



HAL
open science

L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : Analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple

Afonso Henriques

► **To cite this version:**

Afonso Henriques. L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : Analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00100353

HAL Id: tel-00100353

<https://theses.hal.science/tel-00100353>

Submitted on 26 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École doctorale "Mathématiques, Sciences et Technologies de
l'information, Informatique"

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier
(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : Didactique des Mathématiques

Thèse présentée et soutenue publiquement par

AFONSO HENRIQUES

Le 12 septembre 2006

L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE

DES INTEGRALES MULTIPLES :

ANALYSE DIDACTIQUE INTEGRANT L'USAGE DU LOGICIEL MAPLE

Composition du jury :

AG ALMOULOU Saddo, Professeur à l'Universidade Católica de São Paulo, *Rapporteur*

ARTIGUE Michèle, Professeur des Universités Paris VII, *Rapporteuse*

BIREBENT Alain, Professeur agrégé, Université Pierre Mendès France, *Examineur*

DORIER Jean-Luc, Professeur des Universités à l'IUFM de Lyon, *Directeur de Thèse*

LABORDE Colette, Professeur à l'IUFM de Grenoble, *Présidente*

Thèse préparée au sein du Laboratoire **LEIBNIZ-IMAG**

N° attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord à mon directeur **Jean-Luc Dorier** qui a accepté de diriger ma thèse. Rigoureux, efficace et exigeant, il m'a toujours encouragé tout au long de ces quatre années, en réagissant devant mes choix et mes propositions de manière très ouverte, me permettant ainsi de mener cette recherche jusqu'à son achèvement.

Je remercie également **Alain Birebent** qui a largement participé à la progression de mon travail. Ses interventions, notamment dans les rendez-vous à deux, parfois à trois, avec Jean-Luc, véritables moments d'immersion dans les méandres et la complexité de la didactique, ont toujours été pour moi des moments d'apprentissage privilégiés contribuant ainsi à l'enrichissement de ma recherche.

Monsieur **Saddo Ag Almouloud** et Madame **Michèle Artigue** se sont rendus disponibles en acceptant d'être les rapporteurs de cette thèse. Leurs éclaircissements m'ont encouragé à persévérer dans la voie de la recherche en Didactiques des Mathématiques. Qu'ils veuillent bien recevoir ici mes chaleureux remerciements.

Je remercie aussi vivement Madame **Colette Laborde** pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Je remercie tout spécialement **Annie Bessot** (Directrice de l'équipe de DDM) pour sa disponibilité, son assistance et tout le temps qu'elle a passé à répondre à mes questions concernant la didactique des mathématiques. Je n'oublierai pas tous ses apports originaux ainsi que sa grande générosité.

Je garderai en mémoire les personnes travaillant au laboratoire **Leibniz**, et plus particulièrement mes collègues de l'équipe de **DDM** qui m'ont, dès le premier jour, accueilli avec générosité et gentillesse. J'ai eu le plaisir de partager avec eux des moments agréables et les remercie de m'avoir toujours encouragé dans les moments difficiles. Merci pour votre soutien sans restriction. Je pense ainsi fortement à **Claude, Jean-François, Khanh, Laetitia, Madeleine, Thanh, Trung**.

Je remercie vivement tous mes amis qui m'ont accompagné de près ou de loin, au cours de ces quatre années. Je ne vous ai peut-être pas tous cités, mais sachez que je pense à vous.

Je pense à tous les membres de ma famille qui, malgré l'éloignement géographique, m'ont toujours encouragé pendant les années de réalisation de ce travail.

Mes remerciements vont également à mon épouse **Rosemary A. Henriques**, qui a su être une compagne constamment présente dans des moments parfois difficiles ; à mes enfants, aussi pour lesquels, je l'espère, cette expérience pourra plus tard servir de référence.

Enfin, ma reconnaissance va, bien, entendu au **CAPES**¹ (Gouvernement brésilien) pour m'avoir octroyé une bourse d'étude indispensable à la réalisation de cette thèse.

¹ Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de nível Superior.

Résumé de la thèse

Ce travail porte sur l'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples pour les calculs d'aires et de volumes, dans des universités brésiliennes et les classes préparatoires technologiques françaises. L'objectif est de mieux comprendre les difficultés rencontrées par les étudiants, avec ces calculs et d'étudier dans quelle mesure l'utilisation d'un logiciel comme Maple peut les aider à surmonter ces difficultés, en favorisant les interactions entre représentation graphique et représentation analytique des objets concernés.

En nous appuyant sur l'approche instrumentale de l'intégration des outils informatiques à l'enseignement, nous partons de l'hypothèse que la réussite de ce type de tâche mathématique avec Maple nécessite, au-delà de la connaissance des commandes pertinentes et de leur syntaxe, l'apprentissage de techniques instrumentées spécifiques, un apprentissage qui doit être pris en charge par l'institution. Dans la thèse, une technique de représentation dite de *crible géométrique* occupe de ce point de vue une place centrale, en étant vue comme un moyen de forcer l'interaction entre représentations graphique et analytique.

Le travail comprend une analyse institutionnelle (étude écologique de programmes et de manuels) du point de vue de l'enseignement des intégrales multiples et de celui de l'intégration de l'outil Maple, et deux expérimentations sans et avec Maple.

Mots-clés

Praxéologie mathématique
Ergonomie cognitive d'instruments
Registres de représentations

Fonctions de plusieurs variables
Intégrales Multiples
Maple, Crible Géométrique

The teaching and learning of multiple integrals: didactical analysis with concerns about the use of Maple software

Abstract

This work deals with the teaching and learning of multiple integrals used in order to calculate areas and volumes, in Brazilian universities and French technological preparatory classes to "Grandes Ecoles". Our goal is to better understand difficulties encountered by students, with these computations and to study in which measure the use of a software like Maple may help them overcome these difficulties, by favoring interactions between graphical and analytical representations of objects at stake.

On the basis of the instrumental approach of computers in teaching, we start from the hypothesis that succeeding to this type of mathematical tasks requires, beyond knowing adequate commands and their syntax, learning specific instrumented techniques, in a context taken in charge by the institution. In our thesis, a technique to represent graphically solids, names "geometrical riddle" occupies a central part, as a means to force interaction between graphical and analytical representations.

The work includes an institutional analysis (ecological analysis of curricula and textbooks) about the teaching of multiple integrals and the use of Maple, as well as two experiments, without and with Maple.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE A INTRODUCTION, PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE	1
1. INTRODUCTION	1
1.1 Les initiatives au Brésil concernant l'utilisation des nouvelles technologies	3
1.2 Du Brésil vers la France	4
2. PROBLEMATIQUE	5
3. CADRE THEORIQUE.....	9
3.1 La théorie de l'instrumentation.....	9
3.2 L'approche anthropologique du didactique.....	13
3.2.1 Rapport personnel, rapport institutionnel	14
3.2.2 Rapport institutionnel à l'instrument	14
3.2.3 L'approche praxéologique.....	15
3.2.4 Les ostensifs et non-ostensifs	18
3.3 La notion de registre de représentation sémiotique	20
3.3.1 Représentations graphiques	22
3.3.2 Variables visuelles et unités symboliques significatives	23
3.3.3 Les registres de représentations dans l'enseignement du calcul des Intégrales Multiples	24
3.3.4 Variables visuelles et unités significatives dans la représentation des solides	26
3.3.4 Complexités des représentations et des conversions lors du calcul des Intégrales Multiples	27
4. QUESTIONS DE RECHERCHE	28
5. DES QUESTIONS DE RECHERCHE AU PLAN D'ETUDE	30
5.1 Chapitre B : Analyse institutionnelle	30
5.1.1 Partie B1 : Analyse d'un manuel de référence.....	30
5.1.2 Partie B2 : Analyse des programmes de l'UESC depuis 1999 et des CPGE depuis 2004 Quelles niches pour les Intégrales Multiples ?	31
5.1.3 Partie B3 : Analyse des manuels d'enseignement des IM Quelle est l'organisation mathématique relative aux Intégrales Multiples ?.....	31
5.2 Chapitre C : Pré-expérimentation	31
5.2.1 Partie C1 : Analyse a priori	32
5.2.2 Partie C2 : Analyse a posteriori – les productions effectives des étudiants leurs opinions et celles des enseignants	32
5.3 Chapitre D : L'environnement informatique Maple	32
5.3.1 Partie D1 : Etude du logiciel Maple.....	32
5.3.2 Partie D2 : Analyse des manuels d'utilisation du logiciel <i>Maple</i> . Quelle est l'organisation mathématique relative aux Intégrales Multiples ?	33
5.4 Chapitre E : Expérimentations sans et avec <i>Maple</i>.....	33
5.4.1 Partie E1 : Analyse des pratiques des étudiants dans l'environnement papier/crayon	34
5.4.2 Partie E2 : Analyse des pratiques des étudiants dans l'environnement informatique <i>Maple</i>	34
CHAPITRE B ANALYSE INSTITUTIONNELLE	37
<u>PARTIE B1</u>.....	38
ANALYSE D'UN MANUEL DE REFERENCE	38
1. Intégrales multiples – Définitions - Propriétés générales.....	38
2. Calcul des intégrales multiples	42
3. Conclusion.....	46
<u>PARTIE B2</u>.....	46

1. ANALYSE DES PROGRAMMES DE L'UESC DEPUIS 1999 QUELLES NICHES POUR LES INTEGRALES MULTIPLES ?	46
2. ANALYSE DES PROGRAMMES DES CPGE DEPUIS 2004 QUELLES NICHES POUR LES INTEGRALES MULTIPLES ?	50
2.1 Analyse des programmes de mathématiques.....	50
2.2 Analyse des programmes d'informatique : le tronc commun.....	52
3. Conclusion sur l'analyse des programmes	54
<u>PARTIE B3</u>	55
ANALYSE DES MANUELS D'ENSEIGNEMENT DES IM	55
1. Organisation globale du manuel SWO.....	56
2. Organisation mathématique et didactique du chapitre 17 de SWO.....	58
3. Analyse section après section.....	58
3.1 Section 17.1 : Intégrales doubles.....	58
3.2 Section 17.2 : Aire et volume.....	64
3.3 Section 17.3 : Intégrales doubles en coordonnées polaires.....	67
3.4 Section 17.4 : Aire de surfaces.....	70
3.5 Section 17.5 : Intégrales triples.....	70
3.6 Section 17.6 : Moments d'inertie et centre de masse.....	76
3.7 Section 17.7 : Coordonnées cylindriques.....	80
3.8 Section 17.8 : Coordonnées sphériques.....	83
3.9 Section 17.9 : Changement de variables et Jacobiens.....	87
3.10 Section 17.10 : Exercices récapitulatifs.....	87
4. Conclusion sur l'analyse des manuels.....	89
<u>CHAPITRE C PRE-EXPERIMENTATION</u>	97
INTRODUCTION	97
PRESENTATION DU TEST	97
C1. ANALYSE A PRIORI DU TEST	98
1. PARTIE I : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DEBUTANTS.....	98
Exercice unique : Le paraboloïde et les plans sécants.....	98
Analyse a priori de l'exercice unique.....	98
I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide.....	98
II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide.....	100
III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide.....	102
2. PARTIE II : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS AVANCES.....	105
Exercice 01 : Deux plans sécants à un solide de revolution.....	105
2.1 Analyse a priori d'exercice 01.....	105
I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide.....	106
II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide.....	111
III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide.....	114
Exercice 02 : L'intersection de trois cylindres.....	115
2.2 Analyse a priori d'exercice 02.....	115
I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide.....	115
II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide (Svis).....	120
III. Troisième stratégies : Appui sur une représentation graphique du solide.....	122
Exercice 03 : Le solide déterminé par des plans et des gouttières.....	126
2.3 Analyse a priori d'exercice 03.....	126
I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide (Sa).....	127
II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide (Svis).....	135
III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide.....	142
Exercice 04 : Le calcul de la masse d'un solide de revolution.....	146
2.4 Analyse a priori d'exercice 04.....	146

I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide (Sa).....	146
II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide (Svis)	154
III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide	159
3. CONCLUSION SUR L'ANALYSE A PRIORI.....	163
C2. ANALYSE A POSTERIORI DU TEST	165
1. PARTIE I : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DEBUTANTS	166
Exercice unique : Le parabolôïde et les plans sécants	166
Productions effectives des étudiants débutants.....	167
2. PARTIE II : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS AVANCES	169
2.1 Exercice 01 : Deux plans sécants à un solide de revolution	169
Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 01	170
2.2 Exercice 02 : L'intersection de trois cylindres	173
Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 02	174
2.3 Exercice 03 : Le solide déterminé par des plans et des gouttières	177
Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 03	177
2.4 Exercice 04 : Le calcul de la masse d'un solide de revolution	178
Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 04	179
Conclusion sur l'analyse a posteriori des réponses des étudiants aux exercices	180
3. ANALYSE DU QUESTIONNAIRE.....	181
3.1 Présentation du questionnaire.....	181
3.2 Analyse question par question : les opinions des étudiants	182
3.3 Analyse du questionnaire : les opinions des enseignants.....	185
3.3.1 Les avis des enseignants (entretiens).....	185
3.3.2 Les avis des enseignants (réponses au questionnaire)	188
4. CONCLUSION	190
CHAPITRE D L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE MAPLE	195
<u>PARTIE D1</u> ETUDE DU LOGICIEL MAPLE	195
1. INTRODUCTION	195
2. BREVE PRESENTATION DU LOGICIEL MAPLE.....	195
3. ANALYSE DU LOGICIEL MAPLE : LE CAS DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES (RG) ET DU CALCUL DES INTEGRALES MULTIPLES (IM)	196
3.1 Recensement d'outils disponibles à propos des RG.....	198
3.1.1 Les potentialités des outils plot3d, animate3d et cylinderplot pour obtenir des RG en 3D	198
3.1.2 Description d'outils des RG.....	199
3.1.3 Description de techniques de RG simultanées d'objets	201
3.1.4 Les syntaxes de la commande implicitplot3d	203
3.1.5 Conclusion sur le recensement des outils des RG	203
3.2 Manipulation des expressions algébriques	204
3.3 Les syntaxes pour les définitions de fonctions.....	205
3.4 Recensement des outils disponibles à propos des IM	206
3.4.1 Les potentialités d'outils du calcul d'intégrales.....	206
3.4.2 Description des outils de calcul d'intégrales	207
3.5 Etude des contraintes des outils de calcul d'intégrales	208
3.6 Etude des contraintes des outils de représentation graphique en 3D.....	209
3.7 Etude des liens possibles entre les RG et la mise en place du calcul des IM : la technique crible géométrique	213
3.7.1 La visualisation graphique du solide criblé.	215
3.7.2 Du criblé géométrique au calcul d'intégrale.....	216
3.7.3 Interprétation du problème : « la gouttière verticale et les deux plans sécants »	218
4. LE MODELE MATIM.....	219

<u>PARTIE D2 ANALYSE DES MANUELS D'UTILISATION DU LOGICIEL MAPLE</u>	223
1. ANALYSE « STRUCTURELLE » DU MANUEL LION	223
1.1 Organisation et analyse du chapitre 3 du manuel LION Quelles techniques pour le calcul d'intégrales ?	225
1.2 Section 3.3 du chapitre 3 : Intégration	226
1.3 Organisation et analyse du chapitre 8 du manuel LION Quelles techniques pour les représentations des solides ?	227
1.3.1 Section 8.1 : Courbes du plan	227
1.3.2 Section 8.2 : Surfaces dans l'espace	229
1.4 Conclusion	231
2. ANALYSE « STRUCTURELLE » DU MANUEL LEVI	232
Intégrales multiples	232
3. CONCLUSION	236
<u>CHAPITRE E EXPERIMENTATION SANS ET AVEC MAPLE</u>	241
Présentation du problème	241
PARTIE E1	242
LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DANS L'ENVIRONNEMENT PAPIER/CRAYON	242
ANALYSE A PRIORI	242
Stratégies possibles	242
S1 : Interprétation analytique du solide	243
S2 - Interprétation géométrique du solide	248
S3 : Appui sur une représentation graphique du solide	250
ANALYSE A POSTERIORI	256
1. Conditions de passation	256
2. Productions effectives des étudiants	256
3. Conclusion sur l'analyse a posteriori	266
<u>PARTIE E2</u>	268
LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DANS L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE MAPLE	268
ANALYSE A PRIORI	269
1. Techniques de résolution	269
2. La modélisation du problème selon de modèle MATIM	269
3. Stratégies observables	270
3.1 Stratégie des fonctions explicites (SO1)	270
3.2 Stratégie des fonctions implicites (SO2)	271
3.3 Stratégie de représentation paramétrique	272
3.3.1 Le choix de paramétrage angulaire (SO3)	272
L'étape E1	274
De l'étape E1 à l'étape E2	275
De l'étape E2 le crible a l'étape E3 le calcul de l'intégrale	276
3.3.2 Le choix de paramétrage libre (SO4)	280
L'étape E1	280
L'étape E1 à l'étape E2	280
De l'étape E2 à l'étape E3 (le calcul de l'intégrale)	281

3.4 Stratégie cylinderplot (SO5).....	282
4. Généralisation du problème.....	285
5. Conclusion sur l'analyse a priori.....	286

ANALYSE A POSTERIORI.....288

1. Conditions de passation	288
2. Enoncé de la tâche.....	288
3. Analyse a posteriori.....	289
4. Dévolution du problème	290
5. Les enjeux et compétences mises en jeu.....	291
5.1 L'étape E1 : Les questions q1 et q2.....	291
5.2 De l'étape E1 à l'étape E2 : le crible géométrique - q3 et q4	292
5.3 De l'étape E2 à l'étape E3 : le calcul de l'intégrale – q5.....	294
6. Synthèse générale de l'expérimentation autour des difficultés des étudiants	295
7. Analyse a posteriori du travail du binôme B1.....	297
7.1 L'étape E1 : Les questions q1 et q2.....	297
7.2 L'étape E2 : Les questions q3 et q4.....	299
7.3 L'étape E3 : La question q5 - calcul du volume de Q criblé	304
8. Analyse a posteriori du travail du binôme B4.....	310
8.1 L'étape E1 : Les questions q1 et q2.....	310
8.2 L'étape E2 : Les questions q3 et q4.....	312
8.3 L'étape E3 : La question q5.....	317
9. Catégorisation du travail des étudiants à partir des rétroactions de Maple.....	325
9.1 Croisement entre le travail mathématique d'un étudiant et sa mise en œuvre dans l'environnement informatique Maple	325
9.2 Etude des rétroactions possibles : la phase de la représentation graphique du solide criblé.....	326
1. Premier cas (I).....	326
2. Deuxième cas (II).....	326
3. Troisième cas (III).....	328
4. Quatrième cas (IV) :	328
5. Cinquième cas (V).....	328
6. Sixième cas (VI).....	331
7. Types de rétroaction-Maple	333
9.3 Etude des rétroactions possibles : la phase du calcul de volume par des intégrales multiples.....	333
1. Premier cas (I).....	333
2. Deuxième cas (II).....	333
3. Troisième cas (III).....	336
4. Quatrième cas (IV)	337
5. Cinquième cas (V).....	337
6. Sixième cas (VI).....	338
7. Types de rétroaction-Maple	339
9.4 Recensement global de type de réponse des étudiants en termes de rétroaction-Maple	339
1. Le groupe (α).....	339
2. Le groupe (β).....	340
10. Conclusion sur la deuxième expérimentation	341

CONCLUSION ET PERSPECTIVES349

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES361

ANNEXE I : ANALYSE DE MANUELS.....369

1. SECTIONS DE MANUEL SWO.....	369
Aire de surfaces (section 17.4)	369
Changement de variables et Jacobiens (section 17.9 de SWO)	370
2. ANALYSE DES MANUELS SPIE.....	376

Organisation mathématique et didactique du chapitre 9 du manuel SPIE	376
1. Intégrales doubles	376
2. Méthode d'intégration	377
3. Intégrales triples	378
4. Changement de variables dans les Intégrales Multiples	378
5. Problèmes Résolus.....	379
6. Problèmes supplémentaires	384
3. Analyse de certains exemples extraits de SWOF	386

ANNEXE II : PRE-EXPERIMENTATION.....	391
1.1.1 Les consignes du test : Etudiants débutants	391
1.1.2 Les consignes du test : Etudiants avancés	391
1.1.3 Le questionnaire	392
1.1.4 Les copies : Etudiants débutants – Ed1 à Ed7	393
1.1.5 Les copies : Etudiants Avancés – Ea1 à Ea8.....	397
1.1.6 Les opinions des étudiants et des enseignants.....	407

EXEMPLE D'INTERPOLATION.....411

ANNEXE III : PROTOCOLE D'EXPERIMENTION SANS MAPLE	415
Binôme 1 : Etudiant E1 et Etudiant E2.....	415
Binôme 2 : Etudiant Redoublant ER et Etudiant E3.....	423

ANNEXE IV : ANALYSE A POSTERIORI DE TRAVAUX DES BINOMES B2, B3, B5 ET B6.....	433
1.1.7 Analyse du travail de Binôme 2	433
1.1.8 Analyse du travail de Binôme 3	450
1.1.9 Analyse du travail de Binôme 5	460
1.1.10 Analyse du travail de Binôme 6	470

ANNEXE V : PROTOCOLE D'EXPERIMENTION AVEC MAPLE	483
Séance 1 : Intervention du professeur à toute la classe.....	483
1.1.11 Binôme 1 : Etudiant B et Etudiant Z	486
1.1.12 Binôme 3 : Etudiant L et Etudiant J.....	495
1.1.13 Binôme 5 : Etudiant A et Etudiant M.....	500
Séance 2 : Intervention du professeur à toute la classe.....	505
1.1.14 Binôme 2 : Etudiant A et Etudiant G.....	506
1.1.15 Binôme 4 : Etudiant F et Etudiant N	518
1.1.16 Binôme 6 : Etudiant B et Etudiant D	523

ANNEXE VI : LES FICHIERS PRODUCTIONS MAPLE DES ETUDIANTS.....529

CHAPITRE

A

INTRODUCTION PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

CHAPITRE A

INTRODUCTION, PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

1. INTRODUCTION

Notre intérêt pour ce travail est parti de notre expérience d'enseignant à l'«Universidade Estadual de Santa Cruz-UESC» au Brésil. En effet, dans notre enseignement et dans nos discussions à la fois avec des collègues et des étudiants, nous avons pu faire le constat empirique de nombreuses difficultés d'enseignement et d'apprentissage des *Intégrales Multiples* (IM) particulièrement sensibles dans les calculs de volumes. Ces difficultés touchent bien sûr d'abord les étudiants, qui ont du mal à mettre en place les calculs et surtout à trouver des moyens de contrôle et de validation de ce qu'ils font. Par ailleurs, les enseignants sont souvent désarmés devant les difficultés et blocages de leurs étudiants et ne voient pas trop comment agir. Dans l'intention de résoudre ces difficultés est née l'idée d'intégrer dans l'enseignement des logiciels de calcul formel tels *Maple* mais les tentatives d'intégration ont montré que cet enseignement reste difficile et problématique.

Voici, par exemple, un extrait d'un entretien que nous avons eu avec un collègue et qui résume assez bien, à notre sens, les difficultés rencontrées :

Réellement des problèmes existent ici : même si l'étudiant connaît la théorie, comment calculera-t-il le volume via intégrale double ou triple. Il a besoin à la base de savoir comment se transforme une intégrale multiple par une intégrale itérée. Cela dépendra essentiellement de la visualisation de la géométrie du solide. Ce passage est bien compliqué, soit l'étudiant a une visualisation du problème, soit cela reste très difficile à faire. En général l'étudiant, principalement l'étudiant ingénieur, devrait avoir cette vision dans l'espace (habilité essentielle de l'ingénieur). Mais il ne l'a pas, car actuellement, l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement secondaire n'existe pratiquement plus. Donc il existe cette difficulté. Même pour voir ce type de choses dans l'espace via l'ordinateur, l'étudiant a besoin d'avoir une habilité algébrique.

Il nous semble que plusieurs points mentionnés dans cette citation nécessitent des éclaircissements ou des commentaires. Tout d'abord, quand l'enseignant parle de la « transformation d'une intégrale double ou triple en une intégrale itérée », il fait allusion à une partie importante dans la résolution de la tâche qui consiste à la recherche du domaine d'intégration et à la détermination de l'ordre par lequel il faudra exécuter l'intégration par rapport à chacune des variables concernées. On voit dans ce que nous dit cet enseignant, que cette phase du travail s'appuie essentiellement sur une « visualisation de la géométrie du solide », dont il souligne que c'est le point qui pose le plus de difficultés aux étudiants. Qu'est ce que cette « visualisation de la géométrie du solide ». Fait-elle appel seulement à des compétences géométriques. Si oui, lesquelles ? D'ailleurs, lorsque cet enseignant se retranche derrière les lacunes du secondaire (pratique très répandue chez les enseignants à tous les niveaux), à quel type de géométrie et à quelles compétences fait-il allusion ?

Plus loin, l'enseignant parle de « visualisation du problème » puis de « vision dans l'espace ». Les trois expressions recouvrent-elles toutes une même (ou des) réalité(s) didactique ? Laquelle ou lesquelles ? En se plaçant dans le corpus mathématique communément appelé Géométrie Analytique de l'Espace (GAE) s'agit-il de la possibilité de construire une représentation graphique ou plus subtilement de la possibilité de mettre en rapport une représentation graphique² (même évoquée) et une représentation analytique du solide ? Et plus généralement s'agit-il de pouvoir constamment de contrôler les interactions dans l'espace des objets mathématiques en jeu en faisant les liens entre les développements analytiques des calculs et une représentation graphique ? Cette « habilité essentielle de l'ingénieur » est-elle simplement un don permettant de « voir » dans l'espace ? Ou correspond-elle à des connaissances et savoir-faire qu'il s'agit de dégager pour pouvoir mieux les enseigner ?

Répondre à cette question, nécessite bien sûr de se pencher plus avant sur la résolution de problèmes de calculs de volumes par des IM pour pouvoir mieux dégager les compétences en jeu et les rôles respectifs des représentations analytique et graphique et de leurs interactions.

A un autre moment de l'entretien que nous avons eu avec l'enseignant, celui-ci attribue au logiciel *Maple* la capacité d'aider à la visualisation des surfaces de l'espace. Ce point mérite toute notre attention. Qu'est-ce que le logiciel peut apporter dans l'enseignement des IM, comment peut-on l'intégrer utilement dans cet enseignement, selon quelles modalités didactiques ? D'après Valente (1993) :

L'ordinateur peut être utilisé pour enseigner. La quantité de logiciels disponibles et les différentes modalités d'utilisation de l'ordinateur montrent que cette technologie peut être suffisamment utile dans l'enseignement et l'apprentissage. De plus, pour l'intégration de l'ordinateur dans l'éducation, quatre ingrédients sont nécessaires, l'ordinateur lui-même, le logiciel éducatif, l'enseignant capable d'utiliser l'ordinateur comme moyen éducatif et l'étudiant. Le logiciel est un ingrédient aussi important que les autres car sans lui l'ordinateur ne pourrait jamais être utilisé dans l'enseignement³ (Op. cité, p. 1).

Notre propre expérience d'enseignant, nous a conduit à faire l'hypothèse que l'environnement informatique, notamment *Maple*, peut être une aide indéniable dans l'enseignement des IM, en assurant mieux l'interaction entre les deux types de représentations mentionnées plus haut. Par ailleurs, plusieurs institutions de l'enseignement actuel ont introduit des logiciels de type *Maple* pour essayer de mieux gérer des objets mathématiques qui posent des difficultés aux étudiants.

A la lumière de ces premières interrogations nous pouvons d'ores et déjà resserrer notre objet d'étude en nous centrant sur :

Les interactions possibles entre la représentation graphique et la représentation analytique des solides bornés⁴ dans les tâches de calculs de volumes par des Intégrales Multiples en utilisant les logiciels de calcul formel.

² Nous précisons plus loin ce que nous appelons les représentations graphique et analytique d'un solide.

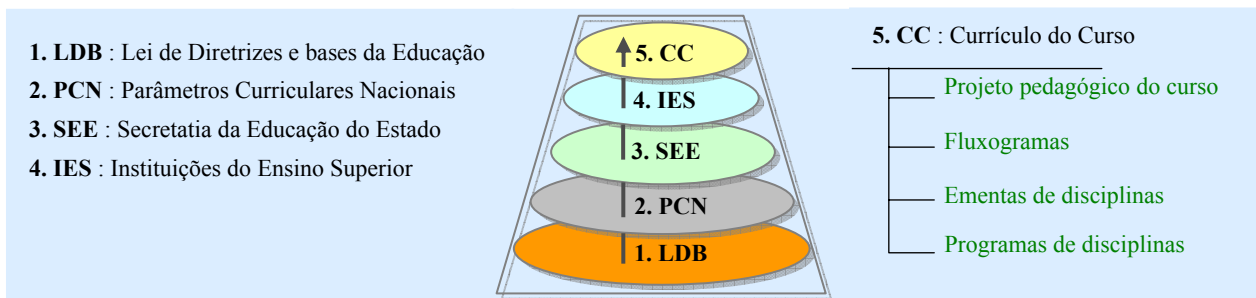
³ La traduction du brésilien est de nous.

⁴ Nous nous référons donc à certaines parties de \mathbb{R}^3 délimitées par des surfaces d'équations données et mesurables par des IM. Nous utilisons simplement le terme *solide* pour exprimer ces parties.

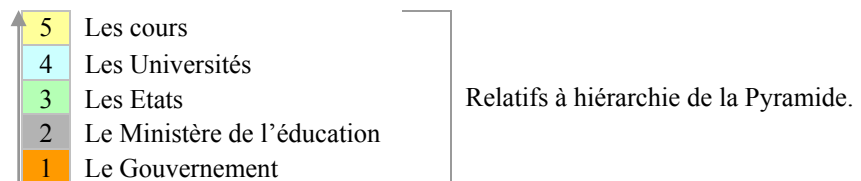
Cette étude motivée par les difficultés reconnues des étudiants et des enseignants est aussi justifiée par la nécessité d'apprécier les diverses initiatives mises en place dans les années récentes au Brésil et encouragées par le Ministère de l'Education Nationale brésilien (nous les présentons brièvement, ci-dessous).

1.1 Les initiatives au Brésil concernant l'utilisation des nouvelles technologies

Au Brésil, plusieurs initiatives concernant l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement supérieur ont été prises depuis quelques années. Elles sont d'abord motivées par le système de l'Education Nationale d'après le texte officiel de « Lei de Diretrizes e bases da Educação : LDB⁵ » pour tous les niveaux de l'enseignement. Ces initiatives sont également prises en compte par le (CNE/CES)⁶ sous la forme de rapport officiel de « Parâmetros Curriculares Nacionais : les PCNs »⁷. Ces initiatives apparaissent de manière idéologique dans la pyramide du système éducatif national (cf. figure ci-dessous).



Résumé de la Pyramide du système de l'éducation national (brésilienne)



Ainsi, en ce qui concerne particulièrement la formation en mathématiques « Bacharelado et Licenciatura », les PCN soulignent :

Les curriculums des cours de « Bacharelado/Licenciatura » en mathématiques doivent être élaborés de manière à développer les compétences et les habilités suivantes :

- a) capacité à s'exprimer, clairement et avec précision, par écrit et oralement ;
- b) capacité à travailler en équipes multidisciplinaires ;
- c) capacité à comprendre, critiquer et utiliser des idées et technologies nouvelles pour la résolution de problèmes ;
- d)... [cf. version originelle en portugais]⁸.

⁵ Loi directrices et bases de l'éducation (le socle).

⁶ Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior (Conseil National de l'Education / Commission de l'éducation Supérieure).

⁷ Paramètres Curriculums Nationaux.

⁸ Os currículos dos cursos de Bacharelado/Licenciatura em Matemática devem ser elaborados de maneira a desenvolver as seguintes competências e habilidades : a) capacidade de expressar-se escrita e oralmente com clareza e precisão; b) capacidade de trabalhar em equipes multi-disciplinares ; c) capacidade de compreender, criticar e utilizar novas idéias e tecnologias para a resolução de problemas ; d)...

L'utilisation de nouvelles idées et technologies pour la résolution de problèmes évoquée par CNE/CES, révèle un stade d'innovation qui, actuellement, se traduit par des initiatives personnelles dans les pratiques des enseignants et des chercheurs dans la plupart des IES brésiliennes. Elles sont essentiellement individuelles car l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement, notamment de mathématiques, n'est pas institutionnalisée dans la plupart des IES. En regardant par exemple de plus près les CC et plus particulièrement les « Fluxograma »⁹ rien n'indique la place de l'enseignement de ces nouvelles technologies. Mais certains enseignants les utilisent de façon informelle, alors que les universités, selon LDB, ont l'autonomie pour le développement des programmes propres de l'enseignement à la base des directives de l'ensemble LDB/PCN. Le retard pris dans l'intégration des nouveaux outils dans l'enseignement universitaire au Brésil contraste fortement avec la rapidité de l'arrivée des technologies contemporaines dans les différents secteurs de la vie sociale et culturelle.

Dans le cadre des initiatives pionnières, nous avons fondé à la rentrée 1999 un groupe de recherche – dans l'«Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC» - intitulé GPEMAC¹⁰ où nous nous engageons à l'enseignement et l'apprentissage de l'usage des outils technologiques. Mais cela ne concernait que certains étudiants de mathématique, physique et chimie qui bénéficiaient de bourses d'études¹¹. Dans ce groupe nous utilisons les logiciels comme Cabri-Géomètre, Derive, *Maple*, Mathematica, Excel etc., acquis par l'UESC dans le cadre de GPEMAC après sa reconnaissance par cette institution.

En résumé, les initiatives prises au Brésil pour l'usage des nouvelles technologies dans l'enseignement restent isolées et au stade de l'innovation. Elles ne sont pas généralisées à tous les étudiants des IES, en particulier dans l'enseignement des IM, limitant ainsi les possibilités d'expansion des recherches dans ce domaine.

1.2 Du Brésil vers la France

En France, dans les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (CPGE) en particulier dans les classes CPGE-Technologiques on trouve pour l'enseignement des IM et le calcul de volumes, un contexte qui est proche de celui des universités brésiliennes. De plus, l'environnement informatique *Maple* est installé dans ces classes et donc reconnu institutionnellement. Nous avons ainsi décidé de nous intéresser aux CPGE-Technologiques, pour identifier les conditions et les contraintes de l'enseignement des IM liées aux outils du logiciel *Maple* et pour en analyser le rôle lors de la construction d'une solution par un étudiant dans la mise en place d'une IM conduisant au calcul de volumes à l'aide de cet environnement.

Nous nous interrogeons sur les points suivants :

Quelles sont les pratiques qui émergent dans cette institution sur les IM en utilisant *Maple* ?

⁹ Organigramme des cours de différentes disciplines découpées par semestres mettant en évidence les pré-requis.

¹⁰ « Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional »

¹¹ Bourses désignées « Iniciação científica » fournies par CNPq ou UESC en motivant les jeunes chercheurs.

Quelles contraintes l'institution impose-t-elle, quelles conditions offre-t-elle à l'enseignement du calcul des IM avec *Maple* ? D'un côté les représentations graphiques dans *Maple* doivent permettre à l'étudiant, de façon innovante, une meilleure visualisation des solides délimités par les graphiques de fonctions de deux variables, cas souvent difficilement représentables dans l'environnement papier/crayon, puis une construction d'une représentation analytique ad hoc au traitement du calcul de l'intégrale conduisant au calcul du volume. D'un autre côté la prise en compte de l'environnement informatique *Maple* dans l'enseignement des IM, nécessite la construction d'un processus d'instrumentation des outils du logiciel pour les tâches proposées aux étudiants. Comment à travers l'utilisation de ses outils, sont modifiées les techniques de résolution de certaines tâches ? Comment les étudiants s'approprient-ils ces outils dans une tâche de calcul de volume par des IM ?

Ces premières questions, sont à l'origine de la problématique que nous exposons ci-après et ont suscité les choix théoriques et méthodologiques de notre recherche.

2. PROBLEMATIQUE

Les programmes officiels mis en place pour l'enseignement des *IM* depuis 2004 dans l'institution des CPGE en France comportent deux objectifs majeurs proches des programmes pour l'enseignement similaire dans les universités brésiliennes. Citons ces programmes :

- L'étude des notions des bases des intégrales doubles sur un rectangle et leurs extensions sur les domaines d'intégration plus généraux. Une brève extension sur les intégrales triples, visant l'enseignement des autres disciplines scientifiques.
- L'exploitation des résultats obtenus dans les calculs d'*Intégrales Multiples* et de grandeurs physiques (aires, volumes, moments, centres d'inerties...). L'interprétation géométrique d'intégrales doubles par un volume dans le cas où la fonction concernée est positive.

Le programme met l'accent sur la résolution de problèmes et d'exercices d'application.

Du point de vue épistémologique, les notions d'intégrales multiples sont étroitement liées à celles de fonctions de plusieurs variables réelles.

Dans le programme des CPGE, une des tâches préliminaires aux calculs des IM est l'étude des fonctions de deux variables à valeurs réelles : lecture des propriétés, description du domaine, représentations graphiques, continuité, surfaces et courbes de niveau, gradient, dérivation partielle, etc. Au début, ce travail est mené d'une façon isolée en examinant une seule fonction dans chaque tâche. Le passage à l'enseignement des *Intégrales Multiples*, s'accompagne d'un changement par rapport à la place occupée par les fonctions de plusieurs variables, dans les nouvelles pratiques des étudiants. Dans ce passage, une fonction ne doit plus être seulement examinée de façon isolée. Dans la plupart des situations de résolution de problèmes et d'exercices d'application, une fonction interagira avec d'autres fonctions pour former un domaine tridimensionnel d'intégration. La représentation graphique dans l'espace prend alors un autre statut dans l'étude des *IM* par rapport à l'enseignement précédent.

Au-delà (mais aussi en continuité) des connaissances des représentations de solides classiques et ceux de révolutions, c'est dans l'enseignement des *IM* qu'un étudiant se confronte avec les pratiques des tracés des dessins, représentant des solides non classiques¹² (souvent appelés domaines tridimensionnels d'intégration) déterminés par des intersections des solides convexes via l'interaction des fonctions ou expressions algébriques. C'est pourquoi cette interaction elle-même crée une complexité et on peut s'attendre à des difficultés d'apprentissage nouvelles car liées à l'articulation entre la représentation graphique et la représentation analytique. Les étudiants vont être confrontés à de nouveaux types de tâches sur des intégrales en rapport avec le traitement des solides non classiques qu'ils (les étudiants) n'ont jamais construits. Plusieurs travaux didactiques ont montré que la représentation graphique dans l'espace est opérationnellement difficile par des techniques traditionnelles de représentations dans l'environnement papier/crayon.

Les mêmes programmes des CPGE soulignent que :

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution des problèmes, la formation des conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. (Programme de 2004, p. 5)

On voit dans cet extrait de texte officiel que l'utilisation de l'environnement informatique dans cet enseignement est censée aider l'apprenant dans une dialectique de contrôle et de pré-structuration de ses actions. Pour cela, l'étudiant doit être entraîné.

A priori l'utilisation du logiciel évite des calculs fastidieux, et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles. Mais cela ne peut pas se faire sans développer des techniques et un savoir sur le logiciel. Le texte officiel laisse supposer que la construction des techniques instrumentées sera prise en charge par l'enseignant. On peut donc penser que les intentions de l'institution vont se traduire dans des pratiques institutionnelles qui feront vivre ensemble le logiciel *Maple*, l'objet de savoir *IM* et les objets mathématiques avec lesquels les *IM* interagissent.

Mais les pratiques possibles relatives à la représentation graphique d'un solide, dans la rencontre des *IM* et du logiciel *Maple*, ne sont pas réalisables d'emblée. En effet l'instrument *Maple* n'est pas conceptuellement neutre. L'utilisateur d'un tel logiciel est amené à réaliser une activité instrumentée en utilisant les outils du logiciel selon des techniques appropriées. Cette activité, a priori, peut produire une représentation graphique du solide mais seulement à partir d'une représentation analytique si bien que le travail réalisé ainsi dans *Maple* se rapproche d'un travail de représentation analytique du solide pour déboucher sur un calcul d'intégrale. Ce travail peut offrir à l'utilisateur des moyens de contrôle tant sur l'interaction entre les deux registres de représentations (graphique et analytique), que pour le calcul de l'intégrale double ou triple. Il passe par la construction chez l'utilisateur de schèmes d'utilisation, plus au moins adaptés et plus ou moins efficaces. Dans l'action de l'utilisateur,

¹² Solide pour lequel on ne connaît pas de formule "toute-faite", ni de découpage (éventuellement par symétrie) qui permette de s'y ramener.

comme le souligne Rabardel (1985), l'usage de l'outil s'accompagne de l'élaboration de structures permettant l'organisation de l'action du sujet : le schème d'usage (SU). La notion de schème nous semble donc primordiale dans la construction des techniques et la réalisation des tâches avec les instruments. Par exemple, nous pouvons prendre les schèmes de représentations graphiques d'un solide bâti par l'intersection de solides convexes. Ce type de schème dépend de deux pôles : les connaissances mathématiques préalables de l'étudiant (et plus particulièrement la géométrie analytique dans l'espace) et les connaissances de l'environnement informatique *Maple* et son utilisation.

Comme nous l'avons vu, les programmes de CPGE soulignent que « *les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution des problèmes ...* ». La problématique d'intégration dans l'enseignement des mathématiques des outils informatiques pose de nombreuses questions. Que signifie par exemple « être entraîné à l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique et formel » ?

Trouche (2000) montre par exemple que la calculatrice graphique est un non-objet pour les enseignants. Ces derniers ainsi que les [étudiants] sont d'accord pour estimer que son utilisation ne nécessite aucun apprentissage. D'autres chercheurs et enseignants, habitués au logiciel *Maple*, soulignent qu'il n'est pas utile de connaître tous les outils de cet environnement pour l'utiliser. Pour eux il est cependant nécessaire d'en comprendre la logique générale, en particulier, les deux aspects suivants soulignés par Ferrard (2001).

D'une part, ce qui concerne la syntaxe, ainsi que le nom des [commandes] et la nature des résultats qu'elles produisent. D'autre part, comment tout cela est présenté à l'écran : les fenêtres, les icônes, les couleurs, l'utilisation de la souris, etc. On parle respectivement du moteur algébrique et de l'interface-utilisateur. *Maple* a été adapté sur de très nombreuses plateformes et notamment sur les ordinateurs de type compatibles PC sous Windows ou Unix. Le moteur algébrique est pratiquement inchangé d'une plateforme à l'autre, ce qui permet à tous les utilisateurs de parler le même langage, alors que l'interface-utilisateur en dépend beaucoup. (Op. cité, p. 2)

Il nous semble que le type de discours souligné dans les textes de programmes et plusieurs points mentionnés, dans la présente citation, demandent à être éclaircis.

Comment peut-on concrètement utiliser *Maple* pour arriver à représenter les types de solides délimités par des surfaces compliquées, souvent présents dans l'enseignement des IM ? Comment un enseignant de CPGE peut-il construire les techniques permettant d'obtenir ces représentations ? Comment un étudiant de CPGE peut-il construire les schèmes permettant d'obtenir ces représentations ?

On voit bien qu'a priori, même dans le cas où l'étudiant a une bonne connaissance des fonctionnalités des outils de l'environnement informatique dont il dispose, son utilisation dans le travail mathématique, doit être efficace et raisonnée pour la réalisation des tâches.

D'autres recherches en didactique analysent le travail des étudiants devant résoudre des tâches mathématiques à l'aide des nouvelles technologies d'enseignement. C'est le cas notamment des recherches de Lagrange (2000). En s'appuyant sur des théories didactiques, cet auteur nous rappelle le rôle essentiel des techniques dans la conceptualisation mathématique. A

travers des exemples d'activités de classe, il discute la place des techniques instrumentées et leurs interactions avec les techniques habituelles. Selon l'auteur :

Les techniques instrumentées ne sont pas données par l'outil, mais doivent être pensées et mises en scène dans les situations adaptées. Par conséquent, concevoir ces techniques et les fonctions pragmatiques et épistémiques qu'elles vont assurer, déterminer les interactions avec les techniques habituelles supposent des choix didactiques. (Op. cité, p. 150)

Ainsi, Lagrange considère la dialectique entre le fonctionnement des techniques papier/crayon et celles instrumentées dans l'environnement informatique pour aider les enseignants à penser et à mettre en scène des situations d'apprentissage utilisant ces outils, mais aussi pour permettre à l'étudiant de participer individuellement ou collectivement à la construction du savoir concerné à partir de l'organisation de ses actions. Donc, dans l'institution d'enseignement, la mise en place d'une technique instrumentée requiert de la part de l'enseignant des pratiques didactiques basées, entre autres, sur des connaissances relatives à l'environnement informatique et son utilisation.

On pourrait donc dire que le fait que l'environnement informatique *Maple* soit installé institutionnellement dans les CPGE n'est pas suffisant pour la résolution de certains types de tâches de l'enseignement des IM. A priori, il n'y aura pas des rétroactions du logiciel dans l'apprentissage de l'étudiant, s'il n'y a pas des techniques nouvelles. Autrement dit, il n'y aura pas d'utilisation du logiciel *Maple* qui ne passe par des techniques instrumentées. Ces dernières doivent être construites par l'enseignant et apprises par les étudiants. Elles méritent un enseignement.

Ainsi, à la lumière de ce qui précède et le travail possible à effectuer par l'étudiant dans *Maple* nous pouvons formuler l'hypothèse de travail suivant :

Au-delà de la connaissance des commandes et des syntaxes du logiciel Maple, la réussite des tâches mathématiques passe par l'enseignement et l'apprentissage des techniques instrumentées au sein de l'institution d'enseignement.

Dans la suite, nous allons plonger notre problématique dans un cadre théorique, ensuite expliciter nos questions de recherche, enfin présenter les choix méthodologiques.

3. CADRE THEORIQUE

Nous nous appuyerons sur des approches permettant la prise en compte de la dimension de registre et de la représentation des objets mathématiques. Nous ferons ainsi référence à la notion de *registres de représentation sémiotique* qui a été introduit en didactique par Duval (1993). Cette approche nous semble intéressante car elle va nous permettre de préciser ce que nous appelons la *représentation graphique* et la *représentation analytique* d'un solide. Elle va aussi nous permettre de déterminer les outils pour interpréter ces types de représentations (et leur coordination) par rapport aux objets manipulés par le logiciel *Maple* et ceux manipulés par les étudiants en utilisant ce logiciel. Toutefois, cette approche, à elle seule, ne suffit pas pour étudier efficacement les questions qui se posent dans le contexte général de notre recherche, puisque la dimension institutionnelle demeure essentielle. Nous trouverons, sur ce plan, un appui dans *l'approche anthropologique du didactique* (TAD) développée par Chevallard (1999). En fonction de l'utilisation de l'environnement informatique (reconnu officiellement par l'institution) nos fondements théoriques devront enfin nous permettre de prendre en compte la dimension instrumentale des apprentissages en environnements informatiques. Dans ce sens, nous nous appuyerons sur les travaux de chercheurs en ergonomie cognitive, concernant l'apprentissage de l'usage des outils technologiques et notamment, la *théorie de l'instrumentation* proposée par Rabardel (1995). Nous présenterons ces approches dans l'ordre inverse où elles apparaissent dans cette introduction. Nous terminerons ce chapitre avec la présentation des questions de recherche que nous nous posons dans le contexte de ces cadres et les choix méthodologiques et théoriques que nous avons faits.

3.1 La théorie de l'instrumentation

Pour mieux comprendre le rôle des outils de l'environnement informatique *Maple* sur l'enseignement du calcul d'*Intégrales Multiples* et pour interpréter les productions des étudiants dans cet environnement, nous utiliserons la théorie de l'instrumentation. Cette théorie, issue des travaux en ergonomie cognitive, concerne l'apprentissage de l'usage des outils technologiques. Nous nous référerons plus particulièrement au cadre théorique développé par Rabardel (1995).

Dans les dernières années, nombreux sont les chercheurs en didactique qui ont porté leur attention sur cette perspective théorique : Artigue (1998), Lagrange (2000), Drijvers (2000), Trouche (2000), ..., pour ne citer qu'eux.

Ce dernier souligne par exemple que :

Les travaux récents en ergonomie cognitive donnent des outils théoriques permettant de mieux comprendre les processus d'appropriation de calculatrices complexes. Rabardel (1995), en ce qui concerne la formation en général et l'enseignement en particulier, propose une nouvelle approche qui, pour l'essentiel, distingue l'outil technique (*l'artefact*), qui est donné au sujet, et *l'instrument*, qui est construit par le sujet. Cette construction ou *genèse instrumentale*, est un processus complexe lié aux caractéristiques de l'artefact (ses *potentialités* et ses *limitations*), et à l'activité du sujet, à ses connaissances et ses habitudes de travail antérieures (Op. cité, p. 195).

L'*instrument* n'est donc pas « donné », il est construit par le sujet au cours d'un processus de *genèse instrumentale*. Dans ce même sens, Drijvers (2000), en se référant à cette perspective théorique, souligne que :

Le point de départ de la *théorie d'instrumentation* est l'idée qu'un outil n'est pas automatiquement un instrument efficace et pratique. Un marteau, par exemple, est un objet sans signification, à l'exception que lorsqu'on a quelque chose à marteler, on le transforme ainsi en un instrument utile. Cette idée s'applique aussi à tout autre objet comme l'ordinateur ou un logiciel. Le processus d'apprentissage dans lequel un *artefact* devient progressivement un *instrument* est appelé *genèse instrumentale*. L'utilisateur doit développer des compétences d'abord pour reconnaître les tâches pour lesquelles l'instrument est adapté, et ensuite pour les exécuter dans l'environnement de cet instrument (Op. cité, p. 218).

La transformation d'artefacts en instruments apparaît donc comme le résultat de processus complexes qui mettent en jeu à la fois le *sujet* avec ses compétences cognitives, *l'artefact* et *l'objet* vers lequel l'action est dirigée. Ces trois pôles (cf. modèle ci-dessous) conditionnés par l'environnement social, dans lequel ils s'inscrivent, ont conduit Rabardel (1995) à considérer un instrument comme une entité mixte formée de deux composants :

D'une part, un artefact, matériel ou symbolique produit par le sujet ou par d'autres ;

D'autre part, un ou des schèmes d'utilisation associés, résultant d'une construction propre du sujet, autonome ou d'une appropriation de ShSU (schème sociaux d'utilisation) déjà formés extérieurement à lui (Op. cité, p. 117).

L'intégration des outils informatiques (logiciels) à l'activité mathématique conduit donc à la construction des schèmes d'utilisation, plus au moins adaptés et plus ou moins efficaces. Selon Rabardel les schèmes sont plurifonctionnels. Mis en jeu dans des situations précises, ils aident à :

Les comprendre (c'est leur fonction *épistémique*),

Agir, transformer, résoudre (c'est leur fonction *pragmatique*) ;

Organiser et contrôler l'action (c'est leur fonction *heuristique*).

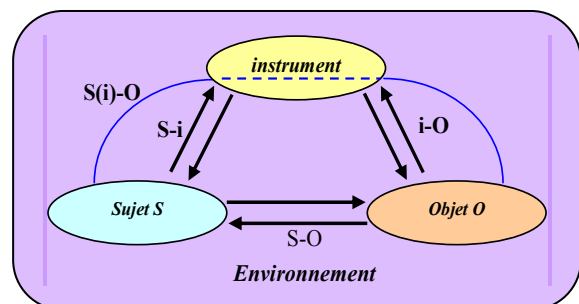
L'auteur présente les schèmes d'utilisation en trois catégories :

Schémas d'usage – correspondant aux activités relatives à la gestion des caractéristiques et propriétés particulières de l'artefact.

Schémas d'action instrumentée – correspondant aux activités pour lesquelles un artefact est un moyen de réalisation.

Schémas d'activités collectives instrumentées – correspondant respectivement aux usages simultanés ou conjoints d'un instrument dans le contexte d'activités à partager ou collectives.

Ainsi, pour l'analyse des situations d'activités instrumentées, Rabardel & Verillon (1995) proposent le modèle qu'ils appellent *SAI*¹³ (représenté dans la figure ci-contre). Ils modélisent les liens entre le sujet et l'objet sur lequel il agit. L'objectif essentiel est de mettre en évidence la multiplicité des interactions



¹³ **SAI** – Situation de l'Activité Instrumentée.

jouant un rôle dans les activités instrumentées. Au-delà des interactions directes sujet-objet [S-O], différentes interactions sont considérées, comme les interactions entre :

- le sujet et l'instrument [S-i] ;
- l'instrument et l'objet [i-O] ;
- le sujet et l'objet par la médiation de l'instrument [S(i)-O].

Cet ensemble se trouve dans un environnement constitué par l'ensemble des conditions dont le sujet doit tenir compte dans son activité finalisée. Verillon (1996) souligne que ce modèle permet d'analyser des processus liés à l'usage d'artefact. Ainsi Rabardel (1995) distingue deux dimensions dans le processus de *genèse instrumentale* : l'*instrumentation* orientée vers la constitution de schèmes d'utilisation et l'*instrumentalisation* qui concerne l'émergence des propriétés fonctionnelles et structurelles de l'artefact. Dans cette distinction Vérillon (1996) explique :

L'instrumentation concerne donc l'élaboration du rapport [S-i] : le sujet doit construire les schèmes, les procédures, les opérations nécessaires pour la mise en œuvre de l'artefact. Il peut, par exemple, importer dans la situation des rapports [S-i], construits dans d'autres contextes avec d'autres artefacts ou, au contraire, construire ces nouveaux rapports de manière exploratoire, ou encore, les élaborer par imitation (Op. cité. P.5).

L'instrumentalisation concerne, quant à elle, la construction des rapports [i-O]. Le sujet attribue à l'instrument une possibilité d'agir sur O et construit les propriétés fonctionnelles qui permettent l'actualisation de cette possibilité d'action. Cette action peut éventuellement être différente de celle prévue à l'origine par le concepteur de l'artefact (Op. cité. P.5).

Dans notre cas l'objet O est un objet mathématique, les *Intégrales Multiples (IM)*, le sujet S est un *étudiant* d'une institution de l'enseignement supérieur, notamment les CPGE, et l'instrument i est un logiciel, comme *Maple* : la modélisation par l'instrumentation et l'instrumentalisation décrira la façon dont la présence de l'instrument influe sur la constitution d'un rapport [S-O] de l'étudiant à cet objet. Ce rapport alors noté [S(i)-O] apparaîtra dans toutes les situations où *Maple* sera disponible. En ce sens l'instrument n'est pas définitivement neutre à l'égard du calcul des *IM*. L'instrument ne s'intègre pas naturellement dans l'activité d'un sujet. De plus, pour accomplir certaines tâches à l'aide d'un instrument, il est aussi nécessaire de développer des compétences sur les *techniques instrumentées*. Selon Lagrange (2000) :

L'utilisation des outils informatiques [en particulier du logiciel *Maple*] multiplie les possibilités qu'ont les [étudiants] d'agir sur les tâches : les approches numériques ou graphiques sont plus faciles et potentiellement plus efficaces qu'avec le seul papier/crayon [...]. Les techniques d'utilisation des nouveaux outils, que nous appellerons *techniques instrumentées*, ne se réduisent pas aux techniques « presse-bouton ». Dans leur variété, elles peuvent être vues comme des éléments fondamentaux pour le nécessaire « travail sur la technique » qui supporte la conceptualisation (Op. cité, p. 152 et 169).

Pour analyser les outils de l'environnement informatique qui nous concerne et comprendre comment ces outils peuvent contribuer à l'étude des interactions possibles entre les représentations graphique et analytique des solides dans une tâche de calcul de volume, il nous paraît donc indispensable de prendre en compte la dimension *d'instrumentation*, ainsi que des *techniques instrumentées* de cet environnement.

Dans cette perspective, nous chercherons à analyser le rôle des commandes (outils) et leurs

syntaxes (qui doivent participer à la constitution des schèmes d'utilisation) disponibles dans *Maple*. Cette étude nous permettra d'identifier les potentialités, et les contraintes que l'utilisateur de ce logiciel rencontre dans ses actions lors de la mise en œuvre des objets mathématiques en jeu.

En ce qui concerne l'analyse des contraintes et des potentialités des outils [informatiques], Trouche (2000) distingue trois types de contraintes, qui concourent toutes à la pré-structuration de l'action du sujet, et qui doivent être analysées non pas de façon générale, mais par rapport à un type de tâche donné :

Des *contraintes internes* (au sens de contraintes physico-électroniques) liées de façon intrinsèque au matériel. Il s'agit d'informations qui peuvent être accessibles ou non, mais que [le sujet] ne peut pas modifier en utilisant les seules fonctionnalités [d'artefact]. Elles n'apparaissent ni comme objectif, ni comme résultat, au cours de la réalisation d'une tâche (Op. cité, p. 197).

Des *contraintes de commandes* liées à l'existence et à la forme (c'est-à-dire à la syntaxe) des différentes commandes. Il s'agit là d'informations qui sont accessibles à l'interface, et que [le sujet] l'utilisateur peut utiliser ou modifier dans certaines limites pour obtenir un résultat donné (Op. cité, p. 197).

Des *contraintes d'organisation* liées à l'organisation du clavier et de l'écran, c'est-à-dire à la structuration des informations et des commandes disponibles. Il s'agit là aussi d'informations qui sont accessibles à l'interface, et que [le sujet] l'utilisateur peut utiliser ou modifier dans certaines limites pour obtenir un résultat donné. Elles apparaissent comme éléments d'une technique de réalisation d'un type de tâche (Op. cité, p. 199).

Nous allons prendre en compte cette typologie pour l'analyse des contraintes des outils disponibles dans l'environnement informatique par rapport aux domaines que nous étudions.

Concernant le calcul d'une intégrale double ou triple, *Maple* pourra réaliser certaines démarches (telles que changement de variables, calculs des primitives d'intégrales itérées etc.) de façon interne. Le résultat apparaîtra immédiatement mais sans que les détails des différentes étapes ne soit donnés. L'étudiant pourra l'accepter ou le refuser sans avoir tous les éléments de contrôle lui permettant de comprendre un tel résultat. De plus, ces démarches sont trop souvent inaccessibles et le sujet ne peut pas les modifier directement. Une réorganisation possible du processus d'instrumentation pourra, a priori, entraîner le sujet à avoir un certain contrôle sur le résultat.

Il nous apparaît donc possible d'analyser les rôles d'une contrainte donnée dans un des trois types évoqués par Trouche.

En ce qui concerne les deux distinctions du processus de *genèse instrumentale* soulignés par Rabardel (1995), nous retiendrons particulièrement la dimension *d'instrumentation* orientée vers la constitution de schèmes d'utilisation. Comme le souligne l'auteur, les *processus d'instrumentation* nécessitent la mise en œuvre de connaissances mathématiques. Les situations et les milieux, organisés autour d'artefacts demandant la mise en œuvre de stratégies instrumentées, sont donc susceptibles de contribuer à l'évolution des connaissances. Ainsi, nous précisons que la construction des schèmes d'utilisation, pour la réalisation de certaines tâches de *représentation graphique* des fonctions de deux variables et du *calcul des*

intégrales, nécessite le développement de compétences sur les commandes du logiciel et leurs syntaxes mais aussi sur les objets mathématiques mis en œuvre.

Prenons comme exemple la tâche consistant à donner une représentation graphique de deux plans perpendiculaires (dans *Maple*) à partir de la notion de fonctions de deux variables. La réalisation de cette tâche requiert, de la part du sujet, la construction d'un schème de représentation graphique. Plusieurs de ces schèmes sont possibles, ils mettent en jeu des connaissances mathématiques différentes et demandent des compétences, de la part du sujet, sur l'utilisation d'outils appropriés de ce logiciel. Dans ce sens, les tâches proposées aux étudiants, les techniques disponibles pour les résoudre et leurs justifications technologico-théoriques vont dépendre d'un ensemble de données relatives à l'institution dans lesquelles, l'enseignement prend place. En effet, comme le souligne Artigue (1998) :

La question de l'apprentissage mathématique [qu'elle soit par des techniques papier/crayon ou instrumentées] se pose, quant à elle, en termes de rapports personnels et institutionnels à des objets donnés et de leur développement articulé (Op. cité, p. 9).

Il sera donc important pour notre travail de pouvoir caractériser les pratiques propres au calcul d'*Intégrales Multiples*, et à l'usage du logiciel *Maple* dans l'institution que nous avons observée (les classes préparatoires, CPGE). Nous trouvons sur ce plan un appui dans l'approche anthropologique du didactique développée par Chevallard (1992) que nous présentons ci-dessous.

L'approche anthropologique nous aide à penser la dimension technique et instrumentale du travail mathématique, qui dans les analyses didactiques est souvent laissée au second plan, au profit d'analyses de nature plus conceptuelle. (Ibid., p. 9).

3.2 L'approche anthropologique du didactique

Cette approche développée par Chevallard (1992) s'inscrit dans le prolongement de la théorie de la transposition didactique. Elle considère les *objets* mathématiques, non comme existant en soi, mais comme des entités qui émergent de systèmes de pratiques existant dans des *institutions* données. Ces systèmes ou praxéologies sont décrits en termes de tâches dans lesquelles *l'objet* est investi, les techniques permettent de les résoudre, et à travers lesquelles le discours sert à expliquer et à justifier les techniques. Ces dernières peuvent être considérées du point de vue instrumental (comme l'explique de Lagrange (2000, p. 169)).

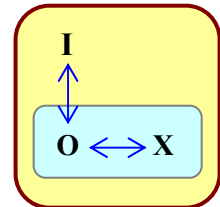
Selon Chevallard, la didactique des sciences, comme toutes les didactiques, s'inscrit dans le champ de l'anthropologie sociale, c'est-à-dire l'étude de l'homme. De la même façon qu'existe une anthropologie religieuse ou une anthropologie politique, dont les objets d'études sont respectivement le religieux ou le politique, Chevallard (1992) se propose d'élaborer une anthropologie didactique dont l'objet d'étude serait la didactique afin d'étudier, par exemple, l'étudiant face au problème mathématique.

Le point de départ de cette approche est que « *tout est objet* ». L'auteur distingue néanmoins les types d'objets particuliers : *institutions* (I) et *personnes* (X) et les *positions* qu'occupent

les personnes dans les institutions. En occupant ces positions, ces personnes deviennent les sujets des institutions – sujets actifs qui contribuent à faire vivre les institutions par le fait même de leur être assujettis. La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d’organisation de connaissance – entre alors en scène avec la notion de *rapport*.

3.2.1 Rapport personnel, rapport institutionnel

Un objet (**O**) de savoir existe dès lors qu’une personne **X** ou une institution **I** le reconnaît comme existant. La figure ci-contre schématise les rapports entre les trois termes primitifs (l’institution, l’objet de savoir et la personne) que Chevallard explique comme suit.



Un objet **O** existe pour une personne **X** s’il existe un rapport personnel noté $R(X,O)$, de la personne **X** à l’objet **O**. Autrement dit, le rapport personnel à **O** précise la manière dont **X** connaît **O**. De même, se trouve défini un rapport institutionnel de **I** à **O** noté $R(I,O)$ qui traduit la connaissance de l’objet **O** pour institution **I**. **O** est alors un objet institutionnel. Nous pouvons également les représenter de la manière suivante :

$R(X,O)$	rapport personnel de X à O \Leftrightarrow X connaît O
$R(I,O)$	rapport institutionnel de I à O \Leftrightarrow I connaît O

Chevallard (1989a) explique :

Tout savoir est ainsi attaché à une institution *au moins*, dans laquelle il est mis en jeu par rapport à un domaine de réalité. Le point essentiel est alors qu’un savoir n’existe pas *in vacuo*, dans un vide social : *tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions.*

Le rapport personnel d’une personne à un objet de savoir ne peut être établi que lorsque cette personne entre dans une institution **I** où existe cet objet **O**.

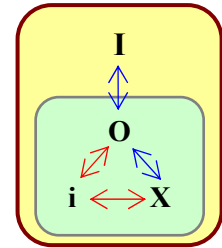
Ainsi, du point de vue de l’approche Anthropologique, nous considérons les *Intégrales Multiples* comme objet **O** de savoir et « l’enseignement de mathématiques en classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE) en France » comme l’institution **I**.

En ce qui concerne l’intégration des technologies dans l’enseignement des mathématiques, nous pouvons nous questionner sur la reconnaissance des instruments technologiques par les institutions. Dans ce contexte, nous nous proposons de regarder l’instrument (notamment *Maple*), comme objet particulier de l’institution, de la manière suivante.

3.2.2 Rapport institutionnel à l’instrument

Supposons que l’objet **O** de savoir dont parle Chevallard est le même objet de savoir dont Rabardel (1995) fait référence dans les situations d’activités instrumentées – SAI, et que l’instrument, noté ici **i**, est officiellement reconnu par l’institution **I** où existe l’objet **O**. Si l’enseignement, l’apprentissage de **O** et l’instrument se rencontrent dans **I** et que dans cette rencontre il y a les intentions de **I** qui se traduisent par des pratiques existant dans cette

institution, soit par des techniques instrumentées dans **i** soit par des techniques habituelles de **O**, on peut donc parler de *rapport institutionnel et personnel à l'instrument*. La figure ci-contre schématise ces rapports prenant en compte les trois termes primitifs considérés par Chevallard qui interagissent maintenant avec l'instrument dont parle Rabardel, quand **i** devient un instrument institutionnel. Ceci peut se traduire comme suit :



Un instrument **i** existe officiellement pour une institution **I** s'il existe les rapports notés $R(I,i)$ et $R(I,O)$ respectivement de l'institution à l'instrument **i** et de l'institution à l'objet **O** qui se traduisent par des pratiques existant dans cette institution, qu'elles soient ou non instrumentées par **i**. Ainsi à la lumière des théories de l'anthropologie et de l'instrumentation, nous pouvons parler de *rapport institutionnel aux Intégrales Multiples en utilisant Maple* noté : $R(I,i) \cdot R(I,O)$ ou simplement $R[I,(i,O)]$ pour rendre compte de l'utilisation de **i** pour le travail sur **O** dans **I**.

De même, un instrument **i** existe pour une personne **X**, s'il existe un rapport noté $R(X,i)$ de la personne à l'instrument **i** et le rapport personnel de **X** à **O** noté $R(X,O)$ qui précise la manière dont **X** connaît **O**. Dans ce cas, nous parlons de *rapport personnel aux Intégrales Multiples en utilisant Maple* noté $R[X,(i,O)]$.

$R(I,i) \cdot R(I,O) = R[I,(i,O)]$:	rapport institutionnel à l'instrument : si i et O se rencontrent dans l'institution I autour de l'enseignement et l'apprentissage de O avec i .
$R(X,i) \cdot R(X,O) = R[X,(i,O)]$:	rapport personnel de X à O par la médiation avec l'instrument i .

Au-delà des questions propres aux rapports institutionnels et personnels, il convient de dégager la nature des enseignements dans l'institution. Pour ce faire, nous allons faire appel à un autre volet de la théorie anthropologique du didactique.

3.2.3 L'approche praxéologique

Un rapport institutionnel est en particulier, directement lié aux activités qui sont demandées aux étudiants. Il est en quelque sorte caractérisé par les différents types de tâches que les étudiants doivent savoir effectuer et par des raisons qui justifient les recours à ces types de tâches. Le rapport institutionnel à un objet ($R(I,O)$) est donc décrit par un ensemble de pratiques sociales qui fonctionnent au sein de l'institution en mettant en jeu cet objet de savoir.

Comme le souligne Chevallard, le savoir mathématique en tant que forme particulière de connaissance, est le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne, ou plus généralement, se transpose dans des institutions.

Chevallard propose donc la notion d'*organisation praxéologique* ou *praxéologie* (comme la notion clé) pour étudier les pratiques institutionnelles relatives à un certain objet de savoir et en particulier les pratiques sociales en mathématiques. Il se propose de distinguer les *praxéologies* qui peuvent se construire dans une classe où l'on étudie cet objet, d'analyser la

manière dont peut se construire l'étude de cet objet, et de permettre la description et l'étude des conditions de réalisation. Les *praxéologies* sont donc décrites en termes de :

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| 1. (Type de) Tâches | 3. Technologie et |
| 2. (Type de) Techniques | 4. Théorie |

Tâche

Le symbole **T** est adopté pour représenter un type de *tâches* identifiées dans une praxéologie et contenant au moins un exercice **t**. Cette notion suppose un objet relativement précis. *Monter un escalier* par exemple est un type de tâche, mais *monter*, tout court, n'en est pas un. De même, *calculer le volume du solide délimité par les graphiques des fonctions de deux variables*, est un type de tâche ; mais *calculer*, tout court, c'est un genre de tâches qui appelle un déterminatif. Ainsi, *la tâche, le type de tâches, le genre de tâches* ne sont pas des données de la nature : ce sont des « *artefacts* », des « *œuvres* », des *construits institutionnels*, dont la reconstruction dans telle institution, et par exemple dans telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique.

Technique

Une *technique* notée τ est une manière de faire ou de réaliser un type de tâche **T**. Donc, une praxéologie relative à **T** précise (en principe) une manière d'accomplir, de réaliser les tâches $t \in T$, c'est-à-dire, une *technique*, du grec *tekhnê*, savoir-faire. A propos d'un type de tâches **T** donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, (à l'exclusion des techniques alternatives possibles qui peuvent exister effectivement, mais dans d'autres institutions) qui permettent de réaliser $t \in T$.

Technologie

La *Technologie* notée θ est un discours rationnel (*le logos*) ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ tout en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches de type **T**, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. Le style de rationalité mis en jeu varie selon l'espace institutionnel, et en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution.

Une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de rendre intelligible, d'éclairer la technique. Si la première fonction – *justifier* la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer pourquoi il en est bien ainsi.

Il est notable que ces deux fonctions (*justification* et *explication*) sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de la *justification* l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'*explication*. Exemple : un étudiant mémorise une certaine technologie (un

théorème ou une formule), il arrive à résoudre certains types de tâches avec cette technologie, mais il ne sait pas expliquer la raison du résultat trouvé.

Théorie

La *Théorie* à son tour notée Θ a pour fonction de justifier et de rendre compréhensible une *technologie* θ .

Organisation praxéologique

Les quatre notions : *type de tâche* (T), *technique* (τ), *technologie* (θ) et *théorie* (Θ), décrivent une *organisation praxéologique* complète $[T/\tau/\theta/\Theta]$ décomposable en deux blocs $[T/\tau/]$ et $[\theta/\Theta]$, constituant respectivement, le *savoir-faire* [*praxe*] et le bloc *tecnologico-théorique* [le *logos*].

Nous pouvons donc affirmer que *produire, enseigner et apprendre des mathématiques* sont des actions humaines qui peuvent se décrire selon le modèle *praxéologique*. Dans ce sens on pourra alors dire que l'*organisation praxéologique* relative aux activités mathématiques est une *organisation mathématique*. Selon (Matheron, 2000) :

Cette organisation permet d'étudier une même notion mathématique désignée du même nom, mais prise à l'intérieur d'organisations mathématiques de natures différentes car, déployées au sein d'institutions différentes. Ce dernier point relève ainsi de la prise en compte de l'aspect écologique relatif à un objet, c'est-à-dire du questionnement du réel existant ou n'existant pas à propos de cet objet dans une institution où vit une organisation mathématique donnée. Cette dimension écologique permet de poser des questions telles que pour un objet identifié dans les programmes comme étant à enseigner, quels type de tâches, accomplies avec quelles techniques, disponibles ou pas, enseigner et être en droit d'exiger des élèves ? Quelle organisation mathématique et, par conséquent, quelle progression mettre en place ? (Op. cité, p. 52).

Donc analyser la vie d'un objet mathématique dans une institution, comprendre sa signification pour cette institution, c'est identifier l'organisation mathématique qui met cet objet en jeu. Dans ce paradigme, nous nous proposons d'étudier l'organisation mathématique relative au *calcul de volumes*. Ce calcul est un des objets centraux du *calcul des Intégrales Multiples* (soit double, soit triple) dans plusieurs institutions de l'enseignement supérieur.

La notion d'organisation praxéologique et la notion du rapport institutionnel nous donnent, à partir d'une étude écologique des manuels et des programmes, les outils pour rechercher les réponses aux questions qui se posent dans ce cadre. Il nous semble important d'analyser les programmes et les manuels de l'institution nous concernant car elle permet d'accéder à l'aspect officiel de l'objet d'enseignement.

Selon Bessot (1994), il existe, dans les manuels, des indicateurs linguistiques découpant le texte du savoir enseigné. Un savoir (en particulier mathématique) doit être regardé comme un objet susceptible de se transformer sous la contrainte d'autres objets avec lesquels il interagit. L'étude d'un objet de savoir ne peut donc être conduite de manière isolée. Chevillard (1994) théorise ce phénomène dans ce qu'il dénomme *écologie des savoirs*, basée sur les notions *d'habitat* et de *niche*.

Dans cette approche, *l'habitat* est défini comme le lieu de vie et l'environnement conceptuel d'un objet de savoir. Il s'agit, pour l'essentiel, des objets avec lesquels il interagit mais aussi des situations d'enseignements dans lesquelles apparaissent des manipulations et des expériences auxquelles on a recours. La *niche* écologique décrit, quant à elle, la place fonctionnelle occupée par l'objet de savoir dans le système ou praxéologie des objets avec lequel il interagit.

Cette idée d'interrelation des objets de savoir est mise en évidence par Bosch et Chevallard (1999) quand ils soulignent :

L'approche anthropologique modélise le savoir mathématique en termes d'objets et d'interrelations entre eux. De cette vision volontairement unitaire de l'univers mathématique où « tout est objet » a surgi le questionnement sur la « nature » des objets mathématiques appelés normalement « concepts » ou « notions »... Cette question renvoie au problème de la description des pratiques institutionnelles où l'objet est engagé, problème auquel il faut répondre en termes d'organisation praxéologique. (Op. cité, p. 87)

Comme nous l'avons déjà présenté plus haut, dans cette organisation, on se pose des questions sur les types de tâches et les techniques qui composent les praxéologies institutionnelles (où est censé intervenir l'objet étudié) et sur les éléments technologiques et théoriques décrivant et justifiant ces pratiques. Dans ce contexte et pour revenir aux notions fondamentales de l'approche anthropologique, Bosch et Chevallard soutiennent l'idée que dans cette organisation, la mise en œuvre d'une technique pour réaliser un type de tâche se traduit par une manipulation des objets *ostensifs* réglée par des *non-ostensifs*.

3.2.4 Les ostensifs et non-ostensifs

La question de la « nature » des objets mathématiques et celle de leur « fonction » dans l'activité mathématique, a conduit à établir une dichotomie fondamentale entre deux types d'objets : une part les *objets ostensifs* et d'autre part les *objets non-ostensifs*.

- Les *objets ostensifs*¹⁴ sont tous les « objets » ayant une nature sensible, une certaine matérialité et qui, de ce fait, acquièrent pour le sujet humain une réalité perceptible.
- Les objets *non-ostensifs* sont les « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés.

Par exemple :

Ecrire $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 dydzdx = 1$ (volume du cube $[0,1]^3$) peut être vu comme une simple manipulation d'objets ostensifs mais, ce calcul ne saurait s'effectuer

¹⁴ Du latin *ostendere* « montrer, présenter avec insistance ».

intentionnellement sans l'intervention de certains objets non-ostensifs spécifiques, telle la notion d'intégrale triple.

En général, dans toute activité humaine il y a *co-activation* d'objets *ostensifs* et d'objets *non-ostensifs*. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 92).

L'ostensivité dont parlent Bosch et Chevallard, réfère plus généralement à l'ensemble des sens, même si, de fait, la vue et l'ouïe jouent un rôle privilégié. Au-delà de la perceptibilité des ostensifs, ce qui les caractérise, est le fait d'être « *manipulables* » par le sujet humain. Un son peut être fait (et perçu), un graphisme peut être tracé (et lu), un objet matériel quelconque peut être manipulé concrètement de diverses manières. Chevallard utilise le terme de *manipulation* pour désigner les divers usages possibles des objets ostensifs pour le sujet humain. C'est cette *manipulation* concrète qui permet de distinguer les objets *ostensifs* des objets *non-ostensifs*. Cependant, ces deux types d'objets sont unis par une dialectique qui considère ces derniers comme des émergents de la manipulation des premiers et par conséquent, comme des moyens de guidage et de contrôle de cette manipulation.

Les objets *ostensifs* constituent donc la partie perceptible de l'activité, ce qui se donne à voir dans la réalisation d'une tâche aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Pour Bosch et Chevallard (1999) :

Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments *ostensifs* font partie du réel empirique accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel *non-ostensif* dans une pratique déterminée, ne peut être qu'induite ou supposée à partir de manipulations d'ostensifs institutionnellement associés. [...]

L'intervention des *non-ostensifs* dans la praxis manipulatrice d'objets *ostensifs* peut conduire à donner aux *non-ostensifs* le statut de condition d'une manipulation adéquate des instruments *ostensifs*. (Op. cité, p. 92-93)

Donc, selon eux, un objet *ostensif* est avant tout considéré comme un *instrument* possible de l'activité humaine. C'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail. Comme l'approche anthropologique décrit le savoir mathématique en termes de praxéologies composées de types de tâches, de techniques (constituant le *praxis* ou *savoir-faire*), de technologies et de théories (constituant le *logos* ou « *savoir* »), Bosch et Chevallard insistent sur le fait que ces organisations praxéologiques se donnent à voir à travers les ostensifs qui composent les tâches, les techniques, les technologies et théories à travers les différentes façons de les activer. Ce travail avec des ostensifs doit être à la fois, efficace, lisible et intelligible. Tout ceci contribuera à donner aux ostensifs leur valeur instrumentale et sémiotique. Dans ce contexte les auteurs voient, sur le plan du développement des mathématiques,

De nouvelles créations ostensives, de nouvelles façons de manipuler des ostensifs anciens, mais aussi la perte de certaines façons de parler, d'écrire ou d'effectuer certains gestes. Une telle « évolution ostensive » ne se réalise jamais de manière uniforme et universelle mais dépend étroitement des instruments et des conditions écologiques qu'elles sont capables de créer pour faire vivre des praxéologies déterminées. (Bosch & Chevallard, 1999, p. 113)

Les nouvelles créations ostensives ainsi que les nouvelles façons de manipuler des ostensifs anciens dont parlent Bosch et Chevallard peuvent être regardées, dans le contexte de l'intégration des technologies contemporaines dans l'enseignement des mathématiques. En ce sens, Lagrange (2000), en s'intéressant aux objets nouveaux (que le calcul formel introduit dans la situation d'enseignement et d'apprentissage), s'interroge sur les rapports entre les objets manipulés par le logiciel et les objets ostensifs et non-ostensifs du travail mathématique. La complexité de ces rapports pose la question de la façon dont les étudiants peuvent se les approprier. L'auteur montre alors comment les travaux récents ont intégré une approche cognitive des instruments pour aborder cette question. De plus, il relève l'importance accordée au traitement dans un registre de représentation sémiotique et aux conversions entre registres en situations d'utilisation d'environnement informatique dans des activités mathématiques. Selon lui :

L'approche de Raymond Duval (1996) est notamment une conceptualisation qui met en avant le travail intra et inter-registre dans l'analyse d'activité mathématique. L'étude des contraintes de fonctionnement cognitif liées au traitement dans un registre et aux conversions d'un registre à l'autre en situations d'utilisation [d'environnement informatique] serait d'un grand intérêt. (Op. cité, p. 58)

Comme nous l'avons souligné auparavant, la notion de *registre de représentation sémiotique* va nous permettre de préciser ce que nous appelons la représentation graphique et analytique d'un solide. Elle va aussi nous permettre de déterminer les outils pour interpréter ces types de représentations (et leur coordination) par rapport aux objets manipulés par le logiciel *Maple* et ceux manipulés par les étudiants en utilisant ce logiciel. Nous faisons précisément appel à cette approche du fait que, dans l'étude des *Intégrales Multiples*, quand on fait le calcul des volumes, on travaille sur les solides. Ces derniers sont représentables dans plusieurs registres, en particulier les registres graphique et analytique. Du point de vue mathématique, on met bien en évidence que les deux registres vont interagir dans les pratiques institutionnelles sur les calculs des volumes. Et du point de vue didactique, la notion de registre peut rendre compte de cette interaction dans le travail mathématique sur le calcul de volumes par des *Intégrales Multiples*. Nous nous proposons ainsi de voir de plus près l'approche proposée par Duval. Approche que nous présenterons dans la suite.

3.3 La notion de registre de représentation sémiotique

En mathématiques, les objets ne sont accessibles qu'à travers leurs représentations. Selon Duval (1993) :

Il existe un paradoxe cognitif de la pensée mathématique : d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible. Ce paradoxe peut constituer un véritable cercle pour l'apprentissage. (Op. cité, p. 38)

La *représentation sémiotique* est une représentation construite à partir de la mobilisation d'un système de signes. Sa signification est déterminée d'une part par sa forme dans le système sémiotique, d'autre part, par la référence à l'objet représenté. Une figure géométrique, un énoncé en langue maternelle, une formule algébrique, un graphe, sont des représentations

sémiotiques qui relèvent de systèmes sémiotiques différents. Les traitements des objets mathématiques dépendent donc des possibilités offertes par les représentations elles-mêmes.

Duval (1995) explique la notion de *registre de représentation sémiotique* comme suit :

Les systèmes sémiotiques doivent permettre d'accomplir les trois activités cognitives inhérentes à toute représentation. Tout d'abord, *constituer* une trace ou un ensemble de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé. Ensuite *transformer* les représentations par les seules règles propres au système, de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un rapport de connaissance par rapport aux représentations initiales. Enfin, *convertir* les représentations produites dans un système de représentations d'un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'explicitier d'autres significations relatives à ce qui est représenté. Tous les systèmes sémiotiques ne permettent pas ces trois activités cognitives fondamentales... Mais les langues naturelles, les langues symboliques, les graphes, les figures géométriques, etc. les permettent. Nous parlons alors de *registre de représentation sémiotique*. (Op. cité, p. 20)

Duval distingue donc trois activités cognitives liées aux *registres de représentation sémiotique* :

- La *formation* d'une représentation sémiotique – recours à un (plusieurs) signe(s) pour actualiser ou remplacer l'objectif de cet objet. Elle repose sur l'application de règles de conformité¹⁵ et sur la sélection d'un certain nombre de caractères du contenu aperçu. Par exemple : composition d'un texte, dessin d'une figure géométrique, élaboration d'un schéma, écriture d'une formule.
- Le *traitement* d'une représentation – est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est donc une transformation interne à un registre. Par exemple, le calcul est une forme de traitement propre aux écritures symboliques (calcul numérique, calcul algébrique, calcul d'intégrale...).
- La *conversion* d'une représentation – est la transformation de cette représentation à une représentation d'un autre registre. Par exemple : La traduction est la conversion d'une représentation linguistique dans une langue donnée en une représentation linguistique d'une autre langue.

La *conversion* ne doit pas être confondue avec deux activités qui sont cependant proches : le *codage* et l'*interprétation*. L'*interprétation* requiert un changement de cadre ou de contexte. Ce changement n'implique pas de changement de registre mais il mobilise souvent des analogies. Le « *codage* » est la « transcription » d'une représentation dans un autre système sémiotique que celui où il est donné.

La *conversion* revêt donc une importance particulière. Toutefois, elle est généralement négligée dans l'enseignement des mathématiques, alors que, comme le souligne Duval l'une des conditions essentielles pour l'appréhension conceptuelle des objets mathématiques est de disposer, pour un même objet, de plusieurs *représentations sémiotiques*. Le choix d'un registre de représentation adéquat peut favoriser le *traitement* (transformations des représentations à l'intérieur d'un même registre). Néanmoins, disposer de plusieurs registres

¹⁵ Règles à respecter dans la formation d'une représentation sémiotique, telles que : règles de grammaire pour la langue naturelle, règles de formation dans un système formel, contraintes de construction pour les figures... La formation de ces règles est d'assurer, en premier lieu, les conditions d'identification et de reconnaissance de la représentation et, en second lieu, la possibilité de leur utilisation pour des traitements. (Duval, 1993, p. 41)

de représentation ne suffit pas pour accéder à la compréhension. Une deuxième condition est nécessaire : la *coordination* des registres de représentations. Elle se manifeste par la capacité de reconnaître, dans deux représentations différentes, des représentations d'un même objet. Elle apparaît ainsi comme la condition fondamentale pour tous les apprentissages.

Duval s'est particulièrement intéressé aux *représentations graphiques* d'objets mathématiques, essentiellement en 2 dimensions. Nous allons exploiter ce travail tout en le prolongeant pour les objets de la géométrie de l'espace.

3.3.1 Représentations graphiques

Dans un de ses travaux intitulé *graphique et équation : l'articulation de deux registres*, Duval (1988) souligne :

La lecture de *représentations graphiques* présuppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations correspondantes de l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple de nombres. (Op. cité, p. 235)

Dans ce travail, l'auteur distingue trois types de traitement qui prennent en compte des aspects différents du graphique : la *démarche de pointage*, la *démarche d'extension* du tracé effectué et celle d'*interprétation globale* de propriétés figurales. Il propose cette dernière comme une démarche systématique de repérage des variables visuelles à prendre en compte dans cette interprétation.

Pour lui, les représentations graphiques sont définies par la première démarche. Elle correspond à identifier un point par un couple de nombres et vice versa. Ce traitement fonctionne bien dans les cas les plus simples comme le tracé d'une droite dans le plan cartésien. Elle est limitée à des valeurs particulières et à des points marqués dans le plan muni d'un repère. Comment peut-on appliquer cette démarche dans le cas de représentations graphiques des fonctions de deux variables ?

