HAL
open science

Étude du résultant sur une variété algébrique

Laurent Busé

To cite this version:

Laurent Busé. Étude du résultant sur une variété algébrique. Mathématiques [math]. Université Nice Sophia Antipolis, 2001. Français. NNT : . tel-00096815

HAL Id: tel-00096815

https://theses.hal.science/tel-00096815

Submitted on 20 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
FACULTÉ DES SCIENCES
Laboratoire J. A. Dieudonné
U.M.R. du C.N.R.S. No 6621

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences
spécialité : Mathématiques
par

Laurent BUSÉ

ÉTUDE DU RÉSULTANT SUR UNE VARIÉTÉ ALGÉBRIQUE

Soutenue le 19 décembre 2001 devant le jury composé de :

M. Marc CHARDIN	Chargé de recherche au CNRS
M. Mohamed ELKADI	Maître de conférence à l'Université de Nice
M. André GALLIGO	Professeur à l'Université de Nice
M. André HIRSCHOWITZ	Professeur à l'Université de Nice
M. Jean-Pierre JOUANOLOU	Professeur à l'IRMA de Strasbourg
M. Michel MERLE	Professeur à l'Université de Nice
M. Bernard MOURRAIN	Chargé de recherche à l'INRIA
M. Mike STILLMAN	Professeur à l'Université de Cornell

J'exprime toute ma gratitude envers mes deux directeurs de thèse, André Hirschowitz et Bernard Mourrain, pour leur disponibilité, leur soutien constant et leur aide précieuse durant toute l'élaboration de cette thèse. Je les remercie également de m'avoir proposé ce sujet, les mathématiques que j'y ai croisées étaient très séduisantes.

Je voudrais également remercier chaleureusement Charles Walter pour l'aide permanente qu'il m'a prodigué et la disponibilité dont il a fait preuve. Un merci tout aussi chaleureux à Marc Chardin qui a sensiblement influencé ce travail, surtout le chapitre 3, au travers de nombreuses discussions et d'un cours qu'il a donné à l'Université de Nice.

J'exprime toute ma reconnaissance aux Professeurs David Cox et Jean-Pierre Jouanolou qui ont accepté la difficile tâche de rapporteur. Je les remercie pour leur lecture détaillée de ce manuscrit. Je remercie également tous les membres du jury pour leur participation.

Je remercie évidemment Laurent, Laurent, Fabrice et Gilles pour avoir animé le bureau 701 et pour tous ces moments explosifs que nous avons pu partager. Merci aussi à Mohamed d'avoir toujours été à mes côtés. Merci également à tous les personnels administratifs du laboratoire pour leur dévouement.

Enfin je tiens à remercier ma famille et Céline pour leur soutien et leur patience de tous les jours. Je n'oublie pas non plus mon père, cette thèse lui est dédiée.

Table des matières

Introduction iii

1 Préliminaires **1**
1.1 Résultant de deux polynômes en une variable 2
1.2 Résultant sur un espace projectif 3
1.3 Résultant creux 6

2 Étude géométrique du résultant **11**
2.1 Résultant général 12
2.2 Résultant résiduel 18

3 Étude algébrique du résultant résiduel **25**
3.1 Résultant résiduel sur un espace projectif 26
3.1.1 Propriétés 27
3.1.2 Bézoutiens 29
3.1.3 Exemples 32
3.2 Résultant résiduel d'une intersection complète 34
3.2.1 Propriétés 35
3.2.2 Résolution du résiduel d'une intersection complète . . 40
3.2.3 Calcul du résultant résiduel 44
3.2.4 Lien avec le résultant multivarié 48
3.2.5 Exemples 49
3.3 Résultant résiduel d'un idéal de codimension 2 52
3.3.1 Propriétés 53
3.3.2 Résolution de l'idéal résiduel 56
3.3.3 Calcul du résultant résiduel 59
3.3.4 Exemples 62

4 Résolution de systèmes polynomiaux et résultant **65**
4.1 U-résultant 66
4.2 Résoudre en calculant des vecteurs propres 72
4.2.1 Propriétés des opérateurs de multiplications d'une algèbre zéro-dimensionnelle 72
4.2.2 Opérateurs de multiplications et U-résultant 73

4.2.3 Opérateurs de multiplications et U-résultant résiduel . 75
4.2.4 Exemple : cylindres passant par cinq points 79
4.3 Représentation univariée rationnelle 84
4.4 Le problème du robot parallèle 86

5 Implicitisation et résultant 93
5.1 Implicitisation de courbes rationnelles 95
5.1.1 Courbes rationnelles sans point base 95
5.1.2 Courbes rationnelles avec points bases 96
5.2 Implicitisation de surfaces rationnelles 97
5.2.1 Surfaces rationnelles sans point base 97
5.2.2 Surfaces rationnelles avec points bases localement intersection complète 98

6 Résultant déterminantal 103
6.1 Construction 104
6.2 Résolution d'une variété déterminantale 109
6.2.1 Partitions et Foncteurs de Schur 110
6.2.2 La résolution 112
6.3 Calcul du résultant déterminantal 114
6.4 Résultant déterminantal multivarié 120

Bibliographie 124

Introduction

C'est à la fin du dix-neuvième siècle, siècle où les géomètres algébristes portaient une attention toute particulière à la théorie de l'élimination, que les articles remarquables de A. Cayley [Cay48] et F.S. Macaulay [Mac02] exposèrent les bases de la théorie du résultant. En 1948, juste avant que A. Weil lance son fameux "Il faut éliminer l'élimination" qui marquera le début d'une période sombre pour la théorie de l'élimination, B. Van der Waerden consacrait un chapitre entier à cette théorie où il y montrait en particulier comment il est possible d'utiliser le résultant pour calculer de manière effective les racines d'un système polynomial. Ce n'est qu'avec le succès croissant des techniques de calcul assisté par ordinateur et le besoin pratique de savoir résoudre effectivement des systèmes algébriques que la théorie de l'élimination, et donc celle du résultant, a fini par réapparaître et devenir une aire de recherche très active.

Le résultant le plus connu est celui de deux polynômes en une variable, introduit par Sylvester, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux polynômes possèdent une racine commune. Sa généralisation au cas de n polynômes homogènes en n variables a été établie par F.S. Macaulay en 1902 dans [Mac02], puis formalisée et développée par J.-P. Jouanolou dans deux articles de références [Jou91] et [Jou97]. Soient $f_1, \dots, f_n$ des polynômes homogènes en les variables $x_1, \dots, x_n$, c'est-à-dire

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=d_i} c_{i,\alpha}\mathbf{x}^\alpha,$$

où $\mathbf{x}^\alpha$ désigne un monôme en les variables $x_1, \dots, x_n$ de degré d_i et où les $c_{i,\alpha}$ sont des paramètres à valeur dans un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos. Si l'on considère les coefficients $c_{i,\alpha}$ comme des indéterminées, le résultant des polynômes $f_1 \dots, f_n$ est alors un polynôme en les $c_{i,\alpha}$. Lorsque l'on spécialise tous les $c_{i,\alpha}$ dans $\mathbb{K}$, ce résultant s'annule si et seulement si les polynômes $f_1, \dots, f_n$ obtenus par cette spécialisation possèdent une racine commune dans l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ associé aux variables $x_1, \dots, x_n$. Par exemple si les polynômes $f_1, \dots, f_n$ sont des formes linéaires, i.e.

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_j,$$

alors le résultant de ces polynômes est simplement le déterminant de la matrice $(c_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$.
Ce résultant se révèle être un outil puissant pour éliminer plusieurs variables d'un système algébrique et donc finalement un outil puissant pour

les résoudre. Malheureusement, il ne permet de traiter que des systèmes qui ne possèdent génériquement pas de solutions, c'est-à-dire des systèmes qui n'ont pas de solutions pour des paramètres $c_{i,\alpha}$ suffisamment génériques. Le but de ce travail de thèse est de donc de définir une notion de résultant pour des systèmes qui ne sont pas génériquement sans solutions, systèmes qui sont très souvent ceux qui nous parviennent de la pratique. Notons ici que des résultats allant dans ce sens ont été obtenus par J.-P. Jouanolou dans [Jou96] à l'aide du résultant anisotrope (introduit par ce dernier dans [Jou91]), mais nous ne suivrons pas cette voie dans ce qui suit. Le plan de cette thèse s'articule comme suit.

Dans un premier chapitre de préliminaires, nous présentons brièvement les différentes notions de résultants connues et surtout les outils dont nous disposons pour les calculer effectivement, car c'est ce calcul effectif qui nous intéresse et qui est le point délicat lorsque l'on parle de résultant. Nous rappelons la construction du résultant de deux polynômes, puis celle des n polynômes homogènes en n variables. Nous montrons ensuite comment les "faiblesses" de ce dernier résultant ont conduit à la construction du résultant torique (ou creux) étudié par I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, B. Sturmfels et A.V. Zelevinsky dans [KSZ92] et [GKZ94].

Le deuxième chapitre est dédié à l'étude des propriétés géométriques du résultant. Le premier paragraphe est consacré au rappel du résultant introduit dans le livre [GKZ94], qui généralise les résultants présentés dans le premier chapitre et qui montre avec force comment des techniques qui ont été développées en géométrie algébrique peuvent être mises en oeuvre pour résoudre des problèmes d'effectivité. Le langage utilisé est donc celui de la géométrie algébrique moderne qui semble être le plus adapté à la situation. Ainsi plutôt que de considérer des polynômes, nous considérerons des sections globales de fibrés en droites. Le résultant de n fibrés en droites $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ très amples sur une variété projective irréductible X de dimension $n-1$ est ainsi un polynôme sur l'espace vectoriel $V = \oplus_{i=1}^n H^0(X, \mathcal{L}_i)$ qui s'annule en un point $(f_1, \dots, f_n) \in V$ si et seulement si les sections $f_1, \dots, f_n$ possèdent une solution commune sur X. Nous définirons plus généralement un résultant pour un sous-espace vectoriel V des sections globales d'un fibré vectoriel E de rang n sur une variété projective irréductible de dimension $n-1$. Il nous faudra pour cela supposer que E est globalement engendré par V et très ample sur un ouvert dense. Dans un deuxième paragraphe nous montrons tout d'abord qu'il est possible de parler de résultant pour des systèmes possédant des points bases, c'est-à-dire qu'il est possible de parler de résultant pour n fibrés $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$ qui ne sont pas engendrés par leurs sections globales sur X. Un tel résultant est appelé résultant résiduel. Ce résultant résiduel est obtenu comme un résultant classique après éclatement du lieu des points bases du système considéré. Il fournit ainsi une condition nécessaire pour que des sections $(f_1, \dots, f_n) \in V$ possèdent une solution

commune autre qu'une solution présente au point générique. Cette condition devient suffisante si l'on prend en compte les solutions "doubles", c'est-à-dire les solutions qui apparaissent avec multiplicité sur les points bases.

Le troisième chapitre est entièrement dédié à la recherche du calcul explicite du résultant résiduel. Ce sont ici des propriétés algébriques du résultant qui sont mises en avant, propriétés qui nous permettent le plus souvent d'obtenir ce résultant (ou un multiple) comme un mineur d'une certaine matrice. Dans ce chapitre nous ne considérerons que des systèmes définis sur un espace projectif qui sont toujours ceux de la pratique. Dans le premier paragraphe nous nous intéressons aux systèmes de $m+1$ équations $f_0, \dots, f_m$ définies sur $\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ et dépendant d'un paramètre $\mathbf{c}$. Nous montrons que quel que soit le lieu des points bases d'un tel système, sous des hypothèses de très amplitude en dehors de son lieu base, le résultant résiduel de ce système existe; l'étude de la matrice Bézoutienne associée au système, dont nous rappelons la définition, montre que tout mineur maximal non nul de cette matrice est un multiple du résultant résiduel. Ce résultant est ainsi calculable, mais nous n'obtenons qu'un multiple de ce dernier. Dans les deux paragraphes suivants nous traitons deux autres types de systèmes pour lesquels nous allons faire des hypothèses sur leur lieu base, ce qui permet d'obtenir des méthodes plus fines pour calculer le résultant résiduel et son degré. Les systèmes considérés sont de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_0(\mathbf{x}) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,0}(\mathbf{x})\, g_i(\mathbf{x}) \\ & \vdots & \\ f_m(\mathbf{x}) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,m}(\mathbf{x})\, g_i(\mathbf{x}) \end{array} \right.$$

où $\mathbf{x}$ désigne un point de l'espace projectif $\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ en les variables $x_0, \dots, x_m$, où $g_1, \dots, g_n$ sont des polynômes homogènes de l'anneau $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ de degré respectif $k_1, \dots, k_n$ et où $h_{i,j}(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} c_\alpha^{i,j}\, \mathbf{x}^\alpha$ est un polynôme homogène de degré $d_j - k_i$ et les $c_\alpha^{i,j}$ des paramètres. Les polynômes $f_0, \dots, f_m$ sont ainsi des polynômes homogènes de degré respectif $d_0, \dots, d_m$ en la variable $\mathbf{x}$ et dépendent des paramètres $c_\alpha^{i,j}$. Le sous-schéma de $\mathbb{P}^m_{\mathbb{K}}$ défini par les polynômes $g_1, \dots, g_n$ est le lieu base de ce système. Si l'on suppose que ce sous-schéma est une intersection complète ou bien une intersection complète locale projective Cohen-Macaulay de codimension 2, alors nous montrons qu'il est possible de calculer le résultant résiduel. Nous donnons des méthodes matricielles pour l'obtenir exactement, ainsi que son degré, et montrons qu'il peut être exprimé comme le déterminant d'un certain complexe.

Le quatrième chapitre est dédié aux méthodes de résolution des systèmes algébriques basées sur le résultant. Nous transposons ici des méthodes connues dans le cas du résultant classique au cas du résultant résiduel. L'intérêt de ces outils de résolution basés sur le résultant est de fournir, sous de bonnes conditions de généricité, des formulations matricielles qui permettent de

transformer la résolution d'un système non-linéaire en un problème d'algèbre linéaire. Ces formulations sont continues par rapport aux coefficients des équations sur un ouvert correspondant aux systèmes dits génériques, et peuvent donc s'appliquer avec des coefficients approchés, contrairement aux techniques reposant sur les bases de Gröbner. Après une analyse de la géométrie du problème, on peut ainsi générer une matrice dont il suffit d'instancier les coefficients (qui sont les paramètres) pour résoudre le système. Cette approche est particulièrement intéressante lorsque le système doit être résolu pour un grand nombre de paramètres, la première étape d'analyse étant effectuée une fois pour toute.

Dans le cinquième chapitre nous donnons une application directe du résultant résiduel en CAO (Conception Assistée par Ordinateur) en donnant une nouvelle méthode pour calculer l'équation implicite d'une surface paramétrée. Une telle surface est généralement donnée par les équations

$$\frac{q_0(x_1,x_2)}{q_3(x_1,x_2)},\ \frac{q_1(x_1,x_2)}{q_3(x_1,x_2)},\ \frac{q_2(x_1,x_2)}{q_3(x_1,x_2)},$$

où $q_0(x_1,x_2)$, $q_1(x_1,x_2)$, $q_2(x_1,x_2)$ et $q_3(x_1,x_2)$ sont quatre polynômes en deux variables. On peut alors homogénéiser ces quatre polynômes pour obtenir une paramétrisation homogène de la même surface de la forme

$$\frac{p_0(x_0,x_1,x_2)}{p_3(x_0,x_1,x_2)},\ \frac{p_1(x_0,x_1,x_2)}{p_3(x_0,x_1,x_2)},\ \frac{p_2(x_0,x_1,x_2)}{p_3(x_0,x_1,x_2)},$$

où $p_0(x_0,x_1,x_2)$, $p_1(x_0,x_1,x_2)$, $p_2(x_0,x_1,x_2)$ et $p_3(x_0,x_1,x_2)$ sont quatre polynômes homogènes de même degré. Si ces quatre polynômes n'ont pas de solutions communes dans $\mathbb{P}^2$, alors l'équation implicite de la surface en les variables X, Y, Z peut être obtenue par le résultant multivarié

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^2}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3).$$

Nous montrons que si ces quatre équations possèdent des solutions communes qui forment une intersection complète locale, alors le même type de résultat est vrai en utilisant un résultant résiduel.

Dans le dernier chapitre nous abandonnerons la notion de résultant résiduel pour nous intéresser à une tout autre généralisation du résultant de [GKZ94] que nous appellerons résultant déterminantal. L'idée de ce résultant est basé sur la remarque suivante : étant donnés $m+1$ polynômes homogènes $f_0, \ldots, f_m$ en les variables $x_0, \ldots, x_m$, le résultant multivarié s'annule si et seulement si $f_0, \ldots, f_m$ possèdent une solution commune dans $\mathbb{P}^m$, c'est-à-dire si la matrice ligne $(f_0, \ldots, f_m)$ est de rang nul en au moins un point de $\mathbb{P}^m$. Plus généralement, on peut interpréter le résultant mixte de $m+1$ fibrés inversibles très amples $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_m$ sur une variété projective irréductible X

de dimension m, comme un objet qui traduit la chute du rang d'un morphisme

$$\mathcal{L}_0^* \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_m^* \xrightarrow{(f_0,\ldots,f_m)} \mathcal{O}_X,$$

en au moins un point de X.
Étant donnés deux fibrés vectoriels E et F de rang respectif m et n sur une variété projective irréductible X et un entier $r < \min(m,n)$, on montre que si X est de dimension $(m-r)(n-r)-1$ alors, sous des hypothèses de très amplitudes du fibré $\mathcal{H}om(E,F)$, il existe un résultant défini sur l'espace vectoriel $H = \mathrm{Hom}(E,F)$ qui s'annule pour $\varphi \in H$ si et seulement si il existe au moins un point de X où φ est de rang inférieur ou égal à r. Nous terminons ce chapitre par l'analyse des cas où X est un espace projectif pour lesquels nous pouvons donner des méthodes explicites pour calculer le résultant déterminantal, ainsi que son degré.

La plupart des méthodes exposées dans cette thèse pour calculer des résultants ont été implémenté dans une bibliothèque Maple pour l'élimination nommée `Multires`, développée à l'INRIA dans le Projet $\mathcal{GALAAD}$. Un fichier regroupant des fonctions pour le logiciel `Macaulay2` implémente également les constructions matricielles des résultants qui sont présentées ici.

Chapitre 1

Préliminaires

Le principal objet du résultant est de donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations possède des solutions. Le résultant, parfois appelé "polynôme éliminant", est ainsi un outil d'élimination puissant, permettant de soustraire plusieurs variables d'un système en une seule opération. Dans ce premier chapitre d'introduction, nous rappelons trois types de résultants connus, tout d'abord le résultant de deux polynômes en une variable, puis le résultant de $n+1$ polynômes homogènes en n variables, et enfin le résultant dit creux ou torique. L'objectif de ce chapitre est de montrer comment ces constructions de résultants "s'emboîtent", et pourquoi elles motivent la construction d'un nouveau type de résultant qui sera introduit dans les chapitres suivants.

Comme nous allons le voir dans ce qui suit, toutes les constructions de résultants se font sur des variétés projectives, et il est donc nécessaire d'homogénéiser nos équations. Cette nécessité peut s'illustrer par l'exemple suivant. Considérons un système de trois droites dans le plan affine de coordonnées (x, y) :

$$\begin{cases} a_0x + b_0y + c_0 = 0 \\ a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

On sait qu'une condition nécessaire pour que ce système possède une solution affine est que le déterminant suivant s'annule :

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

On s'aperçoit alors que ce déterminant s'annule si notre système de droites possède une solution affine, ou bien si nos trois droites sont parallèles (développement du déterminant par rapport à la troisième colonne). Cette condition s'exprime facilement dans l'espace projectif associé à notre espace affine

puisqu'elle revient à dire que nos trois droites, vues dans cet espace projectif, possèdent une solution commune. Il devient alors plus naturel de parler de résultant sur un espace projectif et non plus un espace affine.
Dans ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne un corps algébriquement clos.

1.1 Résultant de deux polynômes en une variable

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas de deux polynômes f et g en une variable, définis par

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,\ g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m.$$

Le résultat suivant est bien connu : il existe un polynôme irréductible en les coefficients de f et de g, c'est-à-dire un polynôme dans l'anneau $\mathbb{K}[a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]$, noté $\mathrm{Res}(f, g)$, qui s'annule pour une spécialisation de ces coefficients si au moins l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

i) f et g ont une racine commune dans $\mathbb{K}$,

i)) $deg(f) < n$ et $deg(g) < m$, i.e. $a_n = b_m = 0$.

Si l'on considère à présent les homogénéisés de f et g, que l'on note respectivement F et G, et qui sont définis par

$$F(x, y) = a_0y^n + a_1xy^{n-1} + \ldots + a_nx^n,\ G(x) = b_0y^m + b_1xy^{m-1} + \ldots + b_mx^m,$$

le résultant $\mathrm{Res}(f, g)$, que l'on note également $\mathrm{Res}(F, G)$, s'annule pour une spécialisation des coefficients si et seulement si F et G possèdent une solution commune autre que $(0, 0)$, i.e. une solution commune dans l'espace projectif $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. L'utilisation des polynômes homogènes se révèle ici plus simple, nous nous placerons donc toujours dans ce cas par la suite.

Ce polynôme résultant possède beaucoup de propriétés. Citons par exemple la symétrie :

$$\mathrm{Res}(F, G) = (-1)^{mn}\mathrm{Res}(G, F),$$

ou bien la multiplicativité :

$$\mathrm{Res}(FF', G) = \mathrm{Res}(F, G)\mathrm{Res}(F', G),$$

ou bien encore la multihomogénéité, i.e. $\mathrm{Res}(F, G)$ est homogène de degré m en les coefficients de F, et homogène de degré n en les coefficients de G.

La propriété la plus remarquable et la plus utile de ce résultant est la formule suivante, dite de Sylvester, qui permet d'exprimer explicitement ce résultant comme le déterminant d'une matrice,

$$\mathrm{Res}(F,G) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-1} & b_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & b_m & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_m \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est d'ordre $m+n$, qui est bien le degré total du résultant, et comprend m lignes ne contenant que des coefficients de F, et n lignes ne contenant que des coefficients de G. Il est utile de remarquer, pour les futures généralisations, que la matrice que nous venons d'écrire n'est rien d'autre que la matrice de l'application

$$S_{m-1} \oplus S_{n-1} \to S_{m+n-1} : (u,v) \to Fu + Gv,$$

où S_d est l'espace des polynômes homogènes de degré d en les variables x, y.

Beaucoup d'autres formules et propriétés sont connues pour ce résultant, le chapitre 12 de [GKZ94] les rassemble (presque) toutes.

1.2 Résultant sur un espace projectif

Nous nous intéressons ici à la généralisation directe du résultant de deux polynômes sur $\mathbb{P}^1$, à savoir, le résultant de $n+1$ polynômes sur $\mathbb{P}^n$. Historiquement, ces travaux sont dus à F.S. Macaulay qui établit en 1902 l'existence d'un tel résultant et montra qu'il s'exprime toujours comme le quotient de deux déterminants dans son article [Mac02]. Ce n'est qu'en 1991, avec le succès croissant des techniques de calcul, que J.P. Jouanolou publie son article *"Le formalisme du résultant"* ([Jou91]) qui donna un nouveau "souffle" au résultant et laisse entrevoir, encore aujourd'hui, des applications prometteuses (voir [Jou97]).

On considère $n+1$ polynômes homogènes génériques en $n+1$ variables, i.e.

$$f_i = \sum_{|\alpha|=d_i} c_{i,\alpha} x^\alpha, \ i = 0, \dots, n,$$

où α est un multi-indice $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ et où l'abréviation x^α désigne le monôme $x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$. Le polynôme f_i est donc de degré d_i. Les $c_{i,\alpha}$ sont les coefficients des polynômes, que l'on peut spécialiser dans $\mathbb{K}$. On note A l'anneau universel des coefficients, $A = \mathbb{K}[c_{i,\alpha}, \ i = 0, \dots, n, \ |\alpha| = d_i]$. On a alors le résultat suivant : il existe un polynôme irréductible de A, noté $\mathrm{Res}(f_0, \dots, f_n)$ et appelé résultant multivarié de $f_0, \dots, f_n$, qui pour toute

spécialisation des coefficients $c_{i,\alpha}$ dans $\mathbb{K}$, s'annule si et seulement si les polynômes $f_0, \dots, f_n$ ont une solution commune dans $\mathbb{P}^n$. De plus ce résultant est, pour tout $i = 0, \dots, n$, homogène en les coefficients du polynôme f_i de degré $\prod_{j \neq i} d_j$. Ce dernier entier est exactement, par le théorème de Bézout, le nombre générique de solutions du système $\{f_0, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\}$. Lorsque $n = 1$, ce résultant coïncide avec le résultant de deux polynômes du paragraphe précédent.

Ce résultant peut être calculé explicitement grâce à la formule dite de Macaulay, qui l'exprime comme un quotient de deux déterminants. Pour énoncer ce résultat, nous avons besoin de poser quelques notations. On pose $\nu_{\mathbf{d}} = d_0 + \ldots + d_n - n$, et on se donne un entier $t \geq \nu_{\mathbf{d}}$. On définit

$$\mathrm{Mon}(t) = \{x^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \ : \ |\alpha| = t\},$$

et $i_\alpha = min(j \ : \ x_j^{d_j}$ divise $x^\alpha)$. L'entier i_α existe toujours si $|\alpha| \geq \nu_{\mathbf{d}}$. On définit alors, après avoir ordonné $\mathrm{Mon}(t)$ (par ordre lexicographique par exemple), la matrice suivante $M(t)$, dite de Macaulay :

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} x_1^t & \dots & x^\alpha & \dots & x_n^t \end{array} & \\
\begin{pmatrix}
 & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & \\
\dots & \dots & \frac{x^\alpha}{x_{i_\alpha}^{d_{i_\alpha}}} f_{i_\alpha} & \dots & \dots \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & &
\end{pmatrix} &
\begin{array}{c} x_1^t \\ \vdots \\ x^\alpha \\ \vdots \\ x_n^t \end{array}
\end{array}$$

dont la colonne indexée par le monôme $x^\alpha \in \mathrm{Mon}(t)$ correspond à l'écriture du polynôme $\frac{x^\alpha}{x_{i_\alpha}^{d_{i_\alpha}}} f_{i_\alpha}$ sur $\mathrm{Mon}(t)$. Chaque entrée de $M(t)$ est donc soit nulle, soit un coefficient $c_{i,\alpha}$. On note $D(t)$ le déterminant de cette matrice, on a alors

$$D(t) = \mathrm{Res}(f_0, \dots, f_n) H(f_0, \dots, f_{n-1}),$$

$H(f_0, \dots, f_{n-1})$ étant un polynôme de A ne dépendant pas des coefficients du polynôme f_n. En effet, si ξ est une racine commune des polynômes $f_0, \dots, f_n$, alors le vecteur

$$(\xi_1^t, \dots, \xi^\alpha, \dots, \xi_n^t)$$

est un élément du noyau de la transposée de $M(t)$. On en déduit que $D(t)$ s'annule dès que les polynômes $f_0, \dots, f_n$ ont une racine commune, c'est-à-dire que $\mathrm{Res}(f_0, \dots, f_n)$ divise $D(t)$. De plus, par construction, la matrice $D(t)$ ne contient que $d_0 d_1 \dots d_{n-1}$ colonnes faisant intervenir f_n, ce qui est exactement le degré du résultant en les coefficients de ce polynôme. Cela

montre que $H(f_0, \ldots, f_{n-1})$ est bien indépendant des coefficients du polynôme f_n.

Pour toute permutation σ de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, n\}$, on peut construire la même matrice pour les polynômes $f_{\sigma(0)}, \ldots, f_{\sigma(n)}$. On obtient une matrice $M^\sigma(t)$ dont on note le déterminant $D^\sigma(t)$. Le polynôme $D^\sigma(t)$ est ainsi un multiple du résultant dont le terme parasite H^σ ne dépend pas des coefficients de $f_{\sigma(n)}$. On obtient ainsi la propriété

$$\mathrm{Res}(f_0, \ldots, f_n) = \mathrm{pgcd}_{\sigma \in \mathcal{S}_n}(D^\sigma(t)).$$

En fait il suffit de prendre le pgcd de $n+1$ polynômes $D^\sigma(t)$ pour obtenir le résultant, chacun des $D^\sigma(t)$ devant être indépendant des coefficients d'un polynôme f_i distinct. Ce résultat fournit un premier algorithme pour calculer le résultant multivarié.

Une autre façon de calculer ce résultant multivarié est donnée par une formule, dite "formule à la Macaulay", démontrée par F.S. Macaulay dans [Mac02]. Soit

$$\mathrm{Dod}(t) = \{x^\alpha \,:\, |\alpha| = t \text{ et } \exists i, j \; i \neq j \text{ tel que } x_i^{d_i} x_j^{d_j} \text{ divise } x^\alpha\} \subset \mathrm{Mon}(t).$$

Notant $N(t)$ la matrice carré extraite de $M(t)$ correspondant au monômes $\mathrm{Dod}(t)$, et $\Delta(t)$ son déterminant, on a alors la relation :

$$D(t) = \mathrm{Res}(f_0, \ldots, f_n)\Delta(t).$$

Le résultant multivarié possède beaucoup de propriétés, elles sont toutes (ou presque) énumérées dans [Jou91]. D'autres types de matrices sont aussi utilisées pour le calculer, comme la matrice de Jouanolou en quatre blocs dans [Jou97] à base de "formes de Morley", ou bien aussi la matrice Bézoutienne, que nous étudierons plus tard, et qui ne fournit pour sa part qu'un multiple du résultant multivarié.

Avant de parler de la construction du résultant torique et de ses motivations, nous rappelons brièvement le lien qu'il existe entre notre résultant multivarié et le complexe de Koszul associé aux polynômes $f_0, \ldots, f_n$. Ce lien est à la base des généralisations que nous verrons de ce résultant, c'est en quelque sorte un lien géométrie-algèbre.
Soit l'anneau gradué $R = A[x_0, \ldots, x_n]$ tel que $\deg(x_i) = 1$ et $\deg(c_{i,\alpha}) = 0$. On pose également $E = R^{n+1} = Re_0 \oplus \ldots \oplus Re_n$. Le complexe de Koszul associé aux polynômes $f_0, \ldots, f_n$ est alors défini par

$$0 \to \wedge^{n+1} E \xrightarrow{\partial_{n+1}} \ldots \xrightarrow{\partial_3} \wedge^2 E \xrightarrow{\partial_2} \wedge^1 E \simeq E \xrightarrow{\partial_1} \wedge^0 E \simeq R,$$

où les différentielles ∂_s sont définies par

$$\partial_s(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}) = \sum_{p=1}^{s} (-1)^{p+1} f_{i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge \hat{e_{i_p}} \wedge \ldots \wedge e_{i_s},$$

avec $i_1 < \ldots < i_s$. La première différentielle est donc définie par

$$\partial_1(e_i) = f_i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Soit l'entier $\nu = \sum_{i=0}^{n} d_i - n$ et un entier quelconque $t \geq \nu$. Si l'on tronque notre complexe de Koszul en degré t, on obtient le complexe

$$0 \to R_{[t-\sum_{i=0}^{n} d_i]} \xrightarrow{\partial_{n+1}^s} \ldots \xrightarrow{\partial_2^s} R_{[t-d_0]}e_0 \oplus \ldots \oplus R_{[t-d_n]}e_n \xrightarrow{\partial_1^s} R_{[t]}.$$

A bien y regarder, on s'aperçoit que la matrice de l'application ∂_1^s est la matrice de multiplication par les polynômes $f_0, \ldots, f_n$ à valeur dans l'espace des monômes de degré total t, c'est-à-dire que les matrices de Macaulay $D(t)$ apparaissent comme des mineurs carrés maximaux de la matrice de ∂_1^s. Nous verrons et démontrerons par la suite comme un cas particulier que le résultant multivarié est le déterminant de ce complexe (voir [GKZ94], appendice A, pour la notion de déterminant de complexe) tronqué en un certain degré qui est lié à la régularité de l'idéal $(f_0, \ldots, f_n) \in R$. En particulier cela entraine la propriété donnant le résultant multivarié comme le pgcd des matrices de Macaulay.

Le résultant multivarié nous permet donc d'éliminer des variables, à la condition que le système considéré soit suffisamment générique. Par exemple considérons le système suivant de trois polynômes définis sur $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{cases} f_0 = a_0z^2 + a_1zx + a_2zy + a_3xy \\ f_1 = b_0z^2 + b_1zx + b_2zy + b_3xy \\ f_2 = c_0z^2 + c_1zx + c_2zy + c_3xy \end{cases} \tag{1.1}$$

On s'aperçoit que les polynômes f_0, f_1, f_2 ne possèdent pas les monômes x^2 et y^2, et ne sont donc pas génériques comme polynômes de degré 2 sur $\mathbb{P}^2$. La conséquence est immédiate; le résultant multivarié de ce système est identiquement nul puisque les points $(x : y : z) = (1 : 0 : 0)$ et $(x : y : z) = (0 : 1 : 0)$ sont solutions de ce système quels que soient les coefficients $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Il nous faut donc prendre en compte la "géométrie" des polynômes f_0, f_1, f_2 pour construire un résultant non dégénéré pour ce type de système; c'est l'objet du résultant creux.

1.3 Résultant creux

Le résultant creux a été introduit au début des années 90 par M.M. Kapranov, B. Sturmfels, et A.V. Zelevinsky dans [KSZ92], puis largement développé dans [GKZ94]. Ce résultant tient compte de la "géométrie" des polynômes, et pas uniquement de leur de degré. Il permet d'obtenir des matrices plus petites que la matrice de Macaulay pour le résultant multivarié, et permet aussi d'éliminer des variables lorsque ce résultant multivarié est

identiquement nul, comme pour le système (1.1) par exemple. Nous rappelons dans ce paragraphe quelques résultats et constructions de bases pour le résultant creux, qui demeure un sujet de recherche très actif encore aujourd'hui.

Le résultant torique ne différencie pas les polynômes par leur degré, mais par la géométrie des monômes qui les composent. On peut ainsi considérer non plus des polynômes classiques, mais des polynômes de *Laurent* en n variables dans l'anneau $\mathbb{K}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}] = \mathbb{K}[\mathbf{x}, \mathbf{x}^{-1}]$. On se donne $n+1$ polynômes de Laurent $f_i(\mathbf{x})$ dont le support, c'est-à-dire les exposants des monômes dont le coefficient est non nul, définit un ensemble fini $A_i \subset \mathbb{Z}^n$. Ces polynômes de Laurent sont donc de la forme

$$f_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in A_i} c_{i,\alpha}\, \mathbf{x}^\alpha \quad , \quad i = 0, \dots, n.$$

À chaque ensemble fini $A_i \subset \mathbb{Z}^n$, on peut associer une variété X_{A_i} définie comme la clôture algébrique (de Zariski) de l'image de l'application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : (\mathbb{K}^*)^n & \to & \mathbb{P}^{N_i} \\ \mathbf{x} & \mapsto & (\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha \in A_i}. \end{array} \tag{1.2}$$

où $N_i = |A_i| - 1$. X_{A_i} est une variété torique projective (une variété torique n'est pas supposée normale ici, voir [GKZ94], Chapitre 5). Le polynôme de Laurent f_i peut alors être vu comme une forme linéaire sur la variété torique projective X_{A_i}, donnant ainsi un moyen de compactifier (ou plutôt "d'homogénéiser") f_i.
Les supports A_i, pour $i = 0, \dots, n$, n'étant pas supposés identiques, il nous faut construire une variété torique projective qui permet d'homogénéiser tous les f_i. On considère ainsi la variété X définie comme la clôture algébrique (de Zariski) de l'image de l'application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : (\mathbb{K}^*)^n & \to & X_{A_0} \times \ldots \times X_{A_n} \\ \mathbf{x} & \mapsto & (\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha \in A_0} \times \ldots \times (\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha \in A_n}. \end{array} \tag{1.3}$$

Sous les conditions que chaque A_i engendre $\mathbb{R}^n$ comme un espace affine, et que tous les A_i réunis engendrent $\mathbb{Z}^n$ comme un réseau affine, il existe un polynôme irréductible, appelé résultant creux et noté $\mathrm{Res}_X(f_0, \dots, f_n)$, en les coefficients des polynômes f_i qui s'annule pour une spécialisation de ces coefficients si et seulement si les polynômes f_i admettent une racine commune sur la variété projective torique X. Ce résultant creux a un degré connu en les coefficients de chaque polynôme f_i, c'est le *volume mixte* des supports A_j pour $j \neq i$, c'est-à-dire le coefficient de $\prod_{j \neq i} \lambda_j$ dans

$$\mathrm{Vol}\Big(\sum_{j \neq i} \lambda_i\, A_i\Big) = \mathrm{MV}\big(\{A_j\}_{j \neq i}\big) \prod_{j \neq i} \lambda_j + \cdots$$

où Vol désigne le volume euclidien usuel (voir [GKZ94, PS93]).

Les méthodes pour construire des matrices semblables aux matrices de Macaulay pour calculer le résultant creux (ou un multiple) sont basées sur des propriétés géométriques des supports A_i. Ces constructions sont données dans les travaux [CP93, CE93]. Elles adoptent le schéma suivant : Pour tout polytope $Q \subset \mathbb{Z}^n$, et pour tout vecteur non nul $\delta \in \mathbb{R}^n$, on note Q^δ l'ensemble des points entiers de Q qui ne sont pas sur les faces F de Q, et tels que le produit scalaire $n_F \cdot \delta > 0$, où n_F est le vecteur normal extérieur de F. On considère alors la transformation linéaire (bien définie) suivante :

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathbf{x}^{E_0} \rangle \times \cdots \times \langle \mathbf{x}^{E_n} \rangle & \to & \langle \mathbf{x}^F \rangle \\ (q_0, \ldots, q_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_i f_i, \end{array} \tag{1.4}$$

où $E_i = (\oplus_{i \neq j} A_i)^\delta$, $F = A^\delta$ (on identifie ici le support A_i et son polytope de Newton associé, qui est l'enveloppe convexe de A_i). Exploitant les propriétés d'une triangulation régulière de A, il est possible d'extraire une matrice carrée de la matrice de (1.4), telle que, pour un choix suffisamment générique du vecteur δ, son déterminant soit un multiple génériquement non nul du résultant creux, et de degré le volume mixte de $A_1, \ldots, A_n$ en les coefficients de f_0 (voir [CE93]). On peut ainsi également retrouver le résultant creux comme le pgcd de $n+1$ déterminants. Il est également possible d'obtenir le résultant creux comme le déterminant d'un complexe; le chapitre suivant fournit une méthode systématique pour obtenir un tel résultat, suivant les travaux de Gelfand, Kapranov et Zelevinsky dans [GKZ94].

Si l'on considère à présent le système (1.1) du paragraphe précédent, on peut voir que son résultant creux est non dégénéré. Ainsi partant du système suivant sur $\mathbb{A}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy \\ f_1 = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy \\ f_2 = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 xy \end{array} \right.$$

on s'aperçoit que la "bonne" façon d'homogénéiser ce système pour éliminer des variables n'est pas l'homogénéisation standard du système sur $\mathbb{P}^2$ qui conduit à un résultant nul, mais l'homogénéisation de ce système à la variété torique projective associée au support de ce système.

Considérons à présent le système suivant sur $\mathbb{A}^2$ qui consistent en l'intersection de trois cercles :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 (x^2 + y^2) \\ f_1 = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 (x^2 + y^2) \\ f_2 = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 (x^2 + y^2) \end{array} \right. \tag{1.5}$$

Le résultant multivarié de ce système, qui consiste à regarder les équations dans $\mathbb{P}^2$, est identiquement nul puisque les deux points à l'infini $(0 : 1 : i)$ et $(0 : 1 : -i)$ sont solutions indépendamment des paramètres. On voit également que le résultant creux de ce système, consistant à regarder les équations sur la variété torique projective X définie comme la clôture algébrique de l'image de l'application

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{K}^*)^2 & \to & \mathbb{P}^4 \\ (x, y) & \mapsto & (1 : x : y : x^2 : y^2), \end{array} \tag{1.6}$$

est lui aussi identiquement nul, puisque les points $(0 : 0 : 0 : 1 : -1)$ et $(0 : 0 : 0 : 1 : 1)$ sont solutions indépendamment des paramètres. Ainsi on voit apparaître la nécessité de construire le résultant sur différents types de variétés afin de pouvoir définir, pour chaque système que l'on voudrait considérer, un résultant non identiquement nul pour ce dernier.

Chapitre 2

Étude géométrique du résultant

Les trois types de résultants décrits dans le chapitre précédent peuvent en fait être vus comme des cas particuliers d'une construction plus générale du résultant. Cette construction apparaît dans les travaux de I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, B. Sturmfels et A.V. Zelevinsky, notamment dans [KSZ92] et [GKZ94]. Elle fournit un cadre général pour parler de résultant sur une variété projective (sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$) et nécessite le langage de la géométrie algébrique moderne. Ainsi, plutôt que de considérer des polynômes comme nous l'avons fait jusqu'à maintenant, pour une variété générale X nous devons considérer des sections globales de fibrés en droites.

La première partie de ce chapitre est consacrée au rappel de la notion de résultant introduite dans [GKZ94] : étant donné un fibré vectoriel E de rang $m+1$ très ample sur une variété X projective irréductible de dimension m, il existe un polynôme irréductible sur l'espace vectoriel des sections globales $H^0(X,E)$ appelé résultant. Ce résultant s'annule en $f \in H^0(X,E)$ si et seulement si f s'annule en un point de X. Par définition ce résultant est non identiquement nul uniquement pour des systèmes qui n'ont pas de solutions au point générique (E est supposé très ample). C'est par exemple le cas du résultant multivarié (respectivement du résultant torique) qui est non identiquement nul si et seulement si le système considéré n'a génériquement pas de solutions sur un l'espace projectif (respectivement la variété torique projective) associé au système. Mais les exemples pratiques de systèmes qui possèdent génériquement des solutions et pour lesquels il serait avantageux de construire un objet résultant ne manquent pas (on peut citer l'exemple des trois cercles 1.5, paragraphe 1.2, chapitre 1). La deuxième partie de ce chapitre est donc consacrée à la définition d'un résultant, appelé résultant résiduel, qui permet d'établir un résultant pour des systèmes possédant des points bases. Ce résultant résiduel est en fait construit comme le résultant d'un système obtenu par éclatement le long des points bases.

2.1 Résultant général

Soit X une variété projective. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X et $V \subset H^0(X, \mathcal{L})$ un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel fini de ses sections globales. On dit que V est très ample sur X si V engendre $\mathcal{L}$ en tout point de X et si l'application

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{P}(V) \\ x & \mapsto & \{f \in V : f(x) = 0\} \end{array}$$

est un plongement, c'est-à-dire sépare les points et les vecteurs tangents (voir [GH78], p.180). Cette définition équivaut à dire que pour tout sous-schéma z zéro-dimensionnel de degré 2 de X, le morphisme naturel de restriction

$$V \to H^0(z, \mathcal{L}_{|z})$$

est surjectif. On note $\mathcal{H}_2(X)$ le schéma de Hilbert de X qui paramétrise les sous-schémas zéro-dimensionnels de degré 2 (i.e. dont le polynôme de Hilbert est exactement 2) de X. On pose alors :

Définition 2.1.1 *Soient E est un fibré vectoriel sur X et V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$. On dit que V est très ample sur X si pour tout $z \in \mathcal{H}_2(X)$ le morphisme de restriction $V \to H^0(z, E_{|z})$ est surjectif.*

Remarquons que si E se scinde en une somme directe de fibrés en droites $E = \mathcal{L}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_m$, et si V est une somme $V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_m$ tel que pour tout $i = 0, \ldots, m$ $V_i \subset H^0(X, \mathcal{L}_i)$, dire que V est très ample sur X est alors équivalent à dire que chacun des V_i est très ample sur X.

La notion de résultant général a été introduite par I.M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky dans leur livre [GKZ94]. Soient E un fibré vectoriel de rang $m+1$ sur une variété projective irréductible X de dimension m, et V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$. On note ∇_V la variété

$$\nabla_V = \{f \in \mathbb{P}(V) \ : \ \exists x \in X \ f(x) = 0\} \subset \mathbb{P}(V),$$

dite variété *V-résultante*. Si V est très ample alors ∇_V est une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}(V)$ (voir [GKZ94], chapitre 3.3.C) et on définit le résultant de V, que l'on note Res_V, comme l'équation irréductible de ∇_V. C'est un polynôme homogène sur V défini à une constante multiplicative non nulle près; il vérifie

$$\mathrm{Res}_V(f) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in X : f(x) = 0.$$

La proposition suivante redémontre ce résultat avec des hypothèses légèrement plus faibles qui nous seront utiles par la suite. Pour l'énoncer il nous faut poser la définition suivante :

Définition 2.1.2 *Soient E un fibré vectoriel sur une variété projective X et V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$, nous dirons que V est très ample*

presque partout s'il existe un ouvert dense U de X tel que pour tout $z \in \mathcal{H}_2(U)$ (schéma de Hilbert des sous-schémas de polynôme de Hilbert 2 de U) le morphisme de restriction $V \to H^0(z, E_{|z})$ est surjectif.

Proposition 2.1.3 *Soit E un fibré vectoriel de rang $m+1$ sur une variété projective irréductible X de dimension m. Soit V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$ qui engendre E sur X et qui est très ample presque partout. Alors la variété V-résultante*

$$\nabla_V = \{f \in \mathbb{P}(V) \ : \ \exists x \in X \ f(x) = 0\} \subset \mathbb{P}(V),$$

est une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}(V)$ de degré $\int_X c_m(E)$, où $c_m(E)$ désigne la $m^{\text{ième}}$ classe de Chern de E.

On définit alors le *V-résultant*, que l'on note Res_V, comme l'équation irréductible de l'hypersurface ∇_V. Res_V est un polynôme homogène sur V défini à une constante multiplicative non nulle près, de degré $\int_X c_m(E)$; il vérifie

$$\mathrm{Res}_V(f) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in X : f(x) = 0.$$

Preuve. On pose $Y = \mathbb{P}(V)$. On considère la variété d'incidence

$$W = \{(x, f) \in X \times Y : f(x) = 0\} \subset X \times Y,$$

munie de ses deux projections naturelles

$$X \xleftarrow{\pi_1} W \xrightarrow{\pi_2} Y.$$

On note p_1 la projection $X \times Y \to X$ et p_2 la projection $X \times Y \to Y$. Puisque V engendre E sur X, pour tout point $x \in X$ la fibre ${p_1}^{-1}(x)$ est un espace linéaire de codimension $m+1$ de Y. Comme X est une variété projective irréductible, nous déduisons par le théorème des fibres (voir [Sha74] p.60) que W est une variété projective irréductible de dimension

$$\mathrm{dim} W = \mathrm{dim} V - 2.$$

La variété résultante ∇_V est clairement la projection par π_2 de W, i.e. $\nabla_V = \pi_2(W)$. En fait cette projection est birationnelle, c'est-à-dire que l'application

$$\pi_2 : W \to \nabla_V$$

est birationnelle. Pour montrer cela remarquons tout d'abord que les fibres ${p_2}^{-1}(f)$ du morphisme p_2 sont en correspondances avec les zéros de la section f sur X. Pour des raisons de dimension, une section $f \in Y$ suffisamment générique ne s'annule pas sur X. Il nous faut donc montrer qu'une section $f \in \nabla_V$ suffisamment générique s'annule en un seul point lisse de X. Comme X est une variété sur un corps $\mathbb{K}$, le lieu de ses points singuliers est de

codimension au moins 1 ([Har77], II.8.16). Ainsi X est l'union disjointe d'un ouvert dense et lisse U, sur lequel V est très ample, et de son complémentaire F de codimension au moins 1. Puisque V engendre E sur X, la variété d'incidence

$$W_F = \{(x, f) \in F \times Y : f(x) = 0\}$$

est munie d'une structure de fibré vectoriel sur F; W_F est donc de dimension au plus $m - 1 + \dim V - 1 - m - 1 = \dim V - 3$. On en déduit qu'une section suffisamment générique $f \in \nabla_V$ s'annule sur U. Maintenant l'hypothèse que V est très ample sur U montre qu'une section suffisamment générique $f \in \nabla_V$ s'annule en un point lisse de U, et donc que le morphisme $\pi_2 : W \longrightarrow \nabla_V$ est birationnel. Cela prouve que $\nabla_V = \pi_{2*}(W)$ est un diviseur irréductible et réduit de Y.

