



**HAL**  
open science

# Etude et construction d'un modèle de surface fondé sur la représentation par un atlas de cartes

Cédric Gerot

► **To cite this version:**

Cédric Gerot. Etude et construction d'un modèle de surface fondé sur la représentation par un atlas de cartes. domain\_other. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT: . tel-00097567

**HAL Id: tel-00097567**

**<https://theses.hal.science/tel-00097567>**

Submitted on 21 Sep 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE JOSEPH FOURIER-GRENOBLE 1  
INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES APPLIQUEES**

N° attribué par la bibliothèque

---

**THESE**

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

**Discipline : Mathématiques appliquées**

présentée et soutenue publiquement

par

**Cédric GEROT**

le 12 décembre 2001

**Titre :**

**ETUDE ET CONSTRUCTION D'UN MODÈLE DE SURFACE FONDÉ  
SUR LA REPRÉSENTATION PAR UN ATLAS DE CARTES**

**Directrice de thèse : Mme Annick MONTANVERT**

**JURY**

Monsieur	B. Lacolle, Président
Monsieur	J.-M. Morvan, Rapporteur
Monsieur	M. Neveu, Rapporteur
Monsieur	N. Rougon, Examineur
Mademoiselle	D. Attali, Co-directrice de thèse
Madame	A. Montanvert, Co-directrice de thèse



# Remerciements

Si un travail de recherche est la création d'un individu, il est également le fruit de circonstances et de rencontres qui ont permis qu'il ait lieu, et qui ont de plus façonné son auteur. Je ne saurais donc présenter mon travail de thèse sans avoir remercié ceux qui ont ainsi contribué à son existence.

Je remercie les membres de mon jury de thèse qui m'ont fait l'honneur de juger mon travail :

- Monsieur Bernard Lacolle, professeur de l'Université Joseph Fourier de Grenoble qui a accepté de présider mon jury,
- Monsieur Jean-Marie Morvan, professeur de l'Université Claude Bernard de Lyon actuellement en détachement à l'INRIA- Sophia Antipolis, qui a été rapporteur de mon mémoire et dont la précieuse lecture m'a permis de parfaire quelques définitions mathématiques,
- Monsieur Marc Neveu, professeur de l'Université de Bourgogne, qui a également rapporté sur mon mémoire et dont la lecture attentive et le sourire éclatant m'ont conforté dans ma conviction selon laquelle le métier d'enseignant-chercheur est tout aussi ennivrant que passionnant,
- Monsieur Nicolas Rougon enfin, professeur associé à l'Institut National des Télécommunications d'Evry, pour sa lecture fouillée de mon mémoire ainsi que pour la riche discussion que nous avons eue au terme de ma soutenance et qui m'a ouvert de nouveaux horizons.

Je remercie mes directrices de thèse qui ont assuré un encadrement d'une qualité rare dont tout doctorant doit rêver :

- Madame Annick Montanvert, professeur à l'Université Pierre Mendès-France de Grenoble, qui, malgré ses lourdes charges de directrice du département informatique de l'IUT 2 de Grenoble, a toujours su être présente dans les moments clés de mon doctorat,
- Mademoiselle Dominique Attali, chargée de recherche au CNRS, qui m'a proposé le sujet et qui m'a accompagné tout au long de cette aventure dans l'apprentissage du métier de chercheur scientifique qui est fait d'invention et de rigueur. Elle a su me laisser la liberté de créer et de m'approprier le sujet tout en critiquant et recadrant mon travail afin qu'il soit non seulement rigoureux mais aussi compréhensible par

autrui. Je lui en suis vraiment reconnaissant.

Je remercie monsieur Jean-Marc Chassery, directeur du Laboratoire des Images et des Signaux de Grenoble, pour m'avoir accueilli dans son équipe INFODIS du laboratoire TIMC, puis au sein du LIS.

Je tiens également à remercier madame Isabelle Boulay et monsieur Laurent Lefèvre qui ont accompagné mes premiers pas dans l'enseignement des mathématiques, ainsi que les équipes pédagogiques de Systèmes et d'Analyse fonctionnelle qui ont suivi mes premiers pas dans l'enseignement de l'informatique.

Je remercie particulièrement Dan dont le sourire chaleureux m'a aidé à passer la dernière ligne droite de mon doctorat.

Je n'oublie évidemment pas mes amis et collègues d'aventure.

Je pense à Jaco qui fut le premier à me montrer la voie. Je remercie Patrick qui partagea mon premier bureau au laboratoire TIMC et qui m'a permis par l'exemple de concevoir que le métier de chercheur pouvait être fait de gentillesse, d'humilité et de travail.

Je donne une franche accolade à Pierre et Guillaume qui m'ont accueilli au sein du désormais fameux bureau 151 du Laboratoire des Images et des Signaux. Avec eux, ma conception du métier a pris un tour quelque peu frénétique, où éclats de rire et soirées brumeuses viennent aux côtés d'un travail dense et soutenu pour faire de la vie une course folle où la création a piétiné l'ennui.

A cet élan ont également participé Nico, dont l'humour calme et cinglant n'a pas encore cessé de m'arracher les côtes, Cyrille, dont la personnalité forte par le tabac teintée nous démontre tous les jours que Marseille peut rimer avec vie finement ciselée, Sébastien, aux doutes et frasques improbables, Eric, qui m'a confirmé que la calme discrétion du travail méthodique est bel et bien un vent d'Est, et Antoine, véritable incarnation du flegmatisme.

Je ne saurais oublier le Steph, quatrième locataire du bureau 151 qui a réussi l'étonnante synthèse de Benoît Poelvoorde et Lao Tseu, ni Valérie, grande organisatrice des séminaires inter-thésards du LMC où le débat scientifique débridé connut ses plus belles heures.

Enfin, je n'aurais pas pu vivre cette première expérience professionnelle sans l'amour de ma famille et de mes amis. Je tiens tout particulièrement à remercier les plus anciens qui ont eu la patience et la gentillesse d'excuser mon absence de Paris durant ces trois dernières années, et les plus jeunes (dans ma vie) qui m'ont procuré une nouvelle famille sur Grenoble, ville qu'ils m'ont appris à découvrir et aimer.

Merci.

# Table des matières

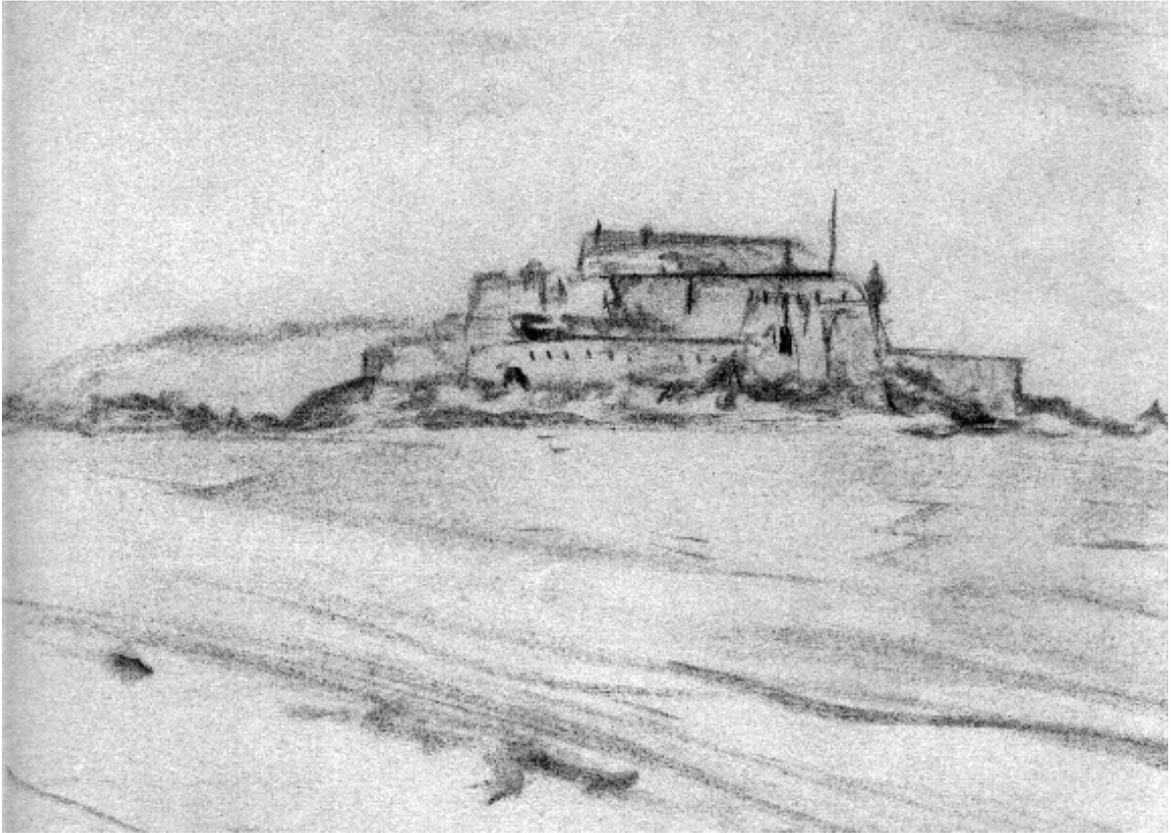
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>I Un nouveau modèle pour représenter la surface d'un objet tridimensionnel</b>	<b>7</b>
<b>1 Représentation des surfaces en informatique graphique</b>	<b>11</b>
1.1 Introduction : quels besoins? . . . . .	11
1.2 Surfaces implicites . . . . .	12
1.3 Graphe d'une fonction . . . . .	14
1.4 Surfaces paramétriques . . . . .	14
1.4.1 Vers les surfaces régulières : les B-splines . . . . .	14
1.4.2 Paramétrisation par morceaux . . . . .	21
1.5 Conclusion . . . . .	25
<b>2 Définition d'une surface en géométrie différentielle</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Variété abstraite . . . . .	27
2.2.1 Un espace topologique aux propriétés particulières . . . . .	28
2.2.2 Partition de l'unité : l'outil liant le local et le global . . . . .	30
2.3 Sous-variété . . . . .	32
2.3.1 Une variété héritant de la topologie de l'espace ambiant . . . . .	32
2.3.2 Paramétrisation : l'outil reliant les variétés abstraites aux sous-variétés	34
2.4 Espace tangent à une variété . . . . .	36
2.4.1 Espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ : un sous-espace vectoriel	36
2.4.2 Espace tangent à une variété abstraite : un espace vectoriel . . . . .	37
2.5 Surface : d'une variété abstraite à un objet de $\mathbb{R}^3$ . . . . .	38
2.5.1 Définition d'une surface . . . . .	39
2.5.2 Propriétés issues de la géométrie différentielle . . . . .	40
2.6 Conclusion . . . . .	41
<b>3 Définition par un atlas d'une surface approchant une surface triangulée</b>	<b>43</b>
3.1 Introduction . . . . .	43
3.2 Atlas : un modèle issu de la géométrie différentielle . . . . .	43

3.3	Utilisation en informatique graphique . . . . .	44
3.4	Construction de l'atlas . . . . .	45
3.5	Conclusion . . . . .	47
<b>II Etudes géométriques et application à la construction d'un atlas</b>		<b>51</b>
<b>4</b>	<b>Recouvrement d'une surface triangulée</b>	<b>55</b>
4.1	Introduction . . . . .	55
4.1.1	Analyse d'images et modélisation géométrique : des domaines cousins	55
4.1.2	Méthodes existantes : pourquoi la division-fusion nous semble la plus adaptée . . . . .	57
4.2	Recouvrement bien formé . . . . .	59
4.2.1	Définition . . . . .	59
4.2.2	Dual d'un recouvrement bien formé . . . . .	61
4.3	Régions fusionnables . . . . .	71
4.3.1	Correspondance entre les zones d'un recouvrement bien formé et les éléments du nerf . . . . .	71
4.3.2	La fusion de régions doit préserver la topologie du nerf . . . . .	73
4.4	Algorithme de construction d'un recouvrement bien formé sur une surface triangulée . . . . .	77
4.4.1	Etape de division : Premières régions sur une surface triangulée . .	77
4.4.2	Etape de fusions : deux stratégies complémentaires . . . . .	79
4.5	Application à la construction d'un atlas . . . . .	82
4.5.1	Ajout d'un critère géométrique . . . . .	82
4.5.2	Calcul du plan moyen . . . . .	82
4.5.3	Calcul de l'erreur . . . . .	83
4.5.4	Projection bijective . . . . .	87
4.5.5	Résultats . . . . .	88
4.6	Conclusion . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Approximation <math>C^1</math> d'une couronne polygonale du plan</b>	<b>93</b>
5.1	Introduction . . . . .	93
5.2	Description d'une boucle du plan par un paramètre orthoradial . . . . .	95
5.2.1	Introduction . . . . .	95
5.2.2	Construction des pivots . . . . .	96
5.2.3	Définition de l'homéomorphisme . . . . .	101
5.3	Approximation d'une couronne polygonale quelconque par une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales . . . . .	105
5.3.1	Introduction . . . . .	105
5.3.2	Construction des pivots et modification éventuelle de la boucle extérieure	107
5.3.3	Définition de l'homéomorphisme . . . . .	110

5.4	Approximation d'une couronne polygonale quelconque par une couronne continue . . . . .	115
5.4.1	Introduction . . . . .	115
5.4.2	Approximation de la boucle intérieure : lissage du paramètre $\rho_n$ . . . . .	116
5.4.3	Approximation de la boucle extérieure : lissage du paramètre $b_n$ . .	118
5.4.4	Résultats . . . . .	120
5.5	Application à la construction d'un atlas . . . . .	121
5.5.1	Fonction de transition . . . . .	122
5.5.2	Partition de l'unité . . . . .	128
5.6	Conclusion . . . . .	130
<b>6</b>	<b>Raccord continu de surfaces</b>	<b>135</b>
6.1	Introduction . . . . .	135
6.2	Méthodes existantes . . . . .	135
6.2.1	Surfaces implicites . . . . .	136
6.2.2	Surfaces paramétriques . . . . .	137
6.3	Par combinaison convexe à l'aide d'un atlas . . . . .	138
6.3.1	Principe . . . . .	138
6.3.2	Exemples . . . . .	140
6.4	Application à la construction d'un atlas . . . . .	142
6.5	Conclusion . . . . .	143
	<b>Conclusion</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Compléments sur les variétés abstraites</b>	<b>151</b>
A.1	Autres définitions de variétés . . . . .	151
A.1.1	Un ensemble décrit par une classe d'équivalence . . . . .	151
A.1.2	Un espace topologique aux propriétés de connexité locale . . . . .	152
A.2	Procédés de construction des variétés . . . . .	153
A.2.1	Par action d'un groupe sur une variété . . . . .	153
A.2.2	Par recollement . . . . .	154
A.3	Structure différentielle sur les variétés abstraites . . . . .	155
A.3.1	Structure différentielle héritée de $\mathbb{R}^2$ grâce aux cartes . . . . .	155
A.3.2	Immersion et plongement entre variétés . . . . .	155
<b>B</b>	<b>Démonstrations pour la définition d'un recouvrement</b>	<b>157</b>
B.1	Démonstration pour la correspondance entre les zones d'un recouvrement bien formé avant et après fusion . . . . .	157
B.2	Démonstration du lemme 7.2.1 . . . . .	159

<b>C</b>	<b>Démonstrations pour la continuité de la paramétrisation d'une couronne</b>	<b>163</b>
C.1	Conditions pour que la paramétrisation soit de classe $C^1$ . . . . .	163
C.2	Interpolation de conditions d'Hermite par un $C^1$ -difféomorphisme . . . . .	166
C.3	Conditions d'interpolation de la fonction $b_n$ pour que $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$ . . . . .	167





*Saint-Malo, Juillet 1999*

# Introduction



Chercher à construire le modèle géométrique d'un objet est un problème rencontré dans de nombreux domaines tels que l'imagerie médicale ou la Conception Assistée par Ordinateur (C.A.O.). L'intérêt d'un tel modèle est de pouvoir manipuler un clone virtuel de l'objet pour y effectuer des calculs, pour le visualiser ou encore pour le modifier afin de créer un nouvel objet à produire industriellement. Selon les domaines, plusieurs méthodes d'acquisition de l'objet sont envisageables : stéréovision, capteurs mécaniques, imagerie par résonance magnétique tridimensionnelle (IRM 3D)... La première donnée numérique que l'on a de l'objet est alors soit un nuage de points de  $\mathbb{R}^3$ , soit un ensemble de cubes (éléments d'une grille tridimensionnelle nommés voxels).

Le passage de cette première donnée numérique à un modèle géométrique de l'objet peut se faire de différentes façons selon la nature du modèle choisi (surface implicite, paramétrique...). Le choix du modèle est arrêté en fonction de l'utilisation que l'on veut en faire. Par exemple, si l'on souhaite réaliser des tests de position de points par rapport à la surface de l'objet, nous choisissons un modèle de surface implicite. Au contraire, si l'on souhaite plaquer une texture, c'est le modèle par surface paramétrique qui est retenu.

Nous proposons, dans le cadre de cette thèse, d'explorer l'utilisation d'un modèle issu de la géométrie différentielle : la description d'une surface par un atlas de cartes.

Intuitivement, décrire une surface  $\mathcal{S}$  par un atlas de cartes revient à la considérer comme la surface de la terre dont nous possédons une description par un atlas géographique. La propriété principale de celui-ci est qu'il est constitué de cartes qui se superposent partiellement afin de permettre à l'utilisateur de se repérer d'une carte à l'autre. De plus, les cartes qui se superposent décrivent, là où elles se rencontrent, le même objet : il s'agit donc d'une description locale respectant la cohérence globale.

On peut alors imaginer les avantages d'un tel modèle : il s'agit d'un modèle paramétrique par morceaux sur chacun desquels on peut travailler sans se soucier d'une quelconque perte des propriétés globales (en particulier la régularité de la surface) puisque la cohérence entre les cartes est intrinsèque au modèle.

Au-delà des utilisations que l'on peut envisager, il y a l'héritage de la géométrie différentielle qui permet de définir rigoureusement des notions de continuité (nous préférons le terme de régularité) sur les surfaces. La description d'une surface par un atlas nous dispense alors des multiples questions sur la régularité entre patches classiquement posées dans le cadre des surfaces paramétrées par morceaux.

Nous proposons alors de construire, à partir des premières données numériques de la surface d'un objet, un modèle géométrique fondé sur un atlas de cartes. Préalablement, nous supposons connu un modèle géométrique linéaire par morceaux qui interpole ces données numériques. Plus précisément, il s'agit d'un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^3$  (pour construire ce maillage, plusieurs méthodes sont connues parmi lesquelles nous pouvons citer le Marching Cubes [LC87] qui procède sur des points positionnés sur une grille 3D, ou d'autres méthodes plus générales [Att98, AB99, BC00, HDD<sup>+</sup>94]).

A partir de ce premier modèle  $\mathcal{M}$  nous construisons un modèle plus économique en

place et plus régulier en forme : une surface  $\mathcal{S}$  décrite par un atlas de cartes. Pour cela, nous commençons par approcher  $\mathcal{M}$  par une famille de morceaux de plans appelés primitives. Chaque primitive approche une région définie sur  $\mathcal{M}$  et ces régions définissent un recouvrement de  $\mathcal{M}$ . La surface  $\mathcal{S}$  est alors définie comme le raccord continu de ces primitives. Ce raccord continu est défini par la combinaison convexe de points des primitives mis en correspondance. La mise en correspondance est, elle, établie sur les domaines de  $\mathbb{R}^2$  où les primitives sont paramétrées. Elle est définie par la construction de  $C^1$ -difféomorphismes entre des régions particulières de ces domaines.

Nous observons donc que la construction de ce modèle pose plusieurs problèmes géométriques auxquels nous proposons une solution innovante.

Ce document est composé de deux parties suivies de trois annexes. Dans la Partie I, nous présentons le modèle de surfaces fondé sur la description d'une surface par un atlas de cartes, dans son double contexte : les modèles de surfaces utilisés en infographie et la géométrie différentielle. La partie I comprend trois chapitres.

Dans le Chapitre 1, nous rappelons les modèles de surfaces les plus utilisés en informatique graphique en nous attardant plus longuement sur les modèles paramétriques.

Dans le Chapitre 2, nous rappelons quelques rudiments de géométrie différentielle qui nous permettent d'une part de définir le vocabulaire que nous utilisons dans ce mémoire, et d'autre part de définir les notions de surfaces régulières et quasi-régulières.

Dans le Chapitre 3, nous proposons d'utiliser le modèle de surfaces fondé sur la représentation par un atlas de cartes en exposant ses avantages dans le cadre de l'informatique graphique. Nous concluons ce chapitre 3 et donc la partie I, en proposant une méthode de construction d'un tel modèle de surfaces  $\mathcal{S}$  à partir d'une première surface : une 2-triangulation  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

La méthode brièvement décrite à la fin de la partie I et qui fait l'objet de ce mémoire, se décompose en trois étapes. Chacune d'entre elles pose un problème géométrique auquel nous proposons une solution originale dans la Partie II de ce mémoire.

Dans le Chapitre 4, nous proposons la construction, dérivée de l'algorithme de segmentation d'une image par division-fusion, d'un recouvrement particulier (on le qualifie de *bien formé*) d'une surface triangulée qui est une variété de dimension 2 connexe et compacte. Nous y démontrons entre autres que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Nous concluons ce chapitre par l'application que nous faisons de la définition d'un recouvrement bien formé pour approcher le maillage  $\mathcal{M}$  par des primitives planes, chacune d'entre elles approchant une région du recouvrement.

Dans le Chapitre 5, nous proposons la construction de l'approximation d'une couronne polygonale du plan par une couronne continue paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme. Cela nous est utile dans la construction de  $\mathcal{S}$  pour mettre en correspondance les points des primitives approchant  $\mathcal{M}$ .

Dans le Chapitre 6, nous étudions le raccord de surfaces par combinaison convexe. Nous mettons en évidence que ce concept, intimement lié à la représentation de surfaces par un

atlas de cartes, a déjà été utilisé plus ou moins ouvertement. Ce raccord nous sert à fondre les primitives en une surface régulière en combinant les points mis en correspondance dans le chapitre 5.

Dans l'Annexe A, nous proposons un complément au chapitre 2 où nous exposons d'autres points de vue utilisés pour définir une variété, les procédés de construction des variétés et enfin des notions liées à la définition d'une structure différentiable sur une variété.

Dans l'Annexe B, nous proposons un complément au chapitre 4 où nous démontrons une propriété simple utilisée dans ce chapitre.

Enfin, dans l'Annexe C, nous complétons le chapitre 6 en établissant plusieurs conditions qui nous permettent de définir la paramétrisation d'une couronne par un  $C^1$ -difféomorphisme.



*Luminy, Mai 2000*

## Première partie

**Un nouveau modèle pour représenter  
la surface d'un objet tridimensionnel**



# Introduction

Dans cette première partie, nous présentons un nouveau modèle de surfaces fondé sur la représentation par un atlas de cartes, notion issue de la géométrie différentielle. Pour cela, nous présentons dans le chapitre 1 les différents modèles utilisés en informatique graphique. Nous nous attardons plus longuement sur les représentations paramétriques.

Nous rappelons ensuite dans le chapitre 2 quelques notions issues de la géométrie différentielle qui nous permettent de définir les surfaces régulières et quasi-régulières.

Enfin, ayant ainsi mis en place tous les éléments nécessaires, nous exposons dans le chapitre 3 le nouveau modèle de surfaces. Nous y proposons également une méthode pour construire un tel modèle à partir de données 3D ayant été interpolées au préalable par un maillage triangulaire.

La deuxième partie de ce mémoire reprend les différentes étapes de cette construction après avoir résolu les problèmes géométriques que chacune d'entre elles rencontre.



# Chapitre 1

## Représentation des surfaces en informatique graphique

### 1.1 Introduction : quels besoins ?

Nous proposons un rapide tour d'horizon des représentations de surfaces utilisées en infographie. De multiples états de l'art peuvent être trouvés. Aussi avons-nous préféré ne pas entrer dans les détails, vous invitant à consulter les ouvrages de référence [FvDF<sup>+</sup>94]. En revanche, nous proposons une lecture originale de ces représentations : nous précisons quelle est la nature, en termes de géométrie différentielle, des objets représentés. Cela nous permettra d'établir dans le chapitre 3 quelle est la représentation la plus adaptée aux surfaces régulières définies par la définition 25 dans le chapitre 2.

En infographie, on cherche à représenter des surfaces soit pour modéliser des objets existants, soit pour synthétiser des objets virtuels. Dans le premier cas, l'acquisition d'un objet existant ne peut se réaliser exactement : il faudrait une infinité de points. C'est pourquoi la surface est alors définie comme l'interpolation ou l'approximation d'un nombre fini de points relevés sur l'objet par des techniques telles que le scanner 3D. Dans le deuxième cas, l'utilisateur définit sa surface en assemblant des primitives issues de classes de surfaces prédéfinies.

Dans les deux cas, la représentation pose deux problèmes successifs : l'établissement d'un objet mathématique (qui constitue la modélisation d'un objet existant ou l'objet virtuel lui-même), puis la visualisation de celui-ci. Pour ce deuxième problème encore, on ne peut visualiser exactement un objet mathématique continu sur la trame discrète des pixels d'un écran. Nous évoquerons rapidement ce problème dans ce chapitre.

Enfin, il existe trois familles d'objets mathématiques utilisés pour modéliser une surface en infographie : les surfaces implicites, les graphes de fonctions définies sur  $\mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , et les surfaces paramétriques. Nous évoquons rapidement les deux premières avant de nous pencher plus longuement sur les surfaces paramétriques parmi lesquelles nous trouvons les surfaces régulières.

REMARQUE —

Un même objet peut admettre une représentation implicite, paramétrique ou être interprété comme le graphe d'une fonction. Pour illustrer ce propos, considérons une fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des points

$$\{(x, y, z), (x, y) \in \mathbb{R}^2 : z = h(x, y)\}$$

est le graphe de  $h$ . Cet ensemble peut se réécrire comme une surface paramétrique sous la forme

$$\{(x, y, z) : x = u, y = v, z = h(u, v)\}$$

Enfin, il s'agit également des points de la surface implicite définie par  $V = f^{-1}(0)$  avec  $f(x, y, z) = h(x, y) - z$ .

## 1.2 Surfaces implicites

Les surfaces implicites jouant un rôle de plus en plus important en infographie, il nous a semblé indispensable de les évoquer. Mais parce que les surfaces régulières ne sont pas des surfaces implicites *a priori*, nous ne rentrons pas dans les détails.

Une surface implicite est définie comme l'ensemble des points  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  tels que  $f(x, y, z) = 0$ ,  $f$  étant une fonction implicite (Théorème 3, page 34).

A partir de cette définition générale, les divers modèles utilisés en infographie correspondent aux différentes définitions que l'on peut donner pour  $f$ . Nous en présentons ici trois grandes familles. La plus simple est de définir  $f$  comme un polynôme. Les surfaces générées sont des surfaces simples que l'on peut utiliser comme objets élémentaires pour un assemblage ultérieur. Ce sont par exemple des ellipsoïdes si,

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes.

Aussi, un assemblage de tels objets élémentaires peut ne pas être satisfaisant, même s'ils s'interpénètrent. Un contrôle plus avancé de la forme de la surface est alors indispensable pour modéliser des surfaces complexes (avec trous et embranchements par exemple). L'idée est alors de définir  $f$  comme un champ gravitationnel défini par un ensemble fini  $S$  de points  $s_i$ . Chaque point  $s_i$  a un champ propre  $f_i$  qui décroît à mesure que l'on s'éloigne de  $s_i$  et  $f$  est définie en tout point  $P$  de  $\mathbb{R}^3$  comme la combinaison de ces champs propres. Dans les premiers modèles, la combinaison est une somme :

$$f(P) = \sum_{s_i \in S} f_i(P)$$

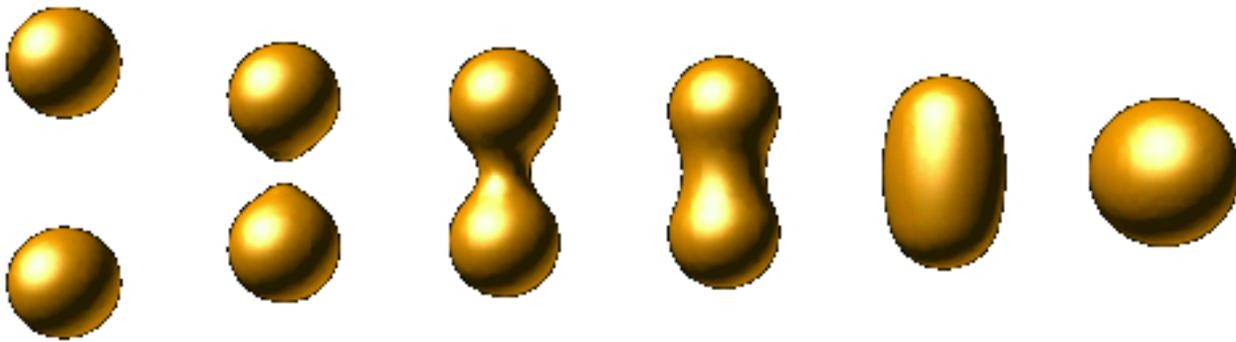


FIG. 1.1 – Des surfaces implicites simples (image de B. Wyvill, [www.cpsc.ucalgary.ca/~blob](http://www.cpsc.ucalgary.ca/~blob))

Les champs propres peuvent être à portée infinie comme pour le “Blobby model” [Bli82] où, en notant  $r_i$  la distance séparant  $P$  de  $s_i$  et  $a$  étant une constante,

$$f_i(P) = \exp^{-\frac{ar_i^2}{2}}$$

ou à portée bornée par une constante  $R_i$  comme pour les “Meta-balls” [NHK<sup>+</sup>85] où, si  $r_i \geq R_i$ ,  $f_i(P) = 0$  et sinon,

$$f_i(P) = a \frac{r_i^6}{R_i^6} + b \frac{r_i^4}{R_i^4} + c \frac{r_i^2}{R_i^2} + d$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont des constantes. De plus, les champs propres peuvent être à contribution négative ou définis non pas en fonction de la distance à un point  $s_i$  mais en fonction de la distance à une primitive plus complexe (une courbe par exemple).

Les surfaces implicites ont pour avantage le calcul aisé de la normale à la surface en un point (section 2.4.1) et l'évaluation rapide de la position d'un point de  $\mathbb{R}^3$  à l'intérieur ( $f(P) < 0$ ), sur ( $f(P) = 0$ ), ou à l'extérieur ( $f(P) > 0$ ) de la surface. De plus elles sont particulièrement bien adaptées à la représentation d'objets qui changent de topologie au cours du temps.

En revanche, elles demandent l'introduction de contraintes pour représenter des surfaces ouvertes (une calotte sphérique par exemple) et il semble délicat de les visualiser en temps réel sans passer par une approximation polygonale. Enfin, leur définition étant implicite, la modélisation de la surface se fait indirectement : on positionne des points, on détermine leur champ propre et l'on regarde le résultat. Au contraire, les surfaces paramétriques proposent une approche directe et un contrôle plus important sur la forme de la surface modélisée.

### 1.3 Graphe d'une fonction

Un deuxième type de représentation des surfaces est de les considérer comme le graphe d'une fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Cela revient à définir une altitude en tout point  $(u, v)$  d'un domaine de  $\mathbb{R}^2$ . Cette représentation constitue donc le modèle naturel pour représenter un terrain. Malheureusement bien des surfaces, à commencer par la sphère, ne peuvent être représentées par le graphe d'une fonction. C'est pourquoi nous sommes amenés à définir les trois coordonnées des points d'une surface comme des fonctions des deux paramètres  $(u, v)$ , soit une représentation paramétrique.

### 1.4 Surfaces paramétriques

Une surface paramétrique est un ensemble de points de  $\mathbb{R}^3$  dont les coordonnées sont des fonctions de deux variables appartenant à un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)); (u, v) \in \Omega\}$$

Nous commençons par présenter les B-splines, surfaces paramétrées certainement les plus utilisées en infographie, mais insuffisantes pour représenter des surfaces de topologie quelconque. C'est pourquoi nous présentons les surfaces paramétrées par morceaux en soulignant les problèmes de continuité que cela pose.

#### 1.4.1 Vers les surfaces régulières : les B-splines

Parmi les surfaces paramétrées, les plus utilisées en infographie sont sans conteste les B-splines. Nous proposons une présentation rapide de ces surfaces en commençant par en exposer le principe pour les courbes.

##### 1.4.1.1 Courbes paramétrées

Une courbe paramétrée est un ensemble de points dont les coordonnées sont données par des fonctions d'un même paramètre  $t$ ,  $t \in [0; 1]$ . On pourrait bien évidemment envisager des fonctions dépendant de paramètres différents et qui appartiennent à d'autres intervalles que  $[0; 1]$ . Cette généralisation est aisée et n'envisager que ce cadre simple n'altère donc en rien notre propos. Nous notons  $P(t)$  les points de la courbe,  $P$  étant un vecteur dont chaque élément est la fonction paramétrant la coordonnée correspondante. De même, nous notons  $P'(t)$  le vecteur des dérivées des fonctions. Ce vecteur est le vecteur tangent à la courbe au point  $P(t)$  lorsqu'il n'est pas égal au vecteur nul.

**Interpoler deux points : Conditions d'Hermite** On peut dessiner une courbe qui interpole des points donnés ou qui les approche. Dans le cas d'une interpolation, la situation

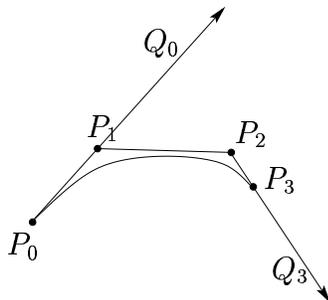


FIG. 1.2 – Interpolation de conditions d’Hermite par une courbe de Bézier

minimale est de joindre deux points  $P_0$  et  $P_3$  de  $\mathbb{R}^3$ . La solution la plus simple est le segment de droite dont ils sont les extrémités (on nomme le deuxième sommet  $P_3$  pour homogénéiser les écritures avec le paragraphe suivant). Aussi, lorsque l’on souhaite préciser dans quelle direction la courbe part d’un point et dans quelle direction elle arrive au deuxième, on pose des conditions de tangence. En notant  $Q_0$  et  $Q_3$  les vecteurs qui représentent ces directions en  $P_0$  et  $P_3$  respectivement,  $P(t)$  doit être tel que

$$\begin{cases} P(0) = P_0 \\ P'(0) = Q_0 \\ P(1) = P_3 \\ P'(1) = Q_3 \end{cases}$$

La solution la plus simple est de définir les trois coordonnées de  $P(t)$  par les uniques polynômes de degré trois qui satisfont ces quatre conditions. La courbe obtenue est une courbe d’Hermite cubique (figure 1.2).

**Interpoler deux points : Courbe de Bézier** En pratique, la façon la plus aisée pour déterminer ces directions est de dessiner les vecteurs qui représentent les directions de départ et d’arrivée ; autrement dit de déterminer deux autres points (figure 1.2). Si donc l’on se donne quatre points  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ , la courbe qui interpole  $P_0$  et  $P_3$  telle que sa direction de départ soit  $\vec{P_0P_1}$  et sa direction d’arrivée  $\vec{P_2P_3}$  est appelée courbe de Bézier. Elle est identique à la courbe d’Hermite interpolant ces mêmes conditions (avec  $Q_0 = 3(P_1 - P_0)$  et  $Q_1 = 3(P_3 - P_2)$ ). L’écriture de  $P$  peut être matricielle. En effet, les fonctions coordonnées étant des polynômes de degré 3, elles sont des combinaisons linéaires des fonctions 1,  $t$ ,  $t^2$  et  $t^3$ . En notant

$$T(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

il existe une matrice  $C$  telle que

$$P(t) = CT(t)$$

Aussi, cette matrice  $C$  dépend des conditions de position et de tangence. On peut montrer que cette dépendance est linéaire. En notant

$$G = [P_0 P_1 P_2 P_3]$$

il existe donc une matrice  $M$  telle que

$$C = GM$$

Ainsi on peut écrire tout point  $P$  de la courbe comme une combinaison des points  $P_i$ ,  $i \in \{0, \dots, 3\}$  :

$$P(t) = GMT(t) \tag{1.1}$$

$$= GB(t) \tag{1.2}$$

$$= \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t) \tag{1.3}$$

avec

$$B_i(t) = C_3^i t^i (1-t)^{3-i}$$

Les fonctions  $B_i(t)$  constituent ainsi une nouvelle base de l'espace des polynômes de degré 3 appelée la base de Bernstein.

**Interpoler plus de deux points : Polynôme de Lagrange** Nous cherchons à présent à faire passer une courbe par plus de deux points. Notons ces  $n+1$  points  $P_i$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$ , et  $t_i$  la valeur du paramètre telle que  $P(t_i) = P_i$ . On dit que la paramétrisation est uniforme si, pour tout  $i$  de  $\{0 \dots n\}$ ,  $t_{i+1} - t_i$  est constant (on prend alors  $t_i = \frac{i}{n}$ ). Une première solution est de choisir une courbe qui soit paramétrée par un polynôme de degré  $n$  interpolant ces conditions de position, tel que le polynôme de Lagrange :

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \left( \frac{\prod_{j \neq i} (t - t_j)}{\prod_{j \neq i} (t_i - t_j)} \right) P_i$$

Mais plus le nombre de points est important plus les oscillations que la courbe doit suivre pour passer par tous les points sont grandes (figure 1.3).

**Interpoler plus de deux points : Fonction spline** Une première idée est alors de définir la courbe par morceaux : un morceau par couple  $(P_i, P_{i+1})$ . On se ramène alors au problème d'interpolation de deux points que l'on sait traiter. En particulier, si l'on souhaite une courbe lisse et non une ligne brisée, il faut poser des conditions de tangence en chacun des points. On choisit généralement les conditions qui minimisent la flexion de la courbe entière ( $\int_0^1 \|P''(t)\|^2 dt$ ). La courbe obtenue est alors appelée une spline. Ce terme provient de la charpenterie de marine. Une spline était une planche de la coque d'un bateau, mise en forme par pression exercée en certains points des chevrons qui composaient la charpente de la coque. Sa propriété de minimisation de la flexion était particulièrement précieuse pour façonner une coque au profil idéal.

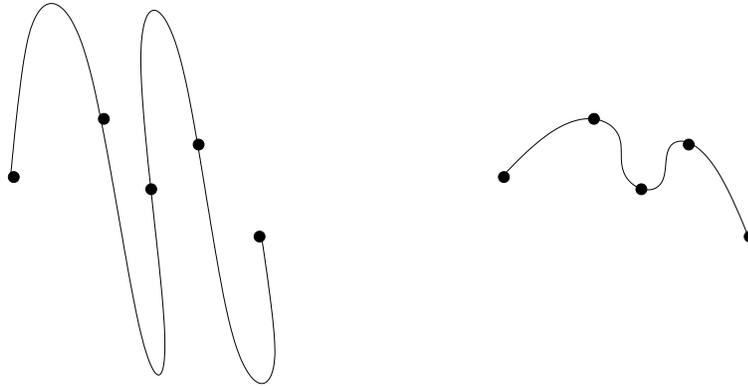


FIG. 1.3 – Deux interpolations polynomiales. A gauche le schéma de ce que serait l'interpolation par un polynôme quelconque. A droite l'interpolation par une fonction spline.

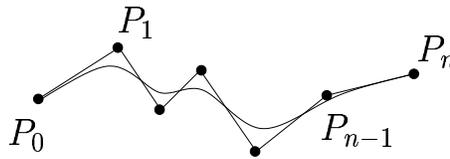


FIG. 1.4 – Une courbe de Bézier interpole les points extrêmes et approche les autres.

**Approcher plus de deux points : Courbe de Bézier** Une autre idée serait de généraliser les courbes de Bézier à  $n + 1$  points.

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i(t)$$

avec

$$B_i(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$$

Mais cette courbe ne passe que par  $P_0$  et  $P_n$  et approche les autres points. Cette courbe est donc intéressante si notre but n'est pas de tracer une courbe qui passe exactement par les points mais qui les approche (figure 1.4).

Aussi, comme toutes les fonctions de la base de Bernstein  $B_i$  sont définies sur l'intervalle de paramétrisation tout entier  $[0; 1]$ , changer la position d'un point  $P_i$  modifie la forme de toute la courbe. De même, l'ajout d'un nouveau point  $P_i$ , pour donner plus de détails localement par exemple, entraîne la modification du dessin de toute la courbe.

L'idée est alors de définir des fonctions de base  $B_i$  à domaines plus restreints. Le point  $P_i$  associé aura donc une influence localisée sur le dessin de la courbe : seuls les points  $P$  dont le paramètre  $t$  appartient au domaine de  $B_i$  seront dépendants de la position de  $P_i$ . Cette idée est réalisée avec les B-splines.

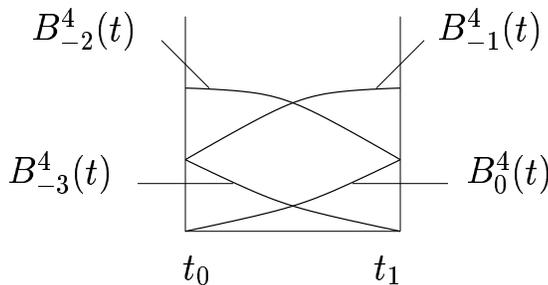


FIG. 1.5 – Base B-spline des polynômes de degré 3.

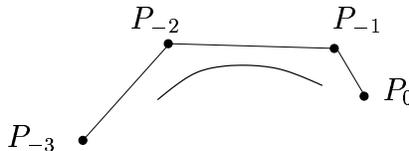


FIG. 1.6 – Courbe B-spline de degré 3.

**Approcher plus de deux points : B-spline** Une B-spline est une spline en ce sens qu'elle est paramétrée par morceaux, chaque morceau étant exprimé dans une base particulière de polynômes (différente de la base de Bernstein), d'où leur nom (d'origine anglaise) : Basis-spline. Les fonctions constituant une base dépendent des pas de paramètre  $t_i$  : il y aura donc une base différente pour chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  sauf si la paramétrisation est uniforme. La base de polynômes de degré  $k$  pour l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  est composée de  $k + 1$  fonctions notées  $B_{i-k}^{k+1} \dots B_i^{k+1}$  (figure 1.5) qui sont définies récursivement sur  $[t_i, t_{i+1}]$  par

$$B_i^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in [t_i, t_{i+1}] ; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.4)$$

$$B_i^{k+1}(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} B_i^k(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} B_{i+1}^k(t). \quad (1.5)$$

La paramétrisation d'une courbe s'écrit alors sur  $[t_i, t_{i+1}]$

$$P(t) = \sum_{j=i-k}^i P_j B_j(t)$$

On remarque en particulier que pour dessiner une courbe paramétrée de degré  $k$  sur un intervalle  $[t_0, t_1]$ , il est nécessaire d'avoir au moins  $k + 1$  points notés  $P_{-k} \dots P_0$  (figure 1.6). Réciproquement, si l'on se donne  $n + 1$  points  $P_{-k} \dots P_{n-k}$ , on dessine une courbe paramétrée de degré  $k$  sur  $n - k + 1$  intervalles. On peut également remarquer qu'une fonction de base  $B_i^{k+1}(t)$  est définie sur les  $k + 1$  intervalles de  $t_i$  à  $t_{i+k+1}$  (figure 1.7). La position du point  $P_i$  influence donc le dessin de la courbe sur ces seuls  $k + 1$  intervalles. Réciproquement, le dessin de la courbe sur un intervalle est déterminé par la position de  $k + 1$  points  $P_i$ .

De cette première définition des B-splines on définit de multiples courbes d'approximation. Si la paramétrisation est uniforme ou non, nous disons respectivement que la B-spline

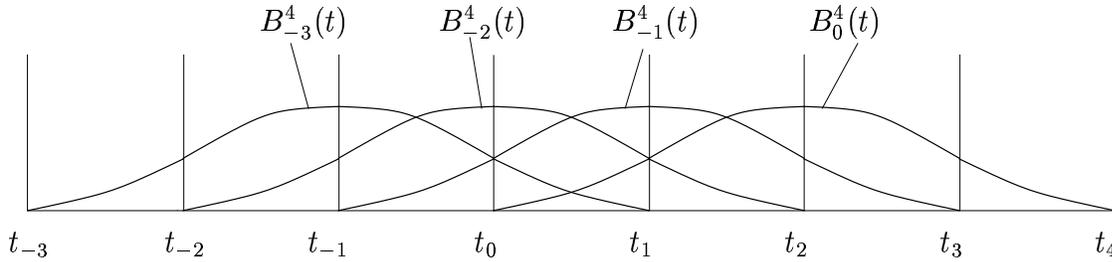


FIG. 1.7 – Fonctions de base B-splines complètes

est uniforme ou non uniforme. On peut également choisir des bases de fonctions non polynomiales mais rationnelles. Les fonctions rationnelles sont alors généralement écrites comme une somme pondérée des fonctions d'une base polynomiale, un poids  $\omega_j$  étant associé à chaque point de contrôle  $P_j$  :

$$P(t) = \frac{\sum_{j=i-k}^i P_j \omega_j B_j(t)}{\sum_{j=i-k}^i \omega_j B_j(t)}$$

avec  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ . Enfin, si la paramétrisation est non uniforme et les bases rationnelles, la courbe est alors appelée une NURBS, acronyme de l'expression anglaise Non Uniform Rational Basis Spline.

**Surfaces paramétrées** Après ce tour d'horizon des courbes paramétrées utilisées en infographie, il est temps de découvrir les surfaces paramétrées.

La stratégie employée est d'utiliser ce qui a été fait pour les courbes. Pour cela, les surfaces sont définies comme le produit tensoriel de courbes de Bézier ou de B-splines :

$$P(u, v) = \sum_{i,j} P_{ij} B_i(u) B_j(v)$$

avec des points de contrôle organisés en une grille rectangulaire selon leurs deux indices (figure 1.8). Notons qu'en pratique cette paramétrisation est codée sous forme de produit matriciel pour chaque coordonnée  $x$

$$P_x = U^T M^T G_x M V$$

où, pour des courbes de Bézier cubiques,

$$U = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}$$

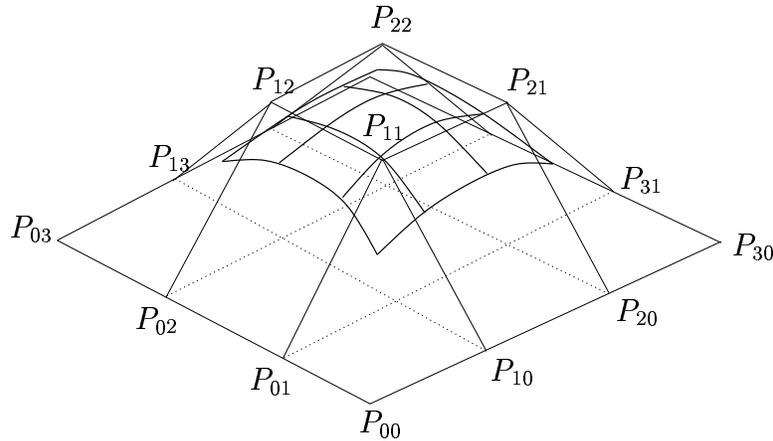


FIG. 1.8 – Une surface B-spline

$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ v \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}$$

$$G_x = \begin{bmatrix} P_{00_x} & P_{01_x} & P_{02_x} & P_{03_x} \\ P_{10_x} & P_{11_x} & P_{12_x} & P_{13_x} \\ P_{20_x} & P_{21_x} & P_{22_x} & P_{23_x} \\ P_{30_x} & P_{31_x} & P_{32_x} & P_{33_x} \end{bmatrix}$$

#### 1.4.1.2 Propriétés des B-splines

**Utilisation en informatique graphique** D'un point de vue pratique, il est intéressant de noter que l'image par une rotation, une translation ou un changement d'échelle de la grille des points de contrôle d'une surface B-spline est la grille des points de contrôle de l'image de cette surface par la même transformation. Cette propriété d'invariance est également valable pour les projections s'il s'agit d'une surface NURBS. Remarquons que seules les NURBS permettent de dessiner des coniques (et donc en particulier des portions de sphères). D'autre part, le calcul de la normale à une surface B-spline est assez aisé puisque la normale est donnée par le produit vectoriel des dérivées partielles  $\frac{\partial P}{\partial u} \wedge \frac{\partial P}{\partial v}$  ce qui, pour des B-spline cubiques donne un polynôme de degré cinq pour chaque coordonnée. Rappelons que rien n'impose à  $P'(u, v)$  d'être injective, et donc à ce produit vectoriel d'être nul, auquel cas la normale ne serait pas calculable.

Enfin, pour visualiser une telle surface, la stratégie habituellement adoptée consiste à dessiner des courbes à  $u$  et  $v$  constants et suffisamment rapprochées pour que deux points successifs appartiennent au même pixel ou à deux pixels voisins. En supposant que la visualisation d'un polygone plan soit une primitive graphique, on peut également dessiner les carreaux dont les sommets sont des points de la surface à des valeurs de paramètres pas

trop éloignées.

**Utilisation en optimisation** D'autre part, si les B-splines peuvent être choisies pour dessiner des courbes et des surfaces en C.A.O, elles peuvent également être utilisées pour des problèmes classiques d'interpolation ou d'approximation. Dans ce cas, il faut différencier les points de contrôle  $P_i$  des points à interpoler. En effet, on résout généralement ce problème en trouvant les coordonnées des  $P_i$  qui minimisent un critère dépendant des conditions d'interpolation ou d'approximation. Enfin, les B-splines ont un avantage souvent décisif sur les autres formulations polynomiales : elles s'adaptent très facilement à une représentation multirésolution [FB88].

## 1.4.2 Paramétrisation par morceaux

### 1.4.2.1 Présentation

Les surfaces de Bézier ou les B-splines permettent donc de dessiner des surfaces en positionnant une grille de points de contrôle. Mais toutes les surfaces ne peuvent être dessinées par un tel procédé. En effet, définir une grille de contrôle revient à dessiner des carreaux de quatre côtés sur une surface en vérifiant les propriétés suivantes : leur union recouvre la surface, l'intersection de deux carreaux est soit vide soit égale à une de leurs arêtes ou à un de leur sommet, chaque arête appartient à deux carreaux au plus et relie deux sommets, et enfin chaque sommet est le point de concours de quatre arêtes (on dit que le sommet est de valence quatre). En particulier, on ne peut dessiner de tels carreaux sur une sphère (figure 1.9). On est alors obligé de découper la sphère et de la représenter par morceaux.

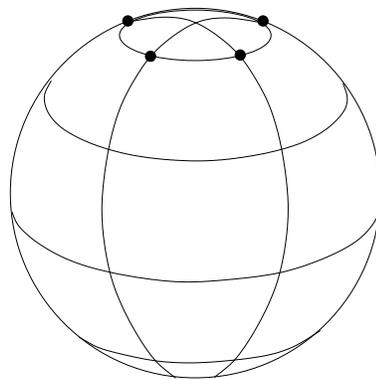


FIG. 1.9 – Aucune partition de la surface d'une sphère ne peut être composée que de carreaux à quatre côtés et avoir tous ses sommets de valence égale à quatre. Celle dessinée sur cette figure a ses sommets de valence égale à quatre. On pourrait envisager de remplacer les quatre triangles de la calotte par une seule face à quatre côtés. Mais alors les sommets marqués en noir auraient une valence égale à trois.

De manière générale, construire une surface paramétrée par morceaux revient à définir un ensemble de pièces de surfaces délimitées par une succession d'arêtes, chaque arête étant une courbe reliant deux sommets. Il faut de plus que deux pièces aient une intersection qui soit vide ou égale à une de leurs arêtes ou à un de leurs sommets, et que chaque arête soit commune à au plus deux pièces. Nous verrons dans le paragraphe suivant comment on gère en pratique une telle structure. On utilise également le terme *face* pour désigner une pièce de surface.

**Les maillages** Une première famille de surfaces paramétrées est celle des polygones maillés (ou maillage) pour lesquels toutes les pièces sont des morceaux de plan. Les triangulations sont certainement les surfaces de cette famille les plus utilisées (figure 1.10). Les pièces y sont toutes délimitées par trois arêtes : ce sont donc des triangles.

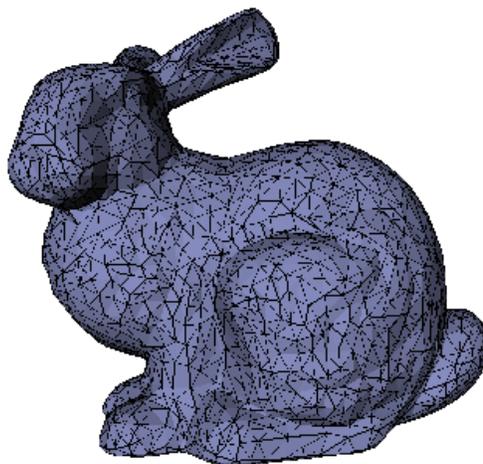


FIG. 1.10 – Une triangulation

Aussi, on peut vouloir dessiner une surface qui soit plus lisse. Une première solution est de définir cette surface comme la surface limite d'un processus de subdivision [DS78, Loo87, DHL93]. On part d'un maillage  $T_0$ . On définit récursivement de nouveaux maillages  $T_i$  tels que  $T_{i+1}$  soit défini en ajoutant de nouveaux sommets à  $T_i$ , calculés par des combinaisons linéaires de sommets de  $T_i$ , et reliés à ceux-ci par de nouvelles arêtes et de nouvelles faces qui viennent se substituer à des arêtes et des faces de  $T_i$  (figure 1.11). De plus, on peut modifier la position des sommets hérités de  $T_i$ , encore une fois par combinaisons linéaires de sommets. Le maillage  $T_{i+1}$  est alors une version raffinée du maillage  $T_i$ . Pour certaines combinaisons linéaires bien choisies, ce processus de raffinement converge vers une surface limite qui est lisse. Un des intérêts de cette technique est que l'on peut arrêter le processus lorsque la résolution de la visualisation ne permet plus de distinguer  $T_{i+1}$  de  $T_i$ . On a alors directement le polygone à visualiser comme approximation de la véritable surface. Enfin,

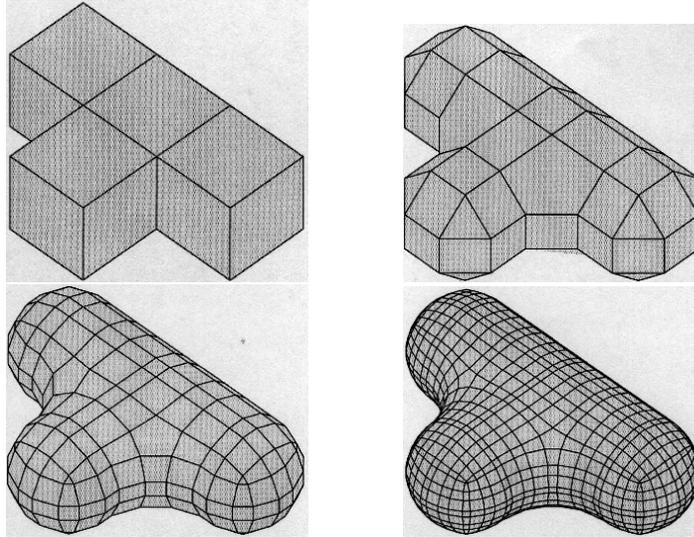


FIG. 1.11 – Un maillage et ses raffinés successifs par un algorithme de subdivision de type Doo-Sabin [DS78]

certaines surfaces B-splines peuvent être exprimées comme surface limite d'un tel processus de subdivision. L'inconvénient de cette technique est qu'en général, on ne connaît pas de paramétrisation de la surface limite. Cela peut être gênant si l'on a besoin de calculer la position exacte d'un point de cette surface qui ne soit pas un sommet de  $T_i$ .