La deuxième démarche correspond aux activités d'interpolation et d'extrapolation, lesquelles s'appuient sur ce qu'il appelle les aspects producteurs et les aspects réducteurs des représentations graphiques. Le plus souvent cette démarche d'extension reste purement mentale : elle ne donne pas lieu à des tracés complémentaires et explicatifs comme un changement local de la graduation des axes pour « agrandir » une partie du tracé. Dans cette démarche, comme dans la précédente, on s'en tient aux données du tracé et on ne prend pas en compte les variables visuelles pertinentes de la représentation graphique. De même, le traitement reste orienté vers la recherche de valeurs particulières sans que l'on ait à s'arrêter sur la forme de l'écriture algébrique.

La dernière démarche correspond au traitement qualitatif et global des propriétés des graphiques. L'ensemble *trace/axes* forme une image qui représente un objet décrit par une expression algébrique. Toute modification de cette image qui entraîne une modification dans l'écriture de l'expression algébrique correspondante détermine une variable visuelle

pertinente pour l'interprétation du graphique. Dans cette démarche (interprétation globale) la *conversion* exige que les unités signifiantes, propres à chaque registre, soient bien discriminées. Il est donc important d'identifier toutes les modifications pertinentes possibles de cette image, c'est-à-dire voir les modifications conjointes de l'image et de la forme de son écriture algébrique. Cela relève d'une analyse de congruence entre deux registres de représentation d'un objet ou d'une information. *Avec cette démarche nous ne sommes plus en présence de l'association « un point – un couple de nombres », mais de l'association « variable visuelle de représentation – unité significative de l'écriture algébrique »*. Lorsqu'il s'agit de partir de la représentation graphique pour trouver, par exemple, l'équation correspondante, ou pour utiliser le concept de pente ou de direction, c'est cette démarche d'interprétation globale qui devient nécessaire. Le recours à la démarche de pointage devient ici totalement inopérant puisque, par définition, il détourne l'attention de toutes les variables visuelles. La pratique systématique de la démarche de pointage ne peut donc pas favoriser la démarche d'interprétation globale.

3.3.2 Variables visuelles et unités symboliques significatives

Duval souligne que l'analyse de congruence exige la discrimination d'unités significatives propres à chaque registre de représentation, ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles requises pour changer de registre. Dans une expression algébrique chaque symbole correspond généralement à une unité significative. La discrimination des unités significatives¹⁶ propres à une expression algébrique est relativement évidente. En revanche, la discrimination des propriétés figurales d'une représentation graphique l'est moins. En reprenant certaines variables visuelles définies par Bertin (1977), Duval distingue :

- Deux variables visuelles générales.
 - L'implantation de la tâche, c'est-à-dire ce qui se détache comme figure sur fond : un *trait* ou une *zone* ;
 - La forme de la tâche : le trait tracé (qu'il délimite ou non une zone) est droit ou courbe. S'il est courbe il est ouvert ou fermé.
- Trois variables particulières relatives aux cas où le graphique est un tracé simple (droite ou parabole) : le *sens d'inclinaison* du tracé ; les *angles du tracé avec les axes* et la *position du tracé par rapport à l'origine de l'axe vertical*.

Les exemples mis en place par Duval justifiant ces démarches sont fournis spécialement pour le cas simple des fonctions à une variable. Toutefois, les problèmes de calcul de volumes par des *Intégrales Multiples* (IM) prennent en compte la notion de fonctions à deux variables et pose des questions nouvelles sur les *registres de représentation*, leurs *conversions* et leurs *coordinations*. Comment la conversion peut-elle être réalisée dans les cas de registres de représentation de solides ? Duval ayant souligné l'importance de la discrimination des variables visuelles pour l'interprétation des représentations graphiques. Comment peut-on

¹⁶ Il y a les symboles : relationnels (<, >, =, ...) ; d'opération ou de signe (+, -, ...) ; de variable ; d'exposant, de coefficient et de constante.

discriminer les variables visuelles pour la représentation graphique d'un solide délimité par des surfaces tridimensionnelles ?

3.3.3 Les registres de représentations dans l'enseignement du calcul des Intégrales Multiples

Les différents choix possibles pour l'enseignement du calcul des *Intégrales Multiples* comportent d'une part la présentation des concepts mathématiques par recours au discours formel, d'autre part un ensemble de situations susceptibles de servir d'exemples ou d'applications. A priori, la mise en place des exemples peut varier. Ils peuvent être exprimés sous la forme d'une :

Représentation graphique ; Représentation analytique ; Ecriture des expressions algébriques ; Ecriture de l'intégrale multiple.

Ces exemples peuvent aboutir au calcul de volumes soit par une intégrale triple soit par une intégrale double ou même par une intégrale simple (pour certains cas). Dans les trois cas, si le résultat est un nombre réel négatif, alors le calcul de l'intégrale est un volume algébrique.

Traditionnellement, si l'on a compris les concepts mathématiques, on ne considère pas que la manipulation de ces formes présente des difficultés propres ou que le passage de l'une à l'autre puisse ne pas aller de soi. Or, en suivant Duval, la compréhension du fonctionnement des représentations sémiotiques et principalement leurs conversions et leurs coordinations semblent être importantes dans l'enseignement du calcul de volumes par des *Intégrales Multiples*. Notre hypothèse est que, sans une compréhension du fonctionnement des représentations sémiotiques des solides, et principalement sans une maîtrise de leur conversion, il semble difficile de comprendre réellement le calcul des *Intégrales Multiples*, doubles et triples. Quel rôle jouent les représentations *graphiques* et *analytiques* des solides dans les calculs de volumes en utilisant les écritures algébriques $\int dx$, $\iint f(x,y)dA$ ou $\iiint dV$? Nous chercherons des réponses à cette question plus loin.

Pour pouvoir calculer le volume d'un solide par une intégrale triple « itérée », il faut arriver implicitement à une **représentation analytique** de la forme :

$Q = \{(x,y,z), a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n\}$ où les bornes d'au moins une variable sont nécessairement constantes, une s'exprime comme une fonction intégrable de la première, et l'autre comme une fonction des deux autres .

En reprenant la définition donné par Duval, nous pouvons dire que :

La lecture de la représentation graphique du solide Q suppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations des variables correspondantes de sa représentation analytique.

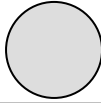
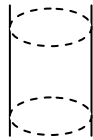
Les écritures des expressions algébriques ou des fonctions mises en jeu doivent offrir des moyens pour la *formation*, le *traitement* et la *conversion*. Elles sont des éléments caractéristiques dans les activités cognitives liées au *registre de représentation sémiotique* dans l'enseignement des IM. Lorsque les registres de représentation *graphique* et *analytique*

d'un solide aussi bien les écritures algébriques du calcul d'une intégrale ne sont pas vraiment coordonnés, le résultat du traitement du calcul de l'intégrale peut être confondu avec le volume effectif de ce solide. De plus, ce calcul peut produire une expression algébrique au lieu d'une valeur effective. Donc, la coordination de ces registres est un moyen de contrôle et de réfutation du calcul d'intégrale. Ainsi, il nous semble nécessaire de mieux spécifier les éléments de ces registres qui jouent un rôle dans la mise en place du calcul de l'intégrale.

A priori, une expression algébrique ou une fonction de deux variables, par exemple, peut elle-même susciter des difficultés et/ou des confusions lors du traitement de représentations. Une expression algébrique peut coexister en deux objets différents (dualités et/ou difficultés de représentation des objets dans l'espace).

A priori, il est plutôt facile de discriminer des variables visuelles sur les tracés dans l'espace 2D que sur les représentations graphiques en 3D. C'est pourquoi un étudiant peut ramener une situation de l'espace 3D dans l'espace 2D, à partir des techniques de projections orthogonales ou des plans de section. Pour illustrer cette remarque, voici par exemple, le cas lié à la dualité sur la représentation des objets *cercle* et *cylindre*.

Les difficultés ou confusions possibles suscitées par ces objets sont d'une certaine manière liées au fait que les deux objets mathématiques (*cercle* et *cylindre*) ont la même expression algébrique mais des représentations *graphique* et *analytique* différentes. Les écritures de calculs d'intégrales attachées sont donc différents et liés respectivement au calcul d'aire et du volume. Le tableau ci-dessous met bien en évidence les différentes caractéristiques de ces deux objets.

Expression algébrique	Représentation		Objet mathématique pouvant être ainsi représenté	Intégrale pouvant être ainsi calculée
	Analytique	Graphique		
$x^2 + y^2 \leq 1$	$L : \{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$		Cercle	$\int f(x)dx$ ou $\int f(y)dy$ ou encore $\iint dA$
$x^2 + y^2 \leq 1$	$C : \{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq 1, z \in \mathbb{R}\}$		Cylindre	$\iint f(x,y)dA$ ou $\iiint f(x,y,z)dV$

Ces représentations des deux objets différents, à partir d'une seule expression algébrique, révèlent les confusions possibles qu'un étudiant peut faire lors du traitement des calculs d'intégrales si les registres de représentation ne sont pas bien maîtrisés et coordonnés. Au contraire, s'ils le sont, et si les fonctions concernées sont positives sur leur domaine de définition, alors le registre analytique nous permet de mettre en place les différentes écritures possibles d'intégrales simples pour le calcul d'aire, de la région plane ainsi représentée, ainsi que les différentes écritures possibles d'*Intégrales Multiples* pour le calcul du volume du solide ainsi représenté.

3.3.4 Variables visuelles et unités significatives dans la représentation des solides

Comme le souligne Duval, l'analyse des congruences exige la discrimination des unités significatives propres à chaque registre de représentation, ainsi que l'examen des transformations implicites éventuelles requises pour changer de registre. Parmi les unités significatives propres à une expression algébrique, signalées par cet auteur, les symboles relationnels \leq , \geq et $=$ ont une particularité dans l'analyse des représentations de solides.

D'une part, les deux premiers symboles sont des ostensifs jouant un rôle dans la discrimination de la forme d'un solide Q (relative à leur convexité ou concavité, par rapport à la région de l'espace tridimensionnel occupée par l'ensemble des points qui les forment). D'autre part, ils jouent un rôle dans la lecture des représentations graphiques des solides. Ils sont ainsi des instruments participant de la description des solides. Cela veut dire que la représentation analytique d'un solide doit être exprimée en termes d'inéquations, parce que, cette représentation (cf. définition donnée plus haut) décrit la structure algébrique du volume de la partie de \mathbb{R}^3 (solide borné Q) comportant les bornes d'intégration. Donc, le mode de représentation des solides (bornés par des surfaces d'équations données) est lié aux pratiques institutionnelles pour le calcul d'*Intégrales Multiples*. Le troisième symbole participera ainsi à la description des surfaces qui peuvent éventuellement délimiter un solide. Donc, les solides doivent être exprimés par des inéquations et les surfaces par des équations.

Par exemple, l'expression $x^2 + y^2 \leq 1$ (avec z indifférent) exprime le solide infini centré de rayon 1. Alors que $x^2 + y^2 = 1$ est leur surface.

En prolongeant pour les objets de l'espace l'idée de variables visuelles considérées par Duval, nous distinguons :

- Deux variables visuelles générales relatives aux cas de la représentation graphique des surfaces/solides :
 - *L'implantation de la tâche, c'est-à-dire, ce qui se détache comme graphe dans l'espace : une surface ou un solide.*
 - *La forme de la tâche : la surface tracée, qu'elle délimite ou non un solide, est un plan ou une surface quelconque. Cette dernière est alors ouverte ou fermée. Si elle est ouverte, elle est concave ou convexe par rapport à la région de l'espace tridimensionnel occupé par l'ensemble des points qui forment le solide.*
- Plusieurs variables particulières :
 - *Position de la surface tracée par rapport aux plans canoniques (plans xOy , xOz , yOz).*
 - *Position de la hauteur d'un solide par rapport aux plans canoniques (plans xOy , xOz , yOz). Cette hauteur indique le repère de variation de la variable de l'intégrale la plus interne dans une intégrale triple, ainsi que le repère du volume sous une surface par rapport à la région d'intégration d'une intégrale double.*
 - *Positionnement des morceaux des surfaces (dans l'espace) délimitant un solide.*
 - *Positionnement des morceaux des sous-solides possibles d'un solide par symétrie.*

- Les « arêtes curvilignes ». L'intersection (deux à deux) de surfaces dans l'espace est une courbe (ou une droite). Si ces surfaces délimitent un solide, alors la réunion de ces courbes est une courbe fermée dans l'espace, en configurant la maquette du solide en le définissant par ses « arêtes curvilignes ». Ces dernières délimitent les morceaux des surfaces délimitant un solide.
- Echelle.

Ces variables jouent un rôle important dans l'interprétation des solides, ainsi que dans la coordination/conversion entre registres de représentation liés aux pratiques de calcul de volume par des *Intégrales Multiples*.

3.3.4 Complexités des représentations et des conversions lors du calcul des Intégrales Multiples

La conversion de la représentation d'un objet et sa transformation en une autre représentation relève d'un autre registre (Pavlopoulou, 1993, p. 74). Pour le calcul de volumes par des IM, on considère trois registres : *Graphique, Analytique, Algébrique d'écriture du calcul de l'intégrale définie*.

Cette dernière dépend de la bonne coordination des deux premiers. Comment discriminer les variables correspondantes entre ces registres ? Jouent-elles un rôle dans la compréhension conceptuelle de calculs des *Intégrales Multiples* ? Les règles pour effectuer une conversion entre ces registres peuvent être simples, mais le passage d'une représentation graphique d'un solide à sa représentation analytique et vice-versa, peut être une tâche difficile. Ce passage suppose que l'on ait bien discriminé les variables de chaque représentation. A priori la discrimination des variables visuelles (dans le registre graphique) à partir des techniques classiques de représentations dans l'environnement papier/crayon et leurs correspondances dans le registre analytique d'un solide semble être une tâche difficile pour un étudiant. Pourquoi ? Parce que souvent la représentation graphique dans l'espace tridimensionnel est difficile dans l'environnement papier/crayon. C'est pourquoi, l'environnement informatique, notamment *Maple*, peut être une aide indéniable. Il peut permettre, en tant qu'instrument, un contrôle sur les variables visuelles dans l'interprétation globale des propriétés figurales. La possibilité d'utiliser plusieurs registres et de savoir effectuer des conversions pour passer de d'un registre à l'autre, est peut-être plus délicate dans l'enseignement universitaire où les *Intégrales Multiples* sont enseignées. L'utilisation de l'environnement informatique dans cet enseignement peut favoriser l'apprenant dans une dialectique de contrôle et de pré-structuration de ses actions. Cette utilisation suppose néanmoins la prise en compte de la problématique de l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement universitaire. Cependant, comme le souligne Trouche (2003) cette prise en compte suscite l'émergence de nouvelles approches théoriques. Ainsi, comme nous l'avons souligné dans l'introduction de ce chapitre, nous nous intéresserons aux travaux de chercheurs en ergonomie cognitive pour l'apprentissage de l'usage des outils technologiques et l'approche anthropologique du didactique (TAD) présentés auparavant. Dans ce qui suit, nous énonçons les questions de recherche, que nous nous posons dans le contexte de ces cadres.

4. QUESTIONS DE RECHERCHE

Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction, notre recherche porte sur l'enseignement et l'apprentissage des *Intégrales Multiples* dans l'enseignement supérieur, et plus particulièrement à leur utilisation pour le calcul de volume. Dans ce contexte, nous portons une attention particulière aux interactions possibles entre la *représentation analytique* et la *représentation graphique* des solides dans une tâche de calcul de volume par des *Intégrales Multiples* (éventuellement en utilisant le logiciel **Maple**). Pour réaliser cette étude et nos observations, nous nous plaçons dans l'institution des classes préparatoires technologiques aux grandes (CPGE) en France.

Nous étudierons dans cette institution « l'objet de savoir » *Intégrales Multiples* dans sa fonction sur les calculs de volumes. Comme nous l'avons vu précédemment, les tâches proposées aux étudiants, les techniques disponibles pour les résoudre et leurs justifications technologico-théoriques dépendent d'un ensemble de données relatives à l'institution dans laquelle l'enseignement prend place. De plus, analyser l'écologie d'un objet mathématique dans une institution, comprendre sa signification pour cette institution, c'est identifier l'organisation mathématique qui met cet objet en jeu. Ainsi, nous nous proposons d'étudier, dans le cadre de la TAD, l'organisation mathématique relative aux IM. Cette étude devrait nous permettre de répondre à une première question de recherche :

- Q1.** Quelle est l'organisation mathématique relative au calcul des *IM* dans les institutions d'enseignement supérieur brésiliennes et dans les classes prépas technologiques en France ?

Les notions d'organisation praxéologique et de rapport institutionnel offrent, à partir d'une étude écologique des programmes et des manuels, les outils pour rechercher les réponses à ce type de questions. Cette question doit être complétée par d'autres questions plus en rapport avec les environnements informatiques (et plus spécifiquement le logiciel **Maple**). En effet, les programmes de cette institution introduisent l'utilisation des environnements informatiques contemporains dans l'enseignement et en particulier le logiciel **Maple**. Ce logiciel est reconnu institutionnellement, il fait partie de l'enseignement (en informatique, en mathématiques et en physique...). Il émerge dans cette institution les techniques d'utilisation de nouveaux outils (avec **Maple**). Or, comme le souligne Lagrange (2000, p.41) « *pour que les techniques [instrumentées] prennent du sens, il faudrait construire les praxéologies dans lesquelles ces techniques pourraient s'insérer et prendre une signification mathématique* ». Prendre en compte le rôle de l'environnement informatique, notamment **Maple**, dans l'institution, soulève les questions suivantes :

- Q2.** Quel est le rapport institutionnel à l'instrument **Maple** dans ces institutions ? Quelles sont les pratiques qui émergent de ces institutions sur les *IM* en rapport avec **Maple** ? Quelles contraintes ces institutions imposent-elles, quelles conditions offrent-elles à l'enseignement du calcul des *IM* avec **Maple** ?

Nous allons ainsi regarder le rapport institutionnel à l'instrument – **Maple** – (en nous appuyant sur les textes officiels : les programmes et les manuels). Cette étude nous permettra

de voir en quoi l'organisation mathématique sur les IM intègre l'aspect instrumental du logiciel *Maple* (en sachant qu'il existe le rapport institutionnel à l'instrument « *Maple* »), et en quoi cela modifie l'organisation mathématique autour des IM.

Une troisième question, qui nous intéresse et qui est plus au moins directement liée aux deux premières, fait plus particulièrement référence à la notion de registre de représentation sémiotique. Comme nous l'avons souligné auparavant, nous faisons appel à cette approche car, en faisant le calcul des volumes, on travaille sur les solides. Ces derniers sont représentables par plusieurs registres, en particuliers les registres graphique et analytique. Du point de vue mathématique, on met bien en évidence que les deux registres vont interagir dans les pratiques institutionnelles sur les calculs des volumes. Ainsi, nous voulons, précisément savoir :

- Q3.** Comment les représentations analytiques et graphiques des solides sont-elles présentées dans l'organisation mathématique dégagée plus haut ? Comment interagissent les deux types de représentation dans les pratiques de calcul de volumes par des *Intégrales Multiples* ?

L'analyse d'outils du logiciel *Maple* nous permettra de mieux comprendre comment ces outils peuvent contribuer à l'étude des interactions possibles entre les *représentations graphique* et *analytique* des *solides* dans une tâche du calcul de volume. Nous tenterons de nous appuyer sur les trois cadres dont, les aspects ostensifs et non-ostensifs des objets mathématiques, leurs sémiologies, ainsi que les aspects instrumentaux autour de ces objets jouant des rôles importants. Cette étude nous permettra, également, d'identifier les potentialités, les contraintes sur les actions et les transformations voulues par l'utilisateur de *Maple* sur les objets mathématiques, ainsi que l'organisation des objets qui conduisent au calcul de volume par des IM. Pour mener l'analyse de ces contraintes, nous prendrons en compte la typologie considérée par Trouche (2000), que nous avons présentée plus haut. Les questions suivantes se posent dans le cadre de l'approche cognitive des instruments :

- Q4.** Quels sont les outils disponibles dans l'environnement informatique *Maple* concernant :
- (a) la géométrie analytique dans l'espace (GAE)¹⁷ ?
 - (b) le calcul des *Intégrales Multiples* ?
 - (c) les interactions entre (a) et (b) ?
- Q5.** Comment à travers l'utilisation de ces outils, sont modifiées les techniques de résolution de certaines tâches ?
- Q6.** Comment les étudiants s'approprient ces outils dans une tâche de calcul de volume par des *Intégrales Multiples* ?

En nous appuyant aussi sur le travail de Lagrange (2000), nous allons, au fur et à mesure, étudier le rapport entre les objets manipulés par *Maple* et les objets ostensifs et non-ostensifs des pratiques mathématiques sur la GAE et les *IM*. La co-existence des trois approches, dans notre travail, nous donne des outils pour rechercher les réponses à toutes ces questions. Nous allons maintenant présenter le plan d'étude que nous avons suivi pour répondre à ces ensembles de questions.

¹⁷ A la fois sur la représentation analytique et graphique – soit par des fonctions de deux variables, soit par des équations paramétriques.

5. DES QUESTIONS DE RECHERCHE AU PLAN D'ETUDE

Nous avons fait jusqu'à présent une présentation très générale des choix théoriques en partant des questions initiales de notre recherche. Il s'agit maintenant de rentrer dans le détail de l'étude en présentant le plan du travail que nous avons suivi.

Pour mener notre recherche dans ce domaine, nous avons découpé notre étude en quatre grandes parties :

- **une analyse institutionnelle de l'enseignement des IM (Chapitre B) ;**
- **une analyse des pratiques des étudiants et des enseignants sur les *Intégrales Multiples* : pré-expérimentation (Chapitre C) ;**
- **une étude de l'environnement informatique *Maple* (Chapitre D) ;**
- **les expérimentations sans et avec *Maple* (Chapitre E).**

L'analyse institutionnelle permet d'identifier les conditions et les contraintes pesant sur l'organisation mathématique de l'objet d'enseignement, le rapport institutionnel à *Maple*, les pratiques qui émergent dans l'institution avec cet instrument. La pré-expérimentation permet une première investigation sur l'enseignement visé et les difficultés des étudiants. Elle s'est faite dans l'optique d'une observation locale des pratiques des étudiants, mais aussi dans une moindre mesure des enseignants sur l'utilité d'une intégrale multiple pour le calcul du volume (et d'autres grandeurs physiques comme la masse et le moment d'inertie). L'étude de l'environnement informatique *Maple* permet d'identifier les outils disponibles, leurs utilisations et leurs contraintes relatives à l'enseignement visé. Cette étude nous permet de recenser les objets manipulés par cet environnement en rapport aux objets ostensifs et non-ostensifs du travail mathématiques autour des *IM*. Cela nous permet de construire et d'analyser des techniques instrumentées. Enfin, l'expérimentation nous permet, sur un exemple de calcul de volume, d'analyser le travail des étudiants, d'abord dans un environnement papier-crayon puis avec l'appui de *Maple*.

5.1 Chapitre B : Analyse institutionnelle

Comme nous l'avons mentionné précédemment, il s'agit ici de mener une analyse institutionnelle de l'apprentissage du calcul des *IM* en nous plaçant dans le cadre de la TAD. Cette étude se découpe en trois parties qui décrivent et analysent l'ensemble de contraintes et de conditions institutionnelles autour des *IM* en utilisant ou non le logiciel *Maple*.

5.1.1 Partie B1 : Analyse d'un manuel de référence

Avant d'entamer l'analyse institutionnelle proprement dite, nous présentons ici une analyse de type épistémologique donnant une organisation de référence, intermédiaire entre le savoir savant et le savoir enseigné sur les *Intégrales Multiples* et leurs rapports avec la question du calcul des *aires* et des *volumes*.

5.1.2 Partie B2 : Analyse des programmes de l'UESC depuis 1999 et des CPGE depuis 2004 Quelles niches pour les Intégrales Multiples ?

Cette partie a pour objectif principal de mettre en évidence le choix fait par l'institution lors de l'introduction de la notion des *Intégrales Multiples* d'un côté en spécialités « Bacharelado et Licenciatura » dans l'institution UESC depuis 1999 (au Brésil) et d'autre côté en spécialités mathématique de CPGE-Technologique depuis 2004 (en France), afin de décrire et d'analyser le rapport institutionnel actuel aux *IM*. Le questionnement écologique développé ici permet d'analyser les conditions d'introduction des *IM* en termes de niches. Autrement dit, d'analyser les diverses fonctions que les *IM* peuvent occuper dans l'ensemble de l'enseignement dans ces institutions.

5.1.3 Partie B3 : Analyse des manuels d'enseignement des IM Quelle est l'organisation mathématique relative aux Intégrales Multiples ?

Comme nous l'avons déjà souligné, nous allons regarder « l'objet de savoir » *Intégrales Multiples* dans sa fonction sur les calculs de volumes. Les tâches proposées aux étudiants, les techniques disponibles pour les résoudre et leurs justifications technologico-théoriques dépendent d'un ensemble de données relatives à l'institution dans laquelle l'enseignement prend place. Aussi, analyser l'écologie d'un objet mathématique dans une institution, comprendre sa signification pour cette institution, c'est identifier l'organisation mathématique qui met cet objet en jeu. Dans cette partie nous allons étudier l'organisation mathématique relative aux *IM* en utilisant la hiérarchie des niveaux de co-détermination didactique dans le cadre de la TAD. Le choix fait par l'institution, lors de l'introduction d'objet de savoir dans l'enseignement, est en quelque sorte lié à la production de ce savoir dans les manuels de l'analyse mathématique appartenant à la sphère savante. L'institution a donc un espace de liberté pour faire ses choix à l'aide des connaissances mathématiques. Mais nous pouvons nous interroger sur « l'écart » entre les *IM* enseignées (proposées dans les programmes) et les textes du savoir présents dans les manuels. Les niches occupées par les *IM* dans les programmes sont-elles les mêmes que celles qu'elles occupent dans les manuels ? Quelle est la place des problèmes de représentations graphique et analytique ? Comment ces représentations sont-elles présentées dans l'organisation mathématique ? Et comment interagissent-elles dans les pratiques de calcul de volumes par des *IM* ?

5.2 Chapitre C : Pré-expérimentation

Il s'agit d'un dispositif exploratoire constitué d'un **test** et d'un **questionnaire** pour une analyse de l'enseignement des *Intégrales Multiples*. Il ne s'agit pas d'avoir des informations de type statistique sur les capacités des interrogés, mais plutôt de faire une observation locale des pratiques des étudiants et des enseignants. Nous souhaitons interroger, d'une part les enseignants et d'autre part, des étudiants pour avoir une idée des difficultés éventuelles qu'ils

rencontrent et les pratiques qu'ils ont sur les *Intégrales Multiples* dans l'Enseignement Universitaire Brésilien. Cette étude se découpe en deux parties : l'analyse a priori et l'analyse a posteriori du dispositif exploratoire mis en place.

5.2.1 Partie C1 : Analyse a priori

Comme pour la plupart des recherches en didactique des mathématiques, l'observation des faits et leur analyse se construit dans le cadre d'une analyse a priori d'activités de classe (les tâches de l'institution). « Cette analyse doit mettre en évidence divers phénomènes qui peuvent se produire, en particulier dégager les grandes classes de procédures de résolution et les conditions qui les engendrent par l'étude de variables de la situation (Bessot & Comiti, 1985, p. 312) ». Dans cette partie nous présentons l'analyse a priori de notre pré-expérimentation découpée en deux parties. La première porte sur un seul exercice que nous nommons **exercice unique**, destiné aux étudiants débutants¹⁸. Le deuxième porte sur **quatre exercices** plus au moins difficiles et typiques des calculs de volumes par des *IM*, destinés aux étudiants avancés¹⁹ et soumis à l'avis des enseignants. Notre objectif est donc de proposer aux étudiants, des exercices issus de l'organisation mathématique des *IM*, afin de tester l'usage possible : de dessin (représentation graphique) ; de l'interprétation géométrique (visualisation) ; de l'interprétation analytique sans faire appel au dessin dans un exercice de calcul de volume par des *Intégrales Multiples*. Nous avons ainsi distingué trois stratégies possibles communes à tous les types d'exercices : interprétation analytique du solide ; interprétation géométrique du solide et représentation graphique du solide.

5.2.2 Partie C2 : Analyse a posteriori – les productions effectives des étudiants leurs opinions et celles des enseignants

Dans cette partie nous analysons comment les étudiants résolvent les exercices proposés dans le test. Quel est leur degré de difficulté ou de facilité dans la mise en œuvre effective du calcul de l'intégrale ? Quelles techniques de résolutions choisissent-ils ? Afin d'enrichir les analyses des productions des étudiants, nous construisons également un questionnaire auquel nous leur demandons de répondre après la résolution des exercices. Ces exercices sont aussi soumis à l'avis des enseignants pour servir comme éléments d'appui à notre questionnaire. Nous présentons aussi les opinions de certains enseignants de mathématiques.

5.3 Chapitre D : L'environnement informatique Maple

Ce chapitre se découpe en deux parties.

5.3.1 Partie D1 : Etude du logiciel Maple

Il s'agit ici d'identifier les potentialités, mais aussi les contraintes, de l'environnement *Maple* pour outiller les techniques de résolution des tâches sur le calcul d'aire et de volumes par des

¹⁸ Étudiants dans les premières semaines de cours des *IM*.

¹⁹ Étudiants qui avaient suivi les séances des *IM* un semestre avant.

IM, selon les analyses de manuels que nous avons effectuées. Nous examinerons en détail les outils disponibles par rapport à la notion de fonction de plusieurs variables réelles, et leur représentation graphique dans l'espace, et ceux disponibles par rapport au calcul des *IM*. Ensuite nous réalisons une étude des processus qu'un utilisateur peut mettre en œuvre lors de la résolution d'un problème. Pour cela, nous prendrons comme point de référence un problème simple de calcul de volume par des *IM* repéré dans un manuel étudié dans le chapitre B. Nous utilisons ce problème pour construire la technique instrumentée que nous appellerons **crible géométrique**, dont l'objectif explicite est l'aide à l'apprentissage de techniques possibles pour la représentation graphique des solides décrits comme intersection des plusieurs solides, et pour mettre en évidence la façon dont interviennent les contraintes informatiques, d'une part dans la gestion de la coordination entre la représentation analytique et graphique, et d'autre part dans la mise en place du calcul de volume par des *IM*. Puis, nous examinerons les interactions possibles entre l'utilisateur et la machine, dans l'organisation et la mise en œuvre des sous-tâches permettant le calcul d'un volume par des *IM*. Nous finalisons cette partie en mettant en place un modèle, que nous appelons *MATIM* qui lie l'analyse de la résolution d'un problème de calcul de volume par des *IM* à celle de la représentation graphique du solide associé. Il s'agit de mettre en évidence la multiplicité des sous tâches possibles dans un problème de calcul de volume par des *IM* et de repérer les choix réalisables par un étudiant.

5.3.2 Partie D2 : Analyse des manuels d'utilisation du logiciel *Maple*. Quelle est l'organisation mathématique relative aux Intégrales Multiples ?

L'environnement informatique *Maple* est installé dans les CPGE et donc reconnu institutionnellement. Ainsi cette partie s'interroge : sur la rencontre des IM et de *Maple* dans cette institution ; sur l'existence des manuels de cet environnement à propos de l'enseignement des IM ; sur les pratiques qui émergent dans l'institution autour des IM en rapport avec ce logiciel et plus précisément sur les techniques instrumentées et leur enseignement. Nous pouvons aussi nous interroger sur ce qu'apportent ces manuels par rapport à l'organisation mathématique étudiée dans le chapitre B.

5.4 Chapitre E : Expérimentations sans et avec *Maple*

De notre analyse institutionnelle, nous avons dégagé une tâche emblématique de l'institution concernant les IM. Emblématique par le fait d'être une tâche présente dans quasiment tous les manuels que nous avons étudiés. De plus, elle utilise des techniques ou méthodes possibles pour le traitement d'un grand nombre des types de tâches autour des IM, tant dans l'environnement papier/crayon qu'en utilisant l'environnement *Maple*. Le fait de s'intéresser à l'utilisation des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques dans son ensemble, et plus particulièrement les IM, conduit à s'interroger sur les techniques instrumentées (leur enseignement et leur apprentissage) au sein de l'institution. Ce chapitre se découpe en deux parties qui décrivent et analysent (a priori et a posteriori) l'ensemble de contraintes et de conditions de genèse instrumentale qui interviennent dans les pratiques des

étudiants devant utiliser ou pas le logiciel *Maple*.

5.4.1 Partie E1 : Analyse des pratiques des étudiants dans l'environnement papier/crayon

Dans cette partie nous présentons l'analyse a priori du problème de l'intersection de deux cylindres visant leur réalisation possible par des techniques habituelles de l'environnement papier/crayon. Pour mettre en évidence le rapport institutionnel aux IM, nous analysons postérieurement comment les étudiants résolvent cette tâche de calcul de volume en utilisant une intégrale multiple dont la sous-tâche importante consiste à obtenir une représentation analytique ad hoc pour le traitement du problème. Quel degré de difficultés ou de facilités de mise en œuvre effective de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale rencontrent les étudiants ? Quelles techniques de résolutions choisissent-ils ?

5.4.2 Partie E2 : Analyse des pratiques des étudiants dans l'environnement informatique *Maple*

Dans cette partie nous présentons l'analyse a priori, du même problème, étudié dans la partie E1. Elle fournit un découpage permettant la construction de la séquence didactique proposée aux étudiants, et met en évidence les genèses instrumentales qui peuvent se construire selon les techniques de résolution, les stratégies observables, la réduction des faits à observer lors de l'expérimentation et la généralisation du problème. Comme dans la partie précédente, les buts visés ici sont de voir comment les étudiants vont résoudre cette tâche de calcul de volume en utilisant une intégrale multiple dont les sous-tâches importantes consistent à obtenir des représentations, graphique et analytique, adéquates du solide en jeu, en utilisant le logiciel *Maple*, et dans quelle mesure *Maple* peut fournir des rétroactions efficaces aux étudiants. Quel degré de difficulté ou facilité de mise en œuvre effective pour un étudiant dans l'utilisation de ce logiciel ? Quelles techniques de résolution pour les étudiants ? Comment les deux types de représentations graphique et analytique se coordonnent dans les pratiques des étudiants lors du calcul de l'intégrale ? Se servent-ils des deux représentations ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ?

Les analyses des protocoles que nous présentons, tant dans cette partie, que dans celle qui précède ont pour objectif principal de dégager, respectivement, les techniques de l'environnement papier/crayon et les techniques instrumentées mise en œuvre par les étudiants. La confrontation des deux analyses (E1 et E2) nous permet de comparer les deux types d'enseignement en mettant l'accent sur les difficultés et les facilités pour l'apprentissage des étudiants dans cet enseignement.

CHAPITRE

B

ANALYSE INSTITUTIONNELLE

CHAPITRE B

ANALYSE INSTITUTIONNELLE

L'analyse institutionnelle permet d'identifier les conditions et les contraintes qui déterminent dans l'institution l'organisation mathématique de l'objet d'enseignement. Elle passe par l'étude des pratiques relatives à cet objet qui émergent dans l'institution.

L'analyse d'un programme, produit de la noosphère, permet d'identifier le contour du rapport institutionnel à l'objet de savoir à enseigner. Lorsqu'un enseignant construit le texte du savoir, une des références premières est constituée par les programmes régissant l'institution dans laquelle s'inscrit son projet d'enseignement, même si les assujettissements à d'autres institutions jouent de façon plus ou moins souterraine dans l'élaboration de son travail. Les programmes mettent en évidence ce que l'enseignant est tenu de faire selon les choix fait par l'institution.

Une analyse écologique du « texte de savoir » est essentielle, elle se fait à travers les manuels et œuvres de référence. Elle permet de poser des questions sur la place de l'objet de savoir à enseigner, afin de mettre en évidence leurs habitats et leurs niches écologiques. Dans notre travail, l'objet de savoir est les *Intégrales Multiples* (IM) et nous l'étudierons essentiellement dans les deux institutions d'enseignement supérieures, une université brésilienne (UESC) et les classes préparatoires aux grandes écoles françaises (CPGE).

En nous appuyant sur l'approche écologique, développée par Chevallard (1994), on peut se demander par exemple : quels sont les habitats ou les différents lieux de vie pour les IM ? Quelles sont dans ces habitats les niches occupées par les IM ? Quels sont les types de tâches institutionnalisés ?

Pour mener cette analyse institutionnelle nous cherchons à disposer d'une organisation de référence, intermédiaire entre le savoir savant et le savoir enseigné, sur les *Intégrales Multiples* et leurs rapports avec la question du calcul des *aires* et des *volumes*.

Nous trouvons une telle organisation dans le livre :

Equations différentielles, Intégrales Multiples de J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudès : Cours de mathématiques, Tome 4, 2^e édition. Bordas, Paris, 1977.

Ce livre qui date de la fin des années soixante-dix, en plein essor de la réforme des mathématiques modernes, était destiné en France tout à la fois aux étudiants des classes préparatoires et à ceux des universités. Les exigences portées dans ce contexte pour ce double public font que ce livre peut être considéré comme un manuel de référence pour un savoir par ailleurs peu présent dans les enseignements de mathématiques. Dans l'avant-propos du tome 4, les auteurs annoncent :

La théorie des *IM* proprement dite ne figure pas explicitement au programme des Classes

Préparatoires, et le calcul de ces intégrales y est envisagé d'un point de vue essentiellement pratique. Mais on ne peut pas calculer une intégrale sans savoir ce qu'elle représente, et sans savoir quels sont les ensembles que l'on peut négliger dans ce calcul. Aussi avons-nous d'abord donné un bref exposé de la théorie de l'intégrale de Riemann en insistant surtout sur les notions de mesure et d'ensemble négligeable.

Il va sans dire que l'enseignement que nous observerons dans la suite (que ce soit en France dans les classes préparatoires technologiques et encore plus au Brésil) se place à un niveau mathématique beaucoup plus modeste sur le plan théorique et vise essentiellement à outiller des techniques « pratiques » pour un ensemble de tâches relativement restreint. L'objet de l'analyse de ce manuel de référence est d'offrir un cadre épistémologique à l'analyse institutionnelle en montrant qu'il existe au niveau du savoir savant d'autres approches des *Intégrales Multiples*.

PARTIE B1

ANALYSE D'UN MANUEL DE REFERENCE

Les contenus portant sur les *Intégrales Multiples* s'organisent en deux chapitres :

- Intégrales Multiples - Définitions - Propriétés générales (Chapitre IV)
- Calcul des Intégrales Multiples (Chapitre V)

Le point de vue des auteurs consiste à donner une construction rigoureuse de la notion des *Intégrales Multiples*, qu'ils lient à celle de mesure, qui se construit conjointement (c'est l'objet essentiel du premier chapitre). Le deuxième chapitre permet à partir de cet appui théorique de déduire des théorèmes visant à outiller des techniques de calcul des *Intégrales Multiples* et à présenter des exemples concrets de calculs des *Intégrales Multiples* dans divers contextes. Mais ces exemples jouent ici essentiellement un rôle générique. Ainsi, même si la visée de ce second chapitre est plus appliquée, il reste essentiellement théorique.

1. Intégrales multiples – Définitions - Propriétés générales

En préambule nous reproduisons ci-dessous l'intégralité de l'introduction des auteurs aux deux chapitres sur les *Intégrales Multiples*, qui éclaire ce que nous venons de dire et donne le plan d'étude sur lequel repose l'organisation mathématique mise en place et se passe de commentaires.

Pour ne pas brûler les étapes, nous nous sommes bornés, dans le tome 2, à la théorie de l'intégrale simple (intégrale d'une fonction définie sur un intervalle de \mathbf{R}). En fait nous allons voir que cette théorie s'étend, sans grande difficulté, aux fonctions définies sur un *pavé* de \mathbf{R}^n : pour $n \geq 2$, l'intégrale ainsi obtenue sera dite *multiple*, afin de rappeler qu'il s'agit de fonctions de plusieurs variables numériques.

Par la suite nous verrons qu'il est nécessaire d'étendre la théorie de l'intégration à des fonctions définies sur des parties de \mathbf{R}^n plus générales que les « pavés ». Nous commencerons par les cas de fonctions *bornées* définies sur des ensembles non *bornés* de \mathbf{R}^n . Les cas des fonctions non bornées ou définies sur des ensembles non bornés conduit à une notion d'« intégrale généralisée » analogue à celle que nous avons rencontrée dans la théorie des intégrales simples.

Un point important de la théorie des *Intégrales Multiples* consiste à montrer qu'une telle intégrale

se ramène à des intégrales simples superposées : ce résultat permet des calculs effectifs, et fera l'objet du chapitre V.

Au cours de cet exposé, nous n'oublions pas que l'intégration est étroitement liée à la notion de *mesure* d'un ensemble : en fait, nous commencerons par définir la *mesure* d'une classe élémentaire de parties de \mathbf{R}^n appelées *pavés*, et généralisant les intervalles de \mathbf{R} : cela nous permettra de définir l'intégrale des fonctions dites en *escalier*. Nous définirons ensuite l'intégrale d'une classe de fonctions beaucoup plus générales, dites *intégrales au sens de Riemann*, et les approchant par des fonctions en *escalier*, et nous reviendrons enfin à la notion de *mesure* d'un ensemble : nous pourrons alors donner une définition correcte de *l'aire* de certains ensembles plans, et du *volume* de certaines parties de \mathbf{R}^3 .

La notion première est celle de *pavé* défini de la façon suivante :

Dans \mathbf{R}^n , on appelle **pavé fermé** tout ensemble P défini par n inégalités de la forme

$$(1) \quad a_i \leq x_i \leq b_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

où les a_i et b_i désignent des nombres réels donnés vérifiant $a_i \leq b_i$ pour tout $i=1, 2, \dots, n$.

Pour $n=1$, on a un intervalle compact de \mathbf{R} ; pour $n=2$ un rectangle ; et, pour $n=3$, un parallélépipède étant parallèles aux axes.

Après avoir précisé que les pavés sont des rectangles pur $n=2$ et des parallélépipèdes pour $n=3$, les auteurs donnent la définition et le moyen de calculer la mesure d'un pavé :

Soit P le pavé de \mathbf{R}^n défini par les inégalités de (1). Les n nombres positifs $b_i - a_i$ sont les **longueurs des arêtes** de P ; et leurs produit

$$m(P) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

est appelé la **mesure** (sous-entendu : ***n*-dimensionnelle**) de P .

La mesure de P est nulle si, et seulement si, l'intérieur de P est vide.

Les notions de *pavé* et de la *mesure* permettent aux auteurs d'introduire l'intégrale des fonctions dites en *escalier*. Cette introduction passe par la définition de *subdivisions* d'un pavé fermé d'intérieur non vide que les auteurs appelleront *cellule* en mettant aussi en évidence l'idée d'*hyperplans des subdivisions*.

Ils définissent alors *l'intégrale d'une fonction en escalier*. On trouve le résultat suivant :

Soit f une fonction vectorielle, en escalier sur un pavé P de \mathbf{R}^n d'intérieur non vide ; et soit δ une subdivision de P telle que f soit constante à l'intérieur de chaque cellule de δ . Désignons par P_1, P_2, \dots, P_N les cellules de δ et par f_α ($\alpha = 1, 2, \dots, N$) la valeur constante de f sur le pavé ouvert P_α . Alors le vecteur

$$I(f, \delta) = \sum_{\alpha=1}^N m(P_\alpha) f_\alpha$$

ne dépend que de f , et non de la subdivision choisie δ .

Le vecteur $I(f, \delta)$ est appelé **l'intégrale** de f sur P , et est noté

$$\int_P f(x) dx.$$

La notation $\int_P f$ simplifiée est également présente, mais (comme le précisent les auteurs) elle n'est utilisée que dans les questions d'ordre théorique et représente une **intégrale** de la façon générale.

A noter qu'aucun exemple ne suit cette définition. Suivent les propriétés essentielles des

intégrales de fonctions en escalier, que nous résumons dans le tableau ci-dessous.

Propriétés		
IV.2.2	Addition par rapport aux ensembles	$\int_P f(x)dx = \sum_{\alpha=1}^N \int_{P_\alpha} f(x)dx$
IV.2.3	Linéarité par rapport aux fonctions	$\int_P [\lambda f(x) + \mu g(x)]dx = \lambda \int_P f(x)dx + \mu \int_P g(x)dx$
IV.2.4	Croissance	$\int_P f(x)dx \geq \int_P g(x)dx$
IV.2.5	Majoration	$\left\ \int_P f(x)dx \right\ \leq \int_P \ f(x)\ dx$

Une seule propriété (IV.2.3) est démontrée, mais c'est que les auteurs les ont considérées comme suffisamment simples pour que les étudiants les démontrent seuls. Ces propriétés vont permettre la construction de l'intégrale des fonctions plus générales définies sur un *pavé* de \mathbf{R}^n .

Une telle intégrale se définit par la proximité avec des fonctions en escalier :

Soit $f: P \rightarrow E$ une fonction \mathcal{R} -intégrable sur le pavé P de \mathbf{R}^n ; et, pour chaque $p \in \mathbf{N}$, soient $\varphi_p: P \rightarrow E$ et $\theta_p: P \rightarrow \mathcal{R}$ deux fonctions en escalier vérifiant :

(i) $\forall (x \in P) \quad \|f(x) - \varphi_p(x)\| \leq \theta_p(x)$

(ii) $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_P \theta_p(x)dx = 0$

Alors la suite $\int_P \varphi_p(x)dx$ est de Cauchy, donc **convergente** puisque E est supposé complet ; et sa limite ne dépend que de la fonction f .

On le voit cette définition fort rigoureuse a l'inconvénient de n'être pas du tout constructive. Les auteurs la complètent par une propriété qui permet de voir l'intégrale comme la limite d'une suite d'intégrales de fonctions en escalier, grâce au critère de *Cauchy*, possible par le fait que E est considéré comme complet.

Les auteurs donnent ensuite la définition des fonctions réglées, comme premier exemple de fonctions intégrables. Puis ils démontrent que les fonctions continues sont réglées donc intégrales sur des pavés. Ils généralisent ensuite ce résultat au cas où la fonction continue est définie sur un ensemble quelconque borné en la prolongeant par 0 sur un pavé. Puis ils passent à la notion de support compact. Ceci leur permet de définir ce qu'est un ensemble *quarrable*.

Une partie bornée A de \mathbf{R}^n est dite **quarrable** si la fonction caractéristique est intégrable ; et, dans ce cas, le nombre

$$m(A) = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_A(x)dx = \int_A dx$$

est appelé la **mesure** de A .

Pour $n=2$ cette mesure est appelé **aire** ; pour $n=3$ elle est appelé **volume**. Elle coïncide en effet avec la notion intuitive d'aire ou de volume pour les ensembles élémentaires de \mathbf{R}^2 ou de \mathbf{R}^3 , munis de leur structure euclidienne canonique.

Aucun exemple ne suit cette définition.

On voit donc que dans cette construction théorique, en partant de la notion géométrique de mesure d'un *pavé*, puis en utilisant les fonctions en escalier, on débouche sur la notion

d'intégrabilité d'une fonction quelconque sur un domaine borné et enfin de mesure d'un domaine quarrable via la notion de fonction caractéristique. Dans cette organisation qui a besoin d'un fort outillage topologique la notion de *mesure* des ensembles bornés est donc consubstantielle de la notion d'*intégrale*.

A ce niveau de l'exposé, la question est réglée, mais elle reste très théorique. On ne sait pas trop ce que sont les ensembles quarrables et les définitions nous laissent très démunis pour calculer effectivement les mesures de tels ensembles.

Les auteurs s'intéressent donc d'abord aux conditions d'intégrabilité. Cette question s'outille de la notion d'ensemble \mathcal{R} -négligeable, défini comme pouvant être recouvert par des pavés de *mesure* arbitrairement petite. Ceci permet de donner deux conditions suffisantes pour qu'une fonction soit \mathcal{R} -intégrable :

- à support compact continue sauf sur un ensemble \mathcal{R} -négligeable
- continue sur un domaine dont la frontière est \mathcal{R} -négligeable.

Il n'y a pas de condition nécessaire.

Suivent les démonstrations des propriétés de l'intégrale qui reprennent celles démontrées plus haut pour les fonctions en escalier, plus des propriétés plus spécifiques sur les limites uniformes en particulier. Nous ne rentrerons pas dans les détails de celles-ci, car elles jouent essentiellement un rôle pour outiller les démonstrations à venir.

Le paragraphe qui suit permet de donner une approche plus intuitive de la notion de domaines *quarrables* et de leur *mesure*, par une interprétation géométrique. Les auteurs utilisent la notion de domaine pavable (introduite plus haut) c'est-à-dire de réunion de pavés.

Ce paragraphe débouche sur le théorème essentiel :

|| Toute fonction vectorielle **continue et bornée** sur une partie **quarrable** de \mathbf{R}^n , et à valeurs dans un *e.v.n* complet, est intégrable.

Le paragraphe 8 est consacré aux propriétés de la mesure qui découlent de celles de l'intégrale, démontrées plus haut. Les auteurs y examinent la notion d'ensemble \mathcal{R} -négligeable, en donnant des exemples. Ils donnent aussi des résultats pratiques, qui permettent de voir que les ensembles bornés dont la frontière est une réunion finie d'hypersurfaces de classe C^1 sont quarrables. C'est en effet pratique dans la mesure où cela recouvre une grande quantité de domaines bornés.

Les auteurs étudient aussi de façon rigoureuse l'effet d'une translation, d'une homothétie et d'une isométrie sur la mesure, ce qui permet de voir que les notions de mesure et d'intégrale ne dépendent pas du choix du repère.

Enfin les paragraphes 8 et 9 présentent les résultats essentiels sur les sommes de *Riemann*, puis de *Darboux*, qui donnent une approche plus intuitive et plus constructive de la notion d'intégrale. Ils énoncent ainsi un théorème important, dont ils précisent que de nombreux

auteurs le donnent comme définition de l'intégrale simple ou multiple :

Soit f une fonction **numérique** bornée définie sur un pavé P de \mathbf{R}^n ; et, pour chaque subdivision $\sigma=(P_\alpha)$ de P , désignons par m_α M_α les bornes inférieure et supérieure de f sur P_α . Posons ⁽²⁰⁾ :

$$S_+(\sigma, f) = \sum_{\alpha} M_{\alpha} m(P_{\alpha}) ; S_-(\sigma, f) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} m(P_{\alpha})$$

Pour que f soit intégrable sur P , il faut et il suffit que la borne inférieure des sommes $S_+(\sigma, f)$ soit égale à la borne supérieure des sommes $S_-(\sigma, f)$; et ces deux bornes sont alors égales à $\int_P f(x) dx$.

On voit donc que l'approche proposée dans ce chapitre permet une construction théorique et conjointe des notions de *mesure* et des *Intégrales Multiples*. Les auteurs défendent l'idée d'une interprétation géométrique de ces notions mais restent essentiellement dans un cadre topologique. Les conditions d'intégrabilité ou de « quarrabilité » restent techniquement complexes mais permettent de justifier que la plupart des cas seront couverts. L'exposé se termine par le lien avec les sommes de *Riemann* et de *Darboux* qui permettent de donner une vision plus constructive et font également le lien avec les suites numériques.

2. Calcul des intégrales multiples

Comme l'énonce le préambule, ce chapitre se propose de donner des procédés pratiques de calcul des *Intégrales Multiples* dans différents contextes.

Les auteurs commencent par l'étude du cas général d'une fonction des deux variables intégrable sur un produit de pavé.

D'abord, les auteurs présentent et démontrent de façon très rigoureuse le théorème (V.1.1) suivant comme la version élémentaire d'un résultat plus général, relatif à l'intégrale de *Lebesgue*, et appelé théorème de *Fubini*.

Soit P un pavé de \mathbf{R}^p , Q un pavé de \mathbf{R}^q , et

$$f: (x, y) \mapsto f(x, y)$$

une fonction intégrable sur $P \times Q$, telle que l'ensemble des $x \in P$ pour lesquels la fonction $f_x: y \mapsto f(x, y)$ n'est pas intégrable dans Q , soit \mathcal{R} -négligeable dans P .

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_Q f(x, y) dy$ est intégrable sur P , et on a :

$$(1) \quad \int_{P \times Q} f = \int_P F(x) dx = \int_P \left[\int_Q f(x, y) dy \right] dx$$

Pour simplifier la notation les auteurs présentent un cas particulier qui précise le théorème ci-dessus. De plus, en prenant en compte la possibilité d'échanger les rôles de variables x, y , ils présentent, sans risque de confusion, le résultat (1) de la façon suivante :

$$\int_{P \times Q} f = \int \int_{P \times Q} f(x, y) dx dy$$

Une extension du théorème précédent est présentée dans ce livre par le paragraphe suivant comme *intégrales superposées*.

²⁰ Les sommes $S_+(\sigma, f)$ et $S_-(\sigma, f)$ sont appelées les sommes de Darboux.

Par recouvrance, l'intégrale d'une fonction intégrable sur le produit de n pavés se ramène à n intégrales superposées.

Soit $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction intégrable sur le pavé P de \mathbf{R}^n défini par $a_i \leq x_i \leq b_i$ ($i=1, 2, \dots, n$). On a alors :

$$(6) \quad \int_P f = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left[\dots \left[\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right] \dots \right] dx_2 \right] dx_1$$

pourvu que les intégrales figurant dans (6) aient un sens ; soit, en d'autres termes : pourvu que les fonctions intermédiaires figurant dans cette formule soient intégrables.

Le formule (6) peut n'être pas valable si certaines des intégrales qu'il contient sont des intégrales généralisées semi-convergentes. On trouvera également une version simplifiée du second membre de la formule (6) sous la forme ci-dessous, éliminant les parenthèses superposées :

$$\int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n$$

En vue des applications pratiques, ce livre présente 7 versions de notations d'intégrales et souligne les cas particuliers relatifs aux ensembles **quarrables** de \mathbf{R}^n pour $n=2$ et $n=3$:

Soit $f: (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction intégrable sur un ensemble A de \mathbf{R}^n . Il est commode de noter son intégrale sur A par

$$\int_A f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad \text{au lieu de} \quad \int_A f(x) dx$$

Si $n=2$ [resp. $n=3$] cette intégrale est aussi notée

$$\iint_A f(x, y) dx dy \quad \left[\text{resp.} \quad \iiint_A f(x, y, z) dx dy dz \right]$$

Avec ces notations la formule (6) s'écrit

$$(6') \quad \int_P f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_n$$

La valeur commune des deux membres de (6') sera souvent notée aussi

$$\int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Le paragraphe qui suit ces références présente un théorème d'intégrabilité sur une partie **quarrable** de \mathbf{R}^n et puis un corollaire. La démonstration mise en place s'appuie sur la notion de *projection* et sur une *représentation graphique*, pour le cas où $n=2$.

Intégrales doubles

Le calcul des intégrales doubles (§ V.3), est présenté comme un cas particulier du théorème (V.1.1) selon la technique suivante que l'on appellera **IdT1** :

Soit $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction intégrable sur le pavé P de \mathbf{R}^2 défini par les inégalités $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Si, pour chaque $x \in [a, b]$, la fonction $f_x: y \mapsto f(x, y)$ est **intégrable** sur $[c, d]$, alors la fonction $F: x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ est **intégrable** sur $[a, b]$, et on a :

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx$$

On peut alors trouver à partir des exemples mis en place, un type de tâches **IdT1** des

intégrales doubles concernant un genre de tâches « calculer une *Intégrale Multiple* », à savoir :

IdT1 : *Etant donné un pavé P de \mathbf{R}^2 et une fonction à intégrer, calculer l'intégrale double.*

Ce type de tâches se résoud selon la technologie **Id τ 1**. A noter que dans ce type de tâches le domaine d'intégration et la fonction à intégrer sont fournis. La tâche de l'étudiant consiste en l'exécution de calculs que l'on peut décomposer ainsi : *le choix de l'ordre d'intégration, le calcul des primitives et le calcul numérique*. Le premier temps peut cependant ne pas intervenir dans la tâche de l'étudiant. C'est le cas où **IdT1** comporte l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale préalablement établie.

Ce livre présente une deuxième technique **Id τ 2** permettant d'accomplir le type de tâches **IdT2** suivant :

IdT2 : *Etant donné un compact K de \mathbf{R}^2 et une fonction à intégrer, calculer l'intégrale double.*

Id τ 2 est représentée par l'écriture algébrique $\int_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$ où φ_1 et φ_2 sont deux fonctions numériques continue sur $[a, b]$ et f une fonction vectorielle continue sur un compact du plan K . Les auteurs illustrent cette technique **Id τ 2** par une représentation graphique 2D. Les graphiques sont donc présents, mais de façon assez réduite.

La possibilité de changement de rôle des variables x, y permet la construction d'une technique **Id τ 2'** pour accomplir le même type de tâche **IdT2**. Cette technique (conséquence du théorème de *Fubini*) est présentée dans ce livre par l'écriture algébrique $\int_K f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy$ où ψ_1 et ψ_2 sont deux fonctions numériques continue sur $[c, d]$ et f une fonction vectorielle continue sur un compact du plan K' .

A noter qu'**IdT1** et **IdT2** sont deux types de tâches subtilement distincts. Les techniques associées ne sont pas tout à fait les mêmes. En effet, le théorème de *Fubini* est toujours valable dans **IdT1** mais pas dans **IdT2**. Par exemple, il suffit de donner $\varphi_1 = -x$ et $\varphi_2 = 4x - x^2$, $\forall x \in [0, 5]$. Dans ce cas l'application de la technique **Id τ 2'** suivante n'est pas directe. Elle passe par le découpage de K en sous régions compactes.

La technologie propre au calcul des *intégrales doubles* révèle donc deux techniques de référence **Id τ 1**, **Id τ 2** et deux types de tâches **IdT1** et **IdT2**. La notion de symétrie est ici signalée comme moyen pouvant simplifier le calcul d'une intégrale double. Les dessins ou les graphiques sont absents dans les exemples mis en place. Il semble qu'il n'y ait pas d'intérêt pour les auteurs de mettre en évidence un travail sur les interactions possibles entre les représentations graphique et analytique dans les deux types de tâches mise en place.

Intégrales triples

Comme pour les intégrales doubles, les intégrales triples sont présentées dans ce livre comme

une application du théorème V.1.1 selon la règle suivante révélant une première technique **Itτ1** d'intégration triple. Il est également signalé que dans les cas plus généraux qui pourront se présenter, on cherchera à décomposer le *domaine d'intégration* en compacts rentrant dans cette règle :

Soit P un pavé de \mathbf{R}^3 défini par les inégalités $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$, $a_3 \leq z \leq b_3$; soit Q la projection de P sur le plan xOy , c'est-à-dire le pavé de \mathbf{R}^2 défini par $a_1 \leq x \leq b_1$, $a_2 \leq y \leq b_2$. Si f est une fonction intégrable sur P , son intégrale sur P est égale à chacune des « intégrales superposées » suivantes :

$$I_1 = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx,$$

$$I_2 = \int_{a_3}^{b_3} dz \iint_Q f(x, y, z) dx dy = \int_{a_3}^{b_3} \left[\iint_Q f(x, y, z) dx dy \right] dz,$$

$$I_3 = \iint_Q dx dy \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz = \iint_Q \left[\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

pourvu que les intégrales qui y figurent existent.

Du point de vue pratique, la règle supra est présentée, pour convention, par les écritures suivantes, exprimant l'intégrale de f sur P :

$$\int_P f \quad \text{ou} \quad \iiint_P f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{ou} \quad \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dx dy dz$$

On remarquera que ce sont les deux dernières écritures qui prédominent dans les applications pratiques mises en place, alors que $\int_P f$ reste sur le plan théorique. Un seul exemple suit cette définition. Pour permettre le calcul d'une intégrale triple d'une fonction définie sur un compact de \mathbf{R}^n les auteurs présentent la technique **Itτ2** suivante :

Soit K un compact de \mathbf{R}^3 défini par les relations :

$$(1) \quad (x, y) \in D, \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y),$$

où D désigne un compact quarrable de \mathbf{R}^2 , φ_1 , φ_2 deux fonctions numériques continues sur D vérifiant $\varphi_1 \leq \varphi_2$ (voir fig. 6 ci-dessous). Alors K est **quarrable** ; et, si f est une fonction vectorielle continue sur K , on a :

$$(2) \quad \iiint_K f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D \left[\int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

En particulier, le **volume** de K est égal à

$$V = \iint_D [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)] dx dy$$

Ainsi, les auteurs soulignent :

On notera que K est la portion de cylindre, de base D et de génératrice parallèles à Oz , comprise entre les surfaces S_1 , S_2 d'équations respectives $z = \varphi_1(x, y)$ et $z = \varphi_2(x, y)$. La formule (2) permet de donner une idée intuitive de l'intégrale de f sur K : on découpe K en « petits cylindres » de génératrices parallèles à Oz (voir fig. 6) et on fait la somme des intégrales de f sur ces « petits cylindres ».

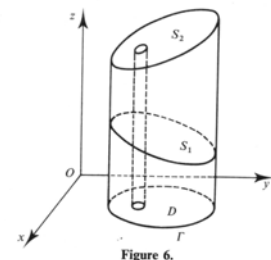


Figure 6.

Cette interprétation géométrique et la technique **Itτ2** sont accompagnées de la figure 6 ci-dessus comme éléments de référence dans le discours et la compréhension.

Nous pouvons dégager deux types de tâches **ItT1** et **ItT2** des intégrales triples concernant un genre de tâches « calculer » qui se résolvent par les deux techniques **Itτ1** et **Itτ2** :

ItT1 : Etant donné un pavé P de \mathbf{R}^3 et une fonction à intégrer, calculer l'intégrale triple.

ItT2 : Etant donné un compact K de \mathbf{R}^3 et une fonction à intégrer, calculer l'intégrale triple.

Comme pour le cas des intégrales doubles, les deux tâches se différencient par le type du domaine d'intégration. A priori, le choix de l'ordre d'intégration et les calculs nécessaires pour accomplir les tâches sont plus complexes dans le deuxième type de tâches, que dans le premier. De plus, une représentation graphique de K pourra être essentielle.

On notera cependant que, comme dans le cas des intégrales doubles, les graphiques représentant P ou K sont absents dans les exemples mis en place. Même si elles apparaissent de façon assez réduite dans le texte de référence, il n'y a pas vraiment l'investissement dans ce type de connaissance pouvant, a priori, permettre un travail sur les interactions possibles entre les représentations graphique et analytique dans les deux types de tâches mis en place. Cependant, il y a une allusion de cet investissement dans certains exemples concernant l'application des IM dans le calcul des aires et de volumes. L'idée de projection d'un solide compact K de \mathbf{R}^3 sur un plan de repérage est présente (cf. figure 6, plus haut). Parmi ces solides, ce sont surtout ceux de révolution qui sont mis en évidence, tant dans le texte de référence, que dans les exemples. Les problèmes proposés aux étudiants sont systématiquement placés à la fin du *livre*.

3. Conclusion

L'analyse de ce livre montre combien la notion d'*intégration* peut-être étroitement liée à celle de *mesure*. En effet c'est la *mesure* d'un pavé de \mathbf{R}^n et plus généralement d'un compact de \mathbf{R}^n qui est mise en jeu ici dans la construction des connaissances sur les intégrales multiples, avec comme cas particuliers les intégrales *doubles* et *triples*. Ces dernières sont conçues comme un prolongement de l'étude des intégrales simples. Elles donnent, au sens de *Riemann*, et de façon rigoureuse²¹, les règles ou les techniques de calculs des *aires* et de *volumes* usuels, sans faire appel à l'intégrale de Lebesgue²². Dans ces calculs, les représentations graphiques de solides sont quasiment absentes.

On verra que les programmes et les manuels de deux institutions que nous allons étudier maintenant privilégient les aspects techniques liés aux calculs des intégrales doubles et triples. L'aspect théorique est réduit au minimum et comprend très peu de démonstrations. Par contre, l'analogie avec les intégrales simples est très présente ainsi que la référence aux sommes de *Riemann*, voire de *Darboux*. Enfin, dans une visée pratique, l'appui sur les représentations graphiques sera également plus fort.

PARTIE B2

1. ANALYSE DES PROGRAMMES DE L'UESC DEPUIS 1999 QUELLES NICHES POUR LES INTEGRALES MULTIPLES ?

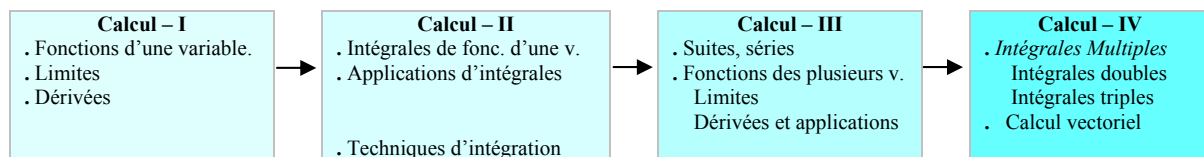
L'analyse que nous présentons ici est une synthèse des programmes de l'enseignement de

²¹ Dans le sens où tous les théorèmes mis en place sont démontrés à partir d'outils de la Topologie comme la convergence dans des espaces vectoriels normés.

²² Dans la réédition de 1989 de ce manuel, les auteurs décideront de « mettre à la disposition des lecteurs, d'emblée, la vraie intégrale, celle de Lebesgue ».

mathématiques de l'institution UESC (BA- Brésil). Le choix de cette institution est justifié par l'intérêt initialement révélé dans l'introduction de ce travail.

Comme le montrent les tableaux ci-dessous (organigrammes de cours des différentes disciplines pour la formation en Mathématiques « spécialités » « Bacharelado » et « Licenciatura » créés depuis 1999) l'enseignement des IM apparaît dans le cours dénommé « Cálculo IV ». Ce cours permet un approfondissement des notions d'analyses rencontrées par les étudiants dans la discipline dénommée « Cálculo Diferencial e Integral – CDI » ou simplement « Cálculo » découpée en quatre disciplines semestrielles. Les contenus de ces disciplines sont répartis en sections selon l'extrait d'organigramme ci-dessous :



Le CDI est ainsi présent dans les trois premières années de la formation en Mathématiques dans les deux « spécialités » (cf. tableaux ci-dessous) et constitue l'habitat des IM.

Universidade Estadual De Santa Cruz – UESC
Departamento De Ciências Exatas E Tecnologia – DCET

FLUXOGRAMA
Curso de Matemática : Habilitação Bacharelado

Duração do curso : Mínima = 4 anos
Máxima = 7 anos

I SEMESTRE	II SEMESTRE	III SEMESTRE	IV SEMESTRE	V SEMESTRE	VI SEMESTRE	VII SEMESTRE	VIII SEMESTRE
Fund. Matem. Elementar I	Cálculo I	Cálculo II	Cálculo III	Cálculo IV	Funções Analíticas I	Cálculo Avançado	Optativa
Fund. Matem. Elementar II	Geometria Analítica	Álgebra Linear I	Álgebra Linear II	Análise Real I	Análise Real II	Teoria das Eq. Diferenciais	Seminário em Matemática
Física I	Física II	Física III	Física IV	Cálculo Numérico	Estatística III	Equações Difer. Parciais	Optativa
Desenho Geométrico	Filosofia da Ciência	Álgebra I	Álgebra II	Álgebra II	Geometria Diferencial	Topologia Geral	
Português Instrumental	Lógica	Geometria Descritiva	Int. A Ciência da Computação	Mecânica I	Metodologia de Pesquisa	Optativa	
Educação Física I	Educação Física II						
C/H Sem 405 Créd. Sem 22 Disciplinas 06	C/H Sem. 390 Créd. Sem. 20 Disciplinas 06	C/H Sem. 375 Créd. Sem. 20 Disciplinas 05	C/H Sem. 360 Créd. Sem. 19 Disciplinas 05	C/H Sem. 375 Créd. Sem. 20 Disciplinas 05	C/H Sem. 375 Créd. Sem. 21 Disciplinas 05	C/H Sem. 330 Créd. Sem. 18 Disciplinas 05	C/H Sem. 108 Créd. Sem. 09 Disciplinas 03

Tableau 1 : Organigramme de cours des différentes disciplines pour la formation en Mathématiques « spécialité » « Bacharelado »

Universidade Estadual De Santa Cruz – UESC
Departamento De Ciências Exatas E Tecnologia – DCET

FLUXOGRAMA
Curso de Matemática : Habilitação Licenciatura

Duração do curso : Mínima = 4 anos
Máxima = 7 anos

I SEMESTRE	II SEMESTRE	III SEMESTRE	IV SEMESTRE	V SEMESTRE	VI SEMESTRE	VII SEMESTRE	VIII SEMESTRE
Fund. Matem. Elementar I	Cálculo I	Cálculo II	Cálculo III	Cálculo IV	Análise Real I	Funções Analíticas I	Optativa
Fund. Matem. Elementar II	Geometria Analítica	Álgebra Linear I	Álgebra Linear II	Fund. Matem. Elementar III	Fund. Matem. Elementar IV	Met. Do Ensino da Matemática	Optativa
Física I	Física II	Física III	Física IV	Cálculo Numérico	Estatística III	Educação e Sociedade	Optativa
Desenho Geométrico	Filosofia da Ciência	Álgebra I	Álgebra II	Est. Func. Ens. 1° e 2° Graus	Didática	Prát. Do Ensino Matemática I	Prát. Do Ensino Matemática II
Português Instrumental	Lógica	Geometria Descritiva	Int. A Ciência da Computação	Psicologia da Educação V	Psicologia da Educação VI		
				Metodologia da Pesquisa	Inglês Instrumental		
Educação Física I	Educação Física II						
C/H Sem 405 Créd. Sem 22 Disciplinas 06	C/H Sem. 390 Créd. Sem. 20 Disciplinas 06	C/H Sem. 375 Créd. Sem. 20 Disciplinas 05	C/H Sem. 360 Créd. Sem. 19 Disciplinas 05	C/H Sem. 375 Créd. Sem. 21 Disciplinas 06	C/H Sem. 390 Créd. Sem. 22 Disciplinas 06	C/H Sem. 345 Créd. Sem. 14 Disciplinas 04	C/H Sem. 330 Créd. Sem. 13 Disciplinas 04

Tableau 2 : Organigramme de cours des différentes disciplines pour la formation en Mathématiques « spécialité » « Licenciatura »

Comme le montre les tableaux 01 et 02, les étudiants qui entrent dans cette institution pour la

formation en mathématiques, ont deux options qui déterminent une « spécialité ». Ces options ont une particularité remarquable : les deux premières années universitaires sont communes dans les deux « spécialités ». Les étudiants ont donc le même rapport aux « objets de savoir » existant dans l'institution pour ces premières années. A la rentrée de la troisième année chacun doit faire un choix de « spécialité » : « Bacharelado » ou « Licenciatura ». Ainsi les programmes soulignent²³ :

- La spécialité « Bachelado » en Mathématiques envisage la préparation du professionnel capable de concevoir les Mathématiques comme domaine scientifique et qui a l'ambition de poursuivre les études au niveau de Master et Doctorat en Mathématiques ou autres domaines. Pouvant devenir Professeur des universités, chercheur ou enseignant chercheur.
- La spécialité « Licenciatura » en Mathématiques envisage la préparation du professionnel destiné à l'enseignement de mathématiques au niveau secondaire et collégial. Pouvant poursuivre les études au niveau de Master et Doctorat en Mathématiques, Education Mathématiques ou autres domaines en lui permettant d'agir comme Professeur des universités, chercheur ou enseignant chercheur.

Dans les deux spécialités les IM apparaissent comme des objets indispensables pour la formation des étudiants. Leur enseignement prend la suite de celui des fonctions de plusieurs variables.

Dans le cours intitulé *Cálculo II* (cf. tableaux ci-dessus) apparaissent les premières techniques d'intégration, à travers les « intégrales des fonctions d'une variable » ou « intégrales simples » (IS). Certaines de ces techniques concernent des tâches de calculs : d'aires de surfaces planes ; de volumes des *solides de révolution* ; de volumes par des *anneaux cylindriques* et de volumes par des *sections transversales*. Puis, l'enseignement des IM est introduit comme prolongement des IS. Ces dernières nourrissent ainsi les objets avec lesquels interagissent les IM, du fait de la place importante accordée dans l'organisation mathématique à la notion de sommes de Riemann.

Remarquons également que la géométrie analytique (II^{ème} semestre) et la géométrie descriptive (III^{ème} semestre) interagissent avec les IM, du fait des places importantes occupées dans les programmes par les opérations sur les fonctions et les tracés des dessins. Par ailleurs, la vie des IM est renforcée par la présence des sections²⁴ *intégrales doubles, aire et volume, intégrales doubles en coordonnées polaires, aire de surfaces, intégrales triples, moment d'inertie et centre de masse, coordonnées cylindriques et sphériques, changement de variables et calcul vectoriel*. Cette dernière est à son tour découpée en sous-sections : *champs vectoriels, intégrales curvilignes, indépendance de chemins, théorème de Green, théorème de Gauss et de Stokes* faisant partie des contenus de l'enseignement des *Intégrales Multiples*.

L'enseignement des IM trouve une place toute naturelle dans l'enseignement de l'analyse. Après l'étude des fonctions d'une variable et le calcul différentiel et intégral, arrive l'étude

²³ • A Habilitação **Bacharelado** em Matemática – visa preparar o profissional que pretende dedicar-se ao estudo da Matemática como ciência, ambiciona obter o grau de Mestre e/ou Doutorado em Matemática ou áreas a fins. Pode atuar como professor universitário, pesquisador, consultor técnico e em outras áreas afins.

• A Habilitação **Licenciatura** em Matemática – Visa preparar o profissional que pretende dedicar-se ao ensino de Matemática em nível de Ensino Fundamental e Médio. Podendo prosseguir seus estudos em nível de Pós-graduação (Mestrado e Doutorado) em Matemática, Educação Matemática ou área a fins.

²⁴ Voir les détails partie B.3 : Organisation praxéologique des IM.

des fonctions de plusieurs variables avec le calcul différentiel et bien sûr le calcul intégral. Ainsi on peut dire que la première niche des IM est la **niche de l'analyse** qui est ici une **niche structurelle** dans le sens où les IM viennent compléter un programme d'étude dont elles renforcent la cohérence, selon un schéma en deux parties (fonctions d'une, puis de plusieurs variables réelles) et trois temps (définition, calcul différentiel, calcul intégral).

Par ailleurs, les *Intégrales Multiples* servent à calculer des *aires* des surfaces et des *volumes* des solides, dans ce contexte, elles s'outillent, via les graphiques, des modes de représentation et de raisonnement géométriques pour occuper une **niche géométrique** qui est ici une **niche interprétative**.

Enfin, les *Intégrales Multiples* servent à calculer des moments d'inertie, des masses et plusieurs notions issues de la physique. On trouve ici des applications des *IM* révélant ce, que l'on appellera la **niche « physique »** qui est ici une **niche applicative**.

Comme nous l'avons dit, les contenus des programmes des IM sont étroitement liés à l'étude des fonctions de plusieurs variables réelles (Cálculo III) qui est un habitat pour les représentations graphiques dans l'espace. Cependant, la place occupée par les fonctions de plusieurs variables dans le « Cálculo IV » révèle des fonctionnalités distinctes par rapport à la représentation graphique dans l'espace dans l'enseignement de « Cálculo III ». Dans ce dernier, en effet, les fonctions de plusieurs variables sont étudiées d'une façon isolée en examinant une seule fonction dans chaque tâche. Alors que dans la plupart des situations de résolution de problèmes et d'exercices d'application de « Cálculo IV » une fonction interagit avec d'autres fonctions pour former un solide. De fait, la représentation graphique dans l'espace prend un autre statut dans l'étude des IM par rapport à l'enseignement précédent.

En outre, on voit dans les programmes que le « CDI » n'est pas le seul habitat des IM dans cette institution. Elles vivent également dans diverses disciplines de la formation en Mathématique, notamment le «Cálculo Numérico» «Funções Analíticas» «Análise Real II» «Cálculo Avançado» «Física IV».

Par ailleurs, les programmes de Mathématiques mis en place depuis 1999 dans cette institution (UESC) mettent en évidence l'objectif suivant :

- Attirer l'attention de l'étudiant sur la nécessité de l'utilisation des outils informatiques.

On reconnaît ici une tentative de répondre aux initiatives concernant l'intégration des outils informatiques dans l'enseignement supérieur (cités dans les PCN – Paramètres Curriculum Nationaux). Dans ce contexte, il importe de voir ce que l'utilisation des outils informatiques pourra apporter comme changements significatifs dans l'enseignement et l'apprentissage des Mathématiques en général et en particulier aux calculs des IM. Comment une telle attention est-elle mise en scène par les enseignants ? Comment l'injonction « attirer l'attention de l'étudiant » peut-elle être (et est-elle) interprétée ?

L'analyse du programme montre plusieurs passages touchant à l'utilisation des nouvelles technologies dans l'enseignement, pour leur introduction dans les programmes spécifiques de Mathématiques. Ainsi dans la partie intitulée « Perfil do licenciado em matemática » on peut

lire :

Des compétences et habilités du caractère général du professeur de mathématiques sont les suivantes :

- capacité à s'exprimer, clairement et avec précision, par écrit et oralement ;
- capacité à travailler en équipes multidisciplinaires ;
- capacité à comprendre, critiquer et utiliser des idées et technologies nouvelles pour la résolution de problèmes ;
- etc.

Ces compétences correspondent bien aux initiatives du système de l'Education Nationale brésilien d'après le texte officiel de LDB « Loi Directrices et Bases de l'éducation » pour tous les niveaux d'enseignement, publié depuis quelques années.

Mais, en regardant par exemple de plus près les « Fluxogramas » rien n'indique la place de l'enseignement de ces nouvelles technologies. Cependant certains enseignants les utilisent de façon informelle. Donc les initiatives prises au Brésil pour l'usage des nouvelles technologies dans l'enseignement restent isolées et au stade de l'innovation. Elles ne sont pas généralisées pour tous les étudiants des IES, en particulier dans l'enseignement des IM, limitant ainsi les possibilités d'expansion des recherches dans ce domaine.

2. ANALYSE DES PROGRAMMES DES CPGE DEPUIS 2004 QUELLES NICHES POUR LES INTEGRALES MULTIPLES ?

Dans cette partie nous présentons une analyse des programmes de l'enseignement de mathématiques et d'informatique des « CPGE » en France. Le choix pour cette institution est justifié par l'intérêt initialement donné dans l'introduction de ce travail.

2.1 Analyse des programmes de mathématiques

Comme le montre le tableau ci-dessous, les programmes de Mathématiques mis en place, depuis 2004 dans l'institution des classes préparatoires (CPGE) en France, se découpent en deux parties : « Algèbre linéaire et géométrie » et « Analyse et géométrie différentielle ».

Organisation du texte des programmes	
Algèbre linéaire et géométrie	Analyse et géométrie différentielle
Réduction des Endomorphismes des Matrices Carrées Espace vectoriels Valeurs propres et vecteurs propres Déterminants Réduction d'un endomorphisme en dimension finie Réduction des matrices carrées Espaces Vectoriels Préhilbertiens et Euclidiens Espace préhilbertiens réels Espace euclidiens (c'est-à-dire préhilbertiens réels de dimension finie)	Fonctions d'une Variable Réelle Séries Equations Différentielles Fonctions de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n Continuité Calcul différentiel Calcul intégral Intégrales doubles et triples Applications Analyse vectorielle Géométrie différentielle Courbes planes Courbes et surfaces de l'espace Surfaces usuelles

Tableau 3 : Les programmes des CPGE : BO n° 3, 29 avril 2004
Objectifs de formation et programme de Mathématiques

Comme nous pouvons le voir, la rédaction du programme est très succincte. Toutefois, l'organisation du programme précise ce qui est attendu dans l'enseignement. En effet, le calcul intégral prend place dans cette organisation (partie analyse) à la suite de l'étude des fonctions définies sur un domaine de \mathbb{R}^p et à valeurs dans \mathbb{R}^n . En effet, l'organisation de la partie analyse est fortement basée sur la notion de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles et de leurs interventions dans le Calcul Différentiel et Intégral.

L'enseignement de l'analyse mathématique est ainsi présent dans les programmes officiels mis en place, pour l'enseignement de Mathématiques, depuis 2004, dans l'institution des classes préparatoires (CPGE) et constitue l'habitat officiel des IM. Ces programmes comportent deux objectifs majeurs proches des programmes pour l'enseignement (des IM) similaire dans les universités brésiliennes.

- L'étude des notions de bases des intégrales doubles sur un rectangle et leurs extensions sur les domaines d'intégration plus généraux. Une brève extension sur les intégrales triples, visant l'enseignement des autres disciplines scientifiques.
- L'exploitation des résultats obtenus dans les calculs d'*Intégrales Multiples* et les grandeurs physiques (aires, volumes, moments, centres d'inerties...). L'interprétation géométrique d'intégrales doubles par un volume dans le cas où la fonction concernée est positive.

Par ailleurs, la vie des *IM* est renforcée par la présence de la section sur l'analyse vectorielle résumée par les notions de gradient et potentiel scalaire. On trouve également les notions : intégrale sur un arc, circulation et formule de Green-Riemann. Concernant la place importante donnée à la résolution de problèmes et d'exercices d'application citée ci-dessus, les programmes mettent surtout l'accent sur les exemples d'application du calcul intégral à des problèmes issus de la physique ou des sciences industrielles. Ainsi, en relation étroite avec les concepts propres aux sciences physiques, la chimie et aux sciences industrielles (mécanique, électronique, optique, cinétique chimique) le programme valorise les interprétations cinématiques et dynamiques des concepts de l'analyse et de la géométrie. Dans cette interprétation, la visualisation et la représentation graphique jouent un rôle important. En effet, dans le secteur de la géométrie et de ses interventions dans les problèmes mathématiques, on peut lire :

Une vision générique des problèmes imprègne l'ensemble du problème de mathématiques car les méthodes de la géométrie et les apports de son langage (figures, représentations graphiques, interprétations géométriques...) jouent un rôle capital, en algèbre, en analyse et dans leurs domaines d'interventions.

On voit ainsi que l'interprétation géométrique et les représentations graphiques des fonctions trouvent une place importante dans les programmes.

Ainsi comme au Brésil, les IM occupent trois niches :

- **La niche structurelle de l'analyse**
- **La niche interprétative de la géométrie**
- **La niche applicative de la physique**

Il apparaît que dans les programmes la niche géométrique est très présente.

D'une façon générale, dans les programmes de mathématiques des CPGE, une place importante est donnée à la résolution de problèmes et d'exercices d'application. Dans cette intention les programmes soulignent :

Les contenus sont organisés autour de trois intentions majeures :

- Organiser autour de quelques notions essentielles, en dégagant les idées majeures et leur portée, en fournissant les outils puissants et efficaces.
- Donner un rôle très important à la résolution de problèmes et d'exercices d'application, pour certains en mettant en œuvre l'outil informatique.
- Réaliser un équilibre global entre l'algèbre, l'analyse et la géométrie. Il va de soi, que cette séparation traditionnelle n'est qu'une commodité de rédaction et ne doit pas faire oublier les interactions nombreuses et étroites entre ces trois grands domaines des mathématiques.

Par ailleurs, comme nous l'avons déjà mentionné, les programmes montrent un intérêt particulier de l'institution pour l'usage des outils informatiques, le logiciel *Maple* plus particulièrement.

Les étudiants doivent être entraînés à l'utilisation en mathématiques d'un logiciel de calcul symbolique et formel pour la résolution des problèmes, la formation des conjectures, ou la représentation graphique de résultats. L'utilisation de ce logiciel évite des calculs fastidieux et permet l'étude de situations complexes hors de portée des techniques traditionnelles.

L'utilisation de l'environnement informatique dans cet enseignement trouve ainsi une place dans les programmes. Elle s'inscrit donc dans les objectifs du programme d'informatique commun aux classes préparatoires scientifiques que nous analysons maintenant.

2.2 Analyse des programmes d'informatique : le tronc commun

Un enseignement basé sur l'utilisation d'un logiciel de calcul formel est dispensé à tous les étudiants des classes préparatoires scientifiques (cf. <http://prepas.org/ups/infopourtous/>). En outre, il existe un programme pour *l'option informatique* spécifique à la filière MPSI-MP, que nous n'analyserons pas ici.

Cet enseignement a fait son entrée dans les classes préparatoires scientifiques depuis la rentrée scolaire 1995 en remplacement de l'enseignement traditionnel du Pascal en informatique. En pratique, les établissements des CPGE ont le choix entre deux logiciels de calcul formel : *Maple* et *Mathematica*. Nous n'analysons ici que le programme officiel mis en place, pour cet enseignement, depuis 2004, dont les deux principaux objectifs sont :

- Une familiarisation avec l'utilisation d'outils informatiques évolués (logiciels de calculs formel et numérique, logiciels d'acquisition et de traitement des données, logiciels de modélisation, logiciels de simulation) en vue de permettre l'approfondissement des disciplines scientifiques et techniques.
- Une introduction à l'informatique en tant que discipline, par une initiation élémentaire au traitement automatique de l'information, à l'algorithmique et à la programmation structurée (illustré à l'aide du langage du logiciel de calcul formel retenu).