Pour calculer le degré de ∇_V on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \int_Y}\big\downarrow \\ X & \xrightarrow{\int_X} & \mathrm{Spec}(\mathbb{K}). \end{array}$$

La section canonique du faisceau inversible de $\mathcal{O}_{X\times Y}$-modules

$$\mathcal{W} = {p_1}^*(E) \otimes {p_2}^*(\mathcal{O}_Y(1))$$

s'annule exactement sur W qui est de codimension $m + 1$. La classe de ∇_V dans l'anneau de Chow de Y est donc

$$p_{2*}\big(c_{m+1}(\mathcal{W})\big) = p_{2*}\Big(c_{m+1}({p_1}^*(E) \otimes {p_2}^*(\mathcal{O}_Y(1)))\Big) = dh,$$

où d désigne le degré de ∇_V et h le générateur de l'anneau de Chow de $Y = \mathbb{P}(V)$. Soit le polynôme de Chern de E

$$c_t(E) = \prod_{i=1}^{m+1} (1 + c_i t).$$

Si l'on pose $H = {p_2}^*(h)$ et $C_i = {p_1}^*(c_i)$ pour tout $i = 1, \dots, m + 1$, on a alors

$$c_t({p_1}^*(E) \otimes {p_2}^*(\mathcal{O}_Y(1))) = \prod_{i=1}^{m+1} (1 + (C_i + H)t),$$

et donc

$$c_{m+1}({p_1}^*(E) \otimes {p_2}^*(\mathcal{O}_Y(1))) = \prod_{i=1}^{m+1} (C_i + H) = \prod_{i=1}^{m+1} C_i + (\sum_{i=1}^{m+1} \prod_{j\neq i} C_i)H + \dots .$$

On en déduit que

$$p_{2*}\big(c_{m+1}(\mathcal{W})\big) = p_{2*}(\sum_{i=1}^{m+1}\prod_{j\neq i} C_i)h,$$

et le degré de la variété résultante est donc

$$d = \int_Y \sum_{i=1}^{m+1}\prod_{j\neq i} p_{2*}({p_1}^*(c_i)) = \int_X c_m(E).$$

□

Le V-résultant que nous venons de définir ne dépend pas de la variété X, mais de la classe d'équivalence birationnelle de X. En d'autres termes, le V-résultant est invariant par transformation birationnelle.

Proposition 2.1.4 *On suppose les hypothèses de la proposition 2.1.3 vérifiées. Soient X' une variété projective irréductible de dimension m et $g : X' \to X$ un morphisme projectif birationnel. Alors $\nabla_{g^*(V)} \simeq \nabla_V$ sous l'isomorphisme naturel $i : g^*(V) \simeq V$.*

Preuve. Tout d'abord remarquons que $g^*(V)$ engendre $g^*(E)$ sur X'. De plus puisque g est birationnel, $g^*(V)$ est très ample presque partout, et donc $\nabla_{g^*(V)}$ est une hypersurface irréductible de $\mathbb{P}(g^*(V))$.
Le morphisme g étant birationnel, il existe deux ouverts denses $U' \subset X'$ et $U \subset X$ tels que $g : U' \to U$ est un isomorphisme. Par construction les deux variétés d'incidences

$$W = \{(x, f) \in X \times \mathbb{P}(V) \ : \ f(x) = 0\},$$

$$W' = \{(x, g^*(f)) \in X' \times \mathbb{P}(g^*(V)) \ : \ g^*(f)(x) = 0\},$$

restreintes respectivement à $U' \times \mathbb{P}(g^*(V))$ et $U \times \mathbb{P}(V)$ sont donc isomorphes par $g \times i$. On en déduit que leur projection respective sur $\mathbb{P}(g^*(V))$ et $\mathbb{P}(V)$ sont isomorphes par l'isomorphisme naturel $i : g^*(V) \simeq V$. □

Lorsque le fibré vectoriel E se scinde en $m+1$ fibrés en droites et que V se décompose en $V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_m$ où $V_i \subset H^0(X, \mathcal{L}_i)$, on retrouve le résultant dit *mixte* étudié par I.M. Gelfand, M.M. Kapranov et A.V. Zelevinsky dans [GKZ94], chapitre 3.3.A. Dans ce cas le résultant a une structure un peu plus riche, il est multihomogène.

Proposition 2.1.5 *Soient $\mathcal{L}_0, \ldots .\mathcal{L}_m$ des fibrés en droites sur une variété projective irréductible X de dimension m. Pour tout $i = 0, \ldots, m$ on se donne un sous-espace vectoriel V_i de $H^0(X, \mathcal{L}_i)$ qui engendre $\mathcal{L}_i$ sur X et qui est très ample presque partout. Soient $E = \mathcal{L}_0 \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_m$ et $V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_m$, alors Res_V est un polynôme irréductible sur V multihomogène. Il est homogène par rapport à chacun des V_i de degré $\int_X \prod_{j\neq i} c_1(\mathcal{L}_j)$.*

Preuve. Chacun des V_i étant très ample presque partout et engendrant $\mathcal{L}_i$ sur X, V est donc lui aussi très ample presque partout et engendre E sur X. Res_V est donc bien défini; il est obtenu en projetant la variété d'incidence

$$W = \{(x, f_0, \ldots, f_m) \in X \times \mathbb{P}(V) : f_0(x) = \ldots = f_m(x) = 0\} \subset X \times \mathbb{P}(V)$$

sur $\mathbb{P}(V)$. Multiplier chacun des f_i par une constante non nulle ne change pas cette variété d'incidence, ce qui implique que Res_V est homogène par rapport à chaque V_i. L'injection naturelle

$$H^0(\prod_{i=0}^{m} \mathbb{P}(V_i), \mathcal{O}(d_0; \ldots; d_m)) \hookrightarrow H^0(\mathbb{P}(\prod_{i=0}^{m} V_i), \mathcal{O}(\sum_{i=0}^{m} d_i))$$

qui correspond juste à regarder un polynôme multihomogène comme un polynôme homogène, montre alors qu'il faut projeter W non pas sur $\mathbb{P}(V)$, mais sur $Y = \prod_{i=0}^{m} \mathbb{P}(V_i)$ pour obtenir le degré de Res_V en chacun des V_i. On considère donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y \\ {\scriptstyle p_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle \int_Y}\big\downarrow \\ X & \xrightarrow{\int_X} & \mathrm{Spec}(\mathbb{K}). \end{array}$$

La section canonique du faisceau inversible de $\mathcal{O}_{X \times Y}$-modules

$$\mathcal{W} = \bigoplus_{i=0}^{m} {\pi_1}^*(\mathcal{L}_i) \otimes {\pi_2}^*\big(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_i)}(1)\big)$$

s'annule exactement sur W qui est de codimension $m+1$. Notant h_i le générateur de l'anneau de Chow de $\mathbb{P}(V_i)$, la classe de Res_V dans l'anneau de Chow de Y est

$$\pi_{2*}\big(c_{m+1}(\mathcal{W})\big) = \pi_{2*}\Big(\prod_{i=0}^{m} c_1\big({\pi_1}^*(\mathcal{L}_i) \otimes {\pi_2}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_i)}(1))\big)\Big) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \cdot h_i \ .$$

On pose $H_i = \pi_2^*(h_i)$ et $L_i = \pi_1^*\big(c_1(\mathcal{L}_i)\big)$. Les règles de calcul des classes de Chern nous donnent

$$c_1\big({\pi_1}^*(\mathcal{L}_i) \otimes {\pi_2}^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V_i)}(1))\big) = L_i + H_i,$$

et donc, par identification,

$$\alpha_i = \int_Y \pi_{2*}\Big(\prod_{j \neq i} L_j\Big).$$

La formule de projection donne ainsi

$$\alpha_i = \int_Y \pi_{2*}{\pi_1}^*\left(\prod_{j\neq i} c_1(\mathcal{L}_j)\right) = \int_X \prod_{j\neq i} c_1(\mathcal{L}_j).$$

□

Remarque 2.1.6 L'hypothèse que chaque V_i est très ample presque partout est nécessaire pour que Res_V soit un polynôme irréductible de degré attendu en les coefficients de chacun des f_i. En effet, considérons l'exemple suivant : Soient $X = \mathbb{P}^2$ et $V_0 = V_1 = V_2$ engendrés par x_0^2, x_1^2, x_2^2. Cette situation correspond à un système de la forme

$$\begin{cases} f_0(x) &= c_{0,0}x_0^2 + c_{1,0}x_1^2 + c_{2,0}x_2^2 \\ f_1(x) &= c_{0,1}x_0^2 + c_{1,1}x_1^2 + c_{2,1}x_2^2 \\ f_2(x) &= c_{0,2}x_0^2 + c_{1,2}x_1^2 + c_{2,2}x_2^2 \end{cases}.$$

Nous voyons aisément que la condition pour que ce système possède une solution est que le déterminant de la matrice $(c_{i,j})$ s'annule. Par conséquent, elle est de degré 1 en les coefficients de chaque f_i. Maintenant, si nous calculons le degré du résultant donné par la formule de la proposition 2.1.5, nous obtenons $\alpha_i = 4$ (c'est un résultant multivarié classique). La raison est que dans cette situation V_0, V_1, V_2 ne sont pas très amples. Les solutions arrivent par groupe de 4; ∇_V est donc égale à 4 fois le diviseur réduit associé au déterminant de la matrice $(c_{i,j})$.

La définition que nous venons de donner du résultant permet de retrouver le résultant multivarié et le résultant torique que nous avons vu dans le premier chapitre.

Résultant multivarié

Le résultant multivarié de $m+1$ polynômes homogènes sur $\mathbb{P}^m$ de degré respectif $d_0, \ldots, d_m$ correspond au résultant pour lequel on prend $X = \mathbb{P}^m$, $\mathcal{L}_i = \mathcal{O}(d_i)$ et $V_i = H^0(X, \mathcal{L}_i)$ pour $i = 0, \ldots, m$. On retrouve que le degré de ce résultant en les coefficients du polynôme f_i est $(\prod_j d_j)/d_i$.

Résultant creux

Le résultant creux peut aussi être vu comme un cas particulier du résultant que nous venons de définir, comme décrit dans [GKZ94], chapitre 8. Soient $A_0, \ldots, A_m \subset \mathbb{Z}^m$ les supports de $m+1$ équations. On désigne par X la variété torique projective associée à ces m supports, c'est-à-dire la clotûre algébrique de l'image de l'application

$$\begin{aligned} \sigma : (\mathbb{K}^*)^m &\rightarrow X_{A_0} \times \ldots \times X_{A_m} \\ \mathbf{x} &\mapsto (\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha\in A_0} \times \ldots \times (\mathbf{x}^\alpha)_{\alpha\in A_m}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Notant $\mathbf{C}^{A_i}$ l'espace des polynômes à support dans A_i, on voit alors que par construction

$$X \subset X_{A_0} \times \ldots \times X_{A_m} \subset \mathbb{P}(\mathbf{C}^{A_0{}^*}) \times \ldots \mathbb{P}(\mathbf{C}^{A_m{}^*}).$$

On définit alors le fibré inversible $\mathcal{L}_i$ sur X comme étant l'image inverse du fibré $\mathcal{O}(1)$ du facteur $\mathbb{P}(\mathbf{C}^{A_i{}^*})$. On obtient alors, pour tout $i = 0, \ldots, m$, une application injective

$$\mathbf{C}^{\mathbf{A_i}} \to H^0(X, \mathcal{L}_i),$$

et le résultant creux correspond alors, par ces injections, au résultant mixte sur X des fibrés $\mathcal{L}_0, \ldots, \mathcal{L}_m$ ([GKZ94], proposition 1.5).

2.2 Résultant résiduel

Soit E est un fibré vectoriel de rang $m+1$ sur une variété algébrique projective irréductible X de dimension m. Dans le paragraphe précédent nous avons vu que si V est un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$ qui engendre E sur X et qui est très ample presque partout, alors il est possible de définir son résultant Res_V. Sous ces hypothèses le système V est sans point base. Si l'on suppose que V définit des points bases alors la variété V-résultante est tout $\mathbb{P}(V)$, ce que l'on peut traduire par le V-résultant est identiquement nul. Il nous faut donc chercher un substitut au V-résultant que nous avons construit dans le paragraphe précédent lorsque V définit des points bases; c'est l'objet de cette section.

Soit V un sous-espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ de $H^0(X, E)$ et soit U l'ouvert non vide de X sur lequel V engendre E. On définit un faisceau cohérent d'idéaux $\mathcal{I}$ sur X comme l'image du morphisme naturel

$$V \otimes E^* \longrightarrow \mathcal{O}_X.$$

Nous avons $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_x$ si et seulement si $x \in U$, et donc le sous-schéma fermé S correspondant à $\mathcal{I}$ a pour support $X - U$. On note $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X le long de $\mathcal{I}$. $\tilde{X}$ est alors une variété projective irréductible de dimension m (voir [Har77], proposition II.7.16). On note $\tilde{\mathcal{I}} = \pi^{-1}\mathcal{I}.\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ le faisceau d'idéaux image inverse de $\mathcal{I}$ par π, qui est un faisceau inversible sur $\tilde{X}$ par propriété de l'éclatement (voir [Har77], proposition II.7.13).
Par définition de $\mathcal{I}$, on a un morphisme surjectif de faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules

$$V \otimes E^* \to \mathcal{I} \to 0.$$

En appliquant le foncteur π^* on obtient la suite exacte

$$\pi^*(V) \otimes \pi^*(E^*) \to \pi^*(\mathcal{I}) \to 0.$$

Le faisceau d'idéaux image inverse $\tilde{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{I}$ est en fait l'image de $\pi^*(\mathcal{I})$ par l'application naturelle $\pi^*(\mathcal{I}) \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ (cette application naturelle est elle-même induite par l'inclusion $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$). On en déduit la surjectivité du morphisme

$$\pi^*(V) \otimes \pi^*(E^*) \to \tilde{\mathcal{I}} \to 0.$$

En tensorisant ce morphisme par $\pi^*(E)$, on peut voir $\pi^*(V)$ comme un sous-espace vectoriel de $H^0(\tilde{X}, \pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}})$ puisque l'on obtient la suite exacte

$$\pi^*(V) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}} \to \pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}} \to 0,$$

suite exacte qui montre par ailleurs que $\pi^*(V)$ engendre $\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}}$ sur $\tilde{X}$. On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.2.1 *On suppose que V est très ample presque partout. Alors la variété $\pi^*(V)$-résultante $\nabla_{\pi^*(V)}$ est une hypersurface irréductible de l'espace projectif $\mathbb{P}(\pi^*(V))$. Son degré est donné par $\int_{\tilde{X}} c_m(\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}})$.*

Preuve. Nous venons de montrer que $\pi^*(V)$ engendre le fibré vectoriel $\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}}$ de rang $m+1$ en tout point de $\tilde{X}$ qui est de dimension m. De plus, la restriction de π à $\pi^{-1}(U)$, où U est l'ouvert de X dont le complémentaire est le support de $\mathcal{I}$, est un isomorphisme; on a donc $\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}}_{|\pi^{-1}(U)} \simeq E_{|U}$; ainsi $\pi^*(V)$ engendre $\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}}$ sur $\tilde{X}$ et est très ample presque partout. La proposition 2.1.3 montre alors qu'il existe un polynôme homogène irréductible sur $\pi^*(V)$, le résultant $\mathrm{Res}_{\pi^*(V)}$, qui vérifie

$$\mathrm{Res}_{\pi^*(V)}(f) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \tilde{X} \,:\, \pi^*(f)(x) = 0,$$

où $\pi^*(f)$ est une section de $\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}}$. Cette proposition montre également que le résultant $\mathrm{Res}_{\pi^*(V)}$ est de degré $\int_{\tilde{X}} c_m(\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}})$. □

L'espace vectoriel $\pi^*(V)$ étant naturellement isomorphe à V, on peut définir une hypersurface irréductible $\tilde{\nabla}_V$ de $\mathbb{P}(V)$, appelée variété *V-résiduelle résultante*, comme l'image de $\nabla_{\pi^*(V)}$ par l'isomorphisme $\mathbb{P}(\pi^*(V)) \simeq \mathbb{P}(V)$. L'équation irréductible de l'hypersurface $\tilde{\nabla}_V$ est appelée *V-résultant résiduel* et noté $\tilde{\mathrm{Res}}_V$. C'est un polynôme homogène de degré $\int_{\tilde{X}} c_m(\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}})$ sur V défini à une constante multiplicative non nulle près. Il vérifie

$$\tilde{\mathrm{Res}}_V(f) = 0 \Leftrightarrow \exists x \in \tilde{X} \,:\, \pi^*(f)(x) = 0,$$

où $\pi^*(f)$ est vue comme une section de $\pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}}$.

On a ainsi associé une hypersurface de $\mathbb{P}(V)$ a tout sous-espace vectoriel $V \subset H^0(X, E)$ très ample presque partout en éclatant le lieu des points bases. Si on suppose de plus que V engendre E en tout point de X, alors le résultant résiduel que nous venons d'introduire correspond exactement au

résultant de la section précédente puisque dans ce cas $\mathcal{I} = \mathcal{O}_X$. La proposition suivante donne un résultat d'invariance du résultant (résiduel) un peu plus général.

Proposition 2.2.2 *Soient E et F deux fibrés vectoriels de rang $m+1$ sur une variété projective irréductible X de dimension m tels que E est un sous-faisceau localement libre de F. Soit V un sous-espace vectoriel de $H^0(X,E)$ très ample presque partout, alors le V-résultant résiduel où $V \subset H^0(X,E)$ est identique au V-résultant résiduel où $V \subset H^0(X,F)$.*

Preuve. Les faisceaux E et F ont même rang et E est un sous-faisceau de F, on en déduit donc qu'il existe un ouvert non vide U de X sur lequel E et F sont isomorphes; V est ainsi très ample presque partout aussi bien pour E que pour F. Les deux V-résultants résiduels obtenus en voyant V comme un sous-espace vectoriel de $H^0(X,E)$ et de $H^0(X,F)$ sont donc bien définis.
Si l'on voit V comme un sous-espace vectoriel de $H^0(X,E)$, le V-résultant résiduel est alors le $\pi_E^*(V)$-résultant où $\pi_E : \tilde{X}_E \to X$ est un éclatement de X et $\pi_E^*(V) \subset H^0(\tilde{X}_E, E)$. Si l'on voit V comme un sous-espace vectoriel de $H^0(X,F)$, le V-résultant résiduel est alors le $\pi_F^*(V)$-résultant où $\pi_F : \tilde{X}_F \to X$ est un éclatement de X et $\pi_F^*(V) \subset H^0(\tilde{X}_F, F)$.
Soit maintenant V un ouvert non vide de X sur lequel V est très ample presque partout, E est isomorphe à F et les deux morphismes $\pi_E : \pi_E^{-1}(V) \to V$ et $\pi_F : \pi_F^{-1}(V) \to V$ sont des isomorphismes. Les restrictions respectives des deux variétés d'incidences

$$W_E = \{(x, \pi_E^*(f)) \in X \times \mathbb{P}(\pi_E^*(V)) \ : \ \pi_E^*(f)(x) = 0\} \subset \tilde{X}_E \times \mathbb{P}(\pi_E^*(V)),$$

$$W_F = \{(x, \pi_F^*(f)) \in X \times \mathbb{P}(\pi_F^*(V)) \ : \ \pi_F^*(f)(x) = 0\} \subset \tilde{X}_F \times \mathbb{P}(\pi_F^*(V)),$$

à $\pi_E^{-1}(V) \times \mathbb{P}(\pi_E^*(V))$ et $\pi_F^{-1}(V) \times \mathbb{P}(\pi_F^*(V))$ sont donc isomorphes. Leur projection respective sur $\mathbb{P}(\pi_E^*(V))$ et $\mathbb{P}(\pi_F^*(V))$ le sont donc aussi et correspondent par les isomorphismes naturels $\pi_E^*(V) \simeq \pi_F^*(V) \simeq V$. □

Cette proposition montre en particulier que, sous les hypothèses de cette même proposition, si l'on suppose de plus que V engendre E en tout point de X alors le V-résultant où $V \subset H^0(X,E)$ est identique au V-résultant résiduel où $V \subset H^0(X,F)$. Considérons par exemple la situation où $X = \mathbb{P}^2$ et où L désigne une droite de X. On note H l'hyperplan générique de $\mathbb{P}^2$ et on pose $E = \mathcal{O}(dH - L)^3$, $F = \mathcal{O}(dH)^3$ avec $d \geq 2$ et $V = H^0(X,E)$. V engendre E sur X et est très ample presque partout, on en déduit alors que le V-résultant associé à E est bien défini. La proposition précédente nous dit alors que le V-résultant résiduel associé à F est ce V-résultant. En effet, le V-résultant résiduel associé à F est défini comme le $\pi^*(V)$-résultant associé à $\pi^*(F) \otimes \mathcal{I}_L$ où $\pi : \tilde{X} \to X$ est l'éclatement de X le long du faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_L$ associé au diviseur effectif L. Le morphisme π est un éclatement

le long d'un diviseur, c'est donc un isomorphisme et le V-résultant résiduel est alors le V-résultant associé à $\mathcal{O}(d)^3 \otimes \mathcal{I}_L$ qui est exactement E.

Tout comme le résultant introduit au paragraphe précédent, le résultant résiduel ne dépend pas de la variété X mais de sa classe d'équivalence birationnelle.

Proposition 2.2.3 *Soient E un fibré vectoriel de rang $m+1$ sur une variété projective irréductible X de dimension m et V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$ très ample presque partout. Soient X' une variété projective et $f : X' \to X$ un morphisme projectif birationnel, alors le V-résultant résiduel et le $f^*(V)$-résultant résiduel correspondent par l'isomorphisme naturel $f^*(V) \simeq V$.*

Preuve. Soit $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux défini comme l'image du morphisme $V \otimes E^* \to \mathcal{O}_X$, $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X le long de $\mathcal{I}$ et $\tilde{\mathcal{I}} = \pi^{-1}\mathcal{I}.\mathcal{O}_{\tilde{X}}$. Par définition le V-résultant résiduel est le $\pi^*(V)$-résultant où $\pi^*(V) \subset H^0(\tilde{X}, \pi^*(E) \otimes \tilde{\mathcal{I}})$. Le faisceau d'idéaux image du morphisme

$$f^*(V) \otimes f^*(E^*) \to \mathcal{O}_{X'}$$

est le faisceau image inverse $\mathcal{I}' = f^{-1}(\mathcal{I}).\mathcal{O}_{X'}$. On note $\pi' : \tilde{X}' \to X'$ l'éclatement de X' le long de $\mathcal{I}'$ et $\tilde{\mathcal{I}}' = \pi^{-1}\mathcal{I}'.\mathcal{O}_{\tilde{X}'}$. Par définition le $f^*(V)$-résultant résiduel est le $\pi'^*(f^*(V))$-résultant où

$$\pi'^*(f^*(V)) \subset H^0(\tilde{X}', \pi'^*(f^*(E)) \otimes \tilde{\mathcal{I}}').$$

Par hypothèse, on peut trouver deux ouverts non vides $U \subset X'$ et $V \subset X$ tel que les morphismes $f : U \to V$, $\pi : \pi^{-1}(V) \to V$, $\pi' : \pi'^{-1}(U) \to U$ sont des isomorphismes et tels que V soit très ample sur U. Alors, comme dans la proposition précédente, les deux variétés d'incidences construites sur $\tilde{X}'$ et $\tilde{X}$ sont birationnelles; on en déduit que leur projection sont identiques par les isomorphismes naturels

$$V \simeq f^*(V) \simeq \pi^*(V) \simeq \pi'^*(f^*(V)).$$

□

Les deux dernières propositions nous montrent que le résultant résiduel ne dépend pas de la construction que nous avons choisi. En effet, si V est un sous-espace vectoriel de $H^0(X, E)$ très ample presque partout, on peut définir un V-résultant si V engendre un sous-faisceau localement libre de même rang que E. Si ce n'est pas le cas, on applique une transformation birationnelle f pour que $f^*(V)$ engendre un sous-faisceau localement libre de $f^*(E)$ de même rang. Pour notre construction, nous avons choisi pour f l'éclatement π selon les points bases de V définis par un faisceau $\mathcal{I}$, de

telle sorte que $\pi^*(V)$ engendre le sous-faisceau localement libre $\pi^*(E)\otimes\tilde{\mathcal{I}}$ de $\pi^*(E)$ de même rang. Les deux propositions précédentes montrent donc que toutes les constructions de ce type donnent le même V-résultant résiduel.

Lorsque le fibré vectoriel E est scindé, le résultant résiduel est alors, tout comme le résultant, multihomogène. On reprend les notations du théorème 2.2.1.

Proposition 2.2.4 *Soient $\mathcal{L}_0, \dots .\mathcal{L}_m$ des fibrés en droites sur X. Pour tout $i = 0, \dots, m$ on se donne un sous-espace vectoriel V_i de l'espace vectoriel fini $H^0(X, \mathcal{L}_i)$ tel que V_i est très ample presque partout. Soient $E = \mathcal{L}_0 \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_m$ et $V = V_0 \oplus \dots \oplus V_m$, alors $\widetilde{\mathrm{Res}}_V$ est un polynôme irréductible sur V multihomogène. Il est homogène par rapport à chacun des V_i de degré $\int_X \prod_{j\neq i} c_1(\pi^*(\mathcal{L}_j)\otimes\tilde{\mathcal{I}})$.*

Maintenant que nous avons défini le résultant résiduel, il serait intéressant d'obtenir un moyen de le calculer. Ainsi le théorème 4.2 du chapitre 3 de [GKZ94] montre que le V-résultant où $V = H^0(X, E)$ et E est un fibré vectoriel de rang $m+1$ très ample sur une variété projective irréductible X, peut s'exprimer comme le déterminant d'un complexe génériquement exact. Ce résultat fort fournit un algorithme pour calculer ce V-résultant. Il peut se résumer de la façon suivante: la variété d'incidence W est une intersection complète dans $X \times \mathbb{P}(V)$, on peut donc résoudre $\mathcal{O}_W$ sur $X \times \mathbb{P}(V)$ à l'aide d'un complexe de Koszul. L'idée est alors de projeter ce complexe sur $\mathbb{P}(V)$ à l'aide du foncteur Rq_* pour obtenir un complexe génériquement exact dont la partie de codimension 1 où la cohomologie est non nulle est exactement la variété résultante. Pour cela il faut contrôler la cohomologie de chacun des termes de la résolution de $\mathcal{O}_W$, ce que l'on peut faire en tordant cette résolution par le remonté d'un fibré en droites $\mathcal{M}$ sur X vérifiant

$$H^i(X, \wedge^p E \otimes \mathcal{M}) = 0, \forall i > 0\,,\ \forall p \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $f \in V$, on peut former le complexe de Koszul tordu $\mathcal{K}(E, f)\otimes\mathcal{M}$ sur X, et le complexe de ses sections globales, noté $\mathcal{C}(E|\mathcal{M}, f)$. On montre alors que le déterminant d'un tel complexe,

$$\det(\mathcal{C}(E|\mathcal{M}, f)),$$

est égal au résultant. Par conséquent, le résultant peut être obtenu comme le pgcd des mineurs maximaux de la première application (la plus à droite) du complexe $\mathcal{C}(E|\mathcal{M}, f)$, ce qui fournit une méthode effective pour le calculer. Nous ne donnons pas ici de preuve détaillée car ce résultat est démontré dans une version plus générale au chapitre 6, lorsque nous introduirons la notion de résultant déterminantal qui généralise ce résultant.

La première idée qui vient à l'esprit pour calculer le résultant résiduel est d'appliquer une méthode cohomologique similaire à celle que nous venons

de décrire. Cette voix semble difficile; citons cependant un travail récent qui va dans ce sens [CU01]. Dans le chapitre suivant nous allons prendre le chemin inverse, c'est-à-dire nous allons construire des complexes sur l'espace des paramètres qui possèdent la bonne cohomologie. Pour cela nous nous placerons toujours dans le cas où $X = \mathbb{P}^m$ est un espace projectif, cas qui est toujours celui de la pratique, et allons tenter d'analyser le résultant résiduel avec un point de vue plus algébrique.

Chapitre 3

Étude algébrique du résultant résiduel

Le chapitre précédent montre qu'il est possible de construire un résultant pour des systèmes qui possèdent des points bases, résultant que nous avons appelé résultant résiduel. Tout comme les résultants plus classiques, la pertinence d'un tel objet réside principalement dans la possibilité de pouvoir le calculer effectivement. Les résultants multivarié et torique sont ainsi très utilisés car ils sont calculables grâce à différentes techniques, notamment à l'aide des méthodes cohomologiques que nous avons entrevues dans le chapitre précédent. Il est donc nécessaire de développer des algorithmes qui permettent de calculer le résultant résiduel; c'est l'objet de ce chapitre. Nous nous placerons toujours dans le cas où les systèmes considérés sont définis sur un espace projectif, cas qui est celui de la pratique.

L'idée la plus naturelle pour calculer le résultant résiduel est de transposer la méthode cohomologique utilisée pour exprimer le résultant mixte, à savoir résoudre la variété d'incidence, contrôler sa cohomologie en tordant cette résolution, puis projeter cette dernière en un complexe dont le déterminant est le résultant. Malheureusement l'éclatement complique considérablement la situation dans le cas du résultant résiduel. Nous allons donc procéder autrement, nous allons prendre le chemin inverse c'est-à-dire construire des objets qui fournissent un diviseur sur l'espace des paramètres, puis montrer que ce diviseur est le résultant résiduel. Ainsi dans le premier paragraphe nous utiliserons la matrice Bézoutienne dont l'étude des propriétés montre que tout mineur maximal non nul de cette matrice est un multiple du résultant résiduel pour tout système défini sur un espace projectif, sans condition sur le lieu des points bases. Ce résultat, même s'il permet de calculer effectivement le résultant résiduel, n'est pas aussi fort que les méthodes dont nous disposons pour calculer le résultant multivarié. Pour obtenir de telles méthodes dans le cadre du résultant résiduel, il faut mieux connaître le lieu des points bases, d'ailleurs le résultant multivarié

n'est rien d'autre qu'un résultant résiduel dont nous savons que le lieu des points bases est vide. Dans le deuxième paragraphe, nous considérons des systèmes définis sur un espace projectif dont le lieu des points bases est une intersection complète. Nous pouvons alors donner explicitement le degré du résultant résiduel en les coefficients de chaque équation, donner des matrices du type Macaulay dont les déterminants des mineurs maximaux donnent un multiple du résultant résiduel, et décrire un complexe dont le déterminant est exactement le résultant résiduel. Pour obtenir de tels résultats il nous faut traduire la condition géométrique d'annulation du résultant résiduel en une condition algébrique; cette condition est qu'un certain idéal dit résiduel, définisse une variété vide ou non, comme dans le cas du résultant multivarié où l'idéal résiduel est alors simplement l'idéal engendré par les équations du système. Suivant cette même idée, nous montrons dans le dernier paragraphe de ce chapitre qu'il est possible d'obtenir des résultats similaires dans le cas où le l'idéal définissant le lieu base est Cohen-Macaulay localement intersection complète de codimension 2.

3.1 Résultant résiduel sur un espace projectif

Étant donné un système de $m+1$ équations polynomiales à m variables dépendant d'un paramètre $\mathbf{c}$, le résultant multivarié classique sur $\mathbb{P}^m$ est une équation polynomiale en $\mathbf{c}$ dont l'annulation est une condition nécessaire et suffisante pour que ce système possède une solution dans $\mathbb{P}^m$. Il permet d'éliminer directement un ensemble de variables et conduit à des méthodes de résolution très efficaces. Lorsque le système considéré possède des solutions indépendamment du paramètre $\mathbf{c}$, que l'on appelle des points bases, le résultant multivarié est identiquement nul et il nous faut alors calculer un résultant résiduel associé à ce système afin d'obtenir un polynôme non identiquement nul en le paramètre $\mathbf{c}$.

Dans cette section on énonce les propriétés du résultant résiduel dans le cadre des systèmes définis sur un espace projectif. Ce résultant permet d'obtenir une forme éliminante pour tout types de systèmes suffisamment génériques, sans condition sur le lieu des points bases. Ensuite on rappelle la définition et la propriété fondamentale de la matrice Bézoutienne multivariée, puis enfin on montre que tout mineur maximal non nul de cette matrice est un multiple non nul du résultant résiduel. Ces résultats constituent un travail en collaboration avec M. Elkadi et B. Mourrain [BEM00].

3.1.1 Propriétés

On s'intéresse à des systèmes de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_0(t) & = & \sum_{j=0}^{k_0} c_{0,j}\,\kappa_{0,j}(t) \\ & \vdots & \\ f_m(t) & = & \sum_{j=0}^{k_m} c_{m,j}\,\kappa_{m,j}(t) \end{array}\right. \tag{3.1}$$

où $t = (t_1, \dots, t_m)$ est dans l'espace affine $\mathbb{A}^m$, et $\kappa_{i,j}(t)$ est un polynôme (supposé non nul) pour tout couple (i, j). On note $\mathcal{K}_i = (\kappa_{i,j})_{j=0,\dots,k_i}$ le vecteur de polynômes définissant le polynôme f_i de degré d_i. On cherche une condition sur les coefficients $\mathbf{c} = (c_{i,j})$ pour qu'il existe $t \in \mathbb{A}^m$ tel que $\mathcal{K}_i(t) \neq 0$ et $f_0(t) = \cdots = f_m(t) = 0$. Partant de la construction du résultant torique donnée au paragraphe 1.3 chapitre 1, une telle condition peut se voir de la façon suivante : Le résultant torique est défini sur une variété projective torique unirationnelle obtenue par une paramétrisation monomiale donnée par le support du système. Une extension naturelle de ce résultant est donc de considérer des variétés unirationnelles dont la paramétrisation n'est plus forcément monomiale, mais polynomiale. Ainsi il nous faut ré-écrire notre système sur une nouvelle variété projective sur laquelle le système n'aura plus de points bases. Soit U un ouvert de $\mathbb{A}^m$ tel que $\mathcal{K}_i(t) \neq 0$, et soient $\sigma_0, \dots, \sigma_N$ des polynômes définissant une application

$$\begin{array}{rcl} \sigma : U & \to & \mathbb{P}^N \\ \mathbf{x} & \mapsto & \big(\sigma_0(\mathbf{x}) : \cdots : \sigma_N(\mathbf{x})\big), \end{array}$$

et des polynômes homogènes $\psi_{i,j}(z_0, \dots, z_N)$, $i = 0, \dots, n$, $j = 0, \dots, k_i$, tels que

$$\kappa_{i,j}(\mathbf{x}) = \psi_{i,j}\big(\sigma_0(\mathbf{x}), \dots, \sigma_N(\mathbf{x})\big) \text{ et } \deg(\psi_{i,j}) = \deg(\psi_{i,0}) \geq 1.$$

Soit X^o l'image de l'application σ et X sa clotûre algébrique dans $\mathbb{P}^N$. Si X est de dimension m (par exemple si la matrice Jacobienne de $\sigma = (\sigma_i)_{i=0,\dots,N}$ est de rang m en au moins un point de U), et si pour un choix générique des paramètres $\mathbf{c}$, le système $f_0 = \cdots = f_m = 0$ n'a pas de solutions, alors X est un bon candidat pour définir un résultant du système 3.1. D'après le chapitre 2 on sait que toutes ces constructions possibles fournissent le même résultant que nous avons appelé résultant résiduel. Il est obtenu de manière systématique en éclatant l'idéal des points bases.

En homogénéisant le système (3.1) par une nouvelle variable t_0, les polynômes f_i deviennent des sections globales $\overline{f}_i$ de $\mathcal{O}(d_i)$ sur $\mathbb{P}^m$, et les $\mathcal{K}_i$ s'identifient à des sous-espaces vectoriels V_i de $H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}(d_i))$. On note $E = \oplus_{i=0}^m \mathcal{O}(d_i)$, $V = V_0 \oplus \ldots \oplus V_m \subset H^0(\mathbb{P}^m, E)$ et $\mathcal{I}$ le faisceau d'idéaux obtenu comme l'image du morphisme canonique :

$$V \otimes E^* \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}.$$

Proposition 3.1.1 *On suppose que chacun des V_i est très ample presque partout. Alors le résultant résiduel* $\mathrm{Res}_V \in \mathbb{K}[\mathbf{c}]$ *est bien défini et vérifie*

$$\mathrm{Res}_V(\overline{f}_0, \dots, \overline{f}_m) = 0 \iff \exists\, x \in \widetilde{\mathbb{P}}^m : \pi^*(\overline{f}_0)(x) = \dots = \pi^*(\overline{f}_m)(x) = 0,$$

où $\widetilde{\mathbb{P}}^m$ est la variété obtenue par l'éclatement π de $\mathbb{P}^m$ le long de $\mathcal{I}$ (voir paragraphe 2.2, chapitre 2), et $\pi^*(\overline{f}_i)$ sont des sections de $\pi^*(\mathcal{O}(d_i)) \otimes \pi^{-1}\mathcal{I}.\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{P}}^m}$. De plus, s'il existe $t \in \mathbb{A}^m$ tel que $\mathcal{K}_i(t) \neq 0$ et $f_0(t) = \dots = f_m(t) = 0$, alors $\mathrm{Res}_V(\overline{f}_0, \dots, \overline{f}_m) = 0$.

Le résultant résiduel Res_V est multihomogène; il est homogène de degré N_i en les coefficients de V_i. Les entiers N_i correspondent géométriquement au nombre générique de solutions (comptées avec multiplicité) du système $\{f_0, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_m\}$ en dehors de Z, où Z désigne le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^m$ associé à $\mathcal{I}$ (c'est le schéma des points bases). En particulier, pour tout $i = 0, \dots, m$, l'entier N_i est borné par $\prod_{j \neq i} d_j$.

La théorie de l'intersection résiduelle (voir [Ful84], chapitre 9) permet de donner un résultat plus précis et de calculer les entiers N_i. On fixe par exemple $i = 0$. On suppose qu'un système suffisamment générique $\{f_1, \dots, f_m\}$ définit le sous-schéma Z des points bases plus un ensemble S de points isolés. La proposition 9.1.2 de [Ful84] montre alors que le degré total du système, qui est donné par le théorème de Bézout, est la somme des points isolés comptés avec multiplicité plus une autre terme qui correspond à la "contribution" de Z dans l'intersection de $f_1, \dots, f_m$, que l'on note $(f_1, \dots, f_m)^Z$. On a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{P}^m} \prod_{i=1}^m c_1(\mathcal{O}(d_i)) = \prod_{i=1}^m d_i = (f_1, \dots, f_m)^Z + \sum_{p \in S} e_p,$$

où e_p désigne la multiplicité du point isolé p. Ainsi on a la formule

$$N_0 = \prod_{i=1}^m d_i - (f_1, \dots, f_m)^Z.$$

La proposition 9.1.1 de [Ful84] permet de calculer la contribution de Z, elle montre l'égalité

$$(f_1, \dots, f_m)^Z = \left\{ \prod_{i=1}^m c(\mathcal{O}(d_i)) \cap s(Z, \mathbb{P}^m) \right\}_0,$$

où $s(Z, \mathbb{P}^m)$ désigne la classe de Segre de Z dans $\mathbb{P}^m$ et l'indice 0 signifie que l'on ne garde que la partie de dimension 0. Ainsi, si l'on note s_k la partie de dimension k de la classe de Segre $s(Z, \mathbb{P}^m)$ de Z et H l'hyperplan générique de $\mathbb{P}^m$, on obtient alors la formule :

$$(f_1, \dots, f_m)^Z = s_0 + s_1.(\sum_{i=1}^m d_i)H + s_2.(\sum \prod_{i \neq j} d_i d_j)H^2 + \dots$$

$$\ldots + s_k.(\sum \prod_{i_1 \neq \ldots \neq i_k} d_{i_1} \ldots d_{i_k}) H^k.$$

Le calcul du degré du résultant résiduel est ainsi ramené à celui de la classe de Segre de Z dans $\mathbb{P}^m$. De nombreuses formules sont connues pour calculer une telle classe, notamment dans le cas où Z est une courbe ou une surface. Au cours de ce chapitre, nous en verrons quelques cas particuliers, notamment celui où Z est la cubique gauche.

3.1.2 Bézoutiens

Dans cette section, nous allons relier le résultant résiduel d'un système défini sur un espace projectif au Bézoutien. Plus précisemment, nous allons montrer que ce résultant est un facteur non nul de tout mineur maximal non nul de la matrice Bézoutienne.

Le Bézoutien à été introduit par E. Bézout pour construire le résultant de deux polynômes en une variable dans [Béz64]. Nous décrivons dans un premier temps la construction de la matrice Bézoutienne que nous utiliserons. On note $R = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_m] = \mathbb{K}[t]$ l'anneau des polynômes en les variables $t_1, \ldots, t_m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \ldots t_m^{\alpha_m}$. On identifiera l'algèbre $R \otimes_{\mathbb{K}} R$ avec l'anneau de polynômes $\mathbb{K}[t, z] = \mathbb{K}[t_1, \ldots, t_n, z_1, \ldots, z_n]$, où $z_1, \ldots, z_m$ sont des nouvelles variables.

Définition 3.1.2 *Le Bézoutien $\Theta_{f_0,\ldots,f_m}$ des polynômes $f_0, \ldots, f_m \in R$ (ou simplement Θ_{f_0} si $f_1, \ldots, f_m$ sont fixés) est le polynôme dans $R \otimes_{\mathbb{K}} R$ défini par*

$$\Theta_{f_0,\ldots,f_m}(t,z) := \begin{vmatrix} f_0(t) & \theta_1(f_0)(t,z) & \cdots & \theta_m(f_0)(t,z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(t) & \theta_1(f_m)(t,z) & \cdots & \theta_m(f_m)(t,z) \end{vmatrix},$$

où

$$\theta_i(f_j)(t,z) := \frac{f_j(z_1, \ldots, z_{i-1}, t_i, \ldots, t_m) - f_j(z_1, \ldots, z_i, t_{i+1}, \ldots, t_m)}{t_i - z_i}.$$

Soit $\Theta_{f_0}(t,z) = \sum \theta_{\alpha\beta}\, t^\alpha z^\beta, \theta_{\alpha,\beta} \in \mathbb{K}$, la décomposition du Bézoutien. Choisissant un ordre sur les monômes apparaissant dans Θ_{f_0}, la matrice Bézoutienne de $f_0, \ldots, f_m$ est la matrice $B_{f_0,\ldots,f_m} = (\theta_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta}$ (aussi notée B_{f_0} si $f_1, \ldots, f_m$ sont fixés).

Définition 3.1.3 *Soient $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}, \mathbf{w} = (w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ deux bases sur $\mathbb{K}$ de R, et soit*

$$\Theta_{f_0} = \sum_{i,j} \nu_{ij}\, v_i \otimes w_j \ , \quad \nu_{ij} \in \mathbb{K} \ ,$$

la décomposition du Bézoutien dans ces bases. On définit la matrice $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ comme étant la matrice des coefficients $(\nu_{ij})_{i,j}$.

Si $\mathbf{v} = \mathbf{w} = (t^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}$, alors $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est la matrice Bézoutienne de $f_0, \dots, f_m$. Notant $\widehat{R}$ le dual de R, la matrice $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est exactement la matrice de l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{f_0}^{\triangleright} : \widehat{R} & \to & R \\ l & \mapsto & \Theta_{f_0}^{\triangleright}(l) := \displaystyle\sum_{i,j} \nu_{ij} l(w_j) v_i \end{array}$$

dans la base duale $(\widehat{w_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $\widehat{R}$ et la base $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de R. De la même manière, on définit l'application $\mathbb{K}$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \Theta_{f_0}^{\triangleleft} : \widehat{R} & \to & R \\ l & \mapsto & \Theta_{f_0}^{\triangleleft}(l) := \displaystyle\sum \nu_{ij}\, l(v_i) w_j. \end{array}$$

La matrice de cette application dans les bases $(\widehat{v_j})_{j\in\mathbb{N}}$ et $(w_i)_{i\in\mathbb{N}}$, est la transposée de $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$.

Si I est un idéal de R, l'anneau quotient de R par I est noté $\mathcal{A} = R/I$. Nous identifierons $\widehat{\mathcal{A}}$, le dual de A (i.e. l'espace vectoriel des applications $\mathbb{K}$-linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{K}$), avec $I^\perp = \{l \in \widehat{R} : l(f) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$.
La proposition suivante montre que la matrice Bézoutienne B_{f_0}, pour tout $f_0 \in R$, admet une décomposition diagonale dans des bases communes.

Proposition 3.1.4 *Soit I un idéal de R engendré par des polynômes $f_1, \dots, f_m$ appartenant à R. On note I_0 l'intersection des composantes primaires de I associées aux points isolés, et on suppose que $I_0 \neq R$. L'algèbre quotient $\mathcal{A}_0 = R/I_0$ est alors un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont la dimension est notée D. Il existe deux bases $\mathbf{v} = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de R telles que $(v_1, \dots, v_D), (w_1, \dots, w_D)$ sont des bases de $\mathcal{A}_0$, $v_i, w_i \in I_0$ pour $i > D$, et pour tout f_0 dans R, la matrice $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est de la forme*

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} v_1 & \dots & v_D & v_{D+1} \dots \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} M_{f_0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & L_{f_0} \end{array}\right) & \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_D \\ w_{D+1} \\ \vdots \end{array} \end{array} \tag{3.2}$$

où M_{f_0} est la matrice de multiplication par f_0 dans la base $(v_1, \dots, v_D)$ de $\mathcal{A}_0$.

Preuve. Notons $\xi_1, \dots, \xi_d$ les points isolés définis par les polynômes $f_1, \dots, f_m$. L'algèbre quotient $\mathcal{A}_0$ se décompose alors en $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_{\xi_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{A}_{\xi_d}$, où $\mathcal{A}_{\xi_i} = R_{\mathfrak{m}_{\xi_i}}/I\mathfrak{m}_{\xi_i}$, $\mathfrak{m}_{\xi_i}$ désignant l'idéal maximal définissant le point ξ_i, et

$R_{\mathfrak{m}_{\xi_i}}$ le localisé de R par l'idéal $\mathfrak{m}_{\xi_i}$ (voir [Vas98],Chap.4, et [EM01]).
On peut identifier le dual $\widehat{\mathcal{A}}_0$ de $\mathcal{A}$ avec $I_0^{\perp}$, l'orthogonal de I_0. On considère les deux sous-espaces vectoriels $E = \Theta_1^{\triangleright}(\widehat{\mathcal{A}}_0)$ et $F = \Theta_1^{\triangleleft}(\widehat{\mathcal{A}}_0)$ de R. Dans [SS75], [Kun86], [BCRS96] et [EM96], il est montré que $\Theta_1^{\triangleright}$ et $\Theta_1^{\triangleleft}$ sont des isomorphismes de $\widehat{\mathcal{A}}_{\xi_i}$ dans $\mathcal{A}_{\xi_i}$, car I_0 est localement intersection complète. On en déduit que $\Theta_1^{\triangleright}$ et $\Theta_1^{\triangleleft}$ sont des isomorphismes de $\widehat{\mathcal{A}}_0 = \oplus_{i=1}^d \widehat{\mathcal{A}}_{\xi_i}$ dans $\mathcal{A}_0 = \oplus_{i=1}^d \mathcal{A}_{\xi_i}$. Comme $\dim_{\mathbb{K}}(\widehat{\mathcal{A}}) = D$, on déduit que $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F = D$ et que E et F sont isomorphes à $\mathcal{A}_0$ en tant qu'espace vectoriel. On a donc les deux décompositions $R = E \oplus I_0$ et $R = F \oplus I_0$. Par conséquent, Θ_1 est dans $E \otimes F \oplus I_0 \otimes I_0$, puisqu'il appartient à $E \otimes F \oplus E \otimes I_0 \oplus I_0 \otimes F \oplus I_0 \otimes I_0$ et que $\Theta_1^{\triangleright}(I_0^{\perp}) = E$ et $\Theta_1^{\triangleleft}(I_0^{\perp}) = F$.

