, pages 207–211.
- Gawthrop, P. J. (1995). Bicausal bond graphs. *In Proceedings of the 1995 International Conference on Bond Graph Modelling and Simulation*, Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'95 :83–88.
- Gentina, J. C. and Borne, P. (1972). Sur une condition d'application du critère de stabilité linéaire à certaines classes de systèmes non linéaires. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 275 (7) :401–404.
- Grandanegra, G., Roboam, X., and Sareni, B. (2005). Model inversion of electrical engineering systems from bicausal bond graphs. *International Mediterranean Modeling Multiconference, I3M - IMAACA, Marseille, France*.

- Heyting, A. (1927). Die theorie der linearen gleichungen in einer zahlenspezies mit nichtkommutativer multiplication. *Mathematische Annalen*, 98 :465–490.
- Jakubczyk, B. (1993). Invariants of dynamic feedback and free systems. *2nd European Control Conference, ECC'93, Groningen, Netherlands*, pages 1510–1513.
- Johnson, J. (1969). Kähler differentials and differential algebra. *Transactions of the American Mathematical Society*, 89 :92–98.
- Junco, S. (1993). Stability analysis and stabilizing control synthesis via lyapunov's second method directly on bond graphs of nonlinear systems. *Proc. of the IEEE/IECON '93., International Conference on Industrial Electronics, Control, and Instrumentation, Hawaii, USA*, pages 2065–2069.
- Junco, S. (2001a). A bond graph approach to control system synthesis. *Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'01-SCS, Simulation Series*, 33(1) :125–130.
- Junco, S. (2001b). Trajectory tracking on bond graphs-procedures and applications to dc electrical drives. *Proc. of the 13th European Simulation Symposium, Simulation in Industry, ESS01, Marseille, France, SCS Europe Bvba*, pages 799–805.
- Junco, S., Donaire, A., Achir, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (2005). Non-linear control of a series direct current motor via flatness and decomposition in the bond graph domain. *Journal of Systems and Control Engineering*, 16 :215–230.
- Junco, S., Donaire, A., and Garnero, G. (2002). Suivi de trajectoire de vitesse du moteur série à courant continu : une approche bond graph. *Proc. of CIFA'02, 2^{ème} Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Nantes, France*.
- Junco, S., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (2003). A bond graph approach to flatness-based cascade control of a nonlinear dc-motor. *Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'03, SCS Simul. Series*, 35-2 :274–282.
- Karnopp, D., Margolis, D., and Rosenberg, R. (2000). *System dynamics : modelling and simulation of mechatronic systems*. John Wiley and Sons, New York, USA.
- Karnopp, D. C. and Rosenberg, R. (1975). *System Dynamics : A Unified Approach*. John Wiley, New York, USA.

- Kolchin, E. R. (1973). *Differential algebra and algebraic groups*. Academic Press, New York, USA.
- Lam, T. Y. (2001). *A First Course in Noncommutative Rings*. 2ème ed., Springer-Verlag, New work, USA.
- Lang, S. (1993). *Algebra*, 3rd edition. Addison Wesley, Reading, MA, USA.
- Lévine, J. (2004a). Analyse et commande des systèmes non linéaires. *Cours ENPC, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France*, [http ://cas.ensmp.fr/ le-vine/index.html](http://cas.ensmp.fr/le-vine/index.html).
- Lévine, J. (2004b). On necessary and sufficient conditions for differential flatness. *Proc. of the IFAC, NOLCOS 2004, Symposium on Nonlinear Control Systems, Stuttgart, Germany*.
- Lévine, J. and Nguyen, D. (2003). Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices. *Systems and Control Letters*, 48 :69–75.
- Maligorne, M., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (2001). Determination of flat outputs in linear systems. *13th European Simulation Symposium, Simulation in Industry-Bond Graph Workshop, ESSO1, Marseille, France, CSS Europe Bvba* :740–744.
- Marquis-Favre, W., Xia, X., and Scavarda, S. (2001). Bicausality-based procedures for transfer and transmission matrix determination of single source single load linear systems. *Proc. of the International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation, ICBGM'01, San Diego, USA*, pages 2735–2740.
- Martin, P. (1992). Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats. *Thèse de Doctorat, École des Mines de Paris, France*.
- Martin, P. (1993). A geometric sufficient conditions for flatness of systems with m inputs and $m + 1$ states. *Proc. of the 32th IEEE Conference on Decision and control, San Antonio, USA*, pages 3431–3436.
- Martin, P., Murray, R. M., and Rouchon, P. (1997). Flat systems. *In Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference ECC'97, Brussels, Belgium*, page 211–264.