Le programme pour cet enseignement se découpe en deux parties : « **utilisation d'outils informatiques** » et « **algorithmique et programmation** ». Nous donnons dans le tableau ci-dessous les grandes lignes de chacune de ces parties :

Organisation du texte des programmes	
Utilisation d'outils informatiques	Algorithmique et programmation
<p>1.1 Présentation du logiciel aux étudiants</p> <p>On décrit sommairement la structure et le fonctionnement des ordinateurs (aucune connaissance à ce sujet n'est exigible). On situe le logiciel de calcul formel parmi les outils informatiques. On peut ainsi expliquer brièvement son fonctionnement (interpréteur, langage de programmation, bibliothèques). On donne quelques idées sur la spécificité du calcul formel et ses différences avec le calcul numérique. L'utilisation du logiciel peut s'envisager, soit de façon interactive, par exécution des commandes directes, soit au moyen de l'écriture de programmes enchaînant des commandes, les deux points de vue étant très liés.</p> <p>1.2 Sous-ensembles du langage à connaître</p> <ul style="list-style-type: none"> • Variables • Opérateurs de comparaisons, opérateurs logiques et états logiques (=, ≠, <, >, ≤, ≥, et, ou, non, vrai, faux). • Structures de contrôle • Fonctions <p>1.3 Fonctionnalités</p> <ul style="list-style-type: none"> • Calculs usuels de type arithmétique ou flottant • Manipulation de polynômes et fonctions rationnelles • Commandes mathématiques <ul style="list-style-type: none"> dérivation des fonctions – développements limités et asymptotiques – calcul de limites – suites et séries – calcul matriciel élémentaire, résolution formelle ou numérique de systèmes d'équations – intégration des fonctions – analyse vectorielle : gradient, rotationnel, divergence. • Commandes graphiques 2D et 3D <ul style="list-style-type: none"> représentation de courbes et de surfaces en coordonnées cartésiennes, paramétriques, polaires, cylindriques et sphériques – courbes et surfaces implicites. 	<p>2.1 Contexte</p> <p>L'enseignement de la programmation ne constitue pas une fin en soi et est limité à un petit nombre de concepts permettant de décrire un enchaînement d'opérations de base.</p> <p>Les algorithmes à mettre en œuvre sont de type formel ou numérique. L'objectif principal est d'entraîner les étudiants à combiner, sur des exemples simples, un petit nombre de commandes dont la fonction est clairement indiquée, en vue de résoudre un problème donné. Aucune connaissance n'est exigible sur la complexité des algorithmes et sur les techniques de preuve de programmes.</p> <p>La mise en œuvre n'est pas séparée de l'utilisation du logiciel formel en tant qu'outil et s'effectue à l'occasion des séances d'interrogations orales, appliquées à la résolution des problèmes de mathématiques, de physique, de chimie, de mécanique et automatique.</p> <p>2.2 Utilisation interactive du logiciel du calcul formel</p> <p>Le logiciel est utilisé comme une aide au calcul et à la représentation de résultats. Les étudiants doivent être familiers des menus, et des opérations simples d'entrée-sortie. Ils doivent savoir éditer et exécuter des commandes, simples ou enchaînées, pour résoudre un exercice de mathématiques, de sciences physiques ou de sciences industrielles et parvenir à l'obtention d'un résultat formel, numérique ou graphique. L'écriture, syntaxiquement correcte, et la commande de l'évaluation d'expressions doivent être maîtrisées.</p> <p>L'outil informatique n'est pas une fin en soi mais un moyen efficace pour faire des mathématiques, des sciences physiques ou des sciences industrielles. La connaissance de la liste exhaustive des fonctions prédéfinies et des bibliothèques ne peut être exigée des étudiants. Toutefois, ils doivent savoir utiliser l'aide en ligne ou la documentation du logiciel pour retrouver les informations outils.</p>

Tableau 4 : Grandes lignes des programmes des CPGE : BO n° 3, 29 avril 2004²⁵

Objectifs de formation et programme du tronc commun d'informatique (c'est nous qui avons souligné certains passages)

Par ailleurs, le programme définit dans le paragraphe consacré à la partie « utilisation d'outils informatiques » les objectifs suivants :

Le but est d'habituer les étudiants à se servir de logiciels, qui fournissent un support au raisonnement par la confrontation rapide et commode des hypothèses et résultats, ils permettent :

- d'enrichir la compréhension des phénomènes mathématiques et des modèles physiques par la simulation de leurs comportements en fonction de divers paramètres ;
- de mieux cerner la notion de domaine de validité d'une hypothèse ou d'une méthode par l'étude de cas limites ;
- d'étudier certains problèmes par la mise en œuvre de modèles dont la résolution numérique manuelle serait trop lourde ou trop complexe ;

²⁵ Ce tableau est un résumé des programmes qui sont un peu plus complets. Par exemple la sous-section *Variables* envisage l'enseignement de :

- entier, rationnel, flottant, complexe
- chaîne de caractères
- tableau à une ou plusieurs dimensions d'indice entier
- expressions algébriques

- d'alléger la part de calcul systématique au profit de l'intuition mathématique ou du sens physique.

Ainsi le programme d'informatique du tronc commun au CPGE est relativement ouvert quant à l'utilisation qui peut en être faite. Rien dans ce qui est décrit ici ne permet de savoir de façon précise ce qui peut être travaillé dans les cours d'informatique en rapport avec les *Intégrales Multiples*. Tout au plus, on peut dire qu'il y a là une ouverture permettant de travailler de façons plus outillées les aspects liés aux niches géométrique et physique qu'occupent les *IM* dans les programmes de mathématiques. Remarquons toutefois qu'il n'y a rien sur la représentation des solides, qui aurait pu être un outil pour les calculs de volumes par les *IM*. Néanmoins, il est fait allusion dans le bas de la première colonne à la représentation des courbes et des surfaces. Or, souvent dans les problèmes de calcul d'intégrales et de volumes, les solides sont définis par les surfaces qui les délimitent. Nous verrons plus loin qu'un travail très spécifique (en particulier avec *Maple*) doit alors être fait pour obtenir une représentation des solides en question. C'est ce que nous appellerons de *crible géométrique*.

3. Conclusion sur l'analyse des programmes

L'analyse menée ci-dessus nous a permis d'identifier les différents habitats et niches occupés par les *IM* dans les institutions considérées.

Depuis la création de la formation en Mathématiques « spécialité » « Bacharelado » et « Licenciatura » en 1999 dans l'UESC au Brésil, l'enseignement des *IM* trouve place dans l'enseignement de CDI en occupant trois niches : **la niche de l'analyse**, **la niche géométrique** et **la niche physique**. Ces fonctionnalités sont également présentes dans l'enseignement équivalent de l'institution CPGE en France. Même si l'interprétation géométrique d'intégrales doubles par un volume dans le cas où la fonction concernée est positive est mise en exergue, le calcul des volumes apparaît comme un lieu possible parmi beaucoup d'autres d'exploitation des résultats obtenus dans les calculs d'*Intégrales Multiples*.

Du côté informatique, l'analyse des programmes montre l'intérêt de l'institution (CPGE) pour l'usage des outils informatiques dans l'enseignement. L'apprentissage de l'usage de tels outils a lieu dans l'enseignement d'informatique dispensé aux étudiants des classes préparatoires. Cependant, l'entrée dans cet enseignement se fait surtout sur la base d'un contenu mathématique. Les programmes recommandent le choix entre les deux logiciels de calcul formel : *Maple* et *Mathematica*. En conséquence, l'enseignement des *IM* et le logiciel *Maple* ont des chances de se rencontrer dans cette institution.

Pour affiner ces premières analyses nous allons à présent faire une analyse de quelques manuels de mathématiques qui abordent les *IM* à ce niveau d'enseignement.

PARTIE B3

ANALYSE DES MANUELS D'ENSEIGNEMENT DES IM

L'analyse écologique des programmes officiels de formation en mathématiques de l'UESC et ceux de mathématiques en classe préparatoire (CPGE) mis en place, respectivement depuis 1999 et 2004, menée dans la partie B1 nous a permis d'identifier les niches occupées par les *IM* dans ces institutions et les objets avec lesquels elles interagissent.

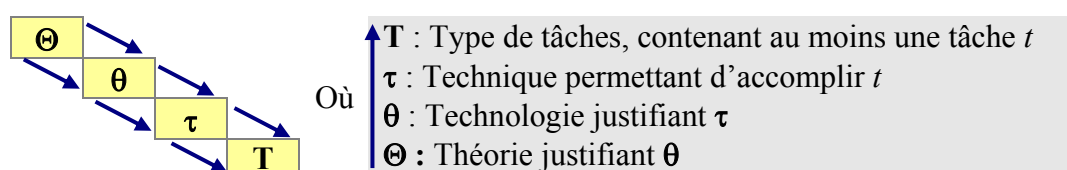
L'analyse des manuels donne accès à des éléments caractéristiques du rapport institutionnel relatif à l'objet d'enseignement. Nous analysons des manuels universitaires d'Analyse Mathématique qui comporte les *IM*.

En France, dans la plupart d'institutions supérieures, l'enseignement des *IM* trouve peu de place et sa seule place est dans l'enseignement de l'analyse (le Calculus des manuels anglo-saxons). Ainsi, il y a peu de manuels de référence sur ce sujet. Ceux qui existent présentent les *IM* de façon condensée. Nous avons choisi le manuel (SWOP) (présenté en deux volumes et nous analysons le deuxième) très utilisé dans les universités brésiliennes. Ce manuel est en fait une traduction d'un manuel américain et nous faisons aussi référence à la traduction française du même manuel (SWOF) (présenté en un seul volume). Nous avons également choisi un deuxième manuel très utilisé par les étudiants (de nombreux pays) (SPIE). En raison de fortes similitudes dans les organisations mathématique et didactique, nous ne présenterons que l'analyse de SWO et plaçons l'analyse du deuxième en annexe. Dans le tableau suivant, nous donnons les références précises de ces manuels. **P/n** indique la place consacrée aux *IM* dans ces manuels : **P** désigne le nombre de pages occupées par les *IM* et **n** le nombre total de pages du manuel.

Codes associés	Références des Manuels à étudier Titre, auteur, « traducteur » édition, éditeur, année d'édition	P/n
SWOF	<i>Analyse</i> . SWOKOWSKI, traduit de l'anglais par Michelim. Cita. 5 ^e ed. De Boeck Université, 1993.	77/1159
SWOP	<i>Cálculo com geometria analítica</i> . SWOKOWSKI, Earl William. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2 ^a ed. Volume 2. São Paulo Makron Books, 1994.	100/763
SPIE	<i>Théorie et applications de l'analyse</i> . SPIEGEL Murray. R. Serie Schaum, MacGraw – Hill, Paris, 1973.	15/382

Tableau 5 : Les manuels mathématiques universitaires contenant l'objet d'enseignement *IM*

Pour mener cette analyse nous nous appuyons sur le schéma ci-dessous issu de notre cadre théorique :



Dans notre analyse du manuel SWO, nous partons alors d'abord d'une présentation de l'organisation globale, afin de repérer la place des *IM* et des objets avec lesquels interagissent les *IM*. Ensuite, nous décrivons l'organisation de la partie consacrée aux *IM* pour obtenir une

vision générale sur cet objet d'enseignement. Puis nous analysons en détail, section après section, la partie cours et de la partie exercices, les techniques disponibles pour les résoudre et leurs justifications technologico-théoriques, afin de mettre en évidence les types de tâches propres aux *IM* proposés dans ce manuel. Cela nous permettra enfin d'identifier les praxéologies sur le calcul de volumes par des *IM*, et les organisations mathématique et didactique dans lesquelles cet objet entre en jeu.

1. Organisation globale du manuel SWO

SWOF et SWOP sont les traductions respectivement en française et en portugais de la cinquième édition de l'original américain intitulé *Calculus* (SWO). Il comporte 19 chapitres et commence par un formulaire comprenant les :

- Formules de **dérivation** et d'**intégration** – (une page) ;
- Formules²⁶ de **géométrie** et **figures**²⁷ - (une page) ;
- Expressions **Algébriques**²⁸ -(une demi page) ;
- Formules et graphiques de la **géométrie analytique**²⁹ – (une demi page) ;
- Formules **trigonométriques**³⁰ – (une page) ;

Une **table des matières** comporte les sujets suivants :

Chapitre	Sujet	Sections	Pages
01	Révision préliminaire	03	38
02	Limite des fonctions	06	60
03	La dérivée	09	67
04	Applications de la dérivée	09	73
05	Les intégrales	08	63
06	Applications de l'intégrale définie	09	69
07	Fonctions logarithmes et exponentielles	07	61
08	Fonctions trigonométriques réciproques et hyperboles	05	36
09	Applications de l'intégrale définie	08	22
10	Formes indéterminées et intégrales impropres	05	27
11	Séries infinies	11	82
12	Sujet de géométrie analytique	05	40
13	Courbes planes et coordonnées polaires	06	61
14	Vecteurs et surfaces	07	63
15	Fonctions vectorielles	07	35
16	Dérivation partielle	10	91
17	Intégrales Multiples	10	77
18	Calcul vectoriel	08	59
19	Equations différentielles	07	39
	Annexes	--	26
	Solutions des exercices impairs	--	70
	Index	--	10

Tableau 6 : Table des matières du manuel SWO

²⁶ Aire, périmètre, volume, aire de la surface latérale S , hauteur, rayon.

²⁷ Triangle, rectangle, parallélogramme, trapèze, cercle, secteur circulaire, anneau circulaire, parallélépipède rectangle, sphère, cylindre circulaire droit, tronç de cône, cône circulaire droit, prisme.

²⁸ Exposants et radicaux, valeur absolue, inégalités, trinôme du second degré, logarithmes, binôme du Newton

²⁹ Formule de la distance, équation d'un cercle, pente m d'une droite, équation d'une droite en fonction de la pente m et d'un point (x_1, y_1) , équation d'une droite d'ordonnée à l'origine b et de pente m , graphique d'une équation du second degré

³⁰ Fonctions trigonométriques d'angles aigus, d'angles quelconques, de nombres réels, triangles particuliers, valeurs particulières des fonctions trigonométriques, identités trigonométriques

Celle-ci est suivie d'une préface, remerciements et informations pour l'étudiant.

Chaque chapitre est divisé en sections (de trois à onze, avec une moyenne de sept) et se termine par des exercices dont les numéros impairs ont des solutions sommaires données en fin de livre. Chaque section est organisée selon le plan suivant :

- **COURS**
- **EXEMPLES**
- **EXERCICES PROPOSES.**

Dans tout le livre il y a une large marge à gauche (7,50 cm sur les 20,60 cm de large). Cette marge, qui disparaît dans les rubriques destinées aux exercices non résolus et reste souvent vide, est utilisée pour :

- *des figures en couleur* faites avec un logiciel informatique (de façon quasi systématique), celles-ci étant numérotées en continu tout au long du chapitre (figure 17.1, figure 17.2, etc.). Les figures jouent donc un rôle isolé du corps du texte. Par ailleurs, les logiciels et les techniques ayant servis à les tracer ne sont jamais évoqués par l'auteur.
- les titres des énoncés : *définitions, théorèmes, méthodes, propriétés et formules*. Tous ces énoncés sont numérotés indépendamment de leurs catégories en continu dans le chapitre (ex. à la *définition* 17.4 peut succéder le *théorème* 17.5 puis la *méthode* 17.6, etc.). Tous les énoncés ainsi numérotés sont systématiquement encadrés avec un fond gris clair. Souvent le titre de l'énoncé explicite son objet. Exemple : *définition des intégrales itérées* (17.7) ; *théorème de calcul des intégrales doubles* (17.8) ; *volume comme une limite de double somme* (17.9) ; *marche à suivre pour le calcul de l'aire d'une région R_x par une intégrale double* (17.11).

La partie « *cours* » commence sous le titre de chaque nouvelle section. Dans ce cours s'intercalent plusieurs exemples numérotés en continu dans chaque section, qui sont exercices résolus dans ce *cours*. Chaque exemple est présenté de la façon suivante :

- **EXEMPLE n** « énoncé »
- **SOLUTION** « suit une résolution détaillée »

Chaque section se termine par des exercices numérotés par section. Rappelons qu'une réponse rapide de tous les exercices de numéro impair est donnée en fin de livre. En général les exercices, dont le nombre peut beaucoup varier d'une section à l'autre, sont regroupés par paquets correspondants à un même type de tâche. Ce qui laisse supposer que ce sont plus des exercices d'entraînement que des exercices de recherche. On peut donc dire que les exercices sont faits pour permettre à l'étudiant de stabiliser des connaissances acquises et des techniques « *routinières* » pour résoudre des types de tâches bien répertoriés. Le travail de l'étudiant est donc bien balisé, aucune initiative ne semble lui être laissée dans la détermination de la nature des tâches qu'on lui propose. Ainsi, le *topos* de l'étudiant est réduit à un mimétisme sur des tâches identifiées avec des techniques « mises en évidence » côté cours dans le manuel.

Enfin certains exercices sont précédés d'un symbole dont l'explication est donnée dans la préface (c'est une nouveauté de la cinquième édition de ce manuel) :

« [...] quelques exercices sont précédés d'un symbole □ pour indiquer qu'ils sont à résoudre à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur... La diversité des calculatrices et des ordinateurs dont les étudiants disposent est telle qu'aucune tentative de classement des exercices marqués d'un □ n'a été faite. D'après l'énoncé du problème il devrait être possible de déterminer si telle calculatrice ou tel logiciel convient davantage à la solution... Si la solution est de nature graphique, il se peut qu'un calculateur muni de fonctions graphiques soit nécessaire. Des fonctions ou des surfaces compliquées peuvent même nécessiter des logiciels élaborés ...» [SWO, préface].

Aucun symbole ne donne une idée du niveau de difficulté des exercices. Par contre, il est clairement dit dans la préface que « l'ensemble des exercices proposés commence par l'entraînement de routine pour atteindre ensuite et progressivement des degrés de difficulté plus élevés. »

On voit donc que ce manuel suit une organisation didactique tout à fait classique, où l'étudiant n'a qu'à se laisser guider pour aller du plus simple vers le plus compliqué.

2. Organisation mathématique et didactique du chapitre 17 de SWO

Le chapitre 17 portant sur les *IM* est organisé dans ce manuel de la façon suivante :

Section	Sous-titre	Déf	Théo	Cor	For	Ex	Exos	Pq	P
17.1	Intégrales doubles	06	02	-	-	07	54	09	11
17.2	Aire et volume	02	02	-	-	04	34	08	09
17.3	Intégrales doubles en coordonnées polaires	-	02	-	01	05	34	06	07
17.4	Aire de surfaces	01	-	-	01	02	16	04	03
17.5	Intégrales triples	04	03	-	-	07	36	09	11
17.6	Moment d'inertie et centre de masse	04	01	-	-	07	32	10	08
17.7	Coordonnées cylindriques	-	02	-	-	06	40	05	08
17.8	Coordonnées sphériques	-	02	-	-	06	42	07	06
17.9	Changement de variables	02	02	01	01	06	38	08	12
17.10	Exercices récapitulatifs						53	14	02
Total		17	16	01	03	50	378	78	77

Déf = Définitions, Théo = Théorèmes, Cor = Corollaires, For = Formules, Ex = Exemples, Exos = Exercices, Pq = Paquets, P = Pages.

Tableau 7 : Sections découpant le chapitre 17 du manuel SWO

Dans chaque section les exercices non résolus, qui se trouvent systématiquement à la fin de la section, sont groupés par paquets que l'on note $T[t_j, t_k]$ avec $j \leq k$; $j, k \in \mathbb{N}^*$ correspondant à un type de tâches T .

3. Analyse section après section

3.1 Section 17.1 : Intégrales doubles

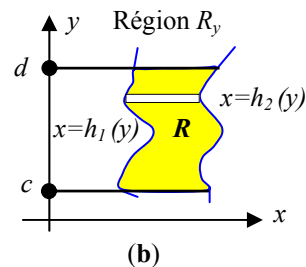
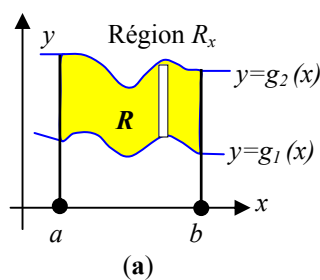
La section 17.1 s'intitule *Intégrales doubles* elle comporte 6 définitions, 2 théorèmes, 7 exemples et 54 exercices regroupés en 9 paquets.

Pour introduire l'intégrale double d'une fonction f à deux variables, définie sur une région R du plan, l'auteur s'appuie sur une analogie formelle avec l'intégrale simple selon la démarche en quatre étapes rappelée en début de chapitre :

1. Découper $[a, b]$ en sous intervalles $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$;
2. Choisir pour chaque k un nombre w_k dans chaque sous-intervalle $[x_{k-1}, x_k]$;
3. Former la somme de Riemann $\sum_k f(w_k)\Delta x_k$ où $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$;
4. Définir $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(w_k)\Delta x_k$ où $\|d\|$ est le **pas de découpage** (le plus grand des Δx_k).

Dans le cas de l'intégrale double, la première étape concerne donc le découpage de la région d'intégration. En se référant à un chapitre antérieur (6.1) l'auteur se limite à un découpage de la région R par un quadrillage (parallèle aux axes de coordonnées). Dans ce découpage, les sous-régions sont soit des rectangles, soit ce qu'il appelle des régions type R_x ou R_y qui sont incluses dans des rectangles.

- R_x désigne une région (voir figure **a**) comprise entre deux courbes d'équations $y=g_1(x)$ et $y=g_2(x)$ telles que $g_1(x) \leq g_2(x)$ pour tout x dans $[a, b]$, où a et b sont les abscisses extrêmes des points (x, y) de la région.
- R_y désigne une région (voir figure **b**) comprise entre deux courbes d'équations $x=h_1(y)$ et $x=h_2(y)$ telles que $h_1(y) \leq h_2(y)$ pour tout y dans $[c, d]$, où c et d sont les ordonnées extrêmes des points (x, y) de la région.



L'ensemble des rectangles, appelés éléments d'aire, qui se trouvent entièrement inclus dans R , constitue un **découpage intérieur** d de R , noté $\{R_k\}$ et la longueur de la plus longue des diagonales des R_k est le **pas $\|d\|$ du découpage** de R , et l'aire de R_k est notée Δx_k .

L'auteur peut alors définir formellement ce qu'est une somme de Riemann pour toute fonction de deux variables (définition 17.1). Le concept d'intégrale d'une fonction va alors se confondre alors avec celui de l'existence d'une somme de Riemann. Il n'a y donc pas place pour un questionnement sur la notion d'intégrabilité, ses conditions et ses propriétés dans des espaces larges de fonctions.

Se pose toutefois la question de la limite de la somme de Riemann quand le pas du découpage tend vers 0. L'auteur admet que cette limite dans \mathbb{R} existe dans le cas où la fonction est continue en rappelant la définition classique en (ϵ, δ) (définition 17.2). Enfin il énonce la définition de l'*intégrale double de f sur R* comme suit :

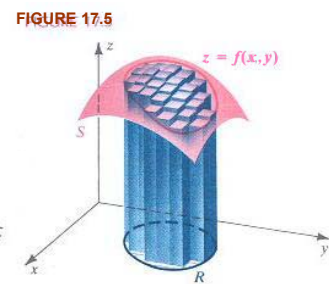
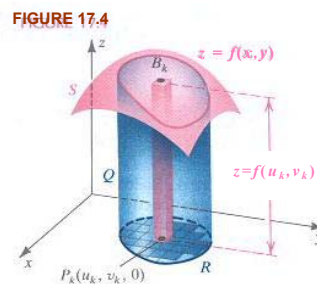
Def.17.3

Soit f une fonction de deux variables définie sur une région R . L'**intégrale double de f sur R** , notée $\iint_R f(x, y) dA$, est $\iint_R f(x, y) dA = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k) \Delta A_k$ à condition que la limite existe.

L'auteur rappelle ici qu'une condition suffisante pour l'existence est donnée par la continuité de la fonction sans placer cette information dans le cadre théorique de la topologie des espaces vectoriels normés. De fait, seules des fonctions continues sur des domaines bornés seront utilisées dans la suite sans qu'on prenne la peine de vérifier qu'elles le sont bien. On voit donc que la question de l'existence de l'intégrale est totalement écartée du *topos* de l'enseignant. De plus la généralisation aux domaines non bornés n'est pas envisagée.

Après cette définition formelle, l'auteur s'attache à faire le lien entre le *volume d'un solide* et le *calcul d'une intégrale double*, en précisant que « les sommes de Riemann et l'intégrale double jouissent d'une interprétation géométrique intéressante ».

Il se limite au cas où f est continue et positive sur la région R . Pour ce cas, l'auteur désigne par S la *surface* représentative de f et par Q le *solide* limité par S , par le plan xOy et par la surface cylindrique engendrée par des parallèles à l'axe- z



qui s'appuient sur la frontière de R , selon la figure ci-contre, extraite de SWOF, p. 888. On voit donc apparaître l'interaction des graphes de plus d'une fonction déterminant le contour du solide Q .

Le produit $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ est le volume du prisme de base ΔA_k mis en évidence dans la figure 17.4. La somme des volumes de tous ces prismes (figure 17.5) constitue une approximation du volume V de Q . Comme cette approximation tend vers la valeur exacte (rappelons que la question de l'existence a été évacuée) quand $\|d\|$ s'approche de 0, V est défini comme la limite des sommes des nombres $f(x_k, y_k) \Delta A_k$ quand $\|d\|$ tend vers 0.

La définition suivante est alors mise en place en accord avec la définition précédente (17.3).

Def.17.4

Soit f une fonction de deux variables continue et positive pour tout (x, y) d'une région R . Le **volume** V du solide qui se trouve sous le graphique de $z=f(x, y)$ et au-dessous de R est $V = \iint_R f(x, y) dA$

L'auteur précise tout de suite que sauf dans de très rares cas particuliers, les sommes de Riemann ne sont pas un outil pour calculer une intégrale double, mais que dans le cas où la région R est une région de type R_x ou R_y , ce calcul se ramène à celui de deux intégrales successives. Suit un résultat qui revient en fait au théorème de *Fubini* qui n'est pas énoncé comme tel dans ce manuel.

Def.17.6

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (1)$$

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \quad (2)$$

Deux exemples (01 et 02) suivent cette définition. Ils permettent de « valider » le résultat précédent. Ces deux exemples présentent en fait la même intégrale dans laquelle on intervertit l'ordre d'intégration. On retrouve ici la première technique **Idτ1** que nous avons rencontrée dans le manuel de référence.

L'auteur donne ensuite la définition (17.7) permettant de calculer des intégrales itérées sur des domaines de type R_x ou R_y .

Def.17.7

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (1)$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right] dy \quad (2)$$

Suivent deux exemples (03 et 04) un pour chacun des cas. Par la suite cette définition est intégrée dans un théorème permettant le calcul de l'intégrale double d'une fonction f continue sur des domaines généraux de type R_x ou R_y :

Théor.17.8

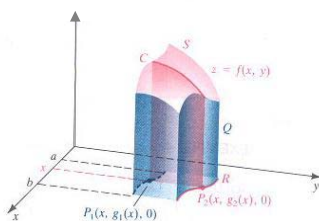
Soit R une région du type R_x . Si f est continue sur R , alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

Soit R une région du type R_y . Si f est continue sur R , alors

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (2)$$

FIGURE 17.9



On retrouve ici la deuxième technique **Idτ2** rencontrée dans le manuel de référence. Mais, ici ce théorème n'est pas démontré rigoureusement, l'auteur précise que c'est l'objet de manuels plus avancés. Toutefois, selon ses propres termes, « il rend ce résultat acceptable, tout au moins pour les fonctions à valeurs positives grâce à [une] explication intuitive ». En fait, ce théorème est

validé en considérant le problème de calcul de volume V du solide Q , sous le graphique S de f et au-dessous de la région R , à l'appui de la figure (17.9). L'auteur considère une coupe de ce solide par un plan parallèle à yOz , montre que l'on obtient ainsi une aire qui se calcule par une intégrale simple qui dépend de x , $A(x)$. Ensuite le volume s'obtient en intégrant $A(x)$ entre les bornes a et b .

Suivent ensuite trois exemples (05, 06 et 07). Les deux premiers mettent en jeu des régions qui sont à la fois de type R_x et R_y et donnent donc lieu à deux calculs où on vérifie qu'en intervertissant l'ordre d'intégration on obtient le même résultat. Le dernier exemple met aussi en jeu une région qui est des deux types mais où un seul des calculs est possible.

Dans ces trois exemples, l'auteur donne dès le début de la solution une représentation

graphique sur laquelle il s'appuie pour organiser les calculs. Rien n'est dit sur la façon dont ces représentations graphiques ont été obtenues. Il est clair cependant qu'elles l'ont été par un logiciel informatique (pour des contraintes d'édition). Toutefois, ce sont des graphiques de la dimension deux (2D) a priori simples qui peuvent être faits à la main par un étudiant. Nous reviendrons plus loin sur cette question de l'usage des graphiques.

Ainsi se clôt la partie cours de la section 7.1.

Viennent ensuite les exercices. Rappelons qu'ils sont au nombre de 54 regroupés en 9 paquets. Nous les analysons en détail, paquet après paquet.

Le premier paquet $T_1 = T[t_1, t_{10}]$ correspond à la tâche : *déterminer si une région R représentée graphiquement est de type R_x ou R_y ou aucun des deux*. C'est donc une sous-tâche importante pour le calcul d'une intégrale double au moyen d'une intégrale itérée. La technique pour résoudre ce type de tâche ainsi que le bloc technologico-théorique renvoie au chapitre antérieur. Il est important de noter ici que le registre est graphique en 2D. On peut donc supposer que les tâches de calcul d'intégrales doubles nécessiteront dans le cas d'un calcul itéré cette représentation graphique en dimension deux.

Le paquet $T_2 = T[t_{11}, t_{12}]$ correspond à la tâche : *calculer la somme de Riemann $\sum_k f(u_k, v_k) \Delta A_k$ pour trois choix différents de (u_k, v_k) dans l'élément d'aire $R_k \subset R$* . Les résultats obtenus dans les trois cas sont assez proches, mais aucune conclusion n'est demandée à l'étudiant. C'est à lui à faire seul le lien avec son cours. La technique est ici purement calculatoire et fait référence au début du cours mais surtout à des compétences de repérage dans le plan. Notons que les calculs sont assez fastidieux s'ils ne sont pas fait à l'aide d'une machine (ce qui n'est pas préconisé dans l'énoncé, absence du symbole \square).

Le paquet $T_3 = T[t_{13}, t_{20}]$ correspond à la tâche : *calculer une intégrale itérée dont les bornes correspondantes à la première variable (dans l'ordre de l'intégration) sont constantes*. On remarquera qu'ici l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale est prête à l'emploi. En effet, au niveau des techniques (*techniques τ permettant d'accomplir t_i*), il suffit de connaître la définition des intégrales itérées (*technologie θ justifiant τ*) et d'avoir des connaissances sur les intégrales simples. De plus, l'étudiant n'a aucune raison de **produire un dessin représentant** la région d'intégration qui ne lui a pas été demandée.

Le paquet $T_4 = T[t_{21}, t_{26}]$ correspond à la tâche : *tracer la région R délimitée par les graphiques des équations données*. En supposant que $f(x,y)$ soit une fonction continue sur R , exprimer $\iint_R f(x,y) dA$ sous forme d'intégrales itérées selon le théorème : (a) (17.8)(1) (b) (17.8)(2). Notons qu'ici il est explicitement demandé une **production** de dessin représentant le graphique (papier-crayon) de la région d'intégration en 2D. Ceci valide implicitement ce que nous avons pu remarquer au niveau des exemples donnés dans le cours (sauf qu'au niveau cours l'étudiant travail sur la **lecture et reproduction** des dessins) et la remarque faite à la suite de l'analyse du premier bloc de tâches de cette section. La technique consiste ensuite à reconnaître que la région considérée est d'un des deux types R_x ou R_y (sous-tâche de type T_1), puis d'appliquer le théorème (17.8) (sous-tâche T_3).

L'organisation mathématique est jusqu'ici très claire dans le sens d'une atomisation de la tâche emblématique T_4 pour laquelle on fait d'abord travailler indépendamment les deux sous-tâches qui la constituent T_1 et T_3 . Notons toutefois que dans la tâche T_4 on ne demande pas explicitement à l'étudiant de se ramener aux deux sous-tâches, il doit lui-même reconstruire cette technique à partir de son cours.

Le paquet $T_5 = T[t_{27}, t_{32}]$ correspond à la tâche : *exprimer une intégrale double donnée comme une intégrale itérée et calculer sa valeur*. Ici la fonction à intégrer est explicite (et simple) et le domaine est décrit en termes géométriques (rectangles, triangles de sommets donnés, ou délimité par des courbes d'équations simples). Comme précédemment, cette tâche se ramène à deux sous-tâches de types T_1 et T_3 , et c'est à l'étudiant à le reconnaître. De plus ici, la représentation graphique du domaine d'intégration n'est plus demandée explicitement. Il y a fort à parier cependant que ce serait devenu une règle du contrat didactique. Par ailleurs, l'étudiant doit choisir l'ordre d'intégration (dans l'exercice précédent il devait faire les deux cas). Or un choix peut être plus judicieux que l'autre, voire un seul peut conduire à un calcul possible, ou même être **faisable**.

Le paquet $T_6 = T[t_{33}, t_{38}]$ correspond à la tâche : *tracer la région R délimitée par les graphiques des équations données. En supposant que $f(x,y)$ soit une fonction continue sur R , exprimer $\iint_R f(x,y) dA$ comme la somme de deux intégrales itérées de type de celles employées dans (a) le théorème (17.8)(1) et (b) le théorème (17.8)(2)*.

Cette tâche se ramène à des sous-tâches de type T_4 où il est également demandé une représentation graphique de la région d'intégration. Sauf qu'ici, le fait que l'on doit exprimer l'intégrale comme somme de deux intégrales itérées, laisse supposer que les régions d'intégrations, ne sont pas directement des régions de type R_x et R_y , mais peuvent être décomposées à deux sous-régions de ces types. Notons aussi que les sous-tâches de type T_4 et T_6 ne conduisent pas à un calcul explicite de l'intégrale puisque la fonction f n'est pas définie, c'est surtout des tâches d'entraînement sur les représentations des domaines d'intégrations, graphiquement et analytiquement. Cette dernière n'est pas demandée explicitement. Or, le travail de la mise en place d'une intégrale multiple, conduit implicitement à une représentation analytique. En effet, elle est ici implicite aux techniques d'intégration.

Le paquet $T_7 = T[t_{39}, t_{44}]$ correspond à la tâche : *dessiner le domaine d'intégration de l'intégrale itérée*. Contrairement à T_4 et T_6 où le but est d'établir l'écriture algébrique du calcul d'intégrale itérée à partir des équations données, ici l'étudiant doit faire le chemin inverse. C'est-à-dire, produire le dessin de la région d'intégration à partir des bornes d'intégration de l'intégrale itérée. On remarque qu'ici l'auteur fait allusion à l'importance qu'il peut y avoir dans l'interaction (ou dialectique) entre les registres graphiques et analytiques et le contrôle nécessaire dans l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale.

Le paquet $T_8 = T[t_{45}, t_{50}]$ correspond à la tâche : *calculer l'intégrale après avoir changé l'ordre d'intégration*. Comme souligné dans le cours, moyennant le théorème de Fubini, le choix de l'ordre d'intégration $dx dy$ ou $dy dx$ dépend essentiellement de $f(x,y)$ et de la région d'intégration. Donc, ici est donnée l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale dans un ordre,

que l'on suppose rendre les calculs particulièrement difficiles voire impossibles. Ainsi le changement d'ordre est imposé comme technique nécessaire pour accomplir T_8 , l'étudiant n'a pas la charge d'en voir la nécessité lui-même. Cette tâche se ramène à deux sous-tâches de types T_1 et T_3 dans la mesure où l'étudiant doit repérer le type de région (T_1) afin de dégager les frontières (de la région) permettant le changement d'ordre d'intégration et ensuite calculer l'intégrale (T_3).

Le dernier paquet $T_9=T[t_{51}, t_{54}]$ de cette section correspond à des tâches de *calcul approché de* $\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy$. Ici, l'auteur montre comment appliquer les méthodes des trapèzes et de Simpson étudiés précédemment pour le cas des intégrales simples, dans le cas des intégrales itérées.

3.2 Section 17.2 : Aire et volume

Cette section s'intitule *Aire et volume* et comporte 2 définitions, 2 théorèmes, 4 exemples et 34 exercices regroupés en 8 paquets. Elle commence par un rappel du résultat du calcul de volume sous le graphique d'une fonction f continue et positive sur une région de type R_x de xOy établi dans la section 17.1 et donné par $V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$. Où $A(x)$ est l'aire d'une section transversale représentative du solide considéré (cf. figure 17.9, section 17.1). Ensuite l'auteur montre comment interpréter cette formule de V comme limite de sommes de Riemann (doubles). Ainsi, en s'appuyant sur la figure 17.15, il met en évidence que l'intégrale simple de $A(x)$ ci-dessus s'exprime comme limite des sommes de Riemann :

$$V = \int_a^b A(x) dx = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k A(u_k) \Delta x_k \text{ où } d' \text{ est découpage de l'intervalle } [a, b].$$

Alors pour chaque $u_k \in [a, b]$ il établit que $A(u_k) = \lim_{\|d''\| \rightarrow 0} \sum_j f(x_k, y_k) \Delta y_k$. Où d'' est un découpage de l'intervalle $[g_1(x), g_2(x)]$. Enfin, il peut énoncer la définition suivante :

$$\text{Volume comme une limite de double sommes (17.9)} \quad V = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j f(u_k, v_k) \Delta y_j \Delta x_k = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y) dy dx$$

Ensuite l'auteur précise tout de suite que les aires de surfaces planes peuvent aussi être examinées comme limites de sommes. Pour voir cela, il considère $f(x,y)=1$ dans la définition de l'intégrale itérée et commence par noter $\iint_R dA$ au lieu de $\iint_R 1 dA$. Ensuite, en prenant d'abord en compte une région de type R_x et en revenant au théorème 17.8(1) il montre que l'intégrale double apparaît aussi comme limite de doubles sommes tout comme pour les volumes. En effet, le résultat qui revient de (17.9) quand $f(x,y)=1$ est ainsi énoncé.

$$\text{Aire comme une limite de double sommes (17.10)} \quad A = \iint_R dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy dx = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k \sum_j \Delta y_j \Delta x_k$$

Cette définition est suivie par une démarche à suivre qui a pour but de guider l'étudiant dans l'utilisation de la formule ci-dessus. Ainsi l'auteur précise : *comme pour les fonctions d'une variable (voir la marche à suivre (6.3), nous pouvons nous servir de la méthode intuitive suivante pour nous rappeler la formule 17.10).*

Méthode pour le calcul d'aire d'une région R_x par intégrale double (17.11)

1. Dessiner la région comme dans la figure 17.18 (I) et y mettre en évidence un élément d'aire représentatif de dimension dx et dy .
2. Tenant x fixé, considérer $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx dy$ comme un opérateur qui somme les éléments d'aire $dx dy$ dans la direction de l'axe des y depuis la frontière inférieure jusqu'à la frontière supérieure. L'expression $\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx$ représente l'aire du rectangle vertical de la figure 17.18 (II).
3. Appliquer l'opérateur $\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right] dx$ prenant ainsi la limite des sommes des aires des rectangles verticaux de l'instruction 2 depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$.

Un exemple (01) suit cette méthode mettant en évidence le calcul d'aire d'une région A du plan xOy délimitée par les graphiques de deux équations. Par la suite, il introduit la deuxième démarche à suivre analogue à (17.11) pour le calcul d'aire d'une région du type R_y par une intégrale double (17.12)

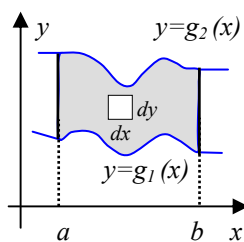


FIGURE 17.18 (I)

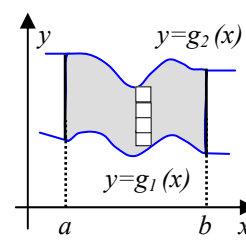


FIGURE 17.18

et précise tout de suite que cette deuxième démarche conduit à intégrer d'abord par rapport à x et puis par rapport à y . Un exemple (02) est aussi mis en place pour la faire fonctionner et est accompagné de deux dessins.

On trouve ensuite deux exemples (03 et 04) de calcul de volume utilisant (17.9) clôturant la partie cours. L'exemple 03 consiste à calculer le volume de la région qui, dans le huitième des coordonnées positive est délimitée par un parabolöide et un plan d'équations données. L'exemple 04 consiste à calculer le volume du domaine commun aux deux cylindres circulaires d'équations données (qui ont comme l'axe Ox et Oz chacun). Comme pour le cas de calcul d'aires, l'auteur donne dès le début (des deux exemples) une représentation graphique des solides comme élément d'appui dans les traitements des tâches.

Notons que les définitions et les méthodes mises en place dans cette section permettent d'ancrer le discours théorique sur des bases intuitives relatives au calcul d'aires et de volumes par les sommes de Riemann (sommation d'aires de rectangles ou de volumes de parallélépipédiques). Le cours prend donc en charge l'esprit de recherche par rapport au problème de calcul de l'intégrale multiple. Il vise essentiellement à déboucher sur des méthodes et des « techniques » bien déterminées en fonction de l'entraînement des étudiants, notamment sur les sous-tâches qui vont organiser les tâches les plus complexes. On remarque également qu'ici le calcul d'intégrale est vraiment lié au calcul d'aires de surfaces planes et de volumes des solides, et s'outille souvent de modes de représentations graphiques (en 2D et 3D, respectivement) des expressions ou des fonctions de plusieurs variables occupant donc la **niche géométrique**. Au niveau de l'apprentissage, l'étudiant travail surtout sur la **lecture** et la **reproduction** de dessins donnés préalablement dont-il ne dispose pas des techniques.

Viennent ensuite les exercices. Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 34 regroupés en 8 paquets. Le premier paquet $T_1 = T[t_1, t_4]$ correspond à la tâche : *établir une intégrale double dont la valeur soit celle de l'aire d'une région représentée graphiquement*. Les régions

associées sont simples : trapèzes ou triangles délimités par des segments de droites dont les équations sont données sur le graphique, ainsi que les coordonnées des sommets. Ce sont donc des tâches des applications directes du cours. Ici l'étudiant travail donc sur la **lecture** et l'interprétation des dessins prédéterminés.

Le paquet $T_2=T[t_5, t_{12}]$ correspond à la tâche : *tracer la région déterminée par les graphiques des équations et en calculer l'aire par une ou plusieurs intégrales doubles*. Notons qu'ici est explicitement demandée la production d'une représentation graphique de la région d'intégration en 2D. L'auteur insiste donc sur l'importance donnée au tracé des dessins qui apparaissent comme élément d'appui dans le traitement des tâches. Ce sont des tâches d'entraînement, qui sont quasiment des applications du cours. Saut qu'au niveau logos l'étudiant ne travail que sur la **lecture** et la **reproduction** de dessins. Ici il doit les **produire**.

Le paquet $T_3=T[t_{13}, t_{16}]$ correspond à la tâche : *établir une intégrale itérée qui permette de calculer le volume du solide représenté graphiquement*. On trouve ici un saut de 2D à 3D. Cependant, comme pour le cas des calculs d'aires des surfaces planes de type de tâche T_1 , ici aussi, la représentation graphique est donnée avec les équations des surfaces délimitant le solide en question. L'étudiant travail sur la lecture des solides, qu'a priori sont simples a lire. Il s'agit d'applications directes du cours en particulier de la définition 17.9 (écriture emblématique du calcul des volumes).

Le paquet $T_4=T[t_{17}, t_{20}]$ correspond à la tâche : *à partir de la donnée d'une intégrale itérée dont on dit qu'elle représente le volume d'une région coiffée par une surface S et reposant sur une région R du plan xOy , décrire S et tracer R* . Ici la tâche consiste donc à interpréter une intégrale itérée comme un volume coiffé par une surface et à décrire la fonction représentative de S et le domaine d'intégration. Ce dernier doit être explicité graphiquement en 2D. Ceci renvoie donc implicitement l'étudiant à la tâche T_1 . Notons toutefois, que jusqu'ici l'auteur ne s'intéresse ni au calcul de l'aire ni au calcul du volume, mais plutôt à leurs représentations, soit graphiquement soit par l'écriture algébrique du calcul d'intégrale double.

Le paquet $T_5=T[t_{21}, t_{22}]$ correspond à la tâche : *calculer le volume du solide délimité supérieurement par le graphique d'une équation donnée et reposant sur la région polygonale du plan xOy dont les sommets sont donnés*. Ici on demande explicitement le calcul du volume. La fonction à intégrer est également explicite. Le travail de l'étudiant est donc de caractériser la région polygonale du plan (à partir des sommets donnés) comme une région de type R_x ou R_y et ensuite à partir de (17.9) ou (17.10) respectivement, d'établir le calcul. Notons que dans cette tâche T_5 on ne demande pas explicitement à l'étudiant de tracer le domaine d'intégration. Mais cela pourra apparaître notamment par effet de contrat.

Le paquet $T_6=T[t_{23}, t_{30}]$ correspond à la tâche : *dessiner le solide situé dans le premier octant et délimité par les graphiques d'équations données et calculer son volume*. Ici on demande explicitement la représentation graphique et le calcul du volume. Donc, l'étudiant est d'abord amené à dessiner le solide en question (la production du dessin en 3D) à partir des équations données. Cette production l'oblige à voir dans l'espace et développer des techniques lui-même afin de produire le solide. Soulignons qu'ici chaque tâche comporte au moins quatre

expressions algébriques (relativement simples) représentant les surfaces qui interagissent dans l'espace en délimitant le solide. Notons le fait que les expressions données sont a priori, familières des étudiants, ce qui ne veut pas dire que forcément les tâches de type T_6 sont toutes simples. On remarquera que le niveau de la facilité de traitement de la tâche n'est pas forcément lié à la simplicité ou familiarité des équations des surfaces qui délimitent le solide.

Le paquet $T_7 = T[t_{31}, t_{32}]$ correspond à la tâche : *calculer le volume du solide déterminé par les graphiques des équations données*. Cette tâche renvoie à T_6 , sauf qu'ici on ne demande pas forcément à l'étudiant de faire le dessin.

Le $T_8 = T[t_{33}, t_{34}]$ est le dernier paquet de cette section. Il se réfère à (17.9) et correspond à la tâche : *calculer une valeur approchée du volume $V = \int_0^1 \int_0^{1/2} f(x,y) dy dx$ pour la fonction f donnée, à l'aide de la double somme $\sum_{k=1}^4 \sum_{j=1}^2 f(u_k, v_k) \Delta y_j \Delta x_k$* .

Ici Δy_j , Δx_k et les variations de j et k sont données. La technique est ici purement calculatoire et fait référence au début du cours. Les résultats sont donc difficilement accessibles par des techniques papier/crayon. En effet, l'auteur préconise l'usage d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel (présence du symbole \square).

3.3 Section 17.3 : Intégrales doubles en coordonnées polaires

La section 17.3 s'intitule *Intégrales doubles en coordonnées polaires* et comporte 2 théorèmes, 1 formule, 5 exemples et 34 exercices regroupés en 6 paquets. L'enjeu mathématique est d'élargir l'ensemble des intégrales effectivement calculables en rendant possible par un changement de variables l'utilisation du théorème de Fubini.

Pour introduire les *intégrales doubles en coordonnées polaires*, l'auteur considère une région

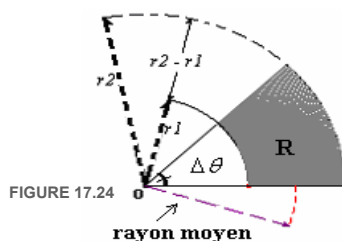


FIGURE 17.24

R plane comprise entre deux arcs de cercles centrés, de rayons r_1 et r_2 , et deux rayons polaires. Région qu'il appelle *élément d'aire en coordonnées polaires* (cf. figure 17.24). Ainsi l'auteur explique : Si $\Delta\theta$ désigne la mesure en radians de l'angle intercepté par les deux rayons et si $\Delta r = r_2 - r_1$, l'aire ΔA de l'élément d'aire en coordonnées polaires est $\Delta A = \frac{r_2^2}{2} \Delta\theta - \frac{r_1^2}{2} \Delta\theta$.

Cette formule peut aussi s'écrire $\Delta A = \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\Delta\theta = \frac{1}{2}(r_2 + r_1)(r_2 - r_1)\Delta\theta$ ou $\Delta A = \bar{r} \Delta r \Delta\theta$ si le **rayon moyen** $(r_2 + r_1)/2$ est noté \bar{r} .

Ensuite l'auteur considère une région R plus générale (figure 17.25) délimitée par deux rayons qui font des angles positifs α et β avec l'axe polaire et par les graphiques des deux équations polaires $r = g_1(\theta)$ et $r = g_2(\theta)$ où il est supposé que $g_1(\theta) \leq g_2(\theta)$ pour $\alpha \leq \theta \leq \beta$.

Cette région est alors découpée par des rayons et des arcs circulaires (ce qui correspond à la figure 17.25 (II) que nous ne reproduisons pas ici) en constituant une découpe intérieure d de

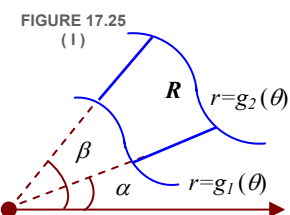


FIGURE 17.25 (I)

R. Le pas $\|d\|$ d'un tel découpage (la longueur de la plus longue des diagonales de R_k) est alors pris en compte. En choisissant un point (r_k, θ_k) dans R_k tel que r_k soit le rayon moyen, il énonce le résultat suivante (pour une région de type R_θ) :

$$\begin{array}{l} \text{Théorème du calcul d'une intégrale} \\ \text{double en coordonnées polaires} \\ \text{(17.13)} \end{array} \quad \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k) \Delta r_k \Delta \theta_k = \iint_R f(r, \theta) dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta$$

L'auteur rappelle que l'on démontre ce résultat (admis ici) dans l'hypothèse où f est une fonction continue des variables polaires r et θ . De plus, dans le cas où $f(r, \theta) = 1$ sur tout R , l'intégrale de (17.13) donne l'aire de R . Ce résultat découle aussi de la formule (13.11) explique l'auteur.

Deux exemples (01 et 02) suivent ce théorème. Dans le premier on calcule l'aire d'une région extérieure d'un cercle et intérieure de l'autre en utilisant une symétrie. Dans le deuxième on calcule l'aire d'une boucle d'une lemniscate. Ce sont donc deux exemples simples qui permettent de valider le résultat précédent. Ensuite, on trouve la formule (17.14) permettant la transformation d'une intégrale itérée en coordonnées cartésiennes en une intégrale double en coordonnées polaires. Pour cela, il faut d'abord remplacer dans la fonction sous le double signe d'intégration x par $r \cos \theta$ et y par $r \sin \theta$ et ensuite, dans l'intégrale itérée, $dydx$ par $r dr d\theta$ ou $rd\theta dr$.

$$\begin{array}{l} \text{Formule de changement de variables} \\ \text{(17.14)} \end{array} \quad \iint_R f(x, y) dy dx = \iint_R f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

L'auteur précise tout de suite que le passage aux coordonnées polaires est particulièrement conseillé quand la fonction sous le double signe d'intégration contient l'expression $x^2 + y^2$ et quand la région R implique des arcs des cercles centrés à l'origine, car $x^2 + y^2 = r^2$ et l'équation des cercles est de la forme très simple $r = k$. On pourrait ajouter l'importance dans la prise de décision d'un changement de variables des propriétés géométriques du domaine d'intégration. On voit donc se dessiner un rôle supplémentaire de l'interprétation géométrique dans le calcul de l'intégrale.

Un exemple (03) suit cette formule, où l'écriture algébrique du calcul d'intégrale est donnée. C'est donc un exemple simple qui permet de « valider » la formule ci-dessus. Par la suite est introduit le théorème 17.15 (relatif au calcul d'intégrale sur une région polaire de type R_r) analogue à (17.13).

$$\begin{array}{l} \text{Théorème du calcul d'une intégrale} \\ \text{double en coordonnées polaires} \\ \text{(17.15)} \end{array} \quad \iint_R f(r, \theta) dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr$$

Un exemple (04), de calcul d'aire d'une région plane, suit ce théorème. Par la suite on trouve un rappel important relatif au calcul de volume, qui clôture ainsi la partie cours de la section 17.3. Ainsi l'auteur souligne :

Comme dans la section précédente, le volume V d'une région coiffée par le graphique d'une équation $z = f(x, y)$ où $f(x, y) \geq 0$ et reposant sur une région R du plan xOy est donné par $V = \iint_R f(x, y) dA$. Dans certains cas, le passage aux coordonnées polaires facilite le calcul de cette intégrale.

Un exemple (05) de calcul de volume suit cette consigne. Notons que jusqu'ici tous les exemples mis en place dans cette organisation, sont accompagnés d'un dessin sur lequel l'auteur s'appuie pour organiser les tâches. De plus, les représentations analytiques (des régions et des solides) concernées sont implicitement liées aux techniques d'intégration. En fait, ce terme (représentation analytique) n'est pas employé par l'auteur.

Viennent ensuite les exercices (non résolus proposés aux étudiants). Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 34 regroupés en 6 paquets.

Le premier paquet $T_1=T[t_1, t_6]$ correspond à la tâche : *établir l'intégrale itérée en coordonnées polaires qui fournit l'aire de la région, en exploitant si possible les symétries*. Comme pour le type T_1 de la section précédente, ce paquet est aussi constitué de tâches de calcul d'aires où la région d'intégration est donnée graphiquement. Notons que, dans chaque dessin, les équations (polaires) des courbes délimitant les régions considérées sont explicitées. De plus, tous ces exemples permettent d'exploiter facilement des symétries, qui simplifient les calculs. A noter aussi qu'ici on ne demande pas forcément de calculer l'intégrale. C'est donc une tâche jouant sur l'interaction possible entre la représentation graphique et analytique.

Le paquet $T_2=T[t_7, t_{12}]$ correspond à la tâche : *employer une intégrale double pour calculer l'aire décrite par une équation en coordonnées polaires*. Ici, il est demandé explicitement un calcul d'aire, et les équations des six tâches t concernées sont relativement simples. Le fait que le calcul soit à faire en coordonnées polaires est bien sûr induit par la question. Ce sont donc des exercices d'entraînement correspondant à une application directe du cours. Toutefois, la mise en place de l'écriture algébrique du calcul d'intégrale demande implicitement le tracé des graphes des équations polaires pour repérer les bornes d'intégration. Par exemple, comment arriver au résultat $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{3\sqrt{\cos 2\theta}} r dr d\theta = \frac{9}{2}$ de t_{11} où l'aire en question est décrite par une boucle de $r^2=9\cos 2\theta$? Pour utiliser le théorème 17.13 il est d'abord nécessaire de savoir ce que veut dire « boucle de $r^2=9\cos 2\theta$ » pour dégager une représentation analytique du domaine d'intégration. Cette tâche se ramène donc à des sous-tâches de type T_1 et à la section 13.3 (coordonnées polaires) et c'est à l'étudiant de le reconnaître.

Le paquet $T_3=T[t_{13}, t_{24}]$ correspond à la tâche : *calculer l'intégrale par passage aux coordonnées polaires*. En fait, cette tâche est décomposable en deux sous-paquets $T_{3[a]}$ et $T_{3[b]}$. Dans les deux, toutes les fonctions concernées sous le double signe d'intégration contiennent l'expression x^2+y^2 . La tâche de l'étudiant dans le premier sous-paquet $T_{3[a]}=T[t_{13}, t_{18}]$ est donc l'emploi direct des méthodes données dans les cours. Toutefois, l'étudiant doit trouver des bornes d'intégration avant de procéder aux calculs. Alors que pour $T_{3[b]}=T[t_{19}, t_{24}]$ les représentations analytiques sont directement données. En effet, les écritures algébriques du calcul d'intégrale sont établies. La seule tâche de l'étudiant est de procéder au calcul d'une intégrale itérée déjà organisée.

Le paquet $T_4=T[t_{24}, t_{30}]$ correspond à la tâche : *grâce aux coordonnées polaires, calculer le*

volume du solide qui a la forme de Q . Différemment de T_3 où l'écriture algébrique du calcul d'intégrale est donnée, ici cette sous-tâche est demandée à l'étudiant. Notons que les solides Q en question sont des régions de l'espace déterminées par (au moins) deux surfaces d'équations données. Les tracés des dessins ne sont pas demandés explicitement. Mais, il est probable que les étudiants les fassent (effet de contrat). La consigne de la tâche est claire et invite l'étudiant à s'outiller du travail mené au niveau *logos*.

Le paquet $T_5 = T[t_{31}, t_{32}]$ correspond à deux tâches qui s'intéressent au calcul d'intégrale double impropre (ou généralisée) où les résultats sont de première importance en statistiques.

Le paquet $T_6 = T[t_{33}, t_{34}]$ est le dernier paquet de cette section. Il se réfère à la possibilité de transformer une intégrale double en une intégrale simple, et au calcul d'une valeur approchée de l'intégrale par la méthode de Simson. Comme pour la dernière tâche (T_8) de la section précédente, la technique ici est également calculatoire et fait référence à la section 5.7 qui s'intitule « intégration numérique ». Les résultats sont par ailleurs, difficilement accessibles par des techniques papier/crayon. L'auteur recommande l'emploi d'une calculatrice ou logiciel du calcul formel (T_8 est donc signalé par ☐).

3.4 Section 17.4 : Aire de surfaces

Cette section est consacrée particulièrement au calcul d'aire des surfaces tridimensionnelles. Elle n'intervient pas directement dans notre problématique. Nous plaçons ainsi l'analyse associée en annexe.

Notons que jusqu'ici l'auteur propose un enseignement où les tâches non résolues regroupées par paquets (proposées aux étudiants) suivent le même type d'organisation d'une section à l'autre. On peut aussi remarquer que les paquets, se suivent dans un ordre de difficulté croissante. Un paquet utilise fréquemment un ou plusieurs paquets précédents comme sous-tâches. Nous reviendrons plus loin sur cette question de l'organisation mathématique et didactique de cette partie. Ainsi se clôt l'étude des intégrales doubles. Vient ensuite l'étude des intégrales triples.

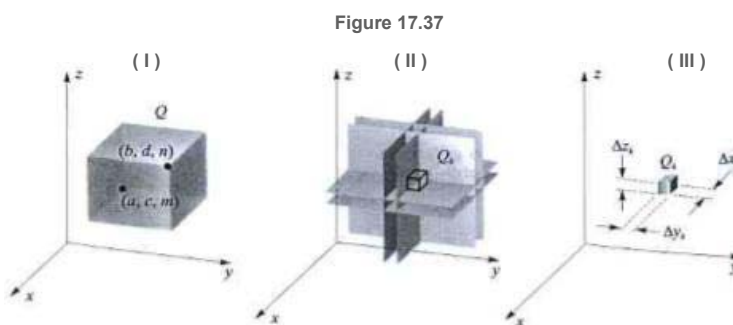
3.5 Section 17.5 : Intégrales triples

La section 17.5 s'intitule *Intégrales triples* et comporte 4 définitions, 3 théorèmes, 7 exemples et 36 exercices regroupés en 9 paquets.

Pour introduire l'intégrale triple d'une fonction de trois variables x , y et z , définie sur une région bornée de l'espace 3D, l'auteur fait référence à la démarche en quatre étapes analogues à celle de la section 17.1 comme pour les fonctions de deux variables. On peut donc dire que les intégrales triples sont présentées comme un prolongement des intégrales double. Il reproduit les mêmes démarches précédentes dans l'étude des intégrales triples. Il considère d'abord le cas le plus simple, où f est une fonction continue sur une région parallélépipédique Q de \mathbb{R}^3 représentée analytiquement par

$$Q = \{(x, y, z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, m \leq z \leq n\}.$$

et graphiquement par la figure 17.37(I). Ensuite Q est découpé en sous-régions (qu'il appelle éléments de volume Q_1, Q_2, \dots, Q_n) selon les plans parallèles aux trois plans de coordonnées, de sorte que $\{Q_k\}$ constitue un découpage d de Q représenté graphiquement par la figure 17.37(II).



Puis il considère la longueur la plus longue des diagonales des Q_k comme le pas $\|d\|$ de ce découpage, mettant en évidence la sous-région Q_k de volume ΔV_k (des dimensions $\Delta x_k, \Delta y_k$ et Δz_k) dans la figure 17.137(III). L'auteur peut alors définir formellement ce qu'est la somme de Riemann de f relative à ce découpage.

$$\sum_k f(u_k, v_k, w_k) \Delta V_k$$

où (u_k, v_k, w_k) est un point quelconque de Q_k . Se pose alors la question de la limite de ces sommes quand le pas de découpage tend vers 0. Quand cette limite existe, elle est appelée **intégrale triple de f sur Q** elle est notée $\iiint_Q f(x, y, z) dV$. Ainsi il énonce formellement la définition suivante.

$$\text{Intégrale triple de } f \text{ sur } Q \quad \iiint_Q f(x, y, z) dV = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k \quad (17.18)$$

Il est établi que si Q est une région de type comme celle de la figure 17.37(i) alors,

$$\iiint_Q f(x, y, z) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

L'auteur dit tout de suite que l'on peut démontrer que les **cinq** autres intégrales itérées qui ne diffèrent de la précédente que par l'ordre d'intégration, sont toutes égales à celle-ci. On trouve ici la technique **IT1** que nous avons rencontré dans le manuel de référence. Un exemple (01) suit cette définition, où la fonction est polynômiale simple et le domaine parallélépipédique. C'est une application directe simple qui permet de « valider » le résultat précédent du cours.

Par la suite, se pose la question de généraliser la définition (17.18) pour un domaine d'intégration d'une forme plus compliquée qu'un parallélépipède. Ainsi, il considère une région Q de \mathbb{R}^3 définie analytiquement par

$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \text{ dans } R \text{ et } k_1(x, y) \leq z \leq k_2(x, y)\}$$

Où R est une région du plan xOy qui puisse être divisée en régions de type R_x et R_y et où k_1 et k_2 sont des fonctions qui ont des dérivées partielles premières continues sur tout R . En utilisant la figure 17.38 l'auteur met en évidence la région Q se trouvant entre les graphiques $z=k_1(x, y)$ et $z=k_2(x, y)$ et au-dessus ou au-dessous de la région R . Il peut alors envisager un **découpage intérieur** d de Q selon les plans parallèles aux trois plans des coordonnées. Il constitue alors une **somme de Riemann** de f . L'auteur précise alors que si f est continue sur

tout Q , on peut démontrer³¹ l'égalité suivante :

Théorème de calcul d'une intégrale triple (17.19)
$$\iiint_Q f(x,y,z) dV = \iint_R \left[\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA$$

On trouve ici la technique **Itτ2** que nous rencontré précédemment (cf. partie B1). L'auteur explique ainsi que les crochets du membre de droite de (17.19) signifient qu'après avoir intégré par rapport à z , il reste à calculer une **intégrale double** en x et y sur une région R suivant les méthodes de la section 17.1. Il donne ensuite la définition suivante, pour une projection de Q sur une région R de type R_x .

$$\iiint_Q f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

Il précise tout de suite que le membre de droite de l'expression ci-dessus est une **intégrale itérée triple**. Elle se calcule par trois intégrations partielles de $f(x,y,z)$ dans l'ordre z , y et x liées aux bornes respectives selon la manière habituelle. Ensuite, il donne la formule analogue de calcul de l'intégrale triple pour les cas où R est une région de type R_y et regarde les deux dernières intégrales itérées comme limite d'une triple somme.

Suit un exemple (02) qui s'intéresse à la recherche de bornes d'intégration nécessaires pour le calcul de l'intégrale d'une fonction f (quelconque) où sont données les équations des surfaces délimitant Q . En fait, la tâche essentielle est la mise en place de la représentation analytique de Q et d'établir l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale itérée. C'est donc une tâche importante qui permet de « valider » le théorème 17.19. Comme précédemment, la démarche mise en place dans le traitement de ce premier exemple s'outille également de la représentation graphique du solide (domaine d'intégration en question).

Ensuite, l'auteur s'attache à faire le lien entre le calcul d'une l'intégrale triple et le calcul de volume d'un solide Q . Ainsi il souligne :

Dans le cas particulier où $f(x,y,z)=1$ sur toute la région Q , **l'intégrale triple** devient $\iiint_Q dV$ et sa valeur n'est autre que le **volume** de Q . [...] Ce volume peut être calculé par une intégrale double, mais le calculer par une intégrale triple nous a permis de manipuler les limites de triples sommes en vue d'être capable plus tard de traiter de cette manière des problèmes qui eux ne peuvent être résolus autrement. [SWOF, p. 918]

Un exemple (03) de calcul de volume d'un solide délimité par un cylindre et deux plans sécants suit ce discours théorique. Notons qu'ici l'auteur met en évidence les représentations graphiques comme éléments d'appui dans la résolution de l'exercice.

Par la suite, l'auteur s'attache à la description des domaines d'intégration où l'intégrale double porte sur une région R qui est une projection du solide Q sur le plan xOz ou yOz . Deux résultats sont respectivement mis en place :

Théorème de calcul d'une intégrale triple (17.20)
$$\iiint_Q f(x,y,z) dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z) dy dz dx$$

Le résultat suivant (que l'on peut nommer 17.20') n'est pas numéroté comme tel et correspond

³¹ C'est admis dans ce manuel.

au calcul d'intégrale triple itérée, où la projection R de Q est une région du plan yOz .

Théorème de calcul d'une intégrale

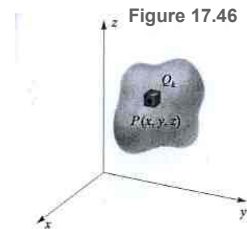
$$\text{triple (17.20')} \quad \iiint_Q f(x,y,z) dV = \iint_R \left[\int_{p_1(y,z)}^{p_2(y,z)} f(x,y,z) dx \right] dA$$

Suivent un exemple pour chacun des cas (04 et 05). Les deux exemples donnent une représentation graphique comportant les équations des surfaces délimitant le solide en question et s'intéressent au calcul du volume.

Vient ensuite une introduction de la section suivante (17.6) consacrée à l'étude de *moments et centre de masse* d'un solide. Donc, la section 17.5 se termine par la prise en compte de quelques notions préliminaires à ce sujet. Ainsi, l'auteur donne d'abord la définition d'un solide **homogène** et de la **densité**.

Un solide est dit **homogène** si la masse y est uniformément distribuée. La **densité** δ d'un tel solide de masse m et de volume V est donc $\delta = m/V$ et $m = \delta V$. Comme la densité est la masse par unité de volume, elle s'exprime en kg/m^3 si m est mesurée en kilogrammes et V en mètres cubes.

Ces définitions sont ensuite généralisées par les cas de solides **non homogènes** dans lequel par définition la répartition des masses n'est pas la même partout. L'auteur précise que c'est le cas d'un objet composé de métaux différents, de fer, de cuivre et d'or par exemple. Pour donner une définition formelle de la densité et de la masse d'un solide **non homogène** en termes d'intégrales triples, il se pose d'abord la question du repère. Il place alors le solide qui occupe une région Q , dans un système des coordonnées, selon la figure 17.46. Ainsi l'auteur considère un élément de volume Q_k qui contient $P(x,y,z)$, de volume V_k et de masse Δm_k . Il admet que si la plus longue diagonale $\|\Delta V_k\|$ de Q_k est petite alors on obtient la définition suivante.



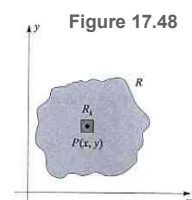
Définition de la densité (17.21)
$$\delta(x,y,z) = \lim_{\|\Delta V_k\| \rightarrow 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta V_k}$$

L'auteur précise ainsi que quand la limite existe et quand $\|\Delta V_k\| \approx 0$, $\Delta m_k = \delta(x,y,z)\Delta V_k$. Il suppose ensuite que δ est une fonction continue et que Q est une région convenable au sens des diverses formes de régions envisagées précédemment. Dans ces conditions, si $\{Q_k\}$ est un découpage intérieur de Q , et si $(x_k, y_k, z_k) \in Q_k$ alors $\sum_k \delta(x,y,z)\Delta V_k$ est la somme de Riemann de la fonction densité δ . En effet, la masse m de Q peut être définie comme la limite de telle somme. L'auteur donne ainsi la définition (17.22) suivante :

Masse d'un solide (17.22)
$$m = \iiint_Q \delta(x,y,z) dV$$

Un exemple (06) suit cette définition où le solide et la fonction densité en question sont décrits géométriquement. Telle description permet de dégager la fonction densité et les équations des surfaces qui délimitent le solide. Notons qu'ici aussi la solution est accompagnée d'une représentation graphique.

Ensuite l'auteur s'intéresse au calcul de la masse d'une plaque plane qui occupe une région R du plan xOy . Selon un raisonnement similaire à la définition précédente, il considère R_x comme élément d'aire d'un découpage de R qui contient P et d'aire ΔA_k (cf. figure 17.48) et donne ainsi la définition



de la densité (appelée surfacique) de la matière en $P(x,y)$ par

$$\delta(x,y) = \lim_{\|\Delta_k\| \rightarrow 0} \frac{\Delta m_k}{\Delta A_k}$$

Il précise tout de suite qu'ici, la densité est la masse par unité d'aire et s'exprime en kg/m^2 . Par analogie à la formule (17.22) il donne la formule suivante pour le calcul de la masse d'une plaque plane.

Masse d'une plaque plane (17.23) $m = \iint_R \delta(x, y) dA$

Un exemple (07) suit cette définition et calcule la masse d'une plaque plane en forme de triangle isocèle rectangle, où la densité est directement proportionnelle au carré de la distance d'un point P du triangle au sommet opposé à l'hypoténuse.

Viennent ensuite les exercices non résolus. Rappelons qu'ils sont ici au nombre de 36 regroupés en 9 paquets.

Le premier paquet $T_1 = T[t_1, t_6]$ correspond à la tâche : *calculer l'intégrale itérée*. Dans cette tâche tout est donné. C'est-à-dire que l'intégrale itérée en question (dans chaque tâche t), comporte tous les éléments nécessaires pour procéder aux calculs. L'écriture du calcul d'intégrale est établie. A priori la seule difficulté est liée aux calculs qui peuvent être plus au moins lourds.

Le paquet $T_2 = T[t_7, t_{10}]$ correspond à la tâche : *écrire les six intégrales itérées égales à $\iiint_Q f(x, y, z) dV$ où f est une fonction continue quelconque de trois variables et Q une région représentée graphiquement avec des équations des surfaces notées sur le dessin*. Les solides sont simples et permettent de dégager les six intégrales itérées demandées selon leurs projections sur les plans des coordonnées. La tâche est donc une application directe du cours sur la lecture des dessins tridimensionnels et la mise en place d'écritures algébriques de calcul d'intégrale suivant une dialectique entre les représentations graphique et analytique. On remarquera que T_2 ne conduit pas à un calcul explicite de l'intégrale itérée, car la fonction f n'est pas définie. C'est donc une tâche d'entraînement qui porte sur la transformation selon la nature du domaine d'intégration d'une intégrale triple en une intégrale itérée.

Le paquet $T_3 = T[t_{11}, t_{20}]$ correspond à la tâche : *tracer la région délimitée par les graphiques des équations données et calculer son volume à l'aide d'une intégrale triple*. Ici il est demandé une représentation graphique (papier-crayon) du solide Q (production des dessins). Cette tâche est plus complexe que les deux premières, dans le mesure où l'étudiant doit lui-même donner une représentation graphique, dégager une représentation analytique, établir un bon ordre dans l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale (selon un choix de la projection de Q dans un des plans des coordonnées adéquat à la situation) et procéder au calcul. T_3 utilise donc les deux tâches T_1 et T_2 précédentes comme sous-tâches. Comme pour le paquet T_6 de la section 17.2 ici aussi chaque tâche comporte plusieurs expressions algébriques (relativement simples) représentant les surfaces qui interagissent dans l'espace pour composer le contour du solide en question.

Le paquet $T_4 = T[t_{21}, t_{22}]$ correspond à la tâche : *calculer de volume du tétraèdre et d'ellipsoïde*

d'équations données en fonction de trois paramètres. Contrairement à T_3 , ici on ne demande pas explicitement la représentation graphique, mais cela pourra apparaître notamment par effet de contrat. Cette tâche ressemble donc à la tâche précédente, sauf qu'ici les volumes dépendent des trois paramètres, ce qui complique les calculs.

Le paquet $T_5=T[t_{23}, t_{28}]$ correspond à la tâche : *à partir de la donnée d'une intégrale itérée dont on dit qu'elle calcule le volume de Q , décrire le solide Q* . C'est donc une tâche en quelque sorte inverse du paquet T_2 . La consigne de décrire peut être interprétée de diverses façons. On pourrait attendre ici une représentation graphique. Dans le corrigé en fin de livre, l'auteur donne une description en langue naturelle, décrivant le solide comme délimité par des surfaces données par des équations. Les exemples restent simples, les surfaces en jeu sont souvent des plans ou des cylindres. Ce type de tâche est assez inhabituel dans le sens où il ne produit pas de calcul d'intégrales et fait appel à une démarche inverse à celle habituellement en jeu. C'est donc une tâche d'entraînement sur les registres de représentations et de manipulation des variables visuelles et des ostensifs, liés aux intégrales itérées et à la représentation des solides.

La plupart des tâches précédentes nourrissent plutôt la **niche géométrique**, à partir de l'exercice 29, on trouve les tâches attachées à la **niche physique**.

Le paquet $T_6=T[t_{29}, t_{30}]$ correspond à la tâche : *Etablir une intégrale itérée double qui calcule la masse d'une plaque plane dont la densité surfacique est donnée par $\delta(x, y)$ et qui a la forme d'une région enfermée dans des graphiques d'équations données*. A noter que les fonctions densités concernées et les équations des courbes (qui sont au moins quatre dans chaque tâche) déterminant les régions en question sont relativement simples. Ce type de tâche est donc une application directe du cours. On ne demande pas forcément de tracer les régions. Mais comme pour les cas de calcul de volume, cela pourra apparaître par effet de contrat. On ne demande pas, non plus, de procéder aux calculs.

Le paquet $T_7=T[t_{31}, t_{32}]$ correspond à la tâche : *Etablir une intégrale itérée triple qui calcule la masse du solide d'un solide dont la densité est donnée par $\delta(x, y, z)$ et qui a la forme d'une région enfermée dans des graphiques d'équations données*. Cette tâche est un prolongement de la tâche précédente pour le cas des solides.

Comme pour $T_{3[b]}$ (section 17.4) le paquet $T_8=T[t_{33}, t_{34}]$ correspond à des exercices qui propose une modélisation de situations « réelles ». Le premier est très élémentaire et la part d'initiative de l'étudiant quant à la modélisation reste modeste. Le deuxième est un peu plus complexe mais est très téléguidé. Notons qu'il est précédé du symbole \square .

Le paquet $T_9=T[t_{35}, t_{36}]$ est le dernier de la section 17.5 il est aussi précédé du symbole \square . Il se rapporte au calcul d'une valeur approchée de la masse d'une région cubique à partir de la triple somme de Riemann $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta(u_i, v_j, w_k) \Delta z_k \Delta y_j \Delta x_i$, où la fonction densité, la valeur de n et chaque pas pour u_i, v_j et w_k sont donnés. C'est donc essentiellement une tâche calculatoire, ce qui justifie le classement en \square . Le but du calcul fait référence au début du cours, mais

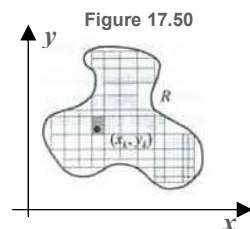
l'initiative de l'étudiant est inexistante et aucun retour sur le résultat obtenu n'est proposé.

3.6 Section 17.6 : Moments d'inertie et centre de masse

La section 17.6 s'intitule *Moments d'inertie et centre de masse* et comporte 4 définitions, 1 théorème, 7 exemples et 32 exercices regroupés en 9 paquets.

Cette étude est introduite comme prolongement de celle menée dans la section 6.7 qui a traité des *moments* et du *centre de masse* d'une plaque plane **homogène**. En s'appuyant sur les intégrales doubles l'auteur s'attache ici à l'étude de la même notion pour des plaques **non homogènes** L qui ont la forme d'une région R du plan xOy . Si la fonction δ qui donne la densité en un point $P(x,y)$ de L est continue sur R , alors la formule pour la *masse* de L est donnée par (17.23).

Pour donner les formules des *moments* et du *centre de masse*, l'auteur considère d'abord un découpage $d=\{R_k\}$ de R en choisissant un point quelconque (x_k, y_k) de R_k mis en évidence dans la figure (17.50). Le fait que δ est continue sur R permet à l'auteur d'affirmer que la densité en deux points voisins de R ne sont pas très différentes. En effet, sur un élément d'aire R_k , δ est presque constante. Par conséquent, l'auteur met en évidence que, si $\|d\|$ est proche de 0, la masse Δm_k relative à R_k est approximativement égale à $\delta(x_k, y_k)\Delta A_k$ où ΔA_k est l'aire de R_k . En supposant que la masse Δm_k est centrée en (x_k, y_k) l'auteur exprime le moment [ponctuel] par rapport à l'axe Ox de cet élément de L par le produit $y_k\delta(x_k, y_k)\Delta A_k$. Comme la somme des moments $\sum_k y_k\delta(x_k, y_k)\Delta A_k$ devrait approcher les moments de toute la plaque, l'auteur définit respectivement les moments, notés M_x et M_y de L par rapport à l'axes Ox et Oy par



$$M_x = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k y_k \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y \delta(x, y) dA \quad \text{et} \quad M_y = \lim_{\|\Delta A_k\| \rightarrow 0} \sum_k x_k \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x \delta(x, y) dA$$

En se referant à la section (6.24) l'auteur précise que la *centre de masse* (ou centre de gravité) de la plaque est le point (\bar{x}, \bar{y}) tel que $\bar{x} = M_y/m$ et $\bar{y} = M_x/m$.

La définition (17.24) suivante est alors mise en place en accord avec le discours ci-dessus.

Soit L une plaque qui a la forme d'une région R du plan xOy . Si la fonction δ qui donne la densité en (x,y) est une fonction continue sur R les expressions de la *masse* m , des *moments* M_x et M_y et du **centre de masse** (\bar{x}, \bar{y}) sont :

Définition (17.24)

- (1) $m = \iint_R \delta(x, y) dA$
- (2) $M_x = \iint_R y \delta(x, y) dA, \quad M_y = \iint_R x \delta(x, y) dA$
- (3) $\bar{x} = M_y/m$ et $\bar{y} = M_x/m$

L'auteur précise tout de suite que quand L est **homogène** la densité $\delta(x, y)$ est constante et que, dans ce cas, le centre de masse ne dépend que de la forme de la plaque et est appelé le **centre géométrique** de la région R .

Deux exemples (01 et 02) suivent cette définition. L'exemple (01) est une reprise de l'exemple (07) (section 17.5) et calcule les coordonnées du centre de masse (ou point d'équilibre) de la région considérée. Notons que le dessin utilisé dans l'exemple (07) est aussi

repris ici. L'exemple (02) s'intéresse aux coordonnées du centre de masse d'une plaque plane en forme d'une région R déterminée par une parabole et une droite où la densité en un point P de R varie comme la distance de P à l'axe de la parabole. Ici aussi une représentation graphique de R accompagne la résolution.

Ensuite l'autre précise que :

« Les moments M_x et M_y sont aussi appelés **premiers moments** de L par rapport aux axes de coordonnées, car il existe des seconds moments ou **moments d'inerties** notés I_x et I_y par rapport à l'axe Ox et Oy respectivement, dont l'expression est la même que celle des premiers moments à part qu'elle contient les carrés des distances aux axes de coordonnées. La somme $I_\theta = I_x + I_y$ est le **moment polaire d'inertie** ou **moment d'inertie par rapport à l'origine** ». [SWOF, p. 925]

Vient ensuite une définition formelle de **moments d'inerties**.

Définition (17.25)

$$I_x = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k y_k^2 \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R y^2 \delta(x, y) dA,$$

$$I_y = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k x_k^2 \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R x^2 \delta(x, y) dA$$

$$I_\theta = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k (x_k^2 + y_k^2) \delta(x_k, y_k) \Delta A_k = \iint_R (x^2 + y^2) \delta(x, y) dA$$

Un exemple (03) assez simple suit cette définition et calcule le moment d'inertie par rapport à l'axe Ox d'une plaque en forme de demi-disque, où la densité y est directement proportionnelle à la distance à l'axe Ox . Une représentation graphique accompagne la solution.

On trouve ensuite l'étude des **moments et du centre de masse en 3D**. Dans ce cas, l'auteur considère un solide qui occupe une région Q de l'espace de dimension trois et revient à la définition 17.22 de la masse d'un solide, notamment, $\iiint_Q \delta(x, y, z) dV$. Comme pour le cas d'une plaque plane, il souligne :

Le moment par rapport au plan xOy d'un élément Q_k de Q vaut approximativement le produit $z_k \delta(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$. Une somme sur k et un passage à la limite sur la dimension des éléments de volume conduisent au **moment M_{xy} du solide par rapport au plan xOy** (voir (17.26)(2)). Les **moments M_{xz} et M_{yz} par rapport au plan xOz et yOz** respectivement s'obtiennent de la même façon. Le **centre de masse** est défini par (17.26)(3).

Vient ensuite la définition formelle de **moments et du centre de masse en 3D** ci-dessous.

Moments et centre de masse en trois dimensions (17.26)

$$(1) \quad m = \iiint_Q \delta(x, y, z) dV$$

$$(2) \quad M_{xy} = \iiint_Q z \delta(x, y, z) dV ; \quad M_{xz} = \iiint_Q y \delta(x, y, z) dV ; \quad M_{yz} = \iiint_Q x \delta(x, y, z) dV$$

$$(3) \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} ; \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} ; \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}$$

L'auteur rappelle ici que les équations du point (3) peuvent aussi s'écrire $m \bar{x} = M_{yz}$; $m \bar{y} = M_{xz}$; $m \bar{z} = M_{xy}$. En effet, $m \bar{x}$, $m \bar{y}$ et $m \bar{z}$ sont les moments par rapport au plan yOz , xOz et xOy respectivement de la masse totale m si elle est localisée en $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Deux exemples (04 et 05) suivent cette définition. L'exemple (04) est une reprise de l'exemple (06) (section 17.5) et calcule le centre de masse du solide en question. A noter qu'ici aussi apparaît le même dessin que celui utilisé précédemment. L'exemple (05) s'intéresse au calcul d'une des coordonnées du centre de masse du solide Q dont la frontière

est composée d'une surface parabolique et de trois plans d'équations données. Dans cet exemple, la densité en un point $P(x,y,z)$ de Q est proportionnelle à la distance de P à l'origine. C'est un exemple d'application directe du cours. La difficulté est dans la détermination du domaine d'intégration et le choix d'un ordre ad hoc dans l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale itérée.

Ensuite l'auteur débouche sur l'étude des **moments d'inerties des solides**. Ainsi il précise :

Comme une particule de masse m située au point (x, y, z) est à une distance $(x^2+y^2)^{1/2}$ de l'axe Oz , son **moment d'inertie I_z par rapport à l'axe Oz** est défini par $(x^2+y^2)^{1/2}m$. De même, les **moments d'inertie I_x et I_y par rapport à l'axe Ox et Oy** respectivement sont $(y^2+z^2)^{1/2}m$ et $(x^2+z^2)^{1/2}m$. Dans le cas d'un solide Q comme celui de la figure 17.55 [même que la figure 17.46] une décomposition en éléments de masse infinitésimaux et un passage à la limite sur les sommes qui en résultent mènent [aux formules 17.27] ci-après. [SWOF, p. 930]

L'auteur donne ainsi la définition formelle des **moments d'inerties en 3D**.

Moments d'inertie des solides (17.27)	$I_z = \iiint_Q (x^2+y^2)\delta(x, y, z)dV$ $I_x = \iiint_Q (y^2+z^2)\delta(x, y, z)dV$ $I_y = \iiint_Q (x^2+z^2)\delta(x, y, z)dV$
---------------------------------------	---

Notons que la décomposition en éléments de masse infinitésimaux et le passage à la limite sur les sommes de Riemann ne sont qu'évoquées par l'auteur, qui considère cette méthode comme acquise et donc institutionnalisée, dans le discours d'ordre technologique ou théorique. En pratique, elle n'apparaît jamais dans les tâches demandées aux étudiants, sauf sur des exemples numériques sans enjeu réel.

Deux exemples (06 et 07) suivent la définition (17.27). Ce sont tous deux des applications directe du cours qui s'appuient sur des exemples déjà étudiés dans les sections précédentes et sur les dessins faits alors.

Pour clore la partie cours de cette section (17.6), l'auteur propose une démonstration du **second théorème de Guldin**³² (théorème 17.28) déjà cité dans la section 6.26.

Viennent ensuite les exercices non résolus. Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 32 regroupés en 10 paquets.

Le premier paquet $T_1=T[t_1, t_8]$ correspond à la tâche : *déterminer la masse et le centre de masse d'une plaque de densité donnée et dont la frontière se compose de graphiques d'équations données*. C'est une tâche simple. Elle comporte des expressions et des fonctions densités simples. A priori, il est commode d'obtenir une représentation analytique nécessaire pour le calcul de l'intégrale double conduisant au calcul des masses et de centre de masse demandés. Ce paquet permet donc essentiellement un re-travail de la tâche de calcul d'une intégrale double.