Fixons à présent $f_0 \in R$. D'après la définition 3.1.2, on voit immédiatement que $\Theta_{f_0} - (1 \otimes f_0)\Theta_1$ est dans l'idéal de $R \otimes_{\mathbb{K}} R$ engendré par $1 \otimes f_1, \dots, 1 \otimes f_m$. Par conséquent,

$$\Theta_{f_0}^{\triangleright}(\widehat{\mathcal{A}}_0) = \big((1 \otimes f_0)\,\Theta_1\big)^{\triangleright}(\widehat{\mathcal{A}}_0) = \Theta_1^{\triangleright}(f_0 \cdot \widehat{\mathcal{A}}_0) \subset \Theta_1^{\triangleright}(\widehat{\mathcal{A}}_0) = E.$$

Le même argument montre que $\Theta_{f_0}^{\triangleleft}(\widehat{\mathcal{A}}_0) \subset F$, et donc que $\Theta_{f_0} \in E \otimes F \oplus I_0 \otimes I_0$.

Soient $\mathbf{v} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{w} = (w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux bases de R telles que $(v_1, \dots, v_D)$ est une base de E, $(w_1, \dots, w_D)$ est une base de F, $v_i \in I_0$ et $w_i \in I_0$ pour $i > D$. D'après la décomposition $\Theta_{f_0} \in E \otimes F \oplus I_0 \otimes I_0$, $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est une matrice diagonale par blocs de la forme (3.2). Notons maintenant $C_{f_0} = \big(c_{ij}(f_0)\big)_{1 \le i,j \le D}$ le bloc supérieur gauche de $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$, et $M_{f_0} = (m_{ij})_{1 \ge i,j \ge D}$ la matrice de multiplication par f_0 dans la base $(v_1, \dots, v_D)$ de $\mathcal{A}_0$. Modulo l'idéal $\big(f_1 \otimes 1, \dots, f_m \otimes 1\big)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\Theta_{f_0} &\equiv \sum_{i,j=1}^{D} c_{ij}(f_0) v_i \otimes w_j \equiv (f_0 \otimes 1)\Theta_1 \equiv (f_0 \otimes 1)\left(\sum_{i,j=1}^{D} c_{ij}(1) v_i \otimes w_j\right) \\
&\equiv \sum_{i,j=1}^{D} c_{ij}(1)(f_0\ v_i) \otimes w_j \equiv \sum_{k,j=1}^{D}\left(\sum_{i=1}^{D} m_{ki} c_{ij}(1)\right) v_k \otimes w_j\ ,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $C_{f_0} = M_{f_0} C_1$. C_1 est la matrice de $\Theta_1^{\triangleright}$ dans la base $(v_1, \dots, v_D)$ de $\mathcal{A}_0$ et sa base duale dans $\widehat{\mathcal{A}}_0$. L'idéal I_0 étant localement intersection complète, $\Theta_1^{\triangleright}$ est un isomorphisme entre $\widehat{\mathcal{A}}_0$ et $\mathcal{A}_0$, et donc la matrice C_1 est inversible. Par un changement de base, on peut donc supposer que $C_1 = \mathcal{I}_D$ (la matrice identité). Ainsi, la matrice $B_{f_0}^{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est bien comme annoncée. □

L'utilisation du Bézoutien en géométrie algébrique effective permet de fournir des algorithmes efficaces pour calculer un multiple de la forme de Chow de l'idéal I_0 par exemple, ou bien encore une décomposition géométrique de la variété définie par l'idéal I (voir [EM99], [EM00]). Nous allons ici

utiliser le Bézoutien afin de calculer un multiple du résultant résiduel dans la cadre du paragraphe 3.1.1.

On considère un système du type (3.1) et on reprend les notations de 3.1.1.

Proposition 3.1.5 *On suppose que chacun des V_i est très ample presque partout. Alors tout mineur maximal de la matrice Bézoutienne $B_{f_0,\dots,f_m}$ est divisible par le résultant résiduel* $\mathrm{Res}_V \in \mathbb{K}[\mathbf{c}]$.

Preuve. Puisque tous les V_i sont très amples sur un ouvert U de X, l'ensemble des coefficients $(c_{i,j})$ tels que les polynômes $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_m$ définissent un nombre fini de points dans l'ouvert U, est un ouvert dense non vide de $\mathbb{P}(V)$. Choisissons un m-uplet générique de polynômes $\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_m$. Notons I l'idéal de $R = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_m]$ engendré par les polynômes $f_1, \dots, f_m$, et I_0 l'intersection des composantes primaires de I associées à des points isolés. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel R/I_0 est de dimension finie, on note D_g sa dimension. On note également $r_g(V_0)$ le rang générique de la matrice Bézoutienne B_{f_0}, c'est-à-dire le rang de la matrice B_{f_0} pour $f_0 \in V_0$ suffisamment générique.

D'après la proposition 3.1.4, la matrice B_{f_0} se décompose comme dans (3.2), et donc

$$\mathrm{rang}(B_{f_0}) = \mathrm{rang}(M_{f_0}) + \mathrm{rang}(L_{f_0}).$$

Si f_0 ne s'annule pas en un des points défini par l'idéal I_0, alors la matrice M_{f_0} est inversible (ses valeurs propres sont les évaluations de f_0 en les racines de $f_1, \dots, f_m$). Si maintenant f_0 s'annule en un des points défini par I_0, alors $\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m)$ s'annule, et de plus $\mathrm{rang}(M_{f_0}) < D_g$. On en déduit que $\mathrm{rang}(B_{f_0}) < r_g(V_0)$, et donc que tous les mineurs $r_g(V_0) \times r_g(V_0)$ s'annulent.

L'ensemble des coefficients $(c_{i,j})$ tels que $f_1, \dots, f_m$ définissent des points isolés dans U, et f_0 s'annule en un de ces points, est un ouvert dense de la variété de $\mathbb{P}(V)$ définie par Res_V. On en déduit que tout mineur maximal non nul de la matrice Bézoutienne s'annule sur cette variété, et qu'il est donc divisible par Res_V. □

Remarque 3.1.6 On ne récupère ici qu'un multiple du résultant résiduel. Cela peut suffir dans certains cas, mais aussi ne pas être suffisant dans d'autres cas, ce qui motive les constructions d'autres résultants résiduels dans les sections suivantes. Le premier exemple du paragraphe suivant montre que l'on ne peut pas, en général, obtenir le résultant résiduel comme le pgcd de tous les mineurs maximaux du Bézoutien.

3.1.3 Exemples

Nous illustrons le résultant résiduel des systèmes définis sur un espace projectif par deux exemples. Les calculs ont été faits avec la bibliothèque Maple, Multires. Remarquons que les polynômes résultants que l'on obtient

sont très gros et ne peuvent être calculés par des méthodes d'élimination classiques, comme les bases de Gröbner par exemple.

Un exemple où les résultants classiques et toriques sont dégénérés

Considérons les trois polynômes suivants :

$$\begin{cases} f_0 = c_{0,0} + c_{0,1}t_1 + c_{0,2}t_2 + c_{0,3}({t_1}^2 + {t_2}^2) \\ f_1 = c_{1,0} + c_{1,1}t_1 + c_{1,2}t_2 + c_{1,3}({t_1}^2 + {t_2}^2) + c_{1,4}({t_1}^2 + {t_2}^2)^2 \\ f_2 = c_{2,0} + c_{2,1}t_1 + c_{2,2}t_2 + c_{2,3}({t_1}^2 + {t_2}^2) + c_{2,4}({t_1}^2 + {t_2}^2)^2. \end{cases}$$

On cherche une condition sur les coefficients $c_{i,j}$ pour que ces trois polynômes possèdent une solution commune dans $\mathbb{A}^2$. Le résultant projectif sur $\mathbb{P}^2$ de ce système est nul puisque les polynômes f_0, f_1, f_2 s'annulent aux points $(0 : 1 : i)$ et $(0 : 1 : -i)$. Pour les mêmes raisons, le résultant torique de ces polynômes s'annulent également (ces polynômes possèdent une racine commune sur la variété torique associée). Prenant les notations de 3.1.1, on vérifie aisément que V_0, V_1 et V_2 sont très amples sur $\mathbb{A}^2$. Par la proposition 3.1.5, tout mineur maximal non nul de la matrice Bézoutienne B_{f_0,f_1,f_2} est divisible par $\mathrm{Res}_{V_0 \oplus V_1 \oplus V_2} \in \mathbb{K}[\mathbf{c}]$. Cette matrice est de taille 12×12 et de rang 10. On peut factoriser le déterminant d'un mineur maximal contenant 207805 monômes, sous la forme $Q_1 Q_2 (Q_3)^2 S$, où

$$\begin{array}{lcl} Q_1 & = & -c_{0,2}c_{1,3}c_{2,4} + c_{0,2}c_{1,4}c_{2,3} + c_{1,2}c_{0,3}c_{2,4} - c_{2,2}c_{0,3}c_{1,4} \\ Q_2 & = & c_{0,1}c_{1,3}c_{2,4} - c_{0,1}c_{1,4}c_{2,3} - c_{1,1}c_{0,3}c_{2,4} + c_{2,1}c_{0,3}c_{1,4} \\ Q_3 & = & {c_{0,3}}^2{c_{1,1}}^2{c_{2,4}}^2 - 2{c_{0,3}}^2c_{1,1}c_{2,1}c_{2,4}c_{1,4} + {c_{0,3}}^2{c_{2,4}}^2{c_{1,2}}^2 + \cdots \\ S & = & {c_{2,0}}^4{c_{1,4}}^4{c_{0,2}}^4 + {c_{2,0}}^4{c_{1,4}}^4{c_{0,1}}^4 + {c_{1,0}}^4{c_{2,4}}^4{c_{0,2}}^4 + {c_{1,0}}^4{c_{2,4}}^4{c_{0,1}}^4 + \cdots \end{array}$$

Les polynômes Q_3 et S contiennent respectivement 20 et 2495 monômes. Pour des f_0, f_1, f_2 génériques, $Z(f_0, f_1)$, $Z(f_0, f_2)$, $Z(f_1, f_2)$ est de degré 4 (voir [Mou96]). On en déduit donc que $\mathrm{Res}_{V_0 \oplus V_1 \oplus V_2} = S$, et est donc de degré 4 en les coefficients de chaque polynôme f_i, $i = 0, 1, 2$.

En fait dans cet exemple, il existe un unique mineur maximal non nul de la matrice Bézoutienne et ce mineur n'est pas le résultant résiduel.

Résultant résiduel et équation implicite

Nous voulons calculer le résultant résiduel du système

$$\begin{cases} f_0 = c_{0,0}t_1t_2 + c_{0,1}{t_2}^2 + c_{0,2}t_3 + c_{0,3}\left({t_1}^3 + {t_2}^3 + {t_3}^3\right) + c_{0,4}\left(t_1{t_2}^2 + {t_1}^2t_2 - {t_3}^3\right) \\ f_1 = c_{1,0}t_1t_2 + c_{1,1}{t_2}^2 + c_{1,2}t_3 + c_{1,3}\left({t_1}^3 + {t_2}^3 + {t_3}^3\right) + c_{1,4}\left(t_1{t_2}^2 + {t_1}^2t_2 - {t_3}^3\right) \\ f_2 = c_{2,0}t_1t_2 + c_{2,1}{t_2}^2 + c_{2,2}t_3 + c_{2,3}\left({t_1}^3 + {t_2}^3 + {t_3}^3\right) + c_{2,4}\left(t_1{t_2}^2 + {t_1}^2t_2 - {t_3}^3\right) \\ f_3 = c_{3,0}t_1t_2 + c_{3,1}{t_2}^2 + c_{3,2}t_3 + c_{3,3}\left({t_1}^3 + {t_2}^3 + {t_3}^3\right) + c_{3,4}\left(t_1{t_2}^2 + {t_1}^2t_2 - {t_3}^3\right) \end{cases}$$

Avec les notations de 3.1.1, on vérifie que V_0, V_1, V_2 et V_3 sont très amples dans $\mathbb{A}^3 - \{(0,0,0)\}$. D'après la proposition 3.1.5, tout mineur maximal de la matrice Bézoutienne est divisible par le résultant résiduel $\mathrm{Res}_{V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus V_3}$.

Calculant un tel mineur de cette matrice Bézoutienne, qui est de taille 25×23 et de rang 21, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
&\Delta_5\Delta_2{\Delta_3}^6\\
&\big({\Delta_5}^4{\Delta_3}^3{\Delta_2}^6 - 4\,{\Delta_5}^3\Delta_4{\Delta_3}^3{\Delta_2}^6 + 6\,{\Delta_5}^2{\Delta_4}^2{\Delta_3}^3{\Delta_2}^6 - 4\,\Delta_5{\Delta_4}^3{\Delta_3}^3{\Delta_2}^6 + \Delta_5{\Delta_2}^{12}\\
&-3\,\Delta_5{\Delta_2}^{11}\Delta_1 + 6\,\Delta_5{\Delta_2}^{10}{\Delta_1}^2 - 11\,\Delta_5{\Delta_2}^9{\Delta_1}^3 + 15\,\Delta_5{\Delta_2}^8{\Delta_1}^4 - 18\,\Delta_5{\Delta_2}^7{\Delta_1}^5\\
&+20\,\Delta_5{\Delta_2}^6{\Delta_1}^6 - 18\,\Delta_5{\Delta_2}^5{\Delta_1}^7 + 15\,\Delta_5{\Delta_2}^4{\Delta_1}^8 - 11\,\Delta_5{\Delta_2}^3{\Delta_1}^9\\
&+6\,\Delta_5{\Delta_2}^2{\Delta_1}^{10} - 3\,\Delta_5\Delta_2{\Delta_1}^{11} + \Delta_5{\Delta_1}^{12} + {\Delta_4}^4{\Delta_3}^3{\Delta_2}^6 - \Delta_4{\Delta_2}^{11}\Delta_1 + 4\,\Delta_4{\Delta_2}^{10}{\Delta_1}^2\\
&-9\,\Delta_4{\Delta_2}^9{\Delta_1}^3 + 16\,\Delta_4{\Delta_2}^8{\Delta_1}^4 - 22\,\Delta_4{\Delta_2}^7{\Delta_1}^5 + 24\,\Delta_4{\Delta_2}^6{\Delta_1}^6 - 22\,\Delta_4{\Delta_2}^5{\Delta_1}^7\\
&+16\,\Delta_4{\Delta_2}^4{\Delta_1}^8 - 9\,\Delta_4{\Delta_2}^3{\Delta_1}^9 + 4\,\Delta_4{\Delta_2}^2{\Delta_1}^{10} - \Delta_4\Delta_2{\Delta_1}^{11}\big)
\end{aligned}
$$

où Δ_i est le déterminant de la sous-matrice de

$$C = \begin{bmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & c_{0,2} & c_{0,3} & c_{0,4}\\ c_{1,0} & c_{1,1} & c_{1,2} & c_{1,3} & c_{1,4}\\ c_{2,0} & c_{2,1} & c_{2,2} & c_{2,3} & c_{2,4}\\ c_{3,0} & c_{3,1} & c_{3,2} & c_{3,3} & c_{3,4} \end{bmatrix}$$

correspondante à toutes les colonnes de C sauf la $i^{\text{ème}}$. En fait, les coefficients de B_{f_0,f_1,f_2,f_3} sont des formes linéaires en les Δ_i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Le dernier facteur de cette expression est un polynôme irréductible en les $c_{i,j}$ et correspond au résultant résiduel que l'on cherche.
Une autre façon de voir ce résultant est de le considérer comme une condition sur les coefficients $c_{i,j}$ pour que le point projectif du noyau de C (dont les coordonnées sont $(\Delta_1 : -\Delta_2 : \Delta_3 : -\Delta_4 : \Delta_5)$) appartienne à la clôture algébrique de l'image de l'application

$$
\begin{aligned}
\sigma : \mathbf{A}^3 - \{(0,0,0)\} &\rightarrow \mathbb{P}^4\\
(t_1,t_2,t_3) &\mapsto (t_1t_2 : t_2^2 : t_3 : {t_1}^3 + {t_2}^3 + {t_3}^3 : t_1{t_2}^2 + {t_1}^2t_2 - {t_3}^3).
\end{aligned}
$$

En remplaçant Δ_i par les variables $\pm x_i$, nous obtenons l'équation implicite, de degré 13, de l'image de σ.

3.2 Résultant résiduel d'une intersection complète

Dans le paragraphe précédent nous avons donné un algorithme pour calculer le résultant résiduel d'un système avec points bases défini sur un espace projectif. Dans cette section, nous allons montrer qu'en mettant une hypothèse sur le lieu des points bases, à savoir que ce lieu est une intersection complète, nous pouvons calculer simplement le degré du résultant résiduel qui lui est associé en les coefficients de chaque polynôme du système, et obtenir exactement ce résultant résiduel par des matrices du type Macaulay.

Plus précisemment, on s'intéresse à la situation suivante : soient $g_1, \ldots, g_n$ des polynômes homogènes dans $R = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$ de degré $k_1, \ldots, k_n$, et

soient $f_0, \dots, f_m$ des polynômes homogènes génériques dans l'idéal $G = (g_1, \dots, g_n)$, de degré respectif $d_0, \dots, d_m$. On a le système suivant :

$$\mathbf{f_c} := \begin{cases} f_0(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,0}(x)\, g_i(x) \\ \vdots & & \\ f_m(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,m}(x)\, g_i(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

où $h_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} c_\alpha^{i,j}\, \mathbf{x}^\alpha$ est le polynôme homogène générique de degré $d_j - k_i$. On cherche une condition sur les coefficients $\mathbf{c} = (c_\alpha^{i,j})$ des $h_{i,j}$, pour que $\mathbf{f_c}$ possède une solution "en dehors" de la variété définie par l'idéal G que nous supposerons être une intersection complète. Les résultats de ce paragraphe constituent un travail publié [BEM01].

3.2.1 Propriétés

Soit $X = \mathbb{P}^m = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m])$ l'espace projectif de dimension m sur $\mathbb{K}$. On se donne un idéal G engendré par n polynômes homogènes de degré respectif $k_1 \geq \dots \geq k_n$. Soit $\mathcal{G}$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à G. Fixons $m+1$ entiers positifs $d_0, \dots, d_m$ tels que $d_0 \geq \dots \geq d_m \geq k_1 \geq \dots \geq k_n$, et notons $\mathcal{G}(d_i) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d_i)$ pour $i = 0, \dots, m$. L'espace vectoriel $V_i = H^0\big(X, \mathcal{G}(d_i)\big)$ s'identifie à l'ensemble des polynômes homogènes de degré d_i qui sont dans la saturation de l'idéal G. L'éclaté de X le long de $\mathcal{G}$ est noté $\pi : \tilde{X} \to X$; le faisceau image inverse $\tilde{\mathcal{G}} = \pi^{-1}\mathcal{G} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est alors un faisceau inversible sur $\tilde{X}$. Dans ce qui suit, le faisceau $\tilde{\mathcal{G}} \otimes \pi^*\big(\mathcal{O}_X(d_i)\big)$ est noté $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$, F désigne l'idéal de R engendré par les polynômes $f_0, \dots, f_m$ et on note $V = V_0 \oplus \dots \oplus V_m$, $E = \oplus_{i=0}^m \mathcal{O}(d_i)$.

Proposition 3.2.1 *On suppose que $\mathcal{G}$ est une intersection complète locale et que $d_m \geq k_n + 1$. Alors, le résultant résiduel* Res_V *est bien défini et vérifie*

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x \in \tilde{X} : \pi^*(f_i)(x) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, m \\ &\Longleftrightarrow \quad F^{sat} \subsetneq G^{sat}, \end{aligned}$$

où $\pi^*(f_i)$ est une section globale du faisceau inversible sur $\tilde{X}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$, et où F^{sat} et G^{sat} désignent les saturations respectives des idéaux homogènes F et G. En particulier, s'il existe $x \in X \setminus V(G)$ tel que $f_0(x) = \dots = f_m(x) = 0$, alors

$$\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) = 0.$$

Preuve. Notons U l'ouvert dense $X \setminus V(G)$ de X. Remarquons tout d'abord que tous les espaces vectoriels V_i, pour $i = 0, \dots, m$, possèdent le même lieu de points bases qui est défini par l'idéal G. Ainsi la construction du résultant résiduel se fait à l'aide de l'éclatement de X le long de $\mathcal{G}$ que nous avons noté $\pi : \tilde{X} \to X$. D'après la proposition 2.2.4, il nous suffit donc de montrer que chacun des V_i est très ample presque partout pour assurer l'existence

de ce résultant résiduel.
Fixons $i \in \{0, \dots, m\}$ et montrons que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_i : & U & \longrightarrow & \mathbb{P}(V_i) \\ & x & \mapsto & \Gamma_i(x) = \{f \in V_i : f(x) = 0\} \end{array}$$

est un plongement. Soient x, y deux points distinctes de U, nous pouvons choisir une forme linéaire L sur X telle que $L(x) = 0$ et $L(y) \neq 0$. La forme $L^{d_i - k_n} g_n$ appartient donc à $\Gamma_i(x)$ et pas à $\Gamma_i(y)$, ce qui prouve l'injectivité de Γ_i. Pour montrer que Γ_i est un plongement, il faut maintenant montrer que pour tout $x \in U$ et tout $v \in T_x(X)$ (l'espace tangent à X en x), il existe une section globale s de $\mathcal{G}(d_i)$ telle que $s(x) = 0$ et $ds(x) = v$. Puisque $d_i - k_n \geq 1$, nous pouvons prendre $s = L\, p\, g_n$, où p est un polynôme homogène de degré $d_i - k_n - 1$ tel que $p(x) \neq 0$, et où L est une forme linéaire sur X telle que $L(x) = 0$ et $dL(x) = \frac{1}{pg_n(x)}\, v$. Cette section s satisfait aux conditions $s(x) = 0$ et $ds(x) = pg_n(x)\, dL(x) = v$.
Par la proposition 2.2.4, le résultant résiduel Res_V est bien défini et s'annule si et seulement s'il existe $x \in \tilde{X}$ tel que $\pi^*(f_i)(x) = 0$, pour tout $i = 0, \dots, m$. En particulier, puisque la restriction de $\pi : \pi^{-1}(U) \to U$ est un isomorphisme, s'il existe $x \in U$ tel que $f_i(x) = 0$ pour tout $i = 0, \dots, m$, alors le résultant résiduel s'annule.
Il nous reste à montrer que le résultant résiduel s'annule si et seulement si $F^{sat} \subsetneq G^{sat}$. Comme $F \subset G$, nous avons toujours $F^{sat} \subset G^{sat}$. Si $F^{sat} = G^{sat}$, alors les idéaux F et G définissent le même faisceau d'idéaux sur X, à savoir $\mathcal{G}$; on en déduit donc que le résultant résiduel est alors non nul. Supposons à présent que $\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) \neq 0$. $\mathcal{G}$ étant supposé localement intersection complète, le faisceau $\mathcal{G}/\mathcal{G}^2$ est un faisceau localement libre de rang maximum inférieur ou égal à $m+1$. De plus, si D désigne le diviseur exceptionnel de π, le faisceau $\tilde{\mathcal{G}}/\tilde{\mathcal{G}}^2$ est isomorphe à $\mathcal{O}_D(1)$ (voir [Ful84], Appendice B.7). Par conséquent, si $\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) \neq 0$, c'est-à-dire si $\pi^*(f_0), \dots, \pi^*(f_m)$ ne s'annulent pas simultanément, alors ils engendrent toutes les fibres de $\tilde{\mathcal{G}}$ puisque $\mathcal{O}_D(1)$ est localement engendré par au plus $m+1$ sections. Cela implique que $F^{sat} = G^{sat}$. □

Remarque 3.2.2 L'hypothèse $d_m \geq k_n + 1$ est requise pour que V_i soit très ample presque partout (en fait sur $U = X \setminus V(G)$) afin d'appliquer la proposition 2.2.4. Par exemple, si $X = \mathbb{P}^2$, $d_0 = d_1 = d_2 = k_1 = k_2 = 2$, g_1 et g_2 sont des coniques génériques, G définit alors quatre points lisses. On cherche une condition pour que trois coniques f_0, f_1, f_2 passent par ces quatre points et possèdent un autre point commun sur U. Dans une telle configuration, les trois coniques f_0, f_1, f_2 sont forcément identiques. Par conséquent, on ne peut pas définir un résultant dans ce cas puisque les fibres de l'application π_2 dans la preuve du théorème 2.2.1, ne sont pas de dimension zéro.

La connaissance explicite du degré du résultant résiduel en les coefficients de chacun des polynômes f_i (i.e. en chacun des V_i), pour $i = 0, \dots, m$, est très utile pour appréhender le calcul du résultant résiduel. Dans le cas particulier du résultant résiduel que nous étudions dans ce paragraphe, il est possible de donner explicitement ces degrés si nous supposons que l'idéal G est une *intersection complète*. Plutôt que d'utiliser la formulation du degré du résultant résiduel donnée au paragraphe 3.1.1, nous préférons ici faire les calculs "à la main" pour obtenir une formulation plus simple.

Le degré du résultant résiduel Res_V en les coefficients de f_i, noté N_i, est donné par la proposition 2.2.4 :

$$N_i = \int_{\tilde{X}} \prod_{j \neq i} c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_j}) \ ,$$

où $c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_j})$ désigne la première classe de Chern de $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$.

Proposition 3.2.3 *On suppose que G est intersection complète. Pour tout $r \in \mathbb{Q}[T]$, on définit*

$$P_r(y_1, \dots, y_n) = \det \begin{pmatrix} r(y_1) & \cdots & r(y_n) \\ y_1 & \cdots & y_n \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{d}$ le m-uplet $(d_0, \dots, d_{i-1}, d_{i+1}, \dots, d_m)$, et soient $\sigma_0(\mathbf{d}) = (-1)^m$, $\sigma_1(\mathbf{d}) = (-1)^{m-1} \sum_{i=0}^m d_i$, $\sigma_2(\mathbf{d}) = \sum_{0 \leq i < j \leq m} d_i d_j$, ... , $\sigma_m(\mathbf{d}) = \prod_{i=0}^m d_i$, les polynômes symétriques de $\mathbf{d}$. Alors, le degré de Res_V en les coefficients de f_i est

$$N_i = \frac{P_{r_i}}{P_1}(k_1, \dots, k_n),$$

où $r_i(T) = \sigma_m(\mathbf{d}) + \sum_{l=n}^m \sigma_{m-l}(\mathbf{d})\, T^l \in \mathbb{Q}[T]$.

Preuve. Fixons $i = 0$ par exemple. On veut calculer $N_0 = \int_{\tilde{X}} \prod_{i=1}^m c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_i})$. D'après [Ful84], $c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}) = d_i H - E$, où $H = \pi^*(h)$, h désignant la classe d'un hyperplan générique de X, et E la classe du diviseur exceptionnel de l'éclatement π. On a alors

$$\begin{aligned} N_0 &= \int_{\tilde{X}} \prod_{i=1}^m c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}) = \int_X \pi_*\big((d_1 H - E)(d_2 H - E) \cdots (d_m H - E)\big) \\ &= \int_X \pi_*\left(\sum_{l=0}^m \sigma_{m-l}(\mathbf{d})\, H^{m-l} \cdot E^l\right) = \int_X \sum_{l=0}^m \sigma_{m-l}(\mathbf{d})\, h^{m-l} \cdot \pi_*(E^l). \end{aligned}$$

G étant de dimension $m - n$, la formule de projection nous donne

$$h^k \cdot \pi_*(E^{m-k}) = 0 \qquad \text{pour} \qquad m > k > m - n. \tag{3.4}$$

Par conséquent, il vient

$$N_0 = \int_X \sigma_m(\mathbf{d}) h^m + \sum_{l=n}^{m} \sigma_{m-l}(\mathbf{d})\, h^{m-l} \cdot \pi_*(E^l).$$

Puisque π est l'éclatement de X le long de $G = (g_1, \dots, g_n)$, on en déduit que les transformées strictes de $g_1, \dots, g_n$ ne s'intersectent pas sur $\tilde{X}$, c'est-à-dire :

$$\pi_*\big((k_1H - E)(k_2H - E)\cdots(k_nH - E)\big) = \sum_{l=0}^{n} \omega_{n-l}(\mathbf{k})\, h^{n-l} \cdot \pi_*(E^l) = 0$$

où $\omega_0(\mathbf{k}) = (-1)^n$, $\omega_1(\mathbf{k}) = (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n k_i$, $\omega_2(\mathbf{k}) = \sum_{1\le i<j\le n} k_i k_j$, $\dots$, $\omega_n(\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^n k_i$. En intersectant cette classe avec $h^{m-n-p} \cdot \pi_*(E^p)$ pour $p = 0, \dots, m-n$, on obtient les $m-n+1$ relations suivantes :

$$\sum_{l=p}^{p+n} \omega_{n+p-l}(\mathbf{k})\, h^{m-l} \cdot \pi_*(E^l) = 0 \qquad \text{pour} \qquad p = 0, \dots, m-n. \tag{3.5}$$

Toute classe d'un cycle de dimension zéro est un entier multiplié par h^m dans l'anneau de Chow de $X = \mathbb{P}^m$. Ainsi, on note Λ_l l'entier tel que

$$h^{m-l} \cdot \pi_*(E^l) \equiv \Lambda_l\, h^m.$$

Les relations(3.4) et (3.5) nous donnent le système linéaire

$$\begin{cases} \Lambda_0 = 1 \\ \Lambda_1 = \cdots = \Lambda_{n-1} = 0 \\ \sum_{l=p}^{p+n} \omega_{n+p-l}(\mathbf{k})\, \Lambda_l = 0 \ \text{ pour } p = 0, \dots, m-n \end{cases} \tag{3.6}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$T \begin{pmatrix} \Lambda_0 \\ \Lambda_1 \\ \vdots \\ \Lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

où T est une matrice triangulaire inférieure avec 1 ou -1 sur la diagonale. En particulier, cela implique que $\Lambda_0, \dots, \Lambda_m$ sont des fonctions polynomiales en $k_1, \dots, k_n$. Nous allons calculer ces fonctions polynomiales, en supposant pour le moment que les k_i, pour $i = 1, \dots, n$, sont tous distincts.
Soit Λ la forme linéaire définie sur $\mathbb{Q}[T]$ par

$$\Lambda(1) = 1\ ,\ \Lambda(T) = 0\ ,\ \dots\ ,\ \Lambda(T^{n-1}) = 0\ ,\ \Lambda(T^l q) = 0\ ,\ l \ge 0,$$

où $q = \sum_{l=0}^n \omega_{n-l}(\mathbf{k})\, T^l$. On remarque que $\big(\Lambda(T^i)\big)_{i=0,\dots,m}$ est l'unique solution du système (3.6). Comme la forme Λ est dans l'orthogonal de l'idéal

engendré par le polynôme q, dont les racines sont $k_1, \dots, k_n$, elle est de la forme

$$\Lambda = \alpha_1 \, \mathbf{1}_{k_1} + \cdots + \alpha_n \, \mathbf{1}_{k_n},$$

avec $\mathbf{1}_{k_i} : p \in \mathbb{Q}[T] \mapsto p(k_i) \in \mathbb{Q}$, et $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ satisfaisant les équations

$$\begin{cases} \Lambda(1) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1 \\ \Lambda(T) = \alpha_1 k_1 + \cdots + \alpha_n k_n = 0 \\ \vdots \\ \Lambda(T^{n-1}) = \alpha_1 k_1^{n-1} + \cdots + \alpha_n k_n^{n-1} = 0. \end{cases}$$

En résolvant ce système par les règles de Cramer, on obtient

$$\alpha_i P_1 = \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ k_1 & \cdots & k_{i-1} & k_i & k_{i+1} & \cdots & k_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_1^{n-1} & \cdots & k_{i-1}^{n-1} & k_i^{n-1} & k_{i+1}^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

où P_1 est le $n \times n$ déterminant de Vandermonde de $k_1, \dots, k_n$, et pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\Lambda(T^l) = \Lambda_l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, k_i^l = S_{T^l}(k_1, \dots, k_n),$$

avec $S_r = \frac{P_r}{P_1}$ pour tout $r \in \mathbb{Q}[T]$. La fonction $y = (y_1, \dots, y_n) \mapsto P_{T^l}(y)$ s'annule lorsque deux coordonnées de y sont identiques, et donc est divisible par le déterminant de Vandermonde P_1. Par conséquent l'application $y \mapsto S_{T^l}(y)$ est une fonction polynomiale et est bien définie lorsque les coordonnées de y ne sont pas toutes distinctes. Ainsi, la solution au système (3.6) pour n'importe quelle valeur de $\mathbf{k}$ est $\big(S_{T^l}(\mathbf{k})\big)_{l=0,\dots,m}$. Comme $N_0 = \Lambda(r_0)$, on déduit par linéarité que $N_0 = S_{r_0}(\mathbf{k})$. □

Donnons quelques calculs de degrés dans des cas particuliers :

– *G définit des points:* Si $n = m$, on obtient

$$N_i = \frac{d_0 \cdots d_m}{d_i} - k_1 \cdots k_m.$$

– *G définit une courbe:* Si $n = m - 1$, on obtient

$$N_i = \frac{d_0 \cdots d_m}{d_i} - k_1 \cdots k_{m-1}(d_0 + \cdots + d_m - d_i - k_1 - \cdots - k_{m-1}).$$

– *G définit une hypersurface:* Si $n = 1$, $N_i = \prod_{j \neq i}(d_j - k_1)$. C'est bien le degré attendu car on a dans ce cas $f_i = h_{i,1}(x) g_1(x)$ pour tout $i = 0, \dots, m$, et le résultant résiduel est donc égal au résultant multivarié des polynômes $h_{0,1}(x), \dots, h_{m,1}(x)$. Ce résultant est effectivement de degré $\prod_{j \neq i}(d_j - k_1)$ en les coefficients du polynôme $h_{i,1}(x)$.

Dans les deux paragraphes suivants nous allons décrire une matrice qui permet de calculer le résultant résiduel Res_V que nous venons d'étudier, dans le cas où G est une intersection complète. Cette matrice combine deux blocs du type Macaulay qui font intervenir des multiples monomiaux des polynômes $f_0, \dots, f_m$, et des multiples monomiaux des mineurs de la matrice $H = (h_{i,j})_{1 \le i \le n, 0 \le j \le m}$. La construction de cette matrice est basée sur la résolution de l'idéal $(F : G) = \{f \in R : f.G \subset F\}$, avec G intersection complète, donnée par W. Bruns, A. R. Kustin et M. Miller dans [BKM90].

3.2.2 Résolution du résiduel d'une intersection complète

Dans ce paragraphe R désigne toujours l'anneau gradué $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$. On se donne n polynômes homogènes $g_1, \dots, g_n$ de degré respectif $k_1 \ge \dots \ge k_n$, et on suppose qu'ils forment une suite régulière sur R, c'est-à-dire que l'idéal $I = (g_1, \dots, g_n)$ est une intersection complète. On se donne de plus l'idéal homogène J engendré par les $p \ge n$ polynômes homogènes $f_1, \dots, f_p$ de R, de degré respectif $d_1 \ge \dots \ge d_p$, définis comme en (3.3), c'est-à-dire

$$\begin{cases} f_1(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,1}(x)\, g_i(x) \\ \vdots & & \\ f_p(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,p}(x)\, g_i(x) \end{cases}$$

avec $h_{i,j} = \sum_{|\alpha| = d_j - k_i} c_\alpha^{i,j}\, \mathbf{x}^\alpha$ le polynôme homogène générique de degré $d_j - k_i$. On définit R_0 comme étant l'anneau polynomial des paramètres $\mathbf{c} = (c_\alpha^{i,j})$, i.e. $R_0 = \mathbb{K}[\mathbf{c}]$, et R_g l'anneau polynomial $R_0[x_0, \dots, x_m]$. Nous considérerons R_g comme une R_0-algèbre graduée en posant $\deg(c_\alpha^{i,j}) = 0$, et $\deg(x_i) = 1$. On a la relation $J \subset I \subset R_g$. Enfin, on pose $A = (J : I) \subset R_g$, l'idéal résiduel de J par I.

Nous allons à présent décrire brièvement une résolution libre minimale et graduée de l'idéal A. Cette résolution est tirée de l'article [BKM90].
On note P (respectivement N) le R_g-module libre R_g^p (respectivement R_g^n) de base canonique $(v_i)_{1 \le i \le p}$ (respectivement $(w_i)_{1 \le i \le n}$). On gradue ces deux modules en posant $\deg(v_i) = d_i,\ i = 1, \dots, p$, et $\deg(w_i) = k_i,\ i = 1, \dots, n$. La matrice de polynômes $[g_1, \dots, g_n]$ définit un morphisme gradué de R_g-modules $\psi : N^* \to R_g$, où N^* désigne le module dual du module N. Puisque $J \subset I$, il existe une matrice $H = (h_{i,j})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}$, de taille $n \times p$, telle que

$$[f_1, \dots, f_p] = [g_1, \dots, g_n]H.$$

Cette décomposition s'écrit aussi $f_j = \sum_{i=1}^n h_{i,j} g_i$, et donc les $h_{i,j}$ sont des polynômes homogènes de degré $d_j - k_i$. La matrice H définit ainsi un morphisme gradué de R_g-modules $\phi : P \to N^*$.

On considère à présent le bicomplexe $\mathbf{B}^g(\psi,\phi)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & K_{p-n}^{n-1}\otimes\bigwedge^p P & \to & \dots & \to & K_0^{n-1}\otimes\bigwedge^n P & \to & \bigwedge^{n-1} P \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & K_{p-n}^{1}\otimes\bigwedge^p P & \to & \dots & \to & K_0^{1}\otimes\bigwedge^n P & \to & \bigwedge^{1} P \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & K_{p-n}^{0}\otimes\bigwedge^p P & \to & \dots & \to & K_0^{0}\otimes\bigwedge^n P & \to & \bigwedge^{0} P
\end{array}$$

où les morphismes sont définis comme suit. La colonne la plus à droite correspond au complexe de Koszul $\mathbf{K}(\psi\circ\phi)$, tronqué à l'ordre n, induit par la composition $\psi\circ\phi : P \to R_g$ qui est représentée par la matrice $[f_1,\dots,f_p]$. Pour tout couple d'entiers positifs (a,b), on définit $K_a^b(N)$ comme le noyau de l'application de Eagon-Northcott

$$\eta_a^b : S_a(N)\otimes\bigwedge^b N^* \longrightarrow S_{a-1}(N)\otimes\bigwedge^{b-1} N^*,$$

induite par l'application identité $N^* \xrightarrow{Id} N^*$ ($S_\bullet$ désigne l'algèbre symétrique, et $\bigwedge^\bullet$ désigne l'algèbre extérieure). L'application η_a^b est donnée par

$$\eta_a^b(w_{i_1}\dots w_{i_a}\otimes w_{j_1}^*\wedge\dots\wedge w_{j_b}^*) =$$

$$\sum_{r=1}^{a}\sum_{s=1}^{b}(-1)^{s+1}w_{i_r}(w_{j_s}^*)w_{i_1}\dots\widehat{w_{i_r}}\dots w_{i_a}\otimes w_{j_1}^*\wedge\dots\wedge\widehat{w_{j_s}^*}\wedge\dots\wedge w_{j_b}^*.$$

La proposition 1.13 de [BKM90] montre que $K_a^b(N)$ est un R_g-module libre de rang

$$\begin{pmatrix} n-a-1-b \\ a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n+a \\ b \end{pmatrix}.$$

Maintenant pour tout entier $0\le a\le p-n$, on peut définir un complexe $(\mathbf{K}_a,\kappa_a)$,

$$0\to K_a^{n-1}(N)\xrightarrow{\kappa_a^{n-1}}\dots\to K_a^1(N)\xrightarrow{\kappa_a^1}K_a^0(N),$$

où les applications $\kappa_a^j : K_a^j(N)\to K_a^{j-1}(N)$ sont induites par la différentielle $\mathrm{id}\otimes\partial^j$ du complexe $S_a(N)\otimes\mathbf{K}(\psi)$, $\mathbf{K}(\psi)$ étant le complexe de Koszul associé à l'application $\psi : N^*\to R_g$. Les colonnes du bicomplexe $\mathbf{B}^g(\psi,\phi)$, exceptée la plus à droite, sont données par les complexes $\mathbf{K}_a\otimes\bigwedge^{n+a}P$. Il nous reste à définir les lignes du bicomplexe $\mathbf{B}^g(\psi,\phi)$.
Pour tout couple d'entiers positifs (c,d), il existe un complexe $(\mathbf{R}_{c,d},\rho_{c,d})$,

$$0\to K_{p-d}^c(N)\otimes\bigwedge^p P\xrightarrow{\rho_{c,d}^p}\dots\to K_1^c(N)\otimes\bigwedge^{d+1}P\xrightarrow{\rho_{c,d}^{d+1}}K_0^c(N)\otimes\bigwedge^d P,$$

dans lequel la différentielle $\rho^j_{c,d} : K^c_{j-d}(N) \otimes \bigwedge^j P \to K^c_{j-1-d}(N) \otimes \bigwedge^{j-1} P$ est induite par l'application

$$\mathrm{id} \otimes \eta^j_{j-d} : \bigwedge^c N^* \otimes (S_{j-d}N \otimes \bigwedge^j P) \to \bigwedge^c N^* \otimes (S_{j-1-d}N \otimes \bigwedge^{j-1} P).$$

Dans le corollaire 2.7 de [BKM90], il est montré que pour tout entier positif b, le complexe $\mathbf{R}_{b,n}$ peut être augmenté par une application $\epsilon^b : K^b_0 \otimes \bigwedge^n P \to \bigwedge^b P$. Ces complexes augmentés forment les lignes de notre bicomplexe $\mathbf{B}^g(\psi, \phi)$. Notons au passage que la ligne du bas s'identifie au complexe bien connu de Eagon-Northcott associé au morphisme ϕ,

$$0 \longrightarrow S_{p-n}(N) \otimes \bigwedge^p P \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_0(N) \otimes \bigwedge^n P \longrightarrow R_g.$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de [BKM90] que nous allons utiliser par la suite. Nous rappelons tout d'abord la définition d'intersection résiduelle (voir [HU88]).

Définition 3.2.4 *Soient C un anneau gradué Cohen-Macaulay, et soit V un idéal homogène de C. Soit $U = (u_1, \ldots, u_s) \subsetneq V$ un idéal homogène de C, et $W = (U : V)$. Si $ht(W) \geqslant s \geqslant ht(V)$, alors W est appelé une s-intersection résiduelle de V (par rapport à U). Si de plus, $U_{\mathfrak{p}} = V_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in V(V)$ vérifiant $ht(\mathfrak{p}) \leqslant s$, alors on dit que l'idéal résiduel W est une s-intersection résiduelle géométrique de V.*

On note $\mathbf{T}^g(\psi, \phi)$ le complexe total du bicomplexe $\mathbf{B}^g(\psi, \phi)$.

Théorème 3.2.5 [BKM90] *Si on spécialise tous les coefficients $\mathbf{c}$ des polynômes $f_0, \ldots, f_m$ dans $\mathbb{K}$, le complexe spécialisé $\boldsymbol{T}(\psi, \phi)$ du complexe $\boldsymbol{T}^g(\psi, \phi)$, est une résolution minimale libre graduée de R-modules de R/A, si l'idéal résiduel $A = (J : I) \subset R$ est une p-intersection résiduelle géométrique de I.*

Nous allons à présent montrer que le complexe total $\mathbf{T}^g(\psi, \phi)$ est exact.

Proposition 3.2.6 *L'idéal résiduel $A = (J : I) \subset R_g$ est une p-intersection résiduelle géométrique de I.*

Preuve. Pour cela, il suffit de montrer que pour une spécialisation suffisamment générique des polynômes $f_1, \ldots, f_p$, l'idéal résiduel $A = (J : I) \subset R$ est une p-intersection résiduelle géométrique.
Pour un choix générique des polynômes $f_1, \ldots, f_p$, $V(J) \setminus V(I)$ est vide (cf. proposition 3.2.1). De plus, on peut montrer que pour tout $\mathfrak{p} \in V(I)$, $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$. En effet, on choisit f_1, puis f_2 tel que $\{\mathfrak{p} \in V(G) : f_{1,\mathfrak{p}} = f_{2,\mathfrak{p}} \in G_{\mathfrak{p}}\}$ est de codimension 1 dans $V(I)$. Puis on choisit f_3 tel que $\{\mathfrak{p} \in V(G) : f_{1,\mathfrak{p}} = f_{2,\mathfrak{p}}$ ou $f_{2,\mathfrak{p}} = f_{3,\mathfrak{p}} \in I_{\mathfrak{p}}\}$ est de codimension 1 dans

$V(I)$ et $\{\mathfrak{p} \in V(G) : f_{1,\mathfrak{p}} = f_{2,\mathfrak{p}} = f_{3,\mathfrak{p}} \in G_{\mathfrak{p}}\}$ est de codimension 2 dans $V(I)$. On construit de la même façon $f_4, \ldots, f_n$ et on obtient un ouvert dense $U \subset V(I)$ sur lequel $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$. Maintenant on peut choisir $f_{n+1}, \ldots, f_p$ tels que $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ avec $\mathfrak{p} \in V(I) \setminus U$ puisque $n \leq p$. Par conséquent, $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p}$ et $A_{\mathfrak{p}} = (J_{\mathfrak{p}} : I_{\mathfrak{p}}) = R_{\mathfrak{p}}$. On déduit que $V(A)$ est vide et que A est une p-intersection résiduelle géométrique.

Notons ici qu'en utilisant la proposition 3.2.1 on obtient une preuve plus simple (signalée par David Cox). La proposition 3.2.1 implique que $I^{sat} = J^{sat}$. De plus les idéaux I et I^{sat} ont les mêmes localisations, tout comme les idéaux J et J^{sat}. Il s'en suit immédiatement que $I_{\mathfrak{p}} = J_{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal homogène premier $\mathfrak{p}$. □

Corollaire 3.2.7 *Le complexe total $\boldsymbol{T}^g(\psi, \phi)$ est une résolution minimale libre graduée de R_g-modules de R_g/A.*

La première différentielle du complexe $\mathbf{T}^g(\psi, \phi)$ est définie par

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 : (\oplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant p} \; R_g \; v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n}) \oplus (\oplus_{i=1}^{p} R_g \; v_i) & \to & R_g \\ v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_n} & \mapsto & \Delta_{i_1, \ldots, i_n} \\ v_i & \mapsto & f_i, \end{array}$$

où $\Delta_{i_1, \ldots, i_n}$ est le déterminant de la sous matrice de H correspondante aux colonnes $i_1, \ldots, i_n$. On en déduit que $A = J + I_n(H)$, où $I_n(H)$ est l'idéal de R_g engendré par tous les mineurs $n \times n$ de la matrice H.

Rappelons à présent les notions de régularité de Castelnuovo-Mumford et de saturation d'un idéal (voir [Eis94], [BS87]). Soit $d \in \mathbb{N}$, on note $R_g(-d)$ l'algèbre graduée R_g où les degrés sont tordus par $-d$. Pour tout idéal gradué I de R_g, $I_{[d]}$ désigne la composante de degré d de I.

Définition 3.2.8 *L'idéal résiduel $A \subset R_g$ est dit r-régulier s'il existe une résolution libre de A de la forme*

$$0 \to \oplus_j R_g(-e_{r,j}) \to \cdots \to \oplus_j R_g(-e_{1,j}) \to \oplus_j R_g(-e_{0,j}) \to A \to 0$$

avec $e_{i,j} \leqslant r + i$ pour tout i, j. La régularité de Castelnuovo-Mumford (ou simplement la régularité) de A est le plus petit entier r pour lequel A est r-régulier.