**Pièces non planes : une continuité entre pièces à définir** Une deuxième solution est de choisir des morceaux de surfaces qui ne soient pas plans pour les pièces d'une surface paramétrée par morceaux. La difficulté est alors d'exprimer correctement une notion de continuité entre les pièces partageant une arête ou même seulement un point. Une solution a été proposée par Hahn dans ses travaux avec Gregory [Hah89].

Hahn suppose chaque pièce décrite par une fonction  $p_i$  définie sur un domaine  $\Delta_i$  de  $\mathbb{R}^2$  et qui soit  $k$ -différentiable et de jacobien de rang 2 (soulignons que le domaine est fermé). Il définit le secteur tangent de  $p_i$  en un point de la frontière de  $\Delta_i$  comme l'ensemble des vecteurs tangents aux images par  $p_i$  des courbes définies sur  $\Delta_i$  et issues de ce point frontière. Nous considérons deux pièces partageant une même arête notée  $E_1$  dans l'une et  $E_2$  dans l'autre. Supposons ces deux arêtes paramétrées en fonction d'un même paramètre  $s$ .  $\phi$  est un  $C^k$ -difféomorphisme de connexion de  $E_1$  vers  $E_2$  si c'est un  $C^k$ -difféomorphisme défini dans  $\Delta_1$  au voisinage de  $E_1$  à valeurs dans  $\Delta_2$  au voisinage de  $E_2$  tel que  $\phi(E_1(s)) = E_2(s)$ . Les deux pièces se joignent avec une continuité dite géométrique  $GC^k$  le long de  $E$  s'il existe un  $C^k$ -difféomorphisme de connexion  $\phi$  telle que  $\partial^j p_1(\phi(E_1(s))) = \partial^j p_2(E_2(s))$  pour tout  $j$  de 0 à  $k$ . Des pièces qui partagent un même sommet entourent celui-ci avec une continuité géométrique  $GC^k$  s'ils se joignent avec une continuité géométrique  $GC^k$  le long des arêtes aboutissant à ce point et si leurs secteurs

tangents ne se superposent pas. Une manière plus prosaïque d'exprimer cette continuité pour  $k = 1$  est d'affirmer que les plans tangents définis pour chaque pièce en un point d'une arête commune sont confondus.

Pour des carreaux de Bézier ou des B-splines, cette continuité est assurée en superposant des points de contrôle entre les pièces [Far82]. Notons que la continuité en un sommet partagé par plusieurs carreaux demande quelques précautions et peut nécessiter l'ajout de points de contrôle (et donc l'augmentation du degré des polynômes paramétrant chaque carreau).

Enfin, nous verrons dans le chapitre 6 qu'une dernière solution conservant la contrainte des sommets de valence quatre est envisageable : la définition de pièces à  $n$ -côtés.

#### 1.4.2.2 Une structure de données particulière pour la représentation par morceaux

Choisir de dessiner une surface paramétrée par morceaux nécessite de coder la structure de cette représentation par morceaux, autrement dit les pièces (ou faces), les arêtes et les sommets ainsi que les relations qui les lient : un sommet appartient à des arêtes et des faces, une arête relie deux sommets et est partagée par deux faces, et une face est délimitée par une succession alternée d'arêtes et de sommets.

Plusieurs structures de données sont possibles. La solution que nous avons adoptée est celle proposée par Baumgart [Bau75] et nommée la représentation demi-ailée. Chaque arête est dédoublée en deux arêtes orientées en tête-bêche auxquelles est rattachée une seule face : la face qui contient l'arête et qui se trouve à gauche de celle-ci (au sens donné par son orientation). Une face est alors codée comme un pointeur sur une arête orientée. Une arête orientée est codée comme quatre pointeurs : un sur la face incidente qui se trouve à sa gauche, un sur le sommet d'où elle sort (au sens de son orientation), un sur l'arête qui appartient à la face associée et qui sort du sommet extrémité de celle-là (cela permet de parcourir les arêtes d'une face dans le sens trigonométrique), et un sur l'arête qui lui est tête-bêche. Enfin, un sommet est codé comme un tableau de trois coordonnées et un pointeur sur une des arêtes orientées qui sortent de lui (figure 1.12).

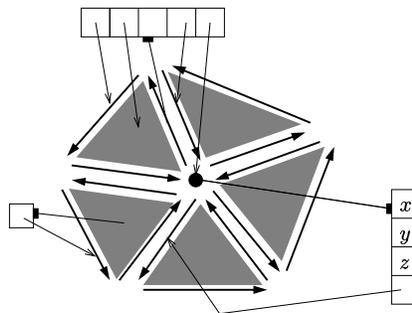


FIG. 1.12 – Structure de données demi-ailée

## 1.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce premier chapitre un rapide tour d'horizon des modèles de surface utilisés en informatique graphique. Après la courte évocation des modèles implicites et des graphes de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , nous nous sommes penchés plus longuement sur les modèles paramétriques. Parmi ces derniers, ceux qui permettent la représentation des surfaces les plus variées sont les modèles paramétriques par morceaux. Un des points délicats à résoudre lors de l'utilisation de ces modèles est la continuité entre les morceaux. Aussi ce problème peut être résolu dans le cadre d'un modèle qui serait fondé sur la représentation des surfaces par un atlas de cartes, représentation issue de la géométrie différentielle. Nous proposons d'éclaircir ce dernier point dans le chapitre suivant.



# Chapitre 2

## Définition d'une surface en géométrie différentielle

### 2.1 Introduction

La géométrie différentielle propose une solution élégante au problème de continuité entre les morceaux d'une surface paramétrée par morceaux : la représentation de surfaces par un atlas de cartes, où les morceaux se recouvrent partiellement. Pour préciser cela, nous rappelons quelques notions de géométrie différentielle. Puis nous introduisons les notions de surfaces régulières et quasi-régulières qui seront utiles pour caractériser les propriétés de notre modèle.

Pour amener à ces définitions, nous commençons par définir une variété abstraite. Parmi les variétés abstraites, certaines rejoignent la notion intuitive que l'on peut avoir d'une surface et parmi lesquelles on retrouve les surfaces implicites et les graphes de fonction évoqués dans le chapitre précédent : ce sont les sous-variétés de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$ . Pour introduire la notion de régularité d'une surface, nous étudions ensuite la notion d'espace tangent à une variété. Enfin nous concluons ce chapitre par la définition des surfaces régulières et quasi-régulières.

### 2.2 Variété abstraite

L'une des notions fondamentales de la géométrie différentielle est celle de variété abstraite. Nous rappelons dans cette section cette notion ainsi que celle d'un outil indispensable à son étude : la partition de l'unité. Cet outil joue un rôle capital dans la construction de notre modèle de surface et plus précisément dans le raccord de surfaces par combinaison convexe.

## 2.2.1 Un espace topologique aux propriétés particulières

La définition d'une variété abstraite admet plusieurs formulations, toutes équivalentes. Nous n'en développons qu'une dans le corps de ce texte, vous invitant à découvrir les autres en annexe A.1 ainsi que dans les divers ouvrages de référence [God71, LS82, BG87, FK97]. La formulation la plus communément rencontrée, et présentée dans l'ouvrage de D. Lehmann et C. Sacré [LS82], peut être résumée par l'expression suivante : un espace topologique aux propriétés particulières. Nous commençons donc par présenter ce qu'est un espace topologique, puis nous détaillerons les propriétés qui en font une variété abstraite.

### 2.2.1.1 Définition d'une variété abstraite

Rappelons ce qu'est une topologie sur un ensemble  $E$ .

**Définition 1 (Topologie)** Une topologie sur un ensemble  $E$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{O}$  de parties de  $E$  vérifiant les propriétés suivantes :

- La réunion de toute famille d'éléments de  $\mathcal{O}$  appartient à  $\mathcal{O}$
- L'intersection de deux éléments de  $\mathcal{O}$  appartient à  $\mathcal{O}$
- $E$  et la partie vide appartiennent à  $\mathcal{O}$

INTERPRÉTATION —

Donner une topologie sur un ensemble de points, c'est en quelque sorte décrire leur agencement.

Cette notion permet de définir les objets topologiques élémentaires que sont les ouverts et les applications continues.

**Définition 2 (Ouvert)** Les éléments de  $\mathcal{O}$  sont appelés les ouverts de la topologie.

**Définition 3 (Application continue)** Une application  $\varphi : E \rightarrow F$  est continue ssi pour tout ouvert  $V$  de  $F$ ,  $\varphi^{-1}(V)$  est un ouvert de  $E$ .

**Définition 4 (Homéomorphisme)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces topologiques.

On appelle homéomorphisme de  $E$  sur  $F$  toute bijection continue de  $E$  sur  $F$  dont la bijection réciproque est continue sur  $F$ .

Deux espaces topologiques sont dits homéomorphes ssi il existe un homéomorphisme de l'un sur l'autre.

Nous avons à présent tous les éléments pour définir une variété abstraite :

**Définition 5 (Variété abstraite)** Une variété abstraite de dimension  $d$  est un espace topologique tel que chacun de ses points admette un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^d$ .

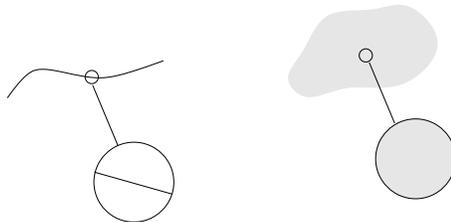


FIG. 2.1 – Une variété abstraite de dimension 1 est ce que l'on entend généralement par courbe (figure de gauche). Contrairement à ce que représente la figure de droite, c'est un ensemble de points qui sont agencés de telle sorte qu'autour de chacun d'eux (au sens de voisinage selon la topologie qui décrit leur agencement) l'ensemble ressemble à l'agencement des points de la droite  $\mathbb{R}$ .

### 2.2.1.2 Description d'une variété abstraite par un atlas

La description (ou définition constructive) d'une variété est précieuse pour son étude. La description naturelle d'une variété est donnée par un atlas. Nous en présentons les notions essentielles. Le nouveau modèle de surface que nous proposons dans ce mémoire est fondé sur ces notions.

**Définition 6 (Carte locale)** Une carte locale sur une variété abstraite  $X$  de dimension  $d$  est un couple  $(U, \varphi)$  tel que

- $U$  est un ouvert de  $X$  appelé domaine de la carte locale
- $\varphi : U \rightarrow \Omega$  est un homéomorphisme où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$

**Définition 7 (Atlas)** Un atlas sur  $X$  est une famille  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de cartes locales telles que  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ .

Lorsque deux domaines  $U_i$  et  $U_j$  ont une intersection non vide, les ouverts de  $\mathbb{R}^d$   $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  correspondants portent une même information. Il est alors intéressant de définir une correspondance régulière entre ces informations redondantes.

**Définition 8 (Changement de cartes)** Un changement de cartes est défini entre deux cartes  $(U_i, \varphi_i)$  et  $(U_j, \varphi_j)$  si  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  par  $\varphi_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  telle que  $\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ .

**Définition 9 (Atlas de classe  $\mathcal{C}^p$ )** Un atlas sur  $X$  est dit de classe  $\mathcal{C}^p$  si tous les changements de cartes sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^p$ .

REMARQUE —

Parce que les changements de cartes sont des applications entre ouverts de  $\mathbb{R}^d$ , leur propriété d'être de classe  $\mathcal{C}^p$  est bien définie.

Par contre la régularité des changements de cartes n'implique aucune notion de régularité de la variété elle-même. En particulier, un atlas de classe  $\mathcal{C}^\infty$  peut

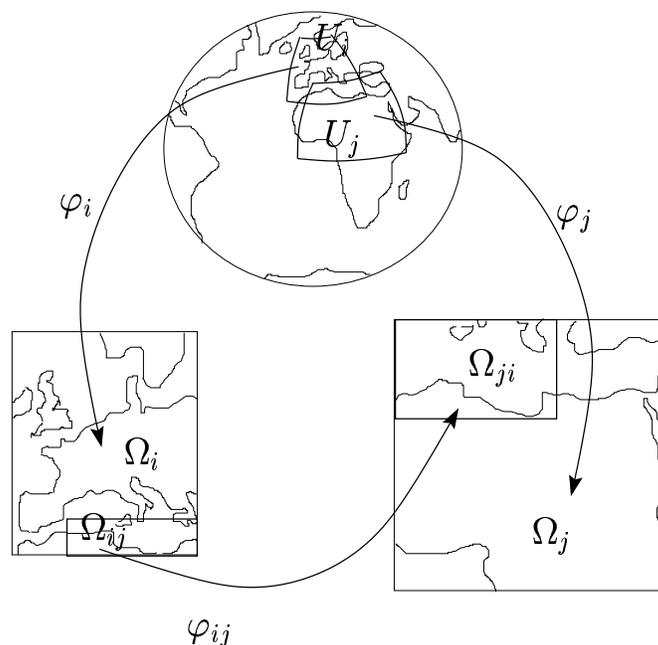


FIG. 2.2 – De l’atlas géographique à l’atlas d’une variété abstraite

très bien être constitué de cartes dont l’homéomorphisme ne soit pas de classe  $C^1$ . Nous étudierons une notion de régularité de la variété un peu plus loin dans ce chapitre.

INTERPRETATION —

Les termes *cartes* et *atlas* n’ont pas été choisis par hasard : ils font évidemment référence aux cartes et atlas géographiques, comme l’illustre la figure 2.2.

## 2.2.2 Partition de l’unité : l’outil liant le local et le global

A présent que nous avons défini les variétés abstraites, exposons un outil qui leur est attaché : la partition de l’unité. La caractéristique principale de cet outil est qu’il permet de faire le lien entre des notions locales et des notions globales définies sur la variété abstraite.

REMARQUE —

La notion de partition de l’unité n’est pas nécessaire à la définition d’une variété abstraite, d’une sous-variété ni même d’une surface régulière. Il s’agit juste d’une notion dont nous nous servirons dans la partie II et qu’il nous a paru à propos de présenter dans ce chapitre théorique.

### 2.2.2.1 Fonction plateau sur un espace localement compact

La brique élémentaire qui permet de construire une partition de l’unité est la fonction plateau.

**Théorème 1** *Soit  $x$  un point d'une variété abstraite compacte  $X$ . Il existe deux ouverts  $V_x$  et  $W_x$  de  $X$  tels que  $x \in W_x \subset V_x$ , et une fonction  $f$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $C^p$ -morphisme, nulle sur  $X - V_x$ , égale à 1 sur  $W_x$ , et telle que  $0 < f(z) < 1$  si  $z \in V_x - W_x$ . On dit alors que  $f$  est une fonction plateau en  $x$ .*

REMARQUE —

La notion de  $C^p$ -morphisme sur une variété n'a pas encore été définie. En effet, nous avons préféré l'introduire plus tard parmi les éléments de la structure différentielle qu'une variété de dimension  $d$  hérite de  $\mathbb{R}^d$  via les cartes. Nous vous invitons donc à vous référer à la définition 68 (page 155).

La démonstration généralement utilisée pour ce théorème se déroule en deux temps. On commence par construire une telle fonction sur  $\mathbb{R}^d$ , puis on transpose le résultat sur  $X$  via les cartes.

Le théorème demande que  $X$  soit une variété abstraite compacte. Rappelons la définition d'un espace compact.

**Définition 10 (Espace compact)** *Un espace topologique  $E$  est compact s'il est séparé et quasi-compact.*

**Définition 11 (Espace séparé)** *Un espace topologique  $E$  est séparé (au sens de Hausdorff) si pour tous  $x$  et  $y$  distincts appartenant à  $E$ , il existe des ouverts  $U$  et  $V$  contenant respectivement  $x$  et  $y$  tels que  $U \cap V = \emptyset$ .*

**Définition 12 (espace quasi-compact)** *Un espace topologique  $E$  est quasi-compact s'il vérifie l'axiome de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert de  $E$ , on peut extraire un recouvrement fini.*

REMARQUE —

En fait la définition d'une fonction plateau ne nécessite pas que  $X$  soit compacte mais seulement localement compacte (pour tout point  $x$  de  $X$  il existe un compact contenant  $x$  et contenu dans  $X$ ). Aussi, on peut montrer que toute variété abstraite est localement compacte. On peut donc définir la fonction plateau sur n'importe quelle variété abstraite.

### 2.2.2.2 Définition d'une partition de l'unité

Nous pouvons à présent définir une partition de l'unité sur une variété abstraite compacte [FK97].

**Définition 13 (Partition de l'unité)** *Soit  $X$  une variété abstraite compacte décrite par un atlas de classe  $C^p$ . Soit une famille finie  $\{U_i : i \in I\}$  d'ouverts de  $X$  recouvrant  $X$ . Une famille de fonctions  $\psi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{U_i : i \in I\}$  si elle vérifie les axiomes suivants :*

- le support de  $\psi_i$  est contenu dans  $U_i$  ;
- $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$ , quel que soit  $x$  de  $X$  ;
- $\sum_{i \in I} \psi_i(x) = 1$ , quel que soit  $x$  de  $X$ .

Ce qui nous permet d'établir le théorème suivant :

**Théorème 2** *Soit  $X$  une variété abstraite compacte. Pour tout recouvrement fini  $\mathcal{U}$  de  $X$ , il existe une partition de l'unité subordonnée à  $\mathcal{U}$ .*

REMARQUE —

L'idée générale de la démonstration de ce théorème est la suivante. La variété étant compacte, on peut définir un nouveau recouvrement  $\{V_i : i \in I\}$  de  $X$  tel que  $V_i \subset U_i$ . On définit autant de fonctions plateaux  $\varphi_i$  égales à 1 dans  $V_i$  et à 0 hors de  $U_i$  et à valeurs dans  $[0; 1]$ . Les fonctions normalisées  $\psi_i = \varphi_i / \sum_{j \in I} \varphi_j$  constituent alors une partition de l'unité subordonnée à  $\{U_i : i \in I\}$ .

En fait, la variété abstraite n'a pas à être nécessairement compacte pour y définir une partition de l'unité. Il suffit qu'elle soit séparée (pour définir des fonctions plateaux) et séparable (pour que l'on puisse construire, à partir du recouvrement  $\{U_i : i \in I\}$ , un recouvrement localement fini nécessaire à la normalisation des fonctions  $\psi_i$ ).

**Définition 14 (Espace séparable)** *Un espace  $E$  est séparable s'il existe un ensemble  $\mathcal{B}$  dénombrable de parties de  $E$  tel que tout ouvert de  $E$  soit une réunion d'éléments de  $\mathcal{B}$ .  $\mathcal{B}$  est alors appelée base dénombrable de la topologie de  $E$ .*

**Définition 15 (Recouvrement localement fini)** *Soit  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  un recouvrement d'un espace topologique  $E$  par des ouverts  $U_i$ . Ce recouvrement est dit localement fini, si pour tout  $x$  de  $E$ , il existe un ouvert  $U$  de  $E$  contenant  $x$  tel que  $U$  ne recouvre qu'un nombre fini des  $U_i$ .*

## 2.3 Sous-variété

La deuxième étape pour définir une surface régulière est l'étude de variétés abstraites particulières : les sous-variétés. Parmi celles-ci, nous retrouvons les surfaces implicites et les graphes de fonctions que nous avons rencontrés dans le chapitre 1.

### 2.3.1 Une variété héritant de la topologie de l'espace ambiant

Parmi les variétés abstraites, certaines ont leur topologie qui se confond avec celle de l'espace ambiant : ce sont les sous-variétés.

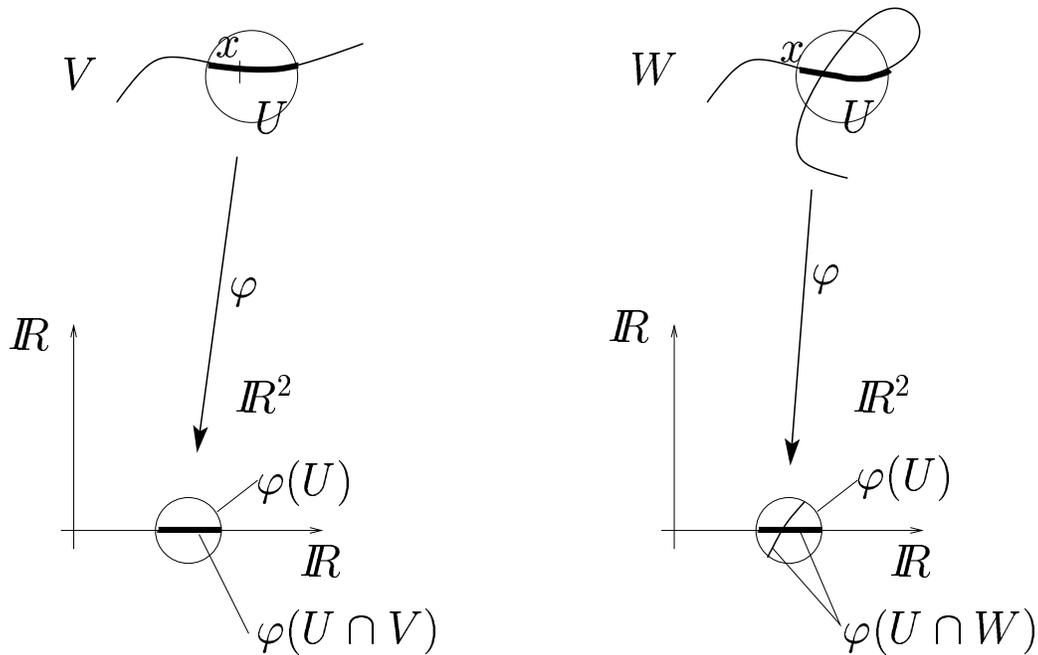


FIG. 2.3 – A gauche  $V$  est une sous-variété de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$  ; à droite,  $W$  ne l'est pas.

### 2.3.1.1 Définition d'une sous-variété

**Définition 16 (Sous-variété)** Soit  $X$  une variété abstraite de dimension  $n$  et  $Y$  une partie de  $X$ .

$Y$  est une sous-variété de dimension  $d$  de  $X$  si pour tout  $y \in Y$  il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $X$  en  $y$  au sens donné par la définition 6 telle que  $\varphi(U \cap Y) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^d$ .

**Proposition 1** La topologie de variété abstraite de  $Y$  coïncide avec la topologie induite par celle de  $X$ .

En particulier,  $\mathbb{R}^n$  étant une variété, nous avons les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  définies par :

**Proposition 2** Une partie  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $d$  de classe  $C^p$  si pour tout  $x$  de  $V$  il existe un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $x$  et un difféomorphisme  $\varphi$  de classe  $C^p$  de  $U$  sur  $\varphi(U)$ , ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , tels que  $\varphi(U \cap V) = \varphi(U) \cap \mathbb{R}^d$ .

La figure 2.3 présente, à gauche, une illustration de la définition d'une sous-variété  $V$  de dimension 1 de  $\mathbb{R}^2$ , et à droite, une variété abstraite  $W$  de dimension 1 qui n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . Nous avons surligné en gras dans les deux figures un ouvert de la variété contenant le point  $x$  et contenu dans un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ . On peut constater que dans la figure de droite, le voisinage du point  $x$  dans la variété  $W$  ne coïncide pas avec le voisinage de  $x$  au sens de la topologie de  $\mathbb{R}^2$ ,  $W \cap U$ . Ce n'est pas un voisinage au sens de la topologie de  $\mathbb{R}^2$ .

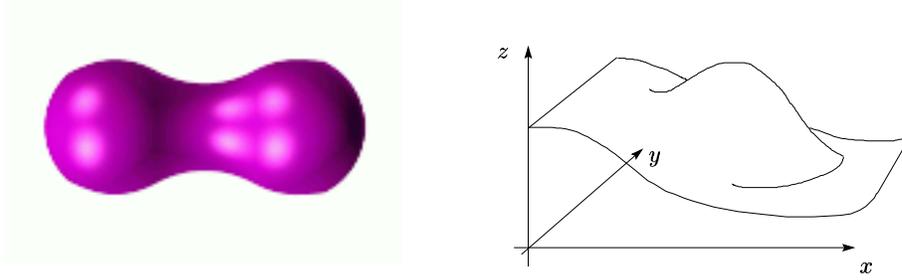


FIG. 2.4 – A gauche une surface implicite définie comme une iso-surface du champ gravitationnel dû à un couple de points (image de B. Wyvill, [www.cpsc.ucalgary.ca/~blob](http://www.cpsc.ucalgary.ca/~blob)). A droite, le graphe d'une fonction.

### 2.3.1.2 Exemples : graphe d'une fonction et fonction implicite

Nous retrouvons ici deux objets rencontrés dans le chapitre 1 et qui se révèlent être des sous-variétés de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2.

Soit  $f : W \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction infiniment différentiable définie sur un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}^3$ , et soit  $V = f^{-1}(0)$  l'ensemble des points  $(x, y, z) \in W$  tels que  $f(x, y, z) = 0$ .

**Théorème 3 (Fonction implicite)** *Si  $V$  est non vide et en tout point  $m_0$  de  $V$ , l'une au moins des dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial z}(m_0)$  est non nulle, alors*

- $V$  est une variété de dimension 2 (séparée) pour la topologie induite par celle de  $\mathbb{R}^3$ .
- Pour tout point  $m_0$  de  $V$  tel que  $\frac{\partial f}{\partial z}(m_0) \neq 0$  (resp  $\frac{\partial f}{\partial x}(m_0) \neq 0$ ; resp  $\frac{\partial f}{\partial y}(m_0) \neq 0$ ), il existe un voisinage ouvert  $U_{m_0}$  de  $m_0$  dans  $V$  tel que la restriction à  $U_{m_0}$  des fonctions  $x$  et  $y$  (resp  $y$  et  $z$ ; resp  $x$  et  $z$ ) soit une carte locale.
- L'atlas constitué par l'ensemble des cartes locales définies par le procédé ci-dessus est de classe  $C^\infty$ .

**Définition 17 (Graphe d'une fonction)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .*

*Soit  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction infiniment différentiable sur  $\Omega$ .*

*Le graphe de  $h$  défini par  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x, y)\}$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ .*

REMARQUE —

Une structure différentiable de  $V$  est définie par un atlas à une seule carte  $(V, \pi)$  avec  $\pi(x, y, h(x, y)) = (x, y)$ .

La figure 2.4 présente des exemples simples de telles sous-variétés.

## 2.3.2 Paramétrisation : l'outil reliant les variétés abstraites aux sous-variétés

Les sous-variétés peuvent être décrites par une paramétrisation. Cette notion, dont nous donnons une définition, sera essentielle pour traduire, pour les variétés abstraites,

les caractéristiques des sous-variétés dont nous avons une bonne intuition. En effet, nous rapprocherons la paramétrisation d'une sous-variété de la description locale d'une variété abstraite par une carte. Dans la suite de ce document, nous pourrions même utiliser, par abus de langage, le terme paramétrisation au lieu de description locale.

### 2.3.2.1 Définition

Rappelons quelques définitions en commençant par celle de difféomorphisme de classe  $C^p$ .

**Définition 18 ( $C^p$ -difféomorphisme)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach (espaces vectoriels normés complets).

Soit  $U$  un ouvert de  $E$  et  $V$  un ouvert de  $F$ .

$f : U \rightarrow V$  est un  $C^p$ -difféomorphisme ( $p \geq 1$ ) si

- $f$  est de classe  $C^p$  de  $U$  dans  $F$  (on note  $f \in C^p(U; F)$ );
- $f$  est bijective;
- $f^{-1} \in C^p(V; E)$ .

REMARQUE —

$f$  est un  $C^p$ -difféomorphisme implique que  $\forall x \in U$ ,  $f'(x)$  soit un isomorphisme de  $E$  dans  $F$  et  $[f'(x)]^{-1} = (f^{-1})'(f(x))$

**Définition 19 (Immersion)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach,

Soit  $U$  un ouvert de  $E$  et  $f \in C^p(U; F)$

$f$  est une immersion en  $x$  si  $f'(x)$  est injective.

Cette propriété peut être caractérisée par

**Théorème 4 (Immersion et injection canonique)** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  et  $f \in C^p(U; \mathbb{R}^n)$  une immersion en  $x$  alors il existe un ouvert  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  contenant  $f(x)$ , un ouvert  $U'$  de  $\mathbb{R}^m$  contenant  $x$  tels que  $f(U') \subset V$  et un  $C^p$ -difféomorphisme  $g$  de  $V$  sur  $g(V)$ , ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , tels que  $g \circ f|_{U'}$  soit la restriction à  $U'$  de l'injection canonique.

Cette propriété permet alors de définir la paramétrisation d'une sous-variété.

**Définition 20 (Paramétrisation)** Une paramétrisation  $(\Omega, g)$  d'une sous-variété  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  est un couple où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $g \in C^p(\Omega; \mathbb{R}^n)$  et tels que  $g$  soit une immersion,  $g(\Omega)$  soit un ouvert de  $V$  et  $g$  induise un homéomorphisme de  $\Omega$  sur  $g(\Omega)$ .

### 2.3.2.2 Equivalence entre paramétrisations

Une sous-variété  $V$  étant une variété abstraite particulière, cela a un sens d'affirmer que si  $(\Omega, g)$  est une paramétrisation de  $V$ ,  $(g(U), g^{-1})$  en est une carte.

Afin de compléter cette analogie, nous définissons une relation d'équivalence entre paramétrisations d'une sous-variété.

**Théorème 5 (Equivalence des paramétrisations)** *Soit  $V$  une sous-variété de classe  $C^p$  de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$ , et deux paramétrisations  $(\Omega_1, g_1)$  et  $(\Omega_2, g_2)$  de  $V \cap U_1$  et  $V \cap U_2$  respectivement (avec  $U_1$  et  $U_2$  voisinages de  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ ), alors l'application  $g_2^{-1} \circ g_1$  appartient à  $C^p(\Omega_1 \cap g_1^{-1}(U_2); \mathbb{R}^d)$ .*

*On dit encore que  $g_1$  et  $g_2$  sont  $C^p$ -compatibles.*

L'analogie entre paramétrisations d'une sous-variété et cartes d'une variété abstraite étant complète, nous pouvons désormais définir pour les variétés abstraites, des notions semblables à celles bien définies pour les sous-variétés. Et en premier lieu, l'espace tangent.

## 2.4 Espace tangent à une variété

Nous cherchons à définir ce qu'est une surface régulière. Il faut bien sûr qu'elle soit continue, mais on aimerait également dire que son plan tangent varie continuellement. Mais qu'est-ce que le plan tangent à une variété? Nous rappelons la définition du plan tangent à une sous-variété qui nous est familière puis nous exposons celle du plan tangent à une variété abstraite, héritée de celle-là grâce aux similitudes établies entre paramétrisations compatibles d'une sous-variété et cartes d'une variété abstraite. Mais la notion de régularité n'a de sens que dans  $\mathbb{R}^n$ . Une dernière étape sera alors nécessaire : faire d'une variété abstraite un objet de  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.4.1 Espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ : un sous-espace vectoriel

L'espace tangent à une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  dérive de la notion intuitive de droite tangente à une courbe. Elle peut être résumée par : sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  contenant l'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tangents à la sous-variété.

**Définition 21 (Vecteur tangent)** *Soit  $V$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Un vecteur  $z$  de  $\mathbb{R}^n$  est tangent en  $x$  à  $V$  s'il y a une courbe  $\alpha$  (i.e. un chemin) de  $V$  de classe  $C^1$  telle que  $\alpha(0) = x$  et  $\alpha'(0) = z$ .*

REMARQUE —

$\alpha'(0)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$  identifiée ici au vecteur  $\alpha'(0).1 = z \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 6** Soit  $V$  une sous-variété de dimension  $d$  de classe  $C^p$  ( $p \geq 1$ ) de  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in V$ .

L'ensemble des vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  tangents à  $V$  en  $x$  forment un sous-espace vectoriel de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^n$  appelé espace tangent à  $V$  en  $x$ , noté  $T_x V$ .

EXEMPLE —

Il est aisé de montrer que l'espace tangent à une surface implicite  $V = f^{-1}(0)$  vérifiant les hypothèses du théorème 3 des fonctions implicites en un point  $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$  est le plan affine d'équation

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(m_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(m_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(m_0) = 0$$

De même, l'espace tangent au graphe d'une fonction  $h$ ,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x, y)\}$$

en un point  $m_0 = (x_0, y_0, z_0)$  est le plan affine d'équation

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0)$$

## 2.4.2 Espace tangent à une variété abstraite : un espace vectoriel

Il est délicat de définir un vecteur tangent à une variété abstraite sans espace vectoriel ambiant. L'idée est alors de considérer non plus le vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  tangent à la sous-variété en un point  $x$ , mais le triplet constitué du point  $x$ , d'une paramétrisation  $g$  de la sous-variété et de l'image réciproque du vecteur tangent  $v$  par la paramétrisation  $g$  dans l'espace des paramètres  $\mathbb{R}^d$  (figure 2.5).

Cela ne change rien à la définition de l'espace tangent à une sous-variété. En revanche, cela permet une généralisation aisée aux variétés abstraites.

**Proposition 3** Soient  $g$  et  $h$ , deux paramétrisations compatibles de  $V$ , sous-variété de dimension  $d$  de classe  $C^p$  ( $p \geq 1$ ) de  $\mathbb{R}^n$  telles que  $g(0) = h(0) = x \in V$ .

Soit  $z \in T_x V = g'(0)(\mathbb{R}^d) = h'(0)(\mathbb{R}^d)$

alors il existe  $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$  tel que  $g'(0)(u) = h'(0)(v) = z$

Plus précisément,  $v = ((h'(0))^{-1} \circ g'(0))(u) = (h^{-1} \circ g)'(0)(u)$ .

La généralisation aux variétés se fait alors naturellement.

Soit  $X$  une variété de dimension  $d$  décrite par un atlas de classe  $C^p$  ( $p \geq 1$ ).

Soit  $x \in X$ ,  $(U, \varphi)$  et  $(V, \psi)$  deux cartes de  $X$  en  $x$ .

Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .

On définit alors une relation d'équivalence entre les triplets  $(U, \varphi, u)$  et  $(V, \psi, v)$  par

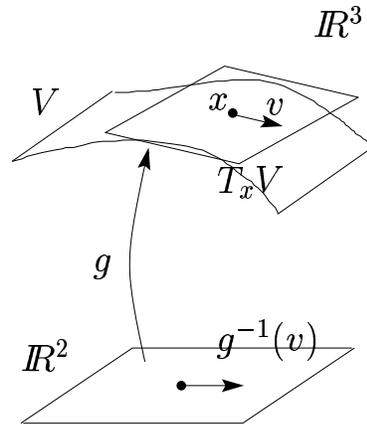


FIG. 2.5 – Pour généraliser la notion de vecteur tangent à une variété abstraite, on considère le triplet  $(x, g, g^{-1}(v))$  comme vecteur tangent à la sous-variété  $V$

**Proposition 4**  $(U, \varphi, u) \sim (V, \psi, v)$  ssi  $(\psi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x))(u) = v$

**Définition 22 (Vecteur tangent à une variété)** Soit  $X$  une variété et  $x \in X$ . On appelle vecteur tangent à  $X$  en  $x$  une classe d'équivalence de triplets pour la relation d'équivalence donnée ci-dessus.

**Définition 23 (Espace tangent)** Soit  $X$  une variété de classe  $C^p$  ( $p \geq 1$ ) de dimension  $d$  et  $x \in X$ .

L'espace tangent  $T_x X$  à  $X$  en  $x$  est l'ensemble des vecteurs tangents à  $X$  en  $x$ .

REMARQUE —

Si l'on fixe une carte  $(U, \varphi)$  en  $x$ , on peut lui associer une bijection notée  $\theta_x$  de  $T_x X$  sur  $\mathbb{R}^d$ .

**Théorème 7** L'espace tangent en un point  $x$  d'une variété abstraite possède une structure canonique d'espace vectoriel de dimension  $d$  (transférée de celle de  $\mathbb{R}^d$  par  $\theta_x$ ).

REMARQUE —

Soit  $X$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$  et  $x \in X$ .

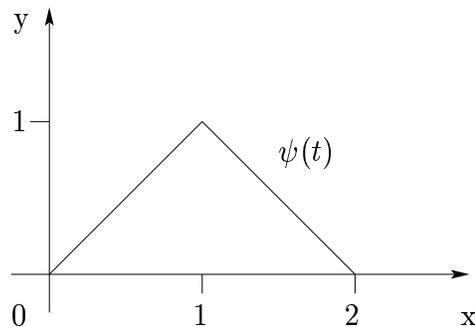
Soit  $E_x$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$  en tant que sous-variété.

Soit  $T_x X$  l'espace tangent à  $X$  en  $x$  en tant que variété.

Alors  $E_x$  et  $T_x X$  sont canoniquement isomorphes.

## 2.5 Surface : d'une variété abstraite à un objet de $\mathbb{R}^3$

Nous avons défini ce qu'est une variété et son espace tangent en un point. Aussi, nous souhaitons définir une surface comme une variété de dimension 2, régulière. Comme évoqué

FIG. 2.6 – Une courbe non régulière paramétrée par une fonction de classe  $C^1$ 

précédemment, la notion de régularité est propre à  $\mathbb{R}^n$  et à sa structure différentiable. Aussi, une variété abstraite de dimension 2 peut devenir un objet de  $\mathbb{R}^3$  par simple injection canonique. Nous pouvons alors établir quelles propriétés doit posséder cette injection pour que le résultat puisse être qualifié de surface régulière. Ces propriétés sont définies grâce à la structure différentielle héritée de  $\mathbb{R}^2$  que nous rappelons en annexe A.3.

### 2.5.1 Définition d'une surface

Nous soulignons le fait que les définitions présentées jusqu'alors sont des définitions classiques tirées d'ouvrages de référence. Au contraire, ce paragraphe est consacré à la définition personnelle de notions dont nous nous servirons par la suite.

Dans cette partie, nous notons  $\iota$  l'injection canonique sur  $\mathbb{R}^3$ . Nous considérons  $X$ , une partie de  $\mathbb{R}^3$  sur laquelle nous posons une structure de variété abstraite de dimension 2 par la définition d'un atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  de classe  $C^p$ , ( $p > 0$ ). Enfin nous notons  $\Omega_i = \varphi_i(U_i)$ .

Une première définition pour une surface "lisse" est la suivante :

**Définition 24 (Surface quasi-régulière)** *L'image par  $\iota$  de  $X$  est une surface quasi-régulière ssi  $\forall i \in I$ ,  $\psi_i = \iota \circ \varphi_i^{-1} \in C^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ .*

Mais ces hypothèses sont insuffisantes comme l'illustre l'exemple suivant.

En effet, la ligne brisée de la figure 2.6 peut être décrite par une seule carte  $(U, \varphi)$  où  $U = \varphi^{-1}(]0; 2[)$  et  $\psi = \iota \circ \varphi^{-1}$  est la fonction de classe  $C^1$  définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (t^2 - 2t + 1) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-t^2 + 2t) & \text{si } t \in ]0; 1[ \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} (-t^2 + 2t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (t^2 - 2t + 1) & \text{si } t \in [1; 2[ \end{cases}$$

C'est pourquoi nous introduisons la définition suivante :

**Définition 25 (Surface régulière)** *L'image par  $\iota$  de  $X$  est une surface régulière ssi  $\forall i \in I, \psi_i = \iota \circ \varphi_i^{-1} \in C^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$  et  $\forall i \in I, \forall w \in \Omega_i, (\psi_i'(w))$  est injective.*

Cette définition retrouve les notions propres à la définition d'une structure différentielle sur une variété abstraite (annexe A.3). En particulier, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 5** *L'injection canonique dans  $\mathbb{R}^3$   $\iota$  est un  $C^p$ -morphisme si et seulement si  $\forall i \in I, \iota \circ \varphi_i^{-1} \in C^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ .  
L'injection  $\iota$  est une immersion si et seulement si  $\forall i \in I, \forall x \in U_i, (\iota \circ \varphi_i^{-1})'(\varphi_i(x))$  est injective.*

On définit alors naturellement la surface abstraite régulière par

**Définition 26 (Surface abstraite régulière)**  *$X$  est une surface abstraite régulière ssi  $\iota$  est un  $C^p$ -morphisme et une immersion de  $X$  dans  $\mathbb{R}^3$ .*

On retrouve alors la définition de surface régulière par la proposition suivante :

**Proposition 6** *Une surface régulière est l'image d'une surface abstraite régulière par l'injection canonique dans  $\mathbb{R}^3$ .  
On dira que les deux surfaces sont associées.*

## 2.5.2 Propriétés issues de la géométrie différentielle

Nous soulignons le fait qu'une surface régulière peut ne pas être une variété abstraite. En effet,  $\iota \circ \varphi_i^{-1}$  peut ne pas être bijective. C'est donc par abus de langage mais surtout par simplicité que nous définissons l'atlas d'une surface régulière. Dans la suite de ce mémoire, lorsque nous évoquerons l'atlas du modèle de surface que nous construisons, c'est de ce dernier qu'il s'agira.

**Définition 27 (Atlas d'une surface régulière)** *Si une surface abstraite régulière est définie par l'atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ , alors l'ensemble  $\{(\Omega_i, \psi_i)\}_{i \in I}$  où  $\Omega_i = \varphi_i(U_i)$  et  $\psi_i = \iota \circ \varphi_i^{-1}$  est un atlas de la surface régulière associée.  
On dit aussi qu'il est l'atlas associé à celui de la variété abstraite.*

On définit enfin naturellement le plan tangent à une surface régulière.

**Définition 28 (Plan tangent à une surface régulière)** *Le plan tangent à une surface régulière décrite par un atlas  $\{(\Omega_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ , est défini par un triplet  $(\Omega_i, \psi_i, w)$  avec  $w \in \Omega_i$ . Il est identifié au sous-espace affine de dimension 2 de  $\mathbb{R}^3$  engendré par la base  $(\frac{\partial \psi_i}{\partial u_1}(w), \frac{\partial \psi_i}{\partial u_2}(w))$  qui est bien définie par définition, et le point  $\psi_i(w)$ .  $((u_i, v_i)$  est une base de  $\mathbb{R}^2$  centrée en  $w$ ).*

## 2.6 Conclusion

Nous avons rappelé dans ce chapitre quelques notions de géométrie différentielle (variété, sous-variété, espace tangent) qui nous ont permis de définir les surfaces régulières et quasi-régulières.

Nous avons mis en évidence quelques liens entre la géométrie différentielle et les modèles de surfaces utilisés en informatique graphique. Ainsi, les surfaces implicites et les graphes de fonctions sont des sous-variétés.

Ajoutons que les surfaces de Bézier et les surfaces B-splines ne sont pas des surfaces régulières ni des sous-variétés de  $\mathbb{R}^3$  *a priori*. Cependant, certaines de ces surfaces sont bien des surfaces régulières. La surface abstraite associée a pour atlas un unique couple  $(U, \varphi)$  tel que  $\varphi(U)$  soit le domaine de paramétrisation rectangulaire  $]u_0, u_n[ \times ]v_0, v_n[$  défini sur  $\mathbb{R}^2$ . Il n'y a donc pas de fonction de transition. Pour que cela soit une surface régulière, il faudrait s'assurer que  $P(u, v)$  soit de classe  $C^1$  ce qui peut ne pas être le cas (en particulier en prenant deux points de contrôle confondus), puis que  $P'(u, v)$  soit injective (voir le paragraphe 1.4.1.1 page 18). Il est important de souligner que la position des points de contrôle étant libre, on peut très bien générer des surfaces qui s'auto-intersectent, et qui ne sont donc pas des sous-variétés de  $\mathbb{R}^3$ .

Enfin, la solution proposée par Hahn pour définir une notion de continuité entre les pièces d'une surface paramétrée par morceaux (page 23) se rapproche du cadre des surfaces régulières et des atlas associés (le point essentiel étant de passer de domaines fermés adjacents à des domaines ouverts qui se superposent). Cette dernière remarque est un argument pour utiliser directement la représentation de surfaces par cartes afin de modéliser des surfaces régulières.

Nous présentons dans le chapitre suivant la construction d'un modèle de surface, complétant les modèles déjà existants et rappelés dans le chapitre 1, et représentant une surface régulière.



# Chapitre 3

## Définition par un atlas d'une surface approchant une surface triangulée

### 3.1 Introduction

Dans ce troisième chapitre, nous présentons un nouveau modèle de surfaces fondé sur la représentation de surfaces par un atlas de cartes et résolvant intrinsèquement le problème de continuité entre les morceaux ordinairement rencontrés dans les modèles de surfaces paramétriques. Nous avons présenté ce modèle dans la *Revue de CFAO et d'informatique graphique* [GAM01].

Nous commençons par mettre en évidence la qualité de ce modèle avant d'évoquer les utilisations en informatique graphique pour lesquelles il apparaît particulièrement bien adapté. Enfin, nous proposons une méthode en trois étapes pour construire un tel modèle de surfaces à partir d'une surface triangulée. Nous faisons l'hypothèse que cette surface maillée est une variété de dimension 2 connexe et compacte.

### 3.2 Atlas : un modèle issu de la géométrie différentielle

Nous restreignons les surfaces que nous représentons aux surfaces régulières (voir chapitre 2). Ce cadre reste malgré tout suffisamment général pour représenter de nombreuses surfaces en informatique graphique ou en imagerie médicale. Pour de telles surfaces, la géométrie différentielle propose une description naturelle par un atlas de cartes. Nous choisissons alors de concevoir notre modèle de surfaces directement à partir de cette représentation.

Ce modèle peut être interprété comme la généralisation de la représentation paramétrique par morceaux à des morceaux qui se superposent. Ce modèle allie donc les qualités de ces représentations évoquées dans le chapitre 1 à celles héritées de la géométrie différentielle. En

particulier, nous avons observé que pour définir une notion de continuité entre les morceaux d'une représentation paramétrique, on se ramenait localement au cadre de la représentation par un atlas de cartes (voir les travaux de Hahn rappelés au paragraphe 1.4.2.1, page 23). De plus, cette représentation semble tout particulièrement indiquée pour ramener des traitements à réaliser sur la surface à des traitements sur  $\mathbb{R}^2$  et pour travailler localement sans se soucier d'une quelconque perte de la cohérence globale (pour cela, on utilisera volontiers une partition de l'unité).

Parmi les qualités que ce modèle partage avec les représentations évoquées dans le chapitre 1, nous notons d'une part qu'il s'agit d'une représentation paramétrique. Elle permet donc une construction de la surface plus souple et maîtrisée qu'une représentation implicite. D'autre part, les paramétrisations locales sont définies sur des domaines de  $\mathbb{R}^2$  connus explicitement. Cette représentation semble alors toute indiquée pour des applications telles que le plaquage de texture (contrairement au modèle de subdivision par exemple). Et comme les paramétrisations locales sont connues elles aussi explicitement et sont continues par définition (de classe au moins  $C^1$ ) un travail sur la continuité différentielle du plaquage de la texture peut être envisagé (contrairement au cas du maillage où la paramétrisation n'est que de classe  $C^0$ ).

### 3.3 Utilisation en informatique graphique

Observons plus précisément à quelles applications propres à l'informatique graphique cette nouvelle représentation peut être utile.

**Simplification** On recherche à simplifier un maillage pour réduire sa place en mémoire ou pour construire une étape d'une représentation hiérarchique, représentation idéale pour la transmission progressive de celle-ci. La méthode généralement utilisée pour cela est de diminuer le nombre de faces [TP75, SZL92, RB93, Hop96].

La représentation de surfaces par un atlas permet une simplification efficace en remplaçant de nombreuses faces par un seul morceau de surface régulière décrit par une des cartes de l'atlas.

**Paramétrisation d'une surface** La paramétrisation d'une surface peut se comprendre de deux façons différentes. Ce peut être la construction d'une description paramétrique d'un objet, généralement une triangulation [LMH00, EDD<sup>+</sup>95]. Ce peut également être l'approximation par une surface paramétrique d'un ensemble désordonné de données [HDD<sup>+</sup>94] ou d'une surface implicite [Har00].

Dans tous les cas, ce qui est recherché au travers de la paramétrisation est le dépliement de la surface. Une fois la surface dépliée, on peut y appliquer une texture ou bien encore proposer une nouvelle paramétrisation du même objet (on peut ainsi définir un nouveau

maillage dont les sommets reposent sur un maillage original mais avec une organisation différente entre les faces, les arêtes et les sommets [EDD<sup>+</sup>95]).

La représentation de surfaces par cartes est tout naturellement adaptée au dépliement.

**Régularisation d'une surface** On peut chercher à approcher une surface donnée (le plus souvent un maillage) par une surface plus lisse. Une solution élégante est l'utilisation d'une méthode de subdivision. Mais quelle que soit l'étape de cet algorithme nous avons toujours un maillage, c'est-à-dire une surface  $C^0$  affine. Ce n'est qu'à la limite (théorique) du processus que la surface est régulière (voir au chapitre 1).

Une autre solution est d'approcher la surface par une surface paramétrée dont on maîtrise la régularité. Mais les solutions proposées sont soit un patchwork de surfaces lisses, raccordées entre elles (B-Splines) ou non [LMH00], soit un seul morceau continu [Flo97].

La représentation de surfaces par cartes propose un cadre idéal pour l'approximation d'une surface par une surface régulière, au sens donné au chapitre 2.

**Edition** Enfin on peut envisager l'utilisation d'une représentation par un atlas à des fins d'édition (on dit également synthèse) de surfaces. Une des idées possibles serait de venir placer des primitives simples (quadriques) décrites par une équation de degré faible (deux) sur des domaines de  $\mathbb{R}^2$  simples, connus et reliés par des fonctions de transitions connues. Ces primitives seraient par la suite reliées continûment les unes aux autres grâce à la structure proposée par la représentation par cartes (voir au chapitre 6).

**Application choisie** Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi de construire l'atlas d'une surface régulière  $\mathcal{S}$  approchant un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$ .  $\mathcal{S}$  est naturellement dépliée. Elle constitue une régularisation de  $\mathcal{M}$  car l'atlas est de classe  $C^1$ . Enfin, le nombre de cartes sera aussi petit que possible faisant ainsi de cette représentation une simplification de  $\mathcal{M}$ . Comme nous l'exposons dans le paragraphe suivant, le mode de construction de l'atlas est très semblable à celui décrit ci-dessus pour l'édition de surfaces.

## 3.4 Construction de l'atlas

Pour construire l'atlas d'une surface régulière  $\mathcal{S}$  approchant un maillage  $\mathcal{M}$ , nous procédons en trois temps :

1. nous approchons  $\mathcal{M}$  par une famille de primitives (morceaux de plan approchant une région définie sur  $\mathcal{M}$ ),
2. les primitives sont paramétrées sur des domaines de  $\mathbb{R}^2$  reliés par des fonctions de transition qui sont des  $C^1$ -difféomorphismes,

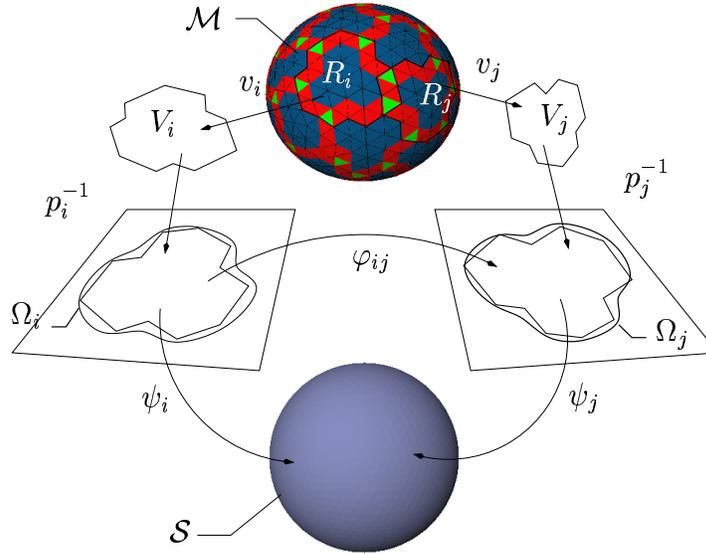


FIG. 3.1 – Atlas de classe  $C^1$  d'une surface  $\mathcal{S}$  approchant le maillage  $\mathcal{M}$

- grâce à cette structure d'atlas et à la définition d'une partition de l'unité sur celle-ci, nous fondons les primitives entre elles par combinaison convexe.

Nous proposons à présent des notations et un schéma illustrant cette construction et que nous retrouverons, tel un guide, tout au long de ce manuscrit.

Pour construire notre modèle, nous définissons donc dans un premier temps une famille de primitives simples  $V_i$  approchant les régions  $R_i$  d'un recouvrement défini sur  $\mathcal{M}$  (voir chapitre 4). Nous avons choisi de définir  $V_i$  comme la projection sans repliement (donc bijective) de  $R_i$  sur un plan qui approche cette région :  $V_i = v_i(R_i)$ .

Chaque primitive  $V_i$  admet une paramétrisation naturelle  $p_i$  sur un domaine  $\Omega_i^0$  de  $\mathbb{R}^2$ . Comme nous le verrons dans le paragraphe 4.2.1, le recouvrement est défini de telle sorte que chaque région  $R_i$  de  $\mathcal{M}$  est composée d'une zone pure (ensemble des points de  $\mathcal{M}$  n'appartenant qu'à  $R_i$ ) entourée d'une couronne polygonale d'échange (ensemble des points de  $R_i$  qu'elle partage avec d'autres régions du recouvrement). Le recouvrement sera dit *bien formé*. On définit des zones pures et des couronnes d'échange sur les domaines  $\Omega_i^0$  comme les images par les fonctions  $p_i^{-1} \circ v_i$ , de celles définies sur  $R_i$ . On définit les domaines  $\Omega_i$  dans  $\mathbb{R}^2$  en approchant la couronne polygonale d'échange de  $\Omega_i^0$  par une couronne continue (voir chapitre 5). Chaque primitive  $V_i$  est alors approchée par la primitive  $p_i(\Omega_i)$ .