Le paquet $T_2=T[t_9, t_{14}]$ correspond à la tâche générique *Calculer le moment d'inertie d'une plaque par rapport à un point ou à un axe*. Il se décompose cependant en deux sous-paquet

³² Même que "Teorema de Pappus". (SWOP, p. 520)

$T_{2[a]}$ et $T_{2[b]}$. Dans les quatre tâches de $T_{2[a]}=T[t_9, t_{12}]$ la plaque est déterminée par des équations et les axes par rapport auxquels on demande de calculer les moments d'inertie sont toujours des axes du repère. Dans le sous-paquet $T_{2[b]}=T[t_{13}, t_{14}]$ les plaques sont respectivement un carré et un triangle, il n'y a pas de repère prédéfini et les axes par rapport auxquels on demande le calcul des moments d'inertie sont liés aux plaques et oblige à des choix judicieux de repères pour décrire analytiquement les plaques.

Le paquet $T_3=T[t_{15}, t_{16}]$ donne la formule $I=md^2$, où m la masse d'un solide et I le moment d'inertie par rapport à une droite, et s'appelle le *rayon de giration* (distance à laquelle toute la masse d'un solide devrait être concentrée pour que le moment d'inertie ne change pas). Les deux exercices demandent de calculer d dans deux cas où I a été calculé précédemment !

Le paquet $T_4=T[t_{17}, t_{18}]$ correspond à la tâche : *déterminer le centre de masse d'un solide Q de densité donnée*. Les solides sont très simples et si les expressions des fonctions densités ne sont pas données explicitement, elles sont décrites en termes géométriques simples.

Le paquet $T_5=T[t_{19}, t_{20}]$ correspond à la tâche : *établir les intégrales itérées qui permettent de calculer le centre de masse du solide qui occupe la région Q et de densité $\delta(x,y,z)$ donnée*. Ici les fonctions densités sont données. Les solides sont délimités par des paraboloides et des plans d'équations données. La difficulté est surtout dans la représentation analytique de Q et dans la mise en place d'une écriture algébrique du calcul de l'intégrale itérée demandée. A noter qu'ici on ne demande pas à l'étudiant de procéder aux calculs. Notons aussi que la représentation graphique n'est pas demandée. Mais, comme dans les cas de calculs des volumes, cela pourra apparaître, notamment par effet de contrat.

Le paquet $T_6=T[t_{21}, t_{22}]$ correspond à la tâche : *établir les intégrales itérées qui permettent de calculer le centre géométrique d'un solide représenté graphique*. Les dessins des solides concernés représentent respectivement l'hémisphère nord centré de rayon a et un cône (centré dans l'axe Oz , convexe vers le haut) coiffé par un plan parallèle au plan xOy . Ce sont donc deux sous-tâches simples d'application du cours. Comme pour T_5 , ici on ne demande pas non plus de procéder aux calculs. On peut dire que c'est juste une tâche d'entraînement sur la coordination entre les registres graphique et analytique et l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale itérée.

Le paquet $T_7=T[t_{23}, t_{24}]$ correspond à un type de tâche similaire à T_6 , sauf qu'ici on ne donne pas les dessins, mais les équations des surfaces qui composent les frontières des solides. De plus, on s'intéresse non seulement à établir l'intégrale itérée, mais aussi au calcul des coordonnées du centre géométriques (pour t_{23}).

Le paquet $T_8=T[t_{25}, t_{28}]$ correspond à un type de tâche similaire à T_6 , sauf qu'ici on ne s'intéresse pas au centre de masse, mais au moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du solide délimité par des surfaces d'équations données. Ces solides sont une la sphère et un cône de densités données (pour les deux premières tâches) et un tétraèdre et un ellipsoïde homogènes (pour les deux dernières tâches). On ne demande à l'étudiant ni de faire le dessin ni de procéder aux calculs.

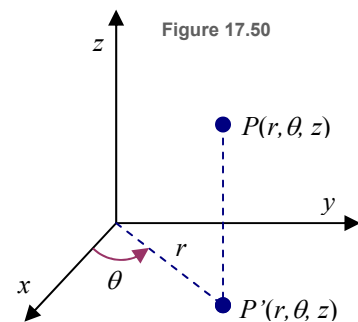
Le paquet $T_9 = T[t_{29}, t_{30}]$ correspond à la tâche : *calculer une valeur approchée de la masse de la plaque de densité $\delta(x,y)$ et de forme R donnée*. C'est une tâche qui est a priori difficile et utilise la technique appelée *méthode de Monte Carlo*. Les résultats sont donc difficilement accessibles par des techniques papier/crayon. En effet, l'auteur préconise l'usage d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel (présence du symbole \square).

Le $T_{10} = T[t_{31}, t_{32}]$ est le dernier paquet de la section 17.6. Il se rapporte à T_9 et correspond à la *généralisation de la méthode de Monte Carlo à une fonction f de trois variables et un solide Q de volume V* . Il s'intéresse alors au calcul d'une valeur approchée de la masse d'un solide de densité donnée où la frontière de Q est déterminée par la composition de surfaces d'équations données. C'est aussi une tâche dont les résultats sont laborieux par des techniques papier/crayon. C'est pourquoi, l'auteur recommande l'usage d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul formel (présence du symbole \square).

3.7 Section 17.7 : Coordonnées cylindriques

La section 17.7 s'intitule *Coordonnées cylindriques* et comporte 2 théorèmes, 6 exemples et 40 exercices regroupés en 5 paquets.

Les *coordonnées cylindriques* sont ici introduites comme extension des systèmes des coordonnées polaires à l'espace de dimension trois. Pour cela, l'auteur associe à un point P de l'espace un triplet (r, θ, z) qu'il appelle **système de coordonnées cylindriques** de P , où r et θ sont les coordonnées polaires de la projection P' de P dans le plan xOy et z la cote ou troisième coordonnée de P mise en évidence dans la figure 17.60 (que nous reproduisons ci-contre).



L'auteur précise tout de suite que le principal usage des coordonnées cylindriques sera de simplifier le calcul de certaines *Intégrales Multiples*. Ensuite, en revenant au théorème (13.8) qui établissait la relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires dans le plan, il donne le théorème suivant qui est une extension de (13.8) en 3D, mettant en évidence la relation entre les coordonnées cartésiennes et cylindriques :

Théorème (17.29) Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) et les coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'un point P sont liées par : $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $\operatorname{tg} \theta = y/x$, $r^2 = x^2 + y^2$, $z = z$.

Trois représentations graphiques suivent ce théorème, notamment le graphique d'équation $r=r_0$ c'est-à-dire le cylindre circulaire droit de rayon r_0 et d'axe Oz , le plan d'équation $\theta = \theta_0$ (qui contient l'axe Oz) et celui d'équation $z=z_0$ (perpendiculaire à l'axe Oz).

Suivent deux exemples (01 et 02). L'exemple (01) consiste en la conversion de l'équation d'un cône donné en coordonnées cartésiennes en cylindriques. L'exemple (02) illustre le sens contraire du premier exemple en travaillant sur l'équation d'un parabolôïde de révolution puis d'un cylindre droit dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz . C'est donc des exemples simples d'application directe du théorème (17.29), ils sont accompagnés des représentations

graphiques des équations concernées.

Ensuite l'auteur s'attache à l'étude des intégrales triples en coordonnées cylindriques. Pour cela, il considère ce qu'il appelle « le cas le plus simple » où f est une fonction de r , θ et z continue sur une région Q de \mathbb{R}^3 représentée analytiquement par :

$$Q = \{ (x, y, z) : a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d, m \leq z \leq n \}.$$

Et graphiquement par la figure 17.61. Ensuite Q est découpé en sous-régions Q_1, Q_2, \dots, Q_n de la même forme que Q par des cylindres circulaires d'équation $r=a_k$, des plans contenant l'axe Oz d'équation $\theta=c_k$ et des plans parallèles au plan xOy d'équations $z=m_k$ où a_k, c_k et m_k sont des points des intervalles $[a, b]$; $[c, d]$ et $[m, n]$ respectivement. Puis il donne le volume ΔV_k d'un élément Q_k de ce découpage (représenté graphiquement dans la figure 17.65) comme le produit de la base $\bar{r}_k \Delta r_k \Delta \theta_k$ (où \bar{r}_k est le rayon moyen de la base de Q_k) par la hauteur Δz_k :

$$\Delta V_k = \bar{r}_k \Delta r_k \Delta \theta_k \Delta z_k$$

En considérant un point $(r_k, \theta_k, \Delta z_k)$ quelconque de Q_k et $\|d\|$ la longueur de la plus longue des diagonales de Q_k , il donne la définition de l'intégrale de f sur Q par :

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k f(r_k, \theta_k, z_k) \Delta V_k$$

L'auteur admet alors (en disant que c'est un résultat établi dans des cours de niveau supérieur) que si Q est une région de type comme celle du « cas le plus simple » alors,

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

L'auteur rappelle tout de suite qu'il y a **cinq** autres ordres d'intégrales possibles (sans préciser, mais cela semble sous-entendu, qu'ils donnent le même résultat).

Contrairement aux sections précédentes, aucun exemple ne suit cette définition. L'auteur se pose tout de suite la question de la généralisation de cette définition pour un domaine d'intégration (décrit en coordonnées cylindriques) d'une forme plus compliquée qu'un cylindre circulaire droit. Ainsi, il considère une région quelconque Q de \mathbb{R}^3 définie analytiquement par

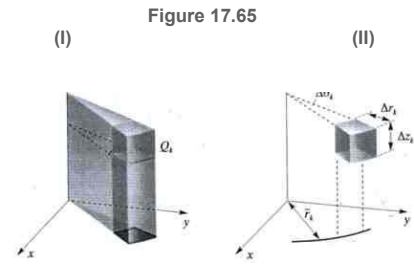
$$Q = \{ (r, \theta, z) : (r, \theta) \text{ dans } R \text{ et } k_1(r, \theta) \leq z \leq k_2(r, \theta) \}$$

Où R est une région polaire du type de celles étudiées dans la section 17.3, où k_1 et k_2 sont des fonctions qui ont des dérivées partielles premières continues sur tout R . L'auteur admet ensuite que l'on peut démontrer³³ le résultat suivant :

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \iint_R \left[\int_{k_1(r, \theta)}^{k_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) dz \right] dA$$

En se référant au cas particulier où R est une région polaire comme celle de la figure 17.25

³³ Comme précédemment (théorème 17.19) telle démonstration n'est pas mise en place par l'auteur.

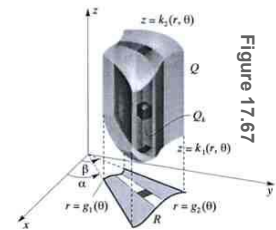


(section 17.3) il donne le théorème ci-dessous pour le calcul de l'intégrale triple de f sur Q .

Théorème de calcul d'une intégrale triple (coordonnées cylindriques) (17.30)

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dV = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{k_1(r, \theta)}^{k_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz dr d\theta$$

Puis l'auteur s'intéresse à l'interprétation de ce résultat en tant que limite d'une triple somme. Ainsi, la première rassemble en une colonne, parallèlement à l'axe Oz , les éléments de volume de Q_k depuis la face inférieure de Q (d'équation $z=k_1(r, \theta)$) jusqu'à la face supérieure (d'équation $z=k_2(r, \theta)$) selon la figure 17.67. La seconde somme, qui fait varier r , réunit ces colonnes en fuseau dans une direction θ fixée. Enfin, la somme en θ , de α jusqu'à β , correspond à un balayage de Q par les fuseaux.



Suivent quatre exemples (03, 04, 05 et 06) qui sont des applications du théorème (17.30). L'exemple (3) consiste à déterminer le centre géométrique du solide hémisphérique Q centré de rayon a . L'exemple (4) s'intéresse au calcul de la masse d'un solide Q borné par une surface conique centrée sur l'axe Oz (convexe vert le haut) et coiffé supérieurement par un plan parallèle au plan xOy , où la densité est directement proportionnelle au carré de la distance d'un point P de Q à l'origine. L'exemple (5) établit le calcul de la masse et du moment d'inertie d'un solide qui a la forme de la région Q obtenue en extrayant un cylindre centré dans l'axe Oz (d'équation donnée) de la demi-sphère supérieure d'équation donnée. L'exemple 06 s'intéresse au calcul de l'énergie radioactive totale nécessaire pour que la densité radioactive dans un solide soit égale à une constante donnée. Cet exemple est relatif à des expériences qui visent à tester l'effet d'une exposition au radon et elles ont lieu dans une cloche en verre dont la forme est celle d'un parabolôïde centré sur l'axe Oz (positif) convexe vers le bas et d'équation donnée. A noter que les trois premiers exemples sont accompagnés d'une représentation graphique, alors que le dernier fait référence à la figure 17.36 relative à l'exemple 2, section 17.4.

Viennent ensuite les exercices non résolus. Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 40 regroupés en 5 paquets.

Le premier paquet $T_1 = T[t_1, t_{14}]$ correspond à la tâche : *donner une description du graphique d'une équation donnée dans l'espace de dimension trois*. Les équations en question sont données en coordonnées cylindriques. Comme pour T_5 (section 17.5) la consigne de décrire peut être ici aussi interprétée de diverses façons. On pourrait également attendre une représentation graphique. Comme précédemment, dans le corrigé en fin de livre, l'auteur donne une description en langue naturelle, décrivant les graphiques comme délimités par des surfaces données par leurs équations. On ne demande pas ici de tracer les dessins. Ce sont justement des exemples de reconnaissance d'expressions des surfaces données en coordonnées cylindriques.

Le paquet $T_2 = T[t_{15}, t_{24}]$ correspond à la tâche : *transformer une équation donnée en coordonnées cartésiennes, en coordonnées cylindriques*. La tâche proposée à l'étudiant consiste uniquement à transformer les équations concernées en coordonnées cylindriques. C'est donc une tâche d'application directe et simple du théorème 17.29 étudié au niveau

cours.

Le paquet $T_3 = T[t_{25}, t_{28}]$ correspond à la tâche : *Pour une fonction continue quelconque f de r , θ et z et pour une région Q dessinée, établir une intégrale itérée triple en coordonnées cylindriques égale à $\iiint_Q f(r, \theta, z) dV$. Comme pour T_2 section 17.5, ici aussi les représentations graphiques sont données et comportent des dessins de solides simples, dont les frontières sont composées par des surfaces dont les équations sont données sur le graphique, a priori familières des étudiants, permettant donc de dégager des représentations analytiques en coordonnées cylindriques, nécessaires pour établir les écritures algébriques du calcul d'intégrales itérées demandées. Notons que, l'utilisation des symétries est également possible pour toutes les tâches de type T_3 . A noter aussi qu'ici on ne demande pas à l'étudiant de procéder aux calculs. En effet, la fonction $f(r, \theta, z)$ ne sont pas définies. Comme pour beaucoup des tâches précédentes, c'est aussi un type de tâche où l'auteur fait allusion à l'importance qu'il peut y avoir dans l'interaction entre les registres graphiques et analytiques et l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale itérée en coordonnées cylindriques.*

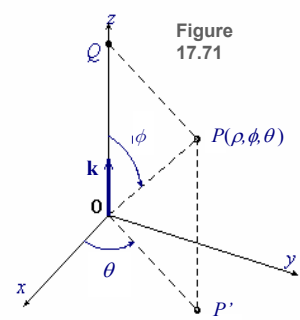
Le paquet $T_4 = T[t_{29}, t_{38}]$ regroupé sous le titre laconique *utiliser les coordonnées cylindriques*, correspond à la tâche : *calculer le : volume, le centre géométrique, un moment d'inertie, ou la masse d'un solide, en utilisant les coordonnées cylindriques*. Les solides sont décrits en langue naturelle ou par des équations des surfaces qui les délimitent et sont assez simples. Un exercice (t_{37}) correspond à un calcul approché de masse, difficilement accessible par des techniques papier/crayon, (présence du symbole \square). Contrairement à T_3 , ici on demande, à l'étudiant d'obtenir nécessairement une valeur effective de l'intégrale. Par contre, on ne lui demande pas explicitement de faire le dessin. Mais comme précédemment cela pourra apparaître notamment par effet de contrat.

Le paquet $T_5 = T[t_{31}, t_{32}]$ est le dernier de la section 17.7 et correspond à la tâche : *calculer l'intégrale à l'aide des coordonnées cylindriques*. Ici l'écriture du calcul d'intégrale est déjà établie, en coordonnées cartésiennes. De plus, les expressions des bornes d'intégration et celles des fonctions sous les signes d'intégration donnent des moyens d'emploi direct du théorème 17.29 (cours de cette section). L'utilisation des coordonnées cylindriques est imposée (consigne de l'énoncé) comme technique nécessaire pour accomplir T_5 , l'étudiant n'a pas la charge d'en voir la nécessité lui-même. A priori, la seule difficulté est liée aux calculs qui peuvent être plus au moins lourds.

3.8 Section 17.8 : Coordonnées sphériques

La section 17.8 s'intitule *Coordonnées sphériques* et comporte 2 théorèmes, 6 exemples et 42 exercices regroupés en 7 paquets.

Pour introduire les *coordonnées sphériques* l'auteur considère un point P défini par (ρ, ϕ, θ) , où, selon la figure 17.71, $\rho = \|\overline{OP}\|$, ϕ est l'angle entre le vecteur position \overline{OP} et le vecteur \mathbf{k} et θ l'angle polaire associé à la projection P' de P sur le plan xOy . Le point Q



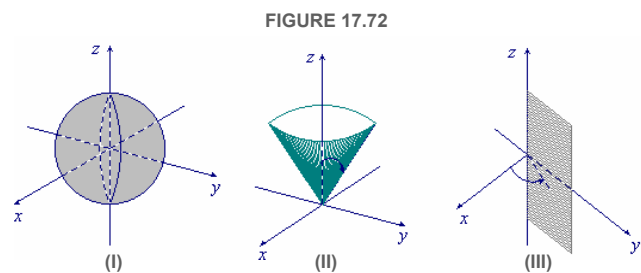
de la figure est la projection de P sur l'axe Oz . L'auteur précise ensuite que dans ce système de coordonnées ρ est toujours positif et que $0 \leq \phi \leq \pi$.

Comme pour l'introduction des coordonnées cylindriques, ici l'auteur met aussi en évidence, trois représentations graphiques (figure 17.72, que nous reproduisons ci-après) relatives aux trois coordonnées sphériques :

Le graphique de l'équation $\rho = \rho_0$ pour $\rho \geq 0$, c'est-à-dire la sphère de rayon centrée, donnée dans la figure 17.72 (I). Il est établi que le graphique $\rho = 0$ est réduit au seul point.

Le graphique d'équation $\phi = \phi_0$ pour $0 \leq \phi \leq \pi$, qui est un demi-cône de sommet 0, donné dans la figure 17.72 (II). Le graphique $\phi = 0$ est la partie positive de l'axe Oz tandis que le graphique de $\phi = \pi$ est la partie négative.

Enfin le graphique de $\theta = \theta_0$, c'est-à-dire le demi-plan qui contient l'axe Oz , est donné dans la figure 17.72 (III).



Ces trois représentations graphiques sont plus tard utilisées par l'auteur comme éléments d'appui lorsqu'il considérera un découpage d'une région Q donnée en coordonnées sphériques. A présent, il fait le lien avec l'étude des rapports possibles entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques, en le précisant comme suit :

Les coordonnées sphériques (ρ, ϕ, θ) d'un point P sont liées à ceux de coordonnées cartésiennes (x, y, z) par des relations qui se lisent dans la figure 17.71.

$$x = \|\overline{OP}\| \cos \theta \text{ et } y = \|\overline{OP}\| \sin \theta \text{ et d'autre part, } \|\overline{OP}\| = \|\overline{QP}\| = \rho \sin \phi \text{ et } \|\overline{QP}\| = \rho \cos \phi$$

A partir de ces relations l'auteur donne le théorème suivant, mettant en évidence la relation entre les deux systèmes des coordonnées :

Théorème (17.31)

Les coordonnées sphériques (ρ, ϕ, θ) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point P sont liées par :

- (1) $x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$
- (2) $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$

Trois exemples (01, 02 et 03) suivent ce théorème. L'exemple 01 est relatif à la recherche des coordonnées cartésiennes et cylindriques d'un point P données en coordonnées sphériques. Il est accompagné d'une représentation graphique (figure 17.73). L'exemple 02 s'intéresse à écrire en coordonnées sphériques, l'équation d'un parabolôïde donnée en coordonnées cartésiennes. Aucun dessin n'accompagne cet exemple. L'exemple 03 consiste à écrire en coordonnées cartésiennes une équation donnée en coordonnées sphériques, et à décrire son graphique. Ces sont des exemples simples d'application directe du cours.

Suit l'étude des intégrales triples en coordonnées sphériques. Comme précédemment, l'auteur

considère tout d'abord ce qu'il appelle souvent « le cas le plus simple » où f est une fonction de ρ , ϕ et θ continue sur une région Q de \mathbb{R}^3 représentée analytiquement par

$$Q = \{ (x, y, z) : a \leq r \leq b, c \leq \theta \leq d, m \leq z \leq n \}.$$

Et graphiquement par la figure 17.72. Ensuite Q est découpé en sous-régions Q_1, Q_2, \dots, Q_n de la même forme que Q par des sphères concentriques d'équation $\rho = a_k$, des cônes d'axe confondu avec l'axe Oz d'équation $\phi = c_k$ et des demi-plans contenant l'axe Oz d'équations $\theta = m_k$ où a_k, c_k et m_k sont des points des intervalles $[a, b]$, $[c, d]$ et $[m, n]$ respectivement (ici l'auteur renvoie aux trois dessins donnés dans la figure 17.72).

Ensuite, l'auteur donne graphiquement un élément de volume Q_k résultat d'un tel découpage de la figure 17.74 (I). En s'appuyant sur cette dernière, il précise :

L'accroissement $\Delta\rho_k$ est la distance entre deux sphères successives, $\Delta\phi_k$ est le changement de l'angle au sommet entre deux cônes successifs et $\Delta\theta_k$ l'angle entre deux demi-plans successifs. La figure 17.74(II) montre un point P en coordonnées sphériques (ρ, ϕ, θ) et sa projection P' sur l'axe Oz . La longueur du segment PP' est, par la trigonométrie, $\rho_k \sin\phi_k$.

En revenant au théorème (1.14) relatif à la longueur d'un arc circulaire, il conclut que l'arc \widehat{PS} mesure $\rho_k \sin\phi_k \Delta\theta_k$. Par ailleurs, la distance de O à P étant ρ_k , l'arc \widehat{PR} est donné par $\rho_k \sin\Delta\phi_k$. Enfin, $\Delta\rho_k$ est la longueur de segment PQ . En assimilant, en première approximation, l'élément de volume Q_k à un parallélépipède rectangle des trois dimensions \widehat{PS} , \widehat{PR} et PQ l'auteur donne le volume ΔV_k d'un élément Q_k de ce découpage (représenté graphiquement par la figure 17.74) par l'expression :

$$\Delta V_k \approx (\rho_k \sin\phi_k \Delta\theta_k)(\rho_k \sin\Delta\phi_k) \Delta\rho_k \quad \text{ou} \quad \Delta V_k \approx \rho_k^2 \sin^2\phi_k \Delta\rho_k \Delta\phi_k \Delta\theta_k$$

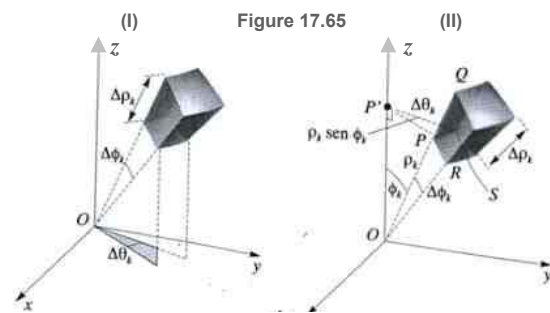
Ensuite l'auteur précise que l'intégrale de f sur Q est définie comme limite de sommes de Riemann $\sum_k f(\rho_k, \phi_k, \theta_k) \Delta V_k$ et donne le théorème suivant sans démonstration :

Théorème de calcul d'une intégrale triple (coordonnées sphériques)

$$\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta) dV = \int_m^n \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin^2\phi d\rho d\phi d\theta \quad (17.32)$$

L'auteur rappelle tout de suite qu'il y a **cinq** autres ordres d'intégrales possibles (sans préciser, mais comme précédemment, cela semble sous-entendu, que les cinq donnent le même résultat). Puis, il précise que les coordonnées sphériques s'emploient aussi sur des régions plus compliquées que celles « du cas le plus simple ». En effet, les bornes d'intégration doivent être modifiées en conséquence.

Suivent trois exemples (04, 05 et 06) comme application du théorème (17.32). L'exemple 04 utilise le même contexte que dans l'exemple 03 de la section 17.7 et consiste également à déterminer le centre du solide hémisphérique de rayon a . L'exemple 05 est aussi une reprise d'un exemple étudié précédemment, le 04 de la section 17.7, il s'intéresse au même résultat.



Enfin, l'exemple 06 cherche le volume et le centre géométrique d'une région Q bornée inférieurement par une surface conique et supérieurement par une sphère avec des équations données. A noter que les trois exemples sont accompagnés d'une représentation graphique comme élément d'appui de la résolution, les calculs essentiels pour accomplir les tâches sont simples, mais ils demandent certaines connaissances de la trigonométrie.

Viennent ensuite les exercices non résolus. Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 42 regroupés en 7 paquets.

Le premier paquet $T_1=T[t_1, t_2]$ correspond à la tâche : *changer les coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques des points donnés*. Ceci est une tâche d'application directe des théorèmes (17.29) (section précédente) et (17.31) (section en cours). C'est donc une tâche simple d'entraînement. Cependant, elle demande aussi des connaissances de trigonométrie.

Le paquet $T_2=T[t_3, t_4]$ correspond à la tâche : *changer les coordonnées cartésiennes en coordonnées sphériques et en coordonnées cylindriques des points donnés*. Ceci est une tâche similaire à T_1 , sauf qu'ici les points de départ sont donnés en coordonnées cartésiennes. Elle est simple et s'outille aussi des deux théorèmes (17.29 et 17.31). C'est donc une tâche d'application directe du cours et semblable aux exemples donnés au niveau *logos*.

Le paquet $T_3=T[t_5, t_{20}]$ correspond à la tâche : *décrire le graphique de l'équation donnée en coordonnées sphériques dans l'espace de dimension trois*. Il s'agit ici d'une tâche où l'auteur attend une description des graphiques concernés en langage naturel, en décrivant les graphiques comme des surfaces données par des équations en coordonnées cartésiennes. On ne demande pas forcément de faire les dessins. C'est donc une tâche de reconnaissance des graphiques où les équations correspondantes sont données en coordonnées sphériques.

Le paquet $T_4=T[t_{21}, t_{30}]$ correspond à la tâche : *écrire l'équation donnée en coordonnées sphériques*. Ici les équations en question sont données en coordonnées cartésiennes. Il s'agit d'une application directe du théorème (17.31). A priori les équations concernées sont simples. Cependant, les manipulations algébriques nécessaires lors de l'utilisation du théorème, peuvent rendre certaines tâches (de T_4) laborieuses.

Le paquet $T_5=T[t_{31}, t_{38}]$ correspond à un type de tâche où l'on demande explicitement d'utiliser les *coordonnées sphériques* dans le calcul de grandeurs physiques (*volume, masse, centre de masse ou géométrique, moments d'inertie*) d'un solide à l'aide d'une intégrale triple. Les solides concernés dans toutes les tâches de T_5 sont délimités par les graphiques d'équations données en coordonnées cartésiennes. Ce type se ramène en quelque sorte à des tâches de types T_4 . A noter que, comme pour certaines tâches des sections précédentes, l'utilisation des coordonnées sphériques est également imposée ici comme technique nécessaire pour accomplir T_5 , l'étudiant n'a pas l'initiative d'y penser lui-même. A noter aussi que la dernière tâche de ce paquet est une tâche où l'intérêt est d'évaluer la masse de l'atmosphère depuis le niveau du sol jusqu'à une altitude donnée. Il s'agit donc d'une tâche d'application où on suppose que la terre est une sphère de 6370 km de rayon et que la densité

δ de l'atmosphère à une distance de ρ mètres du centre de la terre peut être approximée par $\delta = 619,09 - (9,7 \times 10^{-5})\rho$. C'est une tâche difficilement accessible par des techniques papier/crayon (présence du symbole \square).

Le paquet $T_6 = T[t_{39}, t_{40}]$ correspond à la tâche : *calculer l'intégrale donnée en passant aux coordonnées sphériques*. Comme pour T_5 (section 17.7) ici aussi l'écriture algébrique du calcul d'intégrale est déjà établie en coordonnées cartésiennes. Elle comporte (dans chaque tâche t) tous les composants nécessaires pour procéder aux calculs. De plus, les expressions des bornes d'intégration et celles des fonctions sous les signes d'intégration donnent des moyens d'emploi direct du théorème 17.31 (de la section en cours). En effet, ici aussi l'utilisation des coordonnées sphériques est imposée comme technique permettant d'accomplir T_6 . A priori la seule difficulté est liée aux calculs qui peuvent être plus au moins lourds.

Le paquet $T_7 = T[t_{41}, t_{42}]$ est le dernier de la section 17.8. Il comporte deux problèmes d'application où l'auteur précise d'abord que le lien entre les coordonnées sphériques et cartésiennes joue un rôle important dans la mise au point des articulations des bras d'un robot. En utilisant un dessin, qui accompagne l'énoncé, il illustre le mouvement dû à trois articulations du bras de robot : une charnière qui permet la rotation du bras autour de l'axe Oz d'un angle θ dans le plan xOy ; une coulisse permettant d'étendre ou de contracter la longueur L du bras et une troisième articulation qui permet d'incliner le bras du robot de haut en bas, selon l'angle ϕ des coordonnées sphériques. Si les articulations sont fixées selon les angles θ et ϕ et la longueur L du bras, la tâche s'intéresse alors aux coordonnées cartésiennes d'un point P entre le bras et la main. On cherche aussi à savoir de combien doivent varier θ , ϕ et L pour que le bras puisse saisir un objet situé en un point repéré par ses coordonnées cartésiennes. Quand les réglages ne sont pas tout à fait exacts, il s'ensuit de légères différences de position de la main qui s'expriment en fonction des impressions de réglage des articulations. En désignant par $\Delta\theta$, $\Delta\phi$ et ΔL les erreurs de θ , ϕ et de L la tâche t_{42} s'intéresse, grâce aux différentielles, aux formules permettant d'estimer les variations d'erreurs de θ , ϕ et de L . C'est donc une tâche difficile et les calculs sont fastidieux s'ils ne sont pas faits à l'aide d'une machine (ce qui n'est pas préconisé dans l'énoncé, absence du symbole \square).

3.9 Section 17.9 : Changement de variables et Jacobiens

Le *changement de variables et Jacobiens* est une notion importante dans l'étude des *IM*. Parmi les techniques associées, ce sont surtout ceux concernant aux changements de variables en coordonnées polaires, cylindriques et sphériques, étudiés plus haut, que souvent interviennent dans les types de tâches que nous nous focalisons. En effet, nous plaçons l'analyse relative à cette section (17.9) en annexe.

3.10 Section 17.10 : Exercices récapitulatifs

La section 17.10 s'intitule *Exercices récapitulatifs* et comporte 53 exercices regroupés en 14

paquets. Chaque paquet comporte des types de tâches similaires à des tâches déjà étudiées dans les sections précédentes (17.1 à 17.9).

Par exemple, le premier paquet $T_1 = T[t_1, t_6]$ correspond à la tâche : *calculer l'intégrale itérée donnée*. C'est une tâche similaire à T_3 (section 17.1) et à T_1 (section 17.5) où tout est donné. C'est-à-dire que l'écriture algébrique du calcul d'une intégrale, comportant tous les éléments nécessaires pour procéder aux calculs, est établie. La tâche proposée à l'étudiant est simplement d'effectuer les calculs. Les trois premiers exercices font un récapitulatif des calculs des intégrales doubles et les trois derniers des calculs des intégrales triples. Au niveau des techniques (*techniques τ permettant d'accomplir t_i*), il suffit de connaître la définition des intégrales itérées (*technologie θ justifiant τ*) et d'avoir des connaissances sur les intégrales simples. A noter qu'ici l'étudiant n'a aucune raison de représenter graphiquement la région d'intégration qui ne lui a pas été demandée. A priori la difficulté essentielle est liée aux calculs qui peuvent être plus au moins lourds.

Certains paquets de cette section peuvent comporter des tâches assez compliquées (en termes de représentations, soit graphiquement soit analytiquement), car les tâches proposées aux étudiants nécessitent la **production** des dessins, tandis que dans les exemples donnés au niveau cours, les dessins, donnés sans explication, ne demandent que la **lecture** (voire la **reproduction**). Nous observons donc ici une rupture de contrat dans le passage du cours aux exercices.

On remarquera qu'ici, les degrés de difficulté ne dépassent pas ceux des types de tâches qui se trouvent systématiquement à la fin de chaque section précédente. En général les types de tâches présents dans les 14 paquets (section 17.10) sont répétitifs, avec comme variante les types des fonctions (ou équations) qui définissent la tâche. Donc les 53 exercices ont la même finalité que précédemment, caractéristique des exercices d'entraînement.

Cet entraînement par des exercices hiérarchisés, avec les types des tâches bien identifiés, révèle une conception d'un apprentissage très structuré. Mais les aspects de découverte de concept, de conjecture, d'interrogations ouvertes, de preuve, de construction de modèles, ne sont pas tout à fait pris en compte dans les exercices proposés à l'étudiant. Ce qui se caractérise par le fait que le questionnement sur l'origine du concept est pris en charge dans la rédaction du cours. C'est-à-dire que l'étudiant est amené par la main dans une réflexion dont il n'a pas la maîtrise. C'est le cours qui en effet prend en charge l'esprit de recherche par rapport au problème de calcul de l'intégrale multiple, sauf dans les tâches emblématiques où l'étudiant doit lui-même dégager des techniques pouvant permettre les productions des dessins dont il a besoin dans le traitement des tâches proposées.

4. Conclusion sur l'analyse des manuels

Nous avons choisi d'analyser deux manuels universitaires d'Analyse, SWO et SPIE. Rappelons qu'en raison des fortes similitudes dans leurs organisations mathématique et didactique, nous avons placé l'analyse du deuxième en annexe. Dans cette conclusion, nous faisons toutefois référence aux deux manuels.

Afin de mettre en évidence les types de tâches propres aux *IM* proposés dans ces manuels et d'identifier les praxéologies sur le calcul de volumes par des *IM*, les organisations mathématique et didactique dans lesquelles ce type de tâche entre en jeu, nous avons choisi de mener une analyse détaillée, section après section, de la partie cours, et paquet après paquet, de la partie exercices, les techniques disponibles pour les résoudre et leurs justifications technologico-théoriques.

Dans les deux manuels, apparaissent les trois niches possibles pour les *IM* (celle de l'Analyse, celle de la Géométrie et celle de la Physique) telles que nous les avons définies dans notre analyse des programmes.

Néanmoins, la vie de la niche structurelle de l'Analyse est réduite dans chacun des deux manuels pour trois raisons :

- l'absence de démonstrations des théorèmes qui fait ignorer les outils de l'Analyse, notamment les outils topologiques
- l'absence des intégrales généralisées³⁴ et des techniques de convergence
- l'absence de type de tâche dédiée à cette niche

Le fait que les théorèmes ne sont jamais démontrés montre notamment que cette niche reste au niveau de l'évocation.

Globalement, les niches géométrique et physique sont plus investies dans SWO, aussi bien dans le cours, que dans les exemples et dans les exercices. Certes plusieurs exercices nécessitent des applications dans des contextes physiques assez variés dans SPIE mais les *moments d'inertie et les centres de masse* ne sont pas présents dans la partie cours : ils apparaissent comme applications dans les problèmes résolus et dans les problèmes supplémentaires (exercices non résolus) proposés aux étudiants.

Dans les deux manuels, c'est bien la niche géométrique qui est la plus investie, notamment à travers de nombreux exercices et exemples illustrant des calculs d'aires et de volumes.

Par ailleurs, les organisations tant mathématiques que didactiques des deux manuels sont très semblables. Dans l'un comme dans l'autre, l'enseignement des *IM* s'appuie sur une analogie

³⁴ « Les intégrales généralisées ne figurent pas au programme des classes préparatoires ; mais elles sont indispensables à beaucoup d'utilisateurs des Mathématiques ; et même pour le mathématicien qui dispose des théorèmes modernes de l'intégration, il est souvent utile de pouvoir calculer effectivement des intégrales multiples. » (Arnaudès et Lelong-Ferrand , 1977, p. 241).

avec les intégrales simples, commence par l'étude des *intégrales doubles*, puis se généralise aux calculs des *intégrales triples*. Le discours technologico-théorique (*logos*) est d'abord mis en place avec un minimum de questionnement, mais en suivant un mode d'exposition tout à fait classique. Les théorèmes les plus difficiles sont admis, mais dans SWO, il y a une volonté nette de donner un maximum d'interprétations intuitives de ces résultats. Le texte du cours dans SPIE est réduit au minimum.

La grande distinction dans l'organisation didactique tient dans le mode d'exposition du cours. Dans SPIE, en effet, la partie cours ne présente aucun exemple, ceux-ci sont exposés dans la partie intitulée « *problèmes résolus* » isolée de la partie cours. Pour le cas des intégrales doubles, l'auteur donne immédiatement la méthode générale (avec une démarche assez résumée) du calcul de l'intégrale double (dans le cas où F est une fonction de deux variables). Dans SWO, au contraire, plusieurs exemples sont intégrés dans le cours. Le cours est ainsi découpé en petites unités qui suivent un plan général allant du plus simple au plus complexe. Chaque unité comporte des exemples (exercices corrigés) qui correspondent à autant de types de tâches présentés chacun avec une technique directement issue du bloc technologico-théorique (qui vient d'être exposé, pour SWO, ou qui a été exposé antérieurement, pour SPIE).

L'organisation de la partie cours préfigure celle des exercices de fin de section. En effet, ces exercices sont essentiellement des exercices d'entraînement que l'on peut considérer comme des applications immédiates du cours. Une attention particulière est apportée pour que les tâches les plus complexes soient précédées d'un entraînement sur des sous-tâches.

Ainsi, il apparaît clairement que plusieurs exercices, surtout au début des *intégrales doubles*, ne font pas intervenir des *IM*, mais permettent un travail de **lecture** et de **reproduction** graphique de surfaces ou de solides.

Le nombre d'exercices d'entraînement est beaucoup plus important dans SWO et les tâches sont nettement plus découpées. Ainsi, dans SPIE, tous les exercices aboutissent à un calcul effectif d'une *IM*, alors que dans SWO, certaines tâches font intervenir les *IM* sans aboutir au calcul effectif.

Concernant plus précisément, les calculs d'aires et de volumes, dans les deux manuels, de nombreux problèmes résolus donnent d'emblée en début de solution une représentation graphique des solides et/ou des surfaces en jeu. Ces derniers sont produits par ordinateur, sans que soit explicitée la façon dont ils ont été réalisés. Cependant dans la mise en place de l'intégrale multiple, le manuel attend un appui important de la représentation graphique.

En effet, en particulier dans le cas d'un calcul de volume, la mise en place de l'intégrale consiste (au moins implicitement) à donner une description du solide, sous la forme :

- Soit d'un « solide sous une surface » : par la donnée d'une région R dans un plan de repérage et d'une fonction définie sur cette région. Le volume est alors obtenu en intégrant cette fonction sur la région R (intégrale double).

- Soit d'une représentation analytique permettant le calcul du volume par une intégrale itérée (intégrale triple).

On peut penser qu'implicitement les auteurs du manuel font jouer les variables visuelles de la représentation graphique qu'ils ont produite.

Dans ce sens, on peut dire qu'il y a articulation entre la représentation graphique (donnée comme allant de soi) et la représentation analytique (implicite) qui conduit à la mise en place d'une intégrale double ou triple.

A noter que le type de tâche *calculer le volume d'un solide* est très présent dans ces manuels. Comme nous l'avons dit, il alimente la niche géométrique qui est la plus investie. Or, ce type de tâche ne s'insère que dans une praxéologie mathématique tronquée, dans la mesure où seul le calcul de l'intégrale qui permet d'obtenir le volume est enjeu de savoir dans ces manuels. La mise en place de l'intégrale qui constitue en quelque sorte une phase de modélisation du problème reste transparente. En effet, il semble que l'on attende de l'étudiant qu'il **lise** (voire **reproduise**) les dessins présents dans le cours³⁵, alors que dans les tâches qui lui sont proposées, il doit **produire** lui-même ce type de dessins et s'y appuyer pour mettre en place l'écriture de l'intégrale dont le calcul lui permettra d'aboutir (cf. analyse des exercices non résolus). Toutefois, il y a une grande différence entre la **lecture** (ou même la **reproduction** des graphiques déjà produits par ordinateur) et la **production** de graphiques à partir d'équations données, pour finalement dégager et représenter graphiquement le solide « isolé ». Pour passer de la **lecture** à la **production**, l'étudiant est donc censé se débrouiller « seul » certainement en imitant le produit du manuel et en répétant l'exécution de la tâche sur un même type.

Dans ce type de tâches, l'enjeu essentiel de la représentation graphique (de diversités des solides) consiste, après avoir représenté conjointement toutes les surfaces en jeu de dégager la forme du solide en question et ses propriétés géométriques. Il y a également une part d'implicite dans cette façon de définir un solide. En effet, y'a-t-il seulement un solide délimité par ces surfaces ? Doit-il systématiquement être borné ? L'articulation entre la représentation graphique et la représentation analytique joue un rôle important dans la mise en place de l'intégrale. Cette articulation met en jeu la mobilisation des connaissances géométriques des objets concernés, les variables visuelles du graphique et des variables « symboliques ».

Dans ce sens, dans les deux manuels, nous avons vu que dans le type de tâches sur le calcul du volume un sous type apparaît en grand nombre d'exemplaires et représente ainsi une tâche emblématique, il s'agit du :

Calcul de volume d'un solide délimité par des surfaces données par des équations.

On remarquera notamment que la **production** des graphiques dans ces manuels reste du domaine du *topos* de l'enseignant. Elle est cachée à l'étudiant. Elle n'est pas transformée en

³⁵ Cf. l'analyse de certains exemples en annexe I montrant clairement ces possibilités.

tâches explicites avec les praxéologies associées et reste transparente. Il n'y a pas de techniques, dans l'organisation mathématique qui donnerait des moyens d'accomplir des sous-tâches de **productions** des graphiques en 3D avec plusieurs surfaces en faisant intervenir des questions géométriques. La technique devrait permettre d'isoler le solide en faisant apparaître chacune des sous-surfaces qui le délimitent. De plus, une telle technique devrait passer par une dialectique entre graphique-géométrique et analytique afin de transformer le volume du solide en question par une intégrale. Comment l'étudiant peut-il arriver à **produire** les solides dont il a besoin dans ce type de tâches ? Comment fait-il le choix d'une intégrale triple, double ou même d'une intégrale simple dans un calcul de volume de ce type de solides ?

Il est important de souligner que ce type de tâches peut comporter des tâches où les volumes des solides concernés sont calculables par des techniques propres aux intégrales simples, notamment celles relatives aux *solides de révolutions* ou celles associées au calcul de volumes par des *sections transversales* ou encore celles associées au calcul de volumes par des *anneaux cylindriques*. Mais, ces techniques déjà mentionnées plus haut et que l'on peut trouver dans le volume 1 (cf. chapitre 6) de cette édition (SWO) ne sont pas privilégiées dans cette organisation en question parce que le contrat vise la mobilisation de connaissances des intégrales multiples et aussi (comme le montrent plusieurs consignes dans les paquets décrits précédemment) les contraintes institutionnelles proposent l'utilisation des *IM* pour accomplir ce type de tâches. Ceci nous conduit à une première hypothèse du travail :

Pour résoudre la tâche emblématique « calcul du volume d'un solide délimité par des surfaces données par des équations », l'étudiant doit produire une représentation graphique de ce solide « isolé ». Cette première étape ne fait pas l'objet d'un enseignement explicite et reste problématique. Or, elle peut s'avérer essentielle dans la mise en place de l'intégrale conduisant au volume cherché.

Dans un environnement « papier/crayon », on sait que la représentation dans l'espace est problématique. On sait également que beaucoup d'étudiants ont du mal à « voir dans l'espace ». Cette difficulté est bien connue dès l'enseignement secondaire.

Notre analyse des manuels montre que dans la réalisation de la tâche emblématique, le niveau de difficulté n'est pas seulement lié à la complexité des surfaces en jeu, ni à leur nombre. Même avec peu de surfaces toutes élémentaires, on peut avoir une tâche complexe³⁶. Par ailleurs, nous avons vu que des considérations de symétrie peuvent permettre de simplifier (parfois énormément) la tâche en se ramenant à la moitié, voir le quart ou même le huitième ou le seizième, du solide de départ. Sans analyse *a priori* qui prenne en compte les variables visuelles du graphique et des variables « symboliques » il est difficile d'évaluer le niveau de difficulté d'une tâche à partir des équations de l'énoncé.

Des compétences spécifiques à la géométrie spatiale sont donc requises pour la réalisation de

³⁶ Cf. par exemple, dans la suite de cette thèse, l'analyse *a priori* du problème d'intersection de deux, ou de trois cylindres. Il suffit de donner deux cylindres qui se coupent orthogonalement pour avoir une tâche complexe. Alors que l'on a deux expressions de surfaces *a priori* familières des étudiants.

la phase de « modélisation » conduisant à la mise en place de l'intégrale. Or, cette phase du travail est minorée voire péjorée par l'institution qui se focalise sur le seul calcul de l'intégrale, véritable enjeu didactique. Voire dans l'espace, savoir se représenter les solides apparaît plus comme un don et celui qui ne l'a pas sera toujours pénalisé alors que celui qui le possède sera dispensé de trop de justification. Ce qui compte c'est que l'intégrale mise en place soit la bonne, peu importe finalement comment elle a été obtenue.

De fait, dans notre travail, nous avons voulu nous intéresser plus précisément aux capacités et aux difficultés des étudiants dans cette phase du travail sur le calcul des volumes.

De l'analyse des manuels SWO et SPIE à l'étude des pratiques des étudiants et des enseignants sur les *IM*

Nous chercherons à savoir si les étudiants font spontanément des représentations graphiques, mais aussi de l'usage qu'ils en font. Dans quelle mesure leur représentation graphique leur sert d'appui à la résolution analytique (recherche des bornes d'intégration) ? Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent, tant dans la **production** de la représentation graphique, que lors de la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique de l'intégrale double ou triple conduisant au calcul de volume et dans l'articulation entre les deux ?

Pour répondre à ces questions et nous permettre de vérifier nos hypothèses, nous avons utilisé un test comportant des exercices qui consistent à **calculer le volume d'un solide délimité par des surfaces données par des équations**, repérés dans les manuels, auprès des étudiants brésiliens (qui utilisent d'ailleurs le manuel SWO). Dans cette partie de notre travail, nous nous sommes limités à un environnement papier/crayon. L'analyse de ce test et des réponses des étudiants fait l'objet de la partie suivante.

CHAPITRE

C

LES PRATIQUES DES ETUDIANTS ET DES ENSEIGNANTS SUR
LES INTEGRALES MULTIPLES

PRE - EXPERIMENTATION

CHAPITRE C **PRE-EXPERIMENTATION**

INTRODUCTION

Nous allons maintenant présenter la partie pré-expérimentale de notre recherche. Il s'agit d'un **test** et d'un **questionnaire** constituant un dispositif exploratoire pour une analyse de l'enseignement des *Intégrales Multiples*. Il ne s'est donc pas fait, dans l'optique d'avoir des informations de type statistique sur les capacités des interrogés, mais plutôt en vue d'une observation locale des pratiques des étudiants et des enseignants. Nous souhaitons interroger d'une part les enseignants et d'autre part, des étudiants (débutants³⁷ et avancés³⁸) pour avoir une idée des difficultés éventuelles qu'ils rencontrent et les pratiques qu'ils ont sur les intégrales multiples dans l'Enseignement universitaire brésilien.

PRESENTATION DU TEST

Les études que nous avons menées dans les chapitres précédents nous ont fourni des supports pour utiliser ce **test** passé aux étudiants et aux enseignants au Brésil. Ainsi l'analyse écologique des manuels nous a en particulier permis de dégager divers recours à des modèles géométriques dans l'organisation mathématique des *IM*. Nous avons également observé, à cette occasion, les liens implicites faits dans ces manuels entre les représentations graphiques (produites par ordinateur) et les techniques d'intégration, sans explication des techniques permettant les productions de ces graphiques. Dans ce sens, nous chercherons à savoir si les étudiants font spontanément des représentations graphiques, mais aussi l'usage qu'ils en font dans les exercices proposés dans ce **test**. Dans quelle mesure leur représentation graphique leur sert d'appui à la résolution analytique (recherche des bornes d'intégration) ? Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent, tant dans la **production** de la représentation graphique, que lors de la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique de l'intégrale double ou triple conduisant au calcul de volume et dans l'articulation entre les deux ?

Nous avons ainsi choisi d'utiliser un **test** dont les exercices concernés permettent à l'étudiant ou à l'enseignant de se retrouver dans le contexte de l'enseignement habituel des intégrales multiples dans l'Enseignement universitaire brésilien. Nous allons dans la suite, présenter l'analyse a priori du **test** question par question.

³⁷ Étudiants dans les premières semaines de cours des *IM*.

³⁸ Étudiants qui avaient suivi les séances des *IM* un semestre avant.

C1. ANALYSE A PRIORI DU TEST

Notre test comporte deux parties. La première porte sur un seul exercice, que nous nommons **exercice unique**, passé aux étudiants débutants. La deuxième partie porte sur **quatre exercices** plus au moins difficiles et typiques des calculs de volumes par des IM, passés aux étudiants avancés et soumis à l'avis des enseignants. Le texte complet du **test** est donné en annexe ; nous rappelons ci-dessous le texte de ces exercices avant l'analyse correspondante.

1. PARTIE I : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DEBUTANTS

Notre objectif dans cette partie est d'analyser un exercice qui a priori élémentaire, passé aux étudiants débutants, afin de voir l'usage :

- possible de dessin (représentation graphique) ;
- de l'interprétation géométrique (visualisation) ;
- de l'interprétation analytique sans faire appel au dessin, dans un exercice de calcul de volume par des intégrales multiples.

Exercice unique : Le parabolôide et les plans sécants

L'énoncé suivant est un exercice classique sur les intégrales multiples, qui est en particulier un exemple résolu au début du chapitre 17 du manuel WSO³⁹.

Calculer le volume du solide \mathcal{Q} qui, dans le huitième des coordonnées positives est délimité par les graphiques des équations $z=x^2+y^2+1$ et $2x+y=1$.

Analyse a priori de l'exercice unique

Cet exercice peut se résoudre par une méthode analytique sans faire appel au dessin, pour déterminer le domaine bidimensionnel ou tridimensionnel d'intégration. Néanmoins, on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique, c'est-à-dire sur la représentation graphique, (en faisant les dessins des surfaces concernées pour voir le solide). Ainsi la compréhension du problème peut être renforcée et la résolution, simplifiée. En effet, voir le solide peut aider la gestion des données, par la coordination entre la résolution graphique et analytique. Ainsi, nous allons considérer dans cette analyse trois stratégies possibles.

- S1** *Stratégie 1 : Interprétation analytique du solide*
- S2** *Stratégie 2 : Interprétation géométrique du solide*
- S3** *Stratégie 3 : Représentation graphique du solide*

I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide

A priori la perception visuelle du problème (cf. S2) pourrait simplifier l'interprétation. Mais si on ne fait pas un travail sur un contrôle visuel, on peut mener les calculs selon une

³⁹ Swokowski E. W. (1926) – *Cálculo com Geometria Analítica*. Tradução Faria A. A. (1994) Ed. Mackron Books, São Paulo, Brasil, p. 480.

interprétation purement analytique, en remplaçant les égalités par des inégalités, de façon plus au moins arbitraire pour le cas de l'équation du parabolôïde et pour l'équation $2x+y=1$ du plan. Le fait que \mathcal{Q} est dans le huitième de coordonnées positives, implique que x, y et z sont positifs. Donc le remplacement arbitraire des égalités par des inégalités peut conduire à la représentation analytique correcte de \mathcal{Q} et permettre de terminer les calculs par une intégrale multiple. Mais on peut aussi tomber sur les inégalités qui ne sont pas correctement dans le bon sens. Dans ce cas, on aura obligatoirement un volume infini. Toutefois, cela est en quelque sorte un moyen de contrôle interne. C'est-à-dire que le fait de tomber sur un volume infini devrait conduire à une rétroaction qui fera penser que l'on s'est trompé de sens dans les inégalités. Cette rétroaction est d'une certaine manière une validation qui s'appuie sur une règle de contrat qui est : **tout volume que l'on cherche à calculer est un volume fini**. Cela pose donc la question de la variabilité au niveau du choix des équations de l'énoncé du problème. Voilà l'interprétation analytique possible.

Du fait que \mathcal{Q} est dans le huitième des coordonnées positives, nous avons :	$0 \leq x$ (1)	De plus,	$2x+y=1$ (4)
	$0 \leq y$ (2)		$z=x^2+y^2+1$ (5)
	$0 \leq z$ (3)		

Ainsi, plusieurs choix sont possibles :

Premier choix : De (4) $y = 1-2x$ ainsi de (2) on a $0 \leq 1-2x$ ce qui implique $x \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi de (1) on conclut que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Dès ce dernier et de (4) on obtient $0 \leq y \leq 1-2x$

Maintenant si $z \leq x^2+y^2+1 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ alors de (3) on a $0 \leq z \leq x^2+y^2+1$. Ainsi, on peut obtenir une représentation analytique du solide \mathcal{Q} :

$$\mathcal{Q} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 1-2x, 0 \leq z \leq x^2+y^2+1\}$$

Que l'on écrive explicitement cette représentation ou non, on peut passer au calcul du volume \mathcal{Q} par l'écriture d'une intégrale triple :

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{Q}} &= \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} \int_0^{x^2+y^2+1} dz dy dx = \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx = \int_0^{1/2} \left[x^2(1-2x) + \frac{1}{3}(1-2x)^3 + 1-2x \right] dx \\ &= \int_0^{1/2} (-2x^3 + x^2 - 2x + 1) dx + \frac{1}{3} \int_0^{1/2} (1-2x)^3 dx = \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^{1/2} - \left[\frac{1}{24}(1-2x)^4 \right]_0^{1/2} = \frac{29}{96} \end{aligned}$$

Deuxième choix : Par ailleurs si de (4) on déduit $x = \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$, alors de (1) on a $0 \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$, ce qui implique $y \leq 1$. Ainsi de (2) on conclut que $0 \leq y \leq 1$. De cette inéquation et de (4) on déduit $0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$. Donc si $0 \leq z \leq x^2+y^2+1$, on peut obtenir une représentation analytique du solide \mathcal{Q} donnée par :

$$\mathcal{Q} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; 0 \leq x \leq 1/2 - y/2, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2+y^2+1\}$$

Voilà les calculs de l'intégrale triple possible, conduisant au calcul de volume du solide \mathcal{Q} :

$$\begin{aligned}
 V_Q &= \int_0^1 \int_0^{1/2-y/2} \int_0^{x^2+y^2+1} dz dx dy = \int_0^1 \int_0^{1/2-y/2} (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right)^3 + y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right] dy \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{2} (-y^3 + y^2 - y + 1) dy + \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right)^3 dy = \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + y \right) \right]_0^1 - \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right)^4 \right]_0^1 = \frac{29}{96}
 \end{aligned}$$

Troisième choix : Supposons que $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq y \leq 1-2x$ sont accomplis selon le premier choix. Comme l'énoncé ne précise rien par rapport à z et en sachant que le parabolôide est concave vers le haut, on peut remplacer l'égalité de $z = x^2+y^2+1$ par l'inégalité de $z \geq x^2+y^2+1$, ainsi d'après (3) on conclut que $z \in [x^2+y^2+1, \infty[; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas, le solide Q est illimité supérieurement.

Quatrième choix : Par ailleurs si $0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{2}$ et $0 \leq y \leq 1$ sont accomplis selon le deuxième choix, alors tel que nous l'avons fait dans la troisième possibilité, on peut remplacer l'égalité de l'équation $z = x^2+y^2+1$ par inégalité $z \geq x^2+y^2+1$. Et de (3) conclure que $z \in [x^2+y^2+1, \infty[; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dans ce cas, le solide Q est aussi illimité supérieurement.

Donc dans la façon dont l'énoncé est posé il y a des implicites que l'étudiant devra gérer. Soit, il le fait par une perception visuelle qui permet d'avoir une visualisation correcte du problème. Soit, il le fait de façon purement analytique, par le fait que le solide est borné, sans nécessairement avoir la représentation graphique des objets de l'énoncé. Du fait que la représentation graphique est une tâche difficile en utilisant les seules techniques papier/crayon cette démarche peut être assez favorisée.

Mis à part le travail fastidieux de la représentation graphique du solide, il y a autre façon d'étudier cet exercice.

II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide

D'abord nous avons noté qu'il y a un implicite dans la description donnée par l'énoncé, du fait que le solide concerné n'est pas décrit par des inéquations. Ainsi il n'y a qu'une possibilité pour que le volume soit fini : on doit se placer du côté des surfaces de façon à obtenir un solide borné. Donc la compréhension de l'énoncé passe par la nécessité d'avoir une certaine compétence de la visualisation des objets (les surfaces) en jeu pour situer le solide borné. Ainsi, dans une interprétation géométrique du solide, on peut procéder comme suit :

Notons que $0 < z = x^2+y^2+1 \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ et que le plan d'équation $2x+y=1$ est orthogonal au plan- xOy de coordonnées et coupe l'axe- Ox en $x=1/2$ et l'axe- Oy en $y=1$. Donc, le solide Q est sous le parabolôide et au dessus de la région triangulaire R du plan- xOy délimitée par l'axe- Ox , l'axe- Oy et la droite de l'équation $y=1-2x$. Autrement dit, Q est un cylindre de base triangulaire et borné supérieurement par le parabolôide.

Deux choix sont possibles, pour la mise en place de l'écriture algébrique de l'intégrale :

- interprétation du volume sous une surface, et donc emploi d'une intégrale double.
- interprétation du volume par une intégrale triple.

Les deux choix conduisent quasiment aux mêmes calculs qui sont relativement élémentaires.

Premier choix : La visualisation du problème comme ci-dessus peut induire à la mise en place des deux types de régions bidimensionnelles (R_x et R_y) d'intégrations suivantes :

$$R_x = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 - 2x \right\} \text{ et } R_y = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right\}.$$

Ces régions conduisent respectivement aux deux écritures algébriques du calcul de l'intégrale double, interprétées comme le volume sous la surface de l'équation $z=f(x,y)$ où $f(x,y)=x^2+y^2+1$. On peut ainsi utiliser la région R_x ou R_y . Voilà les calculs développés sur chacune des régions d'intégration conduisant au calcul de volume du solide Q :

R_x	R_y
$V_Q = \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx$ $= \int_0^{1/2} \left[x^2(1-2x) + \frac{1}{3}(1-2x)^3 + 1-2x \right] dx$ $= \int_0^{1/2} (-2x^3 + x^2 - 2x + 1) dx + \frac{1}{3} \int_0^{1/2} (1-2x)^3 dx$ $= \left[-\frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - x^2 + x \right]_0^{1/2} - \left[\frac{1}{24}(1-2x)^4 \right]_0^{1/2}$ $= \frac{29}{96}$	$V_Q = \int_0^1 \int_0^{1/2-y/2} (x^2 + y^2 + 1) dx dy$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right)^3 + y^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right) + \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right] dy$ $= \int_0^1 \frac{1}{2} (-y^3 + y^2 - y + 1) dy + \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right)^3 dy$ $= \left[\frac{1}{2} \left(-\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + y \right) \right]_0^1 - \left[\frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right)^4 \right]_0^1$ $= \frac{29}{96}$

Deuxième choix : L'interprétation du volume par une intégrale triple conduit aussi à deux façons possibles de représenter analytiquement le solide Q selon leur projection sur la région R qui conduit à exprimer (Q_1 ou Q_2) tel que donnés précédemment (cf. S1) :

$$Q_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 - 2x, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1 \right\} \text{ ou}$$

$$Q_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{2}, 0 \leq z \leq x^2 + y^2 + 1 \right\}.$$

Ainsi, le volume de Q_1 correspondre au calcul de l'intégrale triple $\int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} \int_0^{x^2+y^2+1} dz dy dx$, et le

volume de Q_2 au calcul de l'intégrale $\int_0^1 \int_0^{1/2-y/2} \int_0^{x^2+y^2+1} dz dx dy$, dans les deux cas les calculs sont

les même comme plus haut (cf. S1), et conduisent à $V_Q = \frac{29}{96}$.

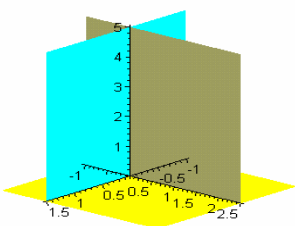
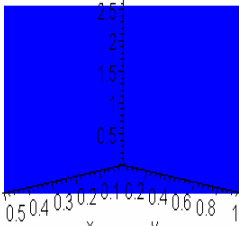
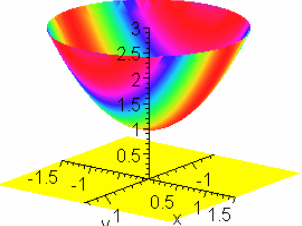
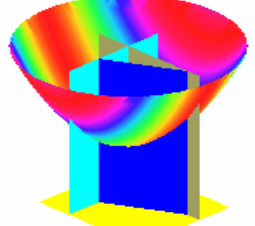
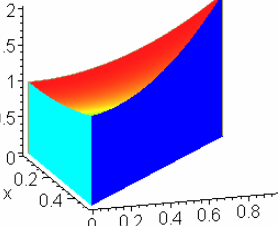
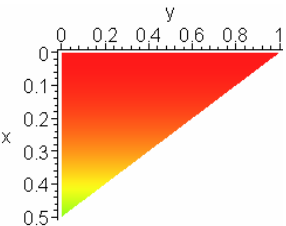
On voit bien que pour mieux gérer les données dans cette démarche (S2) on a besoin d'une vision claire du problème, sans faire les dessins. Mais comme nous l'avons déjà mentionné,

s'il peut s'appuyer sur la représentation graphique (en faisant les dessins des surfaces concernées pour voir le solide), la compréhension du problème et la résolution peut être simplifiée. Parce que voir les objets en jeu peut aider à mieux gérer les données, et aider à la coordination entre les résolutions graphique et analytique. Voilà dans la suite ce que l'on peut faire en s'appuyant sur le graphique.

III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide

Dans cette stratégie, on part de l'hypothèse que pour mieux résoudre ce problème, on va s'appuyer sur l'interaction entre le graphique et l'analytique. Dans cette stratégie, on commence par tracer le plus précisément possible une représentation graphique du solide dans l'espace. Remarquons que produire de tels dessins dans l'environnement papier/crayon peut être difficile. Dans notre présentation, nous allons nous aider du logiciel **Maple**.

Le tracé d'abord séparément de chacune des surfaces de l'énoncé permet de mieux repérer leurs positionnements dans l'espace (étape a, b et c du tableau ci-dessous). Il s'agit ensuite de les assembler pour voir comment elles interagissent pour former la région tridimensionnelle d'intégration (étape d). Dans cette étape, on s'appuie sur la connaissance implicite que cette région est bornée pour dégager la seule combinaison qui donne le solide Q (étape e) et éventuellement la projection de celui-ci sur le plan xOy (étape f). D'autres projections pourraient être envisagées, mais celle-ci est de loin la plus « naturelle ».

(a) Les plans des coordonnées	(b) Le plan d'équation $y=1-2x$	(c) Le parabolôide d'équation $z = x^2 + y^2 + 1$
		
(d) Interaction de surfaces	(e) Le solide Q	(f) La région R, projection de Q sur le plan Oxy
		

Une fois le solide appréhendé visuellement par le graphique, il s'agit de mettre en place le calcul de l'intégrale double ou triple, ce qui consiste implicitement à obtenir une représentation analytique du solide. Par rapport aux deux stratégies précédentes, on peut ici s'appuyer sur le dessin pour organiser la mise en place du calcul de l'intégrale. A cette différence près, cependant, les choix en termes de calculs sont les mêmes que précédemment.

Ainsi comme pour S1 deux choix sont possibles :

tel-00100353, version 1 - 26 Sep 2006

- interprétation du volume sous une surface, et donc l'emploi d'une intégrale double.
- interprétation du volume par une intégrale triple.

Les deux choix conduisent aux mêmes calculs qui sont relativement élémentaires.

Premier choix : Dès l'étape (e) (cf. tableau ci-dessus) on voit tout de suite que Q est un cylindre de base triangulaire et borné supérieurement par-dessous du parabolôïde de l'équation $z = x^2 + y^2 + 1$, car sa projection sur le plan Oxy (cf. étape (f)) est un triangle rectangle (pour cause d'orthogonalité des plans des coordonnées) et donc une région régulière du plan Oxy . Ainsi il est suffit d'avoir la représentation analytique de ce triangle (région R d'intégration).

Comme on le voit, l'hypoténuse de R (cf. étape (f)) est la projection du plan d'équation $2x+y=1$. On voit aussi (dans la même étape) que $x \in [0, 1/2]$ et $y \in [0, 1]$. Donc deux interprétations sont possibles.

- Soit fixer x et varier y , et ensuite exprimer y en fonction de x dans l'équation $2x+y=1$ ce qui conduit à R_x .
- Soit fixer y et varier x et ensuite exprimer x en fonction de y dans l'équation $2x+y=1$ ce qui conduit à R_y .

$R_x = \left\{ (x, y); 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq y \leq 1 - 2x \right\}$ <p style="text-align: center;">↓</p> $V_Q = \int_0^{1/2} \int_0^{1-2x} (x^2 + y^2 + 1) dy dx = \frac{29}{96}$	et	$R_y = \left\{ (x, y); 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{y}{2} \right\}$ <p style="text-align: center;">↓</p> $V_Q = \int_0^1 \int_0^{1/2 - y/2} (x^2 + y^2 + 1) dx dy = \frac{29}{96}$
--	----	--

A priori, en faisant les dessins on enrichit la tâche, dans la mesure où l'on peut affiner l'interprétation géométrique et analytique ; contrôler les difficultés qu'il peut y avoir entre les représentations graphique et analytique. De plus, les possibilités de tomber sur des volumes infinis, par remplacement arbitraire des égalités par des inégalités, sont normalement évitées.

Deuxième choix : en s'appuyant sur le dessin, l'interprétation du volume par une intégrale triple peut se mener de façon analogue que celle produite par le deuxième choix de S2.

Ainsi, comme nous l'avons noté en introduction, la production de dessin dans l'enseignement des IM est associée à une référence théorique qui peut être un objet géométrique : illustration du solide (selon une représentation graphique) dans les cas particuliers du calcul des grandeurs physiques (aires, volumes, masse, moments, centres d'inerties...). Nous avons également observé les liens implicites faits dans ces manuels entre les représentations graphiques (produites par ordinateur) et les techniques d'intégration, sans explication des techniques permettant les productions de ces graphiques. Mais comment un étudiant peut-il arriver à produire, par exemple, les graphiques tels que présentés dans le tableau plus haut (cf. S3) en utilisant les techniques papier/crayon ?

Ce qui nous intéresse dans cette étude c'est d'aller voir dans la pratique des étudiants, en

particulier s'ils font ou non un dessin pour résoudre cet exercice. S'ils le font, comment est-il travaillé par rapport au problème ? Dans quelle mesure les différentes composantes des objets (surfaces) sont-elles mises en évidence ? En particulier, nous observerons dans leurs productions si le paraboloïde est tracé et s'il est coupé en quart par les plans orthogonaux au plan- Oxy . Nous observerons aussi si le plan de l'équation $2x+y=1$ est tracé. S'il est tracé, est-ce que ses intersections avec les plans des coordonnées et le paraboloïde sont mis en évidence ? Quelles sont les difficultés rencontrées ? Est-ce que le solide en question est représenté de façon « isolée » en faisant apparaître chacune des sous-surfaces qui le délimitent ?

Notons que le degré d'élaboration du dessin (représentation graphique) peut donner une idée de l'enjeu que le dessin représente par rapport à la résolution du problème. Néanmoins, cela ne veut pas dire qu'un dessin très soigné soit forcément le plus à même de servir efficacement dans la mise en place de l'intégrale. Même très approximatif, celui-ci peut contenir les informations essentielles. En particulier, un expert saura économiser sa peine et faire un dessin minimal pour se représenter la situation de façon suffisante pour déterminer ce dont il a besoin pour écrire l'intégrale. Dans le cas d'un étudiant débutant, il y a fort à parier toutefois que la qualité générale du dessin soit un bon indice de l'utilisation pertinente qui en aura été faite. Notons également, par ailleurs, que la présence d'un tel dessin n'est pas garante du fait qu'il aura été réellement utilisé dans la mise en place de l'intégrale. Produire un tel dessin en début de résolution, peut, en effet n'être qu'une entrée dans le problème de façon intuitive, sans qu'il ne serve dans la mise en place de la résolution analytique, ce peut même n'être qu'un effet de contrat.

Ce qui nous intéresse au niveau de la résolution analytique c'est d'observer si dans cette résolution les étudiants font une référence explicite au graphique. C'est-à-dire dans quelle mesure le travail analytique peut s'appuyer ou pas sur la résolution graphique ?

Au niveau du calcul de l'intégrale on s'intéresse surtout à la façon dont les bornes de la résolution analytique du solide sont placées dans l'écriture algébrique d'intégrale. Quelle interprétation du volume est privilégiée :

- un volume sous une surface ou
- une intégrale triple ?

Pour terminer cette partie nous chercherons à savoir si la valeur effective du volume de Q est trouvée. Si non, pourquoi ?

Nous allons à présent présenter l'analyse a priori de la deuxième partie de notre pré-expérimentation.

2. PARTIE II : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS AVANCES

Comme nous l'avons mentionné précédemment, notre test comporte deux parties.

La première partie porte sur *l'exercice unique* (que nous venons d'étudier et qui est destinée aux étudiants débutants). L'autre partie comporte *quatre exercices*, typiques du calcul de volumes par des intégrales multiples, destinés aux étudiants avancés et aux enseignants. L'objectif est inchangé, nous nous intéressons également à l'étude de l'emploi fait par les étudiants avancés et par les enseignants :

- du dessin (représentation graphique) ;
- de l'interprétation géométrique (visualisation) ;
- de l'interprétation analytique sans faire appel au dessin, dans des tâches de calcul de volumes par des intégrales multiples.

Pour les analyses qui suivent nous avons distingué les trois stratégies possibles :

- S1** *Stratégie 1 : Interprétation analytique du solide*
- S2** *Stratégie 2 : Interprétation géométrique du solide*
- S3** *Stratégie 3 : Représentation graphique du solide*

Notre analyse écologique des manuels nous a guidé dans le choix des exercices. Nous avons en effet noté qu'un grand nombre des problèmes étudiés dans l'enseignement des IM portent sur le calcul du volume de solides décrits comme délimités par des surfaces données par leurs équations. Il nous a alors paru important de voir, si, dans ce type de tâches, les étudiants (et les enseignants) utilisent ou non des représentations graphiques, si oui comment ils les mettent en place et comment ils les utilisent dans la mise en place du calcul de l'intégrale.

Pour mener cette étude, nous présenterons d'abord le texte de chaque exercice proposé suivi de l'analyse correspondante.

Exercice 01 : Deux plans sécants à un solide de revolution

Calculer le volume du solide défini par les graphiques des fonctions $g(x,y)=0.2$, $h(x,y)=2.33$ et $f(x,y) = 3e^{(-x^2-y^2)}$.

2.1 Analyse a priori d'exercice 01

Cet exercice peut-être se résoudre par des techniques d'intégration simples sans tracer un dessin. En effet, le solide Q en question étant un solide de révolution, il est possible calculer le volume de Q par une intégrale simple grâce à la formule :

$$\pi \int_a^b [\eta(t)]^2 dt$$

Pour ce faire il suffit de trouver une expression de la courbe génératrice du solide de

révolution. Deux stratégies sont ici possibles permettant de dégager une telle fonction :

- ▶ S_x (en posant $x = 0$)
- ▶ S_y (en posant $y = 0$)

Les deux conduisent aux mêmes calculs. Nous n'en montrons qu'une :

- ▶ S_x (en posant $x = 0$)

Ainsi, de $f(x, y) = 3e^{(-x^2-y^2)}$ on peut obtenir $z = 3e^{(-y^2)}$ ce qui équivaut à $y = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}$. Ceci

est une expression d'une courbe du plan- yOz . On pose $\eta(z) = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}$. En considérant Oz

comme l'axe de rotation et en sachant que $0.2 \leq z \leq 2.33$, on peut en déduire, par la technique précédente, que le volume du solide généré par la révolution de graphique de $\eta(z)$ autour de l'axe Oz pour $0.2 \leq z \leq 2.33$ est :

$$\begin{aligned} V_Q &= \pi \int_{0.2}^{2.33} [\eta(z)]^2 dz = \pi \int_{0.2}^{2.33} \ln\left(\frac{3}{z}\right) dz \\ &= \pi \left[\ln\left(\frac{3}{z}\right)z + z \right]_{0.2}^{2.33} \\ &= \left[\left(\frac{233}{100} \ln\left(\frac{300}{233}\right) + \frac{233}{100} \right) - \left(\frac{1}{5} \ln(15) + \frac{1}{5} \right) \right] \pi = 6.84013 \end{aligned}$$

A noter que le calcul de $\int \ln\left(\frac{3}{z}\right) dz$ n'est pas immédiat. Il passe par les techniques d'intégration par parties, où on pose :

$u = \ln(3/z)$ et $dv = dz$
 $du = -dz/z$ et $v = z$

$\int \ln\left(\frac{3}{z}\right) dz = \ln\left(\frac{3}{z}\right)z + \int dz = \ln\left(\frac{3}{z}\right)z + z + c$

Dans le cadre de notre recherche, nous attendons la mobilisation des connaissances des *IM* au service du calcul de volume. Par ailleurs, la consigne ne précise pas que le solide en question est un solide de révolution. Il leur fallait donc utiliser des techniques relatives aux intégrales multiples. C'est l'analyse que nous développons ci-dessous.

Comme pour *l'exercice unique*, cet exercice peut se résoudre par des *IM* de façon purement analytique, sans faire appel au dessin. Il s'agit de déterminer le domaine bidimensionnel ou tridimensionnel d'intégration (comportant les bornes correctes d'intégration). Mais, on peut aussi s'appuyer sur une interprétation géométrique (sans faire le dessin) ou encore sur la représentation graphique explicite des fonctions. Comme précédemment aussi, il est implicite dans la tâche en jeu que le solide en question soit borné.

I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide

Nous décrirons ici des stratégies, où on gère les calculs de façon purement analytique, sans même évoquer de représentation graphique du solide. Pour ce faire, il est nécessaire de remplacer les égalités, qui définissent les surfaces délimitant le solide, par des inégalités, déterminant une représentation analytique de Q . Cette représentation permet de mettre en place les calculs par une intégrale multiple. Toutefois ces deux étapes peuvent ne pas être aussi clairement distinctes. En effet, dans la mesure où le but est de calculer le volume, le travail peut être axé sur la mise en place de l'intégrale et la question de la représentation

analytique de \mathcal{Q} peut rester implicite. Détaillons maintenant les calculs à mettre en œuvre.

Reprenons les fonctions de l'énoncé :	$z = h(x,y) = 2.33$	(1)
	$z = g(x,y) = 0.2$	(2)
	$z = f(x,y) = 3e^{(-x^2-y^2)}$	(3)

Comment s'appuyer sur (1) (2) et (3) pour mettre en place le calcul de l'intégrale ?

Tout d'abord, le fait que les variables x et y n'apparaissent que dans l'expression de (3) permet un passage aux coordonnées cylindriques. Sans passer par ce changement, soit dans la mise en place de la représentation analytique, soit dans le calcul de l'intégrale, les calculs sont plus complexes, quoique faisables. Dans notre présentation, nous commencerons par les stratégies utilisant ce changement de système de coordonnées, gardant pour la fin le traitement de stratégies qui resteraient en coordonnées cartésiennes.

La difficulté essentielle dans ce genre de problème est d'arriver à une représentation qui prenne en compte les variations relatives des trois variables entre elles. Une représentation analytique d'un solide en vue de calculer son volume, par une intégrale triple, nécessite d'en obtenir plus ou moins explicitement, une représentation par trois intervalles de variations, un pour chacune des variables. La difficulté est que pour une des variables, les bornes de l'intervalle peuvent dépendre des deux autres variables, pour une autre elles ne doivent plus dépendre que de la dernière et pour celle-là enfin, elles doivent être constantes. La nature des transformations à effectuer peut être différente selon l'ordre dans lequel on traite les variables. Qui plus est dans certains cas, les calculs peuvent ne pas permettre d'aboutir. Par ailleurs, il y a un risque de ne repérer que les plus grands intervalles où varie chacune des variables, laissant ainsi dans l'ombre certaines relations de liaisons. On raisonne ainsi par conditions nécessaires et non par condition suffisante. Au pire, on est amené à confondre (dans la représentation analytique fournie) le solide avec le plus petit parallélépipède rectangle qui le contient (ou dans le cas des coordonnées cylindriques, le plus petit cylindre).

Dans le cas présent, si on se place dans les coordonnées cylindriques, il est raisonnable que la variable d'angle θ varie de 0 à 2π . Le choix sur l'ordre des variables est donc réduit à deux possibilités, selon que l'on traite ρ ou z en premier.

Nous envisagerons donc trois stratégies :

- 1) **Sa(ρ)** ρ est la première des variables dans le traitement de la représentation.
- 2) **Sa(z)** z est la première des variables dans le traitement de la représentation.
- 3) **Sa(CN)** par seules Conditions Nécessaires, on confond le solide avec un cylindre

1) **Sa(ρ) : le cas où ρ est la première des variables dans le traitement de la représentation**

Notons que $0.2 = g(x,y) \leq h(x,y) = 2.33$. Ainsi (1) et (2) induisent que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$0.2 \leq z \leq 2.33 \quad (4)$$

En coordonnées cylindriques, la surface représentée par la fonction f a pour équation : $z = 3e^{-\rho^2}$ ce qui équivaut à $\rho = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}$. Le passage à la racine carrée peut troubler certains étudiants. On peut néanmoins justifier que le terme sous la racine est toujours positif. En effet selon (4) : $0.2 \leq z \leq 2.33$, donc $\frac{3}{z} > 1$.

Il est clair que θ varie de 0 à 2π et d'après (4) que z varie de $\frac{1}{5}$ à $\frac{233}{100}$.

Ceci conduit à la représentation analytique de \mathcal{Q} suivante :

$$\mathcal{Q} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}; 0 \leq \theta \leq 2\pi; \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{233}{100} \right\}.$$

Que l'on écrive explicitement cette représentation ou non on peut passer au calcul du volume par l'écriture d'une intégrale triple en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{Q}} &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \int_0^{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}} \rho d\rho dz d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \ln\left(\frac{3}{z}\right) dz d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(z \ln\left(\frac{3}{z}\right) + z \right) \Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{233}{100} \ln\left(\frac{300}{233}\right) + \frac{233}{100} \right) - \left(\frac{1}{5} \ln(15) + \frac{1}{5} \right) \right] d\theta \\ &= \left[\left(\frac{233}{100} \ln\left(\frac{300}{233}\right) + \frac{233}{100} \right) - \left(\frac{1}{5} \ln(15) + \frac{1}{5} \right) \right] \pi = 6.84013794 \end{aligned}$$

Les calculs à mettre en œuvre dans l'intégrale sont assez complexes dans la mesure où, d'une part, il faut connaître une primitive de la fonction **ln**, l'adapter avec un changement de variables, et, d'autre part, on manipule des valeurs numériques un peu « lourdes ». Ainsi, le risque de commettre une erreur de calcul est assez grand. Ici encore l'usage du logiciel **Maple** peut permettre une aide et/ou un contrôle sur ces calculs.

2) Sa(z) z est la première des variables dans le traitement de la représentation

Dans cette stratégie, on cherche un encadrement de z en fonction de ρ . Le problème est ici plus complexe que précédemment. En effet si $\rho \leq \sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}$, alors z varie de 0.2 à 2.33, par

contre, quand $\sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)} \leq \rho \leq \sqrt{\ln(15)}$ z varie de 0.2 à seulement $3e^{-\rho^2}$. Ainsi, on ne peut

pas dans ce cas calculer le volume cherché avec une « seule » intégrale, il faut « couper » le solide \mathcal{Q} en deux morceaux. Cette technique nous semble difficile à mettre en œuvre correctement sans un contrôle visuel du problème. Aussi nous la développerons plus loin. Si on reste dans un traitement purement analytique du problème, et qu'on veut commencer le traitement de la représentation analytique par z , il y a de fortes chances d'arriver à une représentation erronée.

Par exemple de (3) et de (4) on peut déduire que $0.2 \leq 3e^{(-x^2-y^2)} \leq 2.33$ ce qui implique que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ln\left(\frac{300}{233}\right) \leq x^2 + y^2 \leq \ln(15)$ (5)

Et en utilisant les coordonnées cylindriques on peut ainsi obtenir la représentation analytique (fausse) de Q suivante :

$$Q = \{(\rho, \theta, z) \mid \sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)} \leq \rho \leq \sqrt{\ln 15} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; 0.2 \leq z \leq f(r \cos \theta, r \sin \theta)\}$$

Dans cette représentation on a « oublié » toute une partie du solide constitué d'un cylindre droit de rayon $\sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}$. Ceci permet la mise en place d'écriture du calcul d'intégrale :

$$V_Q = \iiint_{Q_2} dv = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}}^{\sqrt{\ln 15}} \int_{\frac{1}{5}}^{3e^{-r^2}} r dz dr d\theta$$

qui va donner un résultat faux (inférieur au bon volume).

3) Sa(CN) par seules Conditions Nécessaires, on confond le solide avec un cylindre

Cette stratégie correspond à un relâchement des contraintes sur chacune des variables qui conduit à confondre le solide avec le plus petit cylindre le contenant.

Comme dans la première stratégie, on peut voir que (1) et (2) induisent que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0.2 \leq z \leq 2.33$ (4)

De même, de (3) et de (4) on peut déduire que $3e^{(-x^2-y^2)} \leq 2.33$ ce qui implique que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 \leq x^2 + y^2 \leq \ln(15)$ (5bis)

Le problème ici est que ces deux conditions conjuguées sont nécessaires mais pas suffisantes pour déterminer les coordonnées des points du solide Q. On est donc ainsi amené, en passant en coordonnées cylindriques, à considérer une représentation analytique du plus petit cylindre C contenant Q :

$$C = \{(\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{\ln 15} ; 0 \leq \theta \leq 2\pi ; 0.2 \leq z \leq 2.33\}$$
 (6)

Ceci débouche facilement au calcul du volume par l'intégrale :

$V_Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\ln(15)}} \int_{0.2}^{2.33} r dz dr d\theta$, ce qui conduit à des calculs qu'a priori élémentaires mais, à un résultat faux plus grand que le volume cherché.

L'absence dans cette stratégie de toute visualisation empêche un contrôle assez élémentaire de l'erreur. Les calculs sont, en quelque sorte, aveugles.

Regardons maintenant comment on peut traiter le problème, si on ne passe pas au système des coordonnées cylindriques.

4) Sa(Cart)

L'intérêt du passage aux coordonnées cylindriques étant ici très visible, nous n'examinerons qu'une stratégie (avec plusieurs variantes) restant dans le système des coordonnées cartésiennes.

En particulier, comme dans le cas Sa(CN), on peut ici ne pas prendre en compte toutes les contraintes et obtenir un parallélépipède qui serait plus grand que \mathcal{Q} . Nous ne traiterons toutefois pas ce cas en détail.

Nous ne traiterons que le cas où l'on part de la représentation analytique de \mathcal{Q} en coordonnées cartésiennes correcte suivante :

$$\mathcal{Q} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq \ln(3/z) ; 0.2 \leq z \leq 2.33\}$$

Le problème ici est de savoir comment varient x et y séparément. On peut facilement voir (même sans une visualisation du solide) que \mathcal{Q} est symétrique par rapport aux plans xOz (en effet si on change y en $-y$ la représentation est inchangé) et yOz , ce qui permet de ramener le calcul au quart correspondant à $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

On peut alors écrire une représentation analytique dans laquelle les variations de x et de y sont séparées. Selon que l'on favorise la projection du quart de \mathcal{Q} sur le plan xOz ou sur le plan yOz , deux représentations sont possibles respectivement :

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)} ; 0 \leq y \leq \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right) - x^2} ; \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{233}{100} \right\}$$

$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)} ; 0 \leq x \leq \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right) - y^2} ; \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{233}{100} \right\}$$

Ainsi \mathcal{Q}_1 ou \mathcal{Q}_2 peuvent conduire au calcul du volume de \mathcal{Q} .

Quatre choix sont possibles, pour la mise en place de l'écriture algébrique de l'intégrale :

- **l'emploi d'une intégrale double :**

- interprétation du volume (solide \mathcal{Q}_1) sous la surface d'équation

$$y = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right) - x^2} ;$$

- interprétation du volume (solide \mathcal{Q}_2) sous la surface d'équation

$$x = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right) - y^2} ;$$

- **interprétation du volume du solide :**

- \mathcal{Q}_1 par une intégrale triple.
- \mathcal{Q}_2 par une intégrale triple.

