

UNIVERSITÉ TOULOUSE III – PAUL SABATIER
UFR PHYSIQUE-CHIMIE-AUTOMATISME

ÉCOLE DOCTORALE
SCIENCES DE L'UNIVERS, DE L'ENVIRONNEMENT ET DE L'ESPACE

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ TOULOUSE III
Spécialité : Physique des plasmas spatiaux
présentée et soutenue publiquement
par

Gabriel FRUIT

le 24 février 2003

**PROPAGATION DES ONDES MHD
DANS LES COUCHES DE COURANT
STRUCTURE DES MODES ET TRANSFERTS
ÉNERGÉTIQUES
COMPARAISON AVEC LES DONNÉES CLUSTER**

JURY

| | |
|-----------------------|-------------------------|
| M. HENRI RÈME | Président |
| M. MICHEL TAGGER | Rapporteur |
| M. ALAIN ROUX | Rapporteur |
| M. JEAN HEYVAERTS | Examineur |
| M. DOMINIQUE LE QUÉAU | Directeur de thèse |
| M. PHILIPPE LOUARN | Responsable des travaux |

Remerciements

Le mémoire que, cher lecteur, vous avez eu la curiosité d'ouvrir est le fruit de quatre années de recherche personnelle, qui n'aurait cependant pas pu être mené à bien sans l'intervention de nombreuses personnes, qui m'ont apporté aide et soutien. Il est donc naturel que je leur consacre ces quelques lignes.

Ce travail en grande part théorique n'a de sens que s'il peut être confronté in fine aux observations. En ce sens, ma thèse n'aurait pas pu voir le jour sans la détermination et le courage d'une poignée de scientifiques qui ont refusé d'abandonner la mission CLUSTER I atomisée avec la fusée Ariane V. La reconstruction de quatre satellites fut sans doute une tâche longue et difficile et je remercie tous les chercheurs qui ont participé de près ou de loin à la renaissance de CLUSTER. Leur effort collectif ne peut susciter chez un jeune chercheur que de l'admiration et un immense respect.

Je tiens à remercier tout particulièrement Philippe Louarn pour avoir accompagné ma démarche scientifique avec patience, rigueur et dévouement. J'ai trouvé en lui une grande capacité d'écoute et une remarquable disponibilité pour répondre à mes innombrables questions. Il m'a toujours apporté un soutien sans faille et ses encouragements ont souvent eu raison de mes moments de doute. J'associerais à ces remerciements Dominique Le Quéau pour l'accueil qu'il m'a fait au laboratoire et pour avoir conçu le sujet de cette thèse. Les quelques discussions que j'ai eues avec lui ont toujours été enrichissantes et je suis heureux de lui communiquer ici toute mon estime. Enfin, Anatoly Tur, véritable puits de sciences mathématiques, a apporté une contribution importante à ce travail. Nos nombreux échanges (certes assez hermétiques au début !) m'ont fait progressé dans la compréhension et la maîtrise des techniques mathématiques nécessaires à la résolution du problème posé.

Merci également à chacun des membres du jury : Henri Rème, Jean Heyvaerts, Alain Roux et Michel Tagger pour avoir consacré une part de leur précieux temps à la correction et à l'évaluation de ce manuscrit.

D'une manière moins solennelle, je remercie ma mère pour avoir fait l'effort de relire ce mémoire aux qualités si peu littéraires ! Je remercie aussi pour leurs conseils, leur aide ou simplement leur sympathie, tous les gens du CESR, au sein duquel j'ai passé quatre années enrichissantes. Plus particulièrement, Pierre-Louis pour ses conseils en informatique, Christophe pour m'avoir proposé des enseignements à l'université ainsi que tous les doctorants, qui ont partagé cette aventure avec moi.

Enfin, je ne pourrais pas conclure ces quelques lignes sans avoir une pensée pour mon grand-père, Georges Ambrosino, qui a contribué à la création et au premier essor du CESR. Disparu hélas trop tôt, il a eu toutefois le temps de me transmettre la passion de la science et je lui dédie ce mémoire.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 9 |
| 2 | Les couches de courant dans le système solaire | 15 |
| 2.1 | Omniprésence des couches de courant | 15 |
| 2.1.1 | Le cas de la couronne solaire | 15 |
| 2.1.2 | Le cas de la magnétosphère terrestre | 17 |
| 2.2 | Événements éruptifs dans les couches de courant | 21 |
| 2.3 | Dynamique linéaire des couches de courant | 22 |
| 2.3.1 | Le chauffage de la couronne solaire | 22 |
| 2.3.2 | Oscillations globales de la magnétosphère | 25 |
| 2.3.3 | La queue magnétosphérique terrestre | 27 |
| 3 | Etude d'un condensateur | 29 |
| 3.1 | Position du problème | 30 |
| 3.2 | Réponse à un courant impulsionnel | 32 |
| 3.2.1 | Champ électrique | 32 |
| 3.2.2 | Calcul de la ddp par l'inversion de la transformée de Laplace | 33 |
| 3.2.3 | Bilan énergétique | 35 |
| 3.3 | Réponse à un courant sinusoïdal | 36 |
| 3.4 | Conclusion sur l'absorption résonante | 39 |
| 4 | Réponse linéaire de la queue | 41 |
| 4.1 | Description de l'équilibre | 41 |
| 4.2 | Conditions initiales | 43 |
| 4.3 | Théorie linéaire des perturbations | 44 |
| 4.4 | Equation maîtresse | 46 |
| 4.5 | Conditions aux limites | 47 |
| 4.6 | Fonction de Green et reconstruction du signal | 48 |
| 4.7 | Singularités de la fonction de Green | 49 |
| 5 | Modes globaux de la queue | 52 |
| 5.1 | Conséquences de l'hypothèse $k_y = 0$ | 52 |
| 5.2 | Développement de la fonction de Green | 54 |
| 5.3 | Relations de dispersion | 56 |
| 5.4 | Reconstruction du signal | 59 |
| 5.4.1 | Inversion de la transformée de Laplace | 59 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 5.4.2 | Exemples de pulse initial | 60 |
| 5.4.3 | Excitation du premier harmonique par un pulse centré sur la couche neutre | 61 |
| 5.4.4 | Coefficients de couplage | 68 |
| 5.4.5 | Cas où le pulse n'est pas symétrique | 75 |
| 5.5 | Conclusion | 79 |
| 6 | Les modes continus de la queue | 81 |
| 6.1 | Fonction de Green – Reconstruction du signal | 81 |
| 6.1.1 | Rappel sur la forme générale de la fonction de Green | 81 |
| 6.1.2 | Singularités de la fonction de Green | 82 |
| 6.1.3 | Inversion de la transformée de Laplace | 85 |
| 6.1.4 | Procédure numérique | 86 |
| 6.2 | Composantes de Fourier | 87 |
| 6.2.1 | Excitation par un pulse gaussien | 87 |
| 6.2.2 | Excitation par un pulse sinusoïdal | 92 |
| 6.3 | Reconstruction complète du signal | 95 |
| 6.3.1 | Evolution spatio-temporelle des perturbations | 95 |
| 6.3.2 | Formation des petites échelles | 100 |
| 6.3.3 | Considérations énergétiques | 102 |
| 6.4 | Conclusion | 105 |
| 7 | Analyse d'un événement CLUSTER | 107 |
| 7.1 | Le cas du 22 août 2001 : vue d'ensemble | 107 |
| 7.2 | Détermination des paramètres de la couche | 109 |
| 7.3 | Périodes observées – Comparaison avec la théorie | 113 |
| 7.4 | Identification des modes d'oscillation | 115 |
| 7.5 | Origine des perturbations | 119 |
| 8 | Conclusion | 124 |
| | Bibliographie | 131 |
| A | Ondes MHD dans un plasma uniforme | 135 |
| B | La transformation de Laplace | 139 |
| B.1 | Définition et premières propriétés de la transformée de Laplace | 139 |
| B.2 | Transformées de Laplace de fonctions usuelles | 140 |
| B.3 | Le calcul de la transformée inverse de Laplace | 140 |
| C | La fonction logarithme complexe | 142 |
| D | Cas d'une couche à gradient linéaire | 144 |
| E | Publications | 146 |

Table des figures

| | | |
|-----|---|----|
| 2.1 | Photographie de la couronne solaire prise par le satellite YOHKOH dans le spectre des X doux | 16 |
| 2.2 | Schéma de la magnétosphère terrestre | 18 |
| 2.3 | Schéma montrant l'apparition d'un courant circulant le long de la magnétopause suite à la déflexion des particules du vent solaire (adaptée de Cravens (1997)) | 19 |
| 2.4 | Schéma qualitatif illustrant les phénomènes de mélange de phase (a) et d'absorption résonante (b). Sur le schéma (a), on observe la distorsion des fronts d'ondes avec apparition de gradients dans la zone de non homogénéité. Sur le schéma (b), l'énergie initialement répartie dans tout l'espace se concentre autour de la ligne de résonance. | 24 |
| 2.5 | Le modèle de la boîte unidimensionnelle. Les frontières de la boîte sont les ionosphères nord et sud (en vert), la plasmasphère (en bleu) et la magnétopause (en rouge). Figure adaptée de Southwood et Kivelson (1990). | 27 |
| 3.1 | Schéma du condensateur | 30 |
| 3.2 | Points et lignes de branchement de $\hat{V}(\omega)$ | 34 |
| 3.3 | Différence de potentiel pour un courant sinusoïdal | 36 |
| 3.4 | Puissance fournie par le générateur au cours du temps | 37 |
| 3.5 | Densité d'énergie totale en fonction de x et du temps | 38 |
| 3.6 | (a) Énergie totale emmagasinée dans le condensateur ; (b) Comparaison entre la puissance reçue P_r et la puissance fournie P_g | 38 |
| 5.1 | Régionnement du plan (ω, k) suivant le type de solution escomptée : en rouge, solution singulière ; en vert, solution régulière rayonnant vers l'extérieur ; en bleu, solution régulière évanescence. | 53 |
| 5.2 | Relations de dispersion pour les 4 premiers modes (du bleu au mauve) | 57 |
| 5.3 | Vitesses de groupe pour les 4 premiers modes | 57 |
| 5.4 | Structure spatiale des modes propres : bleu : $k = 0.5$, vert : $k = 1$ et rouge : $k = 2$ | 58 |
| 5.5 | Contour \mathcal{C} d'intégration dans le plan ω -complexe. | 59 |
| 5.6 | Propagation du déplacement transversal : (a) en fonction de x pour 4 valeurs de $t = 0 - 20 - 40 - 60$ et (b) en fonction de t pour 4 valeurs de $x = 10 - 20 - 40 - 60$ | 63 |

| | | |
|------|--|----|
| 5.7 | Vitesses de propagation du signal : isocontours du déplacement transversal ξ_z dans le plan (t, x) | 64 |
| 5.8 | Structures spatiales du déplacement transversal, de la pression thermique et de la pression magnétique à $t = 40$ | 65 |
| 5.9 | Spectres des champs magnétiques perturbé et total à $t = 40$ | 66 |
| 5.10 | Propagation du déplacement transversal pour $L_x = 10$: (a) en fonction de x pour 4 valeurs de $t = 0 - 20 - 40 - 60$ et (b) en fonction de t pour 4 valeurs de $x = 10 - 20 - 40 - 60$ | 69 |
| 5.11 | Structures spatiales du déplacement transversal, de la pression thermique et de la pression magnétique à $t = 40$ | 70 |
| 5.12 | Coefficients de couplage des deux premiers harmoniques impairs. | 71 |
| 5.13 | Coefficient de couplage du premier harmonique impair en fonction de k et τ pour $L_x = 1$ et $L_z = 1$ | 71 |
| 5.14 | Coefficient de couplage du premier harmonique impair en fonction de k et L_x pour $\tau = 0.66$ et $L_z = 1$ | 73 |
| 5.15 | Coefficient de couplage du premier harmonique impair en fonction de k et L_z pour $L_x = 1$ et $\tau = 0.66$ | 73 |
| 5.16 | Coefficients de couplage pour $z_0 = 0.5$, $\tau = 0.66$, $L_x = 1$ et $L_z = 0.5$ | 75 |
| 5.17 | Variations temporelles du fondamental et du premier harmonique en $x = 40R_T$ et $z = 0.5R_T$. La valeur de L_x est prise égale à 1 en haut et à 10 en bas. | 76 |
| 5.18 | Structure spatiale du déplacement transversal, de la pression magnétique et de la pression thermique à $t = 40$ pour les paramètres choisis. | 77 |
| 5.19 | Polarisation du champ magnétique perturbé et du champ magnétique total | 78 |
| 6.1 | Partie imaginaire de la fonction de Green dans le plan ω -complexe | 84 |
| 6.2 | Déformation du contour d'intégration dans le demi-plan inférieur | 86 |
| 6.3 | Comportement temporel de la k -composante de Fourier du déplacement transversal pour $k = 1$, $L_z = 0.5$, $\tau = 1$ et pour trois positions dans la couche. | 88 |
| 6.4 | Spectres des oscillations en $z = 0.4$: en haut pour t allant de 0 à 100 et en bas pour t allant de 100 à 200. | 89 |
| 6.5 | Variations de la fréquence cusp ω_c en fonction de z pour trois valeurs de k : bleu $k = 0.5$, vert $k = 1$ et rouge $k = 2$ | 90 |
| 6.6 | Variations du taux d'absorption suivant le nombre d'onde k et la position dans la couche | 91 |
| 6.7 | Comportement temporel de la k -composante de Fourier ($k = 1$) pour une excitation sinusoïdale à la fréquence $\omega_0 = \omega_c(z = 1.5)$ et en trois positions de la queue. | 94 |
| 6.8 | Propagation d'un pulse gaussien et vitesse cusp | 95 |
| 6.9 | Propagation d'un pulse gaussien (type I) pour trois valeurs du temps et trois valeurs de z : bleu $z = 0.5$, vert $z = 1$ et rouge $z = 2$. Colonne de gauche : déplacement transversal ξ_z . Colonne de droite : déplacement longitudinal ξ_x | 97 |

| | | |
|------|---|------|
| 6.10 | Composantes compressionnelle b_x (en bleu) et torsionnelle b_z (en vert) du champ magnétique dans le cas d'une excitation du type I. | 98 |
| 6.11 | Propagation d'un pulse sinusoïdal (type II) pour trois valeurs du temps et deux valeurs de z | 99 |
| 6.12 | Composantes compressionnelle b_x (en bleu) et torsionnelle b_z (en vert) du champ magnétique dans le cas d'une excitation du type II. | 100 |
| 6.13 | Evolution du gradient transversal au cours de la propagation pour $z = 1$ | 1101 |
| 6.14 | Variation au cours du temps de l'échelle caractéristique transversale des perturbations pour $z = 0.5$ en bleu et $x = 1$ en vert | 102 |
| 6.15 | Variation de l'énergie transversale déposée dans la couche par un pulse de type gaussien | 104 |
| 6.16 | Variation de l'énergie transversale déposée dans la couche par un pulse sinusoïdal | 104 |
| 7.1 | Survol du 22 août 2001 par le satellite 1 : (1) Spectrogramme des ions ; (2) Densité des ions ; (3) Vitesses des ions ; (4) Pression thermique ; (5) Champ magnétique. | 108 |
| 7.2 | Positions des quatre satellites dans le repère GSM. L'unité est le rayon terrestre R_T | 110 |
| 7.3 | De bas en haut : (1) champ magnétique B_x sur les trois satellites 2, 3, 4 ; (2) normale à la couche dans le plan (Y, Z) ; (3) densité et température, (4) demi-épaisseur a et vitesse du son v_s ; (5) temps caractéristique τ et (6) transformée en ondelettes du champ magnétique. | 111 |
| 7.4 | Relations de dispersion pour le fondamental kink (bleu) et le premier harmonique sausage (vert). Les droites en pointillés correspondent à la vitesse du son et la vitesse d'Alfvén dans les lobes. | 114 |
| 7.5 | Zoom de la figure 7.3 sur la période 09h00-11h00. Les fluctuations pouvant s'interpréter comme des modes MHD sont observées entre 09h40 et 10h10. | 116 |
| 7.6 | Identification des modes : de haut en bas : (1) composante B_x du champ magnétique vue par les quatre satellites ; (2) Pression thermique mesurée par CIS ; (3) Pression totale (thermique + magnétique) ; (4) Position de la couche neutre et épaisseur de la couche modélisée par un profil de Harris ; (5) Reconstruction de la couche ; (6) Temps caractéristique et période des ondes MHD associée à une longueur d'onde de $5a$ | 117 |
| 7.7 | Reconstruction de la couche de plasma pour les paramètres indiqués dans le texte. Les flèches bleues représentent le spectre du champ magnétique total. Les isocontours correspondent à la pression thermique totale en haut et à la pression thermique perturbée en bas. . . | 120 |
| 7.8 | Fluctuations de pression : de haut en bas : (1) champ magnétique, (2) et (3) pression mesurée en bleu, fluctuation de pression en noir et position de la couche neutre en rouge pour les satellites 1 et 4, (4) position de la couche neutre et variations de la pression totale, (5) fluctuations de pression, (6) position de la couche neutre et fluctuations de pression thermique. | 122 |

A.1 Diagramme des vitesses de groupes pour les trois modes MHD 137

C.1 Définition du logarithme complexe : la ligne rouge est une ligne de
branchement et $\log(z) = \ln |z| + i\theta$ 142

Chapitre 1

Introduction

L'étude de la formation des structures constitutives de notre environnement ionisé et de leur dynamique occupe une place importante en physique spatiale. Le système solaire est balayé par un flot continu de particules chargées (principalement des électrons et des protons) en provenance du Soleil : le vent solaire. Cet écoulement interagit avec tous les corps du système solaire. En particulier, lorsque le vent solaire rencontre une planète magnétisée, comme la Terre, les lignes de champ magnétiques sont déformées en une gigantesque "cavité" comprimée du côté jour et étirée en une longue queue du côté nuit : une magnétosphère. Cet environnement est peuplé de diverses particules chargées issues du vent solaire ou de l'ionosphère, et regroupées en régions de densité et d'énergie différentes. L'ensemble constitue un milieu complexe et très dynamique, objet de nombreuses recherches tant théoriques qu'expérimentales. L'observation montre que les différentes régions de la magnétosphère terrestre sont séparées par de minces interfaces. En partant du vent solaire, la première interface rencontrée est le choc séparant le flot supersonique et super-alfvénique d'une région de plasma thermalisé : la magnétogaine. Ensuite, la magnétopause, épaisse de quelques centaines de kilomètres et s'étendant sur plusieurs rayons terrestres, sépare la magnétogaine de la magnétosphère interne peuplée de plasma d'origine essentiellement ionosphérique et dominée par le champ magnétique terrestre. La magnétopause est une surface de discontinuité du champ magnétique dans laquelle circulent d'important courants électriques. Une couche de courant assure donc la jonction entre deux régions gouvernées par des champs magnétiques bien distincts. C'est une zone privilégiée pour les échanges de matière et d'énergie entre les différentes parties de la magnétosphère. De la même manière, la zone centrale de la queue magnétosphérique peut être considérée comme une fine couche de courant séparant les deux lobes de la magnétosphère. C'est dans cette région que se développent certains processus dyna-

miques (les sous-orages) régissant l'ensemble de l'activité de la magnétosphère. Par leur rôle dans les échanges de matière et d'énergie et par leur dynamique propre, les couches de courant sont donc un élément essentiel de tout environnement ionisé et magnétisé. Ces configurations magnétiques s'observent assez communément dans le système solaire, que ce soit dans des environnements aussi différents que l'atmosphère solaire ou la magnétosphère de Jupiter. Dans le cas de la couronne solaire, par exemple, les régions proches de l'équateur se caractérisent par une structuration magnétique complexe résultant d'une juxtaposition de multiples boucles ou arches coronales. Chacune de ces structures peut être considérée comme une ou plusieurs couches de courant. Leur dynamique est vraisemblablement à la base de phénomènes éruptifs ("solar flares" par exemple). Par ailleurs, elles peuvent être le support d'oscillations de basse fréquence potentiellement importantes pour expliquer le chauffage de la couronne solaire. Dans un autre registre, la couche centrale du magnétodisque de Jupiter peut être également assimilée à une couche de courant, la géométrie est alors différente (symétrie cylindrique plutôt que symétrie de translation). De manière très générale, on peut attendre de tout environnement magnétisé un peu complexe qu'il soit structuré par des couches de courant et rien n'empêche d'imaginer que des processus dynamiques similaires vont se développer dans toutes ces configurations. Mes recherches ont porté sur l'étude de la réponse linéaire de ces structures à des perturbations extérieures pour en analyser :

1. les modes de propagation,
2. les processus d'échange d'énergie qui en découlent.

Ce travail théorique est complété par une analyse des données des satellites CLUSTER qui permettent, pour la première fois, une analyse tridimensionnelle de la dynamique des couches.

De nombreuses observations de la couronne solaire et des couches frontières de la magnétosphère terrestre ont montré l'existence de perturbations basse fréquence se propageant le long des couches de courant emplies d'un plasma non homogène. Par basse fréquence, nous entendons des oscillations dont la fréquence est nettement plus faible que la gyrofréquence du proton ou, dans le cas présent, dont les périodes sont supérieures à quelques dizaines de secondes dans le cas présent. La caractérisation de ces ondes peut nous renseigner sur le milieu dans lequel elles se propagent et également sur la manière dont elles ont été générées. D'une façon générale, lorsqu'un système physique, initialement en équilibre, est perturbé par un phénomène extérieur, celui-ci réagit en émettant des ondes dont la nature dépend du système

et de l'excitateur. Par exemple, une onde sonore dans un fluide résulte d'un changement de pression qui peut être provoqué par des sources d'origines aussi diverses que les vibrations des cordes vocales ou l'explosion d'une usine. Naturellement, l'énergie véhiculée par l'onde dans ces deux exemples n'est pas du même ordre de grandeur et les conséquences d'une explosion sont bien plus à redouter. Néanmoins, quelque soit la nature de la source, la perturbation de pression se propage dans l'atmosphère avec une vitesse qui ne dépend que des caractéristiques de l'air, à savoir de sa composition, de sa densité ou de sa température. Si nous connaissons la nature du milieu dans lequel ces ondes se propagent, nous pouvons donc prédire leur vitesse de propagation ainsi que leur polarisation. Réciproquement, les ondes recèlent de nombreuses informations sur le milieu qui les supporte. Lorsque le système est infini, la relation entre la fréquence et la longueur d'onde nous informe sur les propriétés dispersives du milieu. En revanche, lorsque le système est d'extension limitée, une excitation extérieure engendre un ensemble d'ondes stationnaires, résultant de la superposition d'oscillations sinusoidales à des fréquences bien particulières : les modes propres. Les fréquences propres ne dépendent pas de l'excitateur extérieur, elles sont fonction de la géométrie du système et du milieu de propagation. Par contre, l'excitateur agit sur l'amplitude de ces différents modes. En particulier, un phénomène de résonance apparaît quand l'excitateur oscille lui-même à une fréquence appartenant au spectre du système. D'une manière générale, on peut considérer l'étude des modes de vibrations linéaires d'un milieu comme un moyen d'analyse :

1. des propriétés locales du milieu (température, densité, composition ...),
2. de sa géométrie et de sa non homogénéité,
3. de ses conditions aux limites,
4. des mécanismes qui les ont excités (couplage du milieu propagatif avec l'excitateur).

Par ailleurs, les ondes transportent de l'énergie et de la quantité de mouvement. Nous verrons que dans un milieu non homogène, la propagation peut s'accompagner d'une dissipation d'énergie. Ce volet énergétique de l'étude de la propagation sera une des motivations importantes de mon travail. Il s'agit en effet de l'analyse des processus dissipatifs dans les plasmas sans collisions qui constitue une des thématiques essentielles de cette discipline.

Une couche de courant peut être considérée comme un système résonant couplé à un excitateur extérieur. Les diverses oscillations observées dans ces couches correspondent aux modes propres du système. Dans un plasma, il existe une classe

particulière d'ondes qui diffèrent à la fois des ondes sonores purement compressionnelles, et des ondes électromagnétiques purement transversales. On les appelle ondes magnétohydrodynamiques (ondes MHD en abrégé). Dans un plasma homogène de champ magnétique uniforme, ces ondes se divisent en trois modes distincts : l'onde d'Alfvén transversale et les modes magnéto-sonores, lent, et rapide. Ces modes se distinguent en particulier par le diagramme de leur vitesse de groupe (cf. annexe A). En revanche, dans un plasma non homogène, la vitesse d'Alfvén varie dans l'espace et ces trois modes se couplent entre eux. La non homogénéité du milieu est alors à l'origine de deux phénomènes physiques importants, dont il sera longuement question dans ce mémoire : le mélange de phase et l'absorption résonante. Ces deux processus jouent un rôle essentiel dans les échanges énergétiques entre les ondes et les particules constitutives du plasma. En particulier, ils conduisent à un transfert d'énergie des ondes vers le plasma, soit en favorisant la croissance de forts gradients, soit en "canalisant" l'énergie des ondes dans des petites régions de l'espace. La conversion de l'énergie en chaleur ou en énergie cinétique récupérée par les particules est assurée par la présence de résistivité lorsque le plasma est collisionnel. Cependant, même en l'absence de collisions binaires, la dissipation d'énergie peut être réalisée par le jeu de processus non linéaires ou d'interactions cinétiques avec les particules du plasma. On dispose ainsi de deux moyens de chauffage du plasma par les ondes. Le chapitre 3 propose une étude analytique de ces deux phénomènes dans une situation un peu éloignée de la physique spatiale, celle d'un condensateur rempli d'un diélectrique non homogène et alimenté par divers courants variables. Cependant, les techniques mathématiques ainsi que l'interprétation des phénomènes physiques mis en jeu y sont exposées en détail et seront utiles dans la compréhension des processus existant dans la physique magnétosphérique.

Le problème du couplage des modes MHD dans un plasma non homogène est un problème important de la physique des plasmas qui dépasse largement le cadre de la physique spatiale. Il s'agit en fait de décrire la réponse linéaire d'un système certes idéalisé (emploi des équations MHD) mais qui conserve la spécificité de son hétérogénéité et de ses conditions aux limites. Historiquement, la question s'est posée au sein de la communauté des physiciens nucléaires. Pour initier une réaction de fusion thermonucléaire, il faut porter le milieu réactionnel composé d'un plasma non homogène d'hydrogène et d'hélium à des températures très élevées, de l'ordre du million de K. L'excitation résonante des ondes d'Alfvén constitue une voie possible pour ce chauffage (Tataronis et Grossmann, 1973 ; Tataronis, 1975). Pour

ce faire, un système de courants électriques circule autour du plasma, engendrant une onde électromagnétique dont la vitesse de phase correspond à une des vitesses d'Alfvén du milieu. Une onde d'Alfvén entre alors en résonance dans une zone très restreinte du système. L'énergie de l'onde électromagnétique excitatrice s'accumule dans cette région où elle est convertie en chaleur. Parallèlement, les physiciens solaires ont émis l'idée que ce phénomène de couplage résonant pouvait être à l'origine du chauffage de la couronne solaire (Ionson, 1978). Enfin, dans le cadre de la physique magnétosphérique, les pulsations magnétiques observées au sol pourraient également provenir du même phénomène (Southwood et Kivelson, 1990, et les références incluses). Le chapitre 2 reprend en détails ces différentes études, qui ont jusqu'à présent été menées indépendamment les unes des autres.

Par ailleurs, l'étude des perturbations basse fréquence dans la magnétosphère terrestre, outre son intérêt théorique évident, devient une nécessité depuis le succès de la mission CLUSTER II lancée en juillet et août 2000. En effet, cette expérience est composée de quatre satellites identiques chargés, entre autres, d'étudier la structure tridimensionnelle des perturbations se propageant dans les couches frontières de la magnétosphère terrestre (magnétopause et queue magnétique). Elle constitue une approche totalement nouvelle dans l'histoire de l'exploration spatiale. Jusqu'alors les missions spatiales constituées d'un seul satellite ne pouvaient réaliser que des mesures en un point donné et à un instant donné. Avec l'avènement de CLUSTER, nous disposons de quatre mesures simultanées des principaux paramètres du plasma en différents points de la magnétosphère. Il est de ce fait possible d'analyser la propagation de perturbations dans les trois dimensions de l'espace. Le CESR a pris une part importante dans la conception, la réalisation et le suivi de cette mission (institut PI du spectromètre ionique CIS). C'est donc dans ce contexte que s'inscrit mon travail de recherche. Afin d'aider l'interprétation des données issues de cette mission, nous avons construit un cadre théorique décrivant la réponse d'une couche de courant à une perturbation d'origine extérieure dans l'approximation de la magnétohydrodynamique linéaire. Bien que la méthode d'approche soit très générale, l'étude se concentre sur la queue magnétosphérique terrestre. Le chapitre 4 développe le formalisme mathématique nécessaire à la résolution de ce problème aux valeurs initiales. De manière très classique, nous commençons par linéariser le systèmes d'équations de la MHD pour en extraire une équation différentielle à coefficients non constants par la technique de la transformée de Fourier-Laplace. La recherche de la fonction de Green du problème constitue l'étape suivante du raisonnement.

Enfin, nous reconstruisons complètement le signal spatio-temporel résultant de l'excitation extérieure. Cette dernière étape n'est que très rarement présentée dans la littérature. Elle est cependant indispensable dans une confrontation avec les données CLUSTER, car elle permet une discussion des amplitudes des diverses fluctuations et ainsi d'évaluer la quantité d'énergie déposée dans le système. Le chapitre 5 applique les résultats précédents à la détermination des modes propres discrets de la queue magnétosphérique terrestre, modélisée par une couche de Harris. Nous déterminons les fréquences propres ainsi que la structure spatiale des modes. En choisissant un exciteur particulier, en l'occurrence un pulse de pression, nous calculons la réponse de la queue dans ce domaine de fréquence. Cependant la non homogénéité du plasma fait apparaître en outre un spectre continu de fréquences propres, lié au couplage des modes MHD discuté plus haut. La reconstruction du signal sur ces modes continus est l'objet du chapitre 6. Les singularités mathématiques associées à ce phénomène y sont clairement mises en évidence. L'ensemble de ces travaux théoriques a fait l'objet de deux publications jointes en annexes. Dans un dernier chapitre (7), nous présentons une analyse de données CLUSTER concernant les oscillations observées dans la queue magnétosphérique le 22 août 2001. Ce travail doit néanmoins être considéré comme une analyse préliminaire. Il illustre la complexité des processus dynamiques susceptibles de se développer dans les couches de courant. Nous verrons en particulier que si certains phénomènes sont sans doute descriptibles par les méthodes mises en place dans les chapitres théoriques de cette thèse, d'autres y échappent totalement. C'est, au final, un des apports importants de ce travail : une classification claire, fondée sur l'observation, des processus relevant d'une description MHD classique et ceux qui nécessiteront des méthodes plus élaborées. En ce sens, c'est évidemment un point de départ pour de futurs développements.

Chapitre 2

Les couches de courant dans le système solaire

2.1 Omniprésence des couches de courant

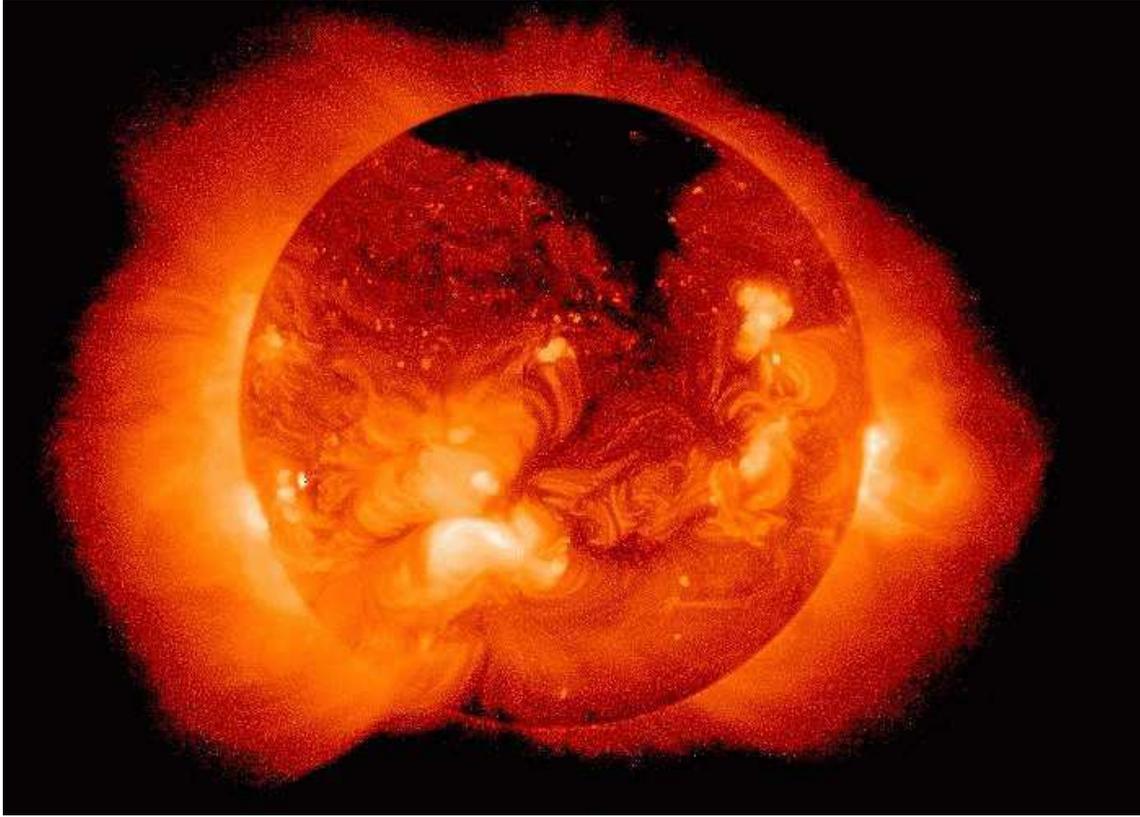
2.1.1 Le cas de la couronne solaire

L'atmosphère du Soleil est divisée en trois couches distinctes : la photosphère, la chromosphère et la couronne. La photosphère est la surface visible du Soleil. C'est une couche très mince de quelques centaines de kilomètres d'épaisseur, constituée d'un plasma de densité de l'ordre de 10^{23} m^{-3} et de température voisine de la température effective du Soleil, soit 5800 K. L'observation de la photosphère en lumière visible fait apparaître une structure granulaire provenant de larges mouvements de convection dans la zone convective sous-jacente.

La chromosphère est une couche de l'ordre de 2 500 km d'épaisseur située au-dessus de la photosphère. Sa densité chute à 10^{17} m^{-3} et sa température atteint $2 \cdot 10^4$ K. Elle est transparente en lumière visible mais elle révèle des structures complexes et actives dans la raie α de l'hydrogène. On y distingue notamment des points brillants, zones de champ magnétique intense et des filaments sombres appelés également protubérances.

La partie la plus externe de l'atmosphère solaire s'appelle la couronne. Par l'intermédiaire du vent solaire, elle s'étend en fait dans tout le système solaire jusqu'à l'héliopause. Cependant, nous nous concentrerons dans ce paragraphe sur la couronne proche du Soleil, caractérisée par une densité avoisinant 10^{15} m^{-3} et une température extrêmement élevée, de l'ordre de 2 millions de K. L'augmentation importante de la température dans la couronne a été découverte dans les années 1940 et reste encore une énigme de nos jours. En raison du flux lumineux intense en provenance de la

Fig. 2.1 Photographie de la couronne solaire prise par le satellite YOHKOH dans le spectre des X doux



photosphère, la couronne solaire ne peut s'observer directement en lumière blanche. Il est nécessaire d'attendre une éclipse ou d'utiliser un coronographe pour occulter complètement le disque solaire. En revanche, la couronne solaire s'observe entièrement dans le domaine des rayons X doux.

La photographie 2.1 prise par le satellite japonais YOHKOH de la mission SOHO révèle la complexité et l'importance des structures contrôlées par le champ magnétique. D'immenses arches de matière de longueur typique de l'ordre de plusieurs centaines de milliers de kilomètres surplombent la chromosphère. On les appelle boucles magnétiques coronales. Elles contiennent du plasma chaud et dense confiné par le champ magnétique. C'est de ces régions de structure magnétique complexe, généralement situées au niveau de l'équateur que s'échappe le vent solaire lent. A d'autres endroits, on observe des zones sombres appelées trous coronaires. Ils correspondent en fait à des régions de matière plus froide et moins dense où les lignes de champ magnétiques sont ouvertes. C'est dans ces trous coronaires que le vent solaire rapide est généré. Ils s'observent plutôt dans les régions de haute latitude.

Dans le cadre de notre travail, nous considérerons que les boucles coronales sont essentiellement des exemples de structures de courant assimilables à des nappes monodimensionnelles emplies d'un plasma aux caractéristiques nettement différentes de celles du milieu externe. Cette image de *YOHKOH* illustre de manière particulièrement frappante la présence généralisée des couches de courant dans l'environnement solaire. Nous allons voir maintenant que des structures similaires existent dans l'environnement terrestre.

2.1.2 Le cas de la magnétosphère terrestre

Interaction entre le vent solaire et le champ magnétique terrestre Le vent solaire est constitué d'un plasma de protons et d'électrons – avec une petite proportion d'hélium ionisé de l'ordre de 5% – en expansion radiale de la photosphère vers le milieu interplanétaire. A une distance du Soleil de 1 U.A., la densité du vent solaire varie de 5 à 10 particules par cm^{-3} , sa vitesse pratiquement radiale avoisine 450 km/s et la température des composants ioniques et électroniques est de l'ordre de 10^5 K ou 10 eV (Hundhausen, 1995). Comme la vitesse du son dans les conditions de cet écoulement est de l'ordre de 50 km/s et la vitesse d'Alfvén avoisine 40 km/s, le vent solaire est nettement supersonique et super-alfvénique.

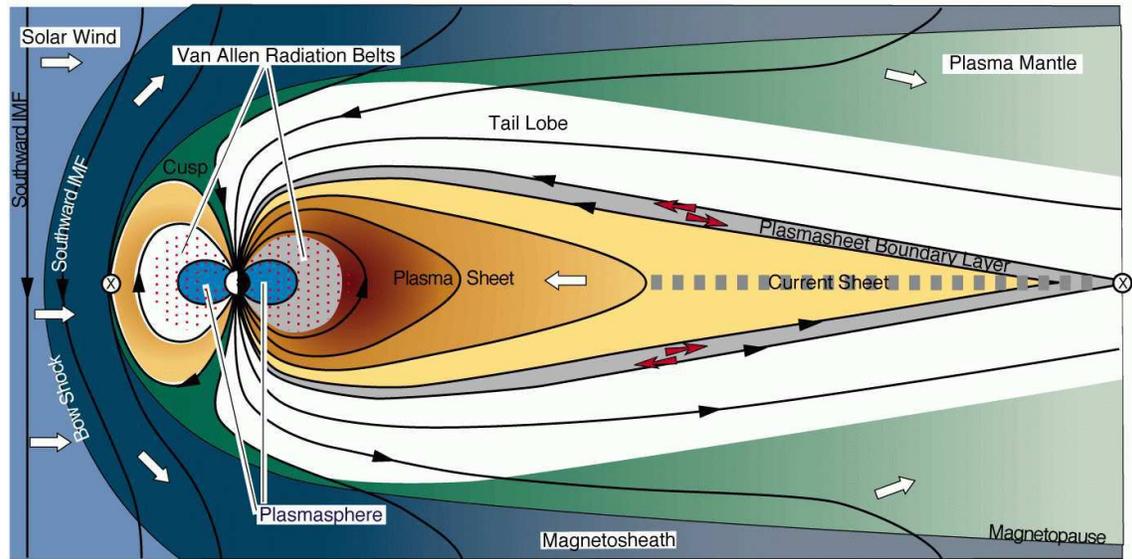
Par ailleurs, le vent solaire entraîne dans son mouvement le champ magnétique interplanétaire. On dit que ce dernier est gelé dans le plasma : les tubes de champ se déplacent et se déforment au gré des mouvements du vent solaire. L'éjection des particules du vent solaire combinée à la rotation de l'étoile impriment une forme particulière aux lignes du champ interplanétaire : la spirale de Parker (Parker, 1963). L'orientation du champ magnétique est globalement contenue dans le plan de l'écliptique avec un angle de 45° par rapport à l'axe Soleil-Terre au niveau de l'orbite terrestre ; son intensité est de l'ordre de 5 nT. Cependant, en raison de la dynamique interne du Soleil et des hétérogénéités de sa surface, le champ magnétique interplanétaire possède une petite composante nord-sud qui joue un rôle essentiel dans le couplage entre le vent solaire et la magnétosphère terrestre.

Grâce à son champ magnétique propre, la Terre constitue un obstacle efficace à l'écoulement du vent solaire et nous protège ainsi de ce flux énergétique de particules chargées. En effet le plasma du vent solaire ne peut pas pénétrer le champ magnétique terrestre, il est au contraire dévié le long des lignes de champ, tel un jet d'eau contre une paroi imperméable. En retour la topologie externe du champ magnétique terrestre est déformée en une cavité comprimée du côté jour et étirée en une longue queue

du côté nuit, atteignant des distances supérieures à 1000 rayons terrestres. Cette structure fortement magnétisée et essentiellement vide, mise à part quelques régions particulières où la densité augmente fortement, est appelée magnétosphère.

La figure 2.2 représente un schéma général de la magnétosphère terrestre. Nous allons brièvement décrire les différentes parties de cette structure (Lilensten et Blelly, 1999) :

Fig. 2.2 Schéma de la magnétosphère terrestre



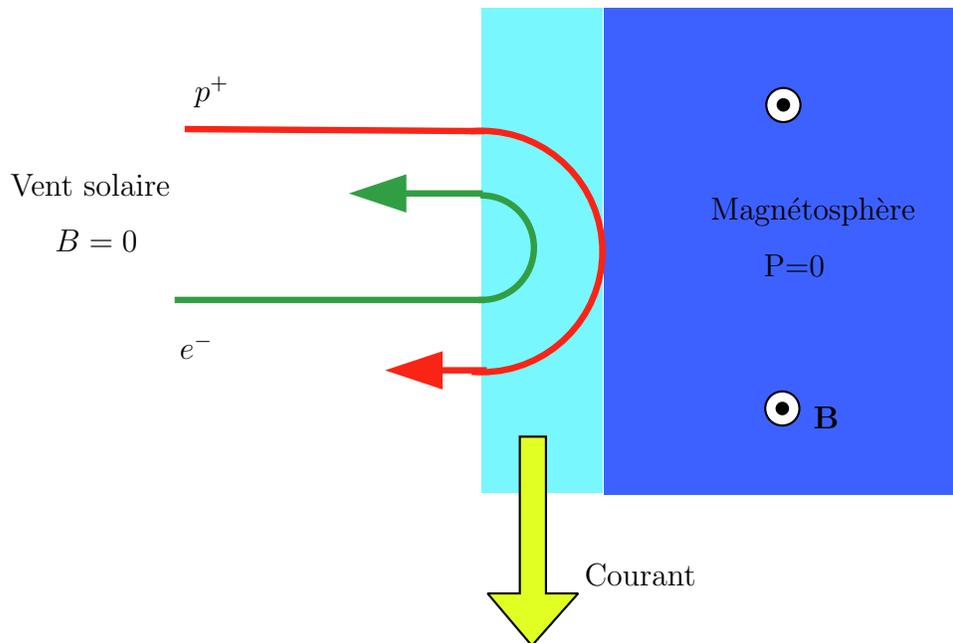
Les zones frontières correspondent aux régions d'interaction du vent solaire avec le champ magnétique terrestre. Elles comprennent le choc (ou bow-shock), la magnétogaine (ou magnetosheath, sur la figure 2.2 en bleu foncé), la magnétopause et les cornets polaires (ou cusp).

Par rapport à l'obstacle magnétosphérique, le vent solaire est supersonique et une onde de choc stationnaire se développe donc en amont de la magnétosphère (voir par exemple Cravens, 1997, pour une discussion qualitative du choc). Le "nez" du choc se situe à environ 13 rayons terrestres sur l'axe Terre-Soleil. Le choc est une région de thermalisation du vent solaire incident. A travers le choc, la vitesse du vent solaire passe de 400 km/s à 100 km/s. Parallèlement, la température du plasma augmente brusquement de 10^5 K à $2 \cdot 10^6$ K. Ce milieu chaud et peu magnétisé définit la magnétogaine. Cette région correspond donc au plasma du vent solaire ralenti et chauffé par le choc, qui contourne la planète en emportant avec lui le champ

magnétique interplanétaire.

Le vent solaire exerce sur le champ géomagnétique une pression essentiellement cinétique ; en retour le champ magnétique terrestre exerce une pression d'origine magnétique sur le vent solaire. Le lieu d'équilibre entre ces deux pressions s'appelle la magnétopause. Sa forme et sa position dépendent fortement des propriétés du vent solaire. En avant de la magnétosphère, elle est située à une distance moyenne de dix rayons terrestres (Cravens, 1997 ; Walker et Russell, 1995) ; en aval de la Terre, elle délimite les dimensions de la queue magnétique qui semble s'évaser jusqu'à un diamètre de 20 à 30 rayons terrestres. Par ailleurs, la magnétopause est une couche de courant séparant le plasma de la magnétogaine faiblement magnétisé, du plasma magnétosphérique contrôlé par le champ magnétique terrestre. La figure 2.3 représente schématiquement comment un courant électrique est généré au niveau de la magnétopause. Les particules chargées provenant du vent solaire sont déviées dans la direction opposée par le champ magnétique terrestre sous l'effet de la force de Lorentz. Comme les particules ne sont pas déviées de la même façon selon le signe de leur charge, il en résulte l'existence d'un courant circulant le long de la couche frontière.

Fig. 2.3 Schéma montrant l'apparition d'un courant circulant le long de la magnétopause suite à la déflexion des particules du vent solaire (adaptée de Cravens (1997))



Enfin, les cornets polaires sont situés au niveau des pôles nord et sud de la Terre. Ils correspondent à des régions où les lignes du champ géomagnétique sont ouvertes. Les particules du vent solaire peuvent alors pénétrer dans la haute atmosphère et interagissent avec les molécules neutres pour donner naissance aux spectaculaires aurores polaires.

La magnétosphère interne est la région de la magnétosphère la plus proche de la planète. Elle contient principalement la plasmasphère (en bleu clair sur la figure 2.2) et les ceintures de radiations de Van Allen. Elle est dominée par le champ magnétique terrestre de topologie approximativement dipolaire. La plasmasphère, entourant la Terre et s'étendant sur quelques rayons terrestres, renferme du plasma dense et froid d'origine ionosphérique. A l'extérieur de la plasmasphère circulent des particules énergétiques : les ceintures de Van Allen. Ces particules sont piégées par la topologie particulière des lignes de champ en forme de bouteille magnétique.

La magnétosphère externe, enfin, est constituée de la longue queue dans laquelle se côtoient deux entités distinctes : les lobes (en blanc) et la couche de plasma (ou plasma sheet ou encore current sheet, en jaune). Sa frontière avec la magnétopause forme le manteau de plasma (en vert).

Les lobes sont caractérisés par un champ magnétique quasiment parallèle au plan de l'écliptique et d'intensité constante de l'ordre de 25 nT. Ils sont emplis d'un plasma très ténu de densité inférieure à 0.1 particules par cm^{-3} . Dans le lobe nord, le champ magnétique est orienté vers la Terre alors que dans le lobe sud, il est orienté vers la queue.

La couche de plasma est une mince couche de plasma chaud ($T \simeq 1 \text{ keV}$) s'étendant dans le plan médian de la queue magnétique jusqu'à des distances supérieures à mille rayons terrestres. Son épaisseur varie de quelques milliers à quelques dizaines de milliers de kilomètres et dépend fortement de l'activité magnétosphérique. L'origine de ce plasma est diverse : une partie provient de l'ionosphère, une autre partie émane du manteau de plasma où les particules du vent solaire peuvent pénétrer à l'intérieur de la cavité. Au centre du feuillet se situe la couche neutre où le champ magnétique change de sens et il n'y subsiste plus qu'une petite composante transversale. Pour assurer cette topologie très étirée des lignes de champ, un fort courant électrique circule à travers la queue (dans une direction perpendiculaire au plan de la figure 2.2) de l'aube vers le crépuscule. Cette région se caractérise donc par une accumulation

d'énergie magnétique. Elle soutient l'ensemble de la structure magnétique définie par les lobes.

En conclusion, les observations de la couronne solaire et l'exploration spatiale de la magnétosphère (qui peut être généralisée aux magnétosphères des autres planètes) font apparaître l'existence d'une structuration importante des milieux ionisés. Il en ressort en particulier que les couches de courant jouent un rôle fondamental dans cette structuration et plus généralement dans la dynamique de ces milieux. Nous allons voir maintenant qu'aussi bien le feuillet de plasma que les arches coronales sont des lieux d'événements éruptifs en grande part similaires qui mettent en jeu d'énormes quantités d'énergie.

2.2 Événements éruptifs dans les couches de courant

La dynamique de la magnétosphère terrestre est régie par un phénomène spectaculaire qui affecte l'ensemble de la cavité : le sous-orage. On désigne ainsi la séquence d'événements qui se produisent lors de la dissipation brutale de l'énergie magnétique emmagasinée dans la magnétosphère lorsque le champ magnétique interplanétaire est dirigé vers le sud. Les sous-orages sont des phénomènes fréquents – on peut en observer plusieurs par jour – et durent typiquement quelques dizaines de minutes. Il est habituel de décomposer un sous-orage en trois phases successives :

1. la phase de croissance correspond à l'accumulation de l'énergie en provenance du vent solaire dans la queue magnétosphérique,
2. la phase d'expansion pendant laquelle le sous-orage se développe. Elle correspond à la libération de l'énergie stockée dans la phase précédente,
3. la phase de recouvrement au cours de laquelle la magnétosphère retrouve sa configuration initiale.

Les sous-orages apparaissent comme un phénomène fondamental de la physique magnétosphérique mais aussi l'un des plus controversés. Plusieurs mécanismes ont été proposés pour les interpréter (Cravens, 1997 ; McPherron, 1995). Leur principe est d'expliquer la dissipation du courant qui définit la structure même de la nappe de courant. Nous n'entrerons pas plus dans les détails des sous-orages car ils ne constituent pas le sujet de cette thèse. Nous voulons simplement souligner ici que ces phénomènes prennent une part importante dans l'activité magnétosphérique. De manière générale,

ils affectent profondément l'équilibre global de la magnétosphère en modifiant la topologie des lignes de champ et la circulation des courants et du plasma dans la structure.

Il est cependant intéressant de remarquer que des phénomènes similaires se produisent dans la couronne solaire. Il s'agit des éruptions solaires dont la manifestation optique est l'émission intense de rayonnements X et UV (raie $H\alpha$). Là encore, on peut décomposer la séquence d'événements liés à une éruption solaire en trois phases distinctes (Priest, 1994) :

1. croissance lente d'une protubérance confinée à l'intérieur d'une arcade magnétique due à un déséquilibre ou à une instabilité dans la chromosphère,
2. déclenchement de l'explosion : les lignes de champ sont étirées et emmagasinent de l'énergie jusqu'à se briser et se reconnecter. L'énergie est alors libérée de façon brutale en rayonnements et en énergie cinétique,
3. phase principale au cours de laquelle le processus de reconnexion magnétique se poursuit, la protubérance continue à s'élever.