- Martin, P. and Rouchon, P. (1994). Feedback linearization and driftless systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, pages 235–254.
- Martin, P. and Rouchon, P. (1995). Any (controllable) driftless system with m inputs and $m+2$ states is flat. *Proc. of the 34th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, USA*, pages 2886–2891.
- Mason, S. J. (1956). Feedback theory - further properties of signal flow graphs. *Proc. IRE*, 44(7) :920–926.
- Mehta, M. L. (1989). *Matrix Theory : Selected Topics and Useful Results*. Les éditions de physique, les Ulis.
- Mukherjee, A. and Karmakar, R. (2000). *Modelling and simulation of engineering systems through bond graphs*. Narosa Publishing House, New Delhi, India.
- Ould-Bouamama, B., Staroswiecki, M., and Dauphin-Tanguy, G. (2001). Actuator fault detection using bond graph approach. *European Control Conference, ECC'2001, Porto, Portugal*, pages 2735–2740.
- Paynter, M. (1961). *Analysis and Design of Engineering Systems*. MIT Press, Cambridge, MA, U.K.
- Pedraza, A. and Delgado, M. (1999). Algorithm for the determination of flatness property from a bond graph. *International Conference on Bond-Graph Modelling and Simulation, San Francisco, California*, 85-89.
- Pliam, J. O. (1989). Ring graphs and gain formulas, an algebraic approach to topology. *ISCAS*, pages 327–330.
- Pomet, J. (1997). On dynamic feedback linearisation of four-dimensional affine control systems with two inputs. *ESAIM-COCV (Contrôle optimal et Calcul de Variations)*, 2 :151–230.
- Pomet, J. B. (1993). A differential geometric setting for dynamic equivalence and dynamic linearization. In B. Jakubczyk, W. Respondek, and T. Rzeżuchowski, editors, *Geometry in Nonlinear Control and Differential Inclusions*, Banach Center Publications, Warsaw, Poland :319–339.

- R. M. Murray, M. R. and Sluis, W. (1995). Differential flatness of mechanical systems : A catalog of prototype systems. *ASME, International Mechanical Engineering Congress and Exposition*.
- Rahmani, A. (1993). Etude structurelle des systèmes linéaires par l'approch bond graph, thèse. *Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France*.
- Rahmani, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (1992). Formal determination of controllability and observability matrices for multivariable systems modelled by bond graph. *Proc. of IMACS-SICE, International Symposium on Robotics, Mechatronics and Manufacturing Systems, Kobe, Japan*.
- Rahmani, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (1994a). A new transfer matrix formal determination from a bond graph model. *14th IMACS Word Congress, Atlanta, USA*, 3 :1435–1438.
- Rahmani, A., Sueur, C., and Dauphin-Tanguy, G. (1994b). Pole assignment for systems modelled by bond graph. *Journal of The Franklin Institute*, 321(3) :229–314.
- Richard, J. P. (1990). *Mathématiques pour les systèmes dynamiques*. Hermès, Paris.
- Richard, Y. P., Buisson, J., and Cormerais, H. (2002). Analysis of flatness using bond graph and bicausality. *15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain*.
- Riegler, D. E. and Lin, P. M. (1972). Matrix signal flow graphs and optimum topological method for evaluating their gains. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 19 No : 5 :427–437.
- Rimaux, S. (1995). Etude des propriétés structurelles de certaines classes de systèmes non linéaires modélisés par bond graph, thèse. *Université des Sciences et Technologies de Lille, Lille, France*.
- Ritt, J. F. (1950). *Differential algebra*. American Mathematical Society , New York, USA.
- Rouchon, P., Fliess, M., Lévine, J., and Martin, P. (1998). Flatness and motion planning : the car with n -trailers. *2nd European Control Conference ECC'93, Groningen, Netherlands*, pages 1518–1522.

- Shadwick, W. F. (1990). Absolute equivalence and dynamic feedback linearization. *Systems and Control Letters*, 15 :35–39.
- Sluis, W. M. (1993). A necessary condition for dynamic feedback linearization. *Systems and Control Letters*, 21 :277–283.
- Sueur, C. and Dauphin-Tanguy, G. (1989). Structural controllability/observability of linear systems represented by bond graph. *Journal of The Franklin Institute*, 326(6) :869–883.
- Sueur, C. and Dauphin-Tanguy, G. (1995). Controlability indices for bond graph models. *IFAC Conference, System Structure and Control, Nantes, France*, pages 90–95.
- Thoma, J. (1975). *Introduction to bond graphs and their applications*. Pergamon Press.
- Tzann-Shin, L. (2003). Input-output linearization and zero-dynamics control of 3-phase pwm ac/dc voltage-source converters. *IEEE Transactions on Power Electronics*, 18, Issue 1 :11 – 22.
- Tzann-Shin, L. (2004). Lagrangian modelling and passivity-based control of 3-phase pwm ac/dc voltage-source converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 51, Issue 4 :892 – 902.
- van Nieuwstadt, M., Rathinam, M., and Murray, R. (1998). Differential flatness and absolute equivalence of nonlinear control systems. *SIAM Journal On Control and Optimization*, 36(4) :1225–1239.
- Verl, A. and Bodson, M. (1998). Torque maximization for permanent magnet synchronous motors. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 6-6 :740–745.