Les quatre choix conduisent quasiment aux mêmes calculs.

Admettons que \mathcal{Q}_I est choisi. Voilà les calculs possibles.

$$\frac{233}{100} \int_{\frac{1}{5}}^{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}} \int_0^{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)-x^2}} dy dx dz$$

$$\frac{233}{100} \int_{\frac{1}{5}}^{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}} \int_0^{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)-x^2}} dx dz$$

Le changement de variable dans l'intégrale par rapport à x est nécessaire, on peut utiliser la substitution trigonométrique ci-contre :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{x}{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}} \Rightarrow x = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)} \sin \theta \Rightarrow dx = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)} \cos \theta d\theta \\ &\Downarrow \\ \theta &= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)}}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \theta=0 \\ x=\sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right)} \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

La dernière intégrale double (volume sous la surface d'équation $y = \sqrt{\ln\left(\frac{3}{z}\right) - x^2}$) devient :

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{Q}} &= 4 \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{3}{z}\right) \cos^2 \theta d\theta dz = 4 \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{3}{z}\right) \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta dz \\ &= 2 \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \ln\left(\frac{3}{z}\right) \left(\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dz = \pi \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \ln\left(\frac{3}{z}\right) dz = \pi \left(z \ln\left(\frac{3}{z}\right) + z \right) \Big|_{\frac{1}{5}}^{\frac{233}{100}} \\ &= \left[\left(\frac{233}{100} \ln\left(\frac{300}{233}\right) + \frac{233}{100} \right) - \left(\frac{1}{5} \ln(15) + \frac{1}{5} \right) \right] \pi = 6.84013794 \end{aligned}$$

Comme pour la stratégie $\mathbf{Sa}(\rho)$, le risque de commettre une erreur de calcul est assez grand c'est pourquoi **Maple** peut permettre un contrôle sur ces calculs.

Voyons maintenant comment une visualisation du solide peut éventuellement aider voire modifier les stratégies précédentes ou en amener de nouvelles.

II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide

Nous examinons à présent ce qui se passe si le traitement analytique du problème s'appuie sur la visualisation (sans qu'il y ait tracé d'un dessin) des objets en jeu pour situer le solide borné.

L'interprétation géométrique du solide nécessite d'abord de comprendre comment interagissent les surfaces dont on donne les fonctions.

Puisque f et g sont des fonctions constantes, leurs graphiques sont des plans parallèles au plan de coordonnées xOy . Ainsi il n'y a qu'une possibilité pour que les deux plans interviennent dans la détermination du solide : on doit se placer entre ces deux plans. Ensuite, il s'agit de voir comment le graphe de f se situe dans l'espace entre ces deux plans.

Or, en faisant $z=f(x,y)=g(x,y)$ on conclut que :

$$z = 3e^{(-x^2-y^2)} = \frac{1}{5} \Rightarrow z = e^{(-x^2-y^2)} = \frac{1}{15} \Rightarrow z = \frac{1}{5} \text{ et } x^2 + y^2 = \ln 15, \text{ on obtient donc que l'intersection est un cercle de rayon } \sqrt{\ln 15}, \text{ de centre } (0;0;1/5) \text{ et perpendiculaire à l'axe } Oz \quad (1)$$

De même en faisant $z=f(x,y)=g(x,y)$, on conclut que :

$$z = 3e^{(-x^2-y^2)} = \frac{233}{100} \Rightarrow z = e^{(-x^2-y^2)} = \frac{233}{300} \Rightarrow z = \frac{233}{300} \text{ et } x^2 + y^2 = \ln\left(\frac{300}{233}\right), \text{ on obtient donc que l'intersection est un cercle de rayon } \sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}, \text{ de centre } (0;0;233/300) \text{ et perpendiculaire à l'axe } Oz. \quad (2)$$

(1) et (2) suggèrent que les courbes de niveau de la fonction f dans le plan xOy sont des cercles centrés sur l'axe Oz . En effet, on peut montrer que, $\forall k \in \left[\frac{1}{5}, \frac{233}{100}\right]$, $f(x,y)=k$

correspond à l'équation d'un cercle de rayon $\sqrt{\ln \frac{3}{k}}$ de centre $(0;0;k)$ perpendiculaire à Oz .

Donc le graphique de f est une superposition infinie de cercles tous centrés sur Oz et perpendiculaire à cet axe, et de rayons de plus en plus grands quand on descend entre les deux niveaux extrêmes $z = \frac{233}{100}$ et $z = \frac{1}{5}$.

Cette visualisation peut permettre un contrôle dans la mise en place des représentations analytiques aussi bien que dans les calculs de l'intégrale, dans tous les cas de stratégies que nous avons identifiés précédemment. En particulier, un contrôle visuel peut permettre d'éviter l'erreur de la stratégie Sa(CN). Encore faut-il que les deux aspects soient coordonnés, c'est-à-dire que la visualisation si elle a été réalisée soit utilisée dans la mise en place du travail analytique.

Par ailleurs, la visualisation peut déboucher sur de nouvelles stratégies, difficilement envisageable dans un contexte purement analytique.

Nous en avons identifié essentiellement une, qui correspond à la version correcte de Sa(z). Nous la présentons ci-dessous.

5) Svis découpage en deux sous-solides

Le solide est coiffé supérieurement et inférieurement, respectivement, par les plans d'équations $z = 2.33$ et $z = 0.2$ parallèles au plan xOy . On sait également que le graphique de f est une superposition infinie de cercles tous centrés sur Oz , de rayons de plus en plus grands quand on descend entre les deux niveaux extrêmes $z = \frac{233}{100}$ et $z = \frac{1}{5}$.

Ainsi, on peut voir le solide \mathcal{Q} comme composé de deux sous-solides cylindriques. Le premier

Q_1 (partie centrale) est le cylindre droit de rayon $\sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}$ et l'autre Q_2 (partie externe) est un cylindre plus complexe (non droit) dont la projection sur le plan- xOy est l'anneau centré en O , compris entre les cercles de rayons respectivement $\sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}$ et $\sqrt{\ln 15}$

En utilisant le système des coordonnées cylindriques (qui s'impose ici), la base de chaque cylindre peut être donnée respectivement par la représentation analytique (R_1 et R_2) suivante :

$$R_1 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)}; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (\rho, \theta) \mid \sqrt{\ln\left(\frac{300}{233}\right)} \leq \rho \leq \sqrt{\ln 15}; 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}.$$

Des représentations analytiques des deux sous-solides Q_1 et Q_2 en coordonnées cylindriques sont :

$$Q_1 = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid (\rho, \theta) \in R_1, \frac{1}{5} \leq z \leq \frac{233}{100} \right\} \text{ et } Q_2 = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid (\rho, \theta) \in R_2, \frac{1}{5} \leq z \leq 3e^{-\rho^2} \right\}.$$

Par additivité de l'intégrale (ou du volume) on calcul alors le volume de Q en additionnant les volumes de Q_1 et Q_2 . Or Q_1 est un cylindre « classique dont le volume se calcule par une formule familière des étudiants $V_{Q_1} = \pi\rho^2h = \left(\frac{213}{100}\right)\left(\ln\frac{300}{233}\right)\pi$

Le volume de Q_2 nécessite plus de calculs, que nous détaillons ci-dessous, sans revenir sur les différents choix et erreurs possibles qui sont à peu près les mêmes que ceux que nous avons vus jusqu'à présent :

$$V_{Q_2} = \iiint_{Q_2} dv = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{\ln\frac{300}{233}}}^{\sqrt{\ln 15}} \int_{\frac{1}{5}}^{3e^{-\rho^2}} \rho dz d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{\ln\frac{300}{233}}}^{\sqrt{\ln 15}} \left(3\rho e^{-\rho^2} - \frac{\rho}{5} \right) d\rho d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \int_{\ln\frac{1}{15}}^{\ln\frac{233}{300}} e^u du d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{\ln\frac{300}{233}}}^{\sqrt{\ln 15}} \frac{\rho}{5} du d\theta$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{233}{300} - \frac{1}{15} \right) d\theta - \frac{1}{10} \int_0^{2\pi} \left(\ln 15 - \ln \frac{300}{233} \right) d\theta$$

$$= 3\pi \left(\frac{233}{300} - \frac{1}{15} \right) - \frac{1}{5} \left(\ln 15 - \ln \frac{300}{233} \right) \pi$$

Ainsi, $V_{Q_1} + V_{Q_2}$ donne :

$$V_Q = \left[\left(\frac{213}{100} \right) \left(\ln \frac{300}{233} \right) \pi \right] + \left[3\pi \left(\frac{233}{300} - \frac{1}{15} \right) - \frac{1}{5} \left(\ln 15 - \ln \frac{300}{233} \right) \pi \right]$$

$$= 1.691259958 + 5.148877981$$

$$= 6.840137939$$

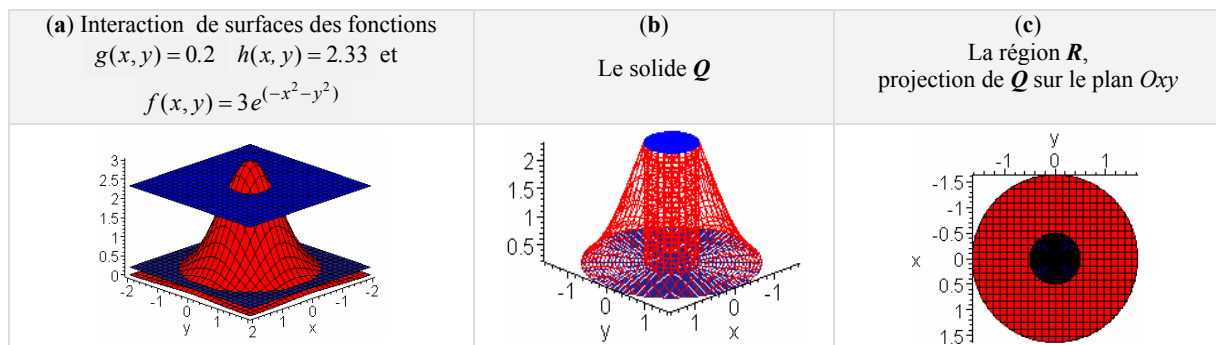
Cette résolution ne donne pas des calculs simples. Elle a toutefois le mérite de s'appuyer sur

une bonne visualisation du solide, ce qui devrait permettre un meilleur contrôle.

Nous allons à présent examiner, comment les stratégies vues jusqu'à présent peuvent éventuellement être modifiées, si on s'appuie sur une représentation graphique du solide. Nous verrons également si de nouvelles stratégies peuvent émerger dans cette hypothèse.

III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide

Comme pour *l'exercice unique*, dans notre présentation, nous allons nous aider du logiciel **Maple**, mais ce travail peut être réalisé (avec difficultés) dans l'environnement papier/crayon, même si les tracés seraient plus complexes à obtenir dans cet environnement. On commence par tracer le plus précisément possible les graphiques assemblés de trois fonctions en jeu. Pour voir comment elles interagissent pour former le solide (étape a). Dans cette étape, on s'appuie aussi sur la connaissance implicite que la région en question est bornée pour dégager le domaine tridimensionnel qui donne le solide \mathcal{Q} (étape b) et la projection de celui-ci sur le plan xOy (étape c). D'autres projections pourraient être envisagées.



Une fois le solide dégagé visuellement par le graphique, il s'agit de mettre en place le calcul de l'intégrale double ou triple, ce qui consiste à obtenir une représentation analytique du solide \mathcal{Q} . Chacune des stratégies vues précédemment peuvent alors être envisagée dans une interaction avec le dessin obtenu. Celui-ci peut aider et permettre un contrôle dans la mise en place du calcul de l'intégrale. A cette différence près, cependant, les choix en termes de calculs sont les mêmes que précédemment.

Ce qui nous intéresse dans cet exercice c'est d'aller voir dans la pratique des étudiants et des enseignants, en particulier s'ils font ou non un dessin pour résoudre cet exercice. S'ils le font, comment est-il travaillé par rapport au problème ? Dans quelle mesure les différentes composantes des objets (surfaces) sont mises en évidence ?

En particulier, au niveau graphique nous observerons dans leurs productions :

- si les trois surfaces sont tracées. Si elles sont tracées, est-ce que les intersections des plans $z = 0.2$ et $z = 2.33$ avec le graphique de $z = f(x, y)$ sont mises en évidence ?
- Quelles sont les difficultés rencontrées ? Est-ce que le solide en question est criblé ? Est-ce que les deux sous-solides sont dégagés ?

Or, comme pour *l'exercice unique*, plus le dessin sera travaillé, plus il sera l'indice de l'interaction qu'il peut y avoir (dans le travail de l'étudiant ou du professeur) entre la représentation graphique et la résolution analytique.

Au niveau de la résolution analytique, nous allons observer si dans cette résolution les interrogés font une référence explicite au graphique. C'est-à-dire dans quelle mesure le travail analytique peut s'appuyer ou pas sur la résolution graphique. Est-ce que le découpage du solide en deux sous-solides est dégagé analytiquement ?

Au niveau du calcul de l'intégrale on s'intéresse surtout à la façon dont les bornes de la résolution analytique du solide sont placées dans l'écriture algébrique de l'intégrale. Est-ce que la propriété de linéarité (addition des deux intégrales) est mise en place ? Quelle interprétation du volume est privilégiée :

- un volume sous une surface ou
- une intégrale triple ?

Finalement, nous chercherons à savoir si le volume de Q est trouvé.

Exercice 02 : L'intersection de trois cylindres

L'énoncé suivant est un exercice du calcul de volume par des intégrales multiples, issu du manuel STEW⁴⁰ (p. 901).

Calculer le volume commun aux trois cylindres d'équations $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$ et $y^2+z^2\leq 1$.

2.2 Analyse a priori d'exercice 02

Cet exercice comporte des expressions algébriques relativement élémentaires (solides classiques bien connus par les étudiants). Néanmoins, la tâche est plus complexe qu'il n'y paraît, ce qui est signalé dans le livre dont nous l'avons tiré par LCS, signalant les « exercices défis ». Il peut se résoudre selon une interprétation purement analytique sans faire appel au dessin. Mais, comme pour les cas précédents, si l'on peut s'appuyer sur les dessins, la compréhension du problème peut être simplifiée. Pour comprendre comment s'organise l'intersection des trois cylindres dont on donne les équations, il est nécessaire d'avoir une bonne visualisation de ces objets dans l'espace. Cette visualisation peut être guidée par un travail de la représentation graphique du solide. En effet, voir le graphique peut favoriser la gestion des données, par la coordination entre la résolution graphique et l'analytique. Comme précédemment, nous allons examiner les stratégies possibles en trois temps : résolution purement analytique, avec visualisation, et enfin avec appui sur une représentation graphique.

I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide

L'interprétation purement analytique nécessite de remplacer les égalités par des inégalités.

⁴⁰ *Analyse concepts et contextes*. STEWART James. Traduction de la 1^{ère} édition par Micheline Citta-Vanthsche. De Boeck Université, 2001.

Cela peut conduire à la représentation analytique correcte de \mathcal{Q} suivante :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & (1) \\ x^2 + z^2 \leq 1 & (2) \\ y^2 + z^2 \leq 1 & (3) \end{cases}$$

Le problème est de savoir comment utiliser cette représentation pour mettre en place le calcul de l'intégrale ?

Contrairement au problème précédent, il n'y a pas ici de différence selon l'ordre des variables, du fait des symétries. La difficulté essentielle réside dans la possibilité de mettre en place une intégrale. La clé est d'utiliser au maximum les symétries pour découper le solide en sous-solides de mêmes volumes.

Nous présentons dans la suite essentiellement une seule solution correcte et une grossièrement fautive mais tentante.

Sa(cor) : seule procédure correcte (à quelques variantes près)

On peut facilement voir que le solide \mathcal{Q} est centré en O. Ceci permet de ramener le calcul au huitième correspondant aux coordonnées positives. Le volume total sera obtenu en multipliant par huit. Pour arriver à dégager une représentation analytique pour le volume du huitième (\mathcal{Q}_8) de \mathcal{Q} , plusieurs démarches peuvent être mises en place. On peut par exemple fixer un des cylindres et ensuite étudier comment les deux autres se comportent par rapport à celui-ci et au solide intersection.

Analysons d'abord le cas où $0 \leq z$ en fixant le cylindre d'équation (4). Dans ce cas, on peut obtenir le résultat suivant :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & (4) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2} & (5) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - y^2} & (6) \end{cases}$$

Le fait que les variables x et y de l'inéquation (4) n'interviennent que dans l'expression $x^2 + y^2$ conduit à utiliser les coordonnées cylindriques. Dans ce nouveau système de coordonnées on peut obtenir la représentation suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} & (7) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} & (8) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} & (9) \end{cases}$$

De (8) et (9) on peut déduire que $\sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} = z = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}$ si et seulement si $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi grâce à (7) on peut écrire $\rho \in [0,1]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Cela veut dire que les deux cylindres d'inéquations (8) et (9) découpent le huitième du solide en deux sous-solides de mêmes volumes. On se ramène donc au calcul du seizième du volume du solide \mathcal{Q} , par le calcul du volume d'un solide et donc à seize parties (\mathcal{Q}_{16}).

La question est de savoir comment ces deux cylindres interagissent dans ce découpage par rapport au troisième fixé, pour former le huitième du solide dont on cherche à calculer le volume.

Comme l'intervalle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se décompose en deux parties correspondant au découpage possible du huitième du solide en deux sous-solides de mêmes volumes, alors deux combinaisons sont possibles pour la représentation analytique de (\mathcal{Q}_8) :

Première combinaison : $\mathcal{Q}_{8[1]}$

$$\mathcal{Q}_{16[1]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} \right\} \tag{10}$$

$$\mathcal{Q}_{16[2]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1; \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \right\} \tag{11}$$

$$\text{Ainsi, } V_{\mathcal{Q}_{8[1]}} = V_{(\mathcal{Q}_{16[1]}) \cup (\mathcal{Q}_{16[2]})} \Rightarrow V_{\mathcal{Q}_{8[1]}} = 2V_{(\mathcal{Q}_{16[1]})} = 2V_{(\mathcal{Q}_{16[2]})} \tag{12}$$

Deuxième combinaison : $\mathcal{Q}_{8[1]}$

$$\mathcal{Q}_{16[3]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \right\} \tag{13}$$

$$\mathcal{Q}_{16[4]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1; \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} \right\} \tag{14}$$

$$\text{Ainsi, } V_{\mathcal{Q}_{8[2]}} = V_{(\mathcal{Q}_{16[3]}) \cup (\mathcal{Q}_{16[4]})} \Rightarrow V_{\mathcal{Q}_{8[2]}} = 2V_{(\mathcal{Q}_{16[3]})} = 2V_{(\mathcal{Q}_{16[4]})} \tag{15}$$

Donc, soit on obtient $V_{\mathcal{Q}_{8[1]}} \Rightarrow V_{\mathcal{Q}} = 16V_{(\mathcal{Q}_{16[1]})}$, soit on a $V_{\mathcal{Q}_{8[2]}} \Rightarrow V_{\mathcal{Q}} = 16V_{(\mathcal{Q}_{16[3]})}$.

La question maintenant est de savoir comment valider analytiquement la combinaison qui donne le résultat correct du huitième volume de \mathcal{Q} (la première ou la deuxième) ?

Comme les cylindres de (8) et de (9) sont définis dans les deux sous-intervalles de variation de θ alors, il suffit de comparer les deux cylindres dans chaque intervalle $\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ et } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \right)$.

La valeur maximale de z à l'intersection des trois cylindres dans chaque intervalle, doit être la plus petite des deux valeurs maximales de z dans $\mathcal{Q}_{16[1]}$ ou $\mathcal{Q}_{16[3]}$.

$$\text{Puisque } \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \rho \geq 0, \text{ on a : } \rho \sin \theta \leq \rho \cos \theta \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \theta \leq \rho^2 \cos^2 \theta \Rightarrow$$

$$-\rho^2 \cos^2 \theta \leq -\rho^2 \sin^2 \theta \Rightarrow 1 - \rho^2 \cos^2 \theta \leq 1 - \rho^2 \sin^2 \theta \Rightarrow \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}$$

Ceci permet de voir que c'est la première combinaison qui est la bonne. Ainsi on doit avoir $V_{Q_{1[\theta]}} \leq V_{Q_{1[\phi]}}$. En effet, passons au calcul du volume par l'écriture d'une intégrale triple en coordonnées cylindriques. On choisit les représentations données par (10) et (13) du fait que toutes leurs bornes inférieures d'intégration sont nulles, cela peut permettre des calculs moins lourds. Voilà la démarche possible.

Première combinaison :		$V_{(Q_{1[\theta]})} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\rho^2 \cos^2 \theta}} \rho dz d\rho d\theta$	Un changement de variable dans l'intégrale par rapport à ρ est nécessaire et on peut utiliser la substitution ci- contre :	$u = 1 - \rho^2 \cos^2 \theta$
		$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2 \cos^2 \theta} d\rho d\theta$		$du = -2\rho \cos^2 \theta d\rho$
				$\begin{cases} \rho=0 \Rightarrow u=1 \\ \rho=1 \Rightarrow u=1-\cos^2 \theta \end{cases}$
				$1 \leq u \leq 1 - \cos^2 \theta$

Ce changement conduit au calcul de l'intégrale $\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(1 - \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - 1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$ ou de façon

équivalente $\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta$. Notons que le calcul de cette intégrale n'est pas immédiat dans l'environnement papier/crayon. Là encore une fois **Maple** peut être une aide.

Pour mener les calculs de cette intégrale il faut d'abord simplifier l'intégrand $\left(\frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \right)$ selon une manipulation trigonométrique adéquate pour aider les calculs, voilà un développement possible.

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{1 - \sin^3 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta + \sin^2 \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} = \frac{(1 + \sin \theta + \sin^2 \theta)}{(1 + \sin \theta)} = \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{1}{1 + \sin \theta} + \sin \theta = \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} + \sin \theta = \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)} + \sin \theta \end{aligned} \tag{15}$$

En utilisant l'identité trigonométrique de la fonction sécante et concis $(\sec \theta)(\cos \theta) = 1$, la dernière expression ci-dessus devient $\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) + \sin \theta$.

Maintenant, on peut procéder au calcul de l'intégrale comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 V_{Q_{16[1]}} &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) d\theta + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \theta d\theta = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t dt - \left[\frac{1}{3} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \left[\frac{1}{3} \tan t \right]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{1}{3} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{3} (1 - \tan \left(\frac{\pi}{8} \right)) \right] - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right] \\
 &= \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{6} - \frac{1}{3} \tan \left(\frac{\pi}{8} \right) \cong 0.2928932188 \Rightarrow V_Q = 16V_{(Q_{16[1]})} \cong 4.68629150
 \end{aligned}$$

Changement de variable pour l'intégrale de la fonction sécante.

$$t = \frac{\pi}{4} - \theta, dt = -d\theta$$

$$\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{8}$$

Ce résultat doit être comparé avec le résultat suivant.

Deuxième combinaison :	$ \begin{aligned} V_{(Q_{16[3]})} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \theta}} \rho dz d\rho d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho \sqrt{1-\rho^2 \sin^2 \theta} d\rho d\theta \end{aligned} $	<p>Un changement de variable dans l'intégrale par rapport à ρ est nécessaire et on peut utiliser la substitution ci-contre :</p>	$ \begin{aligned} u &= 1 - \rho^2 \sin^2 \theta \\ du &= -2\rho \sin^2 \theta d\rho \\ \left\{ \begin{aligned} \rho=0 &\Rightarrow u=1 \\ \rho=1 &\Rightarrow u=1-\sin^2 \theta \end{aligned} \right. \\ &1 \leq u \leq 1 - \sin^2 \theta \end{aligned} $
-------------------------------	---	--	--

Ce changement conduit au calcul de l'intégrale $\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{(1 - \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}} - 1}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$ ou de façon

équivalente $\frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right) d\theta$. Comme pour le cas précédent, penser aux identités trigonométriques apporte une simplification à l'intégrant $\left(\frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right)$. Ainsi de (15) on peut déduire que :

$$\frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{1 + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)} + \cos \theta = \frac{1}{1 + \cos \theta} + \cos \theta = \frac{1}{2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} + \cos \theta = \frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) + \cos \theta$$

Maintenant, on peut procéder au calcul de l'intégrale comme ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 V_{Q_{16[3]}} &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta} \right) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \sec^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta + \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \theta d\theta \\
 &= - \left[\frac{1}{3} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\frac{1}{3} \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = - \left[\frac{1}{3} \tan \left(\frac{\pi}{8} \right) - 0 \right] + \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} \tan \left(\frac{\pi}{8} \right) + \frac{\sqrt{2}}{6} \cong 0.3737734479 \Rightarrow V_Q = 16V_{(Q_{16[3]})} \cong 5.980375166
 \end{aligned}$$

Comme $V_{Q_{16[1]}} \leq V_{Q_{16[3]}}$ on retrouve bien que la deuxième combinaison conduite à une représentation erronée de huitième du solide commun aux trois cylindres. Donc le volume

cherché est celui défini par la première combinaison, c'est-à-dire $V_Q = 16V_{(Q_{16[1]})} \cong 4.68629150$

On peut aussi fixer le cylindre donné par l'inéquation (2) ou celui donné par l'inéquation (3) et procéder de la même façon en coordonnées cylindriques, ce qui conduit à des calculs identiques. On peut aussi ne pas passer en coordonnées cylindriques. Le détail des calculs est assez laborieux, nous les rapportons à l'annexe.

Sa(erro) : procédure erronée ramenant l'intersection à une sphère

Les équations données par l'énoncé peuvent induire à une interprétation erronée du volume commun aux trois cylindres, par addition de trois équations. Ce qui conduit à :

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2} \quad (16)$$

En fait l'intersection est contenue dans cette sphère mais elle est plus petite. De (16) on conclut sans intégrale que le volume commun aux trois cylindres est celui de la sphère de rayon $\sqrt{6}/2$.

$$V_Q = \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi \sqrt{6} \cong 7.695298983$$

Examinons maintenant comment on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique du solide intersection.

II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide (Svis)

Nous examinons maintenant ce qui se passe si le traitement analytique du problème s'appuie sur une visualisation (sans qu'il y ait tracé explicite d'un dessin) des objets en jeu pour situer le solide borné. Pour s'appuyer sur l'interprétation géométrique il faut d'abord comprendre comment interagissent les surfaces données dans l'énoncé par leurs équations.

A partir des équations de l'énoncé, on peut noter que le volume en question est symétrique par rapport aux plans des coordonnées, ce qui permet ici aussi de ramener le calcul au huitième des coordonnées positives. De plus, il est facile de déduire que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$. Ainsi le huitième du volume commun aux trois cylindres est compris dans le cube $[0,1]^3$, donc $V_Q \leq 8V_{[0,1]^3}$.

Comme pour Sa(coro), pour arriver à dégager une représentation analytique du sous-solide représentant un huitième du volume de Q , plusieurs démarches sont possibles. On peut fixer le cylindre d'inéquation $x^2 + y^2 \leq 1$ ensuite interpréter le volume commun sous les surfaces cylindriques des inéquations $x^2 + z^2 \leq 1$ et $y^2 + z^2 \leq 1$. Ceci conduit à la représentation suivante :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & (1) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} & \forall (x, y) \in [0,1]^2 & (2) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2} & (3) \end{cases}$$

Comme précédemment ici aussi, l'emploi des coordonnées cylindriques simplifie l'interprétation géométrique du problème. Dans ce nouveau système de coordonnées, on peut en effet obtenir comme nous l'avons vu plus haut :

$$\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} & (4) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} & (5) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} & (6) \end{cases}$$

Notons que les surfaces cylindriques de (5) et de (6) sont convexes vers le bas dans le huitième des coordonnées positives et orthogonales entre elles avec comme axe respectivement Ox et Oy . De plus, on peut déduire que les deux surfaces s'intersectent dans le plan d'équation $\theta = \frac{\pi}{4}$ qui contient l'axe Oz et qui est perpendiculaire au plan $z = 0$. Ce

résultat révèle que le plan d'équation $\theta = \frac{\pi}{4}$ découpe le huitième (du solide commun aux trois cylindres) en deux sous-solides de bases données par les représentations analytiques R_1 et R_2 suivantes :

$$R_1 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\} \text{ et } R_2 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1; \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

Comme les deux surfaces cylindriques de (5) et de (6) sont convexes et orthogonales entre elles, elles se superposent dans l'espace, permettant la comparaison de leurs configurations géométriques sur les régions ci-dessus. Ceci montre que le huitième (Q_8) de Q est limité supérieurement par $z = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}$ et par $z = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}$ et inférieurement par $R_1 \cup R_2$. Ainsi (comme pour $Sa(cor)$) il y a deux combinaisons possibles pour dégager la représentation analytique de Q_8 , à savoir :

Première combinaison : $Q_{8[1]}$

$$Q_{16[1]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid (\rho, \theta) \in R_1; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} \right\} \quad (7)$$

$$Q_{16[2]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid (\rho, \theta) \in R_2; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \right\} \quad (8)$$

$$\text{Ainsi, } V_{Q_{8[1]}} = V_{(Q_{16[1]}) \cup (Q_{16[2]})} \Rightarrow V_{Q_{8[1]}} = 2V_{(Q_{16[1]})} = 2V_{(Q_{16[2]})} \quad (9)$$

Deuxième combinaison : $Q_{8[2]}$

$$Q_{16[3]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid (\rho, \theta) \in R_1; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \right\} \quad (10)$$

$$Q_{16[4]} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid (\rho, \theta) \in R_2; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} \right\} \quad (11)$$

$$\text{Ainsi, } V_{Q_{8[2]}} = V_{(Q_{16[3]}) \cup (Q_{16[4]})} \Rightarrow V_{Q_{8[2]}} = 2V_{(Q_{16[3]})} = 2V_{(Q_{16[4]})} \quad (12)$$

On voit bien que les deux surfaces cylindriques d'équations $z = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}$ et $z = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}$ sont définies dans les mêmes domaines (R_1 ou R_2), mais de combinaisons différentes. Cela pose alors la question du choix de la combinaison correcte. Comme les deux surfaces sont convexes vers le bas, il suffit de comparer les hauteurs des cylindres de base R_1 ou R_2 .

Admettons que ce dernier R_2 soit choisi.

Ainsi puisque $0 \leq \rho \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\rho \sin \theta \geq \rho \cos \theta \Rightarrow \rho^2 \sin^2 \theta \geq \rho^2 \cos^2 \theta \Rightarrow -\rho^2 \sin^2 \theta \leq -\rho^2 \cos^2 \theta \Rightarrow 1 - \rho^2 \sin^2 \theta \leq 1 - \rho^2 \cos^2 \theta \Rightarrow \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} .$$

Vu que $\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} \leq \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}$, $\forall (\rho, \theta) \in R_2$, chaque point (ρ, θ, z) de $Q_{16[1]}$ et de $Q_{16[2]}$ est un point de $Q_{8[1]}$. Ainsi les volumes $V_{Q_{8[1]}}$ et $V_{Q_{8[2]}}$ doivent vérifier que $V_{Q_{8[1]}} \leq V_{Q_{8[2]}}$. En effet, dès les deux combinaisons ci-dessus on peut passer au calcul du volume par l'écriture d'une intégrale triple en coordonnées cylindriques.

Première combinaison

$$V_{(Q_{8[1]})} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}} \rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} d\rho d\theta$$

Deuxième combinaison

$$V_{(Q_{8[2]})} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}} \rho dz d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta} d\rho d\theta$$

Les calculs nécessaires pour l'intégrale de la première et la deuxième combinaison sont les mêmes que plus haut et conduisent aux résultats ci-dessous, respectivement.

$$V_Q = 16V_{(Q_{16[1]})} \cong 4.68629150$$

$$V_Q = 16V_{(Q_{16[2]})} \cong 5.980375166$$

Donc comme précédemment, la deuxième combinaison donne une représentation analytique erronée du volume commun aux trois cylindres dont on donne les équations.

La démarche que nous venons d'explicitier est proche de celle décrite plus haut **Sa**(cor). Néanmoins, même si ici, la gestion des données demande une bonne vision du problème sans forcément faire les dessins, les calculs qui sont laborieux dans la stratégie **Sa**(cor) sont simplifiés dans la stratégie **Svis**. En effet, voir les objets en jeu peut aider à mieux gérer les données dans la résolution analytique.

Regardons maintenant ce qu'il est possible de faire en s'appuyant sur un graphique.

III. Troisième stratégies : Appui sur une représentation graphique du solide

Dans cette stratégie, on va s'appuyer sur l'interaction entre le graphique et l'analytique. Pour commencer on trace le plus précisément possible une représentation graphique du solide dans

l'espace. Remarquons que produire un tel dessin dans l'environnement papier/crayon peut être difficile. Dans notre présentation, nous allons de fait nous aider du logiciel **Maple**.

Tout d'abord on trace conjointement les trois cylindres dans le cube $[-2,2]^3$ pour permettre une visualisation ample de leurs positionnements dans le repère orthonormé (étape **a** ci-dessous).

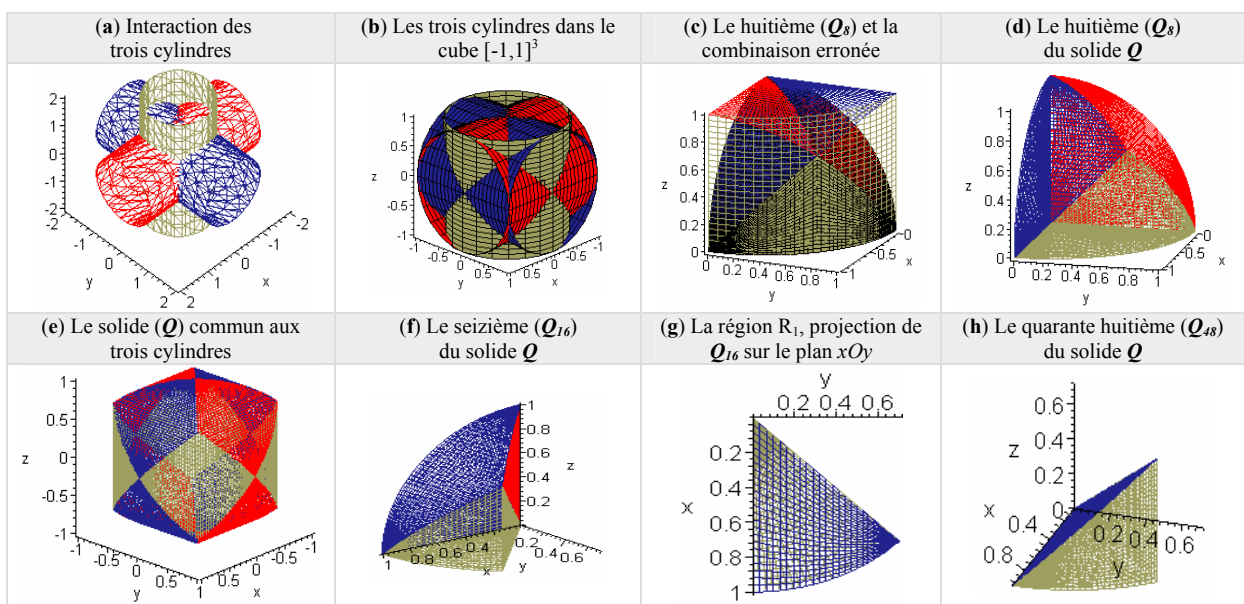
Il s'agit ensuite de rapprocher la représentation dans le cube $[-1,1]^3$ pour voir comment ils interagissent pour former le solide commun aux trois cylindres (étape **b**). Dans cette étape on s'appuie sur la connaissance que le solide est borné pour dégager les sous-surfaces de chacun des cylindres qui bornent le solide.

On utilise aussi le fait que le solide est symétrique par rapport aux plans des coordonnées. Cela permet (en jouant sur les équations) la mise en place de la représentation graphique du huitième correspondant aux coordonnées positives (étape **c**).

Dans cette étape (**c**) on voit qu'il y a des morceaux de chacune des surfaces cylindriques qui ne jouent pas dans la délimitation du solide commun, même si elles ont des projections sur les plans de coordonnées identiques aux parties qui délimitent effectivement le solide intersection.

On voit également que la surface en rouge (d'équation $z = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}$) sur l'axe Ox et celle en bleu (d'équation $z = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}$) sur l'axe Oy s'intersectent dans le plan (d'équation $\theta = \frac{\pi}{4}$) en découpant Q_8 en deux sous solides.

On voit aussi que le choix de la combinaison des surfaces qui donne le solide commun devient plus visible.



On conserve ainsi la surface en bleu (d'équation $z = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}$) pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ et celle en rouge (d'équation $z = \sqrt{1 - \rho^2 \sin^2 \theta}$) pour $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (étape **d**) et dans les deux cas $0 \leq \rho \leq 1$.

La représentation graphique du solide Q (étape **e**) s'obtient alors par symétrie de Q_8 par rapport aux plans des coordonnées (toujours en jouant sur les équations).

Une fois le solide « appréhendé visuellement » par le graphique, il s'agit de mettre en place le calcul de l'intégrale double ou triple, ce qui consiste implicitement à obtenir une représentation analytique du solide Q_8 . Par rapport aux deux stratégies précédentes, on peut ici s'appuyer sur le dessin pour organiser la mise en place du calcul de l'intégrale. Les choix en termes de calculs sont les mêmes que précédemment, sauf dans les deux dernières possibilités (menées plus bas) dont les choix des représentations analytiques peuvent être simplifiés par l'appui visuel des graphiques.

Il est important de souligner ici qu'il n'est pas possible de mener les calculs du volume commun aux trois cylindres par une seule intégrale (double ou triple). Pourquoi ? Parce que le huitième Q_8 est limité supérieurement par deux surfaces d'équations différentes. Toutefois, le découpage suggéré par le plan d'équation $\theta = \frac{\pi}{4}$ permet de ramener le calcul à un seizième de Q (étape **f**).

Ainsi trois choix sont possibles :

Premier choix :

Dès l'étape **f** (cf. tableau ci-dessus) on voit que Q_8 est un cylindre de base triangulaire polaire et borné supérieurement par la surface de l'équation $z = \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta}$, car sa projection sur le plan xOy (cf. étape **g**) est un triangle polaire (de rayon 1 et d'angle $\theta = \frac{\pi}{4}$) et donc une région régulière du plan xOy . Ainsi il suffit d'avoir la représentation analytique de ce triangle (région R d'intégration), à savoir :

$$R = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$$

En effet, la représentation analytique de Q_8 répond à celle donnée auparavant par la première combinaison de **Sa**(cor) et **Svis**. Que l'on écrive explicitement cette représentation ou non, on peut passer au calcul du volume par l'écriture d'une intégrale double en coordonnées polaires :

$$V_{Q_{16}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 \rho \sqrt{1 - \rho^2 \cos^2 \theta} \, d\rho d\theta$$

Les calculs nécessaires pour cette intégrale sont les mêmes que plus haut et conduisent aux résultats ci-dessous.

$$V_Q = 16V_{Q_{16}} \cong 4.68629150$$

Deuxième choix

A partir de l'étape **f**, il est facile de voir que le seizième (Q_{16}) est séparable par symétrie selon l'intersection de trois cylindres (deux à deux). Ce découpage possible décompose Q_8 en 6 sous-solides. Cela veut dire que le solide Q est décomposable par 6x8 sous-solides par symétrie (cf. étape **h** dans le tableau ci-dessus).

On obtient ainsi (étape **h**) un cylindre de la même base que celle de Q_{16} mais, il est borné supérieurement par le plan de l'équation $z=y$ ou encore $z=\rho\sin\theta$ en coordonnées cylindriques. Donc on peut obtenir une représentation analytique d'un quarante huitième (Q_{48}) volume du solide Q , à savoir :

$$Q_{48} = \left\{ (\rho, \theta, z) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq z \leq \rho \sin \theta \right\}$$

Voilà le calcul de l'intégrale correspondante :

$$\begin{aligned} V_{Q_{48}} &= 48 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\rho \sin(\theta)} \rho \, dz d\theta d\rho = 48 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho^2 \sin \theta \, d\theta d\rho = 48 \int_0^1 \rho^2 (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} d\rho \\ &= 48 \int_0^1 \rho^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) d\rho = 48 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 = 16 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 16 - 8\sqrt{2} \cong 4.68629150 \end{aligned}$$

Troisième choix :

On peut obtenir une représentation graphique de Q_{48} en coordonnées cartésiennes. Le problème ici est de savoir comment varient x et y séparément (sur la région R d'intégration de Q_{48}). On peut facilement voir (cf. étape **g**) que le triangle polaire (région R) est la huitième partie du cercle du cylindre d'inéquation **(1)** $x^2 + y^2 \leq 1$ dans le plan xOy .

En effet, $\forall (x,y) \in R, y^2 \leq x^2$. Dès cette dernière et de **(1)** on obtient $y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}$. Maintenant

$$\text{si } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \sin \theta \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ alors } 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Donc il est possible d'écrire une représentation analytique de Q_{48} en coordonnées cartésiennes dans laquelle les variations des variables x et y sont séparées, à savoir :

$$Q_{48} = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, y \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, 0 \leq z \leq y \right\}$$

Que l'on écrive explicitement cette représentation ou non, on peut passer au calcul du volume Q par l'écriture d'une intégrale triple :

$$\begin{aligned}
 V_{48} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^y dz \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \int_y^{\sqrt{1-y^2}} y \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y(\sqrt{1-y^2} - y) \, dy \\
 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \sqrt{1-y^2} \, dy - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y^2 \, dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y \sqrt{1-y^2} \, dy - \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 - \frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{2}} \sqrt{u} \, du \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{u} \, du = -\frac{\sqrt{2}}{12} + \left[\frac{\sqrt{u^3}}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1. \text{ Donc } V_Q = 48 \cdot V_{48} = 16 - 8\sqrt{2} \cong 4.68629150
 \end{aligned}$$

Pour aider les calculs on peut faire un changement de variables :
 $u=1-y^2$
 $du=-2ydy$.
 Puisque $y \in [0, \sqrt{2}/2]$, alors $u \in [1/2, 1]$.

On voit ainsi que la représentation graphique permet d'enrichir les techniques possibles pour résoudre la tâche, dans la mesure où l'on peut affiner l'interprétation géométrique pour mener la résolution analytique ; contrôler les difficultés éventuelles qu'il peut y avoir entre les représentations analytique et graphique. De plus, la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique de l'intégrale peut s'appuyer sur une telle interaction. Par ailleurs, de nouvelles possibilités peuvent apparaître. C'est le cas par exemple de deux derniers choix, dans lesquels les calculs sont moins lourds que ceux développés précédemment dans le premier choix et dans les deux stratégies **Sa**(corr) et **Svis** précédentes.

Ce qui nous intéresse dans cet exercice, c'est d'aller voir dans la pratique des étudiants, en particulier s'ils font ou non un dessin pour résoudre ce problème. S'ils le font, comment ce dessin est-il produit dans l'environnement papier/crayon ? Comment est-il travaillé par rapport au problème ? Est-ce que les trois cylindres sont tracés ? Dans quelle mesure les différentes composantes, en particulier l'intersection entre les trois surfaces cylindriques, sont mises en évidence ? Est-ce que :

- les symétries possibles sont mises en évidence ?
- le solide en question est dégagé ?
- l'une de leurs parties est dégagée ?

Quelles sont les difficultés rencontrées ?

Au niveau de la résolution analytique et du calcul de l'intégrale nous reprenons également les questions considérées dans les premiers exercices.

Exercice 03 : Le solide déterminé par des plans et des gouttières

Calculer le volume du solide Q délimité par les graphiques d'équations ci-dessous :

$$\begin{array}{lll}
 z=1-x^2; \forall(x,y) & y = -\sqrt{x}; \quad x \in [0, \infty[& y=x^2; \quad x \in]-\infty, 0] \\
 z=1-y, y \in [0, \infty[& y = 1-x; \quad x \in [(-1+\sqrt{5})/2, 1] & \forall(x,y); y=0, \forall(x,z)
 \end{array}$$

2.3 Analyse a priori d'exercice 03

On a ici un type d'exercice semblable aux deux premiers, dans la mesure où le solide est déterminé par les expressions de fonctions élémentaires (des plans et des « gouttières ») a priori connues par les étudiants. Ici cependant, le nombre de ces surfaces est plus important

que dans les exemples précédents. De plus, il y a moins de symétries ce qui va nécessiter un découpage du solide en plusieurs parties conduisant chacune à un calcul différent. Nous allons analyser cette situation en détail dans ce qui suit.

Comme pour les exercices précédents, nous allons tout d'abord étudier ce problème de façon purement analytique. Nous verrons ensuite comment on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique (sans faire le dessin) et enfin sur la représentation graphique explicite des équations de l'énoncé. Notons qu'il est aussi implicite dans cet exercice que le solide est borné. De plus la détermination du solide par la seule donnée des surfaces qui le limite est nettement plus problématique que dans les cas précédemment étudiés et ne va d'ailleurs pas sans une certaine ambiguïté.

I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide (Sa)

Nous allons examiner comment on peut résoudre la tâche en menant les calculs de façon purement analytique, sans évoquer la représentation graphique du solide. Pour ce faire, il est nécessaire de remplacer les égalités, qui définissent les surfaces délimitant le solide, par des inégalités, déterminant ainsi plus ou moins explicitement une représentation analytique de Q . Cette représentation doit permettre d'obtenir le calcul du volume par une intégrale multiple. Toutefois, ces deux étapes peuvent ne pas être aussi clairement distinctes. En effet, dans la mesure où le but est de calculer le volume, le travail peut être axé sur la mise en place de l'intégrale et la question de la représentation analytique de Q peut rester implicite. Détaillons maintenant les calculs à mettre en œuvre (vue la complexité du problème nous n'étudierons pas toutes les possibilités dans le détail, mais donnerons une idée la plus précise possible de ce qu'il y a à faire et des difficultés).

Tout d'abord reprenons les équations de l'énoncé :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2; & \forall (x, y) & (1) \\ y = -\sqrt{x}; & x \in [0, \infty[& (2) \\ y = -x^2; & x \in]-\infty, 0] & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 - y; & y \in [0, \infty[& (4) \\ y = 1 - x; & x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right] & (5) \\ z = 0; & \forall (x, y) & (6) \\ y = 0; & \forall (x, z) & (7) \end{cases}$$

Le problème est de savoir comment interagissent ces équations pour donner un solide borné ? Et comment déterminer une représentation analytique pour mettre en place le calcul de l'intégrale conduisant au calcul du volume du solide en question ?

Le nombre important des surfaces rend la tâche particulièrement complexe dans ce cas. Une autre complexité, qui n'est pas visible a priori, vient de ce qu'aucun des 2^7 choix possibles ne conduit à un solide borné. En effet, le solide Q « traverse » certaines des surfaces qui le délimitent. De fait, il y a nécessité de travailler la représentation du solide en distinguant selon le signe des variables x , y et z , et même dans ce découpage certaines parties nécessitent une dualité dans le choix des inégalités ! Il est évident que cette détermination sera d'autant plus aisée que l'on va s'appuyer sur une interprétation géométrique ou une représentation

graphique du solide. Si on reste dans une interprétation purement analytique, il paraît irréaliste de procéder seulement par essais-erreurs en menant tous les 2^7 calculs possibles et constater que les intégrales obtenues sont toutes infinies. L'idée de découper en fonction des signes des variables peut surgir pour différentes raisons. De fait, la nature des équations en jeu peut y conduire assez naturellement. Il n'en reste pas moins que le traitement purement analytique du problème est particulièrement complexe dans ce cas.

Dans la suite, nous allons mener les calculs en distinguant les 8 quarts d'espaces correspondant aux différentes combinaisons de signes des trois variables.

$$\text{Premier cas – Sa(quart PPP) : } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Dans ce cas, les équations (2) et (3) n'interviennent pas du fait que $y \geq 0$ et $x \geq 0$ et par ailleurs, les équations (6) et (7) conduisent à un choix évident. Reste donc à savoir dans quel côté des graphiques des équations (1), (4) et (5) on se situe.

On limite donc ici la combinatoire à $2^3=8$ choix. Ce qui reste toutefois encore trop élevé pour que la stratégie par essais-erreurs puisse encore être valable

Ainsi pour la formation du sous-solide Q_{ppp} n'interagissent que les équations :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 & (1) \\ z = 1 - y, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, +\infty] & (4) \\ y = 1 - x; \forall x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right], \forall z \in \mathbb{R} & (5) \end{cases}$$

Le fait que le solide est borné incline fortement au choix des inégalités suivantes :

$$\begin{cases} z \leq 1 - x^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ z \leq 1 - y, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, +\infty] \\ y \leq 1 - x; \forall x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right], \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ce choix est le plus « évident », mais il se pourrait que des étudiants en fassent un autre. En fait, ce choix conduit bien (avec plus ou moins de difficultés que nous détaillons ci-dessous) à une valeur finie. Le problème est qu'un autre choix (en changeant seulement le sens de la première inégalité) :

$$\begin{cases} z \geq 1 - x^2, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ z \leq 1 - y, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, +\infty] \\ y \leq 1 - x; \forall x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right], \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

conduit également à une intégrale finie (voir également ci-dessous).

Ce résultat est difficile à anticiper et à interpréter sans l'appui d'une représentation géométrique. En fait, si on reste dans le cadre analytique, dès qu'on a fait un choix qui conduit à une intégrale finie, on est en droit, comme c'est le plus souvent le cas, de penser que l'on a fini. Or, ici, le sous-solide Q_{ppp} se découpe lui-même en deux sous solides (Q_{ppp}^+ et Q_{ppp}^-) situés de part et d'autre de la « gouttière » d'équation $z = 1 - x^2$.

Cette difficulté semble difficilement surmontable sans un minimum de contrôle géométrique. Aussi, il semble peu probable qu'un étudiant arrive à une solution correcte du problème sans une telle aide.

Examinons maintenant comment les calculs peuvent être conduit dans les deux cas.

Pour le premier choix des inégalités, en croisant avec les inégalités correspondant au huitième PPP de l'espace, on obtient facilement la représentation suivante du sous-solide Q_{PPP}^+ .

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2, & x \in [0;1] \text{ et } z \in [0;1] & (1)' \\ 0 \leq z \leq 1 - y, & y \in [0;1] \text{ et } z \in [0;1] & (4)' \\ 0 \leq y \leq 1 - x, & x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 1 \right] \text{ et } y \in \left[0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right] & (5)' \end{cases}$$

En combinant les différentes inégalités, il est facile de voir que $x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 1 \right]$; $y \in \left[0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right]$ et $z \in \left[0; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]$.

Le problème ici est que cette représentation ne permet pas de mettre en place une intégrale triple donnant le volume du sous-solide. Les deux premières équations sont redondantes dans le sens où l'une contient forcément l'autre selon que y est ou non plus grand que x^2 . Il faut donc découper le solide en 2 parties selon cette condition. Cela conduit à des calculs assez laborieux où les risques d'erreur, pour qui n'en aurait pas commises avant sont grands.

En fait, il y a un moyen d'éviter cette complication (mais comment l'anticiper ?) en réorganisant un peu la représentation de la façon suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z}, & z \in [0,1] & (1)'' \\ 0 \leq y \leq 1 - z, & z \in [0,1] & (4)'' \\ 0 \leq y \leq 1 - x, & x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right] & (5)'' \end{cases}$$

On peut alors dégager deux représentations analytiques possibles, à savoir :

$$\begin{aligned} Q_{PPP}^+{}' &= \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z} ; 0 \leq y \leq 1 - z ; 0 \leq z \leq 1 \right\} \\ Q_{PPP}^+{}'' &= \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z} ; 0 \leq y \leq 1 - x ; 0 \leq z \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \end{aligned}$$

De $Q_{PPP}^+{}'$ et $Q_{PPP}^+{}''$ il est facile à déduire que les valeurs maximales de y et de z sont plus faibles dans $Q_{PPP}^+{}''$ que dans $Q_{PPP}^+{}'$. C'est-à-dire $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq 1$ et $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leq 1$ respectivement.

Donc $Q_{PPP}^+{}'' \subset Q_{PPP}^+{}'$. En effet, $Q_{PPP}^+{}' = Q_{PPP}^+{}'' \cup V_{Q_{PPP}^+{}'} = V_{Q_{PPP}^+{}'}$. Cela veut dire que l'équation $y = 1 - x$ n'intervient pas dans la formation de $Q_{PPP}^+{}'$. Ainsi de $Q_{PPP}^+{}'$ on peut passer au calcul de volume de $Q_{PPP}^+{}'$ par l'écriture d'une intégrale triple :

$$Q_{PPP}^+{}' = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-z} dy dx dz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (1 - z) dx dz = \int_0^1 \sqrt{(1 - z)^3} dz = \left[\frac{2}{5} (1 - z)^{5/2} \right]_0^1 = \frac{2}{5}$$

Ce résultat peut-être obtenu à partir de trois autres représentations algébriques des écritures de l'intégrale triple, en utilisant la représentation analytique donnée par $Q_{PPP}^+{}'$:

<p>Soit on exprime x en fonction de z (selon l'équation de (1)') et y en fonction de z (selon l'équation de (4)') et on obtient l'écriture de l'intégrale ci-dessus et celle-ci dessous :</p> $V_{Q_{PPP}^+} = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{\sqrt{1-z}} dx dy dz$	<p>Soit on exprime x en fonction de z (selon l'équation de (1)') et z en fonction de y (selon l'équation de (4)') et on obtient l'écriture de l'intégrale ci-dessous :</p> $V_{Q_{PPP}^+} = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{\sqrt{1-z}} dx dz dy$
<p>On peut également exprimer z en fonction de x (selon l'équation de (1)') et y en fonction de z (selon l'équation de (4)') et obtenir l'écriture de l'intégrale ci-contre :</p>	$V_{Q_{PPP}^+} = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{1-z} dy dz dx$

Les calculs nécessaires par chacune des intégrales conduisent au résultat ci-dessus.

Notons le fait que Q_{PPP}^+ "soit contenu dans le sous-solide Q_{PPP}^+ pose des questions sur le rôle de l'équation $y = 1 - x$ dans cet exercice. C'est-à-dire, si l'équation $y = 1 - x$ répond aux conditions préfixées, mais elle ne joue aucun rôle dans la formation du contour de Q_{PPP}^+ , alors, quel rôle joue-t-elle dans l'énoncé du problème ? Pourquoi l'énoncé comporte-il cette équation dans le quart (PPP) ? Ces questions trouvent des réponses dans le deuxième choix donné plus haut, que nous analysons maintenant :

Le calcul de l'autre partie Q_{PPP}^-

Pour essayer de voir le rôle possible de l'inéquation $y \leq 1 - x$ et arriver à une représentation analytique d'un sous-solide Q_{PPP}^- de Q nous allons fixer l'équation donnée par (1)'' et voir comment les deux autres se comportent par rapport à celle-ci.

Ainsi de (4)'' et (5)'' on peut déduire que $z = x$. Cela veut dire que la nouvelle équation $z = x$ intervient dans la formation de Q_{PPP}^- permettant le découper en deux sous-solides. A présent, la difficulté est d'arriver à déterminer une représentation analytique, de chaque sous-solide, qui prenne en compte les variations relatives des trois variables entre elles.

Nous examinerons les deux cas possibles créés par la substitution à l'égalité de cette équation ($z = x$) par des inégalités.

Cas où $x \leq z$.

Ainsi de (1)'' on peut obtenir $\sqrt{1-z} \leq x \leq z$. Comme $x \leq z \Rightarrow -z \leq -x \Rightarrow 1-z \leq 1-x$, alors l'inéquation (4)'' intervient dans la formation du sous-solide borné. Puisque $0 \leq y$, on peut obtenir une représentation analytique explicite de ce sous-solide, à savoir :

$$Q_{PPP}^- = \left\{ (x, y, z) \mid \sqrt{1-z} \leq x \leq z ; 0 \leq y \leq 1-z ; \left(\frac{-2 + \sqrt{5}}{2} \right) \leq z \leq 1 \right\}$$

Cas où $z \leq x$.

De (1)'' on obtient $1-x^2 \leq z \leq x$. De plus, $z \leq x \Rightarrow -x \leq -z \Rightarrow 1-x \leq 1-z$. Ceci permet de

voir que pour $z \leq x$ c'est l'inéquation (5) " qui réalise le contour du sous-solide. Puisque $0 \leq y$, on peut obtenir une représentation analytique explicite, à savoir :

$$Q_{ppp}^{-} = \{(x, y, z) \mid (-1 + \sqrt{5})/2 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x; 1 - x^2 \leq z \leq x\}$$

Que l'on écrive explicitement ces représentations ou non, on peut passer au calcul du volume de chacun par l'écriture algébrique d'une intégrale triple. Dans ce cas $V_{Q_{ppp}^{-}} = V_{Q_{ppp}^{+}} + V_{Q_{ppp}^{-}}$.

Voila les calculs possibles :

Calcul de $V_{Q_{ppp}^{+}}$	Calcul de $V_{Q_{ppp}^{-}}$
$V_{Q_{ppp}^{+}} = \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{\sqrt{1-z}}^z \int_0^{1-z} dy dx dz$ $= \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{\sqrt{1-z}}^z (1-z) dx dz$ $= \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \left(z - z^2 - \sqrt{(1-z)^3} \right) dz$ $= \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{5} (\sqrt{1-z})^{5/2} \right]_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 = \frac{19}{20} - \frac{5}{12} \sqrt{5}$	$V_{Q_{ppp}^{-}} = \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{1-x^2}^x \int_0^{1-x} dy dz dx$ $= \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{1-x^2}^x (1-x) dz dx$ $= \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 (-1 + 2x - x^3) dx$ $= \left[-x + x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 = -\frac{11}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{5}$

Donc $V_{Q_{ppp}^{-}} = V_{Q_{ppp}^{+}} + V_{Q_{ppp}^{-}} = -\frac{17}{40} + \frac{5}{24} \sqrt{5}$

Maintenant passons au

Deuxième cas – Sa(quant NPP) : $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$

Ces conditions ne laissent actives que les équations (1) et (4). En effet, sous les conditions préfixées (quant NPP) la formation du sous-solide (Q_{npp}) ne prend en compte que les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2, & x \in [-1, 0]; z \in [0, 1] & (1) \\ z = 1 - y, & y \in [0, 1]; z \in [0, 1] & (4) \end{cases}$$

Ici un choix s'impose dans le sens des inégalités, et il correspond effectivement au seul parmi les quatre qui conduit à un solide borné. Si on fait tout autre choix, on trouve (sauf erreur de calcul) une valeur infinie pour l'intégrale. Toutefois, une stratégie purement basée sur des essais-erreurs s'avère coûteuse vu la longueur des calculs. De plus, sans appui sur le cadre géométrique, le choix des inégalités est difficile à anticiper.

$$\begin{cases} z \leq 1 - x^2, & x \in [-1, 0]; z \in [0, 1] & (1)' \\ z \leq 1 - y, & y \in [0, 1]; z \in [0, 1] & (4)' \end{cases}$$

De (1)' et (4)' et sous les conditions préfixées on obtient facilement la représentation analytique du sous-solide Q_{npp} ci-dessous :

$$Q_{npp} = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1-z} \leq x \leq 0 ; 0 \leq y \leq 1-z ; 0 \leq z \leq 1\}$$

Il est alors facile de voir que Q_{npp} est symétrique de Q_{ppp}^+ par rapport au plan- yOz . En effet si on change x en $-x$ la représentation de Q_{npp} devient la même que celle de Q_{ppp}^+ . Donc

$$V_{Q_{npp}} = V_{Q_{ppp}^+} = \frac{2}{5}$$

Examinons à présent le

Troisième cas – Sa(quant NNP) :
$$\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Ce cas ne laisse actives que les équations (1) et (3) qui permettent donner la représentation de Q_{nnp} .

$$\begin{cases} z = 1 - x^2; & x \in [-1, 0]; & z \in [0, 1] & (1) \\ y = -x^2; & x \in [-\infty, 0]; & z \in [0, 1] & (3) \end{cases}$$

Ici aussi un seul des quatre choix possibles conduit à une intégrale finie. Il est cependant un peu moins évident à voir. Il s'agit de la représentation suivante :

$$\begin{cases} z \leq 1 - x^2; & x \in [-1, 0] & (1)' \\ y \geq -x^2; & x \in [-\infty, 0] & (3)' \end{cases}$$

Deux représentations analytiques du sous-solide Q_{nnp} sont possibles, les deux conduisent au même résultat.

Soit on exprime x en fonction de z et on obtient la représentation :

$$Q_{nnp} = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1-z} \leq x \leq 0 ; -x^2 \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1\}$$

Soit on exprime z en fonction de x et on obtient la représentation :

$$Q_{nnp} = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 0 ; -x^2 \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

Ces représentations permettent l'interprétation analytique ci-dessous qui conduit à la mise en place de quatre variantes du calcul de l'intégrale.

Interprétation de la première représentation :

Soit on exprime x en fonction de z (d'équation de (1)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{npp}} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^0 \int_{-x^2}^0 dy dx dz$$

Soit on exprime z en fonction de x (d'équation de (1)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{npp}} = \int_{-1}^0 \int_0^{1-x^2} \int_{-x^2}^0 dy dz dx$$

Interprétation de la deuxième représentation :

Soit on exprime x en fonction de y (d'équation de (3)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{np}} = \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-\sqrt{(-y)}} \int_0^{1-x^2} dz dx dy$$

Soit on exprime y en fonction de x (d'équation de (3)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{np}} = \int_{-1}^0 \int_{-x^2}^0 \int_0^{1-x^2} dz dy dx$$

Les quatre conduisent au même résultat. Développons les calculs de cette dernière.

$$V_{Q_{np}} = \int_{-1}^0 \int_{-x^2}^0 \int_0^{1-x^2} dz dy dx = \int_{-1}^0 \int_{-x^2}^0 (1-x^2) dy dx = \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^0 = \frac{2}{15}$$

Examinons maintenant le

Quatrième cas – Sa(quart PNP) :
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Ce cas ne laisse actives que les équations (1) et (2) qui donnent la représentation de Q_{pnp} :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 ; & x \in [0,1] ; & z \in [0,1] & (1) \\ y = -\sqrt{x} ; & x \in [0,\infty] ; & y \in [-\infty,0] & (2) \end{cases}$$

Ici encore un seul choix conduit à une intégrale finie :

$$\begin{cases} z \leq 1 - x^2 ; & x \in [0,1] ; & z \in [0,1] & (1)' \\ y \geq -\sqrt{x} ; & x \in [0,\infty] ; & y \in [-\infty,0] & (2)' \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 - x^2 ; & x \in [0,1] & (1)'' \\ -\sqrt{x} \leq y \leq 0 ; & x \in [0,\infty] & (2)'' \end{cases}$$

Comme pour **Sa**(quart NNP) il y a deux représentations possibles du sous-solide Q_{pnp} , les deux conduisent au même résultat.

Soit on exprime x en fonction de z et on obtient la représentation :

$$Q_{pnp} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1-z} ; -\sqrt{x} \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1\}$$

Soit on exprime z en fonction de x et on obtient la représentation :

$$Q_{pnp} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 ; -\sqrt{x} \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

Ces représentations permettent l'interprétation analytique ci-dessous qui conduit à la mise en place de quatre variantes du calcul de l'intégrale.

Interprétation de la première représentation :

Soit on exprime x en fonction de z (d'équation de (1)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{pnp}} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_{-\sqrt{x}}^0 dy dx dz$$

Soit on exprime z en fonction de x (d'équation de (1)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{pnp}} = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_{-\sqrt{x}}^0 dy dz dx$$

Interprétation de la deuxième représentation :

Soit on exprime x en fonction de y (d'équation de (2)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_{-1}^0 \int_{y^2}^1 \int_0^{1-x^2} dz dx dy$$

Soit on exprime y en fonction de x (d'équation de (2)') et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^0 \int_0^{1-x^2} dz dy dx$$

Les quatre conduisent au même résultat. Développons les calculs de cette dernière.

$$V_{Q_{ppp}} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^0 \int_0^{1-x^2} dz dy dx = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^0 (1-x^2) dy dx = \int_0^1 (x^{1/2} - x^{5/2}) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3} - \frac{x^{7/2}}{5} \right]_0^1 = \frac{8}{21}$$

Ainsi le volume du solide en question est

$$V_Q = (V_{Q_{ppp}^+}) + (V_{Q_{ppp}^-}) + (V_{Q_{ppp}^0}) + (V_{Q_{npp}}) + (V_{Q_{mp}}) + (V_{Q_{ppp}}).$$

C'est-à-dire :

$$V_Q = \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-z} dy dx dz \right) + \left(\int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{\sqrt{1-z}}^z \int_0^{1-z} dy dx dz + \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_x^1 \int_0^{1-x} dy dz dx \right) + \left(\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^0 \int_0^{1-z} dy dx dz \right) + \left(\int_{-1}^0 \int_{-x^2}^0 \int_0^{1-x^2} dz dy dx \right) + \left(\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^0 \int_0^{1-x^2} dz dy dx \right) \Rightarrow V_Q = \frac{2}{5} + \left(-\frac{17}{40} + \frac{5}{24}\sqrt{5} \right) + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{8}{21} = -\frac{249}{280} + \frac{5}{24}\sqrt{5} \Rightarrow V_Q \cong 1.355133210$$

Nous avons examiné jusqu'à présent les quatre cas qui regroupent toutes les possibilités avec $z \geq 0$. Nous ne détaillerons pas dans la suite des quatre autres cas. Ils conduisent tous, quels que soit les choix faits pour le sens des inégalités à des valeurs infinies des intégrales. En effet, le solide Q se situe entièrement dans le demi-espace $z \geq 0$. Or ceci n'est pas facile à voir si on en reste à une interprétation purement analytique du problème. En effet même si le plan d'équation $z=0$ intervient dans les surfaces délimitant le solide, cette raison ne suffit pas puisque le plan d'équation $y=0$ intervient aussi dans la délimitation du solide, or le solide est situé de part et d'autre de ce dernier !

De l'analyse que nous venons de faire, il ressort clairement qu'une gestion purement analytique du problème est très laborieuse et nécessite de faire des choix qui sans aucun appui géométrique se révèle trop coûteux pour que cette stratégie puisse être envisagée comme réaliste.

Examinons à présent comment on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique du solide, sans une représentation graphique explicite (ce que nous examinerons dans un troisième temps).

II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide (Svis)

Nous examinons maintenant ce qui se passe si le traitement analytique du problème s'appuie sur une visualisation (sans qu'il y ait tracé explicite du solide) des différentes composantes en jeu pour situer le solide borné.

L'interprétation géométrique du solide nécessite tout d'abord de comprendre comment interagissent les surfaces dont on donne les équations.

Reprenons les équations de l'énoncé.

$$\begin{cases} z = 1 - x^2; & \forall(x, y) & (1) \\ y = -\sqrt{x}; & x \in [0, \infty[& (2) \\ y = -x^2; & x \in]-\infty, 0] & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 1 - y; & y \in [0, \infty[& (4) \\ y = 1 - x; & x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right] & (5) \\ z = 0; & \forall(x, y) & (6) \\ y = 0; & \forall(x, z) & (7) \end{cases}$$

Notons qu'il est facile de voir que les trois premières équations représentant des « gouttières » et les quatre dernières des plans sécants. Le problème est de savoir comment interagissent ces gouttières et ces plans, pour donner un solide borné. Il faut ensuite mettre en place une représentation analytique du solide (ou de ses différentes composantes) en s'appuyant sur une visualisation, et enfin le calcul de l'intégrale, conduisant au calcul du volume du solide en question.

Puisque chacune des gouttières est la superposition infinie de paraboles toutes centrées sur l'axe Oy (pour (1)) ou sur l'axe Oz (pour (2) et (3)), les dernières sont « orthogonales » à la première. En particulier, l'intersection de la gouttière d'équation de (2) et celle d'équation de (3) donne l'axe Oz .

D'autres particularités sont notables dans l'énoncé : les expressions de (1), (6) et (7) sont définies sur $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors que les autres sont restreintes sur certains domaines. Donc, il n'est pas possible d'avoir une seule représentation analytique déterminant le solide en question, car on a plusieurs fonctions définies sur différents domaines. Ainsi la clé est d'étudier le problème en le découpant en parties.

Une analyse (que nous ne détaillerons pas ici) conduit assez facilement en distinguant les huit cas possibles pour les signes des trois coordonnées à un découpage du solide en six sous-solides, dont deux sont symétriques par rapport au plan- yOz . Notons, que la visualisation géométrique permet de voir que le solide est entièrement situé dans, le demi-espace $z \geq 0$.

Svis : découpage en six sous-solides

Notons que la gouttière d'équation (1) est convexe vers le bas le long de l'axe- Oy et tangente au plan d'équation $z=1$. On sait également que le plan d'équation $z=0$ intersecte cette gouttière. Ainsi on peut voir que le solide en question est compris entre ces deux plans (ce qui veut dire que $\forall(x, y); 0 \leq z \leq 1$). La difficulté est de voir comment les autres surfaces

interagissent par rapport à celles-ci et au solide en question.

Comme nous l'avons vu dans la résolution analytique, le fait que $0 \leq z, \forall (x, y)$ permet d'étudier le problème en examinant ce qui se passe avec les composantes de l'énoncé dans les huitièmes d'espace correspondants aux différentes combinaisons des signes des trois variables.

Analysons tout d'abord le cas suivant :

Premier cas – Svis(quart PPP) :

Ce cas correspond aux équations données par (1), (4) et (5). Donc pour la formation du sous-solide Q_{ppp} n'interagissent que les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2, & x \in [0, 1]; z \in [0, 1] & (1) \\ z = 1 - y, & y \in [0, 1]; z \in [0, 1] & (4) \\ y = 1 - x; & x \in \left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right]; y \in \left[0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right] & (5) \end{cases}$$

Notons qu'il est implicite que la description de ces équations donne un solide borné. Ainsi dans chaque cas que nous analyserons ici, il n'y aura qu'une possibilité pour que le volume du sous-solide concerné soit fini : on doit se placer du côté des surfaces de façon à obtenir un solide borné. Dans une interprétation géométrique de Q_{ppp} , on peut procéder comme suit :

Tout d'abord on peut facilement déduire que les trois surfaces d'équations ci-dessus n'ont qu'un point en commun : $\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$ et que le plan d'équation $y = 1 - x$ est orthogonal au plan xOy de coordonnées en coupant l'axe Ox en $x = 1$. Par contre, il n'intersecte pas l'axe Oy (même en sachant qu'ils ne sont pas parallèles entre eux) en effet $y = 1 \notin \left[0, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right]$. De plus on sait que la gouttière d'équation (1) est convexe vers le bas, donc elle n'interagit avec le plan d'équation $y = 1 - x$ que pour $0 \leq z \leq \frac{2 - \sqrt{5}}{2}$.

Ainsi $\forall (x, y); 0 \leq z \leq 1 - x^2$ la partie du plan d'équation $y = 1 - x$ qui est commune au sous-solide Q_{ppp}^+ se trouve à l'intérieur de Q_{ppp}^+ . Ce plan n'intervient pas dans la formation du contour de Q_{ppp}^+ .

On peut aussi voir l'inutilité du plan d'équation (5) dans la formation de Q_{ppp}^+ en considérant le solide sous les surfaces concernées. Dans ce cas, on peut voir que le solide sous le plan d'équation $y = 1 - x$ est inclus dans le solide sous le plan d'équation $y = 1 - z$ par rapport au plan xOz de coordonnées respectivement. En effet (comme pour **Sa**) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq 1$.

Donc (également pour **Sa**(quart PPP)) la formation du contour de Q_{ppp}^+ ne prend en compte que les équations (1) et (4). En effet, sous les conditions préfixées (quart PPP) on peut obtenir une représentation analytique explicite de Q_{ppp}^+ à partir de ces deux équations, à savoir :

$$Q_{ppp}^+ = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z} ; 0 \leq y \leq 1 - z ; 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

Cette représentation permet les interprétations géométriques ci-dessous qui conduisent à la mise en place de quatre variantes du calcul d'intégrales doubles, qui mènent toutes au même résultat.

Le volume sous la surface d'équation $y=1-z$

Soit on interprète le volume du solide sous le plan d'équation $y=1-z$ par rapport au plan- xOz (dessus de la région de type R_z) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{ppp}^+} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (1-z) dx dz$$

Soit on interprète le volume du solide sous le même plan d'équation $y=1-z$ par rapport au plan- xOz (dessus de la région de type R_x) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{ppp}^+} = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (1-z) dz dx$$

Le volume sous la surface d'équation $x = \sqrt{1-z}$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $x = \sqrt{1-z}$ par rapport au plan- yOz (dessus de la région de type R_z) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{ppp}^+} = \int_0^1 \int_0^{1-z} \sqrt{1-z} dy dz$$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $x = \sqrt{1-z}$ par rapport au plan- yOz (dessus de la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{ppp}^+} = \int_0^1 \int_0^{1-y} \sqrt{1-z} dz dy$$

Les calculs nécessaires pour les quatre intégrales sont les mêmes que plus haut (cf. Sa(quart PPP)) et conduisent au résultat ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}^+} = \frac{2}{5}$$

Comme nous l'avons vu dans la stratégie purement analytique, l'inutilité du plan de l'équation $y=1-x$ dans la formation du contour de Q_{ppp}^+ pose ici la même question relativement à sa place dans l'énoncé du problème. Nous savons que la gouttière d'équation (1) est convexe vers le bas, elle est orthogonale au plan (d'équation $y=1-x$). Nous savons aussi que l'autre plan (d'équation $y=1-z$) est sécant aux deux surfaces ((1) et (5)) et au plan xOz , donc il existe un sous-solide Q_{ppp}^- de Q qui est sous les deux plans ($y=1-x$ et $y=1-z$) et au dessus de la gouttière d'équation $z=1-x^2$.

Le fait que ce sous-solide (Q_{ppp}^-) soit borné supérieurement par deux plans d'équations différentes, impose un découpage de celui-ci en deux sous-solides de volumes correspondants aux calculs de $V_{Q_{ppp}^-}$ et de $V_{Q_{ppp}^{-,n}}$ présentés précédemment (cf. Sa(quart PPP)') donnant le résultat que l'on peut rappeler ci-dessous.

$$V_{Q_{ppp}^-} = V_{Q_{ppp}^{-,1}} + V_{Q_{ppp}^{-,n}} = -\frac{17}{40} + \frac{5}{24}\sqrt{5}$$

Deuxième cas – Svis(quart NPP) :

Ce cas correspond aux équations (1) et (4), c'est-à-dire que sous les conditions préfixées (quart NPP) la formation du sous-solide (Q_{npp}) ne prend en compte que les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2; & x \in [-1, 0]; & z \in [0, 1] & (1) \\ z = 1 - y; & y \in [0, 1]; & z \in [0, 1] & (4) \end{cases}$$

Notons que $0 \leq z \leq 1 - x^2 \forall (x, y, z) \in [-1, 0] \times [0, \infty] \times [0, 1]$ et que le plan d'équation $y=1-z$ est sécant au plan- xOz de coordonnées et coupe l'axe- Oz en $z=1$ et l'axe- Oy en $y=1$.

Le sous-solide Q_{npp} est sous le plan d'équation $y=1-z$ et au dessus de la région R du plan- xOz délimité par la parabole d'équation $z=1-x^2$, l'axe- Oz et l'axe- Oy . Autrement dit, Q_{npp} est un solide de base R et borné supérieurement par le plan d'équation $y=1-z$. Cette interprétation conduit à la mise en place d'une représentation analytique du sous-solide Q_{npp} , à savoir :

$$Q_{npp} = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1 - z; 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

On peut aussi visualiser Q_{npp} selon sa projection sur le plan- yOz . Dans ce cas on pourra dire que Q_{npp} est un solide sous la surface d'équation $x = -\sqrt{1-z}$ et dessus de la région triangulaire du plan- yOz délimité par l'axe- Oy , l'axe- Oz et la droite d'équation $y=1-z$. Donc, comme pour **Sa**(quart NPP) cette interprétation permet la mise en place de la représentation analytique explicite du sous-solide Q_{npp} ci-dessous :

$$Q_{npp} = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1-z} \leq x \leq 0; 0 \leq y \leq 1 - z; 0 \leq z \leq 1\}$$

Comme pour **Sa**(quart NPP) il est facile de voir que Q_{npp} est symétrique à Q_{ppp}^+ par rapport au plan- yOz de coordonnées.

Ainsi on peut conclure que $V_{Q_{npp}} = V_{Q_{ppp}^+} = \frac{2}{5}$

Troisième cas – Svis(quart NNP) :

Ce cas ne correspond qu'aux équations (1) et (3). C'est-à-dire que sous les conditions préfixées (quart NNP) la formation du sous-solide (Q_{nnp}) ne prend en compte que les équations ci-dessous :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2; & x \in [-1, 0]; & z \in [0, 1] & (1) \\ y = -x^2; & x \in [-\infty, 0]; & z \in [0, 1] & (3) \end{cases}$$

Dans ce cas on a deux gouttières orthogonales entre elles : la gouttière d'équation (1) : $0 \leq z \leq 1 - x^2 \forall (x, y, z) \in [-1, 0] \times [0, -\infty] \times [0, 1]$ centrée dans l'axe Oy convexe vers le bas et celle d'équation $y=-x^2$ centrée sur l'axe- Oz et convexe vers la gauche du plan- xOz .

Donc, le sous-solide Q_{nnp} est sous la gouttière d'équation $y=-x^2$ et dessous de la région du plan- xOz délimité par l'axe- Ox , l'axe- Oz et la parabole d'équation $z=1-x^2$. Cela conduit à la mise en place d'une représentation analytique du sous-solide Q_{nnp} , à savoir :

$$Q_{nnp} = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1-z} \leq x \leq 0; -x^2 \leq y \leq 0; 0 \leq z \leq 1\}$$

On peut aussi visualiser ce solide selon sa projection sur le plan- xOy de coordonnées. Dans ce cas on verra le solide sous la surface d'équation $z=1-x^2$ et au dessus de la région R du plan- xOy délimitée par la parabole d'équation $y=-x^2$, l'axe- Ox et la droite d'équation $x=-1$.

Autrement dit, Q_{nnp} est un solide de base R et borné supérieurement par la gouttière d'équation $y=-x^2$. On peut ainsi obtenir une autre représentation analytique explicite de Q_{nnp} , à savoir :

$$Q_{nnp} = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 0 ; -x^2 \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1-x^2\}$$

Si on prend le plan- yOz comme plan de projection, alors on peut encore visualiser le sous-solide compris entre les deux gouttières concernées. Dans ce cas, Q_{nnp} se situe entre la surface la plus éloignée (d'équation $x = -\sqrt{-y}$) et la surface la plus proche (d'équation $x = -\sqrt{1-z}$) de la région R du plan- yOz délimitée par l'axe- Oy , l'axe- Oz et la droite de l'équation $z = 1+y$. Cette interprétation permet la mise en place de la représentation analytique explicite du sous-solide Q_{nnp} ci-dessous :

$$Q_{nnp} = \{(x, y, z) \mid -\sqrt{1+z} \leq x \leq -\sqrt{-y} ; -1 \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1+y\}$$

Donc, au moins, trois représentations analytiques du sous-solide Q_{nnp} sont possibles. Ces représentations permettent les interprétations géométriques ci-dessous qui conduisent à la mise en place de six variantes du calcul du volume, qui mènent tous au même résultat.

Première interprétation : le volume sous la surface d'équation $y = -x^2$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $y = -x^2$ par rapport au plan- xOz (dessus la région de type R_x) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{nnp}} = \int_{-1}^0 \int_0^{1-x^2} (-x^2) dz dx$$

Soit on interprète le volume du solide sous la même gouttière d'équation $y = -x^2$ par rapport au plan- xOz (dessus de la région de type R_z) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{nnp}} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^0 (-x^2) dx dz$$

Deuxième interprétation : le volume sous la surface d'équation $z = 1-x^2$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $z = 1-x^2$ par rapport au plan- xOy (dessus de la région de type R_x) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{nnp}} = \int_{-1}^0 \int_{-x^2}^0 (1-x^2) dy dx$$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $z = 1-x^2$ par rapport au plan- xOy (dessus de la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{nnp}} = \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-\sqrt{(-y)}} (1-x^2) dx dy$$

Troisième interprétation : la différence des volumes sous le deux gouttières concernées

Soit on interprète le volume du solide compris entre les deux gouttières concernées par rapport au plan- yOz (dessus de la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{nnp}} = \int_{-1}^0 \int_0^{1+y} ((-\sqrt{-y}) - (-\sqrt{1-z})) dz dy$$

Soit on interprète le volume du solide sous les mêmes gouttières par rapport au plan- yOz (dessus la région de type R_z) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$V_{Q_{nnp}} = \int_0^1 \int_{z-1}^0 ((-\sqrt{-y}) - (-\sqrt{1-z})) dy dz$$

Les calculs nécessaires sont quasiment les mêmes que plus haut (cf. Sa(quart NNP)) et conduisent au résultat : $V_{Q_{nnp}} = \frac{2}{15}$

Passons maintenant au dernier cas (Rappelons que le solide est entièrement situé dans le demi-espace $z \geq 0$) :

Quatrième cas – Sa(quant PNP) :

Ce cas ne correspond qu'aux équations :

$$\begin{cases} z = 1 - x^2 ; & x \in [0, 1] ; & z \in [0, 1] & (1) \\ y = -\sqrt{x} ; & x \in [0, \infty] ; & y \in [-\infty, 0] & (2) \end{cases}$$

Comme pour le cas précédent, dans celui-ci on a également deux gouttières orthogonales entre elles : la gouttière d'équation de (1) : $0 \leq z \leq 1 - x^2 \quad \forall (x, y, z) \in [0, \infty] \times [0, -\infty] \times [0, 1]$ centrée sur l'axe Oy convexe vers le bas et celle d'équation $y = -\sqrt{x}$ centrée sur l'axe- Oz et convexe vers la droite du plan- xOz .

Le sous-solide Q_{pnp} est sous la gouttière d'équation $y = -\sqrt{x}$ et dessus de la région du plan- xOz délimitée par l'axe- Ox , l'axe- Oz et la parabole d'équation $z = 1 - x^2$. Ainsi du point de vue analytique on peut obtenir la représentation ci-dessous :

$$Q_{pnp} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1 ; -\sqrt{x} \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$$

On peut aussi visualiser Q_{pnp} selon sa projection sur le plan- xOy de coordonnées. Dans ce cas on a le solide sous la surface d'équation $z = 1 - x^2$ et au dessus de la région R du plan- xOy délimitée par la parabole de l'équation $y = -\sqrt{x}$, l'axe- Ox et la droite de l'équation $x = 1$. Autrement dit, Q_{pnp} est le solide de base R et borné supérieurement par la gouttière d'équation $z = 1 - x^2$. Cette interprétation permet d'avoir une représentation explicite de Q_{pnp} , à savoir :

$$Q_{pnp} = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z} ; -\sqrt{x} \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1\}$$

Si on prend le plan- yOz comme plan de projection, alors on peut visualiser le solide compris entre les deux gouttières en question. Dans ce cas, on est amené à voir le solide comme sous la surface la plus éloignée (d'équation $x = \sqrt{1 - z}$) et celui sous la surface plus proche (d'équation $x = y^2$) de la région R du plan- yOz délimitée par l'axe- Oy , l'axe- Oz et la courbe de l'équation $z = 1 - y^4$. Dans ce cas, on peut déterminer explicitement la représentation analytique de Q_{pnp} ci-dessous :

$$Q_{pnp} = \{(x, y, z) \mid y^2 \leq x \leq \sqrt{1 + z} ; -1 \leq y \leq 0 ; 0 \leq z \leq 1 - y^4\}$$

Les trois représentations obtenues permettent des interprétations géométriques ci-dessous qui conduisent à la mise en place de six variantes du calcul de l'intégrale, qui conduisent au même résultat.