Les éruptions solaires et les sous-orages sont donc des phénomènes de grande ampleur. Cependant, pendant les périodes "calmes", on observe souvent des perturbations basse fréquence dont les amplitudes sont plus modestes. Contrairement aux processus impliqués dans les sous-orages et éruptions qui affectent la structure globale de la couche de courant, ces oscillations peuvent s'interpréter dans le cadre de la théorie linéaire des perturbations. Nous verrons plus loin que ces oscillations prennent une part importante dans les processus d'échange d'énergie. Le paragraphe suivant effectue un survol des diverses études touchant à ce sujet.

2.3 Dynamique linéaire des couches de courant

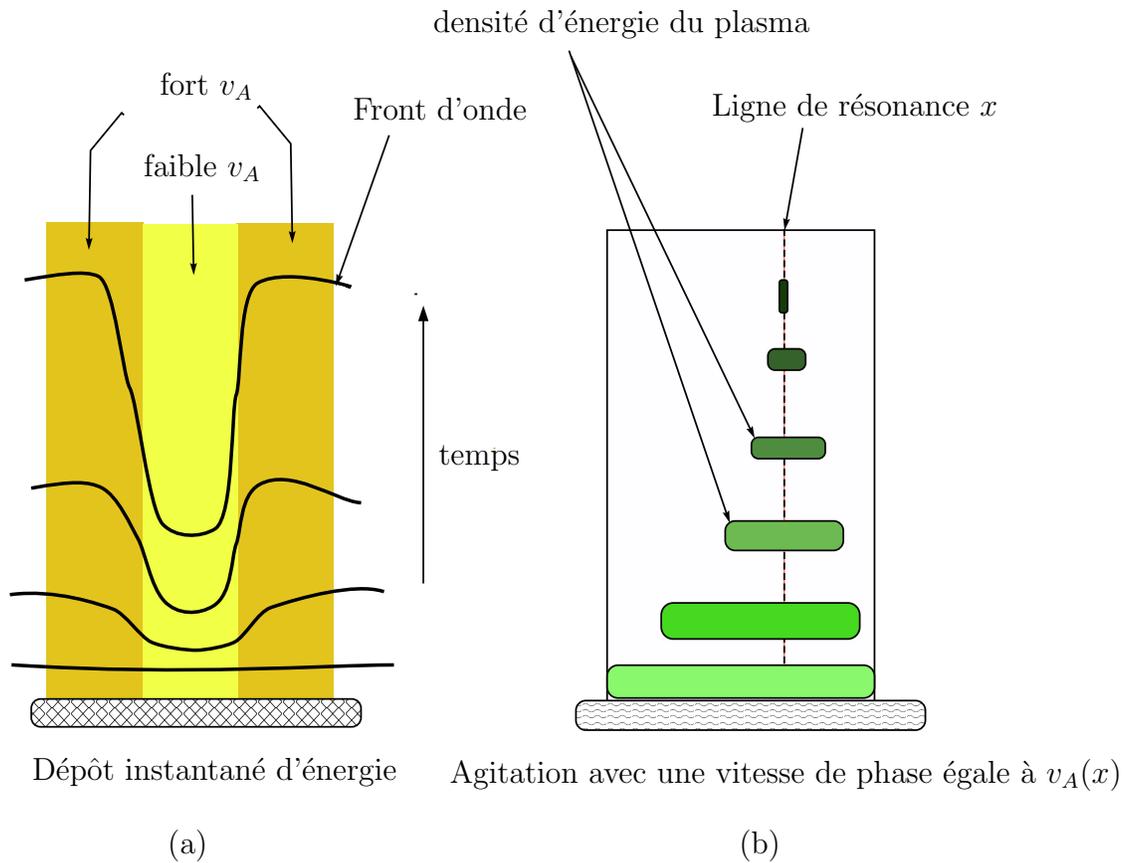
2.3.1 Le chauffage de la couronne solaire

Le mécanisme de chauffage de la couronne solaire n'a pas encore été totalement élucidé et il constitue un des problèmes importants de la physique solaire. Il y a une vingtaine d'années, on pensait que le champ magnétique à la surface du Soleil était très faible (de l'ordre de 10^{-4} T) et que le chauffage de la couronne était assuré par des ondes acoustiques en provenance de la photosphère. Mais les mesures effectuées depuis avec les satellites Skylab, Yohkoh ou SMM ont profondément modifié cette vision. En particulier le flux d'énergie acoustique n'est pas suffisant pour expliquer la température élevée de la couronne (Athay et White, 1978).

Ainsi, il est maintenant largement admis que le champ magnétique joue un rôle essentiel dans ce processus. Du fait de la conductivité élevée du plasma photosphérique, les lignes de champ magnétique sont solidement ancrées dans la photosphère, si bien que les pieds des boucles sont contraints de suivre les mouvements de convection de la photosphère. Plusieurs scénarios ont été proposés pour expliquer le chauffage des boucles selon la rapidité des mouvements convectifs. Lorsque les mouvements sont lents par rapport au temps de propagation d'une onde d'Alfvén le long d'une boucle, les lignes de champ s'entortillent et il a été suggéré que la libération de l'énergie magnétique en chaleur s'effectue via le phénomène de reconnection magnétique (Parker, 1972). En revanche, lorsque les mouvement des pieds sont plus rapides, des ondes magnétohydrodynamiques sont engendrées à la base des boucles et se propagent le long des lignes de force jusqu'à l'autre extrémité de la boucle où elles sont réfléchies. De telles oscillations ont été reportées dans les spectres X par Saba et Strong (1991). Une boucle coronale peut donc être considérée comme une cavité résonante supportant un système d'ondes stationnaires à des fréquences bien précises (Hollweg, 1984, 1987). L'énergie de ces ondes peut alors être convertie en chaleur par les mécanismes d'absorption résonante ou de mélange de phase. Ces deux phénomènes sont en fait issus du même processus mais apparaissent différemment selon les circonstances. Supposons que la vitesse d'Alfvén ne varie que selon une direction ($0x$), deux plans voisins perpendiculaires à x supportent des ondes d'Alfvén se propageant à des vitesses légèrement différentes. Il en résulte que ces ondes vont subir un déphasage croissant au cours de leur propagation. Les perturbations magnétiques associées présenteront alors de forts gradients qui correspondent à la formation locale de courants qui, en présence de résistivité dans le milieu, seront dissipés. Dans un plasma sans collisions binaires, la dissipation peut être réalisée par le jeu de processus non linéaires ou d'interactions avec les particules constitutives du plasma. On parle alors de mélange de phase (Heyvaerts et Priest, 1983). Mais un autre mécanisme peut également agir. Lorsqu'un excitateur engendre des ondes magnétoacoustiques rapides avec un vitesse de phase de valeur égale à l'une des vitesses d'Alfvén $v_A(x_0)$, une résonance apparaît sur la surface magnétique $x = x_0$ concernée. De l'énergie initialement déposée sur le mode rapide se transmet continûment vers le mode d'Alfvén résonant. L'énergie va donc s'accumuler localement et sera dissipée par les processus évoqués plus haut. Le schéma 2.4 illustre ces deux phénomènes de manière qualitative.

En exploitant l'analogie mathématique existant entre les oscillations électrostatiques dans les plasmas froids (Sedlacek, 1971) et la propagation des ondes d'Alfvén

Fig. 2.4 Schéma qualitatif illustrant les phénomènes de mélange de phase (a) et d'absorption résonante (b). Sur le schéma (a), on observe la distorsion des fronts d'ondes avec apparition de gradients dans la zone de non homogénéité. Sur le schéma (b), l'énergie initialement répartie dans tout l'espace se concentre autour de la ligne de résonance.



dans les plasmas incompressibles, Ionson (1978) fut le premier à proposer un modèle de chauffage des boucles coronales par absorption résonante d'ondes d'Alfvén. La non homogénéité du plasma à l'intérieur des boucles est à l'origine d'un spectre continu de fréquences d'Alfvén. Lorsqu'une onde magnéto-sonore rapide incidente sur la boucle oscille à une fréquence du continuum, une onde d'Alfvén infiniment localisée entre en résonance impliquant une accumulation d'énergie sur de petites échelles, où la dissipation effective d'énergie peut avoir lieu (Rae et Roberts, 1981 ; Lee et Roberts, 1986). Cette construction des petites échelles a été clairement mise en évidence par un modèle numérique proposé par Cally (1991). Au chapitre 3, nous reviendrons plus en détail sur ce processus important dans un contexte différent.

Poedts et al. (1989) ; Steinolfson et Davila (1993) ; Wright et Rickard (1995) ont présenté des simulations numériques révélant que des excitations latérales des boucles

sont bien plus efficaces si leur fréquence correspond à la fréquence d'un mode global de la boucle située dans le continuum d'Alfvén. Poedts et al. (1994) a montré que le processus de chauffage par absorption résonante peut être très rapide et impliquer une quantité de chaleur importante par rapport à l'énergie totale emmagasinée dans la boucle. A part les excitations latérales, les ondes résonantes d'Alfvén peuvent également se développer sous l'effet d'ondes MHD initiées à l'intérieur des boucles, comme par exemple les mouvements de convection rapides des pieds. Selon Tirry et al. (1997), ce mécanisme interne jouerait un rôle dominant dans le chauffage de la couronne. L'absorption résonante d'énergie peut alors être réalisée soit en excitant directement des ondes d'Alfvén par des mouvements azimutaux des pieds (Heyvaerts et Priest, 1983 ; Berghmans et al., 1996), soit par couplage du mode rapide et du mode d'Alfvén dans le cas d'une excitation par des mouvements polarisés radialement (Tirry et al., 1997 ; de Groof et al., 2002a,b).

Ainsi, le processus d'absorption résonante d'ondes d'Alfvén s'avère être un bon moyen pour expliquer le chauffage de la couronne solaire. Cependant il reste à confirmer par des observations l'existence de ces ondes magnétohydrodynamiques dans les boucles coronales. De plus un travail théorique important reste à fournir. Jusqu'à présent, le traitement mathématique de l'excitation des ondes MHD par les mouvements convectifs des pieds des boucles repose sur de nombreuses hypothèses : mouvement particulier des pieds, équilibre unidimensionnel des boucles souvent modélisées par une simple couche rectiligne ou par un tube cylindrique. Enfin, la turbulence de la couronne ainsi que des effets non linéaires doivent également jouer un rôle important dans ce chauffage.

2.3.2 Oscillations globales de la magnétosphère

Dans le paragraphe précédent, nous avons discuté l'importance potentielle des oscillations de basse fréquence dans les processus d'échanges d'énergie. Il est évident qu'en raison de l'éloignement, l'étude de la propagation de ces ondes dans la basse couronne solaire reste relativement imprécise. Le cas de la magnétosphère est tout autre. On dispose d'enregistrements complets d'oscillations depuis des dizaines d'années et on a pu les corrélérer avec certaines perturbations affectant la magnétosphère. Ces mesures ont pu être réalisées au sol ou dans l'espace. Elles permettent de connaître avec précision les différents modes d'oscillations de la magnétosphère.

En fait, des fluctuations dans le champ magnétique terrestre furent mesurées au sol dès le dix-neuvième siècle, bien avant que l'on puisse les relier avec la physique

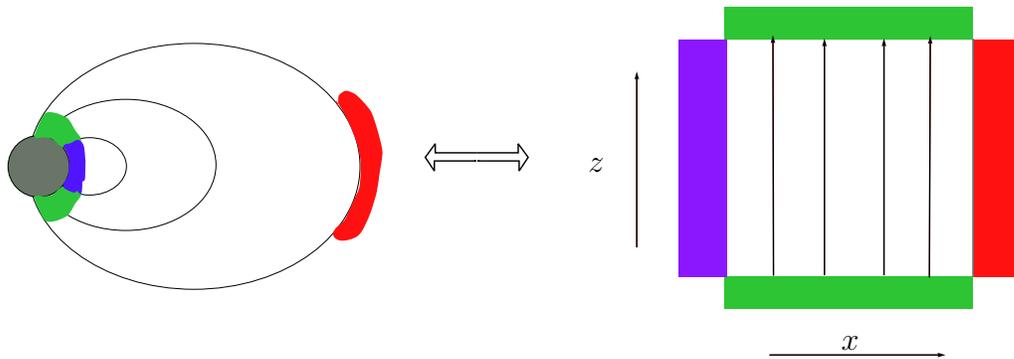
des plasmas. Plus récemment, des mesures systématiques ont conduit Jacobs et al. (1964) à classer ces pulsations magnétiques en deux groupes :

1. pulsations continues (Pc) presque sinusoïdales avec une fréquence bien précise allant de quelques mHz à quelques Hz,
2. pulsations irrégulières (Pi) ayant un spectre dans le même domaine de fréquence mais avec plusieurs pics.

Dungey (1954) fut le premier à interpréter ces oscillations du champ magnétique par des ondes d'Alfvén stationnaires le long des lignes de champ fermées de l'environnement proche de la Terre. Il a également identifié des ondes magnétoacoustiques rapides se propageant à travers les lignes de champ magnétique autour de la Terre. L'idée que ces deux modes pouvaient être couplés par la non homogénéité du plasma et que l'énergie initialement sur le mode rapide pouvait s'écouler vers un mode d'Alfvén résonant a été exploité indépendamment par Southwood (1974) et Chen et Hasegawa (1974a,b). Ils présentèrent le premier traitement théorique du problème en modélisant la proche magnétosphère par une boîte unidimensionnelle dans laquelle le champ magnétique est uniforme dans la direction z et la densité du plasma varie dans la direction perpendiculaire x (cf. figure 2.5). De plus ces auteurs se sont placés dans l'hypothèse d'un plasma froid. Les conditions aux limites sur les frontières de la boîte – en général une réflexion totale – imposent l'existence de modes globaux dans le système oscillant à des fréquences discrètes dont certaines sont comprises dans le continuum d'Alfvén $k_z v_A(x)$. Dans ce cas, une onde d'Alfvén se développe le long de la ligne de champ repérée par l'abscisse x . Il s'agit toujours du phénomène d'absorption résonante. Ce modèle sera abondamment utilisé dans la littérature ultérieure. Southwood, Chen et Hasegawa ont par ailleurs supposé que l'excitation des modes globaux avait pour origine une instabilité de Kelvin-Helmholtz se propageant le long de la magnétopause. Cependant, ce modèle nécessite souvent des vitesses d'écoulement dans la magnétogaine trop élevées pour expliquer les fréquences observées. Plus récemment, Kivelson et Southwood (1985, 1986) ; Zhu et Kivelson (1988) ; Southwood et Kivelson (1990) suggérèrent qu'un pulse soudain dans le vent solaire arrivant sur la cavité magnétosphérique pouvait également exciter un mode global à une des fréquences du continuum d'Alfvén. Allan et al. (1986b,a) confirmèrent par des simulations numériques l'importance des modes globaux dans la détermination des fréquences résonantes.

La structure du champ magnétique terrestre est bien mieux connue que celle du champ magnétique des boucles coronales. De ce fait, de nombreux auteurs ont été

Fig. 2.5 Le modèle de la boîte unidimensionnelle. Les frontières de la boîte sont les ionosphères nord et sud (en vert), la plasmasphère (en bleu) et la magnétopause (en rouge). Figure adaptée de Southwood et Kivelson (1990).



encouragés à développer des modèles bidimensionnels dans lesquels le champ magnétique est toujours uniforme, mais la densité varie aussi bien perpendiculairement que parallèlement aux lignes de forces (Southwood et Kivelson, 1986 ; Thomson et Wright, 1993). Ils s'intéressèrent uniquement aux solutions stationnaires du problème en utilisant des développements en série. D'autres études ont pris en compte la courbure des lignes de champ au voisinage immédiat de la Terre (Walker, 1987 ; Taylor et Walker, 1987). La géométrie du champ magnétique conduit à des équations différentielles beaucoup plus complexes dont la résolution numérique est rendue difficile par le couplage des modes. Cependant une analyse simplifiée du problème a été proposée par Leonovich et Mazur (2000b,a).

2.3.3 La queue magnétosphérique terrestre

Nous terminons ce survol de la littérature en évoquant la queue magnétique terrestre qui sera l'objet de notre étude ultérieure. Nous avons vu aux paragraphes 2.1.2 et 2.2 que la couche de plasma est une zone de renversement du champ magnétique emplie d'un plasma dense et chaud. Cette structure supporte des événements éruptifs importants, les sous-orages, qui lui confèrent un caractère hautement dynamique. Cependant, il est bien connu que la queue magnétosphérique est animée de fluctuations oscillant à diverses périodes pouvant atteindre plus d'une dizaine de minutes (Patel, 1968 ; Siscoe, 1969 ; McKenzie, 1970). Alors que les sous-orages et le problème de la reconnexion magnétique qui leur est associé occupent une part importante dans la littérature, très peu d'études théoriques se sont attachées à décrire complètement la propagation de perturbations linéaires dans la queue magnétosphérique.

Allan et Wright (1998, 2000) ont modélisé la queue magnétosphérique par un guide d'ondes infini dans lequel le champ magnétique est uniforme et la vitesse d'Alfvén varie dans la direction transversale sans s'annuler sur la couche neutre. De plus les frontières du guide d'ondes sont parfaitement réfléchissantes. Avec ce modèle assez peu réaliste, ces auteurs ont étudié la propagation du mode rapide et de son couplage avec le mode d'Alfvén résonant dans l'hypothèse d'un plasma froid. Seboldt (1990) fut le premier à utiliser le modèle de Harris (Harris, 1962) décrivant une couche de plasma dans laquelle le champ magnétique s'annule. Mais son article est dédié uniquement à la discussion des propriétés mathématiques des solutions oscillant à une fréquence comprise dans le continuum d'Alfvén. Plus récemment, Smith et al. (1997) ont calculé les modes discrets pouvant se propager dans la couche de Harris mais en imposant des conditions aux limites peu réalistes (surfaces parfaitement réfléchissantes).

Il semble donc qu'aucune étude de la réponse linéaire de la queue magnétosphérique modélisée de façon réaliste à une perturbation extérieure n'ait été jusqu'à présent proposé. Notamment l'étape visant à reconstruire les perturbations spatio-temporelles à partir de leur spectre fait défaut. Or cette étude est devenue nécessaire depuis le lancement des satellites CLUSTER. La méthode la plus efficace pour interpréter les observations est en effet de comparer directement les séries temporelles des fluctuations (densité, vitesse, température et champ magnétique) relevées en quatre points différents avec des modèles théoriques capables de décrire aussi complètement que possible les caractéristiques de l'évolution spatio-temporelle des perturbations. La suite de ce mémoire s'attache donc à répondre en partie à ce problème.

Chapitre 3

Etude d'un condensateur à diélectrique non homogène

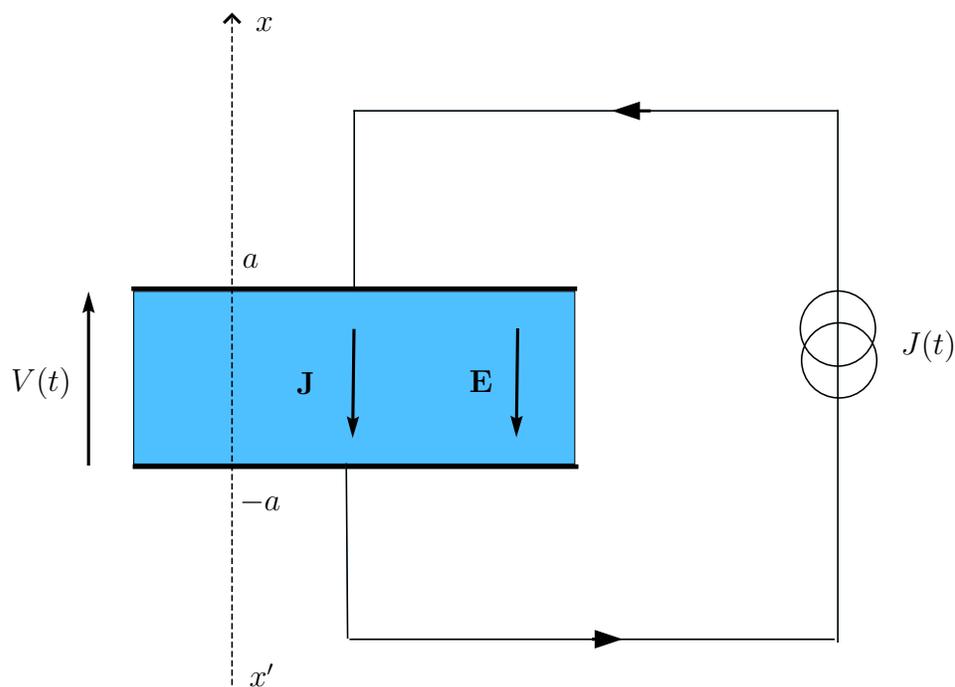
Historiquement, l'analyse des oscillations dans les plasmas non homogènes a été abordée par l'étude des oscillations électrostatiques dans les plasmas froids. Lorsqu'un excès de charge est créé dans un plasma, celui-ci devient le siège d'oscillations collectives à la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{Ne^2/(m\epsilon_0)}$, où N est la densité du plasma au repos, e la charge électrique élémentaire et m la masse des électrons. Dans un plasma non homogène, la pulsation plasma varie dans le milieu. On peut alors assimiler le plasma à une distribution continue d'oscillateurs vibrant à la pulsation locale. On considère donc une couche de plasma non homogène enfermée entre deux plaques conductrices reliées à un générateur de courant. On forme ainsi un condensateur à diélectrique non homogène. Rappelons que dans le cas d'un condensateur rempli de vide, l'impédance $Z(\omega) = 1/iC\omega$ est purement imaginaire et le condensateur une fois chargé n'emmagasine plus d'énergie en régime permanent. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il en est tout autrement pour le condensateur non homogène. Lorsque celui-ci reçoit un courant sinusoïdal oscillant à la fréquence ω , l'impédance $Z(\omega)$ possède une partie imaginaire et une partie réelle positive, impliquant donc un transfert constant d'énergie du générateur de courant au condensateur en l'absence de tout processus de dissipation d'énergie (collisions, résistivité etc.). On parle alors d'absorption résonante de l'énergie par le condensateur. Nous préciserons plus loin la signification du qualificatif résonant. Ce résultat est connu sous le nom de paradoxe de Herolfson qui a intrigué de nombreux physiciens. En particulier, si aucun mécanisme de dissipation permet d'absorber l'énergie injectée par le générateur, où va cette énergie ?

Ce problème n'a apparemment aucun lien direct avec la physique magnétosphérique. Nous allons cependant le traiter pour plusieurs raisons. Les techniques

mathématiques que nous allons introduire dans ce chapitre seront réutilisées dans l'étude de la réponse de la queue magnétosphérique à une excitation extérieure. L'analyse du condensateur non homogène se résout complètement de manière analytique, ce qui permet de mieux comprendre les différentes étapes du raisonnement. Enfin le phénomène d'absorption résonante s'observe également dans la physique des plasmas magnétosphériques. Ce premier exemple permet d'en éclairer les principales caractéristiques en levant notamment le paradoxe mentionné plus haut.

3.1 Position du problème

Fig. 3.1 Schéma du condensateur



On considère une couche de plasma froid d'épaisseur $2a$, située entre deux plaques conductrices infinies reliées à un générateur délivrant une densité de courant $J(t)$. On supposera le problème entièrement unidimensionnel selon la direction (Ox) perpendiculaire aux plaques (cf. figure 3.1). Le but de l'exercice est de déterminer la différence de potentiel $V(t)$ qui résulte de diverses formes de courant. Nous particulieriserons l'étude à un courant impulsionnel $J = J_0\delta(t)$ et à un courant sinusoïdal $J = J_0 \sin(\Omega t)$. Les autres grandeurs physiques (champ électrique, vitesse, densité, énergie) seront également dérivées, notamment pour établir un bilan énergétique.

A l'équilibre, le plasma est électriquement neutre et au repos. La densité des ions (et des électrons) varie suivant x . Pour des raisons de simplicité mathématique, on choisit une dépendance quadratique, i.e. $N(x) = N_0 \left(1 + \delta \frac{x}{a}\right)^2$ avec $0 < \delta < 1$. La pulsation plasma varie alors linéairement avec x : $\omega_p(x) = \omega_0(1 + \delta x)$. Toutes les autres grandeurs sont nulles.

A un instant $t = 0$, on injecte le courant $J(t)$, le plasma se met alors à osciller. Nous supposons cependant que les ions restent fixes du fait de leur grande inertie. Seuls les électrons seront donc supposés se déplacer sous l'effet du champ électrique induit par le courant. Cette hypothèse simplifie le traitement analytique du problème. Elle ne change absolument pas la structure mathématique des équations et n'a donc pas d'incidence dans la discussion. Le plasma est en outre non collisionnel. Aucun processus "classique" de dissipation n'existe dans un tel plasma. En particulier, la résistivité électrique est nulle. La dissipation par effet Joule est négligeable et en conséquence l'énergie doit se conserver. Enfin on ne traitera que le cas des perturbations électrostatiques.

Les équations qui régissent ce problème sont au nombre de quatre :

$$m \frac{\partial n}{\partial t} + m \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0 \quad \text{continuité,} \quad (3.1)$$

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -ne \mathbf{E} \quad \text{mouvement,} \quad (3.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{(N - n)e}{\varepsilon_0} \quad \text{Gauss,} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{J} = -nev + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{courant.} \quad (3.4)$$

Dans ces équations, n désigne la densité des électrons. Il est facile de montrer grâce aux équations de continuité et de Maxwell-Gauss, que $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, assurant ainsi que la densité de courant est uniforme et égale au courant délivré par le générateur.

Dans le cadre de la réponse linéaire, on pose pour la densité des électrons $n = N + n_1$ avec $n_1 \ll N$ et on linéarise les équations précédentes. En combinant les équations du mouvement et du courant, on obtient une équation différentielle sur la composante x du champ électrique ($\mathbf{E} = -E \mathbf{e}_x$ et $\mathbf{J} = -J \mathbf{e}_x$) :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega_p^2(x) E = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) permet de calculer la perturbation du champ électrostatique. La différence de potentiel aux bornes du condensateur s'en déduit immédiatement par :

$$V(t) = \int_{-a}^{+a} E(t, x) dx$$

Les autres grandeurs utiles (vitesse, densité etc.) s'obtiennent facilement grâce aux équations écrites au début du paragraphe.

3.2 Réponse à un courant impulsionnel

3.2.1 Champ électrique

La résolution de (3.5) nécessite l'introduction de la transformée de Laplace. Si f est une fonction de t , sa transformée de Laplace est donnée par :

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt$$

Pour assurer la convergence de l'intégrale en l'infini, ω doit être complexe avec une partie imaginaire positive. Le recours à une transformée de Fourier (plus familière) supposerait que la perturbation existe depuis l'infinité des temps et ne conviendrait donc pas pour ce problème aux valeurs initiales. La formule d'inversion de la transformée de Laplace utilise l'intégration le long d'un contour dans le plan ω -complexe, elle s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \hat{f}(\omega)e^{-i\omega t} d\omega$$

où \mathcal{C} est un contour dans le demi-plan positif passant au-dessus de toutes les singularités (pôles, points de branchement etc.) de \hat{f} .

Après transformée de Laplace, l'équation (3.5) devient :

$$\hat{E}(\omega) = \frac{\hat{J}(\omega)}{\varepsilon_0} \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_p^2}.$$

Ici $J(t) = Q_0\delta(t)$, donc $\hat{J}(\omega) = Q_0$. Les seules singularités de \hat{E} sont deux pôles en $\pm\omega_p(x)$. En appliquant le théorème des résidus en chaque pôle, on obtient :

$$E(t, x) = E_0 \cos(\omega_p(x)t) \quad \text{avec} \quad E_0 = Q_0/\varepsilon_0. \quad (3.6)$$

Le pulse de courant injecté a pour effet de charger instantanément les armatures du condensateur avec une densité surfacique Q_0 , faisant "sauter" le champ électrique de 0 à E_0 . Ensuite le champ électrique oscille à la fréquence plasma locale.

Perturbations de vitesse et de densité La vitesse se calcule grâce à $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{e}{m}E$ et la perturbation de densité par $n_1 = \frac{\varepsilon_0}{e} \frac{\partial E}{\partial x}$. On obtient :

$$v(t, x) = \frac{eE_0}{m} \frac{\sin(\omega_p(x)t)}{\omega_p(x)} \quad (3.7)$$

$$n_1(t, x) = -\frac{Q_0}{e} \frac{\omega_0\delta}{a} t \sin(\omega_p(x)t). \quad (3.8)$$

A $t = 0$, on vérifie bien que le plasma est au repos (vitesse nulle) et que la densité électronique est égale à la densité ionique (neutralité électrique). Cependant, la perturbation de densité électronique croît linéairement avec le temps. Ce résultat peut paraître étrange. Il correspond au fait que la fréquence spatiale des oscillations croît avec le temps. D'un point de vue dimensionnel, la relation entre la densité et le champ électrique s'écrit $n \propto E/L$. Le champ électrique ayant une amplitude finie, la diminution de l'échelle spatiale des oscillation fait augmenter la densité. Au bout d'un certain temps, l'amplitude sera telle que l'hypothèse des petites perturbations sera violée. Le calcul de la densité n'est donc valide que pour des temps très courts. Nous voyons dès à présent une des caractéristiques essentielles de la propagation en milieu non homogène : la formation d'échelles spatiales de plus en plus petites et de gradients de plus en plus intenses. C'est dans ces régions que des phénomènes non linéaires vont apparaître pour d'une part stabiliser l'amplitude des oscillations et d'autre part dissiper l'énergie électrique.

Calcul direct de la différence de potentiel Pour obtenir $V(t)$, il suffit d'intégrer le champ électrique sur x :

$$V(t) = \int_{-a}^a E_0 \cos(\omega_p(x)t) dx.$$

Le choix d'un profil linéaire pour la pulsation plasma rend particulièrement simple le calcul de cette intégrale et on obtient :

$$V(t) = 2E_0a \frac{\sin(\omega_+t) - \sin(\omega_-t)}{(\omega_+ - \omega_-)t}. \quad (3.9)$$

où $\omega_{\pm} = \omega_0(1 \pm \delta)$.

La différence de potentiel est donc constituée d'un battement entre les deux pulsations extrêmes et l'amplitude de ces oscillations décroît en $1/t$. Cette décroissance s'interprète par le mélange de phase. Comme le champ électrique oscille à la pulsation plasma locale, deux vibrations en deux points très proches n'ont pas la même période. Au bout d'un certain temps, ces deux vibrations sont déphasées et interfèrent destructivement.

3.2.2 Calcul de la ddp par l'inversion de la transformée de Laplace

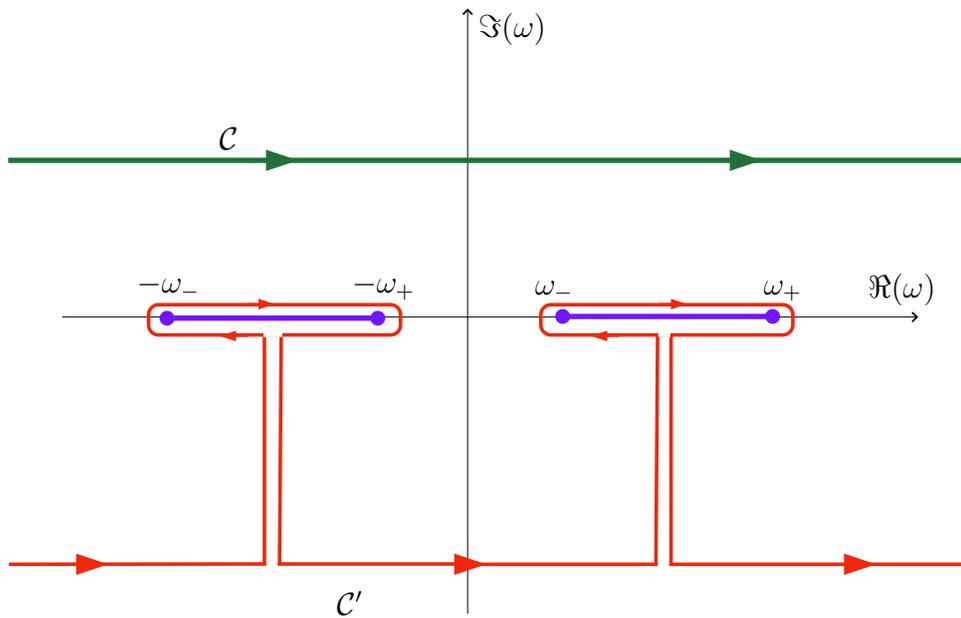
Il est intéressant d'effectuer le calcul de la différence de potentiel par une autre méthode qui s'avérera utile pour la suite. L'idée est d'intégrer d'abord par rapport

à x la transformée de Laplace du champ électrique $\hat{E}(\omega)$ pour obtenir $\hat{V}(\omega)$ puis d'inverser la transformée de Laplace. Partant de $\hat{E}(\omega) = E_0 \frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_p^2}$, on intègre par rapport à x , il vient :

$$\hat{V}(\omega) = iE_0 \frac{a}{\omega_+ - \omega_-} \log \left(\frac{\omega + \omega_+}{\omega + \omega_-} \frac{\omega - \omega_-}{\omega - \omega_+} \right).$$

Rappelons que ω_p varie linéairement avec x . Pour calculer $V(t)$, il faut intégrer $\hat{V}(\omega)$ le long d'un contour \mathcal{C} qui passe au-dessus de toutes les singularités de \hat{V} . Ici, les singularités sont liées à la présence de la fonction logarithme complexe. L'appendice C résume les principales propriétés de cette fonction dans le plan complexe.

Fig. 3.2 Points et lignes de branchement de $\hat{V}(\omega)$



En particulier, les 4 points ω_{\pm} et $-\omega_{\pm}$ sont des points de branchement situés sur l'axe ω -réel. Ces points de branchement sont reliés entre eux par des lignes de coupures comme indiqué sur la figure 3.2. Le contour \mathcal{C} est déformé dans le demi-plan inférieur en un contour \mathcal{C}' qui contourne les lignes de branchement. En effet ces dernières ne peuvent pas être traversées, car la fonction logarithme n'y est pas analytique. La figure 3.2 montre le contour d'intégration déformé. Les contributions des segments verticaux de \mathcal{C}' se compensent deux à deux et les contributions des segments horizontaux tendent vers 0 lorsque ces contours sont envoyés à l'infini. Ainsi l'inversion de la transformée de Laplace se résume à 4 intégrales le long des lignes de

coupures. Il est facile de montrer que $\hat{V}(-\omega) = -\hat{V}(\omega)$ et $\hat{V}(\bar{\omega}) = -\overline{\hat{V}(\omega)}$. Compte tenu de ces relations, les 4 intégrales se réduisent à une seule :

$$V(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \hat{V}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_-}^{\omega_+} \Re(\hat{V}^+(\sigma)) \cos(\sigma t) d\sigma,$$

où $\hat{V}^+(\sigma)$ est la limite de $\hat{V}(\omega)$ pour $\Re(\omega) = \sigma$ et $\Im(\omega) \rightarrow 0^+$. Un calcul plus poussé conduit à

$$\hat{V}^+(\sigma) = \frac{E_0 a}{\omega_+ - \omega_-} \left[\pi + i \ln \left| \frac{\sigma + \omega_+}{\sigma + \omega_-} \frac{\sigma - \omega_-}{\sigma - \omega_+} \right| \right] \Rightarrow \Re(\hat{V}^+(\sigma)) = \frac{E_0 a \pi}{\omega_+ - \omega_-}.$$

$V(t)$ se calcule donc "à vue" et on retrouve l'expression (3.9) du paragraphe précédent :

$$V(t) = 2E_0 a \frac{\sin(\omega_+ t) - \sin(\omega_- t)}{(\omega_+ - \omega_-)t}.$$

La méthode présentée ici peut paraître très compliquée, dans la mesure où un calcul direct était possible. Cependant elle a le mérite d'être très générale. Dans l'étude des couches de courant, cette méthode sera la seule possible pour résoudre complètement le problème. De plus nous avons introduit dans ce calcul les singularités caractéristiques de la fonction logarithme – les points et lignes de branchement – dont nous ferons encore amplement usage par la suite.

3.2.3 Bilan énergétique

Terminons ce paragraphe sur la réponse du condensateur à une impulsion de courant par un bilan énergétique. Dans le plasma, la densité volumique d'énergie est la somme de deux termes : l'énergie cinétique et l'énergie électrostatique. En reprenant les expressions (3.6) et (3.7), la densité d'énergie s'écrit :

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} m N v^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2.$$

L'énergie se répartit uniformément dans le condensateur et reste constante au cours du temps.

La puissance fournie par le générateur de courant s'écrit $P = VJ$ et donc l'énergie qu'il apporte au condensateur vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(t) H(t) Q_0 \delta(t) dt = \frac{1}{2} V(0) Q_0 = a \varepsilon_0 E_0^2,$$

c'est bien l'énergie totale emmagasinée dans le condensateur. Il y a bien conservation de l'énergie.

Remarquons qu'un résultat analogue s'obtiendrait pour un condensateur rempli de vide, car le générateur fournit de l'énergie pour charger les armatures du condensateur. Il n'y a donc pas absorption résonante d'énergie dans ce cas. C'est pourquoi il est utile de considérer la réponse du condensateur à un courant sinusoïdal.

3.3 Réponse à un courant sinusoïdal

Dans cette section, le condensateur est alimenté par un courant sinusoïdal $J(t) = J_0 \sin(\Omega t)H(t)$, où H est la fonction de Heaviside et Ω une pulsation comprise entre ω_- et ω_+ . La couche définie par $\omega_p(x) = \Omega$ est alors le siège d'une résonance.

En considérant les transformées de Laplace, nous avons :

$$\hat{J}(\omega) = -J_0 \frac{\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}, \quad \text{et}$$

$$\hat{E}(\omega) = -iE_0 \frac{\omega \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)(\omega^2 - \omega_p^2)} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{J_0}{\Omega \varepsilon_0}.$$

\hat{E} ne possède pas d'autres singularités que 4 pôles en $\pm\Omega$ et en $\pm\omega_p$. Par application du théorème des résidus, il vient :

$$E(t, x) = \begin{cases} E_0 \Omega^2 \frac{\cos(\omega_p t) - \cos(\Omega t)}{\Omega^2 - \omega_p^2} & \text{si } \omega_p(x) \neq \Omega \\ \frac{E_0}{2} \Omega t \sin(\Omega t) & \text{si } \omega_p(x) = \Omega. \end{cases}$$

Le champ électrique oscille donc sous forme de battements entre les pulsations Ω et ω_p . Sur la couche résonante, le champ électrique croît linéairement au cours du temps.

A l'aide de l'équation (3.2), nous déduisons aisément la perturbation de vitesse :

$$v(t, x) = \begin{cases} \frac{eE_0}{m} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega_p^2} \left(\frac{\sin(\omega_p t)}{\omega_p} - \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega} \right) & \text{si } \omega_p(x) \neq \Omega \\ \frac{eE_0}{2m\Omega} (\sin(\Omega t) - \Omega t \cos(\Omega t)) & \text{si } \omega_p(x) = \Omega. \end{cases}$$

Là encore la vitesse croît linéairement au cours du temps sur la couche résonante.

Fig. 3.3 Différence de potentiel pour un courant sinusoïdal

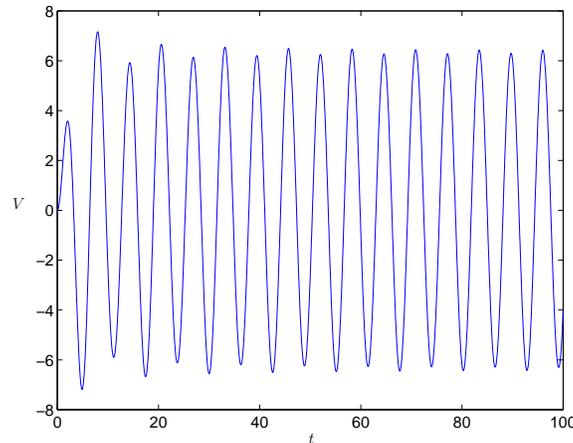
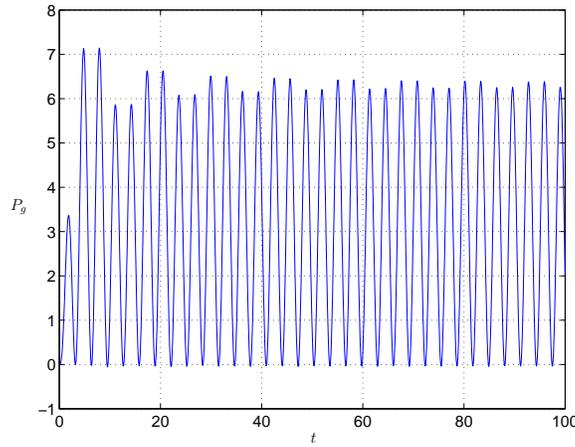
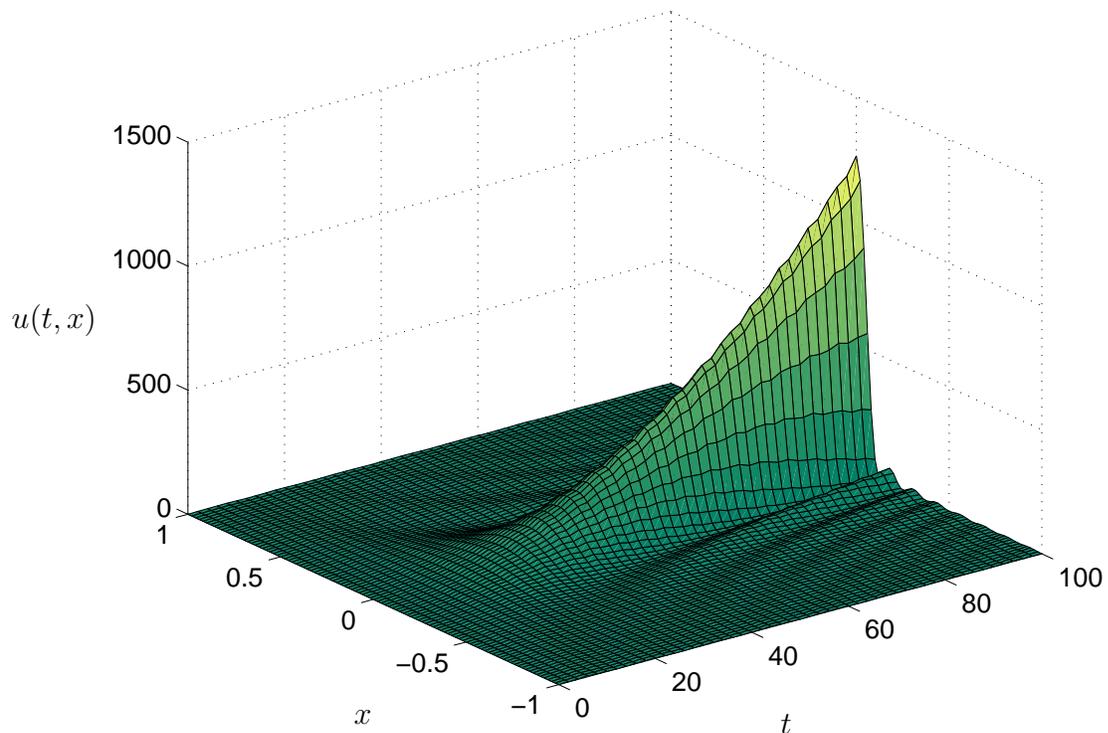
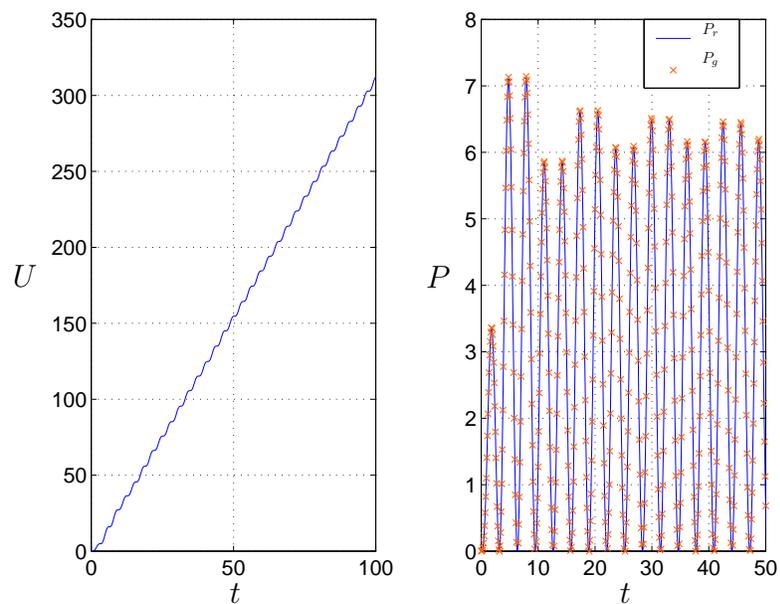


Fig. 3.4 Puissance fournie par le générateur au cours du temps


Le calcul de la différence de potentiel n'est plus possible analytiquement. On peut cependant évaluer une expression de cette ddp pour t tendant vers l'infini (comportement asymptotique). Le lecteur pourra consulter le calcul exact dans l'article de Crawford et Harker (1972), que l'étude présente reprend largement. Nous allons donc poursuivre le calcul par une méthode numérique. La ddp aux bornes du condensateur est représentée au cours du temps à la figure 3.3. Pour le calcul, nous avons pris $\delta = 0.5$, $\Omega = \omega_p(0) = 1$ unité, si bien que la variable temps est normalisée à $1/\Omega$. La ddp est normalisée à $V_0 = 2aE_0$. Nous constatons que la ddp oscille à la pulsation Ω avec une amplitude constante après un bref régime transitoire. Une analyse plus approfondie montrerait que le régime transitoire est constitué d'oscillations à la pulsation $\omega_p(x)$. Nous avons vu dans le paragraphe précédent qu'en raison du mélange de phase, ces oscillations s'amortissent au cours du temps. Seul subsiste le régime permanent à la fréquence Ω . Connaissant la ddp aux bornes du condensateur, nous pouvons calculer la puissance fournie par le générateur : $P_g(t) = V(t)J(t)$. Celle-ci est représentée à la figure 3.4. Elle est toujours positive avec une valeur moyenne non nulle, indiquant que le condensateur reçoit constamment de l'énergie. Où va cette énergie ? Pour cela, calculons la densité d'énergie du plasma, comme précédemment, nous trouvons :

$$u(t, x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \frac{\Omega^4}{(\Omega^2 - \omega_p^2)^2} \left[(\cos(\omega_p t) - \cos(\Omega t))^2 + \left(\sin(\omega_p t) - \frac{\omega_p}{\Omega} \sin(\Omega t) \right)^2 \right] & \text{si } \omega_p(x) \neq \Omega, \\ \frac{1}{8}\varepsilon_0 E_0^2 [(\Omega t)^2 + \sin^2(\Omega t) - \Omega t \sin(2\Omega t)] & \text{si } \omega_p(x) = \Omega. \end{cases}$$

La figure 3.5 représente une vue tridimensionnelle de la densité d'énergie en fonction de x et de t . La distance x est normalisée à a et la densité d'énergie à

Fig. 3.5 Densité d'énergie totale en fonction de x et du temps**Fig. 3.6** (a) Énergie totale emmagasinée dans le condensateur ; (b) Comparaison entre la puissance reçue P_r et la puissance fournie P_g .

$(1/2)\varepsilon_0 E_0^2$. On constate que la densité d'énergie croît régulièrement au voisinage de la résonance $x = 0$; de plus le profil $u(x)$ se resserre à mesure que le temps passe. Nous en concluons que de l'énergie est constamment injectée dans le condensateur et cette énergie finit par se concentrer dans une zone de plus en plus restreinte du plasma. Ce calcul permet d'illustrer le paradoxe de Herolfson. Le générateur fournit effectivement de l'énergie au condensateur. Cette perte d'énergie résulte d'un comportement linéaire tout à fait spécifique du condensateur non homogène qui correspond à une accumulation d'énergie dans une région qui va progressivement devenir infiniment mince. Il est important de souligner qu'il n'y a pas dissipation effective d'énergie dans le condensateur. Ce résultat n'est donc pas paradoxal avec le fait que le plasma soit sans collisions.

Afin de vérifier que l'énergie se conserve comme il se doit, intégrons numériquement l'expression de u par rapport à x . On obtient alors l'énergie totale U emmagasinée dans le condensateur en fonction du temps (cf. figure 3.6-a). Évidemment, cette énergie est une fonction croissante du temps, sa dérivée temporelle correspond à la puissance P_r reçue par le condensateur. Si nous superposons les graphes de $P_r(t)$ et de $P_g(t)$, nous constatons qu'il y a égalité entre ces deux puissances conformément au principe de conservation de l'énergie (cf. figure 3.6-b).

3.4 Conclusion sur l'absorption résonante

L'étude du condensateur rempli d'un plasma froid et non homogène a permis de mieux comprendre ce qu'est l'absorption résonante. En toute rigueur, nous ne devrions pas parler d'absorption, puisque le problème est à énergie conservative. Toute l'énergie fournie par le générateur de courant se retrouve intégralement dans le condensateur. Cependant, nous avons montré que cette énergie se concentre dans une zone de plus en plus petite autour du point résonant où la pulsation plasma locale est égale à la pulsation excitatrice. Ce mécanisme est intimement lié à la non homogénéité du milieu. Dans un condensateur rempli de vide, une telle concentration d'énergie n'existe pas.

Par ailleurs, un accroissement constant et local de la densité d'énergie finit par mettre en défaut les hypothèses de départ. En effet, avec une densité du plasma plus grande, les particules ont plus de chance de se rencontrer, ainsi l'hypothèse d'un plasma non collisionnel n'est plus valable. Or les collisions constituent un mécanisme réel de dissipation d'énergie, en général sous forme de chaleur. D'autre part, le cadre

de la physique linéaire est largement dépassé, des processus non linéaires apparaissent dans ces zones de résonance qui stabilisent les oscillations et convertissent l'énergie du plasma en d'autres formes, notamment en chaleur. Le processus résonant n'est donc pas associé par lui-même à une absorption d'énergie dans le milieu. Il crée plutôt des conditions favorables à l'apparition de processus de transfert d'énergie, en particulier par la formation de petites échelles spatiales. Par conséquent, on s'attend à ce que ces zones de résonance soient des régions privilégiées pour un chauffage du plasma et donc pour une absorption effective d'énergie.

L'étude de ce type de processus dans les plasmas naturels sera le point central des travaux présentés dans la suite.