Annexe A

Méthodologie Bond Graph

L'outil bond graph (BG) fondé par Paynter, Paynter (1961) et formalisé par Karnopp et Rosenberg, Karnopp and Rosenberg (1975) et Breedveld, Breedveld (1984) est un langage graphique de modélisation de systèmes physiques dynamiques. Le modèle BG peut être considéré comme un modèle intermédiaire entre le système physique et le modèle mathématique qui lui est associé. La méthodologie BG possède deux particularités importantes, la première est son caractère unifié à tous les domaines de la physique et la deuxième est son approche structurée et modulaire de modélisation des systèmes pluridisciplinaires.

La méthodologie BG est basée sur les principes suivants :

- la représentation des transferts énergétiques entre composants ou sous-systèmes à l'aide de liens de puissance portant des variables complémentaires, effort et flux, dont le produit représente la puissance instantanée échangée,
- une organisation en éléments passifs, éléments actifs et éléments de jonction, conservateurs de puissance formant la structure du modèle,
- l'encapsulation dans les composants des lois mathématiques représentatives de leurs comportements internes et externes,
- la visualisation graphique des interactions entre composants à l'aide de traits de causalité.

Pour en savoir plus, nous recommandons aux chers lecteurs les excellents ouvrages de Dauphin-Tanguy (2000), Borne et al. (1992), Paynter (1961), Karnopp and Rosenberg (1975), Karnopp et al. (2000), Mukherjee and Karmakar (2000) et Thoma (1975) parmi d'autres.

Dans ce qui suit, nous allons rappeler un certain nombre de principes et d'outils de base de la méthodologie BG. À commencer par la symbologie graphique représentant

le transfert de puissance entre les différentes parties du système puis la définition des différentes variables de puissance et d'énergie mises en jeu. Ensuite, nous développerons les différents composants ainsi que les procédures de construction de modèles BGs. Enfin, nous présentons les notions de causalité et de bicausalité.

A.1 Représentation des transferts de puissance

Dans un système fermé composé de deux sous-systèmes Σ_A et Σ_B par exemple, il y a non seulement conservation d'énergie, mais aussi continuité de puissance. Le flux d'énergie entre les sous-systèmes Σ_A et Σ_B est représenté par un lien (bond) de puissance, une demie flèche comme représenté, figure A.6.

$$\Sigma_A \xrightarrow[e]{e} \Sigma_B$$

FIG. A.1 – Représentation BG du transfert de puissance

La puissance instantanée échangée P entre Σ_A et Σ_B se calcule par le produit effort-flux. Le sens de la demie flèche correspond au produit $P > 0$.

A.2 Variables mises en jeu

D'un point de vue global, indépendamment du domaine physique considéré, les variables e et f sont considérées comme étant les variables définissant la puissance, i.e., $P = ef$.

Comme l'énergie est l'intégrale de la puissance par rapport au temps, on distingue alors deux variables d'énergie :

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^t e(\tau) d\tau + p(0) \\ q(t) &= \int_0^t f(\tau) d\tau + q(0) \end{aligned} \tag{A.1}$$

$p(t)$ est le moment généralisé et $q(t)$ est le déplacement généralisé.

Le tableau A.2 indique la signification physique et l'unité de ces différentes variables dans certains domaines physiques.

Domaine physique	Variables de puissance				Variables de d'énergie			
	Effort e	SI	Flux f	SI	Moment $p = \int e dt$	SI	Déplacement $q = \int f dt$	SI
Mécanique translation	Force F	N	Vitesse V	$\frac{m}{s}$	Moment p	Ns	Élongation x	m
Mécanique rotation	Couple τ	Nm	Vitesse angulaire ω	$\frac{rad}{s}$	Moment angulaire H	Nms	Angle θ	rad
Électrique	Tension u	V	Courant i	A	Flux magnétique Φ	Wb	Charge q	C
Hydraulique	Pression P	$\frac{N}{m^2}$	Débit volumique Q	$\frac{m^3}{s}$	Impulsion P_p	$\frac{Ns}{m^2}$	Volume V	m^3

TAB. A.1 – Classification des différentes variables BGs

A.3 Éléments BGs

On peut classer les différents éléments BGs en trois catégories distinctes :

- les éléments passifs : R , C et I ;
- les éléments actifs : les sources Se et Sf ;
- les éléments de jonction : 0 , 1 , TF et GY .

A.3.1 Les éléments passifs

Élément R

L'élément R est utilisé pour modéliser tout phénomène physique dissipant de l'énergie (amortisseurs, résistances électriques, différents frottements, restrictions hydrauliques, etc.). Sa loi constitutive est une relation algébrique entre les variables effort et flux.

$$\Phi_R(e, f) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\xrightarrow[\text{f}]{\text{e}} R$$

Si sa valeur dépend d'un signal exogène, il devient un R modulé, e.g., servovalve.