Première représentation : le volume sous la surface d'équation $y = -\sqrt{x}$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $y = -\sqrt{x}$ par rapport au plan- xOz (dessus de la région R_x) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_0^1 \int_0^{1-x^2} (-\sqrt{x}) dz dx$$

Soit on interprète le volume du solide sous la même gouttière d'équation $y = -\sqrt{x}$ par rapport au plan- xOz (dessus de la région R_z) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (-\sqrt{x}) dx dz$$

Deuxième représentation : le volume sous la surface d'équation $z = 1 - x^2$

Soit on interprète le volume solide sous la gouttière d'équation $z = 1 - x^2$ par rapport au plan- xOy (dessus de la région de type R_x) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^0 (1 - x^2) dy dx$$

Soit on interprète le volume du solide sous la gouttière d'équation $z = 1 - x^2$ par rapport au plan- xOy (dessus de la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_{-1}^0 \int_{y^2}^1 (1 - x^2) dx dy$$

Troisième représentation : la différence des volumes sous les deux gouttières concernées

Soit on interprète le volume du solide compris entre les deux gouttières concernées par rapport au plan- yOz (dessus de la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_{-1}^0 \int_0^{1-y^4} ((\sqrt{1-z}) - (y^2)) dz dy$$

Soit on interprète le volume du solide sous les mêmes gouttières par rapport au plan- yOz (dessus de la région de type R_z) et on obtient l'écriture ci-dessous :

$$V_{Q_{ppp}} = \int_0^1 \int_{-(1-z)^{1/4}}^0 ((\sqrt{1-z}) - (y^2)) dy dz$$

Les calculs nécessaires sont quasiment les mêmes que plus haut (cf. Sa(quart NNP)) et conduisent au résultat :

$$V_{Q_{ppp}} = \frac{8}{21}$$

Donc le volume du solide Q est :

$$V_Q = (V_{Q_{ppp}^+}) + (V_{Q_{ppp}^-}) + (V_{Q_{ppp}^{..}}) + (V_{Q_{npp}}) + (V_{Q_{mnp}}) + (V_{Q_{pnp}})$$

C'est-à-dire :

$$V_Q = \frac{2}{5} + \left(-\frac{17}{40} + \frac{5}{24}\sqrt{5}\right) + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{8}{21} = -\frac{249}{280} + \frac{5}{24}\sqrt{5} \Rightarrow V_Q \cong 1.355133210$$

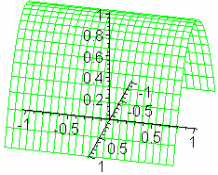
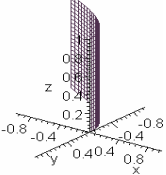
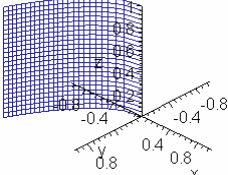
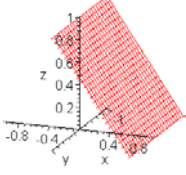
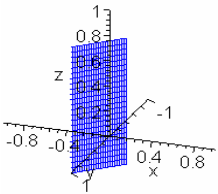
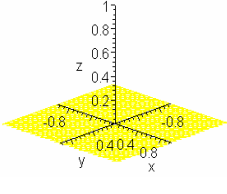
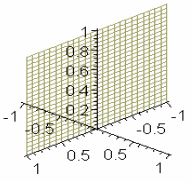
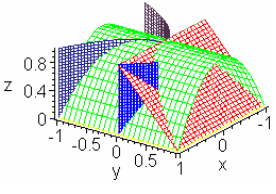
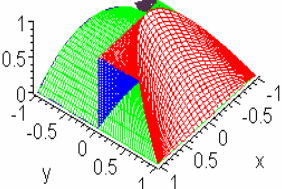
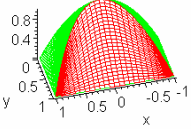
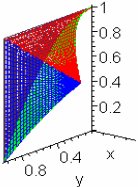
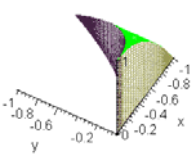
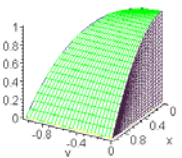
On voit donc que la visualisation géométrique permet de mieux guider les calculs. Ceux-ci restent néanmoins assez complexes et les risques d'erreurs et/ou d'oubli de certaines parties sont encore importants.

Nous allons à présent examiner, comment les stratégies vues jusqu'à présent peuvent être facilitée voire modifiées, si on s'appuie sur une représentation graphique explicite du solide. Nous verrons également si de nouvelles stratégies peuvent émerger dans cette hypothèse.

III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide

Dans cette stratégie, on commence par tracer le plus précisément possible une représentation graphique du solide dans l'espace. Remarquons que produire de tels dessins dans l'environnement papier/crayon peut être difficile. Dans notre présentation, nous allons nous aider du logiciel **Maple**.

Le tracé d'abord séparément de chacune des surfaces de l'énoncé permet de mieux repérer leurs positionnements dans l'espace (étapes *a* à *g* du tableau ci-dessous). Il s'agit ensuite de les assembler pour voir comment elles interagissent pour former la région tridimensionnelle d'intégration (étape *h*). Dans cette étape, on s'appuie sur la connaissance implicite que cette région est bornée pour dégager les sous-surfaces qui donnent le contour du solide Q (étape *i*) et ensuite repérer les sous-solides possibles (étapes *j* à *m*). Notons que cette démarche est nettement plus complexe ici que dans les cas que nous avons examinés jusqu'à présent. En particulier, l'usage d'un logiciel en particulier, tel que **Maple** est une aide quasi-indispensable. Même dans ce contexte, la possibilité d'obtenir un tracé suffisamment clair et raisonné, permettant de guider les choix dans la mise en place du calcul analytique reste largement problématique. Nous ne détaillons pas trop cette étape qui sera au cœur de notre expérimentation sur une tâche comportant deux surfaces toutes élémentaires.

(a) la gouttière d'équation 1	(b) la gouttière d'équation 2	(c) la gouttière d'équation 3	(d) Le plan de l'équation 4	
				
(e) Le plan de l'équation 5	(f) Le plan de l'équation 6	(g) Le plan de l'équation 7	(h) Interaction des surfaces	
				
(i) Le solide Q	(j) Sous-Solide $(Q_{ppp^+}) \cup (Q_{npp})$	(k) Sous-Solide Q_{ppp^-}	(l) Sous-Solide Q_{nnp}	(m) Sous-Solide Q_{pnp}
				

Une fois le solide « appréhendé visuellement » par le graphique, il s'agit de mettre en place le calcul de l'intégrale double ou triple, ce qui consiste implicitement à obtenir une représentation analytique du solide. Par rapport aux deux stratégies précédentes, on peut ici s'appuyer sur le dessin pour organiser la mise en place du calcul de l'intégrale. Les choix en termes de calculs sont les mêmes que précédemment, sauf qu'ici nous n'avons plus besoin de

regarder le problème dans les quatre quarts, mais seulement dans les trois quarts (PPP, NNP et PNP), en prenant en compte la symétrie de Q_{ppp}^+ avec Q_{npp} (étape j). Les deux derniers correspondant aux étapes l et m (cf. tableau ci-dessus).

L'appui sur une représentation graphique du solide permet de voir la place du plan d'équation $y = 1 - x$ dans cet exercice. En effet, il est facile de voir à partir de l'étape h la formation d'un sous-solide (qui correspond à Q_{ppp}^- , étape k) dessus de la gouttière en vert d'équation (1) avec laquelle le plan d'équation $y = 1 - x$ interagit.

Il est important de souligner aussi que l'irrégularité du solide Q (étape i) révèle l'impossibilité de mener le calcul du volume par une seule intégrale (double ou triple). C'est pourquoi le découpage en sous solides est indispensable. En effet, le sous-solide Q_{ppp}^- (étape k) est limité supérieurement par deux surfaces d'équations différentes (celle en rouge « étape d) et celle en bleu « étape e »). Toutefois, comme pour **Sa** et **Svis** le découpage suggéré par le plan de l'équation $z = x$ permet le calcul du volume de Q_{ppp}^- en deux étapes.

Donc comme souligné plus haut, une fois tous les sous-solides de Q « appréhendés visuellement », il faut que les trois aspects (graphique, analytique, calcul de l'intégrale) soient coordonnés, c'est-à-dire que la représentation graphique soit utilisées dans la mise en place du travail analytique et du calcul de l'intégrale.

Voici les calculs possibles par chaque sous-solide :

Dès l'étape j (cf. tableau ci-dessus) on voit bien que $(Q_{ppp}^+) \cup (Q_{npp})$ est un cylindre de base parabolique (du plan- xOz) limité par le paraboloïde d'équation $z = 1 - x^2$ et l'axe- Ox et borné supérieurement par le plan d'équation $y = 1 - z$. Ainsi il suffit d'avoir la représentation analytique de cette base parabolique (région R d'intégration), à savoir :

$$R = \{(x, z) \mid -1 \leq x \leq 1 ; 0 \leq z \leq 1 - x^2\} \text{ ou encore } R = \{(x, z) \mid -\sqrt{1+z} \leq x \leq \sqrt{1+z} ; 0 \leq z \leq 1\}$$

En effet, la représentation analytique de $(Q_{ppp}^+) \cup (Q_{npp})$ correspond à celle donnée auparavant par **Sa** et **Svis** (selon l'interprétation du volume sous la surface d'équation $y = 1 - z$). Ainsi, on peut passer au calcul du volume par l'écriture d'une intégrale double :

$$V_{(Q_{ppp}^+) \cup (Q_{npp})} = \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (1-z) dz dx = 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (1-z) dx dz$$

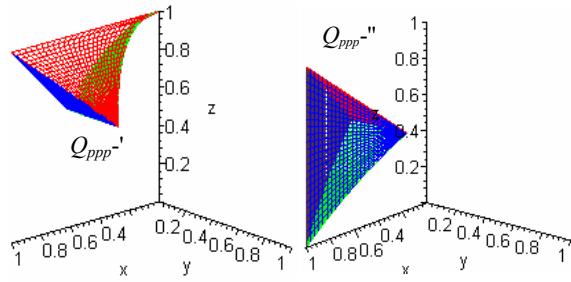
Ou encore

$$V_{(Q_{ppp}^+) \cup (Q_{npp})} = \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} (1-z) dx dz = 2 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} (1-z) dx dz$$

Les calculs nécessaires pour cette intégrale sont les mêmes que plus haut et conduisent aux résultats ci-dessous.

$$V_{(Q_{ppp}^+) \cup (Q_{npp})} = \frac{4}{5}$$

A partir de l'étape *f*, il est facile de voir que (Q_{ppp}^-) est séparable par l'intersection ($z = x$) des deux plans (en rouge, en bleu) des équations $y=1-z$ et $y=1-x$ respectivement. Ce découpage décompose (Q_{ppp}^-) en deux sous-solides non symétriques ($Q_{ppp}^{-'}$) et ($Q_{ppp}^{-''}$) ci-contre.



Comme précédemment, le seul point d'intersection entre la gouttière de l'étape *a* et les deux plans en rouge et en bleu est $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, ainsi il est facile voir que :

- $Q_{ppp}^{-'}$ est le solide de base R_1 (du plan- xOz des coordonnées) délimité par la parabole d'équation $x = \sqrt{1-z}$ et par les droites des équations $x = z$ et $x = 1$, borné supérieurement par le plan de l'équation $y=1-z$.
- $Q_{ppp}^{-''}$ est le solide de base R_2 (du plan- xOz des coordonnées) délimité par la parabole d'équation $z = 1-x^2$ et par les droites des équations $z = x$ et $z = 1$, borné supérieurement par le plan de l'équation $y=1-x$.

Il suffit d'avoir la représentation analytique de chaque base (région R_1 et R_2 d'intégration), à savoir :

$$R_1 = \left\{ (x, z) \mid \sqrt{1-z} \leq x \leq z; \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq z \leq 1 \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (x, z) \mid \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq 1; 1-x^2 \leq z \leq x \right\}$$

De R_1 et R_2 on peut passer au calcul de volume de Q_2 . En effet (comme pour **Sa** et **Svis**) R_1 et R_2 permet la mise en place des écritures algébriques de calcul de l'intégrale ci-dessous, respectivement :

$$V_{Q_{ppp}^{-'}} = \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{\sqrt{1-z}}^z (1-z) dx dz = \frac{19}{20} - \frac{5}{12} \sqrt{5}$$

$$V_{Q_{ppp}^{-''}} = \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{1-x^2}^x (1-x) dz dx = -\frac{11}{8} + \frac{5}{8} \sqrt{5}$$

Ainsi le volume de sous-solide Q_{ppp}^- est $V_{Q_{ppp}^-} = V_{Q_{ppp}^{-'}} + V_{Q_{ppp}^{-''}} = -\frac{17}{40} + \frac{5}{24} \sqrt{5}$.

Les calculs nécessaires pour chacune des intégrales ci-dessus sont les mêmes que précédemment.

Le volume du sous-solide Q_{nnp}

On peut obtenir une représentation analytique de Q_{nnp} . Dès l'étape *l* (tableau précédent) il est facile voir que la projection de sous-solide Q_{nnp} sur n'importe quel plan de coordonnées, donne une région régulière (de type R_x ou R_y). Il est possible d'avoir les six représentations d'écritures algébriques d'intégration obtenues plus haut (cf. **Svis**) conduisant au calcul du volume de Q_{nnp} . C'est-à-dire au résultat que nous rappelons ici, à savoir $V_{Q_{nnp}} = \frac{2}{15}$.

Le volume du sous-solide Q_{pnp}

Comme on peut le voir (dès l'étape m tableau précédent) le sous-solide Q_{pnp} se comporte comme le sous-solide Q_{nnp} , dans la mesure où on peut également avoir ses projections régulières sur les trois plans des coordonnées. Là encore le calcul de volume de Q_{pnp} peut se faire selon les six possibilités dégagées précédemment permettant d'arriver au résultat.

$$V_{Q_{pnp}} = \frac{8}{21}$$

Enfin le volume total du solide Q résulte à l'addition des six intégrales relatives au calcul du volume de chaque sous-solide :

$$V_Q = (V_{Q_{ppp}^+}) + (V_{Q_{ppp}^-}) + (V_{Q_{ppp}^{''}}) + (V_{Q_{npp}}) + (V_{Q_{nnp}}) + (V_{Q_{pnp}})$$

C'est-à-dire qu'en considérant les calculs menés précédemment :

$$V_Q = \left(\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{1-z} dydx dz \right) + \left(\int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{\sqrt{1-z}}^z \int_0^{1-z} dydx dz + \int_{(-1+\sqrt{5})/2}^1 \int_{1-x^2}^x \int_0^{1-x} dydz dx \right) +$$

$$\left(\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-z}}^0 \int_0^{1-z} dydx dz \right) + \left(\int_{-1}^0 \int_{-x^2}^0 \int_0^{1-x^2} dzdy dx \right) + \left(\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^0 \int_0^{1-x^2} dzdy dx \right) \Rightarrow$$

$$V_Q = \frac{2}{5} + \left(-\frac{17}{40} + \frac{5}{24}\sqrt{5} \right) + \frac{2}{5} + \frac{2}{15} + \frac{8}{21} = -\frac{249}{280} + \frac{5}{24}\sqrt{5} \Rightarrow V_Q \cong 1.355133210$$

On voit donc que la représentation graphique permet une gestion beaucoup plus riche du problème et permet de guider la démarche analytique conduisant au calcul du volume. Le problème reste complexe et les risques d'erreurs très élevées. Ce problème et l'analyse que nous venons d'en faire permet de voir que sur des exemples un peu complexes, la dialectique entre les cadres graphique et analytique est tout à fait indispensable pour pouvoir mener à bien les calculs conduisant au calcul du volume par des intégrales multiples.

Ce qui nous intéresse dans cet exercice, c'est d'aller voir dans la pratique des étudiants, en particulier s'ils font ou non un dessin pour résoudre ce problème. S'ils le font, comment :

- ce dessin est-il produit dans l'environnement papier/crayon
- est-il travaillé par rapport au problème ?

Est-ce que les trois gouttières et les quatre plans sont tracés ?

Dans quelle mesure les différents positionnements des ces composantes, sont mises en évidence ? Est-ce que :

- les sous-solides possibles sont mis en évidence ?
- le sous-solide superposé dans le quart PPP est dégagé ?
- le solide en question est dégagé ?

Quelles sont les difficultés rencontrées ?

Au niveau de la résolution analytique et du calcul de l'intégrale nous reprenons également les questions considérées dans les premiers exercices.

Exercice 04 : Le calcul de la masse d'un solide de revolution

Un solide Q est l'intersection du solide délimité par les paraboloides d'équations : $y - x^2 - z^2 = 0$ et $y - 8 + x^2 + z^2 = 0$ et du solide délimité par les cônes d'équations $y - 3 - \sqrt{x^2 + z^2} = 0$ et $y - 5 + \sqrt{x^2 + z^2} = 0$. La densité en chaque point $P(x, y, z)$ de Q est proportionnelle au carré de la distance qui sépare ce point à l'axe de symétrie de Q . Calculez la masse du solide Q .

2.4 Analyse a priori d'exercice 04

Cet exercice dépasse a priori notre champ d'étude puisqu'il demande la recherche de la masse d'un solide et non pas du volume, mais c'est une application très voisine des intégrales multiples. Comme pour le cas du calcul de volumes, en effet, ce type d'application occupe une place importante dans l'enseignement des IM et met en valeur la relation entre la masse, la densité et le volume d'un solide. Ainsi il nous a paru intéressant de voir si dans ce type de tâche, les étudiants réalisent ou non une représentation graphique du solide. Si oui, comment elle est utilisée dans le calcul de la masse.

Dans le cas présent où le but est de trouver la masse du solide Q on a été amené d'abord à déterminer une représentation analytique du solide en question. En effet, pour procéder au calcul de la masse par une intégrale triple il est nécessaire de connaître les bornes d'intégration. Ici il faut repérer l'axe du solide, ensuite dégager la fonction densité $\delta(x, y, z)$ et enfin mettre en place le calcul par l'écriture de l'intégrale triple $\iiint_Q \delta(x, y, z) dV$.

Comme pour les cas précédents, l'énoncé de cet exercice comporte des expressions de surfaces « élémentaires » (des paraboloides et des cônes) a priori connues par les étudiants. La nature des ces expressions donne également des possibilités d'étudier le problème en considérant les symétries du solide. Toutefois, le fait d'intégrer dans les calculs les connaissances de proportionnalités, des distances et la fonction de la densité de la masse du solide, rend l'exercice plus difficile. Nous allons commencer par étudier le problème de façon purement analytique. Nous verrons ensuite comment on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique et enfin sur la représentation graphique explicite des équations de l'énoncé.

I. Première stratégie : Interprétation analytique du solide (Sa)

Nous examinerons ici comment on peut résoudre le problème analytiquement, sans évoquer la représentation graphique du solide. Pour ce faire, il est nécessaire de remplacer les égalités, qui définissent les surfaces délimitant les solides, par des inégalités, déterminant ainsi plus ou moins explicitement des représentations analytiques des solides. L'intersection de ces solides doit permettre d'obtenir le solide Q et le calcul de la masse par une intégrale triple.

Reprenons les équations de l'énoncé :

$$\begin{cases} y - x^2 - z^2 = 0 \\ y - 8 + x^2 + z^2 = 0 \\ y - 3 - \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \\ y - 5 + \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 + z^2 & (1) \\ y = 8 - (x^2 + z^2) & (2) \\ y = 3 + \sqrt{x^2 + z^2} & (3) \\ y = 5 - \sqrt{x^2 + z^2} & (4) \end{cases}$$

Le problème est de savoir comment utiliser ces expressions pour mettre en place le calcul de la masse du solide Q par une intégrale triple.

A noter que la nature des expressions en jeu montre facilement que l'axe- Oy est un axe de symétrie du solide Q . La difficulté essentielle reste dans le choix parmi les ordres possibles des inégalités déterminant des représentations analytiques des solides et de dégager en fine une représentation du solide intersection.

La clé est d'utiliser au maximum la nature d'objet représentés par les expressions (1), (2), (3) et (4) (des paraboloides ou des cônes) et ensuite de dégager d'entre les $2^4=16$ choix possibles sur le sens des inégalités, celui qui représente les solides bornés. Enfin, il faut repérer le solide intersection par comparaison des domaines tridimensionnels.

Nous présentons d'abord les 2^4 choix possibles (huit pour chaque nature d'objet en question).

En remplaçant les égalités des expressions (1) (2) (3) et (4) par des inégalités on peut obtenir :

Paraboloides ($p_i, i=1,2,3,4$)		Cônes ($c_i, i=1,2,3,4$)	
$p1 \begin{cases} y \leq x^2 + z^2 \\ y \leq 8 - (x^2 + z^2) \end{cases}$	$p1' \quad p1''$	$c1 \begin{cases} y \leq 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \\ y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$	$c1' \quad c1''$
$p2 \begin{cases} y \leq x^2 + z^2 \\ y \geq 8 - (x^2 + z^2) \end{cases}$	$p2' \quad p2''$	$c2 \begin{cases} y \leq 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \\ y \geq 5 - \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$	$c2' \quad c2''$
$p3 \begin{cases} y \geq x^2 + z^2 \\ y \geq 8 - (x^2 + z^2) \end{cases}$	$p3' \quad p3''$	$c3 \begin{cases} y \geq 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \\ y \geq 5 - \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$	$c3' \quad c3''$
$p4 \begin{cases} y \geq x^2 + z^2 \\ y \leq 8 - (x^2 + z^2) \end{cases}$	$p4' \quad p4''$	$c4 \begin{cases} y \geq 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \\ y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$	$c4' \quad c4''$

Notons que les deux paraboloides (1) et (2) sont convexes vers la droite et vers la gauche de l'axe- Oy respectivement. De même, les deux cônes (3) et (4) sont convexes respectivement vers la droite et vers la gauche de l'axe- Oy . Ces hypothèses permettent de voir (sans même développer les manipulations algébriques) que les paires $p1, p2$ et $p3$ des inéquations des paraboloides et les paires $c1, c2$ et $c3$ des inéquations des cônes ne donnent que les solides illimités. Alors que $p4$ et $c4$ délimitent deux domaines tridimensionnels bornés respectivement. En effet, sur l'axe- Oy on a $x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - (x^2 + z^2)$ et $3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$. Il est évident que cette détermination peut utilement

s'appuyer sur une interprétation géométrique ou sur une représentation graphique des solides.

Le solide (Q_p) délimité par les paraboloides des inéquations p4' et p4''

Comme $x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - (x^2 + z^2)$, alors $x^2 + z^2 \leq 8 - (x^2 + z^2)$. Ainsi, soit on exprime z en fonction de x et on obtient $z \leq \pm\sqrt{4-x^2}$ ou encore $-\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2}$ pour $-2 \leq x \leq 2$. Soit on exprime x en fonction de z et on obtient $x \leq \pm\sqrt{4-z^2}$ ou encore $-\sqrt{4-z^2} \leq x \leq \sqrt{4-z^2}$ pour $-2 \leq z \leq 2$. Dans cette interprétation ressortent les deux représentations analytiques de Q_p ci-dessous :

$$Q_p = \left\{ (x, y, z); -2 \leq x \leq 2; x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - (x^2 + z^2); -\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2} \right\} \quad (5)$$

$$Q_p = \left\{ (x, y, z); -\sqrt{4-z^2} \leq x \leq \sqrt{4-z^2}; x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - (x^2 + z^2); -2 \leq z \leq 2 \right\} \quad (6)$$

Les deux représentant ainsi le même objet.

Détermination du Solide (Q_c) délimité par les deux cônes des inéquations c4' et c4''

De c4 on peut obtenir $3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$. En effet $3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$. Ainsi en exprimant z en fonction de x on peut obtenir $z \leq \pm\sqrt{1-x^2}$ ou encore $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$, pour $-1 \leq x \leq 1$. On peut également exprimer x en fonction de z . Dans ce cas on a $x \leq \pm\sqrt{1-z^2}$ ou encore $-\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}$, selon $-1 \leq z \leq 1$. Dans cette interprétation ressortent aussi deux représentations analytiques de Q_c , à savoir :

$$Q_c = \left\{ (x, y, z); -1 \leq x \leq 1; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \right\} \quad (7)$$

$$Q_c = \left\{ (x, y, z); -\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; -1 \leq z \leq 1 \right\} \quad (8)$$

Les deux représentent le même objet.

Il n'est pas très difficile de montrer que $Q_c \subseteq Q_p$.

En effet, si on prend un élément quelconque (x, y, z) dans Q_c , en partant de (7) comme $-1 \leq x \leq 1$, il est clair que $1 - x^2 \leq 4 - x^2$. Ceci implique que $\sqrt{1-x^2} \leq \sqrt{4-x^2}$. Ainsi de $-1 \leq x \leq 1$ et de $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$ on déduit que $-\sqrt{4-x^2} \leq z \leq \sqrt{4-x^2}$.

Par ailleurs, on pose $A = \sqrt{x^2 + z^2}$. Comme (x, y, z) est dans Q_c , $0 \leq x^2 \leq 1$ et $0 \leq z^2 \leq 1 - x^2$. Donc $0 \leq A \leq 1$. Donc, $-A \leq -A^2$. Comme $5 \leq 8$, alors $5 - A \leq 8 - A^2$.

De même $3 + A \geq A^2$.

Ainsi de $3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$ on peut déduire que $x^2 + z^2 \leq 8 - (x^2 + z^2)$.

Ceci démontre bien que $Q_c \subseteq Q_p$.

Comme le solide Q_c borné par les surfaces coniques des équations (3) et (4) est contenu dans le solide Q_p borné par les surfaces paraboliques des équations (1) et (2), alors $Q_p \cap Q_c = Q_c$. Donc $Q = Q_c$. Ainsi de (7) ou (8) on peut passer au calcul de la masse de Q grâce à l'écriture $\iiint_Q \delta(x,y,z) dV$ de l'intégrale triple.

Le problème maintenant est de savoir comment dégager la fonction densité $\delta(x, y, z)$. Or, on sait grâce à l'énoncé, que la densité en chaque point $P(x,y,z)$ de Q est proportionnelle au carré de la distance qui sépare P à l'axe de symétrie de Q . Comme cet axe est l'axe- Oy , alors en considérant un point $M(0,y,0)$ de cet axe et en utilisant la formule de la distance entre deux points on peut déduire que la distance (d_{PM}) de P à M est $d_{PM} = \sqrt{x^2 + z^2}$. De là il en ressort que la densité en chaque point de Q est donnée par la fonction $\delta(x, y, z) = \kappa(x^2 + z^2)$ où κ est une constante.

Remarque : De (7) ou de (8) on peut déduire que le solide intersection est symétrique par rapport au plan yOz et au plan xOy . En effet si on change x et z en $-x$ et $-z$ respectivement, la représentation de Q est inchangée. Ce qui permet de ramener les calculs au quart du solide Q correspondant à $x \geq 0$ $z \geq 0$.

De (7) et (8) on peut alors découper Q en quatre parties qui correspondent explicitement aux représentations analytiques ci-dessous :

$$Q_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \left\{ (x, y, z); 0 \leq x \leq 1; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2} \right\} \quad (9)$$

$$Q_{\left(\frac{1}{4}\right)} = \left\{ (x, y, z); 0 \leq x \leq \sqrt{1 - z^2}; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; 0 \leq z \leq 1 \right\} \quad (10)$$

Que l'on écrive explicitement ces représentations ou non, on peut obtenir les deux écritures algébriques du calcul de la masse de Q ci-dessous :

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{3+\sqrt{x^2+z^2}}^{5-\sqrt{x^2+z^2}} (x^2 + z^2) dy dz dx$$

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{3+\sqrt{x^2+z^2}}^{5-\sqrt{x^2+z^2}} (x^2 + z^2) dy dx dz$$

Les calculs nécessaires pour les deux intégrales doivent conduire au même résultat. Le problème ici est que, de tels calculs sont plus complexes qu'il peut y paraître. En effet, les risques de commettre des erreurs sont assez grands, c'est le plus souvent des cas où les bornes des intervalles de variation des variables concernés comportent des racines carrées, cubiques, etc.

Les méthodes classiquement employées pour simplifier les calculs (en éliminant les racines) dans ce type d'intégrales consistent particulièrement au passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques ou aux coordonnées sphériques. Et plus généralement par une transformation T qui envoie une région tridimensionnelle S de l'espace $Ouvw$ dans l'espace $Oxyz$ (de coordonnées cartésiennes) au moyen des équations $x = f_1(u, v, w)$, $y = f_2(u, v, w)$ et $z = f_3(u, v, w)$ où le Jacobien de T doit être développé à partir de ces équations. Notons que dans le cas présent, tant le changement particulier que celui généralisé ne simplifie pas les

calculs de façon immédiate. Pour le cas généralisé, l'étudiant doit dégager une transformation T à partir des composants de l'intégrale à calculer. Ici, le changement de variable le plus évident suggéré par les composantes des deux intégrales est celui qui correspond au passage des coordonnées cartésiennes, aux coordonnées cylindriques. On peut changer la variable x par $\rho \cos\theta$, la variable z par $\rho \sin\theta$ et la variable y restant inchangée. Les deux méthodes suivantes sont également pertinentes permettant d'éliminer les racines carrées dans l'intégrand :

- A.** On peut passer du calcul de l'intégrale triple à l'intégrale double (deuxième niveau d'intégrale itérée). Dans ce cas, on se trouve dans l'espace de dimension 2. Mais qu'est-ce que cela apporte ? On raisonne ainsi par conditions opérationnelles (dans cette dimension 2) suggérées par l'intégrand (fonction densité) et les bornes d'intégration. Si on se place dans les coordonnées polaires, il est évident que les racines carrées soient éliminées, ce qui simplifie ainsi la complexité du problème.
- B.** Il est également possible de réorganiser la tâche à partir des deux représentations (9) ou (10) puis enfin de dégager les représentations analytiques dans lesquelles la variable y apparaît comme la dernière variable dans le traitement de l'intégrale. Ceci peut permettre de « réduire » le nombre de racines dans les bornes d'intégration et éventuellement de simplifier les calculs en coordonnées cartésiennes. Toutefois, ici aussi, le changement de variable serait inévitable. Mais le changement à considérer ici n'est pas tout à fait une transformation. C'est une substitution trigonométrique, on ne changera donc pas les systèmes des coordonnées. Une substitution ne touche pas le Jacobien. On peut aussi avancer que la substitution trigonométrique ne fonctionne pas ici à partir de l'intégrale triple. Donc, le passage de l'intégrale triple à l'intégrale double est aussi nécessaire.

Mais, comment un étudiant peut-il anticiper ces complexités ? A priori, une fois qu'une des deux écritures ci-dessus (la plus élémentaire possible) est accomplie, l'étudiant pourra se lancer dans les calculs. Il est probable que les possibilités de blocage soient élevées. Les calculs complets des deux intégrales ci-dessus montrent ces complexités (si on ne passe pas par les deux méthodes **A** et **B**) et ils sont donnés en annexe.

De **A** et **B** on peut envisager quatre stratégies : les deux premières sont liées au cas de **A** (passage de l'intégrale triple à l'intégrale double et emploi des coordonnées polaires) et les deux dernières sont liées au cas de **B** (prise en compte de la variable y comme la dernière variable dans le traitement de l'intégrale et la substitution trigonométrique) à savoir :

- 1) **Sa (cp- θ)** : θ est la première variable dans le traitement de l'intégrale double ;
- 2) **Sa (cp- ρ)** : ρ est la première variable dans le traitement de l'intégrale double ;
- 3) **Sa (cc- z)** : z est la première variable dans le traitement de l'intégrale triple et y la dernière ;
- 4) **Sa (cc- x)** : x est la première variable dans le traitement de l'intégrale triple et y la dernière ;

A. Passage de l'intégrale triple à l'intégrale double et emploi des coordonnées polaires

A partir des deux écritures algébriques des calculs des intégrales précédentes, on peut facilement passer au deuxième niveau d'intégrale itérée et obtenir les deux écritures ci-dessous :

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2 - 2\sqrt{x^2 + z^2})(x^2 + z^2) dz dx$$

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (2 - 2\sqrt{x^2 + z^2})(x^2 + z^2) dx dz$$

Les calculs nécessaires pour les deux variantes d'intégrales doivent conduire au même résultat. Nous n'allons pas développer les calculs des deux variantes, car les techniques nécessaires sont « quasiment » les mêmes pour les deux cas. Nous montrerons comment on peut résoudre le problème à partir de la première variante :

Sa(cp) : coordonnées polaires

La transformation T la plus naturelle qui renvoie une région polaire $\rho O \theta$ au quart du cercle de rayon 1 du plan- xOz suggéré par l'intégrant de l'intégrale

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2 - 2\sqrt{x^2 + z^2})(x^2 + z^2) dz dx$$

est $x = g(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$ et $z = g(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$. En effet le Jacobien de T est ρ .

1) Sa(cp- θ) : le cas où θ est la première variable dans le traitement de l'intégrale

Dans ce cas, on considère l'ordre $d\theta d\rho$ dans l'écriture algébrique de l'intégrale. Voici les calculs possibles en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} m_Q &= 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\rho)(\rho^2) \rho d\theta d\rho = 2\pi\kappa \int_0^1 (2\rho^3 - 2\rho^4) d\rho \\ &= 4\pi\kappa \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = 4\pi\kappa \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \Rightarrow m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa \end{aligned}$$

Donc la masse du solide Q est $\pi\kappa/5$. Passons maintenant au

2) Sa(cp- ρ) : le cas où ρ est la première variable dans le traitement de l'intégrale

En considérant l'ordre $d\theta d\rho$ on peut obtenir l'écriture du calcul de l'intégrale en coordonnées polaires ci-dessous, conduisant au même résultat ci-dessus :

$$\begin{aligned} m_Q &= 4\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2 - 2\rho)(\rho^2) \rho d\rho d\theta = 4\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2\rho^3 - 2\rho^4) d\rho d\theta \\ &= 8\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 d\theta = \frac{2}{5} \kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \Rightarrow m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa \end{aligned}$$

Regardons maintenant comment on peut traiter le problème en considérant la variable y comme la dernière variable dans le traitement de l'intégrale.

B. y comme dernière variable dans le traitement de l'intégrale et substitution trigonométrique

On peut ici réorganiser la tâche à partir de deux représentations (9) ou (10) enfin de

« réduire » le nombre de racines carrées dans les bornes d'intégration et éventuellement réduire la complexité du problème en coordonnées cartésiennes.

En revenant aux représentations analytiques (9) ou (10) il possible de déduire que Q_c est symétrique par rapport au plan d'équation $y=4$. En effet, $4 = \frac{3+5}{2} \in [3,5]$. Donc on peut découper le solide $Q_{(1/4)}$ en deux sous-solides de volumes égaux. Ainsi de (9) on peut obtenir :

$$Q_{(\frac{1}{4})_1} = \left\{ (x, y, z); 0 \leq x \leq 1; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 4; 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

$$Q_{(\frac{1}{4})_2} = \left\{ (x, y, z); 0 \leq x \leq 1; 4 \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$$

De $Q_{c(1/4)_1}$ on peut obtenir explicitement le huitième de Q selon les deux variantes :

soit on exprime z en fonction de x et y et on obtient :

$$Q_{(\frac{1}{8})_1} = \left\{ (x, y, z); \begin{array}{l} 0 \leq x \leq y-3 \\ 3 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{(y-3)^2 - x^2} \end{array} \right\}$$

soit on exprime x en fonction de y et z et on obtient :

$$Q_{(\frac{1}{8})_1'} = \left\{ (x, y, z); \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \sqrt{(y-3)^2 - z^2} \\ 3 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq y-3 \end{array} \right\}$$

Et de $Q_{c(4)_2}$ on peut obtenir explicitement un huitième de Q selon les deux variantes :

soit on exprime z en fonction de x et y et on obtient :

$$Q_{(\frac{1}{8})_2} = \left\{ (x, y, z); \begin{array}{l} 0 \leq z \leq \sqrt{(5-y)^2 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 5-y \\ 4 \leq y \leq 5 \end{array} \right\}$$

soit on exprime x en fonction de y et z et on obtient :

$$Q_{(\frac{1}{8})_2'} = \left\{ (x, y, z); \begin{array}{l} 0 \leq x \leq \sqrt{(5-y)^2 - z^2} \\ 0 \leq z \leq 5-y \\ 4 \leq y \leq 5 \end{array} \right\}$$

Dans cette organisation ressort que $Q_{(\frac{1}{4})} = Q_{(\frac{1}{8})_1} \cup Q_{(\frac{1}{8})_2}$ ou $Q_{(\frac{1}{4})} = Q_{(\frac{1}{8})_1'} \cup Q_{(\frac{1}{8})_2'}$.

On voit alors que les quatre représentations ci-dessus éliminent une des racines carrées dans les bornes d'intégration par rapport aux deux représentations précédentes. Les quatre variantes conduisent au même résultat. La masse totale sera multipliée par huit. Voilà les calculs possibles à partir d'une de ces représentations.

Le calcul de la masse de Q à partir du sous-solide $Q_{c(1/8)_1}$

3) Sa(cc-z) : le cas où z est la première variable dans le traitement de l'intégrale et y la dernière

$$\begin{aligned} m_Q &= 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - x^2}} (x^2 + z^2) dz dx dy \\ &= 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} x^2 \sqrt{(y-3)^2 - x^2} dx dy + \frac{8}{3}\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \sqrt{((y-3)^2 - x^2)^3} dx dy \end{aligned}$$

Notons que le calcul de cette intégrale n'est pas immédiat dans l'environnement papier/crayon. Les démarches nécessaires sont assez longues et le changement de variables est indispensable. Donc les risques de commettre des erreurs de calculs sont élevés. Ainsi pour essayer de contrôler les calculs nous allons traiter séparément chacune des intégrales doubles :

$$\int_3^4 \int_0^{y-3} x^2 \sqrt{(y-3)^2 - x^2} dx dy \quad \text{(I)}$$

$$\int_3^4 \int_0^{y-3} \sqrt{((y-3)^2 - x^2)^3} dx dy \quad \text{(II)}$$

Voici les calculs possibles de la première intégrale (I) :

$$\begin{aligned} \int_3^4 \int_0^{y-3} x^2 \sqrt{(y-3)^2 - x^2} dx dy &= \int_3^4 \int_0^{y-3} x^2 (y-3) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y-3}\right)^2} dx dy \\ &= \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-3)^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta dy = \frac{1}{4} \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-3)^4 (1 - \cos^2 2\theta) d\theta dy \\ &= \frac{1}{4} \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-3)^4 \left[1 - \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right] d\theta dy = \frac{1}{4} \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-3)^4 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\theta\right] d\theta dy \\ &= \frac{1}{4} \int_3^4 (y-3)^4 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{8} \sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy = \frac{\pi}{16} \int_3^4 (y-3)^4 dy = \frac{\pi}{16} \left[\frac{(y-3)^5}{5}\right]_3^4 = \frac{\pi}{80} \end{aligned}$$

Changement de variable x

$$\frac{x}{y-3} = \sin \theta$$

$$dx = (y-3) \cos \theta d\theta$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ x = y-3 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Développons maintenant les calculs de la deuxième intégrale (II) :

$$\begin{aligned} \int_3^4 \int_0^{y-3} x^2 \sqrt{(y-3)^2 - x^2} dx dy &= \int_3^4 \int_0^{y-3} \left((y-3) \sqrt{1 - \left(\frac{x}{y-3}\right)^2} \right)^3 dx dy \\ &= \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y-3) \cos \theta)^3 (y-3) \cos \theta d\theta dy = \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-3)^4 \cos^4 \theta d\theta dy \\ &= \frac{1}{4} \int_3^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y-3)^4 \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) d\theta dy \\ &= \frac{1}{4} \int_3^4 (y-3)^4 \left[\frac{3\theta}{2} + \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} dy \\ &= \frac{3\pi}{16} \int_3^4 (y-3)^4 dy = \frac{3\pi}{16} \left[\frac{(y-3)^5}{5} \right]_3^4 = \frac{3\pi}{80} \end{aligned}$$

On peut également utiliser le changement de variables mené ci-dessous

Pour simplifier les calculs, on peut facilement développer une expansion trigonométrique du $\cos^4 \theta$. Voila la démarche possible.

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta)^2 \\ &= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 4\theta \right) \end{aligned}$$

Voici la masse totale de Q : $m_Q = 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - x^2}} (x^2 + z^2) dz dx dy = 8\kappa \left(\frac{\pi}{80}\right) + \frac{8}{3} \kappa \left(\frac{3\pi}{80}\right) = \frac{\pi}{5} \kappa$

On voit bien à partir de cet exercice que le degré des difficultés du calcul de l'intégrale triple

peut-être vu selon la nature de la fonction à intégrer et des bornes d'intégration. Contrairement aux cas de calculs de volumes par une intégrale triple où la fonction à intégrer est la constante 1, ici la nature de la fonction densité $\delta(x, y, z)$ et celle du contour du solide (c'est-à-dire, la nature des bornes d'intégration) viennent renforcer la difficulté dans les calculs.

4) Sa(cc-x) : le cas où x est la première variable dans le traitement de l'intégrale et y la dernière

La démarche possible par l'étude de ce cas est « quasiment » équivalente à celle que nous venons de suivre et conduit au même résultat ci-dessous (cf. Sa(cc-z)).

De cette analyse, il ressort que la gestion des données (les bornes d'intégration) à partir de la représentation analytique la plus naturelle possible n'est pas toujours la plus convenable pour les calculs. L'étudiant aura donc un travail préliminaire à accomplir pour arriver à une représentation analytique adéquate : mais comment anticiper le choix de la représentation analytique la plus adéquate possible qui peut guider les calculs moins lourds d'une intégrale double ou triple ? On voit bien que les données que l'on peut manipuler selon les représentations (9) et (10) issues de la représentation la plus naturelle possible de Q, rendent les calculs plus laborieux que les quatre derniers choix (Sa(cp) et Sa(cc)). Or, ceci n'est pas facile à anticiper.

Examinons maintenant comment on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique du solide intersection.

II. Deuxième stratégie : Interprétation géométrique du solide (Svis)

Nous examinons à présent ce qui se passe si le traitement analytique du problème s'appuie sur une visualisation (sans qu'il y ait tracé explicite d'un dessin) des objets en jeu pour situer le solide intersection. Pour s'appuyer sur l'interprétation géométrique il faut d'abord comprendre comment interagissent les surfaces données dans l'énoncé par leurs équations, que nous reprenons ci-dessous :

$$\begin{cases} y = x^2 + z^2 & (1) \\ y = 8 - (x^2 + z^2) & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 + \sqrt{x^2 + z^2} & (3) \\ y = 5 - \sqrt{x^2 + z^2} & (4) \end{cases}$$

On peut dégager les interprétations géométriques ci-dessous :

IG1	IG2
A noter que (1) est l'équation du parabolôïde centré sur l'axe-Oy, convexe vers la droite et a pour sommet le point (0,0,0). Donc $y \geq x^2 + z^2$.	(3) est l'équation du cône centré sur l'axe-Oy, convexe vers la droite et a pour sommet le point (0,3,0). Donc $y \geq 3 + \sqrt{x^2 + z^2}$.
(2) est l'équation du parabolôïde centré sur l'axe-Oy, convexe vers la gauche et a pour sommet le point (0,8,0), donc $y \leq 8 - (x^2 + z^2)$.	(4) est l'équation du cône centré sur l'axe-Oy, convexe vers la gauche et a pour sommet le point (0,5,0). Donc $y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$.
Ainsi il est facile de voir que (1) et (2) délimitent	Ainsi il est facile de voir que (3) et (4) délimitent une

une région (Q_p) de l'espace. En effet $x^2 + z^2 \leq y \leq 8 - (x^2 + z^2)$
L'intersection de (1) et (2) est un cercle de rayon 2, c'est-à-dire que $x^2 + z^2 = 8 - (x^2 + z^2)$ ce qui implique que $x^2 + z^2 = 4$
De ce dernier et du sommet de (1) et de (2) ressort que Q_p a pour hauteur maximale 8 sur l'axe- Oy et a pour diamètre maximale 4. Autrement dit, Q_p est une superposition infinie des cercles tous centrés sur l'axe- Oy et perpendiculaires à cet axe et de rayons de plus en plus grands quand on marche : de gauche à droite entre le sommet (0,0,0) et le point $(0, \frac{0+8}{2}, 0)$ et de droite à gauche entre ce dernier point et le sommet (0,8,0).
(1) et (2) s'intersectent dans le plan $y = \frac{0+8}{2} = 4$ parallèle au plan- xOz .

région (Q_c) de l'espace. En effet $3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$
L'intersection de (3) et (4) est un cercle de rayon 1, c'est-à-dire que $3 + \sqrt{x^2 + z^2} = 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$ implique que $x^2 + z^2 = 1$
De l'étude du sommet de (3) et de (4) du cercle ci-dessus ressort que Q_c a pour hauteur maximale 3 sur l'axe- Oy et a pour diamètre maximale 1. Autrement dit, Q_c est une superposition infinie des cercles tous centrés sur l'axe- Oy et perpendiculaires à cet axe et de rayons de plus en plus grands quand on marche : de gauche à droite entre le sommet (0,3,0) et le point $(0, \frac{3+5}{2}, 0)$ et de droite à gauche entre ce dernier point et le sommet (0,5,0).
(3) et (4) s'intersectent dans le plan $y = \frac{3+5}{2} = 4$ parallèle au plan- xOz .

Cette visualisation peut permettre un contrôle dans la détermination du solide intersection et des représentations analytiques aussi bien que dans les calculs de l'intégrale, dans tous les cas de stratégies que nous avons identifiés précédemment.

Ainsi de IG1 (colonne de gauche ci-dessus) on peut facilement voir que le solide Q_p est contenu dans le parallélépipède $[-2, 2] \times [0, 8] \times [-2, 2]$. De IG2 (colonne de droite) on peut également voir que Q_c est contenu dans le parallélépipède $[-1, 1] \times [3, 5] \times [-1, 1]$. En effet $[-1, 1] \times [3, 5] \times [-1, 1] \subseteq [-2, 2] \times [0, 8] \times [-2, 2]$. Donc $Q_c \subseteq Q_p$. Ainsi $Q_p \cap Q_c = Q_c$, ce qui implique $Q = Q_c$.

Pour arriver à dégager une représentation analytique de Q , plusieurs démarches sont possibles. On peut facilement obtenir la représentation analytique de Q entière (sans aucun découpage). Mais on peut également découper Q en quatre sous-solides ou encore en huit sous-solides.

Svis(rae) Représentation analytique de Q entière

Si on prend le plan- xOz comme le plan de projection, alors dès IG2 on peut visualiser le solide compris entre les deux cônes. En effet, on voit facilement que le solide Q se situe entre la surface la plus éloignée (le cône d'équation 5) et la surface la plus proche (le cône d'équation 4) de la région du plan- xOz délimitée par le cercle d'équation : $x^2 + z^2 = 1$. Grâce à IG2 on sait aussi que $3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$ ce qui implique $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$, où $-1 \leq x \leq 1$. Ou encore $-\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}$, où $-1 \leq z \leq 1$. Donc, deux représentations analytiques entièrement de Q sont possibles, à

savoir :

$$Q = \left\{ (x, y, z); -1 \leq x \leq 1; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; -\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \right\} \quad (5)$$

$$Q = \left\{ (x, y, z); -\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2}; 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}; -1 \leq z \leq 1 \right\} \quad (6)$$

Le problème à présent est de savoir comment dégager la fonction densité $\delta(x, y, z)$.

Notons que la densité en chaque point $P(x, y, z)$ de Q est proportionnelle au carré de la distance qui sépare P à l'axe de Q . Ainsi à partir de la formule de la distance entre deux point on peut obtenir : soit $M(0, y, 0)$ un point de Q appartenant l'axe- Oy , par cette formule on peut déduire que la distance (d_{PM}) de P à M est $d_{PM} = \sqrt{x^2 + z^2}$.

Donc la fonction densité est $\delta(x, y, z) = \kappa(x^2 + z^2)$ où κ est une constante.

Ainsi de (5) et (6) on peut passer au calcul de la masse selon les deux écritures algébriques du calcul de l'intégrale triple ci-dessus :

$$m_Q = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{3+\sqrt{x^2+z^2}}^{5-\sqrt{x^2+z^2}} (x^2 + z^2) dy dz dx$$

$$m_Q = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \int_{3+\sqrt{x^2+z^2}}^{5-\sqrt{x^2+z^2}} (x^2 + z^2) dy dx dz$$

Les calculs nécessaires pour les deux intégrales doivent conduire au même résultat. Le problème ici est que les deux représentations rendent ces calculs assez complexes. En effet les possibilités de commettre des erreurs sont assez élevées. Comment peut-on anticiper cette complexité ? Cette difficulté peut-être remarquée par des raisons suivantes :

- L'existence des racines carrées dans les bornes d'intégrations comportant la variable z ;
- La primitive de la fonction densité (d'après les trois niveaux d'intégrales itérées) ne simplifie pas les radicaux. En effet, elle les amplifie ;
- Le changement de variables en coordonnées cylindriques ne simplifie pas la complexité du problème. En effet, z est inchangé lors du passage de coordonnées cartésiennes à ce système de représentation.

Ainsi, comme pour **Sa** deux méthodes sont possibles :

- A.** L'emploi des coordonnées polaires. Dans ce cas le passage de l'intégrale triple à l'intégrale double est tout d'abord nécessaire ;
- B.** Dégager des représentations dans lesquelles la variable y soit la dernière variable à traiter dans le calcul de l'intégrale. C'est-à-dire que les bornes de l'intervalle de variation de y soient constantes. Ici une substitution trigonométrique est attendue au deuxième niveau du calcul de l'intégrale triple. C'est-à-dire que pour procéder au calcul de l'intégrale double est nécessaire une substitution trigonométrique.

Quatre stratégies sont à envisager :

- 1) **Sa (cp- θ)** : θ est la première variable dans le traitement de l'intégrale double ;
- 2) **Sa (cp- ρ)** : ρ est la première variable dans le traitement de l'intégrale double ;
- 3) **Sa (cc- z)** : z est la première variable dans le traitement de l'intégrale triple et y la dernière ;
- 4) **Sa (cc- x)** : x est la première variable dans le traitement de l'intégrale triple et y la dernière ;

Les deux premières sont liées au méthode **A** et les deux dernières au deuxième méthode **B**.

A. Passage de l'intégrale triple à l'intégrale double et emploi des coordonnées polaires

Des deux écritures algébriques du calcul d'intégrales triples précédentes, on peut facilement passer au deuxième niveau (c'est-à-dire au calcul des intégrales doubles) ci-dessous :

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (2 - 2\sqrt{x^2 + z^2})(x^2 + z^2) dz dx$$

$$m_Q = 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} (2 - 2\sqrt{x^2 + z^2})(x^2 + z^2) dx dz$$

Les deux intégrales conduisent au même résultat.

Dans ce niveau, il est alors possible de mettre en place la transformation T suggérée par l'intégrand et définie par $x = g(\rho, \theta) = \rho \cos \theta$ et $z = g(\rho, \theta) = \rho \sin \theta$ de Jacobien ρ en coordonnées polaires. Ainsi, dès deux intégrales ci-dessus on peut facilement passer au calcul de la masse de Q par l'écriture de l'intégrale double en coordonnées polaires. Voilà les calculs possibles selon les deux stratégies **Sa (cp- θ)** et **Sa (cp- ρ)**.

Sa (cp- θ) : θ est la première variable dans le traitement de l'intégrale double

$$\begin{aligned} m_Q &= 4\kappa \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\rho)(\rho^2) \rho d\theta d\rho \\ &= 2\pi\kappa \int_0^1 (2\rho^3 - 2\rho^4) d\rho \\ &= 4\pi\kappa \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 = 4\pi\kappa \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \end{aligned}$$

Donc $m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa$

Sa (cp- ρ) : ρ est la première variable dans le traitement de l'intégrale double

$$\begin{aligned} m_Q &= 4\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2 - 2\rho)(\rho^2) \rho d\rho d\theta \\ &= 4\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (2\rho^3 - 2\rho^4) d\rho d\theta \\ &= 8\kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^1 d\theta = \frac{2}{5} \kappa \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \end{aligned}$$

Donc $m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa$

Analysons à présent comment on peut résoudre le problème à partir de la deuxième méthode.

B. y comme dernière variable dans le traitement de l'intégrale et substitution trigonométrique

L'idée ici est de considérer le plan xOy ou le plan yOz comme les plans des projections du solide Q . De IG2 il est facile de voir que Q est symétrique par rapport aux deux plans. En effet, si on change x et z en $-x$ et $-z$ respectivement, la représentation de Q est inchangée. Ce qui permet de ramener les calculs au quart du solide Q correspondant à $x \geq 0$ $z \geq 0$.

De IG2 on sait aussi que le plan $y=4$ de l'intersection des deux cônes coupe le solide Q en deux sous-solides du même volume par symétrie. Donc pour $x \geq 0$ $z \geq 0$ il suffit de prendre en compte la surface du cône d'équation (3) ou celle d'équation (4) pour $3 \leq y \leq 4$ ou $4 \leq y \leq 5$ respectivement.

De (3) on peut obtenir (B-y)

$$3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \Rightarrow \sqrt{x^2 + z^2} \leq (y - 3)$$

$$x^2 + z^2 \leq (y - 3)^2 \text{ et } y \in [3, 4]$$

De (4) on peut obtenir (B-y)'

$$5 - \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \Rightarrow (5 - y) \leq \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$(5 - y)^2 \leq x^2 + z^2 \text{ et } y \in [4, 5]$$

O peut obtenir explicitement les huitièmes de Q selon les représentations analytiques ci-dessous :

De (B-y) :

- soit on prend le plan- xOy comme le plan de projection et exprimer z en fonction de x et y et on obtient la représentation du huitième :

$$Q_{(\frac{1}{8})_1} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{(y-3)^2 - x^2} \\ 0 \leq x \leq y-3 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

- soit on prend le plan- yOz comme le plan de projection et exprimer x en fonction de y et z et on obtient la représentation du huitième :

$$Q_{(\frac{1}{8})_1'} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{(y-3)^2 - z^2} \\ 0 \leq z \leq y-3 \\ 3 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

De (B-y)' :

- soit on prend le plan- xOy comme le plan de projection et exprimer z en fonction de x et y et on obtient la représentation du huitième :

$$Q_{(\frac{1}{8})_2} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq z \leq \sqrt{(5-y)^2 - x^2} \\ 0 \leq x \leq 5-y \\ 4 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

- soit on prend le plan- yOz comme le plan de projection et exprimer x en fonction de y et z et on obtient la représentation du huitième :

$$Q_{(\frac{1}{8})_2'} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{(5-y)^2 - z^2} \\ 0 \leq z \leq 5-y \\ 4 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Dans ce découpage, il ressort que : $Q_{(\frac{1}{4})} = Q_{(\frac{1}{8})_1} \cup Q_{(\frac{1}{8})_2}$ ou $Q_{(\frac{1}{4})} = Q_{(\frac{1}{8})_1'} \cup Q_{(\frac{1}{8})_2}'$

Au moins quatre représentations analytiques du sous-solide Q sont possibles. Ces représentations permettent les interprétations géométriques ci-dessous qui conduisent à la mise en place de quatre variantes du calcul de la masse elles mènent toutes au même résultat.

Soit on interprète la masse du solide sous le cône d'équation $z = \sqrt{(y-3)^2 - x^2}$ par rapport au plan- xOy (dessus la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$m_Q = 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - x^2}} (x^2 + z^2) dz dx dy$$

Soit on interprète la masse du solide sous le cône d'équation $x = \sqrt{(y-3)^2 - z^2}$ par rapport au plan- yOz (dessus la région de type R_y) et on obtient l'écriture ci-dessous.

$$m_Q = 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - z^2}} (x^2 + z^2) dx dz dy$$

Soit on interprète la masse du solide sous le cône d'équation $z = \sqrt{(5-y)^2 - x^2}$ par rapport au plan- xOy (dessus la région de type R_y) et on

Soit on interprète la masse du solide sous le cône d'équation $x = \sqrt{(5-y)^2 - z^2}$ par rapport au plan- yOz (dessus la région de type R_y) et on obtient

obtient l'écriture ci-dessous.

$$m_Q = 8\kappa \int_4^5 \int_0^{5-y} \int_0^{\sqrt{(5-y)^2 - x^2}} (x^2 + z^2) dz dx dy$$

l'écriture ci-dessous.

$$m_Q = 8\kappa \int_4^5 \int_0^{5-y} \int_0^{\sqrt{(5-y)^2 - z^2}} (x^2 + z^2) dx dz dy$$

Les calculs nécessaires sont quasiment les mêmes que plus haut (cf. **Sa(cc-z)**) et conduisent à $m_Q = \pi\kappa / 5 \cong 0,628318530\kappa$

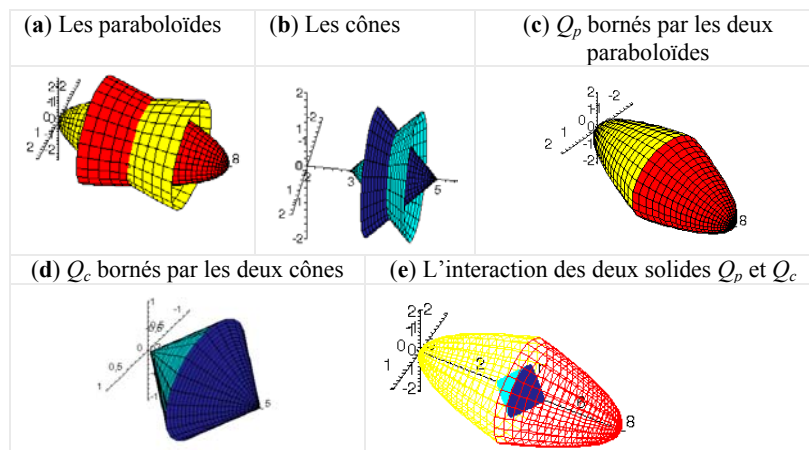
On peut facilement voir que la démarche que nous venons d'expliciter est proche de celle décrite plus haut **Sa**. Néanmoins, même si ici la gestion des données demande une bonne vision du problème sans forcément faire les dessins, les calculs qui sont laborieux dans la stratégie **Sa(cor)** sont simplifiés dans la stratégie **Svis**. En effet, voir les objets en jeu peut aider à mieux gérer les données dans la résolution analytique.

Regardons maintenant ce qu'il est possible de faire en s'appuyant sur un graphique.

III. Troisième stratégie : Appui sur une représentation graphique du solide

Dans cette stratégie, on va s'appuyer sur l'interaction entre le graphique et l'analytique. Pour commencer on trace le plus précisément possible une représentation graphique du solide dans l'espace. Dans notre présentation, nous allons nous aider du logiciel **Maple**.

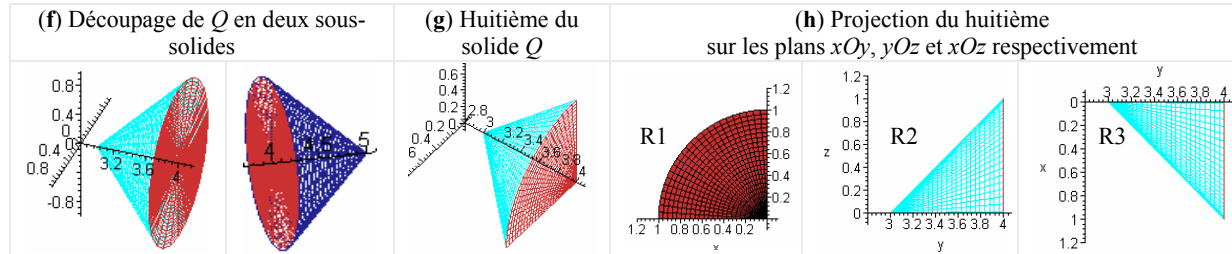
Tout d'abord on trace conjointement les deux paraboloides, pour permettre une visualisation ample de leurs positionnements dans l'espace (étape **a**). Pareillement pour les deux cônes (étape **b**). Dans les deux étapes, on s'appuie sur la connaissance implicite que les deux paraboloides et les deux cônes déterminent deux régions bornées (séparément) (Q_p étape **c**) et (Q_c étape **d**) respectivement. Il s'agit ensuite d'assembler les deux solides pour voir comment ils interagissent afin de donner le solide Q intersection (étape **e**).



Comme Q_c est à l'intérieur de Q_p , il est évident que le solide intersection Q dont on cherche à calculer la masse est exactement le solide borné par les deux cônes (étape **d**).

Dès l'étape **d** on voit facilement que les deux cônes des équations (3) et (4) (cf. l'énoncé) sont centré sur l'axe- Oy et convexes vers la droite et vers la gauche respectivement. En effet,

$3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 5 - \sqrt{x^2 + z^2}$ ce qui implique $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$. On peut également déduire que les deux cônes s'intersectent puisque $y = 4 = \frac{3+5}{2}$ en découpant Q en deux sous-solides (cf. étape **f** ci-dessous) de même volume.



Une fois ce découpage « appréhendé visuellement » par les graphiques, il s'agit de mettre en place le calcul de la masse par une intégrale triple, ce qui consiste implicitement à obtenir une représentation analytique du solide Q , ainsi que l'interprétation de la fonction densité. Par rapport aux deux stratégies (**Sa** et **Svis**) précédentes, les dessins peuvent ici guider la mise en place du calcul de l'intégrale, dont les choix en terme des calculs sont pareils que précédemment.

Dès l'étape **d** (tableau ci-dessus) il est facile d'obtenir une représentation analytique de Q entière, qui correspond à la visualisation du solide compris entre les deux cônes. Mais comme pour (**Sa** et **Svis**) une telle représentation renvoie aux calculs assez complexes en coordonnées cartésiennes. C'est pourquoi le découpage en sous-solides est tellement important dans cet exercice, permet de simplifier les calculs.

En considérant le huitième sous-solide de Q (étape **g**) en lien avec l'équation 3 qui le représente on peut prévoir plusieurs choix :

Premier choix (projection du huitième sur le plan- xOz)

Dès l'étape **g** (cf. tableau ci-dessus) on voit que Q_8 est le quart du cône de base circulaire (cf. étape **h**, région R1 qui est le quart du cercle $x^2 + z^2 = 1$) du plan $y = 4$ parallèle au plan- xOz et borné inférieurement par la surface d'équation $y = 3 + \sqrt{x^2 + z^2}$. Ainsi deux représentations analytiques de Q_8 sont possibles : De R1 :

Soit on exprime z en fonction de x et on obtient

$$Q_{\left(\frac{1}{8}\right)} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Soit on exprime x en fonction de z et on obtient

$$Q_{\left(\frac{1}{8}\right)} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Comme pour les deux stratégies (**Sa** et **Svis**) on peut facilement exprimer la fonction densité par $\delta(x, y, z) = \kappa(x^2 + z^2)$. Ainsi les deux représentations permettent la mise en place de deux écritures algébriques du calcul de masse qui conduisent (avec le même degré de difficulté) au même résultat.

$$m_Q = 8\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{3+\sqrt{x^2+z^2}}^4 (x^2 + z^2) dydzdx$$

$$m_Q = 8\kappa \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_{3+\sqrt{x^2+z^2}}^4 (x^2 + z^2) dydx dz$$

Les calculs nécessaires sont les mêmes en coordonnées polaires que précédemment, et chacune des intégrales conduit au résultat ci-dessous.

$$m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa$$

Deuxième choix (projection du huitième sur le plan-yOz)

Dès l'étape **g** (cf. tableau ci-dessus) on peut également interpréter Q_8 comme le quart du cône sous la surface d'équation $x = \sqrt{(y-3)^2 - z^2}$ et dessus de la région triangulaire R2 (cf. étape **h**) du plan-yOz délimitée par l'axe-Oy et par les droites des équations $y = 4$ et $y = z + 3$. Ici aussi deux représentations analytiques de Q_8 sont possibles :

De R2	
Soit on exprime z en fonction de y et on obtient $Q_{\left(\frac{1}{8}\right)} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{(y-3)^2 - z^2} \\ 3 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq y-3 \end{cases}$	Soit on exprime y en fonction de z et on obtient $Q_{\left(\frac{1}{8}\right)} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{(y-3)^2 - z^2} \\ z+3 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$

Une fois la fonction densité $\delta(x, y, z) = \kappa(x^2 + z^2)$ mise en place, les deux représentations d'écritures algébriques du calcul de masse sont possibles (relatives aux régions du plan-yOz des types R_y et R_z respectivement), à savoir :

$$m_Q = 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - z^2}} (x^2 + z^2) dx dz dy$$

$$m_Q = 8\kappa \int_0^1 \int_{z+3}^4 \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - z^2}} (x^2 + z^2) dx dy dz$$

Les calculs nécessaires sont quasiment les mêmes que précédemment (cf. **Sa(cc-z)** et **Sa(cc-x)**) en coordonnées cartésiennes et chacune des intégrales conduit au résultat ci-dessous.

$$m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa$$

Troisième choix (projection du huitième sur le plan-xOy)

Dès l'étape **g** (cf. tableau ci-dessus) on peut également interpréter Q_8 comme le quart du cône sous la surface d'équation $z = \sqrt{(y-3)^2 - x^2}$ et dessus de la région triangulaire R2 (cf. étape **h**) du plan-xOy délimitée par l'axe-Oy et par les droites des équations $y = 4$ et $y = x + 3$. Ici aussi deux représentations analytiques de Q_8 sont possibles :

De R3	
Soit on exprime y en fonction de x et on obtient $Q_{\left(\frac{1}{8}\right)} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq y-3 \\ 3 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{(y-3)^2 - x^2} \end{cases}$	Soit on exprime x en fonction de y et on obtient $Q_{\left(\frac{1}{8}\right)} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x+3 \leq y \leq 4 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{(y-3)^2 - x^2} \end{cases}$

Une fois la fonction densité $\delta(x, y, z) = \kappa(x^2 + z^2)$ mise en place, les deux représentations d'écritures algébriques du calcul de masse sont possibles (relatives aux régions du plan- yOz des types R_y et R_x respectivement), à savoir :

$$m_Q = 8\kappa \int_3^4 \int_0^{y-3} \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - x^2}} (x^2 + z^2) dz dx dy$$

$$m_Q = 8\kappa \int_0^1 \int_{x+3}^4 \int_0^{\sqrt{(y-3)^2 - x^2}} (x^2 + z^2) dz dy dx$$

Les calculs nécessaires sont quasiment les mêmes que précédemment (cf. **Sa(cc-z)** et **Sa(cc-x)**) en coordonnées cartésiennes et chacune des intégrales conduisent au résultat ci-dessous.

$$m_Q = \frac{\pi}{5} \kappa \cong 0,628318530\kappa$$

Notons que, toutes les intégrales dégagées ici correspondent au calcul de la masse du même objet (le solide Q). Toutefois, les degrés des difficultés sont assez variés selon l'écriture mise en place. Par exemple, entre les deux dernières intégrales, celle relative à la projection de Q sur la région type R_x (la dernière) est plus difficile que celle relative à la projection de Q sur la région de type R_y (l'avant-dernière). Comme on peut le voir (**Sa(cc-z)**), celle relative à R_y peut être simplifiée selon la substitution trigonométrique $\frac{x}{y-3} = \sin \theta$, car les bornes de l'intervalle de variation de la variable x contient l'expression $y-3$ (une fois que l'on se place au deuxième niveau de l'intégrale itérée). Ce qui n'est pas le cas pour l'intégrale relative à la région type R_x .

Il est important de souligner ici aussi que les trois choix représentés ci-dessus ont été menés à partir du sous-solide de gauche (cf. étape **f**, tableau ci-dessus) donné par l'équation (3). Tous ces résultats peuvent bien sûr être obtenus à partir du sous-solide de droite (cf. étape **f**, tableau ci-dessus) donné par l'équation (4).

Ce qui nous intéresse dans cet exercice, c'est d'aller voir dans la pratique des étudiants, en particulier s'ils font ou non un dessin pour résoudre ce problème. S'ils le font, comment ce dessin est-il produit dans l'environnement papier/crayon ? Comment est-il travaillé par rapport au problème ? Est-ce que les deux paraboloides et les deux cônes sont tracés ? Dans quelle mesure les différentes composantes, en particulier l'intersection entre les deux surfaces paraboliques et deux surfaces coniques, sont mises en évidence ? Est-ce que :

- les symétries possibles sont mises en évidence ?
- le solide en question est dégagé ?
- l'une de leurs parties est dégagée ?

Quelles sont les difficultés rencontrées ?

Au niveau de la résolution analytique et du calcul de l'intégrale nous reprenons également les questions considérées dans les premiers exercices.

Par rapport à la fonction densité on cherche à savoir si elle est dégagée, et comment elle est intégrée dans la résolution du problème.

3. CONCLUSION SUR L'ANALYSE A PRIORI

Le test que nous venons d'étudier constitue un dispositif exploratoire pour une première investigation sur l'enseignement et l'apprentissage des calculs de volumes par des intégrales multiples. Il s'est fait dans l'optique d'une observation locale des pratiques des étudiants et des enseignants sur l'utilité d'une intégrale multiple pour le calcul du volume (et d'autres grandeurs physiques comme, par exemple, le calcul de la masse).

Pour conduire notre analyse, nous avons dégagé trois stratégies possibles communes à tous les types d'exercices :

S1 Stratégie 1 : **Interprétation analytique du solide**

Ici on propose une résolution du problème par une méthode purement analytique sans faire appel au dessin, pour déterminer une représentation analytique (le domaine d'intégration). Pour ce faire, il est nécessaire de remplacer les égalités des équations qui définissent les surfaces délimitant le solide par des inégalités. Cette technique est très intéressante. Toutefois, elle n'est pas explicitée comme un objet de l'enseignement dans l'organisation mathématique sur les IM. En effet, dans les manuels que nous avons étudiés, les représentations analytiques sont données directement à la suite de l'énoncé, sans indication sur les techniques employées, souvent en regard d'une représentation graphique du solide. Il semble que l'on considère que cette part du travail ait été assumée dans une partie antérieure du cours et fasse donc partie des pré-requis.

S2 Stratégie 2 : **Interprétation géométrique du solide**

Dans cette stratégie on s'appuie sur une interprétation géométrique (la visualisation : faculté de se représenter mentalement un objet par la pensée) sans tracer explicitement ou en tous cas de « façon précise » le dessin des objets en jeu pour situer le solide borné. Cette technique permet un contrôle de type géométrique sur la mise en place des sens des inégalités déterminant la représentation analytique. Pour s'appuyer sur cette stratégie, il faut d'abord comprendre comment interagissent les surfaces données par les équations concernées.

S3 Stratégie 3 : **Représentation graphique du solide**

Dans cette stratégie, on commence par exécuter une représentation graphique (en explicitant les dessins des surfaces données par des équations concernées pour voir le solide). Dans ce cas, la compréhension du problème peut être renforcée et la résolution simplifiée. Voir le solide peut aider la gestion des données, par la coordination entre les représentations graphique et analytique. Dans cette coordination la stratégie S2 joue, bien sûr, un rôle fondamental.

D'après notre analyse écologique des manuels, l'appui sur la représentation graphique est mis en avance dans l'organisation mathématique des IM, sauf que la production des graphiques dans cette organisation reste problématique. Les liens entre les représentations graphiques (produites par ordinateur) et les techniques d'intégration sont implicites, en l'absence

d'explication (discours technologique sur) des techniques permettant les productions de ces graphiques.

Il nous a paru donc intéressant de savoir quelles sont les tendances des pratiques des enseignants dans ce domaine, et de voir du côté des étudiants, si les représentations graphiques sont présentes. Si c'est le cas, comment les font-ils ? Dans quelle mesure, l'appui sur la représentation graphique peut aider les étudiants dans la représentation analytique (la recherche des bornes d'intégration) ? Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent, tant dans la représentation graphique que dans l'interaction entre les deux types de représentations, lors de la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale double ou triple ?

Notre hypothèse est que peu de résolutions purement analytiques apparaîtront, alors que l'on retrouvera éventuellement des variantes des dessins dans les pratiques des étudiants. Pour mieux résoudre à ces exercices les étudiants auraient intérêt à jouer sur l'interaction entre la représentation graphique et analytique. Le problème de la représentation graphique de solides plus ou moins complexes dans l'espace reste cependant entier. Nous l'examinerons ici à travers le travail des étudiants qui ont passé le test sans appui sur des logiciels. Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons plus particulièrement au logiciel **Maple** qui nous semble être une aide possible pour permettre cette interaction et éventuellement un contrôle sur les calculs (lourds) nécessaires pour l'accomplissement des tâches.

Passons à présent à l'analyse a posteriori relative à ce dispositif exploratoire.

C2. ANALYSE A POSTERIORI DU TEST

Conditions de passation du test

Les exercices du test que nous venons d'étudier étaient destinés à des étudiants de mathématiques et de physique (qui suivent le cours des IM) mais ils ont également été soumis à l'avis de certains enseignants⁴¹ du cours de mathématiques de trois universités brésiliennes.⁴²

Nous avons découpé notre expérimentation en deux temps :

Une première partie porte sur l'**exercice unique** (classique des IM) destiné aux étudiants débutants « étudiants en premières semaines de cours sur les IM⁴³, que nous nommons Ed1, Ed2,... ». Cet exercice a été réalisé (en avril de 2003) sous forme d'un devoir surveillé, pendant une durée de 45 min. **7** étudiants ont participé à cette expérimentation.

La deuxième partie porte sur les **quatre autres exercices**, et a été proposée à des étudiants avancés (étudiants qui avaient suivi les séances des IM un semestre avant celui-ci) que nous nommons Ea1, Ea2...Ea8. Les quatre exercices ont été passés par eux (aussi en avril 2003) comme devoir à la maison sur un délai d'une semaine. Nous avons ainsi obtenu **8** copies d'étudiants. Ces exercices ont également été soumis à l'avis de certains enseignants pour servir comme éléments d'appui à notre questionnaire.

Ainsi pour avoir des informations supplémentaires sur les pratiques des étudiants et des enseignants nous avons également construit un questionnaire auquel nous leur avons demandé de répondre après avoir résolu les exercices (le texte complet du questionnaire est donné en annexe). Nous avons recueilli **11** questionnaires des étudiants et **7** des enseignants. Le tableau ci-dessous résume les données brutes recueillies, en prenant en compte les deux groupes :

IES	Etudiants		Enseignants
	N° de copies	N° de questionnaires	N° de questionnaires
UESC	15 : (7 débutants et 8 avancés)	3 : (tous avancés)	6
UNEB	-	8 : (tous avancés)	-
UFCG	-	-	1
Total	15	11	7

Nous avons ainsi recueilli **15** copies des étudiants et **18** questionnaires (**11** des étudiants et **7** des enseignants). Nous allons dans un premier temps présenter l'analyse a posteriori des réponses des étudiants, question par question. Nous analyserons ensuite les avis des étudiants et des enseignants selon les réponses au questionnaire.

⁴¹ Les enseignants interrogés ne sont que des professeurs de Mathématiques qui ont des expériences diverses en matière d'enseignement et de recherche. Ils sont également attachés à différentes équipes de recherche, relevant de domaines variés comme : analyse mathématique, équations différentielles, algèbre, géométrie analytique, etc.

⁴² Universidade Estadual de Santa Cruz – UESC (Bahia-BA)

Universidade do Estado de Bahia – UNEB – Campus de Teixeira de Freitas (Bahia-BA)

Universidade Federal de Campina Grande – UFCG (Paraíba-PB).

⁴³ A noter que dans le programme de l'UESC les étudiants en cours d'analyse (dénommé "Calculo IV") rencontrent les IM dès le premier jour des cours.

1. PARTIE I : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DEBUTANTS

Exercice unique : Le paraboloidé et les plans sécants

Reprenons l'énoncé :

Calculer le volume du solide Q qui, dans le huitième des coordonnées positives est délimité par les graphiques des équations $z=x^2+y^2+1$ et $2x+y=1$.

Nous retenons pour l'analyse des réponses de cet exercice les critères suivants :

- **(RA)** Préférence pour une résolution purement analytique : mise en place de la représentation analytique (domaine d'intégration) à partir de la substitution des égalités des équations par des inégalités.
- **(IG)** Préférence par l'interprétation géométrique : le choix des sens corrects des inégalités déterminant la représentation analytique est guidée par la visualisation, sans qu'il y ait de représentation graphique.
 - Ig1.** Interprète le volume du solide sous une surface, et donc l'emploi d'une intégrale double.
 - Ig2.** Interprète le volume par l'intégrale triple.
- **(RG)** Préférence pour la représentation graphique (tracé d'un dessin) comme point d'appui pour rentrer dans le problème :
 - Rg1.** Tous les composants (la surface parabolique, les quatre plans et les intersections de surfaces) sont tracés, le solide Q est visualisé et le développement des calculs est pertinent.
 - Rg2.** Représentation graphique minimale et les calculs algébriques pertinents.
 - Rg3.** Représentation graphique minimale et les calculs algébriques non pertinents.
 - Rg4.** Tentative de la représentation graphique précise du solide plus échec et abandon.
 - Rg5.** Dessin minimal seul sans le développement des calculs.
 - Rg6.** Dessin plus élaboré et tentative des calculs.

Notons que le degré d'élaboration du dessin (représentation graphique) peut donner une idée de l'enjeu que le dessin représente par rapport à la résolution du problème. Si les étudiants font un dessin relativement vague, celui-ci ne peut être qu'une entrée dans le problème de façon intuitive, ce dessin ne sert alors à rien dans la mise en place de la résolution analytique. Plus un dessin sera travaillé, plus il sera l'indice de l'interaction qu'il peut y avoir entre la représentation graphique et la résolution analytique.

Nous donnons ci-dessous les données brutes correspondant à ces critères (pour les 7 étudiants débutants).

Critère	RA	IG	Ig1	Ig2	RG	Rg1	Rg2	Rg3	Rg4	Rg5	Rg6
Effectif	0	0	0	0	7	0	0	3	2	1	1
%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	43%	29%	14%	14%

Nous pouvons constater au vu de ce tableau que la préférence pour **RA** et **IG** est totalement absente dans les pratiques des étudiants, alors que 100% des étudiants rentrent dans le

problème à partir de la représentation graphique (RG) comme point d'appui. Il nous semble donc que la préférence vis-à-vis de la représentation graphique soit le principal critère de choix dans ce type d'exercice, c'est donc quelque chose d'indispensable par les étudiants pour la compréhension du problème.

A propos de ce choix (au vu de résultat, cf. tableau ci-dessus) nous pouvons entrer en détail selon l'analyse suivante (d'après la lecture des réponses des étudiants) :

Productions effectives des étudiants débutants

Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessus parmi les 7 étudiants :

- il y en a 3, c'est-à-dire 43% qui donnent une représentation graphique minimale suivie de calculs algébriques non pertinents. C'est exactement le cas des étudiants Ed1, Ed4 et Ed7 (cf. copies en annexe II). Donc il y a dans leur production des dessins qui représentent de façon très sommaire les objets en jeu, notamment le paraboloidé d'équation $z=x^2+y^2+1$, le plan d'équation $2x+y=1$ tracés (de façon grossière) à main levée en perspective cavalière, dans un repère orthonormé. Mais il n'y en a aucune mise en relation entre ces objets. C'est-à-dire, aucune tentative de mise en évidence des intersections, entre les objets en jeu, pour faire apparaître le solide Q . En effet, la tentative de la représentation analytique donne un calcul algébrique qui consiste en une substitution d'équation $2x+y=1$ à l'intérieur de l'équation du paraboloidé. On trouve ainsi des mises en œuvre de techniques algébriques qui ne sont pas pertinentes par rapport au problème.
- 2 étudiants tentent une représentation graphique précise du solide, mais échouent et finalement abandonnent (étudiants Ed2 et Ed3, cf. copies en annexe II). Là on a l'impression que les étudiants essaient de découper le solide. D'abord ils représentent le paraboloidé tout entier, ensuite on trouve le quart tracé dans le huitième des coordonnées positives. Les manipulations algébriques mises en place leur permettent les tracés des dessins. Toutefois, ils n'arrivent pas à dégager le solide en soit, se bloquent et abandonnent.
- Un seul donne un dessin minimal seul sans le développement des calculs. (Ed5).
- Un autre donne un dessin plus élaboré et tente des calculs. (Ed6).

Dans les stratégies de résolution menées par les étudiants, le tracé des dessins et la manipulation algébrique des expressions de l'énoncé sont deux parts très disjointes de leurs activités. Ainsi aucun de leurs dessins ne leur permettent de visualiser le solide ni la mise en place de la représentation analytique. Il semble donc que les étudiants aient des difficultés pour interpréter les expressions qu'ils manipulent en rapport avec les dessins qu'ils essaient de faire. Mais alors pourquoi font-ils les dessins ? La visualisation du problème à partir du tracé du dessin est-elle une aide ou un obstacle pour le traitement de ce type d'exercice ?

Pour certains étudiants on a bien l'impression qu'avoir une visualisation du solide, en faisant

explicitement les dessins des surfaces données par des équations concernées afin de voir le solide, est quelque chose d'indispensable. Même si l'analyse mathématique du problème a bien montré que ce n'est pas forcément nécessaire pour faire le calcul de l'intégrale. Mais pour les étudiants une représentation graphique est importante. Dans ce sens un logiciel comme **Maple** peut être un moyen pour décharger l'étudiant de cette tâche qui lui est coûteuse, mais indispensable pour le traitement du problème.

Autrement dit, si les étudiants ont besoin d'une représentation graphique elle peut être coûteuse et **Maple** peut jouer un rôle, car ce logiciel peut permettre une meilleure prise en charge de cette représentation graphique et du coup décharger l'étudiant d'une tâche qui peut le bloquer dans la résolution du problème. La compréhension du problème peut être renforcée et la résolution simplifiée.

On peut voir dans tous les cas (relatifs à Rg3, Rg4, Rg5 et Rg6 discutés ci-dessus) que les difficultés dans la mise en place du calcul de l'intégrale (double ou triple) sont communes pour tous les étudiants, et sont peut-être le réflexe de l'enseignement actuel (au moins dans les Universités brésiliennes) où la représentation graphique dans l'espace est mise en avant dans l'organisation mathématique des IM. De plus, il semble que c'est dans cet enseignement que les étudiants sont confrontés au type de solides non-classiques délimités par plusieurs surfaces. En effet, on voit que dans leurs tentatives de calculs, les étudiants ne font aucune référence explicite à la représentation graphique. Leurs copies (cf. annexe II) montrent clairement qu'ils ne sont même pas arrivés à l'écriture algébrique de l'intégrale. Car cela dépend essentiellement de la représentation analytique du solide Q , c'est-à-dire, de trouver les bornes correctes d'intégration.

Passons à présent à l'étude des productions effectives des étudiants avancés.

2. PARTIE II : LES PRATIQUES DES ETUDIANTS AVANCES

2.1 Exercice 01 : Deux plans sécants à un solide de revolution

« Reprenons l'énoncé »

Calculer le volume du solide défini par les graphiques des fonctions $g(x,y)=0.2$
 $g(x,y)=2.33$ et $f(x,y)=3e^{(-x^2-y^2)}$.

Nous retenons pour l'analyse des réponses de cet exercice les différents critères que nous exposons ci-dessous. Les éléments qui nous permettront de considérer qu'un critère est vérifié peuvent découler des différentes parties de la résolution prise en compte :

- **(RA)** Préférence pour une résolution purement analytique : mise en place de la représentation analytique (domaine d'intégration) à partir de la substitution des égalités des équations par des inégalités.
- **(IG)** Préférence pour l'interprétation géométrique : le choix des sens des inégalités déterminant la représentation analytique est guidée par la visualisation, sans qu'il n'y ait de représentation graphique.
 - Ig1.** Interprète le volume du solide sous une surface, et donc l'emploi d'une intégrale double.
 - Ig2.** Interprète le volume par l'intégrale triple.
- **(RG)** Préférence pour la représentation graphique (tracé d'un dessin) comme point d'appui pour rentrer dans le problème :
 - Rg1.** Tous les composants (graphique de $f(x,y)$, les deux plans $z=0.2$ et $z=2.33$ les intersections des deux plans et le graphique de f) sont tracés, le solide \mathcal{Q} est visualisé, les manipulations algébriques et les calculs de l'intégrale pertinents, donc le volume du solide est trouvé.
 - Rg2.** Représentation graphique minimale et calculs algébriques pertinents.
 - Rg3.** Représentation graphique minimale, tentative des calculs algébriques mais échec ou abandon.
 - Rg4.** Représentation graphique précise, calculs algébriques pertinents et développement du calcul de l'intégrale non pertinent.
 - Rg5.** Tentative de représentation graphique précise et calculs algébriques non pertinents.

Comme nous l'avons remarqué pour *l'exercice unique*, plus un dessin sera travaillé, plus il sera à l'indice de l'interaction qu'il peut y avoir entre les représentations graphiques et analytiques.

Nous donnons ci-dessous les données brutes correspondantes à ces critères (pour les étudiants qui ont traité cet exercice).

Critère	RA	IG	Ig1	Ig2	RG	Rg1	Rg2	Rg3	Rg4	Rg5
Effectif	0	0	0	0	5	0	0	1	3	1
%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	20%	60%	20%

Comme pour les étudiants débutants, nous pouvons constater au vu de ce tableau que la préférence pour **RA** et **IG** est ici aussi absente dans les pratiques des étudiants avancés, alors

que tous les étudiants entrent dans le problème par une représentation graphique (RG) comme point d'appui. Cette préférence vis-à-vis de la représentation graphique semble donc le principal critère de choix des étudiants dans ce type d'exercice, ils doivent donc avoir une connaissance suffisante de RG pour la compréhension du problème.

A propos de ce choix (cf. résultat : tableau ci-dessus) nous pouvons entrer en détail selon l'analyse suivante (d'après la lecture des réponses des étudiants) :

Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 01

Comme on peut le voir dans le tableau précédent, parmi les 8 étudiants avancés, 5 ont donné une réponse à cet exercice et tous les 5 cherchent d'abord à faire une représentation graphique, pour avoir une idée globale) de la forme du solide.

- Un (étudiant Ea2) donne une représentation graphique minimale suivie de calculs algébriques, mais reste en échec et abandonne. Après avoir tracé le solide à main levée en perspective cavalière il le découpe correctement en deux sous-solides (cf. copie en annexe) selon une visualisation que l'on peut traduire sur le tableau ci-dessous.