Chapitre 4

Réponse linéaire de la queue magnétosphérique à une excitation extérieure

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la réponse linéaire de la queue magnétosphérique terrestre à une excitation extérieure. Nous présentons la méthode mathématique générale pour résoudre ce problème aux valeurs initiales. Cette méthode sera utilisée et détaillée dans les chapitres suivants. Dans un tel problème, il faut définir un exciteur (section 4.2) qui va perturber un équilibre bien établi de la queue. Nous commencerons donc par définir l'état d'équilibre de la couche de plasma dans la section 4.1. Ensuite, nous appliquerons la théorie classique des perturbations (section 4.3) pour obtenir une équation différentielle du second ordre. Cette équation doit être assortie de conditions aux limites adéquates (4.5) et se résout en introduisant la fonction de Green qui sera définie et étudiée aux sections 4.6 et 4.7.

4.1 Description de l'équilibre

Les premières observations de CLUSTER incitent à penser que la queue magnétosphérique de la Terre est assez bien modélisée à l'équilibre par la couche de Harris, même à des distances relativement faibles de la Terre (16-18 R_T). Dans tous les cas, le modèle proposé par Harris dans les années 60 s'applique bien à la queue magnétosphérique plus lointaine (Harris, 1962). Il a également l'avantage d'être une solution cinétique exacte d'une couche de courant dans laquelle le champ magnétique s'annule et change de sens. Le champ magnétique est unidirectionnel et on l'oriente selon l'axe (Ox) Terre-queue. Son intensité varie selon une direction perpendiculaire

(Oz) Nord-Sud et elle est donnée par la formule :

$$B_{eq}(z) = -B_e \tanh\left(\frac{z}{a}\right), \quad (4.1)$$

où a est une constante représentant une échelle caractéristique de variation dans la queue, et B_e est le champ magnétique dans les lobes supposé constant.

L'équilibre MHD de la couche doit respecter l'uniformité de la pression totale, à savoir la somme de la pression magnétique $B^2/(2\mu_0)$ et de la pression thermique P : $P(z) + B^2(z)/(2\mu_0) = \text{constante}$. On en déduit donc l'expression de la pression thermique dans la couche à l'équilibre :

$$P_{eq}(z) = P_e \tanh^2\left(\frac{z}{a}\right) + \frac{P_0}{\cosh^2\left(\frac{z}{a}\right)}, \quad (4.2)$$

où P_0 est la pression au centre de la couche et P_e est la pression dans les lobes. Pour déterminer la densité du plasma une hypothèse supplémentaire est nécessaire : on suppose que la température du plasma est uniforme dans la couche. En appliquant la loi des gaz parfaits au plasma, on conclut que la densité et la pression thermique sont proportionnelles :

$$\rho_{eq}(z) = \rho_e \tanh^2\left(\frac{z}{a}\right) + \frac{\rho_0}{\cosh^2\left(\frac{z}{a}\right)}. \quad (4.3)$$

Donnons quelques ordres de grandeurs pour la Terre : a est de l'ordre du rayon terrestre $R_T \simeq 6400$ km, le champ magnétique dans les lobes avoisine 25 nT, la densité du plasma dans les lobes est prise à 10^{-2} particules par cm^{-3} et la densité au centre de la couche est de l'ordre de 1 particule par cm^{-3} . Enfin une valeur raisonnable pour la température moyenne du plasma est de 1 keV.

Dans les calculs ultérieurs deux vitesses caractéristiques apparaîtront naturellement : la vitesse du son v_s et la vitesse d'Alfvén v_A . Donnons dès maintenant leur définition :

$$v_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad v_A = \sqrt{\frac{B^2}{\mu_0 \rho}},$$

où γ est le rapport entre les chaleurs massiques à pression et à volume constants – sa valeur n'est pas connue avec précision pour un plasma, on peut prendre $\gamma = 5/3$ si les particules qui le constituent sont monoatomiques. Du fait de la proportionnalité entre pression et densité, la vitesse du son est uniforme dans la queue et sa valeur est d'environ 400 km/s. En revanche, la vitesse d'Alfvén varie suivant la coordonnée z et compte tenu des équations (4.1) et (4.3), son expression est donnée par :

$$v_A^2(z) = v_e^2 \frac{\sinh^2(z/a)}{\sinh^2(z/a) + \frac{\rho_e}{\rho_0}} \quad \text{avec} \quad v_e = \sqrt{\frac{B_e^2}{\mu_0 \rho_e}}.$$

Avec les valeurs numériques précédentes la vitesse d'Alfvén dans les lobes est de l'ordre de 4500 km/s, c'est à dire nettement supérieure à la vitesse du son.

Certains auteurs ont choisi de faire tendre la densité et la pression vers 0 à l'infini, rendant ainsi la vitesse d'Alfvén infinie dans les lobes. Un traitement approprié du problème requiert alors les équations relativistes de la MHD. Ici nous avons conservé une faible valeur pour la densité dans les lobes, si bien que la vitesse d'Alfvén maximale reste bien inférieure à la vitesse de la lumière. La théorie classique de la magnétohydrodynamique peut donc pleinement s'appliquer.

4.2 Conditions initiales

Dans notre approche, nous supposons que l'équilibre décrit précédemment est perturbé par un phénomène d'origine extérieure [†] à la physique propre de la couche de courant. On s'intéresse alors aux ondes basse fréquence qu'un tel phénomène peut engendrer dans le cadre de la théorie linéaire. On peut envisager plusieurs possibilités pour décrire une perturbation initiale. On choisit de l'exprimer par une variation brutale de la pression thermique qui apparaîtra comme un terme externe dans les équations de la MHD. Un excitateur agissant sur le champ magnétique ou sur la vitesse du fluide auraient tout aussi bien pu convenir, mais un pulse de pression extérieure est particulièrement significatif dans le cadre d'une analyse des perturbations de la magnétosphère. Selon sa position dans la queue, il peut correspondre à divers processus physiques magnétosphériques. Si ce pulse est centré sur la couche neutre (où le champ magnétique est nul), il peut représenter le déclenchement d'un sous-orage. Si, au contraire, il se produit sur les bords de la couche, il peut être associé à une perturbation dans le vent solaire.

Ainsi on suppose qu'avant un certain instant $t = 0$, la couche de plasma est à l'équilibre. A $t = 0$, "l'explosion" se produit provoquant une variation brutale de la pression extérieure. Nous avons donc à résoudre un problème aux valeurs initiales, qui se traite classiquement en utilisant la transformée de Laplace pour la variable temps (cf. appendice B pour les détails mathématiques).

[†]On conviendra d'appeler dans la suite perturbation extérieure une perturbation initiale dont l'origine physique n'est pas liée à la physique propre de la couche de courant, i.e. non solution des équations MHD. Le qualificatif extérieur ne doit donc pas être confondu avec les adjectifs externe et interne, liés à la position dans la couche de courant.

4.3 Théorie linéaire des perturbations

Pour décrire les perturbations de la couche de Harris engendrées par le pulse de pression extérieur, on utilise le système standard des équations de la magnétohydrodynamique classique et idéale. L'adjectif idéal signifie ici qu'aucune source de dissipation d'énergie n'est pris en compte ; en effet le plasma étudié est trop peu dense pour être considéré comme collisionnel. Aucun processus de thermalisation ou d'échange de chaleur entre particules lié à des processus classiques de type conductivité, viscosité ou résistivité n'est possible. Enfin une équation constitutive est nécessaire pour relier les variations de pression et de densité : en accord avec la plupart des auteurs, on choisit l'équation des perturbations adiabatiques. Ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (4.4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} \times \mathbf{B} - \nabla P_{ext} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) P = c_s^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho \right]. \quad (4.7)$$

Le dernier terme dans l'équation (4.5) correspond au pulse de pression extérieur P_{ext} qui joue donc le rôle d'excitateur dans ce problème. Il est important de rappeler que ce système d'équations est particulièrement idéalisé et simplifié. Il possède un domaine d'application très restreint, qui d'ailleurs n'est pas forcément adapté à l'étude de la dynamique des couches de plasma. Ce point sera discuté plus en détail dans le chapitre 7 consacré à l'étude des données CLUSTER. Néanmoins, il est utile de préciser ici notre démarche. L'idée générale n'est pas d'offrir une description parfaitement réaliste de la physique des couches de courant. Ceci pourra éventuellement se faire lorsque les données CLUSTER auront été suffisamment dépouillées et comprises. La démarche est plutôt d'adopter délibérément le modèle le plus utilisé en physique des plasmas spatiaux, de le pousser suffisamment loin pour rendre directe la comparaison avec les données CLUSTER et, en seconde analyse, de faire l'inventaire dans ces données de ce qui relève effectivement de cette description magnétohydrodynamique. Ce faisant, nous poussons le modèle dans ses retranchements jusqu'à la reconstruction spatio-temporelle complète du signal où il n'est quasiment jamais mené.

Chaque grandeur physique apparaissant dans les équations ci-dessus s'exprime comme la somme d'un terme d'ordre 0 correspondant à l'équilibre de la couche et d'un terme d'ordre 1 représentant la perturbation. Pour préciser comment cette

décomposition est réalisée, on introduit le champ de déplacement ξ du plasma défini par $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \xi$, où \mathbf{r}_0 est la position d'une particule de plasma à l'instant $t = 0$ et \mathbf{r} sa position à l'instant t . Le système linéarisé des équations s'obtient alors par un développement eulérien des différents champs suivant les puissances de ξ . Dans une théorie linéaire, seul le premier terme de ce développement est bien sûr conservé. On écrit donc par exemple pour le champ magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B}_{eq} + \mathbf{b}_1(\xi)$. En exprimant la vitesse du fluide en fonction du déplacement, on obtient :

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (4.8)$$

$$p_1 = -(\xi \cdot \nabla) P_{eq} - \gamma P_{eq} \nabla \cdot \xi, \quad (4.9)$$

$$\mathbf{b}_1 = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_{eq}), \quad (4.10)$$

et

$$\rho_{eq} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \mathcal{L}(\xi) = -\nabla \frac{\partial P_{ext}}{\partial t}, \quad (4.11)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\xi) &= \nabla [\xi \cdot \nabla P_{eq} + \gamma P_{eq} \nabla \cdot \xi] \\ &+ \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_{eq})] \times \mathbf{B}_{eq} \\ &+ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_{eq}) \times [\nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_{eq})]. \end{aligned}$$

La détermination du champ de déplacement à partir de divers pulses de pression constitue la majeure partie du travail présenté ci-après. Une fois le déplacement calculé, il est facile d'évaluer les perturbations correspondantes pour le champ magnétique et la pression. Pour cela la description lagrangienne du plasma se révèle particulièrement simple. Étant donné que le champ magnétique est gelé dans le plasma, les lignes de force sont simplement convectées par le mouvement. En suivant la méthode proposée par Roberts (1967), on introduit la matrice de déformation :

$$D_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} = \delta_{ij} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_{0j}}$$

et on exprime les différents champs résultant d'un déplacement venant de \mathbf{r}_0 :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_{eq}(\mathbf{r}_0) [\det(D)]^{-1} \quad (4.12)$$

$$P(\mathbf{r}) = P_{eq}(\mathbf{r}_0) (1 - \gamma \nabla_0 \cdot \xi) \quad (4.13)$$

$$\frac{B_i}{\rho}(\mathbf{r}) = D_{ij} \frac{B_{eq,j}}{\rho_{eq}}(\mathbf{r}_0) \quad (4.14)$$

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation (4.11) pour déterminer le champ de déplacement. C'est l'objet du prochain paragraphe.

4.4 Equation maîtresse

L'équation (4.11) est un système d'équations aux dérivées partielles couplées que l'on simplifie grandement en prenant la transformée de Laplace en temps, et la transformée de Fourier sur les variables d'espace homogènes x et y . On pose donc :

$$\begin{aligned}\hat{\xi}(\omega, k_x, k_y, z) &= \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx \xi(t, x, y, z) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)} \\ \hat{P}(\omega, k_x, k_y, z) &= \int_0^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dx P_{ext}(t, x, y, z) e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}\end{aligned}\quad (4.15)$$

avec $\Im(\omega) > 0$.

L'équation (4.11) devient après quelques manipulations algébriques :

$$\hat{\xi}_x = i \frac{k_x v_s^2 (\omega^2 - k_x^2 v_A^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \hat{\xi}'_z - i \frac{k_x (\omega^2 - (k_x^2 + k_y^2) v_A^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \frac{\hat{P}}{\rho_{eq}} \quad (4.16)$$

$$\hat{\xi}_y = i \frac{k_y (v_s^2 + v_A^2) (\omega^2 - k_x^2 v_c^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \hat{\xi}'_z - i k_y \frac{\omega^2}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \frac{\hat{P}}{\rho_{eq}} \quad (4.17)$$

et

$$\frac{d}{dz} \left[f_{\omega, k_x, k_y}(z) \frac{d\hat{\xi}_z}{dz} \right] + g_{\omega, k_x, k_y}(z) \hat{\xi}_z = \frac{d \left(h_{\omega, k_x, k_y} \hat{P}_{\omega, k_x, k_y} \right)}{dz} \quad (4.18)$$

avec

$$f_{\omega, k_x, k_y}(z) = \rho_{eq}(z) (v_s^2 + v_A^2(z)) \frac{(\omega^2 - k_x^2 v_A^2)(\omega^2 - k_x^2 v_c^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \quad (4.19)$$

$$g_{\omega, k_x, k_y}(z) = \rho_{eq}(z) (\omega^2 - k_x^2 v_A^2(z)) \quad (4.20)$$

$$h_{\omega, k_x, k_y}(z) = \frac{\omega^2 (\omega^2 - k_x^2 v_A^2)}{(\omega^2 - \omega_+^2)(\omega^2 - \omega_-^2)} \quad (4.21)$$

Dans ces équations, le prime désigne la dérivée par rapport à la variable z et les différentes quantités v_s , v_A and v_c sont respectivement la vitesse du son, la vitesse d'Alfvén locale et la vitesse "cusp" donnée par la relation :

$$v_c^2 = \frac{v_A^2 v_s^2}{v_A^2 + v_s^2}.$$

Enfin les pulsations ω_{\pm} sont données par :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{1}{2} (k_x^2 + k_y^2) (v_s^2 + v_A^2) \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_y^2} \frac{v_s^2 v_A^2}{(v_s^2 + v_A^2)^2}} \right].$$

L'équation (4.18) constitue l'équation maîtresse du problème. C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients non constants qui appartient à la grande

classe des équations de Sturm-Liouville très répandues en physique. Son intégration nécessite des conditions aux limites sur la variable z que l'on va préciser au paragraphe 4.5.

Remarquons d'ores et déjà que l'équation (4.18) devient singulière dès que le coefficient f passe par 0. Nous verrons par la suite que c'est ce caractère singulier qui conduit à l'existence de spectres continus de fréquences propres et au phénomène d'absorption résonante. On retrouve ainsi que ce phénomène est un aspect fondamental de la physique des plasmas non homogènes.

La résolution d'une telle équation n'est en général pas possible analytiquement, il faut que les coefficients de cette équation varient de façon particulièrement simple pour qu'il existe une solution analytique connue. Dans l'annexe D, l'équation maîtresse est résolue analytiquement dans le cas d'une couche à gradient linéaire. Ses solutions font alors apparaître les fonctions hypergéométriques confluentes. En revanche, pour la couche de Harris, une résolution numérique est indispensable. Cependant, on peut poursuivre encore le raisonnement analytique en introduisant la fonction de Green associée à la réponse impulsionnelle du système. L'expression de cette fonction sera l'objet du paragraphe 4.6.

4.5 Conditions aux limites

Pour des valeurs fixées de ω , k_x et k_y , les coefficients f et g deviennent constants pour z infini. On note f_e et g_e leur valeur asymptotique. Si la perturbation initiale P_{ext} s'annule également en l'infini, l'équation (4.18) s'écrit $f_e \xi_z'' + g_e \xi_z = 0$. La nature des solutions de cette équation différentielle dépend du signe de :

$$\alpha_e^2 = -\frac{g_e}{f_e} = -\frac{1}{(v_s^2 + v_e^2)} \frac{(\omega^2 - \omega_{+e}^2)(\omega^2 - \omega_{-e}^2)}{(\omega^2 - k_x^2 v_{ce}^2)} \quad (4.22)$$

Lorsque $\alpha_e^2 < 0$, les solutions sont sinusoïdales loin de la couche neutre et correspondent à des ondes se propageant en dehors de la magnétosphère ou à des ondes provenant de la magnétopause. Dans ce domaine de fréquence, un dépôt local d'énergie proche de la couche neutre s'étalera dans tout l'espace et contribuera de façon mineure aux perturbations de la couche neutre observées loin du pulse initial. En revanche, lorsque $\alpha_e^2 > 0$, les solutions sont de nature exponentielle et sont associées à des modes localisés au voisinage de la couche neutre. Dans ce cas l'énergie déposée dans la couche neutre reste à l'intérieur du système et ces solutions contribuent majoritairement aux perturbations de la couche neutre. Nous nous limitons donc aux domaines de fréquence

pour lesquels le coefficient α_e est positif. Dans ce cas le déplacement transversal doit s'annuler à l'infini. Cependant une telle condition aux limites est difficile à traduire directement dans la résolution numérique de (4.18). On se place donc à une certaine distance $\pm l$ de l'axe ($0z$) telle que $l \gg a$, la solution acceptable de (4.18) s'écrit $\hat{\xi}_z = A_{\pm} \exp(-\alpha_e |l|)$. Les relations de continuité du déplacement et de la pression totale, reliée à la dérivée première de ξ_z imposent alors les conditions aux limites requises : $\hat{\xi}'_z = \mp \alpha_e \hat{\xi}_z$ pour $z = \pm l$.

Le problème que l'on doit résoudre est donc le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[f_{\omega, k_x, k_y}(z) \frac{d\hat{\xi}_z}{dz} \right] + g_{\omega, k_x, k_y}(z) \hat{\xi}_z &= h_{\omega, k_x, k_y} \frac{d\hat{P}_{\omega, k_x, k_y}}{dz} \\ \hat{\xi}'_z(l) + \alpha_e \hat{\xi}_z(l) &= 0 \\ \hat{\xi}'_z(-l) - \alpha_e \hat{\xi}_z(-l) &= 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Remarquons enfin que les coefficients de (4.18) sont symétriques par rapport à $z = 0$, de même que les conditions aux limites. On en déduit que le problème (4.23) admet soit des solutions paires, soit des solutions impaires.

4.6 Fonction de Green et reconstruction du signal

L'étape suivante du raisonnement consiste à introduire la fonction de Green du problème (4.23). Cette fonction correspond en fait à la réponse du système à une impulsion oscillant à la fréquence ω et située en un point z_0 . Elle est solution de :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[f_{\omega, k_x, k_y}(z) \frac{dG_{\omega, k_x, k_y}}{dz} \right] + g_{\omega, k_x, k_y}(z) G_{\omega, k_x, k_y}(z|z_0) &= \delta(z - z_0) \\ \frac{dG_{\omega, k_x, k_y}}{dz}(z = \pm l|z_0) \pm \alpha_{\omega, k_x, k_y} G_{\omega, k_x, k_y}(z = \pm l|z_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Une fois la fonction de Green évaluée, le déplacement transversal s'obtient grâce à l'intégrale :

$$\hat{\xi}_z(\omega, k_x, k_y, z) = \int_{-l}^{+l} dz_0 G_{\omega, k_x, k_y}(z|z_0) h_{\omega, k_x, k_y} \hat{P}'(\omega, k_x, k_y, z_0). \quad (4.25)$$

Cette manière de résoudre le problème a l'avantage de bien séparer ce qui concerne la physique propre de la couche (la fonction de Green) et la perturbation initiale P_{ext} . Différents pulses de pression peuvent être envisagés, mais la fonction de Green reste toujours la même et ne dépend que des caractéristiques intrinsèques du système. On gagne donc beaucoup en compréhension en suivant pas à pas les

différentes étapes de ce raisonnement plutôt qu'en résolvant directement le système d'équations aux dérivées partielles par un procédé numérique.

Le déplacement dans l'espace réel (O, x, y, z, t) s'obtient à partir du déplacement dans l'espace de Fourier-Laplace par inversions successives des transformées de Laplace et de Fourier

$$\xi_z(t, x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x dk_y e^{i(k_x x + k_y y)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} d\omega \hat{\xi}_z(\omega, k_x, k_y) e^{-i\omega t} \quad (4.26)$$

où $\epsilon > 0$.

Conformément à l'appendice B, l'inversion de la transformée de Laplace consiste en une intégration le long d'un contour (en l'occurrence une droite parallèle à l'axe réel) du plan ω -complexe. Ce contour est choisi pour passer au-dessus de toutes les singularités de l'intégrand, c'est à dire essentiellement de la fonction de Green. Ces singularités jouent un rôle fondamental dans le raisonnement, car ce sont elles qui déterminent les caractéristiques des perturbations spatio-temporelles. Le prochain paragraphe est dédié à l'étude des singularités de la fonction de Green.

4.7 Singularités de la fonction de Green

La fonction de Green peut s'exprimer sous une forme analytique fermée à partir de deux solutions indépendantes de l'équation différentielle homogène associée à (4.18). Pour des valeurs fixées de ω , k_x , k_y , notons u_g et u_d ces solutions satisfaisant aux conditions aux limites, pour la première $z = -l$ (gauche) et $z = +l$ (droite) pour la seconde. Définissons le wronskien de ces deux fonctions par $W(z) = u_g(z)u'_d(z) - u'_g(z)u_d(z)$, alors la fonction de Green prend la forme suivante :

$$G_{\omega, k_x, k_y}(z|z_0) = \begin{cases} \frac{u_g(z)u_d(z_0)}{f(z)W(z)} & \text{pour } z \leq z_0, \\ \frac{u_g(z_0)u_d(z)}{f(z)W(z)} & \text{pour } z \geq z_0. \end{cases} \quad (4.27)$$

Un théorème classique montre que le dénominateur $D_{\omega, k_x, k_y} = f(z)W(z)$ ne dépend pas de z . On peut donc réécrire la fonction de Green de manière plus condensée :

$$G_{\omega, k_x, k_y}(z|z_0) = \frac{u_g(z_{<})u_d(z_{>})}{D_{\omega, k_x, k_y}} \quad (4.28)$$

où $z_{<}$ (resp. $z_{>}$) désigne le minimum (resp. le maximum) de z et z_0 .

Analysons maintenant les singularités de la fonction G de la variable complexe ω pour k_x , k_y et z , z_0 fixés. Ces singularités se divisent en deux catégories qui donnent une contribution différente aux perturbations finales.

La première classe de singularités provient d'une annulation éventuelle du dénominateur de la fonction de Green. L'équation $D_{\omega, k_x, k_y} = 0$ sous-entend une relation implicite entre ω et le vecteur d'onde. Mais, comme le dénominateur ne dépend pas de la position dans la couche, les fréquences solutions correspondent à des oscillations globales de la queue magnétosphérique. On parle alors de modes propres discrets. Ces solutions sont analogues aux modes propres d'une corde vibrante fixée aux deux extrémités. Leur existence est liée au type de conditions aux limites que l'on impose au système. Mathématiquement, les solutions de l'équation $D_{\omega, k_x, k_y} = 0$ constituent des pôles pour la fonction de Green. Ils résultent de l'annulation du wronskien précédemment défini. En effet lorsque le wronskien s'annule, les solutions u_g et u_d ne sont plus indépendantes ; elles vérifient la même équation et les mêmes conditions aux limites, c'est à dire qu'elles sont proportionnelles entre elles. Nous verrons plus loin que, dans le cas de la couche de Harris, les pôles de la fonction de Green sont tous situés sur l'axe réel. Ils correspondent donc à des vibrations stables et non amorties. Le calcul de ces modes propres et la reconstruction du signal qui en résulte seront l'objet du chapitre suivant.

Il existe cependant un autre type de singularités spécifique des milieux non homogènes. En effet, l'équation maîtresse (4.18) devient singulière lorsque le coefficient f_{ω, k_x, k_y} passe par 0. L'examen de la formule (4.19) montre qu'il en est ainsi quand la vitesse de phase ω/k_x de la perturbation est égale soit à la vitesse d'Alfvén locale $v_A(z)$, soit à la vitesse cusp locale $v_c(z)$. Comme z est une variable continue, pour toute fréquence comprise entre 0 et kv_e ou 0 et kv_{ce} , il existe une position dans la couche qui annule le coefficient f . On parle alors de spectre continu ou de continuum. Précisons maintenant la nature mathématique de ces singularités et ce qu'elle implique pour la forme de la solution au voisinage d'un point singulier.

Pour des valeurs fixées de ω , k_x , k_y , notons z_s la position pour laquelle $\omega = k_x v_A(z_s)$, alors les deux coefficients f et g s'annulent en z_s . Au voisinage de ce point, on peut donc écrire $f(z) = f'(z_s)(z - z_s)$ et $g(z) = g'(z_s)(z - z_s)$. L'équation maîtresse devient alors :

$$\frac{d}{dz} \left[(z - z_s) \hat{\xi}'_z \right] + K(z - z_s) \hat{\xi}_z = 0$$

La solution de cette équation s'écrit de manière générale :

$$\hat{\xi}_z(z) = a(z) + b(z) \ln(z - z_s)$$

impliquant donc une divergence logarithmique de la solution en z_s .

De même si z_s désigne le point où la vitesse de phase est égale à la vitesse cusp

$\omega = k_x v_c(z_s)$, une divergence logarithmique apparaît en z_s . Dans le plan ω -complexe, on doit tenir compte de ce caractère logarithmique en définissant des lignes de coupure reliant des points de branchement. L'étude de la fonction logarithme de la variable complexe est détaillée dans l'appendice C. Mais l'étude générale des solutions de (4.18) dans le continuum sera analysée au chapitre 6.

Chapitre 5

Les modes globaux de la queue magnétosphérique terrestre

Dans ce chapitre, nous allons nous restreindre aux modes propres discrets de la couche de Harris en ne considérant que des perturbations se propageant selon la direction (Ox) du champ magnétique statique. Autrement dit, nous supposons que la composante k_y du vecteur d'onde est identiquement nul. Cela a pour conséquence de simplifier grandement les équations précédemment dérivées. Le paragraphe 5.1 pose à nouveau le problème en tenant compte de cette hypothèse supplémentaire.

L'expression de la fonction de Green donnée au chapitre précédent est tout à fait générale, mais elle n'est pas bien adaptée à l'étude des modes discrets. En effet l'équation maîtresse (4.18) peut être vue comme un opérateur linéaire de type Sturm-Liouville agissant sur le déplacement transversal. La fréquence ω joue alors le rôle de valeur propre de cet opérateur. La théorie des opérateurs de Sturm-Liouville montre qu'il existe une base orthonormée de fonctions propres associées à des valeurs propres bien définies. La fonction de Green du problème peut alors se décomposer sur cette base. C'est l'objet du paragraphe 5.2.

5.1 Conséquences de l'hypothèse $k_y = 0$

L'hypothèse $k_y = 0$ simplifie le problème car le mode d'Alfvén transversal se découple des deux autres modes magnétoacoustiques de la MHD. En effet, si on revient à l'expression du déplacement $\hat{\xi}_y$ (équation (4.17)), on constate qu'il est identiquement nul. Un simple pulse de pression extérieure, uniquement fonction des variables x et z , ne peut engendrer des ondes transversales polarisées suivant y . Ces ondes appartiennent au mode torsionnel d'Alfvén qui est alors découplé des modes compressionnels de la MHD.

D'autre part, l'équation maîtresse (4.18) conserve la même forme, mais l'expression des coefficients change (pour alléger l'écriture k_x est remplacé par k) :

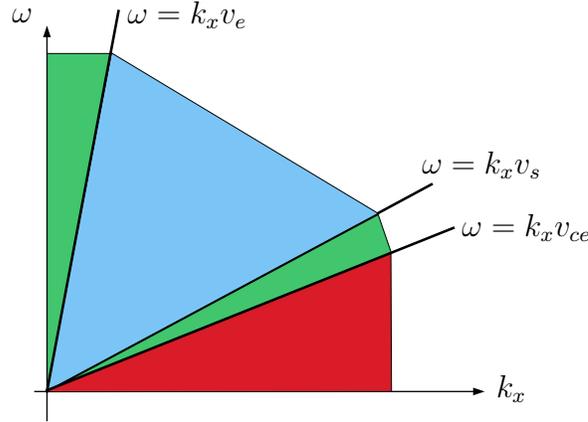
$$\frac{d}{dz} \left[f_{\omega,k}(z) \frac{d\hat{\xi}_z}{dz} \right] + g_{\omega,k}(z) \hat{\xi}_z = h_{\omega,k} \frac{d\hat{P}}{dz} \quad (5.1)$$

avec

$$\begin{aligned} f_{\omega,k}(z) &= \rho_{eq}(z)(v_A^2 + v_s^2) \frac{\omega^2 - k^2 v_c^2(z)}{\omega^2 - k^2 v_s^2} \\ g_{\omega,k}(z) &= \rho_{eq}(z)(\omega^2 - k^2 v_A^2(z)) \\ h_{\omega,k} &= \frac{\omega^2}{\omega^2 - k^2 v_s^2} \end{aligned}$$

On constate que le continuum d'Alfvén a disparu, renforçant l'idée que le mode torsionnel d'Alfvén est découplé dans ce problème. Il subsiste encore le continuum cusp, car les perturbations se propageant à la vitesse cusp sont de nature compressive.

Fig. 5.1 Régionnement du plan (ω, k) suivant le type de solution escomptée : en rouge, solution singulière; en vert, solution régulière rayonnant vers l'extérieur; en bleu, solution régulière évanescente.



Enfin, il est intéressant de construire un diagramme (ω, k) , dans lequel figurent les différents types de solutions attendues suivant le domaine de fréquence. Dans une couche de Harris, la vitesse cusp varie entre 0 et une valeur maximale $v_{ce} = \sqrt{v_e^2 v_s^2 / (v_e^2 + v_s^2)}$, légèrement inférieure à la vitesse du son. Pour tout point situé à l'intérieur du secteur de couleur rouge sur la figure 5.1, il existe une position dans la couche qui rend l'équation (5.1) singulière. Les solutions correspondantes possèdent une divergence logarithmique et représentent donc des modes continus. Dans le reste du diagramme, l'équation (5.1) est régulière, mais nous avons souligné au chapitre

précédent deux comportements distincts de la solution à l'infini. Elle pouvait être sinusoïdale (modes rayonnants vers l'extérieur) ou exponentielle (modes confinés dans la couche) suivant le signe du coefficient défini à l'équation (4.22) que nous réécrivons ici :

$$\alpha_e^2 = -\frac{(\omega^2 - k^2 v_e^2)(\omega^2 - k^2 v_s^2)}{(v_s^2 + v_e^2)(\omega^2 - k^2 v_{ce}^2)} \quad (5.2)$$

Il est facile de déduire que si $\omega > kv_e$ (domaine coloré en vert), $\alpha_e^2 < 0$ et la solution de (5.1) est sinusoïdale à l'infini. Par contre si $kv_s < \omega < kv_e$ (domaine coloré en bleu), la solution est exponentielle à l'infini. La figure 5.1 résume ces conclusions. Comme nous nous intéressons exclusivement, dans ce chapitre, aux modes discrets et localisés dans la couche, nous restreignons notre étude au domaine de fréquence $kv_s < \omega < kv_e$.

5.2 Développement de la fonction de Green sur les fonctions propres

Le problème que nous avons donc à résoudre est le suivant. Il s'agit de trouver les fonctions ψ qui satisfont l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\omega,k}[\psi] + \omega^2 \psi &= 0 \\ \frac{d\psi}{dz}(z = \pm l) \pm \alpha_e(\omega, k)\psi(z = \pm l) &= 0 \\ \text{avec } \mathcal{L}_{\omega,k} &= \frac{1}{\rho_{eq}} \frac{d}{dz} \left[f_{\omega,k}(z) \frac{d}{dz} \right] - k^2 v_A^2(z) \times . \end{aligned}$$

L'opérateur linéaire \mathcal{L} est de type Sturm-Liouville et ω^2 joue le rôle de valeur propre. La théorie bien établie de ces opérateurs montre qu'il existe une base complète et infinie de fonctions solutions $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (les fonctions propres) pour des valeurs discrètes et bien définies $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la valeur propre. Cependant, la valeur propre ω apparaît non seulement dans la première équation, mais également dans les conditions aux limites par l'intermédiaire du coefficient α_e . Dans ce cas, la base de fonctions propres est bien complète, mais non orthogonale pour le produit scalaire $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \int_{-l}^{+l} \rho_{eq}(z) \psi_m(z) \psi_n(z) dz$. Or, lors de la reconstruction du signal, une décomposition sur la base des fonctions propres sera nécessaire. Si la base n'est pas orthogonale, les coefficients de cette décomposition ne pourront pas être évalués facilement. La condition d'orthogonalité est indispensable pour la suite des calculs. C'est pourquoi nous allons suivre le raisonnement proposé par Morse et Feschbach (1953); nous allons résoudre, pour des valeurs fixées de ω et k , l'équation suivante où la valeur propre est

notée λ :

$$\mathcal{L}_{\omega,k}[\psi] + \lambda^2\psi = 0, \quad (5.3)$$

assortie des conditions aux limites précédentes qui ne dépendent pas de la valeur propre λ . Les fonctions solutions forment alors une base orthonormée complète pour le produit scalaire ci-dessus et chaque fonction propre ψ_n est associée à une valeur propre λ_n pour la même valeur de la fréquence ω .

Ensuite, nous pouvons développer la fonction de Green sur cette base de fonction en écrivant :

$$G_{\omega,k} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(z). \quad (5.4)$$

Pour déterminer les coefficients de cette décomposition, on injecte cette expression dans l'équation que satisfait la fonction de Green (équation (4.24)) que nous rappelons ici :

$$\mathcal{L}_{\omega,k}[G_{\omega,k}] + \omega^2 G_{\omega,k}(z|z_0) = \frac{\delta(z - z_0)}{\rho_{eq}(z)},$$

on obtient, compte tenu du fait que ψ_n est solution de (5.3) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega^2 - \lambda_n^2) \psi_n = \frac{\delta(z - z_0)}{\rho_{eq}(z)}.$$

On prend ensuite le produit scalaire de cette expression multipliée par ψ_m :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\omega^2 - \lambda_n^2) \langle \psi_m, \psi_n \rangle = \psi_m(z_0). \quad (5.5)$$

L'orthogonalité de la base des fonctions propres prend alors toute sa signification, car dans ce cas, le produit scalaire de deux fonctions propres d'indices différents est nul, autrement dit $\langle \psi_m, \psi_n \rangle = \delta_{mn}$. De ce fait, seul le terme d'indice m subsiste dans la sommation et on tire finalement le coefficient de la décomposition :

$$a_m = \frac{\psi_m(z_0)}{\omega^2 - \lambda_m^2}.$$

Nous obtenons donc une deuxième expression de la fonction de Green, plus utile dans l'étude présente des modes discrets :

$$G_{\omega,k}(z|z_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\psi_n(z)\psi_n(z_0)}{\omega^2 - \lambda_n^2(\omega, k)}. \quad (5.6)$$

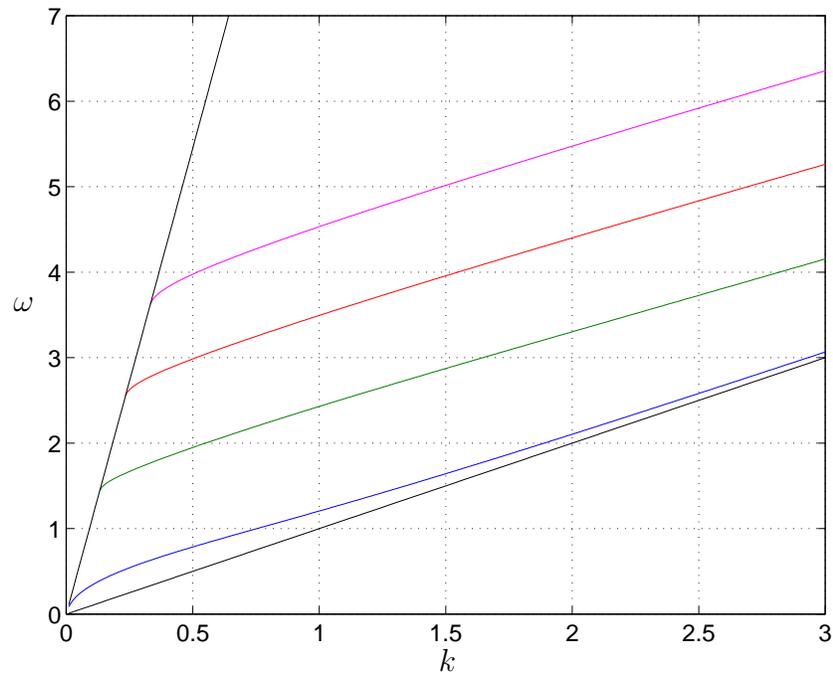
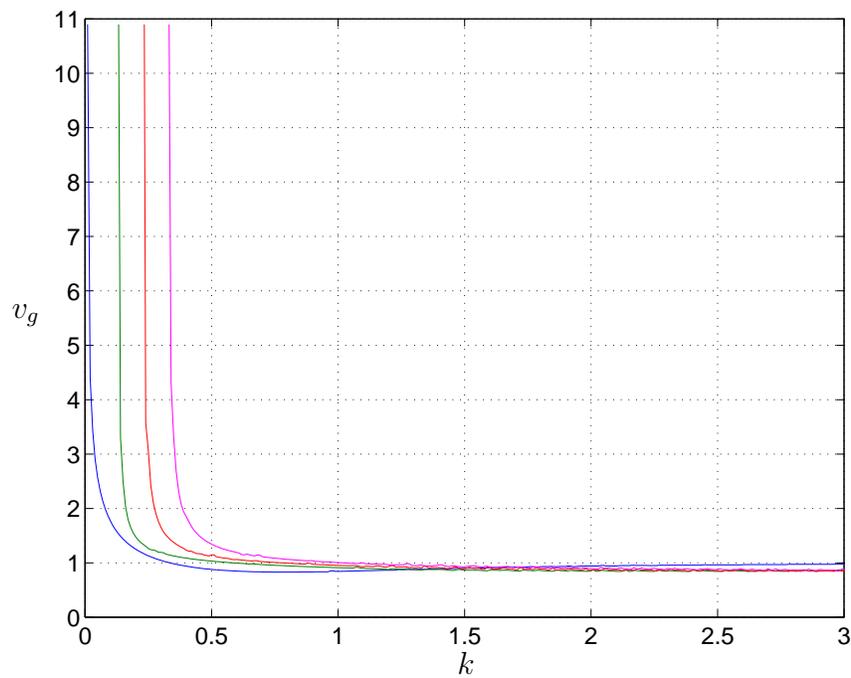
Insistons bien sur le fait que le calcul précédent est effectué pour une valeur particulière de la fréquence ω . En conséquence, la suite des valeurs propres (λ_n) dépend

naturellement de ce paramètre. Terminons l'analyse en remarquant que l'expression précédente de la fonction de Green met clairement en évidence la présence de pôles. Ce sont en effet les racines du dénominateur, i.e. de l'équation transcendante $\omega \pm \lambda_n(\omega, k) = 0$. Pour chaque n , cette équation a deux racines réelles opposées $\pm\omega_n(k)$. Les fonctions $\omega_n(k)$ sont analogues à des relations de dispersion, elles représentent les fréquences propres des modes discrets se propageant dans la couche de courant. Nous verrons, dans le paragraphe dédié à la reconstruction du signal, comment les pôles de la fonction de Green sont utilisés dans l'établissement de l'expression finale du déplacement. Mais avant, il convient de calculer ces fréquences propres et de commenter les relations de dispersions obtenues.

5.3 Relations de dispersion

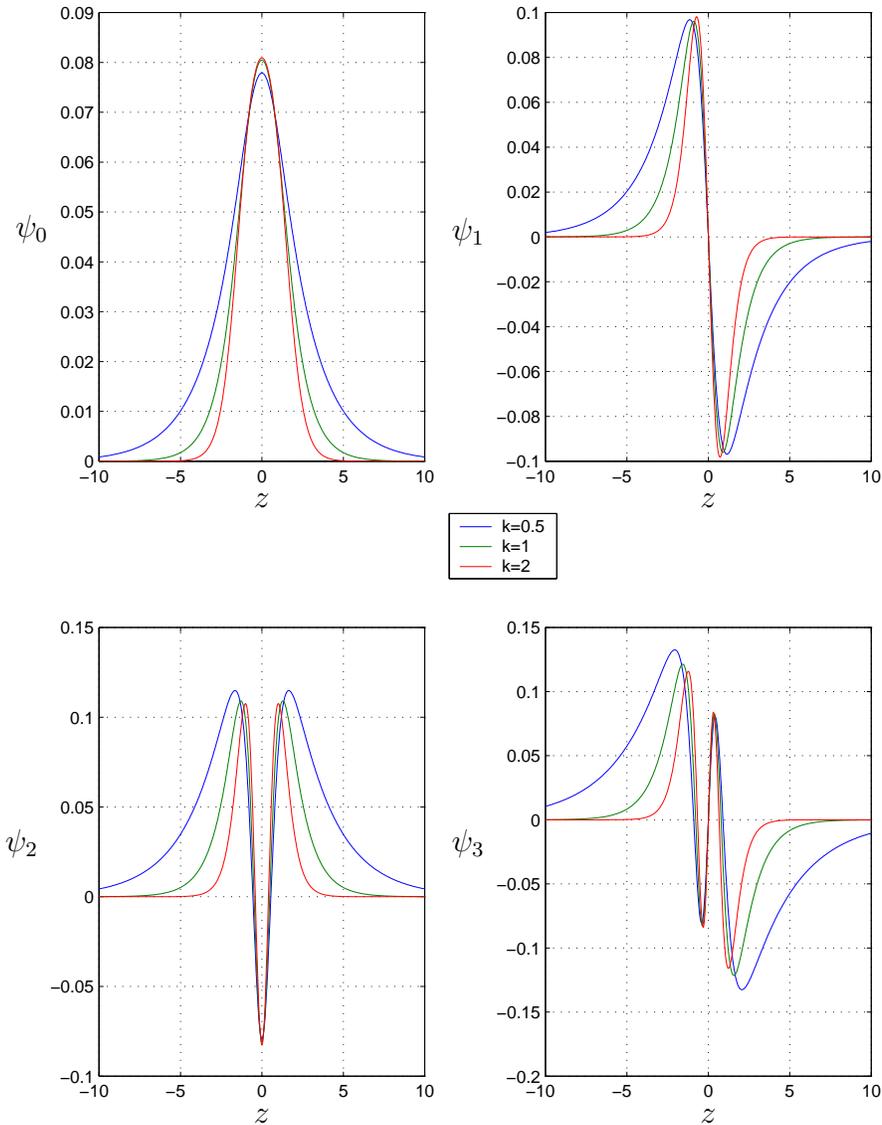
L'équation différentielle (5.1) n'ayant pas de solution analytique pour une couche de Harris, une résolution numérique s'avère nécessaire. Pour cela nous avons utilisé la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (fournie par le logiciel MATLAB) en prenant comme condition "initiale" $\psi'(0) = 0$ pour les modes pairs et $\psi(0) = 0$ pour les modes impairs. L'intégration de l'équation différentielle s'effectue pour des valeurs fixées de ω et de k et la valeur de λ est modifiée chaque fois que la condition aux limites en $z = +l$ ($l = 10a$) n'est pas satisfaite. Nous obtenons alors un jeu de fonctions $\lambda_n(\omega, k)$, puis nous résolvons l'équation transcendante $\omega = \lambda_n(\omega, k)$ pour avoir les fréquences propres.

Les relations de dispersion sont illustrées sur la figure 5.2 pour les 4 premiers modes. Les grandeurs figurant sur les axes sont normalisées. Le nombre d'onde est normalisé à $1/a$ et la pulsation ω à v_s/a . Avec les valeurs caractéristiques de la queue ($a = 6400$ km, $v_s = 400$ km/s) une pulsation $\omega = 1$ correspond à une fréquence $\nu = v_s/(2\pi a) \simeq 10$ mHz. Les relations de dispersion sont des droites presque parallèles entre elles avec une pente caractéristique de l'ordre de la vitesse du son. Pour une vitesse de phase donnée, il existe un ensemble infini de valeurs propres et de fonctions propres, avec un nombre croissant de nœuds, comme la théorie de Sturm-Liouville le prévoit. Cependant, pour un vecteur d'onde donné, les fréquences propres sont en nombre fini et majorées par kv_e où v_e est la vitesse d'Alfvén dans les lobes. L'intervalle séparant deux fréquences successives est de l'ordre de $v_s/a \simeq 10$ mHz. Pour k faible, les modes se connectent à la droite kv_e . Contrairement à ce que la figure 5.2 peut laisser penser, il ne s'agit pas de points anguleux. Un calcul plus détaillé au voisinage

Fig. 5.2 Relations de dispersion pour les 4 premiers modes (du bleu au mauve)**Fig. 5.3** Vitesses de groupe pour les 4 premiers modes

de ces points montre que la vitesse de groupe varie brutalement, dans un domaine très étroit de longueur d'onde, de la vitesse du son ($v_s = 400$ km/s) à la vitesse d'Alfvén dans les lobes ($v_e \simeq 11v_s$) (cf. figure 5.3).

Fig. 5.4 Structure spatiale des modes propres : bleu : $k = 0.5$, vert : $k = 1$ et rouge : $k = 2$



Ces deux figures suscitent encore quelques commentaires. Pour des valeurs raisonnables des paramètres d'équilibre de la couche de Harris ($a = 1R_E = 6400$ km, $v_s = 400$ km/s), la période normalisée est $a/v_s = 16$ s. Aussi, le premier harmonique correspond déjà à une valeur assez élevée de la fréquence, de l'ordre de 20 mHz.

Il est également intéressant de considérer la structure spatiale (dans la direction z) des modes. La figure 5.4 représente ces variations pour les 4 premiers modes et pour trois valeurs différentes du nombre d'onde : $k = 0.5$, $k = 1$ et $k = 2$. Les

modes successifs possèdent un nombre croissant de zéros, comme le prévoit la théorie standard de Sturm-Liouville. Ces fonctions ont été obtenues avec des conditions aux limites libres et sont, par conséquent, intrinsèques à la couche de plasma. On constate que l'extension spatiale de ces modes dépend du nombre d'onde, ces derniers sont plus resserrés pour des valeurs élevées de la longueur d'onde.

Enfin concluons cette analyse en remarquant qu'aucun pôle n'a été trouvé au dessus de l'axe réel. Ce résultat confirme donc la stabilité de la couche de Harris vis à vis des perturbations bidimensionnelles de la MHD.

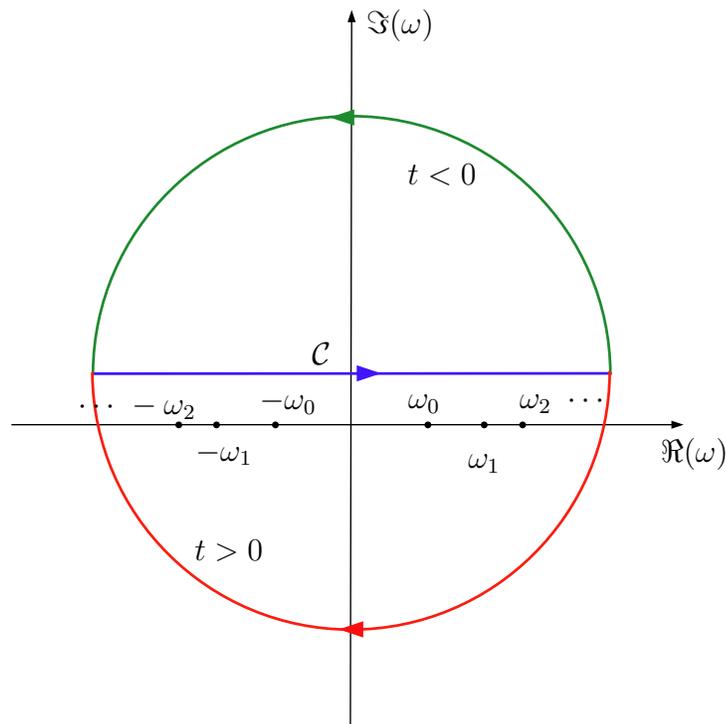
5.4 Reconstruction du signal

5.4.1 Inversion de la transformée de Laplace

Intéressons-nous maintenant à l'intégration sur ω . L'intégrand apparaissant dans l'inversion de la transformée de Laplace (cf. équation (4.26)) s'écrit

$$F_{\omega,k}(z|z_0) = G_{\omega,k}(z|z_0)h_{\omega,k}\hat{P}'_{\omega,k}(z_0)e^{-i\omega t}.$$

Fig. 5.5 Contour \mathcal{C} d'intégration dans le plan ω -complexe.



Le contour d'intégration est la droite \mathcal{C} , parallèle à l'axe réel passant au-dessus de toutes les singularités de F . Ces dernières se réduisent à des pôles simples situés

sur l'axe réel, dans le domaine de fréquence étudié. Il est donc naturel d'utiliser le théorème des résidus pour évaluer cette intégrale. Ainsi, on cherche à refermer ce contour par un demi-cercle de rayon infini. Lorsqu'on fait tendre $|\omega|$ vers l'infini, la fonction F tend vers 0 si l'on se trouve dans le demi-plan supérieur pour $t < 0$ et dans le demi-plan inférieur pour $t > 0$. Donc, si le contour d'intégration est refermé comme indiqué sur la figure 5.5, on peut conclure que, pour une valeur fixée du nombre d'onde k :

- Pour $t < 0$, aucun pôle n'est encerclé par le contour, si bien que l'intégrale est nulle : $\xi_z(t, x, z) = 0$. Ce résultat est conforme au principe de causalité. Avant que le pulse extérieur n'agisse, la couche est au repos et le déplacement est identiquement nul.
- Pour $t > 0$, le contour encercle quelques pôles de la fonction de Green. De l'application du théorème des résidus, on tire :

$$\int_C F_{\omega,k}(z|z_0)d\omega = -2i\pi \sum_{n=1}^{N(k)} \frac{\psi_n^{(\omega_n,k)}(z)\psi_n^{(\omega_n,k)}(z_0)}{2\omega_n \left(1 - \frac{d\lambda_n}{d\omega}(\omega_n, k)\right)} \times h_{\omega_n,k} \left[\hat{P}'_{\omega_n,k}(z_0)e^{-i\omega_n t} - \hat{P}'_{-\omega_n,k}(z_0)e^{i\omega_n t} \right], \quad (5.7)$$

où $N(k)$ est le nombre de pôles positifs encerclés pour chaque valeur de k .

Nous n'avons tenu compte dans cette expression que des pôles liés à la résolution de l'équation différentielle (fréquences propres du problème). En toute rigueur, il faudrait rajouter les pôles $\omega = \pm kv_s$ apparaissant au dénominateur de la fonction $h_{\omega,k}$ ainsi que les pôles éventuels apportés par le pulse de pression \hat{P} lui-même. Cependant, les premiers pôles correspondent simplement à la propagation d'une onde sonore selon la direction (Ox) , sur laquelle il n'est pas très intéressant de s'appesantir. Les pôles de \hat{P} se situent dans le demi-plan négatif, ils fournissent donc au signal reconstruit une contribution proportionnelle à un terme du type $\exp(-t/\tau)$ qui s'amortit rapidement. Il s'agit en fait du régime transitoire.

Nous allons maintenant utiliser cette expression pour déterminer les perturbations résultant de divers types de pulses initiaux.