Si  $R_i$  et  $R_j$  sont deux régions dont l'intersection est non vide, nous mettons en correspondance les points de  $p_i(\Omega_i)$  et de  $p_i(\Omega_j)$  qui approchent le même point de  $R_i \cap R_j$ . Plus précisément, nous notons  $\Omega_{ij}^0$  la partie de la couronne d'échange de  $\Omega_i^0$  définie par  $p_i^{-1} \circ v_i(R_i \cap R_j)$ . Nous notons  $\Omega_{ij}$  la partie correspondante de la couronne d'échange de  $\Omega_i$ . La mise en correspondance entre les points de  $p_i(\Omega_i)$  et de  $p_i(\Omega_j)$  est alors réalisée par la

définition d'une fonction de transition  $\varphi_{ij} : \Omega_{ij} \rightarrow \Omega_{ji}$  qui doit être un  $C^1$ -difféomorphisme.

Enfin,  $\mathcal{S}$  est définie comme le raccord continu des primitives  $p_i(\Omega_i)$  par combinaison convexe des points mis en correspondance par les fonctions de transition. Les poids de la combinaison convexe sont des fonctions définies sur les domaines  $\Omega_i$  qui constituent une partition de l'unité sur  $\mathcal{S}$  (voir chapitre 6).

## 3.5 Conclusion

Après avoir mis en évidence les nombreuses qualités du modèle de surfaces fondé sur la représentation d'une surface par un atlas de cartes, nous avons proposé une méthode en trois étapes pour construire un tel modèle à partir d'un nuage de points 3D interpolés au préalable par une surface triangulée  $\mathcal{M}$ .

Chacune de ces étapes pose des problèmes géométriques que nous résolvons dans la deuxième partie de ce mémoire :

- Comment définir un recouvrement bien formé sur  $\mathcal{M}$  ?
- Comment approcher la couronne d'échange polygonale de  $\Omega_i^0$  par la couronne d'échange continue de  $\Omega_i$  ?
- Comment raccorder les primitives  $p_i(\Omega_i)$  entre elles afin de définir une surface régulière  $\mathcal{S}$  ?

Les réponses à ces questions se trouveront respectivement dans les chapitres 4, 5 et 6.



# Conclusion

Nous avons présenté dans cette première partie du mémoire, un nouveau modèle de surfaces fondé sur la représentation de surfaces par un atlas de cartes, notion issue de la géométrie différentielle. Ce modèle hérite des nombreuses qualités de cette notion et apparaît alors particulièrement utile dans divers domaines de l'informatique graphique tels que la paramétrisation, la régularisation, la simplification ou encore l'édition de surfaces. Nous avons refermé cette partie sur la description d'une méthode permettant de construire un tel modèle à partir de premières données numériques 3D interpolées au préalable par une surface triangulée. Nous avons mis en évidence les problèmes géométriques que chaque étape de cette méthode rencontre.

Nous proposons, dans la deuxième partie de ce mémoire, des solutions innovantes à chacun d'entre eux, tout en suivant en parallèle l'application de ces solutions à la construction du modèle.



*Dijon, Mars 2001*

## Deuxième partie

# Etudes géométriques et application à la construction d'un atlas



# Introduction

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous étudions trois problèmes géométriques rencontrés dans la construction d'un modèle de surfaces fondé sur la représentation de surfaces par un atlas de cartes.

Dans le chapitre 4, nous définissons un recouvrement bien formé sur une surface triangulée  $\mathcal{M}$  qui est une variété de dimension 2 connexe et compacte. Nous démontrons en particulier que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Cette définition nous permet d'approcher  $\mathcal{M}$  par une famille de morceaux de plans, chaque morceau approchant une région du recouvrement de  $\mathcal{M}$ .

Dans le chapitre 5, nous définissons l'approximation d'une couronne polygonale du plan par une couronne continue paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme. Cette approximation nous permet de déduire des domaines réguliers à partir des domaines de paramétrisation des morceaux de plans définis ci-avant. Ces domaines réguliers sont de plus reliés partiellement par des  $C^1$ -difféomorphismes là où leurs domaines de paramétrisation coïncident.

Enfin, dans le chapitre 6, nous étudions le problème du raccord continu de surfaces, et plus particulièrement le raccord par combinaison convexe, intimement lié à la représentation par un atlas de cartes. Ce raccord nous permet de définir la surface finale  $\mathcal{S}$  comme le raccord continu des primitives approchant  $\mathcal{M}$ .



# Chapitre 4

## Recouvrement d'une surface triangulée

### 4.1 Introduction

La première étape de la construction du modèle de surfaces fondé sur la représentation de surfaces par cartes est l'approximation du maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  par des morceaux de plans nommés primitives (figure 4.1). Pour cela nous proposons de définir un recouvrement de  $\mathcal{M}$  par des régions, chaque région étant bien approchée par un plan. De plus les régions doivent se recouvrir selon de bonnes propriétés, appropriées à l'utilisation que nous en faisons dans le cadre de la construction de notre modèle de surfaces. Nous parlerons de *recouvrement bien formé*.

Après avoir mis en évidence quelques similitudes entre analyse d'images et modélisation géométrique, nous choisissons d'adapter l'algorithme de division-fusion connu pour la segmentation d'une image à la définition d'un recouvrement. Cet algorithme utilise la notion de dual. Ainsi, après avoir défini un recouvrement bien formé, nous démontrons que son nerf (son dual) est une triangulation combinatoire. Nous établissons ensuite des conditions suffisantes sur le nerf pour, qu'après fusion de certaines de ces régions, le recouvrement reste bien formé. A partir de ces conditions, nous présentons alors un algorithme de définition d'un recouvrement bien formé sur le maillage  $\mathcal{M}$ . Enfin, nous appliquons cette définition à la construction de notre modèle de surfaces.

#### 4.1.1 Analyse d'images et modélisation géométrique : des domaines cousins

Les travaux d'analyse d'images et de modélisation géométrique sont parfois très proches. Cela n'est pas surprenant car tous deux traitent d'objets topologiques dont chaque élément porte des informations. Ces informations peuvent être géométriques ou non. En effet, une

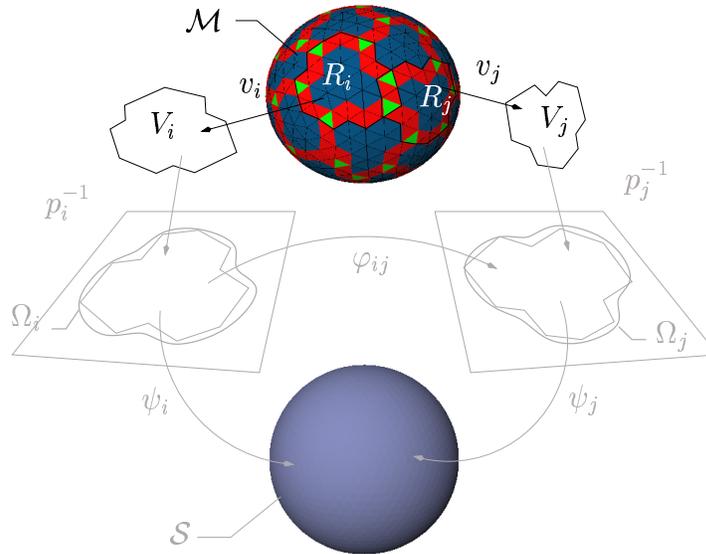


FIG. 4.1 – Première étape de la construction de notre modèle : l'approximation de  $\mathcal{M}$  par des primitives planes

image est un ensemble de pixels sur lequel on peut définir une notion de voisinage (figure 4.2). De plus, chaque pixel porte une information géométrique (les coordonnées de

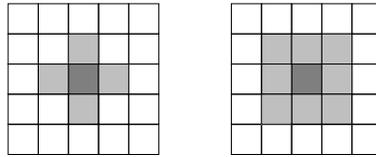


FIG. 4.2 – Relations de voisinage définies sur des pixels. En gris sombre, le pixel concerné, en gris clair ses voisins. A gauche, le voisinage est défini selon la 4-connectivité, à droite selon la 8-connectivité

sa position et sa taille) et une information non géométrique (une valeur de niveau de gris par exemple). De même, un maillage triangulaire est, comme nous l'avons présenté dans la section 1.4, un ensemble d'éléments (sommets, arêtes et faces) liés par des notions de voisinage (deux éléments sont incidents si l'un est contenu dans l'autre et adjacents s'ils partagent un même sous-élément) et portant une information géométrique (les coordonnées des sommets) et, optionnellement, une information non-géométrique (une texture par exemple).

Parmi ces travaux figure la recherche d'une famille de régions, chacune d'entre elles étant un ensemble connexe d'éléments d'un objet topologique (dans un ensemble connexe, tout élément est voisin d'au moins un autre). De plus, ces éléments doivent partager une propriété concernant l'information géométrique ou non-géométrique qu'ils portent.

Parmi les exemples où cette propriété porte sur une information géométrique, citons la définition de régions sur une surface afin de l'analyser en en extrayant des primitives significatives [BM97, Cha00]. On peut également définir des régions sur une surface afin de synthétiser une nouvelle surface approchante [EDD<sup>+</sup>95, GH95, CP00a]. La propriété est non-géométrique lorsqu'on analyse une image en la segmentant [CP95] ou lorsqu'on simplifie un maillage selon des propriétés de couleur ou de texture [GH98] (lorsque l'on simplifie un maillage, on remplace un ensemble connexe d'éléments par un seul. Simplifier un maillage nécessite donc indirectement de définir des régions connexes d'éléments). Analyse d'images et modélisation géométrique se lient même intimement lorsque l'on interprète une image de niveaux de gris ou de profondeur comme la discrétisation d'une surface définie comme le graphe d'une fonction (voir le paragraphe 1.3), autrement dit comme un champ continu d'altitude [BJ88].

### 4.1.2 Méthodes existantes : pourquoi la division-fusion nous semble la plus adaptée

Parmi les différentes familles de régions que l'on peut définir, deux sont remarquables : la partition et le recouvrement.

**Définition 29 (Partition)** *Une partition d'un espace topologique  $E$  est une famille de régions  $\{A_i\}_{i \in I}$  de  $E$  telles que*

- $\bigcup_{i \in I} A_i = E$  ;
- $\forall (i, j) \in I^2, A_i \cap A_j = \emptyset$ .

**Définition 30 (Recouvrement)** *Un recouvrement d'un espace topologique  $E$  est une famille  $\{U_i\}_{i \in I}$  de régions de  $E$  telles que*

- $\bigcup_{i \in I} U_i = E$ .

**Définition 31 (Recouvrement ouvert)** *Un recouvrement ouvert est un recouvrement dont les éléments sont des ouverts.*

Peu de solutions ont été proposées pour construire un recouvrement. Lorsqu'un recouvrement est construit, on demande généralement à ce que ses régions se superposent selon certaines propriétés. Il est alors délicat de proposer une construction automatique. Soit les méthodes développées laissent alors le soin à l'utilisateur de dessiner manuellement les régions sur la surface [PFH00], soit elles sont très contraintes. Pour généraliser les B-splines à des polyèdres de contrôle quelconques (c'est-à-dire dont les sommets ne sont pas tous de valence égale à quatre), Grimm et Hughes [GH95] définissent une région par élément du polyèdre (sommet, arête et face) tout en contrôlant de façon prédéfinie leur recouvrement. Cotrina et Pla [CP00b, CP00a] appliquent quant à eux un premier raffinement de type Catmull-Clark [CC78] au polyèdre de contrôle afin d'isoler les irrégularités du maillage

(les sommets de valence non égale à quatre). Une région par sommet est alors définie comme un ensemble, centré sur celui-ci, de faces d'arêtes et de sommets (selon la taille désirée des pièces, elles peuvent au contraire être centrées sur les faces). Ils définissent ainsi moins de pièces et de taille plus importante. Le recouvrement que nous construisons impose également quelques contraintes sur la manière dont les régions se superposent, mais elles peuvent être vérifiées automatiquement et rapidement. Nous ne pouvons donc pas nous satisfaire de méthodes aussi rigides.

Au contraire, des solutions nombreuses et efficaces, issues de l'analyse d'images, existent lorsqu'il s'agit de définir une partition (dans certains cas tel que le plaquage de texture, des solutions contraintes sont tout de même nécessaires [MYV93]). Observons donc quelles sont celles qui sont les plus facilement adaptables à la définition d'un recouvrement.

Les méthodes de partitionnement peuvent être classées en deux familles : les approches de type contours et les approches de type régions. Les premières consistent à construire les contours des régions que l'on cherche à définir. Dans le domaine de la modélisation géométrique, on peut ainsi construire des géodésiques reliant des couples de points disposés sur la surface, comme le fait Pedersen [Ped95] pour récupérer région par région la texture issue de la décoration d'une surface implicite. Ces approches sont fondées sur la recherche de discontinuités caractérisant la frontière qui sépare deux régions "homogènes". Elles semblent donc incompatibles avec la construction de régions qui se superposent.

Les approches de type régions, sont complémentaires : elles regroupent des éléments "homogènes". Parmi elles, les méthodes markoviennes aboutissent à l'attribution d'une étiquette à chaque élément de l'objet à segmenter : cet objet ainsi que l'ensemble des étiquettes (à valeurs prises dans une famille prédéterminée), sont considérés comme la réalisation de champs de Markov, l'ensemble markovien des étiquettes étant à estimer sachant la réalisation de l'objet. Elles semblent donc peu appropriées à une généralisation aux régions superposées, surtout que la superposition que nous envisageons doit respecter quelques règles tant sur la forme même des régions que sur celle de leurs intersections. C'est pourquoi les méthodes structurales nous semblent plus indiquées pour une telle généralisation. La plus utilisée est la croissance de régions. Elle consiste à choisir quelques éléments (les germes) auxquels on agrège progressivement les éléments voisins, faisant ainsi croître les régions jusqu'à ce qu'elles recouvrent la totalité de l'objet. De nouveaux germes peuvent être introduits en cours de processus. Dans le domaine de la modélisation géométrique, Bricault et Monga [BM97] font croître les régions par agrégation de pixels 3D afin de partitionner l'ensemble de pixels en régions bien approchées par des quadriques. Eck et *al.* [EDD<sup>+</sup>95] utilisent aussi une telle méthode sur un maillage triangulaire en agrégeant des faces afin de définir un pseudo-diagramme de Voronoï. Ces méthodes nous semblent encore trop peu orientées sur la relation de voisinage qui doit lier les régions. Nous leur préférons les méthodes de division-fusion qui sont guidées par le dual de la partition : le graphe d'adjacence. La première étape de ces méthodes (la division) est une segmentation de l'ensemble des éléments en des petites régions liées par des relations de voisinage (le partage d'une arête par exemple). Ces relations permettent la définition d'un graphe d'ad-

jacence constitué de sommets, chaque sommet symbolisant une région, et d'arêtes reliant deux sommets correspondant à deux régions voisines. Cette première étape constitue une initialisation de la définition des régions. La deuxième étape (la fusion) est l'agrégation de régions voisines, ce qui se traduit par la simplification du graphe d'adjacence. Ces méthodes s'adaptent alors naturellement à des approches pyramidales [MR91].

La généralisation de la méthode de division-fusion à la définition de régions superposées consiste alors à définir la relation de voisinage qui caractérise une superposition correcte, dans un sens à définir, de deux régions. Nous appellerons une famille de régions se superposant correctement et recouvrant l'objet un recouvrement *bien formé*. A ce recouvrement correspond un dual (à définir lui aussi). Il suffit alors de définir un premier recouvrement bien formé, puis de simplifier le dual correspondant de telle sorte qu'il caractérise toujours un recouvrement bien formé de l'objet. C'est ce que nous allons étudier maintenant.

## 4.2 Recouvrement bien formé

On considère un objet topologique  $\mathcal{M}$  connexe et compact, également variété de dimension 2. Nous caractérisons dans cette section des recouvrements particuliers de  $\mathcal{M}$  : les recouvrements bien formés. Les propriétés de ces recouvrements sont définies d'une part pour l'application que nous faisons de tels recouvrements dans le cadre de la construction d'un atlas, et d'autre part pour faciliter leur construction. Nous proposons dans la section suivante une construction de recouvrement qui est déduite de l'algorithme de "division - fusion" utilisé pour le partitionnement, et basée sur l'utilisation d'un dual de la partition. Nous définissons dans cette section le dual d'un recouvrement et démontrons que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire.

Dans cette section,  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  désigne un recouvrement de  $\mathcal{M}$ , et

$$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

est le disque unité ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Nous notons  $\overline{R}$  l'adhérence de  $R$ , autrement dit le plus petit fermé contenant  $R$ .

### 4.2.1 Définition

Nous définissons dans ce paragraphe un recouvrement bien formé. Pour cela, nous commençons par quelques définitions illustrées par les figures 4.3 et 4.4, puis nous exposons les qualités que possède un tel recouvrement pour la construction d'un atlas.

**Définition 32 (Zone pure)** *La zone pure de la région  $R_i$ , notée  $zp(R_i)$ , est l'ensemble des points de  $R_i$  n'appartenant à aucune autre région  $R_j$ .*

**Définition 33 (Régions voisines)** *Deux régions  $R_i$  et  $R_j$  sont voisines si et seulement si  $R_i \cap R_j$  est non vide.*

**Définition 34 (Intersection conforme)** Deux régions voisines  $R_i$  et  $R_j$  ont une intersection conforme si et seulement si  $R_i \cap R_j$ ,  $R_i \setminus \overline{R_j}$  et  $R_j \setminus \overline{R_i}$  sont homéomorphes à  $D$ .

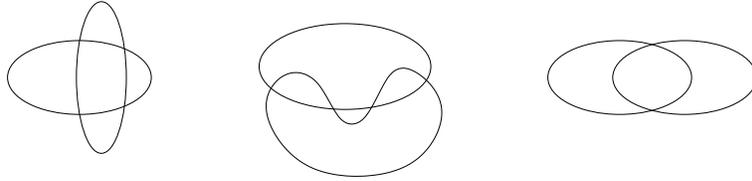


FIG. 4.3 – Exemples de régions voisines. Seules les régions de droite ont une intersection conforme.

**Définition 35 (Recouvrement bien formé)** On dit que le recouvrement  $\mathcal{R}$  est bien formé s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. chaque région est homéomorphe à  $D$ ,
2. deux régions voisines ont une intersection conforme,
3. la zone pure de toute région est un fermé connexe non vide,
4. tout point appartient à au moins une et au plus trois régions,
5.  $\mathcal{R}$  contient au moins quatre régions et au plus un nombre fini.

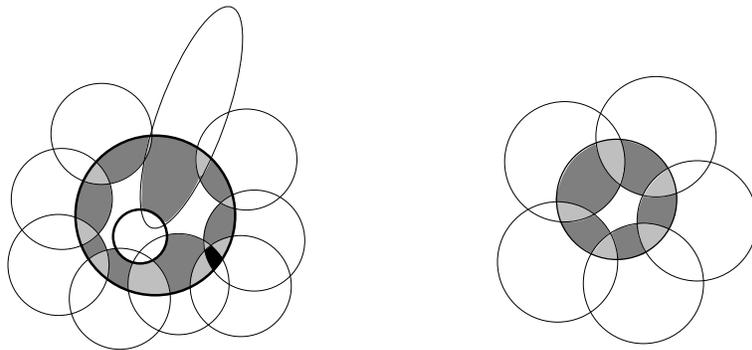


FIG. 4.4 – Exemples de recouvrements. Nous avons coloré dans la région centrale les parties où deux (gris foncé), trois (gris clair) ou quatre (noir) régions se superposent. Seul le recouvrement de droite est bien formé.

**Qualités d'un recouvrement bien formé pour la construction d'un atlas** Nous choisissons une telle définition pour des raisons propres à la construction d'un recouvrement et que l'on exposera dans les paragraphes suivants, mais aussi pour les traitements que l'on souhaite conduire sur les régions  $R_i$ . L'objet topologique  $\mathcal{M}$  que nous considérerons est une

variété de dimension 2 dont nous construirons un atlas (voir chapitre 3). Chaque région  $R_i$  sera un domaine de cet atlas auquel sera associé un ouvert  $\Omega_i$  de  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout couple de régions  $R_i$  et  $R_j$  qui se superposent, il nous faudra construire une fonction de transition qui soit un  $C^1$ -difféomorphisme entre les parties de  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  qui correspondent à  $R_i \cap R_j$  (voir section 2.3). C'est pour simplifier cette construction que nous demandons que  $R_i \cap R_j$  soit homéomorphe à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$ . Demander que  $R_i \setminus \overline{R_j}$  et  $R_j \setminus \overline{R_i}$  soient également homéomorphes à un disque ouvert de  $\mathbb{R}^2$  conduit à une disposition équilibrée des voisins d'une même région qui nous permettra d'assurer par définition la cohérence entre les fonctions de transition qui lient trois régions voisines les unes aux autres. De même il nous faudra définir sur chaque  $\Omega_i$  une fonction  $\alpha$  de classe  $C^1$  qui soit égale à 1 dans la zone pure, à 0 en dehors de  $\Omega_i$  et à valeurs dans  $[0; 1]$  (une fonction d'une partition de l'unité subordonnée au recouvrement). C'est pourquoi nous posons les points 1 et 3 de la définition. Enfin, demander les points 4 et 5 nous assure un dual qui soit une triangulation combinatoire (voir paragraphe 4.2.2.2).

## 4.2.2 Dual d'un recouvrement bien formé

Pour définir un recouvrement, nous proposons d'adapter l'algorithme de division-fusion utilisé pour le partitionnement. Cet algorithme est construit autour du dual d'une partition. C'est pourquoi il nous faut définir le dual d'un recouvrement. Nous démontrerons ensuite que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire.

Les notions que nous présentons dans cette section sont des notions classiques de topologie combinatoire que l'on peut retrouver dans des ouvrages de référence tels que [Ale56, Ede]. Nous les avons déjà abordées dans la section 1.4.2.1 lors de la présentation des surfaces paramétrées par morceaux.

### 4.2.2.1 Le nerf : un dual naturel

Le nerf d'un recouvrement  $\mathcal{R}$  se définit de la façon suivante :

**Définition 36 (nerf)** *Le nerf d'un ensemble fini  $\mathcal{R}$  est le système des sous-ensembles de  $\mathcal{R}$  tels que l'intersection des éléments qui constituent chacun d'entre eux est non-vide,*

$$\text{Nrf } \mathcal{R} = \left\{ \alpha \subseteq \mathcal{R} \mid \bigcap_{R \in \alpha} R \neq \emptyset \right\}$$

Le nerf est le dual naturel d'un recouvrement car il est composé d'éléments associés aux régions et à leurs intersections (donc leur voisinage au sens donné par la définition 33), tout comme le graphe d'adjacence est composé de sommets associés aux régions d'une partition et d'arêtes associées à tout couple de régions voisines. Cela paraîtra plus clairement encore dans le cadre du dual d'un recouvrement bien formé.

#### 4.2.2.2 Le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire

Nous démontrons dans ce paragraphe la proposition suivante :

**Proposition 7** *Le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire.*

Pour cela, nous commençons par quelques définitions avant de présenter la démonstration de cette proposition.

#### Quelques définitions

**Définition 37 (Triangulation combinatoire)** *Une triangulation combinatoire est un couple  $(G, F)$  où  $G$  est un graphe (non-orienté) et  $F$  un ensemble de cycles définis sur  $G$  et de longueur 3 tels que*

- toute arête de  $G$  est incidente à deux et seulement deux cycles,
- pour tout sommet  $u$  de  $G$ , l'ensemble des cycles incidents à  $u$  peuvent être ordonnés en  $(f_0, \dots, f_{k-1})$ ,  $k > 1$  de telle sorte que  $f_i$  soit adjacent à  $f_{i+1}$  (modulo  $k$ ) pour tout  $i \in \{0 \dots k-1\}$  (on dit alors que ces cycles constituent le parapluie de  $u$ ),
- tout sommet de  $G$  est incident à au moins trois arêtes de  $G$ .

**Définition 38 (Graphe)** *Un graphe  $G = (X, U)$  est le couple constitué de*

- $X$  un ensemble d'éléments appelés nœuds ou sommets,
- $U$  un ensemble de couples de sommets, appelés arêtes.

REMARQUE —

Le graphe est dit orienté si les éléments de chaque couple de  $U$  sont ordonnés. On les appelle alors arcs plutôt qu'arêtes.

**Définition 39 (Cycle)** *Un cycle défini sur un graphe  $G$  est une séquence ordonnée d'arêtes telles que*

- deux arêtes successives partagent une et une seule extrémité,
- la première et la dernière arête partagent une et une seule extrémité.

REMARQUE —

Tout cycle de longueur 3 est nécessairement un cycle élémentaire (un cycle élémentaire ne contient aucune séquence d'arêtes extraite qui soit elle-même un cycle).

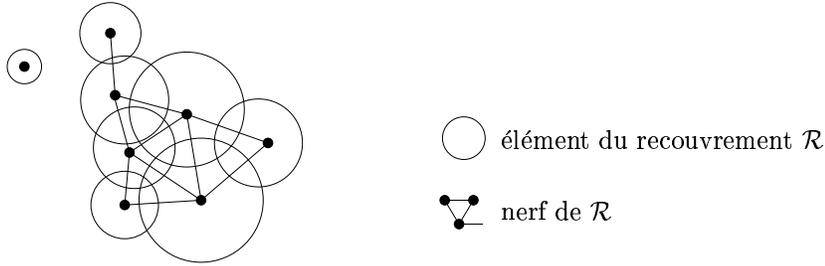


FIG. 4.5 – Un recouvrement et son nerf.

**Définition 40 (Incidence)**

*Un sommet est incident à une arête s'il est une de ses extrémités.*

*Une arête est incidente à un cycle si elle appartient à la séquence qui définit le cycle.*

*Un cycle est incident à un sommet si ce sommet est incident à une des arêtes du cycle.*

**Définition 41 (Adjacence)** *Deux cycles sont adjacents s'ils ont au moins une arête en commun.*

**Démonstration de la proposition 7** Démontrons à présent la proposition 7. Nous proposons une démonstration en quatre temps. Le premier consiste à exprimer le recouvrement sous la forme d'un couple  $(G, F)$ , et les trois suivants à démontrer que ce couple vérifie les trois propriétés énoncées dans la définition 37 (page 62).

**Lemme 7.1** *Le nerf d'un recouvrement bien formé est un couple  $(G, F)$  où  $G$  est un graphe et  $F$  est un ensemble de cycles définis sur  $G$  et de longueur 3.*

**Démonstration 7.1** Le nerf d'un recouvrement, défini dans le paragraphe 4.2.2.1, est constitué de sous-ensembles qui peuvent être regroupés selon leur cardinalité. Or d'après la propriété 4 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé, au plus trois régions peuvent se superposer en un même point. Le nerf est donc constitué de trois familles de sous-ensembles : les régions, les couples de régions voisines et les triplets de régions dont l'intersection est non vide.

On peut donc exprimer le nerf d'un recouvrement bien formé sous la forme d'un couple  $(G, F)$  où  $G$  est un graphe dont chaque sommet est associé à une région du recouvrement, et chaque arête à un couple de régions voisines, et  $F$  est un ensemble de cycles définis sur  $G$  de longueur 3 où chaque cycle est associé à un triplet de régions dont l'intersection est non vide. ■

REMARQUE —

Il est important de remarquer qu'à ce stade de la démonstration, on ne peut pas affirmer que les triplets de régions correspondant aux cycles de  $F$  sont les seuls

triplets de régions voisines deux-à-deux (on peut *a priori* avoir de tels triplets sans que les trois régions s'intersectent en un même lieu).

Les trois propriétés sur  $(G, F)$  données dans la définition 37 se traduisent donc sur les régions du recouvrement en les trois lemmes suivants.

**Lemme 7.2** *Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux régions voisines d'un recouvrement bien formé. Il existe deux et seulement deux autres régions  $R_k$  et  $R_l$  telles que  $R_1 \cap R_2 \cap R_k \neq \emptyset$  et  $R_1 \cap R_2 \cap R_l \neq \emptyset$ .*

**Démonstration 7.2** Si  $R_1$  et  $R_2$  sont deux régions voisines d'un recouvrement bien formé, le lemme 7.2.3 (page 68) nous permet d'affirmer qu'il existe deux autres régions  $R_k$  et  $R_l$  telles que  $R_k \cap R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$  et  $R_l \cap R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ , et le lemme 7.2.4 (page 69) nous permet d'affirmer qu'il n'en existe pas d'autres.

Ce qui démontre le lemme 7.2. ■

**Lemme 7.3** *Soit une région  $R$  d'un recouvrement bien formé. Nous considérons l'ensemble des couples  $(R_1, R_2)$  de régions voisines telles que  $R_1 \cap R_2 \cap R \neq \emptyset$ . Les régions figurant dans cet ensemble peuvent être ordonnées en  $(R_0, \dots, R_{k-1})$  de telle sorte que  $R_i$  et  $R_{i+1}$  soient voisines, pour tout  $j \in (0, \dots, k-1)$  (modulo  $k$ ).*

**Démonstration 7.3** Nous allons montrer d'une part que l'on peut ordonner ainsi une sous-famille parmi les voisines de  $R$ , et d'autre part, qu'aucune autre voisine n'existe.

$R$  admet au moins une voisine. En effet, si ce n'était pas le cas, soit  $R$  est l'unique région du recouvrement ce qui nierait la propriété 5 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé, soit  $\partial R \subset \mathcal{M}$  et alors chacun de ses points appartient à une autre région (propriété 4 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé). Comme les régions sont ouvertes, cette autre région intersecte  $R$ .

Soit donc  $R_0$  une région voisine de  $R$ . Le lemme 7.1 nous permet d'affirmer qu'il existe deux et seulement deux autres régions intersectant  $R \cap R_0$ . On nomme l'une d'elles  $R_1$ . On applique le même raisonnement sur  $R \cap R_1$ . L'une des deux régions intersectant  $R \cap R_1$  est  $R_0$ , on nomme l'autre  $R_2$ . On construit ainsi de proche en proche la séquence  $(R_0, \dots, R_{k-1})$ , où  $R_{k-1}$  est la deuxième région intersectant  $R \cap R_0$  (avec  $R_1$ ). En effet la séquence boucle car  $\partial R$  est continûment paramétrable sur  $\mathcal{C}$  et le recouvrement est fini (propriété 5 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé).

Supposons qu'il existe une autre région voisine de  $R$  notée  $R_k$ . Par hypothèse,  $R \cap R_k \subset R \setminus \bigcup_{0, \dots, k-1} R_i$ . Aussi, comme  $R \setminus \bigcup_{0, \dots, k-1} R_i$  est un fermé,  $R \setminus \overline{R_k}$  n'est pas homéomorphe à  $D$ , ce qui contredit la propriété 1 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé. ■

**Lemme 7.4** *Toute région d'un recouvrement bien formé admet au moins trois régions voisines.*

**Démonstration 7.4** Il s'agit de montrer que toute région d'un recouvrement bien formé admet au moins trois régions voisines.

Nous avons déjà vu dans la démonstration du lemme précédent, que toute région avait au moins un voisin.

Aussi, le lemme 7.1 implique alors l'existence de deux autres régions voisines. Ce qui achève la démonstration. ■

REMARQUE —

La réciproque de la proposition 7 est fautive comme l'illustre la figure 4.6 : un recouvrement dont le nerf est une triangulation combinatoire n'est pas nécessairement bien formé.

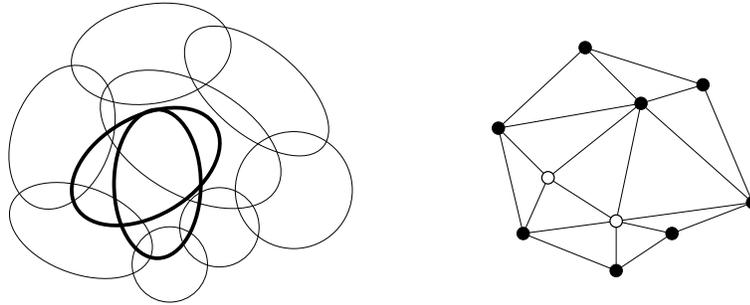


FIG. 4.6 – Exemple de recouvrement mal formé dont le graphe d'adjacence est pourtant bien une triangulation combinatoire. Les deux éléments en trait épais à gauche, représentés par les sommets blancs dans le graphe d'adjacence à droite ne suivent pas la propriété 2 de la définition 35

**Sous-lemmes nécessaires à la démonstration du lemme 7.2** Pour démontrer le lemme 7.2, nous procédons en quatre temps :

**Lemme 7.2.1** *Soient deux régions voisines  $R_1$  et  $R_2$  d'un recouvrement, homéomorphes à  $D$  et ayant une intersection conforme. Les frontières de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_1 \cap R_2$  sont toutes trois décomposables en quatre parties connexes non vides, deux ouvertes et deux fermées (alternativement lors d'un parcours de la frontière) telles que les deux parties fermées appartiennent aux trois frontières.*

Ce lemme est démontré en annexe B.

Nous appelons frontière d'une région l'ensemble des points appartenant à son adhérence privée de son intérieur. Dans le cas d'un recouvrement, chaque région est ouverte. Sa frontière s'écrit alors

$$\partial R = \overline{R} \setminus R \quad (4.1)$$

Dans un premier temps, nous supposons les parties fermées communes aux trois frontières réduites à deux points notés  $A$  et  $B$ . Nous généraliserons les résultats en fin de démonstration. Les trois lemmes suivants concernent des régions appartenant à un recouvrement bien formé. Elles suivent donc en particulier les hypothèses du lemme 7.2.1 (d'après la propriété 1 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé,  $R_1$  et  $R_2$  sont homéomorphes à  $D$ , et d'après la propriété 2,  $R_1$  et  $R_2$  ont une intersection conforme).

**Lemme 7.2.2** *Les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la zone pure d'une région différente de  $R_1$  et  $R_2$ .*

**Démonstration 7.2.2** En effet,  $A \in \partial R_1$  donc, d'après l'équation 4.1,  $A \notin R_1$ . De même,  $A \notin R_2$ .

Or d'après la propriété 4 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé, tout point appartient à au moins une région.

Donc il existe une région  $R_k$  contenant  $A$  telle que  $k \notin \{1, 2\}$ .

Démontrons que  $A$  appartient à la zone pure de  $R_k$ , autrement dit qu'il n'appartient à aucune autre région du recouvrement.

Supposons qu'il existe  $l \notin \{1, 2, k\}$  tel que  $A \in R_l$ .

$R_k \cap R_l$  est un ouvert et  $A \in \overline{R_1 \cap R_2}$ , donc il existe une boule ouverte  $\mathcal{B}$  centrée sur  $A$ , contenue dans  $R_k \cap R_l$  et telle que  $\mathcal{B} \cap R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$ .

Ce qui contredit la propriété 4 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé, selon laquelle tout point ne peut appartenir à plus de trois régions.

De la même manière, on montre que  $B$  appartient à la zone pure d'une région  $R_l$  telle que  $l \notin \{1, 2\}$ .

Rien ne permet d'affirmer pour le moment que  $k$  est différent de  $l$ . ■

Avant de démontrer le lemme suivant, nous proposons une étude des différentes configurations possibles entre  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_k$  et  $R_l$ .

$R_1$  et  $R_k$  sont voisines. On peut donc définir de la même manière deux points  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  sur  $\partial R_1$ .

Ces deux points se positionnent soit sur la composante connexe  $]A; B[$  de  $\partial R_1$  (arc allant de  $A$  à  $B$  dans le sens trigonométrique au sens défini précédemment grâce aux paramétrisations continues sur  $\mathcal{C}$ ), soit sur  $]B; A[$ .

Si les deux points appartiennent à  $]B; A[$ , comme ils sont les uniques points d'intersection entre  $\partial R_1$  et  $\partial R_k$ ,  $A$  ne peut appartenir à  $R_k$  que si  $\partial R_k$  est contenue dans  $R_1 \cup R_2$  (figure 4.8).  $R_k$  étant homéomorphe à  $D$ , cela implique que le recouvrement est constitué des trois seules régions  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_k$ , ce qui contredit la propriété 5 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé. Donc au moins un des deux points  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  appartient à  $]A; B[$ . Nous le notons  $A_{1k}$ .

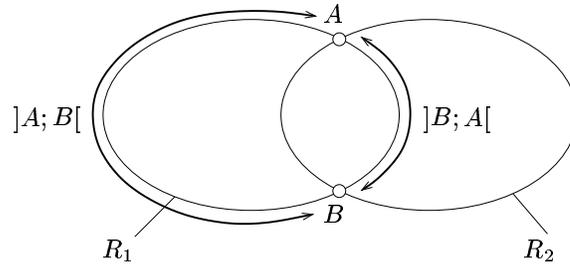


FIG. 4.7 -

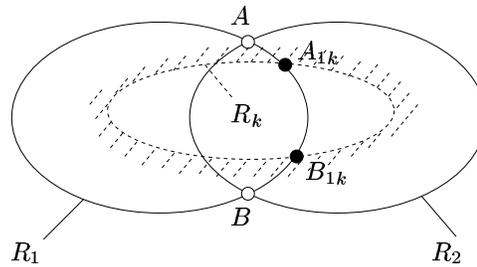


FIG. 4.8 -

Supposons que  $B_{1k}$  appartienne lui aussi à  $]A; B[$ , et plus précisément à  $]A; A_{1k}[$  (figures 4.9 et 4.10).

Comme  $A \in R_k$  et que  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  sont les deux seuls points où  $\partial R_k$  traverse  $\partial R_1$ , la composante connexe de  $\partial R_1 [A_{1k}; B_{1k}]$  est incluse dans  $R_k$ .

Cela implique en particulier que  $R_k = R_l$  et que les points  $A_{2k}$  et  $B_{2k}$  appartiennent à la composante connexe de  $\partial R_2 ]B; A[$ .

Les points se répartissent alors sur  $\partial R_k$  dans l'ordre trigonométrique selon deux séquences possibles. Si cet ordre est  $(B_{1k}, A_{1k}, A_{2k}, B_{2k})$ ,  $A$  et  $B$  appartiennent à la zone pure de  $R_k$  qui se révèle alors se diviser en deux composantes connexes, ce qui contredit la propriété 3 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé.

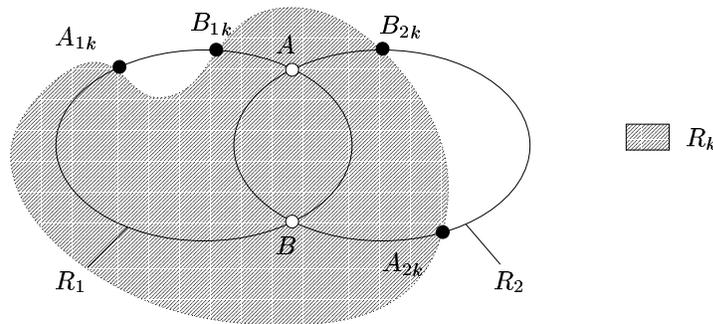


FIG. 4.9 -

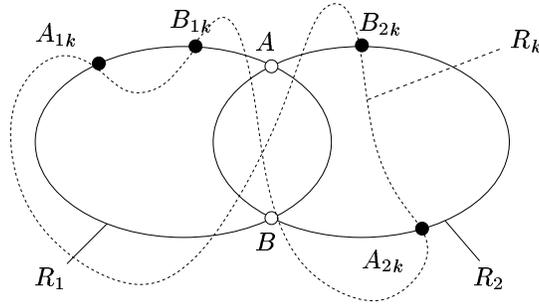


FIG. 4.10 -

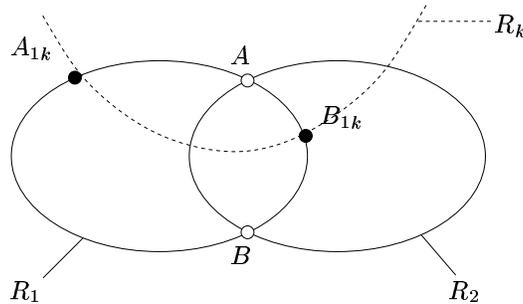


FIG. 4.11 -

Si cet ordre est  $(B_{1k}, A_{1k}, B_{2k}, A_{2k})$ , nous butons sur un problème d'orientation. En effet,  $R_k$  étant homéomorphe à  $D$ , on peut définir un intérieur et un extérieur à  $R_k$  à partir des définitions données sur  $D$  et transmises à la région par l'homéomorphisme. Lors d'un parcours trigonométrique de  $\partial R_k$ , les points de  $R_k$  se trouvent alors toujours à gauche du parcours, ce qui n'est pas le cas avec cet ordre (figure 4.10).

Un résultat identique se trouve si  $B_{1k}$  appartient à  $]A_{1k}; B[$ . Cela signifie donc que  $B_{1k}$  appartient nécessairement à la composante connexe de  $\partial R_1$ ,  $]B; A[$ .

A ce stade de l'étude des configurations, on peut démontrer le lemme 7.2.3.

**Lemme 7.2.3** *Les points  $A$  et  $B$  appartiennent à la zone pure de deux régions différentes  $R_k$  et  $R_l$ .*

**Démonstration 7.2.3** En effet, si  $R_l = R_k$ , alors  $A_{1k}$  et  $B_{1k}$  sont les seuls points où  $\partial R_k$  traverse  $\partial R_1$  et  $A$  et  $B$  se trouvent de part et d'autre de la composante connexe de  $\partial R_k$ ,  $]A_{1k}; B_{1k}[$ .  $A$  et  $B$  ne peuvent donc appartenir tous deux à  $R_k$  (figure 4.11). D'où le résultat. ■

Poursuivons les études de configurations.  $R_k \neq R_l$ , donc il existe un point  $A_{1l} \in ]A; B[$  et  $B_{1l} \in ]B; A[$ .

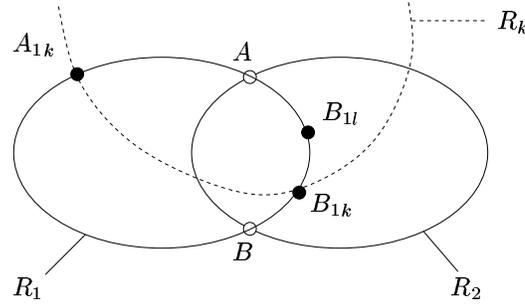


FIG. 4.12 -

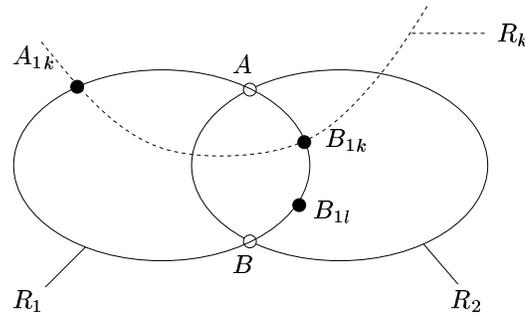


FIG. 4.13 -

Si  $B_{1l}$  appartient à la composante connexe de  $\partial R_1 ]B_{1k}; A[$  alors  $]B_{1k}; B_{1l}[ \subset R_k \cap R_l \cap R_2$  (figure 4.12).

Un raisonnement analogue à celui conduit pour démontrer le lemme 7.2.2 amène à  $R_k \cap R_l \cap R_2 \cap R_1 \neq \emptyset$ , ce qui contredit la propriété 4 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé.

Donc,  $B_{1l}$  appartient à la composante connexe de  $\partial R_1, ]B; B_{1k}[$  (figure 4.13).

La position relative de  $A_{1k}$  et  $A_{1l}$  sur  $\partial R_1$  n'est pas très importante. Elle permettrait juste de savoir si  $R_1$  possède d'autres régions voisines que  $R_2, R_k$  et  $R_l$ .

Nous avons donc achevé l'étude des configurations. Nous pouvons terminer la démonstration des lemmes.

Démontrons le lemme 7.2.4.

**Lemme 7.2.4** *Si  $R_m$  est une région telle que  $R_1 \cap R_2 \cap R_m \neq \emptyset$  alors  $m \in \{k, l\}$ .*

**Démonstration 7.2.4** Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas d'autres régions que  $R_k$  et  $R_l$  qui ait une intersection non vide avec  $R_1 \cap R_2$ .

Supposons qu'il en existe une, notée  $R_m$ . Pour ne pas contredire la propriété 4 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé,  $R_m$  intersecte  $R_1 \cap R_2$  dans  $(R_1 \cap R_2) \setminus (R_k \cup R_l)$ . D'après l'étude de configurations conduite ci-dessus, la frontière de  $R_m$  intersecte celle de  $R_1$

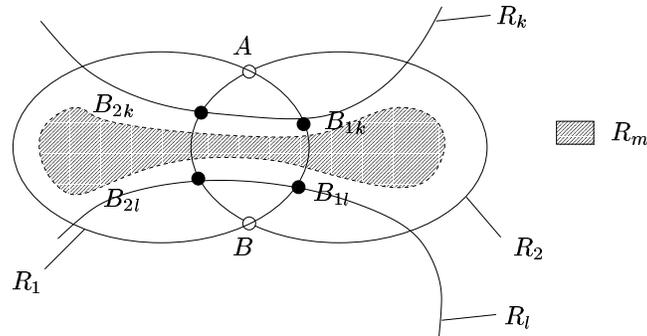


FIG. 4.14 -

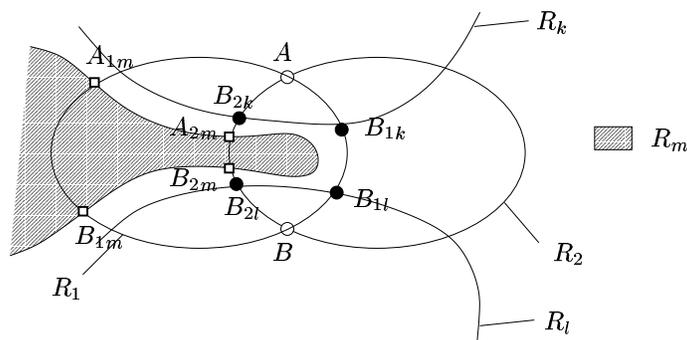


FIG. 4.15 -

dans sa composante connexe  $]A; B[$  ou dans sa composante connexe  $]B_{1l}; B_{1k}[$  (figures 4.14 et 4.15).

Si les deux points où  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_1$  appartiennent à  $]B_{1l}; B_{1k}[$  et les deux points où  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_2$  appartiennent à  $]B_{2k}; B_{2l}[$  (composante connexe de  $\partial R_2$ ), alors  $R_m \subset R_1 \cup R_2$  et donc sa zone pure serait vide, ce qui contredit la propriété 3 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé (figure 4.14).

Supposons que  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_1$  en un point  $A_{1m}$  qui appartienne à  $]A; B[$ . Si son deuxième point de passage dans  $R_1$  appartient également à  $]A; B[$ , alors nécessairement  $\partial R_m$  traverse  $\partial R_2$  en deux points  $A_{2m}$  et  $B_{2m}$  appartenant à  $]B_{2k}; B_{2l}[$  :  $R_m$  est homéomorphe à  $D$  et sa frontière ne traverse celle de  $R_1$  qu'en deux points. Comme nous l'avons établi dans la démonstration du lemme 7.2.2,  $A_{2m}$  et  $B_{2m}$  appartiennent à la zone pure de  $R_1$  qui se retrouve alors découpée en deux composantes connexes, ce qui contredit la propriété 3 de la définition 35 d'un recouvrement bien formé (figure 4.15).

Donc le deuxième point de passage de  $\partial R_m$  dans  $R_1$  appartient à  $]B_{1l}; B_{1k}[$ . Mais alors la composante connexe  $]A_{1m}; B_{1m}[$  de  $\partial R_1$  est incluse dans  $R_m$ . En particulier  $B$  est inclus dans  $R_m$ , ce qui contredit le lemme 7.2.2.

Par conséquent, une telle région  $R_m$  n'existe pas. ■

Pour terminer la démonstration du lemme 7.2, nous proposons quelques commentaires sur l'hypothèse selon laquelle les deux composantes connexes fermées de  $\partial(R_1 \cap R_2)$   $a$  et  $b$  étaient réduites à deux points  $A$  et  $B$ . Si ce n'est pas le cas, les trois derniers lemmes restent vrais. Nous ne démontrons ici que le premier, les deux autres étant sensiblement identiques aux versions déjà proposées, mais avec quelques précautions à prendre pour les cas où des composantes connexes fermées de différentes frontières se superposeraient.

Le lemme 7.2.2 devient, avec ces nouvelles hypothèses :

Tout point de  $a$  appartient à la zone pure d'une région  $R_k$  et tout point de  $b$  appartient à la zone pure d'une région  $R_l$ .

Pour montrer cela, nous commençons par remarquer que l'ancien lemme 7.2.2 s'applique à chaque point de  $a$ .

Il suffit donc de montrer que la nouvelle région à laquelle appartient un point de  $a$  est la même pour tous les points de  $a$ .

Soit donc  $A_1$  un point de  $a$  appartenant à la zone pure de  $R_k$  et  $A_2$ , le premier point de  $a$  dans un parcours trigonométrique de  $\partial R_1$ , qui appartienne à une autre région  $R_m$ .

$R_m$  étant ouverte, il existe une boule centrée en  $A_2$  et contenue dans  $R_m$ , ce qui contredit que  $A_2$  soit le premier point dans le parcours de  $a$  qui appartienne à  $R_m$ . Donc  $A_2$  n'existe pas.

## 4.3 Régions fusionnables

Au début de ce chapitre, nous avons défini ce qu'est un recouvrement bien formé. Nous souhaitons à présent le construire par un algorithme, adapté de l'algorithme de partitionnement dit de division-fusion. Cet algorithme est basé sur le principe de la fusion de régions voisines, ce qui se traduit par la simplification du dual.

Dans le cas d'un recouvrement bien formé, toute fusion de régions voisines n'est pas possible : il faut que le recouvrement, après fusion, soit encore bien formé. Nous proposons d'établir dans cette section des conditions sur le dual d'un recouvrement pour qu'après fusion, le recouvrement soit encore bien formé. En effet, le dual permet de stocker de façon efficace des relations topologiques entre régions.

Nous avons établi dans la section précédente que le dual d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Hélas, comme l'illustre la figure 4.6 la réciproque n'est pas vraie. Nous devons donc analyser plus finement les relations liant le recouvrement à son dual.

### 4.3.1 Correspondance entre les zones d'un recouvrement bien formé et les éléments du nerf

Nous avons défini dans la section précédente des zones pures d'un recouvrement bien formé comme l'ensemble des points n'appartenant qu'à une seule région donnée. De la

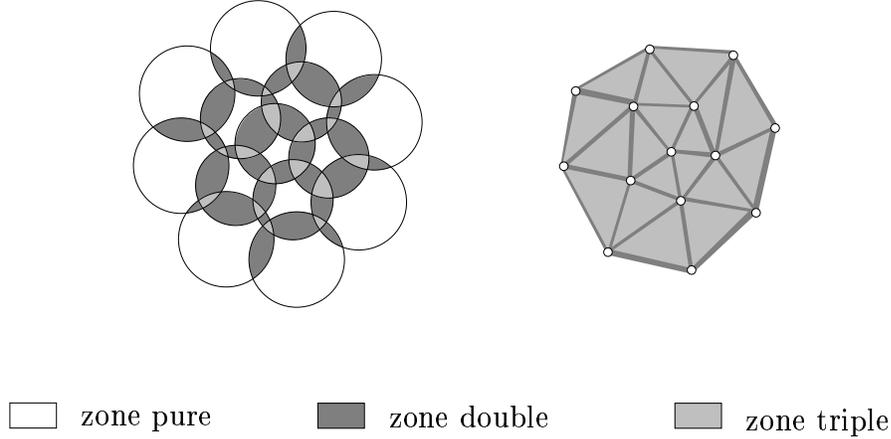


FIG. 4.16 – Associations entre les zones d'un recouvrement et les éléments de son nerf.

même manière, nous pouvons définir des zones doubles et triples :

**Définition 42 (Zone double)** La zone double de deux régions voisines  $R_1$  et  $R_2$  est l'ensemble des points qui appartiennent à ces deux régions et seulement à elles :

$$zd(R_1, R_2) = \{x \in R_1 \cap R_2 : \forall R \in \mathcal{R}, x \in R \Rightarrow (R = R_1) \text{ ou } (R = R_2)\}$$

**Définition 43 (Zone triple)** La zone triple de trois régions voisines  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$  est l'ensemble des points qui appartiennent à ces trois régions et seulement à elles :

$$zt(R_1, R_2, R_3) = \{x \in R_1 \cap R_2 \cap R_3 : \forall R \in \mathcal{R}, x \in R \Rightarrow (R = R_1) \text{ ou } (R = R_2) \text{ ou } (R = R_3)\}$$

Dans le cas d'un recouvrement bien formé,  $zt(R_1, R_2, R_3) = R_1 \cap R_2 \cap R_3$  car tout point appartient à au plus trois régions.

Notons  $\mathcal{R}$  un recouvrement bien formé et  $(G, F)$  son nerf. On associe naturellement

- une zone pure de  $\mathcal{R}$  à un sommet  $s$  de  $G$ , et on la note  $s^\#$ ,
- une zone double de  $\mathcal{R}$  à une arête  $e$  de  $G$ , et on la note  $e^\#$ ,
- une zone triple de  $\mathcal{R}$  à un élément (nommé face)  $f$  de  $F$ , et on la note  $f^\#$ .

Par analogie avec la notation d'un espace dual, nous notons  $e^{\#\#} = e$ . Nous notons donc réciproquement  $zp^\#$  le sommet associé à la zone pure  $zp$ ,  $zd^\#$  l'arête associée à la zone double  $zd$ , et  $zt^\#$  la face associée à la zone triple  $zt$ .

De plus, l'étude de configurations menée dans la section précédente nous permet d'affirmer :

**Lemme 7.3** Dans un recouvrement bien formé :

- toute zone pure est un fermé connexe non vide et sans trou,
- toute zone double est continuellement paramétrisable sur le carré  $E = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \in ]0; 1[; v \in [0; 1]\}$ ,

– toute zone triple est homéomorphe à  $D$ .

La zone pure est sans trou car sinon cela signifierait qu'une région (connexe par hypothèse) est complètement incluse dans  $R$  ce qui impliquerait alors que sa propre zone pure est vide.