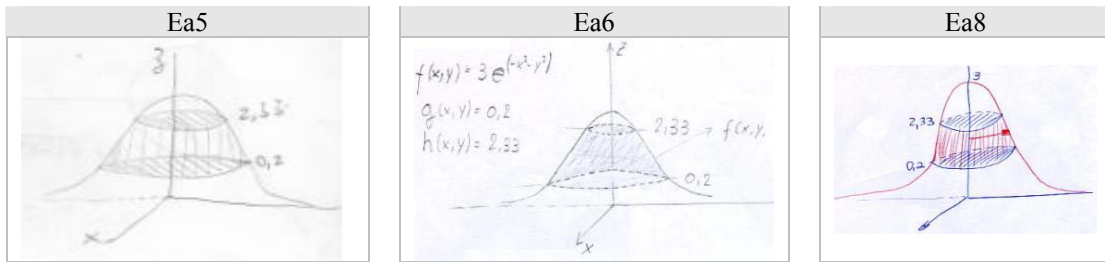
	Volume du cylindre	+	Volume du solide sans le cylindre
$V_S =$	V_C		V_{S-C}
$V_{S-C} =$?? ∫∫ ??		J'ai oublié les principes des coordonnées cylindriques

On voit alors que pour essayer de résoudre le problème cet étudiant pense aux coordonnées cylindriques. Mais, il ne procède pas aux calculs et abandonne. Il dit : « *J'ai oublié les principes des coordonnées cylindriques* ».

Mise à part les principes des coordonnées cylindriques « non acquises », Ea2 voit bien les deux sous-solides possibles de Q , qu'il a nommé V_c et $V_{s.c}$. Malgré cet effort, il a du mal à coordonner ce qu'il voit avec une représentation analytique possible de chaque sous-solide. En effet, il s'interroge sur les bornes d'intégration et s'arrête là (cf. tableau ci-dessus).

Il est donc délicat de savoir comment la visualisation et la production d'un dessin peuvent servir comme point d'appui à la résolution analytique ?

- 3 étudiants (Ea5, Ea6 et Ea8), c'est-à-dire 60%, donnent une représentation graphique précise, en menant des manipulations algébriques pertinentes mais débouche sur un développement du calcul de l'intégrale non pertinent. Il y a, dans leurs productions, des dessins qui représentent de façon claire les objets en jeu, notamment le graphique de $f(x,y)=3e^{(-x^2-y^2)}$ les deux plans d'équations $z=0.2$ et $z=2.33$ et leurs intersections avec le graphique de f , donc le solide Q est visualisé (cf. extrait des copies, tableau ci-dessous).



Ensuite on trouve les manipulations algébriques mises en place, on se rend alors compte que (mathématiquement) les étudiants produisent des calculs relativement pertinents, mais qu'ils ne prennent pas en compte les dessins qu'ils ont eux-mêmes tracés. Les représentations analytiques mises en place ne correspondent ni au solide Q , ni à une de ses parties. Toutefois (contrairement à Ea2) ces trois étudiants se servent des leurs connaissances des coordonnées cylindriques pour conduire les calculs. Le tableau ci-dessous comporte des extraits des manipulations algébriques, les écritures des calculs d'intégrales mises en place et les résultats obtenus par chaque étudiant.

Ea5	Ea6	Ea8
Les manipulations algébriques		
$f(x,y) = 3 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$ $= f(x,y) = 3 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$ $f(x,y) = 3 \cdot e^{-r^2}$ $f(0,r) = 3 \cdot e^{-r^2}$ $3e^{-r^2} = 0,2 \rightarrow e^{-r^2} = 0,0667$ $-r^2 = \ln 0,0667$ $r_1 = 1,645$ $3e^{-r^2} = 2,33 \rightarrow e^{-r^2} = 0,777$ $-r^2 = \ln 0,777$ $r_2 = 0,502$	$f(r) = 3e^{-r^2}$ $0,2 = 3e^{-r^2}$ $e^{-r^2} = \frac{0,2}{3}$ $\ln e^{-r^2} = \ln \frac{0,2}{3}$ $-r^2 = \ln \frac{0,2}{3}$ $r_1 = 0,503$ $f(r_2) = 3e^{-r_2^2}$ $2,33 = 3e^{-r_2^2}$ $\ln e^{-r_2^2} = \ln \left(\frac{2,33}{3} \right)$ $r_2 = 1,646$	$f(x,y) = 3e^{-(x^2+y^2)} \quad r^2 = x^2+y^2$ $f(0,r) = 3e^{-r^2} \rightarrow 2,33 = 3e^{-r^2}$ $e^{-r^2} = \frac{2,33}{3}$ $-r^2 = \ln \left(\frac{2,33}{3} \right) \quad r^2 = -\ln \left(\frac{2,33}{3} \right)$ $r = 1,6456$ $r = 0,5027$

Les écritures algébriques du calcul de l'intégrale (cf. détails des calculs en annexe)

$V = \int_{0,2}^{2,33} \int_0^{2\pi} \int_{0,502}^{1,645} r \, dr \, d\theta \, dz$	$V = 2 \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{0,2}^{2,33} r \, dr \, d\theta \, dz$	$V = \int_{0,5027}^{1,6456} \int_0^{2\pi} \int_{0,2}^{2,33} r \, dz \, d\theta \, dr$
---	---	---

Les résultats obtenus

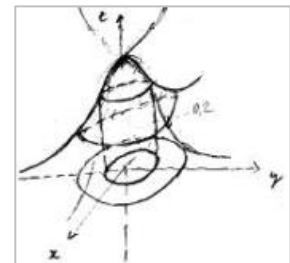
$V = 2,46\pi \cdot [2,33 - 0,2]$ $V = 5,24\pi$	$V = 4,912\pi \cdot 2,13$ $= 10,463\pi \text{ u.v}$	$V \approx 5,229\pi$
--	---	----------------------

On voit que le calcul de l'intégrale mis en place par chaque étudiant consiste en un calcul du volume d'un cylindre circulaire (coiffé inférieurement par le plan de l'équation $z=0.2$ et supérieurement par $z=2.33$) que l'on peut expliciter, respectivement, par les représentations analytiques suivantes.

$Q_{Ea5} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\};$	$0.502 \leq r \leq 1.645$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0.2 \leq z \leq 2.33$	$Q_{Ea6} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\};$	$0.503 \leq r \leq 1.646$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0.2 \leq z \leq 2.33$
$Q_{Ea8} = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\};$		$0.5027 \leq r \leq 1.6456$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ $0.2 \leq z \leq 2.33$	

Donc les domaines d'intégration (représentations analytiques, qui sont d'ailleurs implicitement liées aux techniques d'intégrations) ne correspondent pas aux représentations graphiques données initialement par eux. On trouve des résultats erronés par rapport au problème posé.

- Un étudiant tente une représentation graphique précise et les calculs algébriques non pertinents. (Ea3). On a l'impression que cet étudiant essaie de mettre en évidence les courbes de niveau relatives à l'intersection des deux plans $z=0.2$ et $z=2.33$ avec le graphique de $f(x,y)=3e^{-(x^2+y^2)}$ et leurs projections sur le plan- xOy . Contrairement aux dessins des étudiants Ea5, Ea6 et Ea7 qui montrent bien le solide en question, ici le solide se confond avec des tracés qui guident les projections des courbes de niveau sur le plan- xOy . En effet, en termes de calculs on trouve des manipulations algébriques qui guident le calcul de l'intégrale en coordonnées cartésiennes, une représentation analytique (implicitement liée aux techniques d'intégration) et ne correspond pas à la représentation graphique initialement travaillée. Du coup, le calcul de l'intégrale révèle un travail laborieux qui aboutit à l'échec et l'abandon. L'extrait ci-dessous comporte le travail de Ea3 (cf. aussi la copie entière en annexe).



Handwritten student work for Ea3:

$$0.2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 3e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{1}{15} = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$-\ln 15 = -(x^2+y^2)$$

$$x^2+y^2 = \ln 15$$

$$z, 33 = 3e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{z, 33}{3} = e^{-(x^2+y^2)}$$

$$-\ln \frac{z}{2,33} = -(x^2+y^2)$$

$$x^2+y^2 = \ln \frac{3}{2,33}$$

$$V_n = V_n - V_m$$

$$V = \int_{0.2}^{2.33} \int_{-\sqrt{\ln 15}}^{\sqrt{\ln 15}} \int_{-\sqrt{\ln 15 - x^2}}^{\sqrt{\ln 15 - x^2}} 3e^{-(x^2+y^2)} dy dx dz - \int_{2.33}^{\sqrt{\ln \frac{3}{2,33}}} \int_{-\sqrt{\ln \frac{3}{2,33} - x^2}}^{\sqrt{\ln \frac{3}{2,33} - x^2}} 3e^{-(x^2+y^2)} dy dx dz$$

L'écriture du calcul d'intégrale mise en place révèle donc la tentative des calculs mettant en évidence la soustraction des volumes (qu'il a nommé V_n et V_m) des solides que l'on peut expliciter, respectivement, par les représentations analytiques suivantes.

$Q_n = \{(x, y, z)\};$	$-\sqrt{\ln 15} \leq x \leq \sqrt{\ln 15}$ $-\sqrt{\ln 15 - x^2} \leq y \leq \sqrt{\ln 15 - x^2}$ $0,2 \leq z \leq 1$	$Q_m = \{(x, y, z)\};$	$-\sqrt{\ln \frac{3}{2,33}} \leq x \leq \sqrt{\ln \frac{3}{2,33}}$ $-\sqrt{\ln \frac{3}{2,33} - x^2} \leq y \leq \sqrt{\ln \frac{3}{2,33} - x^2}$ $2,33 \leq z \leq 1$
------------------------	---	------------------------	--

On voit alors bien que les deux solides pris en compte ne correspondent ni à la représentation graphique travaillée initialement, ni au solide borné par les graphiques des fonctions en question. De plus, le fait de considérer $f(x,y)=3e^{(-x^2-y^2)}$ comme la fonction à intégrer dépasse le champ d'étude des calculs des volumes.

Donc, comme pour les étudiants débutants, les stratégies de résolution menées par ces étudiants comportent bien le tracé des dessins et la manipulation algébrique des expressions de l'énoncé. Toutefois, elles restent deux composantes très disjointes de leur activité.

En termes de règles de contrat, il semble que pour résoudre un problème de calcul d'intégrale, afin de calculer le volume d'un solide, qu'il y ait obligation de faire un dessin de ce solide (les étudiants font effectivement les dessins). Mais, ils ne s'appuient absolument pas sur ces dessins. Cela nous autorise donc à dire que les tracés des dessins apparaissent dans les productions de ces étudiants seulement comme une réponse au contrat didactique mais ne les aident en rien dans la résolution des problèmes. Alors que notre analyse a priori a montré que l'appui sur la représentation graphique permet une aide substantielle dans le processus heuristique de ce type de tâches qui a priori sont assez difficiles.

L'examen des questions suivantes nous permet de renfoncer ces observations.

2.2 Exercice 02 : L'intersection de trois cylindres

« Reprenons l'énoncé »

Calculer le volume commun aux trois cylindres d'équations $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$ et $y^2+z^2=1$.

Nous retenons pour l'analyse des réponses à cet exercice les deux premiers critères (RA et IG) que nous avons considérés pour l'exercice précédent et les critères suivants :

(RG) Préférence pour la représentation graphique (tracé d'un dessin) comme point d'appui pour rentrer dans le problème :

- Rg1.** Tous les composants (les trois cylindres d'équations $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$ et $y^2+z^2=1$ et les intersections entre eux) sont tracés, les symétries possibles sont mises en évidence, le solide Q ou l'une de leurs parties est dégagée, manipulations algébriques et calculs de l'intégrale pertinents, donc le volume du solide est trouvé.
- Rg2.** Représentation graphique des trois cylindres et calculs algébriques pertinents.
- Rg3.** Représentation graphique des trois cylindres, tentative de calculs algébriques, mais échec et abandon.
- Rg4.** Tentative de représentation précise du solide commun aux trois cylindres, calculs algébriques et développement du calcul de l'intégrale non pertinents.
- Rg5.** Tentative de la représentation graphique précise et calculs algébriques non pertinents.
- Rg6.** Dessin minimal des trois cylindres seuls sans développement des calculs.

Voici dans le tableau ci-dessous les données brutes correspondantes à ces critères.

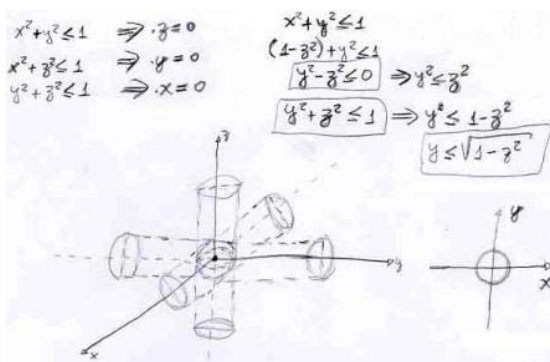
Critère	RA	IG	Ig1	Ig2	RG	Rg1	Rg2	Rg3	Rg4	Rg5	Rg6
Effectif	1	0	0	0	8	0	0	1	1	2	3
%	12,5%	0%	0%	0%	100%	0%	0%	12,5%	12,5%	25%	37,5%

On peut constater au vu de ce tableau que la préférence pour **RA** n'est pas totalement absente dans les productions des étudiants, comme c'est le cas par contre pour **IG**. La majorité des étudiants décide de traiter le problème à partir de la représentation graphique des solides qui sont visuellement simples, pour avoir ainsi une idée globale de la forme du solide intersection. Nous détaillons dans la suite notre analyse d'après la lecture des réponses des étudiants.

Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 02

Comme le montre le tableau ci-dessus, parmi les 8 étudiants :

- Un (Ea4) tente d'exprimer la représentation analytique du solide intersection en remplaçant les égalités des équations des trois cylindres par des inégalités et réalise aussi le dessin, mais ensuite il abandonne



On a l'impression que cet étudiant essaie de contrôler le solide commun aux trois cylindres par des inéquations. Il « voit » bien les trois cylindres qui se coupent orthogonalement et leur emboîtement. Mais, il a besoin de visualiser le contour du solide intersection. Il semble aussi que la tentative de voir le solide vienne après la manipulation algébrique. Mais il

n'arrive pas à exprimer une représentation analytique ni du solide intersection, ni d'un de ses morceaux par symétrie et enfin il abandonne. Cet exercice est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît, c'est ce qui est signalé dans le manuel dont nous l'avons tiré.

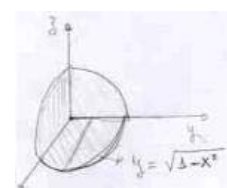
- Un étudiant (Ea6) donne une représentation graphique des trois cylindres et tente des calculs algébriques, qui le conduisent à l'écriture d'une intégrale double correspondant au volume du solide sous une surface. Nous reproduisons ces calculs ci-dessous :

$$V = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2-x^2} dy dx$$

On a l'impression que Ea6 imagine que le solide en question est une sphère de rayon 1 et de centre (0,0,0) dont il prend en compte l'hémisphérique nord, en multipliant l'intégrale par 2. Il se trompe, car au lieu de $dydx$ il met $dydy$ et abandonne.

- Un étudiant tente une représentation précise du solide commun aux trois cylindres, les calculs algébriques et le développement du calcul de l'intégrale non pertinents. (Ea5). Ici, on a l'impression que l'étudiant essaie de visualiser le solide dans le huitième des coordonnées positives.

Cette visualisation (cf. dessin ci-dessous) induit alors l'étudiant dans la mise en place de la représentation analytique suivante :



$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}; 0 \leq z \leq 1\}$. Ensuite, on trouve l'écriture algébrique du calcul d'intégrale triple ci-après. Où les calculs menés par Ea5 (que l'on

$$V = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dy dz dx$$

trouvera en annexe) le conduisent alors à $V=16/3u.v$, qui est un résultat erroné par rapport à cette écriture et au problème posé.

En effet, il est facile de voir qu'ici Ea5 confronte les calculs d'intégrale mise en place au calcul du volume d'un des trois cylindres. Notamment le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$ pour $-1 \leq z \leq 1$. C'est-à-dire le cylindre de rayon 1 et de hauteur 2. Ainsi, le calcul d'intégrale devrait conduire à 2π au lieu de $16/3$.

Nous pouvons voir que la difficulté essentielle de cet exercice est dans la possibilité de mettre en place une représentation analytique correcte, qui corresponde au solide commun à trois cylindres. En effet, la représentation graphique de ce solide par des techniques papier/crayon est loin d'être facile.

- 2 étudiants donnent une représentation graphique de façon grossière (Ea1 et Ea3, cf. copies en annexe) et les calculs algébriques non pertinents. Ici, on trouve des procédures erronées ramenant l'intersection à une sphère. En regardant de plus près la copie d'Ea1 il écrit :

En faisant l'intersection des trois cylindres, on trouve une sphère. Maintenant pour calculer son volume on va utiliser une intégrale triple. Comme la figure est une sphère, alors on peut intégrer dans n'importe quel ordre. Pour faciliter le travail je calcule la partie supérieure et puis je vais multiplier par 2, comme ça j'ai son volume. D'abord j'intègre par rapport à z, voici les calculs :

$$2 \cdot \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dz dy dx = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [z]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy dx = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (\sqrt{1-y^2}) dy dx =$$

$$2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} [?] dx$$

ao continuar a resolução, encontrei (na resumo) uma resposta não convincente, pois o volume se aproxima de 4,19 e encontro um valor totalmente diferente.

Le développement des calculs menés par cet étudiant le conduit à une situation très laborieuse, de là, il bloque. Ainsi, il affiche une interrogation (cf. extrait ci-dessus). Ensuite il écrit :

En continuant la résolution, j'ai trouvé (sur le brouillon) une réponse non convaincante, car le volume est à peu près 4,19 et j'ai trouvé un résultat totalement différent.

Cet étudiant s'attendait à trouver le volume de la sphère. Alors que le solide de l'intersection n'est pas une sphère. Son discours ne se traduit pas avec la représentation analytique mise en place (implicitement liée aux techniques d'intégration). En effet, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; -1 \leq x \leq 1; -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}; 0 \leq z \leq \sqrt{1-y^2}\}$ ne correspond pas au solide hémisphérique de la sphère de rayon 1 imaginée par l'étudiant.

On trouve le même raisonnement chez l'étudiant Ea3 qui écrit :

L'intersection des solides produit une sphère de rayon $a=1$. Ainsi, en utilisant les coordonnées

sphériques on a :

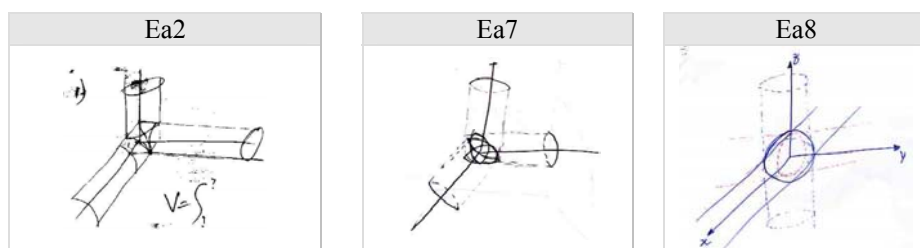
$$\begin{aligned}
 V &= \iiint dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \varphi \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_0^a d\varphi d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^3}{3} \sin \varphi d\varphi d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3} (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2a^3}{3} d\theta = \frac{4}{3} \pi a^3 \quad \therefore (a=1) = \frac{4}{3} \pi \text{ u.v}
 \end{aligned}$$

Ici, on voit (cf. les calculs originels en annexe) que Ea3 a développé correctement les calculs qui conduisent à $4\pi/3$ Mais, ce résultat correct, ne répond pas à l'exercice en question.

Donc, même si l'étudiant semble « avoir » une connaissance théorique sur les IM, il a a priori besoin de savoir comment utiliser ses connaissances dans la résolution des problèmes dans ce domaine. En particulier, le besoin de savoir comment interagissent les surfaces dont on donne les équations pour dégager une représentation analytique correcte du problème. Ce besoin dépend peut-être des connaissances sur la visualisation dans l'espace des objets concernés et d'une bonne coordination entre ces objets et la représentation analytique. Mais, il nous semble que ces compétences ne sont pas acquises des étudiants observés.

Cet exercice révèle une véritable difficulté à se représenter des objets dans l'espace. Alors que les étudiants insistent sur cette stratégie (représentation graphique) comme point d'appui pour avoir une idée globale du solide ou du domaine d'intégration. Cette insistance est peut-être l'effet du contrat didactique. Par contre, il apparaît que la production de ce type de représentation graphique dans l'environnement papier/crayon soit une tâche coûteuse par des étudiants. Dans ce sens **Maple** peut-être une aide.

- 3 étudiants (Ea2, Ea7 et Ea8) ne donnent qu'un dessin minimal des trois cylindres seuls (cf. tableau ci-dessous) sans le développement des calculs.



Mais on trouve des interventions des étudiants à la fois surprenantes et intéressantes : Par exemple l'étudiant Ea2, après avoir tracé les trois cylindres, vraisemblablement dans le huitième des coordonnées positives (cf. tableau ci-dessus), écrit :

Je n'arrive pas à voir la région d'intégration. Avec deux cylindres je sais comment. Mais avec trois je n'ai pas réussi.

Donc, la difficulté de cet exercice est commune à tous les étudiants.

Passons à présent à l'examen du troisième exercice.

2.3 Exercice 03 : Le solide déterminé par des plans et des gouttières

« Reprenons l'énoncé »

Calculer le volume du solide Q délimité par les graphiques d'équations ci-dessous :

$$\begin{array}{lll}
 z=1-x^2; \forall(x,y) & y=-\sqrt{x}; x \in [0, \infty[& y=-x^2; x \in]-\infty, 0] \\
 z=1-y; y \in [0, \infty[& y=1-x; x \in [(-1+\sqrt{5})/2, 1] & z=0; \forall(x,y); y=0; \forall(x,y)
 \end{array}$$

Nous retenons pour l'analyse des réponses de cet exercice les critères (RA et IG) considérés précédemment et les critères suivants :

(RG) Préférence pour la représentation graphique (tracé d'un dessin) comme point d'appui pour rentrer dans le problème :

- Rg1.** Tous les composants (les trois gouttières d'équations $z=1-x^2$, $y=-\sqrt{x}$, $y=-x^2$ et les quatre plans) sont tracés, les intersections possibles sont mises en évidence, le solide Q ou l'une de leurs parties est dégagée, le sous solide superposé dans le quart PPP est dégagé, les manipulations algébriques et les calculs de l'intégrale pertinents, le volume du solide est trouvé.
- Rg2.** Représentation graphique minimale, calculs algébriques et développement de calculs de l'intégrale non pertinents.
- Rg3.** Dessin minimal seul sans développement des calculs.

Voici dans le tableau ci-dessous les données brutes correspondantes à ces critères.

Critère	RA	IG	Ig1	Ig2	RG	Rg1	Rg2	Rg3
Effectif	0	0	0	0	4	0	2	2
%	0%	0%	0%	0%	100%	0%	50%	50%

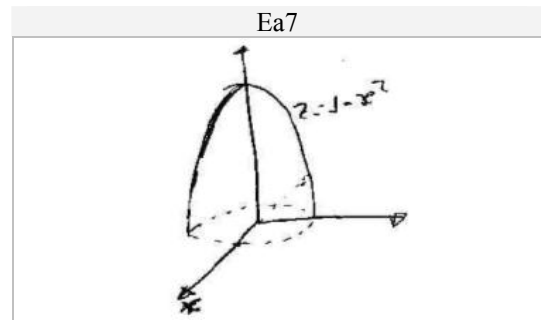
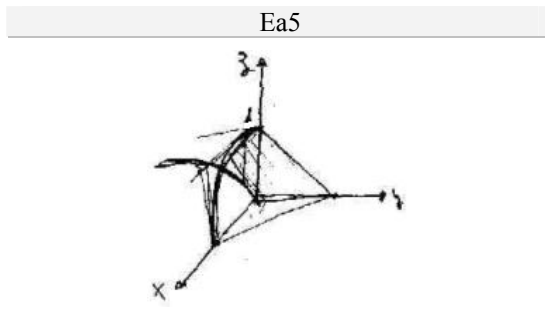
Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessus, la préférence pour **RA** et **IG** est totalement absente dans le travail des étudiants. Tous les étudiants décident de commencer d'étudier cet exercice par une représentation graphique.

Par la suite, nous détaillerons, notre analyse d'après la lecture des réponses des étudiants.

Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 03

Comme le montre le tableau ci-dessus, parmi les 8 étudiants avancés seuls 4 ont essayé de résoudre cet exercice. Parmi les 4 :

- 2 (Ea5 et Ea7) donnent une représentation graphique minimale, les calculs algébriques et le développement du calcul de l'intégrale non pertinents. Donc il y a dans leur production des dessins qui représentent de façon très sommaire certains objets en jeu, notamment la gouttière d'équation $z=1-x^2$, le plan d'équation $y=1-x$ tracé (de façon grossière) à main levée en perspective cavalière, dans un repère orthonormé (cf. extraits de copies ci-dessous).



On voit donc qu'il y a des composants de l'énoncé qui ne sont pas mis en œuvre graphiquement. Par contre, la tentative de donner des représentations analytiques conduit à des calculs d'intégrales qui introduisent certains objets non pris en compte dans le tracé de ces dessins. Le tableau ci-dessous comporte des extraits des écritures du calcul d'intégrale mis en place et les résultats obtenus par chaque étudiant.

Ea5

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{-\sqrt{x}}^{1-x^2} dz dy dx$$

$$V = \frac{41}{60} \text{ u.v}$$

Ea7

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{-x}^{1-x^2} dz dy dx$$

$$= -\frac{21}{60} = -\frac{7}{20}$$

On trouve ainsi des mises en œuvre de techniques d'intégration qui révèlent les représentations analytiques que l'on peut expliciter, respectivement par :

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ -\sqrt{x} \leq z \leq 1-x^2 \end{cases}$$

$$\{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x \\ -x^{1/2} \leq z \leq 1-x^2 \end{cases}$$

Ces représentations (domaines d'intégration) prises en compte ne correspondent ni au solide Q , ni à une de ses parties. En effet, les résultats obtenus sont loin de la solution attendue. De plus, les calculs menés par Ea7 (cf. détail en annexe) conduisent à un volume négatif.

- Les 2 autres étudiants donnent des dessins minimaux seuls sans développement des calculs (Ea3 et Ea6, cf. copies en annexe).

Considérons à présent l'analyse du dernier exercice de ce test.

2.4 Exercice 04 : Le calcul de la masse d'un solide de revolution

« Reprenons l'énoncé »

Un solide Q est l'intersection du solide délimité par les paraboloides d'équations : $y-x^2-z^2=0$ et $y-8+x^2+z^2=0$ et du solide délimité par les cônes d'équations $y-3-\sqrt{x^2+z^2}=0$ et $y-5+\sqrt{x^2+z^2}=0$. La densité en chaque point $P(x, y, z)$ de Q est proportionnelle au carré de la distance qui sépare ce point à l'axe de symétrie de Q . Calculez la masse du solide Q .

Pour l'analyse des réponses de cet exercice, nous retenons aussi les critères (RA et IG) considérés précédemment et les critères suivants :

(RG) Préférence pour la représentation graphique (tracé d'un dessin) comme point d'appui pour rentrer dans le problème :

- Rg1.** Tous les composants (les deux paraboloides d'équations : $y-x^2-z^2=0$ et $y-8+x^2+z^2=0$ et les deux cônes d'équations : $y-3-\sqrt{x^2+z^2}=0$ et $y-5+\sqrt{x^2+z^2}=0$) sont tracés, les intersections possibles sont mises en évidence, le solide Q ou l'une de leurs parties est dégagée, les manipulations algébriques et les calculs de l'intégrale pertinents, le volume du solide est trouvé.
- Rg2.** Représentation graphique minimale, calculs algébriques et développement des calculs de l'intégrale non pertinents.
- Rg3.** Dessin minimal seul sans le développement des calculs.

Voici dans le tableau ci-dessous les données brutes correspondantes à ces critères.

Critère	RA	IG	Ig1	Ig2	RG	Rg1	Rg2	Rg3
Effectif	2	0	0	0	0	0	0	0
%	100%	0%	0%	0%	0%	0%	0%	0%

Productions effectives des étudiants avancés sur l'exo 04

Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessus, parmi les 8 étudiants, 2 seulement ont essayé de résoudre cet exercice. C'est le cas des étudiants Ea5 et Ea7. Contrairement aux cas des exercices précédents, ici la préférence pour IG et RG est totalement absente. En regardant de plus près la copie de chaque étudiant, on trouve que les deux démarrent tout de suite la tâche par la manipulation algébrique. Mais, aucun n'utilise la technique de remplacement des égalités des équations par des inégalités.

L'étudiant Ea7 résout ainsi deux systèmes d'équations en séparant correctement les deux paraboloides et les deux cônes (il se trompe dans une des équations). Car au lieu de paraboloides d'équation $y-x^2-z^2=0$ on trouve le cône d'équation $y^2-x^2-z^2=0$. On voit bien qu'il change de y par y^2 . Voilà les manipulations algébriques conduites par Ea7 que nous rapportons ci-dessous (cf. détail des calculs en annexe) :

$\begin{cases} y^2 - x^2 - z^2 = 0 \\ y - 8 + x^2 + z^2 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y - 3 - \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \\ y - 5 + \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \end{cases}$	$\begin{aligned} -x^2 &= z^2 - y^2 \\ x^2 &= -z^2 + y^2 \end{aligned}$
$\begin{cases} z^2 = y^2 - x^2 \\ z^2 = 8 - y - x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} y = 3 + \sqrt{x^2 + z^2} \\ y = 5 - \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$	$\begin{aligned} x^2 &= 8 - z^2 - y \\ -z^2 + y &= 8 - z^2 - y \end{aligned}$
$\begin{cases} y^2 - x^2 = 8 - y - x^2 \\ y^2 + y - 8 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 3 + \sqrt{x^2 + z^2} = 5 - \sqrt{x^2 + z^2} \\ 2\sqrt{x^2 + z^2} = 2 \Rightarrow x^2 + z^2 = 1 \end{cases}$	$y = 2$

Mis à part le changement de y par y^2 , mathématiquement les deux premières colonnes ci-dessus ne posent pas de problèmes. Alors que la dernière colonne, apparemment issue de l'équation $y^2 - x^2 - z^2 = 0$ et du résultat de la première colonne est problématique. Toutefois,

ces manipulations induisent cet étudiant à la mise en place de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale ci-dessous.

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{y^2+y-8} dz dx dy$$

$$\int_0^2 \int_0^{y^2+y-8} \sqrt{1-x^2} dx dy$$

$$2k \int_0^2 \int_0^{y^2+y-8} \sqrt{1-x^2} dx dy$$

Ici, on a l'impression que cet étudiant n'a pensé ni à la nature de chaque objet représenté par les expressions algébriques qu'il manipule, ni au solide intersection dont il cherche à calculer la masse. De plus, l'écriture de l'intégrale mise en place ne répond pas à la question. On trouve ainsi des

mises en œuvre de techniques algébriques et d'intégration qui ne sont pas pertinentes par rapport au problème. On voit aussi que la fonction densité n'a même pas été mise en place. Tout ceci donne l'impression que cet étudiant a considéré la constante k jouant le rôle d'une telle fonction. Par ailleurs, il bloque au cours des calculs et ne termine pas la tâche.

Donc, la simple manipulation algébrique d'expressions de l'énoncé, sans un certain contrôle, pose aussi des problèmes dans les démarches des étudiants. Ainsi on a l'impression que les connaissances qu'ils ont sur la notion des fonctions de plusieurs variables ne sont pas suffisantes pour arriver à comprendre immédiatement comment les graphiques de ces fonctions interagissent dans l'espace afin de fonder une région tridimensionnelle, et dégager la représentation analytique, élément indispensable dans la mise en place du calcul d'une intégrale double ou triple.

Conclusion sur l'analyse a posteriori des réponses des étudiants aux exercices

La lecture de productions des étudiants que nous venons d'exposer nous permet de constater certains besoins des étudiants quant à l'apprentissage des intégrales multiples. Ces besoins correspondent bien aux différentes étapes des trois stratégies possibles communes à tous les exercices du test, que nous avons présentés plus haut. Comme le montrent leurs productions, souvent ils commencent le traitement des exercices par les tracés des dessins à main levée en perspective cavalière, dans un repère orthonormé. Mais dans la plupart des cas, la représentation graphique par des techniques papier/crayon est difficile. En effet, les dessins qu'ils font ne sont pas vraiment sollicités pour permettre la visualisation du domaine d'intégration. La production d'un dessin semble n'être qu'une réponse à l'injonction du contrat didactique.

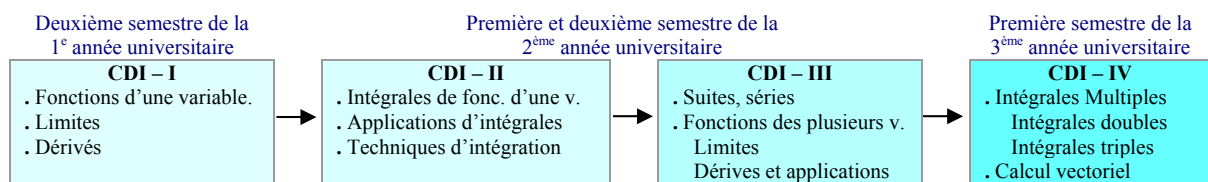
Afin d'enrichir ces premières analyses, nous allons à présent présenter l'étude que nous avons menée à partir de l'analyse d'un questionnaire proposé aux mêmes étudiants dans le but de nous permettre de mieux comprendre leurs acquis, ainsi que leurs points de vue par rapport à l'enseignement des intégrales multiples.

3. ANALYSE DU QUESTIONNAIRE

3.1 Présentation du questionnaire

Comme nous l'avons souligné plus haut (cf. conditions de passation) pour avoir des informations supplémentaires sur les pratiques des étudiants et des enseignants, nous avons également construit un questionnaire dans lequel nous leur avons demandé de répondre après avoir résolu les exercices (le texte complet du questionnaire est donné en annexe). Rappelons que les exercices du test ont aussi été soumis à l'avis de certains enseignants pour servir comme éléments d'appui à notre questionnaire.

Nous avons ainsi choisi d'interroger les étudiants avancés de l'UESC, UNEB et certains enseignants. Les étudiants ont en effet passé l'intégralité du test que nous venons d'étudier. Ils ont été en contact avec différents enseignants, en particulier les enseignants de cours des IM, et sont susceptibles d'avoir utilisé différents manuels d'analyse mathématique. A noter que dans le programme de ces institutions, les étudiants en cours d'analyse (dénommé « Cálculo IV ») rencontrent les IM dès le premier jour de cours. Ce cours permet ainsi une maturation des notions d'analyses rencontrées par les étudiants dans la discipline dénommée « Calcul Différentiel et Intégral – CDI » découpé en quatre disciplines semestrielles que nous avons présentées précédemment (cf. Chapitre B) et que nous rappelons ci-dessous.



Les étudiants interrogés sont en deuxième semestre de la troisième année universitaire et avaient suivi les séances sur les IM un semestre auparavant. Les six questions (de Qs1 à Qs6) du questionnaire leurs sont parvenues comme devoir à la maison (avec les quatre exercices).

Quels renseignements nous voulions obtenir sur ce questionnaire ?

Le questionnaire destiné aux étudiants et aux enseignants vise à nous fournir des renseignements au moins sur les 4 axes suivants :

- Le rôle de la visualisation graphique (production d'un dessin) dans le traitement des exercices sur les IM. Nous avons vu dans l'analyse des manuels divers recours à des modèles géométriques dans l'organisation mathématique des IM. Nous avons également observé, à cette occasion, les liens implicites faits dans ces manuels entre les représentations graphiques (produites par ordinateur) et les techniques d'intégration, sans qu'il n'y ait d'enseignement explicite des techniques permettant la production de tels graphiques. Nous cherchons donc à savoir si les représentations graphiques sont présentes dans les pratiques des étudiants dans les

exercices proposés. Si oui, comment les font-ils ? Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent ?

- Le recours éventuel à la visualisation graphique du solide et le lien qui est fait avec la mise ne place de la représentation analytique pour déboucher sur le calcul de volume par une intégrale double ou triple.
- Utilisation ou non de moyens de contrôle et de validation d'un calcul d'une intégrale double ou triple.
- Recours ou non aux environnements informatiques dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Nous avons évité des questions trop directes ou trop générales du type : Quel emploi faites-vous de la représentation graphique dans le calcul d'une intégrale double ou triple ? Pourquoi cherchez-vous à visualiser graphiquement un solide pour calculer son volume ?

Nous avons plutôt choisi de placer dans le test des exercices permettant à l'étudiant ou à l'enseignant de se retrouver dans le contexte de l'enseignement habituel des intégrales multiples dans l'enseignement universitaire brésilien. Nous allons dans un premier temps interpréter brièvement les réponses recueillies à la lecture de chacune des questions posées aux étudiants. Nous exposerons ensuite les avis des enseignants, et nous terminerons cette analyse par la confrontation des avis des étudiants et des enseignants selon les 4 axes mentionnés ci-dessus et la conclusion générale sur notre pré-expérimentation.

3.2 Analyse question par question : les opinions des étudiants

Nous ne ferons aucune distinction entre les opinions des étudiants des institutions concernées, qui nous ont rendu le questionnaire, nous les regardons donc conjointement selon une analyse qualitative. Toutefois, le lecteur trouvera ces opinions bien dissociées dans le tableau en annexe II.

Qs1 : Nous voulions tout d'abord avoir les opinions des étudiants sur la véracité des solutions qu'ils obtiennent dans le calcul d'une intégrale multiple.

Nous pouvons constater que les étudiants ne sont pas sûrs des résultats qu'ils trouvent (quand ils les trouvent) dans le calcul d'une intégrale double ou triple. Cela semble montrer, le manque des moyens de contrôle et de validation des résultats de calculs, dans les processus heuristiques. Autrement dit, les étudiants ne possèdent pas de critères leurs permettant d'accepter ou de rejeter une solution. D'où la question de savoir comment on peut s'assurer du résultat du calcul d'une intégrale double ou triple. Quels contrôles et quels moyens de validation pourraient être pris en compte ?

Qs2 : Nous voulions savoir si les étudiants ont rencontré des difficultés dans le traitement des exercices en essayant de les décrire.

On peut constater que les réponses sont unanimes et que tous les étudiants ont la même idée.

Ils disent avoir rencontré des difficultés pour traiter les exercices. Voilà, certaines de leurs justifications face à cette question :

- J'ai rencontré des difficultés. Certains exercices avaient des expressions algébriques relativement simples, mais les régions d'intégration ne sont pas faciles à visualiser. Des tâches où je suis arrivé à visualiser facilement, je ne suis pas arrivé à la solution finale, car j'ai oublié certains concepts et démarches du calcul différentiel et intégral ;
- Assez de difficultés, principalement pour visualiser les solides, éléments importants pour arriver à la solution.

Ces justificatifs semblent révéler la même source des difficultés, centrées essentiellement sur le besoin de recourir à la représentation graphique dans l'espace tridimensionnel, donc liées aux connaissances de géométrie analytique dans l'espace, ou particulièrement à l'enseignement des fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles. Comme le montrent leurs productions dans le test, souvent ils démarrent les tâches par les réalisations des dessins en main levée en perspective cavalière, dans un repère orthonormé. Mais dans la plupart des cas, la production des dessins dans l'environnement papier/crayon est assez coûteuse. En effet, cela ne les aide pas trop à bien voir le domaine.

Quand on demande aux étudiants (**Qs3**) les méthodes et les outils qu'ils ont utilisés pour le traitement des exercices, on trouve une réponse liée aux méthodes utilisées en classe. Mais cette réponse est vague car elle n'explique pas les méthodes auxquelles se réfère l'étudiant, lorsqu'il dit par exemple :

- J'ai employé les méthodes utilisées dans les cours de calcul et j'ai utilisé le livre de Swokowski.

La majorité des étudiants disent avoir utilisé le papier/crayon, le livre de CDI (analyse). Un seul étudiant dit avoir utilisé la calculatrice. Mais, peu expliquent comment ils ont utilisé les livres et les calculatrices mentionnés.

Qs4 : Ici, nous voulions connaître les domaines ou concepts mathématiques que les étudiants jugent importants pour la résolution de ce type d'exercices.

C'est l'organisation mathématique des IM qui nous a conduit à demander ici l'avis des interrogés sur les connaissances ou savoir-faire des enseignements précédents. Nous avons alors constaté que certaines connaissances vues dans le calcul IV pouvaient apparaître comme des généralisations des connaissances vues dans le calcul III. Nous voulions donc savoir si celles-ci étaient prises en compte par les interrogés. Les réponses ont été brèves. Les étudiants n'ont cité que les connaissances de la géométrie analytique dans l'espace, exerçant ainsi une grande influence dans leurs opinions (cf. annexe II) et surtout dans leurs pratiques. Ainsi, comme nous l'avons déjà souligné plus haut, ces opinions sont peut-être le reflet des organisations mathématiques des IM, au moins dans les universités brésiliennes, pour lesquelles les représentations graphiques dans l'espace occupent une place importante. Cependant, ces représentations sont souvent difficiles à réaliser dans l'environnement papier/crayon d'où selon nous, la nécessité d'ouverture à de nouvelles possibilités de travail dans cet enseignement.

A la suite de cette question, nous cherchions à obtenir les avis des étudiants (Qs5) quant aux outils pour l'enseignement et l'apprentissage des Mathématiques, tels que papier/crayon, informatiques, rétroprojecteurs, tableau, etc.

Voilà ce qui ressort (cf. aussi l'annexe II) de leurs opinions :

- Dans la plupart des cours on utilise le tableau noir, mais on devrait avoir d'autres ressources qui pourraient dynamiser les cours ;
- Le papier/crayon et le tableau sont essentiels. Le rétroprojecteur est intéressant aussi, car on peut avoir les transparents produits avec un ordinateur et les travailler en classe. L'ordinateur a beaucoup de pouvoir, on doit donc en profiter, la combinaison entre le travail développé sur papier/crayon, tableau et avec ordinateur est très important, car pour l'apprentissage des mathématiques, on ne peut pas tout faire sur papier, ni sur tableau et ni sur ordinateur, ainsi l'utilisation simultanée de ces environnements est très importante ;
- Le papier/crayon et le tableau noir sont nécessaires, mais la visualisation des fonctions non familières pour les étudiants est difficile. Le travail sur ordinateur en rapport avec le travail papier crayon améliore la compréhension. L'idéal serait l'intégration des ressources disponibles comme l'ordinateur, le logiciel éducatif, les transparents et le tableau noir ;
- Dans nos écoles les outils les plus utilisés dans l'enseignement des mathématiques sont le tableau, papier/crayon. L'ordinateur est moins utilisé à cause de l'absence des ordinateurs et de la qualification des professeurs pour utiliser ces instruments ;

On voit donc que ces étudiants, même avec peu de connaissances ou même « sans savoir » comment ils peuvent utiliser l'ordinateur comme moyen éducatif, mettent l'accent sur l'importance que peuvent avoir les ressources informatiques dans l'enseignement. Ils expriment donc un besoin de recourir aux nouveaux outils pouvant les aider dans leurs apprentissages.

La dernière question (Qs6) donnée aux étudiants propose une auto-évaluation sur les connaissances acquises ou en cours d'acquisition sur les IM, où nous établissions trois niveaux ([] Faible, [] Moyen et [] Fort).

La majorité des étudiants se place au niveau faible avec certains justificatifs (cf. annexe) tels que :

- [x] Faible, car les cours de calcul différentiel et intégral, notamment celui des IM ne sont pas arrivés à propos ;
- [x] Faible, car il y avait quelques problèmes pendant les cours comme la grève des enseignants, par exemple, ce qui empêche le progrès de nos activités.

Dans ce qui suit, nous allons analyser les réponses d'enseignants au même questionnaire.

3.3 Analyse du questionnaire : les opinions des enseignants

Alors que notre attention a été d'abord centrée sur les étudiants de l'UESC (BA), nous voulions aussi recueillir les opinions de certains enseignants de mathématiques du Département des Sciences Exactes et Technologiques (DCET) de cette Université (en avril 2003). Nous avons donné aux enseignants le même questionnaire et le pré-test des étudiants. Nous avons donné (aussi à la même époque) ce questionnaire aux enseignants du Département de Mathématiques et Statistiques (DME) de l'UFCG (PB) où nous avons également eu un entretien avec un enseignant qui, à l'époque, enseignait les IM. Cet entretien s'est déroulé trois jours après que nous ayons déposé notre questionnaire à ce Département. Il a été enregistré par magnétophone (cf. protocole annexe II). Nous avons ainsi interrogé des enseignants qui ont des expériences diverses en matière d'enseignement et de différentes institutions. Ils sont également attachés à différentes équipes de recherche, relevant de domaines variés : Analyse, Algèbre, Géométrie Analytique, etc.

Au total, 7 enseignants ont participé à cette étude. Parmi les 7, 3 ont répondu au questionnaire par écrit, alors que les 4 autres ont participé à un entretien que nous avons enregistré par magnétophone. C'est une synthèse des avis de ces 7 enseignants (questionnaire plus entretiens) que nous présentons maintenant.

Comme pour le cas des étudiants, nous ne ferons aucune distinction entre les opinions des enseignants des institutions concernées, nous les regardons donc conjointement selon une analyse qualitative. Le lecteur trouvera ces opinions bien dissociées en annexe II.

Nous allons tout d'abord examiner les entretiens des 4 enseignants conjointement ; nous présentons ensuite les réponses des 3 enseignants au questionnaire.

3.3.1 Les avis des enseignants (entretiens)

Les enseignants interviewés ont disposé du questionnaire à l'avance. Nous avons donc mené l'entretien sans trop intervenir mais en laissant une grande liberté de parole aux enseignants (que nous nommons Prof1, Prof2, Prof3 et Prof4). Voici les réflexions (Ref1 à Ref9) essentielles que nous avons pu dégager de notre analyse durant ces entretiens :

- Ref1:** Difficultés liées à l'enseignement et apprentissage des intégrales multiples.
- Ref2:** Importance de la visualisation géométrique dans la résolution des problèmes.
- Ref3:** Comportement du graphe d'une fonction (représentation graphique).
- Ref4:** La notion de perspective x projection d'un solide dans un plan de coordonnées (Repère du domaine d'intégration).
- Ref5:** La notion de la symétrie (découpage d'un solide par symétries).
- Ref6:** Paramétrage des surfaces.
- Ref7:** Utilisation de l'ordinateur et du logiciel
- Ref8:** Rôle de l'enseignant dans le travail de l'étudiant devant de l'ordinateur.
- Ref9:** Besoin de l'habileté algébrique pour utiliser l'ordinateur.

Ces réflexions correspondent aux interventions des quatre enseignants interviewés selon les données brutes que nous donnons ci-dessous.

Réflexions	Ref1	Ref2	Ref3	Ref4	Ref5	Ref6	Ref7	Ref8	Ref9
Effectifs	4	4	3	2	1	1	4	1	1

Nous pouvons ainsi constater que les avis des enseignants sont partagés. Nous avons constaté que tous les enseignants soulignent certaines difficultés liées à l'enseignement des intégrales (Ref1, ceci, indépendamment des contraintes des programmes des différentes institutions concernées. Ces difficultés se traduisent essentiellement à la fois par l'importance donnée à la place de la visualisation géométrique (Ref2) et de la représentation graphique (Ref3) dans les résolutions des problèmes du calcul d'intégrales multiples. Cela semble montrer que les enseignants disposent de pratiques qui tendent à favoriser justement un appui sur la visualisation et les graphes dans le calcul de volumes par des intégrales multiples. En effet, comme nous l'avons déjà souligné plus haut, ces tendances sont mises en avant dans l'organisation mathématique des IM, sauf que les représentations graphiques dans l'espace restent problématiques. Dans la plupart des cas, la représentation graphique par des techniques papier/crayon est difficile. En conséquence, du côté de l'apprentissage, les dessins produits par les étudiants ne sont pas vraiment sollicités pour permettre la visualisation du domaine d'intégration. Par ailleurs, les échecs des étudiants soumis à cet enseignement sont souvent attribués à l'enseignement secondaire, comme le montre l'extrait du discours de Prof1 (cf. aussi protocole en annexe) quand il dit :

Réellement des problèmes existent ici : même si l'étudiant connaît la théorie, comment calculera-t-il le volume via intégrale double ou triple. Il a besoin à la base de savoir comment se transforme une intégrale multiple par une intégrale itérée. Cela dépendra essentiellement de la visualisation de la géométrie du solide. Ce passage est bien compliqué, soit l'étudiant a une visualisation du problème, soit ça reste très difficile de faire le travail. En général l'étudiant, principalement l'étudiant ingénieur, devrait avoir cette vision dans l'espace (habileté essentielle de l'ingénieur). Mais il ne l'a pas, car actuellement, l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement secondaire n'existe pratiquement plus. Donc il existe cette difficulté. Mais aussi pour l'étudiant pour voir ce type de choses dans l'espace via l'ordinateur, il a besoin d'avoir une habileté algébrique.

Par transformation d'une intégrale double ou triple par une intégrale itérée dont parle Prof1, on comprend la recherche du domaine d'intégration (représentation analytique d'un solide) et l'ordre par lequel s'effectue l'intégration partielle par rapport à la variable concernée. D'après lui, cette recherche dépend essentiellement de la visualisation géométrique du solide. Mais cette visualisation pose des difficultés du côté de l'apprenant. Cette réflexion (extrait ci-dessus) est un indice qui montre que les difficultés de visualisation ou de représentation graphique dans l'espace sont un fait réel dans l'enseignement supérieur brésilien. On constate que les causes de ces difficultés sont classiquement attribuées à l'enseignement précédent et plus particulièrement celui de la géométrie au niveau secondaire.

La dernière phrase citée ci-dessus semble montrer que l'ordinateur est une piste ou un outil capable de permettre la visualisation des objets de cet enseignement. Mais selon nous, l'utilisation d'un tel outil dans l'enseignement nécessite la construction de techniques instrumentées. Or, si l'institution universitaire de l'enseignement de mathématiques ne soutient pas l'intégration d'un tel outil dans cet enseignement, alors comment un étudiant

peut-il utiliser l'ordinateur pour produire le type de graphes qu'il a besoin permettant une telle visualisation ?

Par ailleurs, on peut remarquer sur le tableau ci-dessus que tous les enseignants se rattachent à la réflexion Ref7. Ils disent avoir utilisé l'ordinateur pour essayer de résoudre les problèmes (exercices du test). Ils emploient donc les dessins produits par ordinateur et sont favorables à l'utilisation de cet outil par les étudiants. Mais ils révèlent certaines contraintes ou difficultés pour que les étudiants découvrent de nouvelles connaissances à l'aide de cet outil.

Dans les tentatives d'utilisation de l'ordinateur par les enseignants, ressortent les différentes connaissances mathématiques intervenant dans cet enseignement telles que : l'habilité algébrique (Ref9, cf. tableau ci-dessus) ; la notion de perspectives (Ref4), les notions de perception géométrique, de symétries, de représentations paramétrées des surfaces. Ils se prononcent donc en faveur du recours à l'environnement informatique et reconnaissent les difficultés éventuelles produites par les différents objets mathématiques que l'étudiant doit manipuler. Or, les programmes actuellement en vigueur dans les institutions concernées ne prévoient pas l'enseignement du calcul des intégrales multiples en utilisant l'ordinateur. Donc les recours aux ordinateurs des enseignants exerçant dans ces institutions, sont des initiatives personnelles, comme le montre l'extrait ci-dessous, quand le Prof1 dit :

Tout d'abord, pour utiliser l'ordinateur l'étudiant doit avoir :

1. La capacité à manipuler le logiciel.
2. L'habilité algébrique pour retirer les informations des équations qui définissent la géométrie du solide pour obtenir une vision du solide appropriée.

Parce que, s'il n'a pas ces connaissances, il ne va pas réussir à travailler avec l'ordinateur. La notion de perspective où l'étudiant prend un solide et va le projeter dans un plan plus ajusté, que ce soit le plan Oxy ou le plan Oxz ou encore le plan Oyz . Cette notion de perspective est aussi une chose intéressante. Il y a beaucoup de connaissances dont l'étudiant a besoin pour résoudre le problème. Par exemple : un exercice comme celui-ci n'est pas facile (il montre le deuxième exercice du test sur papier). Cela aussi n'est pas facile à visualiser (il montre l'exercice 03). Celui-ci est facile (1^{er} exercice). Mais la difficulté que l'on perçoit est bien là. J'ai essayé de travailler avec l'ordinateur en utilisant **Maple** pour la visualisation des surfaces et des solides. Il y a quelques démarches à prendre en compte en connaissant les bornes d'intégration, les variations de x , y et de z , on arrive à construire le solide. La projection du solide – tracer le solide dans l'espace – Mais certaines difficultés existent parce que l'on n'a pas de suffisamment de machines pour que les étudiants interagissent avec le logiciel et commencent à découvrir les connaissances nouvelles (...) Même si l'étudiant visualise ce type de solides qui sont définis à partir d'équations, il a besoin d'avoir un peu de perception géométrique.

Ce discours semble montrer aussi la même source des difficultés rencontrées par les étudiants lors du traitement des exercices du test (révélées plus haut) centrées essentiellement sur le besoin de recourir à la visualisation ou à la représentation graphique dans l'espace tridimensionnel afin de rechercher une représentation analytique nécessaire pour la mise en place de l'écriture du calcul d'une intégrale double ou triple.

L'impression que l'on a, c'est qu'il existe un problème dans l'enseignement du calcul des intégrales multiples, traduit par de nombreuses difficultés rencontrées par les étudiants et reconnues par des enseignants. L'extrait d'interview ci-dessous montre encore bien ces difficultés quand le Prof2 s'exprime en ciblant ce discours sur les exercices du test, il dit :

J'ai examiné les deux premiers exercices. Pour le deuxième exercice, on a trois cylindres circulaires qui

s'intersectent orthogonalement. Selon leurs équations on perçoit que l'intersection est centrée sur l'origine du système des coordonnées. Donc l'idée que j'avais est de se limiter au huitième des coordonnées positives et à la fin de multiplier le volume par huit. Mais pour mener à bien le travail dans ce huitième, le problème c'était d'imaginer comment se comporterait l'intersection des trois cylindres, pour utiliser peut-être une intégrale. Donc on a besoin de repérer un domaine d'intégration. Mais ce dernier c'est la grande difficulté. Parce que moi-même je ne suis pas arrivé à le voir. De plus, sur papier c'est difficile à tracer. Réellement, pour résoudre le problème j'ai fait le dessin par ordinateur, en utilisant le logiciel **Maple** : les trois cylindres dans le huitième des coordonnées positives. Dès que je suis arrivé à le faire par ordinateur, à ce moment là, je pouvais voir plus au moins, comment ça serait, la forme de la région. Mais, cela superficiellement, parce que la figure que j'ai tracée n'avait pas seulement l'intersection. Je ne suis pas arrivé à enlever les parties qui dépassent de l'intersection.

On voit bien que la représentation graphique est problématique. Toutefois, elle occupe une place assez riche dans les pratiques des enseignants au détriment de l'interprétation analytique. En effet, cela requiert souvent l'usage de l'ordinateur pour bien visualiser le solide. Cette idée de voir le solide est également mise en avance par le Prof3, quand il dit :

L'idée initiale devrait commencer avec les tracés des dessins, des graphes, pour voir comment est formé le domaine d'intégration et ensuite développer la résolution analytique.

Il est clair qu'il n'existe pas une tendance constituée d'enseignants qui seraient favorables à la stratégie S1 évoquée dans notre analyse a priori. On constate que même si la visualisation géométrique (stratégie S2) et la représentation graphique (stratégie S3) dans l'espace sont reconnues comme des tâches assez difficiles, tant par les étudiants que par les enseignants, ils insistent sur ces méthodes pour rentrer dans le problème. En outre l'ordinateur, qui a priori est seulement à la disposition de l'enseignant, révèle des contraintes dont on a l'impression qu'elles sont liées à l'absence de méthodes ou de techniques instrumentées permettant aux enseignants et aux étudiants d'accomplir ce type de tâches (difficiles) issues de l'enseignement des IM.

3.3.2 Les avis des enseignants (réponses au questionnaire)

Comme précédemment, nous ne ferons aucune distinction entre les opinions des enseignants qui nous ont rendu le questionnaire, nous les regardons donc conjointement. Le lecteur trouvera ces opinions bien dissociées dans le tableau en annexe II.

Les enseignants ont disposé du questionnaire et du test donné aux étudiants à l'avance. Ainsi sur la base des exercices du test, nous voulions tout d'abord recueillir les opinions des enseignants sur :

Qs1 : la véracité des solutions qu'ils obtiennent dans le calcul d'une intégrale multiple.

Nous pouvons constater que les avis des enseignants sont partagés. Ils ne se prononcent pas pour l'ensemble des exercices du test. Un enseignant cible sa réponse sur le premier exercice, il écrit : « Seulement, la solution du premier exercice paraît » l'autre écrit : « Je crois que oui ». On trouve ainsi des incertitudes qui semblent montrer le manque de moyens de contrôle et de validation des résultats de calculs des intégrales multiples. D'où la question de savoir comment on peut s'assurer du résultat du calcul d'une intégrale double ou triple. Quels contrôles et quels moyens de validation pourraient être pris en compte ?

Qs2 : Nous voulions savoir si les enseignants rencontrent des difficultés éventuelles dans le traitement de ce type d'exercices en essayant de les décrire.

Les réponses sont unanimes, tous les enseignants ont la même idée qui rejoint les réflexions exprimées par les enseignants interviewés : « Difficultés à visualiser les surfaces ». « Les difficultés sont surtout liées à l'impossibilité de la visualisation des figures géométriquement ».

Ces réponses semblent donc révéler la même source de difficultés, centrées essentiellement sur le besoin de recourir à la représentation graphique dans l'espace tridimensionnel, donc liées aux connaissances de géométrie analytique dans l'espace, ou à l'enseignement des fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles.

La question (**Qs3**) est relative aux méthodes et outils qu'ils utilisent pour le traitement de ce type d'exercices. Tous les enseignants disent avoir utilisé le papier/crayon et ont fait des recherches dans les livres du CDI. Mais on ne trouve aucune réflexion sur les éventuelles méthodes des calculs.

Qs4 : Ici, nous voulions connaître les domaines ou concepts mathématiques que les enseignants jugent importants pour la résolution de ce type d'exercices en essayant de justifier les réponses.

Comme nous l'avons souligné plus haut, c'est l'organisation mathématique des IM qui nous a conduit à demander ici l'avis des enseignants sur les connaissances ou savoir-faire des enseignements précédents. Nous avons alors constaté que certaines connaissances vues dans le calcul IV pouvaient apparaître comme des généralisations des connaissances vues dans le calcul III. Nous voulions donc savoir si celles-ci étaient prises en compte par les enseignants interrogés. On trouve ainsi des réponses qui prennent en compte des connaissances sur les fonctions de plusieurs variables, les constructions graphiques, les solides géométriques, les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques et enfin sur les IM elles-mêmes. On voit bien que les fonctions de plusieurs variables à valeurs réelles (l'une des niches des principes de représentations graphiques) sont présentes dans les réponses des enseignants. Néanmoins, le fait que les représentations graphiques vues dans cette niche n'ont pas le même statut que celles vues dans l'enseignement des IM, n'est pas pris en compte par les enseignants. Alors que comme le montre l'analyse a priori, la représentation graphique dans l'espace prend un autre statut dans l'étude des IM par rapport à l'enseignement précédent. Dans les IM, une fonction f interagit avec d'autres fonctions pour décrire un domaine d'intégration. Cette interaction crée de nouvelles difficultés liées à la visualisation des objets dans l'espace.

A la suite de cette question, nous cherchions à obtenir les avis des enseignants (**Qs5**) quant aux outils pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques tels que papier/crayon, informatiques, rétroprojecteurs, tableau etc. Voilà ce qui ressort (cf. aussi l'annexe II) de leurs réponses : « Je crois que pour une bonne visualisation et compréhension des concepts, la combinaison des travaux menés dans l'environnement papier/crayon, tableau, ordinateur et logiciels seraient assez efficace ». « L'utilisation des ordinateurs serait excellente, et donc devrait être présente dans les institutions d'enseignement de mathématiques ».

On remarque ici que ces réponses rejoignent certaines réflexions exprimées par les enseignants interviewés. Elles révèlent donc un besoin de recourir aux outils informatiques comme pouvant jouer un rôle favorable dans l'enseignement des mathématiques.

Ces enseignants sont donc favorables à l'étude préalable de la géométrie analytique, des fonctions de plusieurs variables mettant en évidence l'appui sur la visualisation (S2), sur la représentation graphique (S3) et l'emploi de ceux-ci comme support dans la résolution des exercices des IM. Dans le même temps, ils sont prêts à accepter un recours important aux outils informatiques dans l'enseignement des IM.

On constate ainsi que le critère « IG » est fortement lié au critère « RG » (retenus précédemment) au détriment de critère « RA ». Cette préférence vis-à-vis de « IG » et de « RG » semble donc être les principaux choix dans cet enseignement. Ce dernier doit donc permettre d'une façon explicite des connaissances suffisantes relatives à (S2) et (S3) pour la compréhension des problèmes dans ce domaine. C'est à propos des ces choix que nous concluons ce dispositif exploratoire.

4. CONCLUSION

Les observations que nous venons d'exposer nous permettent de dégager plusieurs tendances possibles comme choix des pratiques des enseignants interrogés et certains besoins des étudiants quant à l'apprentissage des intégrales multiples. Ces tendances et ces besoins correspondent bien aux différentes étapes des trois stratégies possibles communes à tous les types d'exercices présentés plus haut. Sauf qu'ici les trois stratégies révèlent certaines difficultés.

Nous avons plus précisément relevé les tendances suivantes :

- « IG » recours à la visualisation graphique : Emploi fréquent de l'interprétation géométrique comme point de départ pour rentrer dans le problème.
- « RG » recours à la représentation graphique : Recherche du comportement du graphe d'une fonction comme point d'appui pour rentrer dans le problème.
- « OI » recours aux outils informatiques : Utilisation d'un logiciel comme outil devant permettre de relier les deux premiers critères « IG » et « RG » afin de mettre en place une représentation analytique.

Ainsi les enseignants que nous avons interrogés montrent des tendances qui correspondent aux stratégies « S2 » et « S3 » que nous avons dégagées dans notre analyse a priori. A la base de ces tendances, ils reconnaissent l'existence de certaines difficultés liées à l'enseignement des intégrales multiples, particulièrement dans le traitement des exercices (objets de cet enseignement) qu'ils jugent a priori difficiles.

Nous pouvons donc dire qu'il y a un dysfonctionnement clair dans cet enseignement : les enseignants ont des pratiques qui tendent à favoriser un appui sur la représentation graphique dans un calcul d'intégrale multiple pour calculer le volume d'un solide. Or, dans les manuels

que nous avons analysés, on trouve que l'appui sur la représentation graphique est mis en avance dans l'organisation mathématique des IM, sauf que la production des graphes dans cette organisation reste problématique. En effet, les liens entre les représentations graphiques (produites par ordinateur) et les techniques d'intégration sont implicites, en l'absence d'explication (discours technologique) sur les techniques permettant les productions de ces graphiques.

En conséquence, comme le montrent les productions des étudiants, souvent ils commencent le traitement des exercices par les tracés des dessins des graphes des fonctions concernées. Mais dans la plupart des cas, la représentation graphique par des techniques papier/crayon est difficile. En effet, les dessins que les étudiants font ne sont pas vraiment sollicités pour permettre la visualisation du domaine d'intégration. Cela montre qu'il manque un travail d'interaction entre la représentation graphique et la représentation analytique. La production d'un dessin semble ainsi n'être qu'une réponse à l'injonction du contrat didactique, qui est : quand on résout un problème de calcul d'intégrale on doit faire un dessin. Le problème est que cette règle n'est pas suivie d'une pratique explicite d'enseignement pour montrer comment on doit s'appuyer sur le dessin pour résoudre les exercices. Ce travail possible semble être laissé à la charge de l'étudiant.

Pour certains étudiants, on a bien l'impression qu'avoir une visualisation du solide, en faisant explicitement les dessins des surfaces données par des équations concernées afin de voir le solide, est quelque chose d'indispensable. Même si l'analyse a priori des exercices a bien montré que ce n'est pas forcément nécessaire pour faire le calcul de l'intégrale. Mais pour les étudiants une représentation graphique est importante. Dans ce sens, un logiciel comme **Maple** peut être un moyen pour décharger l'étudiant de cette tâche qui lui est coûteuse, mais indispensable pour le traitement du problème. Autrement dit, si les étudiants ont besoin d'une représentation graphique elle peut être coûteuse et **Maple** peut jouer un rôle, car ce logiciel peut permettre une meilleure prise en charge de cette représentation graphique et du coup décharger l'étudiant d'une tâche qui peut le bloquer dans la résolution du problème. En effet, la compréhension du problème peut être renforcée et la résolution simplifiée.

Cette étude exploratoire nous fournit ainsi des pistes pour l'élaboration d'enseignements des IM qui prendraient plus en compte le recours à la représentation graphique, la difficulté qu'elle soulève ainsi que l'interaction avec la représentation analytique conduisant à la mise en place de l'IM. Ainsi, dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons plus particulièrement au logiciel **Maple**. Il nous semble être une aide possible dans l'interaction entre les représentations graphique et analytique et éventuellement un contrôle sur les calculs (souvent lourds) nécessaires pour l'accomplissement de ce type d'exercices.

CHAPITRE

II

L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE MAPLE

CHAPITRE D L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE MAPLE

PARTIE D1 ETUDE DU LOGICIEL MAPLE

1. INTRODUCTION

Il s'agit ici d'identifier les potentialités, mais aussi les contraintes, de l'environnement *Maple* pour outiller les techniques de résolution des tâches sur le calcul d'aire et de volumes par des IM. En nous appuyant sur l'analyse institutionnelle, nous examinerons les outils disponibles par rapport à la notion de fonction de plusieurs variables réelles, et leur représentation graphique dans l'espace et par rapport au calcul des IM. Ensuite nous réaliserons une étude des processus qu'un utilisateur peut mettre en œuvre lors de la résolution d'un problème de calcul d'aire et de volume par les IM outillés par **Maple**. Pour cela, nous prendrons comme point de référence un problème simple de calcul de volume par des IM repéré dans un manuel étudié dans le chapitre B. Nous utilisons ce problème pour construire la technique instrumentée que nous appellerons « **crible géométrique** », dont l'objectif explicite est l'aide à l'apprentissage de techniques possibles pour la représentation graphique des solides décrits comme intersection de plusieurs solides, et pour mettre en évidence la façon dont interviennent les contraintes informatiques, d'une part dans la gestion de la coordination entre la représentation analytique et graphique, et d'autre part dans la mise en place du calcul de volume par des IM. Par la suite, nous examinerons les interactions possibles entre l'utilisateur et la machine, dans l'organisation et la mise en œuvre des sous-tâches permettant le calcul d'un volume par des IM. Nous finalisons cette partie en mettant en place un modèle, que nous appelons *MATIM*, qui lie l'analyse de la résolution d'un problème de calcul de volume par des IM à celle de la représentation graphique du solide associé. Il s'agit de mettre en évidence la multiplicité des sous tâches possibles dans un problème de calcul de volume par des IM et de repérer les choix réalisables par un étudiant.

2. BREVE PRESENTATION DU LOGICIEL MAPLE

Les concepteurs de ce logiciel soulignent que *Maple* est un environnement informatique pour les mathématiques avancées. Il inclut des outils pour l'algèbre, les équations différentielles, l'analyse mathématique, les mathématiques discrètes, le calcul graphique et numérique, etc. Il est aussi un langage de programmation pour le développement de programmes mathématiques qui utilisent une bibliothèque de fonctions intégrées et d'opérations. Ce langage est de type **impératif procédural** ou **fonctionnel**. Bejian (2000), en se référant à cette distinction, explique :

Le langage de *Maple* mélange deux types de programmation. Il y a tout d'abord la programmation **impérative**, que l'on peut résumer comme une suite d'interactions avec la mémoire. L'opération de base d'un tel langage est l'affectation (consistant à mettre une valeur dans une variable). On retrouve ce style de programmation dans des langages comme Fortran, Pascal ou C.

Le style **fonctionnel** consiste en une succession de définitions et d'appels de fonctions. Celles-ci ont des arguments et rendent un résultat, le résultat d'une étape étant l'argument de la suivante.

Ces deux types de programmation ont chacun leurs avantages. Un programme **impératif** sera sans doute plus efficace, car plus proche du langage machine. Mais le langage **fonctionnel** offre un haut niveau d'abstraction et permet souvent d'écrire des programmes plus courts et plus élégants (Op.cité, p. 12).

Le logiciel **Maple** a été développé par un groupe de chercheurs de l'Université de Waterloo au Canada. Sa première version date de 1980. En France, cet environnement est fortement répandu dans l'institution des classes préparatoires et dans l'enseignement supérieur. C'est bien entendu la raison qui nous a conduit à nous intéresser à ce logiciel. De plus, l'environnement **Maple** favorise a priori l'exploitation, de façon interactive, des objets de la géométrie analytique dans l'espace (par des représentations graphiques proches de celles réalisables dans l'environnement papier/crayon) et de calculs d'intégrales multiples. Pour mener nos analyses nous nous appuyons sur l'approche ergonomique d'instruments proposée par Rabardel (1985).

3. ANALYSE DU LOGICIEL MAPLE : LE CAS DES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES (RG) ET DU CALCUL DES INTEGRALES MULTIPLES (IM)

Notre objectif, ici, est d'étudier les outils du logiciel **Maple**, pour mieux comprendre son utilisation possible dans l'enseignement. Plus précisément, nous allons tenter de voir comment les outils de **Maple** peuvent éclairer les interactions entre les représentations graphique et analytique d'un solide à l'œuvre dans une tâche de calcul de volume par des *IM*. Nous nous proposons d'analyser le rôle des commandes (outils) et leurs syntaxes (qui doivent participer à la construction de schèmes d'utilisation) disponibles dans **Maple** à propos des *RG* et des *IM*. Cette étude nous permet d'identifier les potentialités, les contraintes sur les actions et les transformations voulues par l'utilisateur sur les objets *ostensifs* manipulés par **Maple** en rapport avec les objets *ostensifs* du travail mathématique.

Tout d'abord, nous utilisons la méthode d'analyse de relations entre objets dans les pratiques d'enseignement et d'apprentissage à l'appui du travail de Lagrange (2000).

Il s'agit d'abord de recenser les objets, de types ostensif et non-ostensif, attachés aux domaines de pratique « habituelle » et « calcul formel », de repérer leurs relations dans leur domaine respectif, puis les relations qui se créent quand les deux domaines fusionnent dans une pratique de mathématiques « assistée par le calcul formel » (op. cité, p. 59).

Ensuite nous allons prendre en compte la typologie considérée par Trouche (2000), que nous avons présentée plus haut (cf. cadre théorique, p. 12) pour analyser les contraintes des outils de **Maple** par rapport aux domaines que nous étudions.

Par exemple, pour le calcul d'une *intégrale double* ou *triple*, **Maple** pourra réaliser certaines démarches (telles que des changements de variables, des calculs de primitives par des intégrales itérées, etc.) de façon interne en retournant tout de suite le résultat associé, sans expliquer les techniques de calcul opérées. Dans ce contexte, l'utilisateur ne dispose d'aucun élément de contrôle pour mieux comprendre un tel résultat, il ne peut donc que l'accepter ou le refuser. Ce sont des « boîtes noires », que l'utilisateur ne peut pas modifier directement.

Cependant (comme nous le verrons plus loin) une réorganisation possible du processus d'instrumentation pourra, a priori, entraîner l'utilisateur à avoir un certain contrôle sur le résultat.

Nous proposons d'étudier les contraintes du logiciel **Maple** selon les trois typologies soulignées par Trouche (2000).

Rappelons tout d'abord nos questions de recherche :

- Q4.** Quels sont les outils disponibles dans l'environnement informatique **Maple** concernant :
- (a) la géométrie analytique dans l'espace (GA)⁴⁴ ?
 - (b) le calcul des intégrales multiples ?
 - (c) les interactions entre (a) et (b) ?
- Q5.** Comment l'utilisation de ces outils, modifie-t-elle les techniques de résolution de certaines tâches ?
- Q6.** Comment les étudiants s'approprient-ils ces outils dans une tâche de calcul de volume par des intégrales multiples ?

Une session de travail avec **Maple** commence par son démarrage à partir de Windows. Pour ce faire, il suffit d'un double clic rapide sur l'icône correspondant. Une interface divisée en trois parties similaires à la plupart des logiciels (le menu principal, le menu des icônes et la « feuille » de travail) est alors affichée à l'écran. A partir de ce moment **Maple** est prêt à travailler en mode interactif. On lui donne des instructions⁴⁵ au clavier (selon une syntaxe précise) à partir de la ligne d'entrée désignée par le symbole **>** appelé **prompt**, que l'on valide par la touche Entrée.

Si ces instructions sont correctement données à **Maple**, il donne une réponse toujours présentée en milieu de ligne (à l'écran) qui n'est pas précédée du **prompt**. Pour que **Maple** comprenne qu'une instruction est complète et qu'elle doit être prise en compte dans le registre d'arrivée (registre dans lequel **Maple** donne sa réponse) deux conditions (**terminaison** et **exécution**) doivent être remplies :

- Cette instruction doit se terminer par **;** (*point-virgule*) ou par **:** (*deux-points*).
- Le sujet doit exécuter l'instruction en appuyant sur la touche Entrée.

A la place de la dernière condition, on peut effectuer un clic (avec le bouton gauche de la souris) en un point quelconque de la ligne d'entrée comportant l'instruction, et ensuite choisir l'option **Execute**, ou encore cliquer sur l'icône **!** (dans le menu des icônes), on exécute alors,

⁴⁴ A la fois sur la représentation analytique et graphique – soit par des fonctions de deux variables, soit par des équations paramétriques.

⁴⁵ Nous utiliserons le mot *instruction* pour désigner l'action du sujet dans l'activité instrumentée dans **Maple** à partir de la ligne d'entrée (le prompt **>**). Donc une *instruction* peut contenir une *commande* ou non. Par exemple : **Plan :=plot3d(4-y, x=-1..1, y=-1..1, color=red, scaling=constrained) :** Alors que le mot *commande* désignera l'outil (artefact) comme moyen d'action instrumentée. Donc la *commande* est un *outil* dans une instruction selon une syntaxe pré-définie ou à construire dans **Maple**. Par exemple la commande **plot3d** dans l'instruction ci-dessus est un outil permettant la représentation graphique du plan $z=4-y$ sur le domaine R représenté analytiquement par $R=\{(x,y) ; -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

l'instruction en cours. L'icône **!!!** permet d'exécuter toutes les instructions données à **Maple** dans une session de travail selon les syntaxes utilisées.

En ce qui concerne les syntaxes des commandes, Lagrange (2000) souligne :

Des techniques instrumentées sont motivées par les besoins d'une utilisation efficace et raisonnée de la machine dans le travail mathématique des élèves [étudiants]. Parmi celles-ci, les premières sont relatives à des syntaxes des [commandes] dans les lignes d'entrées de la machine et à l'interprétation des résultats obtenus (op. cité, p. 171).

Ainsi, pour chercher des réponses à notre question **Q4(a)** nous proposons par la suite de faire l'étude des outils et des syntaxes disponibles dans **Maple**, participant aux schèmes de représentation graphique.

3.1 Recensement d'outils disponibles à propos des RG

Dans **Maple**, la mise en relation des objets *ostensifs* du travail mathématique et des objets *ostensifs* manipulés par le logiciel à partir d'une action instrumentée⁴⁶, visant une représentation graphique, nécessite d'abord le démarrage de l'environnement avec le package nommé **plots** selon l'instruction **>with(plots)** ; ainsi **Maple** met à la disposition du sujet les outils suivants pour effectuer une représentation graphique :

[animate, **animate3d**, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, **cylinderplot**, densityplot, **display**, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, **implicitplot3d**, inequal, listcontplot, listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot, logplot, matrixplot, odeplot, pareto, pointplot, pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported, polyhedraplot, replot, rootlocus, semilogplot, setoptions, setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, sphereplot, surfdata, textplot, textplot3d, tubeplot]

Ensuite, l'utilisateur doit développer des compétences sur les *techniques instrumentées*. Ce package ne réunit que certains outils de représentation graphique, d'autres artefacts étant encore disponibles dans **Maple**. Dans ce cas particulier de la représentation graphique des surfaces tridimensionnelles, il est nécessaire de développer des compétences à la fois sur les commandes **plot3d**, **implicitplot3d**, **display** et sur leurs syntaxes, ainsi que sur les objets mathématiques mis en œuvre. On trouve aussi dans ce package les commandes **animate3d** et **cylinderplot** qui peuvent être amenées à jouer un rôle important. C'est sur ces outils que nous concentrons nos analyses à propos de la représentation graphique en 3D.

3.1.1 Les potentialités des outils plot3d, animate3d et cylinderplot pour obtenir des RG en 3D

On trouve dans **Maple**⁴⁷ quatre types différents de syntaxes de la commande **plot3d** pour la visualisation graphique dans l'espace. Les calculs des grandeurs attachées (longueurs, aires et

⁴⁶ Correspondant aux activités pour lesquelles un artefact est un moyen de réalisation (Rabardel, 1985).

⁴⁷ Le logiciel **Maple** propose à l'utilisateur une aide sur une commande connue. Pour ce faire, il suffit de placer le curseur sur le nom de la commande, préalablement écrite sur le **prompt**, et ensuite de choisir l'option **Help** du menu principal. Cette action peut aussi être réalisée avec la touche **F1** du clavier (une fois le curseur placé sur une telle commande).

volumes) à cet outil ont une importance dans le contexte de construction des connaissances en mathématique. C'est le calcul de cette dernière grandeur qui nous intéresse. Les parties visuelles (ostensifs) des syntaxes participant aux schèmes d'utilisation de commandes **plot3d**, **animate3d** et **cylinderplot** que l'on trouve dans *Maple* sont prédéfinies de la façon suivante :

- > **plot3d(f, x=a..b, y=c..d, <options>)** ; (01)
- > **plot3d(f, a..b, c..d, <options>)** ; (02)
- > **plot3d([f, g, h], a..b, c..d, <options>)** ; (03)
- > **plot3d([f, g, h], s=a..b, t=c..d, <options>)** ; (04)
- > **animate3d(f, x=a..b, y=c..d, i=m..n, <options>)** ; (05)
- > **cylinderplot (c, r1, r2, <options>)** (06)

<options> est un espace facultatif de la syntaxe, réservé aux options de représentation, telles que : **color**, **scaling**, **axes**, **view**, **labels**, etc.

3.1.2 Description d'outils des RG

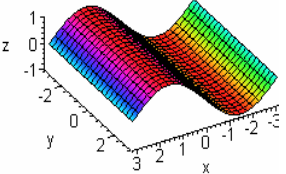
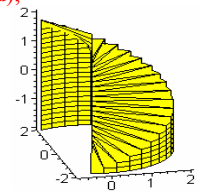
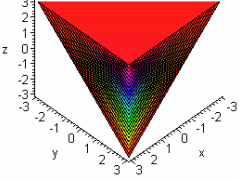
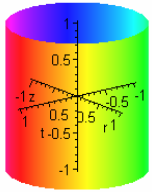
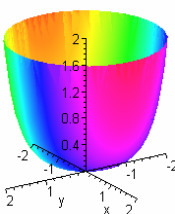
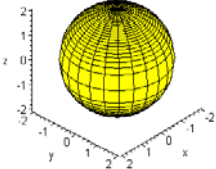
- La première syntaxe (01) donne des moyens permettant la représentation graphique d'une fonction de deux variables en coordonnées cartésiennes.
- Dans la deuxième (02) et la troisième (03) syntaxe **f**, **g** et **h** sont des procédures de *Maple* ou des opérateurs, décrits à partir d'un langage de type **impératif procédural**. Dans ce cas, la notation d'opérateur doit être employée, c'est-à-dire que le nom de la procédure (par exemple **f**) est donné sans paramètres spécifiés (cf. la représentation G.3, tableau ci-dessous) et les intervalles doivent être donnés simplement dans la forme **a..b**, **c..d** plutôt que comme une équation.
- Les syntaxes (04) et (05) décrivent respectivement la représentation paramétrique et l'animation automatique des objets géométriques en trois dimensions, alors que la dernière commande (06) offre la possibilité de la représentation graphique des surfaces des équations données en coordonnées cylindriques, et peut être exprimée sous la forme d'expressions ou de procédures.

Nous voyons ces syntaxes comme des artefacts (outils) participant aux schèmes d'utilisation des commandes. L'appropriation par le sujet de ces outils peut a priori permettre la construction de techniques instrumentées, rendant possible l'accomplissement de tâches données, ainsi que susciter des rétroactions.

On remarque que dans tous les cas de représentation graphique, la représentation analytique associée, doit être précisée. C'est-à-dire que les domaines de variation des variables doivent être établis.

Comme le souligne Lagrange (2000, p. 60), « pour analyser les nouveaux objets que les commandes du calcul formel introduisent, il est nécessaire de considérer les situations ». C'est pourquoi nous proposons les exemples ci-dessous, pour voir le rôle possible de chacune des six syntaxes des commandes citées plus haut. Nous ne prendrons pas en compte ici les erreurs possibles de syntaxe. Dans un tel cas, *Maple* renvoie un message plus ou moins détaillé, que

l'utilisateur peut compléter par un appel à l'aide du logiciel. Nos exemples ont été choisis pour illustrer le fonctionnement de chacune des syntaxes dont nous venons de parler. De plus, ils sont tous issus d'un des deux manuels SWO et SPIE que nous avons analysés plus haut. Nous ne prétendons pas être exhaustifs, mais nous avons tenté d'être le plus représentatifs des divers cas rencontrés, sans pouvoir le justifier entièrement.

<pre>> plot3d(sin(x), x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi, color=sin(x), scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</pre>  <p style="text-align: right;">G. 1</p>	<pre>> f:= proc(x,y) if y<x then 2 else 0 end if end proc: > plot3d(f,-2..2,-2..2, color=yellow, coords=cylindrical, scaling=constrained);</pre>  <p style="text-align: right;">G. 2</p>
<pre>> f:= proc(x,y) if x < y then x else 3 end if end proc: > g:= proc(x,y) if y<x then y else 3 end if end proc: > h:= proc(x,y) if y=x then x else 3 end if end proc: > plot3d([f,g,h],-3..3,-3..3,color=h,scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</pre>  <p style="text-align: right;">G. 3</p>	<pre>> plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-1..1,color=t, scaling=constrained, labels=[r,t,z]);</pre>  <p style="text-align: right;">G. 4</p>
<pre>> animate3d(i*exp(x^2+y^2), x=-2..2,y=-2..2, i=0.1..1, color=y, axes=normal, view=[-2..2,-2..2, 0..2]);</pre>  <p style="text-align: right;">G. 5</p>	<pre>> N:=[r,theta,sqrt(4-r^2)]: > S:=[r,theta,-sqrt(4-r^2)]: > cylinderplot({N,S},theta=0..2*Pi,r=0..2, color=yellow);</pre>  <p style="text-align: right;">G. 6</p>

On peut dégager, dans chaque exemple, deux types de registres différents, caractéristiques des *ostensifs* en jeu :

- ▶ Un registre d'écritures en ligne pour les expressions instrumentées (ou entrées dans **Maple**)
- ▶ Un registre graphique pour le résultat donné par **Maple** « conforme » aux ostensifs liés aux objets mathématiques.
- **G.1** représente graphiquement la fonction $f(x,y)=\sin(x)$ définie sur la région $R=\{(x,y) ; -\pi \leq x \leq \pi, -\pi \leq y \leq \pi\}$.
- **G.2** représente le graphique de $f(x,y)=2$ en coordonnées cylindriques dans les conditions prescrites par la procédure $f := \text{proc}(x,y)$.
- **G.4** représente le graphique du cylindre de rayon 1 centré dans l'axe Oz par des équations paramétriques.
- **G.5** représente l'instant initial ($i=0.1$) du graphique animé de $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ définie sur la région $R=\{(x,y) ; -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ du plan xOy et visualisé (à l'aide de l'option **view**) dans le parallélépipède $[-2,2]x[-2,2]x[0,2]$.

Les options telles que **color**, **scaling**, **coords**, **axes**, **view** offrent respectivement les possibilités de choix de couleurs⁴⁸, d'échelle (**scaling=constrained** correspond à l'échelle **1:1**) et de système des coordonnées. Par défaut, les axes sont donnés en coordonnées cartésiennes. L'option « **axes** » permet de préciser dans le graphisme, les variables dont on trace le dessin. L'option « **view** » permet de définir une région tridimensionnelle (parallélépipédique) pour voir le dessin dans une fenêtre. Alors que, l'option « **labels** » permet un contrôle d'ordre d'affichage des étiquettes (variables) d'orientation des axes.

Nous avons vu dans l'organisation mathématique dégagée plus haut qu'un grand nombre de types de tâches intègrent des représentations graphiques des solides composés par un ensemble de plusieurs surfaces d'équations différentes. Nous voulons à présent savoir ce qu'offre **Maple** comme possibilités pour ce type de représentation.

Il existe trois types de techniques possibles dans l'environnement de **Maple** pouvant permettre de visualiser ce type de représentation :

- La technique de **superposition** ;
- La technique de l'**affectation** ;
- Et celle de **rappel**.

Ce sont ces techniques que nous décrivons pour la suite :

3.1.3 Description de techniques de RG simultanées d'objets

- La technique de **superposition** consiste à afficher ensemble plusieurs représentations graphiques, dont les représentations analytiques sont exprimées dans un même type de système de coordonnées (cartésiennes, polaires, cylindriques, sphérique) en utilisant une seule instruction et une seule commande.