En remarquant que la propriété d'être r-régulier entraîne la propriété d'être r-saturé (un idéal I est r-saturé si $I_{[s]} = {I^{sat}}_{[s]}$ pour $s \geq r$, [BS87], 1.3), on a la proposition suivante.

Proposition 3.2.9 *Si A est une p-intersection résiduelle géométrique de I, dans R ou dans R_g, alors A est ν-régulier pour*

$$\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = d_1 + \cdots + d_p - p + 1 - (p - n + 1)k_n.$$

Preuve. Cette borne sur le régularité de A est obtenue à partir du complexe $\mathbf{T}(\psi,\phi)$ (ou $\mathbf{T}^g(\psi,\phi)$ suivant le cas) qui est une résolution de A sous les hypothèses de la proposition. En partant de la partie droite du complexe, on remonte les applications les unes après les autres, bornant à chaque fois le degré des générateurs. □

3.2.3 Calcul du résultant résiduel

Dans ce paragraphe, nous allons appliquer les résultats du paragraphe précédent à la situation du résultant résiduel d'une intersection complète du paragraphe 3.2.1. On rappelle que $f_0,\dots,f_m,g_1,\dots,g_n$ sont des polynômes homogènes de degré respectif $d_0,\dots,d_m,k_1,\dots,k_n$ tels que $n\leq m+1$, $d_0\geq\cdots\geq d_m\geq k_1\geq\cdots\geq k_n$ et $d_m\geq k_n+1$. R désigne toujours l'anneau gradué $\mathbb{K}[x_0,\dots,x_m]$. On définit R_0 comme étant l'anneau polynomial des paramètres $\mathbf{c}=(c_\alpha^{i,j})$ définis en (3.3), i.e. $R_0=\mathbb{K}[\mathbf{c}]$, et R_g l'anneau polynomial $R_0[x_0,\dots,x_m]$. Nous considérerons R_g comme une R_0-algèbre graduée en posant $\deg(c_\alpha^{i,j})=0$ et $\deg(x_i)=1$. Notant $F=(f_0,\dots,f_m)\subset R_g$ et $G=(g_1,\dots,g_n)\subset R$, on a la relation $F\subset G\subset R_g$. On définit la matrice H, de taille $n\times(m+1)$, comme la matrice des polynômes $h_{i,j}=\sum_{|\alpha|=d_j-k_i}c_\alpha^{i,j}\,x^\alpha$; elle vérifie ainsi $(f_0,\dots,f_m)=(g_1,\dots,g_n)\,H$. Enfin, on suppose que G est une intersection complète. Nous dirons que l'on spécialise les polynômes $f_0,\dots,f_m$ dans $\mathbb{K}$ si on spécialise tous les coefficients $\mathbf{c}$ dans $\mathbb{K}$. L'idéal $F=(f_0,\dots,f_m)$ devient alors un idéal de R.

Le corollaire 3.2.7 montre que le complexe $\mathbf{T}^g$ est une résolution de F comme R_g-module. Nous allons nous concentrer sur l'application ∂_1 de ce complexe.

Définition 3.2.10 *Pour tout $s\in\mathbb{N}$, on note $\partial_{1,s}$ l'application ∂_1 en degré s:*

$$\partial_{1,s}\ :\ \left(\bigoplus_{I,0\leq i_1<\dots<i_n\leq m}R_{g[s-d_{i_1}-\cdots-d_{i_n}+\sum_{i=1}^n k_i]}\right)\bigoplus_{i=0}^{m}R_{g[s-d_i]}\longrightarrow R_{g[s]}$$

telle que

$$\partial_{1,s}\big((q_I)_I,(q_0,\dots,q_m)\big)=\sum_I q_I\Delta_I+q_0f_0+\cdots+q_mf_m.$$

Sa matrice dans les bases monomiales correspondantes est notée $\mathtt{M}_{1,s}$.

Le polynôme $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$ est le mineur $n\times n$ de la matrice H correspondant aux colonnes $i_1,\dots,i_n$. C'est un polynôme bihomogène de degré $d_{i_1}+\cdots+d_{i_n}-\sum_{i=1}^n k_i$ en les variables $x_0,\dots,x_m$, et de degré n en les coefficients $\mathbf{c}$.

Proposition 3.2.11 *Soit ν un entier tel que*

$$\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = \sum_{i=0}^{m} d_i - m - (m-n+2)\, k_n.$$

On suppose que les polynômes $f_0, \dots, f_m$ sont spécialisés dans $\mathbb{K}$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i) $\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) \neq 0$,

ii) L'application $\partial_{1,\nu}$ spécialisée est surjective,

iii) $F^{sat} = G^{sat}$,

iv) $V(F : G) = \emptyset$.

Preuve. Clairement, $V(F : G) = \emptyset$ est équivalent à $(F : G)^{sat} = (F^{sat} : G^{sat}) = R_g$ c'est-à-dire à $F^{sat} = G^{sat}$. D'après la proposition 3.2.1, il suffit donc de montrer que ii) est équivalent à iv).
Tout d'abord, supposons que $V(F : G) \neq \emptyset$, alors il existe un point $\zeta \in \mathbb{P}^m$ tel que $\Delta_I(\zeta) = f_j(\zeta) = 0$ (les mineurs $n \times n$ de la matrice H sont dans $(F : G)$ par les règles de Cramer) et donc tout polynôme dans l'image de $\partial_{1,\nu}$ s'annule en ζ et $\partial_{1,\nu}$ n'est pas surjective. Inversement, si $V(F : G)$ est vide, alors $(F : G)$ est une $(m+1)$-intersection résiduelle géométrique de G, et le complexe $\mathbf{T}$ est exact. Par la proposition 3.2.9, on déduit que la régularité de $(F : G)$ est bornée par $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$. Ainsi l'image de $\partial_{1,\nu}$ est exactement $R_{[\nu]}$ pour tout $\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$. □

Proposition 3.2.12 *Tout mineur non nul de taille* $\dim_{\mathbb{K}}(R_{[\nu]})$ *de la matrice* $\mathtt{M}_{1,\nu}$ *est un polynôme multi-homogène en les coefficients de $f_0, \dots, f_m$, et est un multiple du résultant résiduel* $\mathrm{Res}_V \in \mathbb{K}[\mathbf{c}]$.

Preuve. Soit ρ un mineur non nul de taille $\dim_{\mathbb{K}}(R_{[\nu]})$ de la matrice $\mathtt{M}_{1,\nu}$. Il est clair que ρ est un polynôme homogène en les coefficients $\mathbf{c}$.
On rappelle que $X = \mathbb{P}^m$ et que $\pi : \tilde{X} \to X$ désigne l'éclaté de X le long du faisceau d'idéaux associé à l'idéal G. Si $\tilde{X}^0$ est l'ouvert dense non vide de $\tilde{X}$ défini comme le complémentaire du diviseur exceptionnel de $\tilde{X}$, on note $Z^0 = \{\mathbf{c} : \pi^*(f_0), \dots, \pi^*(f_m)$ ont une solution commune dans $\tilde{X}^0\}$. Supposons qu'il existe $\mathbf{c}_0 \in Z^0$ tel que $\rho(\mathbf{c}_0) \neq 0$. Pour cette spécialisation $\mathbf{c}_0$, $\partial_{1,\nu}$ est surjective, et $R_{g_{[\nu]}} = F_{[\nu]} + I_n(H)_{[\nu]}$. Soit $\gamma \in \tilde{X}^0$ une solution commune de $\pi^*(f_0), \dots, \pi^*(f_m)$ et $\xi = \pi(\gamma) \in X \setminus V(G)$ sa projection. Nous avons $f_0(\xi) = \cdots = f_m(\xi) = 0$, et tous les $n \times n$ mineurs de H s'annulent en ξ puisque $\big(g_1(\xi), \dots, g_n(\xi)\big)$ est un vecteur non nul qui satisfait $\big((g_1(\xi), \dots, g_n(\xi)\big)H(\xi) = 0$. Ainsi, pour tout élément p dans l'image de $\partial_{1,\nu}$, $p(\xi) = 0$. En particulier, $\xi^\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| = \nu$. Mais cela est impossible dans $\mathbb{P}^m$, ce qui implique que ρ s'annule sur Z^0. Comme $\tilde{X}^0$ est dense dans $\tilde{X}$, Z^0 est aussi dense dans

$Z = \{\mathbf{c} : \pi^*(f_0), \dots, \pi^*(f_m)$ ont une solution commune dans $\tilde{X}\}$. ρ s'annule sur Z^0, et donc sur Z. Le théorème découle de la proposition 3.2.1. $\square$

Proposition 3.2.13 *Pour tout $i = 0, \dots, m$, il existe un mineur maximal non nul de $\mathtt{M}_{1,\nu}$ de degré N_i (cf proposition 3.2.3) en les coefficients du polynôme f_i.*

Preuve. Soit F' l'idéal $(f_1, \dots, f_m) \subset R$, où les f_i sont suffisamment génériques. La variété $V(F' : G)$ est de dimension 0 et de degré N_0. Par la proposition 3.2.6 et le corollaire 3.2.7, $(F' : G)$ est une m-intersection résiduelle géométrique, et le complexe $\mathbf{T}^g$ associé aux m polynômes $f_1, \dots, f_m$ et aux polynômes $g_1, \dots, g_n$ est exact. La régularité ν' de $(F' : G)$ est

$$\nu' \leq d_1 + \cdots + d_m - (m - n + 1)\, k_n - m + 1 = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} - d_0 + k_n + 1 \leq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$$

(par hypothèse $d_i \geq k_n + 1$, $i = 0, \dots, m$). Puisque la régularité de Castelnuovo-Mumford borne la régularité de la fonction de Hilbert pour l'idéal $(F' : G)$ (qui définit des points), pour tout $s \geq \nu'$, on a

$$\dim_{\mathbb{K}}(F' : G)_{[s]} = \dim_{\mathbb{K}}(R_{[s]}) - N_0. \tag{3.7}$$

En effet, notant $\mathfrak{m} = (x_0, \dots, x_m) \subset R$ et $M = R/(F' : G)$, il existe une suite exacte de cohomologie locale (voir [Eis94], appendice A4) :

$$0 \to H^1_{\mathfrak{m}}(F' : G)_{[s]} \to M_{[s]} \to H^0(\mathrm{Proj}(R), \tilde{M}(s)) \to H^2_{\mathfrak{m}}(F' : G)_{[s]} \to 0.$$

Comme $s \geq \nu'$, $H^1_{\mathfrak{m}}(F' : G)_{[s]} = H^2_{\mathfrak{m}}(F' : G)_{[s]} = 0$ (voir [BS87]), et donc on en déduit l'isomorphisme

$$R_{[s]}/(F' : G)_{[s]} \simeq H^0(\mathrm{Proj}(R), \tilde{M}(s)).$$

Soit $(\Delta_{I'})_{I'}$ l'ensemble des mineurs maximaux de la matrice H associée aux polynômes $f_1, \dots, f_m$.
Considérons maintenant l'idéal $(F : G)$ en degré ν, qui est engendré par les multiples de degré ν de $f_1, \dots, f_m$, des mineurs $\Delta_{I'}$, de f_0 et des mineurs $\Delta^0_{I''}$ contenant la première colonne de H indexée par 0 et $n - 1$ autres colonnes de H. Les multiples de $f_0, \Delta^0_{I''}$ sont de degré 1 en les coefficients de f_0. Par (3.7), les multiples monomiaux de degré ν des polynôme $f_1, \dots, f_m, \Delta_{I'}$ engendrent un espace vectoriel L_1 de dimension $\dim_{\mathbb{K}}(R_{g_{[\nu]}}) - N_0$. Soit L_0 l'espace vectoriel engendré par les multiples monomiaux de degré ν des polynômes $f_0, \Delta^0_{I''}$. Comme $(F : G)_{[\nu]} = R_{[\nu]}$, on a $L_0 + L_1 = R_{g_{[\nu]}}$. Ainsi, on peut compléter une base de L_1 par N_0 multiples monomiaux de $f_0, \Delta^0_{I''}$ pour obtenir une base de $R_{[\nu]}$.

Écrivons la matrice des coefficients de ces polynômes. C'est une matrice carrée de taille $\dim_{\mathbb{K}}(R_{[\nu]})$ avec N_0 colonnes représentant les N_0 multiples

monomiaux de degré ν de $f_0, \Delta^0_{I''}$. En conséquence, son déterminant est un polynôme non nul en les $\mathbf{c}$, et de degré N_0 en les coefficients de f_0. Une preuve similaire s'applique par symétrie pour $i = 1, \ldots, m$. □

Pour calculer un tel mineur maximal on procède en général par une méthode dite incrémentale, c'est-à-dire que l'on ajoute les colonnes les unes après les autres et l'on vérifie à chaque fois le rang par spécialisation générique des coefficients $\mathbf{c}$. Remarquons que le calcul d'un tel mineur est rendu possible par la connaissance de sa taille, ce qui n'était pas le cas pour le résultant résiduel d'un système projectif obtenu à l'aide des matrices Bézoutiennes.

Théorème 3.2.14 *Le pgcd de tous les mineurs maximaux de la matrice* $\mathtt{M}_{1,\nu}$ *est exactement* Res_V.

Preuve. D'après le théorème 3.2.12, le pgcd de tous les mineurs maximaux de $\mathtt{M}_{1,\nu}$ est divisible par Res_V. Par la proposition 3.2.13, ce pgcd est au plus de degré N_i en les coefficients de f_i. Comme le résultant Res_V est aussi de degré N_i en les coefficients de f_i (proposition 3.2.3), on déduit que ces deux polynômes sont égaux à une constante multiplicative non nulle près. □

Ce théorème donne un premier moyen de calculer notre résultant résiduel comme un pgcd de $m+1$ polynômes. On obtient l'algorithme suivant :
Algorithme :

1. *Calculer la matrice* $\mathtt{M}_{1,\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}$.
2. *Calculer un mineur maximal* δ_i *de degré* N_i *en les coefficients de* f_i *pour* $i = 0, \ldots, m$.
3. *Retourner le pgcd de* $\det(\delta_0), \ldots, \det(\delta_m)$.

On peut également obtenir notre résultant résiduel d'une intersection complète comme le déterminant d'un complexe. On note $\mathbf{T}^g(\psi, \phi)_\nu$ le complexe $\mathbf{T}^g(\psi, \phi)$ en degré ν. C'est un complexe de R_0-modules libres.

Théorème 3.2.15 *Le déterminant du complexe* $\boldsymbol{T}^g(\psi, \phi)_\nu$ *est exactement le résultant résiduel* Res_V *pour tout* $\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$.

Preuve. Par le théorème 3.2.5, le complexe $\mathbf{T}^g(\psi, \phi)_\nu$ est génériquement exact, c'est-à-dire exactex après tensorisation par le corps des fractions de R_0 sur R_0. De plus, il est acyclique, c'est-à-dire que tous ces groupes de cohomologies sont nuls sauf en degré 0. Le théorème 34 appendice A de [GKZ94] nous dit que son déterminant est exactement le pgcd des mineurs maximaux de l'application $\partial_{1,\nu}$, qui est exactement le résultant résiduel d'après le théorème 3.2.14 □

Un algorithme pour calculer un tel déterminant (du à Cayley) est donné dans [GKZ94], théorème 14. Il est à noter qu'un tel calcul de déterminant n'est pas très efficace, et qu'on lui préfère souvent le calcul d'un pgcd.

3.2.4 Lien avec le résultant multivarié

Le résiduel d'une hypersurface

Dans le cas $n = 1$, les polynômes $f_0, \dots, f_m$ sont tous divisibles par g_1. Ainsi le résultant résiduel que nous venons d'étudier correspond au résultant multivarié des polynômes $h_{1,0}, \dots, h_{1,m}$, puisqu'il s'annule si et seulement si ces derniers possèdent une solution commune dans $\mathbb{P}^m$. Le bloc de la matrice $\mathtt{M}_{1,\nu}$ correspondant aux mineurs Δ_I est la matrice de Macaulay classique de $h_{1,0}, \dots, h_{1,m}$, qui permet de calculer le résultant multivarié standard de ces polynômes (voir [Jou97]).

Le résiduel du vide

Dans le cas $n = m+1$, les polynômes $f_0, \dots, f_m$ ne possèdent génériquement pas de solution commune ($V(G) = \emptyset$). Le résultant résiduel est donc juste la condition pour qu'ils possèdent une solution commune dans $\mathbb{P}^m$, c'est-à-dire le résultant multivarié standard des polynômes $f_0, \dots, f_m$. Nous allons voir que la construction du résultant résiduel peut alors être utilisée pour obtenir une matrice plus petite que la matrice classique de Macaulay pour calculer ce résultant multivarié, prenant compte du support des polynômes $f_0, \dots, f_m$.

La matrice de Macaulay qui permet de calculer le résultant multivarié des polynômes $f_0, \dots, f_m$ est définie comme suit (voir [Jou97]). On pose $d = \sum_{i=0}^m d_i - m$ et on considère l'application :

$$\begin{array}{rcl} \theta_d : R_{g_{[d-d_0]}} \bigoplus R_{g_{[d-d_1]}} \bigoplus \dots \bigoplus R_{g_{[d-d_m]}} & \longrightarrow & R_{g_{[d]}} \\ (q_0, q_1, \dots, q_m) & \mapsto & \sum_{i=0}^m q_i f_i. \end{array}$$

La matrice de Macaulay est la matrice de cette application à laquelle on enlève des colonnes pour la rendre carrée et génériquement inversible. Les colonnes que l'on garde sont indexées par les sous-ensembles suivants des $R_{g_{[d-d_i]}}$:

- $N_0 = R_{g_{[d-d_0]}}$
- $N_1 = \{x^\alpha : |\alpha| = d - d_1 \ et \ \alpha_0 < d_0\} \subset R_{g_{[d-d_1]}}$
- $N_2 = \{x^\alpha : |\alpha| = d - d_2 \ et \ \alpha_0 < d_0, \alpha_1 < d_1\} \subset R_{g_{[d-d_2]}}$

$\vdots$

- $N_m = \{x^\alpha : |\alpha| = d - d_m \ et \ \alpha_0 < d_0, \dots, \alpha_{m-1} < d_{m-1}\} \subset R_{g_{[d-d_m]}}$

Cette matrice est donc de taille le nombre de monômes homogènes en les variables $x_0, \cdots, x_m$ de degré $d = \sum_{i=0}^m d_i - m$, et fournit un multiple du résultant multivarié de bon degré en les coefficients du polynôme f_m.

Maintenant notons $k_0, \dots, k_m$ des entiers positifs tels que l'idéal $G = (x_0^{k_0}, \dots, x_m^{k_m})$ contienne l'idéal $F = (f_0, \dots, f_m)$. Le résultant multivarié des polynômes $f_0, \dots, f_m$ est égale au résultant résiduel de F par G, et on peut donc utiliser la matrice $\mathtt{M}_{1,\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}$ pour calculer ce résultant multivarié. On remarque que la matrice H est carrée et donc ne possède qu'un seul mineur que l'on note Δ de degré $\delta = \sum_{i=0}^{m}(d_i - k_i)$ en les variables $x_0, \cdots, x_m$. La matrice $\mathtt{M}_{1,\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}$ est la matrice de l'application $\partial_{1,\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}$ définie par

$$\begin{array}{ccc} R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-d_0]}} \bigoplus \dots \bigoplus R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-d_m]}} \bigoplus R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-\delta]}} & \longrightarrow & R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}]}} \\ (q_0, \dots, q_m, q) & \mapsto & q\Delta + \sum_{i=0}^{m} q_i f_i. \end{array}$$

En spécialisant chaque polynôme f_i en $x_i^{d_i}$, on peut montrer que la sous-matrice de $\mathtt{M}_{1,\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}$ construite en gardant les colonnes de $\mathtt{M}_{1,\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}$ indexées par les sous-ensembles suivants est un multiple non nul du résultant de bon degré en les coefficients du polynôme f_m :

- $N_0 = R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-d_0]}}$
- $N_1 = \{x^\alpha : |\alpha| = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} - d_1 \ et \ \alpha_0 < d_0\} \subset R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-d_1]}}$

$\vdots$

- $N_m = \{x^\alpha : |\alpha| = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} - d_m \ et \ \alpha_0 < d_0, \dots, \alpha_{m-1} < d_{m-1}\} \subset R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-d_m]}}$
- $M = \{x^\alpha : |\alpha| = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} - \delta \ et \ \alpha_0 \leq d_0 - 1, \dots, \alpha_m \leq d_m - 1\} \subset R_{g_{[\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}-\delta]}}$.

Cette matrice est de taille le nombre de monômes homogènes en les variables $x_0, \cdots, x_m$ de degré $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = d - \min(k_i)$, et est donc plus petite que la matrice de Macaulay, tenant compte de la "géométrie" du support des polynômes f_i.
Remarquons que dans le cas particulier $k_0 = \cdots = k_m = 1$, la matrice que nous venons de construire est exactement la matrice donnée par J.P. Jouanolou pour calculer le résultant multivarié en degré $d - 1$ (voir [Jou97]), le polynôme Δ étant la première composante du Bézoutien, et donc équivalente au Jacobien modulo l'idéal $(f_0, \dots, f_m)$.

3.2.5 Exemples

On examine ici trois exemples de calcul de résultant résiduel d'une intersection complète. Des procédures permettant ces calculs sont implémentées dans la bibliothèque Maple `Multires`.

Le résiduel d'un point de $\mathbb{P}^2$

On considère le système suivant dans $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{cases} f_0 &= a_0z^2 + a_1zx + a_2zy + a_3xy + a_4x^2 \\ f_1 &= b_0z^2 + b_1zx + b_2zy + b_3xy + b_4x^2 \\ f_2 &= c_0z^2 + c_1zx + c_2zy + c_3xy + c_4x^2 \end{cases}$$

On pose $G = (x, z)$ et on applique la construction du résultant résiduel. On a $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 2$ et la matrice $\mathtt{M}_{1,\nu}$, de taille 6×6, est

$$\begin{bmatrix} a_4 & b_4 & c_4 & -b_1a_4 + a_1b_4 & -c_1a_4 + a_1c_4 & -c_1b_4 + b_1c_4 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -a_3b_0 + b_3a_0 & a_0c_3 - c_0a_3 & b_0c_3 - c_0b_3 \\ 0 & 0 & 0 & -b_2a_3 + a_2b_3 & -c_2a_3 + a_2c_3 & c_3b_2 - b_3c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_0b_4 - b_0a_4 & a_0c_4 - c_0a_4 & b_0c_4 - c_0b_4 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

où $p_1 = -b_1a_3 + a_1b_3 + a_2b_4 - b_2a_4$, $p_2 = -c_1a_3 + a_1c_3 + a_2c_4 - c_2a_4$ et $p_3 = -c_1b_3 + b_1c_3 + b_2c_4 - c_2b_4$.

Les degrés du résultant sont $N_0 = N_1 = N_2 = 3$, et donc le déterminant de cette matrice est exactement le résultant résiduel. Le résultant multivarié s'annule identiquement, puisque $(0 : 1 : 0)$ est une solution du système générique. Si on compare le résultant résiduel avec le résultant torique, on obtient une matrice plus grande, de taille 9×9, donnée par

$$\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_4 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & a_2 & a_1 & a_3 & a_4 \\ b_3 & b_2 & b_4 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & b_2 & b_1 & b_3 & b_4 \\ c_3 & c_2 & c_4 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & 0 & c_1 & c_0 & 0 & c_3 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & 0 & 0 & c_2 & c_1 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Son déterminant (qui est le résultant torique) est égale au résultant résiduel.

Le résiduel de deux points de $\mathbb{P}^2$

On considère le système suivant dans $\mathbb{P}^2$:

$$\begin{cases} f_0 &= a_0z^2 + a_1zx + a_2zy + a_3x^2 + a_3y^2 \\ f_1 &= b_0z^2 + b_1zx + b_2zy + b_3x^2 + b_3y^2 \\ f_2 &= c_0z^2 + c_1zx + c_2zy + c_3x^2 + c_3y^2 \end{cases}$$

on pose $G = (z, x^2 + y^2)$. On obtient $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 2$ et un mineur maximal non nul de la matrice $\mathtt{M}_{1,\nu}$ est

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -b_1c_3 + c_1b_3 & -b_2c_3 + c_2b_3 & -c_1a_3 + a_1c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 & -c_3b_0 + b_3c_0 & 0 \\ c_2 & b_2 & c_2 & -c_3b_0 + b_3c_0 & 0 & a_0c_3 - c_0a_3 \\ a_3 & b_3 & c_3 & 0 & -b_1c_3 + c_1b_3 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -b_2c_3 + c_2b_3 & 0 & -c_2a_3 + a_2c_3 \end{vmatrix}.$$

La formule pour les degrés donne $N_0 = N_1 = N_2 = 2$, et on vérifie que le déterminant de cette matrice est le résultant résiduel multiplié par $c_3(c_1b_3 - c_3b_1)$. Il possède le degré minimum N_0 en les coefficients de f_0. Dans ce cas, les résultants multivarié et torique s'annulent identiquement.

Le résiduel d'une courbe de $\mathbb{P}^3$

On considère le système suivant de cubiques de $\mathbb{P}^3$ contenant l'umbilic :

$$\begin{cases} f_0 &= (a_0x + a_1y + a_2z + a_3t)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \quad +(a_4x^2 + a_5y^2 + a_6z^2 + a_7t^2 + a_8xy + a_9xz + a_{10}xt + a_{11}yz + a_{12}yt + a_{13}zt)t \\ f_1 &= (b_0x + b_1y + b_2z + b_3t)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \quad +(b_4x^2 + b_5y^2 + b_6z^2 + b_7t^2 + b_8xy + b_9xz + b_{10}xt + b_{11}yz + b_{12}yt + b_{13}zt)t \\ f_2 &= (c_0x + c_1y + c_2z + c_3t)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \quad +(c_4x^2 + c_5y^2 + c_6z^2 + c_7t^2 + c_8xy + c_9xz + c_{10}xt + c_{11}yz + c_{12}yt + c_{13}zt)t \\ f_3 &= (d_0x + d_1y + d_2z + d_3t)(x^2 + y^2 + z^2) \\ & \quad +(d_4x^2 + d_5y^2 + d_6z^2 + d_7t^2 + d_8xy + d_9xz + d_{10}xt + d_{11}yz + d_{12}yt + d_{13}zt)t \end{cases}$$

On pose $G = (t, x^2 + y^2 + z^2)$ et on applique la construction. On obtient $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 6$, $N_0 = N_1 = N_2 = N_3 = 15$. La matrice $\mathtt{M}_{1,\nu}$ est de taille 84×200. Un mineur maximal de rang 84 dont le déterminant est de degré 15 en les coefficients de f_0 a été construit comme suit. On considère la matrice 84×120 de l'application ∂_1 associée aux polynômes f_1, f_2, f_3, et on extrait 69 colonnes indépendantes (par spécialisation aléatoire). On ajoute à cette matrice les colonnes de $\mathtt{M}_{1,\nu}$ dépendantes des coefficients de f_0 et indépendantes des 69 dernières colonnes.

Notons que $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 6$ est ici exactement la régularité. Si on calcul la matrice de l'application $\partial_{1,5}$, on obtient une matrice de taille 56×55. Notons également que les résultants multivarié et torique sont identiquement nuls.

3.3 Résultant résiduel d'un idéal de codimension 2

Dans ce paragraphe, nous allons étendre le calcul du résultant résiduel d'une intersection complète défini en 3.2, au cas d'une intersection complète locale projective Cohen-Macaulay de codimension 2. Pour cela nous allons utiliser une résolution du résiduel d'un idéal de codimension deux basée principalement sur le théorème de Hilbert-Burch. Nous verrons également qu'en nous restreignant au cas de trois polynômes dans le plan projectif les résultats que nous obtenons sont plus explicites; c'est d'ailleurs la première partie d'un travail qui a été présenté à la conférence ISSAC2001 [Bus01]. Sa motivation première est l'utilisation d'un tel résultant résiduel pour résoudre le problème d'implicitisation de surfaces rationnelles avec points bases (voir Chapitre 5).

La situation que nous allons étudier dans cette section est la même situation que celle décrite au paragraphe 3.2.1, à la différence que nous allons supposer par la suite que G est une intersection complète *locale* projective. Cette situation est la suivante. Soit $\mathbb{P}^m = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m])$, et soient $g_1, \dots, g_n \in R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ n polynômes homogènes de degré respectif $k_1, \dots, k_n$, et $d_0, \dots, d_m$ m entiers positifs. On suppose que l'idéal $G = (g_1, \dots, g_n)$ de R est localement intersection complète projective (i.e. comme sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^m$), et on considère le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_0(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,0}(x)\, g_i(x) \\ \vdots & & \vdots \\ f_m(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,m}(x)\, g_i(x) \end{array} \right. \tag{3.8}$$

où $x \in \mathbb{P}^m$ et $h_{i,j}(x) = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} c_\alpha^{i,j}\, x^\alpha$ est un polynôme homogène de degré $d_j - k_i$, pour $i = 1, \dots, n$ et $j = 0, \dots, m$. Les polynômes $f_i(x)$ pour $i = 0, \dots, m$, sont des polynômes homogènes de degré d_i dans l'idéal G, et les coefficients $\mathbf{c} = (c_\alpha^{i,j})$ sont appelés les paramètres du système. Nous cherchons une condition sur les coefficients $\mathbf{c}$ pour que le système (3.8) possède une solution "en dehors" de la variété algébrique $V(G)$ définie par l'idéal G.

Avant d'aller plus loin, on remarque que la composante de codimension 1 de la variété $V(G)$ peut facilement être oubliée en divisant les polynômes $f_0, \dots, f_m$ par le pgcd des polynômes $g_1, \dots, g_n$. Par conséquent, nous ne considérerons par la suite que le cas pertinent où G est supposé être de codimension au moins 2 (en fait dans ce qui suit nous supposerons que G est de codimension exactement 2).

3.3.1 Propriétés

Soit $X = \mathbb{P}^m = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m])$ l'espace projectif de dimension m sur $\mathbb{K}$. On se donne un idéal G engendré par n polynômes homogènes de degré respectif $k_1 \geq \dots \geq k_n$. Soit $\mathcal{G}$ le faisceau cohérent d'idéaux associé à G. Fixons $m+1$ entiers positifs $d_0, \dots, d_m$ tels que $d_0 \geq \dots \geq d_m \geq k_1 \geq \dots \geq k_n$, et notons $\mathcal{G}(d_i) = \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d_i)$ pour $i = 0, \dots, m$. L'espace vectoriel $V_i = H^0\big(X, \mathcal{G}(d_i)\big)$ s'identifie à l'ensemble des polynômes homogènes de degré d_i qui sont dans la saturation de l'idéal G. L'éclaté de X le long de $\mathcal{G}$ est noté $\pi : \tilde{X} \to X$; le faisceau image inverse $\tilde{\mathcal{G}} = \pi^{-1}\mathcal{G} \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}}$ est alors un faisceau inversible sur $\tilde{X}$. Dans ce qui suit, le faisceau $\tilde{\mathcal{G}} \otimes \pi^*\big(\mathcal{O}_X(d_i)\big)$ est noté $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$, F désigne l'idéal de R engendré par les polynômes $f_0, \dots, f_m$ et on note $V = V_0 \oplus \dots \oplus V_m$, $E = \oplus_{i=0}^m \mathcal{O}(d_i)$.

Si G est une intersection complète locale projective de codimension 2 alors la proposition 3.2.1 nous dit que si $d_m \geq k_n + 1$, le résultant résiduel Res_V est bien défini et vérifie

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, x \in \tilde{X} : \pi^*(f_i)(x) = 0 \ \ \forall i = 0, \dots, m \\ &\Longleftrightarrow \quad F^{sat} \subsetneq G^{sat}, \end{aligned}$$

où $\pi^*(f_i)$ est une section globale du faisceau inversible sur $\tilde{X}$, $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$, et où F^{sat} et G^{sat} désignent les saturations respectives des idéaux homogènes F et G. En particulier, s'il existe $x \in X \setminus V(G)$ tel que $f_0(x) = \dots = f_m(x) = 0$, alors

$$\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) = 0.$$

Remarque 3.3.1 *$F^{sat} \neq G^{sat}$ est équivalent à $(F^{sat} : G^{sat}) \neq R$, i.e. la variété définie par l'idéal $(F : G)$ est non vide.*

On sait que ce résultant résiduel est un polynôme multihomogène en les coefficients de chacun des polynômes f_i, à savoir de degré

$$N_i = \int_{\tilde{\mathbb{P}^m}} \prod_{j \neq i} \tilde{\mathcal{G}}_{d_j}$$

en les coefficients du polynôme f_i. Nous avons deux techniques disponibles pour calculer ces entiers N_i. La première est d'utiliser la formule que nous avons développée au paragraphe 3.1.1 et qui exprime N_i en fonction des degrés d_i et de la classe de Segre du sous-schéma associé à $\mathcal{G}$. La deuxième méthode consiste à exploiter le fait que

$$N_i = dim_{\mathbb{K}} \frac{R_{[s]}}{((f_0, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_m) : G)_{[s]}}$$

pour s suffisamment grand et $\mathbf{c}$ suffisamment générique. A l'aide d'une résolution de l'idéal $(f_0, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_m) : G$, nous pouvons calculer ces entiers N_i par un calcul de séries de Hilbert. Nous donnerons un peu

plus loin une telle résolution. Dans le cas particulier où $X = \mathbb{P}^2$, ces deux techniques mises à contribution, on peut exprimer simplement les entiers N_i.

Cas $X = \mathbb{P}^2$

Nous supposons donc à présent que $m = 2$ et donc $X = \mathbb{P}^2$. Le faisceau d'idéaux $\mathcal{G}$ définit un schéma zéro-dimensionnel Z composé de p points $P_1, \dots, P_p$. On note e_i la multiplicité du point P_i dans Z. Comme G est localement intersection complète, on a $e_i = dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{O}_{Z,p})$, où $\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}/\mathcal{G}$, et donc $\sum_{i=1,\dots,p} e_i = dim_{\mathbb{K}} H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$.

Proposition 3.3.2 *Le polynôme* Res_V *est multihomogène en les coefficients de chaque* V_i *de degré* N_i *pour* $i = 0, 1, 2$*, où*

$$N_i = \frac{d_0 d_1 d_2}{d_i} - dim_{\mathbb{K}} H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \frac{d_0 d_1 d_2}{d_i} - \sum_{i=1}^{p} e_i.$$

Preuve. On fixe $i = 0$. Nous devons calculer l'entier N_0 qui, par les propositions 2.1.3 et 3.2.1, vaut

$$\int_{\tilde{X}} c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_1}) c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_2}),$$

où $c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_i})$ désigne la première classe de Chern du faisceau $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$ et $\int_{\tilde{X}}$ l'application degré sur $\tilde{X}$. On note $H = \pi^*(h)$, où h est la classe d'un hyperplan générique de $\mathbb{P}^2$, E_i, pour $i = 1, \dots, p$, les diviseurs exceptionnels de l'éclatement π au-dessus de chaque point P_i. On a alors (voir [Ful84]), $c_1(\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}) = d_i H - \sum_{i=1}^{p} E_i$. Puisque $E_i.E_j = 0$ si $i \neq j$, et $H.E_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$, on déduit que

$$N_0 = \int_{\tilde{X}} (d_1 d_2 H^2 + \sum_{i=1}^{p} E_i^2).$$

Par propriété de l'application degré (voir [Ful84], définition 1.4), on a l'égalité :

$$N_0 = \int_{\tilde{X}} (d_1 d_2 H^2 + \sum_{i=1}^{p} E_i^2) = d_1 d_2 \int_X h^2 + \sum_{i=1}^{p} \int_X \pi_*(E_i^2).$$

Nous savons que $\int_X h^2 = 1$. De plus, d'après le paragraphe 4.3 de [Ful84], pour tout $i = 1, \dots, p$, $\int_X \pi_*(E_i^2) = -e_i$, où la multiplicité e_i est au sens de Samuel. Il vient alors

$$N_0 = d_1 d_2 - \sum_{i=1}^{p} e_i.$$

□

Si on suppose de plus que G est un idéal *saturé*, nous pouvons donner un résultat plus explicite pour les degrés N_0, N_1 et N_2, grâce à la propriété suivante : un idéal $P \subset R = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$ définissant des points dans $\mathbb{P}^2$, c'est-à-dire un idéal homogène saturé de codimension 2 de R, est de dimension projective 1.

En effet, la formule de Auslander-Buchsbaum donne :

$$pd(P) = grade(\mathfrak{m}, R) - grade(\mathfrak{m}, P) = 3 - grade(\mathfrak{m}, P),$$

où $\mathfrak{m} = (x_0, x_1, x_2)$ est l'idéal irrelevant de R. On peut supposer qu'il n'y a pas de points de l'idéal P sur la droite $\{x_0 = 0\}$, et donc on a :

$$x_0.f \in P \Longrightarrow f \in P.$$

On en déduit que x_0 n'est pas un diviseur de zéro dans P, et de plus que x_1 n'est pas un diviseur de zéro dans P/x_0P. En effet, si $x_1h + x_0q = 0$ avec $h, q \in P$, alors h divise x_0 et donc $h = x_0h'$. Mais puisque $h \in P$, $h' \in P$, h est nul dans P/x_0P.
Finalement, on a $grade(\mathfrak{m}, P) \geq 2$. Puisque $pd(P) \neq 0$ (sinon P serait libre et ne pourrait donc pas définir des points), on obtient $pd(P) = 1$, et donc $pd(R/P) = 2$ (en fait, plus généralement, tout idéal Q d'un anneau A de codimension 2 tel que A/Q est Cohen-Macaulay est de dimension projective 1 (voir [Eis94] théorème 20.15)).

Le théorème de Hilbert-Burch nous dit qu'il existe une résolution libre minimale graduée de R-modules de l'idéal G de la forme (voir [Eis94], théorème 20.15) :

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} R(-l_i) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{n} R(-k_i) \xrightarrow{\gamma=(g_1,\dots,g_n)} G \to 0, \tag{3.9}$$

avec $\sum_{i=1}^{n-1} l_i = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

Proposition 3.3.3 *On suppose que G est un idéal saturé et qu'il possède la résolution minimale (3.9), alors, pour $i = 0, 1, 2$, on a*

$$N_i = \frac{d_0 d_1 d_2}{d_i} - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} l_j^2 - \sum_{j=1}^{n} k_j^2}{2}.$$

Preuve. Nous avons un complexe exact de faisceaux sur $\mathbb{P}^2$:

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-l_i) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-k_i) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_Z \to 0.$$

En tensorisant ce complexe par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(t)$ pour $t \gg 0$, tous les faisceaux intervenant dans ce nouveau complexe n'ont pas de cohomologie en degré supérieur ou égal à 1 (voir [Har77] III, théorème 5.2). On en déduit que le complexe obtenu en prenant les sections globales est lui aussi exact, et que l'on peut donc calculer $dim_{\mathbb{K}} H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = dim_{\mathbb{K}}(R/G)_t$, pour $t \gg 0$, à partir de la résolution (3.9) de l'idéal G. □

Remarque 3.3.4 On remarque que dans le cas où l'idéal G est une intersection complète, la proposition 3.3.3 donne le même résultat que la proposition 3.2.3, à savoir

$$N_i = \frac{d_0 d_1 d_2}{d_i} - k_1 k_2,$$

pour $i = 0, 1, 2$.

Dans les deux paragraphes suivants nous allons décrire une matrice qui permet de calculer le résultant résiduel dans le cas où m est quelconque. La construction de cette matrice est basée, comme pour le cas du résultant résiduel d'une intersection complète, sur la résolution de l'idéal résiduel $(F : G) = \{f \in R : f.G \subset F\}$.

3.3.2 Résolution de l'idéal résiduel

Soient $A = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ un anneau de polynôme tel que $m \geq 2$, et $I = (g_1, \dots, g_n)$ un idéal homogène de A tel que A/I est de dimension projective 2. On note $k_1 \geq \dots \geq k_n$ les degrés respectifs des polynômes $g_1, \dots, g_n$. On considère les $s+1$ polynômes suivants de degré respectif $d_0 \geq \dots \geq d_s \geq k_1$, définis par :

$$\begin{cases} f_0(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,0}(x)\, g_i(x) \\ \quad\vdots & & \\ f_s(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,m}(x)\, g_i(x) \end{cases}$$

où $h_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} c_\alpha^{i,j}\, x^\alpha$ sont des polynômes homogènes génériques de degré $d_j - k_i$. On note A_0 l'anneau des polynômes des paramètres $\mathbf{c} = (c_\alpha^{i,j})$, c'est-à-dire $A_0 = \mathbb{K}[\mathbf{c}]$, et par A_g l'anneau des polynômes $A_0[x_0, \dots, x_m]$. Nous considérerons A_g comme une A_0-algèbre graduée, i.e. on pose $\deg(c_\alpha^{i,j}) = 0$ et $\deg(x_i) = 1$. On note également $J \subset I \subset A_g$ l'idéal homogène de A_g engendré par les polynômes $f_0, \dots, f_s$.
Dans ce paragraphe, nous donnons une résolution de l'idéal résiduel $(J : I)$, sous les hypothèses que nous venons d'énoncer. Cette résolution est extraite de la preuve du théorème 1.1 de [CEU01]. Nous utiliserons cette résolution par la suite pour calculer explicitement le résultant résiduel d'un idéal localement intersection complète Cohen-Macaulay de codimension 2.

Le théorème de Hilbert-Burch nous dit que toute résolution libre minimale graduée de A-modules de l'idéal I est de la forme (voir [Eis94], théorème 20.15) :

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} A(-l_i) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{n} A(-k_i) \xrightarrow{\gamma=(g_1,\dots,g_n)} I \to 0,$$

où $\sum_{i=1}^{n-1} l_i = \sum_{i=1}^{n} k_i$. On en déduit la présentation graduée de A_g-modules pour l'idéal I/J suivante :

$$\bigoplus_{i=1}^{n-1} A_g(-l_i) \bigoplus_{i=0}^{s} A_g(-d_i) \xrightarrow{\psi\oplus\phi} \bigoplus_{i=1}^{n} A_g(-k_i) \xrightarrow{\gamma} I/J \to 0, \tag{3.10}$$

où ϕ est la matrice $(h_{i,j})_{1\leq i\leq n, 0\leq j\leq s}$.
On remarque maintenant que l'on a :

$$Ann_{A_g}(coker(\psi \oplus \phi)) = Ann_{A_g}(I/J) = (J : I),$$

et on rappelle le théorème suivant de Buchsbaum-Eisenbud (voir [BE77]) :

Proposition 3.3.5 *Soit S un anneau noethérien et $\alpha : S^m \to S^n$ un morphisme tel que $m \geq n$. Alors,*

$$Ann_S(coker(\alpha))^n \subseteq I_n(\alpha) \subseteq Ann_S(coker(\alpha)),$$

où $I_n(\alpha)$ désigne l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la matrice de α. De plus, si $grade(I_n(\alpha)) = m - n + 1$, alors $I_n(\alpha) = Ann_S(coker(\alpha))$.

Maintenant l'idéal $(J : I)$ est une $s+1$-intersection résiduelle de I dans A_g, c'est-à-dire $codim(J : I) \geq s+1$ (voir [HU88]). Puisque l'anneau A_g est Cohen-Macaulay nous avons $codim(J : I) = grade(J : I)$, et donc $grade(J : I) \geq s+1 = (n+s)-(n)+1$. D'après la proposition précédente, on conclut que $I_n(\psi \oplus \phi) = (J : I)$. Par conséquent, on obtient une résolution de l'idéal résiduel $(J : I)$, en prenant le complexe de Eagon-Northcott, noté $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$. Ce complexe gradué est défini comme suit (voir [BV80] 2.C pour plus de détails, ou bien [Laz77]).

Soient M et N les deux A_g-modules gradués définis par

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_g[-l_i] \bigoplus_{i=0}^{s} A_g[-d_i] \xrightarrow{\psi\oplus\phi} N = \bigoplus_{i=1}^{n} A_g[-k_i].$$

Le complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ est

$$0 \to P_{s+1} \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} P_i \xrightarrow{df} P_{i-1} \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} P_1 \xrightarrow{\sigma} A_g$$

où $P_i = S_{i-1}(N^*) \otimes \bigwedge^{n-1+i}(M)$, $S_\bullet$ désigne l'algèbre symétrique, $\bigwedge^\bullet$ l'algèbre extérieure, et * le module dual. L'application σ est l'application $\wedge^n(\psi \oplus \phi)$,

et les applications df sont définies de la façon suivante : Soit $e_1, \ldots, e_{n+s}$ une base de M, et $b_1, \ldots, b_n$ une base de N, on pose

$$df((b^*_{i_1} \ldots b^*_{i_r}) \otimes (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_u})) = \sum_{t=1}^{r} \sum_{v=1}^{u} (-1)^{v+1}$$

$$b^*_{i_t}(\psi \oplus \phi(e_{j_v}))(b^*_{i_1} \ldots \overset{\wedge}{b^*_{i_t}} \ldots b^*_{i_r}) \otimes (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge \overset{\wedge}{e_{j_v}} \wedge \ldots \wedge e_{j_s}).$$

Proposition 3.3.6 *Le complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ est une résolution minimale libre graduée de A_g-modules de l'idéal résiduel $(J : I)$. Cet idéal est $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$-régulier avec*

$$\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = d_0 + \ldots + d_s - s(k_n + 1).$$

De plus, si on spécialise tous les coefficients $\mathbf{c}$ dans $\mathbb{K}$, le complexe spécialisé $\mathcal{D}_0(\psi \oplus \phi)$ de $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ est une résolution minimale libre graduée de A-modules de l'idéal résiduel spécialisé $(J : I) \subset A$, si cet idéal est une $s+1$-intersection résiduelle dans A. Dans ce cas $(J : I)$ est aussi $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$-régulier.

Preuve. Tout d'abord dans le cas générique, (i.e dans A_g) nous avons vu que si $(J : I)$ est une $s+1$-intersection résiduelle, alors $I_n(\psi \oplus \phi) = (J : I)$ est de profondeur $(n+s) - (n) + 1$. Le complexe de Eagon-Northcott $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ est donc une résolution de l'idéal $(J : I)$ (voir [BV80], théorème 2.16). Un calcul facile à partir de la description du complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ donne l'entier $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$.

Dans le cas spécialisé (i.e dans A), on remarque que la présentation (4.5) donne toujours une présentation sur A par spécialisation, et donc, si on suppose que $(J : I)$ est une $s+1$-intersection résiduelle dans A, on obtient que $I_n(\psi \oplus \phi) = (J : I)$ est de profondeur $(n+s) - (n) + 1$. De la même manière, le complexe de Eagon-Northcott $\mathcal{D}_0(\psi \oplus \phi)$ de A-modules est donc une résolution de $(J : I)$, et le même calcul que dans le cas générique donne le même entier $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$ comme borne de la régularité de l'idéal $(J : I)$ de A. $\square$

On note $\mathtt{M}^g_{\psi \oplus \phi}$ la matrice de l'application $\psi \oplus \phi$ dans le cas générique, c'est-à-dire dans (4.5). Soit $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$ le déterminant de la sous-matrice de taille $n \times n$ de la matrice $\mathtt{M}^g_{\psi \oplus \phi}$ correspondante aux colonnes $i_1, \ldots, i_n$. Alors la première application σ du complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ est :

$$\begin{array}{rccc} \sigma : \bigoplus_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant n+s} & A_g e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} & \xrightarrow{\sigma} & A_g \\ & e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} & \mapsto & \Delta_{i_1,\ldots,i_n} \end{array}$$

Si l'on note $\alpha_{i_1,\ldots,i_n}$ le degré du polynôme $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}$, alors l'application précédente σ en degré ν, notée σ_ν, est :

$$\sigma_\nu : \bigoplus A_{g[\nu - \alpha_{i_1,\ldots,i_n}]} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \to A_{g[\nu]},$$

où $A_{g[t]}$ désigne la partie homogène de degré t de la A_0-algèbre graduée A_g. Nous noterons $\mathtt{M}^g_\nu$ sa matrice dans les bases monomiales.