Nous considérons alors l'ensemble des domaines qui sont définis sur  $\mathcal{M}$  comme l'union de zones pures, doubles et triples définies par  $\mathcal{R}$ . Parmi ces domaines, il y a naturellement les régions du recouvrement  $\mathcal{R}$ .

Si  $H$  est un sous-ensemble de  $(G, F)$ , on note  $H^\#$  le domaine égal à l'union  $\bigcup_{u \in H} u^\#$ . Réciproquement, si  $R = \bigcup_{i \in I} z_i$  est une union de zones pures, doubles ou triples, on note  $R^\#$  le sous-ensemble de  $(G, F)$  égal à  $\{z_i^\#\}_{i \in I}$ .

Grâce au lemme 7.3, nous pouvons lier les propriétés de  $H$  à celles de  $H^\#$  :

**Lemme 7.4** *Soit  $H$  un sous-ensemble de  $(G, F)$ .*

*$H^\#$  est un fermé connexe non vide et sans trou si et seulement si*

1. *pour toute paire  $(u, v)$  d'éléments de  $H$ , il existe une séquence  $(e_i)_{i \in 0 \dots k-1}$  de  $k$  éléments de  $H$  tels que  $e_i$  est adjacent à  $e_{i+1}$  pour tout  $i < k$ ,  $e_0 = u$  et  $e_{k-1} = v$  ;*
2. *pour toute paire  $(u, v)$  d'éléments n'appartenant pas à  $H$ , il existe une séquence  $(e_i)_{i \in 0 \dots k-1}$  de  $k$  éléments n'appartenant pas à  $H$  tels que  $e_i$  est adjacent à  $e_{i+1}$  pour tout  $i < k$ ,  $e_0 = u$  et  $e_{k-1} = v$  ;*
3.  *$H$  contient au moins un sommet de  $G$  ;*
4. *pour toute face de  $H$ , les arêtes et les sommets de  $G$  qui lui sont adjacents appartiennent également à  $H$  ;*
5. *pour toute arête de  $H$ , les sommets de  $G$  qui lui sont adjacents appartiennent également à  $H$ .*

**Démonstration 7.4** La première propriété est équivalente à  $H^\#$  connexe.

La deuxième propriété est équivalente à  $H^\#$  sans trou.

La troisième propriété implique que  $H^\#$  est non vide.

Réciproquement, d'après le lemme 7.3, aucune union de zones doubles et triples ne peut être fermée. Donc si  $H^\#$  est un fermé non vide,  $H$  contient nécessairement un sommet.

Les deux dernières propriétés sont équivalentes à “ $H^\#$  est un fermé”, d'après le lemme 7.3.

■

### 4.3.2 La fusion de régions doit préserver la topologie du nerf

Nous considérons un recouvrement bien formé  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  d'un espace topologique  $\mathcal{M}$ .

Nous notons  $(G, F)$  son nerf.

Soit  $J \subset I$  et  $S = \bigcup_{j \in J} R_j$ .

Nous notons  $\mathcal{S}$  le recouvrement après fusion des  $R_j$  en  $S$  :  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J} \cup S$ .

Nous établissons dans cette section quelles propriétés sur  $S^\#$ , sous-ensemble de  $(G, F)$ , permettent d'assurer que  $\mathcal{S}$  est bien formé.

Pour cela, nous commençons par quelques définitions :

**Définition 44 (Partie pure)** Soit  $H$  un sous-ensemble de  $(G, F)$ .

La partie pure de  $H$ , notée  $\langle H \rangle$ , est l'ensemble des sommets de  $H$ , des arêtes de  $H$  dont les deux extrémités appartiennent à  $H$ , et des faces de  $H$  dont les arêtes et les sommets incidents appartiennent à  $H$ .

**Définition 45 (Partie partagée)** Soit  $H$  un sous-ensemble de  $(G, F)$  et  $u$  un sommet de  $G$  n'appartenant pas à  $H$ .

La partie partagée  $\langle H, u \rangle$  est l'ensemble des faces et des arêtes de  $(G, F)$  incidentes à  $u$  et à un élément de  $H$  : un sommet s'il s'agit d'une arête, une arête s'il s'agit d'une face.

Nous poursuivons par deux résultats :

**Lemme 7.5** Tout sommet de  $S^\#$  admet un parapluie dont tous les éléments appartiennent à  $S^\#$ .

**Démonstration 7.5**  $S$  est une union de régions d'un recouvrement bien formé.

Or nous avons montré lors de la démonstration de la proposition 7 selon lequel le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire, que tout sommet  $u$  de  $\mathcal{R}$  admet un parapluie dans  $\mathcal{R}$ .

On note  $R$  la région dont  $u^\#$  est la zone pure. Les éléments constituant ce parapluie correspondent par définition aux zones doubles et triples de  $R$ .

Ainsi tout sommet de  $S^\#$  correspond à la zone pure d'une région  $R_j$  dont les zones doubles et triples appartiennent par définition à  $S$ . Donc tout sommet de  $S^\#$  admet un parapluie dont tous les éléments appartiennent à  $S^\#$ . ■

**Lemme 7.6** Considérons les zones pures et doubles dans le nouveau recouvrement  $\mathcal{S}$ .

On a

$$\begin{aligned} zp(S) &= \langle S^\# \rangle^\# \\ \forall R \in \mathcal{S} \setminus S, \quad zd(S, R) &= \langle S^\#, R^\# \rangle^\# \end{aligned}$$

où  $S^\#$  et  $R^\#$  sont définis sur l'ancien recouvrement  $\mathcal{R}$ .

**Démonstration 7.6** La zone pure de  $S$  est, par définition, l'ensemble des points de  $\mathcal{M}$  qui n'appartiennent qu'à  $S$ .

Nous démontrons en annexe B que  $zp(S)$  est composée de l'ensemble des zones pures des régions  $R_j$ ,  $j \in J$ , des zones doubles des couples  $(R_k, R_l)$  telles que  $k \in J$  et  $l \in J$ , et des zones triples des triplets  $(R_k, R_l, R_m)$  telles que  $k \in J$ ,  $l \in J$  et  $m \in J$ .

On en déduit donc que  $zp(S)^\#$  est l'ensemble des sommets de  $S^\#$ , des arêtes de  $S^\#$  dont les deux extrémités appartiennent à  $S^\#$ , et des faces de  $S^\#$  dont les arêtes et les sommets incidents appartiennent à  $S^\#$ . On reconnaît la définition de la partie pure de l'ensemble  $S^\#$ , notée  $\langle S^\# \rangle$ . D'où le résultat.

Soit  $R \in \mathcal{S} \setminus S = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J}$ .

La zone double de  $(S, R)$  est, par définition, l'ensemble des points de  $\mathcal{M}$  qui n'appartiennent qu'à  $S \cap R$ .

Nous démontrons en annexe B que  $zd(S, R)$  est composée de l'ensemble des zones doubles des couples de régions dont une seule appartient à  $\{R_j\}_{j \in J}$ , et des zones triples des triplets de régions dont deux et seulement deux appartiennent à  $\{R_j\}_{j \in J}$ .

On en déduit donc que  $zd(S, R)^\#$  est l'ensemble des arêtes de  $S^\#$  dont une et une seule extrémité appartient à  $S^\#$  et des faces de  $S^\#$  dont une et une seule arête incidente appartient à  $S^\#$ . On reconnaît la définition de la partie partagée  $\langle S^\#, R^\# \rangle$ . D'où le résultat. ■

Nous pouvons à présent proposer des conditions suffisantes sur  $S$  et  $S^\#$  pour que  $\mathcal{S}$  soit un recouvrement bien formé :

**Proposition 8** *Nous considérons un recouvrement bien formé  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  d'un espace topologique  $\mathcal{M}$ .*

*Soit  $J \subset I$  tel que  $I \setminus J$  contienne au moins trois indices et  $S = \bigcup_{j \in J} R_j$ .*

*Si  $S$  est homéomorphe à  $D$ , et si, dans le nerf de  $\mathcal{R}$ ,*

- *les éléments constituant la partie pure  $\langle S^\# \rangle$  suivent les hypothèses du lemme 7.4 ;*
- *$\forall R \in \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J}$  telle que  $R \cap S \neq \emptyset$ , la partie partagée  $\langle S^\#, R^\# \rangle$  est composée d'arêtes et de faces pouvant être ordonnées en la séquence  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$ ,  $k > 0$ , où  $f_i$  est incidente à  $e_i$  et  $e_{i+1}$  pour tout  $i < k - 1$  ;*

*alors le recouvrement  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J} \cup S$  est bien formé.*

**Démonstration 8** Demander que  $I \setminus J$  contienne au moins trois indices assure que  $\mathcal{S}$  contienne au moins quatre régions.

La fusion de régions ne peut que diminuer le nombre de régions en tout point sans pour autant que ce nombre ne s'annule. Tout point de  $\mathcal{M}$  appartient donc au moins à une et au plus à trois régions de  $\mathcal{S}$  (car  $\mathcal{R}$  est supposé bien formé).

Les trois autres propriétés énoncées dans la définition 35 d'un recouvrement bien formé sont assurées lorsqu'elles ne font pas entrer en jeu  $S$ , car  $\mathcal{R}$  est supposé bien formé.

$S$  est homéomorphe à  $D$  par hypothèse.

Montrons à présent que toute paire de régions voisines a une intersection conforme.

Soit  $R \in \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J}$  telle que  $R \cap S \neq \emptyset$ . Alors par hypothèse et d'après le lemme 7.6, la zone double  $zd(S, R)$  est représentée par une séquence  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$  où les éléments sont incidents deux-à-deux. Aussi, le sommet  $u$  associé à la zone pure de  $R$  admet un parapluie dans le nerf de  $\mathcal{R}$  (ce dernier est bien formé). Donc la séquence  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$  peut être complétée par deux faces incidentes respectivement à

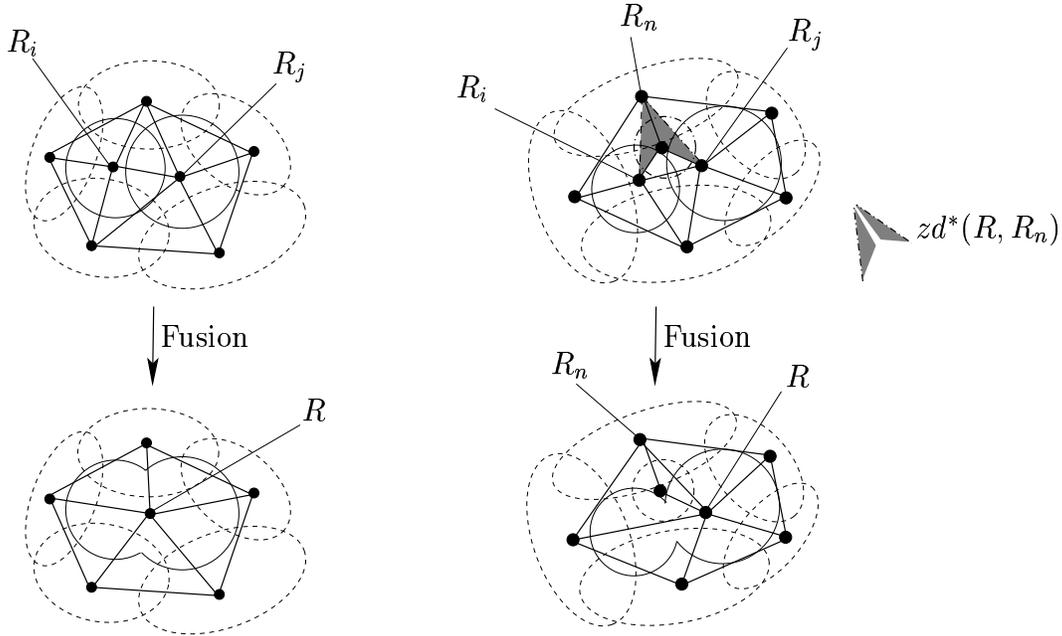


FIG. 4.17 – A gauche, une fusion de deux régions (en trait plein) légale. A droite une fusion illégale : l'ensemble des arêtes et des faces de  $z d^*(R, R_n)$  ne forme pas un ensemble d'éléments adjacents.

$e_0$  et  $e_{k-1}$  en  $(f_{-1}, e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1}, f_{k-1})$ . Si  $f_{-1} = f_{k-1}$ , cela signifierait que le parapluie de  $u$  est contenu dans  $S^\#$ , ce qui contredirait la première hypothèse sur  $\langle S^\# \rangle$ .

De plus,  $f_{-1}$  et  $f_{k-1}$  représentent les zones triples de  $R$ , d'une région de  $\{R_j\}_{j \in J}$  et d'une région n'appartenant pas à cet ensemble. En effet, si cette troisième région lui appartenait, l'arête représentant la zone double l'associerait avec  $R$  ferait partie de  $\langle S^\#, R^\# \rangle$ . De même, aucun autre élément de  $S^\#$  n'est incident à  $u$ . Ce qui implique que

$$(f_{-1}, e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1}, f_{k-1})$$

représente  $S \cap R$ .

On en déduit que  $S \cap R$  et  $R \setminus \bar{S}$  sont tous deux homéomorphes à  $D$ . Pour affirmer que  $S \setminus \bar{R}$  est lui-aussi homéomorphe à  $D$ , il suffit de remarquer d'une part que les extrémités des arêtes de  $(e_0, f_0, e_1, \dots, f_{k-2}, e_{k-1})$  différentes de  $u$ , appartiennent à  $\langle S^\# \rangle$ , et d'autre part que  $\langle S^\# \rangle$  suit les hypothèses du lemme 7.4.

$S$  et  $R$  ont donc une intersection conforme.

Terminons par montrer que  $S$  admet une zone pure qui est un fermé connexe et non vide.

Cela est assuré par l'hypothèse selon laquelle  $\langle S^\# \rangle$  suit les hypothèses du lemme 7.4 et par le lemme 7.5 qui affirme que  $z p(S) = \langle S^\# \rangle^\#$ . ■

Terminons cette section en remarquant que le nerf de  $\mathcal{S}$  est alors constitué des éléments du nerf de  $\mathcal{R}$  hormis les suivants. Les éléments de la partie pure  $\langle S^\# \rangle$  sont remplacés par

un sommet représentant la zone pure  $zp(S)$ . Les éléments de la partie partagée  $\langle S^\#, R^\# \rangle$  sont remplacés par une arête représentant la zone double  $zd(S, R)$ .

Les zones triples concernant  $S$  sont quant à elles représentées par les faces  $f_{-1}$  et  $f_{k-1}$  évoquées dans la démonstration précédente.

## 4.4 Algorithme de construction d'un recouvrement bien formé sur une surface triangulée

Nous avons terminé l'étude théorique des recouvrements d'une variété de dimension 2 connexe et compacte. Nous avons défini ce qu'est un recouvrement bien formé, nous avons défini son dual comme étant le nerf du recouvrement et démontré qu'il s'agissait d'une triangulation combinatoire. Enfin, nous avons établi une condition suffisante sur le dual d'un recouvrement pour que le recouvrement résultant de la fusion de plusieurs régions soit encore bien formé.

Il nous reste à appliquer ces résultats théoriques à la construction d'un recouvrement bien formé sur une surface triangulée  $\mathcal{M}$  qui est une variété de dimension 2 connexe et compacte (figure 4.18). L'algorithme comporte deux phases. La première, étape de division, consiste à définir un premier recouvrement bien formé. La deuxième, étape de fusion, consiste à fusionner des régions entre elles, construisant ainsi plusieurs recouvrements successifs au nombre de régions décroissant. Cette deuxième étape est conduite sur le dual du recouvrement. En effet, une fusion de régions est équivalente à une simplification particulière du dual.

Pour illustrer cet algorithme, nous utilisons quatre maillages. Le premier, nommé *sphere* est une triangulation interpolant des points sur une sphère. Elle est constituée de 162 sommets et de 320 faces. Il s'agit de la plus simple surface respectant les hypothèses que nous avons posées. Le deuxième maillage est nommé *hippocampus* et résulte de la numérisation d'une glande présente dans le cerveau. Il est constitué de 1002 sommets et de 2000 faces. Le troisième maillage, *meche*, peut être considéré comme un exemple de numérisation d'un objet mécanique. Il est constitué de 1572 sommets et de 3152 faces. Enfin, *croissants* est un maillage synthétique composé de 542 sommets et de 1080 faces.

### 4.4.1 Etape de division : Premières régions sur une surface triangulée

La première étape de notre algorithme est la définition d'un recouvrement bien formé constitué de petites régions. Aussi ce recouvrement doit être défini sur  $\mathcal{M}$ , une surface triangulée connexe et compacte. Le choix naturel pour ce premier recouvrement est alors de définir une région  $R_i$  par sommet  $s_i$  de  $\mathcal{M}$ .  $R_i$  est l'union de  $s_i$  et de l'ensemble des arêtes et des faces incidentes à  $s_i$  (figure 4.19).



FIG. 4.18 – Exemples de recouvrements bien formés définis sur les quatre maillages choisis pour illustrer notre algorithme.

Le recouvrement est bien formé car, par définition, une triangulation connexe, sans bord et bornée possède au moins quatre sommets, et  $R_i$  est homéomorphe à un disque ouvert et non vide de  $\mathbb{R}^2$ . La zone pure de  $R_i$  est réduite au sommet  $s_i$  qui est bien un fermé connexe sans trou. Tout point appartient à une région au moins, et comme un triangle est incident à trois sommets et une arête est incidente à deux sommets, tout point appartient à au plus trois régions. Enfin, l'intersection de deux régions  $R_1$  et  $R_2$  est l'union de l'arête incidente aux deux sommets  $s_1$  et  $s_2$  et des deux faces triangulaires incidentes à cette arête : cet ensemble est bien homéomorphe à un disque ouvert et non vide de  $\mathbb{R}^2$  tout comme  $R_1 \setminus \overline{R_2}$  et  $R_2 \setminus \overline{R_1}$ .

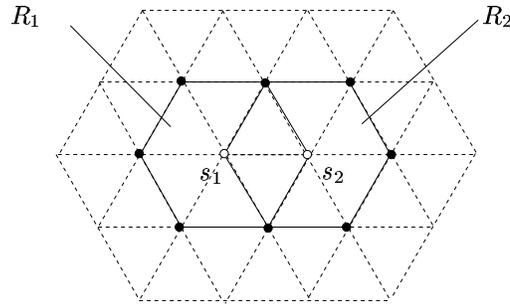


FIG. 4.19 – Régions du premier recouvrement défini sur la surface triangulée  $\mathcal{M}$

## 4.4.2 Etape de fusions : deux stratégies complémentaires

### 4.4.2.1 Présentation des deux stratégies

La deuxième étape de notre algorithme consiste à fusionner des régions ensemble de telle sorte que le recouvrement reste bien formé. Pour cela il suffit de choisir un ensemble de régions du recouvrement de telle sorte que leur union et leurs représentants dans le dual du recouvrement satisfassent aux hypothèses de la proposition 8.

Nous proposons deux stratégies de choix de régions :

- La fusion en couple : nous choisissons deux régions voisines.
- La fusion en fleur : nous choisissons une région et toutes ses voisines.

La fusion en couple a pour avantage de satisfaire systématiquement à la première hypothèse de la proposition 8. Elle a pour inconvénient de permettre un développement non isotrope des régions comme l'illustre la figure 4.20. Or nous souhaitons que chaque région soit aussi proche que possible d'un disque.

La fusion en fleur a pour avantage de favoriser un développement isotrope des régions. Elle a pour inconvénient de ne pas satisfaire systématiquement à la première hypothèse de la proposition 8 et de rencontrer plus facilement l'échec car elle concerne plus de régions qu'une fusion en couple (voir les résultats collectés dans les tableaux de la section 4.5.5).

Nous constatons donc que les deux stratégies se complètent. C'est pourquoi nous commençons par des fusions en fleur afin d'assurer une base isotrope à la forme des régions, puis nous enchaînons sur des fusions en couple afin d'adjoindre des petites régions voisines aux plus grosses. Ces fusions en couple permettent également de débloquer des situations où trop de régions étaient concernées. Enfin, les résultats collectés dans les tableaux de la section 4.5.5 indiquent que le nombre de régions obtenues par cette stratégie est du même ordre que celui obtenu avec une stratégie de fusions en couples uniquement.

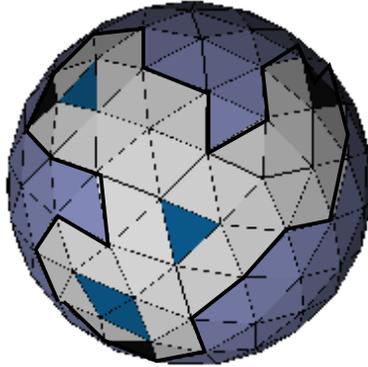


FIG. 4.20 – Une région du recouvrement calculé sur *sphere* avec une erreur calculée selon le critère de la moyenne et un seuil de 10. La stratégie utilisée est de ne procéder qu'à des fusions en couples. Le développement de cette région n'a pas été isotrope.

REMARQUE —

Il est important de remarquer que, pour ces deux stratégies, si les deux hypothèses de la proposition 8 portant sur les éléments du nerf du recouvrement sont vérifiées, alors on est assuré que l'union  $S$  des régions candidates à la fusion est homéomorphe à  $D$ , et ce grâce au lemme 7.3.

#### 4.4.2.2 En pratique

Pour mettre en œuvre ces fusions, nous réfléchissons sur le dual  $(G, F)$  du recouvrement. En pratique, nous codons  $G$  et  $F$  en adjoignant à toute région la liste ordonnée dans le sens trigonométrique de ses voisines (reliées à la région par un pointeur). Chaque région code ainsi naturellement un sommet de  $G$ , et chaque pointeur vers une région voisine code une arête (une arête est donc codée deux fois). Enfin, l'ordre des voisines d'une région code implicitement les faces de  $F$ .

En pratique, nous vérifions la deuxième hypothèse de la proposition 8 dans le cas d'une fusion en fleur comme d'une fusion en couple de la façon suivante. Nous notons  $S$  l'ensemble

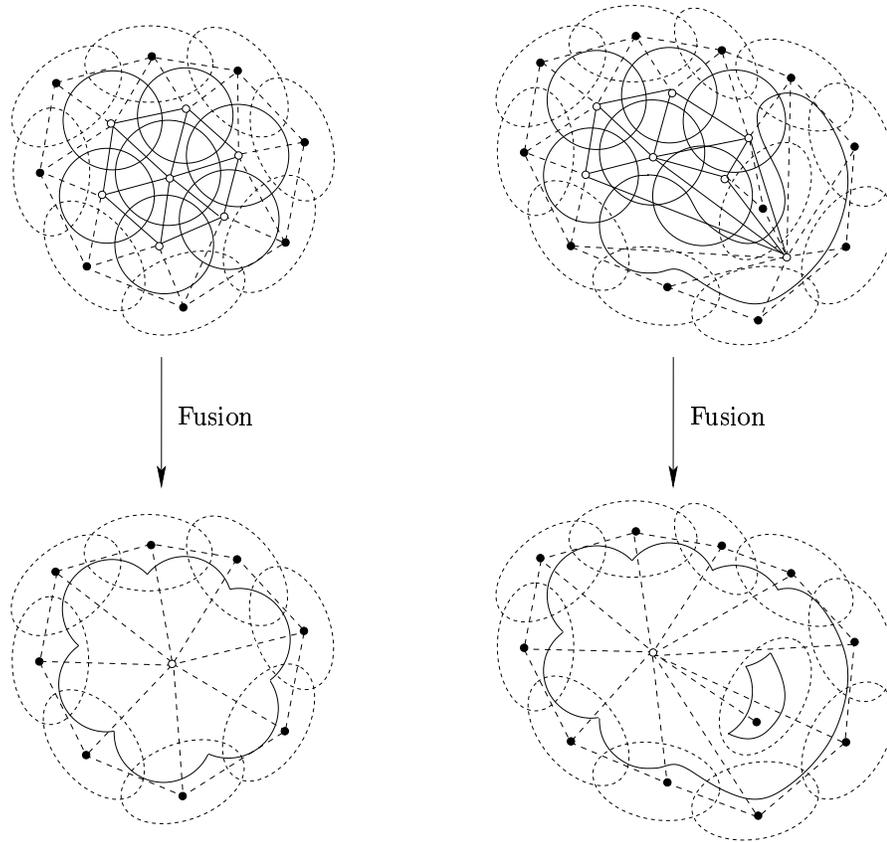


FIG. 4.21 – Fusion de régions en fleur. Les régions candidates sont en trait plein et représentées par des sommets blancs reliés entre eux par des arêtes pleines. A gauche, la fusion est légale. A droite, elle ne l'est pas car les éléments constituant la partie pure de  $S^\#$  ne suivent pas les hypothèses du lemme 7.4.

des régions candidates à la fusion et  $V(S)$  l'ensemble des régions voisines de  $S$  (c'est-à-dire voisine d'une des régions de  $S$  sans en faire partie). Soit  $R$  une région de  $V(S)$ . Nous vérifions alors que l'ensemble des voisines de  $R$  appartenant à  $S$  sont toutes consécutives dans un parcours trigonométrique des voisines de  $R$ .

Nous vérifions la première hypothèse de la proposition 8 dans le cas d'une fusion en fleur de la façon suivante. Il suffit de s'assurer qu'aucun sous-ensemble de  $V(S)$  n'est encadré de régions de  $S$ . Pour cela, nous nous assurons que, lors du parcours trigonométrique des régions de  $V(S)$  (possible grâce à l'ordre des voisines des régions de  $S$ , de la région centrale comme des autres), toute région admet pour voisines la région précédemment rencontrée et au moins une région n'appartenant pas à  $V(S)$ .

## 4.5 Application à la construction d'un atlas

### 4.5.1 Ajout d'un critère géométrique

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la première étape de la construction de notre modèle est l'approximation d'une 2-triangulation  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}^3$  par une famille de primitives planes  $V_i$ . De plus, chaque primitive doit approcher une région  $R_i$  de  $\mathcal{M}$  de telle sorte que la projection  $v_i$  de  $R_i$  sur  $V_i$  soit une bijection (figure 3.1, page 46).

Nous proposons de reformuler le problème de la façon suivante : définir un recouvrement  $\mathcal{R}$  de  $\mathcal{M}$  par un ensemble de régions  $R_i$ , chaque région ayant pour propriété géométrique d'être bien approchée par un plan sur lequel elle se projette sans auto-occultation. Comme nous l'avons vu dans la section 4.4 la suite de la construction de notre modèle nécessite que ce recouvrement soit bien formé. Nous appliquons donc l'algorithme de division-fusion décrit dans la section 4.2 en lui ajoutant les deux points suivants :

- Les premières régions à l'issue de l'étape de division doivent être bien approchées par un plan sur lequel elles se projettent sans auto-occultation.
- Lors de l'étape de fusion, nous ordonnons les régions candidates afin d'obtenir le moins de régions possible à la fin de l'algorithme, et nous ajoutons au test de validité d'un choix de régions à fusionner la condition selon laquelle la nouvelle région doit être bien approchée par un plan sur lequel elle se projette sans auto-occultation.

Nous présentons dans cette section un calcul du plan approchant une région d'une 2-triangulation. Puis nous proposons un calcul de l'erreur d'approximation de la région par ce plan qui servira d'une part à évaluer, grâce à un seuil prédéfini, si la région est bien approchée, et d'autre part à ordonner les régions candidates à la fusion. Enfin, nous discuterons du calcul de la projection bijective  $v_i$  de  $R_i$  sur  $V_i$ .

### 4.5.2 Calcul du plan moyen

Bien des méthodes sont envisageables pour calculer le plan approchant une région d'une 2-triangulation. On peut choisir un plan caractéristique de la répartition statistique des points de la région dans  $\mathbb{R}^3$  [Bev69]. Mais pour que ces techniques soient vraiment efficaces, il faut un nombre de points bien supérieur au nombre de sommets constituant généralement une région. On peut alors choisir des points supplémentaires sur chaque face. Mais il nous semble dommage de ne considérer que des points et oublier l'information importante donnée par les faces. C'est pourquoi nous avons préféré une méthode directe classique rappelée dans l'étude de Frey [FB96].

Le plan est déterminé par un point et une direction normale. La direction est calculée comme la somme normalisée des normales des faces, pondérées par les aires de celles-ci. Pondérer les normales par les aires des triangles permet d'être plus indépendant de la triangulation : l'importance de la participation de la normale d'une face est pondérée par celle de la taille de la face vis-à-vis des autres faces.

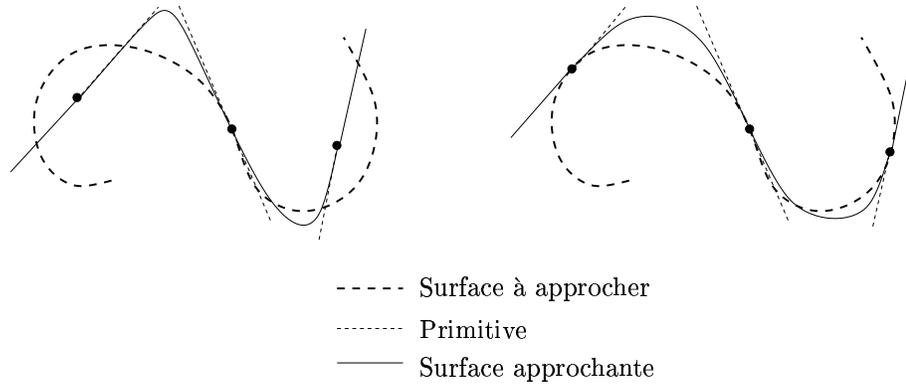


FIG. 4.22 – Pour une approximation par combinaison convexe de primitives, il est préférable de positionner les primitives sur la surface à approcher

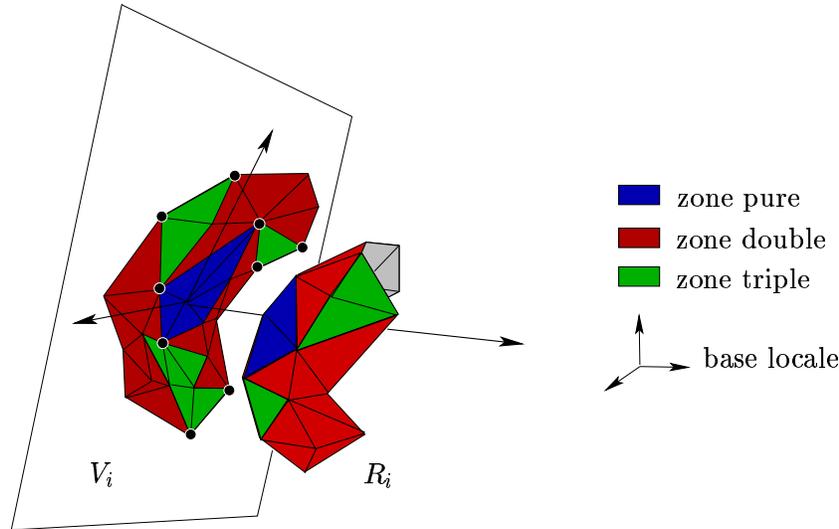
La normale d'une face pondérée par son aire est égale au produit vectoriel de deux de ses arêtes. Elle peut être calculée une fois pour toutes et stockée dans la structure de données d'une face. La question naturelle qui se pose pour le calcul de la normale du plan approchant une région  $R$  est la suivante : peut-on la calculer à partir des normales des plans approchant les régions qui, par fusion, ont constitué  $R$ ? Pas directement. Pour cela, il faut coder la direction normale du plan par un vecteur de norme non égale à un : il doit être calculé comme la somme non normalisée des normales des faces pondérées par les aires de celles-ci. La direction d'une nouvelle région  $R$  est alors égale à la somme des normales aux plans approchant les régions qui, par fusion, ont constitué  $R$ , moins la somme des normales aux faces appartenant aux zones doubles de deux de ces régions, moins deux fois la somme des normales aux faces appartenant aux zones triples de trois de ces régions.

En termes d'approximation, le point à déterminer, par lequel passe le plan approchant une région, devrait être le barycentre des sommets de la région. Mais le procédé de raccord continu des primitives étant basé sur une composition convexe, il nous semble plus judicieux de choisir un point sur la région elle-même (figure 4.22).

Nous avons choisi le sommet de la zone pure de la région dont le projeté sur le plan approchant est le plus proche du barycentre des projetés des sommets de la région (pour évaluer ces projections, seule la direction normale au plan est nécessaire). Ce point est par la suite considéré comme le centre d'un repère du plan approchant. Ce repère est complété par un axe du repère de  $\mathbb{R}^3$  et son orthogonal direct dans le plan (figure 4.23).

### 4.5.3 Calcul de l'erreur

Calculer l'erreur d'approximation d'une région par un plan nous est indispensable d'une part pour évaluer grâce à un seuil prédéfini, si une région est bien approchée par un plan, et d'autre part pour ordonner la liste des régions à fusionner. Dans les exemples illustrant cette section, les points des maillages sont contenus dans la sphère unité et les seuils sont

FIG. 4.23 – Construction d'un repère orthonormé sur  $V_i$ 

pris égaux à 10 (autrement dit un seuil très élevé), 0.1, 0.01 ou 0.00001 (figure 4.24).

**Pour évaluer si une région est bien approchée par un plan** Là encore bien des critères sont envisageables pour évaluer cette erreur d'approximation. Une première idée consiste à observer ce qui est fait en simplification de triangulation [GH97]. Dans le cas d'une simplification, l'erreur calculée est celle de la distance d'un point  $x$  vis-à-vis d'un ensemble de plans  $\{h_i\}$ . Elle peut être calculée soit comme le maximum soit comme la somme des carrés des distances des plans au point. Dans le cas de la somme, la formule peut s'écrire matriciellement

$$E_H(x) = \mathbf{x}^T \cdot \left( \sum_{h_i \in H} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i^T \right) \cdot \mathbf{x}$$

où  $\mathbf{x}^T = (x^T, 1)$  et  $\mathbf{v}_i^T = (v_i^T, 1)$ , avec  $v_i$ , vecteur normal unitaire de  $h_i$ .

Dans notre cas l'erreur calculée est celle de la distance d'un plan  $h$  vis-à-vis d'un ensemble de points  $\{x_i\}$ . La situation est symétrique. Nous proposons donc les deux critères suivants : soit le maximum soit la somme des carrés des distances des points au plan. Dans le cas de la somme, la formule peut s'écrire matriciellement

$$E_X(h) = \mathbf{v}^T \cdot \left( \sum_{x_i \in X} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_i^T \right) \cdot \mathbf{v}$$

En général, le nombre de régions définies et la qualité de l'approximation de chaque région par un plan calculé pour un même seuil avec l'un ou l'autre de ces deux critères est comparable lorsque le seuil est assez élevé (figure 4.28). Au contraire lorsque le seuil

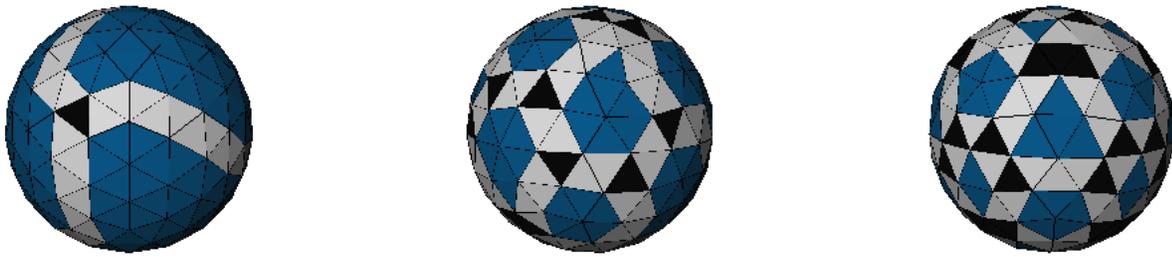


FIG. 4.24 – Régions définies sur *sphere*. L'erreur est calculée comme la moyenne des carrés des distances des points au plan. Le seuil est de 10, 0.1, et enfin 0.01. Le nombre de régions est 6, 18 et 36.

devient plus faible, le nombre de régions créées avec le critère du maximum est bien plus élevé qu'avec le critère de la moyenne (figure 4.28).

On peut alors obtenir de bien meilleures approximations avec le critère de la moyenne qu'avec le critère du maximum, pour un même nombre de régions créées (figure 4.25).

On peut expliquer cette différence en remarquant que l'erreur calculée pour le critère de la moyenne dépend de façon équivalente de chacune des distances qui participent à son calcul. Au contraire, dans le critère du maximum, l'erreur peut être déterminée par une seule des distances qui participent à son calcul. Le seuil peut alors être passé pour un seul sommet mal placé. Et cette différence est encore plus sensible avec des fusions en couple qu'avec des fusions en fleur. En effet, moins il y a de nouvelles distances participant au calcul de l'erreur pour le critère de la moyenne, moins le risque de voir le seuil soudainement dépassé est grand. Ce qui n'est pas le cas avec le critère du maximum puisqu'une distance trop grande suffit pour faire passer l'erreur au-dessus du seuil. De plus, même à nombre de régions égal et à seuil égal, le recouvrement obtenu avec le critère de la moyenne semble être meilleur que celui obtenu avec le critère du maximum comme l'illustre la figure 4.26.

**Pour ordonner la liste des régions à fusionner** Trier les régions selon l'erreur d'approximation commise par le plan approchant ne permet *a priori* que d'encourager l'extension de régions bien approchées par un plan et non de créer la région la mieux approchée par un plan. Mais pour cela, il faudrait tester toutes les combinaisons possibles ce qui n'est guère envisageable. De plus, choisir la meilleure fusion à un pas donné de l'algorithme n'assure pas le meilleur résultat final. Des algorithmes de type "Branch and Bound" permettraient sûrement de rechercher la meilleure séquence de fusions. Nous nous sommes

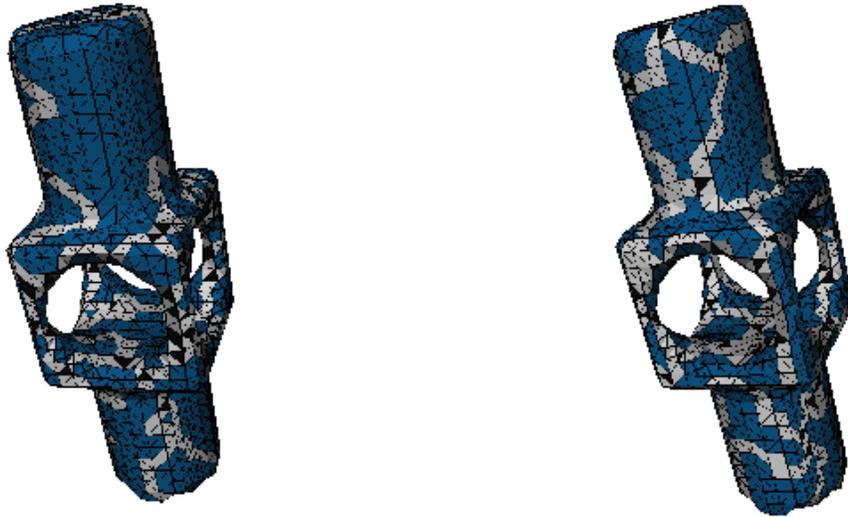


FIG. 4.25 – Régions définies sur *mèche* avec une erreur calculée selon le critère du maximum et un seuil de 0.1, puis avec une erreur calculée selon le critère de la moyenne et un seuil de 0.01. Dans les deux cas le recouvrement est composé de 51 régions.

contentés d'une part de la simple liste triée selon l'erreur calculée ci-dessus, et d'autre part de mettre en début de liste les régions voisines lors d'une fusion en couple (critère que nous nommons tri local). Les résultats collectés dans les tableaux de la section 4.5.5 semblent indiquer que la première liste n'a quasiment pas d'influence sur le résultat (que l'on ait utilisé un critère géométrique ou pas, comme lorsque le seuil est posé à 10), contrairement au tri local qui, s'il est omis, entraîne de très mauvais résultats.

**Le cas des premières régions** Enfin, les premières régions que nous construisons ne contiennent qu'un sommet dans leur zone pure. L'erreur d'approximation est alors nulle. Le premier tri se fait alors sur un autre critère : le degré de rugosité [FB96]. Le degré de rugosité calculé en un sommet d'une triangulation est une approximation de la courbure de la surface en ce point. Un degré faible correspond donc à une courbure faible de la surface, qui est donc localement proche d'un plan. Notons  $\vec{n}_i$  la normale du plan approchant la région dont la zone pure est réduite au sommet  $S_i$ . C'est également la normale de la triangulation en ce point selon Frey et Borouchaki [FB96]. Notons  $\vec{e}_{ij}$  les vecteurs unitaires de même direction que les arêtes  $S_i S_j$  incidentes à  $S_i$ . Le degré de rugosité d'une triangulation en un sommet est le minimum des produits scalaires  $\langle \vec{n}_i | \vec{e}_{ij} \rangle$  (figure 4.27).



FIG. 4.26 – Régions définies sur *croissants* avec une erreur calculée selon le critère du maximum et un seuil de 0.1, puis avec une erreur calculée selon le critère de la moyenne et un seuil de 0.1. Les deux recouvrements sont constitués de 25 régions mais seules celles du deuxième recouvrement s'adaptent correctement aux parties planes de la surface.

#### 4.5.4 Projection bijective

Enfin, chaque région  $R_i$  doit se projeter sur le plan qui l'approche en un morceau de plan  $V_i$  via la projection  $v_i$ . Cette projection doit être bijective.

Plusieurs méthodes de projections ont été proposées, notamment dans le cadre des dépliements de surface (pour le plaquage de texture ou la définition d'un nouveau maillage sur une surface). On peut citer la carte harmonique proposée par Eck [EDD<sup>+</sup>95] ou encore la solution de retriangulation locale proposée par Lee [LSS<sup>+</sup>98]. Dans tous les cas, ce qui est recherché est la bijectivité, mais surtout la minimisation de la distorsion entre la surface originale et la surface dépliée.

Or dans notre cas, la région est supposée être bien approchée par un plan. La simple projection orthogonale entraîne donc peu de distorsion et est nettement plus rapide que les solutions évoquées ci-dessus. Par contre, elle n'est pas nécessairement bijective. Si elle ne l'est pas, nous refusons la fusion des régions qui conduit à cette région.

Pour savoir si la projection d'une région sur le plan qui l'approche est une bijection, il suffit de tester si aucune face de la région ne se projette en une arête et si toutes les faces projetées ont une même orientation. Cela se vérifie grâce aux normales des faces projetées.

Ce choix a un inconvénient : il existe des premières régions qui ne se projettent pas

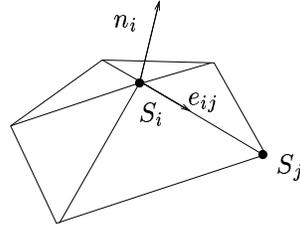


FIG. 4.27 – Calcul du degré de rugosité en un sommet d'un maillage

de façon bijective sur le plan qui les approche (voir [LSS<sup>+</sup>98]). Dans ce cas, il faut déplier artificiellement le parapluie projeté par la méthode proposée par Lee [LSS<sup>+</sup>98] par exemple, ou refuser de traiter des maillages ayant de telles irrégularités. Ce choix a malgré tout un avantage décisif :  $V_i$  est paramétrable par une simple fonction de hauteur constante dans le repère local décrit dans le paragraphe précédent. Cela nous sera fort utile pour la construction de l'atlas.

#### 4.5.5 Résultats

Nous présentons dans ce paragraphe quelques résultats de calculs de recouvrements sur les quatre maillages présentés au début de cette section. Les tableaux suivants présentent le nombre de régions constituant les recouvrements en fonction du seuil choisi (10, 0.1, 0.01, ou 0.00001) et de la stratégie employée (des fusions en fleur uniquement, des fusions en fleur suivies de fusions en couple ou des fusions en couple uniquement). Nous avons également séparé les résultats selon que le critère de calcul de l'erreur est le critère du maximum ou de la moyenne, que les régions sont triées ou non, et enfin qu'il a été fait usage du tri local pour les fusions en couple ou non.

Les premiers tableaux concernent les recouvrements calculés sur le maillage *sphere* constitué de 162 sommets et de 320 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 162 régions.

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	21	63	162	162
Fleur et Couple	5	27	64	122
Couple	5	24	64	122

Critère du maximum et liste triée

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	19	50	162	162
Fleur et Couple	6	18	36	73
Couple	5	18	36	73

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.1 – Recouvrements de *sphere* (liste non triée)

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	23	63	162	162
Fleur et Couple	6	25	64	122
Couple	6	25	64	122
Sans Tri Local	37	79	114	162

Critère du maximum et liste non triée

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	23	50	162	162
Fleur et Couple	6	17	34	73
Couple	6	19	34	73
Sans Tri Local	37	62	82	133

Critère de la moyenne et liste non triée

TAB. 4.2 – Recouvrements de *sphere* (liste non triée)

Les tableaux suivants concernent les recouvrements calculés sur le maillage *hippocampus* constitué de 1002 sommets et de 2000 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 1002 régions. Les différences étant mineures, nous ne présentons pas les résultats concernant le calcul de recouvrements sans l'utilisation d'une liste triée.

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	156	182	593	1002
Fleur et Couple	10	27	174	999
Couple	9	31	171	999
Sans Tri Local	145	203	548	973

Critère du maximum et liste triée

	Seuil			
	10	0.1	0.01	10E-5
Fleur	121	146	225	973
Fleur et Couple	10	24	53	389
Couple	10	27	62	389

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.3 – Recouvrements de *hippocampus*

Les tableaux suivants concernent les recouvrements calculés sur le maillage *mèche* constitué de 1572 sommets et de 3152 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 1572 régions. Parce qu'ils ne présentent pas de spécificité, nous ne présentons pas les résultats concernant le calcul de recouvrements avec un seuil de 0.00001.

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	366	365	615
Fleur et Couple	53	51	153
Couple	40	48	71

Critère du maximum et liste triée

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	306	313	431
Fleur et Couple	39	51	63

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.4 – Recouvrements de *mèche*

Les derniers tableaux concernent les recouvrements calculés sur le maillage *croissants* constitué de 542 sommets et de 1080 faces. Le recouvrement initial est donc composé de 542 régions.

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	109	113	516
Fleur et Couple	14	25	159
Couple	17	33	162

Critère du maximum et liste triée

	Seuil		
	10	0.1	0.01
Fleur	99	139	191
Fleur et Couple	13	25	50
Couple	12	30	55

Critère de la moyenne et liste triée

TAB. 4.5 – Recouvrements de *croissants*

## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un algorithme de construction d'un recouvrement bien formé sur un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  qui est une variété de dimension 2 connexe et compacte. Pour ce faire, nous avons démontré que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Nous avons également établi des conditions suffisantes sur son nerf pour que le recouvrement reste bien formé après la fusion d'une partie de ses régions. Cela nous a permis de proposer un algorithme de division-fusion pour construire un tel recouvrement, et finalement de l'appliquer à l'approximation de  $\mathcal{M}$  par une famille de primitives planes. Ces résultats constituent la première étape de la construction de notre modèle de surface.

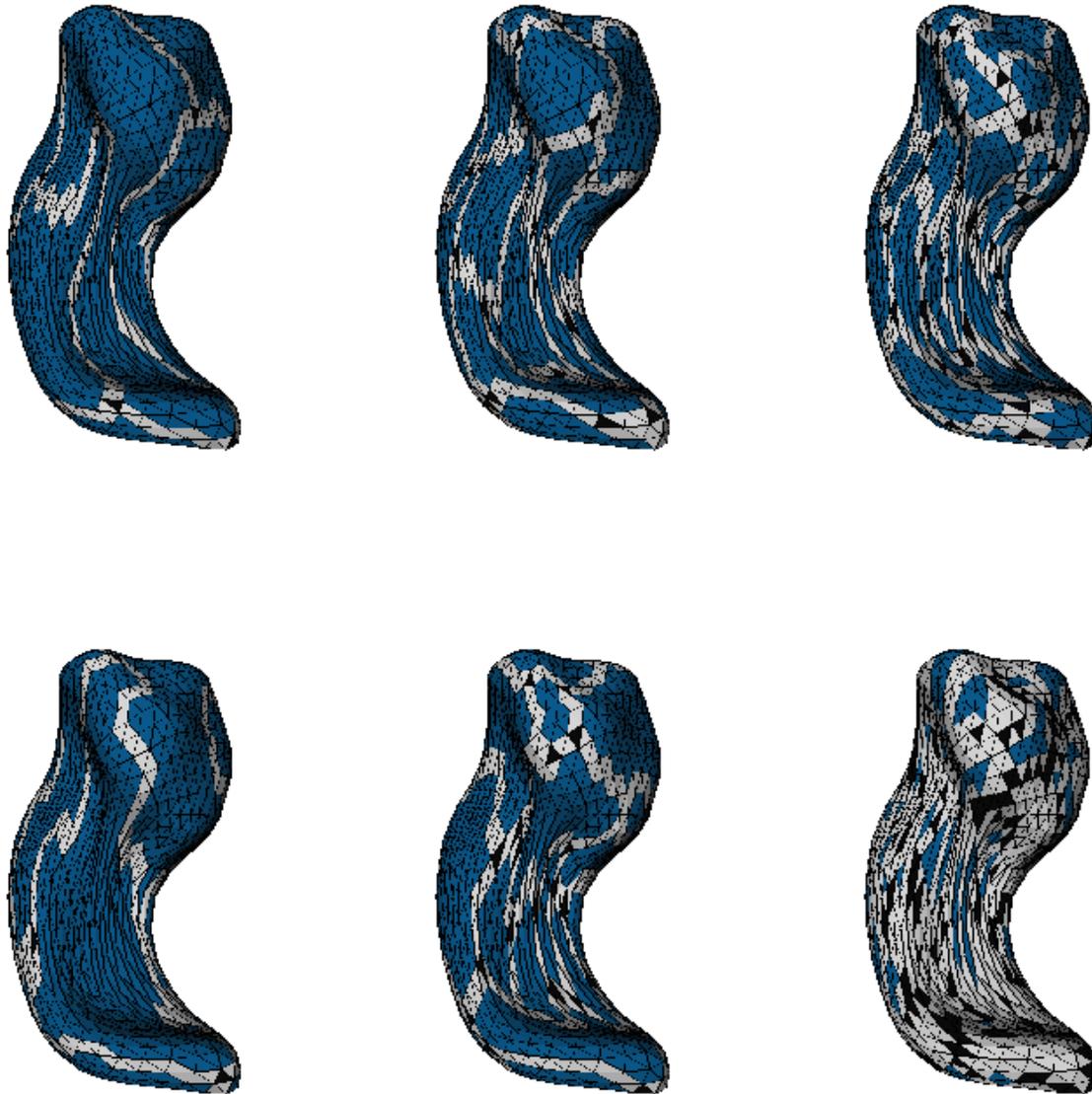


FIG. 4.28 – Régions définies sur *hippocampus* avec un seuil de 10, 0.1, et 0.01. Sur la première ligne, l'erreur est calculée comme la moyenne des carrés des distances des points au plan. Sur la deuxième ligne, l'erreur est calculée comme le maximum des carrés des distances des points au plan.



# Chapitre 5

## Approximation $C^1$ d'une couronne polygonale du plan

### 5.1 Introduction

A la deuxième étape de la construction de notre modèle de surfaces, nous avons vu au chapitre 3 qu'il fallait mettre en correspondance des points des primitives qui approchent le maillage  $\mathcal{M}$  en définissant des fonctions de transition entre les domaines de paramétrisation de ces primitives (figure 5.1).

Pour cela, nous paramétrons des parties de différents domaines sur un même lieu : la fonction de transition entre des parties de deux domaines est alors simplement définie comme la composée de la réciproque de la paramétrisation d'une partie d'un des deux domaines avec la paramétrisation d'une partie de l'autre domaine. De plus, il faut que les fonctions de transition soient des  $C^1$ -difféomorphismes. Nous cherchons donc naturellement à paramétrer les parties de chaque domaine par un  $C^1$ -difféomorphisme. Or il s'avère, comme nous le verrons à la fin de ce chapitre, que les parties des domaines à mettre en correspondance appartiennent à une couronne définie dans chaque domaine au voisinage de sa frontière. Par ailleurs, les primitives définies dans le chapitre précédent sont des polygones. Les couronnes correspondantes sont donc polygonales ce qui interdit leur paramétrisation par un  $C^1$ -difféomorphisme. Il est donc indispensable d'approcher cette couronne polygonale par une couronne continue paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme. C'est l'objet de l'étude conduite dans ce chapitre.

Pour réaliser cette étude, nous procédons en trois temps. Nous commençons par décrire une boucle par un paramètre orthoradial. La boucle est alors paramétrée sur le cercle unité  $\mathcal{C}$  par une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  évaluant ce paramètre orthoradial en fonction d'un angle qui, lui, repère un point de  $\mathcal{C}$ .

Nous observons ensuite que ce procédé ne peut être généralisé à la description de toute couronne polygonale du plan. Nous étudions alors l'approximation d'une couronne poly-

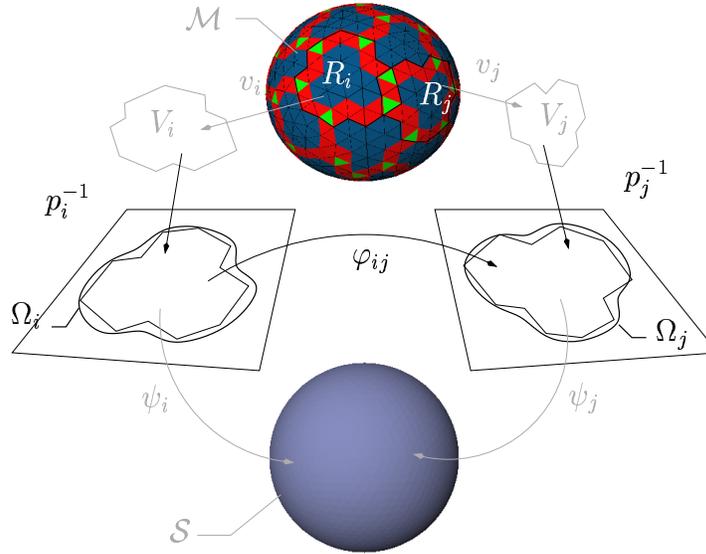


FIG. 5.1 – Deuxième étape de la construction de notre modèle : mise en correspondance des points des primitives

gonale quelconque du plan par une couronne polygonale que nous savons décrire par deux paramètres, l'un radial et l'autre orthoradial. Cette dernière couronne est alors paramétrée sur un anneau circulaire par une fonction évaluant deux paramètres décrivant la couronne en fonction des deux paramètres (radial et orthoradial) qui décrivent l'anneau circulaire. Finalement, l'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue se déroule en deux temps. Nous commençons par approcher la couronne polygonale par une couronne polygonale paramétrée sur un anneau circulaire. Puis nous lissos les fonctions de paramétrisation pour qu'elles décrivent une couronne continue.