5.4.2 Exemples de pulse initial

Nous supposons que le pulse de pression extérieur possède une structure gaussienne en x et en z avec des demi-hauteurs respectivement notées L_x et L_z . Le choix de la fonction de Gauss n'est pas impératif, nous aurions pu prendre une autre forme.

Ce qui importe, c'est de définir des échelles spatiales caractéristiques. De plus, la fonction gaussienne a l'avantage de posséder une transformation de Fourier particulièrement simple. La dépendance temporelle du pulse est de nature exponentielle avec une échelle caractéristique τ , si bien que :

$$P_{ext}(t, x, z) = P_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2L_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{2L_z^2}\right) \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (5.8)$$

La transformée de Fourier-Laplace de P_{ext} s'écrit :

$$\hat{P}(\omega, k, z) = \sqrt{2\pi} \frac{P_0 L_x \tau}{(1 - i\omega\tau)^2} \exp\left(-\frac{k^2 L_x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{(z-z_0)^2}{2L_z^2}\right). \quad (5.9)$$

En introduisant cette expression dans (5.7) et en calculant explicitement l'intégration en k , nous obtenons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \xi_z(t, x, z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_0 L_x \tau \sum_{n=1}^{\infty} \int_{kl_n}^{+\infty} dk e^{-k^2 L_x^2/2} \cos(kx) \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - k^2 v_s^2} \\ &\times \frac{2\omega_n \tau \cos(\omega_n t) - (1 - \omega_n^2 \tau^2) \sin(\omega_n t)}{(1 + \omega_n^2 \tau^2)^2} \frac{\Psi_n}{1 - \frac{d\lambda_n}{d\omega}} \psi_n^{(\omega_n, k)}(z), \end{aligned} \quad (5.10)$$

où kl_n est la plus petite valeur de k pour le n -ième harmonique et

$$\Psi_n = - \int_{-l}^{+l} \psi_n^{(\omega_n, k)}(z) \frac{z - z_0}{L_z^2} e^{-\frac{(z-z_0)^2}{2L_z^2}} dz. \quad (5.11)$$

Une fois le déplacement transversal calculé, nous pouvons déduire les autres grandeurs physiques du problème grâce aux équations (4.12) à (4.14) :

$$P(\mathbf{r}) = P_{eq}(z - \xi_z) \left(1 - \gamma \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right)\right) \quad (5.12)$$

$$B_x(\mathbf{r}) = \left(1 - \frac{\partial \xi_z}{\partial z}\right) B_{eq}(z - \xi_z) \quad (5.13)$$

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{\partial \xi_z}{\partial x} B_{eq}(z - \xi_z) \quad (5.14)$$

Analysons maintenant plus précisément les résultats du calcul en considérant d'abord le cas d'un pulse symétrique, puis celui d'un pulse excentré par rapport à la couche neutre. Comme nous le verrons, la parité du pulse initial conditionne grandement la nature des perturbations excitées.

5.4.3 Excitation du premier harmonique par un pulse centré sur la couche neutre

Nous commençons notre étude en considérant une perturbation initiale centrée sur la couche neutre ($z_0 = 0$) dont l'amplitude est égale à la pression magnétique dans

les lobes : $P_0 = P_{me} = B_e^2/(2\mu_0)$. Il est important de souligner dès à présent qu'il s'agit d'une valeur très élevée de la pression (100% de la pression d'équilibre). En conséquence, le traitement linéaire d'une telle perturbation n'est pas correct en toute rigueur. Cependant, dans le cadre linéaire, l'amplitude des perturbations engendrées est proportionnelle à l'amplitude de la source excitatrice. Il faut donc envisager cette valeur de P_0 comme une unité de référence.

D'après l'équation (5.11), Ψ_n n'est non nul que pour n impair. En effet, si n est pair, ψ_n est une fonction paire de z et multipliée par une fonction impaire, l'intégrale est nulle. Par conséquent, si le pulse de pression extérieur est symétrique, seuls les modes impairs sont excités. L'importance relative de ces différents modes dans le signal complet dépend des paramètres de la perturbation initiale, comme nous le verrons plus loin.

Dans un premier temps, considérons la propagation du déplacement transversal ξ_z pour un pulse initial défini par les paramètres suivants : $L_z = a$; $L_x = a$; $\tau = 8s = 0.5a/v_s$. La figure 5.6 représente l'évolution spatio-temporelle du premier harmonique calculé en $z = 0.5a$. La première colonne correspond à l'évolution spatiale des perturbations observées à des instants successifs ($t = 0, 20, 40$ et 60 ; ou bien $0, 320, 480$ et 960 s), alors que la colonne de droite illustre l'évolution temporelle enregistrée à diverses distances du pulse initial ($x = 10, 20, 40, 60R_T$). Ces deux séries de graphes offrent donc deux vues complémentaires de la propagation du signal. On peut noter une forte dispersion du pulse initial. En effet, la forme gaussienne du signal initial se transforme assez rapidement en un long train d'ondes. Pour $t = 20$ (figure 5.6-a2), on reconnaît encore le pic gaussien, mais ce dernier s'estompe après propagation sur une distance de l'ordre de $50R_T$ (ou sur une durée de l'ordre de 15 minutes). Ainsi, pour un observateur situé loin dans la queue, le signal reçu ressemble davantage à des oscillations monochromatiques avec une période dominante de 4 unités de temps (i.e. 1 minute) qu'à un pulse gaussien à spectre large. Ce constat s'explique à l'aide du diagramme de dispersion. Un pulse gaussien dépose majoritairement de l'énergie dans le domaine des grandes longueurs d'onde (ou des faibles vecteurs d'onde), en l'occurrence ici, dans la zone proche de la droite $\omega = kv_e$ où la dispersion est maximale. La pulsation normalisée pour ces petites valeurs de k vaut 1.5, ce qui correspond bien à des périodes de $2\pi/1.5 \simeq 4$. Ce résultat est en fait général : un pulse gaussien de pression engendre des perturbations plutôt monochromatiques avec une fréquence typique donnée par les paramètres de la couche de Harris ($\omega \simeq 1.5v_s/a$).

Nous pouvons poursuivre notre analyse de la propagation du déplacement trans-

Fig. 5.6 Propagation du déplacement transversal : (a) en fonction de x pour 4 valeurs de $t = 0 - 20 - 40 - 60$ et (b) en fonction de t pour 4 valeurs de $x = 10 - 20 - 40 - 60$.

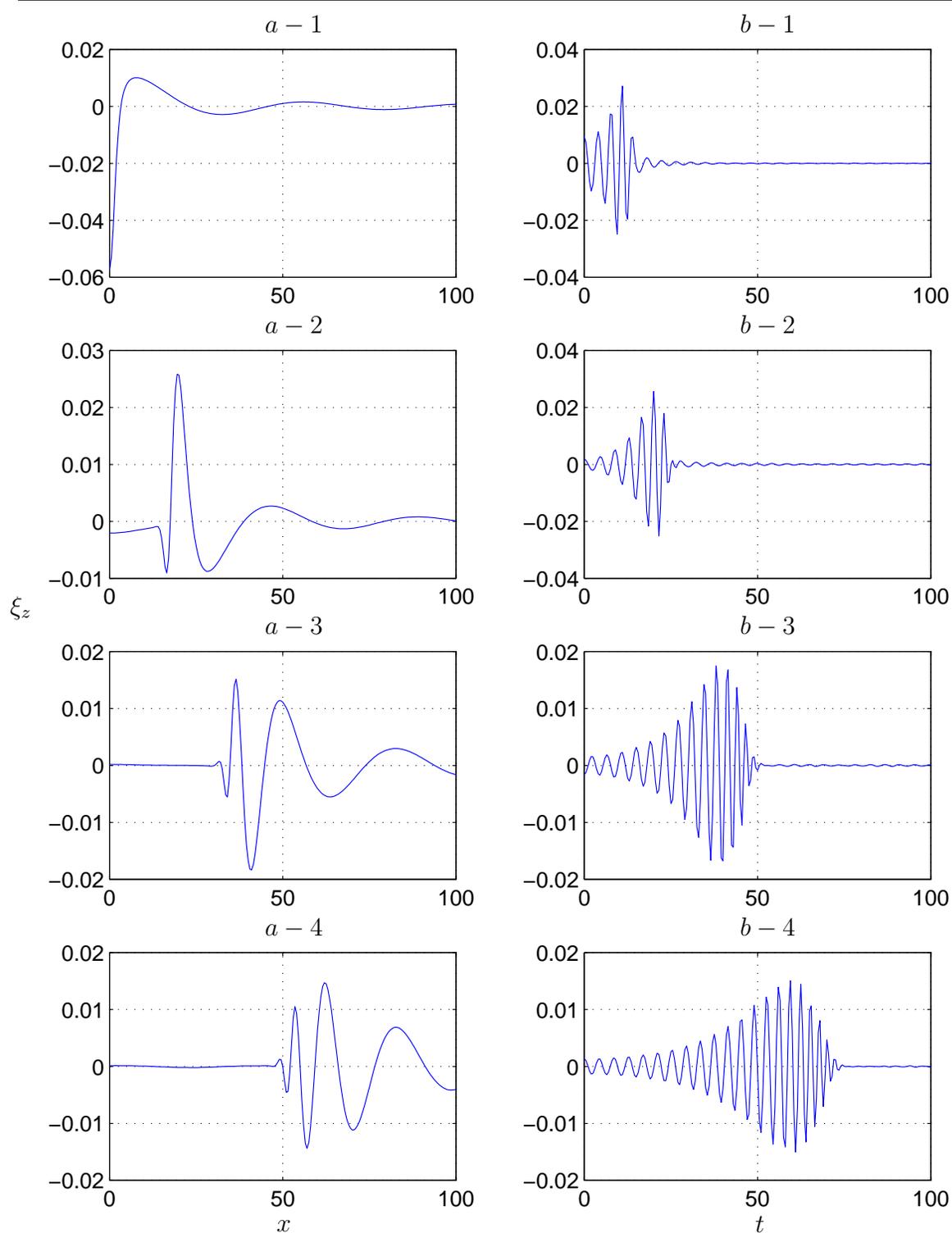
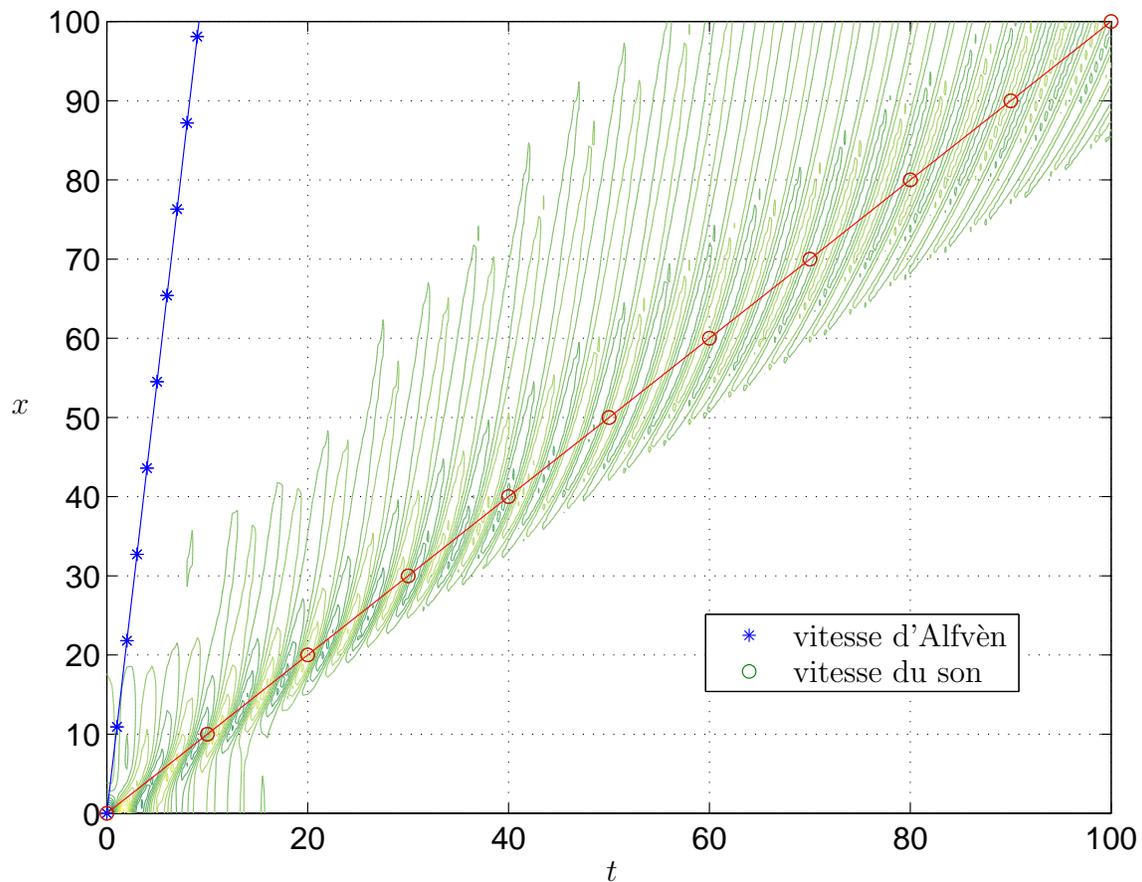


Fig. 5.7 Vitesses de propagation du signal : isocontours du déplacement transversal ξ_z dans le plan (t, x)



versal en recherchant la ou les vitesse(s) de propagation. Pour ce faire, la figure 5.7 montre la propagation du signal dans le plan (t, x) pour $z = 0.5a$. Deux vitesses caractéristiques ressortent nettement de ce diagramme. La première est la vitesse d'Alfvén dans les lobes : $v_e \simeq 11v_s \simeq 4400$ km/s, la seconde est légèrement inférieure à la vitesse du son $0.8v_s = 320$ km/s et correspond au minimum de la vitesse de groupe. Ainsi, un satellite situé en un point fixe de la couche reçoit tout d'abord un précurseur de grande longueur d'onde et de période avoisinant la minute qui se propage à la vitesse de phase maximale v_e . Puis le satellite "voit" arriver un paquet d'ondes constitué de longueurs d'onde plus courtes se déplaçant au minimum de la vitesse de groupe (cf. également les graphes 5.6-b). En un point donné, les oscillations présentent donc au cours du temps une longueur d'onde qui varie entre $45R_T$ et $3R_T$.

Examinons maintenant la structure spatiale dans la direction z de la perturbation. La figure 5.8 représente les lignes de niveaux du déplacement transverse, de la

Fig. 5.8 Structures spatiales du déplacement transversal, de la pression thermique et de la pression magnétique à $t = 40$.

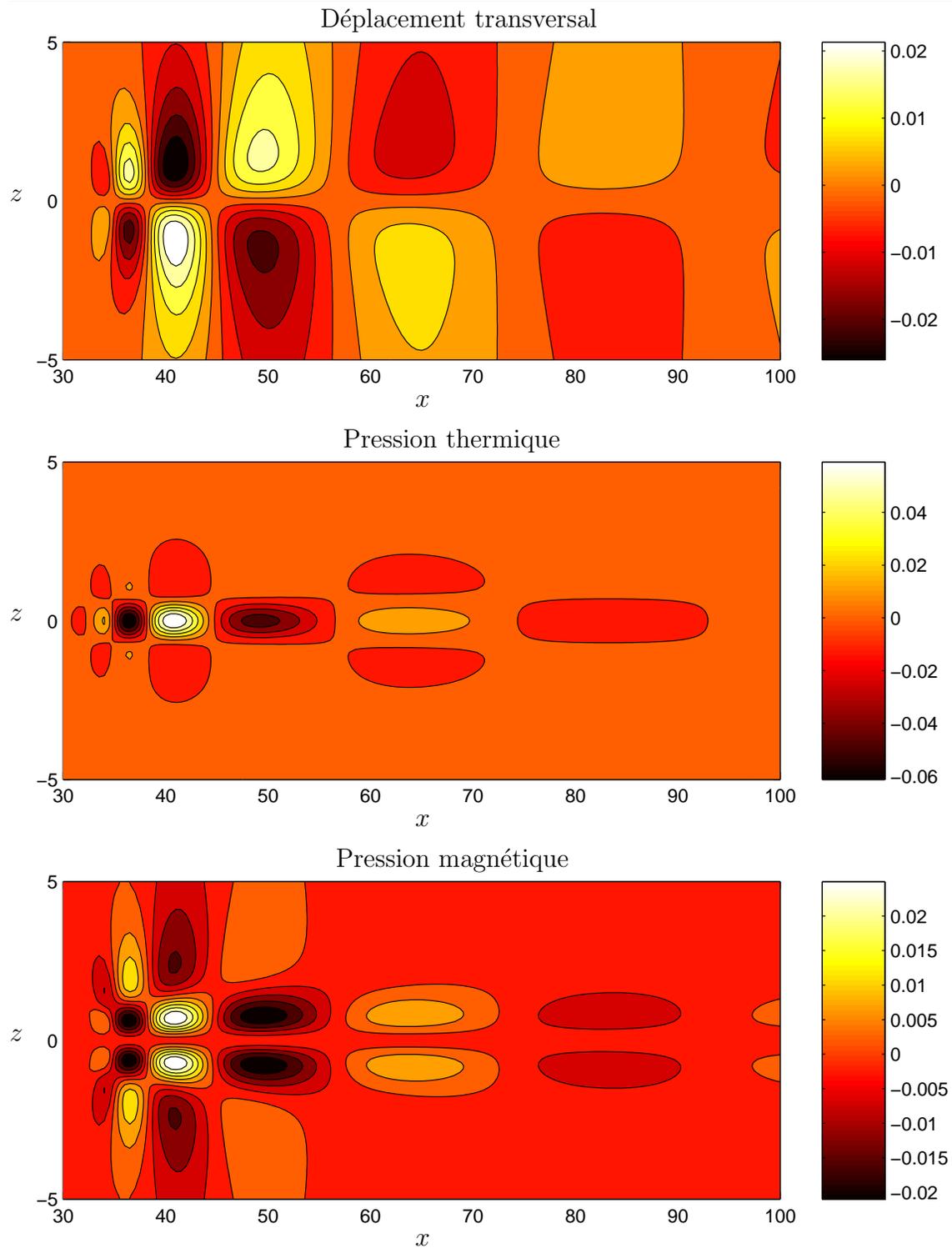
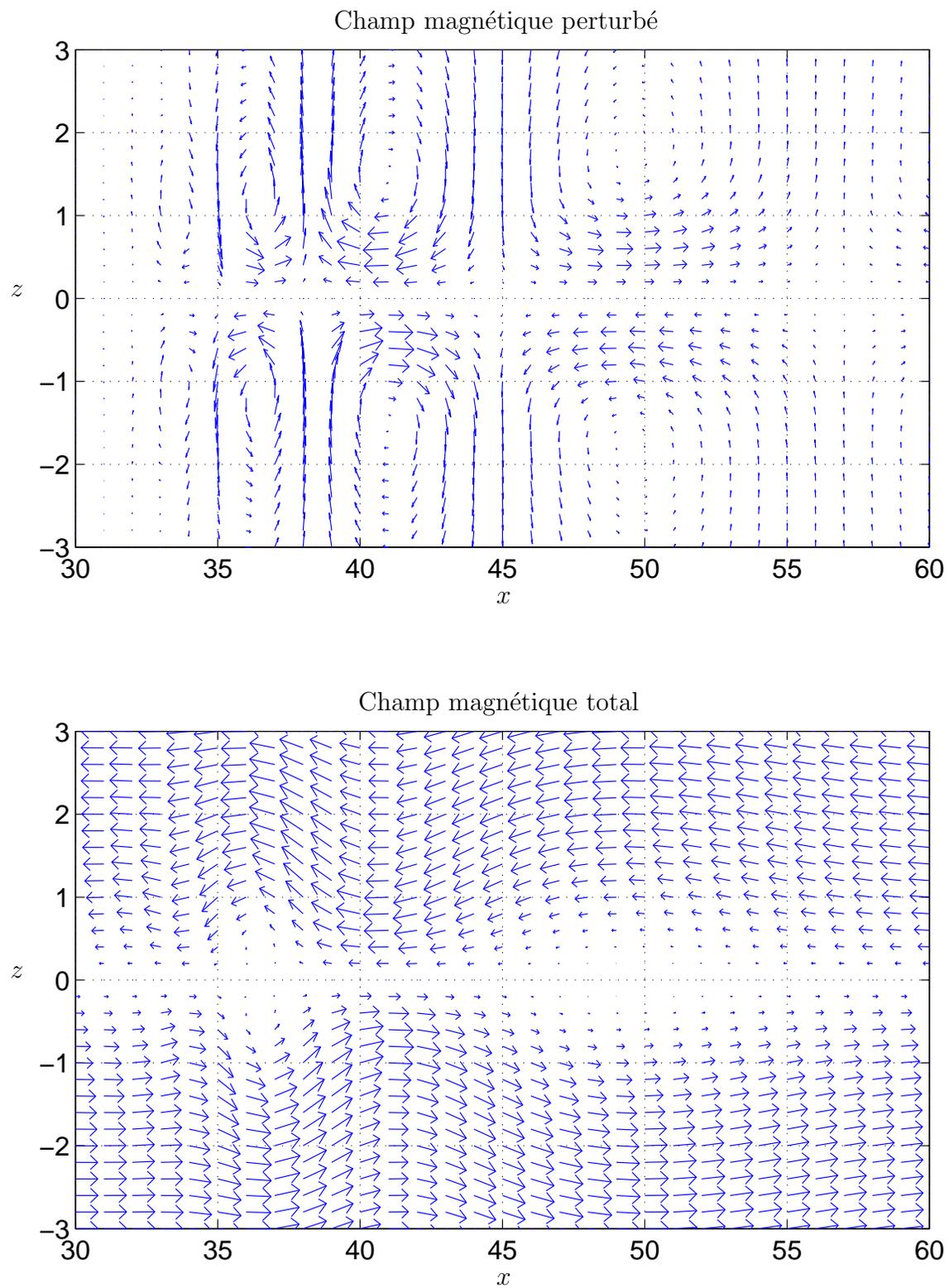


Fig. 5.9 Spectres des champs magnétiques perturbé et total à $t = 40$.

pression thermique et de la pression magnétique dans le plan (x, z) à l'instant $t = 40$ ou 640 s. Le signal précurseur correspond à la partie de la courbe de dispersion proche de la droite $\omega = kv_e$. Il possède donc les plus faibles valeurs de fréquence et de nombre d'ondes. Au paragraphe 5.3, nous avons indiqué que les modes de grande longueur d'onde possèdent l'extension spatiale la plus grande. Or nous constatons bien que le signal précurseur s'étend au-delà de $5a$. En revanche, le paquet d'ondes principal est plus confiné autour de la couche neutre avec une extension typique de $1a$. C'est également proche de la couche neutre que l'on observe les plus fortes variations de la pression thermique. Par ailleurs, les pressions magnétique et thermique varient en phase dans la direction x et en opposition de phase dans la direction z .

Concernant l'amplitude des perturbations, nous pouvons constater qu'elle est relativement modeste pour un pulse de pression extérieur aussi intense. En effet, l'amplitude maximale des fluctuations de pression atteint à peine un dixième du pulse initial. Pour le déplacement transverse, on note une amplitude de l'ordre de $0.02a$ ($= 120\text{km}$) au maximum. Les fluctuations du champ magnétique sont maximales au voisinage de la ligne neutre (pour $z = 0.5$) et atteignent $0.03B_e$ pour la composante longitudinale et $0.015B_e$ pour la composante transversale, alors qu'à cet endroit le champ magnétique d'équilibre est d'environ $0.5B_e$. Ainsi, un pulse de pression extérieur n'engendre pas de fortes perturbations de la couche de Harris. Cela signifie également que les perturbations magnétiques de 1nT observées dans la queue magnétosphérique correspondent à des pulses de pression initiaux très intenses. Si de telles perturbations peuvent se propager sur des modes linéaires (rappelons que le champ magnétique dans les lobes peut atteindre 30 nT), la perturbation initiale qui les engendre sort vraisemblablement du cadre de la théorie linéaire.

Pour clore cette partie, intéressons-nous à la polarisation du champ magnétique illustrée sur la figure 5.9. Le premier graphe montre le champ perturbé seul et le second le champ magnétique total (perturbé + statique). Comme les fluctuations magnétiques sont très faibles par rapport au champ statique, elles ont été amplifiées d'un facteur 20 avant d'être ajoutées au champ d'équilibre. Cette opération n'a pas d'autre but que de rendre plus visible la topologie des lignes de champ. Elle ne modifie en aucun cas la structure géométrique des perturbations. Les fluctuations magnétiques présentent une succession de vortex de sens alternés. Sur l'axe $z = 0$, aucune perturbation n'est observée; il existe donc une barrière imperméable aux lignes de champ entre les deux lobes de la queue magnétosphérique. De part et d'autre de cette barrière, la géométrie des lignes de champ est antisymétrique. Lorsque le

champ magnétique statique est superposé, la topologie des lignes de champ ressemble à un chapelet de saucisses, les Anglo-saxons lui ont donné le nom de mode "sausage" †. Contrairement à ce qu'indique la figure, l'ondulation du champ magnétique reste faible. Avec une perturbation initiale aussi forte que $1P_{me}$, la déviation maximale dans la direction du champ magnétique est plus petite que 2° à $z = 0.5a$.

5.4.4 Coefficients de couplage

Le but de ce paragraphe est d'étudier l'influence des paramètres définissant le pulse initial sur les amplitudes des différents modes excitables. Nous commençons par comparer les résultats du paragraphe précédent à ceux obtenus avec une extension spatiale différente de la perturbation initiale. Par exemple, en prenant $L_x = 10a$ à la place de $L_x = 1a$, on concentre l'énergie initiale sur un domaine de vecteur d'onde beaucoup plus restreint. Les différents modes sont donc excités dans un petit intervalle de nombre d'onde proche de la droite $\omega = kv_e$. Ainsi, le signal reconstruit est composé de modes se propageant à des vitesses proches de la vitesse maximale d'Alfvén et fortement dispersifs en raison de l'importante variation de la vitesse de groupe dans cet intervalle de longueur d'onde. La dispersion du signal est particulièrement nette sur la figure 5.10, représentant toujours le premier harmonique du déplacement transversal selon le même schéma que la figure 5.6. La figure 5.11 illustre l'expansion spatiale du déplacement transversal, de la pression thermique et de la pression magnétique à l'instant $t = 40a$. Comme attendu, le signal s'étend très loin dans les lobes et la propagation est très rapide, si bien qu'après seulement quelques minutes, l'énergie initiale s'est répartie sur une distance de plus de $100R_T$. Par contre, la période des oscillations avoisine encore une minute et la longueur d'onde se situe toujours autour de $40R_T$. Ceci prouve que la période ou la longueur d'onde des oscillations sont bien des caractéristiques intrinsèques de la couche de plasma et ne dépendent pas des paramètres géométriques de la perturbation initiale.

Nous pouvons expliquer plus généralement ces différences dans le comportement spatio-temporel des perturbations en définissant un coefficient de couplage $C_n(k)$, fonction du nombre d'onde et de l'harmonique excité. Pour une valeur donnée de k ,

†Le mode sausage ressemble a priori au mode tearing, une des solutions de l'équation de Vlassov en théorie cinétique. Néanmoins, il s'agit d'une topologie différente : contrairement au mode tearing, le champ magnétique ne comporte pas de point X lié à une reconnexion impossible dans le cadre de la MHD idéale.

Fig. 5.10 Propagation du déplacement transversal pour $L_x = 10$: (a) en fonction de x pour 4 valeurs de $t = 0 - 20 - 40 - 60$ et (b) en fonction de t pour 4 valeurs de $x = 10 - 20 - 40 - 60$.

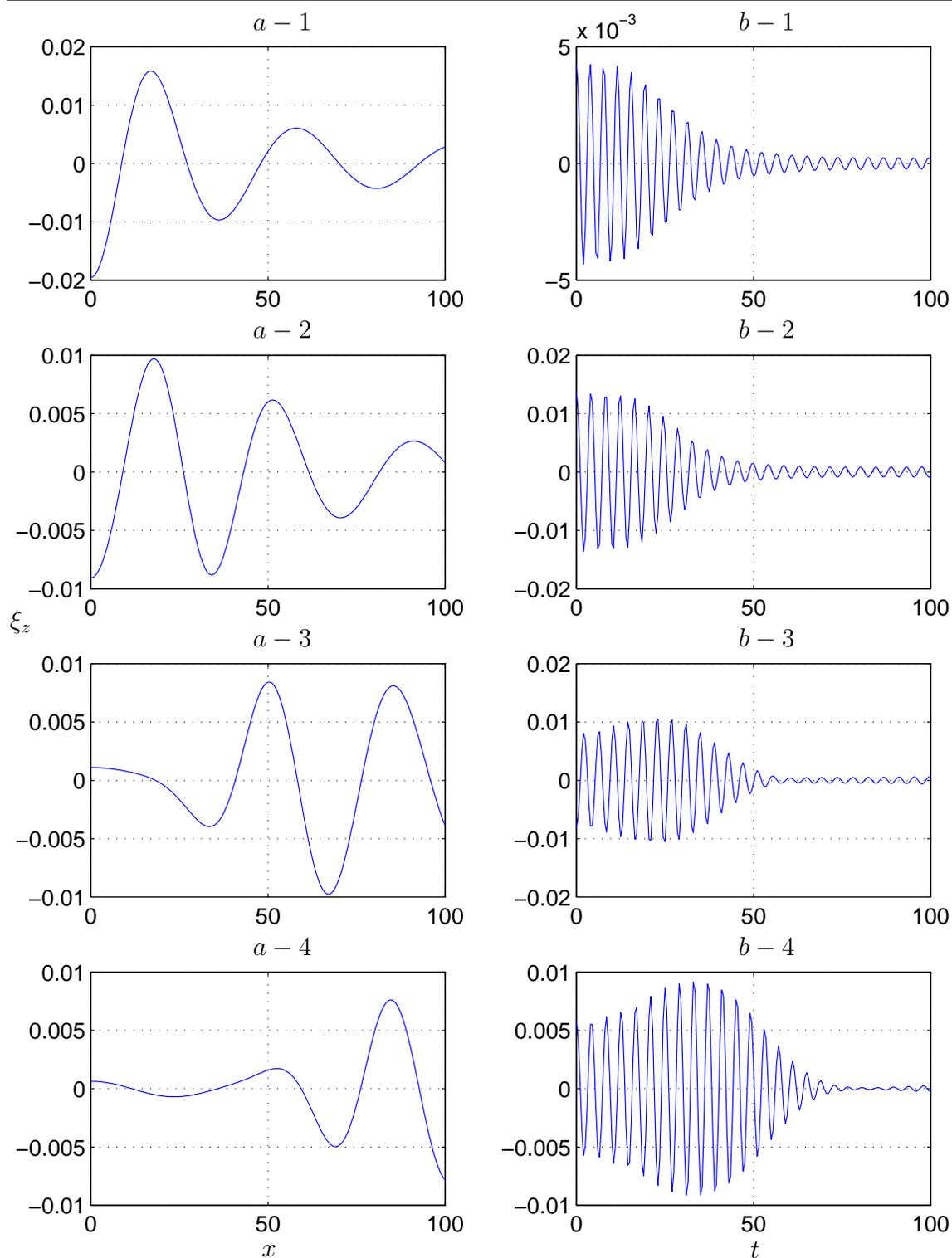


Fig. 5.11 Structures spatiales du déplacement transversal, de la pression thermique et de la pression magnétique à $t = 40$.

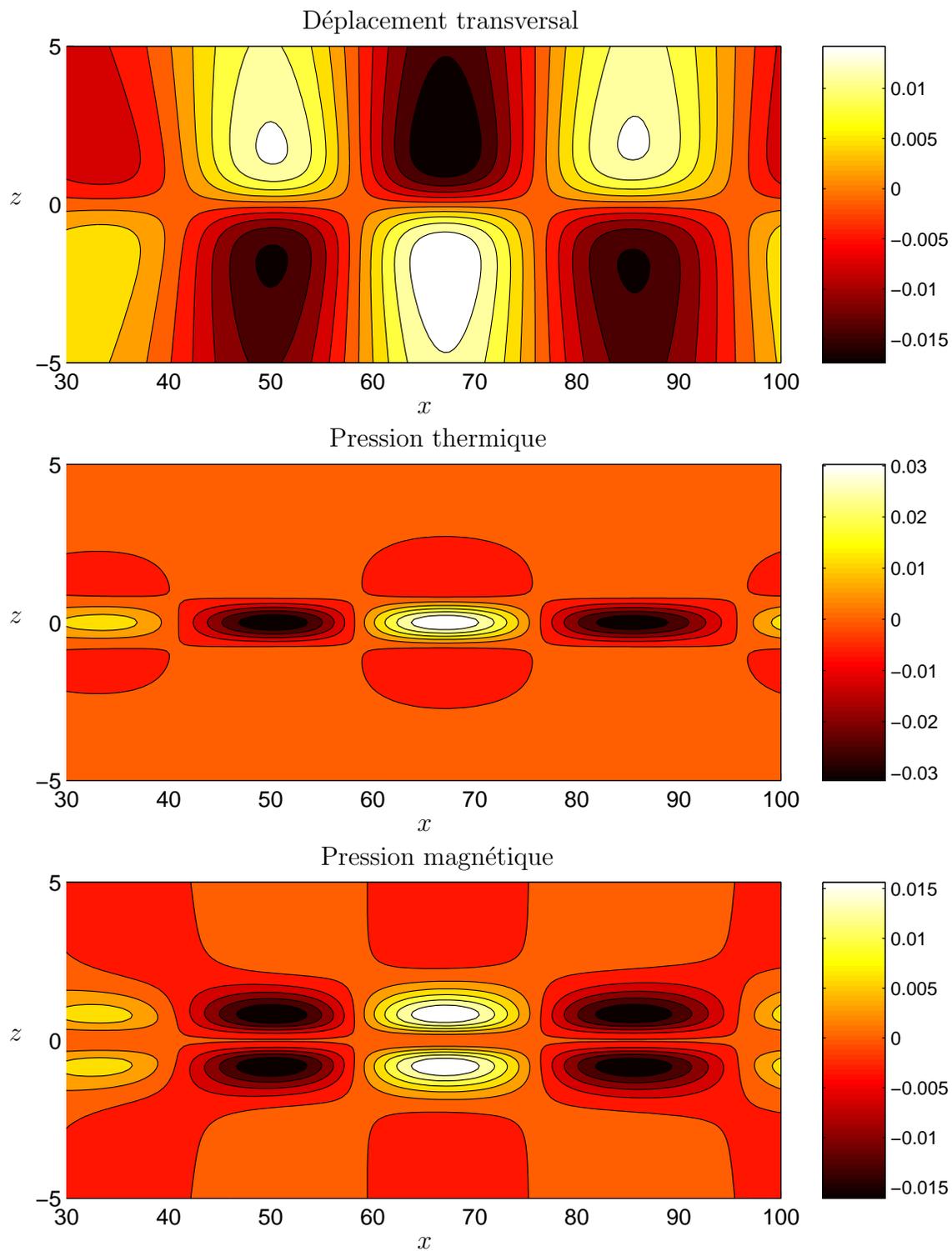
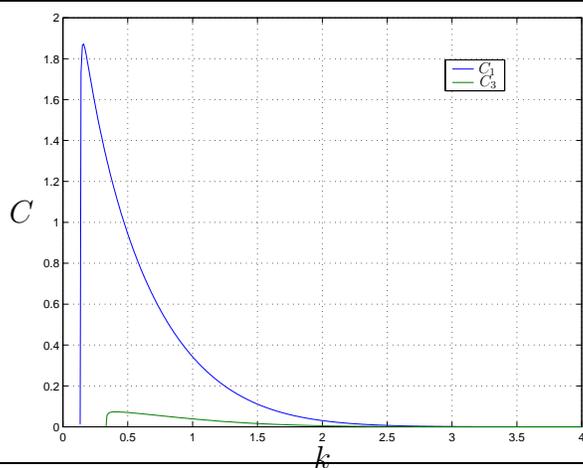
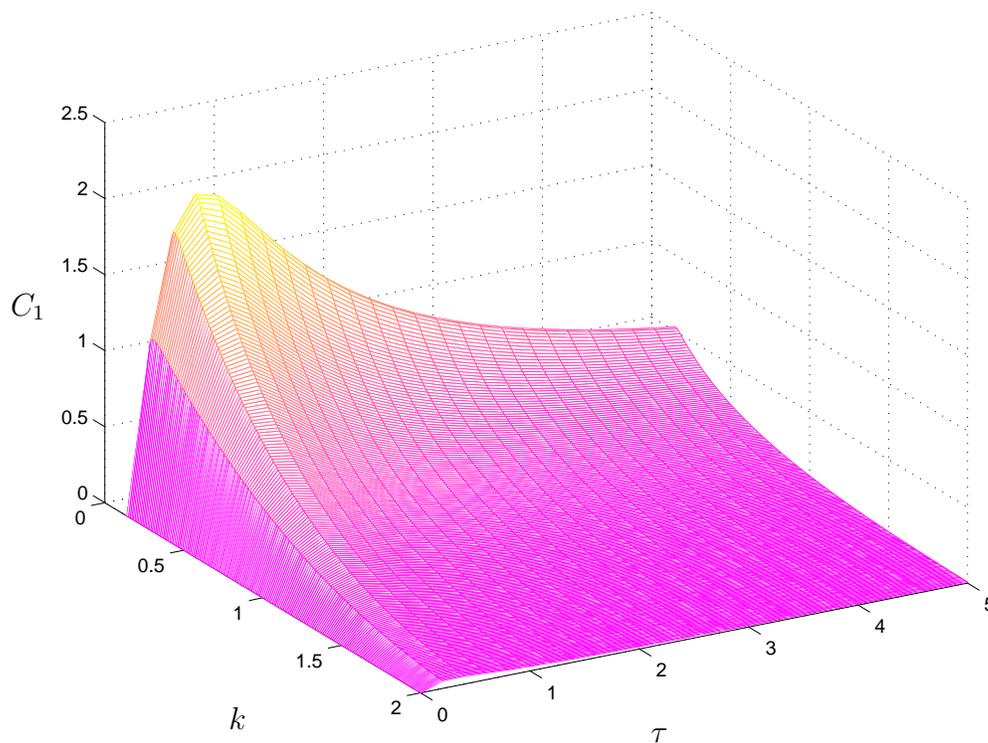


Fig. 5.12 Coefficients de couplage des deux premiers harmoniques impairs.**Fig. 5.13** Coefficient de couplage du premier harmonique impair en fonction de k et τ pour $L_x = 1$ et $L_z = 1$.

la contribution du $n^{\text{ième}}$ harmonique dans le signal complet peut s'écrire :

$$\frac{\omega_n}{\omega_n^2 - k^2 v_s^2} \frac{\tau}{(1 - i\omega_n \tau)^2} L_x e^{-\frac{k^2 L_x^2}{2}} \frac{\Psi_n}{1 - \frac{d\lambda_n}{d\omega}} \psi_n e^{i(kx - \omega_n t)},$$

on pose donc

$$C_n(k) = \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - k^2 v_s^2} \frac{\tau}{|1 - i\omega_n \tau|^2} L_x e^{-\frac{k^2 L_x^2}{2}} \frac{\Psi_n}{1 - \frac{d\lambda_n}{d\omega}}. \quad (5.15)$$

Ce coefficient exprime simplement l'importance des différents harmoniques dans le signal total. Il fournit également, pour chaque mode, les k -composantes de Fourier dominantes.

La première figure (5.12) représente ce coefficient en fonction du nombre d'onde k pour les deux premiers harmoniques impairs ($n = 1$ et $n = 3$) et avec les valeurs suivantes des paramètres : $\tau = 1$, $L_x = 1$ et $L_z = 1$. On constate l'écrasante prédominance du premier harmonique sur le suivant. Ainsi, un pulse gaussien de pression thermique se connecte très majoritairement sur le premier harmonique impair. C'est pourquoi nous n'avons considéré dans le paragraphe précédent que cet harmonique. Voyons maintenant comment les paramètres définissant la forme du pulse agissent sur l'efficacité de la connection.

Influence de τ La figure 5.13 illustre la variation de C_1 en fonction de k et de τ pour $L_x = a$ et $L_z = a$. Quelle que soit la valeur de τ , le coefficient de couplage est maximal pour les petits nombres d'onde. Ceci n'a rien d'étonnant, puisque le pulse de pression extérieur a un comportement gaussien par rapport à k . Pour un nombre d'onde fixé, le coefficient C_1 passe par un maximum pour une valeur τ_m qui dépend de k . En effet la ligne de crête se rapproche de 0 lorsque k augmente. En revenant sur l'équation (5.15), il est facile de voir que $C_1(\tau)$ passe par un maximum pour $\tau_m = 1/\omega_1(k)$. Par exemple, pour la plus petite valeur de k , on lit $\tau_m = 0.66$ (en vraie grandeur $\tau_m = 10.7$ s), et $\omega_1(k) \simeq 1.5$. En choisissant une valeur de τ de l'ordre de 10 s, on s'attend donc à observer majoritairement des fluctuations de grandes longueurs d'onde. Avec un pulse plus bref, le signal s'enrichit en longueurs d'onde plus petites, mais son amplitude est comparativement plus faible.

Influence de L_x Le paramètre L_x agit sur la largeur du pulse gaussien extérieur. Plus L_x est grand, plus le pulse est étalé dans l'espace réel et plus il est resserré dans l'espace de Fourier autour de la valeur $k = 0$. On s'attend donc, dans ce cas, à n'exciter que des petits nombres d'onde. Ce résultat a été mis en évidence dans

Fig. 5.14 Coefficient de couplage du premier harmonique impair en fonction de k et L_x pour $\tau = 0.66$ et $L_z = 1$.

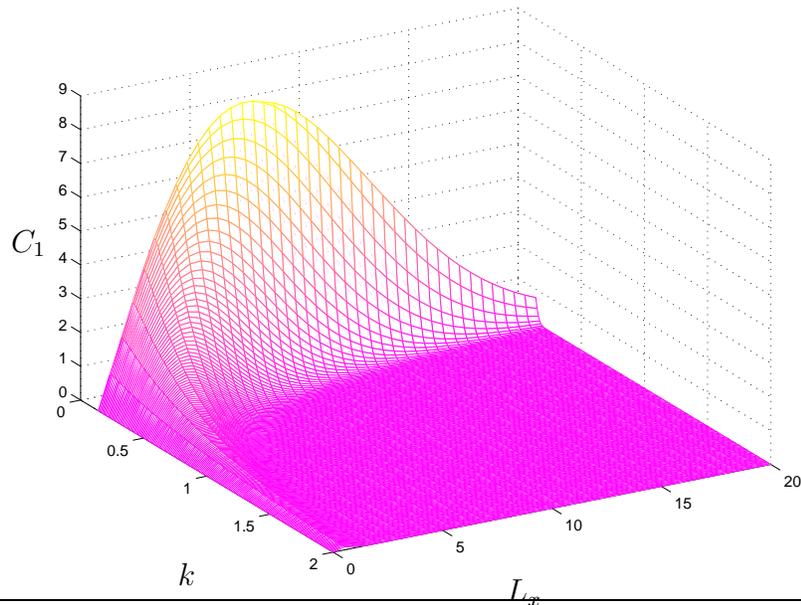
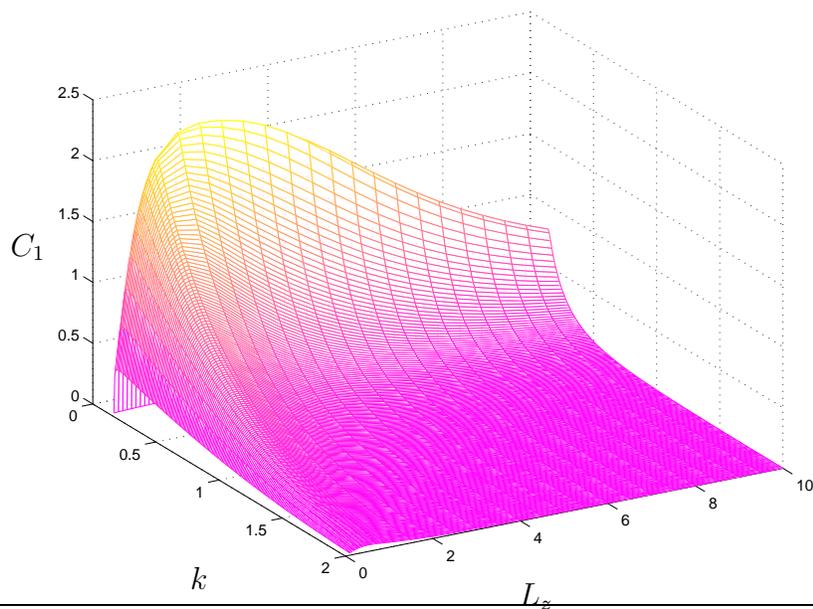


Fig. 5.15 Coefficient de couplage du premier harmonique impair en fonction de k et L_z pour $L_x = 1$ et $\tau = 0.66$.



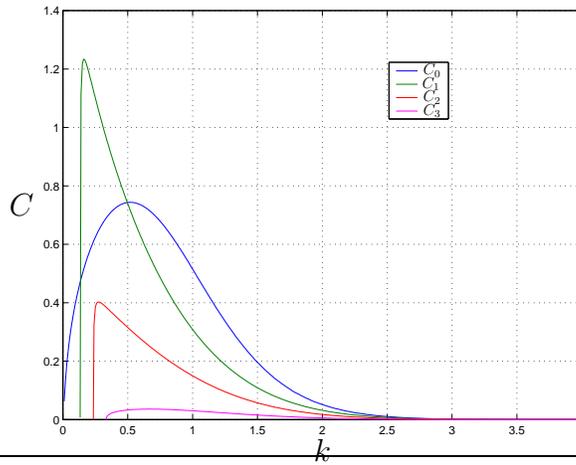
l'étude comparée des fluctuations engendrées par un pulse de largeur $L_x = a$ puis de largeur 10 fois plus grande. C'est également ce que montre la figure 5.14, où le coefficient de couplage du premier harmonique est représenté en fonction de k et de L_x pour $\tau = 0.66$ et $L_z = 1$. Nous constatons que si L_x est supérieure à l'épaisseur caractéristique de la couche de plasma ($a = 1R_T$ environ), le coefficient de couplage chute très rapidement en fonction de k , assurant que seules les grandes longueurs d'onde demeurent présentes dans le signal reconstruit. En revanche, si L_x est de l'ordre ou inférieur à l'épaisseur de la couche, la décroissance du coefficient de couplage est moins abrupte. Le signal total s'enrichit en courtes longueurs d'onde. De l'équation (5.15), on déduit aisément que, pour un nombre d'onde fixé, le coefficient de couplage est maximal pour $L_x = 1/k$ (ligne de crête sur le diagramme 3D).

Influence de L_z L'épaisseur transversale du pulse joue pratiquement le même rôle que l'épaisseur longitudinale (figure 5.15). La portion du spectre de Fourier correspondant aux faibles k est davantage excitée pour des grandes valeurs de L_z , bien que l'effet soit moins marqué que pour L_x . Cette conclusion doit être mise en relation avec la structure spatiale des modes propres. Comme indiqué sur la figure 5.4, les modes s'étalent d'autant plus dans la direction z que le nombre d'onde est faible.

En conclusion, un pulse possédant une extension en x et en z supérieure à l'épaisseur caractéristique de la queue (typiquement quelques rayons terrestres) se couple principalement sur des modes de grandes longueurs d'onde. En revanche, si les dimensions du pulse correspondent aux dimensions de la queue, les fluctuations engendrées sont plus riches en courtes longueurs d'onde (et en hautes fréquences), mais leur amplitude reste plutôt faible. Ce résultat amène une réflexion plus générale concernant les caractéristiques des perturbations susceptibles de déclencher la propagation de tel ou tel type d'oscillation. D'un point de vue physique, les perturbations de faible extension spatiale, les seules à se coupler efficacement sur les modes de hautes fréquences, vont être associées à des perturbations d'énergie au voisinage de la couche neutre et pourront favoriser le phénomène de reconnexion magnétique. C'est typiquement ce que l'on attend lors d'un sous-orage. Au contraire, des pulses de grande extension spatiale ou, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe, des perturbations venant de l'extérieur auront plus vraisemblablement de grandes échelles spatiales. Ils déclencheront plutôt des fluctuations de basse fréquence dans la couche.

5.4.5 Cas où le pulse n'est pas symétrique

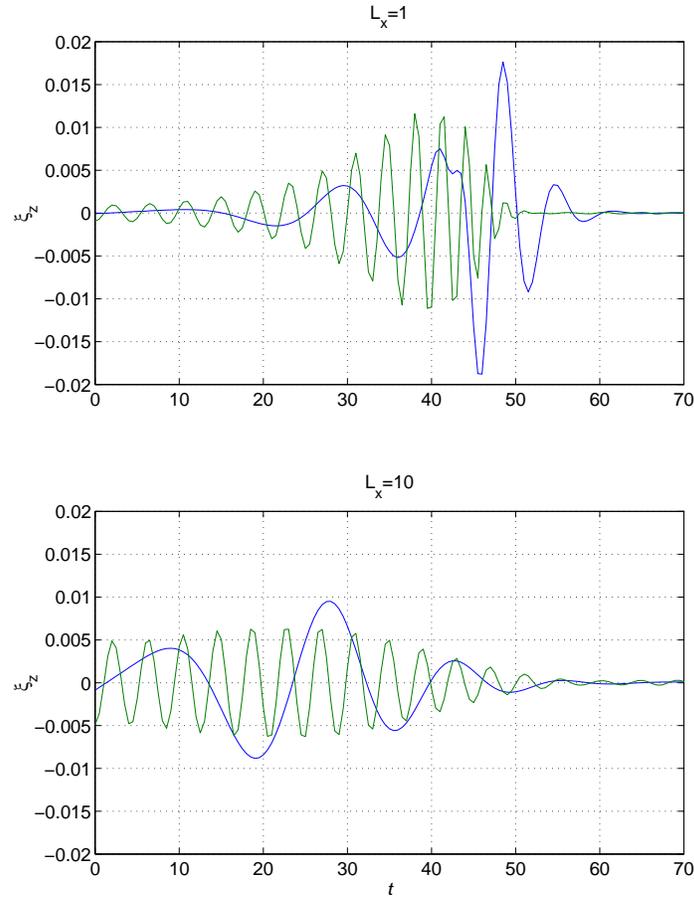
Fig. 5.16 Coefficients de couplage pour $z_0 = 0.5$, $\tau = 0.66$, $L_x = 1$ et $L_z = 0.5$



Si le pulse de pression extérieur n'est plus centré sur la couche neutre, les modes pairs du déplacement peuvent être excités. Ces modes correspondent à des perturbations impaires de pression et à des fluctuations paires de champ magnétique. A titre d'exemple, nous avons choisi les paramètres suivants : $z_0 = 0.5R_T$, $\tau = 0.66$ ($\simeq 11$ s), $L_z = 0.5R_T$ et $L_x = 1R_T$ ou $10R_T$. Ils permettent une bonne connection de la perturbation extérieure à la fois sur le mode fondamental pair et sur le premier harmonique impair (cf. figure 5.16 représentant les coefficients de couplage des divers harmoniques pour ces paramètres). Le comportement temporel de ces deux modes est illustré sur la figure 5.17 pour $x = 40R_T$, et $L_x = 1$ pour le graphe supérieur et $L_x = 10$ pour le graphe inférieur.