3.3.3 Calcul du résultant résiduel

Dans ce paragraphe nous reprenons la situation de 3.3.1, dans le but d'obtenir une formulation explicite du résultant résiduel d'un idéal Cohen-Macaulay localement intersection complète de codimension 2 en utilisant les résultats du paragraphe précédent 3.3.2. R désigne l'anneau des polynômes $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$. On suppose que G est un idéal homogène de R engendré par n polynômes homogènes $g_1, \dots, g_n$ de degré respectif $k_1 \geq \cdots \geq k_n$, et que G est un idéal Cohen-Macaulay intersection complète locale projective de codimension 2.
Soient $f_0, \dots, f_m$ $m+1$ polynômes homogènes comme définis dans (3.8), de degrés respectifs $d_0, \dots, d_m$, tels que $d_0 \geq \dots \geq d_m \geq k_1$ et $d_m \geq k_n + 1$. On note $A = \mathbb{K}[\mathbf{c}]$, R_g l'anneau des polynômes $R_g = A[x_0, \dots, x_m]$, et F l'idéal homogène de R_g engendré par les $m+1$ polynômes $f_0, \dots, f_m$. Nous dirons que l'on spécialise les polynômes $f_0, \dots, f_m$ dans $\mathbb{K}$ si l'on spécialise tous les coefficients $\mathbf{c}$ dans $\mathbb{K}$. Dans ce cas, l'idéal F devient un idéal de l'anneau R.

Proposition 3.3.7 *On suppose que les polynômes $f_0, \dots, f_m$ sont spécialisés dans $\mathbb{K}$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $\mathrm{Res}_V(f_0, \dots, f_m) \neq 0$,

ii) Le morphisme σ_ν du complexe spécialisé $\mathcal{D}_0(\psi \oplus \phi)$ pris en degré ν est surjectif pour $\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$,

iii) $V(F : G) = \emptyset$,

iv) $F^{sat} = G^{sat}$.

Preuve. D'après la proposition 3.2.1 et la remarque 3.3.1, il reste seulement à prouver que le morphisme σ_ν est surjectif pour $\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$, si et seulement si la variété $V(F : G)$ est vide.

Si $V(F : G)$ est vide, alors $(F : G)$ est une $m+1$-intersection résiduelle dans R, et l'image de σ_ν est $(F : G)_\nu = R_\nu$, puisque ν est supérieur ou égal à la régularité de l'idéal résiduel $(F : G)$.
Maintenant supposons que $V(F : G)$ n'est pas vide. Alors il existe un point $\zeta \in \mathbb{P}^m$ tel que tous les déterminants des mineurs maximaux $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$ de la matrice $\mathtt{M}_{\psi\oplus\phi}$ (la matrice spécialisée de la matrice $\mathtt{M}^g_{\psi\oplus\phi}$) s'annulent. En effet, nous avons l'égalité suivante :

$$(0, \dots, 0, f_0, \dots, f_m) = (g_1, \dots, g_n)\mathtt{M}_{\psi\oplus\phi},$$

et par les règles de Cramer, tous les $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$ sont dans l'idéal résiduel $(F : G)$ (on remarque que les polynômes $f_0, \dots, f_m$ apparaissent comme de tels mineurs, par le théorème de Hilbert-Burch). On en déduit que tout polynôme dans l'image de σ_ν ($\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$) s'annule en ζ, et donc que σ_ν n'est pas surjective. □

Désormais, ν dénote un entier supérieur ou égal à

$$\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = d_0 + \ldots + d_m - m(k_n + 1)$$

.

Proposition 3.3.8 *Tout mineur maximal non nul de taille* $\mathrm{rang}(R_\nu)$ *de la matrice* $\mathtt{M}_\nu^g$ *(voir paragraphe 3.3.2) est un polynôme multihomogène en les coefficients* $\mathbf{c}$ *de* $f_0, \ldots, f_m$*, et un multiple du résultant résiduel* Res_V*.*

Preuve. Soit ρ un mineur maximal non nul de la matrice $\mathtt{M}_\nu^g$. Il est clair que ρ est un polynôme homogène en les coefficients de chaque f_i, pour $i = 0, \ldots, m$.
On rappelle que $X = \mathbb{P}^m$, que $\tilde{X}$ est l'éclaté de X le long du faisceau d'idéaux associé à l'idéal G, et que Res_V s'annule si et seulement si il existe un point $x \in \tilde{X}$ tel que la section globale $\pi^*(f_i)$ de $\tilde{\mathcal{G}}_{d_i}$ s'annule en x simultanément pour tout $i = 0, \ldots, m$ (voir la proposition 3.2.1). Soit $\tilde{X}^0$ l'ouvert dense non vide de $\tilde{X}$ défini comme le complémentaire du diviseur exceptionnel dans $\tilde{X}$, et soit $Z^0 = \{\mathbf{c} \in \prod_{i=0}^m V_i : \exists x \in \tilde{X}^0\ \pi^*(f_0)(x) = \ldots = \pi^*(f_m)(x) = 0\}$. Supposons qu'il existe $\mathbf{c}_0 \in Z^0$ tel que $\rho(\mathbf{c}_0) \neq 0$. Pour cette spécialisation $\mathbf{c}_0$, σ_ν est alors surjective, ce qui contredit la proposition 3.3.7. On en déduit que ρ s'annule sur Z^0. Comme $\tilde{X}^0$ est dense dans $\tilde{X}$, Z^0 est aussi dense dans $Z = \{\mathbf{c} \in \prod_{i=0}^m V_i : \exists x \in \tilde{X}\ \pi^*(f_0)(x) = \ldots = \pi^*(f_m)(x) = 0\}$, et par conséquent ρ s'annule sur Z, c'est-à-dire que ρ est un multiple de Res_V. $\square$

Proposition 3.3.9 *Pour tout* $i = 0, \ldots, m$*, il existe un mineur maximal non nul de taille* $\mathrm{rang}(R_\nu)$ *de la matrice* $\mathtt{M}_\nu^g$ *de degré* N_i *(voir le paragraphe 3.3.1) en les coefficients du polynôme* f_i*.*

Preuve. On choisit une spécialisation des polynômes $f_0, \ldots, f_m$ telle que l'idéal résiduel $(F : G)$ est une $m+1$-intersection résiduelle dans R. On note F' l'idéal $(f_1, \ldots, f_m)$. Par hypothèse, $(F' : G)$ est une m-intersection résiduelle, et son degré est N_0. La proposition 3.3.6 nous dit que $(F' : G)$ est ν'-régulier pour

$$\nu' = d_1 + \ldots + d_m - (m-1)(k_n + 1) = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} - d_0 + k_n + 1 \leq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$$

(par hypothèse $d_i \geq k_n + 1$, $i = 0, \ldots, m$). Puisque la régularité de Castelnuovo-Mumford borne la régularité de la fonction de Hilbert (voir preuve de la proposition 3.2.13), pour tout $s \geq \nu'$, nous avons $\dim_{\mathbb{K}}(F' : G)_s = \dim_{\mathbb{K}}(R_s) - N_0$.
Considérons maintenant l'idéal $(F : G)$ en degré ν. Il est engendré par les multiples de degré ν des mineurs maximaux de la matrice $\mathtt{M}_{\psi \oplus \phi}$. La dernière équation implique que les multiples de degré ν des mineurs maximaux faisant intervenir seulement les coefficients des polynômes $f_1, \ldots, f_m$ engendrent

un sous espace vectoriel L de dimension $\dim_{\mathbb{K}}(R_\nu) - N_0$ de R_ν. Comme $(F : G)_\nu = R_\nu$, on peut compléter une base de R_ν par N_0 multiples de degré ν des mineurs maximaux de la matrice $\mathtt{M}_{\psi\oplus\phi}$ faisant intervenir l'unique colonne dépendant des coefficients de f_0. Puisque de tels mineurs sont de degré 1 en les coefficients de f_0, on en déduit qu'il existe un mineur maximal de la matrice $\mathtt{M}_\nu$, et donc de la matrice $\mathtt{M}_\nu^g$, de degré N_0 en les coefficients de f_0. Une preuve similaire s'applique par symétrie pour $i = 1, \dots, m$. □

Théorème 3.3.10 *Le pgcd de tous les déterminants des mineurs maximaux de taille* $\mathrm{rang}(R_\nu)$ *de la matrice* $\mathtt{M}_\nu^g$*, est exactement* Res_V.

Preuve. D'après la proposition 3.3.8, le pgcd des mineurs maximaux de la matrice $\mathtt{M}_\nu^g$ est divisible par Res_V qui est multihomogène de degré N_i en les coefficients du polynôme f_i. Maintenant la proposition 3.3.9 implique qu'il existe un mineur maximal de la matrice $\mathtt{M}_\nu^g$ de degré N_i en les coefficients du polynôme f_i. On en déduit que Res_V est exactement le pgcd de tous les mineurs maximaux de la matrice $\mathtt{M}_\nu^g$. □

Ce théorème donne une première méthode pour calculer notre résultant résiduel :

Algorithme 1 :

1. *Calculer la matrice* $\mathtt{M}_{\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}}^g$.
2. *Calculer un mineur maximal* δ_i *de degré* N_i *en les coefficients de* f_i *pour* $i = 0, \dots, m$.
3. *Retourner le pgcd de* $\det(\delta_0), \dots, \det(\delta_m)$.

Remarquons que les mineurs maximaux δ_i sont des matrices carrées de taille $\mathrm{rang}(R_\nu) = \begin{pmatrix} \nu + m \\ m \end{pmatrix}$. En pratique, pour calculer un tel mineur maximal de $\mathtt{M}_\nu^g$ de degré N_i en les coefficients du polynôme f_i, on calcule tout d'abord un mineur maximal de la matrice $\mathtt{M}'^g_\nu$ associée à l'idéal $((f_1, \dots, f_m) : G)$, puis on la complète incrémentalement avec le bon nombre de colonnes de la matrice $\mathtt{M}_\nu^g$ dépendant des coefficients du polynôme f_0.

Il est aussi possible de calculer notre résultant résiduel comme le déterminant d'un complexe. On note $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)_\nu$ le complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)$ en degré ν. C'est un complexe de A-modules libres de type fini.

Théorème 3.3.11 *Le déterminant du complexe* $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)_\nu$ *est exactement le résultant résiduel* Res_V *pour tout* $\nu \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$.

Preuve. D'après la proposition 3.3.6, le complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)_\nu$ est génériquement exact, c'est-à-dire exact après tensorisation par le corps des fractions de A sur A, et est acyclique, c'est-à-dire que tous ses groupes d'homologies sont nuls excepté en degré zéro. Le théorème 34 appendice A de

[GKZ94] nous dit que son déterminant est le pgcd des mineurs maximaux de l'application σ_ν, qui est exactement le résultant résiduel d'après la proposition 3.3.10. $\square$

Le déterminant d'un complexe est généralement lourd à calculer et peu efficace car il fait intervenir beaucoup de déterminants. Cependant dans le cas $m = 2$, i.e $X = \mathbb{P}^2$, le complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)_\nu$ possède seulement trois termes et peu donc être utilisé pour calculer le résultant résiduel d'un idéal définissant des points dans $\mathbb{P}^2$, résultant résiduel que nous utiliserons au chapitre 5. Il est de la forme :

$$\bigoplus_{i=1}^{\frac{(n+1)n}{2}} R^g_{[\nu-\delta_i]} \xrightarrow{df_2} \bigoplus_{i=1}^{n(n+2)} R^g_{[\nu-\beta_i]} \xrightarrow{df_1} \bigoplus_{i=1}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} R^g_{[\nu-\alpha_i]} \xrightarrow{\sigma} R^g_{[\nu]}. \tag{3.11}$$

Un algorithme pour calculer le déterminant d'un tel complexe de modules libres (du à Cayley) peut être trouvé dans [GKZ94], théorème 14, ou dans [Cha93]. Dans notre cas, on peut obtenir le résultant résiduel par l'algorithme qui suit. Pour simplifier, on note le complexe $\mathcal{D}_0^g(\psi \oplus \phi)_\nu$

$$0 \to L_3 \xrightarrow{df_2} L_2 \xrightarrow{df_1} L_1 \xrightarrow{\sigma} L_0,$$

et B_0, B_1, B_2, B_3 des bases respectives de L_0, L_1, L_2, L_3.

Algorithme 2 :

1. *Calculer un mineur maximal δ_0 du morphisme $\sigma : L_1 \to L_0$. Cela donne une base $K_1 \subset B_1$ avec $\sharp K_1 = \sharp B_0$ (où $\sharp$ désigne le cardinal).*
2. *Calculer un mineur maximal δ_1 du morphisme $df_1 : L_2 \to L_1 \setminus \langle K_1 \rangle$. Cela donne une base $K_2 \subset B_2$ avec $\sharp(K_2) = \sharp(B_1 \setminus K_1)$.*
3. *Retourner le résultant résiduel qui vaut $\frac{\det(\delta_0)\det(\delta_2)}{\det(\delta_1)}$, où δ_2 est la matrice de l'application $df_2 : L_3 \to L_2 \setminus \langle K_2 \rangle$.*

Remarque 3.3.12 Avant de terminer ce paragraphe, on mentionne le cas où l'idéal G est une intersection complète de codimension deux. Dans ce cas les deux matrices que nous avons définies pour calculer le résultant résiduel sont alors identiques.

3.3.4 Exemples

Nous illustrons notre construction du résultant résiduel d'un idéal Cohen-Macaulay localement intersection complète de codimension 2 par deux exemples, un dans $\mathbb{P}^3$ et un autre dans $\mathbb{P}^2$. Les calculs sont effectués à l'aide du package Maple `Multires` qui implémente ces résultants résiduels, et du logiciel `Macaulay2` [GS].

Trois points dans $\mathbb{P}^2$

On considère l'idéal saturé $G = (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$ de R. Cet idéal définit trois points lisses de $\mathbb{P}^2$ qui sont localement intersection complète. Sa résolution est :

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{2} R(-3) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{3} R(-2) \xrightarrow{\gamma} G \to 0,$$

avec $\psi = \begin{pmatrix} -x_2 & 0 \\ x_1 & -x_1 \\ 0 & x_0 \end{pmatrix}$, $\gamma = (x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2)$.

On suppose tout d'abord que $h_{i,j}(\mathbf{x}) = c^0_{i,j}x_0 + c^1_{i,j}x_1 + c^2_{i,j}x_2$ sont des formes linéaires de $R^g_{[1]}$. On trouve $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 3$ et $N_0 = N_1 = N_2 = 6$. La matrice $\mathtt{M}^g_3$ est de taille 10×10 et son déterminant est exactement le résultant résiduel. Dans ce cas le complexe $\mathcal{D}^g_0(\psi \oplus \phi)_3$ dégénère en un isomorphisme $\mathtt{M}^g_3 \ : \ \bigoplus_{i=1}^{10} R^g_0 \to R^g_3$.

Si maintenant on suppose que $h_{i,2}$ sont des formes génériques de degré 2 pour $i = 0, 1, 2$, alors $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 4$, $N_0 = N_1 = 9$ et $N_2 = 6$. Dans ce cas $\mathtt{M}^g_4$ est de taille 15×18 et le résultant résiduel est donné par le quotient de deux déterminants. Nous verrons dans le chapitre 5 que le fait que le résultant résiduel soit dans ce cas le quotient de deux déterminant n'est pas un hasard.

La cubique gauche dans $\mathbb{P}^3$

Le premier exemple qui vient à l'esprit d'un idéal localement intersection complète Cohen-Macaulay de codimension 2 qui ne soit pas un idéal localement intersection complète saturé du plan projectif est la cubique gauche de $\mathbb{P}^3$. Cette cubique gauche est définie par les trois mineurs de la matrice

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire par l'idéal $G = (-x_1^2 + x_0x_2, -x_1x_2 + x_0x_3, -x_2^2 + x_1x_3)$. Le théorème de Hilbert-Burch nous donne la résolution suivante de l'idéal G :

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{2} R(-3) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{3} R(-2) \xrightarrow{\gamma} G \to 0,$$

avec $\psi = \begin{pmatrix} -x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_2 \\ -x_0 & x_1 \end{pmatrix}$, $\gamma = (x_1^2 - x_0x_2, x_1x_2 - x_0x_3, x_2^2 - x_1x_3)$.

Posons nous le problème suivant : Quelle est la condition pour que quatre cubiques de $\mathbb{P}^3$ contenant la cubique gauche possède un point commun en

dehors de cette cubique? On considère alors un système de quatre cubiques f_0, f_1, f_2, f_3 de la forme

$$f_i = h_{1,i}(\mathbf{x})(x_1^2 - x_0x_2) + h_{2,i}(\mathbf{x})(x_1x_2 - x_0x_3) + h_{3,i}(\mathbf{x})(x_2^2 - x_1x_3),$$

où $h_{i,j}(\mathbf{x}) = c_{i,j}^0 x_0 + c_{i,j}^1 x_1 + c_{i,j}^2 x_2 + c_{i,j}^3 x_3$ sont des formes linéaires. On peut appliquer la construction précédente pour calculer le résultant résiduel de ce système. On trouve $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 3$ et $N_0 = N_1 = N_2 = N_3 = 10$. La matrice $\mathtt{M}_3^g$ est de taille 20×20 et son déterminant est exactement le résultant résiduel. Il donne une condition nécessaire et suffisante pour les quatre cubiques possèdent un point commun en dehors de la cubique gauche ou bien une composante immergée sur la cubique gauche. Ce "ou bien" vient du fait que le problème posé est une condition ouverte sur les cubiques alors que le résultant fournit toujours une condition fermée.

Avant de terminer ce chapitre, revenons sur les degrés $N_0 = N_1 = N_2 = N_3 = 10$ du résultant résultant résiduel. Comme nous l'avons expliqué ils peuvent être calculés de deux façons. Tout d'abord en utilisant la résolution de l'idéal $(f_1, f_2, f_3) : G$ pour N_0 par exemple, c'est d'ailleurs cette méthode que nous avons utilisé pour donner une formule dans le cas $X = \mathbb{P}^2$. L'autre méthode consiste à utiliser la formule d'intersection décrite au paragraphe 3.1.1. Cette formule nous dit que, pour $i = 0, 1, 2, 3$,

$$N_i = 27 - \left\{ \prod_{i=1}^{3} c(\mathcal{O}(3)) \cap s(C, \mathbb{P}^m) \right\}_0,$$

où C désigne la cubique gauche. C étant une courbe lisse, sa classe de Segre s'exprime comme

$$s(C, \mathbb{P}^3) = c(N_C\mathbb{P}^3)^{-1} \cap [C],$$

et donc la suite exacte

$$0 \to T_C \to T_{\mathbb{P}^3|C} \to N_C\mathbb{P}^3 \to 0$$

montre que

$$s(C, \mathbb{P}^3) = (1 + c_1(T_C) - c_1(T_{\mathbb{P}^3|C}) \cap [C].$$

Soit H l'hyperplan générique de $\mathbb{P}^3$, on a alors

$$N_i = 27 - \left\{ (1 + 9[H]) \cap ([C] + c_1(T_C) \cap [C] - c_1(T_{\mathbb{P}^3|C}) \cap [C]) \right\}_0,$$

que l'on peut écrire

$$N_i = 27 - \int_C (9[H] \cap [C] + c_1(T_C) \cap [C] - c_1(T_{\mathbb{P}^3|C}) \cap [C]).$$

On sait que $\int_C c_1(T_C) \cap [C] = 2 - 2g$ (voir [Ful84], exemple 3.2.13) où g désigne le genre de la cubique gauche, c'est-à-dire 0. De plus $c(T_{\mathbb{P}^3}) = (1 + H)^4$ et donc $c_1(T_{\mathbb{P}^3|C}) = 4.\deg(C)[C] = 12[C]$. On en déduit que

$$N_i = 27 - (9.3 + 2 - 12) = 10.$$

Chapitre 4

Résolution de systèmes polynomiaux et résultant

La principale motivation des constructions d'objets résultants est sans aucun doute de fournir des méthodes de résolution pour les systèmes algébriques. Ces méthodes permettent d'aboutir, sous de bonnes conditions de généricité, à des formulations matricielles qui transforment la résolution d'un système non linéaire en un problème d'algèbre linéaire. Ces formulations ont l'avantage d'être continues par rapport aux coefficients des équations sur un ouvert correspondant aux systèmes dits génériques, et peuvent donc s'appliquer avec des coefficients approchés. Les méthodes de résolution basées sur des techniques de bases de Gröbner ne possèdent pas cette qualité, ce qui explique l'intérêt croissant porté au résultant.

Dans les chapitres 2 et 3 nous avons vu que la connaissance des points bases d'un système pouvait nous permettre de définir et calculer un résultant non dégénéré pour ce système. Dans ce paragraphe nous allons montrer que des algorithmes de résolution de systèmes sans point base se généralisent dans le cas des systèmes que nous avons considérés pour le résultant résiduel. Ainsi, après une étude de classification des différents types de systèmes suivant la géométrie de leur lieu base, on peut donner une méthode générique, pour ce type de système, pour le résoudre. Ce chapitre se divise en trois parties. La première partie est dédiée à l'extension de la notion de U-résultant introduite par B. Van der Waerden, au résultant résiduel. Nous donnerons au passage, une nouvelle démonstration des propriétés du U-résultant multivarié à l'aide de la formule dite de Grothendieck-Riemann-Roch. Dans la deuxième partie, nous généralisons des méthodes connues permettant de calculer les solutions d'un système sans point base comme les valeurs et vecteurs propres d'une matrice, au cas des systèmes possédant un lieu base vérifiant certaines conditions. Nous appliquons ensuite les résultats obtenus pour déterminer le nombre de cylindres passant par cinq points. Enfin, dans une dernière partie, nous rappelons comment il est possible de calculer les

racines isolées d'un système polynomiale à l'aide d'une représentation univariée. Cette méthode permet d'exploiter le résultant résiduel sur un espace projectif.

Signalons que les résultants fournissent également des méthodes de résolution dites par perturbation. Le principe est de rajouter une nouvelle variable (ce qui peut faire augmenter fortement la taille des objets utilisés) pour faire disparaître le lieu base. On récupère ainsi un U-résultant comme celui que nous allons voir, mais sous une forme développée et non matricielle (voir [Can90]). Ainsi les résultats que nous allons développer ici montrent que dans certains cas on peut "enlever" le lieu des points bases sans ajouter une nouvelle variable, c'est-à-dire sans augmenter la complexité du problème.

4.1 U-résultant

C'est dans son livre intitulé *"Modern algebra"* (volume II) que B. Van der Waerden introduit la notion de U-résultant (s'inspirant de certains travaux de Kronecker, lui-même influencé par des écrits de Galois qui reprennent certaines idées de Lagrange). L'idée principale du U-résultant est de partir de m polynômes homogènes $f_1, \dots, f_m \in R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$, et de leurs ajouter une forme linéaire L dépendante d'un paramètre U. Le cas le plus général correspond à

$$L(x) = u_0x_0 + u_1x_1 + \ldots + u_mx_m.$$

Le U-résultant de $f_1, \dots, f_m$ est alors défini comme le résultant multivarié

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^m}(L, f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{K}[u_0, u_1, \dots, u_m].$$

L'intérêt de ce U-résultant réside principalement dans le théorème qui suit, nous en donnons ici une démonstration "géométrique" basée sur la formule dite de Grothendieck-Riemann-Roch (voir [Ful84], chapitre 15).

Proposition 4.1.1 *Supposons que la variété $V(f_1, \dots, f_m)$ de $\mathbb{P}^m$ soit finie, alors*

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^m}(L, f_1, \dots, f_m) = c \prod_{p \in V(f_1, \dots, f_m)} L(p)^{\mu_p},$$

où μ_p désigne la multiplicité du point $p \in P$ et c une constante non nulle.

Preuve. Rappelons brièvement comment on construit le résultant multivarié. Pour tout $i = 0, \dots, m$, on note $V_i = H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}(d_i))$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré d_i en les variables $x_0, \dots, x_m$. On définit alors la variété d'incidence, notant $Y = \prod_{i=0}^m \mathbb{P}(V_i)$,

$$W = \{(x, f_0, \dots, f_m) \in \mathbb{P}^m \times Y : f_0(x) = \ldots = f_m(x) = 0\} \in \mathbb{P}^m \times Y.$$

Cette variété de codimension $m+1$, est en fait munie d'une structure de fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^m$ par sa projection naturelle $W \to \mathbb{P}^m$. Notant q la projection

$\mathbb{P}^m \times Y \to Y$, on définit alors le diviseur ∇ de Y par $\nabla = q_*(W)$ (projection au sens des cycles). On montre alors que ∇ est irréductible et réduit, et son équation (définie à une constante multiplicative non nulle près) est appelée le *résultant* de $V_0, \dots, V_m$; son degré en les coefficients de V_i est exactement $\prod_{j \neq i} d_j$.

On se place maintenant dans la situation du théorème, c'est-à-dire que l'on suppose que $d_0 = 1$, et que l'on spécialise le résultant en se donnant des polynômes $f_1, \dots, f_m$ qui définissent un sous-schéma zéro-dimensionnel noté Z, de $\mathbb{P}^m$. $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^m}(L, f_1, \dots, f_m)$ définit ainsi un diviseur ∇_u de $Y_u = \mathbb{P}(V_0) \simeq \mathbb{P}^m$. Ce diviseur est obtenu comme la projection par q du schéma $W_u \subset \mathbb{P}^m \times Y_u$, i.e. $\nabla_u = q_*(W_u)$, dont le faisceau structural est défini par la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{Z \times Y}(-1;-1) \xrightarrow{\times L} \mathcal{O}_{Z \times Y} \to \mathcal{O}_{W_u} \to 0. \tag{4.1}$$

Le sous-schéma Z de $\mathbb{P}^m$ se décompose en une union disjointe de composantes connexes $\coprod_{i=1}^p Z_i$, qui correspondent aux p points (non forcément lisses) définis par $f_1, \dots, f_m$. Si l'on note P_i le point lisse défini par Z_i, on voit alors clairement que le diviseur réduit associé à ∇_u est $\prod_{i=1}^p L(P_i)$. Il faut donc calculer les entiers $n_1, \dots, n_p$ tels que

$$\nabla_u = \prod_{i=1}^p L(P_i)^{n_i}.$$

Pour cela nous allons utiliser la formule dite de Grothendieck-Riemann-Roch (voir [Ful84], théorème 15.2). Le morphisme q étant propre, on a la relation

$$ch(q_* \mathcal{O}_{W_u}).td(Y) = q_*(ch(\mathcal{O}_{W_u}).td(\mathbb{P}^m \times Y)),$$

où ch désigne le caractère de Chern, et td la classe de Todd (d'un faisceau algébrique cohérent). Notons H le générateur de l'anneau de Chow de $Y \simeq \mathbb{P}^m$, et h celui de $\mathbb{P}^m$. La résolution de $\mathcal{O}_Z$ par le complexe de Koszul associé à la section $(f_1, \dots, f_m)$,

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-d_1 - \dots - d_m) \to \dots \to \oplus_{i=1}^m \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-d_i) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m} \to \mathcal{O}_Z \to 0,$$

montre que $ch(\mathcal{O}_{Z \times Y}) = (\prod_{i=1}^m d_i).h^m$. En tordant cette dernière résolution par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times Y}(-1;-1)$, on obtient

$$ch(\mathcal{O}_{Z \times Y}(-1;-1)) = \prod_{i=1}^m d_i.(h^m - H.h^m) + O(H^2).$$

De la suite exacte (4.1), on déduit

$$ch(\mathcal{O}_{W_u}) = ch(\mathcal{O}_{Z \times Y}) - ch(\mathcal{O}_{Z \times Y}(-1;-1)) = (\prod_{i=1}^m d_i).H.h^m + O(H^2).$$

La classe de Todd de $\mathbb{P}^m$, définie comme la classe de Todd du fibré tangent de $\mathbb{P}^m$, est telle que $td(\mathbb{P}^m) = 1 + O(h)$, et la classe de Todd de $\mathbb{P}^m \times Y$ est telle que $td(\mathbb{P}^m \times Y) = td(\mathbb{P}^m).td(Y) = 1 + O(h) + O(H)$. Le faisceau $q_*\mathcal{O}_{W_u}$ ayant pour support le diviseur ∇_u de Y, on a que $ch_1(q_*\mathcal{O}_{W_u}) = [\nabla_u]$, et la formule de Grothendieck-Riemann-Roch nous donne alors, par identification,

$$ch_1(q_*\mathcal{O}_{W_u}) = [\nabla_u] = (\prod_{i=1}^{m} d_i).H,$$

résultat que l'on attendait puisqu'il montre que $\sum_{i=1}^{p} n_i = \prod_{i=1}^{m} d_i$. Utilisons à présent l'additivité des caractères de Chern pour déterminer les entiers n_i.

La décomposition en composantes connexes du sous-schéma $Z = \coprod_{i=1}^{p} Z_i$, donne une décomposition de $\mathcal{O}_Z = \oplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{Z_i}$, et une décomposition de $\mathcal{O}_{W_u} = \oplus_{i=1}^{p} \mathcal{O}_{W_u^i}$. Pour tout $i = 1, \ldots, p$, que l'on suppose à présent fixé, on a donc une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{Z_i \times Y}(-1;-1) \xrightarrow{\times L} \mathcal{O}_{Z_i \times Y} \to \mathcal{O}_{W_u^i} \to 0. \tag{4.2}$$

En prenant une filtration simple de $\mathcal{O}_{Z_i}$, on montre, par additivité des caractères de Chern, que $ch(\mathcal{O}_{Z_i}) = deg(Z_i).h^m$, où $deg(Z_i)$ désigne le degré du point Z_i, qui correspond ici à la multiplicité μ_i de ce point. On obtient alors

$$\begin{aligned} ch(\mathcal{O}_{Z_i \times Y}(-1;-1)) = \quad & ch(\mathcal{O}_{Z_i \times Y} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times Y}(-1;-1)) \\ & ch(\mathcal{O}_{Z_i \times Y}).ch(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times Y}(-1;-1)) \\ & \mu_i.h^m(1 - H + O(h) + O(H^2)) \\ & \mu_i.(h^m - H.h^m) + O(H^2). \end{aligned}$$

La suite exacte (4.2) fournit la relation

$$ch(\mathcal{O}_{W_u^i}) = ch(\mathcal{O}_{Z_i \times Y}) - ch(\mathcal{O}_{Z_i \times Y}(-1;-1)) = \mu_i.H.h^m + O(H^2),$$

et comme précédemment, la formule de Grothendieck-Riemann-Roch nous montre que $ch_1(q_*\mathcal{O}_{W_u^i}) = \mu_i.H$. Le faisceau $q_*\mathcal{O}_{W_u^i}$ étant clairement supporté sur l'hyperplan d'équation $L(P_i) = 0$ de Y, on a que $ch_1(q_*\mathcal{O}_{W_u^i}) = \mu_i[L(P_i)]$. On en déduit donc que $\nabla_u = \prod_{i=1}^{p} L(P_i)^{\mu_i}$, et retrouvons en passant, par additivité de ch et de q_*, $\prod_{i=1}^{m} d_i = \sum_{i=1}^{p} \mu_i$.

□

Ce résultat, combiné avec les méthodes matricielles connues pour calculer le résultant multivarié (voir chapitre 1), nous permet de calculer explicitement la forme de Chow de l'idéal zéro-dimensionnel défini par les polynômes $f_1, \ldots, f_m$, qui est exactement le U-résultant. La factorisation de ce U-résultant, lorsqu'elle est effectivement possible, fournit donc les zéros des polynômes $f_1, \ldots, f_m$ avec leur multiplicité. Lorsque cette factorisation est impossible, les techniques utilisées consistent à se ramener à la situation

où il n'y a pas de zéro sur l'hyperplan $x_0 = 0$ par exemple, et appliquer ce même résultat avec la forme linéaire $L = u_0x_0 + u_ix_i$, $i > 0$, pour récupérer les $i^{\text{ième}}$ coordonnées des points $p \in Z$ (voir [CLO98], chapitre 3, paragraphe 5).

Nous allons à présent donner une version résiduelle de la notion de U-résultant, que nous appellerons tout naturellement U-résultant résiduel. Nous nous placerons tout d'abord dans le cas du résultant résiduel sur un espace projectif (chapitre 3, paragraphe 3.1), puis nous traiterons le cas plus particulier du résultant résiduel d'une intersection complète (chapitre 3, paragraphe 3.2). Le résultant résiduel d'un idéal de codimension 2 (chapitre 3, paragraphe 3.3) étant obtenu de manière très similaire au résultant résiduel d'une intersection complète, et les matrices obtenues pour le calculer ayant la même "structure", nous ne traiterons pas explicitement le U-résultant résiduel d'un idéal de codimension 2, qui se déduit aisément du U-résultant résiduel d'une intersection complète.

U-résultant résiduel sur un espace projectif

On s'intéresse ici à la situation générale introduite au chapitre 3, paragraphe 3.1. On se donne un idéal I de l'anneau $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ engendré par des polynômes $f_1, \dots, f_m$ de degré respectif $d_1, \dots, d_m$. On note Z le sous-schéma zéro-dimensionnel correspondant aux points isolés définis par les polynômes $f_1, \dots, f_m$, et on suppose que Z est non vide. On note F le sous-schéma fermé de $\mathbb{P}^m$ défini comme la partie de dimension ≥ 1 de l'idéal des polynômes $f_1, \dots, f_m$.

Proposition 4.1.2 *Soit $L = u_0x_0 + \ldots + u_mx_m$ une forme linéaire générique et f un polynôme homogène s'annulant sur F et pas sur Z, alors*

$$\mathrm{Res}(Lf, f_1, \dots, f_m) = c \prod_{p \in Z} L(p)^{\mu_p},$$

où Res *désigne le résultant résiduel (par rapport à F), μ_p la multiplicité du point p de Z et c une constante non nulle.*

Preuve. Cette preuve est presque identique à la preuve de la proposition 4.1.1. Notons $Y \simeq \mathbb{P}^m$ l'espace projectif des formes linéaires L, i.e $Y = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[u_0, \dots, u_m])$. Le schéma d'incidence

$$W = \{(x, Lf, f_1, \dots, f_m) \in \mathbb{P}^m \times Y : Lf(x) = f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}$$

se décompose sous la forme $W = W_F \coprod W_Z$, où W_F est supporté sur $F \times Y$, et $W_Z = \coprod W_{Z_i}$ est supporté sur le schéma $Z \times Y$. Le résultant résiduel étant défini comme la projection de cette variété d'incidence après éclatement du sous-schéma défini par $f_1, \dots, f_m$ privé de Z, on en déduit que

$$[\mathrm{Res}(Lf, f_1, \dots, f_m)] = q_*([W_Z]),$$

où q est le morphisme propre $q : \mathbb{P}^m \times Y \to Y$. On est donc ramené exactement à la situation de la proposition 4.1.1. □

Nous avons vu au paragraphe (3.1) du chapitre 3, que la technique pour calculer ce résultant résiduel, basée sur les Bézoutiens, permet en général d'obtenir uniquement un multiple de ce dernier. Nous allons voir dans ce qui suit, que la connaissance de la géométrie des points bases d'un système permet de donner des résultats plus précis.

U-résultant résiduel d'une intersection complète

On se place dans la situation introduite au chapitre 3, paragraphe 3.2. On se donne n polynômes homogènes $g_1, \ldots, g_n$ de degré respectif $k_1 \geq \ldots \geq k_n$ dans l'anneau $R = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_m]$. On note G l'idéal de R engendré par ces polynômes, et on suppose qu'ils forment une intersection complète. On se donne également n polynômes homogènes $f_1, \ldots, f_m$ de degré respectif $d_1, \ldots, d_m$, appartenant à l 'idéal G, et tels que $d_1 \geq \ldots \geq d_m \geq k_1$ et $d_m \geq k_n + 1$. On note Res le résultant résiduel associé à G (voir chapitre 3, paragraphe 3.2), et on désigne par $L(x)$ la forme linéaire générique $u_0x_0 + u_1x_1 + \ldots + u_mx_m$.

Proposition 4.1.3 *Soit f un polynôme homogène dans l'idéal $G \subset R$, de degré $d \geq k_n$. Si l'idéal $(f_1, \ldots, f_m) : (g_1, \ldots, g_n)$ est une m-intersection résiduelle géométrique, et que $(f, f_1, \ldots, f_m) : (g_1, \ldots, g_n)$ est une (m+1)-intersection résiduelle, alors, dans l'anneau $\mathbb{K}[u_0, \ldots, u_m]$, on a l'égalité :*

$$\mathrm{Res}(Lf, f_1, \ldots, f_m) = c \prod_{\xi \in V(f_1, \ldots . f_m) \setminus V(g_1, \ldots, g_n)} L(\xi)^{\mu_\xi}$$

où μ_ξ désigne la multiplicité de ξ et c une constante non nulle.

Preuve. Les hypothèses de la proposition implique que l'idéal F défini un sous-schéma de la forme $Z \coprod Z_G$, où Z_G désigne le sous-schéma défini par l' idéal G, et Z un sous-schéma zéro-dimensionnel de $\mathbb{P}^m$. Par le même argument que dans la proposition 4.1.2, on a

$$\mathrm{Res}(Lf, f_1, \ldots, f_m) = q_*(W_Z),$$

où q est la projection $q : \mathbb{P}^m \times Y \to Y$ ($Y = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[u_0, \ldots, u_m])$), et W_Z la restriction du schéma d'incidence à Z, qui vérifie la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{Z \times Y}(-1; -1) \xrightarrow{\times L} \mathcal{O}_{Z \times Y} \to \mathcal{O}_{W_Z} \to 0.$$

La preuve de la proposition 4.1.1 permet alors de terminer la démonstration. □

Remarque 4.1.4 Dire que $(F : G)$ est une (m+1)-intersection résiduelle dans R est équivalent à dire que $F^{sat} = G^{sat}$, c'est-à-dire que $V(F : G) = \emptyset$.

Dire que $(F : G)$ est une m-intersection résiduelle géométrique signifie que l'idéal F définit exactement l'idéal G plus un nombre fini de points qui ne sont pas supportés sur l'idéal G.

Pour la plupart des cas que l'on peut rencontrer, il est possible de choisir le polynôme f comme étant l'un des polynômes g_i, pour $i \in \{1, \dots, n\}$, si l'on sait qu'aucune des solutions que l'on recherche ne se trouve sur de tels hypersurfaces (par exemple à l'infini). Pour des systèmes où l'on ne possède pas ce genre de propriété, il suffit de prendre pour f un polynôme générique de degré assez élevé, comme le montre le lemme suivant.

Lemme 4.1.5 *Supposons que l'idéal $(f_1, \dots, f_m) : (g_1, \dots, g_n)$ est une m-intersection résiduelle géométrique, alors, pour un polynôme suffisamment générique $f \in G$ de degré $d \geq k_1$, l'idéal $(f, f_1, \dots, f_m) : (g_1, \dots, g_n)$ est une (m+1)-intersection résiduelle.*

Preuve. Comme nous avons supposé que $(f_1, \dots, f_m) : (g_1, \dots, g_n)$ est une m-intersection résiduelle géométrique, nous devons seulement trouver un polynôme f de degré k_1 dans l'idéal G tel que $f(p_i) \neq 0$ pour tous les points p_i définis par

$$\{p_1, \dots, p_\nu\} = V((f_1, \dots, f_m) : (g_1, \dots, g_n)).$$

Pour chaque point p_i, il existe $j_i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $g_{j_i}(p_i) \neq 0$. Ainsi, si on multiplie g_{j_i} par un polynôme homogène de degré $k_1 - k_{j_i}$ qui ne s'annule pas en p_i, on obtient un polynôme homogène $s_i \in G$ de degré k_1 tel que $s_i(p_i) \neq 0$. Maintenant pour un choix suffisamment générique de $a_i \in \mathbb{K}$, nous pouvons prendre $f = \sum_{i=1}^{\nu} a_i s_i$. □

Une application directe du U-résultant résiduel est de calculer les racines résiduelles d'une intersection complète. Pour cela, il nous faut calculer le résultant résiduel de la proposition 4.1.3. Ce calcul peut être effectué en calculant un mineur maximal d'une matrice surjective de rang connu. Il fournit exactement le résultant résiduel que nous recherchons car seule la forme linéaire possède des paramètres, et l'on peut donc choisir de calculer le mineur maximal de bon degré en les coefficients de ce polynôme (proposition 3.2.13 du chapitre 3).

Nous illustrons cette technique par l'exemple simple suivant. Soit le système

$$\begin{cases} f_1 &= yz + x^2 + y^2 \\ f_2 &= -z^2 + 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

Nous voulons connaître les solutions de ce système qui ne sont pas dans la variété définie par l'idéal $G = (z, x^2 + y^2)$. Pour cela nous calculons le

résultant résiduel du système :

$$\begin{cases} f_0 &= (u_0x + u_1y + u_2z).z \\ f_1 &= yz + x^2 + y^2 \\ f_2 &= -z^2 + 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

Ce résultant résiduel se factorise sous la forme

$$(u_0 + u_1 - 2u_2)(u_0 - u_1 + 2u_2).$$

Nous en déduisons que les polynômes f_1 et f_2 possèdent deux solutions en dehors de la variété $V(z, x^2 + y^2)$, à savoir les points $(1 : 1 : -2)$ et $(1 : -1 : 2)$.
Bien sûr, si dans notre exemple le résultant résiduel se factorise facilement, cela n'est malheureusement pas toujours le cas. Le procédé que nous venons de décrire transforme en fait la recherche de racines résiduelles en la factorisation d'un polynôme multivarié, et même en la factorisation d'un polynôme univarié si l'on choisit de prendre un forme linéaire avec deux termes uniquement, par exemple $u_0x_0 - u_1x_1$.

On peut remarquer dans ce qui précède, que le U-résultant résiduel d'une intersection complète ne dépend pas du choix du polynôme f nécessaire pour le calculer. Nous montrons dans la section suivante qu'il est possible de construire une matrice ne faisant pas intervenir un tel polynôme f, et dont le déterminant fournit le U-résultant résiduel. Nous montrons également que cette matrice permet de retrouver les racines résiduelles d'un système par un calcul de valeurs et vecteurs propres.

4.2 Résoudre en calculant des vecteurs propres

Dans cette section, nous rappelons tout d'abord brièvement les résultats connus sur la résolution des systèmes polynomiaux à l'aide de calculs de valeurs et vecteurs propres (voir [EM01], chapitres 3 et 4, et aussi [CLO98], chapitre 2, paragraphe 4). Nous montrerons ensuite comment le U-résultant résiduel peut, tout comme le U-résultant multivarié, permettre de ramener la résolution d'équations polynomiales en un problème de valeurs et vecteurs propres.

4.2.1 Propriétés des opérateurs de multiplications d'une algèbre zéro-dimensionnelle

On considère la situation où I est un idéal de l'anneau $R = \mathbb{K}[t_1, \dots, t_n]$ engendré par des polynômes $f_1, \dots, f_m$, et tel que le quotient $\mathcal{A} = R/I$ soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie D. Cela est équivalent à dire que la variété Z définie par l'idéal I est zéro-dimensionnelle, constituée de D points, comptés avec multiplicité.

On note $\widehat{R}$ (resp. $\widehat{\mathcal{A}}$) l'espace des formes linéaires sur R (resp. $\mathcal{A}$). Les éléments de $\widehat{R}$, qui sont les évaluations aux points $\xi \in \mathbb{K}^m$, sont notés $\mathbf{1}_\xi$: $p \to p(\xi)$. On peut identifier $\widehat{\mathcal{A}}$ avec l'ensemble des éléments $\Lambda \in \widehat{R}$ tels que $\Lambda(I) = 0$. Ainsi, $\mathbf{1}_\xi \in \widehat{\mathcal{A}}$ si et seulement si ξ est un point de la variété Z.

Soit $a \in \mathcal{A}$. Intéressons nous à l'opérateur de multiplication par a dans $\mathcal{A}$:

$$\begin{array}{rcl} M_a : \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ a & \to & M_a(b) = ab. \end{array}$$

L'application M_a induit l'endomorphisme transposé

$$\begin{array}{rcl} M_a^t : \widehat{\mathcal{A}} & \to & \widehat{\mathcal{A}} \\ \Lambda & \to & M_a^t(\Lambda) = a \cdot \Lambda = \Lambda \circ M_a. \end{array}$$

Les opérateurs M_a et M_a^t possèdent ainsi les mêmes valeurs propres. La résolution des systèmes polynomiaux par calcul de valeurs ou vecteurs propres est basée sur le résultat suivant :

Théorème 4.2.1 ([Mou98], théorème 2.2) *Soit $Z = \{\xi_1, \dots, \xi_d\}$ la variété définie par l'idéal I.*

i) Si $a \in R$, alors les valeurs propres de M_a sont $a(\xi_1), \dots, a(\xi_d)$. En particulier, celles de M_{t_i}, pour $i = 1, \dots, m$, sont les $i^{\text{èmes}}$ coordonnées des racines $\xi_1, \dots, \xi_d$.

ii) Si $a \in R$, alors les évaluations $\mathbf{1}_{\xi_1}, \dots, \mathbf{1}_{\xi_d}$ sont des vecteurs propres de M_a^t associés respectivement aux valeurs propres $a(\xi_1), \dots, a(\xi_d)$. De plus, ils sont les seuls (à multiplication par un scalaire non nul près) vecteurs propres communs à tous les endomorphismes M_a^t, $a \in R$.

On déduit alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.2.2 *Pour tout $a \in R$,*

i) $\mathrm{trace}(M_a) = \sum_{\xi \in Z} \mu_\xi a(\xi)$,

ii) $\det(M_a) = \prod_{\xi \in Z} a(\xi)^{\mu_\xi}$,

où μ_ξ désigne la multiplicité de la racine ξ.

Ainsi, ces résultats ramènent la résolution de systèmes polynomiaux en un problème de vecteurs propres, à la condition de pouvoir calculer les opérateurs de multiplications. Nous allons montrer que nous pouvons récupérer ces opérateurs à partir des matrices de type Macaulay, permettant de calculer les U-résultants.

4.2.2 Opérateurs de multiplications et U-résultant

Pour commencer, nous décrivons la méthode utilisée pour calculer les solutions d'un système de m équations polynomiales $f_1, \dots, f_m \in R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ homogènes, lorsque celles-ci sont isolées.

Soit L la forme linéaire générique $u_0x_0+\ldots+u_mx_m$. D'après les résultats du chapitre 1, section 1.2, nous savons qu'il est possible de construire une matrice de Macaulay, notée M, de la forme,

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} E & \quad F \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ L & f_1,\ldots,f_m \\ \vdots & \vdots \end{array}\right) & R_\nu \end{array}$$

où $E \subset R_{\nu-1}$ est un ensemble de monômes homogènes de degré $\nu-1$, et dont le déterminant fournit un multiple du résultant multivarié $\mathrm{Res}(L, f_1, \ldots, f_m)$ de bon degré $\prod_{i=1}^m d_i$ en les coefficients de L, c'est-à-dire en les variables $u_0, \ldots, u_m$. Les polynômes $f_1, \ldots, f_m$ étant définis sur $\mathbb{K}$, on en déduit immédiatement que le déterminant de cette matrice de Macaulay est exactement le résultant multivarié $\mathrm{Res}(L, f_1, \ldots, f_m)$. On suppose que le système $\{f_1, \ldots, f_m\}$ ne possède pas de solution sur la droite $x_0 = 0$, ce qui est toujours possible par un simple changement de variables. Alors, on peut décomposer la matrice M en quatre blocs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} E & \quad F \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} x_0E \\ \\ R_\nu \setminus x_0E \end{array} \end{array}$$

Les colonnes correspondant au bloc $[A, C]^t$ représentent des multiples du polynôme L, celles correspondantes au bloc $[B, D]^t$ représentent des multiples des polynômes $f_1, \ldots, f_m$. On obtient le résultat suivant :

Proposition 4.2.3 *On suppose que les polynômes $f_1, \ldots, f_m$ n'ont pas de solution commune à l'infini (i.e sur la droite $x_0 = 0$) et on pose $x_0 = 1$. Alors la matrice de multiplication M_L par L dans l'algèbre quotient zéro-dimensionnelle $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]/(f_1, \ldots, f_m)_{|x_0=1}$, est donnée par la relation*

$$M_L = A - BD^{-1}C.$$

En appliquant le théorème 4.2.1, on voit alors qu'il est possible d'obtenir les solutions du système $\{f_1, \ldots, f_m\}$ par un calcul de valeurs ou vecteurs propres. Dans ce qui suit, nous allons étendre cette technique de résolution au cas du résultant résiduel d'une intersection complète, cas où nous savons calculer ce résultant en terme de matrices du type Macaulay.