Nous verrons à la fin de ce chapitre comment nous choisissons les parties des couronnes à mettre en correspondance et donc finalement comment nous définissons les fonctions de transition de l'atlas du modèle de surfaces que nous construisons. Nous remarquerons également que la paramétrisation proposée par un paramètre radial et un paramètre orthoradial simplifie grandement la définition de la partition de l'unité subordonnée aux domaines. Nous utilisons ces fonctions pour définir les poids de la combinaison convexe indispensable au raccord des primitives entre elles.

## 5.2 Description d'une boucle du plan par un paramètre orthoradial

### 5.2.1 Introduction

Nous présentons dans cette section la description d'une boucle du plan par un paramètre orthoradial. Nous utilisons l'expression "par un paramètre orthoradial" pour qualifier une description des points de la boucle qui est semblable à celle des points du cercle unité par leur coordonnée angulaire dans la base polaire dont l'origine du repère est le centre. Nous verrons que le cas d'une boucle étoilée est particulièrement bien adapté à cette description. Malheureusement, toutes les boucles ne sont pas étoilées. Cependant, nous baserons la description d'une boucle quelconque par un paramètre orthoradial sur cette première constatation, en décrivant la boucle par morceaux, chaque morceau étant étoilé.

#### 5.2.1.1 Définitions

Commençons par définir ce qu'est une boucle :

**Définition 46 (Boucle)** *On appelle boucle tout ensemble de points du plan homéomorphe à  $\mathcal{C}$ .*

où  $\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$  est le cercle unité du plan.

**Définition 47 (Partie centrale, Partie extérieure)** *Une boucle divise le plan en deux parties disjointes : une partie centrale bornée et une partie extérieure non bornée.*

Tout point du cercle unité  $\mathcal{C}$  est repérable par  $\phi$ , sa coordonnée orthoradiale (ou angulaire) dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ . Il s'agit à présent de définir  $\vartheta$ , une coordonnée semblable repérant les points d'une boucle donnée, puis de définir un homéomorphisme de  $\mathcal{C}$  sur la boucle (figure 5.2).

#### 5.2.1.2 Cas d'une boucle étoilée

La description d'une boucle par une coordonnée orthoradiale se fait naturellement dans le cas d'une boucle étoilée.

**Définition 48 (Boucle étoilée)** *Une boucle est étoilée s'il existe un point  $C$  du plan tel que, tout point  $M$  de la boucle est l'unique point de la boucle appartenant au segment  $[C, M]$ .*

En effet, la coordonnée orthoradiale dans la base polaire de centre  $C$  repère convenablement les points de la boucle étoilée. Malheureusement toute boucle n'est pas étoilée (figure 5.3).

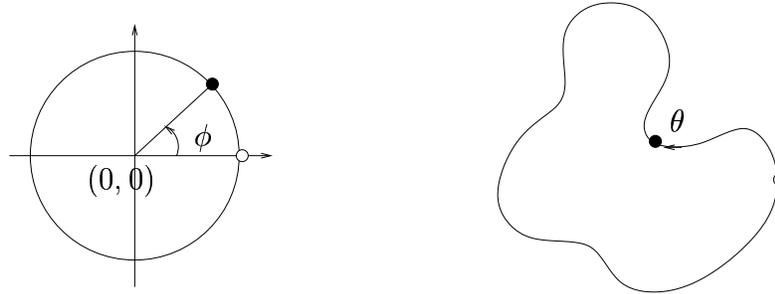


FIG. 5.2 – Description d'une boucle par un paramètre orthoradial

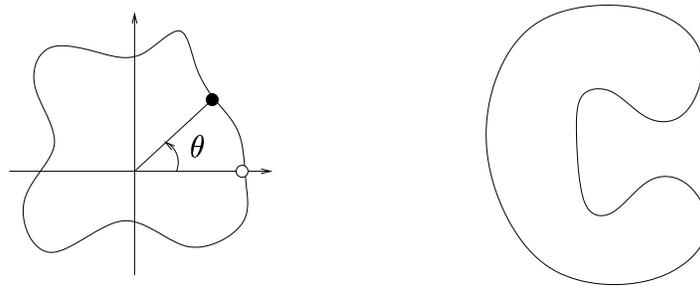


FIG. 5.3 – A gauche, une boucle étoilée. A droite, une boucle non étoilée

### 5.2.1.3 Généralisation par l'intermédiaire de bases polaires locales

Nous cherchons alors à généraliser ce premier résultat à une boucle quelconque. L'idée est de décomposer la boucle en portions, chaque portion étant étoilée et donc repérée par une coordonnée orthoradiale dans une base polaire locale de centre  $C_n$  appelé *pivot*.

Aussi, tout point de la boucle doit posséder une unique coordonnée orthoradiale. Il doit donc être repéré dans une et une seule de ces bases locales. Nous présentons dans ce chapitre comment définir des pivots qui satisfont à cela, puis nous définissons l'homéomorphisme sur  $\mathcal{C}$ . Tout cela sera traité dans le cadre particulier d'une boucle polygonale.

## 5.2.2 Construction des pivots

### 5.2.2.1 Introduction

Il s'agit de définir une succession de bases polaires locales centrées en des points  $C_n$  nommés pivots de telle sorte que tout point d'une boucle polygonale soit repéré par une et une seule base.

Pour cela, nous proposons de définir alternativement un pivot dans la partie centrale et dans la partie extérieure (parties du plan séparées par la boucle) de telle sorte que chaque segment  $[C_n, C_{n+1}]$  n'intersecte la boucle qu'en un seul point. Ce point sera repéré par l'une des deux bases centrées en  $C_n$  ou  $C_{n+1}$ .

La qualité de la définition de tels pivots est déterminée par l'utilisation que l'on en fait. Ces pivots vont permettre de décrire une couronne. Afin de minimiser la place mémoire nécessaire à cette description, il convient de définir le plus petit nombre possible de pivots. A l'inverse, nous approcherons une couronne polygonale par une couronne continue en lissant ses boucles frontières par un algorithme qui demande aux segments de la portion décrite par la base locale de centre  $C_n$  d'être orientés le moins radialement possible. Enfin, la ligne polygonale joignant les pivots successifs doit être sans auto-intersection afin de pouvoir discriminer les points appartenant à la partie centrale, à l'intérieur ou à la partie extérieure de la couronne (voir paragraphe 5.5.2.2, page 129).

Pour positionner les pivots, nous procédons en deux temps : nous commençons par définir les pivots appartenant à la partie centrale, puis les pivots appartenant à la partie extérieure. Pour cela, nous utilisons un pseudo-squelette de la partie centrale.

### 5.2.2.2 Pseudo-squelette d'une région polygonale

**Définition d'un pseudo-squelette** Soit  $R$  une région du plan délimitée par un polygone simple.

Le squelette de  $R$  est une représentation filiforme et centrée de  $R$  [Blu67, Att95]. Une de ses principales propriétés est d'être de même homotopie que  $R$ .

REMARQUE —

Deux ensembles  $X$  et  $Y$  sont de même homotopie s'il existe deux applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  ainsi que deux familles  $\{\varphi_t\}$  et  $\{\psi_t\}$  de fonctions continues de  $Y$  dans  $Y$  et de  $X$  dans  $X$  respectivement ( $t \in [0; 1]$ ) telles que

- $\varphi_t$  est continue par rapport à  $t$  et à  $y \in Y$  simultanément et  $\varphi_0 = f \circ g$ ,  
 $\varphi_1 = id_Y$
- $\psi_t$  est continue par rapport à  $t$  et à  $x \in X$  simultanément et  $\psi_0 = g \circ f$ ,  
 $\psi_1 = id_X$

où  $id_Y$  est l'application identité sur  $Y$  et  $id_X$  est l'application identité sur  $X$ .

Intuitivement, si l'on faisait le vide dans  $R$ , ses parois s'écraseraient sur son squelette.

Dans notre cas nous n'avons pas besoin de la géométrie exacte du squelette de  $R$ . C'est pourquoi nous utilisons un pseudo-squelette qui est plus facile et plus rapide à calculer. Il s'agit d'une région polygonale du plan de même homotopie que  $R$ , incluse dans  $R$  et d'épaisseur nulle sauf au niveau des embranchements.

**Construction du pseudo-squelette** Notre construction du pseudo-squelette utilise une triangulation de  $R$ . Pour cela, on utilise un algorithme classique de triangulation d'un polygone simple. La triangulation obtenue prend appui sur les sommets de la ligne polygonale frontière de  $R$ , et s'effectue sans ajout de points à l'intérieur de la région. Sous ces condi-

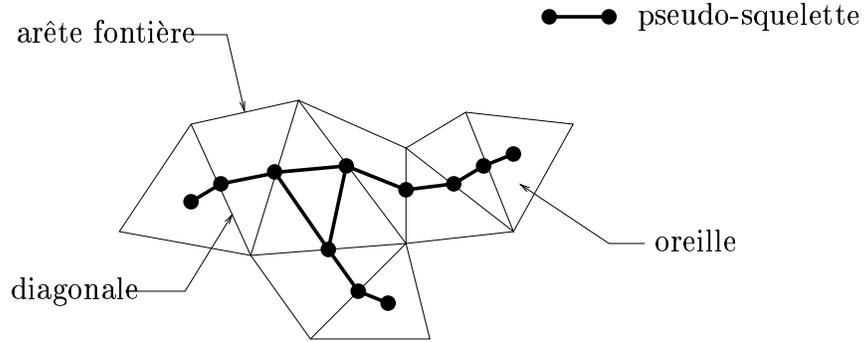


FIG. 5.4 – Pseudo-squelette d'une région polygonale

tions, les arêtes de la triangulation sont de deux types : les arêtes dont l'intérieur est strictement inclus dans  $R$  que nous appellerons les diagonales de la triangulation et des arêtes incluses dans la frontière de  $R$ , que nous appellerons arêtes frontières. Nous appelons oreilles de la triangulation les triangles possédant exactement deux arêtes frontières (figure 5.4).

La frontière du pseudo-squelette est construite de la façon suivante : un sommet est placé au milieu des diagonales et au barycentre des oreilles. On relie ensuite deux sommets s'ils appartiennent au même triangle.

**Propriétés du pseudo-squelette** Ce pseudo-squelette nous est utile pour trois raisons :

- les pivots de la partie centrale sont définis sur la frontière du pseudo-squelette : nous sommes assurés qu'ils appartiennent à la partie centrale ;
- les extrémités du pseudo-squelette (barycentre des oreilles) sont de bons candidats pour être des pivots appartenant à la partie centrale ;
- le pseudo-squelette définit un mur dans la partie centrale, séparant les pivots de la partie centrale qui sont en regard de deux parties de la frontière de  $R$  diamétralement opposées : cela permettra d'éviter les auto-intersections de la ligne polygonale joignant les pivots successifs.

### 5.2.2.3 Construction des pivots appartenant à la partie centrale

Pour placer les pivots appartenant à la partie centrale, nous parcourons la boucle dans le sens trigonométrique et en repérons les parties qui tournent à gauche. Nous plaçons un pivot dans la partie centrale en regard de chacune de ces parties.

REMARQUE —

Un couple  $(e_1, e_2)$  d'arêtes successives de la boucle tourne à gauche si le produit scalaire  $(e_1^\perp | e_2)$  est positif, où  $e_1^\perp$  est le vecteur directement orthogonal à  $e_1$ .

Aussi pour définir les pivots appartenant à la partie extérieure, nous aurons besoin que

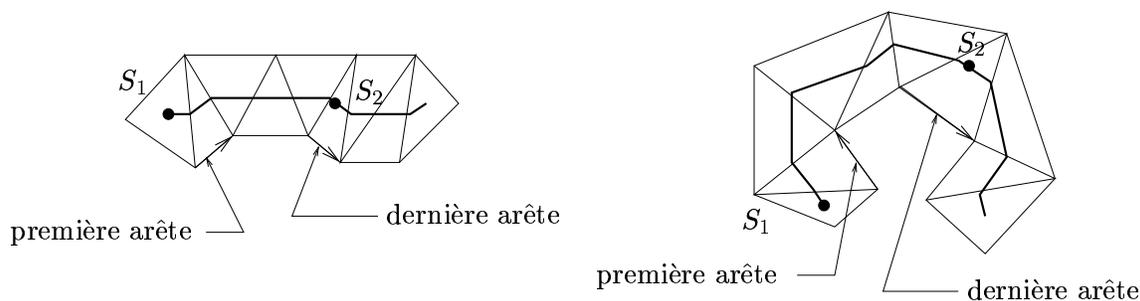


FIG. 5.5 – Arêtes extrêmes d'une séquence tournant à droite

ces parties ne s'enroulent pas sur elles-mêmes, que ce soit à gauche comme à droite (voir le paragraphe 5.2.2.4). C'est pourquoi nous avons choisi l'heuristique suivante.

Le barycentre de chaque oreille de la triangulation est choisi comme pivot appartenant à la partie centrale. Il est en regard des deux arêtes frontières de l'oreille. Nous parcourons alors chaque partie de la boucle délimitée par deux arêtes frontières appartenant à deux oreilles différentes.

Si lors de ce parcours la boucle tourne à droite, nous arrêtons le parcours dès lors qu'elle tourne à gauche ou que les deux arêtes extrêmes de cette sous-séquence forment un angle supérieur à  $\pi$ . On définit alors comme nouveau pivot appartenant à la partie centrale un point de l'arête frontière du pseudo-squelette qui est parallèle à la dernière arête du parcours (sauf si cette arête appartient à une oreille). On reprend ensuite le parcours jusqu'à ce que l'on rejoigne la prochaine arête appartenant à une oreille (figure 5.5).

Si lors de ce parcours la boucle tourne à gauche, nous arrêtons le parcours dès qu'elle tourne à droite ou qu'un des segments  $[S_1; P]$  et  $[P; S_2]$  intersecte la frontière du pseudo-squelette.  $S_1$  est le dernier pivot créé en date,  $S_2$  est le candidat pour être le prochain et  $P$  est un point médian de la séquence d'arêtes de la boucle parcourue. Cette condition est nécessaire pour éviter les auto-intersections de la ligne polygonale reliant les pivots successifs entre eux (figure 5.6).

#### 5.2.2.4 Construction des pivots appartenant à la partie extérieure

Il s'agit à présent de définir un pivot appartenant à l'extérieur de la boucle, entre chaque paire de pivots successifs appartenant à la partie centrale. Là encore nous proposons une heuristique.

Soit  $(S_1, S_2)$  une paire de pivots successifs appartenant à la partie centrale. S'ils correspondent au parcours d'une partie de la boucle qui tourne à droite, on note  $C$  le milieu de  $[S_1, S_2]$ . On recherche le point d'intersection de la boucle avec la médiatrice de  $[S_1, S_2]$ , le plus proche de  $C$  et se trouvant à droite de la droite dirigée par  $(S_1, S_2)$ . Si ce point n'existe pas ou correspond à une entrée de la médiatrice dans la région centrale, alors  $C$  est à l'extérieur de la boucle. On l'accepte comme pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  (figure 5.7-a).

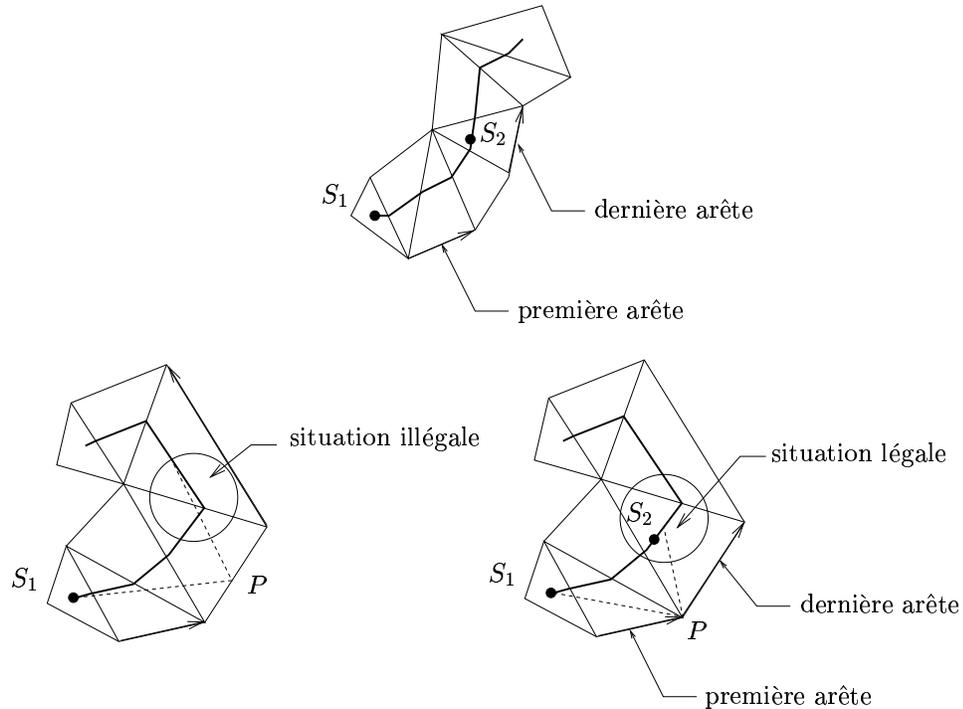


FIG. 5.6 – Arêtes extrêmes d’une séquence tournant à gauche

Sinon, on le note  $P$ . On note  $I$  le point d’intersection, le plus proche de  $P$ , de la demi-droite  $[C; P)$  avec la boucle. Le segment  $]P; I[$  appartient à la partie extérieure. Si  $I$  n’existe pas, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par  $E = P + \lambda \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigeant  $[C; P)$ , et  $\lambda > 0$  (figure 5.7-b). Si  $I$  existe, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par la même formule mais avec  $\lambda = \|PI\|/2$  (figure 5.7-c).

Si  $S_1$  et  $S_2$  correspondent au parcours d’une partie de la boucle qui tourne à gauche, nous avons déjà défini un  $P$  dans le paragraphe précédent (figure 5.7-d). On note  $I$  le point d’intersection, le plus proche de  $P$ , de la demi-droite perpendiculaire à  $[S_1, S_2]$  et se trouvant à droite de ce segment, avec la boucle et entrant dans la partie centrale. Le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est alors défini par les mêmes formules que ci-dessus, selon l’existence ou non de  $I$ .

On peut remarquer que les deux segments  $[S_1; E]$  et  $[E; S_2]$  n’intersectent jamais la partie de la frontière du pseudo-squelette délimitée par  $S_1$  et  $S_2$ .

### 5.2.2.5 Compléments

Ces heuristiques ont deux défauts.

D’une part, elles n’interdisent pas les intersections dans une séquence de cinq pivots successifs  $(S_1, E_1, S_2, E_2, S_3)$  contenant deux pivots extérieurs  $E_1$  et  $E_2$  (figure 5.8). Cette configuration intervient lorsque deux séquences d’arêtes tournant à droite peuvent en fait

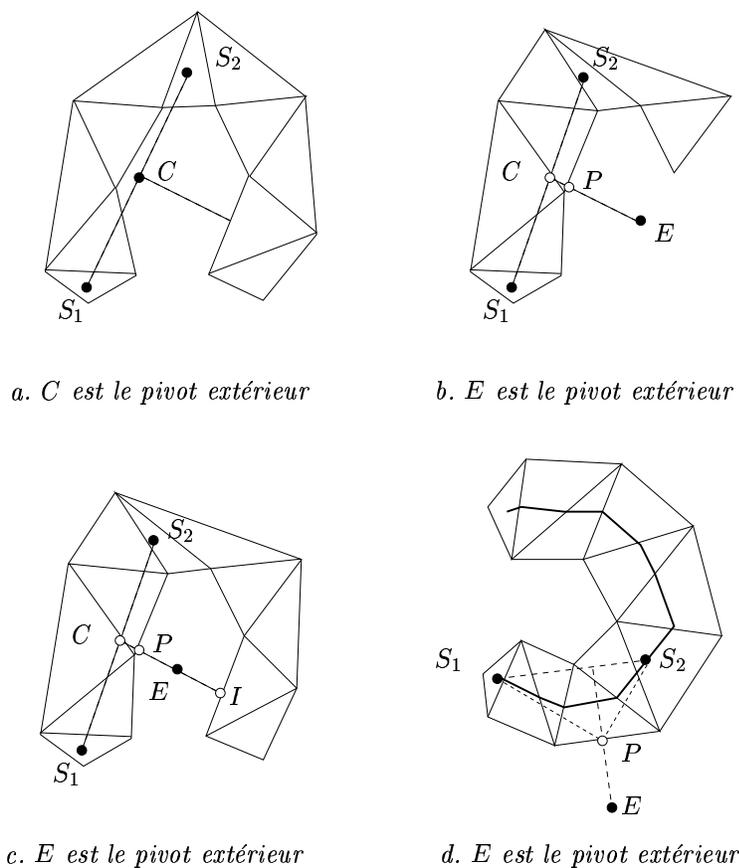


FIG. 5.7 – Construction des pivots appartenant à la partie extérieure

être repérées par le même pivot extérieur. On supprime donc les pivots  $S_2$  et  $E_2$ . D'autre part, elles n'interdisent pas les intersections entre deux séquences de trois pivots successifs  $(S_1, E_1, S_2)$  et  $(S_3, E_3, S_4)$  dont le pivot central est un pivot extérieur (figure 5.9). Pour résoudre cela, on rapproche  $E_1$  et  $E_3$  de la boucle en les faisant glisser sur les segments  $[M; P]$ .

## 5.2.3 Définition de l'homéomorphisme

### 5.2.3.1 Description dans une base polaire locale

Nous avons défini des pivots  $\{C_n\}$  positionnés alternativement dans la partie centrale et dans la partie extérieure, de telle sorte que chaque segment  $[C_{n-1}; C_n]$  intersecte la boucle en un unique point noté  $B_n$ , et que la portion de la boucle délimitée par  $B_n$  et  $B_{n+1}$  (dans un parcours dans le sens trigonométrique de la boucle) soit étoilée par rapport à  $C_n$ .

Les points de cette portion sont alors décrits dans la base polaire locale de centre  $C_n$

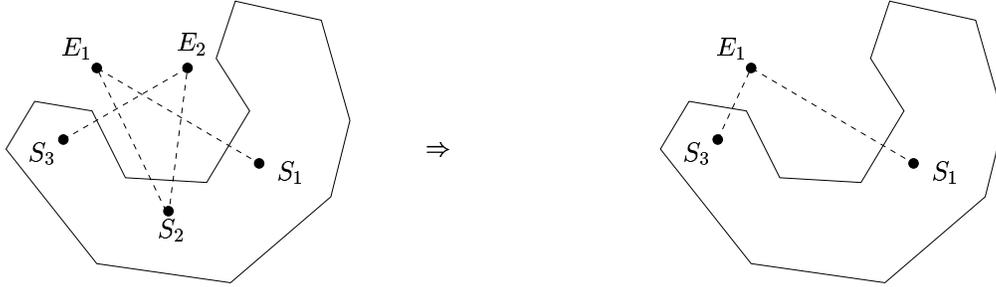


FIG. 5.8 – Correction du premier défaut de l'heuristique proposée

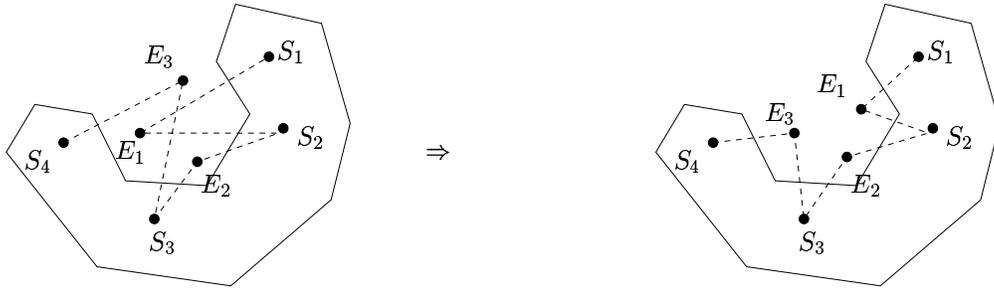


FIG. 5.9 – Correction du deuxième défaut de l'heuristique proposée

par

$$M = C_n + \rho_n(\theta)\vec{u}(\theta)$$

avec  $\vec{u}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$  où  $\theta$  est la coordonnée angulaire et  $\rho_n$  la coordonnée radiale définies par la base polaire.

Comme la boucle est une ligne polygonale, il existe deux réels  $d_n$  et  $\theta_n^o$  tels que

$$\rho_n(\theta) = \frac{d_n}{\cos(\theta - \theta_n^o)}$$

### 5.2.3.2 Paramétrisation sur un arc de $\mathcal{C}$

Rappelons que nous cherchons à paramétrer la boucle sur le cercle unité  $\mathcal{C}$ .

Aussi, nous l'avons décrite par morceaux dans des bases polaires locales successives. Il suffit alors de paramétrer chaque morceau décrit dans une base de centre  $C_n$ , sur un arc de  $\mathcal{C}$  correspondant à  $\phi \in [\phi_{n,1}, \phi_{n,2}]$ , où  $\phi$  est la coordonnée orthoradiale dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ .

La paramétrisation s'écrit alors

$$M(\phi) = C_n + \rho_n(\theta(\phi))\vec{u}(\theta(\phi))$$

avec  $M$  parcourant la boucle dans le sens trigonométrique quand  $\phi$  augmente.

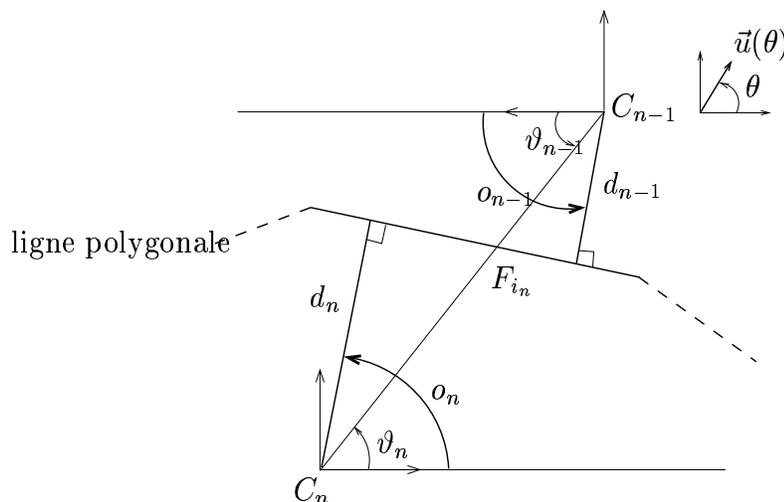


FIG. 5.10 – Notations à la limite entre les portions repérées par deux pivots successifs

Alors, si  $C_n$  appartient à la partie centrale,  $\theta(\phi)$  est croissante. Si  $C_n$  appartient à la partie extérieure,  $\theta(\phi)$  est décroissante.

Afin d'homogénéiser les situations, nous notons  $\vartheta_n = \theta$  et  $o_n = \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et  $\vartheta_n = \pi - \theta$  et  $o_n = \pi - \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie extérieure (figure 5.10). Nous avons ainsi

$$M(\phi) = C_n + \rho_n(\vartheta_n)\vec{u}(\theta)$$

où  $\theta = \vartheta_n$  ou  $\theta = \pi - \vartheta_n$ ,  $\vartheta_n = \vartheta_n(\phi)$  et

$$\rho_n(\vartheta_n) = \frac{d_n}{\cos(\vartheta_n - o_n)}$$

REMARQUE —

En fait, la boucle étant constituée de plusieurs segments,  $d_n$  et  $o_n$  sont des fonctions de  $\vartheta_n$  constantes par morceaux.

### 5.2.3.3 Paramétrisation par un homéomorphisme

Pour que cette paramétrisation soit un homéomorphisme, il suffit d'assurer que

- $\rho_n \neq 0$
- $\vartheta_n(\phi)$  est bijectif

car alors la paramétrisation est bijective. Elle est de plus continue ainsi que sa réciproque.

La première condition est assurée de par la construction des pivots.

Pour vérifier la deuxième, il suffit de définir  $\vartheta_n(\phi)$  comme une fonction linéaire croissante interpolant les deux conditions  $\vartheta_n(\phi_{n,1}) = \vartheta_{n,1}$  et  $\vartheta_n(\phi_{n,2}) = \vartheta_{n,2}$  où  $\vartheta_{n,1}$  et  $\vartheta_{n,2}$  sont des constantes déterminées par la position des pivots  $C_{n-1}$  et  $C_{n+1}$ .

### 5.2.3.4 Paramétrisation par un $C^1$ -difféomorphisme

En revanche, si l'on souhaite que cette paramétrisation soit un  $C^1$ -difféomorphisme, nous butons sur un problème : il faudrait pour cela que la dérivée de  $\vartheta_n$  s'annule à chaque sommet de la boucle polygonale, ce qui interdirait alors à la paramétrisation d'être bijective.

Nous pouvons cependant traiter le problème suivant. Supposons que tous les segments  $[C_{n-1}; C_n]$  coupent la boucle à l'intérieur d'un segment. Quelles conditions doit satisfaire la paramétrisation pour être un homéomorphisme qui soit de classe  $C^1$  en ce point d'intersection  $M_n$  ?

Nous montrons en annexe C qu'une condition suffisante est d'avoir en ce point

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi} = \frac{\|C_{n-1}M_n\|}{\|C_nM_n\|} \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial \phi} \quad (5.1)$$

Nous choisissons donc de définir  $\vartheta_n$  de la façon suivante. Elle est une fonction continue et strictement croissante, interpolant en plus des conditions de position évoquées dans le paragraphe précédent, deux conditions de tangence en chaque sommet de la séquence d'arêtes. Aux extrémités de la séquence (points d'intersection  $M_n$  et  $M_{n+1}$  entre la boucle et les segments  $[C_{n-1}; C_n]$  et  $[C_n; C_{n+1}]$  respectivement), nous choisissons de demander que la dérivée de  $\vartheta_n$  soit égale à

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi}(\phi_{n,1}) = \frac{\lambda}{\|C_nM_n\|} \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi}(\phi_{n,2}) = \frac{\lambda}{\|C_nM_{n+1}\|} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

où  $\lambda$  est indépendant de  $n$ . Cela nous assure que l'équation 5.1 est vérifiée, et donc que la paramétrisation est bien de classe  $C^1$  aux points d'intersection de  $[C_{n-1}; C_n]$  et de  $[C_n; C_{n+1}]$  avec la boucle.

Il nous reste à définir une telle fonction. Pour résumer, il s'agit de définir, pour chaque morceau, une fonction strictement croissante interpolant deux doubles conditions de position et tangence  $(\phi_1, \vartheta_1, \vartheta'_1)$  et  $(\phi_2, \vartheta_2, \vartheta'_2)$ . Nous ajoutons de plus que l'on souhaite expliciter sa réciproque. C'est pour cette dernière raison que nous n'utiliserons pas un polynôme de degré trois mais deux polynômes de degré deux se rejoignant au milieu de l'intervalle des paramètres (figure 5.11). Nous montrons en annexe C qu'une condition suffisante pour que cette fonction soit strictement croissante est

$$\max(\vartheta'_1, \vartheta'_2) \leq \text{pente} \quad (5.5)$$

où  $\text{pente} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1}$ .

C'est pourquoi nous choisissons pour  $\lambda$ ,

$$\lambda = \min_n \{ \min(\text{pente}_{n-1} \|C_{n-1}M_n\|, \text{pente}_n \|C_nM_n\|) \} \quad (5.6)$$

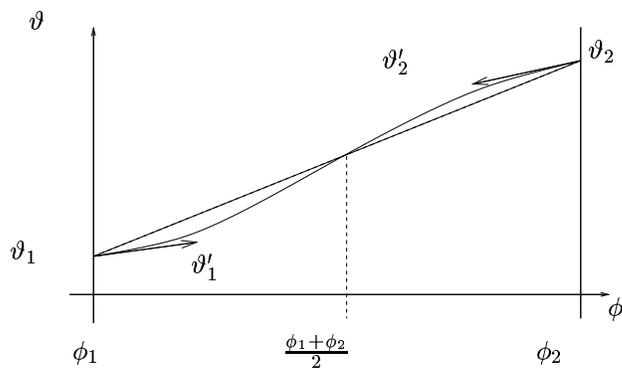


FIG. 5.11 – Interpolation bijective de conditions d'Hermite par deux polynômes de degré deux (schéma)

où  $\text{pente}_{n-1}$  est la pente du dernier morceau repéré par la base de centre  $C_{n-1}$ , et  $\text{pente}_n$  est la pente du premier morceau repéré par la base de centre  $C_n$ . La condition de tangence au sommet intérieur commun à la  $i - 1$ ème et à la  $i$ ème arêtes de la séquence est

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi} = \min(\text{pente}_{n,i-1}, \text{pente}_{n,i}) \quad (5.7)$$

où  $\text{pente}_{n,i}$  est défini comme précédemment mais avec les conditions de position aux extrémités de la  $i$ ème arête de la portion de la boucle repérée par la base polaire locale de centre  $C_n$ .

## 5.3 Approximation d'une couronne polygonale quelconque par une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales

### 5.3.1 Introduction

#### 5.3.1.1 Définitions

Après avoir paramétré une boucle du plan par un homéomorphisme sur le cercle unité, nous cherchons à paramétrer une couronne du plan par un homéomorphisme sur l'anneau circulaire unité.

**Définition 49 (Anneau circulaire)** *On appelle anneau circulaire l'ensemble des points du plan compris entre deux cercles concentriques.*

*On appelle anneau circulaire unité l'ensemble  $\mathcal{A} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{u^2 + v^2} \leq 2\}$ .*

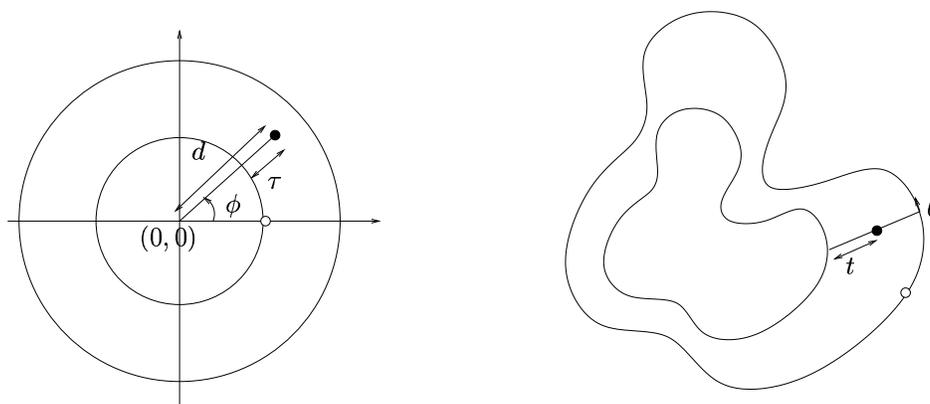


FIG. 5.12 – Description d'un couronne par un paramètre radial et un paramètre orthoradial

**Définition 50 (Couronne, partie centrale, intérieur, extérieur)** On appelle couronne tout ensemble de points du plan homéomorphe à  $\mathcal{A}$ .

La frontière de la couronne est composée de deux boucles, l'une (frontière intérieure) incluse dans la partie centrale de l'autre (frontière extérieure).

Une couronne partage le plan en trois régions : sa partie centrale qui est la partie centrale de sa frontière intérieure, son intérieur qui est l'ensemble de ses points, et son extérieur qui est la partie extérieure de sa frontière extérieure.

**Définition 51 (Couronne polygonale)** On appelle couronne polygonale une couronne dont les frontières sont des lignes polygonales.

Tout point de  $\mathcal{A}$  est repérable de façon unique par  $\phi$ , sa coordonnée orthoradiale (ou angulaire) et  $l$ , sa coordonnée radiale dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ . On peut également choisir comme coordonnée radiale le rapport  $\tau = (l - r_1) / (r_2 - r_1)$  (dans le cas de l'anneau circulaire unité  $r_1 = 1$  et  $r_2 = 2$ ) qui donne la position relative du point par rapport aux points des frontières intérieure et extérieure de même coordonnée angulaire.

Il s'agit à présent de définir  $\vartheta$  et  $t$ , des coordonnées semblables à  $\phi$  et  $\tau$  repérant les points d'une couronne donnée, puis de définir un homéomorphisme de  $\mathcal{A}$  sur la couronne (figure 5.12).

### 5.3.1.2 Cas d'une couronne étoilée

La description d'une couronne par deux coordonnées radiales et orthoradiales se fait naturellement dans le cas d'une couronne étoilée.

**Définition 52 (Couronne étoilée)** Une couronne est étoilée si ses deux frontières sont étoilées autour d'un même point.

Malheureusement toute couronne n'est pas étoilée (figure 5.13).

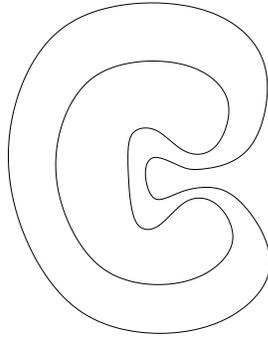


FIG. 5.13 – Une couronne non étoilée

### 5.3.1.3 Généralisation par l'intermédiaire de bases polaires locales

Tout comme nous l'avons fait pour la boucle, nous décomposons la couronne en portions, chaque portion étant étoilée et donc repérée par une coordonnée orthoradiale et une coordonnée radiale dans une base polaire locale de centre  $C_n$  appelé *pivot*.

Aussi, tout point de la boucle doit posséder une unique paire de coordonnées. Il doit donc être repéré dans une et une seule de ces bases locales. Pour cela nous généralisons ce qui a été fait pour la boucle : nous positionnons des pivots alternativement dans la partie centrale et à l'extérieur de la couronne de telle sorte que chaque segment  $[C_{n-1}; C_n]$  intersecte la couronne en une unique composante connexe.

Malheureusement, il existe des couronnes pour lesquelles on ne peut construire de tels pivots. C'est pourquoi nous proposons dans ce chapitre la construction d'une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales et approchant une couronne polygonale donnée.

## 5.3.2 Construction des pivots et modification éventuelle de la boucle extérieure

### 5.3.2.1 Introduction

Pour réaliser une telle approximation nous suivons la philosophie suivante : nous faisons comme si la couronne polygonale donnée pouvait être décrite par une succession de bases polaires locales, et si à une étape de la construction une situation s'avère insoluble, nous modifions la frontière extérieure. Nous préférons modifier la frontière extérieure plutôt que la frontière intérieure car lors de l'application de l'approximation d'une couronne à la construction d'un atlas, la frontière intérieure est la frontière de la zone pure d'une région. Ce sont donc des points que la région ne partage avec aucune autre. Au contraire, la frontière extérieure va se mélanger avec des points d'autres régions. On accepte donc plus volontiers des erreurs sur elle en pensant qu'elles seront compensées lors du mélange.

La construction de l'approximation se déroule en trois temps :

- Positionnement des pivots.
- Modification éventuelle de la frontière extérieure.
- Paramétrisation de la couronne modifiée par un homéomorphisme défini sur  $\mathcal{A}$ .

### 5.3.2.2 Adaptation des étapes de la construction des pivots d'une boucle à celle des pivots d'une couronne

Il s'agit de définir une succession de bases polaires locales centrées en des points  $C_n$  nommés pivots de telle sorte que tout point d'une couronne polygonale soit repéré par une et une seule base.

Pour cela, nous proposons de définir alternativement un pivot dans la partie centrale et dans la partie extérieure de telle sorte que l'intersection de chaque segment  $[C_n, C_{n+1}]$  avec la couronne soit connexe (autrement dit un seul segment). Cette intersection sera repérée par l'une des deux bases centrées en  $C_n$  ou  $C_{n+1}$ .

Les qualités de la définition de tels pivots sont les mêmes que dans le cas d'une boucle. Nous utilisons donc la même démarche :

- Positionnement des pivots appartenant à la partie centrale
- Positionnement des pivots appartenant à la partie extérieure

La première étape est identique à celle proposée dans le cadre d'une boucle, appliquée à la frontière intérieure.

La deuxième étape demande quelques adaptations. Soit  $(S_1, S_2)$  une paire de pivots successifs appartenant à la partie centrale. S'ils correspondent au parcours d'une partie de la boucle intérieure qui tourne à droite, on note  $C$  le milieu de  $[S_1, S_2]$ . On recherche le point d'intersection de la boucle extérieure avec la médiatrice de  $[S_1, S_2]$ , le plus proche de  $C$  et se trouvant à droite de la droite dirigée par  $(S_1, S_2)$ . Si ce point n'existe pas ou correspond à une entrée de la médiatrice dans l'intérieur de la couronne, alors  $C$  est à l'extérieur de la couronne. On l'accepte comme pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$ .

Sinon, on le note  $P$ . On note  $I$  le point d'intersection, le plus proche de  $P$  (mais au-delà de  $P$  vis-à-vis de  $C$ ), de la demi-droite  $[C; P)$  avec l'une des deux frontières. Si l'intersection la plus proche se fait avec la frontière intérieure, alors  $[P, I]$  appartient à l'intérieur de la couronne : il faudra modifier la frontière extérieure ultérieurement. Si elle se fait avec la frontière extérieure, alors  $[P, I]$  appartient à la partie extérieure. Dans les deux cas, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par  $M = P + \lambda \vec{u}$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigeant  $[C; P)$ , et  $\lambda = \|PI\|/2$ . Si  $I$  n'existe pas, le pivot extérieur entre  $S_1$  et  $S_2$  est défini par la même formule mais avec  $\lambda > 0$ .

Enfin, comme pour le cas d'une boucle, on est amené à supprimer des pivots si la ligne polygonale qui les lie a de mauvaises propriétés.

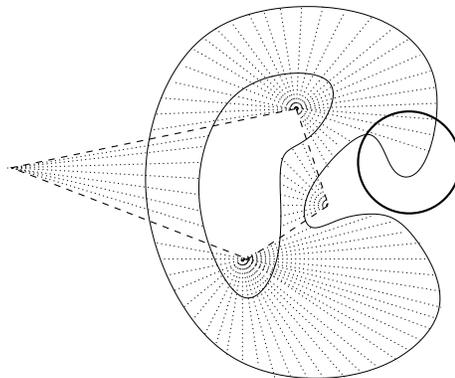


FIG. 5.14 – La partie encerclée n'est pas étoilée dans la base locale construite à partir de la boucle intérieure

### 5.3.2.3 Modification éventuelle de la boucle extérieure

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que certains pivots extérieurs pouvaient être définis dans l'intérieur de la couronne. Par ailleurs, rien ne garantit que les portions repérées par chaque base locale soient étoilées (figure 5.14). Nous présentons comment nous modifions la frontière extérieure lorsque ce n'est pas le cas.

Nous considérons la portion repérée par la base polaire locale de centre  $C_n$ . Celle-ci doit être délimitée par deux séquences d'arêtes qui ne se croisent pas et dont chacune a ses sommets de coordonnée angulaire croissante lorsqu'on la parcourt (ou décroissante selon que  $C_n$  appartient à la partie centrale ou à l'extérieur). Cela est vrai pour la séquence d'arêtes appartenant à la frontière intérieure. Cela doit être vérifié et, le cas échéant forcé, pour les arêtes appartenant à la frontière extérieure.

Nous commençons par nous assurer que chaque segment  $[C_{n-1}, C_n]$  intersecte deux segments appartenant chacun à l'une des deux frontières de la couronne. Si ce n'est pas le cas, on en crée une artificiellement qui appartiendra à la frontière extérieure modifiée. Ensuite, dans chaque portion repérée par une base polaire de centre  $C_n$ , nous parcourons la séquence d'arêtes appartenant à la frontière extérieure en commençant par l'arête qui intersecte  $[C_{n-1}, C_n]$ . On note  $\theta_{dern}$  la coordonnée angulaire dans cette base locale de l'origine du segment qui intersecte  $[C_{n+1}, C_n]$ . Si lors du parcours des arêtes, la coordonnée angulaire des sommets recule ou dépasse  $\theta_{dern}$ , on retire l'arête courante et son origine devient celle de l'arête suivante. Il en est de même si elle croise la séquence d'arêtes appartenant à la frontière intérieure.

Enfin, si l'arête qui intersecte  $[C_{n-1}, C_n]$  ou celle qui intersecte  $[C_{n+1}, C_n]$  a été créée artificiellement, on ne fait que relier ces deux arêtes par une troisième. Une des contraintes considérée lors de la création artificielle de ces arêtes est donc que la coordonnée angulaire de la pointe de la première arête soit plus petite que la coordonnée angulaire de l'origine de la dernière arête. Si cette arête coupe  $[C_{n-1}, C_n]$  ou  $[C_{n+1}, C_n]$ , on la remplace par deux arêtes comme l'indique la figure 5.15.

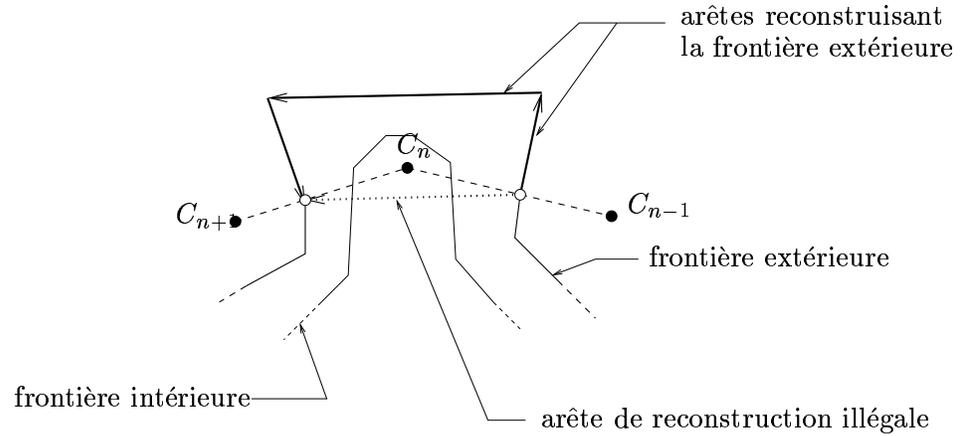


FIG. 5.15 – Cas particulier de reconstruction de la frontière extérieure

### 5.3.3 Définition de l'homéomorphisme

#### 5.3.3.1 Description dans une base polaire locale

Nous avons défini des pivots  $\{C_n\}$  positionnés alternativement dans la partie centrale et dans la partie extérieure, de telle sorte que chaque segment  $[C_{n-1}; C_n]$  intersecte la couronne en un unique segment, et que la portion de la couronne délimitée par les intersections de  $[C_{n-1}; C_n]$  et de  $[C_n; C_{n+1}]$  avec la couronne, soit étoilée par rapport à  $C_n$ .

Comme pour le cas de la boucle, tout point  $M^{\text{int}}$  de cette portion appartenant à la frontière intérieure est décrit par

$$M^{\text{int}} = C_n + \rho_n(\theta)\vec{u}(\theta)$$

On exprime alors la frontière extérieure comme l'“homothétique” de la frontière intérieure avec un coefficient d'homothétie  $b_n$  variable avec la coordonnée angulaire dans la base polaire locale :

$$M^{\text{ext}} = C_n + b_n(\theta)\rho_n(\theta)\vec{u}(\theta)$$

Si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale,  $b_n \in ]0; 1[$ , sinon,  $b_n > 1$ .

Tout point  $M$  de la couronne est alors décrit grâce aux points  $M^{\text{int}}$  et  $M^{\text{ext}}$  des deux frontières repérés par la même coordonnée angulaire, et par un coefficient  $t_n \in [0; 1]$  qui le situe sur le segment  $[M^{\text{int}}; M^{\text{ext}}]$ .

$$\begin{aligned} M &= (1 - t_n)M^{\text{int}} + t_nM^{\text{ext}} \\ M &= C_n + [(1 - t_n) + t_nb_n(\theta)]\rho_n(\theta)\vec{u}(\theta) \end{aligned}$$

### 5.3.3.2 Paramétrisation sur l'anneau circulaire

Rappelons que nous cherchons à paramétrer la couronne sur l'anneau circulaire unité  $\mathcal{A}$ .

Aussi, nous avons décrit cette couronne par morceaux dans des bases polaires locales successives. Il suffit alors de paramétrer chaque morceau de description sur une portion de  $\mathcal{A}$  correspondant à  $\phi \in [\phi_{n,1}, \phi_{n,2}]$  et  $l \in [r_1, r_2]$ , où  $\phi$  est la coordonnée orthoradiale et  $l$  la coordonnée radiale dans la base polaire de centre  $(0, 0)$ .

La paramétrisation s'écrit alors

$$M(l, \phi) = C_n + [(1 - t_n(l, \phi)) + t_n(l, \phi)b_n(\theta(\phi))] \rho_n(\theta(\phi)) \vec{u}(\theta(\phi))$$

avec  $M$  parcourant la boucle dans le sens trigonométrique quand  $\phi$  augmente.

Remarquons que  $b_n$  est calculé dans le plan de la couronne et non dans le plan de l'anneau circulaire : il dépend de  $l$  et  $\phi$  par l'intermédiaire de  $\theta$ , contrairement à  $t_n$ .

Comme pour le cas de la boucle, nous notons  $\vartheta_n = \theta$  et  $o_n = \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et  $\vartheta_n = \pi - \theta$  et  $o_n = \pi - \theta_n^o$  si  $C_n$  appartient à la partie extérieure (figure 5.10, page 103).

Nous avons ainsi

$$M(l, \phi) = C_n + [(1 - t_n(l, \phi)) + t_n(l, \phi)b_n(\vartheta_n)] \rho_n(\vartheta_n) \vec{u}(\theta)$$

où  $\theta = \vartheta_n$  ou  $\theta = \pi - \vartheta_n$ ,  $\vartheta_n = \vartheta_n(\phi)$  et

$$\rho_n(\vartheta_n) = \frac{d_n}{\cos(\vartheta_n - o_n)} \quad (5.8)$$

REMARQUE —

Notons que dans le cas d'une couronne polygonale, la frontière intérieure est constituée de plusieurs segments.  $d_n$  et  $o_n$  sont donc des fonctions de  $\vartheta_n$  constantes par morceaux.

Enfin, nous choisissons de paramétrer la couronne par strates (figure 5.16).

Comme nous avons défini  $t_n$  pour situer un point de la couronne par rapport aux points des frontières de même coordonnée angulaire, nous définissons sur l'anneau circulaire

$$\tau = \frac{l - r_1}{r_2 - r_1}$$

et nous paramétrons  $t_n$  par

$$t_n(l, \phi) = \tau(l, \phi)$$

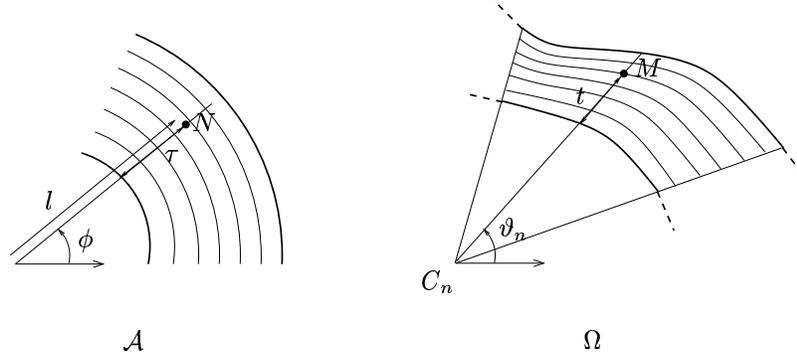


FIG. 5.16 – La paramétrisation d'une couronne est définie par strates. Ses lignes à  $t$  constant sont paramétrées sur les lignes à  $\tau$  constant de  $\mathcal{A}$

REMARQUE —

$\tau$  étant défini sur un anneau circulaire, il ne dépend pas de  $\phi$ . Mais dans l'application que nous faisons de ces travaux à la construction d'un atlas, nous définirons la paramétrisation sur un autre domaine et  $\tau$  sera alors défini par

$$\tau(l, \phi) = \frac{l - r_1(\phi)}{r_2(\phi) - r_1(\phi)}$$

### 5.3.3.3 Paramétrisation par un homéomorphisme

Pour que cette paramétrisation soit un homéomorphisme, il suffit de vérifier qu'elle est continue, inversible et d'inverse continue.

Elle est continue par construction puisqu'elle décrit un objet continu. Son inverse se calcule de la façon suivante. Soit un point  $M = (x, y)$  de la portion repérée par la base polaire locale de centre  $C_n = (x_n, y_n)$ . Alors si  $C_n$  appartient à la partie centrale,

$$\vartheta = \arctan \frac{y - y_n}{x - x_n}$$

sinon

$$\vartheta = \pi - \arctan \frac{y - y_n}{x - x_n}.$$

On peut alors définir  $t_n$  par

$$t_n = \frac{\|C_n M\| - \rho_n(\vartheta)}{(b_n(\vartheta) - 1)\rho_n(\vartheta)} \quad (5.9)$$

dont on déduit  $l$  par

$$l = (1 - t_n)r_1 + t_n r_2$$

Par hypothèse,  $b_n \neq 1$  et  $\rho_n \neq 0$ . L'équation 5.9 est donc bien définie.

REMARQUE —

Dans le cas où l'on ne paramétrise pas la couronne sur un anneau circulaire, il faut d'abord évaluer  $\phi$  afin de calculer  $r_1(\phi)$  et  $r_2(\phi)$  puis en déduire  $l$ .

Si l'on ne demande pas que la paramétrisation soit de continuité supérieure à la continuité  $C^0$ , on utilise la même définition linéaire par morceaux de  $\vartheta_n(\phi)$  que celle proposée pour la paramétrisation d'une boucle. On peut alors écrire

$$\phi = \vartheta_n^{-1}(\vartheta)$$

De plus, pour que cette paramétrisation décrive la couronne polygonale, il faut

$$b_n(\vartheta) = \frac{\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta)}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta)}$$

où  $\rho_n^{\text{ext}}$  est l'équation d'une arête de la séquence de la frontière extérieure et  $\rho_n^{\text{int}}(\vartheta) = \rho_n(\vartheta)$ . En pratique,  $b_n$  est défini ainsi par morceaux, chaque morceau correspondant à un intervalle d'angles  $\vartheta$  où les deux séquences d'arêtes appartenant aux deux frontières de la couronne polygonale sont chacun un segment d'arête.

Enfin, cette paramétrisation est bien un homéomorphisme si les différentes portions ne se superposent pas, ce qui doit être vérifié lors de la mise en conformité de la frontière extérieure.