Dans ces deux graphes, nous voyons la propagation d'un signal précurseur de grande longueur d'onde (surtout sur le premier harmonique) à la vitesse v_e . Ce précurseur est suivi par le paquet d'ondes principal se déplaçant à une vitesse légèrement inférieure à v_s lorsque $L_x = 1R_T$. Il est intéressant de remarquer que le premier harmonique présente une dispersion spatiale bien plus importante que le fondamental. En effet la forme gaussienne du pulse initial reste visible pour le fondamental à $t = 45$ pour $L_x = 1$ et à $t = 27$ pour $L_x = 10$, alors que le premier harmonique présente une structure beaucoup plus ondulatoire. La période principale du mode fondamental dépend fortement de la valeur de L_x : elle vaut environ 5 unités normalisées, soit 80s, pour $L_x = 1$; et atteint 15 unités normalisées, soit 4 minutes, pour $L_x = 10$. En revanche, la période du précurseur associé au premier harmonique reste égale à 4 unités normalisées (64 s) quelle que soit l'épaisseur du pulse originel.

Fig. 5.17 Variations temporelles du fondamental et du premier harmonique en $x = 40R_T$ et $z = 0.5R_T$. La valeur de L_x est prise égale à 1 en haut et à 10 en bas.



Ainsi, les perturbations de longue période ne peuvent être associées au premier harmonique. Par exemple, des fluctuations de plusieurs minutes sont nécessairement la signature du mode fondamental qui ne peut être excité que par des pulses non symétriques de pression thermique.

Afin de discuter la structure spatiale des perturbations, la figure 5.18 montre les lignes de niveau du déplacement transversal, de la pression thermique et de la pression magnétique dans le plan (x, z) à l'instant $t = 40$. Dans ce calcul tous les harmoniques dominants (fondamental, premier et deuxième) ont été pris en compte. La structure géométrique du signal est plutôt complexe. L'énergie reste cependant concentrée dans des zones de dimensions comparables à celles du pulse initial. L'amplitude des perturbations de pression est de l'ordre de $0.04P_{me}$, c'est à dire deux ordres de grandeur plus faibles que la pression initiale. De même, les fluctuations magnétiques avoisinent un centième du champ magnétique maximal à l'équilibre. Comme pour les pulses symétriques, le couplage reste très modeste.

Fig. 5.18 Structure spatiale du déplacement transversal, de la pression magnétique et de la pression thermique à $t = 40$ pour les paramètres choisis.

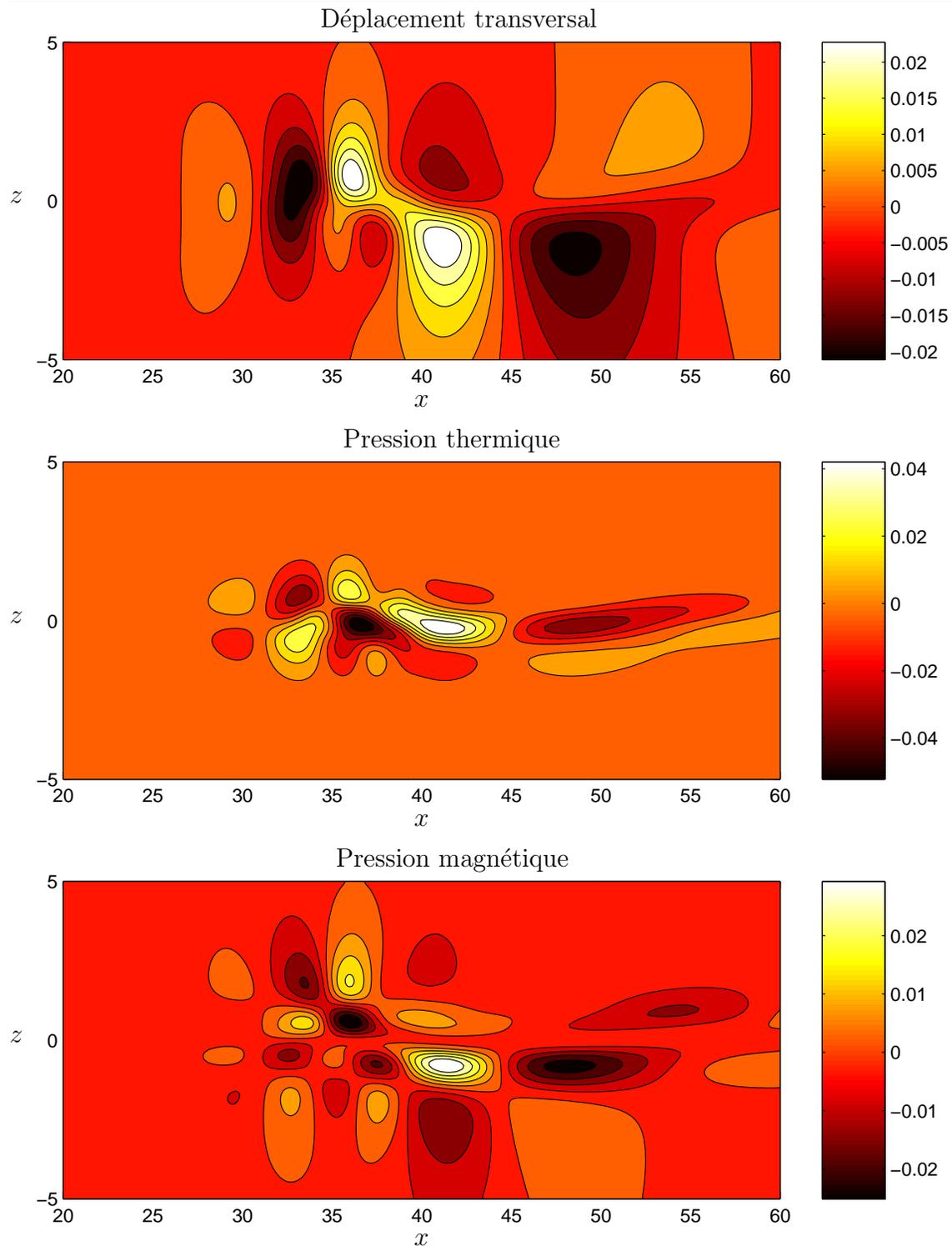
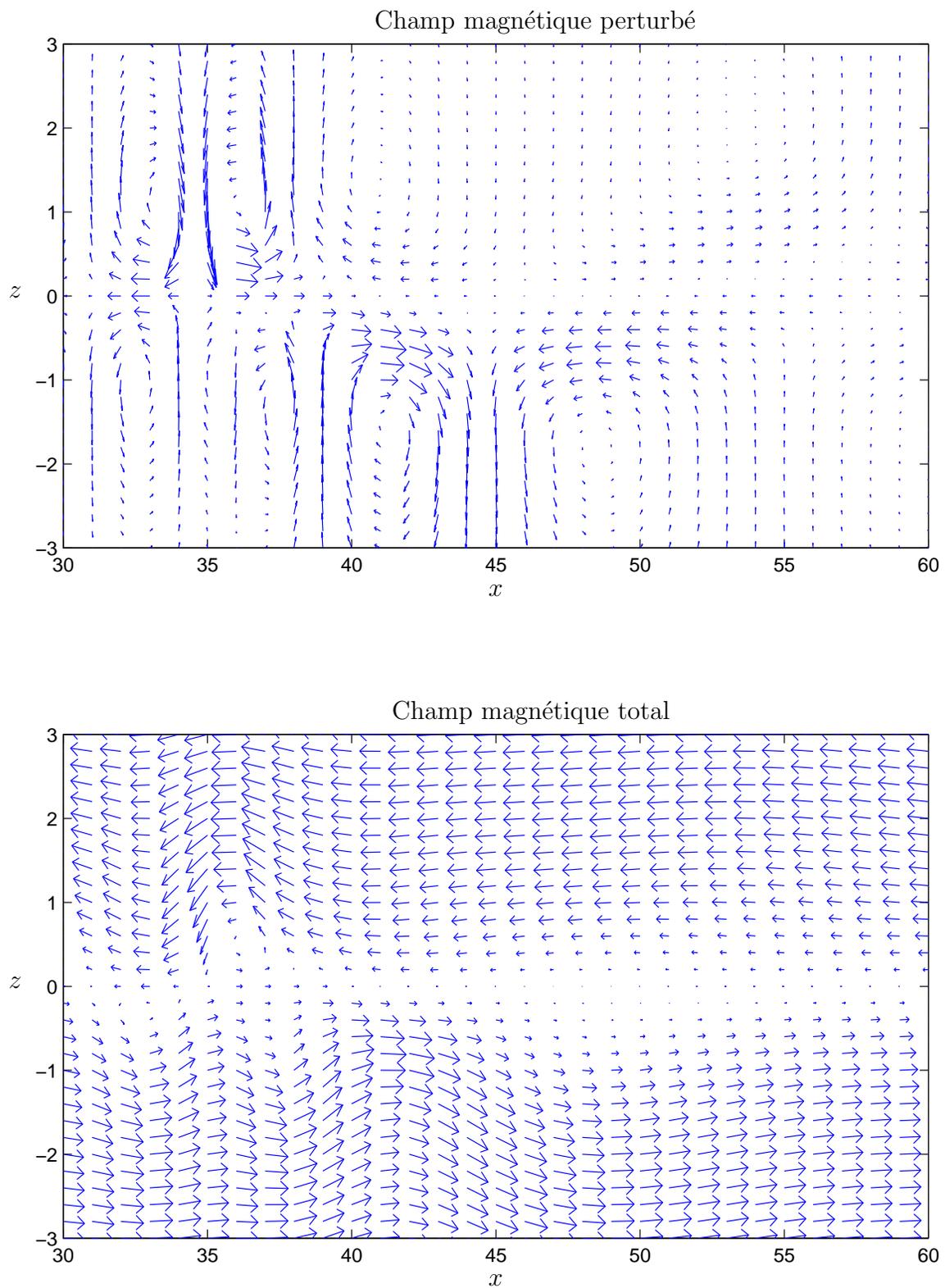


Fig. 5.19 Polarisation du champ magnétique perturbé et du champ magnétique total

La polarisation magnétique (figure 5.19) montre un mélange assez complexe entre les modes de type sausage précédemment analysés et les modes "kink" (analogues aux ripple-marks sur la plage!) provenant des modes pairs. Loin du pulse initial ($x > 40R_T$), on observe une configuration du type sausage liée au premier harmonique qui se propage beaucoup plus vite. En revanche pour $30R_T < x < 40R_T$, là où le fondamental domine le premier harmonique, les lignes de champ magnétique correspondent plutôt à une configuration kink (mode pair). Bien que cela ne soit pas visible sur la figure, la couche neutre ondule légèrement autour de l'axe (Ox). En effet, le champ magnétique perturbé s'annule complètement lorsque $B_{eq}(z - \xi_z) = 0$ (cf. équations (5.13) et (5.14)), c'est à dire lorsque $z = \xi_z$.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la réponse d'une couche de Harris à un pulse de pression d'origine extérieure dans le cadre de la MHD linéaire. Nous nous sommes limités à la propagation de perturbations bidimensionnelles dans le plan (x, z) correspondant aux modes discrets confinés dans la structure. La caractérisation de ces modes propres (fréquences, structure spatiale dans la direction de non homogénéité) est a priori importante pour la compréhension de la dynamique de la queue magnétique. Cependant, ce travail n'est pas restreint au calcul des modes ; il inclut également la reconstruction du signal dans l'espace réel des perturbations engendrées par une excitation initiale. Cette étude nous a permis de prédire l'amplitude des fluctuations émises dans l'hypothèse d'un comportement linéaire. C'est un point essentiel de cette étude car il est indispensable pour une comparaison future avec les données expérimentales (voir chapitre 7).

Dans un premier temps, nous avons considéré le cas d'un pulse de pression symétrique par rapport à la couche neutre. Seuls les harmoniques impairs du déplacement transversal sont excités. Mais le premier harmonique impair occupe une part dominante dans les perturbations, c'est pourquoi nous nous sommes limités à son étude. Avec des valeurs raisonnables pour les paramètres définissant la couche de Harris ($a = 6400$ km, $\rho_0/\rho_e = 100$ et $v_s = 400$ km/s), nous avons constaté que le premier harmonique correspondait à une valeur déjà élevée de la fréquence, de l'ordre de 20 mHz, c'est à dire à des oscillations de période d'environ une minute. Dans une seconde étude, nous nous sommes intéressés au cas d'un pulse non symétrique. L'intérêt de cet exemple réside dans l'excitation de tous les modes globaux de la couche (pairs

et impairs). En particulier, il est possible d'exciter le mode fondamental correspondant à des périodes plus longues atteignant plusieurs minutes, voire infinies en théorie. Naturellement, les paramètres d'équilibre de la couche peuvent être ajustés pour expliquer des perturbations de période encore plus longues. Cependant, il semble clair qu'avec une forme raisonnable d'excitateur et pour les paramètres de la couche que nous avons choisis, des périodes supérieures à 10 minutes ne peuvent pas s'interpréter dans le cadre de la magnétohydrodynamique linéaire.

Nous avons montré que la réponse de la couche de courant à un pulse extérieur se divise en deux parties : un signal quasi monochromatique se propage rapidement à la vitesse d'Alfvén dans les lobes $v_e \simeq 4500$ km/s, suivi d'un paquet d'ondes formé de longueurs d'onde plus courtes et se propageant au minimum de la vitesse de groupe, i.e. légèrement inférieure à la vitesse du son. De manière générale, nous avons constaté une très forte dispersion du pulse initial connecté au premier harmonique, cette dispersion s'accroissant encore avec des pulses de grande échelle. L'influence de la géométrie de l'excitateur sur la propagation des fluctuations a été analysée en détail. Elle révèle qu'un pulse dont la taille caractéristique est très supérieure aux dimensions de la couche se connecte sur une petite plage de longueurs d'onde de l'ordre de 10 rayons terrestres. En revanche, lorsque le pulse est de plus petite dimension correspondant à celle de la couche, le signal s'enrichit en longueurs d'onde plus courtes et en fréquences plus élevées, mais l'amplitude du signal est plus faible. De façon générale, l'amplitude des fluctuations émises reste très modeste comparée à l'intensité du pulse initial. En d'autres termes, le couplage entre un tel excitateur et la couche de Harris est plutôt faible. Typiquement, les déplacements atteignent quelques centaines de kilomètres et les fluctuations du champ magnétique et de pression sont de l'ordre de quelques pour cent des champs à l'équilibre.

Chapitre 6

Les modes continus de la queue magnétosphérique terrestre

Au chapitre précédent, nous avons cherché à résoudre l'équation maîtresse dans un domaine de fréquence où elle est régulière. Nous avons alors obtenu une suite discrète de modes propres globaux sur laquelle toute perturbation extérieure peut être décomposée. Dans ce chapitre, nous nous intéressons au caractère singulier de l'équation différentielle maîtresse (4.18). L'existence d'une singularité dans l'équation (4.18) a déjà été mentionnée dans la présentation générale. Elle correspond à l'annulation du coefficient f intervenant dans la dérivée seconde. Dans un certain domaine de fréquence qui reste à préciser, il existe dans la couche, pour chaque ω , un point z_s singulier pour (4.18). Nous verrons qu'à cette singularité est associée une oscillation à la fréquence ω se propageant à la vitesse cusp $v_c(z_s)$ et localisée uniquement en z_s . Insistons bien sur le fait que ces oscillations ultra localisées sont liées à la non homogénéité du milieu à l'équilibre. En milieu homogène, de telles singularités sont évidemment inexistantes. Précisons maintenant la nature mathématique de ces singularités et leur influence sur le comportement de la fonction de Green du problème.

6.1 Expression de la fonction de Green et reconstruction du signal

6.1.1 Rappel sur la forme générale de la fonction de Green

L'équation maîtresse (4.18) s'écrit :

$$\frac{d}{dz} \left[f_{\omega,k}(z) \frac{d\hat{\xi}_z}{dz} \right] + g_{\omega,k}(z) \hat{\xi}_z = \frac{d(h_{\omega,k} \hat{P}_{\omega,k})}{dz} \quad (6.1)$$

avec

$$f_{\omega,k}(z) = \rho_{eq}(z) (v_s^2 + v_A^2(z)) \frac{(\omega^2 - k^2 v_c^2)}{(\omega^2 - k^2 v_s^2)}$$

Ainsi, le coefficient $f_{\omega,k}$ s'annule lorsque la vitesse de phase est égale à la vitesse cusp locale : $\omega = \pm k v_c(z)$. Puisque la vitesse cusp varie entre 0 et $v_{ce} = \sqrt{\frac{v_e^2 v_s^2}{v_e^2 + v_s^2}}$, le domaine de fréquence conduisant à un comportement singulier de (6.1) est situé sur l'axe ω -réel et est borné par $-k v_{ce}$ et $k v_{ce}$. Rappelons également que dans ce domaine de fréquence le coefficient α apparaissant dans les conditions aux limites est réel. Ainsi les solutions de (6.1) possèdent une décroissance exponentielle vers l'infini et correspondent à des perturbations localisées dans la couche.

A l'instar du chapitre précédent, nous pourrions développer la fonction de Green sur la base complète des fonctions propres continues de l'opérateur de Sturm-Liouville. Néanmoins la nature singulière de l'équation (6.1) rend cette méthode très délicate et nous préférons revenir à la forme générale de la fonction de Green, dérivée au chapitre 4 (équation (4.27)) :

$$G_{\omega,k}(z|z_0) = \begin{cases} \frac{u_g(z)u_d(z_0)}{f(z)W(z)} & \text{pour } z \leq z_0, \\ \frac{u_g(z_0)u_d(z)}{f(z)W(z)} & \text{pour } z \geq z_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

où u_g (resp. u_d) est solution de l'équation homogène associée $\frac{d}{dz}[f \frac{du}{dz}] + gu = 0$ et satisfaisant la condition aux limites en $z = -l$ (resp. en $z = +l$), W est le wronskien des deux solutions. Il est facile de montrer que le dénominateur de la fonction de Green est indépendant de z . En revanche il dépend de ω et de k .

6.1.2 Singularités de la fonction de Green

Pour une valeur ω donnée dans le continuum, notons $z_s(\omega)$ le point pour lequel $\omega = k v_c(z_s)$, alors au voisinage de z_s , l'équation (6.1) s'écrit $[(z - z_s)\xi'_z]' + K\xi_z = 0$, où K est une constante. Un changement de variable $z \rightarrow x = \sqrt{z - z_s}$ permet d'intégrer directement cette équation à l'aide de fonctions de Bessel : $\xi_z = A J_0(2\sqrt{K(z - z_s)}) + B Y_0(2\sqrt{K(z - z_s)})$. La première fonction J_0 est régulière en $z = z_s$, elle est même analytique dans tout le plan complexe. En revanche, la seconde Y_0 diverge logarithmiquement en 0 : $Y_0(2\sqrt{K(z - z_s)}) \sim \ln(z - z_s)$. Ainsi les solutions u_g et u_d peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire d'une fonction $R_{\omega,k}(z)$, analytique dans un certain domaine autour de z_s et d'une fonction $S_{\omega,k}(z)$ comportant une divergence logarithmique en z_s .

La présence du logarithme rend les fonction $S_{\omega,k}$ et $G_{\omega,k}$ multivaluées. Pour une valeur fixée de z , on doit définir des coupures dans le plan ω -complexe pour rendre

ces fonctions analytiques. Même si les solutions de (6.1) ne sont pas calculables analytiquement, il est possible de connaître la position des points et lignes de branchement qui les relient entre eux. Pour ce faire, nous allons suivre pas à pas le raisonnement proposé par Tataronis (1975). Tout d’abord nous écrivons la fonction S sous la forme (pour alléger l’écriture, nous supprimons les indices (ω, k)) :

$$S(z) = R(z) \int_0^z \frac{dx}{f(x)R^2(x)},$$

et nous développons $\omega_c^2(x)$ au voisinage de z : $\omega_c^2(x) = \omega_c^2(z) + (d\omega_c^2/dx)_{x=z} (x-z) + \dots$. Ainsi pour ω au voisinage de $\omega_c(z)$, le point singulier z_s est tel que :

$$z_s - z \simeq \frac{\omega^2 - \omega_c^2(z)}{(d\omega_c^2/dx)_{x=z}}.$$

Si, par ailleurs, nous supposons que $R(z_s) = 1$, $(d\omega_c^2/dx)_{x=z} > 0$, $\omega - \omega_c(z) = |\omega - \omega_c(z)|e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$, alors la fonction $S_{\omega,k}$ s’écrit pour ω réel et au voisinage de $\omega_c(z)$:

$$S(z) = R(z)\mathcal{P} \int_0^z \frac{dx}{f(x)R^2(x)} + i\varepsilon\pi \frac{R(z)}{(df/dz)(z)}, \quad (6.3)$$

où \mathcal{P} signifie que la partie principale de Cauchy doit être prise lorsque z_s se trouve dans l’intervalle d’intégration. La valeur de ε est donnée par :

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{pour } \theta = \pi \\ 0 & \text{pour } \theta = 0 \\ -1 & \text{pour } \theta = -\pi. \end{cases} \quad (6.4)$$

Les équations (6.3) et (6.4) impliquent l’existence d’une ligne de branchement le long de l’axe ω -réel allant de $\omega_c(z)$ jusqu’à 0. On tire une conclusion analogue si $(d\omega_c^2/dx)_{x=z} < 0$.

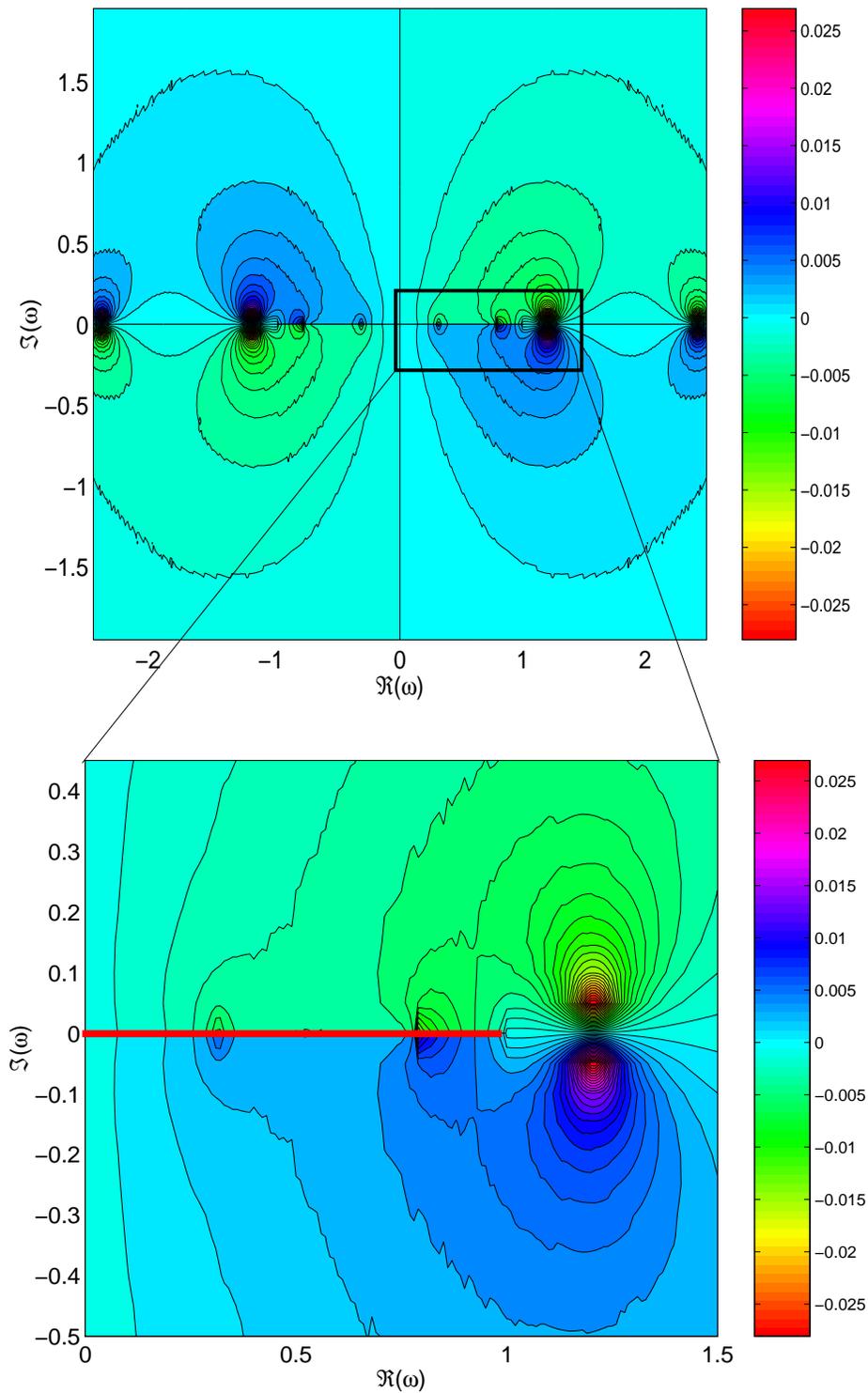
Pour établir que $\omega = 0$ est un autre point de branchement, on peut développer ω_c^2 autour de 0 : $\omega_c^2(z) = \frac{1}{2}\beta z^2$, où $\beta > 0$. Pour $\omega \simeq 0$, f possède deux zéros symétriques $z_{\pm} = \pm\sqrt{2/\beta}|\omega|$. On montre alors que, si $\omega = |\omega|e^{i\theta}$, avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$S(z) = R(z)\mathcal{P} \int_0^z \frac{dx}{f(x)R^2(x)} + i\varepsilon\pi \frac{R(z)}{\sqrt{2\beta}|\omega|}, \quad (6.5)$$

avec

$$\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{pour } \theta = \pi^+ \text{ et } \theta = 2\pi^- \\ -1 & \text{pour } \theta = 0^+ \text{ et } \theta = \pi^-. \end{cases} \quad (6.6)$$

Ces équations prouvent l’existence de deux lignes de branchement le long de l’axe réel et partant du point de branchement $\omega = 0$.

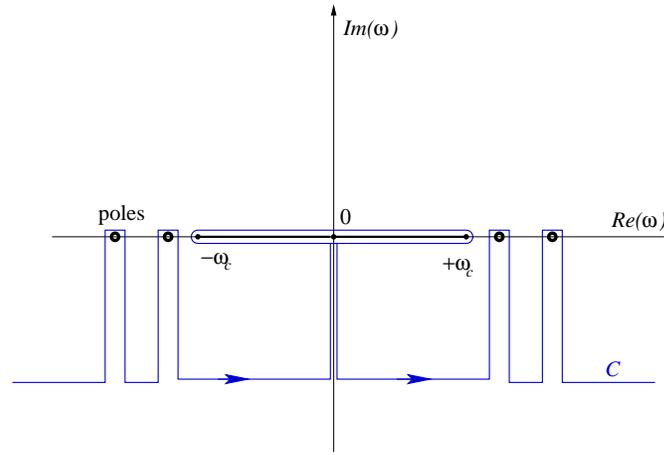
Fig. 6.1 Partie imaginaire de la fonction de Green dans le plan ω -complexe

La fonction de Green $G_{\omega,k}(z|z_0)$ possède donc 7 points de branchement sur l'axe ω -réel : $0, \pm\omega_c(z), \pm\omega_c(z_0)$ et $\pm\omega_c l$. Les deux derniers proviennent des conditions aux limites nécessaires pour exprimer les fonctions u_g et u_d en fonction de R et S . Les différents points de branchement doivent être reliés entre eux par des lignes de coupures convenables, de manière à rendre la fonction de Green analytique dans tout le plan complexe. La nature précise de ces jonctions n'est cependant pas primordiale pour la résolution numérique ultérieure. Il suffira en effet d'effectuer l'intégration en ω le long d'un contour qui entoure le segment entier reliant les points extrêmes $\pm\omega_c(l)$. Pour étayer encore le raisonnement, nous pouvons commenter la figure 6.1 représentant les lignes de niveaux de la partie imaginaire de G dans le plan ω -complexe pour $k = 1, z = 1$ et $z_0 = 0.5$. En considérant le brusque changement de couleur de part et d'autre de l'axe réel entre 0 et 1, nous concluons que la partie imaginaire est bien discontinue le long de la ligne rouge (ligne de coupure). De plus nous constatons que les lignes de niveaux se resserrent autour de deux points de cette ligne : il s'agit des deux divergences logarithmiques en $\omega_c(z)$ et $\omega_c(z_0)$.

Enfin, il ne faudrait pas penser que l'étude présente des singularités de la fonction de Green est dissociée de l'étude des modes propres présentée au chapitre précédent. Même si les expressions mathématiques sont différentes, les équations (6.2) et (5.6) sont équivalentes dans le domaine de fréquence $kv_s < \omega < kv_e$. En effet, le dénominateur de la fonction de Green s'annule pour certaines valeurs de ω qui sont alors indépendantes de z . Ce sont les pôles de la fonction de Green dont il a été longuement question au chapitre précédent. On voit d'ailleurs ces pôles sur la figure 6.1 : ce sont les gros points noirs en $\omega \simeq \pm 1.2$ et $\omega \simeq \pm 2.5$.

6.1.3 Inversion de la transformée de Laplace

Intéressons-nous maintenant au calcul de la transformée inverse de Laplace. Le contour d'intégration \mathcal{C} , situé initialement dans le demi-plan supérieur, est déformé vers le demi-plan inférieur en contournant les lignes de branchement et les pôles de l'intégrand (cf. figure 6.2). Asymptotiquement, seules les contributions des pôles et des lignes de branchement subsistent dans le signal total. La contribution des pôles ayant été analysée au chapitre précédent, nous nous concentrons sur la contribution de la ligne de coupure allant de $-\omega_c(l)$ à $\omega_c(l)$. Au paragraphe précédent, nous avons montré que la partie imaginaire de la fonction de Green est discontinue le long de la ligne de branchement ; un calcul plus poussé montre qu'elle tend vers des valeurs finies et opposées lorsque $\Im(\omega)$ tend vers 0 au-dessus et en dessous de la ligne de branchement.

Fig. 6.2 Déformation du contour d'intégration dans le demi-plan inférieur

La partie réelle de G est en revanche continue à la traversée de la coupure. Pour des raisons de symétrie (ω apparaît toujours au carré dans les équations précédentes), on déduit que $G_{-\omega,k} = G_{\omega,k}$ et $G_{\bar{\omega},k} = \bar{G}_{\omega,k}$. Ainsi l'intégration le long de la coupure peut se réduire à une intégrale allant de 0 à $\omega_c(l)$ juste au-dessus de l'axe réel :

$$\int_{\text{coupure}} d\omega e^{-i\omega t} \hat{\xi}_z(\omega, k, z) = 2i \int_0^{\omega_c(l)} d\sigma \left[e^{-i\sigma t} \mathfrak{S}(\hat{\xi}_z^+(\sigma, k, z)) - e^{i\sigma t} \mathfrak{S}(\hat{\xi}_z^+(-\sigma, k, z)) \right] \quad (6.7)$$

où

$$\hat{\xi}^+(\sigma, k) = \lim_{\substack{\mathfrak{S}(\omega) \rightarrow 0^+ \\ \mathfrak{R}(\omega) = \sigma}} \left[\hat{\xi}(\omega, k) \right].$$

Nous allons maintenant appliquer cette formule à des exemples particuliers de pulses initiaux.

6.1.4 Procédure numérique

L'équation (6.1) n'ayant pas de solution analytique, le calcul numérique est indispensable pour poursuivre. Nous avons intégré les équations différentielles par la méthode classique de Runge-Kutta d'ordre 4. Ainsi, pour des valeurs de ω et k fixées avec $\mathfrak{S}(\omega) = 10^{-6}$ et $\mathfrak{R}(\omega)$ dans l'intervalle d'intégration, on résout l'équation homogène associée à (6.1) en partant de $z = -10$ avec les conditions "initiales" $u_g = 1/\alpha_e$ et $u'_g = 1$, et on obtient la première solution indépendante $u_g(z)$. La seconde s'obtient directement par symétrie : en effet on a pour tout z $u_d(z) = u_g(-z)$. La fonction de Green est alors évaluée grâce à (6.2). En choisissant plusieurs valeurs pour $\mathfrak{S}(\omega)$, nous avons constaté que cette dernière n'influe pas sur la partie imaginaire de la fonction de Green.

6.2 Analyse des composantes de Fourier et validation de la procédure numérique

6.2.1 Excitation par un pulse gaussien

Comme premier exemple, nous considérons une perturbation initiale, possédant une forme gaussienne dans l'espace et un comportement temporel de nature exponentielle :

$$P_{ext}(t, x, z) = P_0 \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2L_x^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2L_z^2}\right). \quad (6.8)$$

Après avoir pris la transformée de Fourier-Laplace de P_{ext} , nous obtenons pour la composante k de Fourier du déplacement transversal :

$$\xi_{kz}(t, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_0 L_x \tau e^{-k^2 L_x^2 / 2} \int_0^{\omega_c(l)} d\sigma \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - k^2 v_s^2} \Im(F_{\sigma,k}^+) \times \frac{(1 - \sigma^2 \tau^2) \sin(\sigma t) - 2\sigma \tau \cos(\sigma t)}{(1 + \sigma^2 \tau^2)^2}, \quad (6.9)$$

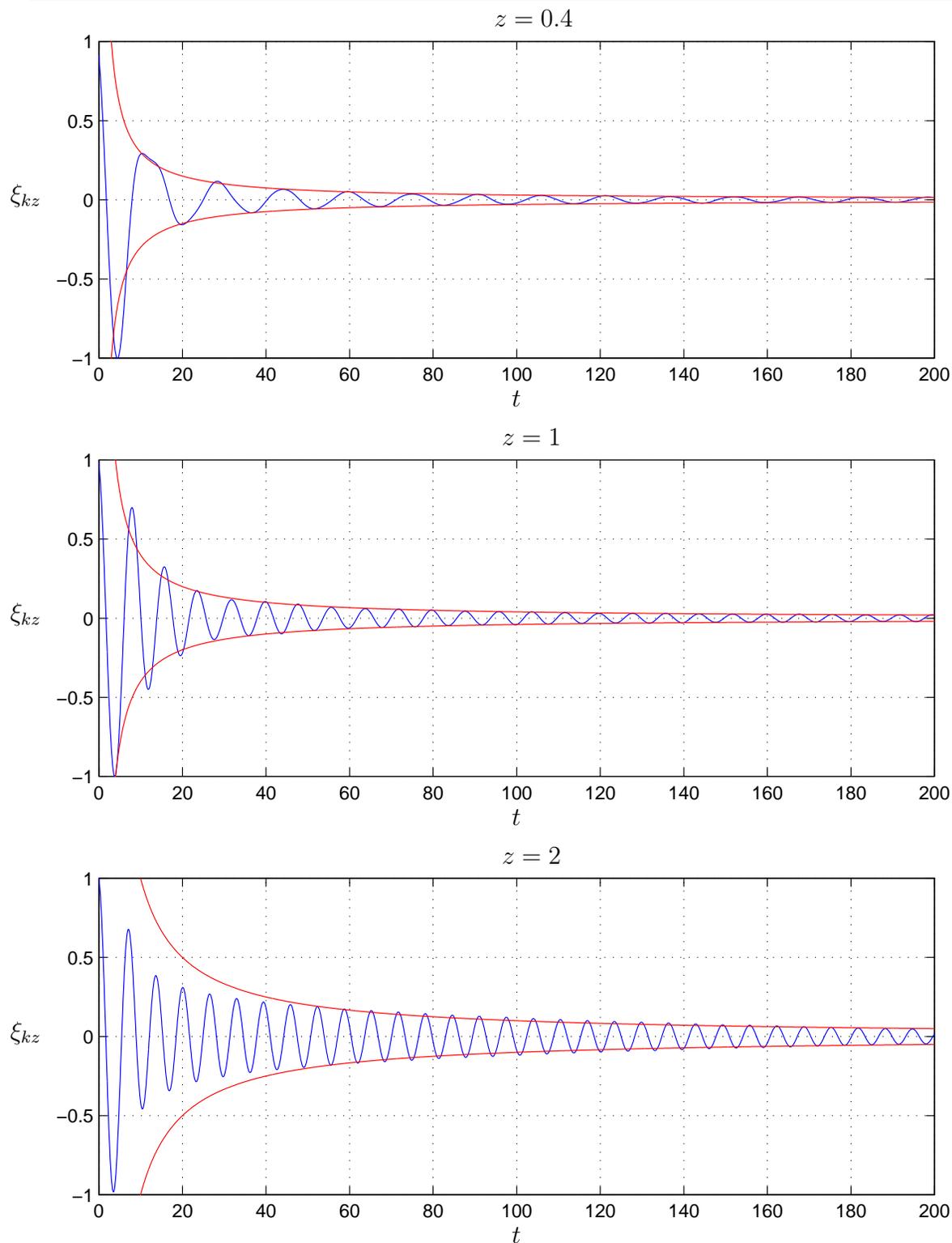
avec

$$F_{\sigma,k}(z) = \int_{-l}^{+l} dz' G_{\sigma,k}(z|z') \frac{-z'}{L_z^2} e^{-\frac{z'^2}{2L_z^2}}. \quad (6.10)$$

L'intégrale (6.9) est calculée pour $L_z = 0.5$ et $\tau = 1$. Le résultat est illustré à la figure 6.3 qui représente, en différentes positions dans la couche, le déplacement transversal en fonction du temps. L'amplitude est normalisée à sa valeur maximale. Rappelons enfin que l'échelle temporelle vaut $a/v_s = 16$ s.

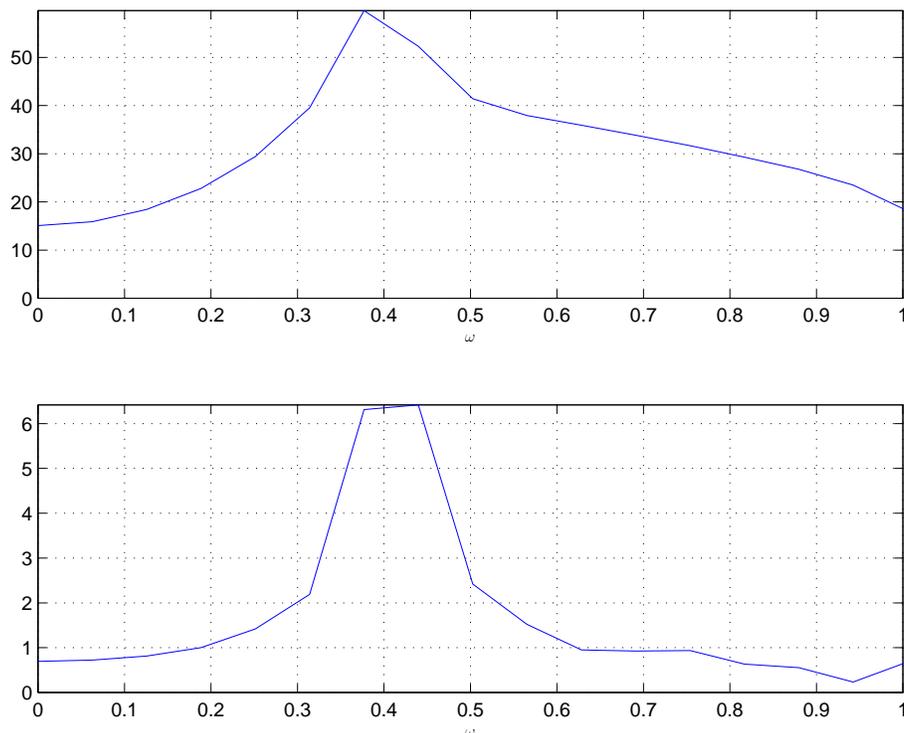
Nous constatons que l'amplitude du déplacement décroît avec le temps. Nous savons par ailleurs (cf. chapitre 3 sur l'étude du condensateur) que la singularité logarithmique de la fonction de Green conduit, après intégration le long de la coupure, à un comportement asymptotique en $1/t$. Ce résultat analytique est ici vérifié numériquement. Les courbes en pointillés représentent des fonctions inverses du temps du type T/t , où T est une durée caractéristique de la décroissance, qui approchent l'amplitude du déplacement pour les grandes valeurs de t . Le calcul numérique se trouve ainsi validé par les prédictions analytiques. Mais ces courbes décrivent également l'évolution initiale du signal qui n'est pas prédite par l'approche asymptotique. Il est en effet intéressant de remarquer que le régime asymptotique n'est pas atteint aux mêmes instants suivant la position dans la queue. Proche de la couche neutre $z = 0.4$, le déplacement atteint son comportement asymptotique très tôt (dès $t = 20 \simeq 5$ minutes), caractérisé par une durée $T = 3$. L'absorption du signal peut donc être considérée comme très efficace. En revanche, du côté des lobes ($z = 2$), le

Fig. 6.3 Comportement temporel de la k -composante de Fourier du déplacement transversal pour $k = 1$, $L_z = 0.5$, $\tau = 1$ et pour trois positions dans la couche.



déplacement ne décroît en $1/t$ qu'à partir de $t \simeq 70 \simeq 50$ minutes et le régime asymptotique est caractérisé par une durée $T = 12$, c'est à dire que l'absorption est dans ce cas beaucoup plus lente. Néanmoins, on observe que 80% du signal est absorbé au bout de $t = 45$, soit 12 minutes environ. La majeure partie de l'énergie déposée dans la couche est donc absorbée sur une échelle temporelle relativement restreinte.

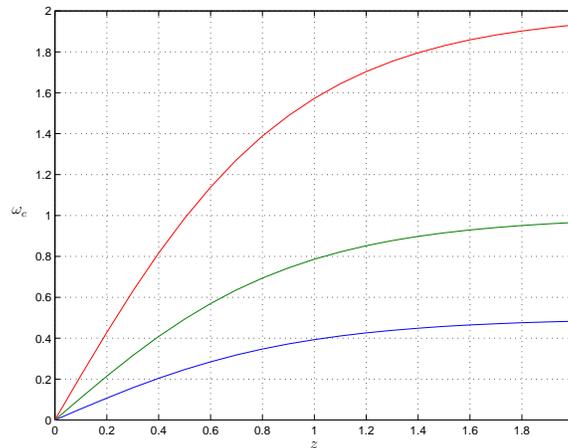
Fig. 6.4 Spectres des oscillations en $z = 0.4$: en haut pour t allant de 0 à 100 et en bas pour t allant de 100 à 200.



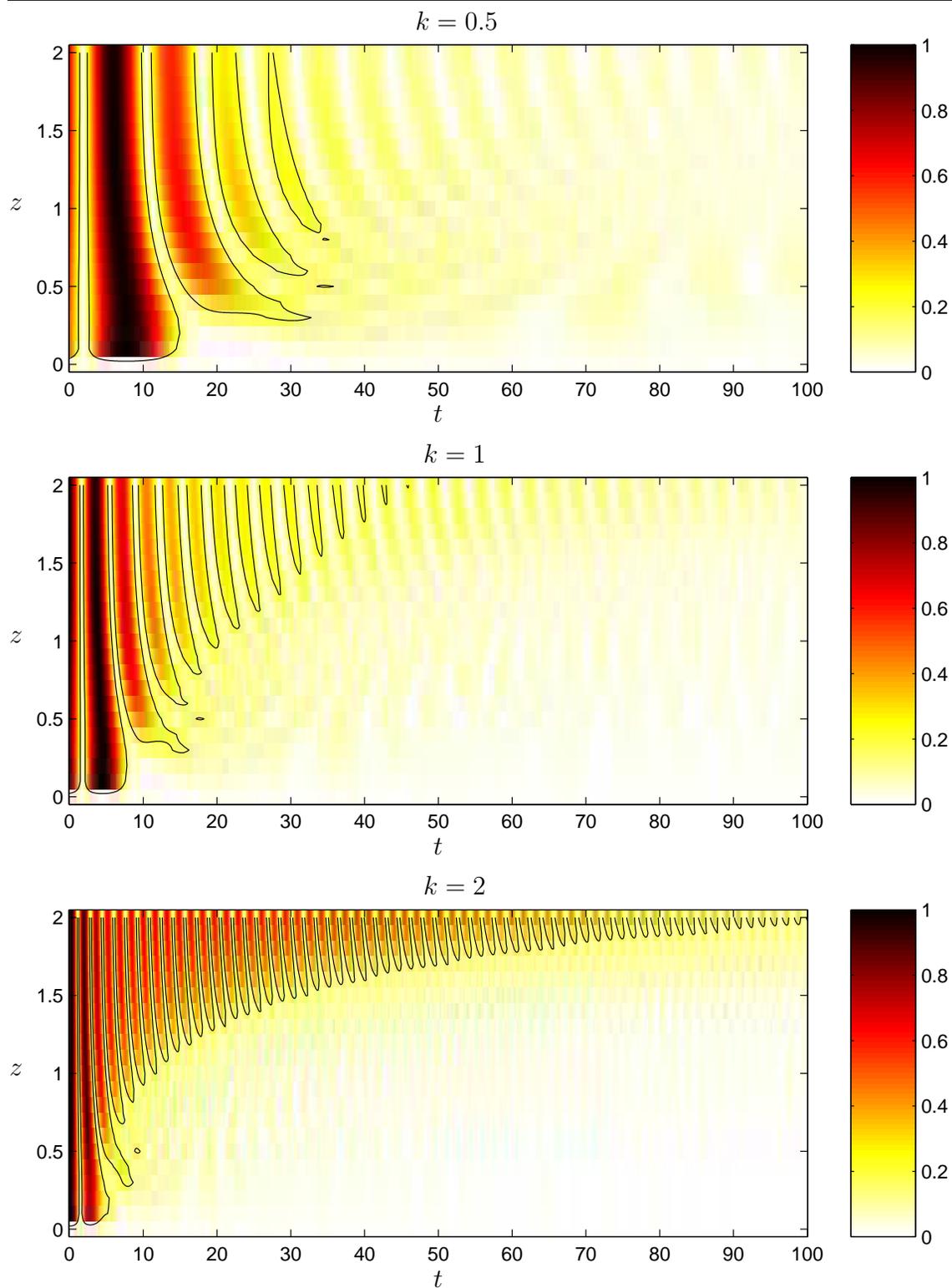
L'aspect apparemment monochromatique des oscillations mérite un autre commentaire. Pour une position donnée dans la couche, le déplacement oscille à la fréquence cusp locale $\omega_c(z)$ de manière presque sinusoïdale pour les grandes valeurs du temps. Par contre, pour des valeurs proches de $t = 0$, le signal est une combinaison de plusieurs fréquences. Pour confirmer cette observation, la figure 6.4 représente le spectre des oscillations en $z = 0.4$. Le premier graphe est calculé avec la première moitié du signal (t allant de 0 à 100) : on observe un spectre relativement large avec un pic en $\omega \simeq 0.4$ correspondant à la fréquence cusp locale. Le second graphe est associé au signal tronqué à partir de $t = 100$. Le pic à la fréquence de résonance est beaucoup plus marqué et le spectre ressemble d'avantage à une oscillation sinusoïdale. Cette évolution du spectre vers une plus grande "monochromaticité" est exactement ce que prévoit le calcul analytique du comportement asymptotique des

perturbations (cf. Sedlacek, 1971, dans un contexte différent). Physiquement, ceci est relié au fait que la vitesse cusp est parallèle au champ magnétique. L'énergie se propageant à une fréquence donnée tend à se concentrer autour de la couche résonante définie par $\omega_c(z) = \omega$ (cf. Tataronis, 1975). On retrouve ainsi la même conclusion que pour le condensateur à diélectrique non homogène. La couche de courant se comporte comme un filtre fréquentiel, sélectionnant en chaque point la fréquence du pulse initial correspondant à la fréquence cusp locale.

Fig. 6.5 Variations de la fréquence cusp ω_c en fonction de z pour trois valeurs de k : bleu $k = 0.5$, vert $k = 1$ et rouge $k = 2$.



La décroissance du déplacement transversal au cours du temps s'explique grâce au phénomène de mélange de phase. La figure 6.6 illustre ce phénomène de manière très claire. Elle représente pour trois valeurs du nombre d'onde ($k = 0.5, 1$ et 2) les variations temporelles du déplacement transversal en différents points de la couche. Afin de s'abstraire de la variation du signal suivant z , la valeur maximale de chaque fonction $|\xi_{kz}(t)|$ pour un z donné a été normalisée à 1 : ceci nous permet donc de comparer la rapidité de décroissance du signal suivant la position dans la couche. De plus les contours noirs correspondent à une valeur de $|\xi_{kz}| = 0.2$, c'est à dire qu'ils représentent le lieu où 80% du signal initial est absorbé. Sur chaque ligne $z = \text{cste}$, le déplacement transversal oscille à la fréquence $\omega_c(z)$. En deux points voisins, la période est donc légèrement différente, ce qui entraîne un décalage de phase entre les oscillations qui augmente au cours du temps. L'interférence de ces deux oscillations, d'abord constructive, devient destructive à mesure que le temps passe, expliquant ainsi la diminution de l'amplitude. Mais cette décroissance n'est pas identique en tous points de la couche et pour toutes les longueurs d'onde. La fréquence cusp $\omega_c(z) = kv_c(z)$ est proportionnelle à k et varie suivant z comme indiqué sur la figure

Fig. 6.6 Variations du taux d'absorption suivant le nombre d'onde k et la position dans la couche

6.5. Proche de la couche neutre, la variation de la fréquence cusp est importante, ainsi que le phénomène de mélange de phase. En revanche, loin de la couche neutre, la fréquence cusp est pratiquement constante (elle atteint sa valeur asymptote $\omega_c(l)$ pour $z > 2$). Les oscillations en deux points voisins varient donc quasiment en phase et il faut une durée beaucoup plus longue pour qu'un décalage conséquent soit visible ; la décroissance du signal en est beaucoup plus lente. En conséquence, le phénomène ondulatoire s'observe sur une plus grande distance quand on se situe dans les lobes. De plus les variations de ω_c avec z sont plus marquées lorsque le nombre d'onde k est élevé. Toutes ces remarques se retrouvent dans la figure 6.6. Pour $k = 2$, nous observons une absorption rapide du déplacement proche de la couche neutre et ceci jusqu'à $z \simeq 1.2$; on peut dire que 80% du signal initial a disparu après une durée de 15 unités normalisées, soit 4 minutes. Plus loin dans la couche, la décroissance est plus lent : on observe encore après une demi-heure de propagation 20% du signal. Lorsqu'on considère des longueurs d'onde plus grandes, l'hétérogénéité de la fréquence cusp étant moins forte, l'absorption du signal est plus uniforme dans la couche et s'effectue moins rapidement que dans le cas des courtes longueurs d'onde. Avec $k = 0.5$, le signal a décréu aux 4/5 pour $t > 30$, i.e. après 8 minutes.