Élément C

L'élément de stockage C emmagasine de l'énergie. La variable d'énergie qui lui est associée est notée q , elle résulte généralement des processus d'accumulation

(ou d'intégration). L'élément C est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant l'effort au déplacement, e.g., ressorts, condensateurs, réservoirs de liquide, tout phénomène d'élasticité ou de compressibilité. La loi constitutive de cet élément est :

$$\Phi_C(e, q) = 0 \quad (\text{A.3})$$

La représentation générale d'un élément C est :

$$\xrightarrow[f = \frac{dq}{dt}]{e} C$$

Élément I

L'élément I est aussi un élément de stockage d'énergie. Il est utilisé pour modéliser tout phénomène physique liant le flux au moment, e.g., les inerties (masses en translation ou en rotation), les inductances électriques, etc. La loi constitutive de cet élément est :

$$\Phi_I(p, f) = 0 \quad (\text{A.4})$$

La représentation générale d'un élément I est :

$$\xrightarrow[f]{e = \frac{dp}{dt}} I$$

A.3.2 Les éléments actifs : les sources

Les sources représentent l'interaction du système avec son environnement, (e.g., forces de gravité, vitesses, sources de tension ou de courant, etc.). Ces éléments sont qualifiés d'actifs car ils fournissent de l'énergie au système. Selon le type de variable imposée, on distingue les sources d'effort (Se) ou de flux (Sf).

$$Se \longrightarrow \qquad Sf \longrightarrow$$

L'orientation de la demie flèche est fixée et elle est toujours sortante de la source.

Dans chacun des cas, une des variables (effort ou flux) est supposée connue, et indépendante de la variable complémentaire induite qui dépend de la réaction du système.

Quand une partie du système devrait être excitée, habituellement par un signal connu, on modélise ce phénomène par une source d'effort ou de flux modulée (MSe, MSf).

A.3.3 Les éléments de jonction

Ces éléments, notés $0, 1, TF, GY$ servent à coupler les éléments R, C et I et composent la structure de jonction du modèle correspondant à l'architecture du système étudié. Ils sont conservatifs de puissance.

Jonction 0

La jonction 0 sert à associer les éléments soumis au même effort, e.g., connection parallèle dans un circuit électrique. Les lois qui la caractérisent sont :

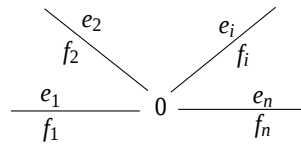


FIG. A.2 – Jonction 0

$$\begin{cases} e_1 = e_2 = \dots = e_i = \dots = e_n = e \\ \sum_{j=1}^n \pm f_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

i.e., égalité des efforts et somme pondérée des flux nulle. La pondération sur les flux est $+1$ ou -1 selon que la demie flèche est rentrante ou sortante de la jonction.

Jonction 1

La jonction 1 sert à associer les éléments soumis au même flux, e.g., connection série dans un circuit électrique. Elle est caractérisée par les lois :

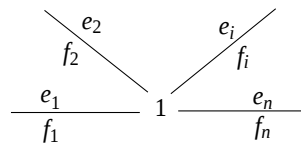


FIG. A.3 – Jonction 1

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = \dots = f_i = \dots = f_n = f \\ \sum_{j=1}^n \pm e_j = 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

i.e., égalité des flux et somme pondérée des efforts nulle. La pondération sur les efforts est $+1$ ou -1 selon que la demie flèche est rentrante ou sortante de la jonction.

Transformateurs TF

Cet élément passif possède deux ports, figure A.4, où m représente le module du transformateur. Ses lois caractéristiques sont :

$$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \overset{\overset{m}{\ddot{}}}{TF} \leftarrow \frac{e_2}{f_2}$$

FIG. A.4 – Transformateur

$$\begin{cases} e_1 = me_2 \\ f_2 = mf_1 \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

e.g., transformateurs électriques, bras de levier, systèmes d'engrenages, etc.

Si m n'est pas constant, le transformateur est modulé par un signal, il est noté MTF .

Gyrateurs GY

Cet élément passif possède également deux ports, figure A.5, où r représente le module du gyrateur. Ces lois génériques sont :

$$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \overset{\overset{r}{\ddot{}}}{GY} \leftarrow \frac{e_2}{f_2}$$

FIG. A.5 – Gyrateur

$$\begin{cases} e_1 = rf_2 \\ e_2 = rf_1 \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

On peut rencontrer ce phénomène physique dans les moteurs électriques, les composants électroniques à effet Hall, les pompes hydrauliques et les turbines.

Si r n'est pas constant, le gyrateur est modulé par un signal, il est noté MGY .

A.4 Procédure générale de construction de modèles BGs

Le modèle BG est construit sur la base du système physique idéalisé résultant des hypothèses simplifications (phénomènes pris en compte, etc.). Il existe une procédure

systématique de construction d'un modèle BG. Cette procédure consiste essentiellement en la représentation de la structure du modèle (appelé structure de jonction), l'incorporation des composants du système, la représentation du flux de puissance avec des liens "bonds" et probablement des simplifications.