4.2.3 Opérateurs de multiplications et U-résultant résiduel

Reprenons les notations de la proposition 4.1.3. Les m polynômes homogènes $f_1, \dots, f_m$ de degré respectif $d_1, \dots, d_m$ peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} f_1(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,1}(x)\, g_i(x) \\ \vdots & & \\ f_m(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,m}(x)\, g_i(x) \end{cases}$$

où $h_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} c_\alpha^{i,j}\, x^\alpha$ est un polynôme homogène de degré $d_j - k_i$. On note H la matrice $(h_{i,j})_{1\le i\le n, 1\le j\le m}$ telle que $F = G\,H$ (G intersection complète), et $\Delta_{i_1,\dots,i_n}$ les mineurs de taille $n\times n$ de la matrice H correspondant aux colonnes $i_1, \dots, i_n$. On suppose toujours que $d_1 \ge \dots \ge d_m \ge k_1$, $d_m \ge k_n + 1$, $m + 1 \ge n$, et que $(f_1, \dots, f_m) : (g_1, \dots, g_n)$ est une m-intersection résiduelle géométrique. On note F l'idéal engendré par les polynômes $f_1, \dots, f_m$.

Les propositions 3.2.11 et 3.2.13 du chapitre 3 donne le résultat suivant :

Proposition 4.2.4 *Soit $\nu = \sum_{i=1}^m d_i - m + 1 - (m - n + 1)\, k_n$.*

1) *L'idéal $(F : G)$ est égal à $(f_1, \dots, f_m, (\Delta_{i_1,\dots,i_n})_{1\le i_1<\dots<i_n\le m})$, et il est ν-régulier.*
2) *Pour tout $s \ge \nu$, la matrice $\mathtt{M}_{1,s}$ de l'application $\partial_{1,s}$ définie par*

$$\left(\prod_{I, 1\le i_1<\dots<i_n\le m} R_{[s-d_{i_1}-\dots-d_{i_n}+\sum_{i=1}^n k_i]}\right) \times R_{[s-d_1]} \times \dots \times R_{[s-d_m]} \longrightarrow R_{[s]}$$

telle que

$$\partial_{1,s}\big((q_I)_I, (q_1, \dots, q_m)\big) = \sum_I q_I \Delta_I + q_1 f_1 + \dots + q_m f_m,$$

est de rang $\#R_{[s]} - N_0$, où N_0 est le nombre de points (comptés avec multiplicité) définis par l'idéal $(F : G)$.

Remarque 4.2.5 Une formule pour calculer l'entier N_0 sous ces hypothèses est fournie dans la proposition 3.2.3 du chapitre 2.

Comme toujours pour les calculs de résultants, nous avons besoin de matrices surjectives. Nous allons donc nous efforcer de compléter la matrice que nous venons de voir pour obtenir une matrice surjective.

Proposition 4.2.6 *Soit $L \in R_{[1]}$, et soit s un entier tel que $s \ge \nu$. On note J l'idéal $(L, (F : G))$. Alors l'application $\partial_{0,s}$ définie par*

$$\left(\prod_{I, 1\le i_1<\dots<i_n\le m} R_{[s-d_{i_1}-\dots-d_{i_n}+\sum_{i=1}^n k_i]}\right) \times R_{[s-d_1]} \times \dots \times R_{[s-d_m]} \times R_{[s-1]} \longrightarrow R_{[s]}$$

telle que

$$\partial_{0,s}\big((q_I)_I,(q_1,\dots,q_m,q)\big)=\sum_I q_I\Delta_I+q_1f_1+\cdots+q_mf_m+qL.$$

est surjective, i.e. sa matrice $\mathtt{M}_{0,s}$ *est de rang* $\#R_{[s]}$*, si et seulement si* $J^{sat}=R$*.*

Preuve. Si la matrice est surjective alors clairement l'idéal saturé de J est R. Maintenant si $J^{sat}=R$, alors L ne s'annule en aucun point défini par l'idéal $(F:G)$. La régularité d'un idéal étant invariante en "coupant" par une forme linéaire suffisamment générique ([BS87], lemme 1.8), J est ν-régulier, i.e. $J_s=R_s$ pour tout $s\geq\nu$. □

Par hypothèse, le quotient $\frac{R_\nu}{(F:G)_\nu}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'idéal $(F:G)$ étant ν-régulier, la suite exacte de cohomologie locale

$$0\to H^1_{\mathcal{M}}(F:G)_s\to\frac{R_s}{(F:G)_s}\to H^0(Proj(R),\widetilde{(F:G)}(s))\to H^2_{\mathcal{M}}(F:G)_s\to 0,$$

où $\mathcal{M}=(x_0,\dots,x_m)\subset R$, montre que pour tout $s\geq\nu$, on a

$$N_0=\dim_{\mathbb{K}}\left(\frac{R_s}{(F:G)_s}\right).$$

On peut donc construire un mineur maximal de la matrice $M_{0,\nu}$, que l'on note S_ν, qui est de la forme :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} E & \qquad F \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \vdots & \vdots \\ L & f_1,\dots,f_m \\ \vdots & \vdots \end{array}\right) & R_\nu \end{array}$$

où $E\subset R_{\nu-1}$ et $\#E=N_0$.
On suppose à présent que l'idéal $(F:G)$ qui définit un schéma affine, ne possède pas de points à l'infini que l'on suppose être la droite $x_0=0$. On peut toujours faire une telle hypothèse par changement de variables. Par conséquent, si on spécialise la forme linéaire L en $L(x)=x_0$, la matrice S_ν spécialisée ainsi obtenue est toujours de rang $\#R_\nu$, et on en déduit donc que l'ensemble de N_0 monômes $x_0E\subset R_\nu$, est une base monomiale de $\frac{R_\nu}{(F:G)_\nu}$.

On peut donc décomposer S_ν en quatre blocs de la façon suivante :

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} E & F \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) & \begin{array}{l} x_0E \\ \\ R_\nu \setminus x_0E \end{array} \end{array}$$

On obtient alors le résultat suivant :

Proposition 4.2.7 *Soit L une forme linéaire et posons que $x_0 = 1$. Alors la matrice de multiplication*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]/(F:G) & \longrightarrow & \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]/(F:G) \\ q & \mapsto & qL \end{array}$$

dans la base monomiale E_0, qui est la base monomiale obtenue à partir de E en posant $x_0 = 1$, est la matrice $A - BD^{-1}C$.

Preuve. Supposons tout d'abord que x_0 est toujours une indéterminée. Nous voulons réduire les polynômes $E.L$ modulo l'idéal $(F:G)_\nu$. Cela peut-être réalisé par la calcul matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id_{N_0} \\ -D^{-1}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - BD^{-1}C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le bloc $A - BD^{-1}C$ est exactement la matrice de l'application

$$\begin{array}{ccc} E \subset R_{\nu-1} & \longrightarrow & x_0E \subset R_\nu \\ q & \mapsto & qL \end{array}$$

où x_0E est une base monomiale de $\frac{\mathbb{K}[x_0,\dots,x_m]_\nu}{(F:G)_\nu}$.
Maintenant, si l'on pose $x_0 = 1$, les ensembles monomiaux E et x_0E deviennent tous les deux égaux à un ensemble E_0 de monômes de $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ de degré inférieur ou égal à $\nu - 1$. On reconnaît ainsi le bloc $A - BD^{-1}C$ comme la matrice de multiplication

$$\begin{array}{ccc} \frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]}{(F:G)} & \longrightarrow & \frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]}{(F:G)} \\ q & \mapsto & qL \end{array}$$

dans la base monomiale E_0 de $\frac{\mathbb{K}[x_1,\dots,x_m]}{(F:G)}$. □

Comme corollaire de ce résultat, on obtient une nouvelle façon de calculer le U-résultant résiduel d'une intersection complète, sans faire intervenir un polynôme f.

Proposition 4.2.8 *Soit f est un polynôme homogène dans l'idéal G de degré $d \geq k_n$, tel que $(f, F) : G$ est une m+1-intersection résiduelle. Alors, dans $\mathbb{K}[u_0, \dots, u_m]$, on a l'égalité :*

$$\det(S_s) = c \cdot \mathrm{Res}(Lf, f_1, \dots, f_m),$$

pour tout $s \geq \nu$ et où c est une constante non nulle.

Preuve. Il suffit de combiner la proposition précédente et le théorème 4.2.1. □

Nous avons vu que nous pouvons obtenir la matrice de multiplication par une forme linéaire générique à partir d'une matrice permettant le calcul du U-résultant résiduel. Cela nous permet ainsi de calculer les points définis par l'idéal $(F : G)$ par un calcul de valeurs ou vecteurs propres. Illustrons cette technique en reprenant l'exemple que nous avions introduit à la suite du lemme 4.1.5. On considère le système

$$\begin{cases} f_1 &= yz + x^2 + y^2 \\ f_2 &= -z^2 + 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

On pose $L(x) = u_0x + u_1y + u_2z$, où z désigne la variable d'homogénéisation (l'infini est donc définit comme la droite $z = 0$).
Tout d'abord nous calculons la matrice S_2 :

$$S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & u_0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & u_1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & u_0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que son déterminant donne bien la forme de Chow :

$$\det S_2 = -2(-u_0 + 2u_2 - u_1)(u_0 + 2u_2 - u_1).$$

On calcule à présent les blocs A, B, D :

$$A = \begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ u_0 & u_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons ainsi déduire la matrice de multiplication par L :

$$A - BD^{-1}C = \begin{pmatrix} u_2 - 1/2\, u_1 & 1/4\, u_0 \\ u_0 & u_2 - 1/2\, u_1 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant donne, comme attendu, la forme de Chow :

$$\det(A - BD^{-1}C) = \frac{1}{4}(-u_0 + 2u_2 - u_1)(u_0 + 2u_2 - u_1).$$

Si l'on pose $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$, on calcul alors la matrice de multiplication par x. Ses valeurs propres sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Si l'on pose $u_1 = 1$, $u_0 = u_2 = 0$, on calcul la matrice de multiplication par y. Ses valeurs propres sont $\frac{-1}{2}$ et $\frac{-1}{2}$.
Dans ce cas, on peut alors déduire que les solutions résiduelles sont les points

$$(\frac{1}{2} : \frac{-1}{2} : 1), (\frac{-1}{2} : \frac{-1}{2} : 1).$$

4.2.4 Exemple : cylindres passant par cinq points

Dans ce paragraphe, nous allons mettre en œuvre les méthodes que nous venons d'exposer pour trouver tous les cylindres de l'espace passant par cinq points donnés. L'étude de ce problème et sa résolution sont données dans [DMPT01]. Nous donnons donc ici une autre façon de résoudre ce problème, en partant de la même modélisation, qui permet d'obtenir des matrices plus petites et exactement le bon nombre de solutions.

Modélisation

Nous allons tout d'abord déterminer les équations qui définissent l'ensemble des cylindres passant par quatre points donnés p_1, p_2, p_3, p_4 dans l'espace à trois dimensions. Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que $p_1 = (0, 0, 0), p_2 = (x_2, 0, 0), p_3 = (x_3, y_3, 0)$ et $p_4 = (x_4, y_4, z_4)$. On désigne par $\mathbf{t} = (l, m, n)$, avec $l^2+m^2+n^2 = 1$, le vecteur unitaire qui permet d'identifier une direction dans l'espace (ainsi, $\mathbf{t}$ peut-être vu comme le point $(l : m : n)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}^2$). On considère à présent le plan π passant par l'origine, et orthogonal au vecteur $\mathbf{t}$, ainsi qu'un système de coordonnées (X, Y, Z) dont les deux premiers axes sont dans π, et le troisième axe est de direction $\mathbf{t}$. Un changement de coordonnées passant de (x, y, z) à (X, Y, Z), fait coïncider l'axe des Z avec la direction $\mathbf{t}$. Parmi tous les changements de coordonnées, nous choisissons celui spécifié par la matrice unitaire suivante, où $\rho = m^2 + n^2$:

$$M = \begin{pmatrix} \rho & -\frac{lm}{\rho} & -\frac{nl}{\rho} \\ 0 & \frac{n}{\rho} & -\frac{m}{\rho} \\ l & m & n \end{pmatrix}.$$

Soit (X_i, Y_i, Z_i) les coordonnées de p_i dans le système (X, Y, Z). La projection orthogonale q_i de p_i sur π, exprimée dans (X, Y, Z) en fonction des coordonnées (x_i, y_i, z_i) est :

$$\left(\rho x_i - \frac{lm}{\rho} y_i - \frac{nl}{\rho} z_i, \frac{n}{\rho} y_i - \frac{m}{\rho} z_i, 0\right).$$

Les points p_1, p_2, p_3, p_4 appartiennent à un cylindre circulaire de direction $\mathbf{t}$ si et seulement si les points q_1, q_2, q_3, q_4 son cocycliques dans π, c'est-à-dire si

$$\mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l, m, n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ X_1^2 + Y_1^2 & X_2^2 + Y_2^2 & X_3^2 + Y_3^3 & X_4^2 + Y_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Les coordonnées de q_1 et q_2 sont $X_1 = Y_1 = 0$; $X_2 = \rho x_2$; $Y_2 = 0$. De plus, pour $i = 3, 4$, d'après le théorème de Phytagore, on a

$$X_i^2 + Y_i^2 = |q_i|^2 = (\mathbf{t}.\mathbf{t})|p_i|^2 - (t.p_i)^2.$$

Après développement du déterminant précédent, on peut montrer que l'équation $\mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l, m, n)$ peut se mettre sous la forme (voir [DMPT01])

$$\mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l, m, n) = x_2^2(m^2 + n^2) \begin{vmatrix} l & x_3 & x_4 \\ m & y_3 & y_4 \\ n & 0 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$-x_2 \begin{vmatrix} m & y_3 & y_4 \\ n & 0 & z_4 \\ 0 & (\mathbf{t}.\mathbf{t})|p_3|^2 - (t.p_3)^2 & (\mathbf{t}.\mathbf{t})|p_4|^2 - (t.p_4)^2 \end{vmatrix},$$

où $\mathbf{t}$ est considéré comme un point du plan projectif; cette équation décrit ainsi une courbe de degré 3 dans $\mathbb{P}^2$.

On cherche à déterminer les cylindres (en fait leur direction) passant par les cinq points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5. D'après ce qui précède, il faut nécessairement avoir

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l, m, n) &= 0 \\ \mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_5}(l, m, n) &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ces deux équations définissent, d'après le théorème de Bézout, exactement 9 points. En y regardant de plus près, on s'aperçoit que les trois directions $\mathbf{t}$ données par p_1p_2, p_1p_3 et p_2p_3, sont des solutions "parasites" du système. En effet, dans ces trois directions, nos deux équations s'annulent, mais cela ne correspond pas forcément à l'existence d'un cylindre; il n'existe un cylindre que lorsque ces directions sont des solutions doubles, car il faut que les deux

cercles obtenus par projection sur le plan π coïncident. Ainsi, les cylindres que l'on cherchent vérifient les deux équations de cocyclicités précédentes, auxquelles il faut enlever trois solutions. On montre, par explicitation de cas particuliers (voir paragraphe suivant), que l'on peut trouver des configurations de points pour lesquelles il existe 6 cylindres passant par ces derniers. On en déduit que notre problème, qui est toujours de déterminer tous les cylindres passant par cinq points distincts donnés, se réduit à déterminer les points $\mathbf{t} = (l : m : n)$ de $\mathbb{P}^2$, autres que p_1p_2, p_1p_3 et p_2p_3, et vérifiant les deux équations (4.3).

Résolution

En réécrivant les équations de cocyclicités (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_4}(l,m,n) &= D_4.nx_2 + z_4.(mx_3 - mx_2 - ly_3)(mx_3 - ly_3)mx_2 \quad (4.4) \\ \mathcal{C}_{p_1,p_2,p_3,p_5}(l,m,n) &= D_5.nx_2 + z_5.(mx_3 - mx_2 - ly_3)(mx_3 - ly_3)mx_2 \end{aligned}$$

où D_4 et D_5 sont des polynômes de degré 2 en les variables l, m, n. On remarque immédiatement que les deux équations $g_1 = nx_2$ et $g_2 = (mx_3 - mx_2 - ly_3)(mx_3 - ly_3)mx_2$ définissent exactement les trois directions p_1p_2, p_1p_3 et p_2p_3 que nous voulons enlever du système. Pour tous les points p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 définis comme précédemment et supposés tous distincts, l'idéal g_1, g_2 forme une intersection complète; nous pouvons donc appliquer les résultats que nous avons développés. Nous considérons l'exemple suivant :

$$\begin{array}{lll} x_1 := 0, & y_1 := 0, & z_1 := 0, \\ x_2 := 1, & y_2 := 0, & z_2 := 0, \\ x_3 := \frac{1}{2}, & y_3 := \frac{\sqrt{3}}{2}, & z_3 := 0, \\ x_4 := \frac{1}{2}, & y_4 := \frac{1}{2\sqrt{3}}, & z_4 := \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \\ x_5 := \frac{1}{2}, & y_5 := \frac{1}{2\sqrt{3}}, & z_5 := -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{array}$$

La matrice S_4 est alors une matrice 15×15 (voir tableau 4.1) dont la factorisation du déterminant à l'aide du logiciel Maple fournit :

$$\det(S_4) = -\frac{1}{1296}\left(3\,{u_2}^2 - 2\,{u_0}^2\right) \times$$

$$\left(36\,{u_2}^4 - 36\,{u_1}^2{u_2}^2 - 12\,{u_0}^2{u_2}^2 + {u_0}^4 + 9\,{u_1}^4 - 6\,{u_1}^2{u_0}^2\right).$$

En appliquant la proposition 4.2.7, on peut, à partir de la matrice S_4, calculer la matrice de multiplication par la forme linéaire générique $L(l, m, n) = u_0l + u_1m + u_2n$, notée M_L. On obtient alors :

$$
\begin{pmatrix}
1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & u_2 & 0 & u_0 & 0 \\
0 & -1/6\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/6\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 \\
1/4\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/4\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/4\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/4\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & u_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/3\sqrt{2} & 0 & u_2 & 0 & u_0 & 0 & 0 \\
-1/12\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/12\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\
-1/6\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/6\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 \\
0 & 1/4\sqrt{3} & -1/12\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 1/4\sqrt{3} & 1/12\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\
0 & 0 & 1/4\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/4\sqrt{3} & 0 & 1/3\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_2 & u_1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3\sqrt{2} & 0 & 0 & u_2 & 0 & 0 & u_1 & 0 & u_0 \\
0 & 1/4\sqrt{3} & 1/4\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 1/4\sqrt{3} & -1/4\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & u_0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1/12\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & 1/12\sqrt{2}\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1/6\sqrt{3} & 0 & 0 & -1/6\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

TAB. 4.1 – *Matrice* S_4

$$M_L = \begin{pmatrix} u_2 & 1/6\,u_0 & 0 & 0 & u_1 & 0 \\ u_0 & u_2 & u_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2\,u_1 & u_2 & 0 & u_0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_0 \\ 1/2\,u_1 & 0 & 1/6\,u_0 & 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 1/6\,u_1 & 0 & 2/3\,u_0 & -u_0 & u_2 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que le déterminant de la matrice M_L est identique, à une constante multiplicative non nulle près, au déterminant de la matrice S_4. À l'aide la la matrice M_L, on peut à présent obtenir les matrices de multiplications par x et y par substitution, et calculer leurs valeurs propres. Ainsi la matrice de multiplication par x est :

$$M_x = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2/3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et ses valeurs propres sont :

$$\{1/3\sqrt{6},\ -1/3\sqrt{6},\ 1/6\sqrt{6},\ -1/6\sqrt{6},\ 1/6\sqrt{6},\ -1/6\sqrt{6}\}.$$

Les valeurs propres de la multiplication par y sont :

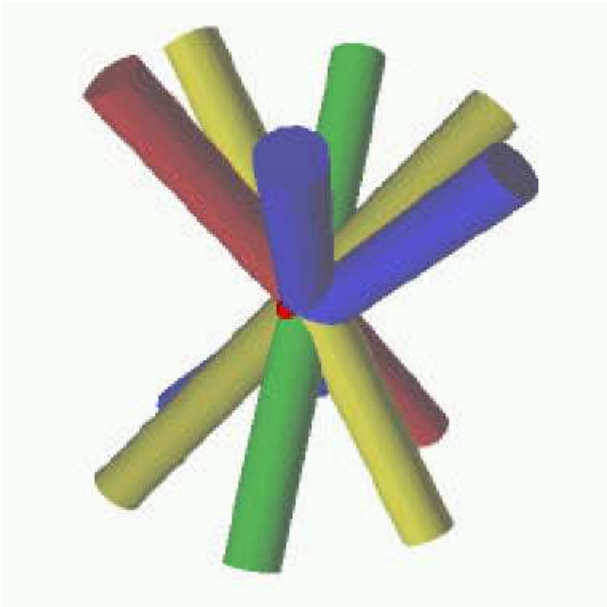
$$\{1/2\sqrt{2},\ -1/2\sqrt{2},\ 1/2\sqrt{2},\ -1/2\sqrt{2},\ 0,\ 0\},$$

et celle de la matrice de multiplication par $x+y$ sont :

$$\{1/3\sqrt{6},\ -1/3\sqrt{6},\ 1/2\sqrt{2}+1/6\sqrt{6},\ -1/2\sqrt{2}-1/6\sqrt{6},$$
$$1/2\sqrt{2}-1/6\sqrt{6},\ -1/2\sqrt{2}+1/6\sqrt{6}\}.$$

On en déduit alors directement qu'il existe dans cette configuration exactement 6 cylindres passant par nos 5 points dont les directions sont :

$$\begin{array}{ccccccc} (& \frac{\sqrt{6}}{3} & : & 0 & : & 1 &), \\ (& -\frac{\sqrt{6}}{3} & : & 0 & : & 1 &), \\ (& \frac{\sqrt{6}}{6} & : & \frac{\sqrt{2}}{2} & : & 1 &), \\ (& -\frac{\sqrt{6}}{6} & : & -\frac{\sqrt{2}}{2} & : & 1 &), \\ (& -\frac{\sqrt{6}}{6} & : & \frac{\sqrt{2}}{2} & : & 1 &), \\ (& \frac{\sqrt{6}}{6} & : & -\frac{\sqrt{2}}{2} & : & 1 &). \end{array}$$



4.3 Représentation univariée rationnelle

La représentation univariée rationnelle est la description des solutions d'un système zéro-dimensionnel à l'aide des zéros d'un polynôme en une variable et d'une application rationnelle. Dans ce paragraphe, nous rappelons comment il est possible de calculer une représentation rationnelle des points isolés d'un idéal à partir d'un multiple de la forme de Chow de ces points isolés.

Définition 4.3.1 *Soit I un idéal de l'anneau $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ engendré par des polynômes homogènes $f_1, \dots, f_m$ et soit I_0 l'intersection de ses composantes primaires correspondant à des points isolés; l'ensemble de ces points est noté Z_0 et on suppose qu'aucun ne se trouve sur la droite $x_0 = 0$. La forme de Chow de I_0 est le polynôme de l'anneau $\mathbb{K}[u_0, \dots, u_m]$,*

$$C_{I_0}(u_0, \dots, u_m) = \prod_{\zeta \in Z_0} (u_0 + \zeta_1 u_1 + \cdots + \zeta_n u_m)^{\mu_\zeta} \ ,$$

où μ_ζ désigne la multiplicité de ζ.

Cette forme de Chow est le point de départ d'un algorithme présenté dans [EM99]. Dans le cadre du résultant résiduel que nous étudions dans ce chapitre, on peut obtenir un multiple de la forme de Chow (ce qui est suffisant pour l'algorithme que nous allons décrire) comme un U-résultant résiduel, et ensuite appliquer l'algorithme suivant pour calculer les points isolés.

Théorème 4.3.2 ([EM99] théorème 2.2) *Soit $\Delta(u)$ un multiple non nul de la forme de Chow $C_{I_0}(u)$. Pour $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{K}^m$ générique,*

$$\frac{\Delta}{pgcd\big(\Delta, \frac{\partial \Delta}{\partial u_0}\big)}\big((0,t)+u\big) = d_0(u_0) + u_1 d_1(u_0) + \cdots + u_m d_m(u_0) + r(u),$$

avec $d_0(u_0), \dots, d_m(u_0) \in \mathbb{K}[u_0]$, $pgcd\big(d_0(u_0), d_0'(u_0)\big) = 1$, et $r(u)$ appartient à l'idéal $(u_1, \dots, u_m)^2$ de $\mathbb{K}[u]$. De plus, pour tout $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in Z_0$, il existe une racine ζ_0 de $d_0(u_0)$ telle que

$$d_0'(\zeta_0)\zeta_i - d_i(\zeta_0) = 0 \ , \quad i = 1, \dots, n.$$

Ce théorème décrit les coordonnées des points de Z_0, comme les valeurs des fractions rationnelles $\frac{d_1(u_0)}{d_0'(u_0)}, \dots, \frac{d_m(u_0)}{d_0'(u_0)}$, en certaines racines de $d_0(u_0)$. La représentation de Z_0 que l'on obtient ainsi n'est pas minimale car tous les racines de $d_0(u_0)$ ne définissent pas nécessairement un point isolé de notre idéal I. Cependant on peut éliminer les "mauvaises" solutions par substitution. Donnons à présent l'algorithme (voir [EM99]).

<u>Algorithme</u> : Représentation univariée rationnelle de Z_0.

1. *Calculer un multiple non nul $\Delta(u)$ de la forme de Chow $C_{I_0}(u)$ à l'aide d'un U-résultant (résiduel) adapté.*
2. *Calculer $d(u) = \frac{\Delta(u)}{pgcd\left(\Delta(u), \frac{\partial \Delta}{\partial u_0}(u)\right)}$.*
3. *Choisir $t \in \mathbb{K}^m$ générique et développer $d((0,t)+u)$ sous la forme*

$$d((0,t)+u) = d_0(u_0) + u_1 d_1(u_0) + \cdots + u_m d_m(u_0) + \cdots .$$

4. *Décomposer $d_0(u_0)$, puis garder ses facteurs irréductibles $p_1, \dots, p_s$ qui divisent les numérateurs des fractions rationnelles*

$$f_i\left(\frac{d_1(u_0)}{d_0'(u_0)}, \dots, \frac{d_n(u_0)}{d_0'(u_0)}\right) \ , \ i = 1, \dots, m.$$

La représentation minimale de Z_0 est donnée par

$$(p_1 \dots p_s)(u_0) = 0 \ \ , \ \ \frac{d_1(u_0)}{d_0'(u_0)} \ , \dots \ , \ \frac{d_m(u_0)}{d_0'(u_0)}.$$

Terminons ce paragraphe en reprenant l'exemple que nous avions traité aux deux paragraphes précédents, à savoir le système

$$\begin{cases} f_1 &= \quad yz + x^2 + y^2 \\ f_2 &= -z^2 + 2x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

Nous avions alors obtenu

$$\det S_2 = -2(-u_0 + 2u_2 - u_1)(u_0 + 2u_2 - u_1).$$

L'algorithme que nous venons de décrire donne alors

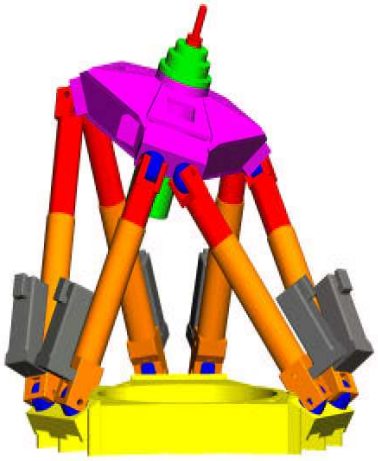
$$d_0(u_0) = 2u_0^2 - 2t_1^2 + 8t_1t_2 - 8t_2^2,\ d_0'(u_0) = 4u_0,$$

$$d_1(u_0) = 8t_2 - 4t_1,\ d_2(u_0) = -16t_2 + 8t_1 = -2d_1(u_0).$$

Prenant par exemple $t_1 = t_2 = 1$, on retrouve alors les solutions $(1, -2)$ et $(-1, 2)$.

4.4 Le problème du robot parallèle

Dans ce paragraphe nous nous intéressons au problème dit du robot parallèle, aussi appelé plateforme de Stewart. Nous voudrions montrer ici comment les techniques de résultants (résiduels) peuvent être mises en œuvre pour résoudre un tel problème.
La plateforme de Stewart peut être décrite de la façon suivante. On considère six points fixes $(X_i)_{1\leq i\leq 6}$ et six autres points $(Y_i)_{1\leq i\leq 6}$ attachés à un solide mobile $\mathcal{S}$ (une plateforme). Chaque point Y_i, pour $i = 1, \ldots, 6$, est lié au point X_i par une barre extensible (X_i, Y_i) dotée de deux joints sphériques aux points Y_i et X_i. Ainsi notre robot ressemble au dessin suivant :



Un changement sur la longueur des barres entraîne un déplacement (dans les limites physiques possibles) du solide $\mathcal{S}$. Le problème du robot parallèle est de déterminer toutes les positions possibles du solide $\mathcal{S}$ si la longueur de chaque barre (X_i, Y_i) est fixée de valeur l_i, pour $i = 1, \ldots, 6$. La mise en équations peut se faire de la façon suivante. On part d'une position donnée $(X_i)_{i=1,\ldots,6}, (Y_i)_{i=1,\ldots,6}, (l_i)_{i=1,\ldots,6}$ et on cherche tous les déplacements possibles de l'espace, qui sont la composée d'une rotation R et d'une translation

T, tels que

$$||T + R.Y_i - X_i||^2 = l_i^2, \quad i = 1, \dots, 6.$$

Sans perdre en généralité nous pouvons supposé que X_1 et Y_1 sont nuls et donc notre problème est décrit par les six équations suivantes :

$$\begin{aligned} &||T|| - l_1^2 = 0, \quad \text{et pour } i = 2, \dots, 6, \\ &2\langle R.Y_i, T\rangle - 2\langle T, X_i\rangle - 2\langle R.Y_i, X_i\rangle + \langle X_i, X_i\rangle + \langle Y_i, Y_i\rangle + l_1^2 - l_i^2 = 0. \end{aligned}$$

Dans [RV92] la théorie de l'intersection est utilisée pour montrer que ces équations définissent au plus 40 solutions complexes. Ce résultat avait déjà été annoncé dans [Laz92] à l'aide de calculs de bases de Gröbner, mais sans démonstration. Le problème majeur qui provient de la pratique reste cependant entier, il faut calculer explicitement ces 40 solutions (en tous cas les solutions réelles). Toutes les méthodes de résolution de systèmes algébriques ont été éprouvées sur ce problème, et pas une n'est à ce jour capable de le résoudre rapidement (moins d'une seconde). Dans ce qui suit nous allons donc essayer d'appliquer les techniques de résultants (résiduels), en nous gardant de toute prétention de temps record mais avec l'espoir que cette nouvelle méthode ajoute une nouvelle pierre pour un futur algorithme efficace.

Le fait d'utiliser des résultants nous oblige à "homogénéiser" nos équations. On note $T = [p_x : p_y : p_z]$ le vecteur de la translation et p la variable d'homogénéisation. À l'aide des formules de Cayley sur les quaternions on peut écrire la rotation R comme

$$R = (c_0\mathrm{Id} - C)^{-1}(c_0\mathrm{Id} + C),$$

où Id est la matrice identité, c_0 notre paramètre d'homogénéisation pour la rotation et C la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -c_3 & c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi on obtient

$$R = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} {c_1}^2 - {c_3}^2 - {c_2}^2 + 1 & 2\,c_1\,c_2 - 2\,c_3 & 2\,c_3\,c_1 + 2\,c_2 \\ 2\,c_1\,c_2 + 2\,c_3 & 1 - {c_1}^2 + {c_2}^2 - {c_3}^2 & 2\,c_2\,c_3 - 2\,c_1 \\ 2\,c_3\,c_1 - 2\,c_2 & 2\,c_2\,c_3 + 2\,c_1 & 1 - {c_1}^2 - {c_2}^2 + {c_3}^2 \end{pmatrix},$$

où $\Delta = c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$.
Si l'on pose $p = c_0 = 1$ on est alors dans la situation affine où il y a au plus 40 solutions. Lorsque que l'on regarde nos six équations *homogènes* définissant notre problème dans $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3$ on s'aperçoit très vite que l'on

a ajouté des solutions à l'infini, c'est-à-dire des nouvelles solutions telles que $p = c_0 = 0$. Il nous faut donc étudier ce lieu "parasite" pour pouvoir l'enlever. Pour cela nous utilisons toute la puissance des bases de Gröbner et entrons nos six équations dans le système Macaulay2 [GS]. Après de nombreuses heures de calculs (et avec l'aide de Mike Stillman) on détecte alors que ce lieu parasite est très complexe : il est composé d'une surface de degré 9, de trois fois une courbe de degré 2 et de 34 points dont 24 sont immergés sur la surface ou la courbe. Les techniques du résultant résiduel développées dans les chapitres précédents ne peuvent donc s'appliquer ici, les Bézoutiens se révélant trop complexes pour pouvoir être calculés. Il nous faut donc "enlever" ce lieu parasite de manière détournée. Pour cela introduisons le vecteur $Q = R^tT = [q_x : q_y : q_z]$ qui vérifie $(c_0\mathrm{Id} + C)Q = (c_0\mathrm{Id} - C)T$, c'est-à-dire les trois équations :

$$\begin{aligned} c_0q_x - c_3q_y + c_2q_z - c_0p_x - c_3p_y + c_2p_z &= 0, \\ c_3q_x + c_0q_y - c1q_z + c_3p_x - c_0p_y - c_1p_z &= 0, \\ -c_2q_x + c_1q_y + c_0q_z - c_2p_x + c_1p_y - c_0p_z &= 0. \end{aligned}$$

Nos 6 équations précédentes s'écrivent alors

$$||T|| - l_1^2 = 0, \quad \text{et pour } i = 2, \dots, 6,$$
$$2\langle Y_i, Q\rangle - 2\langle T, X_i\rangle - 2\langle R.Y_i, X_i\rangle + \langle X_i, X_i\rangle + \langle Y_i, Y_i\rangle + l_1^2 - l_i^2 = 0.$$

On cherche alors à éliminer le lieu bases définit par les variables p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z, p de ce système de 9 équations. Pour cela nous pouvons calculer les résultants multivariés "classiques" de 7 équations (en 7 variables homogènes) prises parmi nos 9 équations. Pour obtenir des matrices de tailles petites (7 lignes et 7 colonnes) on utilise les matrices de résultants multivariés à base de formes de Morley introduites par J.P. Jouanolou dans [Jou97]. Il faut ensuite diviser chacun de ces résultants par leur terme parasite; ce terme est toujours de la forme $\Delta^\alpha * p^\beta$. Le code Maple est le suivant :

```
read(`multires`):
N2:=proc(A) normal(A[1]^2 + A[2]^2 + A[3]^2): end:
scprod:=proc(A,B) dotprod(evalm(A),evalm(B),'orthogonal') end:

#Des points aleatoires:
X[1]:=[0,0,0]:            X[2]:=[5,0,0]:
X[3]:=[12,-15,0]:         X[4]:=[18,-6,3]:
X[5]:=[20,1,-3]:          X[6]:=[10,8,5]:
Y[1]:=[0,0,0]:            Y[2]:=[4,0,0]:
Y[3]:=[8,-6,0]:           Y[4]:=[13,-3,-5]:
Y[5]:=[14,5,2]:           Y[6]:=[6,10,3]:
l:=[14,12,17,15,23,19]:

Id:=matrix([[c0,0,0],[0,c0,0],[0,0,c0]]):
```

```
C:=matrix([[0,-c3,c2],[c3,0,-c1],[-c2,c1,0]]):
R:=matrix([[c1^2-c3^2-c2^2+c0^2,2*(c1*c2-c3*c0),2*(c3*c1+c2*c0)],
   [2*(c1*c2+c3*c0),(c0^2-c1^2+c2^2-c3^2),2*(c2*c3-c1*c0)],
   [2*(c3*c1-c2*c0),2*(c2*c3+c1*c0),(c0^2-c1^2-c2^2+c3^2)]]):
T:=[px,py,pz]:
Q:=[qx,qy,qz]:
Rd:=c0^2+c1^2+c2^2+c3^2:

#Les 9 equations du robot:
S[1] := N2(T)-p^2*l[1]^2:
for i from 2 to 6 do
S[i] := expand( (N2(X[i])+N2(Y[i])-l[i]^2+l[1]^2)*p*Rd+
        2*Rd*scprod(Y[i],Q)-2*p*scprod(R&*Y[i],X[i])
        -2*Rd*scprod(X[i],T)):
od:
for i from 7 to 9 do
S[i]:=expand(evalm(evalm((Id+C)&*Q)-evalm((Id-C)&*T)))[i-6]:
od:

#Les quatres resultants necessaires:
M1:=jresultant([S[1],S[2],S[3],S[4],S[5],S[6],S[7]],
               [qx,qy,qz,px,py,pz,p]):
M2:=jresultant([S[1],S[2],S[3],S[4],S[5],S[6],S[8]],
               [qx,qy,qz,px,py,pz,p]):
M3:=jresultant([S[2],S[3],S[4],S[5],S[6],S[7],S[9]],
               [qx,qy,qz,px,py,pz,p]):
M4:=jresultant([S[2],S[3],S[4],S[5],S[7],S[8],S[9]],
               [qx,qy,qz,px,py,pz,p]):
P1:=expand( factor(det(M1))/((Rd^8*p^2))): #degre 6
P2:=expand( factor(det(M2))/((Rd^8*p^2)) ): #degre 6
P3:=expand( factor(det(M3))/((Rd^4*p)) ): #degre 4
P4:=expand( factor(det(M4))/((Rd^3*c0*p)) ): #degre 4
```

On remarque alors (toujours avec le système Macaulay2) que ces quatre équations $P1, P2, P3, P4$ définissent un idéal homogène en les variables c_0, c_1, c_2, c_3 de codimension 3 et de degré 40, i.e. il définit notre problème initial. Ces quatre équations $P1, P2, P3, P4$ sont de degré respectif $6, 6, 4$ et 4.

Le problème du robot parallèle est ainsi ramené à la résolution d'un système de quatre équations en quatre variables homogènes qui définissent des points isolés. On peut alors utiliser toutes les techniques connues et *efficaces* pour résoudre ce genre de système; par exemple calculer une matrice de Macaulay de ces quatre équations plus une forme linéaire générique (voir

[Laz81]), et ainsi récupérer les solutions sous formes de vecteurs ou valeurs propres.

Remarque 4.4.1 Ce problème du robot parallèle révèle en fait une situation très fréquente de systèmes algébriques qui définissent des points isolés que l'on veut calculer plus un lieu parasite que l'on ne veut pas considérer. La connaissance du lieu que l'on ne veut pas considérer (sous la forme d'un idéal $G = (g_1, \dots, g_n)$) est alors cruciale pour utiliser le résultant résiduel. Dans le cas du robot parallèle, nous n'avons pu obtenir ce lieu à cause de la complexité du système et n'avons pu l'éliminer que par des moyens détournés. Cela dit, si pour un problème donné on sait décrire le lieu parasite, encore faut-il vérifier que ce dernier possède de bonnes propriétés pour utiliser les résultats du chapitre 3. Cependant la connaissance de G permet souvent de connaître les solutions mais avec toutefois une perte d'information. En effet, reprenant les idées du début du paragraphe 3.3.2, on note $R = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$ un anneau de polynôme tel que $m \geq 2$, et $G = (g_1, \dots, g_n)$ un idéal homogène de A tel que $g_1, \dots, g_n$ soient de degré respectif $k_1 \geq \dots \geq k_n$. On considère alors le système des $s + 1 \geq m$ polynômes suivants de degré respectif $d_0 \geq \dots \geq d_s \geq k_1$, défini par :

$$\begin{cases} f_0(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,0}(x)\, g_i(x) \\ \vdots & & \\ f_s(x) & = & \sum_{i=1}^n h_{i,m}(x)\, g_i(x) \end{cases}$$

où $h_{i,j} = \sum_{|\alpha|=d_j-k_i} c_\alpha^{i,j}\, x^\alpha$ sont des polynômes homogènes génériques de degré $d_j - k_i$. On note $R_g = \mathbb{K}[(c_\alpha^{i,j})_{i,j,\alpha}][x_0, \dots, x_m]$ l'algèbre graduée telle que $\deg(c_\alpha^{i,j}) = 0$ et $\deg(x_i) = 1$. On peut calculer la résolution de G :

$$0 \to \dots \to \bigoplus_{i=1}^{n_1} R(-l_i) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{n} R(-k_i) \xrightarrow{\gamma=(g_1,\dots,g_n)} G \to 0,$$

et on en déduit la présentation de R_g-modules de l'idéal G/F, où F est l'idéal $(f_0, \dots, f_s)$:

$$\bigoplus_{i=1}^{n_1} R_g(-l_i) \bigoplus_{i=0}^{s} R_g(-d_i) \xrightarrow{\psi\oplus\phi} \bigoplus_{i=1}^{n} R_g(-k_i) \xrightarrow{\gamma} G/F \to 0, \tag{4.5}$$

où ϕ est la matrice $(h_{i,j})_{1\leq i\leq n, 0\leq j\leq s}$.
Comme on a $Ann_{R_g}(coker(\psi \oplus \phi)) = Ann_{R_g}(G/F) = (F : G)$, si $n_1 + s + 1 \geq n$ on déduit alors, d'après le théorème de Buschbaum-Eisenbud (voir proposition 3.3.5),

$$(F : G)^n \subseteq I_n(\psi \oplus \phi) \subseteq (F : G),$$

où $I_n(\psi \oplus \phi)$ désigne l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la matrice de $\psi \oplus \phi$. Ainsi l'idéal $I_n(\psi \oplus \phi)$ a même radical que notre idéal résiduel $(F : G)$ et décrit donc les mêmes points (avec éventuellement des multiplicités différentes) mais sans lieu parasite.

Chapitre 5

Implicitisation et résultant

Le problème d'implicitisation de courbes ou de surfaces rationnelles consiste en la détermination de l'équation implicite de telles courbes ou surfaces. Calculer une équation implicite est un problème important en CAO (Conception Assistée par Ordinateur) et dans beaucoup de problèmes de géométrie combinatoire. Par exemple, l'équation implicite peut aider à tracer une courbe ou une surface au voisinage d'une singularité, à calculer une auto-intersection d'offsets, ou bien encore calculer l'intersection de courbes ou de surfaces (voir [CM91]).

Le problème d'implicitisation dans le cas des courbes est simple et bien connu; un calcul de résultant multivarié de deux polynômes en une seule variable fournit toujours la réponse. Dans une premier paragraphe nous rappellerons brièvement cette méthode.

Le cas des surfaces est lui, bien plus compliqué. Généralement, une surface rationnelle est donnée par une paramétrisation, c'est-à-dire par des équations :

$$\frac{q_0(x_1,x_2)}{q_3(x_1,x_2)},\ \frac{q_1(x_1,x_2)}{q_3(x_1,x_2)},\ \frac{q_2(x_1,x_2)}{q_3(x_1,x_2)},$$

où $q_0(x_1,x_2)$, $q_1(x_1,x_2)$, $q_2(x_1,x_2)$ et $q_3(x_1,x_2)$ sont quatre polynômes en deux variables. En homogénéisant ces quatre polynômes, on obtient une application rationnelle

$$\theta : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^3 : (x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (p_0 : p_1 : p_2 : p_3)$$

donnée par quatre polynômes homogènes p_0, p_1, p_2, p_3 de même degré d (le plus grand des degrés des polynômes q_0, q_1, q_2, q_3). Le problème d'implicitisation est alors de calculer explicitement l'équation de la plus petite surface algébrique de $\mathbb{P}^3$ qui contient l'image de θ. On sait résoudre ce problème lorsque θ est une application régulière (ce sera l'objet du deuxième paragraphe); dans ce cas le degré de l'équation implicite est d^2. Lorsque θ n'est pas régulière, c'est-à-dire qu'il existe des points x de $\mathbb{P}^2$ tels que $p_i(x) = 0$ pour tout $i = 0, 1, 2, 3$ (de tels points sont appelés *points bases*), le problème

d'implicitisation est difficile à résoudre, mais l'on sait que la présence de points bases implique que le degré de l'équation implicite est inférieur à d^2. En pratique, les points bases apparaissent souvent, et de façon naturelles pour des raisons de géométrie ou de "design". Par exemple, les 27 droites contenues dans une cubique générique sont fortement liées à une paramétrisation de cette cubique possédant 6 points bases (voir [EM01]).

Trois méthodes sont connues pour résoudre le problème d'implicitisation pour les surfaces rationnelles. Ces trois méthodes réduisent ce problème en un problème d'élimination de variables. La première méthode est basée sur des calculs de bases de Gröbner. En l'absence de points bases, un calcul de base de Gröbner de l'idéal I engendré par les polynômes p_0, p_1, p_2, p_3 donne l'équation implicite. En la présence de points bases, l'équation implicite n'appartient pas à l'idéal I, mais au saturé de l'idéal I par l'idéal définissant les points bases. Ainsi, dans ce cas, on a besoin de calculer un idéal saturé et une base de Gröbner. Cette méthode peut être très lente en pratique mais a l'avantage de toujours fournir l'équation implicite (voir [Hof89], [CM92a]).
La deuxième méthode pour calculer cette équation implicite consiste en le calcul d'un résultant multivarié classique des polynômes $p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3$ (voir [CLO96], [CLO98] et aussi [Jou96] pour un résultat similaire à l'aide du résultant anisotrope introduit dans [Jou91]). Cette méthode échoue en la présence de points bases. Dans les travaux [CM92b] et [Can90] des techniques de perturbations sont utilisées pour calculer l'équation implicite en la présence de points bases. Ils montrent qu'elle est contenue dans le terme de plus bas degré du résultant du système perturbé (développé en la variable de perturbation), et il faut faire un calcul de pgcd de $d+1$ polynômes pour l'extraire (avec quelques conditions techniques). Il faut ici remarquer qu'il est toujours possible de calculer un multiple de l'équation implicite en calculant le déterminant d'un mineur maximal de la matrice Bézoutienne des polynômes $p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3$ (voir chapitre 2, 3.1), mais c'est l'équation implicite exacte qu'il est utile d'obtenir.
La troisième méthode pour résoudre le problème d'implicitisation pour les surfaces rationnelles est la méthode introduite par Tom Sederberg dans [SC95], et appelée *moving surfaces*. Cette méthode est basée sur l'étude des syzygies de l'idéal I défini par les polynômes p_0, p_1, p_2, p_3, et exprime l'équation implicite comme le déterminant d'une certaine matrice. La formulation de l'équation implicite sous une forme déterminantale peut s'avérer très utile en pratique. Cependant, la validité d'une telle méthode est prouvée uniquement en l'absence de points bases et dans le cas de surfaces bihomogènes (voir [CGM00], [D'A01], [Cox00]).

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous donnerons une nouvelle méthode pour résoudre le problème d'implicitisation des surfaces rationnelles avec points bases en utilisant le résultant résiduel (voir chapitre 2). Ce travail est la deuxième partie d'un article qui a été présenté à la conférence

ISSAC2001 [Bus01]. L'équation implicite est obtenue comme un résultant résiduel lorsque l'idéal définissant les points bases (de codimension 2 dans $\mathbb{P}^2$) est supposé *localement intersection complète*. Le point clef de ce résultat est que le premier module des syzygies de l'idéal définissant les points bases est toujours libre, alors que cela n'est pas vrai pour l'idéal I, ce qui est le cadre de la méthode des *moving surfaces* (voir [Cox00]).