6.2.2 Excitation par un pulse sinusoïdal

Avant de reconstruire complètement le signal spatio-temporel initié par une perturbation de type gaussien, il est intéressant de poursuivre l'analyse du comportement temporel des composantes de Fourier en choisissant une autre forme de pulse initial. Ici, nous cherchons à étudier le problème classique du chauffage "radio fréquence" dans le contexte de la queue magnétosphérique. La perturbation extérieure possède toujours une forme spatiale gaussienne, mais elle oscille à une fréquence ω_0 du continuum. Elle prend donc la forme suivante :

$$P_{ext}(t, x, z) = P_0 \sin(\omega_0 t) \exp\left(-\frac{x^2}{2L_x^2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2L_z^2}\right), \quad (6.11)$$

et sa transformée de Fourier-Laplace s'écrit :

$$\hat{P}(\omega, k, z) = \sqrt{2\pi} P_0 L_x \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \exp\left(-\frac{k^2 L_x^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2L_z^2}\right). \quad (6.12)$$

En introduisant cette expression dans (6.7), le déplacement transversal s'écrit :

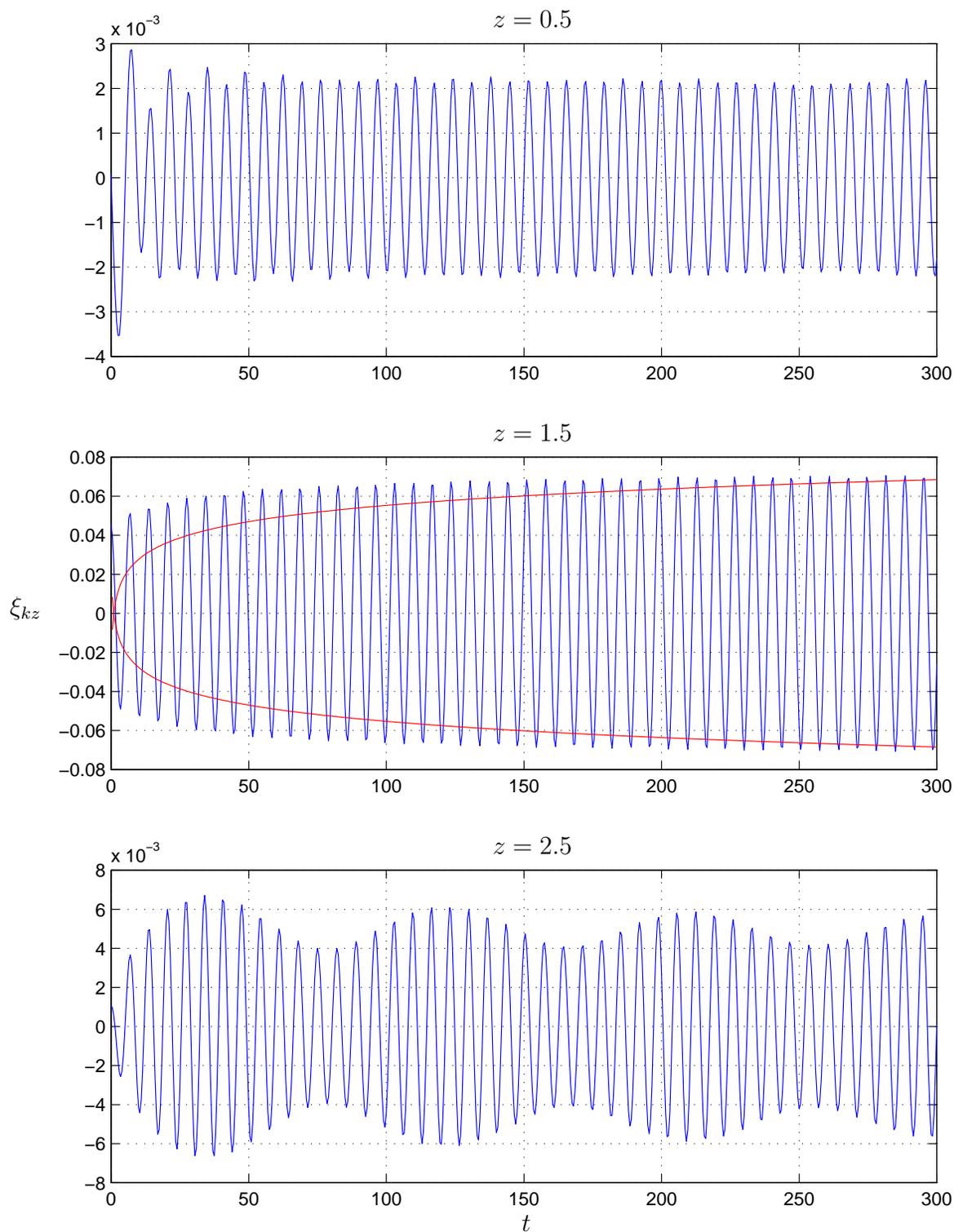
$$\xi_{kz}(t, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_0 L_x \omega_0 e^{-k^2 L_x^2 / 2} \int_0^{\omega_c(l)} d\sigma \frac{\sigma^2}{\sigma^2 - k^2 v_s^2} \Im(F_{\sigma, k}^+) \frac{\cos(\sigma t)}{\omega_0^2 - \sigma^2}. \quad (6.13)$$

Le problème étudié ici est analogue au condensateur du chapitre 3 alimenté par un courant sinusoïdal. Il est également très proche de celui examiné par Tataronis (1975). Il correspond au calcul du taux de chauffage d'un plasma non homogène par des ondes se propageant à une fréquence donnée (chauffage par radio fréquence). L'équation (6.11) définit une antenne localisée dans la couche et oscillant à la fréquence ω_0 pour $t > 0$. Le traitement analytique suivi par Tataronis montre que les perturbations se comportent asymptotiquement en $\ln(t) \cos(\omega_0 t)$ au voisinage de la couche résonante correspondant à $\omega_c(z) = \omega_0$. Cette évolution temporelle exprime un transfert d'énergie de l'antenne vers le plasma.

On calcule l'intégrale (6.13) avec les paramètres suivants : $L_z = 0.5$, $k = 1$ et $\omega_0 = \omega_c(z = 1.5) = 0.9151$. A l'instar du condensateur non homogène, on s'attend donc à ce que la ligne $z = 1.5$ soit la couche résonante et concentre les oscillations du plasma. La figure 6.7 illustre les résultats pour trois positions dans la couche ($z = 0.5$, $z = 1.5$ et $z = 2.5$). Le comportement temporel des oscillations présente des aspects nettement différents. En $z = 0.5$, une oscillation monochromatique à la fréquence de l'excitateur s'observe pratiquement dès le début. En $z = 2.5$, on remarque un battement de deux oscillations : l'une à la fréquence ω_0 d'amplitude constante et l'autre à la fréquence cusp locale dont l'amplitude décroît au cours du temps. Ce battement a tendance à s'atténuer au cours du temps. Ce comportement peut s'interpréter à la lumière des conclusions du paragraphe précédent. La réponse transitoire à la fréquence locale décroît en $1/t$, mais avec un taux qui dépend de la position dans la couche. Proche de la couche neutre, la décroissance est très rapide, si bien que la réponse permanente à la fréquence de l'excitateur domine le signal presque immédiatement. En revanche, plus loin dans la couche, le régime transitoire s'atténue plus lentement et les deux oscillations coexistent pendant une longue période (plusieurs heures). Sur la ligne de résonance ($z = 1.5$), l'amplitude du signal croît avec le temps selon une fonction analogue à celle proposée par Tataronis. En effet, les courbes en pointillés représentent la fonction $0.012 \ln(t)$ qui modélise très bien l'amplitude asymptotique des oscillations. Néanmoins, nous voyons que l'amplitude des oscillations augmente beaucoup plus rapidement que $\ln(t)$ pour les faibles valeurs du temps. A l'instant $t = 300$, l'amplitude est au moins 10 fois supérieure sur la ligne de résonance qu'ailleurs dans la couche.

Au chapitre 3, nous avons déjà tiré cette conclusion concernant l'absorption résonante. Lorsque l'excitateur injecte, dans un milieu non homogène, de l'énergie oscillant à une fréquence du continuum, celle-ci se concentre de plus en plus autour

Fig. 6.7 Comportement temporel de la k -composante de Fourier ($k = 1$) pour une excitation sinusoïdale à la fréquence $\omega_0 = \omega_c(z = 1.5)$ et en trois positions de la queue.



de la région de résonance. Par des processus non décrits dans ce mémoire, l'énergie des ondes peut être par exemple convertie en chaleur (chauffage du plasma) ou en énergie cinétique (phénomènes d'accélération des particules).

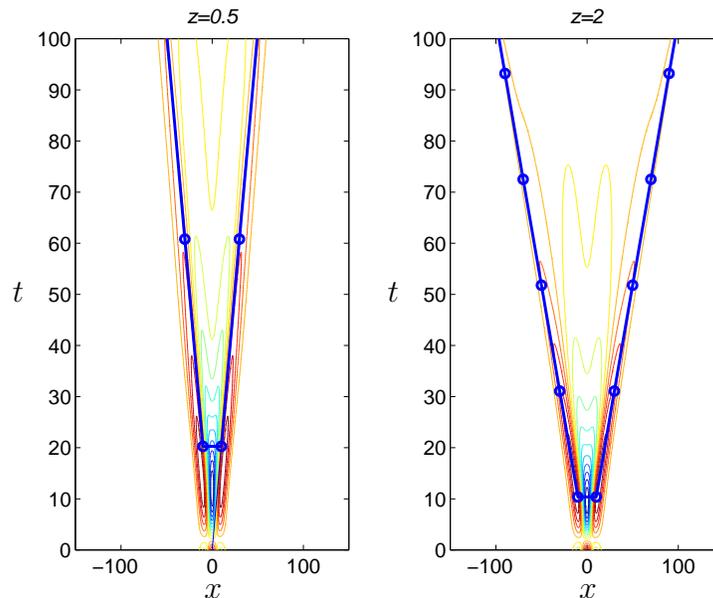
6.3 Reconstruction complète du signal

Afin de mieux décrire les perturbations spatio-temporelles, l'intégration sur k est effectuée dans ce paragraphe. Nous obtenons alors les composantes du déplacement ξ_z et ξ_x , ainsi que toutes les autres grandeurs utiles (champ magnétique, pressions, densité d'énergie ...) en fonction de t , x et z . Cela nous permettra dans un deuxième temps d'évaluer la quantité d'énergie absorbée dans le processus.

Cependant, le calcul numérique étant très long, nous nous limiterons à deux cas de perturbation extérieure : l'une gaussienne d'extensions spatiales $L_z = 0.5$ et $L_x = 5$ et temporelle $\tau = 1$ (cas I dans la suite) et l'autre une sinusoïde en x de nombre d'onde $k_0 = 1$ enveloppée par une gaussienne d'extension $L_x = 10$ et $L_z = 0.5$ (cas II). Ces deux exemples permettent également de mettre en lumière l'étude faite au paragraphe 6.2.1 concernant la dépendance du taux d'absorption vis à vis de la longueur d'onde.

6.3.1 Evolution spatio-temporelle des perturbations

Fig. 6.8 Propagation d'un pulse gaussien et vitesse cusp



Analysons tout d'abord l'effet d'une perturbation extérieure de type I. La fi-

gure 6.8 illustre la vitesse de propagation des fluctuations suivant la position dans la couche. Pour deux valeurs de z , le déplacement transversal est représenté dans le plan (x, t) . Le pulse initialement en $x = 0$ se scinde en deux parties, l'une se propageant vers les x positifs et l'autre vers les x négatifs avec la même vitesse. Les droites bleues indiquent un déplacement à la vitesse cusp locale. La superposition de ces deux graphes montre que le pulse se propage bien à la vitesse cusp locale $v_c(z)$.

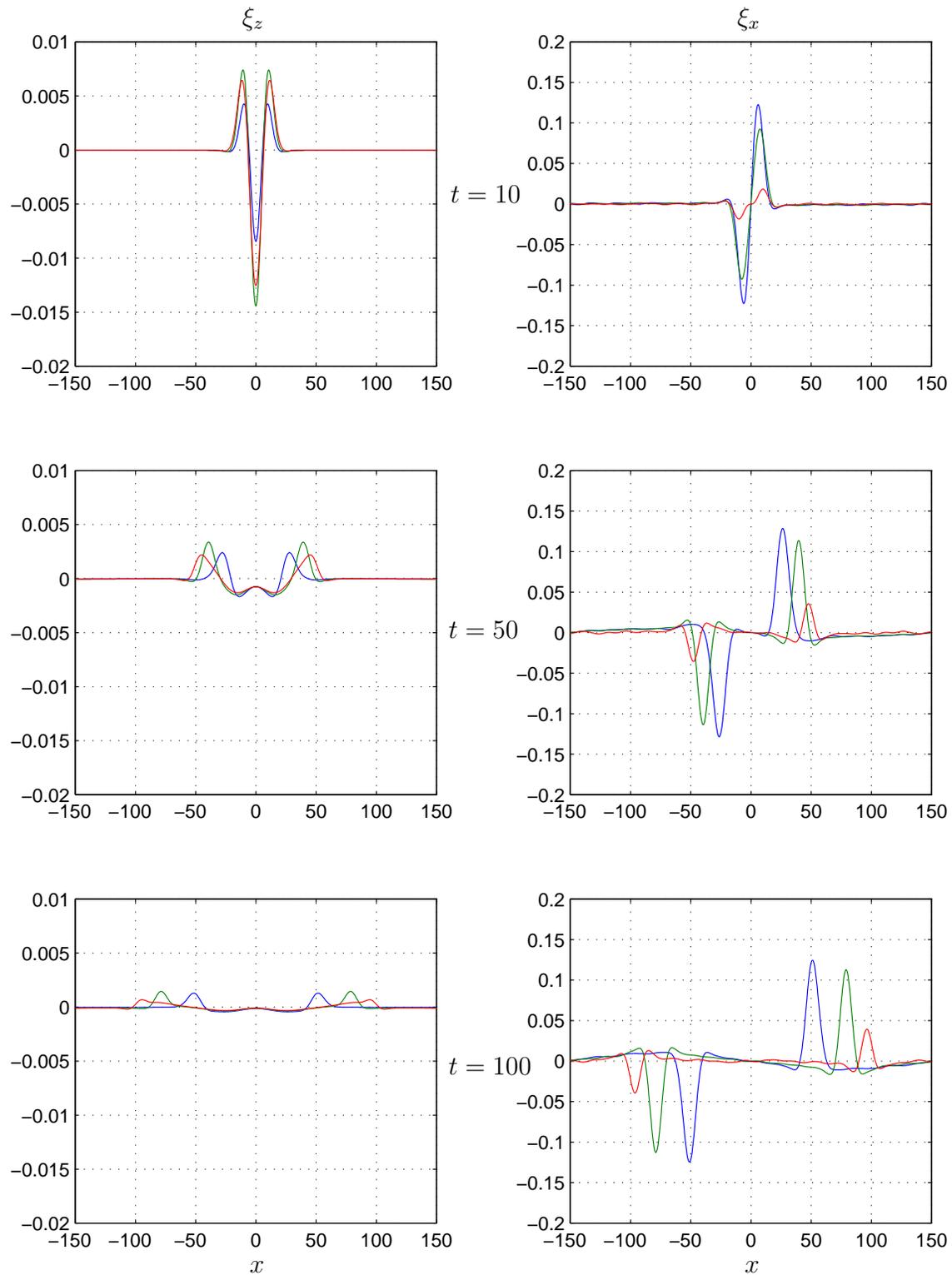
La largeur caractéristique du pulse est de l'ordre de $10 R_T$, ce qui correspond à des petits nombres d'onde pour les composantes de Fourier dominantes. Conformément à la discussion du paragraphe 6.2.1, le signal décroît de manière plus ou moins uniforme dans la couche. C'est ce que l'on observe dans la colonne de gauche de la figure 6.9, où le déplacement transversal est tracé en fonction de x pour trois valeurs du temps ($t = 10, 50$ et 100) et pour trois valeurs de z . La forme gaussienne du pulse initial est peu affectée au cours de la propagation pour $z = 0.5$ et $z = 1$. En revanche, pour $z = 2$, on constate une plus forte "dispersion" du pulse. Ceci n'est cependant pas dû à un phénomène classique de dispersion (toutes les longueurs d'onde ici se propagent à la même vitesse), mais peut s'expliquer par le fait que les grandes longueurs d'onde sont plus lentement absorbées que les courtes longueurs d'onde. Il s'en suit donc un plus grand étalement du pulse. Concernant l'amplitude des perturbations, nous observons que le déplacement transversal atteint une valeur maximale de l'ordre de 10^{-2} , soit un peu moins de 100 km. Au chapitre 5, nous avons déjà obtenu un tel ordre de grandeur pour le premier harmonique. Nous pouvons donc conclure qu'un pulse gaussien en pression dépose la même quantité d'énergie dans le spectre discret et dans le spectre continu.

La colonne de droite de la figure 6.9 représente la propagation du déplacement longitudinal ξ_x . L'amplitude de cette composante du déplacement est bien plus grande que celle de ξ_z , environ un ordre de grandeur supérieur. Nous observons également que cette composante n'est pas absorbée au cours du temps. Cela s'explique mathématiquement par le fait que le déplacement longitudinal ne possède plus de singularité logarithmique. En effet, la composante $\hat{\xi}_x$ se calcule à partir de la composante $\hat{\xi}_z$ par l'équation (4.16) du chapitre 4 que nous réécrivons ici :

$$\hat{\xi}_x = i \frac{kv_s^2}{\omega^2 - k^2v_s^2} \left[-\frac{d\hat{\xi}_z}{dz} + \frac{\hat{P}}{\rho_{eq}v_s^2} \right]$$

Seul le premier terme du membre de droite possède une contribution non nulle dans l'intégration sur ω , puisque le second terme n'a aucune singularité dans le domaine d'intégration. Nous savons que $\hat{\xi}_z$ possède une divergence logarithmique du type $\ln(\omega -$

Fig. 6.9 Propagation d'un pulse gaussien (type I) pour trois valeurs du temps et trois valeurs de z : bleu $z = 0.5$, vert $z = 1$ et rouge $z = 2$. Colonne de gauche : déplacement transversal ξ_z . Colonne de droite : déplacement longitudinal ξ_x .

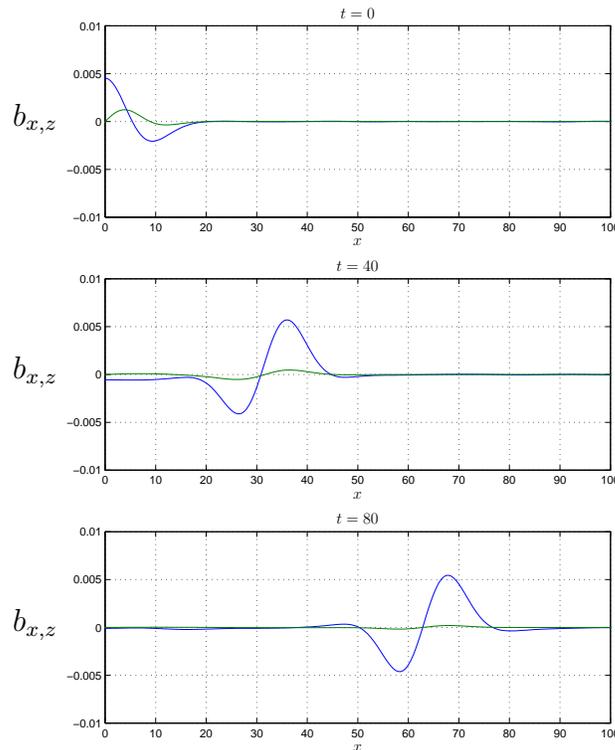


$\omega_c(z)$). La dérivation par rapport à z conduit alors pour $\hat{\xi}_x$ à un pôle du type $1/(\omega - \omega_c(z))$ qui n'implique pas un amortissement du signal dans le temps. La différence de comportement entre les composantes longitudinale et transversale du déplacement a des conséquences directes sur les perturbations magnétiques. Les composantes du champ magnétique s'évaluent grâce aux équations (5.13) et (5.14) du chapitre 5 :

$$\begin{aligned} b_x &= -B_{eq}(z - \xi_z) \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \\ b_y &= B_{eq}(z - \xi_z) \frac{\partial \xi_z}{\partial x} \end{aligned}$$

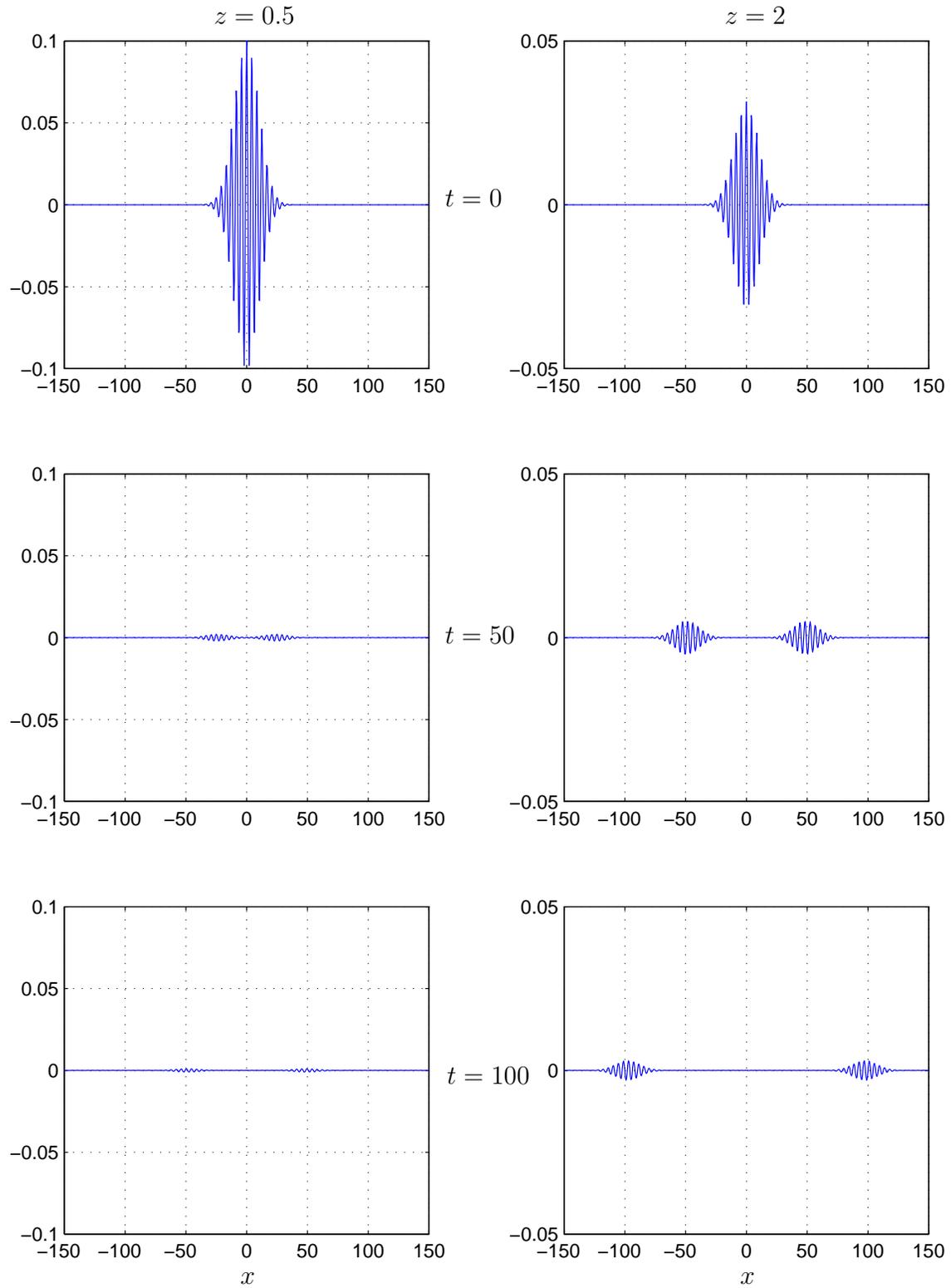
La composante compressionnelle b_x est donc liée à la composante longitudinale du déplacement. Elle est beaucoup plus importante en amplitude que la composante torsionnelle b_z et elle n'est pas amortie au cours du temps. A l'inverse, la part torsionnelle des perturbations est fortement absorbée, comme nous pouvons le vérifier sur la figure 6.10. Là encore, nous observons que les fluctuations magnétiques atteignent 1% environ du champ magnétique d'équilibre, en dépit de l'importance du pulse de pression initial.

Fig. 6.10 Composantes compressionnelle b_x (en bleu) et torsionnelle b_z (en vert) du champ magnétique dans le cas d'une excitation du type I.



Considérons maintenant les perturbations initiées par un pulse sinusoïdal de type II. La figure 6.11 représente la propagation du déplacement transversal pour

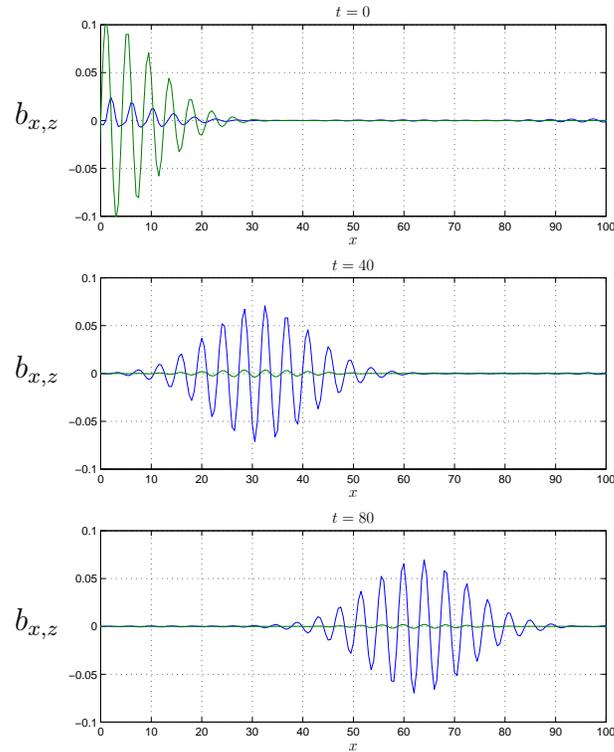
Fig. 6.11 Propagation d'un pulse sinusoïdal (type II) pour trois valeurs du temps et deux valeurs de z .



les trois valeurs du temps ($t = 10, 50$ et 100) et pour $z = 0.5$ à gauche, $z = 2$ à droite. On observe que, proche de la couche neutre, l'absorption est alors qu'elle est beaucoup plus lente plus loin vers les lobes. Ceci est conforme à la discussion faite au paragraphe 6.2.1.

Il est intéressant de noter que l'amplitude du déplacement est dans ce cas 10 fois plus grande que dans le cas I. De même les fluctuations magnétiques (cf. figure 6.12) atteignent 10% de la valeur statique aussi bien pour les composantes longitudinales que transversales. Ainsi, la couche de Harris répond de manière beaucoup plus efficace à des perturbations initiales dont l'échelle caractéristique correspond à la taille typique de la couche, soit $1 R_T$. Nous avons déjà tiré une telle conclusion concernant les modes discrets.

Fig. 6.12 Composantes compressionnelle b_x (en bleu) et torsionnelle b_z (en vert) du champ magnétique dans le cas d'une excitation du type II.

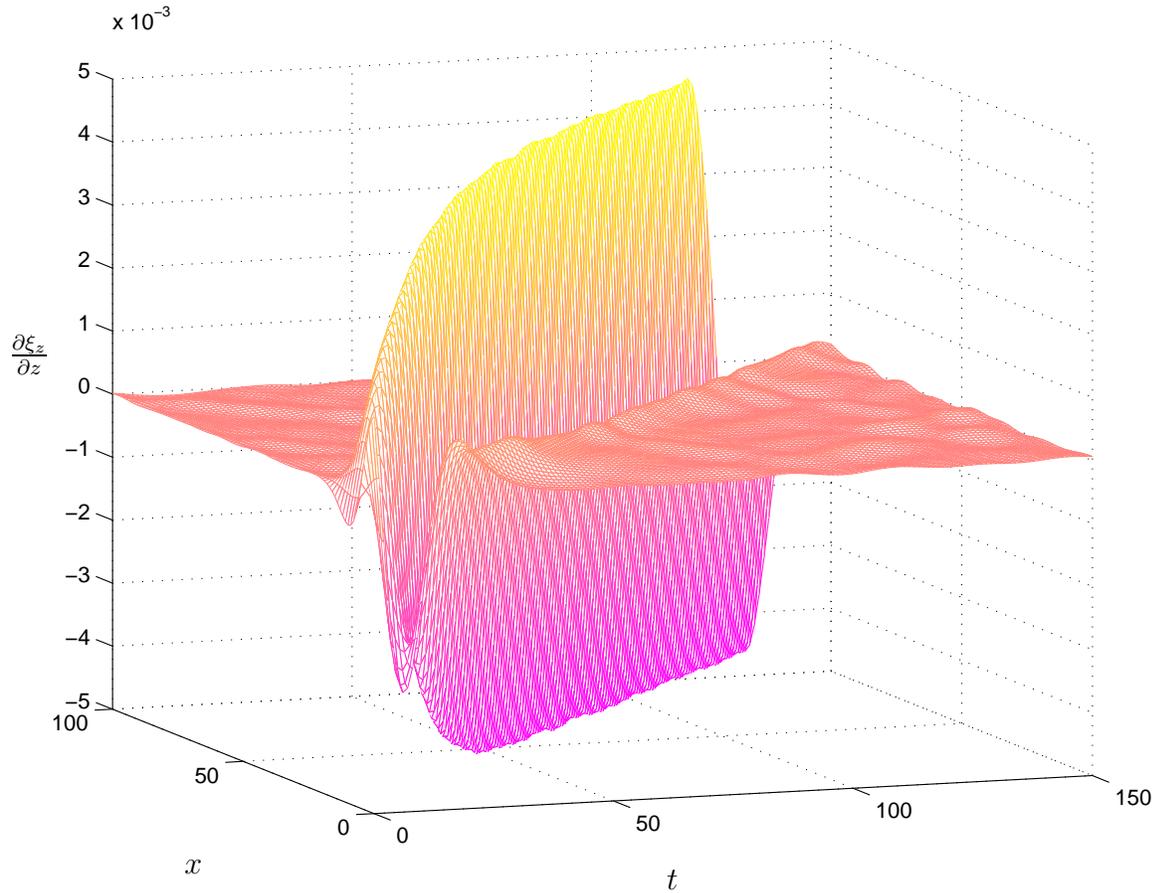


6.3.2 Formation des petites échelles

Nous avons vu qu'un pulse gaussien se propage à des vitesses différentes selon la position dans la couche de plasma (cf. figure 6.9). Il s'en suit une distorsion des fronts d'onde à l'origine de la formation de petites échelles spatiales transversales. Pour mettre ce phénomène plus clairement en évidence, la figure 6.13 représente

l'évolution du gradient selon la direction z du déplacement transversal ξ_z au cours de la propagation pour $z = 1$. Celui-ci croît le long de la ligne de crête $x = v_c(z = 1)t$.

Fig. 6.13 Evolution du gradient transversal au cours de la propagation pour $z = 1$



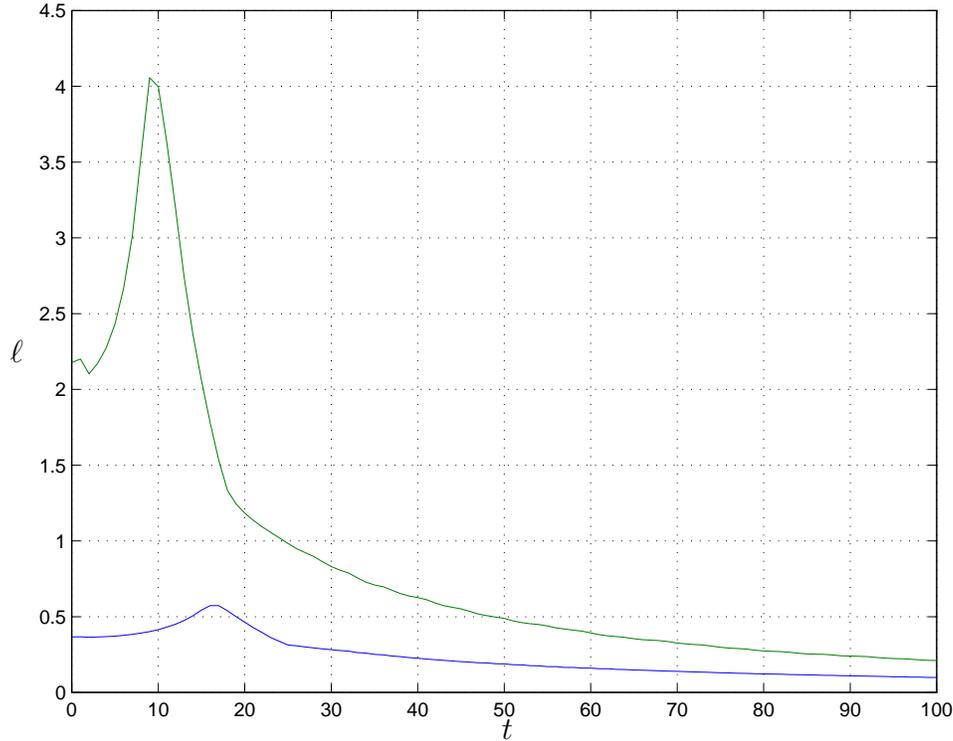
On peut alors définir une échelle caractéristique transversale des perturbations en faisant le rapport à chaque instant entre l'amplitude du déplacement transversal et l'amplitude de son gradient selon z :

$$\ell(t, z) = \frac{\max(\xi_z(t, x, z))}{\max(\frac{\partial \xi_z}{\partial z}(t, x, z))}.$$

Cette longueur normalisée à a est représentée sur la figure 6.14 au cours du temps pour deux positions dans la couche ($z = 0.5a$ en bleu et $z = a$ en vert). Dans les deux cas cette échelle caractéristique diminue au cours du temps, conduisant donc à la formation de petites échelles transversales, sur lesquelles la conversion d'énergie des ondes vers le plasma sera plus favorable. On constate en outre que ℓ est d'autant plus petite que l'on se trouve proche de la couche neutre, c'est à dire là où l'absorption du signal est la plus importante. On retrouve bien ici une des caractéristiques

fondamentales du processus d'absorption résonante à l'œuvre dans les plasmas non homogènes.

Fig. 6.14 Variation au cours du temps de l'échelle caractéristique transversale des perturbations pour $z = 0.5$ en bleu et $x = 1$ en vert



6.3.3 Considérations énergétiques

La reconstruction complète du signal dans le continuum permet d'évaluer la quantité d'énergie déposée dans la couche de courant par le pulse de pression. C'est un des intérêts majeurs de ce calcul. Notons que ce calcul effectif de la quantité d'énergie dissipée dans une couche de plasma n'a pas, à notre connaissance, été réalisé dans ce contexte. C'est aussi un point important pour la comparaison avec les observations. La densité volumique d'énergie du plasma se décompose en différents termes :

$$e_k = \frac{1}{2} \rho_{eq} (v_x^2 + v_z^2) : \text{énergie cinétique} \quad (6.14)$$

$$e_m = \frac{B^2}{2\mu_0} : \text{énergie magnétique} \quad (6.15)$$

$$e_u = P : \text{énergie interne} \quad (6.16)$$

Concernant l'énergie interne, on peut considérer qu'en moyenne une particule possède l'énergie cinétique microscopique $(1/2)kT$ par degré de liberté (en l'occurrence 2),

donc par unité de volume, l'énergie cinétique microscopique a pour valeur $\rho kT = P$, en vertu de l'équation des gaz parfaits.

Pour obtenir l'énergie totale déposée dans la couche à un z donné, il faut intégrer ces diverses expressions par rapport à la coordonnée x . Le résultat correspond donc à une énergie par unité de surface dépendant du temps et de la coordonnée z . L'intégration en z n'est en effet pas possible car nous ne disposons que de 3 points dans la couche ! Dans la suite, la densité d'énergie volumique est normalisée à la valeur de la densité d'énergie magnétique dans les lobes à l'équilibre $B_e^2/(2\mu_0)$. L'énergie intégrée en x est alors normalisée à $B_e^2 a/(2\mu_0)$. Pour $B_e = 25$ nT et $a = 1R_T \simeq 6400$ km, cette dernière valeur correspond à 2.10^{-3} J/m². Lorsque nous développons les expressions précédentes jusqu'au second ordre en ξ , nous obtenons pour l'énergie totale contenue dans l'unité de volume de la couche :

$$e = e_{eq} - \left[\gamma P_{eq} \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right) + \frac{B_e^2}{\mu_0} \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] + \frac{1}{2} \left(\rho_{eq} v_x^2 + \frac{b_x^2}{2\mu_0} \right) + \frac{1}{2} \left(\rho_{eq} v_z^2 + \frac{b_z^2}{2\mu_0} \right). \quad (6.17)$$

Le premier terme est la densité d'énergie totale contenue dans la couche à l'équilibre, les deuxièmes et troisièmes termes ne sont fonctions que de ξ_x et $d\xi_z/dz$. Au paragraphe précédent, nous avons montré que la composante longitudinale du déplacement atteint une amplitude constante au cours du temps. Ainsi, l'intégration de ces deux termes par rapport à x et à z conduit à une fonction du temps qui se stabilise à une valeur constante, dépendant de la nature de l'excitateur. En revanche, le dernier terme de (6.17) ne dépend que des composantes transversales du déplacement et du champ magnétique. Celles-ci décroissent au cours du temps par le phénomène d'absorption résonante. C'est donc cette partie de l'énergie totale qui nous intéresse ici, et nous calculons l'intégrale :

$$E_{trans}(t, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \rho_{eq}(z) v_z^2(t, x, z) + \frac{b_z^2(t, x, z)}{2\mu_0} \right]. \quad (6.18)$$

Les résultats sont illustrés sur les figures 6.15 (excitateur de type I) et 6.16 (excitateur de type II) où E_{trans} est tracée en fonction du temps pour trois positions dans la couche ($z = 0.5$, $z = 1$ et $z = 2$). Concernant la figure 6.15, on remarque que la quantité d'énergie déposée dans la couche est très faible. En effet E_{trans} atteint difficilement 5.10^{-5} unités normalisées, soit 10^{-7} J/m². Le pulse ayant par ailleurs une largeur de $40 R_T$, cette valeur correspond à une densité d'énergie complètement négligeable. On conclut qu'une perturbation extérieure de type I, c'est à dire possédant une large extension spatiale, ne peut favoriser l'absorption d'énergie.

Fig. 6.15 Variation de l'énergie transversale déposée dans la couche par un pulse de type gaussien

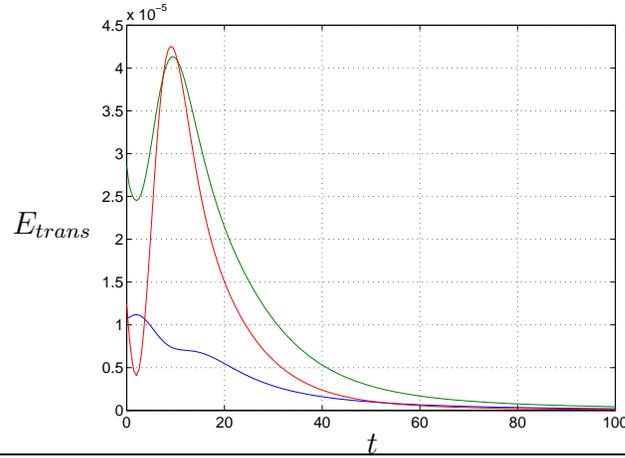
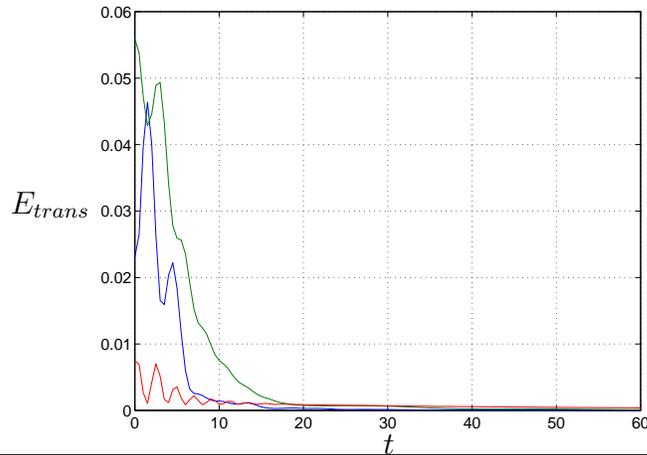


Fig. 6.16 Variation de l'énergie transversale déposée dans la couche par un pulse sinusoïdal



La situation est assez différente pour des perturbations de type II contenant des longueurs d'onde plus petites (cf. figure 6.16). La quantité d'énergie déposée dans la couche est environ 1000 fois plus élevée que dans le cas précédent. Puisque l'extension caractéristique du pulse est cette fois de $20 R_T$, l'énergie absorbée par le plasma est de l'ordre de 10^{-12} J par m^3 . En supposant que l'énergie thermique du plasma à l'équilibre est de l'ordre du keV (soit 10^{-16} J) par particule, ce qui correspond à une densité d'énergie d'environ 10^{-11} J/ m^3 , on conclut que la perturbation extérieure (d'amplitude initiale égale à $1 P_{me}$) a augmenté cette énergie de 10%. La durée du transfert est relativement courte. On constate que 90% de l'énergie déposée initialement est absorbé au bout d'un temps $T = 20$, soit un peu plus de 5 minutes. Si on suppose de plus une propagation à la vitesse cusp, le transfert d'énergie s'effectue sur une distance égale à $v_c T \simeq 16 R_T$ pour $z = 1$. Cette distance est beaucoup plus

restreinte proche de la couche neutre puisque v_c est plus faible (à $z = 0.5$ elle vaut environ $10 R_T$). Nous observons également que l'énergie déposée dans les lobes est beaucoup plus faible que dans le voisinage de la couche neutre. Ceci est lié au fait que le pulse initial a une extension en z de l'ordre de $0.5 R_T$ et est centré sur la couche neutre.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons complété l'étude de la réponse d'une couche de Harris à un pulse de pression d'origine extérieure. Cette fois-ci, nous nous sommes concentrés sur la propagation des perturbations appartenant au spectre continu des fréquences cusp. Les signaux se propageant dans un tel domaine de fréquence décroissent au cours du temps par suite du phénomène d'absorption résonante. Notre objectif dans ce chapitre est double :

1. estimer les échelles typiques spatiale et temporelle du processus d'absorption,
2. évaluer la quantité d'énergie qu'un pulse extérieur est capable de transférer à la couche de plasma.

En ce qui concerne le premier point, nous avons vu que l'efficacité du processus dépend fortement de la position dans la couche et de la longueur d'onde. Dans le cas d'un pulse initial formé de courtes longueurs d'onde (précédemment appelé type II), il existe une nette différence dans l'absorption du signal selon la position dans la couche. Au voisinage de la couche neutre $z = 0$, le processus d'absorption est très efficace. Nous avons vu que dans ce cas 80% de l'énergie initiale disparaît au bout de 4 minutes. En revanche, plus loin dans les lobes, le signal décroît beaucoup plus lentement, sur une échelle temporelle de l'ordre de la demi-heure. On s'attend donc à observer des fluctuations sur les bords de la couche et un chauffage plus localisé du plasma au centre. Dans le cas d'un pulse gaussien de grande extension spatiale (cas I), le processus d'absorption est davantage uniforme dans la couche. On a noté que, dans ce cas, il faut environ 8 minutes pour absorber 80% de l'énergie initialement déposée. Ainsi, au centre de la couche, le processus d'absorption est moins efficace avec un exciteur de grande extension spatiale. Plus précisément, nous pouvons conclure que si l'échelle spatiale caractéristique ΔL du pulse initial est de l'ordre de l'épaisseur de la couche a , les perturbations sont rapidement absorbées au centre de la couche et persistent plus longtemps sur les bords. La conversion d'énergie s'effectue sur une distance moyenne de l'ordre de 20 rayons terrestres. Par contre, si l'exciteur

possède une extension spatiale supérieure à l'épaisseur de la couche, les perturbations décroissent beaucoup plus lentement dans le temps et de manière uniforme dans la couche.

Concernant la quantité d'énergie transférée au plasma, nous avons remarqué que le couplage entre le pulse initial et la couche de plasma était extrêmement faible dans le domaine des grandes longueurs d'onde. La quantité d'énergie déposée dans la couche atteint difficilement 0.01% de l'énergie à l'équilibre pour un pulse de pression dont l'amplitude est égale à la pression magnétique dans les lobes. Le transfert d'énergie qui en résulte est totalement négligeable. En revanche, avec un excitateur formé de longueurs d'onde plus courtes, de l'ordre de l'épaisseur de la couche, le transfert d'énergie est beaucoup plus efficace. Nous avons estimé que l'énergie thermique du plasma pouvait augmenter d'environ 10% sur une distance de l'ordre de 20 rayons terrestres.

Chapitre 7

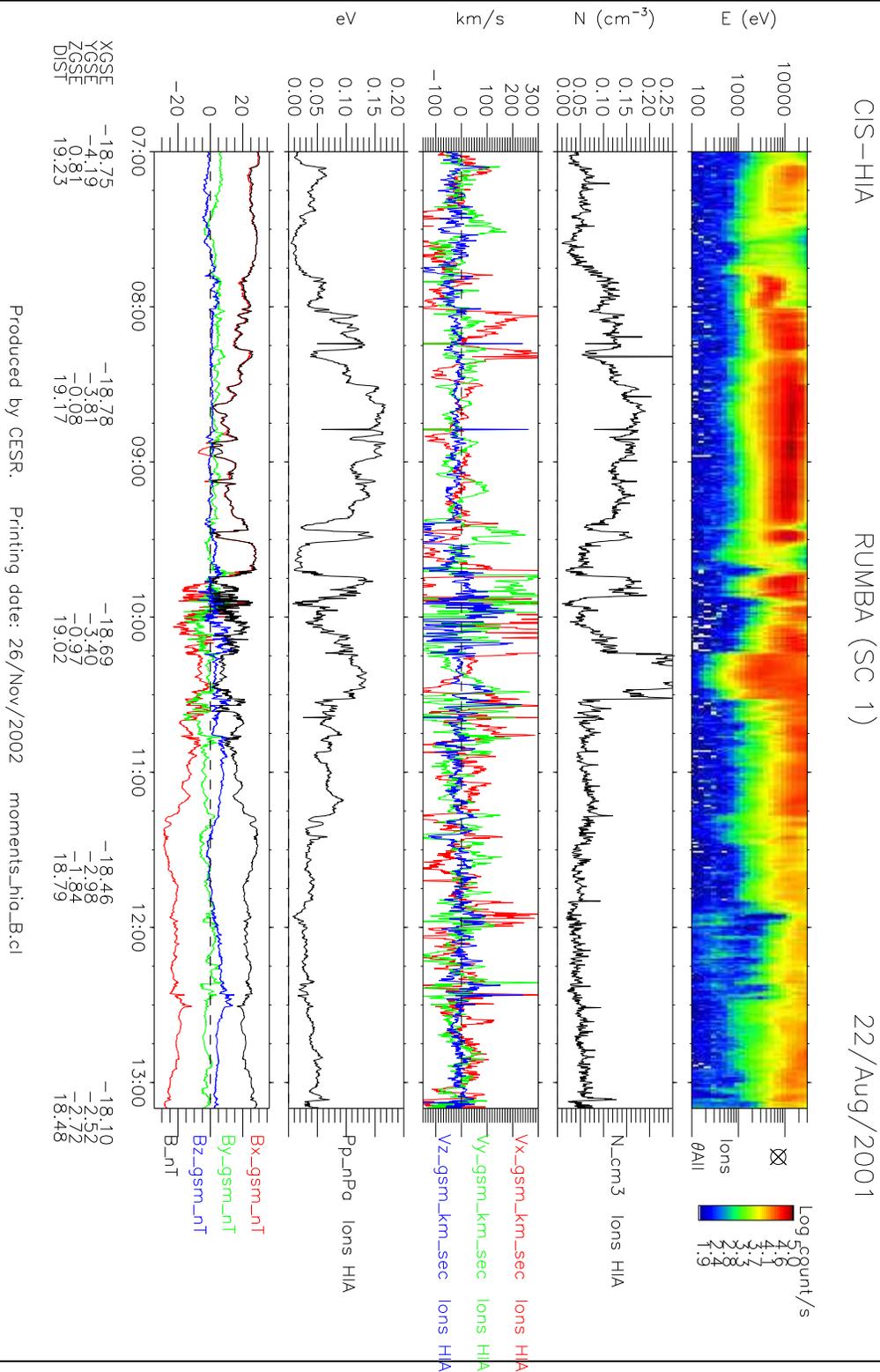
Analyse d'un événement CLUSTER

Dans ce chapitre, nous allons effectuer l'analyse d'un événement observé par les quatre satellites CLUSTER. Au cours des mois d'août et septembre 2001, le tétraèdre se situe dans la queue magnétique terrestre à environ 20 rayons de la Terre. Lors de ce passage, de nombreuses oscillations sont observées sur les trois composantes du champ magnétique. L'objectif de ce chapitre est d'analyser de manière aussi complète que possible ces oscillations afin de savoir si elles peuvent correspondre à des modes propres MHD, tels ceux calculés théoriquement au chapitre 5, ou au contraire si elles relèvent d'une physique différente. Nous savons maintenant qu'une perturbation extérieure peut exciter des oscillations propres de type kink ou sausage avec des périodes normalisées à un temps caractéristique $\tau = a/v_s$, où a est l'épaisseur typique de la couche de Harris et v_s est la vitesse du son. Ce temps caractéristique peut être déterminé de manière relativement précise grâce aux mesures simultanées des 4 satellites CLUSTER. Il constitue un paramètre essentiel dans l'exposé qui suit, car il permet de distinguer parmi les différentes oscillations observées celles qui relèvent des perturbations MHD propres à la couche.

7.1 Le cas du 22 août 2001 : vue d'ensemble

Nous avons choisi d'illustrer ce chapitre avec l'exemple du 22 août 2001, car il présente sur 6 heures de mesure, pendant lesquelles CLUSTER va passer d'un lobe à l'autre, une grande variété de phénomènes physiques affectant la couche de plasma. De plus, la composante transversale B_z du champ magnétique est pratiquement nulle pendant toute la période, ce qui justifie la modélisation de la queue magnétique par une couche de Harris. La figure 7.1 propose une vue globale des données fournies

Fig. 7.1 Survol du 22 août 2001 par le satellite 1 : (1) Spectrogramme des ions; (2) Densité des ions; (3) Vitesses des ions; (4) Pression thermique; (5) Champ magnétique.



par les expériences CIS (instrument HIA pour les ions) et FGM (pour le champ magnétique). Les différents panneaux représentent de haut en bas : le spectrogramme des ions (nombre d'ions détectés dans toutes les directions en fonction de leur énergie), la densité ionique, les trois composantes de la vitesse dans le repère GSM, la pression thermique des ions et enfin les trois composantes du champ magnétique mesurées par FGM.

Nous pouvons distinguer différentes périodes résumées dans le tableau suivant. Elles correspondent à des positionnements de CLUSTER dans ou à l'extérieur de la couche (lobes) ainsi qu'à divers niveaux d'activité de la couche.