Systèmes mécaniques :

- fixer un axe de référence pour les vitesses,
- associer une jonction 1 pour toute vitesse absolue (masse, inertie) ou relative différente et lui attacher les éléments correspondants,
- exprimer les relations entre vitesses. Placer une jonction 0 par relation entre les jonctions 1 associées aux vitesses intervenant dans la relation,
- relier les jonctions par des liens, en respectant le sens de transfert de puissance,
- supprimer les jonctions 1 associées à une vitesse nulle, ainsi que tous les liens qui y sont attachés et simplifier si c'est possible.

Systèmes électriques :

- fixer un sens de circulation de courant qui sera pris comme sens de transfert de puissance,
- associer une jonction 0 pour chaque noeud de tension différent,
- placer une jonction 1 entre deux jonctions 0 et y attacher les éléments soumis à la différence de potentiel (éléments ayant le même flux),
- relier toutes les jonctions entre elles en respectant le sens du transfert de puissance,
- choisir un noeud de référence et supprimer les jonctions qui y sont associées et les liens qui y sont attachés. Simplifier si c'est possible.

Systèmes hydrauliques :

La procédure est la même que dans le cas électrique, les jonctions 0 sont associées aux noeuds de pressions différentes. Le modèle BG complet est simplifié en choisissant un noeud de pression particulier (correspondant en général à la pression atmosphérique).

A.5 Causalité

Cette notion est très importante, elle permet de définir la structure de calcul avec mise en évidence des relations de cause à effet au sein d'un système, ce qui est un

avantage essentiel du bond graph par rapport aux autres représentations graphiques telles que les digraphes et les graphes de fluence.

Lorsque deux systèmes sous-systèmes Σ_A et Σ_B sont couplés, tel que Σ_A transmet de la puissance à Σ_B , nous avons deux situations possibles :

- Σ_A applique à Σ_B un effort e , qui réagit en renvoyant à Σ_A un flux f ;
- Σ_A envoie à Σ_B un flux f , qui répond par un effort e .

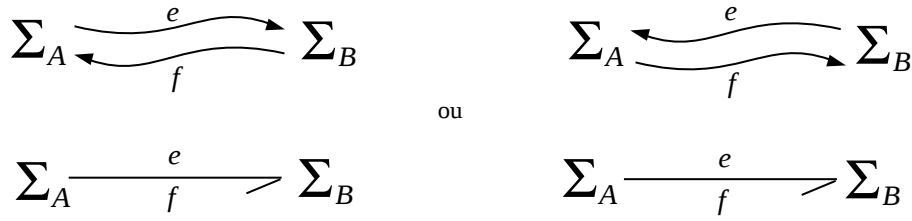
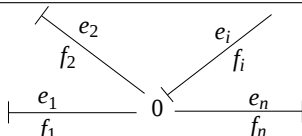
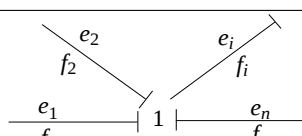


FIG. A.6 – Deux situations de causalité

Cette information est codée par un trait causal placé perpendiculairement au lien. Il indique par convention le sens dans lequel l'effort est connu (le flux est alors connu dans le sens opposé). La position de ce trait causal est indépendante du sens de la demie flèche qui représente le sens du transfert de puissance. Les règles de causalité des différents éléments sont résumées dans les tableaux A.2, A.3.

Élément	Causalité	Configuration	Loi caractéristique
Source d'effort	Obligatoire	$Se \xrightarrow[e]{f} \dashv$	e est imposé par Se
Source de flux	Obligatoire	$Sf \vdash \xrightarrow[e]{f}$	f est imposé par Sf
Élément I	Intégrale	$\xrightarrow[e]{f} \dashv I$	$f_I = \Phi_I(\int e_I dt)$
	Dérivée	$\vdash \xrightarrow[e]{f} I$	$e_I = \frac{d}{dt} [\Phi_I^{-1}(f_I)]$
Élément C	Intégrale	$\vdash \xrightarrow[e]{f} C$	$e_C = \Phi_C(\int f_C dt)$
	Dérivée	$\xrightarrow[e]{f} \dashv C$	$f_C = \frac{d}{dt} [\Phi_C^{-1}(e_C)]$

TAB. A.2 – Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs

Élément	Causalité	Configuration	Loi caractéristique
Élément R non linéaire	Conductance	$\frac{e}{f} \rightarrow R$	$f_R = \Phi_R^{-1}(e_R)$
	Résistance	$\vdash \frac{e}{f} \rightarrow R$	$e_R = \Phi_R(f_R)$
Jonction 0	Un seul trait près de la jonction 0		$e_1 = e_i, e_2 = e_i, \dots, e_n = e_i$ $f_i = \pm \sum_{j=1}^n \pm f_j, i \neq j$
Jonction 1	Un seul trait loin de la jonction 1		$f_1 = f_i, f_2 = f_i, \dots, f_n = f_i$ $e_i = \pm \sum_{j=1}^n \pm e_j, i \neq j$
Transformateur TF	Flux rentrant	$\vdash \frac{e_1}{f_1} \xrightarrow{m} \frac{e_2}{f_2} \rightarrow$	$\begin{cases} e_1 = m e_2 \\ f_2 = m f_1 \end{cases}$
	Effort rentrant	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \xrightarrow{m} \frac{e_2}{f_2} \vdash$	$\begin{cases} e_2 = \frac{1}{m} e_1 \\ f_1 = \frac{1}{m} f_2 \end{cases}$
Gyrateur TG	Flux rentrant	$\vdash \frac{e_1}{f_1} \xrightarrow{r} \frac{e_2}{f_2} \vdash$	$\begin{cases} e_1 = r f_2 \\ e_2 = r f_2 \end{cases}$
	Effort rentrant	$\frac{e_1}{f_1} \rightarrow \xrightarrow{r} \frac{e_2}{f_2} \rightarrow$	$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{r} e_1 \\ f_2 = \frac{1}{r} e_2 \end{cases}$