### 5.3.3.4 Paramétrisation par un $C^1$ -difféomorphisme

En revanche, si l'on souhaite que cette paramétrisation soit un  $C^1$ -difféomorphisme, même aux points de l'intersection des segments  $[C_{n-1}; C_n]$  avec la couronne, la définition proposée pour la paramétrisation d'une boucle nécessite la condition 5.1 qui ne peut être assurée pour deux strates différentes.

Il faut alors définir  $\vartheta_n$  comme une fonction dépendant des deux variables  $\phi$  et  $l$ . Plus précisément nous écrivons

$$\vartheta = \vartheta_n(\tau, \phi)$$

ou encore

$$\vartheta(l, \phi) = \vartheta_n(\tau(l, \phi), \phi)$$

Pour chaque strate, autrement dit pour un  $\tau$  fixé,  $\vartheta_n$  est définie par une succession de polynômes de degré deux interpolant des conditions de position et de tangence, comme nous l'avons exposé dans le cas d'une boucle.

Aussi, on peut remarquer que chacune de ces solutions dépend continûment des conditions de position et de tangence. Les conditions de position varient naturellement de façon continue. De plus nous proposons de conserver une condition de tangence en un sommet intérieur à une séquence d'arêtes identique pour toutes les traces et définie par

l'équation 5.4. Enfin, nous montrons en annexe C qu'une condition suffisante pour avoir une paramétrisation de classe  $C^1$  est

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial v}(u, \phi_{n,1}) = \frac{\|C_{n-1}M_n\|}{\|C_nM_n\|} \frac{\partial \vartheta_{n-1}}{\partial v}(u, \phi_{n-1,2}) \quad (5.10)$$

$$\frac{db_n}{d\vartheta}(\vartheta_n(u, \phi_{n,1})) = \frac{db_{n-1}}{d\vartheta}(\vartheta_{n-1}(u, \phi_{n-1,2})) = 0 \quad (5.11)$$

pour tout  $u$ , où l'on note  $u$  la première variable de  $\vartheta_n$  et  $v$  la deuxième.

La première condition est vérifiée si les conditions de tangence aux extrémités de la séquence vérifient

$$\frac{\partial \vartheta_n}{\partial \phi}(\tau, \phi_{n,i}) = \frac{\lambda}{\|C_nM(\tau)\|} \quad (5.12)$$

où  $\lambda$  est non seulement indépendant de  $n$  mais également de  $\tau$  et où  $M(\tau) = \tau M^{\text{ext}}(\phi_{n,i}) + (1 - \tau)M^{\text{int}}(\phi_{n,i})$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .  $\lambda$  doit de plus être tel que l'équation 5.5 soit vérifiée. C'est pourquoi nous choisissons

$$\lambda = \min_n \{ \min(\text{pente}_{n-1} \|C_{n-1}M_{n-1}\|, \text{pente}_n \|C_nM_n\|) \} \quad (5.13)$$

où  $M_n$  est le point appartenant à la frontière intérieure si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et  $M_n$  est le point appartenant à la frontière extérieure si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

La deuxième condition est vérifiée si les arêtes extrêmes de la séquence appartenant à la frontière extérieure sont parallèles aux arêtes extrêmes de la séquence appartenant à la frontière intérieure. Cela donne une nouvelle condition à vérifier lors de la mise en conformité de la frontière extérieure.

REMARQUE —

Pour l'application à la construction d'un atlas, cette dernière condition n'est pas à vérifier car  $b_n$  définira une approximation continue de cette frontière extérieure satisfaisant l'équation 5.11.

## 5.4 Approximation d'une couronne polygonale quelconque par une couronne continue

### 5.4.1 Introduction

#### 5.4.1.1 Définitions

Nous nous proposons enfin de définir l'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue incluse dans son intérieur. Cette contrainte d'inclusion est posée pour l'application de cette approximation à la construction de notre modèle. En effet, pour utiliser une fonction définie sur une couronne polygonale ( $p_i$  sur la couronne d'échange de  $\Omega_i^0$ ) sur une autre couronne approchant celle-ci (la couronne d'échange de  $\Omega_i$ ), cette nouvelle couronne doit être incluse dans celle qu'elle approche.

**Définition 53 (Couronne continue)** *Une couronne continue est une couronne du plan paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme.*

#### 5.4.1.2 Une solution par une surface de Bézier et ses limites

Une première idée serait de considérer la couronne polygonale comme le polyèdre de contrôle d'une surface de Bézier (voir paragraphe 1.4.1). Pour cela, il faudrait ajouter des sommets aux deux lignes polygonales fermées de telle sorte que tous les sommets soient repérés par le même angle dans une base polaire locale. Les sommets étant ainsi associés deux à deux entre les deux lignes polygonales, ils constituent un polyèdre de contrôle plan d'une surface de Bézier elle-même plane et qui peut être considérée comme une approximation continue de la couronne polygonale (figure 5.17). Malheureusement, étant donné un point de la surface de Bézier, on ne connaît pas les valeurs des paramètres qui lui correspondent. On ne peut donc proposer une réciproque de la paramétrisation qui soit explicite. De plus, la surface de Bézier n'est pas nécessairement incluse dans l'enveloppe convexe de son polyèdre de contrôle, même s'il est contenu dans le plan.

#### 5.4.1.3 Une solution par une étape intermédiaire : l'approximation par une couronne polygonale décrite dans une succession de bases polaires locales

Nous proposons donc de procéder en deux temps :

- approcher la couronne polygonale par une couronne polygonale décrite par une succession de bases polaires locales ;
- approcher, dans cette description, cette dernière couronne polygonale par une couronne continue qui lui est contenue.

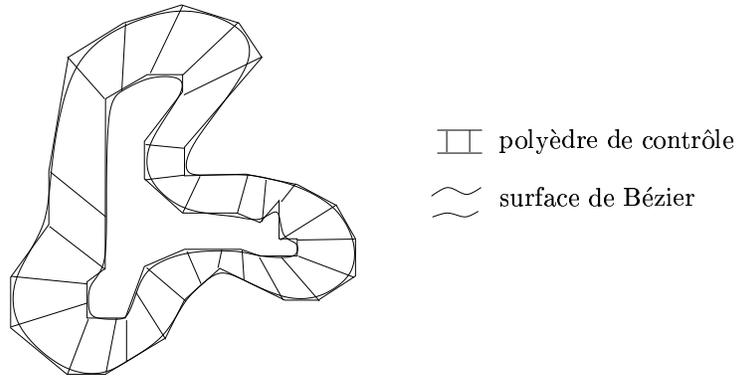


FIG. 5.17 – Une première solution : considérer la couronne polygonale comme étant le polyèdre de contrôle d'une surface de Bézier

La première étape a été décrite dans la section précédente. Nous avons conclu par des conditions suffisantes pour que cette couronne soit paramétrée par un homéomorphisme de classe  $C^1$  lors du passage d'une base polaire locale à une autre. Il nous reste donc à en déduire une paramétrisation de classe  $C^1$  en tous les autres points, telle que la couronne alors décrite soit incluse dans l'intérieur de cette deuxième couronne polygonale.

Or la fonction  $\vartheta_n(\tau, \phi)$  définie dans la section précédente est déjà de classe  $C^1$ . Il suffit donc de lisser les fonctions  $\rho_n$  et  $b_n$ .

#### 5.4.2 Approximation de la boucle intérieure : lissage du paramètre $\rho_n$

La fonction  $\rho_n$  définie dans la section précédente est l'équation polaire de segments de droites partageant successivement une de leurs extrémités. De plus, ces segments appartiennent à la frontière intérieure. Il faut donc définir la nouvelle fonction  $\rho_n(\vartheta)$  comme une fonction de classe  $C^1$  majorant l'ancienne fonction si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale ou la minorant si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie extérieure (figure 5.18). Afin de les différencier, nous notons l'ancienne fonction décrivant la frontière intérieure polygonale  $\rho_n^{\text{int}}(\vartheta)$  et la nouvelle fonction décrivant la frontière lissée  $\rho_n(\vartheta)$ .

Les seules discontinuités de l'ancienne fonction résident aux points de jonction entre deux segments successifs. Nous proposons d'arrondir chacune de ces discontinuités en l'approchant, dans le plan de la couronne, par un morceau de spirale raccordée continuellement avec les deux segments qui s'y rejoignent. Cette solution rejoint les idées développées par Szilvási-Nagy *et al.* [SNV00] et Meek *et al.* [MW98]. En coordonnées polaires, ce morceau de spirale est décrit par une équation affine. Nous travaillons donc avec les coordonnées polaires plutôt qu'avec les coordonnées cartésiennes. Nous définissons, au voisinage de chaque valeur de  $\vartheta$  correspondant à une discontinuité de l'ancienne fonction, une fonction affine. Cette fonction affine majore l'ancienne fonction en tout point de ce voisinage. En pratique,

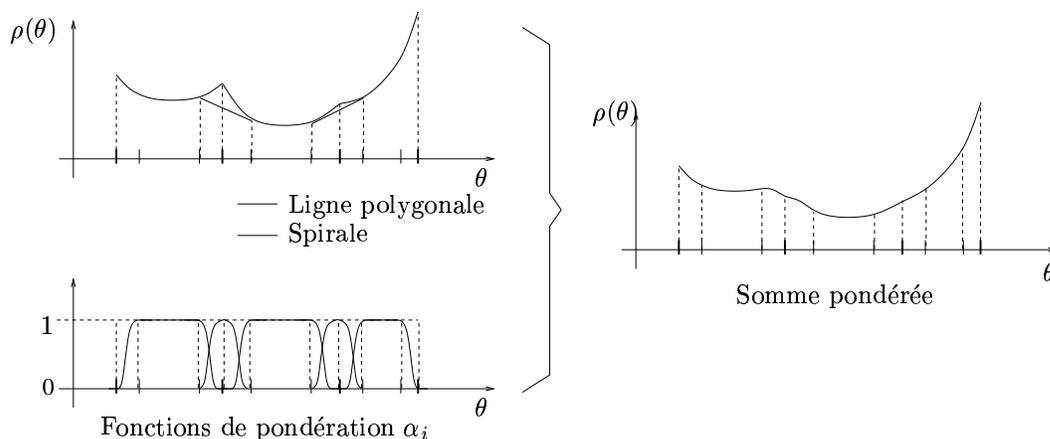


FIG. 5.18 – Minoration de l'équation polaire d'une ligne polygonale par la combinaison convexe d'équations de droites et de spirales

le voisinage recouvre le tiers de chacun des intervalles où sont définies les équations des deux segments qui se rejoignent au point de discontinuité concerné.

On définit ensuite une partition de l'unité  $\{\alpha_i\}_{i \in I}$  subordonnée au recouvrement du domaine de définition de  $\rho_n^{\text{int}}$ , constitué des intervalles de définition de l'équation de chaque segment de droite ainsi que des intervalles de définition de l'équation affine de chaque morceau de spirale défini ci-dessus. Si  $\alpha_i$  est définie sur l'intervalle de définition de l'équation d'un segment, elle est égale à 1 sur le tiers central de son intervalle de définition et 0 en ses extrémités. Si  $\alpha_i$  est définie sur l'intervalle de définition de l'équation d'un morceau de spirale, elle est égale à 1 à la valeur de  $\vartheta$  correspondant à la jonction des deux segments et à 0 aux extrémités de son intervalle de définition. Enfin, chaque  $\alpha_i$  est positive et de classe  $C^1$  sur son intervalle de définition, et leur somme en tout point est égale à 1. Nous verrons dans la section suivante comment construire une telle partition de l'unité dans un cadre plus général.

La nouvelle fonction  $\rho_n$  est alors définie comme la combinaison convexe des équations des segments et des morceaux de spirales, combinaison dont les fonctions  $\alpha_i$  constituent les poids. Nous étudierons plus précisément dans le chapitre suivant cette méthode de raccord de fonctions par combinaison convexe. Notons seulement que la nouvelle fonction  $\rho_n$  ainsi définie majore effectivement l'ancienne fonction grâce à la propriété suivante de la combinaison convexe : son résultat est contenu dans l'enveloppe convexe des primitives (ici les primitives sont les équations des segments et des morceaux de spirale).

REMARQUE —

En pratique, pour définir les morceaux de spirales, nous choisissons celles dont l'équation est déterminée par le minimum de paramètres : les fonctions constantes. Les morceaux de spirales sont alors des morceaux de cercle.

### 5.4.3 Approximation de la boucle extérieure : lissage du paramètre $b_n$

Dans la section précédente,  $b_n$  est définie par morceaux. Chaque morceau correspond à un intervalle de  $\vartheta$  où les deux frontières de la couronne polygonale sont sans discontinuités : ce sont deux segments, morceaux de deux arêtes qui composent les frontières. L'ancienne fonction  $b_n$  était alors définie comme le rapport des équations polaires de ces deux segments.

Nous proposons d'approcher cette définition par une cubique définie par morceaux de continuité  $C^1$ . Le domaine de définition  $[\vartheta_{n,i-1}, \vartheta_{n,i}]$ ,  $i \in \{1, \dots, I_n\}$ , de chaque morceau de cette nouvelle fonction correspond au domaine de définition d'un morceau de l'ancienne fonction ou à un sous-domaine si, parmi les points de la droite qui porte ce segment, le plus proche de  $C_n$  appartient à ce segment. Dans ce dernier cas, ce point est considéré comme un sommet de la frontière divisant l'arête en deux autres arêtes colinéaires. Sur chaque morceau, la nouvelle fonction est une cubique qui interpole des conditions de position et de tangence.

La famille de cubiques d'interpolation dont on peut aisément contrôler la localisation est celle qui interpole des conditions de tangence nulles. On est alors assuré que la valeur de la cubique en tout point de l'intervalle est bornée par les conditions de position. C'est pour cette raison que nous avons préféré l'écriture  $\rho_n^{\text{ext}} = b_n \rho_n^{\text{int}}$  à l'écriture  $\rho_n^{\text{ext}} = \rho_n^{\text{int}} + b_n$ .

Enfin les conditions de positions sont fixées de telle sorte que  $b_n(\vartheta) \rho_n^{\text{int}}(\vartheta)$  soit inférieure à  $\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta)$ , la coordonnée radiale du point de la frontière extérieure de même coordonnée angulaire  $\vartheta$ . Aussi si le rapport  $\rho_n^{\text{ext}}/\rho_n^{\text{int}}$  a des *extrema* locaux, ils sont atteints en des valeurs prises parmi les  $\vartheta_{n,i}$ .

Notons  $e_{n,i} = \|\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta_{n,i}) - \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\|$  l'épaisseur de la couronne polygonale dans la coupe des points de coordonnée angulaire égale à  $\vartheta_{n,i}$ . Nous définissons alors pour chaque morceau défini sur l'intervalle  $[\vartheta_{n,i-1}, \vartheta_{n,i}]$  le nombre

$$b_{n,i-1}^{\text{cent}} = 1 + \frac{\min(e_{n,i-1}, e_{n,i})}{\max(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i-1}), \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et

$$b_{n,i-1}^{\text{ext}} = 1 - \frac{\min(e_{n,i-1}, e_{n,i})}{\max(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i-1}), \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

Nous montrons en annexe C que  $b_n(\vartheta) \rho_n^{\text{int}}(\vartheta) \leq \rho_n^{\text{ext}}(\vartheta)$  si l'on choisit comme condition de position à interpoler en  $\vartheta_{n,i}$

$$\min(b_{n,i-1}^{\text{cent}}, b_{n,i}^{\text{cent}})$$

si  $\vartheta_{n,i}$  n'est pas une des bornes du domaine de définition de  $b_n$ ,

$$\min(b_{n,0}^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n-1, I_n-1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1, I_n-1})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})})$$

si  $\vartheta_{n,i}$  est la première borne du domaine de définition de  $b_n$  et

$$\min(b_{n,I_{n-1}}^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n+1,0}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

si  $\vartheta_{n,i}$  est la dernière borne du domaine de définition de  $b_n$ . Ces valeurs sont données pour  $C_n$  appartenant à la partie centrale.

Au contraire, si  $C_n$  appartient à la partie extérieure, ces trois valeurs deviennent respectivement

$$\begin{aligned} & \max(b_{n,i-1}^{\text{ext}}, b_{n,i}^{\text{ext}}) \\ & \max(b_{n,0}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n-1,I_{n-1}-1}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1,I_{n-1}})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})}) \\ & \max(b_{n,I_{n-1}}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n+1,0}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})}) \end{aligned}$$

REMARQUE —

En théorie, ces conditions de positions ne garantissent pas que l'approximation de la frontière extérieure déterminée par la nouvelle fonction  $b_n$  soit incluse dans l'intérieur de la couronne polygonale. En effet, ces conditions ont été calculées à partir des points de la frontière intérieure de la couronne polygonale. Or celle-ci a été précédemment approchée par le lissage de  $\rho_n^{\text{int}}$  en  $\rho_n$  (dont nous ne pouvons évaluer les *extrema*). Cependant, nous considérons que les marges prises lors du calcul de ces conditions en les évaluant comme des extrema de plusieurs valeurs compensent cette imprécision.

On peut également souhaiter économiser la place mémoire nécessaire au codage de cette approximation aux dépens de la qualité de l'approximation, en définissant chaque  $b_n$  comme une unique cubique. Dans ce cas, nous redéfinissons

$$b_n^{\text{cent}} = 1 + \frac{\min_{i \in 0, \dots, I_n}(e_{n,i})}{\max_{i \in 0, \dots, I_n}(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et

$$b_n^{\text{ext}} = 1 - \frac{\min_{i \in 0, \dots, I_n}(e_{n,i})}{\max_{i \in 0, \dots, I_n}(\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i}))}$$

si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

Les conditions de tangence sont toujours nulles. Les conditions de positions, aux bornes du domaine de définition de  $b_n$  deviennent

$$\min(b_n^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n-1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1,I_{n-1}})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})})$$

et

$$\min(b_n^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n+1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

si  $C_n$  appartient à la partie centrale, et

$$\max(b_n^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n-1}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n-1}^{\text{int}}(\vartheta_{n-1,I_{n-1}})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,0})})$$

et

$$\max(b_n^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_{n+1}^{\text{cent}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{int}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

si  $C_n$  appartient à la partie extérieure.

#### 5.4.4 Résultats

Nous consacrons ce paragraphe à la présentation de quelques résultats de la méthode d'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue qui lui est contenue, que nous avons proposée dans cette section.

Nous proposons trois couronnes à approcher. La première a pour frontières deux carrés, la deuxième deux hexagones et la troisième n'est pas étoilée. Dans chaque cas, nous présentons sur les deux premières lignes les étapes successives de la construction de l'approximation : couronne polygonale à approcher, triangulation de la partie centrale, construction du pseudo-squelette, et enfin construction des pivots. Sur les deux lignes suivantes nous illustrons les différents choix sur la définition de  $b_n$  qui s'offrent à nous et que nous avons évoqués dans cette section. Dans tous les cas, le définir comme un unique polynôme de degré trois dans chaque base polaire locale donne un aspect plus simple et plus lisse aux frontières que s'il est défini comme une spline. Au contraire, la couronne continue recouvre alors moins bien la couronne polygonale. Par ailleurs, si l'on approche d'abord la frontière extérieure et que l'on en déduit ensuite la frontière intérieure grâce à  $b_n$ , le résultat semble mieux couvrir la couronne polygonale mais la frontière intérieure est moins bien approchée. Or nous savons qu'il s'agit de la partie la plus importante. C'est pourquoi nous avons préféré exposer dans cette section les calculs relatifs au choix contraire : une bonne approximation de la frontière intérieure et la déduction de la frontière extérieure grâce à  $b_n$ . Nous donnons alors sur les deux lignes suivantes les approximations avec  $b_n$  défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière intérieure, puis avec  $b_n$  défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure, puis avec  $b_n$  défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière intérieure, et enfin avec  $b_n$  défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure.

La première couronne polygonale que nous approchons a pour frontières deux carrés. Il s'agit du cas le plus simple où tout est symétrique, de la couronne polygonale à son approximation en passant par la triangulation de la partie centrale (figure 5.26).

La figure 5.19 est un gros plan sur l'approximation de la frontière intérieure par combinaison convexe de segments de droites avec des segments de spirales tout en assurant que l'approximation soit bien contenue dans la couronne polygonale.

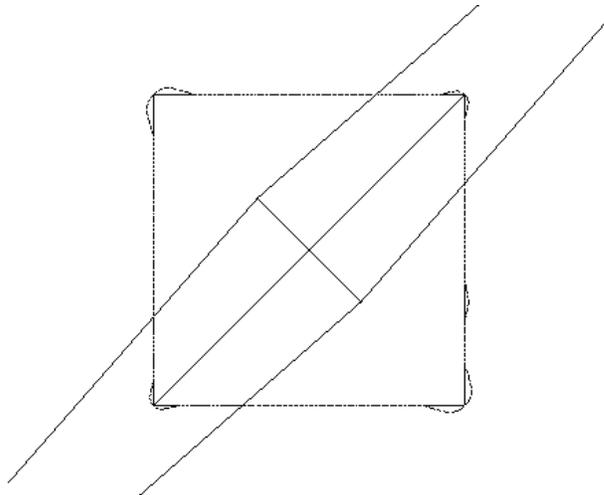


FIG. 5.19 – Approximation de la frontière intérieure par combinaison convexe de segments de droites avec des segments de spirales

La deuxième couronne que nous approchons a pour frontières deux hexagones. Elle est donc tout aussi symétrique que la précédente, mais sa triangulation ne l'est pas. Nous illustrons alors les importantes répercussions de cette dissymétrie sur le résultat final (figure 5.27).

Enfin, nous illustrons notre méthode avec une couronne non étoilée (figure 5.28).

## 5.5 Application à la construction d'un atlas

L'approximation d'une couronne polygonale par une couronne continue est utile pour la construction de l'atlas d'une surface lisse  $\mathcal{S}$  approchant un maillage triangulaire  $\mathcal{M}$  donné.

En effet, dans le chapitre précédent, nous avons défini sur le maillage  $\mathcal{M}$  un recouvrement dont chaque région  $R_i$  était bien approchée par un plan sur lequel elle se projette bijectivement en une région polygonale notée  $V_i = v_i(R_i)$ . La construction d'un repère local de  $\mathbb{R}^3$  dont le centre  $O_i$  et deux vecteurs de base  $(u_{i,1}, u_{i,2})$  appartiennent au plan portant  $V_i$  permet de définir une région polygonale de  $\mathbb{R}^2$  notée  $\Omega_i^0 = p_i^{-1}(V_i)$ .

$$\begin{aligned} p_i : \Omega_i^0 &\rightarrow V_i \\ (x, y) &\mapsto O_i + xu_{i,1} + yu_{i,2} \end{aligned}$$

Nous avons établi dans le chapitre précédent que l'ensemble des points qu'une région  $R_i$  partage avec d'autres régions (sa zone d'échange) est une couronne dont la frontière

extérieure est la frontière de  $R_i$  et dont la partie centrale est la zone pure de  $R_i$  (ensemble des points qu'elle ne partage avec aucune autre région). On définit sur  $\Omega_i^0$  une zone pure et une couronne d'échange, images par la fonction continue et bijective  $p_i^{-1} \circ v_i$  des zones pure et d'échange de  $R_i$ .

Ces domaines  $\Omega_i^0$  du plan sont alors approchés par des domaines continus  $\Omega_i$  définis par l'approximation de la couronne d'échange polygonale de  $\Omega_i^0$  par une couronne continue (la couronne d'échange de  $\Omega_i$ ). La couronne continue d'échange de  $\Omega_i$  est par définition paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme sur un domaine. En faisant se superposer les domaines de paramétrisation des couronnes d'échange de plusieurs régions, nous définissons la fonction de transition  $\varphi_{ij}$  comme la composée de la paramétrisation de la couronne de  $\Omega_j$  avec la réciproque de la paramétrisation de la couronne de  $\Omega_i$ .

Enfin, la description de la couronne d'échange par une coordonnée radiale et une coordonnée orthoradiale va permettre la définition aisée d'une partition de l'unité subordonnée aux domaines  $\Omega_i$ . Chaque fonction est égale à 1 dans la zone pure de  $\Omega_i$  et décroît jusqu'à 0 sur la frontière extérieure suivant la coordonnée radiale.

## 5.5.1 Fonction de transition

### 5.5.1.1 Introduction

Soient  $R_i$  et  $R_j$  deux régions voisines du recouvrement défini sur  $\mathcal{M}$ . Nous avons présenté dans le paragraphe précédent la construction des régions polygonales de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_i^0$  et  $\Omega_j^0$  images de  $R_i$  et  $R_j$  par  $p_i^{-1} \circ v_i$  et  $p_j^{-1} \circ v_j$  respectivement. Nous définissons  $\Omega_{ij}^0 = p_i^{-1} \circ v_i(R_i \cap R_j)$  et  $\Omega_{ji}^0 = p_j^{-1} \circ v_j(R_i \cap R_j)$ .

Nous souhaitons approcher  $\Omega_i^0$  et  $\Omega_j^0$  par deux domaines  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$ . Nous notons  $\Omega_{ij}$  la partie de  $\Omega_i$  approchant la partie  $\Omega_{ij}^0$  de  $\Omega_i^0$ . De même, nous notons  $\Omega_{ji}$  la partie de  $\Omega_j$  approchant la partie  $\Omega_{ji}^0$  de  $\Omega_j^0$ .

Nous souhaitons définir la fonction de transition  $\varphi_{ij}$  comme un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega_{ij}$  dans  $\Omega_{ji}$ . Cette fonction doit être telle que pour tout  $m \in \Omega_{ij}$ ,  $p_i(m)$  et  $p_j(\varphi_{ij}(m))$  approchent le même point de  $\mathcal{M}$ .

Pour réaliser cela, nous approchons la couronne d'échange de chaque domaine  $\Omega_i^0$  par une couronne continue. Cette couronne continue est paramétrée par un  $C^1$ -difféomorphisme noté  $c_i$ . Les différentes fonctions  $c_i$  doivent alors être définies sur des domaines qui se superposent de telle sorte que l'on puisse définir les fonctions de transition par

$$\varphi_{ij} = c_j \circ c_i^{-1}$$

Nous devons alors vérifier

- la transitivité entre transitions : les compositions de fonctions de transition doivent être cohérentes ;

- une bonne mise en correspondance :  $p_i(m)$  et  $p_j(\varphi_{ij}(m))$  approchent le même point de  $\mathcal{M}$ .

### 5.5.1.2 Des transitions transitives

Supposons deux régions voisines  $R_i$  et  $R_j$ . Alors il faut vérifier

$$\varphi_{ji} \circ \varphi_{ij} = \text{id}_{\Omega_{ij}}$$

où  $\text{id}_{\Omega_{ij}}$  est la fonction identité sur  $\Omega_{ij}$ .

Cela est vrai par définition des fonctions de transition :

$$\varphi_{ji} \circ \varphi_{ij} = c_j \circ c_i^{-1} \circ c_i \circ c_j^{-1}$$

Les régions appartenant à un recouvrement bien formé, au plus trois régions se superposent en un point. Il faut alors vérifier en tout point de  $\Omega_{i,jk} = \Omega_{ij} \cap \Omega_{ik}$

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$$

Pour cela, nous choisissons de superposer les domaines de définition de  $c_i$ ,  $c_j$  et  $c_k$  de telle sorte que les parties  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$  de  $\Omega_i$ ,  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$  respectivement, soient paramétrées sur une même région  $T$  du plan.

Aussi nous avons vu que les zones d'échange sur un recouvrement bien formé se répartissent en zones doubles (où seules deux régions se superposent) et en zones triples (où seules trois régions se superposent) homéomorphes à des disques et telles que chaque zone double est adjacente à deux zones triples (l'union de ces trois composantes constitue alors l'intersection entre deux régions) et chaque zone triple est adjacente à trois zones doubles.

Nous coupons alors chaque zone double en deux (séparant ainsi les deux zones triples adjacentes).

REMARQUE —

En pratique, la zone double contient des arêtes de  $\mathcal{M}$ . Pour couper la zone double en deux, nous choisissons une de ces arêtes dont chacune des deux extrémités appartient à l'une des deux régions qui se superposent en cette zone double.

A ce découpage correspond un découpage en tronçons des zones d'échange de chaque domaine  $\Omega_i^0$  où chaque tronçon est constitué de l'image d'une zone triple et de deux demi-zones doubles. Nous définissons alors  $c_i$  par morceaux. Chaque morceau approche un tronçon de  $\Omega_i^0$ . Il contient donc une partie  $\Omega_{i,jk}$  qui approche l'image de la zone triple contenue dans le tronçon. On note alors  $c_{i,jk}$  le morceau de  $c_i$  qui le paramètre. Nous définissons donc les trois fonctions  $c_{i,jk}$ ,  $c_{j,ik}$  et  $c_{k,ij}$  qui paramètrent les morceaux de  $\Omega_i$ ,  $\Omega_j$  et  $\Omega_k$  qui contiennent  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$  respectivement sur un même domaine du plan noté  $T$ .

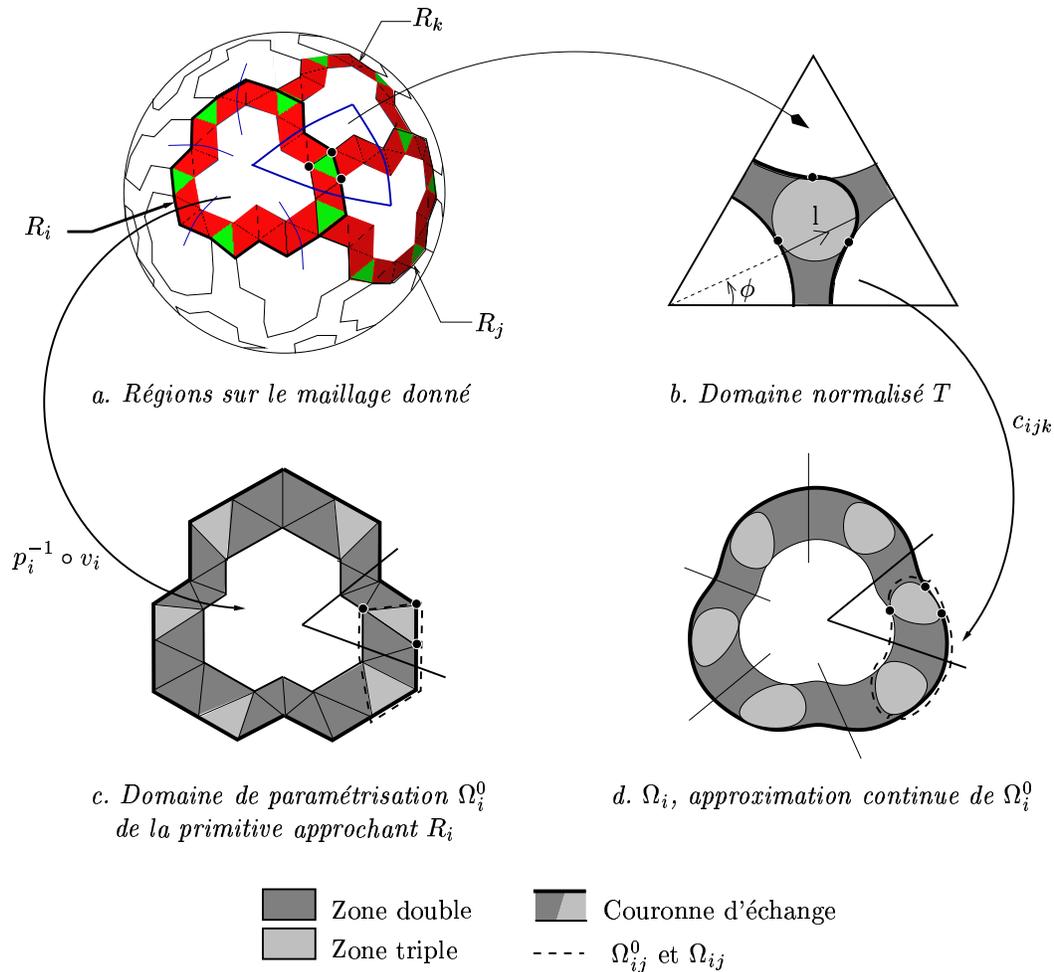


FIG. 5.20 – Découpage des zones d'échanges pour les paramétrer par des  $C^1$ -difféomorphismes

**Définition de  $T$**  Nous avons présenté dans ce chapitre la paramétrisation d'une couronne sur un anneau circulaire. La première idée serait alors de définir le domaine de définition de  $c_{i,jk}$  comme un tronçon d'anneau circulaire.  $T$  serait alors un triangle équilatéral de côté de longueur 1, dont chaque sommet serait associé à l'une des trois régions  $R_i$ ,  $R_j$  ou  $R_k$ . Chaque sommet serait alors le centre d'un anneau circulaire dont l'intersection avec le triangle équilatéral serait le domaine de définition de  $c_{i,jk}$ . L'intersection des trois tronçons d'anneau circulaire serait alors le lieu commun de définition des paramétrisations de  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$ . Malheureusement, cela est incohérent car toute zone triple est incidente à la frontière de la zone pure (donc à la frontière intérieure de la couronne), et une telle configuration crée des zones dans les tronçons d'anneau circulaire non atteintes par les autres tronçons (figure 5.21).

Nous choisissons donc de modifier légèrement cette définition de  $T$ . Chaque sommet du

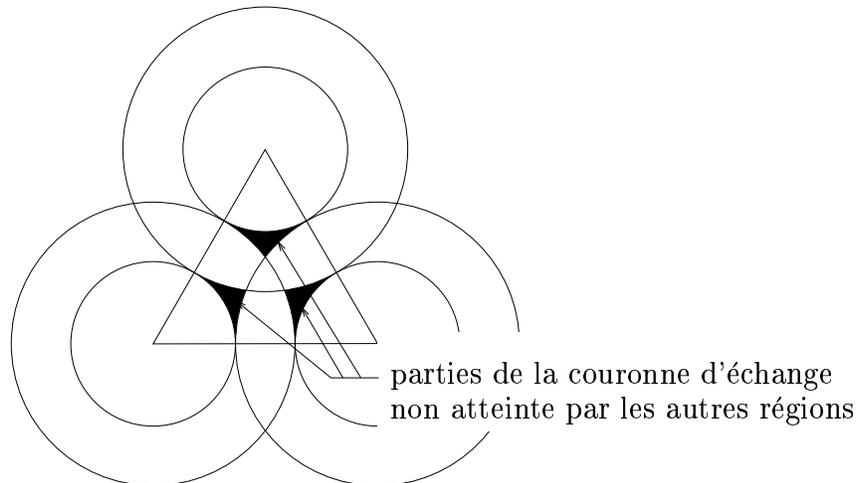


FIG. 5.21 – Les domaines de paramétrisation des couronnes d'échange ne peuvent être des tronçons d'anneau circulaire

triangle est le centre d'une base polaire où le tronçon associé est défini par deux frontières d'équations

$$L^{\text{int}}(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$L^{\text{ext}}(\phi) = \begin{cases} \cos(\phi) - \sqrt{\cos^2(\phi) - \frac{13}{16}} & \text{si } \phi \in [0, \phi^1] \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) + \sqrt{\frac{1}{3} \cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \phi\right) - \frac{5}{16}} & \text{si } \phi \in [\phi^1, \phi^2] \\ \cos\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \phi\right) - \frac{13}{16}} & \text{si } \phi \in [\phi^2, \frac{\pi}{3}] \end{cases}$$

où  $\phi^1$  et  $\phi^2$  sont des valeurs fixées égales à  $\phi^1 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{5}$  et  $\phi^2 = \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Le lieu commun de définition des paramétrisations de  $\Omega_{i,jk}$ ,  $\Omega_{j,ik}$  et  $\Omega_{k,ij}$  est alors un disque dont le barycentre du triangle équilatéral est le centre, et de rayon  $\frac{\sqrt{3}}{12}$  (figure 5.20).

**Illustrations** Nous illustrons ces définitions par les images réciproques sur les domaines  $\Omega_i$  des zones doubles et triples ainsi définies sur  $T$ . Nous attirons votre attention sur le fait que les niveaux de gris apparaissant dans les deux illustrations suivantes sont inversés par rapport à ceux qui sont apparus dans les figures présentées jusqu'alors.

Les cas présentés sont issus des régions initiales de l'algorithme de définition de recouvrement, dont la couronne d'échange a été approchée par une couronne continue établie avec un paramètre  $b_n$  défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière intérieure. Pour la deuxième figure,  $b_n$  est défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure, puis  $b_n$  est défini comme une spline permettant de déduire la frontière extérieure de la frontière

intérieure, et enfin  $b_n$  est défini comme un polynôme de degré trois permettant de déduire la frontière intérieure de la frontière extérieure.

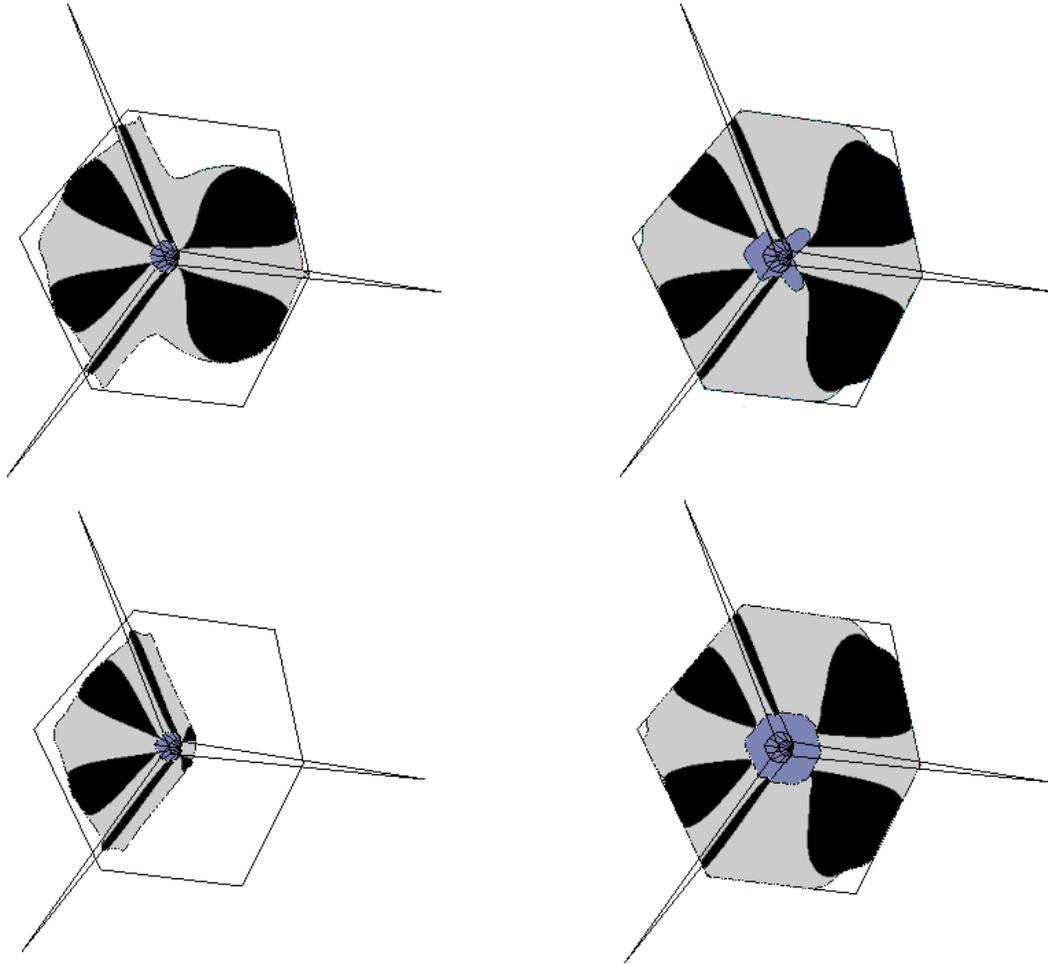


FIG. 5.22 – Images réciproques sur les domaines  $\Omega_i$  des zones doubles et triples définies sur  $T$

Enfin, la figure 5.5.1.2 ne fait apparaître que les parties  $\Omega_{ij}$  et  $\Omega_{ji}$  de deux domaines mis en correspondance par un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi_{ij}$ .

### 5.5.1.3 Une bonne mise en correspondance

Pour réaliser une bonne correspondance entre les images par  $p_i$  des points de  $\Omega_{ij}$  et les images par  $p_j$  des points de  $\Omega_{ji}$  nous proposons de définir sur les zones d'échange définies sur  $\mathcal{M}$  des points caractéristiques.

Nous les choisissons sur la frontière de la zone pure de chaque région. Ce sont d'une part les points appartenant à l'un des segments définis dans le paragraphe précédent pour

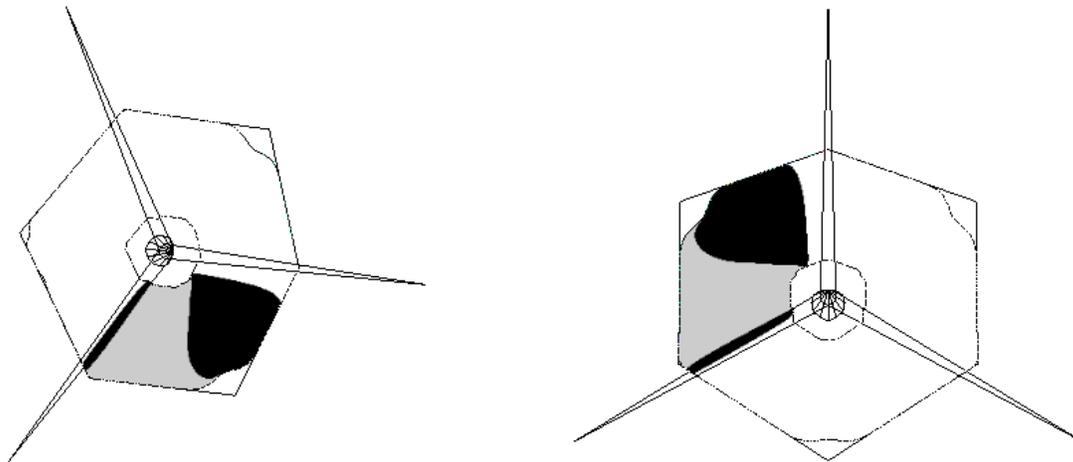


FIG. 5.23 – Parties  $\Omega_{ij}$  et  $\Omega_{ji}$  de deux domaines mis en correspondance par une fonction de transition

couper les zones doubles en deux. D'autre part chaque zone triple de la couronne d'échange intersecte la frontière de la zone pure en une partie connexe. Nous choisissons un point par zone triple.

REMARQUE —

En pratique les zones triples sont réduites à une face triangulaire de  $\mathcal{M}$  dont chaque sommet appartient à la frontière de la zone pure d'une région différente.

Ces points se retrouvent sur les différents domaines  $\Omega_i^0$ . Sur  $T$ , ils correspondent aux points marqués d'une petite boule noire sur la figure 5.20.

Nous définissons alors les fonctions  $c_{i,jk}$  de telle sorte qu'elles interpolent ces points. Pour cela il suffit d'une part d'imposer à la définition de  $\vartheta_n(\tau, \phi)$  de nouvelles conditions d'interpolation et d'autre part de choisir des valeurs de la variable  $\phi$  pour les points correspondant aux bornes d'une portion repérée par une base polaire locale.

REMARQUE —

Le découpage de la couronne d'échange en portions repérées par une base polaire locale et celui en tronçons paramétrés sur un domaine  $T$  sont *a priori* sans aucun rapport (l'un n'est pas le sur-échantillonnage de l'autre par exemple) (figure 5.24).

Les conditions de position sont imposées par les données elles-mêmes et les données de tangence sont définies de la même manière que celles exposées précédemment dans ce chapitre. Les valeurs de  $\phi$  aux bornes de chaque portion sont quant à elles déterminées par une heuristique cherchant à minimiser les distorsions ainsi qu'à minimiser le degré des morceaux de polynômes composant  $\vartheta_n$ .

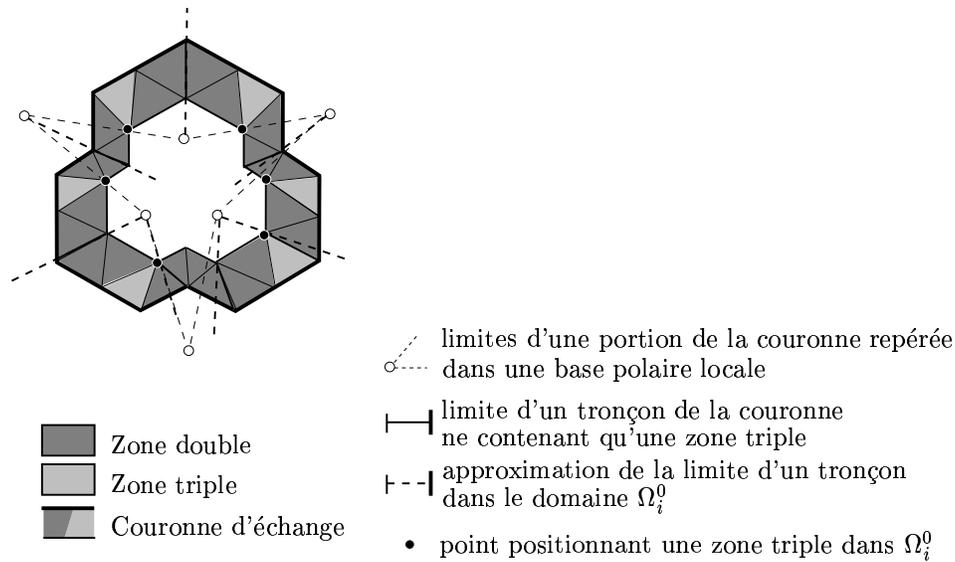


FIG. 5.24 – Découpage d’une couronne d’échange en portions repérées chacun par une base polaire locale et en tronçons ne contenant chacun qu’une seule zone triple

#### 5.5.1.4 En pratique

- Le calcul de l’image d’un point  $(x, y)$  de  $\Omega_i$  dans  $\Omega_j$  se fait alors comme suit :
- recherche de la base locale repérant  $(x, y)$ ,
  - recherche de l’intervalle  $[\vartheta_1; \vartheta_2]$  qui, dans cette portion, contient le point,
  - calcul de l’angle  $\phi$  par l’inverse du polynôme de degré deux associé, et du rapport  $t$  (donc  $\tau$ ),
  - calcul des coordonnées cartésiennes de l’image du point ainsi calculé dans  $T$ ,
  - calcul des coordonnées polaires dans  $T$  mais dans la base associée à  $\Omega_j$ ,
  - recherche de l’intervalle  $[\phi_1; \phi_2]$  qui contient ce point,
  - calcul de l’angle  $\vartheta$  par le polynôme de degré deux associé et du rapport  $\tau$  (donc  $t$ ),
  - calcul des coordonnées cartésiennes de l’image du point ainsi calculé dans le repère local de  $\Omega_j$  associé.

## 5.5.2 Partition de l’unité

### 5.5.2.1 Construction

Il est nécessaire de définir une partition de l’unité subordonnée aux domaines  $\Omega_i$  afin de définir le raccord continu des primitives exposé dans le chapitre suivant.

L’expression “subordonnée aux domaines  $\Omega_i$ ” est un abus de langage au regard de la définition d’une partition de l’unité que nous avons donnée au chapitre 2. Nous cherchons en fait à définir sur chaque domaine  $\Omega_i$  une fonction  $\alpha_i$  telle que :

- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, 0 \leq \alpha_i(m) \leq 1$
- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) = 1$
- $\alpha_i(m) = 1$  si  $m$  appartient à la zone pure de  $\Omega_i$
- $\alpha_i(m) = 0$  si  $m$  n'appartient pas à  $\Omega_i$
- $\alpha_i$  est de classe  $C^1$

Pour cela nous proposons de définir dans un premier temps une fonction  $\beta_i$  sur chaque domaine  $\Omega_i$  indépendamment des autres domaines. Chaque fonction doit satisfaire :

- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, 0 \leq \beta_i(m) \leq 1$
- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \beta_j(\varphi_{ij}(m)) \neq 0$
- $\beta_i(m) = 1$  si  $m$  appartient à la zone pure de  $\Omega_i$
- $\beta_i(m) = 0$  si  $m$  n'appartient pas à  $\Omega_i$

La description de la couronne d'échange par une coordonnée radiale et une coordonnée orthoradiale nous permet de définir de telles fonctions simplement par :

- si  $m$  appartient à la zone pure,  $\beta_i(m) = 1$ ,
- si  $m$  appartient à la portion de la zone d'échange de  $\Omega_i$  repérée dans la base polaire locale de centre  $C_n$ , alors  $\beta_i(m) = \beta(t)$  où  $t$  est le rapport présenté dans la section 5.3.3 situant le point  $m$  radialement dans la couronne, et  $\beta(t)$  est le polynôme de degré trois interpolant les conditions d'Hermite suivantes :  $\beta(0) = 1$  et  $\beta(1) = \beta'(0) = \beta'(1) = 0$ ,
- sinon,  $\beta_i(m) = 0$ .

On définit alors les fonctions  $\alpha_i$  comme des fonctions rationnelles issues de la normalisation des fonctions  $\beta_j$  :

$$\alpha_i(m) = \frac{\beta_i(m)}{\sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \beta_j(\varphi_{ij}(m))}$$

### 5.5.2.2 En pratique

En pratique, une telle définition des fonctions  $\beta_i$  nécessite de pouvoir évaluer si un point du plan appartient à la zone pure de  $\Omega_i$ . Pour cela, nous remarquons que les pivots ont été définis de telle sorte que la ligne brisée qui les relie dans l'ordre du parcours trigonométrique de la couronne soit sans auto-intersection (section 5.2.2). Les tests se déroulent alors comme suit :

On détermine si le point  $m$  appartient au polygone délimité par cette ligne brisée.

Si oui, on parcourt des pivots extérieurs jusqu'à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites :  $m$  doit être repéré, en angle, dans la base locale, et sa coordonnée radiale doit être inférieure à celle du point de la frontière intérieure repéré par le même angle.

Si l'on trouve une telle configuration,  $m$  n'appartient pas à la zone pure. Sinon,  $m$  appartient à la zone pure.

Si le point  $m$  n'appartient pas au polygone délimité par cette ligne brisée, on parcourt des pivots intérieurs jusqu'à ce que les deux conditions suivantes soient satisfaites :  $m$  doit être repéré, en angle, dans la base locale, et sa coordonnée radiale doit être inférieure à celle du point de la frontière intérieure repéré par le même angle.

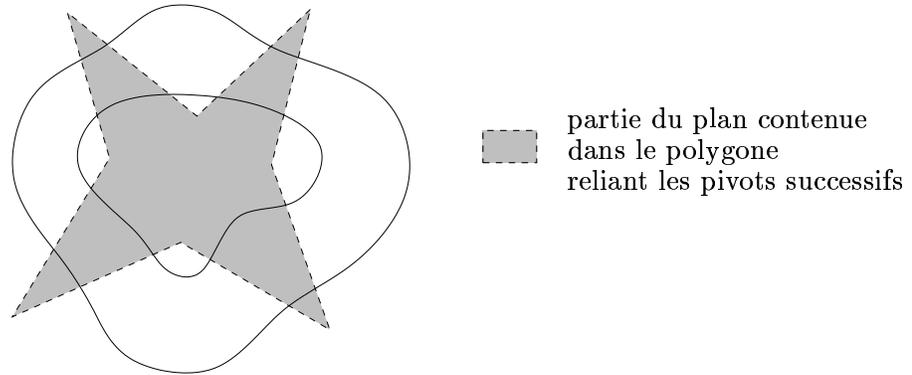


FIG. 5.25 – Illustration pour l’algorithme qui permet de déterminer si un point est contenu dans la partie centrale de la couronne

Si l’on trouve une telle configuration,  $m$  appartient à la zone pure. Sinon,  $m$  n’appartient pas à la zone pure.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié la paramétrisation d’une couronne du plan par un  $C^1$ -difféomorphisme. Nous avons finalement proposé une méthode pour construire une telle couronne continue approchant une couronne polygonale du plan. Cela nous permet de réaliser la deuxième étape de la construction de notre modèle de surface : la définition de domaines de  $\mathbb{R}^2$  liés par des fonctions de transition qui sont des  $C^1$ -difféomorphismes. Cela nous permet également de définir aisément une partition de l’unité subordonnée à ces domaines. Ceci nous sera utile pour la troisième étape de la construction du modèle que nous étudions dans le chapitre suivant : le raccord continu de surfaces.