5.1 Implicitisation de courbes rationnelles

La paramétrisation d'une courbe rationnelle plane est définie par les équations

$$\frac{p_1(x_0,x_1)}{p_3(x_0,x_1)}, \frac{p_2(x_0,x_1)}{p_3(x_0,x_1)},$$

où $p_1(x_0,x_1)$, $p_2(x_0,x_1)$ et $p_3(x_0,x_1)$ sont des polynômes homogènes de même degré d. On veut calculer l'équation implicite de cette courbe, c'est-à-dire le plus petit polynôme $H(X,Y)$ tel que $H(X,Y)=0$ est la plus petite courbe algébrique contenant cette courbe rationnelle.
Nous appellerons un *point base* des polynômes p_1, p_2 et p_3 un point (x_0,x_1) tel que

$$p_1(x_0,x_1) = p_2(x_0,x_1) = p_3(x_0,x_1) = 0.$$

5.1.1 Courbes rationnelles sans point base

On suppose tout d'abord que notre courbe rationnelle ne possède pas de point base, c'est-à-dire que l'application

$$\begin{array}{rccl} \beta: & \mathbb{P}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[X,Y,Z]) \\ & (x_0:x_1) & \mapsto & (p_1(x_0,x_1):p_2(x_0,x_1):p_3(x_0,x_1)) \end{array}$$

est régulière. On note $L=\beta_*(\mathbb{P}^1)$. C'est un sous-schéma fermé irréductible de $\mathbb{P}^2$, et on a $L=\deg(\mathbb{P}^1/C)C$, où $C=\beta(\mathbb{P}^1)$ (la notation $\deg(\mathbb{P}^1/C)$ désigne le degré de la restriction $\beta:\mathbb{P}^1\to C$, voir [Ful84], 1.4).

Lemme 5.1.1 *Le degré de la courbe C divise d, et est exactement d lorsque la restriction $\beta:\mathbb{P}^1\to C$ est birationnelle.*

Preuve. On a l'égalité $\deg(L)=\deg(\mathbb{P}^1/C)\deg(C)$. Pour calculer le degré de L, on peut l'intersecter avec une forme linéaire générique et compter le nombre de points dans l'intersection :

$$\deg(L) = \int_{\mathbb{P}^1} c_1(\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))) = \int_{\mathbb{P}^1} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) = d.$$

On en déduit que $\deg(C)$ divise d et qu'il y a égalité lorsque $\deg(\mathbb{P}^1/C)=1$.
□

C est l'équation implicite homogène de notre courbe rationnelle de $\mathbb{P}^2$. On a $H(X,Y) = C(X,Y,1)$ et $\deg(H) = \deg(C)$ puisque C est irréductible. L'absence de point base assure que le résultant multivarié $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(p_1 - Xp_3, p_2 - Yp_3)$ est non-dégénéré et s'annule si et seulement s'il existe un point $(x_0, x_1) \in \mathbb{P}^1$ tel que

$$X = \frac{p_1(x_0,x_1)}{p_3(x_0,x_1)},\ Y = \frac{p_2(x_0,x_1)}{p_3(x_0,x_1)}.$$

On déduit donc que $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(p_1 - Xp_3, p_2 - Yp_3) = H^m$. Nous savons que ce résultant projectif est de degré plus petit ou égal à $2d$, mais si nous retournons à la définition du résultant on peut déterminer l'entier m. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} = \{(x_0,x_1) \times (X,Y) : p_1 - Xp_3 = p_2 - Yp_3 = 0\} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^2 \setminus V(Z=0) \\ \pi_1 \big\downarrow & & \\ \mathbb{P}^1 \setminus V(p_3 = 0) & & \end{array}$$

$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(p_1 - Xp_3, p_2 - Yp_3)$ est défini comme $\pi_{2*}(\mathcal{W})$. Il est irréductible, et $m = deg(\mathcal{W}/\pi_2(\mathcal{W}))$. Comme β rend le diagramme commutatif et que π_1 est birationnelle, on déduit que $m = \deg(\mathbb{P}^1/C)$. Finalement on obtient :

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(p_1 - Xp_3, p_2 - Yp_3) = H^{\deg(\mathbb{P}^1/C)}.$$

Remarque 5.1.2 *On calcul* $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(p_1 - Xp_3, p_2 - Yp_3)$ *et non pas* $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(Zp_1 - Xp_3, Zp_2 - Yp_3)$*, car ce dernier est réductible, il contient la droite* $Z = 0$*.*

5.1.2 Courbes rationnelles avec points bases

On suppose à présent qu'il existe des points bases. On note $p(x_0,x_1)$ le pgcd des polynômes $p_1(x_0,x_1)$, $p_2(x_0,x_1)$ et $p_3(x_0,x_1)$. C'est un polynôme homogène de degré $k < d$. On peut écrire :

$$X = \frac{p_1(x_0,x_1)}{p_3(x_0,x_1)} = \frac{p(x_0,x_1)\tilde{p_1}(x_0,x_1)}{p(x_0,x_1)\tilde{p_3}(x_0,x_1)} = \frac{\tilde{p_1}(x_0,x_1)}{\tilde{p_3}(x_0,x_1)},\ \text{et}$$

$$Y = \frac{p_2(x_0,x_1)}{p_3(x_0,x_1)} = \frac{p(x_0,x_1)\tilde{p_2}(x_0,x_1)}{p(x_0,x_1)\tilde{p_3}(x_0,x_1)} = \frac{\tilde{p_2}(x_0,x_1)}{\tilde{p_3}(x_0,x_1)}.$$

Maintenant les équations $\tilde{p_1}(x_0,x_1)$, $\tilde{p_2}(x_0,x_1)$ et $\tilde{p_3}(x_0,x_1)$ définissent une paramétrisation de la même courbe et ne possède pas de point base. Par conséquent l'équation implicite peut être obtenue en calculant

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^1}(\tilde{p_1} - X\tilde{p_3}, \tilde{p_2} - Y\tilde{p_3}).$$

5.2 Implicitisation de surfaces rationnelles

On considère quatre polynômes homogènes $p_0(x_0, x_1, x_2)$, $p_1(x_0, x_1, x_2)$, $p_2(x_0, x_1, x_2)$ et $p_3(x_0, x_1, x_2)$ de l'anneau $R = \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$, de même degré d. Les équations suivantes définissent la paramétrisation d'une surface rationnelle :

$$X = \frac{p_0(x_0, x_1, x_2)}{p_3(x_0, x_1, x_2)},\ Y = \frac{p_1(x_0, x_1, x_2)}{p_3(x_0, x_1, x_2)},\ Z = \frac{p_2(x_0, x_1, x_2)}{p_3(x_0, x_1, x_2)}.$$

On cherche à obtenir l'équation implicite de cette surface, c'est-à-dire le plus petit polynôme $H(X, Y, Z)$ tel que $H(X, Y, Z) = 0$ est la plus petite surface algébrique contenant cette surface.
Nous appellerons un *point base* des polynômes p_0, p_1, p_2 et p_3 un point de $\mathbb{P}^2$, (x_0, x_1, x_2), tel que

$$p_0(x_0, x_1, x_2) = p_1(x_0, x_1, x_2) = p_2(x_0, x_1, x_2) = p_3(x_0, x_1, x_2) = 0.$$

5.2.1 Surfaces rationnelles sans point base

On suppose tout d'abord qu'il n'existe pas de point base, et on considère l'application régulière suivante :

$$\begin{array}{rccc} \beta : & \mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[X, Y, Z, W]) \\ & (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (p_0 : p_1 : p_2 : p_3). \end{array}$$

On pose $L = \beta_*(\mathbb{P}^2)$. C'est un sous-schéma fermé irréductible de $\mathbb{P}^3$, et on a $L = \deg(\mathbb{P}^2/S)S$, où $S = \beta(\mathbb{P}^2)$.

Lemme 5.2.1 *Le degré de S divise d^2 et est exactement d^2 lorsque la restriction $\beta : \mathbb{P}^2 \to S$ est birationnelle.*

Preuve. On a $\deg(L) = \deg(\mathbb{P}^2/S)\deg(S)$. Pour calculer le degré de L on peut l'intersecter avec deux hyperplans génériques et compter le nombre de points dans l'intersection, on obtient :

$$\deg(L) = \int_{\mathbb{P}^2} c_1(\beta^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)))^2 = \int_{\mathbb{P}^2} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d))^2 = d^2.$$

On déduit que $\deg(S)$ divise d^2 et que l'égalité a lieu lorsque $\deg(\mathbb{P}^2/S) = 1$. □

S est l'équation implicite homogène de notre surface paramétrique de $\mathbb{P}^3$. On a ainsi $H(X, Y, Z) = S(X, Y, Z, 1)$ et $\deg(S) = \deg(H)$ puisque S est irréductible. Puisqu'il n'y a pas de point base, le résultant projectif $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^2}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3)$ est non-dégénéré et s'annule si et seulement s'il existe un point $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2$ tel que

$$X = \frac{p_0(x_0, x_1, x_2)}{p_3(x_0, x_1, x_2)},\ Y = \frac{p_1(x_0, x_1, x_2)}{p_3(x_0, x_1, x_2)},\ Z = \frac{p_2(x_0, x_1, x_2)}{p_3(x_0, x_1, x_2)}.$$

On déduit que $\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^2}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3) = H^m$. On sait que ce résultant est de degré inférieur ou égal à $3d^2$, mais si nous retournons à la définition du résultant, nous pouvons déterminer l'entier m. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} = \{(x_0, x_1, x_2) \times (X, Y, Z) : p_0 - Xp_3 = p_1 - Yp_3 = p_2 - Zp_3 = 0\} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^3 \setminus V(W = 0) \\ \pi_1 \big\downarrow & & \\ \mathbb{P}^2 \setminus V(p_3 = 0) & & \end{array}$$

$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^2}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3)$ est défini comme $\pi_{2*}(\mathcal{W})$. Il est irréductible et, de la même façon que pour le cas des courbes, on montre que $m = deg(\mathbb{P}^2/S)$. Finalement on obtient :

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{P}^2}(p_0 - Xp_3, p_2 - Yp_3, p_2 - Zp_3) = H^{\deg(\mathbb{P}^2/S)}.$$

5.2.2 Surfaces rationnelles avec points bases localement intersection complète

On suppose à présent qu'il existe des points bases. Remarquons que l'on peut se ramener au cas où les points bases sont en codimension 2 en divisant, comme pour le cas des courbes, les polynômes p_0, p_1, p_2, p_3 par leur pgcd afin d'obtenir un nouveau système décrivant la même surface rationnelle, mais sans point base en codimension 1.

Nous allons montrer que si l'idéal des points bases (que l'on suppose de codimension 2) et localement intersection complète et vérifie certaines conditions portant sur le degré de ses générateurs minimaux, alors le résultant résiduel d'un idéal de codimension 2 introduit au chapitre 2, section 3.3, permet de calculer l'équation implicite de notre surface rationnelle.

Soit $G = (g_1, \ldots, g_n)$ un idéal homogène de R de codimension 2 définissant le lieu des points bases (c'est donc un idéal saturé), où $g_1, \ldots, g_n$ sont des polynômes homogènes de degré respectif $k_1 \geq \ldots \geq k_n$. On a ainsi

$$(p_0, p_1, p_2, p_3)^{sat} = G.$$

Dans le but d'appliquer les résultats de la section 3.3 du chapitre 2, on suppose que G est un idéal localement intersection complète de codimension 2, et admet ainsi, par le théorème de Hilbert-Burch, une résolution libre minimale de R-modules de la forme (voir chapitre 2, (3.9)) :

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} R(-l_i) \xrightarrow{\psi} \bigoplus_{i=1}^{n} R(-k_i) \xrightarrow{\gamma=(g_1,\ldots,g_n)} G \to 0. \tag{5.1}$$

Soit $\mathcal{G}$ le faisceau d'idéaux de $\mathbb{P}^2$ associée à l'idéal G. Le faisceau $\mathcal{G}(d)$ est engendré par ses sections globales p_0, p_1, p_2 et p_3. On note $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^2 \to \mathbb{P}^2$

l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ le long de $\mathcal{G}$, et $\tilde{p}_i$ la section globale $\pi^*(p_i)$ du faisceau $\tilde{\mathcal{G}}_d$ pour $i = 0, \ldots, 3$ (voir la preuve de la proposition 3.2.1 du chapitre 3). Puisque $\tilde{\mathcal{G}}_d$ est un faisceau inversible de $\tilde{\mathbb{P}}^2$, et que $\tilde{p}_0, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ sont des sections globales qui l'engendrent, on déduit qu'il existe un morphisme

$$\theta : \tilde{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^3 = \mathrm{Proj}(\mathbb{K}[X, Y, Z, W])$$

tel que $\theta^*\mathcal{O}(1) \cong \tilde{\mathcal{G}}_d$ et $\theta^*(X) = \tilde{p}_0$, $\theta^*(Y) = \tilde{p}_1$, $\theta^*(Z) = \tilde{p}_2$, $\theta^*(W) = \tilde{p}_3$ (voir [Har77], II.7). Comme $\tilde{\mathbb{P}}^2$ est une variété projective irréductible, on a $\theta_*(\tilde{\mathbb{P}}^2) = \deg(\tilde{\mathbb{P}}^2/S)S$, où $S = \theta(\tilde{\mathbb{P}}^2)$ est notre surface rationnelle de $\mathbb{P}^3$, et où $\deg(\tilde{\mathbb{P}}^2/S)$ désigne le degré de l'application surjective $\theta : \tilde{\mathbb{P}}^2 \to S$.
Soit β l'application régulière suivante :

$$\begin{array}{rccc} \beta : & U = \mathbb{P}^2 \setminus V(G) & \longrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ & (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (p_0 : p_1 : p_2 : p_3) \end{array}$$

Proposition 5.2.2 *Le degré de la surface S divise*

$$d^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i^2}{2}$$

(où les entiers k_i et l_i sont définis par (5.1)) et l'égale lorsque β est birationnelle.

Preuve. On a $\deg(\theta_*(\tilde{\mathbb{P}}^2)) = \deg(\tilde{\mathbb{P}}^2/S)\deg(S)$ et

$$\deg(\theta_*(\tilde{\mathbb{P}}^2)) = \int_{\tilde{\mathbb{P}}^2} c_1(\theta^*(\mathcal{O}(1)))^2 = \int_{\tilde{\mathbb{P}}^2} c_1(\tilde{\mathcal{G}}_n)^2,$$

qui est exactement $d^2 - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} l_i^2 - \sum_{i=1}^{n} k_i^2}{2}$ d'après les propositions 3.3.2 et 3.3.3 du chapitre 2.
Considérons maintenant le diagramme suivant où E désigne le diviseur exceptionnel de l'éclatement π :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus E & \xrightarrow{\theta_{|\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus E}} & \mathbb{P}^3 \\ \pi \big\downarrow & & \\ U = \mathbb{P}^2 \setminus V(G) & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{P}^3 \end{array}$$

Puisque par construction θ est unique, et puisque la flèche verticale est un isomorphisme (l'éclatement est un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel), on déduit que $\theta_{|\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus E} = \beta \circ \pi$, et donc que $\deg(\tilde{\mathbb{P}}^2/S) = \deg(U/\beta(U))$ qui vaut 1 si β est birationnelle. $\square$

L'équation $S = 0$ est l'équation implicite homogène de notre surface rationnelle. On a ainsi $H(X, Y, Z) = S(X, Y, Z, 1)$ et $\deg(S) = \deg(H)$. Le

résultant résiduel d'un idéal de codimension 2 (voir paragraphe 3.3), que l'on note Res, permet de calculer explicitement l'équation H :

Théorème 5.2.3 *On suppose que $d \geq k_1 \geq \ldots \geq k_n$, que $d \geq k_n + 1$ et que $(p_0, p_1, p_2, p_3)^{sat} = G$, alors*

$$\mathrm{Res}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3) = H(X, Y, Z)^{deg(U/\beta(U))},$$

avec $deg(U/\beta(U)) = 1$ si β est birationnelle.

Preuve. Le résultant résiduel est défini comme un résultant mixte sur l'éclaté de $\mathbb{P}^2$ le long $\mathcal{G}$ (voir Chapitre 2). Soit t un point de $\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus V(\tilde{p}_3 = 0)$, et $\tilde{\mathcal{W}}$ la variété

$$\tilde{\mathcal{W}} = \{t \times (X, Y, Z) : \tilde{p}_0(t) - X\tilde{p}_3(t) = \tilde{p}_1(t) - Y\tilde{p}_3(t) = \tilde{p}_2(t) - Z\tilde{p}_3(t) = 0\}.$$

On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{W}} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{P}^3 \setminus V(W = 0) \\ {\scriptstyle \pi_1}\big\downarrow & & \\ \tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus V(\tilde{p}_3 = 0) & & \end{array}$$

Le résultant résiduel $\mathrm{Res}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3)$ est exactement $\pi_{2*}(\tilde{\mathcal{W}})$, et, puisque l'éclatement est un isomorphisme en dehors du diviseur exceptionnel, ce résultant résiduel s'annule si et seulement si le point affine (X, Y, Z) de $\mathbb{P}^3$ est sur H. On en déduit que

$$\mathrm{Res}(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3) = H^{deg(\tilde{\mathcal{W}}/\pi_2(\tilde{\mathcal{W}}))}.$$

Maintenant l'application $\beta_{|\tilde{\mathbb{P}}^2 \setminus V(\tilde{p}_3 \neq 0)}$ rend le diagramme précédent commutatif, et puisque π_1 est birationnelle, on déduit que $\deg(\tilde{\mathcal{W}}/\pi_2(\tilde{\mathcal{W}})) = \deg(U/\beta(U))$. □

Ce théorème montre que l'on peut calculer l'équation implicite $H(X, Y, X)$ de notre surface rationnelle comme un résultant résiduel si l'idéal G des points bases est localement intersection complète, et si $d \geq k_1 \geq \ldots \geq k_n$ et $d \geq k_n + 1$.

Remarque 5.2.4 Des points lisses sont toujours localement intersection complète, ainsi on peut toujours calculer l'équation implicite d'une surface rationnelle avec points bases lisses, à condition que $d \geq k_1$ et $d \geq k_n + 1$.

Pour calculer explicitement l'équation $H(X, Y, Z)$, on applique les deux algorithmes de la section 3.3.3 du chapitre 2. Pour cela, on rappelle que l'idéal G a la résolution (5.1). Comme $(p_0, p_1, p_2, p_3) \subset G$, il existe une

matrice $n \times 4$, notée Q, telle que $(p_0, p_1, p_2, p_3) = (g_1, \ldots, g_n)Q$. On en déduit une matrice T telle que :

$$(p_0 - Xp_3, p_1 - Yp_3, p_2 - Zp_3) = (g_1, \ldots, g_n)T.$$

Cette matrice T définie l'application

$$\bigoplus_{i=1}^{3} R^g[-d_i] \xrightarrow{\phi} \bigoplus_{i=1}^{n} R^g[-k_i],$$

où R^g est la $\mathbb{K}[X, Y, Z]$-algèbre graduée $\mathbb{K}[X, Y, Z][x_0, x_1, x_2]$. On obtient une application $\psi \oplus \phi$ entre les deux R^g-modules libres suivants :

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n-1} R^g[-l_i] \oplus \bigoplus_{i=0}^{3} R^g[-d_i] \xrightarrow{\psi \oplus \phi} N = \bigoplus_{i=1}^{n} R^g[-k_i].$$

À ce stade nous pouvons appliquer les deux algorithmes de la section 3.3.3 du chapitre 2. Le premier algorithme fournit l'équation implicite de notre surface rationnelle comme le pgcd de trois polynômes, le deuxième comme le produit de deux déterminants divisés par un troisième. Dans certain cas particulier, ce deuxième algorithme peut donner l'équation implicite comme le quotient de deux déterminants. La proposition suivante donne de tels cas :

Proposition 5.2.5 *Si $k_1 = \ldots = k_n$ alors l'équation implicite H de la surface rationnelle est donnée par le quotient de deux déterminants.*

Preuve. Nous avons vu que l'équation implicite H est obtenue comme le déterminant d'un certain complexe (3.11), chapitre 2. En regardant ce complexe en degré $\nu = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = 3n - 2(k_n + 1)$, on voit que pour tout $i = 1, \ldots, \frac{(n+1)n}{2}$, $3n - 2k_n + 1 - \delta_i$ est négatif, et donc que la dernière application de ce complexe est nulle. Son déterminant ce réduit alors au quotient des deux autres applications. La condition donnée dans la proposition implique que $3n - 2k_n + 1 - \delta_i \leq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, \frac{(n+1)n}{2}$. $\square$

Un exemple

Pour illustrer cette méthode, on considère l'exemple suivant. Soit la surface rationnelle définie par la paramétrisation :

$$p_0 = x_0 x_1^2,\ p_1 = x_1^3,\ p_2 = x_0 x_2^2,\ p_3 = x_1^3 + x_2^3.$$

Cette paramétrisation possède un unique point base qui est un point de multiplicité 4 donné par l'idéal $G = (x_1^2, x_2^2)$. L'idéal G est un idéal intersection

complète et on peut donc obtenir sa résolution par un complexe du type Koszul. On déduit alors la matrice T qui est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} x_0 - Xx_1 & x_1 - Yx_1 & -Zx_1 \\ -Xx_2 & -Yx_2 & x_0 - Zx_2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\mathtt{M}_3^g$ (voir 3.3.3, chapitre 2) est une matrice de taille 10×12. Appliquant le premier algorithme, on extrait la matrice d'un premier mineur maximal et on obtient

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & -X & 1 & 0 & 0 & 1-Y & 0 & 0 \\
X & -Y & 0 & 0 & -Z & -X & 0 & -Z & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & -Y & -Z \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 1-Y & -Z \\
0 & 0 & 0 & 0 & -X & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
-Y & 0 & 0 & -Z & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -Y & 0 & 0 & -Z & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Son déterminant est alors $(-Z^3Y^2+Y^2X^3-2X^3Y+X^3)X^2$. Le déterminant d'un second mineur maximal est $(-1+Y)Y(-Z^3Y^2+Y^2X^3-2X^3Y+X^3)$, et donc, on en déduit que l'équation implicite de notre surface rationnelle est $-Z^3Y^2+Y^2X^3-2X^3Y+X^3$. Cette équation est bien de degré $9-4=5$, comme prédit par la proposition 5.2.2.

Maintenant on applique le second algorithme. Tout d'abord on choisit un mineur maximal δ_0 de la matrice $\mathtt{M}_3^g$, et on obtient ainsi une base K_1 de B_1. Le déterminant de δ_0 est $(-Z^3Y^2 + Y^2X^3 - 2X^3Y + X^3)X^2$. Par la proposition 5.2.5, K_2 est vide, et nous n'avons donc pas de choix pour δ_1 qui est donné par la matrice :

$$\begin{pmatrix} -X & 0 \\ 0 & -X \end{pmatrix}.$$

On en déduit que l'équation implicite est bien $-Z^3Y^2+Y^2X^3-2X^3Y+X^3$.

Chapitre 6

Résultant déterminantal

Partant du résultant mixte introduit dans [GKZ94] que nous avons revu au chapitre 2, on peut interpréter les résultants résiduels comme une extension de ce dernier : au lieu de considérer des fibrés inversibles très amples (donc sans points bases), on se donne des fibrés pouvant définir des points bases. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à une autre extension du résultant mixte dont le point de départ est la remarque suivante : étant donnés $m+1$ polynômes homogènes $f_0, \dots, f_m$ en les variables $x_0, \dots, x_m$, le résultant multivarié (ou bien résultant mixte) s'annule si et seulement si $f_0, \dots, f_m$ possèdent une solution commune dans $\mathbb{P}^m$, c'est-à-dire si la matrice ligne $(f_0, \dots, f_m)$ est de rang nul en au moins un point de $\mathbb{P}^m$. Plus généralement, on peut interpréter le résultant mixte de $m+1$ fibrés inversibles très amples $\mathcal{L}_0, \dots, \mathcal{L}_m$ sur une variété projective irréductible X de dimension m, comme un objet qui traduit la chute du rang d'un morphisme

$$\mathcal{L}_0^* \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_m^* \xrightarrow{(f_0,\dots,f_m)} \mathcal{O}_X,$$

en au moins un point de X.

On se propose d'étudier dans ce chapitre un résultant que nous appellerons résultant déterminantal. Étant donnés deux fibrés vectoriels E et F de rang respectif m et n sur une variété projective irréductible X, et un entier $r < \min(m, n)$, le résultant déterminantal est défini sur l'espace vectoriel des morphismes de E dans F, et donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel morphisme soit de rang inférieur ou égal à r en au moins un point de X. Nous verrons qu'il faut mettre des hypothèses sur la dimension de X et sur le fibré des morphismes de E dans F pour pouvoir définir un tel objet. Nous montrerons également que, tout comme le résultant mixte, le résultant déterminantal peut s'exprimer comme le déterminant d'un certain complexe que nous obtiendrons à l'aide des travaux d'Alain Lascoux ([Las78]). Enfin nous terminerons ce chapitre en explicitant les résultats que nous aurons obtenus dans le cas où X est un espace projectif.

6.1 Construction

Soit X une variété irréductible projective sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$. Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X de rang respectif m et n, tels que $m \geq n$. On note $H = \mathrm{Hom}(E, F)$ l'espace vectoriel de dimension finie des morphismes de E dans F. Pour tout entier $k \geq 0$, et tout morphisme $\varphi \in H$, on désigne par $X_k(\varphi)$ la $k^{\text{ième}}$ variété déterminantale de φ définie par

$$X_k(\varphi) = \{x \in X : \mathrm{rang}(\varphi(x)) \leq k\}.$$

Elle est de codimension au plus $(m-k)(n-k)$.

Avant d'énoncer le théorème d'existence du résultant déterminantal, on rappelle brièvement la définition du schéma de Hilbert $\mathcal{H}_P(X)$ où P est un polynôme de l'anneau $\mathbb{K}[\nu]$. On considère le foncteur $h_{P,X}$ de la catégorie opposée des schémas dans la catégorie des ensembles,

$$h_{P,X} : \begin{array}{ccc} (\mathfrak{S}\textit{chémas})^{opp} & \to & (\mathfrak{E}ns) \\ B & \mapsto & h_{P,X}(B), \end{array}$$

qui a tout schéma B associe l'ensemble $h_{P,X}(B)$ des sous-schémas $\mathcal{X} \subset X \times B$, plat sur B, dont les fibres en tous points de B admettent P comme polynôme de Hilbert. Ce foncteur est représentable. On définit ainsi le schéma de Hilbert $\mathcal{H}_P(X)$ comme étant le schéma représentant le foncteur $h_{P,X}$. Il paramétrise tous les sous-schémas de X de même polynôme de Hilbert P. Il vient avec un sous-schéma universel $\mathcal{U} \subset X \times \mathcal{H}_P(X)$, plat sur $\mathcal{H}_P(X)$ avec polynôme de Hilbert P, associé à l'application identité. Ainsi tout sous-schéma $Y \subset X \times B$ plat sur B avec polynôme de Hilbert P, est isomorphe au produit fibré $Y \simeq \mathcal{X} \times_{\mathcal{H}_P(X)} B \subset X \times B$ pour un unique morphisme $B \to \mathcal{H}_P(X)$. Dans ce qui suit on ne considérera que le schéma de Hilbert $\mathcal{H}_2(X)$ qui paramétrise les sous-schémas de X de polynôme de Hilbert $P = 2$, c'est-à-dire les sous-schémas zéro-dimensionnels de degré 2 de X.

Théorème 6.1.1 *Soit r un entier positif tel que $m \geq n > r \geq 0$. On suppose que X est une variété projective irréductible de dimension $(m-r)(n-r)-1$. On suppose également que pour tout $z \in \mathcal{H}_2(X)$ le morphisme naturel de restriction*

$$H \longrightarrow H^0(z, \mathcal{H}om(E, F)_{|z})$$

est surjectif. Alors il existe un polynôme irréductible et homogène sur H, noté $\mathrm{Res}_{X,E,F}$ et appelé résultant déterminantal de E dans F sur X, qui pour tout $\varphi \in H$, vérifie

$$\mathrm{Res}_{X,E,F}(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow X_r(\varphi) \neq \emptyset.$$

Preuve. On note Y l'espace projectif associé à l'espace vectoriel H, i.e. $Y = \mathbb{P}(H)$. On considère la variété d'incidence

$$W = \{(x, \varphi) \in X \times Y \ : \ \mathrm{rang}(\varphi(x)) \leq r\} \subset X \times Y,$$

et les deux projections naturelles

$$X \xleftarrow{p} W \xrightarrow{q} Y.$$

On obtient alors

$$q(W) = \{\varphi \in Y \ : \ \exists x \in X \ \mathrm{rang}(\varphi(x)) \leq r\} = \{\varphi \in Y \ : \ X_r(\varphi) \neq \emptyset\}.$$

Soit W_x la fibre de W au-dessus d'un point $x \in X$. Puisque, par hypothèse, H engendre $\mathcal{H}om(E, F)$, l'évaluation en x

$$W_x \xrightarrow{ev_x} \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$$

a pour image tous les morphismes de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ de rang inférieur ou égal à r. Ces morphismes forment une variété irréductible de codimension $(m-r)(n-r)$ de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$. Les fibres du morphisme d'évaluation étant isomorphes aux morphismes de E dans F nuls en x, donc en particulier irréductibles, on conclut que W_x est irréductible. On en déduit également que sa codimension dans H est celle des morphismes de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ de rang inférieur ou égal à r, à savoir $(m-r)(n-r)$. Notant $s+1$ la dimension de H, Y est de dimension s et on en déduit que W est une variété projective irréductible de dimension

$$\dim(W) = (m-r)(n-r) - 1 + s - (m-r)(n-r) = s - 1.$$

On pose $\nabla = q_*(W)$. Si l'on montre que le morphisme $W \to \nabla$ induit par q est birationnel, alors ∇ est une variété projective irréductible de codimension 1 dans H. On définit alors $\mathrm{Res}_{X,E,F}$ comme étant la section canonique du faisceau inversible associé au diviseur ∇, $\mathcal{O}(\nabla)$. En d'autres termes, $\mathrm{Res}_{X,E,F}$ est l'équation (définie à une constante multiplicative non nulle près) de la variété ∇. Il nous faut donc montrer que le morphisme $W \to \nabla$ induit par q est birationnel, c'est-à-dire que la fibre générique est réduite à un point lisse. Pour cela nous allons montrer que la sous-variété de Y des morphismes dont le rang est inférieur ou égal à r sur un sous-schéma zéro-dimensionnel de degré 2 de X (c'est-à-dire en deux points distincts ou en un point double) est de codimension supérieure ou égal à 2.
On note r (resp. s) la projection naturelle du sous-schéma universel $\mathcal{U} \subset X \times \mathcal{H}_2(X)$ du schéma de Hilbert $\mathcal{H}_2(X)$ sur X (resp. $\mathcal{H}_2(X)$),

$$X \xleftarrow{r} \mathcal{U} \xrightarrow{s} \mathcal{H}_2(X).$$

Par définition de $\mathcal{U}$ et $\mathcal{H}_2(X)$, le morphisme s est plat et projectif. Comme $r^*\mathcal{H}om(E, F)$ est un fibré sur $\mathcal{U}$, il est plat sur $\mathcal{U}$, et donc $r^*\mathcal{H}om(E, F)$

est plat sur $\mathcal{H}_2(X)$. On est donc dans les hypothèses du théorème de changement de base (voir [Har77] théorème 12.11). Pour tout $z \in \mathcal{H}_2(X)$, la fibre du morphisme s, notée $\mathcal{U}_z$, est de dimension zéro dans $\mathcal{U}$ et donc $H^1(\mathcal{U}_z, r^*(\mathcal{H}om(E,F))_z) = 0$; on en déduit que $s_*r^*\mathcal{H}om(E,F)$ est un fibré sur $\mathcal{H}_2(X)$ de rang $2mn$ et que sa fibre en un point z de $\mathcal{H}_2(X)$ vérifie

$$s_*r^*\mathcal{H}om(E,F)_z \simeq H^0(\mathcal{U}_z, r^*\mathcal{H}om(E,F)_z) \simeq H^0(z, \mathcal{H}om(E,F)_{|z}).$$

On considère maintenant la variété d'incidence

$$D = \{(z,\varphi) \in \mathcal{H}_2(X) \times Y \ : \ \mathrm{rang}(s_*r^*\varphi(z)) \leq r\} \subset \mathcal{H}_2(X) \times Y.$$

L'image de la projection naturelle de D sur Y est exactement l'ensemble des $\varphi \in Y$ qui s'annulent en un sous-schéma zéro-dimensionnel de degré 2 de X. Soit z un point du schéma de Hilbert $\mathcal{H}_2(X)$. C'est un sous-schéma de dimension 0 et de degré 2 sur X; il est donc associé à une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension 2, et donc de la forme $\mathrm{Spec}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K})$ ou bien $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\epsilon]/\epsilon^2)$.
Soit D_z la fibre de la projection $D \to \mathcal{H}_2(X)$ au-dessus d'un point $z \in \mathcal{H}_2(X)$. Si z est du type $\mathrm{Spec}(\mathbb{K} \oplus \mathbb{K})$, c'est-à-dire deux points distincts $\mathbb{K}$-rationnels x et y de X, alors $s_*r^*\mathcal{H}om(E,F)_z \simeq \mathcal{H}om(E,F)_x \oplus \mathcal{H}om(E,F)_y$. Par hypothèse, la double évaluation en x et en y

$$D_z \xrightarrow{ev_x \times ev_y} \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \times \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$$

a pour image tous les couples de morphismes (f,g) tels que $f(x)$ et $g(y)$ sont de rang inférieur ou égal à r. Les fibres de ce morphisme étant isomorphes aux morphismes nuls en x et en y, on conclut que la codimension de D_z dans Y est celle de tous les couples de morphismes (f,g) tels que $f(x)$ et $g(y)$ sont de rang inférieur ou égal à r dans $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \times \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$, à savoir $2(m-r)(n-r)$.
Si z est maintenant du type $\mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\epsilon]/\epsilon^2)$, c'est-à-dire un point $\mathbb{K}$-rationnel x de X et un vecteur tangent $t \in T_xX$ en x, alors $s_*r^*\mathcal{H}om(E,F)_z \simeq (\mathbb{K}[\epsilon]/\epsilon^2)^{mn}$. Un morphisme $\varphi \in Y$ évalué en $x + \epsilon t$ s'identifie ainsi à $\varphi(x + \epsilon t) = f(x) + g(t)\epsilon$. Comme pour le cas de deux points simples, le morphisme d'évaluation

$$D_z \to \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) \times \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) : \varphi \to (f,g)$$

a pour image tous les couples de morphismes (f,g) tels que $f(x)$ et $g(t)$ sont de rang inférieur ou égal à r et, pour les mêmes raisons, D_z est donc de codimension $2(m-r)(n-r)$ dans Y.
Puisque $\mathcal{H}_2(X)$ est de dimension double de celle de X, on déduit que

$$\dim(D) = 2(m-r)(n-r) - 2 + s - 2(m-r)(n-r) = s - 2,$$

et donc que la projection de D sur Y est de codimension supérieure ou égale à 2. □

Remarque 6.1.2 Si l'on pose $F = \mathcal{O}_X$ et $r = 0$, le résultant déterminantal est alors exactement le résultant associé au fibré vectoriel E^* défini dans [GKZ94], chapitre 3, section C. Si l'on suppose de plus que $E^* = \oplus_{i=1}^m \mathcal{L}_i$ où chacun des fibrés en droites $\mathcal{L}_i$ est très ample, le résultant déterminantal correspond alors au résultant mixte ([GKZ94], chapitre 3, section A) associé aux $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, m$.

Le résultant déterminantal que nous venons de définir représente l'équation d'un diviseur, noté ∇, de l'espace projectif $Y = \mathbb{P}(H)$. Il est possible, à l'aide de la formule d'intersection dite de Thom-Porteous, d'exprimer son degré comme un polynôme en les classes de Chern des fibrés vectoriels E et F. C'est l'objet de la proposition suivante.

Si V est un fibré vectoriel sur une variété Z,

$$c_t(V) = 1 + c_1(V)t + c_2(V)t^2 + \dots$$

désigne son polynôme de Chern. On définit le polynôme de Chern du fibré virtuel $-V$ par

$$c_t(-V) = \frac{1}{c_t(V)} = 1 - c_1(V)t + (c_1^2(V) - c_2(V))t^2 + \dots .$$

Pour toute série formelle

$$c(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k t^k,$$

on pose

$$\Delta_{p,q}(c) = det \begin{pmatrix} c_p & \dots & c_{p+q-1} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{p-q+1} & \dots & c_p \end{pmatrix}.$$

Proposition 6.1.3 *Soit r un entier positif tel que $m \geq n > r \geq 0$. On suppose que X est une variété projective irréductible de dimension $(m - r)(n - r) - 1$. Soit $f(t, \alpha)$ le polynôme en deux variables défini par*

$$f(t, \alpha) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k-i}{m-i} c_i(E)(-\alpha)^{k-i} \right) t^k.$$

Alors, le degré du résultant déterminantal de E dans F sur X est donné par les deux formules équivalentes

$$\int_X \frac{\partial}{\partial_\alpha} \Delta_{n-r,m-r}(c_t(F)/f(t, \alpha))(0)$$

et

$$(-1)^{(m-r)(n-r)} \int_X \frac{\partial}{\partial_\alpha} \Delta_{m-r,n-r}(f(t,\alpha)/c_t(F))(0),$$

où $\frac{\partial}{\partial_\alpha}$ *désigne la dérivation partielle en la variable* α.

Preuve. On reprend ici les notations de la preuve du théorème 6.1.1. La variété d'incidence

$$W = \{(x,\varphi) \in X \times Y \ : \ \mathrm{rang}(\varphi(x)) \leq r\} \subset X \times Y,$$

où $H = \mathrm{Hom}(E,F)$ est munie de deux projections naturelles

$$X \xleftarrow{p} W \xrightarrow{q} Y.$$

On a montré que le morphisme q est birationnel sur son image qui est exactement la variété ∇ de Y définie par le résultant déterminantal. On a également montré que $W \subset X \times Y$ était irréductible de dimension $s-1$, c'est-à-dire de codimension $(m-r)(n-r)$.

On note à présent p et q les deux projections

$$X \xleftarrow{p} X \times Y \xrightarrow{q} Y,$$

et on considère le fibré $p^*(\mathcal{H}om(E,F)) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(1))$ sur $X \times Y$. L'espace vectoriel des sections globales de ce fibré est naturellement identifié avec $\mathrm{End}(H)$, les endomorphismes d'espaces vectoriels de H dans lui-même. Soit

$$\sigma : p^*(E) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(-1)) \longrightarrow p^*(F)$$

la section du fibré $p^*(\mathcal{H}om(E,F)) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(1))$ correspondant à l'endomorphisme identité. Sa $r^{\text{ième}}$ variété déterminantale, définie par

$$\mathcal{D}_r(\sigma) = \{(x,f) \in X \times Y : \mathrm{rang}(\sigma(x,f)) \leq r\},$$

est exactement la variété d'incidence W puisque $\sigma(x,f) = f(x)$. Comme $W = \mathcal{D}_r(\sigma)$ est de codimension $(m-r)(n-r)$, on a

$$q_*(c_{(m-r)(n-r)}(\mathcal{D}_r(\sigma))) = d.h$$

où h est l'hyperplan générique de Y, et donc générateur de son anneau de Chow, et où d est le degré du résultant déterminantal.

La variété $\mathcal{D}_r(\sigma)$ est de codimension $(m-r)(n-r)$, qui est sa codimension attendue puisque les fibrés $\mathcal{E} = p^*(E) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(-1))$ et $\mathcal{F} = p^*(F)$ sur $X \times Y$ sont respectivement de rang m et n. Par conséquent, la formule de Thom-Porteous (voir [Ful84], théorème 14.4) nous donne

$$\begin{aligned} c_{(m-r)(n-r)}(\mathcal{D}_r(\sigma)) &= \Delta_{n-r,m-r}(c_t(\mathcal{F}-\mathcal{E})) \\ &= (-1)^{(m-r)(n-r)} \Delta_{m-r,n-r}(c_t(\mathcal{E}-\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Le polynôme de Chern du fibré $\mathcal{E}$ s'écrit aussi, notant $\alpha = q^*(h)$,

$$c_t(\mathcal{E}) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{k} \mathbf{C}_{m-i}^{k-i} c_i(p^*(E))(-\alpha)^{k-i} \right) t^k.$$

On peut donc voir $c_{(m-r)(n-r)}(\mathcal{D}_r(\sigma))$ comme un polynôme en la variable α, le degré d du résultant déterminantal est donc égal à la projection sur Y du coefficient en α, c'est-à-dire

$$\int_Y q_* \left(\frac{\partial}{\partial_\alpha} \left(\Delta_{n-r,m-r}(c_t(\mathcal{F} - \mathcal{E})) \right)(0) \right),$$

où $\int_Y$ désigne l'application degré sur Y. Comme p^* commute avec les classes de Cherns, la formule de projection donne

$$\int_Y q_* \circ p^* \left(\frac{\partial}{\partial_\alpha} \Delta_{n-r,m-r}(c_t(F - E))(0) \right) = \int_X \frac{\partial}{\partial_\alpha} \Delta_{n-r,m-r}(c_t(F - E))(0).$$

□

Remarque 6.1.4 Dans le cas $F = \mathcal{O}_X$ et $r = 0$, le résultat précédent montre que le degré du résultant déterminantal est alors

$$(-1)^{m-1} \int_X c_{m-1}(E) = c_{m-1}(E^*),$$

ce qui correspond bien au cas d'un résultant associé à un fibré vectoriel très ample (voir [GKZ94], chapitre 3, théorème 3.10).

6.2 Résolution d'une variété déterminantale

Dans ce paragraphe on s'intéresse au problème suivant : étant donné deux fibrés vectoriels E et F sur un schéma X et un morphisme suffisamment générique $\varphi : E \to F$, décrire le lieu des points Y où le rang de φ est inférieur ou égal à un entier r donné; plus précisemment, définir un complexe exact $L(\varphi, r)^\bullet$ de fibrés vectoriels sur X, qui résout le fibré trivial sur Y, $\mathcal{O}(Y)$. Ce problème à été résolu par Alain Lascoux dans son article intitulé *"Syzygies des variétés déterminantales"*, [Las78]. La stratégie utilisée par ce dernier est de remarquer que Y est birationnel à un sous-schéma Z d'une grassmannienne G au-dessus de X, c'est-à-dire il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \pi\downarrow \\ Y & \longrightarrow & X, \end{array}$$

tel que la restriction de π à Z est birationnelle, et tel que $\mathcal{O}_Z$ admet une résolution $K^\bullet$ sur G (cette résolution est le complexe de Koszul d'une section d'un fibré sur G). L'auteur étudie alors la suite spectrale liée à la projection du complexe $K^\bullet$ sur X, et construit ainsi une résolution de $\mathcal{O}_Y$ sur X.

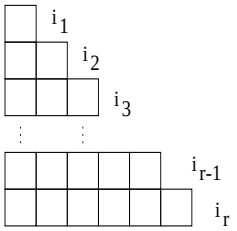
Dans ce qui suit, nous rassemblons les éléments nécessaires pour la compréhension des résultats obtenus par Alain Lascoux. Avant de donner la résolution $L(\varphi, r)^\bullet$ qui nous intéressera par la suite, nous rappelons quelques définitions sur les partitions et les foncteurs de Schur, qui sont à la base de la définition du complexe $L(\varphi, r)^\bullet$.

6.2.1 Partitions et Foncteurs de Schur

Partitions

Soit r un entier. Une *partition* est un r-uplet $I = (i_1, \dots, i_r) \in \mathbb{N}^r$ tel que $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_r$; sa longueur est le nombre de ses éléments non nuls, et son poids, noté $|I|$, est $i_1 + \dots + i_r$. On identifiera deux partitions qui diffèrent par adjonction de zéros sur la gauche. Cependant il sera utile de considérer la partition $(0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^r$ que nous noterons O_r.

Une partition est habituellement représentée par un intervalle de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, son *diagramme de Ferrer*; la première ligne contient i_r cases, la deuxième ligne i_{r-1} cases, et ainsi de suite, ce qui donne :



Une partition J est *contenue* dans I, noté $J \subseteq I$, si c'est vrai pour leurs diagrammes de Ferrer.

Sur l'ensemble des partitions, on définit une involution, l'*adjonction*, qui a une partition I associe la partition $I^\star$. Sur les diagrammes de Ferrer, c'est la symétrie qui échange les axes de coordonnées; par exemple $(1, 2, 4)^\star = (1, 1, 2, 3)$.

Si I et J sont deux partitions $(i_1, \dots, i_r)$ et $(j_1, \dots, j_q)$ telles que $i_r \leq j_1$, la concaténation $IJ = (i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_q)$ est une partition. On peut étendre cette opération. Soient r et q deux entiers, $I \in \mathbb{Z}^r$, $J \in \mathbb{Z}^q$, et considérons l'ensemble $\{i_1, i_2+1, \dots, i_r+r-1, j_1+r, \dots, j_q+r+q-1\}$. Si tous ces nombres sont positifs et distincts, cet ensemble peut s'écrire de manière unique comme $\{h_1, \dots, h_{r+q}+r+q-1\}$, avec $H = (h_1, \dots, h_{r+q})$ une partition. On dit alors que H est la *concaténation* de I et J, d'*amplitude* $n(I, J)$, nombre minimum de transpositions pour redresser le premier ensemble en le second. Dans le cas contraire, on pose $conc(I, J) = \emptyset$, et $n(I, J) = \infty$.

Tabloïdes - Tableaux de Young

Soit E un ensemble, I une partition. Un *tabloïde* de diagramme I à valeurs dans E est un remplissage du diagramme de I avec des éléments de E.

Soit τ un tabloïde, μ une permutation des cases du diagramme I. On désigne par τ^μ le tabloïde induit par cette permutation. On définit ainsi $Tabl_I E$ comme le $\mathbb{Z}$-module libre de base tous les tabloïdes de diagramme I.

Supposons à présent que l'ensemble E est muni d'un ordre total. Un *tableau de Young* de diagramme I est un tabloïde de diagramme I tel que chaque colonne lue de bas en haut soit une suite strictement croissante, et chaque ligne, de gauche à droite, une suite croissante.

Foncteurs de Schur

Soit E un espace vectoriel, r un entier, I un élément de $\mathbb{N}^r$. On désigne par $S^I E$ le produit tensoriel $S^{i_1}E \otimes \ldots \otimes S^{i_r}E$, où $S^\bullet E$ est l'algèbre symétrique de E. De même $\wedge^I E = \wedge^{i_1}E \otimes \ldots \otimes \wedge^{i_r}E$, où $\wedge^\bullet E$ est l'algèbre extérieur de E.

On peut représenter les éléments de $S^i E$ par des tabloïdes lignes, et les éléments de $\wedge^i E$ par des tabloïdes colonnes (il n'y a pas unicité du tabloïde en général). Soit I une partition et $J = I^\star$ sont adjointe, on obtient ainsi des morphismes naturels

$$\psi_S : Tabl_I E \to S^I E$$

$$\psi_\wedge : Tabl_I E \to \wedge^J E$$

qui sont fournis par la lecture des lignes ou des colonnes d'un tabloïde de diagramme I.

Soit ρ'_I l'endomorphisme de $Tabl_I E$

$$\begin{array}{ccc} Tabl_I E & \to & Tabl_I E \\ \tau & \mapsto & \sum_\mu (-1)^\mu \tau^\mu \end{array}$$

où la somme est faite sur toutes les permutations μ préservant les colonnes du diagramme, avec $(-1)^\mu = \text{signature}(\mu)$. Il existe alors un unique morphisme qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} Tabl_I E & \xrightarrow{\rho'_I} & Tabl_I E \\ {\scriptstyle \psi_\wedge}\downarrow & & {\scriptstyle \psi_S}\downarrow \\ \wedge^J E & \xrightarrow{\rho_I} & S^I E. \end{array}$$

Choisissant un ordre total sur une base de E, on montre que l'image de l'application ρ_I est un espace vectoriel de base les images des tableaux de Young par l'application composée $\psi_S \circ \rho'_I$.