TAB. A.3 – Règles d'affectation de la causalité aux éléments BGs - suite

Procédure d'affectation de la causalité

Une fois que le modèle BG complet est obtenu, on peut alors appliquer la procédure suivante connue sous le nom de SCAP (Sequential Causality Assignment Procedure).

1. Affecter une causalité obligatoire aux sources et aux éléments R non linéaires et répercuter sur l'environnement en respectant les restrictions de causalité des jonctions.
2. Affecter une causalité intégrale préférentielle aux éléments I et C et répercuter sur l'environnement en respectant également les restrictions sur les jonctions.
3. Compléter la causalité sur les éléments R linéaires en respectant les restrictions sur les jonctions.

4. En cas de conflit de causalité, rechercher l'élément I ou C en cause et lui affecter une causalité dérivée puis repartir à l'étape 3.
5. Affecter la causalité au détecteurs, s'il y a lieu.

A.6 Bicausalité

La notion de bicausalité, Gawthrop (1995) est particulièrement intéressante pour la construction de modèles BGs inverses ou l'identification des paramètres d'un système. Avec la causalité conventionnelle (traditionnelle), il existe seulement deux possibilités d'affectation de la causalité. Ces deux situations sont représenté figure A.7-(a,b) et traduites par les équations (A.9-a,b). La bicausalité permet d'étendre le concept de causalité pour ajouter les deux possibilités restantes, figure A.7-(c,d). Ces deux nouvelles situations sont traduites par les équations (A.9-c,d).

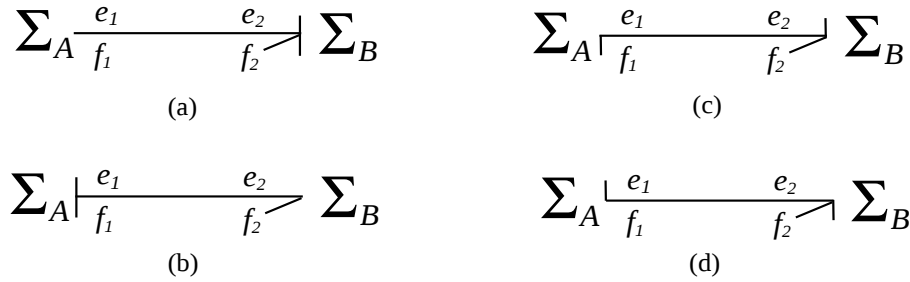


FIG. A.7 – Possibilités d'affectation de la causalité

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \begin{cases} e_2 := e_1 \\ f_1 := f_2 \end{cases} & \text{(b)} \quad & \begin{cases} e_1 := e_2 \\ f_2 := f_1 \end{cases} & \text{(c)} \quad & \begin{cases} e_2 := e_1 \\ f_2 := f_1 \end{cases} & \text{(d)} \quad & \begin{cases} e_1 := e_2 \\ f_1 := f_2 \end{cases} \quad (\text{A.9})
 \end{aligned}$$

Les différentes possibilités d'affectation de la bicausalité des différents composants BGs sont résumées dans le tableau suivant :

Bicausalité	Relations d'affectation	Bicausalité	Relations d'affectation
	$e_1 := e_2$ $f_1 := f_2$		$f_R = \Phi_R^{-1}(e_R)$
	$e_2 := e_1$ $f_2 := f_1$		$e_R = \Phi_R(f_R)$
	$R := \frac{e}{f}$		$u = \frac{f_2}{f_1}$
	$I := \frac{e}{f}$		$u = \frac{e_1}{e_2}$
	$C := \frac{e}{f}$		$u = \frac{e_2}{e_1}$
	$e_1 := me_2$ $f_1 := \frac{1}{m}f_2$		$u = \frac{f_1}{f_2}$
	$e_2 := \frac{1}{m}e_1$ $f_2 := mf_1$		$u = \frac{e_2}{f_1}$
	$e_1 := rf_2$ $f_1 := \frac{1}{r}e_2$		$u = \frac{e_1}{f_2}$
	$f_2 := \frac{1}{r}e_1$ $e_2 := rf_1$		$u = \frac{f_2}{e_1}$
	$e_2 := e_1$ $e_3 := e_1$ $f_3 := f_1 - f_2$		$u = \frac{f_1}{e_2}$
	$f_2 := f_1$ $f_3 := f_1$ $e_3 := e_1 - e_2$		

TAB. A.4 – Règles d'affectation de la bicausalité aux différents composants BGs

Sources et détecteurs

Dans le contexte de la bicausalité, la particularité de ces éléments a conduit à l'introduction de l'élément *SS* (Source-Sensor), Gawthrop (1995) qui constitue une généralisation des notions de sources et de détecteurs conventionnels. Le tableau A.5 indique les différentes configurations possibles d'affectation de la causalité à l'élément *SS*.