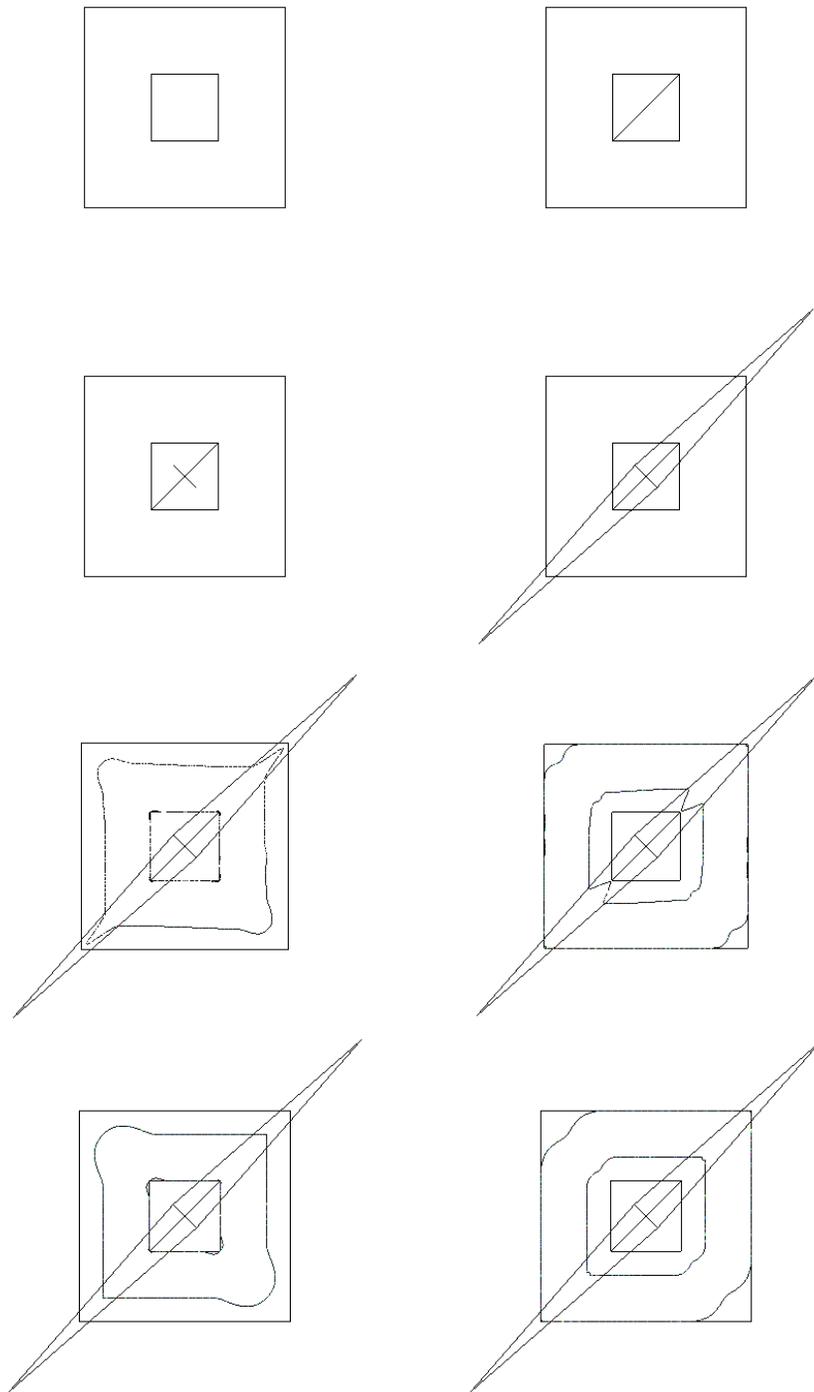


FIG. 5.26 – Approximation d'une couronne simple conduisant à une situation symétrique

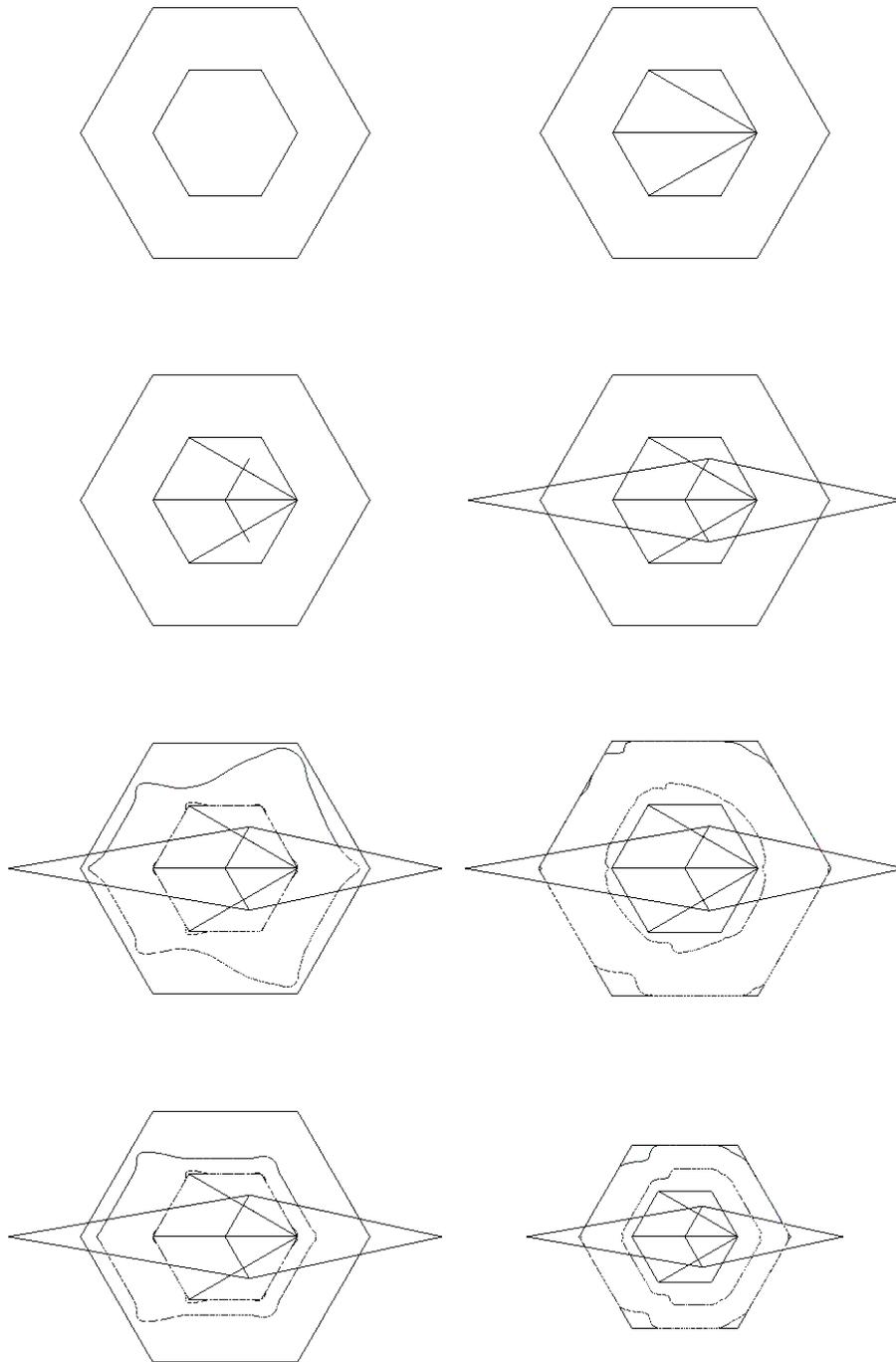


FIG. 5.27 – Approximation d'une couronne simple conduisant à une situation dissymétrique

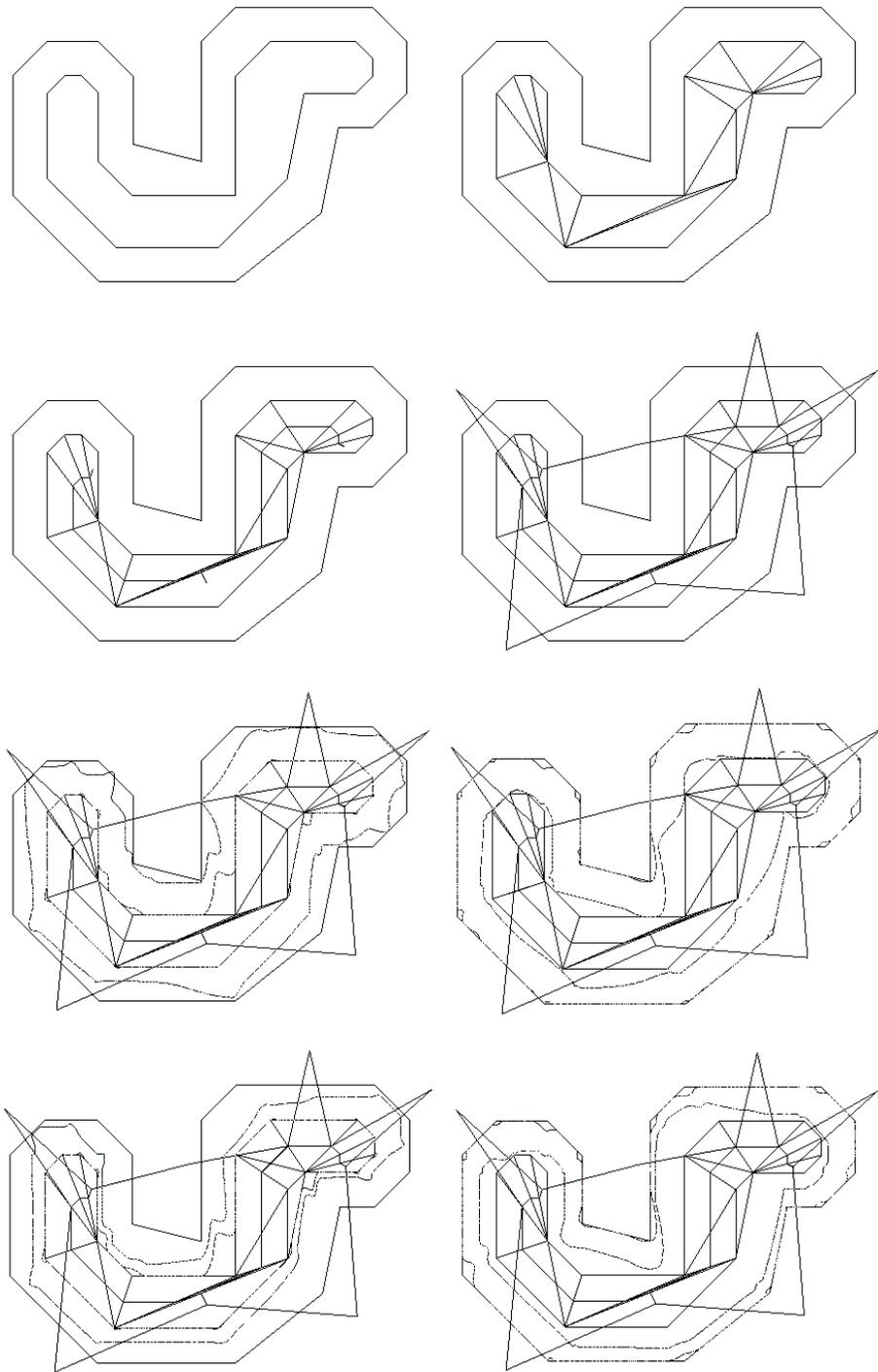


FIG. 5.28 – Approximation d'une couronne non étoilée



# Chapitre 6

## Raccord continu de surfaces

### 6.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous évoquons la troisième étape de la construction du modèle de surface que nous proposons : le raccord continu de surfaces (figure 6.1).

Après avoir évoqué les diverses méthodes existantes, nous en proposons une qui est fondée sur la combinaison convexe des primitives : cette méthode est naturellement associée à la représentation d'une surface par un atlas de cartes. Nous avons présenté cette méthode dans le recueil *Curve and Surface Design, Saint-Malo'99* [GAM99]. Cependant, nous mettrons en évidence que d'autres méthodes telles que le patch de Gregory, ou même l'interpolation de Bézier peuvent être réécrites comme des raccords par combinaison convexe.

Enfin, nous observons qu'un tel raccord s'appuyant sur les domaines définis dans le chapitre précédent et appliqué aux primitives définies dans le chapitre 4, forme une surface régulière  $\mathcal{S}$  : il s'agit de la surface que nous modélisons.

### 6.2 Méthodes existantes

Raccorder des surfaces est un problème courant en “design” des surfaces. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.4.2.1 on ne peut dessiner toute surface avec des morceaux de surface rectangulaires qui ne partagent chacun de leurs sommets qu'avec trois autres morceaux. Si l'on décide de n'utiliser que des morceaux de B-splines, on doit alors dessiner des morceaux de surfaces à  $n$  côtés pour combler quelques trous. D'autre part, bien des modeleurs de CAO utilisent un ensemble réduit de primitives (quadriques, tores ...) et nécessitent le recours à des raccords entre ces primitives.

Demander que ces raccords soient continus est assez naturel. On peut le souhaiter pour des raisons de conception, des raisons mécaniques ou même esthétiques : certains procédés tels que l'extrusion, sont incompatibles avec la présence de coins ou d'arêtes.

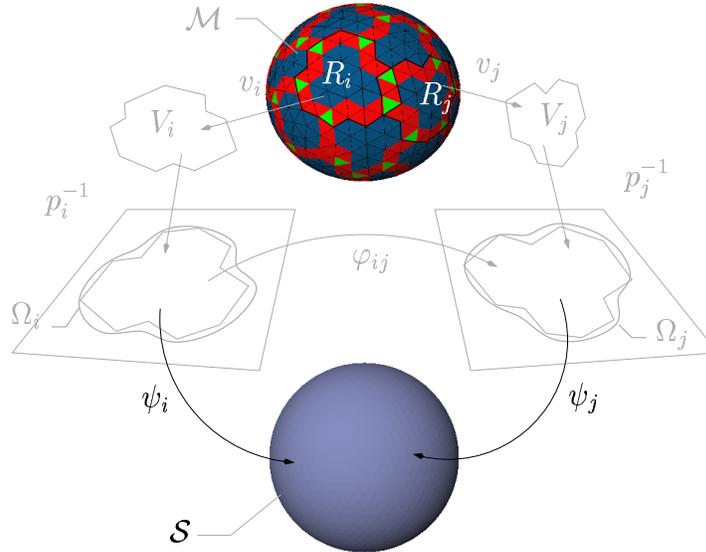


FIG. 6.1 – Troisième étape de la construction de notre modèle : le raccord continu des primitives en une surface  $\mathcal{S}$

Nous proposons donc un aperçu des différentes techniques envisagées pour raccorder des surfaces. Elles peuvent suivre deux types de philosophie : la transition douce entre deux surfaces qui s'intersectent ou le joint entre deux ou plusieurs surfaces sans intersection. Mais elle se classent avant tout selon la nature implicite ou paramétrique des surfaces à raccorder et que l'on appelle primitives.

### 6.2.1 Surfaces implicites

Les méthodes développées pour raccorder des primitives implicites peuvent être classées en trois familles : celles qui définissent une surface par son équation implicite, celles qui prolongent les primitives et enfin celles qui utilisent une définition constructive.

Wu et Zhou [WZ00] définissent une surface implicite qui en raccorde  $n$  autres qui sont de degré deux, en des courbes définies comme l'intersection de chaque primitive avec un plan. L'équation de cette surface implicite est établie en résolvant un système linéaire de grande taille qu'ils simplifient en réduisant le champ d'investigation des solutions.

Hoffmann et Hopcroft [HH86, HH87] établissent l'équation  $F(x, y, z) = 0$  de la surface de raccord entre deux primitives d'équations  $G(x, y, z) = 0$  et  $H(x, y, z) = 0$  en choisissant  $F$  dans l'idéal généré par les deux polynômes  $G$  et  $H$  :  $F = AG + BH$ . Cette méthode est appelée méthode du potentiel.

Enfin, on peut préférer construire le raccord plutôt que de chercher à le définir par des méthodes qui peuvent être instables numériquement. Parmi ces méthodes constructives,

nommons le raccord par une surface de congé [RO87]. Cette méthode a la particularité de pouvoir être utilisée pour raccorder des primitives implicites comme paramétriques. Nous la développerons donc dans le paragraphe suivant.

## 6.2.2 Surfaces paramétriques

Dans le cas de primitives paramétriques, il s'agit de décrire un morceau de surface qui se raccorde à deux ou  $n$  surfaces le long de lignes connues. Comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe 1.4.2.1 le passage entre les paramétrisations des différents morceaux doit être  $C^1$  à une composition près.

### 6.2.2.1 Deux surfaces

La définition d'un raccord entre deux primitives paramétriques peut se faire de trois façons différentes.

Tout d'abord, on peut définir un morceau de cyclide reliant deux quadriques qui s'intersectent [AD97]. La cyclide rejoint chaque quadrique le long d'une de ses lignes de courbure.

L'équation de la surface de raccord peut également être la solution d'équations aux dérivées partielles contraintes par l'interpolation des deux lignes à joindre [BW89]. La surface obtenue est géométriquement belle mais la résolution peut être longue et non explicite : l'équation n'est pas connue, seule sa trace dans l'espace est approchée.

Enfin, comme pour les surfaces implicites, on peut utiliser une surface de congé. Dans sa version la plus simple, il faut imaginer une boule qui roule tangentiellement aux deux surfaces. La surface de raccord est alors définie par la trace de ce déplacement entre les deux lignes de contact de la boule avec les primitives. Cette méthode a été introduite par Rossignac et Requicha [RR84]. Le principal problème à résoudre est la définition de la ligne sur laquelle se déplace la boule. Elle est généralement définie comme l'intersection des offsets des deux primitives (l'offset d'une surface  $S$  est la surface définie comme l'ensemble des points  $x + c\vec{n}$  où  $x$  est un point de  $S$ ,  $c$  est une constante et  $\vec{n}$  est la normale à  $S$  en  $x$ ). A l'inverse on peut préférer décider du tracé des deux lignes de contact et en déduire le profil variable qui va relier les points des deux lignes. Dans ce cas, les lignes sont des interpolations de points effectuées dans l'espace des paramètres de chaque primitive afin de s'assurer que la ligne appartienne à la primitive [Fil89]. Enfin, on peut souhaiter utiliser une boule mais à rayon variable [CH97].

### 6.2.2.2 $n$ surfaces

Lorsque l'on a plus de deux primitives à relier et qu'elles forment un trou à  $n$  côtés, on peut utiliser une des techniques présentées dans le paragraphe précédent de manière

réursive. Mais d'autres méthodes sont plus efficaces. Il s'agit de définir la paramétrisation de la surface de raccord sur un polygone à  $n$  côtés [Mal99].

On peut subdiviser ce domaine de paramétrisation. Parmi ces méthodes, l'une des plus fameuses consiste à subdiviser le domaine de façon réursive en utilisant dans chaque sous-domaine une primitive plane. Cela revient à couper les arêtes et les coins d'un polyèdre réursivement jusqu'à arriver à une surface limite qui soit lisse. Ce sont les méthodes de subdivision de maillage déjà rencontrées dans le paragraphe 1.4.2.1 [Sab83, Sab96]. Prautzsch [Pra93] propose de subdiviser réursivement un domaine de paramétrisation rectangulaire afin de définir un raccord  $C^r$  par morceaux de produits tensoriels de polynômes. On peut au contraire ne subdiviser le domaine qu'une fois en sous-domaines triangulaires ou rectangulaires pour lesquels on sait créer des morceaux de surface convenables telles que des B-splines (cela revient à autoriser des sommets à valence non égale à quatre).

Une autre famille de méthodes consiste à définir une seule équation sur le domaine de paramétrisation. Pour cela on peut définir l'équation à la manière des B-splines, c'est-à-dire comme une somme de points de contrôle (les sommets du trou) multipliés par des fonctions décroissantes de 1 à 0 dans le domaine polygonal [Var91]. On peut aussi préférer définir l'équation comme la somme pondérée de morceaux qui se raccordent convenablement à deux arêtes consécutives du trou [GLH93]. L'équation est alors donnée par une fonction rationnelle.

## 6.3 Par combinaison convexe à l'aide d'un atlas

### 6.3.1 Principe

Nous proposons une méthode de raccord de régions qui peut être vue comme une généralisation de la méthode de Gregory. Elle est fondée sur la représentation des surfaces par un atlas de cartes présentée dans le chapitre I et consiste à mélanger des morceaux de primitives entre eux par combinaison convexe. Pour cela il faut définir la mise en correspondance des points des primitives à mélanger, ainsi que les poids de la combinaison convexe (figure 6.2). Nous avons utilisé une telle méthode lors de l'approximation d'une couronne pour approcher la frontière intérieure par une boucle continue (voir section 5.4.2).

Supposons que les primitives à raccorder soient paramétrées par des fonctions  $p_i$  sur des domaines  $\Omega_i$ . Notons  $\Omega_{ij}$  la partie de  $\Omega_i$  et  $\Omega_{ji}$  celle de  $\Omega_j$  qu'il faut mélanger. Supposons avoir défini un  $C^1$ -difféomorphisme  $\varphi_{ij}$  de  $\Omega_{ij}$  dans  $\Omega_{ji}$ . Les domaines  $\Omega_i$  et les fonctions de transition  $\varphi_{ij}$  constituent alors l'architecture d'une variété de dimension 2 sur laquelle on définit une partition de l'unité (voir paragraphe 2.2.2) : sur chaque  $\Omega_i$  est définie une fonction  $\alpha_i$  de classe  $C^1$ , égale à 1 aux points de  $\Omega_i$  qui n'appartiennent à aucun  $\Omega_{ij}$  (on appelle ces points la zone pure de  $\Omega_i$ ), et égale à 0 à la frontière de  $\Omega_i$ . Notons  $\mathcal{P}(I)$  l'ensemble des parties de  $I$  et, pour tout  $i$  nous définissons l'application qui à tout point  $m$  de  $\Omega_i$  associe l'ensemble des indices  $j$  des régions différentes de  $R_i$  et auxquelles  $m$

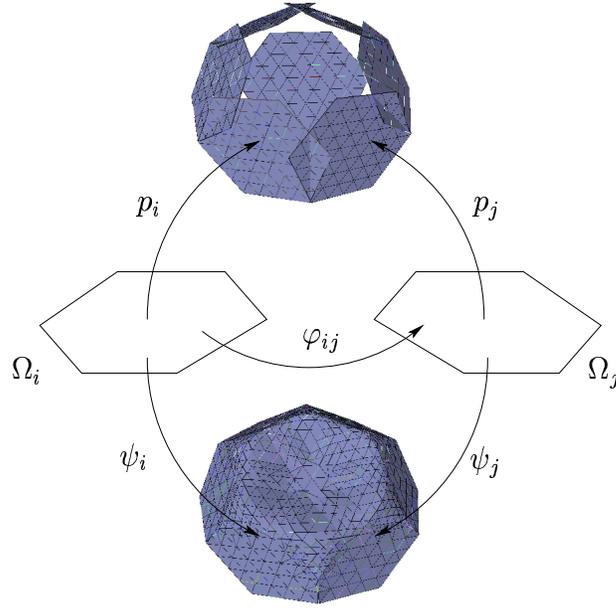


FIG. 6.2 – Raccord de primitives par combinaison convexe s'appuyant sur la structure d'un atlas.

appartient.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_i &: \Omega_i \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{I}) \\ m &\mapsto \{j \in \mathcal{I} : m \in \Omega_{ij}\} \end{aligned}$$

Les fonctions  $\alpha_i$  constituant une partition de l'unité, nous avons

### Propriété 1

- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, 0 \leq \alpha_i(m) \leq 1$
- $\forall i, \forall m \in \Omega_i, \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) = 1$

Nous immergeons alors cette variété de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$  en définissant sur chaque domaine  $\Omega_i$  une paramétrisation locale  $\psi_i$  par

$$\begin{aligned} \psi_i &: \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ m &\mapsto \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) p_j(\varphi_{ij}(m)) \end{aligned}$$

Cette surface quasi-régulière (voir chapitre 2) constitue alors bien un raccord continu des zones pures des primitives.

REMARQUE —

On peut faire deux reproches à cette méthode. D'une part, on ne peut assurer que la quasi-régularité de la surface (voir section 2.5). D'autre part, du fait qu'elle soit immergée et non plongée dans  $\mathbb{R}^3$ , la surface peut admettre des auto-intersections.

Mais d'une part, la grande majorité des méthodes n'assure pas non plus l'absence de singularités. D'autre part, il peut être intéressant d'avoir un modèle qui permettent des auto-intersections : tout le problème consiste à les maîtriser. Enfin, Mitchell [Mit00] a montré que toute méthode de raccord de droites ou de surfaces admettait des points singuliers ou des auto-intersections pour certaines primitives à raccorder.

### 6.3.2 Exemples

Il est intéressant de remarquer que cette formulation de raccord de droites ou de surfaces englobe bon nombre d'objets connus parmi lesquels les morceaux à  $n$  côtés définis comme la somme convexe de prolongements locaux, ou encore les courbes de Bézier.

#### 6.3.2.1 Le patch à $n$ côtés donné par une équation

Pour illustrer notre propos, nous proposons une relecture de la définition du raccord de  $n$  surfaces par la méthode de Gregory selon les termes de la méthode que nous proposons.

Il faut donc identifier dans la méthode de Gregory quels sont les domaines  $\Omega_i$ ,  $\Omega_{ij}$ , les fonctions de transition  $\varphi_{ij}$ , les fonctions  $\alpha_i$  définissant un partitionnement de l'unité et enfin s'assurer que les fonctions  $\psi_i$  sont bien celles utilisées pour définir le raccord.

Dans son article de 1993 [GLH93], Gregory traite le cas où les primitives sont des bandelettes rectangulaires disposées selon la figure 6.3. Chaque bandelette est une B-spline paramétrée par  $q_j$  sur le rectangle  $\delta = [0; 2] \times [-1; 0]$  de  $\mathbb{R}$ . Pour chaque couple de bandelettes successives, une extension notée  $q_{j-1,j}$  est définie sur l'union du carré  $[0; 1] \times [0; 1]$  avec les domaines des deux bandelettes ramenés aux rectangles  $[0; 2] \times [-1; 0]$  et  $[-1; 0] \times [-1; 1]$ . Une fonction  $\Phi_{j-1,j}$  transforme tous les points d'un polygone régulier à  $n$  cotés noté  $\Omega$ , en des points du carré  $[0; 1] \times [0; 1]$ . L'union de  $[0; 2] \times [-1; 0]$ ,  $[-1; 0] \times [-1; 1]$  et  $\Phi_{j-1,j}(\Omega)$  constitue un domaine  $\Omega_j$  et  $\Phi_{j-1,j}(\Omega)$  peut être interprété comme la partie  $\Omega_{j-1,j}$  mais aussi la partie  $\Omega_{j,j+1}$ . L'équivalent de la fonction de transition  $\varphi_{ij}$  serait alors la composition  $\Phi_{j-1,j} \circ \Phi_{i-1,i}^{-1}$ .

Gregory définit la paramétrisation de sa surface de raccord sur le polygone  $\Omega$  par

$$p(X) = \sum_{j=0}^{n-1} w_j(X) p_{j-1,j}(X)$$

où  $w_j$  est une fonction de poids satisfaisant la propriété 1, page 139, et  $p_{j-1,j}(X) = q_{j-1,j} \circ \Phi_{j-1,j}(X)$ . On peut donc bel et bien réécrire cette paramétrisation en

$$\psi_i(m) = \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m)) p_j(\varphi_{ij}(m))$$

avec  $m \in \Omega_i$ ,  $\alpha_j = w_j \circ \Phi_{j-1,j}^{-1}$ , et  $p_j = p_{j-1,j} \circ \Phi_{j-1,j}^{-1} = q_{j-1,j}$ .

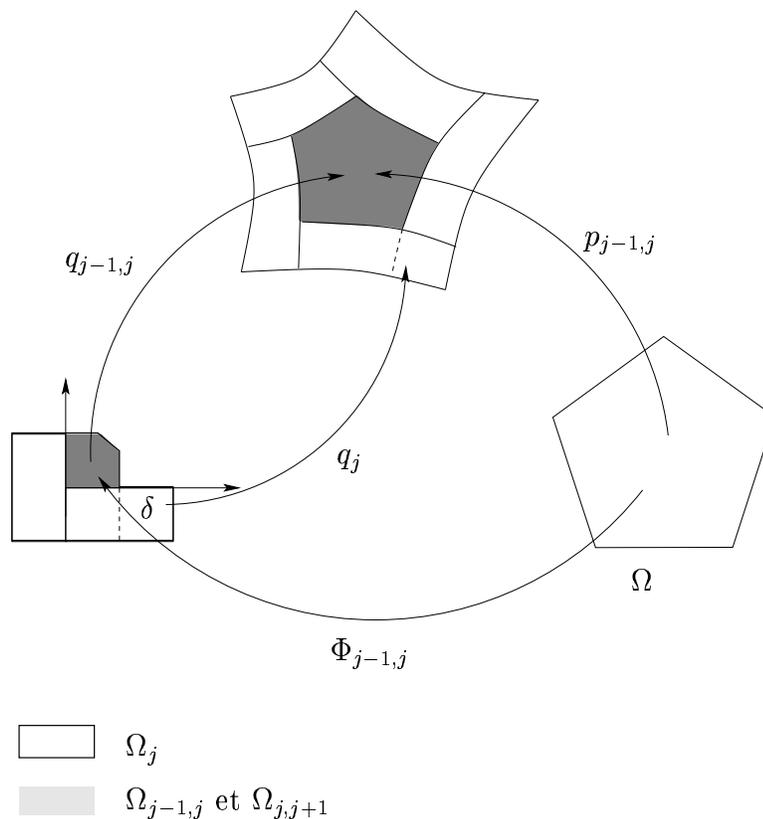


FIG. 6.3 – Le patch de Gregory est un raccord par combinaison convexe s'appuyant sur une structure d'atlas

### 6.3.2.2 L'interpolation de Bézier

Le problème du raccord de surfaces ou de droites peut être interprété comme un problème d'interpolation. En particulier, l'interpolation par une courbe de Bézier (partie I) de deux points  $P_0, P_3$  selon les directions de tangentes déterminées par deux autres points comme  $P_0\vec{P}_1$  et  $P_2\vec{P}_3$  est également le raccord continu des deux segments  $[P_0P_1]$  et  $[P_2P_3]$  dont les zones pures sont réduites aux points  $P_0$  et  $P_3$ .

Rappelons que la paramétrisation de la courbe d'interpolation de Bézier s'écrit

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i B_i(t)$$

avec  $t \in [0; 1]$  et  $B_i(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$ .

On considère les deux domaines  $\Omega_0 = [0; 1]$  et  $\Omega_1 = [-1; 0]$ . On y définit les deux fonctions de transition  $\varphi_{01}(u) = u - 1$  et  $\varphi_{10}(v) = v + 1$  ainsi que les fonctions définissant une partition de l'unité  $\alpha_0(u) = (1-u)^2(1+2u)$  et  $\alpha_1(v) = (1+v)^2(1-2v)$ . Enfin nous y définissons les paramétrisations des deux segments par les fonctions suivantes  $P_0(u) =$

$P_0 + \frac{3u}{2u+1}(P_1 - P_0)$  et  $P_1(v) = P_2 + \frac{1+v}{1-2v}(P_3 - P_2)$ . On définit alors le raccord des deux segments par les deux paramétrisations cohérentes suivantes

$$\begin{aligned}\psi_0(u) &= \alpha_0(u)P_0(u) + \alpha_1(\varphi_{01}(u))P_1(\varphi_{01}(u)) \\ \psi_1(v) &= \alpha_0(\varphi_{10}(v))P_0(\varphi_{10}(v)) + \alpha_1(v)P_1(v)\end{aligned}$$

En notant  $t = u$  et  $t = v + 1$  on a alors bien

$$P(t) = \psi_0(u) = \psi_1(v)$$

avec  $t \in ]0; 1[$ .

## 6.4 Application à la construction d'un atlas

Pour définir l'atlas d'une surface  $\mathcal{S}$  qui approche un maillage  $\mathcal{M}$  donné, nous avons d'ores et déjà construit des domaines du plan  $\Omega_i$  liés entre eux par des fonctions de transition  $\varphi_{ij}$  qui sont des  $C^1$ -difféomorphismes.

Nous avons également défini les primitives planes  $p_i(\Omega_i)$  qui approchent  $\mathcal{M}$ .

De plus nous avons défini dans le chapitre précédent des fonctions  $\alpha_i$  sur chaque domaine  $\Omega_i$  satisfaisant la propriété 1.

Finalement, nous définissons  $\mathcal{S}$  comme le raccord continu des primitives planes par combinaison convexe dont les poids sont les fonctions  $\alpha_i$ . Elle est donc décrite localement par les fonctions suivantes

$$\begin{aligned}\psi_i &: \Omega_i \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ m &\mapsto \sum_{j \in \mathcal{I}_i(m)} \alpha_j(\varphi_{ij}(m))p_j(\varphi_{ij}(m))\end{aligned}$$

Les fonctions de transition sont des  $C^1$ -difféomorphismes. Les fonctions  $\alpha_i$  et  $p_i$  sont de classe  $C^1$ . Donc  $\psi_i$  est de classe  $C^1$ .

Pour que  $\mathcal{S}$  soit régulière, il faudrait alors vérifier que  $\varphi_i$  est bijective. Nous ne pouvons conclure qu'en la quasi-régularité de  $\mathcal{S}$ , et observer les résultats qu'une telle méthode donne en pratique.

Terminons ce chapitre en illustrant le raccord par combinaison convexe avec des maillages dont les sommets appartiennent à la surface  $\mathcal{S}$  qui approche la triangulation  $\mathcal{M}$  d'une sphère (figure 6.4). Le recouvrement de  $\mathcal{M}$  est celui constitué des régions initiales de l'algorithme de division-fusion. A la droite du maillage  $\mathcal{M}$ , nous présentons une première triangulation de  $\mathcal{S}$  puis sa subdivisée. Nous soulignons le fait qu'aucun traitement n'a été appliqué à ces triangulations et que des pivotages d'arêtes ou d'autres choix de points permettraient une bien meilleure visualisation de  $\mathcal{S}$ .



FIG. 6.4 – Maillage  $\mathcal{M}$  et triangulations dont les sommets appartiennent à la surface  $\mathcal{S}$  issue de notre modèle et construite par combinaison convexe des primitives approchant les régions du recouvrement initial de l'algorithme de division-fusion.

## 6.5 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons évoqué le problème de raccord continu de surfaces. Après avoir parcouru les diverses solutions existantes, nous avons proposé le raccord par combinaison convexe, particulièrement bien adapté à la représentation par un atlas de cartes. Ce raccord était déjà présent indirectement dans la littérature par le *patch* de Gregory ou encore l'interpolation de Bézier. Enfin, ce raccord conclut la construction du modèle de surface que nous proposons dans ce mémoire.



# Conclusion

Dans cette deuxième partie, nous avons proposé des solutions originales à des problèmes géométriques soulevés lors de la construction d'un modèle de surface fondé sur la représentation par un atlas de cartes. Ce modèle produit une surface quasi-régulière (peut-être même régulière) à partir de données 3D ayant été interpolées au préalable par un maillage triangulaire. Parmi les résultats originaux qui sont proposés dans cette partie, nous avons en particulier démontré que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire, nous avons étudié la paramétrisation d'une couronne du plan par un  $C^1$ -difféomorphisme, et enfin nous avons étudié le raccord continu de surfaces par combinaison convexe.



# Conclusion



## Résumé et contributions

L'objet de cette thèse est double :

- Nous avons d'abord étudié un nouveau modèle de surface fondé sur la représentation d'une surface par un atlas de cartes. L'idée est d'une part de proposer un modèle qui permette de travailler localement sur la surface sans perte de la cohérence globale, et d'autre part d'hériter des notions de géométrie différentielle attachées à cette représentation pour définir une surface régulière, et donc résoudre intrinsèquement les problèmes de continuité ordinairement rencontrés par les représentations paramétriques par morceaux. Nous avons présenté ce modèle dans le cadre des modèles de surfaces d'usage courant en informatique graphique, puis dans le cadre plus théorique de la géométrie différentielle.
- Nous avons ensuite proposé la construction d'un tel modèle à partir d'un nuage de points 3D interpolés au préalable par une surface triangulée qui est une variété de dimension 2, connexe et compacte. Cette construction se déroule en trois étapes. Chaque étape rencontre un problème géométrique auquel nous proposons une solution innovante. En particulier, nous avons démontré que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Nous avons également étudié la paramétrisation d'une couronne du plan par un  $C^1$ -difféomorphisme, ainsi que le raccord continu de surfaces par combinaison convexe.

## Perspectives

L'étude du modèle de surface que nous avons construit dans ce mémoire est encore incomplète : nous n'avons pas établi de conditions suffisantes pour que la surface produite soit régulière et non pas seulement quasi-régulière.

Cependant, nous avons mis en évidence dans la chapitre 3 que ce modèle possède de nombreuses qualités pour l'informatique graphique. Les applications ne manquent donc pas. Parmi elles, nous pouvons en citer quelques-unes.

- La structure d'atlas est particulièrement bien adaptée au plaquage de texture. On peut en effet imaginer définir des textures sur chaque carte de l'atlas, les raccorder continuellement grâce aux fonctions de transition et les plaquer sur la surface par les paramétrisations locales. Le raccord par combinaison convexe permettra une simple continuité de la texture (tout à fait acceptable pour les textures isotropes par exemple). Mais les fonctions de transition étant des  $C^1$ -difféomorphismes, on peut envisager d'étudier une continuité supérieure (par du "morphing" par exemple).
- Tout comme nous manipulons une information de texture, nous pouvons manipuler une information de hauteur. Chaque primitive plane peut être considérée comme le support d'un repère local sur lequel est défini une fonction de hauteur qui n'est pas constante et qui décrit localement la surface. Cela se rapproche des travaux de Lee [LMH00] mais la continuité  $C^1$  entre les descriptions locales serait dans notre

cas intrinsèquement assurée alors que dans la solution proposée par Lee, une simple continuité est proposée en reliant les sommets des bords des primitives voisines par des arêtes et des faces triangulaires.

- Dans les deux cas, une analyse multi-résolution peut-être appliquée. Le grand avantage procuré par la représentation par un atlas, est que cette analyse multi-résolution pourrait être conduite sur les cartes et donc sur  $\mathbb{R}^2$ , et non sur la surface dans  $\mathbb{R}^3$ . Cela ouvre donc naturellement des perspectives sur une représentation hiérarchique.
- Toutes ces applications peuvent être regroupées dans un seul logiciel d'aide à l'analyse de surface où l'utilisateur aurait à sa disposition une vue 3D classique mais aussi l'atlas de cartes sur lesquelles il pourra travailler localement dans un milieu bi-dimensionnel. On peut également imaginer laisser à l'utilisateur la possibilité de raffiner localement telle ou telle portion correspondant à une carte particulière, allégeant ainsi le nombre de données à manipuler.
- Enfin, ce modèle se prête admirablement à l'édition. L'édition de texture comme on l'a vu ci-dessus, la cohérence globale étant assurée intrinsèquement. Mais également l'édition de la surface elle-même. On peut imaginer la possibilité de dessiner un maillage grossier sur lequel sera défini automatiquement une carte par sommet. L'utilisateur pourra ainsi définir sur chaque carte la primitive de son choix, les primitives étant automatiquement raccordées entre elles. Dans ce cadre prédéfini, il sera intéressant de simplifier le modèle, en choisissant des domaines étoilés par exemple.

On observe donc le foisonnement d'applications que ce modèle permet d'envisager. Nous sommes ainsi convaincus de l'utilité de celui-ci dans le cadre de l'informatique graphique.

# Annexe A

## Compléments sur les variétés abstraites

### A.1 Autres définitions de variétés

Nous avons présenté dans ce document la définition des variétés comme espaces topologiques aux propriétés particulières pouvant être décrites par un atlas. Nous vous proposons à présent deux autres définitions témoignant de points de vue complémentaires.

#### A.1.1 Un ensemble décrit par une classe d'équivalence

M. Berger et B. Gostiaux [BG87] utilisent une approche opposée à celle de D. Lehmann et C. Sacré [LS82]. Au lieu de partir d'un espace topologique sur lequel on définit une structure différentiable, ils proposent de définir la variété comme un ensemble  $X$  et une classe d'équivalence d'atlas, puis ils étudient la topologie canonique induite par l'atlas sur  $X$ .

**Définition 54 (Atlas  $d$ -dimensionnel de classe  $\mathcal{C}^p$ )** Soit  $X$  un ensemble,  $p$  un entier strictement positif.

On appelle atlas  $d$ -dimensionnel de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $X$  un ensemble de couples  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  tels que

- $U_i$  est un sous-ensemble de  $X$  et  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$
- chaque  $\varphi_i$  est une bijection de  $U_i$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^d$  et  $\forall (i, j) \in I^2$ ,  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$
- $\forall (i, j) \in I^2$ ,  $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$  est un isomorphisme de classe  $\mathcal{C}^p$  de  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  sur  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$

**Définition 55 (Cartes)** Les couples  $(U_i, \varphi_i)$  sont appelés les cartes de l'atlas. Si  $x \in U_i$ , la carte  $(U_i, \varphi_i)$  est dite carte en  $x$ .

Si l'on pose  $\varphi_i(x) = (\varphi_{i,1}(x), \dots, \varphi_{i,d}(x))$ , les fonctions  $\varphi_{i,k}$  de  $U_i$  dans  $\mathbb{R}$  sont appelées les coordonnées locales associées à  $(U_i, \varphi_i)$ .

**Définition 56 (Carte compatible)** Soit  $U$  un sous-ensemble de  $X$  et  $\varphi$  une bijection de  $U$  sur un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .  $(U, \varphi)$  est compatible avec l'atlas  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  si la réunion  $\{(U, \varphi)\} \cup \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  est encore un atlas.

**Définition 57 (Atlas compatibles)** Deux atlas, tous deux  $d$ -dimensionnels et de classe  $\mathcal{C}^p$  sont compatibles si leur réunion est encore un atlas.

Cela définit une relation d'équivalence entre atlas, d'où la définition suivante :

**Définition 58 (Variété de dimension  $d$  de classe  $\mathcal{C}^p$ )** Une variété de dimension  $d$  de classe  $\mathcal{C}^p$  est la donnée d'un ensemble  $X$  et d'une classe d'équivalence d'atlas  $d$ -dimensionnels de classe  $\mathcal{C}^p$  sur  $X$ .

Une carte de la variété  $X$  est une carte quelconque de l'un des atlas de la classe d'équivalence considérée.

**Théorème 8** Une variété  $X$  de dimension  $d$  et de classe  $\mathcal{C}^p$  est munie d'une topologie canonique dont les ouverts sont les réunions des domaines des cartes.

Ou encore, si l'on préfère définir cette topologie à partir d'un seul atlas donné,

**Théorème 9** Soit  $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$  un atlas  $d$ -dimensionnel de la variété  $X$ .

Un sous-ensemble  $U$  de  $X$  est un ouvert ssi  $\forall i \in I, \varphi_i(U \cap U_i)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

Avec cette topologie, on peut alors retrouver la définition 5 grâce au théorème suivant :

**Théorème 10** Pour toute carte  $(U, \varphi)$  d'une variété  $X$ , l'application  $\varphi$  de  $U$  sur  $\varphi(U)$  est un homéomorphisme,  $X$  étant munie de la topologie canonique.

**Définition 59 (Espace topologique connexe)** Un espace topologique  $E$  est connexe si les seules parties de  $E$  à la fois ouvertes et fermées sont  $E$  lui-même et l'ensemble vide.

**Théorème 11** Une variété  $X$  est localement connexe.

### A.1.2 Un espace topologique aux propriétés de connexité locale

Ce qui nous amène à la troisième définition un peu plus générale d'une variété proposée par C. Godbillon et qui généralise les définitions précédentes aux variétés à bord.

**Définition 60 (Chemin)** Soit  $E$  un espace topologique.

Un chemin dans  $E$  est une application continue de l'intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $I = [0; 1]$  dans  $E$ .

**Définition 61 (Connexité par arcs)** Un espace topologique  $E$  est connexe par arcs si pour tous points  $x$  et  $y$  de  $E$ , il existe un chemin dans  $E$  joignant  $x$  à  $y$  dans  $E$ .

**Définition 62 (Variété topologique de dimension  $m$ )** Une variété topologique de dimension  $m$  est un espace localement connexe par arcs (tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de  $\mathbb{R}^m$  ou du demi-espace  $H^m$ ).

## A.2 Procédés de construction des variétés

L'atlas nous permettait de mieux appréhender ce que pouvait être une variété. Afin de compléter cette compréhension, nous vous proposons les autres procédés de construction d'une variété.

### A.2.1 Par action d'un groupe sur une variété

**Définition 63 (Action d'un groupe)** Une action d'un groupe  $G$  sur un espace topologique  $V$  est un homomorphisme de groupes  $\rho : G \rightarrow \text{Aut}V$  où  $\text{Aut}V$  est l'ensemble des homéomorphismes de  $V$  dans  $V$ .

**Définition 64 (Points équivalents)** Deux points  $m$  et  $m'$  de  $V$  sont équivalents s'il existe un élément  $g \in G$  tel que  $m' = \rho(g).m$

Cette relation d'équivalence permet de définir l'espace quotient  $V/G$  sur lequel on définit une topologie.

**Proposition 9** Soit  $X$  une variété sur laquelle est définie une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$ . Soit  $p : X \rightarrow X/\mathcal{R}$  la projection canonique associant à tout élément de  $X$  la classe à laquelle il appartient.

Une topologie dite quotient sur  $X/\mathcal{R}$  est définie, de façon équivalente par

- les ouverts de  $X/\mathcal{R}$  sont les parties  $U$  telles que  $p^{-1}(U)$  soit ouvert pour la topologie donnée sur  $X$  ;
- les applications continues  $f : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$  de  $X/\mathcal{R}$  munie de la topologie quotient sur un espace topologique  $Y$  sont celles telles que  $f \circ p : X \rightarrow Y$  est continue pour la topologie donnée sur  $X$ .

Nous allons voir sous quelles conditions l'espace topologique  $V/G$  est une variété.

**Définition 65 (Action totalement discontinue)** *L'action  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  est totalement discontinue si tout point  $m$  de  $V$  possède un voisinage  $U$  tel que  $\forall (g_1, g_2) \in G \times G, g_1 \neq g_2 \Rightarrow g_1U \cap g_2U = \emptyset$ , où l'on note  $gU$  l'image de  $U$  par  $\rho(g)$ .*

**Définition 66 (Action séparante)** *L'action  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  est séparante si, étant donnés deux points  $m$  et  $m'$  de  $V$  non équivalents, il existe un voisinage  $U$  de  $m$  et un voisinage  $U'$  de  $m'$  tels que  $\forall (g_1, g_2) \in G \times G, g_1U \cap g_2U' = \emptyset$*

**Proposition 10** *Si un groupe  $G$  est fini et s'il opère sans point fixe sur une variété  $V$ , son action est toujours totalement discontinue et séparante.*

**Proposition 11** *Si  $V$  est une variété séparée (et séparable) et si  $\rho$  désigne une action de  $G$  sur  $V$  à la fois totalement discontinue et séparante, l'espace topologique quotient  $V/G$  est aussi une variété séparée (et séparable).*

REMARQUE —

La propriété "totalement discontinue" permet d'établir que la projection naturelle  $p$  est injective d'un ouvert  $U$  dans  $p(U)$  et la propriété "séparante" que  $V/G$  est séparée.

REMARQUE —

L'application naturelle  $p : V \rightarrow V/G$  est un homéomorphisme local.

EXEMPLE —

On peut ainsi construire le cylindre  $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z})$ , le tore  $(\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)$ , la bande de Moëbius  $((\mathbb{R}^2/\mathbb{Z})/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ , la bouteille de Klein  $((\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2)/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ , ou l'espace projectif  $(S^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$ .

## A.2.2 Par recollement

Pour que cela soit plus parlant, traitons le cas des variétés de dimension 2. Soient  $V_0$  et  $V_1$  deux variétés connexes (séparées).

Soient  $m_0 \in V_0$  dont un voisinage est  $U_0$  et  $m_1 \in V_1$  dont un voisinage est  $U_1$ , tels que les ouverts  $U_0$  et  $U_1$  soient homéomorphes au disque  $D$  défini dans  $\mathbb{R}^2$  par  $x^2 + y^2 < 1$ .

Notons  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  de tels homéomorphismes. Soit  $\overline{D'}$  le disque fermé  $x^2 + y^2 \leq 1/2$  inclus dans  $D$ ,  $D'$  son intérieur et notons respectivement  $V_0^\bullet$  et  $V_1^\bullet$  les surfaces à bord  $V_0 - \varphi_0^{-1}(D')$  et  $V_1 - \varphi_1^{-1}(D')$  de bords respectifs  $\varphi_0^{-1}(\partial D')$  et  $\varphi_1^{-1}(\partial D')$ .

Soit  $\Psi : \partial V_0^\bullet \rightarrow \partial V_1^\bullet$  l'homéomorphisme obtenu par restriction de  $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_0$  à  $\partial V_0^\bullet$  et  $W = (V_0^\bullet \amalg V_1^\bullet) / \sim$  l'espace topologique quotient de la somme disjointe  $V_0^\bullet \amalg V_1^\bullet$  par la relation d'équivalence qui consiste à identifier les points de  $\partial V_0^\bullet$  et  $\partial V_1^\bullet$ .

**Proposition 12**  *$W$  est une variété de dimension 2 connexe (et séparée).*

REMARQUE —

On appelle somme connexe de  $V_0$  et  $V_1$  toute variété homéomorphe à  $W$ .

EXEMPLE —

On peut ainsi construire le tore à  $g$  anses, la bouteille de Klein à  $g$  anses ou le plan projectif à  $g$  anses.

## A.3 Structure différentielle sur les variétés abstraites

Afin de définir une surface régulière, nous avons eu besoin d'utiliser la notion de  $C^p$ -morphisme entre variétés abstraites, et en particulier les immersions et les plongements. Nous consacrons cette annexe au rappel de ces notions.

### A.3.1 Structure différentielle héritée de $\mathbb{R}^2$ grâce aux cartes

Les cartes permettent de définir des fonctions de classe  $C^p$  sur une variété, et en particulier les immersions d'une variété dans une autre.

**Définition 67 (Fonction  $C^p$ )** Soit  $X$  une variété de dimension  $d$  décrite par un atlas de classe  $C^q$

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^p$  ( $p \leq q$ ) si pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $X$ ,  $f \circ \varphi^{-1}$  est de classe  $C^p$  de  $\varphi(U)$ , ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , dans  $\mathbb{R}$ .

Un raisonnement identique permet de compléter cette définition par celle des  $C^p$ -morphisms entre variétés (figure A.1).

**Définition 68 ( $C^p$ -morphisme)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés de dimension  $d$  et  $e$  et décrites par des atlas de classe  $C^q$  et  $C^r$ . Soit  $p \leq \inf(q, r)$ .

$f : X \rightarrow Y$  est un  $C^p$ -morphisme si pour toute carte  $(U, \varphi)$  de  $X$  en  $x$  et toute carte  $(V, \psi)$  de  $Y$  en  $f(x)$ ,  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  est de classe  $C^p$  de  $\varphi(U \cap f^{-1}(V))$ , ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , dans  $\mathbb{R}^e$ .

Une définition équivalente mais ne faisant pas intervenir toutes les cartes est possible :

**Théorème 12**  $f : X \rightarrow Y$  est un  $C^p$ -morphisme ssi pour tout  $x \in X$ , il existe une carte  $(U, \varphi)$  de  $X$  en  $x$  et une carte  $(V, \psi)$  de  $Y$  en  $f(x)$  telles que  $f(U) \subset V$  et  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \in C^p(\varphi(U), \mathbb{R}^e)$ .

### A.3.2 Immersion et plongement entre variétés

Nous considérons à présent l'image d'une variété abstraite dans la variété  $\mathbb{R}^n$  par un  $C^p$ -morphisme. L'application qui fait la correspondance entre l'espace tangent à la variété abstraite et l'espace tangent à son image dans  $\mathbb{R}^n$  est l'application tangente.

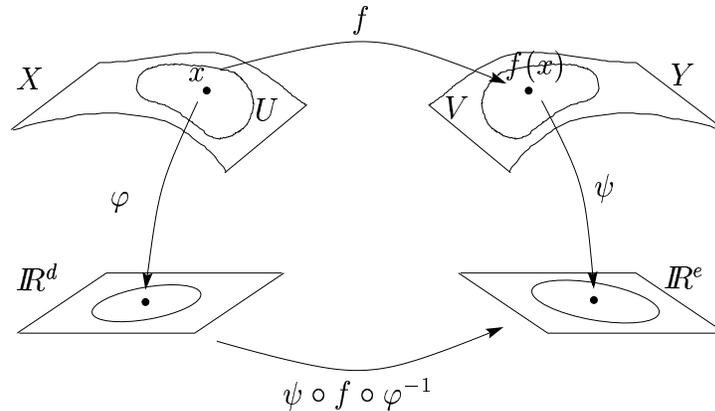


FIG. A.1 – Définition d'un  $C^p$ -morphisme entre deux variétés grâce à la structure différentielle de  $\mathbb{R}^d$  accessible *via* les cartes

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés de dimension  $d$  et  $e$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un  $C^p$ -morphisme. Soient  $(U, \varphi)$  une carte en  $x \in X$  à laquelle est associée la bijection  $\theta_x : T_x X \rightarrow \mathbb{R}^d$ , et  $(V, \psi)$  une carte en  $f(x)$  à laquelle est associée la bijection  $\eta_{f(x)} : T_{f(x)} Y \rightarrow \mathbb{R}^e$ , telles que  $f(U) \subset V$ .

On pose  $T_x f := \eta_{f(x)}^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \circ \theta_x$  (figure A.1).

**Définition 69 (Application tangente)**  $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} Y$  est appelée application tangente à  $f$  en  $x$ .

**Théorème 13**  $T_x f$  est linéaire

et si  $Z$  est une variété et  $g \in \mathcal{C}^p(Y, Z)$ , alors  $T_x(g \circ f) = (T_{f(x)} g) \circ (T_x f)$

Parmi les propriétés intéressantes que peut avoir l'application tangente, nous présentons la qualité de plongement, donnant lieu à une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , et d'immersion donnant lieu dans le cas  $n = 2$  à ce que nous appelons une surface régulière.

**Définition 70 (Immersion et Plongement)** Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés et  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme.

$f$  est une immersion en  $x$  si  $T_x f$  est injective.

$f$  est un plongement de  $X$  dans  $Y$  si  $f$  est une immersion sur  $X$  et un homéomorphisme de  $X$  sur  $f(X)$ .

**Proposition 13** Soit  $Y$  une sous-variété de  $X$ , alors l'injection canonique est un plongement de  $Y$  dans  $X$ .

Soit  $Z$  une variété et  $f$  un plongement de  $Z$  dans  $X$ , alors  $f(Z)$  est une sous-variété de  $X$ .

Soit  $Z$  une variété compacte et  $f$  une immersion injective de  $Z$  dans une variété  $X$ , alors  $f$  est un plongement de  $Z$  dans  $X$  et en particulier  $f(Z)$  est une sous-variété de  $X$ .

**Théorème 14** Pour toute variété abstraite  $X$  séparable, il existe un entier  $n$  tel qu'elle soit plongeable dans  $\mathbb{R}^n$ .

# Annexe B

## Démonstrations pour la définition d'un recouvrement

### B.1 Démonstration pour la correspondance entre les zones d'un recouvrement bien formé avant et après fusion

Nous considérons un recouvrement bien formé  $\mathcal{R} = \{R_i\}_{i \in I}$  défini sur un espace topologique  $\mathcal{M}$ .

Soit  $J \subset I$  l'ensemble des indices des régions de  $\mathcal{R}$  que l'on fusionne.

On note  $S = \bigcup_{j \in J} R_j$  et  $\mathcal{S} = \mathcal{R} \setminus \{R_j\}_{j \in J} \cup S$  le recouvrement après fusion.

Nous établissons la constitution de la zone pure, de la zone double et de la zone triple de  $S$  dans  $\mathcal{S}$  à partir des zones pures, doubles et triples des régions  $\{R_j\}_{j \in J}$  dans  $\mathcal{R}$ .