Cette construction pour un espace vectoriel E s'étend aisément au cas d'un fibré vectoriel E sur un schéma X. On définit ainsi le *foncteur de Schur d'indice* I (de la catégorie des fibrés vectoriels sur X dans elle-même), que l'on note indifféremment S_I ou $\wedge_J$, comme le foncteur image de $\wedge^J$ dans S^I par ρ_I (on pose $S_\emptyset = 0$).
Il faut remarquer ici que si la longueur de I est strictement plus grande que le rang de E, alors $S_I E = 0$, puisque $\wedge^{lg(l)} E = 0$.

6.2.2 La résolution

Soient E et F deux fibrés vectoriels de rang respectif m et n, $m \geq n$, sur un schéma X, et φ un morphisme entre eux, $\varphi : E \to F$. Soit r un entier strictement inférieur à n, et soit Y le sous-schéma de X défini par

$$Y = \{x \in X : \mathrm{rang}(\varphi) \leq r\}.$$

Son fibré trivial, $\mathcal{O}_Y$, est défini comme $\mathrm{coker}(\varphi')$, avec

$$\varphi' : \wedge^{r+1} E \otimes \wedge^{r+1} F^* \to \mathcal{O}_X,$$

canoniquement associée au morphisme $\wedge^{r+1}\varphi$.
On considère à présent la grassmannienne relative $G = G_r(F) \xrightarrow{\pi} X$ des quotients de rang $q = n - r$ de F, et

$$0 \to S \to \pi^*(F) \to Q \to 0$$

sa suite exacte tautologique. Soit Z le sous-schéma de $G_r(F)$ des zéros du morphisme composé $\pi^* E \to \pi^* F \to Q$, i.e. $\mathcal{O}_Z$ est défini comme le conoyau de l'application induite $\psi : \pi^* E \otimes Q^* \to \mathcal{O}_G$. On suppose que Z est *localement intersection complète*, c'est-à-dire que le complexe de Koszul associé à ψ,

$$0 \to K^{-m(n-r)} \to \ldots \to K^p = \wedge^{-p}(\pi^* E \otimes Q^*) \to \ldots \to K^0 = \mathcal{O}_G,$$

est exact (cette hypothèse implique que la restriction de π à $Z \to Y$ est birationnelle). On peut alors construire un complexe $L(\varphi, r)^\bullet$ à partir de la suite spectrale non dégénérée

$$\mathcal{E}^{s,t} = \mathcal{R}^t \pi_*(\wedge^{-s}(\pi^* E \otimes Q^*)),$$

en posant $L^p = \bigoplus_{s+t=p} \mathcal{E}^{s,t}$.
Notant $n(I) = n(I, O_r)$, et $I' = conc(I, O_r)$, la formule dite de Cauchy, et le théorème de Bott (voir [Las78]) montrent que

$$L^p = \bigoplus_{s+t=p} \mathcal{E}^{s,t} = \bigoplus_{-|I|+n(I)=p} \wedge_I E \otimes S_{I'} F^*,$$

où $S_{I'}F^* = \mathcal{R}^{n(I)}\pi_*(S_IQ^*)$ (ce qui implique que I doit être de longueur inférieur ou égal à q pour que $S_{I'}F^*$ soit non nul). Le lemme suivant donne une description explicite de I' et $n(I)$:

Lemme 6.2.1 ([Las78], 5.10) *Soit $I = (i_1, \dots, i_q)$, et soit $p(I)$ la dimension du plus grand carré contenu dans le diagramme de I, alors :*

- *$p = p(I)$ est tel que $i_{q-p} + q - p - 1 \leq n - 1$ et $i_{q-p+1} + q - p \geq n$,*
- *Si $i_{q-p+1} < p + r$ alors $I' = \emptyset$,*
- *Si $i_{q-p+1} \geq p + r$ alors $n(I) = pr$ et*

$$I' = (i_1, \dots, i_{q-p}, \underbrace{p, \dots, p}_{r}, i_{q-p+1} - r, \dots, i_q - r).$$

Il faut à présent relier les termes L^p pour obtenir le complexe $L(\varphi, r)^\bullet$. Le lemme 5.13 de [Las78] nous dit que si (I, H) est un couple de partitions tel que $H \subset I$, $H' \neq \emptyset$, $I' \neq \emptyset$ et $|I| - n(I) = |H| - n(H) - 1$, alors I et H ont mêmes parts respectives, excepté une, de même que $I'^\star$ et $H'^\star$, i.e.

$$I = \bullet - \bullet\, i\, \bullet - \bullet,\ I'^\star = \circ - \circ\, i'\, \circ - \circ,$$

$$H = \bullet - \bullet\, h\, \bullet - \bullet,\ H'^\star = \circ - \circ\, h'\, \circ - \circ,$$

où $\bullet - \bullet$ (resp. $\circ - \circ$) est l'ensemble de coïncidence de I et H (resp. $I'^\star$ et $H'^\star$). Pour un tel couple (I, H) on définit ainsi le morphisme

$$\psi_{I,H} : \wedge_I E \otimes S_{I'}F^* \to \wedge_H E \otimes S_{H'}F^*$$

comme le composé des injections et surjections naturelles (provenant de la formule dite de Pieri, [Las78] (1.5.3)), et du morphisme de contraction

$$d_s : \wedge^i E \otimes \wedge^{i'} F \to \wedge^{i-h} E \otimes \wedge^h E \otimes \wedge^{i'-h'} F^* \otimes \wedge^{h'} F^* \to \wedge^h E \otimes \wedge^{h'} F,$$

(avec $s = i - h = i' - h'$) :

$$\wedge_I E \otimes \wedge_{I'} F \longrightarrow \wedge_{\bullet-\bullet} E \otimes \wedge^i E \otimes \wedge^{i'} F^* \otimes \wedge_{\circ-\circ} F^*$$

$$\xrightarrow{d_s} \wedge_{\bullet-\bullet} E \otimes \wedge^h E \otimes \wedge^{h'} F^* \otimes \wedge_{\circ-\circ} F^* \longrightarrow \wedge_H E \otimes \wedge_{H'} F.$$

Pour tout couple (I, H) tel que H n'est pas contenu dans I, on pose $\psi_{I,H} = 0$. Ainsi on définit les différentielles du complexe $L(\varphi, r)^\bullet$ par :

$$L^p = \bigoplus_{-|I|+n(I)=p} \wedge_I E \otimes S_{I'}F^* \xrightarrow{\psi_p = \oplus \psi_{I,H}} L^{p+1} = \bigoplus_{-|H|+n(H)=p+1} \wedge_H E \otimes S_{H'}F^*.$$

Le complexe $L(\varphi, r)^\bullet$ que l'on obtient ainsi est tel que $L^0 = \mathcal{O}_X$, et le terme le plus à gauche correspond à la partition $I = (\underbrace{m, \dots, m}_{q})$ pour laquelle $n(I) = qr$, c'est-à-dire L^{qr-mq}. On en déduit que le complexe $L^\bullet$ a même

longueur que la codimension de Y, et donc que Y est Cohen-Macaulay si X l'est.

Théorème 6.2.2 [Las78] *On suppose que le sous-schéma Z de $G_r(F)$ est localement intersection complète, alors le complexe $L(\varphi, r)^\bullet$ est une résolution minimale de $\mathcal{O}_Y$.*

Explicitation du morphisme $L^{-1} \to \mathcal{O}_X$

Le lemme 6.2.1 décrit les couples de partitions (I, I') tels que $|I| - n(I) = 1$. En fait, pour que I' soit non nulle, il faut que $i_{p-q+1} \geq p + r$, et donc on a $|I| \geq p(p + r)$. Comme dans ce cas $n(I) = pr$, la seule partition I telle que $|I| - n(I) = 1$ et $I' \neq 0$ est la partition ligne $I = (r + 1)$. Sa partition associée I' est alors la partition colonne $I' = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r+1})$, et donc on en déduit que $L^{-1} = \wedge^{r+1} E \otimes \wedge^{r+1} F^*$. Le morphisme $L^{-1} \to L^0 = \mathcal{O}_X$ se réduit alors, toujours par description du complexe, au morphisme de contraction $\wedge^{r+1} E \otimes \wedge^{r+1} F^* \to \mathcal{O}_X$ associé au morphisme $\wedge^{r+1}\varphi$. On vérifie donc bien que le conoyau de $L^{-1} \to \mathcal{O}_X$ est $\mathcal{O}_Y$.

Cas des mineurs maximaux

On s'intéresse au cas $r = n - 1$, i.e. $q = 1$. Soit s un entier fixé, compris entre 1 et $m - n + 1$, on cherche à déterminer les couples de partitions (I, I') tels que $I \neq \emptyset$, $I' \neq \emptyset$ et $|I| - n(I) = s$. Comme $q = 1$, I est toujours une partition ligne (i_1), et donc $p(I) = 1$. De plus, pour que I' soit non nulle, il faut $i_1 \geq n$, et alors $n(I) = n - 1$. On déduit donc que $I = (n + s - 1)$, et $I' = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r-1}, s)$. On obtient ainsi

$$L^{-s} = \wedge^{n+s-1} E \otimes S^{s-1} F^* \otimes \wedge^n F^*.$$

On vérifie alors que le complexe que l'on obtient dans le cas $q = 1$ est le complexe bien connu dit de Eagon-Northcott (voir [BV80]).

6.3 Calcul du résultant déterminantal

Au paragraphe 6.1 nous avons défini la notion de résultant déterminantal qui fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un morphisme entre deux fibrés vectoriels sur une variété projective X soit de rang inférieur ou égal à un entier donné en au moins un point. Dans ce qui suit nous allons montrer que tout comme le résultant d'un fibré vectoriel très ample, le résultant déterminantal s'exprime comme le déterminant d'un certain complexe. Pour cela l'idée principale est d'obtenir une résolution de la variété d'incidence, ce que nous produirons grâce aux résultats de la section précédente, puis de la projeter sur l'espace des paramètres.

X est toujours une variété irréductible projective de dimension $(m-r)(n-r)-1$ sur un corps algébriquement clos $\mathbb{K}$, où m, n et r sont trois entiers positifs tels que $m \geq n > r \geq 0$. Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X de rang respectif m et n. On suppose que pour tout $z \in \mathcal{H}_2(X)$ le morphisme de restriction $H \longrightarrow H^0(z, \mathcal{H}om(E,F)_{|z})$ est surjectif. Alors, d'après le théorème 6.1.1 le résultant déterminantal, noté $\mathrm{Res}_{X,E,F}$ existe; pour tout $\varphi \in Y = \mathbb{P}(H)$, il vérifie

$$\mathrm{Res}_{X,E,F}(\varphi) = 0 \Longleftrightarrow X_r(\varphi) \neq \emptyset,$$

et définit un diviseur ∇ de Y.

On note p et q les deux projections

$$X \xleftarrow{p} X \times Y \xrightarrow{q} Y,$$

et on considère la variété d'incidence

$$W = \{(x, \varphi) \in X \times Y \ : \ \mathrm{rang}\varphi(x) \leq r\} \subset X \times Y.$$

D'après la preuve de la proposition 6.1.3, on sait que la section canonique

$$\sigma : p^*(E) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(-1)) \longrightarrow p^*(F)$$

du fibré vectoriel $p^*(\mathcal{H}om(E,F)) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(1))$ sur $X \times Y$, est telle que sa $r^{\text{ième}}$ variété déterminantale, définie par

$$\mathcal{D}_r(\sigma) = \{(x, \varphi) \in X \times Y : \mathrm{rang}(\sigma(x, \varphi)) \leq r\},$$

est exactement la variété d'incidence W, qui est de codimension $(m-r)(n-r)$. Cette section peut-être vue comme la "section universelle" puisque la restriction de σ à une fibre $X \times \{\varphi\}$ est juste la section $\varphi \in Y$. Pour alléger les notations, on pose $E' = p^*(E) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(-1))$ et $F' = p^*(F)$, qui sont deux fibrés vectoriels sur $X \times Y$, de rang respectif m et n.

On considère à présent la grassmannienne relative

$$\pi : G_r(F') \to X \times Y,$$

des quotients de rang $n-r$, qui est isomorphe à $G_r(F) \times Y$. Notant

$$0 \to S \to \pi^*(F') \to Q \to 0$$

sa suite exacte tautologique, on définit le sous-schéma fermé Z de $G_r(F')$ comme les zéros du morphisme composé :

$$\sigma^\sharp \ : \ \pi^*(E') \xrightarrow{\pi^*(\sigma)} \pi^*(F') \to Q.$$

Le morphisme $\sigma^\sharp$ est donc une section du fibré $\pi^*(E')\otimes Q^*$ de rang $m(n-r)$. On obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Z & \longrightarrow & G_r(F)\times Y \\ {\scriptstyle \pi_{|Z}}\big\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\big\downarrow \\ \mathcal{D}_r(\sigma) & \longrightarrow & X\times Y, \end{array}$$

où les deux flèches horizontales sont les injections canoniques. Le morphisme $\pi_{|Z}$, restriction de π à Z, est birationnel et donc Z est de codimension $m(n-r)$, c'est-à-dire de codimension le rang du fibré $\pi^*(E')\otimes Q^*$. Si l'on montre que Z est localement intersection complète, c'est-à-dire que le complexe de Koszul associé à $\sigma^\sharp$,

$$0\to K^{-m(n-r)}\to\ldots\to K^p=\wedge^{-p}(\pi^*E\otimes Q^*)\to\ldots\to K^0=\mathcal{O}_{G_r(F')},$$

est exact, alors le théorème 6.2.2 nous donne une résolution de $\mathcal{O}_W$ par des fibrés vectoriels sur $X\times Y$, à savoir le complexe $L(\sigma,r)^\bullet$ (voir paragraphe 6.2.2).

Lemme 6.3.1 *Sous les hypothèses du théorème 6.1.1, Z est localement intersection complète.*

Preuve. Comme la variété Y est lisse, on déduit que la projection τ : $G_r(F)\times Y\to G_r(F)$ est un morphisme lisse. La restriction $\tau_{|Z}:Z\to G_r(F)$ est donc un morphisme plat. Sa fibre géométrique au point (x,V_x), où V_x est un sous-espace vectoriel de dimension r de F_x, s'identifie à l'ensemble des morphismes $f\in Y$ tels que $\mathrm{Im}(f(x))\subset V_x$; cette fibre est donc lisse. On en déduit donc que le morphisme $\tau_{|Z}:Z\to G_r(F)$ est lisse (voir [Har77], théorème III,10.2). De plus, la restriction de $\sigma^\sharp$ à chacune de ses fibres géométriques est clairement transverse à la section nulle; comme la codimension de Z est égale au rang de $\pi^*(E')\otimes Q^*$, on en déduit que le complexe de Koszul associé à $\sigma^\sharp$ est exact (voir [GKZ94], proposition II,1.4), et donc que Z est localement intersection complète. □

On déduit donc que le complexe $L(\sigma,r)^\bullet$ est une résolution de $\mathcal{O}_W$ sur $X\times Y$. Ce complexe est de la forme

$$\ldots\to\bigoplus_{-|I|+n(I)=p}\wedge_I E'\otimes S_{I'}F'^*\to\ldots\to\mathcal{O}_{X\times Y}.$$

Soit $\mathcal{M}$ un fibré en droite sur X. On note par $\mathcal{L}^\bullet$ le complexe $L(\sigma,r)^\bullet\otimes p^*(\mathcal{M})$; c'est une résolution de $\mathcal{O}_W\otimes p^*(\mathcal{M})$. Le complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{O}_{X\times Y}$-modules induit le complexe $q_*(\mathcal{L}^\bullet)$ de $\mathcal{O}_Y$-modules. Le terme le plus à droite de ce complexe est

$$q_*(\mathcal{L}^0)=q_*(\mathcal{O}_{X\times Y}\otimes p^*(\mathcal{M}))=\mathcal{O}_Y\otimes H^0(X,\mathcal{M}),$$

et pour tout $p = -1, \dots, -(m-r)(n-r)$,

$$q_*(\mathcal{L}^p) = q_*\left(\bigoplus_{-|I|+n(I)=p} \wedge_I (p^*(E) \otimes q^*(\mathcal{O}(-1))) \otimes S_{I'}(p^*(F)) \otimes p^*(\mathcal{M})\right)$$

$$= \bigoplus_{-|I|+n(I)=p} q_*\left(\wedge_I(p^*(E)) \otimes q^*(\mathcal{O}(-1))^{\otimes|I|} \otimes S_{I'}(p^*(F)) \otimes p^*(\mathcal{M})\right)$$

$$= \bigoplus_{-|I|+n(I)=p} q_*\left(p^*(\wedge_I(E) \otimes S_{I'}(F) \otimes \mathcal{M}) \otimes q^*(\mathcal{O}_Y(-1))^{\otimes|I|}\right)$$

$$= \bigoplus_{-|I|+n(I)=p} H^0(X, \wedge_I(E) \otimes S_{I'}(F) \otimes \mathcal{M}) \otimes \mathcal{O}_Y(-|I|).$$

Remarque 6.3.2 La définition des foncteurs de Schur que nous avons donnée montre immédiatement que si I est une partition, E un fibré vectoriel et L un fibré en droite, alors $\wedge_I(E \otimes L) \simeq L^{\otimes|I|} \otimes \wedge_I(E)$.

Nous dirons que le fibré inversible $\mathcal{M}$ *stabilise* le complexe $q_*(\mathcal{L}^\bullet)$, si pour tout $p = 0, \dots, -(m-r)(n-r)$, et toute partition I telle que $-|I|+n(I) = p$, tous les groupes de cohomologie $H^i(X, \wedge_I(E) \otimes S_{I'}(F) \otimes \mathcal{M})$ sont nuls pour $i > 0$. Sous cette hypothèse, nous allons montrer que le complexe $q_*(\mathcal{L}^\bullet)$ est exact, sauf en degré 0. Pour cela considérons une résolution $I^{\bullet\bullet}$ injective du complexe $\mathcal{L}^\bullet$. On peut choisir cette résolution

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & I^{-(m-r)(n-r),s} & \to & \dots & \to & I^{0,s} & \to & J^s & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & I^{-(m-r)(n-r),0} & \to & \dots & \to & I^{0,0} & \to & J^0 & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathcal{L}^{-(m-r)(n-r)} & \to & \dots & \to & \mathcal{L}^0 & \to & \mathcal{O}_W \otimes p^*(\mathcal{M}) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

de telle sorte que :

- Le complexe $J^\bullet$ est une résolution injective de $\mathcal{O}_W \otimes p^*(\mathcal{M})$,
- Chacun des complexes “colonne” est exact,
- Chacun des complexes “ligne” est exact (puisque $\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution de $\mathcal{O}_W \otimes p^*(\mathcal{M})$).

Il existe deux suites spectrales qui convergent vers l'image hyper-directe du complexe $\mathcal{L}^\bullet$, $\mathbb{R}^i q_*(\mathcal{L}^\bullet)$, qui est par définition le $i^{\text{ième}}$ faisceau de cohomologie du complexe total associé au double complexe $q_*(I^{\bullet\bullet})$. Ces deux suites spectrales correspondent respectivement aux filtrations par colonnes et par lignes de ce double complexe $q_*(I^{\bullet\bullet})$.

La première suite spectrale est de la forme

$$E_1^{p,q} = R^q q_*(\mathcal{L}^p) \Rightarrow \mathbb{R}^i q_*(\mathcal{L}^\bullet).$$

La cohomologie des colonnes du double complexe $q_*(I^{\bullet\bullet})$ est nulle pour $q > 0$ puisque l'on a supposé que $\mathcal{M}$ stabilise le complexe $q_*(\mathcal{L}^\bullet)$, ce qui implique que $R^i q_*(\mathcal{L}^j) = 0$ pour $i > 0$ (en utilisant la proposition 4.2.2 de [LP97]). Cette suite spectrale dégénère ainsi au deuxième cran, et on obtient

$$E_2^{p,q} = 0 \text{ si } q \neq 0, \quad E_2^{p,0} = H^p(q_*(\mathcal{L}^\bullet)),$$

où $E_2^{p,0}$ est nul si $p > 0$. Il vient alors $\mathbb{R}^i q_*(\mathcal{L}^\bullet) = 0$ si $i > 0$, et $\mathbb{R}^i q_*(\mathcal{L}^\bullet) = H^i(q_*(\mathcal{L}^\bullet))$ si $i \leq 0$.
La deuxième suite spectrale correspond à la filtration du double complexe $q_*(I^{\bullet\bullet})$ par lignes. Chacun des complexes

$$0 \to I^{-(m-r)(n-r),i} \to \ldots \to I^{0,i} \to J^i \to 0,$$

est un complexe exact de faisceaux injectifs. On en déduit que ce complexe est scindé (soit un morphisme injectif $0 \to I \xrightarrow{s} K$, avec I un objet injectif; alors l'identité $Id : I \to I$ se relève en un morphisme $p : K \to I$ tel que $p \circ s = Id$). Appliquer le foncteur q_* à ce complexe donne donc un complexe exact scindé. Notre suite spectrale, au premier cran, est donc telle que

$$E'^{0,q}_1 = q_*(J^q), \text{ et } E'^{p,q}_1 = 0 \text{ si } p \neq 0.$$

Elle dégénère ainsi au deuxième cran, en donnant

$$E'^{p,q}_2 = 0 \text{ si } p \neq 0, \text{ et } E'^{0,q}_2 = R^q q_*(\mathcal{O}_W \otimes p^*(\mathcal{M})).$$

On en déduit donc $\mathbb{R}^i q_*(\mathcal{L}^\bullet) = 0$ si $i < 0$, et $\mathbb{R}^i q_*(\mathcal{L}^\bullet) = R^i q_*(\mathcal{O}_W \otimes p^*(\mathcal{M}))$ si $i \geq 0$.

La comparaison de ces deux suites spectrales montre alors que $H^i(q_*(\mathcal{L}^\bullet)) = 0$ si $i < 0$, et que

$$H^0(q_*(\mathcal{L}^\bullet)) = q_*(\mathcal{O}_W \otimes p^*(\mathcal{M})) = H^0(X, \mathcal{M}) \otimes q_*(\mathcal{O}_W).$$

Le complexe $q_*(\mathcal{L}^\bullet)$ est donc exact, sauf en degré 0 où sa cohomologie est égale à $H^0(X, \mathcal{M}) \otimes q_*(\mathcal{O}_W)$. On considère à présent son complexe gradué associé de $S^\bullet(H^*)$-modules que l'on note $\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet$ et qui est tel que

$$\mathcal{C}(\mathcal{M})^0 = H^0(X, \mathcal{M}) \otimes S^\bullet(H^*), \text{ et,}$$

$$C(\mathcal{M})^p = \bigoplus_{-|I|+n(I)=p} H^0(X, \wedge_I(E) \otimes S_{I'}(F) \otimes \mathcal{M}) \otimes S^\bullet(H^*).$$

On note également $\mathbf{C}(H)$ le corps des fractions de $S^\bullet(H^*)$; on a alors le théorème suivant :

Théorème 6.3.3

$$\det(\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)) = \mathrm{Res}_{X,E,F}.$$

Preuve. Le morphisme $q : W \to \nabla$ étant birationnel, le complexe $\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet$ est génériquement exact, c'est à dire que le complexe d'espaces vectoriels (de dimensions finies) $\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)$ est exact. D'après le théorème 30 de [GKZ94], on en déduit que

$$\det(\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)) = \sum_D \left(\sum_i (-1)^i \mathrm{mult}_{(Z_D)}(H^i(\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet) \right) .D,$$

où la somme est prise sur tous les polynômes irréductibles D de $S^\bullet(H^*)$, et où $\mathrm{mult}_{(Z_D)}$ désigne la multiplicité le long de l'hypersurface irréductible associée au polynôme D. Les résultats de [Ser55] permettent de montrer que tous les modules $H^i(\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet)$ pour $i \neq 0$ sont supportés sur l'idéal irrelevant et donc que

$$\det(\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)) = \sum_D \mathrm{mult}_{(Z_D)} H^0(q_*(\mathcal{L}^\bullet)).D.$$

En utilisant à nouveau que l'application q est birationnelle de W sur la variété résultante $q(W) = \nabla$, on déduit alors le théorème. □

On peut ainsi ramener le calcul effectif du résultant déterminantal à celui d'un calcul de déterminant d'un complexe. Le résultat le plus effectif est donné par le théorème 34 de [GKZ94] qui montre que le déterminant du complexe $\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)$ est le plus grand commun diviseur des mineurs maximaux de la matrice de l'application

$$\mathcal{C}(\mathcal{M})^{-1} \otimes \mathbf{C}(H) \to \mathcal{C}(\mathcal{M})^0 \otimes \mathbf{C}(H),$$

provenant du complexe $\mathcal{C}(\mathcal{M})^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)$.

Remarque 6.3.4 Le théorème 6.3.3 généralise ainsi la construction donnée pour le résultant d'un fibré vectoriel très ample dans [GKZ94]. En effet le complexe que nous obtenons ici dégénère en un complexe de Koszul de la section universelle du fibré vectoriel $\mathrm{Hom}(E, \mathcal{O}_X)$, en supposant $F = \mathcal{O}_X$ et $r = 0$.

Dans le paragraphe suivant, nous allons expliciter les résultats que nous venons d'obtenir dans le cas où X est un espace projectif, et où les fibrés vectoriels E et F sont tels que

$$E = \bigoplus_i \mathcal{O}(-d_i),\ F = \bigoplus_j \mathcal{O}(-k_j),$$

où les d_i et les k_j sont des entiers positifs.

6.4 Résultant déterminantal multivarié

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas particulier, et effectif, du résultant déterminantal sur $X = \mathbb{P}^{(m-r)(n-r)-1}$, où m, n et r sont trois entiers positifs tels que $m \geq n > r \geq 0$, et où les fibrés vectoriels E et F sont donnés par

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{O}_X(-d_i),\ F = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{O}_X(-k_j),$$

les entiers d_i et k_j (pas forcément positifs) vérifiant $d_i > k_j$ pour tout i, j. L'espace vectoriel $H = \mathrm{Hom}(E, F)$ s'identifie alors avec l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times m$ dont l'entrée i, j est un polynôme homogène sur X, de degré $d_j - k_i$, i.e. les matrices

$$\begin{pmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \dots & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \dots & h_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & \dots & h_{n,m} \end{pmatrix},$$

où $h_{i,j} \in H^0(X, \mathcal{O}(d_j - k_i))$. D'après le théorème 6.1.1, le résultant déterminantal $\mathrm{Res}_{X,E,F}$ existe, et s'annule pour toute telle matrice dont le rang est inférieur ou égal à r en au moins un point de X.

Remarque 6.4.1 Le cas $n = 1$, $r = 0$ (et $k_1 = 0$) correspond ainsi au résultant multivarié étudié par J.P. Jouanolou dans [Jou91].

Tout comme il existe une formule close pour obtenir le degré du résultant multivarié, il existe également une formule close pour le degré du résultant déterminantal multivarié, donnée par la proposition 6.1.3. Cette formule est complètement explicite puisque les classes de Chern des fibrés E et F sont données par les formules :

$$c_t(E) = \prod_{i=1}^{m}(1 - d_i t) \ \text{ et } c_t(F) = \prod_{i=1}^{n}(1 - k_i t).$$

D'après le théorème 6.3.3 ce résultant déterminantal peut-être calculé comme le déterminant du complexe défini dans la section précédente. Le fibré en droite $\mathcal{M}$ que nous avons introduit devient explicite dans notre cas. En effet, ce fibré inversible $\mathcal{M}$ doit être choisi de telle sorte que

$$H^i(X, \wedge_I(E) \otimes S_{I'}(F^*) \otimes \mathcal{M}) = 0,$$

pour tout $i > 0$, et toute partition I telle que $-|I| + n(I) = p$. Les entiers $d_j - k_i$ étant tous positifs, on en déduit qu'il suffit que $\mathcal{M}$ stabilise le terme le plus à gauche du complexe $\mathcal{L}^\bullet$ pour stabiliser tout le complexe (propriété de la cohomologie des fibrés inversibles sur les espaces projectifs, voir [Har77], théorème III, 5.1). Ainsi, il nous faut déterminer les entiers d tels que

$$H^i(X, \wedge_I(E) \otimes S_{I'}(F^*) \otimes \mathcal{O}(d)) = 0,$$

pour tout $i > 0$, et où I est la partition $I = (\underbrace{m, \ldots, m}_{q})$.

Pour cela, il nous faut énoncer une nouvelle propriété des foncteurs de Schur, la propriété d'additivité. Si A et B sont deux fibrés vectoriels sur un schéma Z, et I une partition, alors

$$S_I(A \oplus B) \simeq \bigoplus_J S_{I/J}(A) \oplus S_J(B),$$

où la somme se limite aux partitions J contenues dans I. Si maintenant L est un fibré inversible sur Z, on en déduit, pour tout couple de partitions (I, H),

$$S_{I/H}(A \oplus L) \simeq \bigoplus_J L^{\otimes |J/H|} \otimes S_{I/J}(A),$$

la somme étant faite sur toutes les partitions J telles que

$$H \subset J \subset I, \text{ et } h_1 \leq j_1 \leq h_2 \leq j_2 \ldots .$$

On en déduit ainsi, pour $I = (\underbrace{m, \ldots, m}_{q})$, que

$$\wedge_I(E) \simeq \mathcal{O}(-q(\sum_{i=1}^{m} d_i)) \bigoplus_s \mathcal{O}(-r_s),$$

où les entiers r_s vérifient $r_s \leq q(\sum_{i=1}^{m} d_i)$.
La partition I' associée à la partition I est définie par

$$I' = (\underbrace{n-r}_{r}, \underbrace{m-r}_{q}).$$

On en déduit, en supposant que $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$,

$$S_{I'}(F^*) \simeq \mathcal{O}((n-r)(k_1 + \ldots + k_r) + (m-r)(k_{r+1} + \ldots + k_n)) \bigoplus_s \mathcal{O}(t_s),$$

où les entiers t_s vérifient $t_s \leq (n-r)(k_1+\ldots+k_r)+(m-r)(k_{r+1}+\ldots+k_n)$. La cohomologie des fibrés inversibles sur les espaces projectifs montre qu'il faut que d vérifie l'inégalité :

$$d-q(\sum_{i=1}^{m} d_i)+(n-r)(\sum_{i=1}^{n} k_i)+(m-n)(k_{r+1}+\ldots k_n) \geq -(m-r)(n-r)+1,$$

c'est-à-dire

$$d \geq q(\sum_{i=1}^{m} d_i)-(n-r)(\sum_{i=1}^{n} k_i)-(m-n)(k_{r+1}+\ldots+k_n)-(m-r)(n-r)+1.$$

On note $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$ l'entier à droite de cette dernière inégalité, c'est-à-dire

$$\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}} = q(\sum_{i=1}^{m} d_i)-(n-r)(\sum_{i=1}^{n} k_i)-(m-n)(k_{r+1}+\ldots+k_n)-(m-r)(n-r)+1.$$

Proposition 6.4.2 *Pour tout entier $d \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$, on a*

$$\det(\mathcal{C}(\mathcal{O}_X(d))^\bullet \otimes \mathbf{C}(H)) = \mathrm{Res}_{X,E,F}.$$

Remarque 6.4.3 Le résultant déterminantal est invariant si l'on tord les deux fibrés E et F par un $\mathcal{O}(l)$, pour l un entier. On vérifie par un simple calcul, que l'entier $\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$ que nous venons de définir est invariant par cette transformation, i.e.

$$\nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}(E,F) = \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}(E \otimes \mathcal{O}(l), F \otimes \mathcal{O}(l)).$$

On peut ainsi supposer que l'un des entiers d_i ou un des entiers k_j est nul.

Notant $R = \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_{(m-r)(n-r)-1}]$, la première application σ_d (la plus à droite, en degré 0), est l'application

$$\bigoplus_{i_1<\ldots<i_{r+1},\, j_1<\ldots<j_{r+1}} R_{[d-\sum_{t=1}^{r+1} d_{i_t}+\sum_{t=1}^{r+1} k_{i_t}]} e_{i_1,\ldots,i_{r+1},j_1,\ldots,j_{r+1}} \xrightarrow{\sigma_d} R_{[d]}$$

qui associe à $e_{i_1,\ldots,i_{r+1},j_1,\ldots,j_{r+1}}$ le polynôme $\Delta_{i_1,\ldots,i_{r+1},j_1,\ldots,j_{r+1}}$ qui désigne le déterminant du mineur

$$\begin{pmatrix} h_{j_1,i_1} & h_{j_1,i_2} & \ldots & h_{j_1,i_{r+1}} \\ h_{j_2,i_1} & h_{j_2,i_2} & \ldots & h_{j_2,i_{r+1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{j_{r+1},i_1} & h_{j_{r+1},i_2} & \ldots & h_{j_{r+1},i_{r+1}} \end{pmatrix},$$

$R_{[t]}$ désignant l'espace des polynômes homogènes de R de degré t. D'après les propriétés du déterminant d'un complexe (voir [GKZ94], appendice A), on déduit le résultat suivant :

Proposition 6.4.4 *Soit un entier $d \geq \nu_{\mathbf{d},\mathbf{k}}$. Tout mineur maximal non nul, de taille $\sharp R_{[d]}$, de l'application σ_d est un multiple du résultant déterminantal* $\mathrm{Res}_{X,E,F}$.
De plus, le plus grand commun diviseur de tous ces mineurs maximaux est exactement le résultant déterminantal.

Cette proposition nous fournit un algorithme pour calculer explicitement le résultant déterminantal, similaire à celui permettant le calcul du résultant multivarié à l'aide des matrices dites de Macaulay. Ces matrices de Macaulay sont en fait des mineurs maximaux de l'application σ_d dans le cas du résultant multivarié, i.e $n = 1$ et $r = 0$. Dans ce cas où le résultant déterminantal est un résultant multivarié, il est donc possible de décrire explicitement les mineurs maximaux de σ_d en spécialisant les polynômes en $x_0^{d_0}, x_1^{d_1}, \dots, x_m^{d_m}$ (voir chapitre 1, paragraphe 1.2). Il est un cas pour lequel on peut aussi trouver une spécialisation de la matrice $(h_{i,j})$ qui permette d'obtenir des mineurs maximaux de σ_d, c'est le cas $r = n - 1$. La spécialisation est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x_0^{d_1-k_1} & x_1^{d_2-k_1} & \cdots & x_{m-n}^{d_{m-n+1}-k_1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x_0^{d_2-k_2} & x_1^{d_3-k_2} & \cdots & x_{m-n}^{d_{m-n+2}-k_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_0^{d_n-k_n} & x_1^{d_{n+1}-k_n} & \cdots & \cdots & x_{m-n}^{d_m-k_n} \end{pmatrix},$$

dont on vérifie aisément que le rang est n en tout point de $X = \mathbb{P}^{m-n}$.

Enfin, pour illustrer ce résultant déterminantal et mieux comprendre ce qu'il permet de calculer, nous considérons dans ce qui suit quelques cas particuliers.

Le cas $X = \mathbb{P}^1$

Nous avons donc ici la contrainte $(m - r)(n - r) = 2$. Comme nous supposons $m \geq n > r \geq 0$, cela implique que, pour tout $r \geq 0$, il existe un résultant déterminantal sur $\mathbb{P}^1$ tel que $m = r + 2$ et $n = r + 1$. Ainsi sur $\mathbb{P}^1$, les seuls résultants déterminantaux sont ceux tels que $m = n + 1$ et $r = n - 1$, qui correspondent donc à calculer si une matrice n'est pas de rang maximum en au moins un point de $\mathbb{P}^1$. Notons que le cas $r = 0$ correspond au résultant classique de Sylvester.

Le cas $X = \mathbb{P}^2$

Nous avons ici la contrainte $(m - r)(n - r) = 3$. Comme nous supposons $m \geq n > r \geq 0$, cela implique que, pour tout $r \geq 0$, il existe un résultant déterminantal sur $\mathbb{P}^2$ tel que $m = r + 3$ et $n = r + 1$. Ainsi sur $\mathbb{P}^2$, les seuls résultants déterminantaux sont ceux tels que $m = n + 2$ et $r = n - 1$, qui correspondent donc, comme pour le cas $X = \mathbb{P}^1$, à calculer si une matrice n'est pas de rang maximum en au moins un point de $\mathbb{P}^2$. Notons également que le cas $r = 0$ correspond au résultant multivarié de trois polynômes dans $\mathbb{P}^2$.

Le cas $X = \mathbb{P}^{p-1}$, avec p premier

Ce cas généralise les deux cas précédents. En effet, on a la contrainte $(m-r)(n-r) = p$. L'entier p étant premier, cela implique que $n - r = 1$, et $m - r = p$. On est donc dans une situation où le résultant déterminantal donne uniquement une condition pour que le rang d'une matrice de taille $m = (p-1) + n$ par n, ne soit pas de rang maximum (puisque $r = n - 1$) en au moins un point de $\mathbb{P}^{p-1}$.

Le cas $X = \mathbb{P}^3$

C'est le premier cas pour lequel on n'a pas forcément $r = n - 1$. En effet, on doit vérifier l'égalité $(m-r)(n-r) = 4$. On a donc deux classes de cas possibles. La première classe donne les cas $n - r = 1$ et $m - r = 4$, pour lesquels $r = n - 1$, et qui correspondent à tester si le rang n'est pas maximum. La deuxième classe de cas correspond à $m - r = n - r = 2$. Dans ces cas, le résultant déterminantal donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice carrée de taille $r+2$ soit de rang inférieur ou égal à r en au moins un point de $\mathbb{P}^3$.

Le cas général $X = \mathbb{P}^{q-1}$

Comme nous l'avons vu dans les cas précédents, tout repose sur la décomposition en facteurs premiers de l'entier q. Ainsi, on se convainc que si $n-r$ divise q, et si $n-r \leq q/2$, alors il existe un résultant déterminantal qui donne une condition nécessaire et suffisante pour que le rang d'une matrice soit inférieur ou égal à r.

Bibliographie

[BCRS96] E. Becker, J.P. Cardinal, M.F. Roy, and Z. Szafraniec. Multivariate Bezoutians, Kronecker symbol and Eisenbud-Levin formula. In L. González-Vega and T. Recio, editors, *Algorithms in Algebraic Geometry and Applications*, volume 143 of *Prog. in Math.*, pages 79–104. Birkhäuser, Basel, 1996.

[BE77] David A. Buchsbaum and David Eisenbud. What annihilates a module? *Journal of Algebra*, 47:231–243, 1977.

[BEM00] Laurent Busé, Mohamed Elkadi, and Bernard Mourrain. Generalized resultants for unirationnal algebraic varieties. *J. of Symbolic Computation*, 59:515–526, 2000.

[BEM01] Laurent Busé, Mohamed Elkadi, and Bernard Mourrain. Resultant over the residual of a complete intersection. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 164 (1-2):35–57, 2001.

[Béz64] E. Bézout. Recherches sur les degrés des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations. *Hist de l'Aca. Roy. des Sciences*, pages 288–338, 1764.

[BKM90] Winfried Bruns, Andrew R. Kustin, and Matthew Miller. The resolution of the generic residual intersection of a complete intersection. *Journal of Algebra*, 128:214–239, 1990.

[BS87] David Bayer and Michael Stillman. A criterion for detecting m-regularity. *Invent. Math.*, 87:1–11, 1987.

[Bus01] Laurent Busé. Residual resultant over the projective plane and the implicitization problem. *proceedings ISSAC2001*, pages 48–55, 2001.

[BV80] Winfried Bruns and Udo Vetter. Determinantal rings. *Lecture Notes in Mathematics*, 1327, 1980.

[Can90] John F. Canny. Generalised characteristic polynomials. *Journal of Symbolic Computation*, 9:241–250, 1990.

[Cay48] A. Cayley. on the theory of elimination. *Cambridge and Dublin Math. Journal*, 3:116–120, 1848.

[CE93] John F. Canny and I. Emiris. An efficient algorithm for the sparse mixed resultant. *Lect. Notes in Comp. Science*, 673:89–104, 1993.

[CEU01] Marc Chardin, David Eisenbud, and Bernd Ulrich. Hilbert functions and residually s_2 ideals. *Compositio*, 125(2):193–219, 2001.

[CGM00] David A. Cox, Ronald Goldman, and Zhang Ming. On the validity of implicitization by moving quadrics for rationnal surfaces with no base points. *J. Symbolic Computation*, 29, 2000.

[Cha93] Marc Chardin. The resultant via a koszul complex. *Computational Algebraic Geometry*, 109, 1993.

[CLO96] David Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and algorithms*. Springer, 1996.

[CLO98] David Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Using algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1998.

[CM91] John F. Canny and Dinesh Manocha. A new approach for surface intersection. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 1(4):491–516, 1991.

[CM92a] John F. Canny and Dinesh Manocha. Algorithm for implicitizing rational parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 9:25–50, 1992.

[CM92b] John F. Canny and Dinesh Manocha. Implicit representation of rational parametric surfaces. *Journal of Symbolic Computation*, 13:485–510, 1992.

[Cox00] David A. Cox. Equations of parametric curves and surfaces via syzygies. *Contemporary Mathematics*, A paraitre, 2000.

[CP93] John F. Canny and P. Pedersen. An algorithm for the newton resultant. *Technical report 1394, Comp. Sciencce Dept., Cornell University*, 1993.

[CU01] Marc Chardin and Bernd Ulrich. Liaison and castelnuovo-mumford regularity. *Amer. J. Math.*, A paraitre, 2001.

[D'A01] Carlos D'Andrea. Resultants and moving surfaces. *J. of Symbolic Computation*, 31, 2001.

[DMPT01] O. Devillers, B. Mourrain, F. Preparata, and P. Trébuchet. On circular cylinders by four or five points in space. *Rapport de Recherche 4195, INRIA*, 2001.

[Eis94] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Math.* Springer-Verlag, 1994.

[EM96] M. Elkadi and B. Mourrain. Approche effective des résidus algébriques. Rapport de Recherche 2884, INRIA, Sophia Antipolis, 1996.

[EM99] M. Elkadi and B. Mourrain. A new algorithm for the geometric decomposition of a variety. In S. Dooley, editor, *Proc. Intern. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 9–16. ACM Press, New-York, 1999.

[EM00] M. Elkadi and B. Mourrain. Algorithms for residues and lojasiewicz exponents. *J. of Pure and Applied Algebra*, 153, 2000.

[EM01] M. Elkadi and B. Mourrain. *Géométrie algébrique effective en dimension 0 : de la théorie aux applications*. A paraitre, 2001.

[Ful84] W. Fulton. *Intersection theory*. Springer-Verlag, 1984.

[GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience, London-New-York, 1978.

[GKZ94] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*. Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.

[GS] Daniel R. Grayson and Michael E. Stillman. Macaulay 2, a software system for research in algebraic geometry. Available at http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.

[Hof89] Christoph M. Hoffmann. *Geometric and solid modeling : an introduction*. Morgan Kaufmann publishers, Inc., 1989.

[HU88] Craig Huneke and Bernd Ulrich. Residual intersections. *J. reine angew. Math.*, 390:1–20, 1988.

[Jou91] J.-P. Jouanolou. Le formalisme du résultant. *Adv. in Math.*, 90(2):117–263, 1991.

[Jou96] J.-P. Jouanolou. Résultant anisotrope: Compléments et applications. *The electronic journal of combinatorics*, 3(2), 1996.

[Jou97] J.-P. Jouanolou. Formes d'inertie et résultant: un formulaire. *Adv. in Math.*, 126(2):119–250, 1997.

[KSZ92] M. M. Kapranov, B. Sturmfels, and A.V. Zelevinsky. Chow polytopes et general resultants. *Duke Math. Journal*, 67:189–218, 1992.

[Kun86] E. Kunz. *Kähler differentials*. Advanced lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg and Sohn, 1986.

[Las78] A. Lascoux. Syzygies des variétés déterminantales. *Advances in Mathematics*, 30:202–237, 1978.

[Laz77] D. Lazard. Algèbre linéaire sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ et élimination. *Bull. Soc. math. France*, 105:165–190, 1977.

[Laz81] D. Lazard. Résolution des systèmes d'équations algébriques. *Theoretical Computer Science*, 15:77–110, 1981.

[Laz92] D. Lazard. Stewart platforms and gröbner bases. *Proceedings of Advance in Robot Kinematik, Ferrare, Italia*, 1992.

[LP97] J. Le Potier. *Lectures on vector bundles*, volume 54. Cambridge studies in advanced mathematics, 1997.

[Mac02] F.S. Macaulay. Some formulae in elimination. *Proc. London Math. Soc.*, 33:3–27, 1902.

[Mou96] B. Mourrain. Enumeration problems in Geometry, Robotics and Vision. In L. González and T. Recio, editors, *Algorithms in Algebraic Geometry and Applications*, volume 143 of *Prog. in Math.*, pages 285–306. Birkhäuser, Basel, 1996.

[Mou98] B. Mourrain. Computing isolated polynomial roots by matrix methods. *J. of Symbolic Computation, Special Issue on Symbolic-Numeric Algebra for Polynomials*, 26(6):715–738, 1998.

[PS93] P. Pedersen and B. Sturmfels. Product formulas for resultants and chow forms. *Math. Zeitschrift*, 214:377–396, 1993.

[RV92] F. Ronga and T. Vust. Stewart platform without computer. *Preprint*, 1992.

[SC95] T.W. Sederberg and F. Chen. Implicitization using moving curves and surfaces. *Proceedings of SIGGRAPH*, pages 301–308, 1995.

[Ser55] J.-P. Serre. Faisceaux algébriques cohérents. *Ann, Math.*, 61:197–278, 1955.

[Sha74] I.R. Shafarevitch. *Basic Algebraic Geometry.* Springer Verlag, 1974.

[SS75] G. Scheja and U. Storch. Über Spurfunktionen bei vollständigen Durschnitten. *J. Reine Angew Mathematik*, 278:174–190, 1975.

[Vas98] W.V. Vasconcelos. *Computational Methods in Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, volume 2 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer-Verlag, 1998.

Étude du résultant sur une variété algébrique

Dans ce travail de thèse une étude théorique et pratique du résultant résiduel est proposée. Ce résultant résiduel fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système algébrique possède des solutions sur une variété résiduelle obtenue par éclatement. Des méthodes effectives pour calculer ce résultant résiduel ainsi que son degré sont proposées, les résultats les plus précis étant obtenus lorsque le lieu que l'on éclate est une intersection complète ou encore une intersection complète locale projective Cohen-Macaulay de codimension deux.

Un algorithme pour résoudre le problème d'implicitisation dans le cas où la paramétrisation possède des points base localement intersection complète est explicité à l'aide du résultant résiduel. On montre également comment ce résultant résiduel permet d'obtenir la forme de Chow des points isolés d'un système algébrique.

Enfin le dernier chapitre de cette thèse présente une définition et une première étude du résultant déterminantal qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice générique soit de rang inférieur ou égal à un entier positif donné.

Mots clés : résultant, géométrie algébrique effective, intersection résiduelle, résolution de systèmes polynomiaux, implicitisation.

Study of the resultant on an algebraic variety

In this thesis a theoric and practical study of residual resultant is proposed. This residual resultant provides a necessary and sufficient condition so that an algebraic system has solutions on a residual variety obtained by blowing-up. Effective methods to compute this residual resultant as its degree are exposed, more precise results being obtained when the locus that one blows up is a complete intersection or a projective local complete intersection Cohen-Macaulay of codimension two.

An algorithm to solve the implicitization problem in case the parametrization has base points which are a local complete intersection is proposed using residual resultant. One also shows how this residual resultant allows to obtain the Chow form of the isolated points of an algebraic system.

Finally the last chapter of this thesis gives a definition and a first study of determinantal resultant which traduces a necessary and sufficient condition so that a generic matrix is of rank less or equal to a given positive integer.

Key words : resultant, effective algebraic geometry, residual intersection, resolution of algebraic polynomial systems, implicitization.

Université de Nice-Sophia Antipolis-Laboratoire J.A. Dieudonné.