Causalité	Nature de l'éléments <i>SS</i>
$SS \longrightarrow \rceil$	Source d'effort, détecteur de flux
$SS \vdash \longrightarrow$	Source de flux, détecteur d'effort
$SS \lhd \longrightarrow$	Détecteur d'effort, détecteur de flux
$SS \rceil \longrightarrow$	Source d'effort, source de flux

TAB. A.5 – Affectation de la causalité à l'élément *SS*

A.7 Construction du modèle BG inverse

L'idée d'utiliser la notion de bicausalité pour l'inversion de modèles BGs est motivée par les possibilités calculatrices offertes par la bicausalité. En effet, la bicausalité permet d'imposer les deux variables de puissance aux ports de l'éléments *SS*. Cette idée est illustrée, figures A.8 et A.9.



FIG. A.8 – Modèle BG à mot d'un système

Le système a comme entrée $u = e_i$ et comme sortie $y = e_o$. La variable f_i conjuguée à la commande $u = e_i$ est alors imposée par le système. Si on souhaite maintenant imposer la variable de sortie $y = e_o$, la variable conjuguée f_o doit aussi être imposée. De plus, elle doit être nulle pour ne pas fournir de la puissance au système qui au départ ne fournissait pas de puissance à l'environnement. En propageant alors la bicausalité, on va remonter à la variable de commande $u = e_i$ tout en laissant libre l'évolution de sa variable conjuguée f_i qui reste donc une sortie pour le système, figure A.9.



FIG. A.9 – Modèle BG inverse d'un système

Procédure de construction du modèle BG inverse

Cette procédure d'inversion est dû à Fotsu-Ngwompu et al. (1996).

- à partir du modèle BG en causalité intégrale, déterminer un ensemble de chemins causaux entrées-sorties disjoints les plus courts,
- sur le modèle BG acausal, remplacer les sources (associées aux commandes) et les détecteurs (associées aux sorties) par des éléments SS ,
- propager la bicausalité le long de cet ensemble de chemins causaux entrées-sorties disjoints les plus courts sans créer de conflits de causalité,
- imposer une causalité intégrale aux éléments dynamiques restants sans causalité et propager la causalité le plus loin possible,
- affecter une causalité arbitraire aux éléments R restants sans causalité et propager la causalité le plus loin possible.

Remarque 19.

- *Dans le cas où il n'existe aucun ensemble de chemins causaux entrées-sorties disjoints, le modèle n'est donc pas inversible.*
- *Si par contre, il existe plusieurs choix de chemins causaux entrées-sorties disjoints, la procédure peut s'appliquer indifféremment sur l'un de ces ensembles.*
- *Par ailleurs, si des conflits de causalité surviennent au cours de l'application de la procédure, alors, le modèle est aussi non inversible.*

Annexe B

Calcul de $u(t), x(t)$ en fonction de $y(t)$ par la méthode indirecte

B.1 Calcul $u(t)$ en fonction de $y(t)$

L'expression du vecteur de commandes $u(t)$ en fonction des sorties plates $y(t)$ s'écrit $u(t) = \Phi(s)y(t)$. La relation de transfert entre $y(t)$ et $u(t)$ est $y(t) = T(s)u(t)$ et la matrice système du modèle (C, A, B) est notée $P(s)$. Par définition, la relation de transfert entre $u(t)$ et $y(t)$ s'écrit $y(t) = T(s)u(t) = N(s)D^{-1}(s)u(t)$, avec $D(s) = \text{diag}[\det(sI - A)]$. Le vecteur de commande $u(t)$ s'exprime ainsi comme $u(t) = D(s)N^{-1}(s)y(t)$. Il suffit alors de calculer $N^{-1}(s)$.

Le modèle (C, A, B) est plat, i.e., $\det(P(s))$ est indépendant de s . En tenant compte de la relation $\det(P(s)) = \det(sI - A)\det(T(s))$ et en notant $\det(P(s)) = K$, la relation (B.1) est déduite.

$$\det(N(s)) = K[\det(sI - A)]^{m-1} \quad (\text{B.1})$$

L'inverse de la matrice $N(s)$ est exprimée par la relation (B.2).