#### Proposition 14

$$\begin{aligned}
 zp(S) &= \bigcup_{i \in J} zp(R_i) \cup \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \neq \emptyset} zd(R_i, R_j) \cup \bigcup_{(i,j,k) \in J^3: R_i \cap R_j \cap R_k \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_k) \\
 zd(S, R_n) &= \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_n \neq \emptyset} zd(R_i, R_n) \cup \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \cap R_n \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_n) \\
 zt(S, R_n, R_m) &= \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_n \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_n, R_m)
 \end{aligned}$$

**Démonstration 14** Utilisons un raisonnement par récurrence.

$J$  ne contient que deux indices.

$$\begin{aligned}
 zp(R_1 \cup R_2) &= \{x \in R_1 \cup R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \\
 &= \{x \in R_1 \setminus R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \cup
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{x \in R_1 \cap R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \{x \in R_2 \setminus R_1 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \\
= & \{x \in R_1 : \forall i \in I \setminus \{1\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \{x \in R_1 \cap R_2 : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \{x \in R_2 : \forall i \in I \setminus \{2\}, x \notin R_i\} \\
= & zp(R_1) \cup zd(R_1, R_2) \cup zp(R_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zd(S, R_n) &= \{x \in (R_1 \cup R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \\
&= \{x \in (R_1 \setminus R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \quad \{x \in (R_1 \cap R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \quad \{x \in (R_2 \setminus R_1) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2\}, x \notin R_i\} \\
= & \{x \in R_1 \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \quad \{x \in (R_1 \cap R_2) \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{1, 2, n\}, x \notin R_i\} \cup \\
& \quad \{x \in R_2 \cap R_n : \forall i \in I \setminus \{2, n\}, x \notin R_i\} \\
= & zd(R_1, R_n) \cup zt(R_1, R_2, R_n) \cup zd(R_2, R_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zt(S, R_n, R_m) &= \{x \in (R_1 \cup R_2) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \\
&= \{x \in (R_1 \setminus R_2) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \cup \\
& \quad \{x \in (R_1 \cap R_2) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \cup \\
& \quad \{x \in (R_2 \setminus R_1) \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, 2, n, m\}, x \notin R_j\} \\
= & \{x \in R_1 \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{1, n, m\}, x \notin R_j\} \cup \\
& \quad \emptyset \\
& \quad \{x \in R_2 \cap R_n \cap R_m : \forall j \in I \setminus \{2, n, m\}, x \notin R_j\} \\
= & zt(R_1, R_n, R_m) \cup zt(R_2, R_n, R_m)
\end{aligned}$$

Supposons les égalités établies si  $J$  contient  $n - 1$  indices.

Supposons que  $J$  contienne  $n$  indices dont  $n$ . On note  $J = K \cup \{n\}$ . Alors, d'après le résultat démontré au rang 2,

$$\begin{aligned}
zp\left(\bigcup_{i \in K} R_i \cup R_n\right) &= zp\left(\bigcup_{i \in K} R_i\right) \cup zd\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_n\right) \cup zp(R_n) \\
&\stackrel{\text{HR}}{=} \bigcup_{i \in K} zp(R_i) \cup \bigcup_{(i,j) \in K^2: R_i \cap R_j \neq \emptyset} zd(R_i, R_j) \cup \\
& \quad \bigcup_{(i,j,k) \in K^3: R_i \cap R_j \cap R_k \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_k) \cup \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_n \neq \emptyset} zd(R_i, R_n) \cup \\
& \quad \bigcup_{(i,j) \in K^2: R_i \cap R_j \cap R_n \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_n) \cup zp(R_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bigcup_{i \in J} zp(R_i) \cup \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \neq \emptyset} zd(R_i, R_j) \cup \\
&\quad \bigcup_{(i,j,k) \in J^3: R_i \cap R_j \cap R_k \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_k) \\
zd\left(\bigcup_{i \in K} R_i \cup R_n, R_m\right) &\stackrel{\text{rg}^2}{=} zd\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_m\right) \cup zd(R_n, R_m) \cup zt\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_n, R_m\right) \\
&\stackrel{\text{HR}}{=} \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_m \neq \emptyset} zd(R_i, R_m) \cup \\
&\quad \bigcup_{(i,j) \in K^2: R_i \cap R_j \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_m) \cup \\
&\quad \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_n \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_n, R_m) \\
&= \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_m \neq \emptyset} zd(R_i, R_m) \cup \\
&\quad \bigcup_{(i,j) \in J^2: R_i \cap R_j \cap R_m \neq \emptyset} zt(R_i, R_j, R_m) \\
zt\left(\bigcup_{i \in K} R_i \cup R_n, R_m, R_p\right) &\stackrel{\text{rg}^2}{=} zt\left(\bigcup_{i \in K} R_i, R_m, R_p\right) / \text{cup} zt(R_n, R_m, R_p) \\
&\stackrel{\text{HR}}{=} \bigcup_{i \in K: R_i \cap R_m \cap R_p \neq \emptyset} zt(R_i, R_m, R_p) \cup zt(R_n, R_m, R_p) \\
&= \bigcup_{i \in J: R_i \cap R_m \cap R_p \neq \emptyset} zt(R_i, R_m, R_p)
\end{aligned}$$

■

## B.2 Démonstration du lemme 7.2.1

**Lemme 7.2.1** *Soient deux régions voisines  $R_1$  et  $R_2$  d'un recouvrement, homéomorphes à  $D$  et ayant une intersection conforme. Les frontières de  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_1 \cap R_2$  sont toutes trois décomposables en quatre parties connexes non vides, deux ouvertes et deux fermées (alternativement lors d'un parcours de la frontière) telles que les deux parties fermées appartiennent aux trois frontières.*

**Démonstration 7.2.1** Par hypothèse, les régions  $R_1$  et  $R_2$  sont homéomorphes à  $D$ . Soit  $f : D \rightarrow R_1$  une fonction continue réalisant cet homéomorphisme sur  $R_1$ . Par prolongement par continuité, on peut définir la fonction continue  $g : \overline{D} \rightarrow \overline{R_1}$ . En particulier

$g$  paramétrise continuellement  $\partial R_1$  sur le cercle unité  $\mathcal{C} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\}$ . Cette paramétrisation permet entre autres de définir le parcours de  $\partial R_1$  à partir de celui de  $\mathcal{C}$  (parcours trigonométrique). Il permet également de définir les parties connexes de  $\partial R_1$  comme les images par  $g$  de celles de  $\mathcal{C}$ . Il est important de remarquer que  $g$  n'est pas nécessairement bijectif.

- Nous commençons par démontrer le résultat sur  $\partial(R_1 \cap R_2)$ .

L'espace topologique  $\mathcal{M}$  peut se décomposer selon l'union disjointe suivante :

$$\mathcal{M} = \overline{R_2} \cup \overline{R_2}^c$$

où  $R^c = \{x \in \mathcal{M} : x \notin R\}$ . On peut donc écrire,  $R_2$  étant un ouvert,

$$\begin{aligned} R_1 &= R_1 \cap \mathcal{M} \\ R_1 &= (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (R_1 \cap \overline{R_2}^c) \\ R_1 &\stackrel{4.1}{=} (R_1 \cap (R_2 \cup \partial R_2)) \cup (R_1 \cap \overline{R_2}^c) \\ \underbrace{R_1}_{\simeq D} &= \underbrace{(R_1 \cap R_2)}_{\simeq D} \cup (R_1 \cap \partial R_2) \cup \underbrace{(R_1 \setminus \overline{R_2})}_{\simeq D} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

car  $R_1$  et  $R_2$  ont une intersection conforme (remarquons que les unions sont disjointes).

De plus,  $R_1 \cap \partial R_2$  est continuellement paramétrable sur une ou plusieurs composantes connexes ouvertes de  $\mathcal{C}$  en tant qu'intersection de  $R_1$ , homéomorphe à  $D$ , avec  $\partial R_2$ , homéomorphe à  $\mathcal{C}$  (la propriété ouverte est entendue dans la topologie de  $\mathcal{C}$  : ce n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ ). Considérons une de ces composantes connexes. Elle peut être de deux types : elle est l'image par une fonction continue soit de  $\mathcal{C}$  soit d'un arc connexe de  $\mathcal{C}$ . Dans le premier cas, cela impliquerait  $R_1 \cap R_2 \subset R_1$  d'où  $R_1 \setminus \overline{R_2} \neq D$ . Dans le deuxième cas, on note cette composante  $]A; B[$  où  $A$  et  $B$  sont les images par la fonction continue des deux extrémités de l'arc connexe de  $\mathcal{C}$  considéré. Nécessairement,  $A \in \partial R_1$  et  $B \in \partial R_1$  et  $]A; B[ \subset R_1$ , ce qui implique que  $]A; B[$  partage  $R_1$  en deux sous-domaines homéomorphes à  $D$ . Si donc  $R_1 \cap \partial R_2$  était composé d'une seconde composante connexe, ces deux composantes découperaient  $R_1$  en plus de deux sous-domaines homéomorphes à  $D$  (figure B.2). Ce qui contredirait le découpage énoncé par l'égalité B.1.

$R_1 \cap \partial R_2$  est donc continuellement paramétrable sur une unique composante connexe de  $\mathcal{C}$ .

De même,  $R_2 \cap \partial R_1$  est continuellement paramétrable sur une unique composante connexe de  $\mathcal{C}$ .

Démontrons à présent

$$R_1 \cap \partial R_2 \subset \partial(R_1 \cap R_2) \quad (\text{B.2})$$

$$R_2 \cap \partial R_1 \subset \partial(R_2 \cap R_1) \quad (\text{B.3})$$

Soit  $x \in R_1 \cap \partial R_2 \subset R_1 \cap \overline{R_2} \subset \overline{R_2}$ .

$x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_2$ .

Aussi,  $x \in R_1$  qui est un ouvert, donc à partir d'un certain rang,  $x_i \in R_1$ .

Donc  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1 \cap R_2$ , d'où  $x \in \overline{R_1 \cap R_2}$ .

Or  $x \in R_1 \cap \partial R_2 \subset \partial R_2$  donc  $x \notin R_2$  donc  $x \notin R_1 \cap R_2$ .

Par conséquent,  $x \in \partial(R_1 \cap R_2)$ .

La deuxième inclusion se démontre de la même manière.

D'autre part,

$$\begin{aligned} (R_1 \cap \partial R_2) \cap (R_2 \cap \partial R_1) &= (R_1 \cap \partial R_1) \cap (R_2 \cap \partial R_2) \\ &\stackrel{(4.1)}{=} \emptyset \cap \emptyset \\ &= \emptyset \end{aligned} \tag{B.4}$$

Ainsi,  $\partial(R_1 \cap R_2)$  est continuellement paramétrable sur  $\mathcal{C}$ , admet d'après les équations B.2 et B.3 deux composantes connexes ouvertes qui, d'après l'équation B.4 sont sans intersection.  $\partial(R_1 \cap R_2)$  se décompose donc en quatre parties connexes, deux ouvertes et deux fermées disposées en alternance. On note les deux composantes fermées  $a$  et  $b$ .

$$\partial(R_1 \cap R_2) = (R_1 \cap \partial R_2) \cup (R_2 \cap \partial R_1) \cup a \cup b \tag{B.5}$$

• Démontrons alors le résultat pour  $\partial R_1$ . La démonstration pour  $\partial R_2$  est identique. Nous commençons par démontrer

$$(R_2 \cap \partial R_1) \cup a \cup b = \partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_1 \tag{B.6}$$

$$(R_1 \cap \partial R_2) \cup a \cup b = \partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_2 \tag{B.7}$$

D'après l'équation B.5 il s'agit de montrer que pour tout  $x \in \partial(R_1 \cap R_2)$ ,

$$x \notin R_1 \Leftrightarrow x \notin R_1 \cap \partial R_2$$

autrement dit,

$$x \in R_1 \Leftrightarrow x \in R_1 \cap \partial R_2$$

Soit  $x \in \partial(R_1 \cap R_2)$  :  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1 \cap R_2$  et  $x \notin R_1 \cap R_2$ .

Si  $x \in R_1 \cap \partial R_2$ ,  $x \in R_1$ .

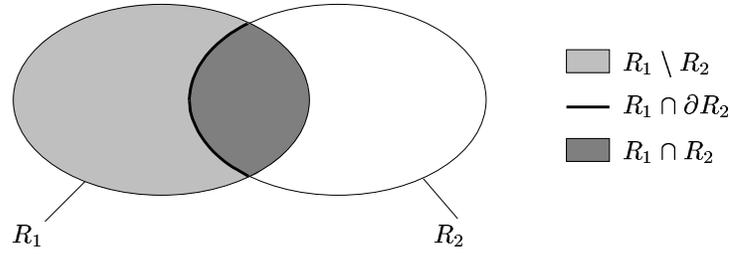
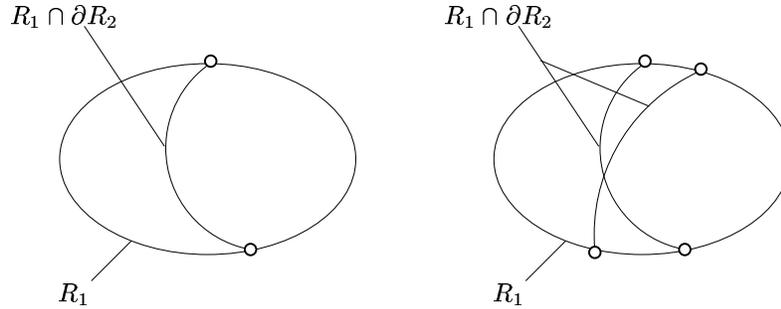
Réciproquement, si  $x \in R_1$ , comme  $x \notin R_1 \cap R_2$ ,  $x \notin R_2$ .

Aussi,  $R_1 \cap R_2 \subset R_2$  donc  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_2$ .

Ainsi,  $x \in \partial R_2$ , d'où  $x \in R_1 \cap \partial R_2$ .

Démontrons à présent

$$a \cup b \subset \partial R_1 \tag{B.8}$$

FIG. B.1 – Décomposition de  $R_1$ FIG. B.2 – A gauche,  $R_1 \cap \partial R_2$  est constitué d'une composante connexe. A droite,  $R_1 \cap \partial R_2$  est composée de deux composantes connexes.

D'après les équations B.6 et B.7

$$\begin{aligned}
 a \cup b &= (\partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_1) \cap (\partial(R_1 \cap R_2) \setminus R_2) \\
 &= (\partial(R_1 \cap R_2) \cap R_1^c) \cap (\partial(R_1 \cap R_2) \cap R_2^c) \\
 &= \partial(R_1 \cap R_2) \cap (R_1^c \cap R_2^c) \\
 &= \partial(R_1 \cap R_2) \cap (R_1 \cup R_2)^c \\
 &= \partial(R_1 \cap R_2) \setminus (R_1 \cup R_2)
 \end{aligned}$$

Soit  $x \in a \cup b$ , alors  $x$  est la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1 \cap R_2$ ,  $x \notin R_1 \cap R_2$  mais aussi  $x \notin R_1 \cup R_2$ .

$x$  est donc la limite d'une suite  $(x_i)$  telle que  $x_i \in R_1$  et  $x \notin R_1$ , donc  $x \in \partial R_1$ .

Par conséquent,  $\partial R_1$  admet deux composantes fermées  $a$  et  $b$  sans intersection. Elle se décompose donc en quatre composantes, deux fermées et deux ouvertes disposées alternativement. ■

# Annexe C

## Démonstrations pour la continuité de la paramétrisation d'une couronne

### C.1 Conditions pour que la paramétrisation soit de classe $C^1$

Nous établissons dans cette section les conditions suffisantes pour avoir la paramétrisation d'une couronne de classe  $C^1$  à la limite entre deux portions décrites dans des bases polaires locales voisines de pivots  $C_n$ , appartenant à la partie centrale, et  $C_{n+1}$ , appartenant à la partie extérieure.

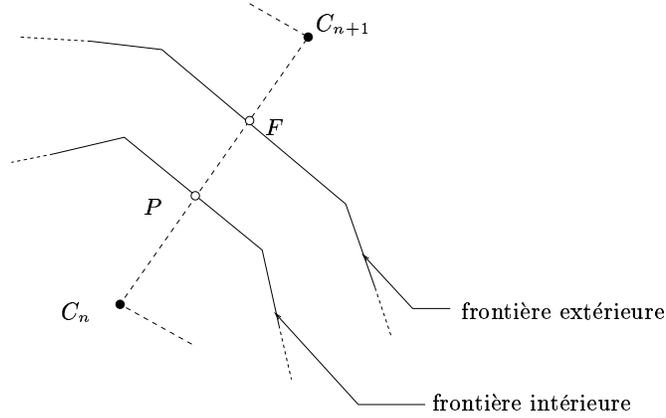
À cette limite, nous avons les égalités suivantes, où l'on introduit quelques notations pour alléger les écritures (figure 5.10, page 103).

$$\begin{aligned} \vartheta_{n+1} = -\vartheta_n := \vartheta & \quad ; & \quad o_{n+1} = o_n := o \\ \vec{u}(\theta(\vartheta_n)) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_n) \\ \sin(\vartheta_n) \end{pmatrix} := \vec{u} & \quad ; & \quad \frac{d\vec{u}}{d\vartheta_n}(\theta(\vartheta_n)) = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta_n) \\ \cos(\vartheta_n) \end{pmatrix} := \vec{u}^\perp \\ \vec{u}(\theta(\vartheta_{n+1})) = \begin{pmatrix} -\cos(\vartheta_{n+1}) \\ \sin(\vartheta_{n+1}) \end{pmatrix} = -\vec{u} & \quad ; & \quad \frac{d\vec{u}}{d\vartheta_{n+1}}(\theta(\vartheta_{n+1})) = \begin{pmatrix} \sin(\vartheta_{n+1}) \\ \cos(\vartheta_{n+1}) \end{pmatrix} = \vec{u}^\perp \end{aligned}$$

On suppose  $L_e$  et  $L_i$  de classe  $C^1$  lorsque l'on passe du domaine de paramétrisation d'un morceau de la couronne au suivant. Par conséquent à cette limite,  $t_n = t_{n+1} := t$  et  $\frac{\partial t_n}{\partial l} = \frac{\partial t_{n+1}}{\partial l} := \frac{\partial t}{\partial l}$  et  $\frac{\partial t_n}{\partial \phi} = \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \phi} := \frac{\partial t}{\partial \phi}$ .

**Continuité  $C^0$**  Démontrons que la paramétrisation est continue par construction. Nous notons  $D = \|C_n C_{n+1}\|$ . Parce que la frontière intérieure est continue et en particulier est une droite au voisinage de cette limite,

$$C_n + \frac{d_n}{\cos(\vartheta - o)} \vec{u} = C_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} \vec{u}$$

FIG. C.1 – Notations pour la continuité  $C^0$ 

$$\Leftrightarrow \quad D = \frac{d_n + d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} \quad (\text{C.1})$$

Pour que la paramétrisation soit continue il suffit d'avoir,

$$\begin{aligned} C_n + [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \rho_n(\vartheta_n) \vec{u} &= C_{n+1} - [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \rho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) \vec{u} \\ \Leftrightarrow & \\ D &= [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \frac{d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} + \\ & [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \frac{d_n}{\cos(\vartheta - o)} \\ \Leftrightarrow & \\ d_n + d_{n+1} &= [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] d_{n+1} + \\ & [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] d_n \\ \Leftrightarrow & \\ 0 &= -t [(1 - b_{n+1}(\vartheta_{n+1})) d_{n+1} + (1 - b_n(\vartheta_n)) d_n] \end{aligned}$$

Et cette égalité devant être vraie pour tout  $l$  et donc pour tout  $t \in [0; 1]$ , pour que la paramétrisation soit continue il suffit d'avoir

$$(1 - b_{n+1}(\vartheta_{n+1})) d_{n+1} = -(1 - b_n(\vartheta_n)) d_n \quad (\text{C.2})$$

ce qui est vérifié par construction car  $D = \|C_n P\| + \|C_{n+1} P\| = \|C_n F\| + \|C_{n+1} F\|$  où  $P$  est le point de la frontière intérieure dans le même axe que  $M$  vis-à-vis de  $C_n$  et  $F$  celui de la frontière extérieure (voir figure C.1).

**Continuité  $C^1$**  Pour que la paramétrisation soit  $C^1$ , il suffit que ses dérivées partielles soient continues. Commençons par la dérivée par rapport à  $\phi$ . Il faut

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ (b_n(\vartheta_n) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right] \rho_n(\vartheta_n) + \right. \\ & \left. [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \frac{d\rho_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right\} \vec{u} + [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \rho_n(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \vec{u}^\perp \\ & = \\ & - \left\{ \left[ (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \right] \rho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) + \right. \\ & \left. [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \frac{d\rho_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \right\} \vec{u} + [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \rho_{n+1}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \vec{u}^\perp \end{aligned}$$

Aussi,  $\vec{u}$  et  $\vec{u}^\perp$  constituant une base, il faut et il suffit d'identifier des composantes. Les deux composantes en  $\vec{u}^\perp$  identifiées donnent

$$\begin{aligned} [(1-t) + tb_n(\vartheta_n)] \frac{d_n}{\cos(\vartheta - o)} \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} &= [(1-t) + tb_{n+1}(\vartheta_{n+1})] \frac{d_{n+1}}{\cos(\vartheta - o)} \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v}(u, \phi_n) &= \frac{\|C_n M(u)\|}{\|C_{n+1} M(u)\|} \frac{\partial \Theta_n}{\partial v}(u, \phi_n) \end{aligned}$$

qui est la condition (5.10), page 114. Les deux composantes en  $\vec{u}$  identifiées donnent, d'après l'équation (5.8) page 111,

$$\begin{aligned} & \left[ (b_n(\vartheta_n) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} \right] d_n + \\ & \left[ (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) \frac{\partial t}{\partial \phi} + t \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} \right] d_{n+1} = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & [(b_n(\vartheta_n) - 1)d_n + (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1)d_{n+1}] \frac{\partial t}{\partial \phi} + \\ & t \left[ \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} d_n + \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} d_{n+1} \right] = 0 \\ & \stackrel{(C.2)}{\Leftrightarrow} \\ & t = 0 \\ & \text{ou} \\ & \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) \frac{\partial \Theta_n}{\partial v} d_n + \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial v} d_{n+1} = 0 \\ & \stackrel{(5.10)}{\Leftrightarrow} \\ & t = 0 \\ & \text{ou} \\ & \frac{db_n}{d\vartheta_n}(\vartheta_n) d_n = - \frac{\|C_n M(u)\|}{\|C_{n+1} M(u)\|} \frac{db_{n+1}}{d\vartheta_{n+1}}(\vartheta_{n+1}) d_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui doit être vrai pour tout  $l$  et donc pour tout  $t$  et tout  $u$ . Il est donc nécessaire d'avoir

$$\frac{\partial b_{n+1}}{\partial \vartheta_{n+1}}(\phi = \phi_n) = \frac{\partial b_n}{\partial \vartheta_n}(\phi = \phi_n) = 0$$

qui est la condition (5.11), page 114.

Passons maintenant à la dérivée par rapport à  $l$ . Il faut

$$\begin{aligned} \left[ (b_n(\vartheta_n) - 1) \frac{\partial t}{\partial l} \rho_n \right] \vec{u} &= \left[ (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) \frac{\partial t}{\partial l} \rho_{n+1} \right] \vec{u} \\ &\Leftrightarrow \\ (b_n(\vartheta_n) - 1) d_n &= (b_{n+1}(\vartheta_{n+1}) - 1) d_{n+1} \end{aligned}$$

ce qui est déjà assuré par la condition (C.2).

## C.2 Interpolation de conditions d'Hermite par un $C^1$ -difféomorphisme

Nous considérons les conditions d'Hermite suivantes :  $(\phi_1, \vartheta_1, \vartheta'_1)$  et  $(\phi_2, \vartheta_2, \vartheta'_2)$  avec  $\phi_1 < \phi_2$  et  $\vartheta_1 < \vartheta_2$ .

Pour les interpoler par un  $C^1$ -difféomorphisme de réciproque explicite, nous choisissons de définir deux polynômes de degré deux notés  $p_1$  et  $p_2$ , qui se raccordent avec une continuité  $C^1$  au milieu de l'intervalle  $[\phi_1; \phi_2]$  en les conditions d'Hermite  $(x, \varepsilon, \varepsilon')$ . Il suffit alors d'exhiber des conditions suffisantes pour que  $p_1$  et  $p_2$  soient strictement croissantes.

$$\begin{aligned} p_1(\phi_1) &= \vartheta_1 & p'_1(\phi_1) &= \vartheta'_1 \\ p_2(\phi_2) &= \vartheta_2 & p'_2(\phi_2) &= \vartheta'_2 \\ p_1(x) &= p_2(x) = \varepsilon & p'_1(x) &= p'_2(x) = \varepsilon' \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} p_1(\phi) &= a_1 \phi^2 + b_1 \phi + c_1 \\ p_2(\phi) &= a_2 \phi^2 + b_2 \phi + c_2 \end{aligned}$$

Pour que  $p_1$  et  $p_2$  soient strictement croissantes, il suffit d'avoir

$$\vartheta'_1 > 0; \vartheta'_2 > 0; a_1 \geq 0; a_2 \leq 0$$

En effet,

$$\begin{cases} \vartheta'_1 > 0 \text{ et } a_1 \geq 0 & \Rightarrow \forall \phi > \phi_1, p'_1(\phi) > 0 \\ \vartheta'_2 > 0 \text{ et } a_2 \leq 0 & \Rightarrow \forall \phi > \phi_2, p'_2(\phi) > 0 \end{cases}$$

De plus, les conditions d'interpolation se traduisent par

$$\begin{aligned} c_1 &= \vartheta_1 - b_1 \phi_1 - a_1 \phi_1^2 & c_2 &= \vartheta_2 - b_2 \phi_2 - a_2 \phi_2^2 \\ b_1 &= \vartheta'_1 - 2a_1 \phi_1 & b_2 &= \vartheta'_2 - 2a_2 \phi_2 \\ a_1 &= \frac{(\varepsilon - \vartheta_1) - \vartheta'_1(x - \phi_1)}{(x - \phi_1)^2} & a_2 &= -\frac{(\vartheta_2 - \varepsilon) - \vartheta'_2(\phi_2 - x)}{(\phi_2 - x)^2} \end{aligned} \tag{C.3}$$

et

$$\frac{\varepsilon - \vartheta_1}{x - \phi_1} - \frac{\vartheta_2 - \varepsilon}{\phi_2 - x} = \frac{\vartheta'_1 - \vartheta'_2}{2} \quad (\text{C.4})$$

Il nous faut donc déterminer  $x$ ,  $\varepsilon$ ,  $\vartheta'_1$  et  $\vartheta'_2$  vérifiant C.3 et C.4 (figure 5.11).

Nous choisissons arbitrairement  $x = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$ , alors

$$a_1 = -\frac{\vartheta'_2 + 3\vartheta'_1}{2(\phi_2 - \phi_1)} + 2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{(\phi_2 - \phi_1)^2}$$

$$a_2 = \frac{\vartheta'_1 + 3\vartheta'_2}{2(\phi_2 - \phi_1)} - 2\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{(\phi_2 - \phi_1)^2}$$

$$a_1 \geq 0 \Leftrightarrow \vartheta'_2 + 3\vartheta'_1 \leq 4\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1}$$

$$a_2 \leq 0 \Leftrightarrow \vartheta'_1 + 3\vartheta'_2 \leq 4\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1}$$

En notant pente =  $\frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\phi_2 - \phi_1}$ , une condition suffisante est

$$\max(\vartheta'_1, \vartheta'_2) \leq \text{pente}$$

### C.3 Conditions d'interpolation de la fonction $b_n$ pour que $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$

Soit  $\rho_n^{\text{int}}$  et  $\rho_n^{\text{ext}}$  les coordonnées radiales des boucles intérieures et extérieures d'une couronne polygonale. Nous déterminons quelles conditions d'interpolation doit suivre la fonction cubique  $b_n$  pour qu'elle soit de classe  $C^1$  et que  $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$ .

REMARQUE —

Les conditions intérieures à chaque portion dans le cas d'une fonction  $b_n$  cubique par morceaux se déduisent aisément de celles-ci.

Il faut d'abord que la courbe approchant la frontière extérieure soit continue. Cela est le cas dans chaque portion mais doit être imposée lors du passage de la portion décrite dans la base polaire locale de centre  $C_n$  à la portion suivante. Nous supposons que  $C_n$  appartient à la partie centrale.

On note  $b_n^1$  la condition que  $b_n$  doit interpoler en  $\vartheta_{n,I_n}$ , la borne supérieure de son domaine de définition.

On note  $b_{n+1}^0$  la condition que  $b_{n+1}$  doit interpoler en  $\vartheta_{n+1,0}$ , la borne inférieure de son domaine de définition.

La condition  $b_n^1$  doit vérifier

$$b_n^1 \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n}) = \rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n}) + \rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0}) - b_{n+1}^0 \rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})$$

d'où

$$b_n^1 = 1 + (1 - b_{n+1}^0) \frac{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})}$$

De même,

$$b_{n+1}^0 = 1 - (1 + b_n^1) \frac{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})}$$

Pour avoir  $b_n \rho_n^{\text{int}} < \rho_n^{\text{ext}}$ , on minore ou majore  $b_n$  par deux bornes notées  $b_n^{\text{ext}}$  et  $b_n^{\text{cent}}$  selon que  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie extérieure ou centrale.

Si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale,

$$1 < b_n(\vartheta_n) \leq b_n^{\text{cent}}$$

avec

$$b_n^{\text{cent}} \leq \min \frac{\rho_n^{\text{ext}}}{\rho_n^{\text{int}}}$$

Si  $C_n$  est un pivot extérieur,

$$b_n^{\text{ext}} \leq b_n(\vartheta_n) < 1$$

avec

$$b_n^{\text{ext}} \geq \max \frac{\rho_n^{\text{ext}}}{\rho_n^{\text{int}}}$$

On exprime alors les conditions d'interpolation par

$$b_n^1 = \min(b_n^{\text{cent}}, 1 + (1 - b_{n+1}^{\text{ext}}) \frac{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})}{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})})$$

et

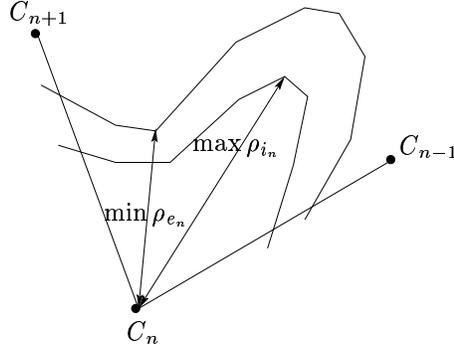
$$b_{n+1}^0 = \max(b_{n+1}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_n^{\text{cent}}) \frac{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})})$$

On peut vérifier la cohérence de ces deux égalités en montrant que,

$$1 - (1 + b_n^1) \frac{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})} = \max(b_{n+1}^{\text{ext}}, 1 - (1 + b_n^{\text{cent}}) \frac{\rho_n^{\text{cent}}(\vartheta_{n,I_n})}{\rho_{n+1}^{\text{ext}}(\vartheta_{n+1,0})})$$

Il reste à choisir  $b_n^{\text{cent}}$  et  $b_n^{\text{ext}}$ .

Comme introduit dans la section 5.4.3, page 118, nous notons  $\vartheta_{n,i}$  les points du domaine

FIG. C.2 – Cas où  $\min_i \{\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta_{n,i})\}$  est inférieur à  $\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}$ 

de  $\rho_n^{\text{ext}}/\rho_n^{\text{int}}$  où ce rapport est susceptible de connaître un extremum local. On ne peut pas prendre  $b_n^{\text{cent}} = \min_i \{\rho_n^{\text{ext}}(\vartheta_{n,i})\} / \max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}$  car il peut être inférieur à 1 (figure C.2).

Nous proposons alors de réfléchir sur l'épaisseur  $e_n(\vartheta_n)$  de la couronne polygonale (voir la section 5.4.3, page 118). Si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale, il suffit alors

$$\begin{aligned} \rho_n^{\text{ext}} &\leq \rho_n^{\text{int}} + \min e_n \\ b_n &\leq 1 + \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\rho_n^{\text{int}}} \\ &\Leftarrow \\ b_n &\leq 1 + \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}} \end{aligned}$$

et si  $C_n$  est un pivot extérieur,

$$b_n \geq 1 - \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}}$$

Nous choisissons alors naturellement si  $C_n$  est un pivot appartenant à la partie centrale

$$b_n^{\text{cent}} = 1 + \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}}$$

et sinon

$$b_n^{\text{ext}} = 1 - \frac{\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}}{\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}}$$

REMARQUE —

En pratique, l'évaluation de  $\min_i \{e_n(\vartheta_{n,i})\}$  et de  $\max_i \{\rho_n^{\text{int}}(\vartheta_{n,i})\}$  se fait en même temps que la mise en conformité de la frontière extérieure (voir paragraphe 5.3.2.3).



# Bibliographie

## Bibliographie par ordre alphabétique

- [AB99] N. Amenta and M. Bern. Surface reconstruction by voronoï filtering. *Discrete Comput. Geom.*, 22(4) :481–504, 1999.
- [AD97] S. Allen and D. Dutta. Cyclics in pure blending. *Computer Aided Geometric Design*, 14 :51–102, 1997.
- [Ale56] P. S. Alexandrov. *Combinatorial Topology*. Dover, New-York, 1956.
- [Att95] D. Attali. *Squelettes et Graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1995.
- [Att98] D. Attali.  $r$ -regular shape reconstruction from unorganized points. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 10 :239–247, 1998.
- [Bau75] B. G. Baumgart. A polyhedron representation for computer vision. *NCC75*, pages 589–596, 1975.
- [BC00] J.-D. Boissonnat and F. Cazals. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. In *ACM Symposium on Computational Geometry*, 2000.
- [Bev69] P. R. Bevington. *Data Reduction and Error Analysis*. New York : Mc Graw-Hill, 1969.
- [BG87] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF, 1987.
- [BJ88] P. J. Besl and R. C. Jain. Segmentation through variable-order surface fitting. *IEEE Trans. PAMI*, 10(2), 1988.
- [Bli82] J. Blinn. A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Transactions on Graphics*, pages 235–256, July 1982.
- [Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the perception of Speech and Visual Forum*, pages 362–380, Cambridge, MA, 1967. MIT Press.
- [BM97] I. Bricault and O. Monga. From volume medical images to quadratic surface patches. *CVGIP :Image Understanding*, 67(1) :24–38, 1997.

- [BW89] M. I. G. Bloor and M. J. Wilson. Generating blend surfaces using partial differential equations. *Computer Aided Design*, 21(3) :165–171, 1989.
- [CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10, 1978.
- [CH97] J. H. Chuang and W. C. Hwang. Variable-radius blending by constraint spine generation. *Visual Computer*, 13 :316–329, 1997.
- [Cha00] R. Chaine. *Segmentation d'ensembles non organisés de points 3-D d'une surface : propagation anisotrope d'étiquettes basée sur les graphes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON 1, 2000.
- [CP95] J. P. Cocquerez and S. Philipp. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.
- [CP00a] J. Cotrina and N. Pla. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :643–671, 2000.
- [CP00b] J. Cotrina and N. Pla. Modelling surfaces from planar irregular meshes. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :1–15, 2000.
- [DHL93] N. Dyn, S. Hed, and D. Levin. Subdivision schemes for surface interpolation. In *Workshop in Computational Geometry*, pages 97–118, 1993.
- [DS78] D. Doo and M. Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*, 10 :356–360, 1978.
- [EDD<sup>+</sup>95] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuezle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Proceedings of ACM SIGGRA-PH'95*, pages 173–182, 1995.
- [Ede] H. Edelsbrüner. *Geometry and Topology of Mesh Generation*. Cambridge University Press. in press.
- [Far82] G. Farin. A construction for visual  $c^1$  continuity of polynomial surface patches. *Computer Graphics and Image Processing*, 20 :272–282, 1982.
- [FB88] D.R. Forsey and R.H. Bartels. Hierarchical s-spline refinement. *Computer Graphics*, 22(4) :205–212, 1988.
- [FB96] P. J. Frey and H. Borouchaky. Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces. Technical report, INRIA, 1996. rapport n<sup>o</sup> 2951.
- [Fil89] B. J. Filip. Blending parametric surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 8(3) :165–173, 1989.
- [FK97] A. T. Fomenko and T. L. Kunii. *Topological Modeling for Visualization*. Springer Verlag, 1997.
- [Flo97] M. S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Comput. Aided Geom. Design*, 14 :231–250, 1997.
- [FvDF<sup>+</sup>94] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes, and R. L. Phillips. *Introduction to computer graphics*. Addison-Wesley, 1994.

- [GAM99] C. Gérot, D. Attali, and A. Montanvert. From local approximation to a  $g^1$  global representation. In P. J. Laurent, P. Sablonnière, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design*, pages 109–118, Saint-Malo, 1999. Vanderbilt University Press Nashville TN.
- [GAM01] C. Gérot, A. Attali, and A. Montanvert. D'une surface triangulée à une surface représentée par cartes. *Revue de CFAO et d'informatique graphique*, 16(1) :9–24, 2001.
- [GH95] C. M. Grimm and J. F. Hughes. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 359–367, 1995.
- [GH97] M. Garland and P. S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'97*, 1997.
- [GH98] M. Garland and P. S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. *Proceedings of IEEE Vis'98*, 1998. <http://www.cs.cmu.edu/garland>.
- [GLH93] J. A. Gregory, V. K. H. Lau, and J. M. Hahn. High order continuous polygonal patches. In H. Hagen, G. Farin, and H. Noltemeier, editors, *Geometric Modelling*, pages 117–132. Springer Verlag, 1993.
- [God71] C. Godbillon. *Eléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [Hah89] J. Hahn. Geometric continuous patch complexes. *Comput. Aided Geom. Design*, 6 :55–67, 1989.
- [Har00] E. Hartmann. Numerical parametrization of curves and surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :251–266, 2000.
- [HDD<sup>+</sup>94] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, M. Halstead, H. Jin, J. McDonald, J. Schweiter, and W. Stuezle. Piecewise smooth surface reconstruction. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'94*, 1994.
- [HH86] C. Hoffmann and J. Hopcroft. Quadratic blending surfaces. *Computer Aided Design*, 18(6) :301–306, 1986.
- [HH87] C. Hoffmann and J. Hopcroft. The potential method for blending surfaces and corners. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling : algorithms and new trends*, pages 347–365. SIAM, 1987.
- [Hop96] H. Hoppe. Progressive meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'96*, pages 99–108, 1996.
- [LC87] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes : a high resolution 3d surface construction algorithm. *Computer Graphics*, 21(4) :163–169, 1987.
- [LMH00] A. Lee, H. Moreton, and H. Hoppe. Displaced subdivision surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'00*, 2000.
- [Loo87] C. Loop. *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. PhD thesis, Utah University, 1987.
- [LS82] D. Lehmann and C. Sacré. *Géométrie et Topologie des Surfaces*. PUF, 1982.

- [LSS<sup>+</sup>98] A. W. F. Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, and D. Dobkin. Maps : Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'98*, pages 95–104, 1998.
- [Mal99] P. Malraison.  $n$ -sided surfaces : a survey. In P. J. Laurent, P. Sablonnière, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design*, pages 247–255, Saint-Malo, 1999. Vanderbilt University Press Nashville TN.
- [Mit00] J. Mitchell. Topological obstructions to blending algorithmes. *Computer-Aided Geometric Design*, 17 :673–694, 2000.
- [MR91] A. Montanvert P. Meer and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13 :307–316, April 1991.
- [MW98] D. S. Meek and D. J. Walton. Planar  $g^1$  hermite interpolation with spirals. *Comput. Aided Geom. Design*, 15 :787–801, 1998.
- [MYV93] J. Maillot, H. Yahia, and A. Verroust. Interactive texture mapping. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'93*, pages 27–35, 1993.
- [NHK<sup>+</sup>85] H. Nishimura, M. Hirai, T. Kawata, I. Shirakawa, and K. Omura. Objects modeling by distribution function and a method of image generation. *Trans. IEICE Japan*, J68-D(4) :718–725, 1985.
- [Ped95] H. K. Pedersen. Decorating implicit surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 291–300, 1995.
- [PFH00] E. Praun, A. Finkelstein, and H. Hoppe. Lapped textures. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'00*, 2000.
- [Pra93] H. Prautzsch. Algorithmic blending. *J. Approx. Theory*, 72 :87–102, 1993.
- [RB93] J. Rossignac and P. Borrel. Multiresolution 3d approximations for rendering complex scenes. In B. Falcidieno and T. Kunii, editors, *Modeling in Computer Graphics : Methods and Applications*, pages 455–465. Springer Verlag, 1993.
- [RO87] A. P. Rockwood and J. C. Owen. Blending surfaces in solid modeling. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling : algorithms and new trends*, pages 367–383. SIAM, 1987.
- [RR84] J. Rossignac and A. Requicha. Constant-radius blending in solid modelling. *Computers in Mech. Engr.*, 3 :65–73, 1984.
- [Sab83] M. Sabin. Non-rectangular surface patches suitable for inclusion in a b-spline surface. In *Proceedings Eurographics'83*, pages 57–70, 1983.
- [Sab96] M. Sabin. Transfinite surface interpolation. In *Mathematics of Surfaces VI*, pages 517–534, Clarendon, 1996.
- [SNV00] M. Szilvási-Nagy and T. P. Vendel. Generating curves and swept surfaces by blended circles. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :197–206, 2000.
- [SZL92] W. J. Schröder, J. A. Zarg, and W. E. Lorensen. Decimation of triangle meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'92*, pages 65–70, 1992.

- [TP75] S.L. Tanimoto and T. Pavlidis. A hierarchical data structure for picture processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(2) :104–119, 1975.
- [Var91] T. Varady. Overlap patches : a new scheme for interpolating curve networks with  $n$ -sided regions. *Computer-Aided Geometric Design*, 8 :7–27, 1991.
- [WZ00] T. Wu and Y. Zhou. On blending of several quadratic algebraic surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :759–766, 2000.

## Bibliographie par thèmes

### Notions sur les surfaces

- [Bau75] B. G. Baumgart. A polyhedron representation for computer vision. *NCC75*, pages 589–596, 1975.
- [BG87] M. Berger and B. Gostiaux. *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*. PUF, 1987.
- [Bli82] J. Blinn. A generalization of algebraic surface drawing. *ACM Transactions on Graphics*, pages 235–256, July 1982.
- [DHL93] N. Dyn, S. Hed, and D. Levin. Subdivision schemes for surface interpolation. In *Workshop in Computational Geometry*, pages 97–118, 1993.
- [DS78] D. Doo and M. Sabin. Behaviour of recursive division surfaces near extraordinary points. *Computer-Aided Design*, 10 :356–360, 1978.
- [Far82] G. Farin. A construction for visual  $c^1$  continuity of polynomial surface patches. *Computer Graphics and Image Processing*, 20 :272–282, 1982.
- [FB88] D.R. Forsey and R.H. Bartels. Hierarchical s-spline refinement. *Computer Graphics*, 22(4) :205–212, 1988.
- [FK97] A. T. Fomenko and T. L. Kunii. *Topological Modeling for Visualization*. Springer Verlag, 1997.
- [FvDF<sup>+</sup>94] J. D. Foley, A. van Dam, S. K. Feiner, J. F. Hughes, and R. L. Phillips. *Introduction to computer graphics*. Addison-Wesley, 1994.
- [God71] C. Godbillon. *Éléments de topologie algébrique*. Hermann, 1971.
- [Hah89] J. Hahn. Geometric continuous patch complexes. *Comput. Aided Geom. Design*, 6 :55–67, 1989.
- [Loo87] C. Loop. *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. PhD thesis, Utah University, 1987.
- [LS82] D. Lehmann and C. Sacré. *Géométrie et Topologie des Surfaces*. PUF, 1982.
- [NHK<sup>+</sup>85] H. Nishimura, M. Hirai, T. Kawata, I. Shirakawa, and K. Omura. Objects modeling by distribution function and a method of image generation. *Trans. IEICE Japan*, J68-D(4) :718–725, 1985.

### Recouvrement

- [Ale56] P. S. Alexandrov. *Combinatorial Topology*. Dover, New-York, 1956.
- [BJ88] P. J. Besl and R. C. Jain. Segmentation through variable-order surface fitting. *IEEE Trans. PAMI*, 10(2), 1988.
- [BM97] I. Bricault and O. Monga. From volume medical images to quadratic surface patches. *CVGIP :Image Understanding*, 67(1) :24–38, 1997.

- [CC78] E. Catmull and J. Clark. Recursively generated b-spline surfaces on arbitrary topological meshes. *Computer-Aided Design*, 10, 1978.
- [Cha00] R. Chaine. *Segmentation d'ensembles non organisés de points 3-D d'une surface : propagation anisotrope d'étiquettes basée sur les graphes*. PhD thesis, Université Claude Bernard - LYON 1, 2000.
- [CP95] J. P. Cocquerez and S. Philipp. *Analyse d'images : filtrage et segmentation*. Masson, 1995.
- [CP00a] J. Cotrina and N. Pla. Modeling surfaces from meshes of arbitrary topology. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :643–671, 2000.
- [CP00b] J. Cotrina and N. Pla. Modelling surfaces from planar irregular meshes. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :1–15, 2000.
- [EDD<sup>+</sup>95] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuezle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 173–182, 1995.
- [Ede] H. Edelsbrüner. *Geometry and Topology of Mesh Generation*. Cambridge University Press. in press.
- [GH95] C. M. Grimm and J. F. Hughes. Modeling surfaces of arbitrary topology using manifolds. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 359–367, 1995.
- [MR91] A. Montanvert P. Meer and A. Rosenfeld. Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13 :307–316, April 1991.
- [MYV93] J. Maillot, H. Yahia, and A. Verroust. Interactive texture mapping. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'93*, pages 27–35, 1993.
- [Ped95] H. K. Pedersen. Decorating implicit surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'95*, pages 291–300, 1995.
- [PFH00] E. Praun, A. Finkelstein, and H. Hoppe. Lapped textures. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'00*, 2000.

## Raccord de surfaces

- [AD97] S. Allen and D. Dutta. Cyclides in pure blending. *Computer Aided Geometric Design*, 14 :51–102, 1997.
- [BW89] M. I. G. Bloor and M. J. Wilson. Generating blend surfaces using partial differential equations. *Computer Aided Design*, 21(3) :165–171, 1989.
- [CH97] J. H. Chuang and W. C. Hwang. Variable-radius blending by constraint spine generation. *Visual Computer*, 13 :316–329, 1997.
- [Fil89] B. J. Filip. Blending parametric surfaces. *ACM Trans. on Graphics*, 8(3) :165–173, 1989.

- [GAM99] C. Gérot, D. Attali, and A. Montanvert. From local approximation to a  $g^1$  global representation. In P. J. Laurent, P. Sablonnière, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design*, pages 109–118, Saint-Malo, 1999. Vanderbilt University Press Nashville TN.
- [GLH93] J. A. Gregory, V. K. H. Lau, and J. M. Hahn. High order continuous polygonal patches. In H. Hagen, G. Farin, and H. Noltemeier, editors, *Geometric Modelling*, pages 117–132. Springer Verlag, 1993.
- [HH86] C. Hoffmann and J. Hopcroft. Quadratic blending surfaces. *Computer Aided Design*, 18(6) :301–306, 1986.
- [HH87] C. Hoffmann and J. Hopcroft. The potential method for blending surfaces and corners. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling : algorithms and new trends*, pages 347–365. SIAM, 1987.
- [Mal99] P. Malraison.  $n$ -sided surfaces : a survey. In P. J. Laurent, P. Sablonnière, and L. L. Schumaker, editors, *Curve and Surface Design*, pages 247–255, Saint-Malo, 1999. Vanderbilt University Press Nashville TN.
- [Mit00] J. Mitchell. Topological obstructions to blending algorithmes. *Computer-Aided Geometric Design*, 17 :673–694, 2000.
- [MW98] D. S. Meek and D. J. Walton. Planar  $g^1$  hermite interpolation with spirals. *Comput. Aided Geom. Design*, 15 :787–801, 1998.
- [Pra93] H. Prautzsch. Algorithmic blending. *J. Approx. Theory*, 72 :87–102, 1993.
- [RO87] A. P. Rockwood and J. C. Owen. Blending surfaces in solid modeling. In G. Farin, editor, *Geometric Modeling : algorithms and new trends*, pages 367–383. SIAM, 1987.
- [RR84] J. Rossignac and A. Requicha. Constant-radius blending in solid modelling. *Computers in Mech. Engr.*, 3 :65–73, 1984.
- [Sab83] M. Sabin. Non-rectangular surface patches suitable for inclusion in a b-spline surface. In *Proceedings Eurographics'83*, pages 57–70, 1983.
- [Sab96] M. Sabin. Transfinite surface interpolation. In *Mathematics of Surfaces VI*, pages 517–534, Clarendon, 1996.
- [SNV00] M. Szilvási-Nagy and T. P. Vendel. Generating curves and swept surfaces by blended circles. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :197–206, 2000.
- [Var91] T. Varady. Overlap patches : a new scheme for interpolating curve networks with  $n$ -sided regions. *Computer-Aided Geometric Design*, 8 :7–27, 1991.
- [WZ00] T. Wu and Y. Zhou. On blending of several quadratic algebraic surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :759–766, 2000.

## Représentation des surfaces

- [AB99] N. Amenta and M. Bern. Surface reconstruction by voronoï filtering. *Discrete Comput. Geom.*, 22(4) :481–504, 1999.

- [Att95] D. Attali. *Squelettes et Graphes de Voronoï 2D et 3D*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1995.
- [Att98] D. Attali.  $r$ -regular shape reconstruction from unorganized points. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 10 :239–247, 1998.
- [BC00] J.-D. Boissonnat and F. Cazals. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. In *ACM Symposium on Computational Geometry*, 2000.
- [Bev69] P. R. Bevington. *Data Reduction and Error Analysis*. New York : Mc Graw-Hill, 1969.
- [Blu67] H. Blum. A transformation for extracting new descriptors of shape. In W. Wathen-Dunn, editor, *Models for the perception of Speech and Visual Forum*, pages 362–380, Cambridge, MA, 1967. MIT Press.
- [FB96] P. J. Frey and H. Borouchaky. Critères géométriques pour l'évaluation des triangulations de surfaces. Technical report, INRIA, 1996. rapport n<sup>o</sup> 2951.
- [Flo97] M. S. Floater. Parametrization and smooth approximation of surface triangulations. *Comput. Aided Geom. Design*, 14 :231–250, 1997.
- [GAM01] C. Gérot, A. Attali, and A. Montanvert. D'une surface triangulée à une surface représentée par cartes. *Revue de CFAO et d'informatique graphique*, 16(1) :9–24, 2001.
- [GH97] M. Garland and P. S. Heckbert. Surface simplification using quadric error metrics. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'97*, 1997.
- [GH98] M. Garland and P. S. Heckbert. Simplifying surfaces with color and texture using quadric error metrics. *Proceedings of IEEE Vis'98*, 1998. <http://www.cs.cmu.edu/garland>.
- [Har00] E. Hartmann. Numerical parametrization of curves and surfaces. *Comput. Aided Geom. Design*, 17 :251–266, 2000.
- [HDD<sup>+</sup>94] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, M. Halstead, H. Jin, J. McDonald, J. Schweiter, and W. Stuezle. Piecewise smooth surface reconstruction. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'94*, 1994.
- [Hop96] H. Hoppe. Progressive meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'96*, pages 99–108, 1996.
- [LC87] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching cubes : a high resolution 3d surface construction algorithm. *Computer Graphics*, 21(4) :163–169, 1987.
- [LMH00] A. Lee, H. Moreton, and H. Hoppe. Displaced subdivision surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'00*, 2000.
- [LSS<sup>+</sup>98] A. W. F. Lee, W. Sweldens, P. Schröder, L. Cowsar, and D. Dobkin. Maps : Multiresolution adaptive parameterization of surfaces. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'98*, pages 95–104, 1998.

- [RB93] J. Rossignac and P. Borrel. Multiresolution 3d approximations for rendering complex scenes. In B. Falcidieno and T. Kunii, editors, *Modeling in Computer Graphics : Methods and Applications*, pages 455–465. Springer Verlag, 1993.
- [SZL92] W. J. Schröder, J. A. Zarg, and W. E. Lorensen. Decimation of triangle meshes. *Proceedings of ACM SIGGRAPH'92*, pages 65–70, 1992.
- [TP75] S.L. Tanimoto and T. Pavlidis. A hierarchical data structure for picture processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(2) :104–119, 1975.



---

## Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude et la construction d'un modèle de surfaces fondé sur la représentation par un atlas de cartes :

- L'intérêt d'un tel modèle qu'il permet de travailler localement sur la surface sans perte de la cohérence globale, et d'autre part d'hériter des notions de géométrie différentielle attachées à cette représentation pour définir une surface régulière, et donc résoudre intrinsèquement les problèmes de continuité ordinairement rencontrés par les représentations paramétriques par morceaux. Nous avons présenté ce modèle dans le cadre des modèles de surfaces d'usage courant en informatique graphique, puis dans le cadre plus théorique de la géométrie différentielle.

- Nous avons ensuite proposé la construction d'un tel modèle à partir d'un nuage de points 3D interpolés au préalable par une surface triangulée qui est une variété de dimension 2, connexe et compacte. Cette construction se déroule en trois étapes. Chaque étape rencontre un problème géométrique auquel nous proposons une solution innovante. En particulier, nous avons démontré que le nerf d'un recouvrement bien formé est une triangulation combinatoire. Nous avons également étudié la paramétrisation d'une couronne du plan par un  $C^1$ -difféomorphisme, ainsi que le raccord continu de surfaces par combinaison convexe.

---

## A surface modelling based on the representation with an atlas

---

### Abstract

In this thesis we study and design a surface modelling based on the representation of surfaces with an atlas.

- The first part of it is dedicated to the study of our modelling. Such a modelling allows to work locally on the surface without being afraid of any lose of global consistency. Furthermore the representation with an atlas is a notion coming from differential geometry. Our modelling inherits then good properties from this mathematical theory, and especially to solve the continuity problem between the patches with which piecewise parametric representation of surfaces meets frequently : our geometrical model is a regular (or a quasi-regular) surface. We present this modelling among those which are used in Computer Graphics and in its differential geometric background.

- In the second part of this thesis, we propose an algorithm for designing such a modelling from a triangular mesh. This mesh is supposed to be a connected and compact 2-manifold. The algorithm processes in three steps. Each steps reveals a geometrical problem for which we propose an innovative solution. In particular we demonstrate that the nerve of a *well-shaped* covering is a combinatorial triangulation. We study also the  $C^1$ -diffeomorphic parameterization of a planar crown, and finally the convex combination as a smooth blending of surfaces.

---

**Discipline** : Mathématiques Appliquées

**Mots-clés** : Modélisation de surfaces, recouvrement, paramétrisation d'une couronne, raccord de surfaces, géométrie différentielle, topologie combinatoire, informatique graphique.

---

U.F.R. Informatique et Mathématiques Appliquées.

Lab. LIS-UJF, ENSIEG, Domaine Universitaire, 38402 St-Martin-d'Hères Cedex, France

---