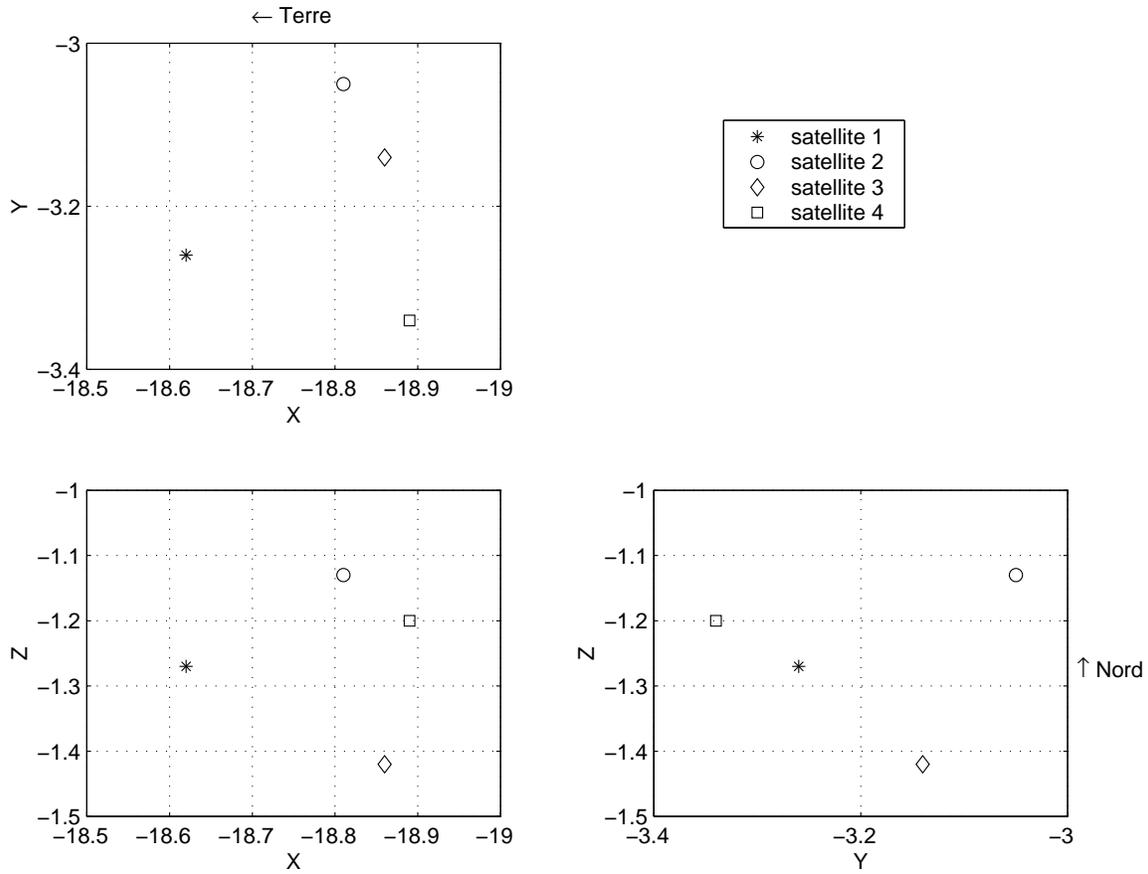
| | | |
|---------------------|---|------------------|
| $t < 07h50$ | Lobes | |
| $07h50 < t < 09h30$ | Couche de plasma : Période calme avec quelques oscillations | Période 1 |
| $09h30 < t < 09h45$ | Lobes | |
| $09h45 < t < 10h15$ | Forte activité dans une couche fine. Sous-orage vers 10h00. | Période 2 |
| $10h15 < t$ | Période calme dans une couche plus épaisse | |

Nous nous intéressons aux oscillations observées durant les périodes 1 et 2 et nous cherchons à répondre aux deux questions suivantes : peut-on interpréter ces oscillations dans le cadre de la magnétohydrodynamique et reproduire leurs caractéristiques grâce au modèle théorique présenté dans cette thèse ? Pour cela il faut commencer par déterminer les paramètres géométriques et temporels de la couche puis les comparer avec le modèle théorique. Il s'agit de préciser l'orientation de la couche, son épaisseur typique (paramètre a) et déduire le temps caractéristique τ .

7.2 Détermination des paramètres de la couche

Les composantes du champ magnétique sont mesurées par rapport au repère GSM dont l'axe (OX) est parallèle à la direction Terre-Soleil, l'axe (OZ) est parallèle à l'axe des pôles magnétiques terrestres et l'axe (OY) complète le trièdre. La figure 7.2 indique la position des 4 satellites dans ce repère. Cependant, ce repère ne coïncide pas forcément avec le repère ($Oxyz$) lié à la queue magnétosphérique, car celle-ci peut être tordue dans les trois directions. Il convient donc dans un premier temps de se replacer dans ce repère. Au vu du dernier panneau de la figure 7.1, les composantes B_y et B_z du champ magnétique sont en moyenne nulles, ainsi l'axe (OX) du repère GSM se confond avec l'axe (Ox) de la couche de plasma. Pour déterminer la direction

Fig. 7.2 Positions des quatre satellites dans le repère GSM. L'unité est le rayon terrestre R_T



de la normale à la couche, c'est à dire la direction de plus fort gradient, on définit le vecteur :

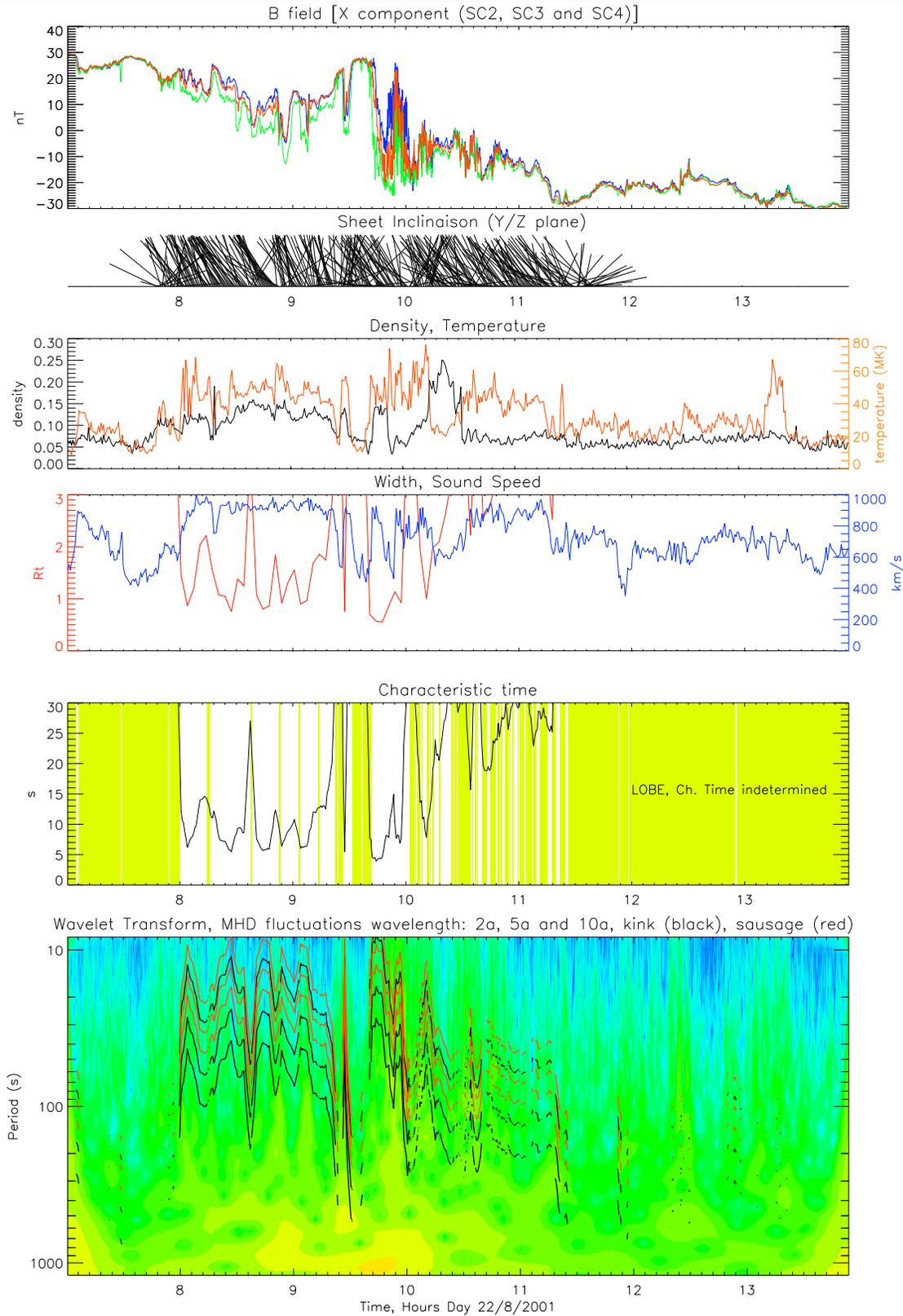
$$\mathbf{g} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\text{GSM}},$$

qui correspond au gradient du champ magnétique dans le repère GSM en supposant une variation linéaire du champ. En prenant le satellite 1 comme référence, on linéarise les expressions $B_1 - B_2$, $B_1 - B_3$ et $B_1 - B_4$, de telle sorte que l'on doit résoudre un système de trois équations du type :

$$B_1 - B_2 = g_X(X_1 - X_2) + g_Y(Y_1 - Y_2) + g_Z(Z_1 - Z_2).$$

On obtient ainsi le gradient du champ magnétique, en direction et en amplitude. Ce gradient est représenté sur le deuxième panneau de la figure 7.3. On remarque qu'en moyenne la normale à la couche est dirigée selon l'axe (OZ) mais que la couche subit un mouvement de "roulis" autour de l'axe (OX).

Fig. 7.3 De bas en haut : (1) champ magnétique B_x sur les trois satellites 2, 3, 4; (2) normale à la couche dans le plan (Y, Z) ; (3) densité et température, (4) demi-épaisseur a et vitesse du son v_s ; (5) temps caractéristique τ et (6) transformée en ondelettes du champ magnétique.



A l'aide du vecteur \mathbf{g} , on peut obtenir une première estimation de l'épaisseur caractéristique de la couche donnée par la formule :

$$a = \frac{B_e}{\|\mathbf{g}\|},$$

où B_e est le champ magnétique dans les lobes. Ce dernier se détermine par exemple entre 07h00 et 07h30 : il vaut 25 nT environ. L'épaisseur a est représentée en rouge sur la figure 7.3-4. Elle varie beaucoup en raison du calcul du gradient qui n'est pas fiable lorsque tous les satellites sont dans les lobes (avant 08h00 ou après 11h00). En effet, les quatre satellites mesurent alors à peu près le même champ et le gradient est quasiment nul. Le calcul est plus correct autour de 09h00 et de 10h00 et on peut estimer par cette méthode que l'épaisseur est comprise entre $0.5 R_T$ et $1 R_T$. Il est important de souligner qu'il s'agit d'une *première* détermination de a , réalisée en supposant une variation linéaire du champ magnétique dans la couche. Nous affinerons plus loin le calcul de a en modélisant la couche à l'équilibre par un profil de Harris. Nous obtiendrons alors une valeur plus faible $a \simeq 0.1 R_T$.

Par ailleurs, dans la partie théorique, nous avons défini l'échelle temporelle comme le rapport entre l'épaisseur de la couche a et la vitesse du son v_s . Ce paramètre constitue donc un temps caractéristique important pour la comparaison entre la théorie et les données CLUSTER. Nous venons de déterminer a . Il reste à évaluer la vitesse du son à partir de la température. En supposant le comportement du plasma analogue à celui d'un gaz parfait, la vitesse du son est donnée par $v_s = \sqrt{\gamma kT/m}$, où m est la masse des ions et k la constante de Boltzmann. La vitesse du son est représentée en bleu sur le même graphe que l'épaisseur. On peut considérer que sur la période intéressante (08h00-10h30), la vitesse du son est pratiquement constante, égale en moyenne à 800 km/s. Le temps caractéristique vaut donc $\tau = a/v_s$. Ses variations sont illustrées sur la figure 7.3-5. Comme il a été mentionné plus haut, la détermination de ce temps n'est pas valable dans les régions jaunes qui coïncide avec un passage du tétraèdre dans les lobes. De ce graphe, on peut conclure que le temps caractéristique de la MHD varie entre 4 et 12 s. Cette valeur sera plus faible en utilisant une couche de Harris (de l'ordre de 2 à 6 s). Par rapport aux valeurs considérées dans le modèle théorique (voir chapitre 5 : $a = 1 R_T$, $v_s = 400$ km/s et $\tau=16$ s), l'échelle de temps est nettement plus courte. Cela est dû au fait que la couche est plus fine et beaucoup plus chaude que ce qui avait été envisagé dans l'analyse théorique.

7.3 Périodes observées – Comparaison avec la théorie

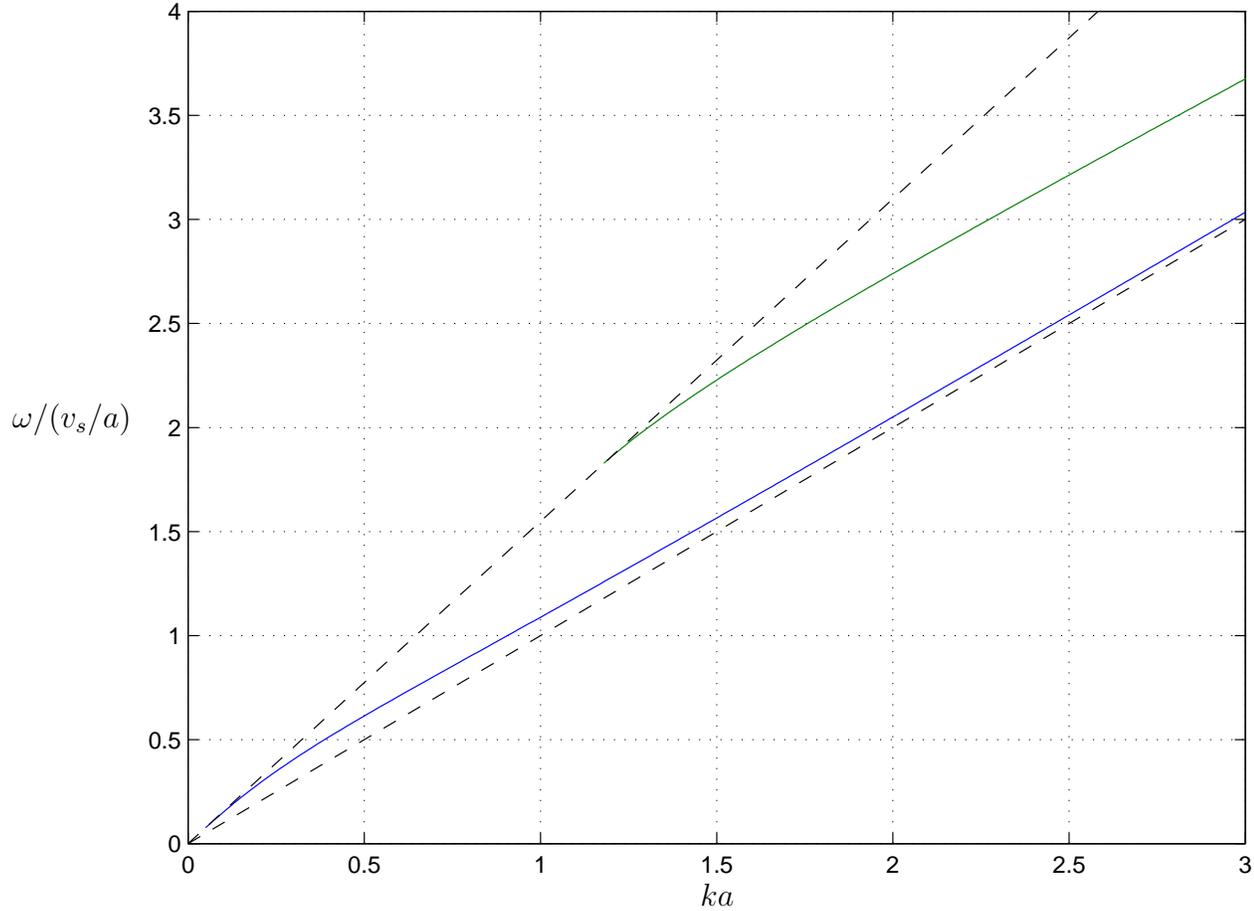
Pour déterminer les échelles de temps typiques caractérisant les oscillations observées entre 07h00 et 13h00, on utilise une transformée en ondelettes du champ magnétique B_x mesuré par le satellite 1. Le résultat apparaît sur le dernier panneau de la figure 7.3. Sur ce diagramme, on peut lire la période en ordonnées (directement en secondes) en fonction du temps. Le code de couleur indique le niveau des oscillations d'une certaine période à un moment donné présentes dans le signal total, le dégradé allant des couleurs froides (peu d'amplitude) aux couleurs chaudes (beaucoup d'amplitude). Nous constatons que les périodes principales des oscillations de la couche sont relativement élevées, de l'ordre de 100 à 1000 s, soit de 2 à 16 minutes. Pour savoir si ces oscillations peuvent s'interpréter dans le cadre de la magnétohydrodynamique, il est nécessaire de calculer les relations de dispersion $\omega = f(k)$ données par le modèle théorique. Néanmoins, le diagramme de dispersion proposé à la figure 5.2, page 57, ne correspond pas aux paramètres de la couche étudiée. Il repose en effet sur une demi-épaisseur de $1 R_T$ et un rapport de densité $\rho_{\text{couche neutre}}/\rho_{\text{lobes}}$ de 100. Or le panneau 7.1-2 indique que la densité des ions varie entre 0.05 cm^{-3} dans les lobes et 0.15 cm^{-3} au centre de la couche, c'est à dire qu'il est plus juste de considérer un rapport de densité voisin de 3 [†]

En suivant le raisonnement détaillé aux chapitres 4 et 5, les relations de dispersion pour le mode fondamental et le premier harmonique sont à nouveau calculées en tenant compte des valeurs observées pour les paramètres. La figure 7.4 illustre le résultat. L'axe des abscisses est le nombre d'onde normalisé à la demi-épaisseur a de la couche. L'axe des ordonnées est la pulsation normalisée à la pulsation caractéristique v_s/a . De ce diagramme, nous pouvons dresser le tableau suivant qui fournit pour quelques valeurs de longueurs d'onde, les périodes en unités de τ des modes MHD.

| Mode fondamental (kink) | | | | Premier harmonique (sausage) | | | |
|-------------------------|----------|------------|------------|------------------------------|-------------|-------------|-------|
| Longueur d'onde | $2a$ | $5a$ | $10a$ | Longueur d'onde | $2a$ | $5a$ | $10a$ |
| k | 3.14 | 1.26 | 0.63 | k | 3.14 | 1.26 | 0.63 |
| ω | 3.14 | 1.335 | 0.74 | ω | 3.8 | 1.94 | × |
| Période | 2τ | 4.7τ | 8.5τ | Période | 1.65τ | 3.24τ | × |

[†]Il s'avère en fait après une inspection plus précise que la densité de 0.15 cm^{-3} ne correspond pas à celle des lobes car les satellites CLUSTER sont plutôt dans la plasma sheet boundary layer. Néanmoins les fréquences propres des modes discrets dépendent peu du rapport de densité et l'étude suivante reste valable.

Fig. 7.4 Relations de dispersion pour le fondamental kink (bleu) et le premier harmonique sausage (vert). Les droites en pointillés correspondent à la vitesse du son et la vitesse d'Alfvén dans les lobes.



En prenant en compte la détermination du temps caractéristique τ (figure 7.3-5), on peut donc évaluer les périodes du mode fondamental et du premier harmonique pour les trois longueurs d'onde considérées. Le résultat est représenté en fonction du temps sur le même diagramme que la transformée en ondelettes (courbes noires pour le fondamental et rouges pour le premier harmonique). Notons que la courbe $10a$ correspond à des longueurs d'onde de $10R_T$. Etant donnée la position de CLUSTER à $18R_T$ de la Terre, nous considérerons que cette distance est une borne supérieure aux longueurs d'onde admissibles.

Nous avons déjà identifié deux plages de temps intéressantes pour étudier les oscillations magnétiques : entre 08h00 et 09h30 puis entre 09h45 et 10h45. D'après la figure 7.3, la première plage contient des oscillations de plus longue période que celle calculée par les modes MHD. Il existe pratiquement un facteur 10 entre ces

deux valeurs. En revanche, au cours de la seconde (09h45-10h45), on constate un bon accord entre les données expérimentales et les données théoriques pour des longueurs d'onde raisonnables, même si le niveau du signal reste modeste. La figure 7.5 est un agrandi de la figure 7.3 entre 09h00 et 11h00. La description des différents panneaux reste cependant inchangée.

En conclusion, la majeure partie des oscillations observées lors de cette traversée de la queue magnétosphérique possède des périodes bien plus longues que le temps caractéristique donné par la MHD. De telles oscillations ne peuvent donc pas s'interpréter comme des modes propres MHD de la couche. Pour retrouver de telles périodes, il faudrait augmenter la longueur d'onde jusqu'à 20 rayons terrestres environ, c'est à dire la distance séparant les satellites CLUSTER de la Terre ... ce ne serait pas raisonnable physiquement ! Ces oscillations sont davantage la conséquence d'une évolution quasistatique de la couche soumise à de lentes variations des conditions aux limites. Par contre, lors du sous-orage ou immédiatement après (période 2), des oscillations de plus courte période sont observées. Elles peuvent donc être interprétées comme des modes kink ou sausage de la MHD avec un longueur d'onde typique de $5a$.

7.4 Identification des modes d'oscillation

Nous nous intéressons maintenant uniquement à la période 2 s'écoulant de 09h45 à 10h45. La figure 7.6 présente un certain nombre de grandeurs physiques que nous allons détailler. Le troisième panneau illustre l'évolution de la pression totale dans la couche (somme des pressions thermique mesurée par CIS, et magnétique calculée à partir des données FGM). On constate que cette pression est relativement constante au cours de la période considérée. Elle fluctue légèrement autour de $2,5 \cdot 10^{-10}$ Pa. La pression totale est en outre égale à la pression magnétique dans les lobes (on peut en effet y négliger la pression thermique). Le satellite 3 situé bien en dessous des trois autres effectue une excursion dans le lobe sud entre 09h50 et 09h53 (cf. figure 7.6-1). Il mesure alors un champ magnétique de 25 nT environ ; on en déduit la pression magnétique dans les lobes : $P_{me} = B_e^2 / (2\mu_0) = 2,5 \cdot 10^{-10}$ Pa, compatible avec la pression totale. De plus, la température du plasma donnée par la figure 7.5-2 demeure en moyenne constante entre 09h40 et 10h00. Ce calcul montre donc que la queue magnétosphérique à l'équilibre suit assez bien un modèle de Harris isotherme, tel celui utilisé dans les chapitres théoriques. La nullité de la composante transversale

Fig. 7.5 Zoom de la figure 7.3 sur la période 09h00-11h00. Les fluctuations pouvant s'interpréter comme des modes MHD sont observées entre 09h40 et 10h10.

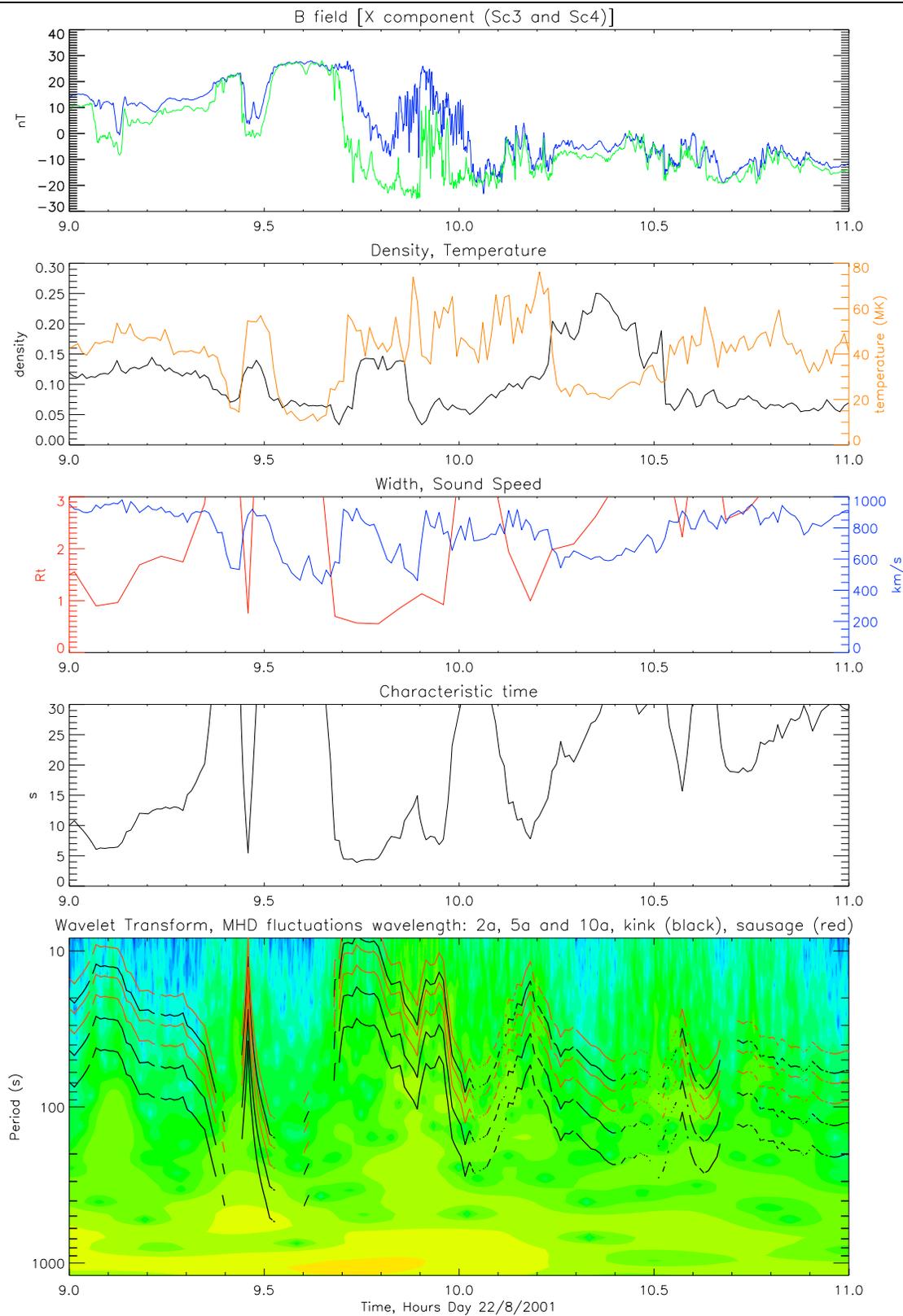
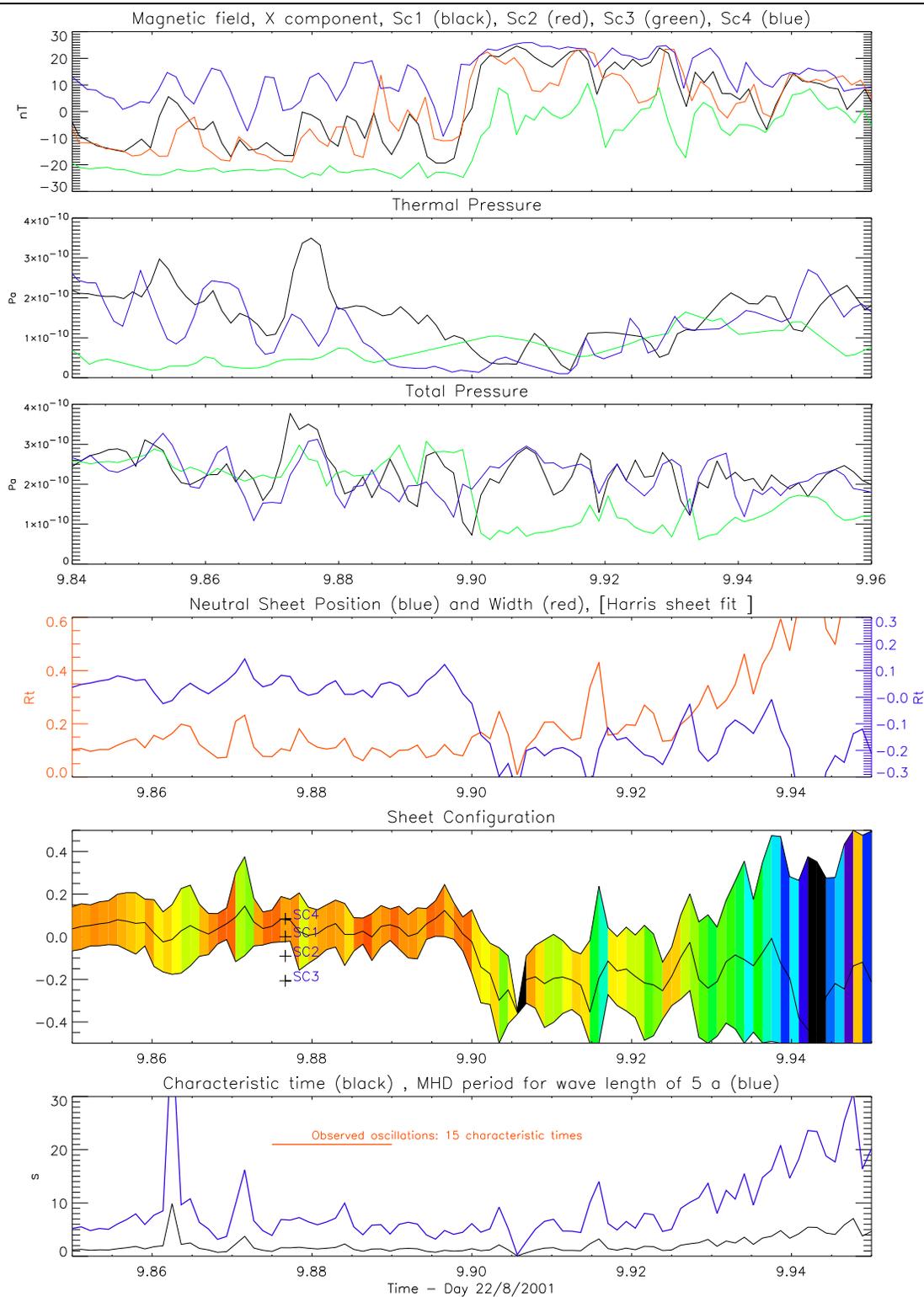


Fig. 7.6 Identification des modes : de haut en bas : (1) composante B_x du champ magnétique vue par les quatre satellites ; (2) Pression thermique mesurée par CIS ; (3) Pression totale (thermique + magnétique) ; (4) Position de la couche neutre et épaisseur de la couche modélisée par un profil de Harris ; (5) Reconstruction de la couche ; (6) Temps caractéristique et période des ondes MHD associée à une longueur d'onde de $5a$.



B_z est un autre argument en faveur de cette hypothèse.

Nous avons, dans un premier temps, modélisé la couche de plasma à l'aide d'un gradient linéaire (paragraphe 7.2). Un profil de Harris s'avère cependant plus proche de la réalité, il permet en outre de mieux prendre en compte la transition entre la couche neutre où le champ magnétique varie linéairement, et les lobes où le champ est constant. Ainsi, nous reprenons la modélisation de la couche de plasma en posant pour le champ magnétique :

$$B_x(h) = B_e \tanh\left(\frac{h - z_0}{a}\right),$$

avec $B_e = 25$ nT, champ magnétique dans les lobes, a demi-épaisseur caractéristique de la couche, z_0 position de la couche neutre et origine de l'axe (Oz) et $h = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{g}}$ position des divers satellites corrigée de la torsion de la couche. A l'aide des champs mesurés par les satellites 1, 3 et 4, on détermine les paramètres inconnus z_0 et a . Le résultat est présenté sur la figure 7.6-4. On constate que la valeur de a est plus faible (de l'ordre de $0.1 R_T$) que dans le cas du gradient linéaire. Sur le panneau suivant, on reconstruit la couche de plasma : la ligne noire centrale correspond à la ligne neutre ($z = z_0$) et les lignes supérieures et inférieures aux extrémités de la couche ($z = z_0 \pm a$). Nous disposons donc d'une visualisation directe de l'évolution au cours du temps de la position de la couche neutre ainsi que de son épaisseur. Nous observons que les fluctuations de la couche entre 09.87 et 09.90 sont dominées par des oscillations de type kink avec une amplitude typique de $0.07 R_T$ et une période de 20 secondes. Ce constat est corroboré par l'évolution temporelle des champs magnétiques vus par les satellites 1 et 4 qui se trouvent de part et d'autre de la couche neutre. Les deux champs oscillent globalement en phase, impliquant donc une structure paire du mode dans la direction normale à la couche. Nous remarquons cependant quelques fluctuations de fréquences plus élevées interprétables en termes de mode "sausage".

Par ailleurs, la demi-épaisseur de la couche vaut environ $a = 0.1 R_T$ (figure 7.6-4) et la vitesse du son chute juste avant le sous-orage à la valeur $v_s = 500$ km/s (figure 7.5-3 à 09.90). On en déduit le temps caractéristique $\tau = a/v_s = 1.28$ s. Ainsi, les oscillations observées ont une période égale à 15.7τ . On peut alors évaluer la longueur d'onde de ces perturbations en reportant cette valeur sur le diagramme 7.4. La pulsation valant $\omega = 2\pi/\text{periode} = 0.4\tau^{-1}$, le nombre d'onde correspondant pour le mode fondamental est très proche de $0.3a^{-1}$, ce qui se traduit par une longueur d'onde de $21a = 2.1 R_T$.

Il semble donc que ces oscillations du champ magnétique peuvent s'interpréter

comme la propagation du mode propre fondamental de la queue magnétosphérique modélisée par une couche de Harris. Il est alors intéressant de poursuivre la comparaison entre la théorie et les données expérimentales. En effet, nous n'avons pas encore identifié l'origine de ces fluctuations. Dans la partie théorique, nous avons considéré un pulse de pression thermique d'origine extérieure à la physique de la couche comme excitateur des modes propres de la queue. Peut-on mettre en évidence un tel excitateur dans le cas du 22 août ?

7.5 Origine des perturbations

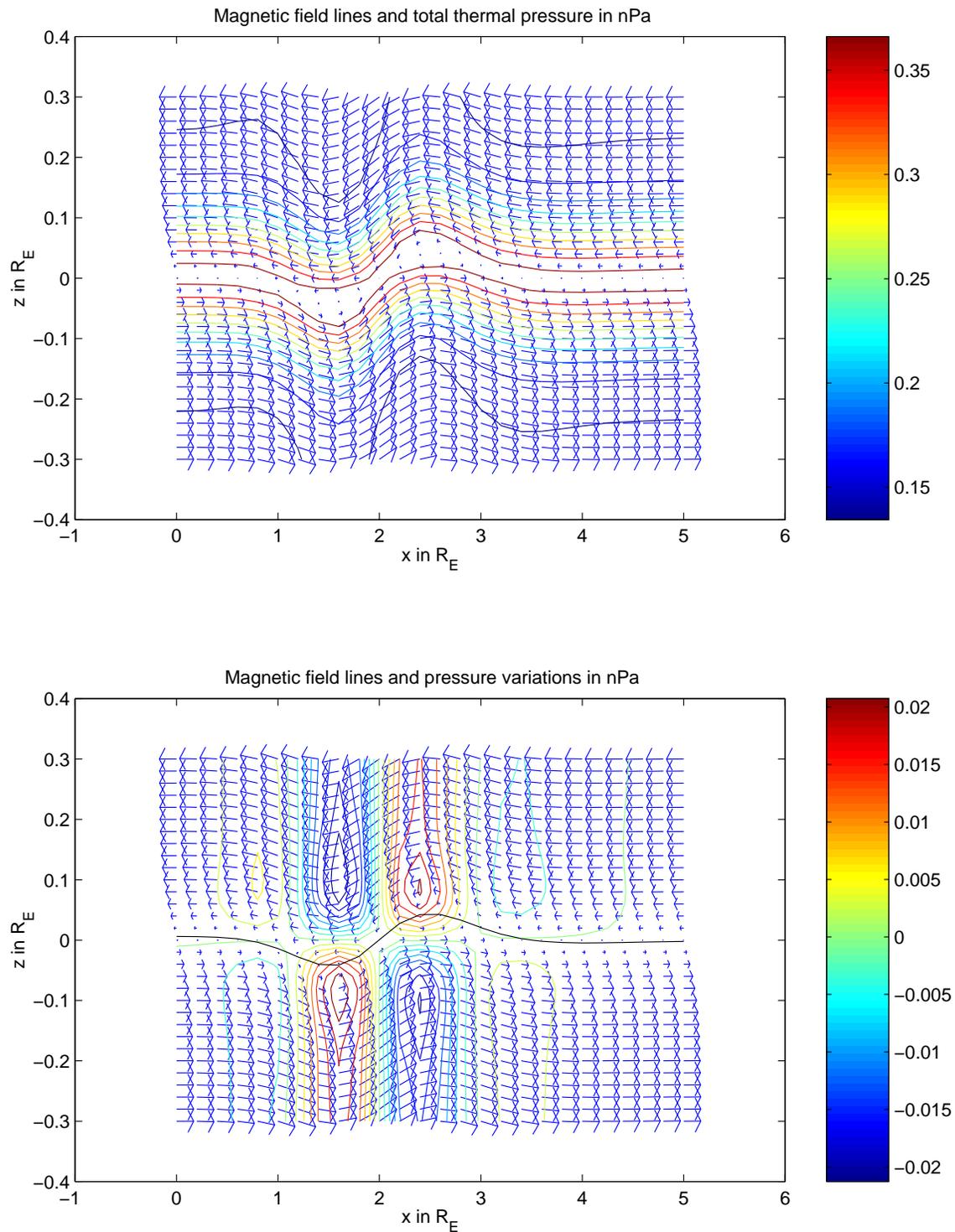
Grâce au modèle théorique développé dans cette thèse, nous pouvons reconstruire les perturbations magnétiques de la couche de courant générées par un pulse de pression d'origine extérieure. Il faut simplement adapter les valeurs des paramètres de la couche à celles observées par CLUSTER. Nous savons que pour exciter le mode fondamental dont la structure en z est paire, il faut un pulse de pression excentré par rapport à la couche neutre (cf. discussion au paragraphe 5.4.5 à la page 75). On choisit donc un excitateur de la forme :

$$P_{ext}(t, x, z) = P_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2L_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(z - z_0)^2}{2L_z^2}\right) \frac{t}{T_0} \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right),$$

où $L_x = 4a$, $L_z = 3a$, $z_0 = a$, $T_0 = 4\tau$ et $P_0 = P_{me}$, pression magnétique dans les lobes. Ces valeurs de paramètres ont été choisies pour maximiser le couplage entre l'excitateur et le mode propre fondamental.

La figure 7.7 représente à la fois le spectre magnétique (champ à l'équilibre et champ perturbé) et les isocontours de la pression thermique. Sur le premier panneau, il s'agit de la pression thermique totale (équilibre + perturbations), alors que sur le panneau du bas, seules les perturbations de la pression thermique sont représentées. Le code couleur situé à droite indique les valeurs des pressions en nPa – compte tenu du fait que la pression magnétique dans les lobes vaut 0.25 nPa. Nous observons bien une structure topologique de type kink. Néanmoins, les perturbations ont été multipliées artificiellement par un facteur 30 avant de les ajouter aux grandeurs d'équilibre afin de rendre la figure visible. Cela signifie également que les amplitudes des perturbations initiées par un pulse gaussien de pression sont très faibles et ne rendent pas compte de la réalité vue par CLUSTER. On évalue ces amplitudes à $0.0036 B_e = 0.09$ nT pour le champ magnétique et à $0.013 P_{tot} = 3.2$ pPa pour la pression thermique. En revanche, lorsqu'on multiplie les grandeurs perturbées par 30 – ce qui revient à prendre un pulse gaussien 30 fois plus intense –, on retrouve l'ordre

Fig. 7.7 Reconstruction de la couche de plasma pour les paramètres indiqués dans le texte. Les flèches bleues représentent le spectre du champ magnétique total. Les isocontours correspondent à la pression thermique totale en haut et à la pression thermique perturbée en bas.

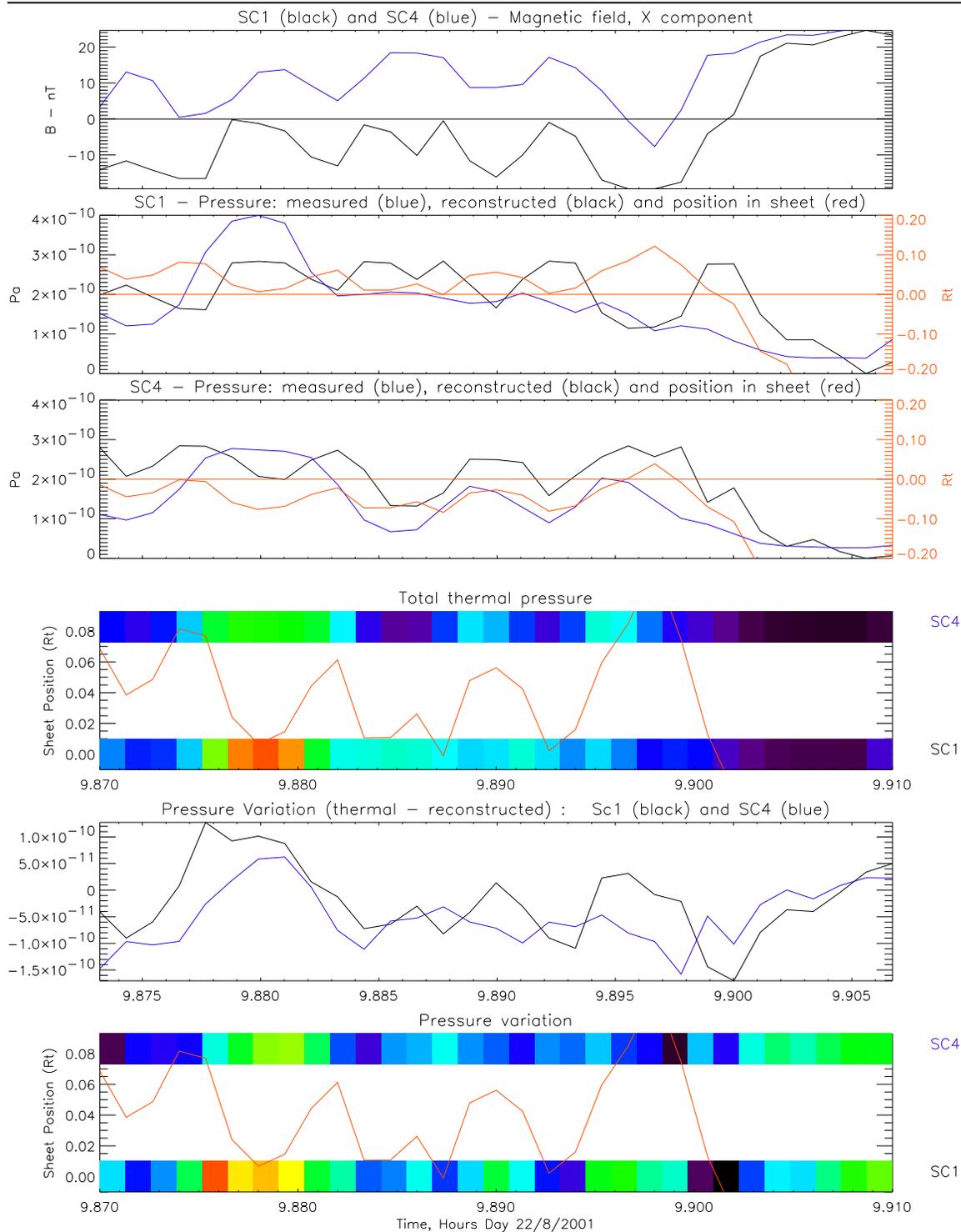


de grandeur des fluctuations magnétiques et thermiques observées par CLUSTER. De plus, les perturbations résultant d'une excitation par un simple pulse gaussien correspondent à une unique oscillation de la couche et non à un train d'ondes, tel celui observé par CLUSTER.

Ainsi, le modèle théorique de la MHD explique bien les rapports entre les amplitudes des différentes grandeurs physiques, de même que les périodes observées. Par contre, il ne permet pas de retrouver le niveau des fluctuations (en grandeur absolue) ainsi que la nature du train d'ondes observé. Il s'avère donc difficile d'interpréter les fluctuations expérimentales comme des oscillations propres de la couche de plasma initiées par un pulse gaussien de pression et un autre type d'excitateur (porté par exemple sur le champ magnétique ou le courant électrique) doit être envisagé.

Cependant, nous pouvons poursuivre l'analyse de cet événement particulier afin d'identifier l'origine des fluctuations. La figure 7.8 se focalise essentiellement sur les perturbations de la pression thermique. Le panneau 1 rappelle le champ magnétique vu par les satellites 1 et 4. Les panneaux 2 et 3 présentent simultanément pour les satellites 1 et 4 la pression thermique mesurée (en bleu), les fluctuations de pression (en noir) et la position du satellite dans le repère lié à la couche. Les fluctuations de pression ne sont pas directement accessibles avec les instruments à bord ; il faut les calculer en retranchant à la pression thermique mesurée la pression d'équilibre. Cette dernière est simplement la pression du modèle de Harris à la position du satellite. Les panneaux 4 et 6 nous informent à la fois sur la position de la couche neutre et sur les variations de la pression totale (panneau 4) ou des fluctuations de pression (panneau 6). Le code de couleur employé a la même signification que précédemment : les couleurs froides correspondent à un minimum de pression alors que les couleurs chaudes sont associées à un maximum de pression. L'intérêt de ces deux graphes est de pouvoir faire la différence entre des compressions auto-consistantes liées à la physique propre de la couche, et des fluctuations de pressions liées à des variations extérieures des conditions aux limites. En effet, lorsqu'il s'agit de la propagation d'un mode propre, les zones de compression (en rouge sur la figure 7.7) se situent en avant des perturbations. En d'autres termes, le déplacement de la couche a tendance à comprimer le plasma situé en avant et à détendre le plasma situé en arrière. Nous voyons l'inverse sur la figure 7.8-6. Il semble que la couche de plasma réagit aux différences de pression mesurées par les satellites 1 et 4. Par exemple, vers 9.90 h, le satellite 1, situé en dessous, observe une compression du plasma, alors que le satellite 4, situé au-dessus, détecte une diminution de la pression. Simultanément, la couche neutre

Fig. 7.8 Fluctuations de pression : de haut en bas : (1) champ magnétique, (2) et (3) pression mesurée en bleu, fluctuation de pression en noir et position de la couche neutre en rouge pour les satellites 1 et 4, (4) position de la couche neutre et variations de la pression totale, (5) fluctuations de pression, (6) position de la couche neutre et fluctuations de pression thermique.



remonte. Ainsi, nous observons davantage la réaction de la couche à des perturbations de pression d'origine extérieure que des compressions compatibles avec la propagation d'un mode propre.

Pour conclure cette étude qui se veut préliminaire, nous pouvons dire que les oscillations observées par CLUSTER le 22 août 2001 vers 10 h correspondent à l'excitation résonante de la couche de plasma par des perturbations d'origine extérieure, le tétraèdre se situant dans la région d'excitation elle-même. Autrement dit, elles ne correspondent pas à la propagation d'un mode propre MHD qui aurait été excité par un simple pulse de pression comme envisagé dans la partie théorique. Nous sommes peut-être en présence d'une excitation résonante de la couche de plasma à une fréquence particulièrement bien adaptée, puisque correspondant à la propagation des modes propres MHD les plus facilement excités par des variations de pression. La nature précise de l'excitateur reste à être identifiée. En particulier, ces fluctuations ont certainement un lien avec le sous-orage qui apparaît vers 09h40. Cette observation et l'interprétation que nous en donnons doivent toutefois être confirmées par d'autres exemples. Cependant, le point important qui apparaît ici est que les oscillations de type MHD semblent effectivement pouvoir se propager dans la couche de plasma. La chose n'est pas étonnante en soi, sauf si l'on analyse de plus près les paramètres de la couche. Son épaisseur (ici $0.1R_T$) est en effet de l'ordre de grandeur du rayon de Larmor des ions thermiques constitutifs de la couche. Le fait que l'échelle de non homogénéité soit de l'ordre des échelles cinétiques ne plaide pas en la faveur d'une application de la MHD. Des phénomènes plus complexes doivent donc rendre possible l'application de ce modèle. On peut imaginer par exemple qu'une chaotisation des trajectoires des particules s'opère dans cette couche fine et perturbée, impliquant des mouvements désordonnés analogues à ceux résultant de collisions. L'analyse des perturbations linéaires de la couche et la comparaison avec le modèle permettraient donc un véritable sondage des caractéristiques de la couche et aideraient à l'identification des systèmes d'équations nécessaires à sa description.

Chapitre 8

Conclusion

Les couches frontières de la magnétosphère terrestre ou de la couronne solaire sont des systèmes complexes et hautement dynamiques. De nombreuses oscillations basse fréquence y ont été observées depuis le début de l'exploration spatiale. L'interprétation physique de ces perturbations par un modèle théorique auto-consistant constitue un des problèmes importants de la physique spatiale auquel cette thèse tente de répondre. Ce mémoire s'organise essentiellement autour de l'étude de la réponse linéaire d'une couche de courant à une perturbation extérieure dans l'approximation de la magnétohydrodynamique idéale. Les équations de la MHD correspondent à une représentation très simplifiée de la réalité, mais elles constituent une première analyse du problème qui pourra toujours être affiné par la suite. L'objectif est ici de proposer un modèle simple pour :

1. décrire la propagation des modes propres d'une couche de courant non homogène et limitée dans l'espace,
2. reconstruire les perturbations spatio-temporelles initiées par un excitateur et étudier leur couplage,
3. évaluer les transferts d'énergie qui en résultent.

Si certains auteurs se sont attachés à décrire les différents modes, discrets ou continus, pouvant exister dans de telles structures, personne à notre connaissance n'a fait l'effort de poursuivre jusqu'au bout le raisonnement pour obtenir les fluctuations dans l'espace réel. Or cette dernière étape, qui est un apport important de ce mémoire, s'avère en outre indispensable depuis le succès de la mission CLUSTER. Grâce à la présence simultanée de quatre satellites dans l'environnement terrestre, nous disposons maintenant d'une vision tridimensionnelle des phénomènes physiques affectant la magnétosphère. La reconstruction complète du signal permet alors d'interpréter correctement les données CLUSTER, car elle fournit les amplitudes des diverses fluc-

tuations ainsi que les transferts d'énergie de l'antenne vers le milieu propagatif. Cela permet également de valider ou d'infirmer le modèle de description choisi (MHD ou théorie cinétique).