$$N^{-1}(s) = \frac{1}{\det(N(s))}(\text{Com}N(s))^t \quad (\text{B.2})$$

Soit $\overline{N}_{ji}(s)$ la matrice obtenue en enlevant la $j^{\text{ème}}$ ligne de $N(s)$ et la $i^{\text{ème}}$ colonne de $N(s)$. Elle correspond au modèle pour lequel la $i^{\text{ème}}$ variable de commande et la $j^{\text{ème}}$ variable de sortie sont enlevées du modèle initial. La matrice système associée à ce modèle est notée $\overline{P}_{ji}(s)$. L'expression de $\Phi_{ij}(s)$ est donc obtenue à partir du déterminant de la matrice $\overline{N}_{ji}(s)$ selon l'expression (B.3).

$$\Phi_{ij}(s) = (-1)^{(i+j)} \frac{\det(\bar{N}_{ji}(s))}{\det(N(s))} \cdot \det(sI - A) \quad (\text{B.3})$$

Le déterminant de la matrice $\bar{N}_{ji}(s)$ s'obtient à partir du déterminant de la matrice système $\bar{P}_{ji}(s)$. Il vient ainsi l'expression (B.4) qui se réduit en l'expression (B.5).

$$\Phi_{ij}(s) = (-1)^{(i+j)} \frac{\det(\bar{P}_{ji}(s))}{\det(P(s))} \frac{[\det(sI - A)]^{m-2}}{[\det(sI - A)]^{m-1}} \cdot \det(sI - A) \quad (\text{B.4})$$

Le coefficient $\Phi_{ij}(s)$ est donc le rapport, affecté d'un signe, entre le déterminant des matrices systèmes du modèle initial et le modèle pour lequel la $i^{\text{ème}}$ variable de commande et la $j^{\text{ème}}$ variable de sortie sont enlevées, expression (B.5).

$$\Phi_{ij}(s) = (-1)^{(i+j)} \frac{\det(\bar{P}_{ji}(s))}{\det(P(s))} \quad (\text{B.5})$$

Cette expression s'obtient aussi directement par le calcul de l'inverse de la matrice système, qui permet d'obtenir une démonstration plus simple. La démarche proposée s'applique au calcul de chacune des expressions.

Fin de la démonstration■

B.2 Calcul du vecteur $x(t)$ en fonction des sorties plates $y(t)$

L'expression des variables d'état $x(t)$ en fonction des sorties plates $y(t)$ s'écrit $x(t) = \Psi(s)y(t)$. Comme par définition les relations de transfert s'écrivent $x(t) = N^*(s)D^{-1}(s)u(t)$ et $y(t) = N(s)D^{-1}(s)u(t)$, le vecteur de commande $u(t)$ s'exprime comme $u(t) = D(s)N^{-1}(s)y(t)$ soit $x(t) = N^*(s)N^{-1}(s)y(t)$.

Les variables d'état s'écrivent donc selon l'expression (B.6) en tenant compte de (B.1).

$$x(t) = \Psi(s)y(t) = \frac{1}{K[\det(sI - A)]^{m-1}} N^*(s) \text{Com}(N(s))^t \cdot y(t) \quad (\text{B.6})$$

Soit $N_r^{j \rightarrow i}(s)$ la matrice $\left(\begin{matrix} N_{r1}^t(s) & \dots & N_{rj-1}^t(s) & N_{ri}^t(s) & N_{rj+1}^t(s) & \dots & N_{rm}^t(s) \end{matrix} \right)^t$, c'est à dire la matrice $N(s)$ pour laquelle la $i^{\text{ème}}$ ligne est remplacée par la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $N^*(s)$, notée $N_{ri}^*(s)$. L'indice r indique que la matrice $N(s)$ est décrite

par les lignes. Chaque coefficient $\Psi_{i,j}(s)$ de la matrice $\Psi(s)$ satisfait la relation (B.7).

$$\Psi_{i,j}(s) = \frac{1}{K[\det(sI - A)]^{m-1}} \sum_{k=1}^{k=m} N_{i,k}^*(s)[Com(N(s))]_{k,j}^t \quad (\text{B.7})$$

$$= \frac{1}{K[\det(sI - A)]^{m-1}} \sum_{k=1}^{k=m} N_{i,k}^*(s)[Com(N(s))]_{j,k} \quad (\text{B.8})$$

$$= \frac{1}{K[\det(sI - A)]^{m-1}} \det(N_r^{j \rightarrow i}(s)) \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{\det(sI - A)}{K} \det(D^{-1}(s)N_r^{j \rightarrow i}(s)) \quad (\text{B.10})$$

$$= \frac{1}{K} \det(sI - A) \det(T^{j \rightarrow i}(s)). \quad (\text{B.11})$$

$$= \frac{1}{K} \det(P^{j \rightarrow i}(s)) \quad (\text{B.12})$$

où $T^{j \rightarrow i}(s)$ est la matrice de transfert entre les sorties $(y_1, \dots, y_{j-1}, y_i, y_{j+1}, \dots, y_m)$ et les entrées $(u_1, \dots, u_m)$. $P^{j \rightarrow i}(s)$ est donc bien la matrice système du modèle obtenu en remplaçant la $j^{\text{ème}}$ sortie plate dans le modèle (C, A, B) par la $i^{\text{ème}}$ variable d'état.

Fin de la démonstration ■