Le problème de la réponse d'un système à un exciteur nécessite cependant la mise en œuvre de techniques mathématiques, certes classiques, mais rarement complètement exploitées dans notre domaine : transformées de Laplace et de Fourier, fonction de Green et inversion des transformées à l'aide d'intégrales dans le plan complexe. Ces outils ont été détaillés au chapitre 4 et dans les annexes B et C. La méthode proposée dans cette thèse se veut néanmoins très générale et peut servir de base pour d'autres études similaires. Nous rappelons brièvement les différentes étapes du raisonnement. Après avoir précisé un modèle d'équilibre pour la couche de courant (le modèle de la couche de Harris isotherme), ainsi que les conditions aux limites, nous avons linéarisé les équations de la MHD idéale et effectué sur les grandeurs une transformée de Laplace en temps et une transformée de Fourier dans l'espace. La transformée de Laplace est ici un outil essentiel, car d'une part elle respecte la causalité du problème, et d'autre part elle permet de contourner les difficultés mathématiques apportées par les points singuliers. Nous aboutissons alors, en raison de la non homogénéité du milieu, à une équation différentielle du second ordre portant sur la composante transversale du déplacement, et qui constitue la pierre angulaire de notre travail. L'étape suivante consiste en l'introduction de la fonction de Green du problème qui représente la réponse impulsionnelle du système. La fonction de Green est alors multipliée par la fonction source (dans notre cas un pulse de pression thermique), avant d'inverser les transformées de Laplace et de Fourier en intégrant le déplacement sur un contour du plan ω -complexe qui contourne toutes les singularités de l'intégrand. Ces singularités se distinguent mathématiquement en deux catégories : les pôles et les lignes de branchement. L'interprétation physique de ces points singuliers est également différente : les pôles correspondent aux modes globaux du système, alors que les lignes de branchements, liées à un continuum de fréquences propres, conduisent au phénomène d'absorption résonante.

Pour mieux appréhender le processus d'absorption résonante, le chapitre 3 propose l'étude complète de la réponse d'un condensateur rempli d'un diélectrique non homogène à une excitation de courant. Bien que cette étude ait apparemment peu de lien avec la physique des plasmas spatiaux, elle nous a néanmoins permis d'éclairer les méthodes mathématiques utilisées dans la suite du mémoire ainsi que les phénomènes physiques mis en jeu. En effet cet exemple a l'avantage d'être soluble analytiquement

jusqu'au bout. Nous avons remarqué que lorsque le condensateur est alimenté par un courant sinusoïdal à la fréquence ω_0 , il existe un transfert unilatéral d'énergie du générateur vers le condensateur, bien que le diélectrique non collisionnel ne recèle aucune source de dissipation d'énergie. Cette apparente contradiction a été résolue en mettant en évidence une zone du diélectrique de plus en plus étroite au cours du temps, dans laquelle les oscillations du champ électrique ont une amplitude croissante dans le temps. Cette région résonante correspond à l'identité $\omega_0 = \omega_p(z)$, où $\omega_p(z)$ est la fréquence plasma locale. Contrairement au condensateur à vide, le condensateur à diélectrique non homogène ne restitue pas au générateur toute l'énergie qu'il reçoit ; il l'accumule et la concentre en partie dans une région de plus en plus petite autour du point résonant. C'est là une des caractéristiques principales du phénomène d'absorption résonante. Ce faisant, en formant de petites échelles spatiales, le processus d'absorption résonante peut créer des conditions favorables à un réel transfert d'énergie vers le plasma. En effet, les conditions d'idéalité (plasma non collisionnel) peuvent ne plus être valables dans ces régions de forte densité d'énergie et des processus dissipatifs peuvent alors apparaître. On s'attend donc à ce que ces zones de résonance soient les lieux privilégiés pour une absorption effective d'énergie.

Revenant à la physique spatiale, nous nous sommes ensuite concentrés sur la réponse de la queue magnétosphérique terrestre à un pulse de pression thermique dont l'origine n'est pas décrite par les équations de la MHD et qui constitue l'antenne excitatrice du problème. La structure nord-sud de la queue est modélisée par un profil de Harris qui est une solution d'équilibre 1-D du système, exacte autant en MHD qu'en théorie cinétique. Ce profil tient compte de l'annulation du champ magnétique sur la couche neutre et de son renversement d'un lobe à l'autre. Nous nous sommes restreints aux perturbations bidimensionnelles de cette couche de Harris. L'étude est divisée en deux parties. Dans le chapitre 5, nous nous sommes intéressés aux modes globaux de la queue et au couplage entre ces modes et l'excitateur. En revanche, au chapitre 6, l'analyse s'est concentrée sur les modes continus de la queue et le phénomène d'absorption résonante. Ces deux parties se complètent et offrent une vue globale de la propagation des ondes magnétohydrodynamiques dans les plasmas non homogènes structurés par un champ magnétique de type Harris. D'autre part, ce travail fait l'objet des deux articles joints en annexe parus dans le JGR en novembre 2002.

Concernant les modes globaux de la queue magnétosphérique, nous avons calculé numériquement les relations de dispersion avec des paramètres raisonnables pour

la couche – demi-épaisseur de $1R_T = 6400$ km, vitesse du son de 400 km/s et rapport de densité entre la couche neutre et les lobes de 100. Les modes globaux se distinguent par leur structure spatiale dans la direction (Oz) de non homogénéité. Certains modes sont pairs (dont le fondamental) et conduisent à une topologie magnétique de type kink. D'autres au contraire sont impairs et correspondent à une topologie de type sausage. Nous avons constaté que le premier harmonique correspond à une valeur plutôt élevée de la fréquence, de l'ordre de 20 mHz, c'est à dire à des oscillations de période d'environ une minute. Le mode fondamental possède des périodes plus longues atteignant plusieurs minutes. Naturellement, les paramètres de la couche peuvent être ajustés pour expliquer des perturbations de périodes encore plus longues. Cependant, il semble clair qu'avec les paramètres choisis, une forme raisonnable d'excitateur et des longueurs d'onde acceptables, des périodes supérieures à 10 minutes ne peuvent pas s'interpréter dans le cadre de la magnétohydrodynamique linéaire. Par ailleurs nous avons considéré deux cas d'excitateurs. Tous les deux sont des pulses gaussiens de pression, mais le premier est centré sur la couche neutre, alors que le deuxième est excentré. Dans le premier cas, seuls les harmoniques impairs sont excités et le premier harmonique occupe une part largement prédominante. En revanche, dans le second cas, tous les harmoniques sont excités, en particulier le fondamental, ce qui permet d'obtenir des oscillations de plus longue période et une topologie du champ magnétique plus complexe. De manière générale, nous avons montré que la réponse de la queue à un pulse gaussien peut se diviser en deux parties : un signal quasi-monochromatique de longueur d'onde plutôt élevée ($\sim 40R_T$) se propage rapidement à la vitesse d'Alfvén dans les lobes $v_e \simeq 4500$ km/s ; il est suivi par un paquet d'ondes formé de longueurs d'onde plus courtes (quelques R_T) et se propageant au minimum de la vitesse de groupe, c'est à dire environ à 0.8 fois la vitesse du son. Toutefois, ce résultat dépend de la géométrie de l'excitateur. L'étude du couplage entre le pulse gaussien et les modes propres révèle qu'un pulse dont la taille caractéristique est très supérieure aux dimensions de la couche se connecte sur une petite plage de longueurs d'onde de l'ordre de plusieurs dizaines de rayons. Nous n'observons alors qu'une ondulation monochromatique de la couche avec une forte dispersion du pulse initial. En revanche, lorsque le pulse excitateur a des dimensions de l'ordre de celles de la couche, le signal s'enrichit en longueurs d'onde plus courtes et la dispersion du paquet d'ondes est moins accentuée, mais l'amplitude du signal est plus faible. Plus généralement, nous pouvons remarquer, que dans tous les cas de figure, l'amplitude des fluctuations émises reste extrêmement modeste comparée à l'intensité du pulse initial. En d'autres

termes, le couplage entre un pulse de pression thermique et les modes discrets de la MHD est plutôt faible. Typiquement, les déplacements atteignent quelques centaines de kilomètres et les fluctuations du champ magnétique et de pression sont de l'ordre de quelques pour cent des champs à l'équilibre.

L'étude de la réponse de la queue magnétique est complétée dans le chapitre 6 dédié aux modes continus. La non homogénéité de la vitesse d'Alfvén dans le milieu fait apparaître un continuum de fréquences cusp analogue à celui du condensateur examiné au chapitre 3. Les signaux se propageant dans un tel domaine de fréquence décroissent au cours du temps par suite du phénomène d'absorption résonante. Notre objectif dans cette partie est double :

1. estimer les échelles typiques spatiale et temporelle du processus d'absorption,
2. évaluer la quantité d'énergie qu'un pulse de pression est capable de transférer à la couche de plasma.

En ce qui concerne le premier point, le calcul théorique prévoit un comportement asymptotique en $1/t$ pour la décroissance temporelle des perturbations. Ce résultat théorique a été confirmé par notre calcul numérique qui se trouve ainsi validé. En revanche, le calcul théorique ne nous donne aucune information sur l'évolution initiale du signal. Le calcul numérique présenté dans ce mémoire comble cette lacune. En effet, nous avons vu que l'efficacité du processus dépend fortement de la position dans la couche et de la longueur d'onde. Dans le cas d'un pulse initial formé de courtes longueurs d'onde, il existe une nette différence dans l'absorption du signal selon la position dans la couche. Au voisinage de la couche neutre $z = 0$, le processus d'absorption est très efficace. Nous avons vu que dans ce cas 80% de l'énergie initiale disparaît au bout de 4 minutes. En revanche, plus loin dans les lobes, le signal décroît beaucoup plus lentement, sur une échelle temporelle de l'ordre de la demi-heure. On s'attend donc à observer des fluctuations sur les bords de la couche et un chauffage plus localisé du plasma au centre. Dans le cas d'un pulse gaussien de grande extension spatiale, le processus d'absorption est davantage uniforme dans la couche. On a noté que, dans ce cas, il faut environ 8 minutes pour absorber 80% de l'énergie initialement déposée. Ainsi, au centre de la couche, le processus d'absorption est moins efficace avec un exciteur de grande extension spatiale. Plus précisément, nous pouvons conclure que si l'échelle spatiale caractéristique ΔL du pulse initial est de l'ordre de l'épaisseur de la couche a , les perturbations sont rapidement absorbées au centre de la couche et persistent plus longtemps sur les bords. La conversion d'énergie s'effectue sur une distance moyenne de l'ordre de 20 rayons terrestres. Par contre, si l'exciteur

possède une extension spatiale supérieure à l'épaisseur de la couche, les perturbations décroissent beaucoup plus lentement dans le temps et de manière uniforme dans la couche.

Concernant la quantité d'énergie transférée au plasma, nous avons remarqué que le couplage entre le pulse initial et la couche de plasma était extrêmement faible dans le domaine des grandes longueurs d'onde. L'amplitude des fluctuations atteint difficilement 0.1% de la valeur des grandeurs à l'équilibre pour un pulse de pression dont l'amplitude est égale à la pression magnétique dans les lobes. Le transfert d'énergie qui en résulte est totalement négligeable. En revanche, avec un exciteur formé de longueurs d'onde plus courtes, de l'ordre de l'épaisseur de la couche, le transfert d'énergie est beaucoup plus efficace. Nous avons estimé que l'énergie thermique du plasma pouvait augmenter d'environ 10% sur une distance de l'ordre de 20 rayons terrestres. Ce résultat doit donc pouvoir être mesurable sur les données expérimentales.

La dernière partie de ce mémoire propose une application du modèle présenté dans les chapitres précédents à l'analyse d'un événement CLUSTER. Lors du passage du tétraèdre dans la queue magnétique proche le 22 août 2001, nous avons observé un certain nombre d'oscillations basse fréquence du champ magnétique. Grâce au modèle théorique, nous avons pu prédire les périodes caractéristiques des fluctuations MHD que l'on peut attendre dans une telle couche de courant et les comparer aux données. Ainsi le modèle théorique permet une première classification des diverses fluctuations observées. Nous pouvons maintenant distinguer les oscillations qui relèvent d'une description MHD et celles qui requièrent un modèle plus perfectionné. Dans le cas présent, nous avons isolé une courte période durant laquelle les oscillations possèdent des fréquences compatibles avec celles du modèle MHD. Afin de mettre en évidence un éventuel mode propre de la couche, nous avons poursuivi l'analyse en reconstruisant la couche de plasma à partir des mesures de CLUSTER. Les fluctuations observées s'apparentent à un mode de type kink dont la période est cohérente avec celle du mode fondamental pour une longueur d'onde de quelques rayons terrestres. Cependant, l'étude des pressions nous a montré qu'il s'agit davantage de l'excitation résonante de la couche à des perturbations de pression d'origine extérieure que la propagation d'un mode propre du système. Toutefois, cette étude permet de préciser le type de modèle (MHD, bifluide ou théorie cinétique) le mieux adapté pour décrire la physique de la couche, ce qui constitue un point potentiellement important.

Ainsi, un travail notable d'analyse des données CLUSTER est encore à réaliser pour mettre en évidence la propagation des modes propres globaux de la queue magnétosphérique terrestre. De même, il serait intéressant de pouvoir identifier les modes continus qui se propagent à la vitesse cusp et d'en étudier les conséquences sur la dynamique des particules. En outre, les données CLUSTER permettront à l'avenir de contraindre davantage le modèle théorique qui pourra faire l'objet de nombreux raffinements.

Bibliographie

- ABRAMOWITZ M. et STEGUN I.A., éditeurs, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, 1970.
- ALLAN W., POULTER S.P. et WHITE E.M., Hydromagnetic wave coupling in the magnetosphere – Plasmapause effects on impulse-excited resonances, *Planet. Space Sci.*, **34** : 1189, 1986a.
- ALLAN W., WHITE E.M. et POULTER S.P., Impulse-excited hydromagnetic cavity and field-line resonances in the magnetosphere, *Planet. Space Sci.*, **34** : 371, 1986b.
- ALLAN W. et WRIGHT A.N., Hydromagnetic wave propagation and coupling in a magnetotail waveguide, *J. Geophys. Res.*, **103** : 2359, 1998.
- ALLAN W. et WRIGHT A.N., Magnetotail waveguide : Fast and Alfvén waves in the plasma sheet boundary layer and lobe, *J. Geophys. Res.*, **105** : 317, 2000.
- ATHAY R.G. et WHITE O.R., Chromospheric and coronal heating by sound waves, *Astrophys. J.*, **226** : 1135, 1978.
- BERGHMANS D., DE BRUYNE P. et GOOSSENS M., The Footpoint-driven Coronal Sausage Wave, *Astrophys. Journal*, **472** : 398, 1996.
- CALLY P.S., Phase-mixing and surface waves : a new interpretation, *J. Plasma Physics*, **45** : 453, 1991.
- CHEN L. et HASEGAWA A., A Theory of long-period magnetic pulsations. 1. Steady state excitation of field line resonance, *J. Geophys. Res.*, **79** : 1024, 1974a.
- CHEN L. et HASEGAWA A., A Theory of long-period magnetic pulsations. 2. Impulse excitation of surface eigenmode, *J. Geophys. Res.*, **79** : 1033, 1974b.
- CRAVENS T.E., *Physics of solar system plasmas*, Cambridge University Press, 1997.
- CRAWFORD F.W. et HARKER K.J., Energy absorption in cold inhomogeneous plasmas : the Herolfson paradox, *J. Plasma Physics*, **8** : 261, 1972.
- DE GROOF A., PAES K. et GOOSSENS M., Fast and Alfvén waves driven by azimuthal footpoint motions. I. Periodic driver, *Astronom. Astrophys.*, **386** : 681, 2002a.
- DE GROOF A., PAES K. et GOOSSENS M., Fast and Alfvén waves driven by azimuthal footpoint motions. II. Random driver, *Astronom. Astrophys.*, **386** : 691, 2002b.

- DUNGEY J.W., The propagation of Alfvén waves through the ionosphere, *Pennsylvania state university Ionosphere Research Laboratory Report 69*, **69** : 180, 1954.
- HARRIS E.G., On a plasma sheath separating region of oppositely directed magnetic field, *Nuovo Cimento*, **23** : 115, 1962.
- HEYVAERTS J. et PRIEST E.R., Coronal heating by phase-mixed shear Alfvén waves, *Astronom. Astrophys.*, **117** : 220, 1983.
- HOLLWEG J.V., Resonances of coronal loops, *Astrophys. J.*, **277** : 392, 1984.
- HOLLWEG J.V., Resonance absorption of magnetohydrodynamic surface waves : viscous effects, *Astrophys. J.*, **320** : 875, 1987.
- HUNDHAUSEN A.J., The Solar Wind, dans *Introduction to Space Physics*, édité par M.G. KIVELSON et C.T. RUSSELL, chap. 4, Cambridge University Press, 1995.
- IONSON J.A., Resonant absorption of Alfvénic surface waves and the heating of solar coronal loops, *Astrophys. J.*, **226** : 650, 1978.
- JACOBS J.A., KATO Y., MATSUSHITA S. et TROITSKAYA V.A., Classification of geomagnetic micropulsations, *J. Geophys. Res.*, **69** : 180, 1964.
- KIVELSON M.G., Pulsations and magnetohydrodynamic waves, dans *Introduction to Space Physics*, édité par M.G. KIVELSON et C.T. RUSSELL, chap. 11, Cambridge University Press, 1995.
- KIVELSON M.G. et SOUTHWOOD D.J., Resonant ULF waves : a new interpretation, *Geophys. Res. Let.*, **12** : 49, 1985.
- KIVELSON M.G. et SOUTHWOOD D.J., Coupling of global magnetospheric MHD eigenmodes to field line resonances, *J. Geophys. Res.*, **91** : 4345, 1986.
- LEE M.A. et ROBERTS B., On the behavior of hydromagnetic surface waves, *Astrophys. J.*, **301** : 430, 1986.
- LEONOVICH A.S. et MAZUR V.A., Structure of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere, *J. Geophys. Res.*, **105** : 27707, 2000a.
- LEONOVICH A.S. et MAZUR V.A., Toward the theory of magnetospheric magnetosonic eigenoscillations : simple theoretical models, *J. Geophys. Res.*, **105** : 21251, 2000b.
- LILLENSTEN J. et BLELLY P.L., *Du Soleil à la Terre, Aéronomie et météorologie de l'espace*, chap. 3, Presses universitaires de Grenoble, 1999.
- MCKENZIE J.F., Hydromagnetic oscillations of the global magnetotail and plasma sheet, *J. Geophys. Res.*, **75** : 5331, 1970.
- MCPHERRON R.L., Magnetospheric Dynamics, dans *Introduction to Space Physics*, édité par M.G. KIVELSON et C.T. RUSSELL, chap. 13, Cambridge University Press, 1995.

-
- MORSE P.M. et FESCHBACH H., *Methods of theoretical physics*, chap. 11, Mc Graw Hill, New-York, 1953.
- PARKER E.N., *Interplanetary Dynamical Processes*, Wiley-Interscience, New-York, 1963.
- PARKER E.N., Topological Dissipation and the Small-Scale Fields in Turbulent Gases, *Astrophys. Journal*, **174** : 499, 1972.
- PATEL V.L., Magnetospheric tail as a hydromagnetic wave guide, *Phys. Lett.*, **26A** : 596, 1968.
- POEDTS S., BELIËN A.J. et GOEDBLOED J.P., On the quality of resonant absorption as a coronal loop heating mechanism, *Solar Physics*, **151** : 271, 1994.
- POEDTS S., GOOSSENS M. et KERNER W., Numerical simulation of coronal heating by resonant absorption of Alfvén waves, *Solar Physics*, **123** : 83, 1989.
- PRIEST E.R., Magnetohydrodynamics, dans *Plasma Astrophysics*, édité par A.O. BENZ et T.J. COURVOISIER, pp. 98–109, Springer Verlag, Berlin, 1994.
- RAE I.C. et ROBERTS B., Surface waves and the heating of the corona, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **78** : 197, 1981.
- ROBERTS P.H., *An introduction to magnetohydrodynamics*, pp. 30–47, Longmans, Green's and Co., London, 1967.
- SABA J.L.R. et STRONG K.T., Coronal dynamics of a quiescent active region, *Astrophys. J.*, **375** : 789, 1991.
- SEBOLDT W., Non local analysis of low frequency waves in the plasma sheet, *J. Geophys. Res.*, **95** : 10471, 1990.
- SEDLACEK Z., Electrostatic oscillations in cold inhomogeneous plasma. Part 1 : Differential equation approach, *J. Plasma Physics*, **5** : 239, 1971.
- SISCOE G.L., Resonant compressional waves in the geomagnetic tail, *J. Geophys. Res.*, **74** : 6482, 1969.
- SMITH J.M.B., ROBERTS B. et OLIVIER R., Magnetoacoustic wave propagation in current sheets, *Astron. Astrophys.*, **327** : 377, 1997.
- SOUTHWOOD D.J., Some features of field line resonances in the magnetosphere, *Planet. Space Sci.*, **22** : 483, 1974.
- SOUTHWOOD D.J. et KIVELSON M.G., The effect of parallel inhomogeneity on magnetospheric hydromagnetic wave coupling, *J. Geophys. Res.*, **91** : 6871, 1986.
- SOUTHWOOD D.J. et KIVELSON M.G., The magnetohydrodynamic response of the magnetospheric cavity to changes in solar wind pressure, *J. Geophys. Res.*, **95** : 2301, 1990.
-

-
- STEINOLFSON R.S. et DAVILA J.M., Coronal heating by the resonant absorption of Alfvén waves : Importance of the global mode and scaling laws, *Astrophys. J.*, **415** : 354, 1993.
- TATARONIS J.A., Energy absorption in the continuous spectrum of ideal MHD, *J. Plasma Physics*, **13** : 87, 1975.
- TATARONIS J.A. et GROSSMANN W., Decay of MHD waves by phase mixing : I. The Sheet-pinch in plane geometry, *Z. Physik*, **261** : 203, 1973.
- TAYLOR J.P.H. et WALKER A.D.M., Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number. 2. Eigenmodes of the magnetosonic and Alfvén oscillations, *J. Geophys. Res.*, **92** : 10046, 1987.
- THOMSON M.J. et WRIGHT A.N., Resonant Alfvén wave excitation in two-dimensional systems : singularities in partial differential equations, *J. Geophys. Res.*, **98** : 15541, 1993.
- TIRRY W.J., BERGHMANS D. et GOOSSENS M., Temporal evolution of resonant absorption in coronal loops : Excitation by footpoint motions normal to the magnetic surfaces, *Astron. Astrophys.*, **322** : 329, 1997.
- WALKER A.D.M., Theory of magnetospheric standing hydromagnetic waves with large azimuthal wave number. 1. Coupled magnetosonic and Alfvén waves, *J. Geophys. Res.*, **92** : 10039, 1987.
- WALKER R.J. et RUSSELL C.T., Solar Wind Interactions with Magnetized Planets, dans *Introduction to Space Physics*, édité par M.G. KIVELSON et C.T. RUSSELL, chap. 6, Cambridge University Press, 1995.
- WRIGHT A.N. et RICKARD G.J., A numerical study of resonant absorption in a magnetohydrodynamic cavity driven by a broadband spectrum, *Astrophys. J.*, **444** : 458, 1995.
- ZHU X. et KIVELSON M.G., Analytic formulation and quantitative solutions of the coupled ULF wave problem, *J. Geophys. Res.*, **93** : 8602, 1988.

Annexe A

Ondes MHD dans un plasma uniforme

Cette première annexe établit les relations de dispersion des ondes MHD se propageant dans un plasma homogène de champ magnétique uniforme. Les vitesses de groupes des trois modes de la MHD sont également calculées et leur diagramme est discuté.

Les ondes magnétohydrodynamiques sont les solutions des équations écrites au chapitre 4. Nous partons d'une situation d'équilibre où le plasma est au repos et globalement neutre avec une densité ionique uniforme N . Le champ magnétique \mathbf{B}_0 est également uniforme et dirigé suivant l'axe (O, x) . Pour établir les propriétés des ondes pouvant se propager dans ce milieu, on linéarise les équations MHD (équations (4.4) à (4.7) du chapitre 4) au premier ordre par rapport aux perturbations. De plus on suppose une variation spatio-temporelle de toutes les grandeurs physiques du type $\exp(i\omega t - k_x x - k_z z)$. Quitte à changer de repère, on peut supposer que \mathbf{k} est contenu dans le plan (Oxz) . Nous obtenons alors pour les composantes du déplacement du plasma (voir par exemple Kivelson, 1995) :

$$[\omega^2 - k^2 v_s^2 \cos^2 \theta] \xi_x - k^2 \cos \theta \sin \theta \xi_z = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$[\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta] \xi_y = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$-k^2 \cos \theta \sin \theta \xi_x + [\omega^2 - k^2 v_A^2 - k^2 v_s^2 \cos^2 \theta] \xi_z = 0, \quad (\text{A.3})$$

où v_s et v_A sont les vitesses du son et d'Alfvén dans le milieu et θ l'angle entre les vecteurs \mathbf{B}_0 et \mathbf{k} . Pour que ce système admette une solution non triviale, il faut que son déterminant soit nul, ce qui nous conduit à la relation de dispersion suivante :

$$[\omega^2 - k^2 v_A^2 \cos^2 \theta][\omega^2 - k^2 v_R^2][\omega^2 - k^2 v_L^2] = 0, \quad (\text{A.4})$$

avec

$$v_{R,L}^2 = \frac{v_A^2 + v_s^2}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - 4 \cos^2 \theta \frac{v_A^2 v_s^2}{(v_A^2 + v_s^2)^2}} \right]. \quad (\text{A.5})$$

Il existe donc trois modes de propagation distincts :

- mode d’Alfvèn transversal : $\omega = \pm k v_A \cos \theta$,
- mode magnétosonore rapide : $\omega = \pm k v_R$ (signe +),
- mode magnétosonore lent : $\omega = \pm k v_L$ (signe -).

En ce qui concerne le mode d’Alfvèn, les équations (A.1) à (A.3) imposent que $\xi_x = \xi_z = 0$ et ξ_y est quelconque. Il est facile de montrer également que $b_x = b_z = 0$ et b_y quelconque, de même que le mode d’Alfvèn n’affecte pas la densité du plasma. L’effet de cette onde est simplement de tordre les lignes de champ magnétique dans une direction à la fois perpendiculaire à \mathbf{B}_0 et à \mathbf{k} . De plus ce mode se propage à la vitesse de phase $v_A \cos \theta$. Les modes magnétosonoros, au contraire, modifient à la fois le champ magnétique et la pression du plasma. On parle de modes compressionnels.

Afin d’analyser plus en détail la propagation de ces modes, il est instructif de représenter le diagramme des vitesses de groupe pour ces trois modes. La vitesse de groupe est définie par ses deux composantes parallèle et perpendiculaire à \mathbf{B}_0 :

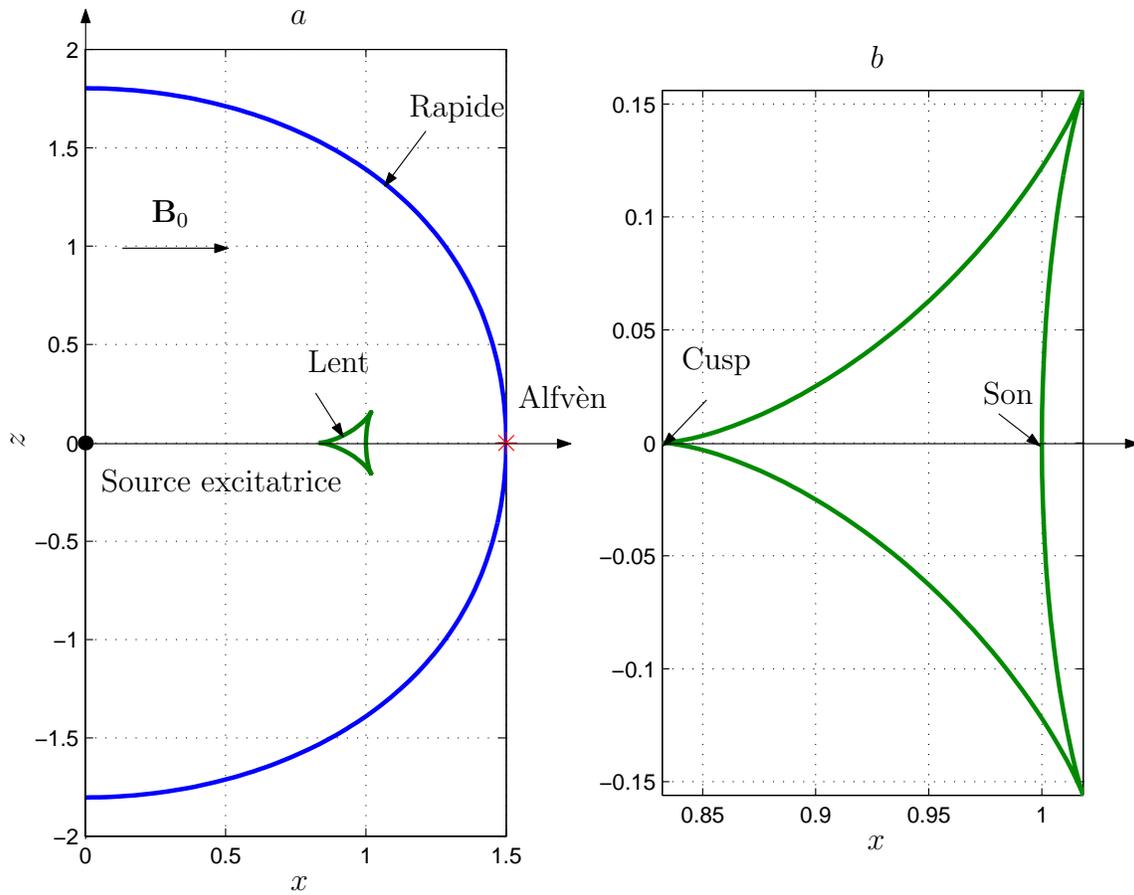
$$v_{g\parallel} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} \quad \text{et} \quad v_{g\perp} = \frac{\partial \omega}{\partial k_z}. \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons alors dresser le tableau suivant, fournissant les diverses expressions de la vitesse de groupe pour les trois modes :

| | $v_{g\parallel}$ | | $v_{g\perp}$ | |
|----------------------|-------------------|---|-------------------|---|
| Mode d’Alfvèn | v_A | | 0 | |
| Mode rapide | $v_R \cos \theta$ | $1 + \sin^2 \theta \frac{v_c^2}{v_R^2} \frac{1}{1 - 2 \frac{v_R^2}{v_A^2 + v_s^2}}$ | $v_R \sin \theta$ | $1 - \cos^2 \theta \frac{v_c^2}{v_R^2} \frac{1}{1 - 2 \frac{v_R^2}{v_A^2 + v_s^2}}$ |
| Mode lent | $v_L \cos \theta$ | $1 + \sin^2 \theta \frac{v_c^2}{v_L^2} \frac{1}{1 - 2 \frac{v_L^2}{v_A^2 + v_s^2}}$ | $v_L \sin \theta$ | $1 - \cos^2 \theta \frac{v_c^2}{v_L^2} \frac{1}{1 - 2 \frac{v_L^2}{v_A^2 + v_s^2}}$ |

La figure A.1 illustre la propagation des fronts d’onde des modes MHD excités par une source infiniment localisée à l’origine du plan (xOz) à un certain instant arbitraire. En effet, par définition, un paquet d’ondes se déplace dans l’espace à la vitesse de groupe \mathbf{v}_g . Au bout d’un temps T , la perturbation s’est propagée sur une

Fig. A.1 Diagramme des vitesses de groupes pour les trois modes MHD



distance $v_g(\theta)T$ le long d'une droite inclinée d'un angle θ par rapport au champ magnétique. On a par ailleurs supposé que $v_s < v_A$.

Nous observons que le mode rapide se propage de manière quasiment isotrope, alors que les modes lent et alfvénique sont très anisotropes. A vrai dire, le mode d'Alfvén se propage sans dispersion. Un point source localisé initialement à l'origine demeure un point après un déplacement à la vitesse v_A le long du champ magnétique. La figure A.1 révèle l'existence d'un point particulier dans la propagation du mode lent : ce que les Anglo-saxons appellent le "cusp" (sommet en français) qui se propage à la vitesse $v_c = v_A v_s / \sqrt{v_A^2 + v_s^2}$ le long du champ magnétique. La vitesse cusp est en fait la limite quand θ tend vers $\pi/2$ de la vitesse de groupe parallèle du mode lent. La composante perpendiculaire de la vitesse de groupe s'annule en ce point. On comprend alors pourquoi la vitesse cusp peut donner lieu à une résonance dans les équations du chapitre 4 pour un plasma non homogène, car la géométrie particulière du diagramme au voisinage du cusp implique que l'énergie du mode lent se déplace

essentiellement le long du champ magnétique pour une large plage d'angles θ .

Annexe B

La transformation de Laplace

Dans cette seconde annexe, nous définissons la transformation de Laplace, sa formule d'inversion et nous donnons quelques exemples de transformée.

B.1 Définition et premières propriétés de la transformée de Laplace

Soit f une fonction de la variable t , suffisamment régulière pour être intégrable sur $[0 + \infty[$. On suppose en outre que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

Par définition, la transformée de Laplace de f est la fonction de la variable ω suivante :

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (\text{B.1})$$

On notera également $\hat{f} = \mathcal{TL}[f]$.

Pour assurer la convergence de l'intégrale en l'infini, il est nécessaire que ω soit complexe avec une partie imaginaire $\Im(\omega)$ strictement positive. En règle générale, la fonction \hat{f} est analytique dans tout le plan ω -complexe à l'exception de certains points appelés singularités. Il peut s'agir de pôles du type $1/(\omega - \omega_0)^n$, ou bien de points de branchement plus compliqués à traiter (cf. annexe C par exemple).

Transformée de Laplace et dérivées Il est souvent utile de considérer la transformée de Laplace des dérivées de f . Par un calcul élémentaire, il vient :

$$\mathcal{TL}[f'] = -f(0) - i\omega \mathcal{TL}[f], \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{TL}[f''] = -\frac{df}{dt}(0) + i\omega f(0) - \omega^2 \mathcal{TL}[f]. \quad (\text{B.3})$$

Prenons un exemple simple : le circuit (L,C). L'équation différentielle satisfaite

par la charge q du condensateur est

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Notons \hat{q} la transformée de Laplace de q , en utilisant (B.3) l'équation différentielle devient

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\hat{q} = \frac{dq}{dt}(0) - i\omega q(0).$$

C'est une simple équation algébrique sur \hat{q} qui dépend des conditions initiales, charge du condensateur et intensité du courant à $t = 0$.

L'intérêt de la transformée de Laplace est donc de transformer une équation différentielle en une équation algébrique plus simple à résoudre et qui tient compte des conditions initiales du problème. Il est bien évident que résoudre l'équation différentielle du second ordre de l'oscillateur harmonique par cette méthode revient à écraser une mouche avec un bulldozer ! Cependant, pour un système aux dérivées partielles couplé, la transformation de Laplace devient très utile, voire indispensable pour résoudre le problème.

B.2 Transformées de Laplace de fonctions usuelles

Voici un tableau résumant les transformées de Laplace de fonctions usuelles qui se calculent sans difficulté en appliquant directement la définition :

| $f(t)$ | $\hat{f}(\omega)$ |
|---|--|
| $\delta(t)$ | 1 |
| $H(t)$ | $-\frac{1}{i\omega}$ |
| $H(t) \cos(\omega_0 t)$ | $\frac{i\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}$ |
| $H(t) \sin(\omega_0 t)$ | $\frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$ |
| $H(t)e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $\frac{\tau}{1 - i\omega\tau}$ |
| $H(t)\frac{t}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$ | $\frac{\tau}{(1 - i\omega\tau)^2}$ |

B.3 Le calcul de la transformée inverse de Laplace

Réciproquement, on peut obtenir la fonction f à partir de sa transformée \hat{f} par la formule d'inversion suivante :

$$f(t) = \int_{\mathcal{C}} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \tag{B.4}$$

où \mathcal{C} est un contour dans le demi-plan supérieur ω -complexe passant au-dessus de toutes les singularités de la fonction \hat{f} . Le calcul de cette intégrale de contour s'effectue en refermant le contour \mathcal{C} .

Illustrons la méthode pour le circuit LC. Nous avons dériver l'équation :

$$\hat{q}(\omega) = \frac{\dot{q}_0 - i\omega q_0}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Supposons qu'à $t = 0$, le condensateur porte une charge Q_0 et l'intensité du courant est nulle. Nous reconnaissons dans l'expression de \hat{q} , la transformée de Laplace de la fonction $H(t) \cos(\omega_0 t)$, si bien que nous avons directement la solution $q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)H(t)$. Il n'est cependant pas toujours évident de reconnaître une transformée de Laplace et nous allons calculer à nouveau $q(t)$ en suivant la méthode générale de l'intégrale de contour.

La fonction \hat{q} possède deux points singuliers : deux pôles simples en $\pm\omega_0$, situés sur l'axe ω -réel. Le contour \mathcal{C} est donc une droite parallèle à l'axe réel et située au-dessus. On referme ce contour par un demi-cercle de rayon infini. Pour des raisons de convergence, le demi-cercle est situé dans le demi-plan supérieur pour $t < 0$ et dans le demi-plan inférieur pour $t > 0$.

Pour $t < 0$, le contour fermé n'encercle aucune singularité de \hat{q} qui est analytique dans le demi-disque entier. Par un théorème général sur les intégrales des fonctions analytiques, $q(t) = 0$. En revanche pour $t > 0$, le contour encercle les deux pôles $\pm\omega_0$. Nous pouvons donc appliquer le théorème des résidus :

$$\int_{\Gamma} \hat{q}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = -2i\pi \sum \text{Res}(\hat{q}(\omega)e^{-i\omega t}, \pm\omega_0).$$

La contribution du demi-cercle est nulle lorsque le rayon du cercle tend vers l'infini, donc l'intégrale sur Γ est égale à l'intégrale sur \mathcal{C} . Le calcul des résidus conduit évidemment à la formule $q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t)$.

Annexe C

La fonction logarithme complexe

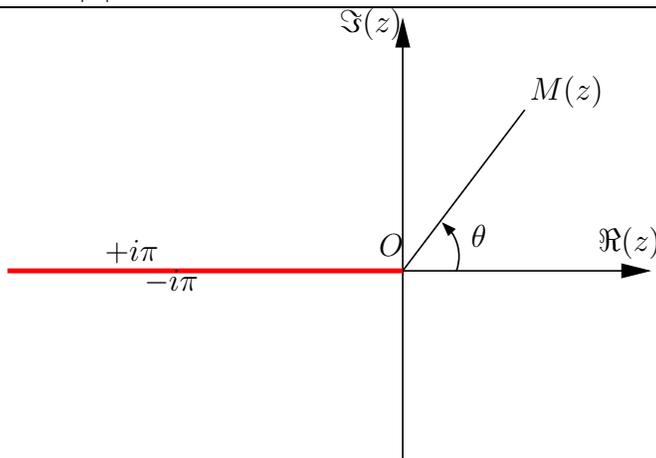
Cette annexe définit la fonction logarithme de la variable complexe. On sait que l'équation $e^x = X$ d'inconnue réelle x admet une unique solution pour tout réel strictement positif X . Cette solution est appelée logarithme népérien de X : $x = \ln(X)$.

La généralisation du logarithme au cas des nombres complexes revient donc à considérer le problème suivant : étant donné un nombre complexe Z , existe-t-il un nombre complexe z tel que $e^z = Z$? Pour résoudre cette équation, posons $z = x + iy$ et $Z = Re^{i\theta}$ avec $R > 0$. L'égalité des modules et des arguments impose :

$$\begin{aligned}x &= \ln R, \\y &= \theta + 2k\pi \quad k \text{ entier.}\end{aligned}$$

Il y a donc une infinité de solutions car tous les nombres complexes de la forme $z = \ln R + i(\theta + 2k\pi)$, où θ est un argument quelconque de Z conviennent.

Fig. C.1 Définition du logarithme complexe : la ligne rouge est une ligne de branchement et $\log(z) = \ln |z| + i\theta$.



Contrairement à la fonction logarithme népérien qui est une bijection de \mathbb{R}_+^* dans lui-même, le logarithme complexe associe à tout nombre complexe Z une infinité de nombres complexes z . Elle n'est donc pas, en toute rigueur, une fonction de \mathbb{C} dans \mathbb{C} . On parle plutôt de fonction multivaluée.

Nous allons néanmoins montrer que l'on peut définir une fonction analytique, notée $\log z$ dans un certain domaine du plan complexe. Pour ce faire, on considère le plan complexe privé du demi-axe réel négatif. Cette ligne s'appelle une coupure ou une ligne de branchement. L'argument d'un nombre complexe z est alors défini de manière classique : il est égal à la mesure principale (entre $-\pi$ et $+\pi$) de l'angle que fait la demi-droite (OM) avec l'axe (Ox) (voir figure C.1). On pose alors pour tout $z = re^{i\theta}$ $\log z = \ln r + i\theta$. Avec cette définition, \log est bien une fonction au sens usuel du terme et on montre que cette fonction est analytique dans tout le plan complexe privé de l'axe réel négatif. En particulier, nous avons la relation $d \log z / dz = 1/z$ pour tout nombre complexe z .

On constate cependant que, de part et d'autre de la ligne de branchement, la partie imaginaire du logarithme est discontinue : elle vaut $i\pi$ au-dessus de l'axe réel négatif et $-i\pi$ en dessous.

Annexe D

Solution de l'équation maîtresse dans le cas d'une couche à gradient linéaire

Dans cette annexe, on se propose de résoudre l'équation différentielle maîtresse (4.18) dans le cas d'une couche de courant à gradient linéaire. L'équation possède alors une solution analytique que l'on peut écrire explicitement, ce qui est intéressant d'un point de vue théorique.

Considérons donc une couche de plasma non homogène d'épaisseur a et infinie dans les directions (x, y) . Elle est baignée dans un champ magnétique parallèle à l'axe (Ox) et son intensité varie linéairement avec la troisième coordonnée z . De même, la densité du plasma varie linéairement avec z , de façon à respecter l'équilibre isotherme de la couche. On suppose enfin que les perturbations MHD se propagent dans la couche selon la direction (Ox) , c'est à dire que l'on impose $k_y = 0$.

L'équation différentielle qui régit la propagation de ces perturbations s'écrit (cf. équation (4.18)) :

$$\frac{d}{dz} \left[f_{\omega,k}(z) \frac{d\xi_z}{dz} \right] + g_{\omega,k}(z) \xi_z = 0, \quad (\text{D.1})$$

avec

$$f_{\omega,k}(z) = \rho_{eq}(z) (v_s^2 + v_A^2(z)) \frac{\omega^2 - k^2 v_c^2}{\omega^2 - k^2 v_s^2}, \quad (\text{D.2})$$

$$g_{\omega,k}(z) = \rho_{eq}(z) (\omega^2 - k^2 v_A^2(z)). \quad (\text{D.3})$$

Il faut de plus préciser les conditions aux limites associées à cette équation. Pour simplifier, nous prendrons des conditions de Dirichlet : on pose $\xi_z = 0$ en $z = 0$ et en $z = a$.

Il est facile de voir que si ρ_{eq} et B_{eq} , i.e. $\rho_{eq} v_A^2$ varient linéairement avec z , il en

est de même pour les coefficients f et g que l'on peut écrire en toute généralité :

$$f_{\omega,k}(z) = A_{\omega,k}z + B_{\omega,k} \quad g_{\omega,k}(z) = C_{\omega,k}z + D_{\omega,k}, \quad (\text{D.4})$$

où les 4 coefficients A , B , C et D sont fonction uniquement de la pulsation ω et du vecteur d'onde k . On suppose que ni A ni C ne s'annule et on effectue le changement de variable :

$$Z = -2i\sqrt{\frac{C}{A}} \left(z + \frac{B}{A} \right). \quad (\text{D.5})$$

L'équation (D.1) devient alors :

$$\frac{d}{dZ} \left[Z \frac{d\xi_z}{dZ} \right] + \left(\frac{i}{2} \frac{DA - BC}{A\sqrt{AC}} - \frac{Z}{4} \right) \xi_z = 0. \quad (\text{D.6})$$

On pose ensuite $\xi_z = \Xi(Z) \exp(-\frac{Z}{2})$ et on déduit l'équation différentielle

$$Z\Xi'' + (1 - Z)\Xi' - K\Xi = 0, \quad (\text{D.7})$$

où

$$K(\omega, k) = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \frac{DA - BC}{A\sqrt{AC}}. \quad (\text{D.8})$$

L'équation différentielle obtenue s'appelle équation de Kummer, ses solutions s'expriment à l'aide des fonctions hypergéométriques confluentes M et U (Abramowitz et Stegun, 1970) :

$$\Xi(Z) = \alpha M(K|1|Z) + \beta U(K|1|Z). \quad (\text{D.9})$$

Finalement, la solution de l'équation différentielle (6.1) s'écrit donc

$$\xi_z = [\alpha M(K|1|Z) + \beta U(K|1|Z)] e^{-Z/2}. \quad (\text{D.10})$$

Les constantes α et β sont déterminées par les conditions aux limites en $z = 0$ et en $z = a$.

Remarque : Le calcul précédent repose sur l'hypothèse A et C non nuls. Si l'un de ces coefficients s'annule (pour une valeur particulière de la fréquence), l'équation différentielle (D.1) change de nature et ses solutions ne s'expriment plus de manière simple à l'aide des fonctions hypergéométriques confluentes. Par exemple, si $A = 0$, (D.1) est alors une équation de Bessel : la solution fait intervenir dans ce cas les fonctions de Bessel J et Y . Cependant par continuité des coefficients de l'équation différentielle, les solutions trouvées en (D.10) se prolongent vers les solutions obtenues avec $A = 0$ ou $C = 0$.

Annexe E

Publications

- FRUIT G., LOUARN P., TUR A. et LE QUÉAU D., On the propagation of magnetohydrodynamic perturbations in a Harris-type current sheet. 1. Propagation on discrete modes and signal reconstruction, *J. Geophys. Res.*, **107** : 1411, 2002.
- FRUIT G., LOUARN P., TUR A. et LE QUÉAU D., On the propagation of magnetohydrodynamic perturbations in a Harris-type current sheet. 2. Propagation on continuous modes and resonant absorption, *J. Geophys. Res.*, **107** : 1412, 2002.

TITLE

PROPAGATION OF MHD WAVES IN CURRENT SHEETS.
STRUCTURE OF THE MODES AND ENERGETIC TRANSFERS.
COMPARISON WITH CLUSTER DATA.

ABSTRACT

The terrestrial magnetosphere is a complex and highly dynamic system. Since the success of the CLUSTER mission, one can study the tridimensional structure of the perturbations propagating in this environment. Especially, one observes low frequency fluctuations in some key regions of the magnetosphere (magnetopause, magnetotail). The interpretation of the observations requires a theoretical and self-consistent frame, that takes into account, as close as possible, the actual geometry of the medium. This thesis aims essentially to study completely and theoretically the linear response of an inhomogeneous plasma sheet to a given initial perturbation. Particularly, the computation is lead to the final reconstruction of the spatial temporal signals with a discussion of the obtained amplitudes and the energetic transfers that follow. This last step is crucial for a comparison with CLUSTER data.

The study of the eigenmodes of a magnetotail-like sheet shows the existence of two types of oscillations : global eigenmodes oscillating at discrete frequencies and confined within the sheet, and continuous modes related to the phenomenon of resonant absorption and whose amplitude decreases with time. By using different geometries of initial pulses, one studies the coupling between the excitator and these eigenmodes. One shows that the coupling is optimal for a pulse whose typical scale is of the order of the transversal variation of the sheet. Even in this case, the perturbations of the sheet remain however modest (few percents of the initial pulse). On the other hand, with the same initial pulse, the absorption of the signal within the continuum is efficient and leads to a non negligible energetic transfer from the waves to the plasma.

Finally, one analyses an example of magnetic oscillations measured by CLUSTER. The theoretical model allows thus to identify the nature of the perturbations so as their origin, in the assumption that these fluctuations obey a MHD description. More generally, the analyze of the linear perturbation of a plasma sheet and the comparison with the theoretical model permit a determination of the characteristics of the sheet and help to define the most convenient model to his description.

AUTEUR : Gabriel FRUIT

TITRE : PROPAGATION DES ONDES MHD DANS LES COUCHES DE COURANT.
STRUCTURE DES MODES ET TRANSFERTS ÉNERGÉTIQUES. COMPARAISON AVEC
LES DONNÉES CLUSTER.

DIRECTEUR DE THÈSE : Dominique LE QUÉAU

DATE ET LIEU DE SOUTENANCE : le 24 février 2003 au CESR, Toulouse.

RÉSUMÉ

La magnétosphère terrestre est un système complexe et très dynamique. Depuis le succès de la mission CLUSTER, nous pouvons étudier la structure tridimensionnelle des perturbations se propageant dans cet environnement et en particulier, nous observons des fluctuations de basses fréquences dans les régions clés de la magnétosphère (magnétopause, queue magnétique). L'interprétation des observations nécessite un cadre théorique auto-consistant, qui prenne en compte, le plus fidèlement possible, la géométrie réelle du milieu. Cette thèse consiste essentiellement en l'étude théorique complète de la réponse linéaire d'une couche de plasma non homogène et magnétisé à une perturbation initiale donnée, dans l'approximation de la magnétohydrodynamique idéale. En particulier, le calcul est mené jusqu'à la reconstruction finale des signaux spatio-temporels avec une discussion des amplitudes obtenues et des transferts énergétiques qui en découlent. Cette dernière étape est importante dans la perspective d'une comparaison avec les données CLUSTER.

L'étude des modes propres d'une couche de type queue magnétosphérique montre l'existence de deux catégories d'oscillations : des modes globaux oscillant à des fréquences discrètes et confinés au centre de la couche, et des modes continus liés au phénomène d'absorption résonante et dont l'amplitude décroît au cours du temps. En utilisant diverses géométries de pulses initiaux, nous étudions le couplage entre l'excitateur et ces modes propres. Nous mettons en évidence que le couplage avec les modes globaux est optimal pour un pulse dont l'échelle caractéristique est de l'ordre de la direction transverse de la couche. Même dans ce cas, les perturbations transmises à la couche restent cependant modestes (quelques pour cents du pulse initial). En revanche, avec le même pulse initial, l'absorption du signal dans le continuum est efficace et conduit à un transfert d'énergie non négligeable des ondes vers le plasma.

Enfin, nous analysons un exemple d'oscillations magnétiques mesurées par CLUSTER. Le modèle théorique développé permet alors de préciser la nature des perturbations ainsi que leur origine, dans l'hypothèse où ces fluctuations obéissent à une description MHD. Plus généralement, l'analyse des perturbations linéaires de la couche de plasma et la comparaison avec le modèle théorique permettent de déterminer les caractéristiques de la couche et aident à définir le modèle le mieux adapté à sa description.

MOTS CLÉS

Physique magnétosphérique

Magnétohydrodynamique

Couche de courant

Absorption résonante

Mission Cluster

DISCIPLINE : Physique des plasmas spatiaux

CENTRE D'ÉTUDE SPATIALE DES RAYONNEMENTS
9, avenue du Colonel Roche – BP 4346
31028 TOULOUSE Cedex 4