Cette technique impose que le domaine de variation des variables des expressions à tracer soit unique. C'est-à-dire que les variables soient établies dans un même intervalle, dans un même système de coordonnées et soient identifiées par les mêmes lettres dans toutes les expressions à tracer. Dans ce cas, l'utilisateur ne peut pas superposer les tracés de différents types de systèmes de coordonnées. Par exemple, il n'est pas possible de superposer les surfaces G.1 et G.6 (cf. tableau ci-dessus). Pour accomplir ce type de tâche, il est nécessaire d'appliquer la technique de l'**affectation**.

- La technique de l'**affectation** consiste à stocker un résultat dans une variable. C'est-à-dire à donner un nom à ce résultat, en utilisant le symbole **:=**.

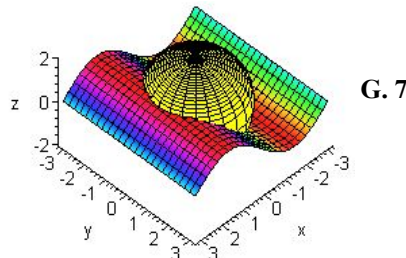
Les résultats ainsi affectés peuvent être visualisés en utilisant la commande **display** (qui permet l'affichage des objets ensemble, en particulier les surfaces) comme le montre le graphique G.7 ci-dessous :

⁴⁸ On remarque qu'on peut même utiliser une des variables ou expression pour exprimer la couleur. Dans ce cas **Maple** renvoie une surface de multi-couleurs (fc. par exemple G.7).


```

> with(plots) :
> N :=[r, theta, sqrt(4-r^2)] :
  S :=[r, theta, -sqrt(4-r^2)] :
  G1 :=plot3d(sin(x), x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi, color=sin(x)) :
  G6 :=cylinderplot({N,S},theta=0..2*Pi,r=0..2, color=yellow) :
  display(G1,G6, scaling=constrained) ;

```



La technique d'**affectation** peut aussi être utilisée conjointement avec celle de la **superposition** (cf. exemple G.6 plus haut). En effet, ces techniques peuvent permettre un contrôle sur les variables visuelles⁴⁹ relatives aux graphiques qui interagissent dans l'espace, en jouant donc un rôle important dans la construction d'un solide quelconque, délimité par des surfaces représentant des fonctions de deux variables. On a vu que ce type de solide intervient souvent dans les tâches de calcul de volume par des intégrales multiples. La difficulté vient de ce qu'il faut « cacher » certaines parties des surfaces en question pour faire apparaître le contour du solide. Quelles seront alors les techniques nécessaires pour une telle construction ? Quelles sont les contraintes et écarts possibles entre la production effective d'un étudiant dans le travail mathématique habituel et le registre d'arrivée⁵⁰ du logiciel, lors de la mise en œuvre de telles techniques ? Nous reviendrons sur ces questions plus loin dans ce chapitre.

On remarque que dans le cas particulier de la représentation graphique, une instruction se terminant par le symbole **:** ne sera exécutée correctement que si elle est affectée à un nom. Les réponses de toutes les instructions terminées par **:** ne sont pas affichées à l'écran. Toutefois, cela est parfois pratique, pour cacher les informations « inutiles » sur la feuille de travail (c'est le cas par exemple de N, S, G1 et G6 données ci-dessus). Cependant, il est possible de rappeler le dernier résultat ainsi caché. D'où l'importance de la technique de **rappel**.

- La technique de **rappel** consiste à rappeler un résultat précédent par rapport à la ligne courante.

Pour cela, il suffit de taper le symbole **%** terminé par **;**. Cette technique est valable pour **%%** et **%%%** qui permettent, de rappeler le résultat d'une action réalisée respectivement, dans les deuxième et troisième lignes qui précèdent celle-ci (on ne peut pas aller au-delà de trois). La technique de **rappel** est valable aussi pour des instructions mises au point par **;** (point-virgule) ce qui peut permettre de se dispenser de la technique d'**affectation** dans certains cas.

⁴⁹ Concernant les variables visuelles, nous renvoyons le lecteur au chapitre A, p. 27 de cette thèse.

⁵⁰ Registre dans lequel **Maple** donne sa réponse selon l'action d'utilisateur, que ce soit le registre graphique, ou le registre analytique ou encore numérique.

3.1.4 Les syntaxes de la commande **implicitplot3d**

Nous avons aussi étudié la possibilité d'utilisation de la syntaxe de la commande **implicitplot3d** qui peut permettre la représentation graphique des fonctions de deux variables définies implicitement. Cette commande utilise un algorithme numérique basé sur la triangulation⁵¹ dans les tétraèdres combiné avec l'interpolation simple⁵², aucun calcul symbolique n'est fait. Par défaut, la surface est donnée en coordonnées cartésiennes, et les domaines de variation des variables x , y et z doivent être forcément définis par des termes constants. Les deux lignes de commandes ci-dessous présentent les syntaxes de la commande **implicitplot3d**.

> **implicitplot3d**(*expre*, $x=a..b$, $y=c..d$, $z=m..n$, <*options*>) ; (07)

> **implicitplot3d**(*p*, $a..b$, $c..d$, $m..n$, <*options*>) ; (08)

- Dans la première syntaxe (07), l'expression algébrique (**expre**) contient les variables **x**, **y** et **z**. Elle peut être une équation ou une inéquation. Les bornes **a**, **b**, **c**, **d**, **m** et **n** doivent être nécessairement des constantes réelles.

A noter qu'a priori, ces conditions peuvent représenter des contraintes dans une activité instrumentée sur certains types de tâches de construction de solides. Nous étudierons, plus bas, les contraintes liées à cette commande.

- Dans la deuxième syntaxe (08), le composant **p** doit être une procédure de *Maple* ou un opérateur. La notation d'opérateur doit être employée, c'est-à-dire que, le nom de la procédure est donné sans paramètres spécifiés, et les intervalles doivent être donnés simplement sous la forme $a..b$, $c..d$, et $m..n$ plutôt que comme une équation.

3.1.5 Conclusion sur le recensement des outils des RG

Parmi les commandes (du package **plots**) disponibles dans *Maple*, relatives aux tracés des dessins, nous venons d'étudier les syntaxes des commandes :

- **plot3d** ;
- **animate3d** ;
- **cylinderplot** ;
- **implicitplot3d**.

L'analyse relative à chaque outil que nous venons de mener, nous a permis d'identifier les potentialités des syntaxes (01, 02,...,08) de ces commandes, pouvant outiller les techniques de résolutions des tâches sur la représentation graphique des fonctions de deux variables. Nous avons dégagé deux types de registres différents, caractéristiques des objets mis en jeu, permettant la lecture et l'interprétation des liens possibles entre les expressions instrumentées

⁵¹ Une telle triangulation est réalisée internement dans *Maple*, sans que l'utilisateur ne puisse avoir accès aux démarches prises en compte.

⁵² Nous n'examinerons pas ici les notions d'interpolation ou de triangulation, car elles dépassent le cadre de notre étude. Par contre on peut trouver en annexe un exemple d'interpolation.

et les résultats retournés par le logiciel conformes aux *ostensifs* liés aux objets mathématiques. Cette analyse porte ainsi des réponses à la question **Q4(a)**. Il nous reste à préciser les contraintes possibles, les liens entre ces syntaxes et les processus qu'un utilisateur peut mettre en œuvre pour la résolution d'un problème du calcul de volume par des *IM*. Nous reviendrons sur ces questions dans la poursuite de notre travail.

A noter que, mise à part la syntaxe de la commande **implicitplot3d** (qui ne travaille forcément que sur un domaine parallélépipédique), nous n'avons pas trouvé dans l'analyse du logiciel, menée jusqu'ici, d'hypothèses portant sur le contenu des bornes d'intervalles de variation des variables concernées dans les six syntaxes (01, 02, ..., 06) de représentation graphique. On remarquera, ce qui n'est pas mise en évidence par les concepteurs du logiciel, que ces bornes peuvent comporter des constantes réelles ou des expressions algébriques décrites à partir des quatre opérations ou des signes :

- addition (+) ;
- soustraction (-) ;
- multiplication (*) ;
- division (/) ;

contenant éventuellement de(s) exponentiation(s), représenté(s) par (^) ou par (**).

Considérons à présent notre question **Q4(b)** présentée précédemment. Pour chercher des réponses à cette question, nous commençons par une étude d'outils de :

- manipulation des expressions algébriques,
- définition d'une fonction et transformation d'une expression en une fonction.

3.2 Manipulation des expressions algébriques

On trouve dans *Maple* la commande **solve** comme outil pour la manipulation des expressions algébriques (résolution des équations, inéquations, systèmes des équations, etc.). Cette commande peut outiller les techniques de la recherche des bornes d'intégration, qui apparaissent souvent comme des points d'intersections de courbes et de surfaces données par leurs équations cartésiennes. Voici les syntaxes associées que l'on trouve dans *Maple*.

> **solve(eqn, var) ;** (09)

> **solve(eqns, vars) ;** (10)

- Dans la première syntaxe (09) « **eqn** » peut être une équation, une inéquation ou une procédure et « **var** » (facultatif) est une variable (l'inconnue pour résoudre...). La solution d'équation « **eqn** » résolue pour une variable inconnue est retournée comme une expression.
- Dans la deuxième syntaxe (10) « **eqns** » peut être une séquence des équations, ou inéquations, et « **vars** » (facultatifs) est une séquence des variables (les inconnues pour résoudre...). Ainsi, la solution d'un système des équations (quelles que soient les inconnues) est indiquée comme ensemble d'équations. Par exemple :

> **solve(x^2+y^2=1, {y}) ;**

$$\left\{ y = \sqrt{1-x^2} \right\}, \left\{ y = -\sqrt{1-x^2} \right\}$$

Comme pour le cas des RG, la partie visible (les *ostensifs*) est constituée par deux types de registres différents :

- ▶ un registre d'écritures en ligne pour l'expression instrumentée (ou entrée dans **Maple**)
- ▶ un registre d'écritures « spatiale » pour le résultat conforme aux *ostensifs* liés aux objets mathématiques.

Le lien entre les deux pôles (les connaissances mathématiques préalables de l'objet en jeu, les connaissances sur l'utilisation de **Maple**) semble être important pour la réalisation des tâches.

Maple permet d'explorer toutes les solutions ainsi obtenues, pour en extraire par exemple les valeurs de x , ou pour remplacer la variable x par un autre élément, etc. Par exemple, si on veut extraire les valeurs de x , on contrôle d'abord les expressions retournées par la technique d'affectation :

> **sol := {solve(x^2+y^2=1,y)} ;**

$$sol := \left\{ \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2} \right\}$$

A noter que l'organisation des ostensifs $\{ \}$ dans l'écriture en ligne pour les expressions instrumentées, joue un rôle important dans l'écriture « spatiale » pour le résultat affiché sur écran. Les résultats retournés par la commande **solve** ne sont rien d'autres qu'une suite de symboles affectés par **sol**. Ensuite, on peut accéder à ces composantes en utilisant la commande **op** selon la syntaxe **op(i,e)** qui retourne l' i -ième élément de **sol**, et **e** est le **sol**. Plus précisément, l'instruction **op(2,sol)** par exemple retourne la deuxième solution $-\sqrt{1-x^2}$ de **sol**. On voit alors qu'il est possible de trouver les solutions des composantes de **sol** :

> **solve(op(1, sol)=0,{x}) ;**

$$\{x=-1\}, \{x=1\}$$

ou encore

> **solve(op(2, sol)=0,{x}) ;**

$$\{x=-1\}, \{x=1\}$$

Dans ce cas (par symétrie d'éléments du **sol**) on voit que, tant **op(1, sol)=0** que **op(2, sol)=0** aboutissent aux mêmes résultats.

3.3 Les syntaxes pour les définitions de fonctions

On trouve dans **Maple** des outils permettant de transformer une expression en une fonction. Par exemple, les éléments de **sol** (ci-dessus) peuvent être définis comme des fonctions d'une (ou deux) variable(s) (avec une variable muette). Pour cela, il suffit d'utiliser la commande **unapply** d'après la syntaxe **>g := unapply(op(1,sol),(x,z)) ;** qui retourne le résultat $g=(x,z) \rightarrow \sqrt{1-x^2}$, qui se lit $g(x,z) = \sqrt{1-x^2}$ selon l'usage mathématique habituel. On peut ainsi chercher une valeur **g(a,b)** de la fonction $g(x)$ pour $a \in [-1,1]$ et $b \in \mathbb{R}$ en faisant : **>g(a,b) ;**

En général la syntaxe (11) :

$$> \mathbf{f := unapply(exp, var1, var2, \dots, varN) ;} \quad (11)$$

consiste à transformer une expression « **exp** » en une fonction **f** de **N** variables **var1, var2, ..., varN**. Alors que pour définir une fonction d'une ou **N** variables on trouve respectivement les syntaxes (12) et (13) présentées ci-après :

> **f :=(var) -> exp ;** (12)

> **f :=(var1, var2, ..., varN) -> exp ;** (13)

où « **exp** » est une expression algébrique.

Les outils que nous venons de présenter peuvent jouer des rôles importants dans le traitement des tâches de calcul des intégrales. La question essentielle est de savoir quels sont les *non-ostensifs* (éléments non visibles) spécifiques réalisables par un utilisateur à partir de ces outils ? Il faut les chercher dans les objets *ostensifs* manipulés par le logiciel en liaison avec les rétroactions obtenues, conformément à l'usage mathématique habituel. La reconnaissance de la nature des objets manipulés par le logiciel semble être essentielle pour comprendre le processus d'instrumentation dans *Maple*. Il faut noter que les éléments de contrôle tels que les *parenthèses*, les *virgules*, les *points virgules* etc., jouent des rôles non négligeables dans ce processus.

En ce qui concerne les *IM* elles-mêmes, on peut se demander ce qu'apporte le logiciel *Maple* pour l'enseignement de cet objet de savoir. Par la suite nous cherchons précisément des éléments de réponses pour notre question **Q4(b)** présentée précédemment.

3.4 Recensement des outils disponibles à propos des *IM*

Nous nous proposons dans cette partie, de recenser et d'analyser les outils disponibles dans le logiciel *Maple* pour le calcul des *Intégrales multiples*. A ce propos, nous pouvons trouver deux types différents de commandes, pouvant outiller les techniques de résolutions des tâches sur le calcul des *IM*, notamment les commandes :

- **Int** et **int**.
- **Doubleint** et **Tripleint**.

Le constat est qu'il n'y a pas beaucoup d'outils pour le calcul des intégrales. Les deux premières commandes ci-dessus sont des outils valables pour le calcul de tous les types d'intégrales (simples, doubles, triples, fonctions vectorielles, curvilignes, etc.). Alors que les deux dernières sont destinées uniquement au calcul des intégrales doubles et triples. Des liens entre les deux types d'outils ci-dessus peuvent être traités par les théorèmes de Green, de Gauss et de Stokes⁵³. Les questions essentielles sont de savoir, comment ces outils deviennent instruments ? Quelles potentialités et contraintes existent pour le calcul des *IM* ? Quelles sont les syntaxes disponibles participant aux schèmes d'actions instrumentées autour des *IM* ?

3.4.1 Les potentialités d'outils du calcul d'intégrales

Le logiciel *Maple* propose des syntaxes associées à chaque outil permettant la lecture et

⁵³ Nous n'examinons pas ici ces théorèmes, car ils dépassent le cadre de cette étude.

l'interprétation des objets mathématiques sur les intégrales. Dans le cas particulier de calcul des *IM* on trouve six syntaxes différentes, associées aux deux types des commandes présentées ci-dessus :

> **int(int(f(x,y), x=a..b), y=c..d) ;** (14)

> **Int(Int(f(x,y), x=a..b), y=c..d) ;** (15)

> **Doubleint (f(x,y), x=a..b , y =c..d) ;** (16)

> **int(int(int(f(x,y,z), x=a..b), y=c..d), z=m..n) ;** (17)

> **Int(Int(Int(f(x,y,z), x=a..b), y=c..d), z=m..n) ;** (18)

> **Tripleint(f(x,y,z), x=a..b, y =c..d, z =m..n) ;** (19)

Les trois premières sont destinées aux calculs des intégrales doubles et les trois dernières sont consacrées aux calculs des intégrales triples.

3.4.2 Description des outils de calcul d'intégrales

- La première syntaxe (14) permet le calcul effectif de l'intégrale double d'une fonction f de deux variables, définie sur une région de type R_y du plan xOy . Une fois que cette syntaxe est connue, on peut se demander ce qui peut se passer si l'utilisateur intervertit l'ordre entre **x=a..b** et **y=c..d** dans la ligne de cette commande. Obtient-on alors la même solution ? La réponse est oui à la condition que **a**, **b**, **c** et **d** soient des constantes réelles (conséquence du théorème de *Fubini*). Alors que la réponse serait non, à condition qu'au moins une des composantes (**a** ou **b**) soit une expression en fonction de y .
- La deuxième (15) et la troisième (16) syntaxes, sont les versions inertes de la première (14). C'est-à-dire que l'utilisation correcte de ces syntaxes ne produit que l'écriture algébrique du calcul d'intégrale double (cf. Ex2 et Ex3, ci-dessous). Aucun calcul effectif d'intégrale n'est réalisé. Elles permettent néanmoins un contrôle des expressions introduites dans la syntaxe en référence aux ostensifs du travail mathématique classique..

Le résultat effectif du calcul (approché) de l'intégrale peut être obtenu à l'aide de la commande **evalf** ou **value** selon les syntaxes (20), (21) ou (22).

> **evalf(Ei,n) ;** (20)

> **evalf[n](Ei) ;** (21)

> **value (Ei) ;** (22)

où **Ei** est (selon la technique d'**affectation**) l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale et **n** est un chiffre entier, identifiant le nombre de décimales souhaité. Les syntaxes (20) et (21) retournent un résultat approché. Alors que la syntaxe (22) retourne un résultat exact. Il est aussi possible d'utiliser (dans les trois cas) la technique de *rappel* au lieu de **Ei**.

- La quatrième syntaxe (17) permet le calcul effectif de l'*intégrale triple* d'une fonction f de trois variables, définie sur un domaine tridimensionnel. Alors que les syntaxes (18 et 19) sont les versions inertes de la quatrième (17).

A noter que les outils **Doubleint** et **Tripleint** ont une particularité. Leur utilisation nécessite de charger le package **student** selon l'instruction **with(student) ;** qui retourne l'ensemble des

outils stockés dans ce package.

Le tableau ci-dessous comporte des exemples associés à chaque syntaxe ((14), (15),..., (19)).

<p>Ex1> int(int(x^2,x=0..y),y=0..2) ;</p> <p style="text-align: center;">4/3</p>	<p>Ex2> Int(Int(x^2,x=0..y),y=0..2) ;</p> $\int_0^2 \int_0^y x^2 dx dy$	<p>Ex3> Doubleint(x^2,x=0..y,y=0..2) ;</p> $\int_0^2 \int_0^y x^2 dx dy$
<p>Ex4> int(int(int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1) ;</p> <p style="text-align: center;">π/8</p>	<p>Ex5> Int(Int(Int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1) ;</p> $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 1 dz dy dx$	<p>Ex6> Tripleint(1,z=x^2+y^2..1,y=0..sqrt(1-x^2),x=0..1) ;</p> $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 1 dz dy dx$

Comme précédemment, ici aussi nous distinguons deux types de registres différents, relatifs aux ostensifs manipulés par le logiciel :

- ▶ un registre d'écriture en ligne pour l'expression instrumentée (ou entrée dans **Maple**) ;
- ▶ un registre d'écriture « spatiale » pour le résultat conforme aux ostensifs liés aux objets mathématiques.

Les liens entre les deux pôles sont importants pour la réalisation des tâches associées.

3.5 Etude des contraintes des outils de calcul d'intégrales

Notons que l'activité instrumentée dans **Maple** sur les intégrales et *IM*, ne fonctionne pas comme dans la résolution papier/crayon. En effet, les calculs effectués par le logiciel **Maple** se font de façon interne, comme une « boîte noire », sans laisser apparaître des étapes intermédiaires qui devraient nécessairement être effectuées dans le cas d'une résolution papier/crayon. Ainsi la commande **int** donne un résultat « brut » sans les calculs intermédiaires. De plus, dans le cas du calcul d'une intégrale itérée, l'utilisation des syntaxes (14) ou (17) telles que proposées par les promoteurs du logiciel, ne montre pas la primitive de chacune des intégrales itérées (cf. Ex1 et Ex4, tableau ci-dessus). De même les commandes, **value** et **evalf**, qui permettent de donner des valeurs exactes et approchées des intégrales fonctionnent comme des boîtes noires en donnant un résultat brut sans intermédiaires de calculs. Dans ces cas, on ne connaît jamais les démarches suivies par le logiciel. Comment un utilisateur peut-il valider un résultat ainsi retourné par le logiciel ? En revanche dans l'environnement papier/crayon (pour faciliter le calcul de certaines intégrales) une transformation ou un changement de variables (c'est le cas de l'Ex4) est parfois nécessaire. On voit donc qu'il existe des contraintes des commandes qui peuvent intervenir dans les calculs d'intégrales simples ou itérées, que nous appelons **contraintes « boîte noire »** liées à l'existence et à la forme (en reprenant les termes employés par Trouche(2000), cf. cadre théorique, p.12).

Dans le cas précis des intégrales itérées, on peut en jouant sur la dualité des outils **Int** et **int** décomposer les calculs à l'œuvre dans la recherche d'une intégrale itérées, de façon à obtenir une démarche plus proche de ce qui est fait en papier/crayon. C'est ce que nous illustrons

dans l'exemple qui suit.

Registre d'écritures en lignes pour l'expression instrumentée	
1	> It:=Int(Int(Int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1); # It intégrale
2	It=Int(Int(int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1);
3	op(2,%)=Int(int(int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1);
4	Int(int(int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x)= # où 0 ≤ x ≤ 1 int(int(int(1,z=x^2+y^2..1),y=0..sqrt(1-x^2)),x);
5	F:=unapply(op(2,%),x):
6	It=F(1)-F(0);
Registre d'écriture « spatiale » pour le résultat conforme aux <i>ostensifs</i> liés aux objets mathématiques	
2	$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 1 \, dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - y^2 \, dy \, dx$
3	$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 - x^2 - y^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} - x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{(3/2)} \, dx$
4	$\int \sqrt{1-x^2} - x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{3} (1-x^2)^{(3/2)} \, dx = \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \arcsin(x) + \frac{1}{6} x (1-x^2)^{(3/2)}$
6	$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 1 \, dz \, dy \, dx = \frac{1}{8} \pi$

On voit que les résultats affichés par **Maple** (*ostensifs*) se rapprochent ainsi de la rédaction standard dans l'environnement *papier/crayon*. Il subsiste toutefois une différence dans la ligne 4. Celle-ci montre bien une contrainte du logiciel qui conduit à une gestion différente dans l'environnement **Maple**. L'impossibilité de faire apparaître dans **Maple**, l'étape du calcul avec la primitive entre crochet et les borne d'intégration, nécessite soit de passer une étape sous silence (ce qui est fait dans les lignes 2 et 3) ou de faire apparaître une étape supplémentaire pour faire afficher la primitive avant de faire le calcul de l'intégrale (comme dans la ligne 4).

3.6 Etude des contraintes des outils de représentation graphique en 3D

Comme le montre notre analyse écologique des manuels, souvent les tâches portant sur le calcul des *IM* font intervenir des connaissances sur la notion de représentation graphique de fonctions de deux variables. D'après les résultats de notre pré-expérimentation, présentés plus haut, même si l'étudiant a une telle connaissance, la représentation graphique lui apparaît souvent difficile à réaliser par des techniques papier/crayon. Mais aussi, comme nous le verrons tout de suite, un logiciel, comme **Maple**, ne reprend pas toutes les solutions qu'un étudiant serait capable d'envisager selon ses connaissances mathématiques préalables, sur la notion des fonctions de deux variables.

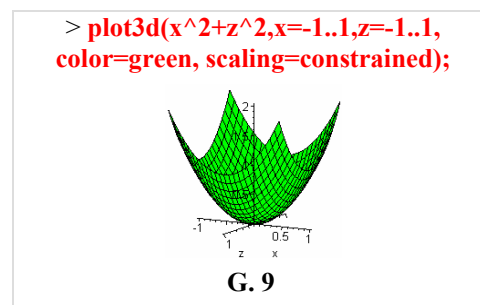
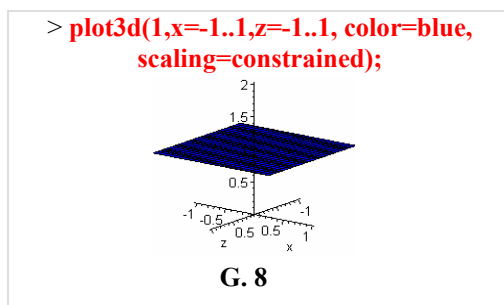
Par exemple, les représentations graphiques des fonctions :

$$f(x,z) = 1, \text{ avec } (x,z) \in [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \text{ et } g(x,z) = x^2 + z^2, \text{ avec } (x,z) \in [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2,$$

par des techniques papier/crayon produisent respectivement :

- le plan d'équation $y=1$ passant par le point $(0,1,0)$ de l'axe Oy et parallèle au plan xOz .
- la surface parabolique d'équation $y=x^2+z^2$, ayant Oy comme l'axe d'orientation et convexe vers la droite.

Mais, comme le montre le résultat ci-dessous, ces représentations ne sont pas identiques dans **Maple**, quand on utilise la syntaxe (01) **plot3d(f, x=a..b, y=c..d, <options>)** ; proposée pour les tracés des graphiques des fonctions de deux variables dans l'espace tridimensionnel.

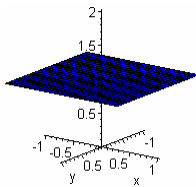


On peut voir que les étiquettes (ostensifs x , y et z) montrent bien l'orientation des graphiques de f et de g sur l'axe Oy . Cela correspond (graphiquement) au fait que ces fonctions sont définies sur le plan xOz . Toutefois, ces étiquettes donnent seulement l'impression que les objets sont correctement représentés dans le registre d'arrivée du logiciel.

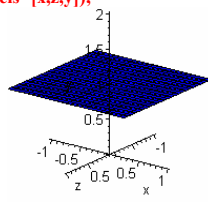
Donc, la syntaxe (01) ne fait que remplacer le couple (x,y) du plan xOy par les variables de la fonction que l'on trace. Les plans de repérage ne changent pas d'orientation. Dans ce cas, le résultat obtenu dans chaque instruction (à partir de la syntaxe (01)) n'est pas conforme aux réalisations possibles des graphiques de f et de g dans l'environnement papier/crayon. C'est-à-dire que, l'orientation du graphique que l'on voit afficher à l'écran (G.8 et G.9) n'est pas celle qui correspond à la représentation de f et de g , selon les exigences mathématiques.

On remarquera que les composantes de l'option de contrôle « **labels** » qui permet un contrôle sur les orientations des axes n'ont aucun lien avec les variables de la fonction que l'on trace. Plus précisément, si on rajoute l'option **labels=[x,y,z]** ou **labels=[x,z,y]** ou encore **labels=[y,z,x]** etc., dans chaque instruction, les positions des étiquettes changent conformément à l'ordre attribué à **labels**, où la dernière variable correspond à l'axe d'orientation du tracé. Mais cette orientation ne correspond pas à la représentation graphique de la fonction elle-même. En fait, on peut même entrer n'importe quelles lettres dans **labels**, c'est le cas du dernier résultat ci-dessous.

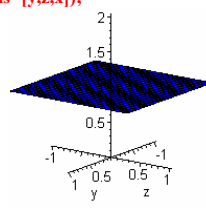
```
> plot3d(1, x=-1..1, z=-1..1,
color=blue, scaling=constrained,
labels={x,y,z});
```



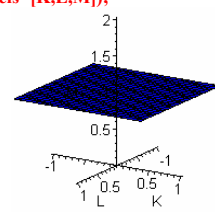
```
> plot3d(1, x=-1..1, z=-1..1,
color=blue, scaling=constrained,
labels={x,z,y});
```



```
> plot3d(1, x=-1..1, z=-1..1,
color=blue, scaling=constrained,
labels={y,z,x});
```



```
> plot3d(1, x=-1..1, z=-1..1,
color=blue, scaling=constrained,
labels={K,L,M});
```



On veut montrer avec cette interprétation que la syntaxe (01) est un outil efficace, mais elle ne permet pas la représentation graphique de fonctions définies dans le plan xOz ou yOz .

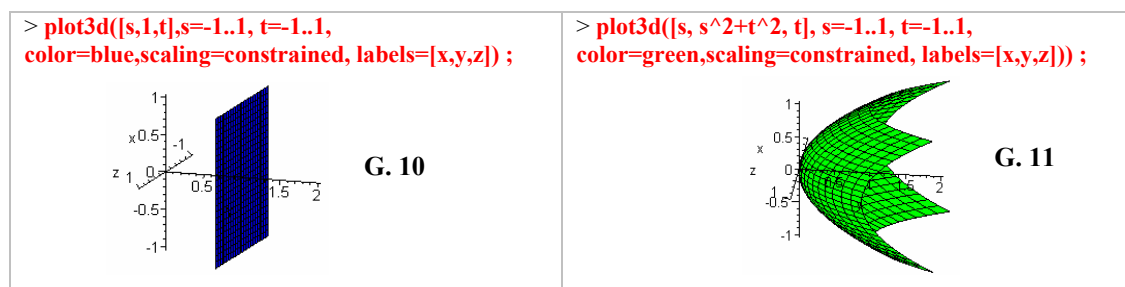
En général, toutes les fonctions continues, de deux variables quelconques, sont toujours interprétées par ce logiciel comme définies sur le plan xOy . Ainsi, le fait que la syntaxe (01) ne permette pas d'avoir toutes les solutions qu'un utilisateur serait capable d'envisager, est une contrainte, nous l'appelons **fonctionnelle**, liée à l'existence et à la forme de la commande **plot3d** selon la syntaxe (01), permettant la représentation graphique des fonctions de deux variables dans *Maple*.

Mais, comme le soulignent Balacheff & Luengo (1998) :

La connaissance de ces contraintes ne doit pas a priori rejeter le logiciel, au contraire leur existence peut être un atout pour susciter un apprentissage ». « L'utilisateur n'est donc pas « libre » d'utiliser comme il l'entend un outil donné : cette utilisation est, relativement, pré structurée par l'outil lui-même » (Op. cite, p.)

Ainsi, comme nous l'avons vu précédemment, *Maple* propose des syntaxes portant sur l'outil **plot3d** capable de permettre un contrôle sur ce type de contraintes. Donc l'outil offre d'autres possibilités pour l'apprentissage dans ce domaine. Toutefois, l'utilisateur doit réorganiser la tâche. La question est alors de savoir quelles connaissances sont nécessaires pour une telle réorganisation ?

A priori pour contrôler ce type de contrainte, l'utilisateur peut s'outiller des techniques habituelles de représentations paramétriques. Ceci confirme l'importance de la syntaxe (04) dans une activité instrumentée dans *Maple*, consacrée à la représentation paramétrique en 3D. On se réfère plus précisément de la syntaxe **plot3d([f,g,h], s=a..b, t=c..d, <options>)** ; Ainsi, la tâche précédente peut être accomplie selon les démarches suivantes.



Le premier cas (G.10) correspond à la représentation graphique du plan d'équation $y=1$ passant par le point $(0,1,0)$ de l'axe Oy selon la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \mathcal{A}(s, t) = s \\ y = \mathcal{B}(s, t) = 1, \text{ avec } (s, t) \in [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ z = \mathcal{C}(s, t) = t \end{cases}$$

Alors que le deuxième (G.11) correspond à la représentation graphique du parabolôide d'équation $y = x^2 + z^2$, ayant Oy comme axe d'orientation et convexe vers la droite, selon la représentation paramétrique :

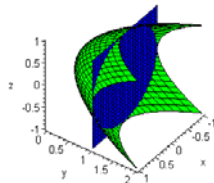
$$\begin{cases} x = \mathcal{A}(s, t) = s \\ y = \mathcal{B}(s, t) = s^2 + t^2, \text{ avec } (s, t) \in [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2 \\ z = \mathcal{C}(s, t) = t \end{cases}$$

La démarche ainsi réalisée justifie l'un des intérêts du logiciel **Maple** pour le paramétrage, pouvant outiller les techniques de représentation graphique dans l'espace tridimensionnel. En utilisant ce logiciel, la notion de paramétrage jouera un rôle dans l'étude de solides délimités par les graphiques des fonctions de deux variables, souvent présents dans les tâches de calcul des *IM*.

On remarquera aussi qu'a priori, pour contrôler la **contrainte fonctionnelle**, un utilisateur pourra s'outiller de la syntaxe (07) **implicitplot3d(expre, x=a..b, y=c..d, z=m..n, <options>)** ; Dans ce cas, si les équations du plan et du parabolôide ci-dessus sont correctement introduites dans **Maple**, ce dernier retournera les graphiques G.10 et G.11.

Si la tâche consiste à donner la représentation graphique du solide Q , délimité par le parabolôide et le plan d'équations en question, on remarquera que la technique de *superposition* ou celle d'*affectation* ou encore celle de *rappel* et la commande **display** permettront la réalisation de ce type de tâche. Ainsi, ces dernières peuvent conduire à la représentation graphique des objets rassemblés (G.12) ci-dessous, où **%** et **%%** contiennent respectivement, G.10 et G.11.

> **display(% , %%)** ;



G. 12

La difficulté suivante vient de ce qu'il ne faut conserver que certaines parties des surfaces délimitant le solide pour faire apparaître le contour du solide intersection Q . Toutefois, la commande **implicitplot3d** ne travaille que sur un domaine parallélépipédique. C'est-à-dire qu'une des variables, par exemple z (d'expressions instrumentées selon la syntaxe (07)) ne peut pas varier dans un intervalle de type $\eta_1(x) \leq z \leq \eta_2(x)$, où η_1 et η_2 sont des expressions de fonctions continues dans un intervalle

$[a, b] \subset \mathbb{R}$. Donc, on ne peut pas isoler le solide Q directement à l'aide d'**implicitplot3d**. Du fait que, la syntaxe (07) ne permette pas la représentation graphique de ce type de solides, est une contrainte, nous l'appelons **implicite**, liée à l'existence et à la forme de la commande **implicitplot3d**.

Or, on a vu que ce type de solide intervient souvent dans les tâches de calcul des grandeurs physiques (aires, volumes, la masse, moments, centres d'inertie, etc.) par des intégrales multiples. Quelles sont alors les techniques nécessaires pour une telle représentation ? Et quel rapport existe (ou peut-il exister) entre une telle représentation et le calcul d'une *intégrale*

multiple ? C'est sur ces questions que nous concentrons nos analyses pour la suite.

3.7 Etude des liens possibles entre les RG et la mise en place du calcul des IM : la technique crible géométrique

L'environnement informatique **Maple** offre des possibilités d'étude d'interaction entre les objets mathématiques des deux domaines (*RG* et *IM*) grâce à l'étroit rapport existant entre la géométrie et l'algèbre, ainsi qu'à l'utilisation simple et raisonnée des syntaxes des commandes recensées plus haut.

Pour apporter des éléments de réponse aux questions précédentes, nous prendrons comme point de référence un problème simple de calcul de volume par des IM repéré dans un manuel étudié dans le chapitre B (l'exemple 3, p. 918, section 5, du manuel SWO). Ce problème est typique d'une partie significative de l'organisation mathématique sur les *IM* dans les institutions étudiées.

Reprenons l'énoncé, que nous reformulons, en remplaçant les égalités par des inégalités, afin de donner sens à la notion de solide en lien avec une représentation analytique. Nous l'appelons, problème de « *la gouttière verticale et les deux plans sécants* ».

Soit Q un solide déterminé par des inéquations $y+z \leq 4$, $0 \leq z$ et $x^2 \leq y$. On cherche la représentation graphique et analytique du solide Q et le calcul de son volume.

Tout d'abord, en nous appuyant sur une **interprétation analytique**, nous montrerons que le solide Q est borné, puisque l'on a des intersections des trois solides (1), (2) et (3) convexes suivants.

$$Q = \begin{cases} 0 \leq z & (1) \\ x^2 \leq y & (2) \\ y + z \leq 4 & (3) \end{cases}$$

Nous utilisons ce problème pour illustrer la technique instrumentée que nous appelons *crible géométrique*.

Commençons donc par démontrer que Q est compact.

On remarquera d'abord, que du fait que toutes les inégalités sont larges, le domaine est fermé. Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'il est borné. De l'addition des inéquations (1) et (3) on déduit $y \leq 4$ et de (2) $x^2 \leq y$ on déduit alors que $-2 \leq x \leq 2$. De plus de (2) $0 \leq y$ donc $0 \leq y \leq 4$. Or, de (3) $z \leq 4 - y \leq 4$ et de (1) $0 \leq z$. Ainsi, Q est inclus dans le cube $[-2, 2] \times [0, 4] \times [0, 4]$, c'est donc un solide borné. Il est effectivement délimité par les trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 que nous représentons analytiquement comme ci-dessous.

$$S_1 = \{(x, y, z) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \eta_1(x, y) = 0\}$$

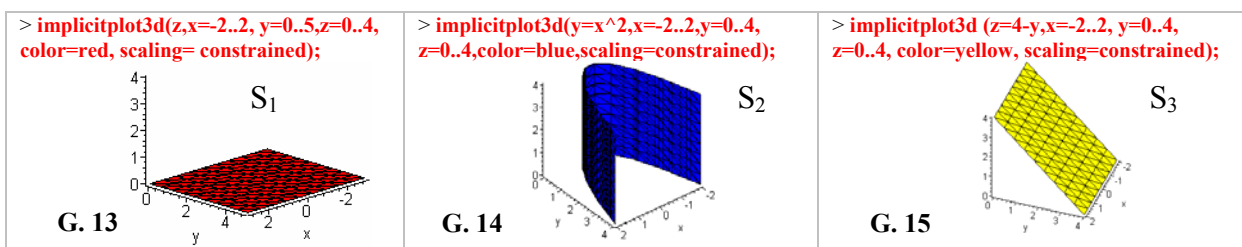
$$S_2 = \{(x, y, z) ; (x, z) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \eta_2(x, z) = x^2\}$$

$$S_3 = \{(x, y, z) ; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \eta_3(x, y) = 4 - y\},$$

dont $z=\eta_1(x,y)$ et $z=\eta_3(x,y)$ sont des fonctions continues sur le plan xOy (sont deux plans sécants). Alors que $y=\eta_2(x,z)$ est une fonction continue du plan- xOz (la gouttière verticale).

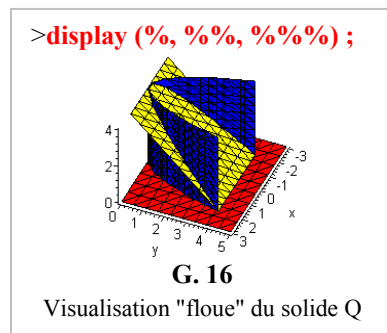
Les représentations graphiques de S_1 , S_2 et S_3

La méthode la plus simple pour la représentation graphique des surfaces d'équations données consiste à l'utilisation des syntaxes (01), (04) et (07). Toutefois, la syntaxe (01) ne répond pas à la solution possible envisagée pour S_2 (effet de la **contrainte fonctionnelle**). Alors que les deux autres permettent la représentation graphique des trois surfaces. Toutefois, on a vu que par l'effet de la **contrainte implicite**, la syntaxe (07) ne permet pas d'isoler le solide Q . Donc pour accomplir la tâche, on doit s'appuyer sur des représentations paramétriques et ensuite utiliser la syntaxe (04). Mais nous commençons par nous servir de la syntaxe (07) (cf. tableau ci-dessous).



En utilisant la commande **display** et la technique de *rappel*, on peut obtenir la représentation graphique de trois surfaces assemblées (cf. G. 16, ci-dessous), où %, %% et %%% contiennent respectivement G.13, G.14 et G.15.

L'affichage des trois surfaces, grâce à cette technique, permet d'abord une visualisation peu convaincante du solide, qui permet toutefois de se persuader que Q est effectivement borné par des morceaux de surfaces des deux plans sécants (**rouge** et **jaune**) et du cylindre (la gouttière **bleue**).



Comme déjà dit plus haut, la difficulté vient de ce qu'il faut conserver uniquement les sous-surfaces de S_1 , S_2 et S_3 qui font le contour de Q .

Quelles sont alors les techniques nécessaires pour aboutir à une représentation graphique isolant ce solide ?

Il n'existe pas dans **Maple** de syntaxes « toutes faites » permettant (de façon immédiate) la construction de tels solides⁵⁴. En effet, **Maple** ne trace pas des solides, mais les surfaces qui les déterminent. Pour arriver à la visualisation effective d'un solide on est amené dans la syntaxe des commandes de **Maple** à introduire des données permettant de limiter les surfaces aux seuls contours du solide intersection. Or la détermination de ces données, est très proche du travail nécessaire à mise en place du calcul de l'intégrale double (ou triple) conduisant au

⁵⁴ On parle ici des solides non classiques.

calcul du volume du solide (notamment dans la détermination des bornes d'intégration). Le travail nécessaire pour permettre de représenter avec **Maple** le solide est donc une aide directe dans la mise en place du calcul de l'intégrale multiple conduisant au calcul du volume. Cette idée nous permet de mettre en place la technique instrumentée que nous allons appeler **crible géométrique** :

Conservation unique des morceaux de surfaces assemblés qui forment le contour du solide en tant qu'objet géométrique borné.

L'objectif explicite de cette technique est d'obtenir la représentation graphique dans **Maple** de solides décrits comme intersection de plusieurs solides.

Voici par la suite la description d'un **crible géométrique** possible pour le problème de « *la gouttière verticale et les deux plans sécants* ».

On remarquera que l'intersection des surfaces S_2 et S_3 donne la courbe $z=4-x^2$ (cf. G. 16). En effet, il est facile de voir (à partir de G. 16) que pour la surface S_2 , z varie de 0 à $4-x^2$ au lieu de 0 à 4 (qui correspond à la hauteur du cube qui contient Q). De plus, les sous-surfaces de S_1 et de S_3 qui délimitent le contour de Q ont le même domaine de définition (la région R du plan xOy) délimité par l'intersection de la surface S_1 avec S_2 et par l'intersection des deux plans sécants. Donc pour la visualisation des surface S_1 et S_3 on prend $-2 \leq x \leq 2$ et $x^2 \leq y \leq 4$. Ainsi, les représentations analytiques des sous-surfaces S_{S1} , S_{S2} et S_{S3} respectivement de S_1 , S_2 et S_3 qui font le contour du solide Q **criblé** sont :

$$\begin{aligned} S_{S1} &= \{(x,y,z) ; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4 \text{ et } \eta_1(x,y)=0\} \\ S_{S2} &= \{(x,y,z) ; -2 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 4 - x^2 \text{ et } \eta_2(x,z)=x^2\} \\ S_{S3} &= \{(x,y,z) ; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4 \text{ et } \eta_3(x,y)=4-y\} \end{aligned}$$

Ainsi, la représentation graphique du solide **criblé** est le résultat de la représentation ensemble de trois sous-surfaces S_{S1} , S_{S2} et S_{S3} .

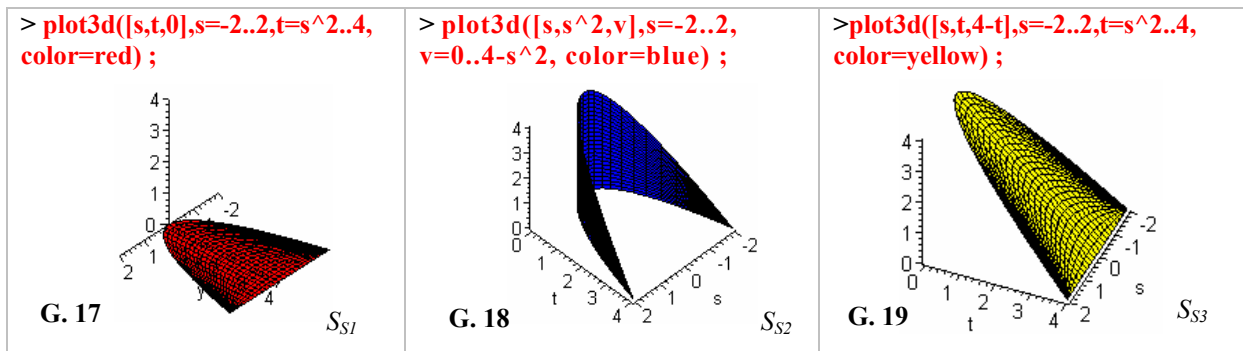
3.7.1 La visualisation graphique du solide criblé.

A noter qu'aucune des trois sous-surfaces ci-dessus n'est définie sur un rectangle. Donc, on ne peut pas continuer à utiliser la syntaxe (07) pour tracer les trois surfaces. Néanmoins, l'effet de la **contrainte implicite** peut entraîner l'utilisateur à une réorganisation du schème d'utilisation. Ainsi, pour tracer les trois surfaces S_{S1} , S_{S2} et S_{S3} on doit passer par leurs représentations paramétriques et ensuite utiliser la syntaxe (04).

$$S_{S1} : \begin{cases} x = \mathcal{A}(s, t) = s \\ y = \mathcal{B}(s, t) = t, -2 \leq s \leq 2, s^2 \leq t \leq 4, \\ z = \mathcal{C}(s, t) = 0 \end{cases}, \quad S_{S2} : \begin{cases} x = \mathcal{A}(s, v) = s \\ y = \mathcal{B}(s, v) = s^2, -2 \leq s \leq 2, 0 \leq v \leq 4 - s^2 \\ z = \mathcal{C}(s, v) = v \end{cases}$$

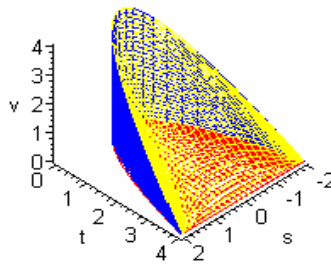
$$S_{S3} : \begin{cases} x = \mathcal{A}(s, t) = s \\ y = \mathcal{B}(s, t) = t, -2 \leq s \leq 2, s^2 \leq t \leq 4 \\ z = \mathcal{C}(s, t) = 4 - t \end{cases}$$

Le tableau ci-dessous donne les registres d'écritures paramétrées en ligne selon la syntaxe (04) et les registres graphiques de S_{S1} , S_{S2} et S_{S3} pour les résultats retournés par **Maple**. Nous ne prendrons pas en compte les erreurs possibles des syntaxes.



L'affichage ensemble des trois sous-surfaces à l'aide de la technique de *rappel* donne la représentation graphique du solide **criblé** (cf. G. 20) ci-dessous, où %, %% et %%% font référence respectivement à G.17, G.18 et G.19.

```
> display(% , %% , %%% , labels[s,t,v], scaling= constrained);
```



G. 20

On voit bien que les bornes $-2 \leq s \leq 2$; $x^2 \leq t \leq 4$ et $0 \leq v \leq 4 - x^2$ des surfaces paramétrées que l'on a entrées dans **Maple**, correspondent respectivement aux bornes $-2 \leq x \leq 2$; $x^2 \leq y \leq 4$ et $0 \leq z \leq 4 - x^2$ (ce qui revient au même que $0 \leq z \leq 4 - y$, puisque $y = x^2$) du solide **criblé** (cf. G. 20).

Donc, le solide **criblé** est sous la surface $z = 4 - y$ et sur le domaine $\{(x, y); -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$, peut être représenté analytiquement par :

$$Q = \{(x, y, z); -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - y\}.$$

Cette représentation comporte des éléments importants pour la mise en place de l'écriture algébrique du calcul d'une *intégrale double* ou triple permettant le calcul du volume du solide.

3.7.2 Du criblé géométrique au calcul d'intégrale

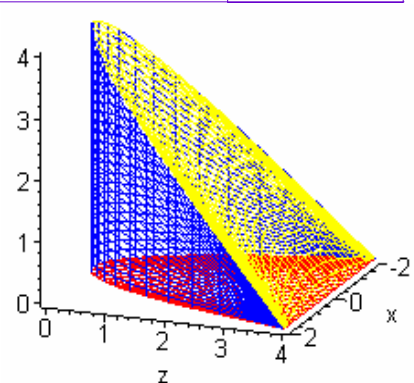
Le travail préliminaire de la représentation graphique du solide **criblé** peut être réinvesti dans la mise en place du calcul du volume de ce solide par une intégrale double ou triple.

Reprenons les instructions qui aboutissent à la représentation graphique du solide **criblé**.

```
(SS2)> plot3d([x,x^2,z], x=-2..2, z=0..4-x^2, color=blue):
(SS3)> plot3d([x,y,4-y], x=-2..2, y=x^2..4, color=yellow):
(SS3)> plot3d([x, y, 0], x=-2..2, y=x^2..4, color=red):
(Q) > display(S11, S21, S31, scaling=constrained);
```

un contrôle *
 $Z=4-x^2=4-y$

$Q = \{(x,y,z) : -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4-y\}$



La représentation analytique du solide **criblé**

↓

La mise en place du calcul de l'intégrale triple

```
Tripleint(1, z=0..4-y, y=x^2..4, x=-2..2);
```

$$V_Q = \int_{-2}^2 \int_x^4 \int_0^{4-y} 1 \, dz \, dy \, dx$$

Les calculs doivent produire

$V_Q = \frac{256}{15}$

On voit bien que le travail nécessaire à la représentation graphique du solide **criblé** par *Maple* est lié à une représentation analytique mise en évidence dans la description du **crible**. L'utilisateur a un travail préliminaire à faire, non seulement pour arriver à cribler le solide, mais aussi pour avoir (au moins implicitement) une représentation analytique adéquate. Car les données que l'on entre dans la syntaxe de la commande du logiciel pour voir le solide permettent un contrôle à la fois graphique et analytique du domaine d'intégration, comme le montrent aussi les liens soulignés par les flèches.

La technique **crible géométrique** couvre donc une importance particulière dans la **conversion** des registres et renforce la **coordination** entre les registres **graphique, analytique et d'écriture algébrique d'intégration**.

* Ce contrôle est justifié par le fait que ce que l'on trace dans *Maple* ce sont des surfaces (le contour du solide), donc z varie entre les courbes d'intersection de la gouttière et les deux plans. Alors que ce que l'on calcul par des *IM* ce le volume. Dans ce z varie entre les deux plans sécants.

Le solide ci-dessus peut aussi être interprété comme un solide sous une surface, et le calcul de son volume se ramène alors au calcul d'une intégrale double. Dans ce cas, une surface et une région d'intégration doivent être repérées. Par exemple, la surface (jaune) d'équation $z=f(x,y)=4-y$ et la région d'intégration représentée par $R=\{(x,y) ; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$. Ainsi, l'utilisation de $\iint_R f(x,y)dydx$ doit conduire au même résultat que ci-dessus. On peut aussi utiliser les techniques d'intégrales simples. En effet, une section par un plan perpendiculaire à l'axe-Ox et pour x compris entre -2 et 2 est un triangle d'aire $A(x)=8-4x^2+\frac{x^4}{2}$. Le volume du solide en question est donc l'intégrale simple $V = \int_{-2}^2 A(x)dx = 2 \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \frac{256}{15}$.

3.7.3 Interprétation du problème : « la gouttière verticale et les deux plans sécants »

On a vu que dans *Maple* un solide **criblé** est déterminé par les morceaux des surfaces qui forment son contour. A priori, la construction d'un tel solide nécessite des connaissances de géométrie analytique dans l'espace, à la fois sur la représentation graphique et sur la représentation analytique (soit par des fonctions de deux variables, soit par des équations

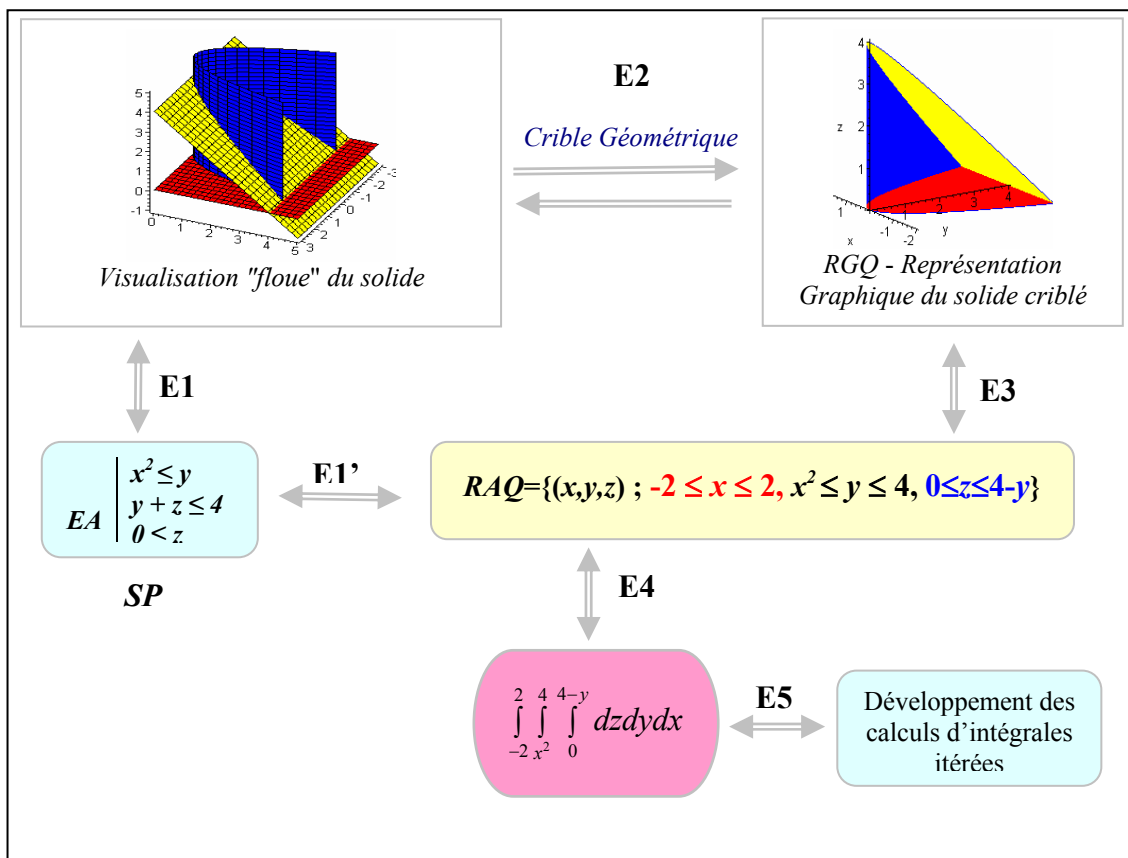


Schéma d'interprétation du problème : la gouttière verticale et les deux plans sécants

paramétriques). L'utilisateur doit développer des compétences sur l'utilisation du logiciel, le rôle que peuvent jouer ses outils dans la construction de schèmes d'utilisation.

Le tableau ci-dessus, regroupe cinq étapes essentielles du traitement du problème. Il comporte

un schéma permettant d'examiner les interactions possibles entre l'utilisateur et la machine, dans l'organisation et la mise en œuvre des sous-tâches associées.

L'étape (*E1*) s'outille de deux possibilités offertes par le logiciel : la syntaxe (04) et la syntaxe (07), en faisant intervenir les techniques nécessaires pour représenter conjointement des solides. C'est une étape primordiale dans la construction de schèmes d'utilisation.

L'étape (*E2*) apparaît comme la plus difficile : le **crible géométrique**. On a vu que dans cette étape, la syntaxe (07) est insuffisante (présence de la contrainte **implicite**) dans la construction du schème d'utilisation du **crible**. Mais, cette contrainte entraîne une réorganisation du schème d'utilisation, passant par la représentation paramétrique des équations des surfaces pour s'outiller de la syntaxe (04) de représentation.

Or, le **crible géométrique** permet de visualiser le solide **criblé** en plaçant dans la syntaxe du logiciel les bornes qui correspondent aux bornes du calcul de l'intégrale *double* ou *triple*. Donc, la description du **crible**, consiste à la fois, à l'organisation des sous-surfaces qui forment le contour du solide **criblé** et à la détermination de bornes d'intégrations pris en compte dans la représentation analytique du solide Q , l'étape (*E3*) mettant en évidence les liens entre les deux registres (Graphique et analytique).

La représentation graphique joue donc un rôle important, dans la mesure où elle est un élément qui peut permettre un contrôle visuel du domaine d'intégration, ainsi qu'une validation d'ordre graphique des expressions instrumentées dans **Maple**. Ce dernier pourra modifier le rapport entre les deux registres de représentation. C'est-à-dire que **Maple** va intervenir sur la représentation graphique et sur le lien qu'elle a avec la représentation analytique et l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale (*E4*) conduisant au développement des calculs (*E5*).

Ainsi, la coordination effective entre les représentations analytique et graphique d'un solide est (directement ou indirectement) liée au rapport existant entre la représentation analytique et le calcul d'une intégrale multiple. Donc l'étape *E2* et l'étape *E3* permettent de tester l'adéquation d'une représentation graphique par rapport à la représentation analytique aboutissant au calcul de l'intégrale double, ou triple (*E4* et *E5*). On peut donc caractériser ces deux étapes (*E2* et *E3*) comme représentant des moyens de contrôle et de validation ou encore de réfutation du résultat d'étapes dans le calcul d'une *intégrale multiple*.

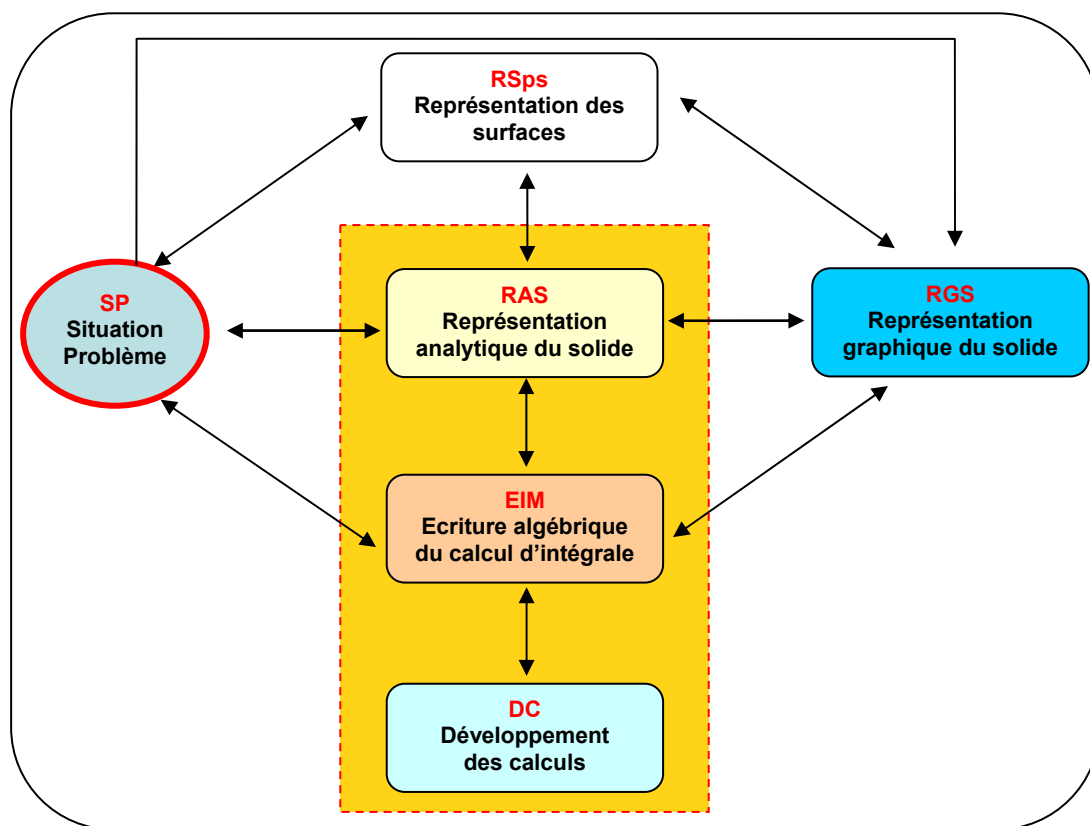
4. LE MODELE MATIM

Le schéma d'interprétation du problème précédent « *la gouttière et les deux plans sécants* » peut être généralisé pour l'analyse d'un grand nombre de tâches de calcul de volumes par des *IM*. Nous proposons ainsi le modèle ci-dessous que nous appelons **MATIM** (**M**odèle pour l'**A**nalyse des **T**âches autour de calculs des *IM*) qui lie l'analyse de la résolution d'un problème de calcul de volume par des *IM* à celle de la représentation graphique du solide associé. Il s'agit de mettre en évidence la multiplicité des sous-tâches possibles dans un problème de calcul de volume par des *IM* et de repérer les choix réalisables par un étudiant.

Où :

- ▶ **SP** : indique une situation problème autour des *IM* ;
- ▶ **RSps** : indique la représentation de surfaces (soit analytique – par des fonctions de deux variables, ou par des équations paramétriques -, soit graphique) ;
- ▶ **RAS** : indique la représentation analytique du solide **criblé** ou d'un de ses morceaux (en cas de symétrie) ;
- ▶ **RGS** : indique la représentation graphique du solide **criblé** ;
- ▶ **EIM** : indique une écriture algébrique du calcul d'une intégrale multiple ;
- ▶ **DC** : Développement des calculs conduisant au calcul du volume du solide **criblé**.

Ce schéma est globalement inscrit dans un environnement de l'apprentissage comportant l'ensemble des conditions qui interviennent dans le traitement des tâches, en particulier les potentialités et les contraintes d'un environnement informatique.



Modèle pour l'Analyse des Tâches autour du calcul des Intégrales Multiples - MATIM

Chaque extrémité d'une flèche représente une sous-tâche⁵⁵ (sauf **SP**) que l'on peut regrouper par les étapes possibles de traitement du problème (**SP**) décrites comme suit :

Etape E1 : Passage [**SP**] ↔ [**RSps**] : consiste en la représentation analytique des surfaces (soit par des fonctions de deux variables, soit par des équations paramétriques) et la représentation graphique dans *Maple*, en utilisant correctement les syntaxes adéquates. Cette étape est un passage essentiel lors de l'apprentissage des outils du logiciel (dans le domaine de représentation graphique en 3D dans *Maple*). On peut

⁵⁵ La flèche à deux sens dans le schéma exprime une correspondance entre deux objets concernés.

dire qu'ici prédominent les premières transformations des objets mathématiques en jeu et le choix d'outils appropriés au traitement du problème à travers l'analyse des conditions des constructions de schèmes d'utilisation. Dans cette analyse, les connaissances d'objets mathématiques en jeu et d'utilisation du logiciel jouent un rôle important.

Etape E2 : Passage [RSps] \Leftrightarrow [RGS] : c'est le passage le plus difficile : *Conservation unique des morceaux de surfaces assemblés qui forment le contour du solide borné* : le **crible géométrique**.

Etape E3 : Cette étape rassemble les sous-tâches ([RAS], [EIM] et [DC]) et suggère un certain nombre de choix pour l'acquisition des données (les bornes d'intégration), notamment les choix selon les passages :

[RGS] \Leftrightarrow [RAS] \Leftrightarrow [EIM], car le **crible géométrique** fait produire les données que l'on entre dans les syntaxes du logiciel qui correspondent aux bornes d'intégration, ces dernières jouent un rôle important dans la mise en place de l'écriture algébrique du calcul d'intégrale [EIM]. Ce passage est complexe, car il comporte les moyens de contrôle et de validation ou encore de réfutation du résultat du calcul d'intégrale. Ce passage met en évidence les liens possibles entre les deux registres (Graphique et analytique) de représentation. Par ailleurs, *Maple* joue un rôle important car il permet de tester l'adéquation d'une représentation graphique par rapport à la représentation analytique, aboutissant au calcul de l'intégrale multiple.

[RSps] \Leftrightarrow [RAS] \Leftrightarrow [EIM], l'utilisateur pourra donner une représentation analytique du solide **criblé** sans le représenter graphiquement, en dégageant ainsi à partir de la représentation des surfaces rassemblées, les bornes d'intervalle de variation des variables ou des paramètres en jeu. Ces bornes donneront du même coup les bornes d'intégration, utiles à la mise en place de [EIM] l'écriture algébrique du calcul d'intégrale conduisant au calcul de volume.

[SP] \Leftrightarrow [RAS] \Leftrightarrow [EIM], la représentation analytique correcte du solide à partir de la situation problème peut-être une tâche difficile. Ce choix correspond à la stratégie « S1 » de l'**interprétation analytique** menée dans l'analyse des exercices proposés dans notre pré-expérimentation.

[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM], ce passage est celui que l'on trouve développé le plus souvent dans les manuels. Dans ce cas, les solides sont surtout décrits par des surfaces (souvent appelées graphiques des fonctions ou des équations). Ceci correspond à la stratégie « S3 » qui s'appuie sur une **représentation graphique** menée dans l'analyse des exercices proposés dans notre pré-expérimentation.

[RSps] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM], ce passage apparaît aussi dans les manuels, il n'aborde pas la représentation analytique du solide [RAS]. Donc, ici les liens entre

RGS et RAS, sont implicitement liés aux techniques d'intégration.

[SP] \Leftrightarrow [EIM], ce passage pourra entraîner une **interprétation géométrique** du solide (cf. stratégie « S2 » pré-expérimentation). De plus, l'interprétation de ce passage dans les deux sens pourra entraîner la validation des composantes (fonction et bornes) mises en forme dans l'écriture algébrique du calcul d'intégrale en les confrontant avec les éléments de départ (retour à la situation problème). Dans les cas les plus simples, ce passage pourra être autonome par la mise en place du calcul de l'intégrale, conduisant au calcul de volume.

Voilà la multiplicité des sous-tâches essentielles dans l'interaction d'un utilisateur avec les différents types de tâches autour des *IM*. Un environnement informatique comme **Maple** peut être un outil favorable à l'utilisateur dans cette multiplicité.

Dans l'environnement *papier/crayon*, en général l'analyse est centrée sur un objet solide fixe, et on se limite à cet objet tracé sur le papier. Alors que dans un environnement informatique, comme **Maple**, on peut manipuler cet objet, ayant un point de vue plus général, en ne le regardant pas seulement de façon isolée, mais sous différents angles à l'aide de la manipulation directe ou de l'animation en temps réel.

De l'étude du logiciel Maple à l'analyse de manuels pour son utilisation dans l'enseignement

Nous venons d'étudier les outils du logiciel **Maple**, essentiels pour une utilisation de cet environnement dans l'enseignement et l'apprentissage des *IM*, mettant en évidence les liens possibles entre une représentation graphique d'un solide (domaine d'intégration) et la représentation analytique associée, indispensable dans le calcul d'une intégrale multiple. Nous avons ainsi dégagé des potentialités, mais aussi des contraintes, de l'environnement **Maple**.

Or, on a vu précédemment que, l'utilisation des outils informatiques, notamment du logiciel **Maple**, est institutionnellement incitée par les programmes de CPGE où vivent les *IM*.

Notre analyse écologique des deux manuels (SWO et SPIE) menée plus haut, nous a permis de constater que l'utilisation des représentations graphiques (produites par ordinateur) est souvent présente dans ces manuels, tant au niveau *logos*, qu'au niveau des problèmes résolus, sans explication de la façon dont telles représentations ont été produites.

Ainsi il nous semble important d'étudier, comment l'enseignement des *IM* est pris en compte par des auteurs des **manuels d'utilisation du dit logiciel** ? Qu'apportent ces manuels dans l'enseignement des *IM* dans l'institution qui nous concerne en France ?

PARTIE D2 ANALYSE DES MANUELS D'UTILISATION DU LOGICIEL MAPLE

Pour mener cette étude nous avons sélectionné les deux manuels d'utilisation de *Maple* très répandus dans les CPGE. Le tableau ci-dessous, présente les références précises de ces manuels. Comme précédemment **P** indique le nombre total de pages du manuel.

Codes associés	Références des Manuels à étudier Titre, auteur, édition, éditeur, année d'édition	P
LION	<i>Maple : Cours et applications</i> . MPSI – PCSI – PTSI – MP – PSI – PC – PT. PORCHERON Lionel. 2 ^e édition. Dunod, Paris, 2004.	340
LEVI	<i>Exercices pour Maple</i> . LEVINE Albert. Edition Marketing – Ellipses, Paris 1995.	286

Tableau 8 : Les manuels d'utilisation de *Maple* dans les CPGE

Nous concentrons notre attention sur :

- Les sous-titres présentant l'objet de l'enseignement ;
- les concepts mis en évidence comme préliminaires ;
- les techniques instrumentées ;
- le lien entre une intégrale multiple et le calcul de volume d'un solide (quelles techniques instrumentées pour les IM ?) ;
- les types de représentations des solides utilisés et les liens entre eux ;
- le rapport mis en évidence entre solide et surface ;
- les types de tâches, techniques, technologies et théories.

Nous commençons par une synthèse d'analyse « structurelle » du manuel LION.

1. ANALYSE « STRUCTURELLE » DU MANUEL LION

Cet ouvrage est la deuxième édition proposée pour l'enseignement basé sur l'utilisation d'un logiciel de calcul formel. Sa structure comprend : une *préface*, une *table des matières*, un *avant-propos* et une page de *conventions typographiques et 10 chapitres*.

Chapitre	Sujet	Sections	Pages
01	Application	05	14
02	Les objets Maple	06	10
03	Analyse	04	32
04	Algèbre Linéaire	03	20
05	Affectation, évaluation, simplification	02	12
06	Structure Maple	07	28
07	Résolution d'équation	05	18
08	Le graphisme	06	36
09	La programmation	04	30
10	Application	05	72
Annexes		--	60
Index			06

Tableau 9 : Table des matières du manuel LION

Chaque chapitre est divisé en sections (de deux à sept avec une moyenne de quatre sections, cf. tableau ci-dessus). A l'exception des chapitres 1 et 2 qui ne contiennent que les 2 premières rubriques ci-dessous et du chapitre 10 qui ne contient que la première, chaque chapitre est organisé selon le plan suivant :

- **Sections contenant les cours**
- **Essentiel**
- **Exercices**
- **Solution des exercices**

D'après l'auteur, le but du « *cours* » dans tout le manuel est de faire apprendre à l'utilisateur comment se servir de **Maple**. Certaines *fonctions* et *commandes Maple* sont enseignées en mettant en évidence la différence entre ces deux objets. Ainsi l'auteur précise :

- Les *commandes* ne possèdent pas d'argument, c'est le cas de *quit*, *done*, etc.
- Une *fonction* admet au moins un argument, comme la fonction *sinus* qui devient dans **Maple** *sin (x)* où *x* est l'argument.

Dans chaque section, la partie « *cours* » se développe sur la base d'utilisations des *commandes* et des *fonctions* du logiciel en mettant l'accent sur les exemples qui sont des exercices résolus dans le « *cours* ».

La partie « *essentiel* » comporte un résumé du cours considéré comme « l'essentiel du chapitre à retenir pour comprendre la suite ».

Les *exercices* proposés se trouvent systématiquement à la fin de chaque section. Ils sont regroupés en deux paquets, les exercices eux-mêmes et les résolutions associées. Par un jeu de symboles expliqués en début de manuel, l'auteur distingue trois niveaux :

- **exercices faciles**
- **exercices de difficulté moyenne**
- **exercices un peu plus délicats.**

Comme pour le manuel SWO, on peut dire que les exercices sont faits pour permettre à l'étudiant de stabiliser les connaissances acquises et de maîtriser l'utilité des *fonctions* et des *commandes Maple*.

A noter que l'accent mis par les programmes d'informatique du tronc commun sur « la connaissance de la liste exhaustive des *fonctions* prédéfinies » que l'on peut comprendre ici comme « la liste des *fonctions* ou des *commandes Maple* » est tout à fait prise en compte dans ce manuel, quand l'auteur souligne :

Le but de ce manuel est de vous faire apprendre à vous servir de **Maple**. Mais **Maple** est un logiciel extrêmement vaste et complexe qui comporte pas moins de 2500 fonctions. Il n'est donc bien sûr pas possible de toutes les présenter... Nous allons donc vous faire apprendre les fonctions de base et surtout comment devenir autonome en manipulant l'aide en ligne de **Maple** qui est très complète et, il faut le reconnaître, fort bien faite ... L'aide **Maple** est extrêmement importante ; en effet aucun livre sur **Maple** (et pas même le manuel diffusé avec le logiciel) ne décrit les 2500 fonctions qui composent le système. Quand on veut des renseignements précis sur une fonction peu connue, il faut donc se rabattre sur l'aide de **Maple**. Pour activer cette aide, plusieurs possibilités s'offrent à vous.

Maple offre donc plusieurs possibilités pour son utilisation dans l'enseignement. Notre intérêt est essentiellement de savoir parmi ces possibilités, ce qu'apporte ce manuel par rapport à l'organisation mathématique dégagée plus haut ? Ceci nous conduit particulièrement à l'étude des sujets relatifs aux domaines de **l'analyse mathématique** et des **représentations graphiques** proposées dans les chapitres 3 et 8, respectivement.

1.1 Organisation et analyse du chapitre 3 du manuel LION Quelles techniques pour le calcul d'intégrales ?

Le chapitre 3 est consacré à l'enseignement de **l'analyse mathématique** avec l'aide de **Maple**. Il est organisé de la façon suivante :

Section	Sous-titre	Déf	Thé	Com	Fon	Ex	Exo	Syn
1.	Calculs sur les entiers et les nombres réels	0	0	0	0	0	0	0
1.1	Calculs sur les nombres réels	0	0	0	11	28	-	5
1.2	Calculs sur les entiers	0	0	0	5	5	-	5
1.3	Nombres premiers	0	0	0	3	4	-	3
1.4	Analyse combinatoire	0	0	0	3	5	-	3
1.5	Sommation	0	0	0	1	5	-	1
1.6	Produit	0	0	0	1	2	-	1
1.7	Changement des bases	0	0	0	2	2	-	2
2.	Nombres complexes	0	0	0	8	12	-	11
3.	Fonctions numériques	0	0	0	6	13	-	7
3.1	Dérivation	0	0	0	2	14	-	3
3.2	Limites	0	0	0	1	4	-	1
3.3	Intégration	0	0	0	8	7	-	7
3.4	Développements limités et asymptotiques	0	0	0	3	5	-	3
3.5	Fonctions spéciales	0	0	0	3	2	-	3
4.	Expressions symboliques	0	0	0	0	0	0	0
4.1	Polynômes	0	0	0	16	23	-	18
4.2	Fractions rationnelles	1	0	0	7	12	-	8
	L'essentiel	-	-	-	17	-	-	-
	Exercices	-	-	-	-	-	5	-
	Solutions des exercices	-	-	-	-	-	5	-

Déf = Définitions, Théo = Théorèmes, Com = commande, Fon = Fonction, Ex = Exemples, Exo = Exercices, Syn = Syntaxe.

Tableau 10 : Organisation du chapitre 3 du manuel LION

Comme le montre le tableau 3, le chapitre sur *l'analyse* avec **Maple** ne contient pas les définitions et les théorèmes mathématiques des sujets étudiés. Les *commandes* (comme définies plus haut) n'apparaissent pas dans ce chapitre. L'enseignement s'est donc fait à la base des *fonctions Maple* que l'on peut nommer «outils techniques ou artefacts»⁵⁶. Les utilisations possibles de ces *fonctions* dans le travail mathématique se manifestent à travers des exemples (ou situations) qui sont des exercices résolus mettant en évidence les parties visibles (les ostensifs) manipulées par le logiciel et leurs résultats (ostensifs) conformément aux usages mathématiques.

⁵⁶ Au sens de Rabardel. En fait, ce que l'auteur appelle ici de « *fonction Maple* » ce sont des **commandes** (selon notre étude précédente) désignant l'outil (artefact) comme moyen d'action instrumentée. En effet, comme nous verrons dans la suite, c'est dans ce sens que l'auteur utilise ce qu'il appelle « *fonction Maple* ».

1.2 Section 3.3 du chapitre 3 : Intégration

La sous-section 3.3 qui nous intéresse dans ce chapitre correspond à l'étude de l'**intégration**. Il comporte 8 *fonctions Maple*, 7 exemples et 7 *syntaxes*.

Pour introduire cette étude dans *Maple* l'auteur commence par l'utilisation de la *fonction Maple* nommée **int**. Il procède comme suit :

Pour intégrer une expression, on utilise la *fonction int*. Cette même *fonction* va également permettre de trouver une primitive de cette expression en n'indiquant pas de bornes d'intégration. Il y a donc deux *syntaxes* pour la *fonction int* :

> **int (expression, var) ;** (pour trouver une primitive d'une expression)

> **int (expression, var=a..b) ;** (pour intégrer une expression entre a et b)

Par exemple (01 et 02) :

> **int (2*x^2 + 3*cos (x) + ln(x/(x+1)), x) ;** (exemple (01))

$$\frac{2}{3}x^3 + 3 \sin(x) + \ln\left(-\frac{1}{x+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)\left(1 - \frac{1}{x+1}\right)(x+1)$$

On peut remarquer que *Maple* ne rajoute pas de constante d'intégration afin de simplifier l'expression finale. On peut aussi, comme on l'a dit, intégrer entre deux bornes *a* et *b*.

>**int (cos (x) + sin(ln(x)), x=0..10) ;** (exemple (02))

$$\sin(10) + 5\sin(\ln(2)+\ln(5)) - 5\cos(\ln(2)+\ln(5))$$

Pour obtenir la valeur approchée du résultat ci-dessus l'auteur donne la *fonction Maple* nommée **evalf**, selon la *syntaxe* suivante, suivie du résultat pour l'intégrale précédente :

>**evalf(%);**

$$6.516888125$$

L'auteur parle ensuite d'**intégrales généralisées** dans *Maple*. Pour illustrer cette possibilité, il donne le troisième (03) exemple dans lequel il considère l'intégrale de **sin(x)** pour *x* variant de 0 à l'infini. C'est donc un exemple simple d'application de la deuxième *syntaxe* donnée au départ. Puis, il précise que lorsque *Maple* ne réussit pas à calculer une intégrale, il renvoie la forme inerte (correspondant à une écriture algébrique du calcul de l'intégrale en question)⁵⁷. Cette observation est illustrée par l'exemple (04) qui consiste à calculer l'intégrale de l'expression $1/(1-x)$ pour $x \in [0, 2]$. L'exemple (05) illustre la possibilité d'afficher la forme inerte d'une intégrale souhaitée, quand on entre la *fonction Int* (**i** majuscule). Dans ce cas, l'auteur souligne tout de suite que l'on peut obtenir la valeur de l'intégrale ainsi affichée en utilisant la *fonction value* selon la *syntaxe* suivante :

>**value(%);**

Puis, en se référant au package **student**, l'auteur s'intéresse à l'*intégration par partie* et aux *changements de variables*. Tout d'abord, il développe la démarche suivante relative à ces dernières :

Le Package **student** offre, entre autres, deux *fonctions* (**intparts** et **changevar**) qui permettent de changer de variable et d'intégrer par parties.

Par exemple :

⁵⁷ C'est nous qui soulignons.

> **J :=Int (ln(x),x) ;** exemple (06)
 $J := \int \ln(x) dx$

On effectue un changement de variable avec la fonction **changevar** du package **student** :

>**changevar (var=expression, intégrale, var) ;**

On commence donc par charger le package **student** :

> **with (student) ;**

> **changevar (u=ln(x), J, u) ;**

$$\int ue^u du$$

On demande alors à **Maple** la valeur de cette primitive :

>**value(%);**

$$ue^u - e^u$$

Ensuite on renvient à nos variables d'origine à l'aide de la *fonction subs* :

>**subs(u=ln(x), %);**

$$\ln(x)e^{\ln(x)} - e^{\ln(x)}$$

et on simplifie le résultat à l'aide de la *fonction simplify* :

>**simplify (%);**

$$\ln(x)x - x$$

Ensuite il traite de l'*intégration par parties* :

On peut réaliser une intégration par parties à l'aide de la *fonction intparts* du package **student** :

> **intparts (intégrale, expression à dériver) ;**

On précise l'expression à dériver, c'est-à-dire u dans la formule de l'intégration par parties :

$$\int uv' = [uv] - \int u'v.$$

Ceci est illustré par un exemple (07) qui est une reprise du calcul de l'intégrale J de l'exemple (06) étudié ci-dessus. Ainsi se termine la section 3.3.

Comme on peut le voir, la rédaction du cours relative à l'étude de l'*intégration* dans **Maple** est assez succincte. L'entrée dans la notion d'*intégrales* s'est faite à partir de la présentation de la *fonction Maple* nommée **int**, sans évocation d'aucune des définitions mathématiques des intégrales. Le cours évolue sur la base de certaines techniques d'intégration en se limitant aux exemples des fonctions d'une variable réelle donc, à l'étude des intégrales simples. En effet, l'auteur n'introduit aucune application portant sur la notion d'*IM*. Il n'y a rien dans ce manuel relatif à l'enseignement des *IM*. L'organisation proposée dans ce manuel sur l'usage du logiciel **Maple** dans l'enseignement de l'analyse ne couvre pas celle dégagée précédemment dans d'étude des manuels d'analyse mathématique.

Passons à présent au chapitre 8 réservé à l'étude du *graphisme* dans le plan et dans l'espace.

1.3 Organisation et analyse du chapitre 8 du manuel LION Quelles techniques pour les représentations des solides ?

Le chapitre 8 est destiné à la **représentation graphique** dans **Maple**. Il est organisé selon le tableau ci-dessous. Nous l'étudierons en détail section par section.

1.3.1 Section 8.1 : Courbes du plan

La section 8.1 s'intitule **Courbes du plan** et comporte 4 fonctions, 11 exemples et 8 syntaxes. Pour introduire l'étude des **Courbes**, l'auteur commence par l'utilisation de la *fonction Maple* nommée **plot** et procède comme suit :

La première *fonction* à connaître quand on veut faire un graphique est **plot**, toutes les autres fonctions que nous verrons par la suite dérivant de celle-ci. La *syntaxe* de la *fonction plot* est :

>plot (expression (var), var=min..max, options) ;

L'auteur s'intéresse d'abord aux tracés de courbes en **coordonnées cartésiennes**. Pour ce faire, il donne cinq exemples (01, 02, 03, 04 et 05) de représentation graphique d'expressions de fonctions d'une variable. Ce sont des exemples simples qui permettent de jouer sur les intervalles (appelées *range*) de variations des variables concernées.

Section	Sous-titre	Déf	Com	Fon	Ex	Sol	Exo	Syn
1.	Courbes du plan	0	0	1	0	-	-	1
1.1	Coordonnées cartésiennes	0	0	2	10	-	-	5
1.2	Coordonnées polaires	1	0	1	1	-	-	2
2.	Surfaces dans l'espace	0	0	1	0	0	-	0
2.1	Coordonnées cartésiennes	0	0	0	2	0	-	2
2.2	Coordonnées cylindriques (cylindro-polaires)	1	2	0	2	0	-	3
2.3	Coordonnées sphériques	1	2	0	2	0	-	3
3.	Les options des graphiques	0	0	0	0	0	-	-
3.1	Pour un graphique en 2D	0	0	0	10	-	-	-
3.2	Pour un graphique en 3D	0	0	1	10	0	-	-
4.	Animations	0	0	1	3	0	-	2
5.	Graphiques spéciaux	0	0	9	8	0	-	8
6.	La géométrie	0	0	0	0	0	-	0
6.1	Définition et manipulation des objets géom.	0	0	8	13	0	-	15
6.2	Tests sur les objets géométriques	0	0	6	5	0	-	2
	L'essentiel	-	-	3	-	0	-	-
	Exercices	-	-	-	-	0	5	-
	Solutions des exercices	-	-	-	-	0	5	-

Déf = Définitions, Com = commande, Fon = Fonction, Ex = Exemples, Sol = Solide, Exo = Exercices, Syn = Syntaxe.

Tableau 11 : Organisation du chapitre de Graphisme

Ensuite, l'auteur s'intéresse aux tracés des courbes paramétrées en donnant la syntaxe ci-dessous.

Pour tracer une courbe paramétrée, il faut entrer :

>plot ([x(t),y(t), t=min..max], options) ;

$x(t)$ est l'équation qui décrit l'abscisse en fonction du paramètre, $y(t)$ est l'équation qui décrit l'ordonnée en fonction du paramètre, puis intervient le *range* du paramètre.

Suit un exemple (6) qui consiste à tracer une courbe de *Lissajous* d'équations $x(t)=\sin(2t)$ et $y(t)=\cos(5t)$ où $t \in [0, 2\pi]$.

On trouve par la suite les tracés simultanés de plusieurs courbes. En faisant référence à la *fonction Maple* nommée **display** l'auteur souligne :

On peut afficher simultanément plusieurs graphiques grâce à la *fonction display* :

> display(plot₁, plot₂, ..., plot_n, options) ;

> display([plot₁, plot₂, ..., plot_n], options) ;

> display({plot₁, plot₂, ..., plot_n}, options) ;

Où plot_n a une structure de **plot**.

Suivent deux exemples (07 et 08) de tracé de courbes dans le plan permettant de « valider » les *syntaxes* ci-dessus.

Vient ensuite la présentation de l'outil qui permet de tracer les courbes des fonctions définies

implicitement :

Toutes les fonctions considérées jusqu'à présent étaient de la forme $y=f(x)$. **Maple** permet aussi de représenter des fonctions de type $f(x,y)=0$ à l'aide de la fonction **implicitplot** qui fait partie du package **plots** – qu'il faut donc charger.

La représentation des fonctions définies par $f(x,y)=0$ s'obtient par :

>**implicitplot (expression, x=min..max, y=min..max, options) ;**

Cette syntaxe est suivie par deux exemples (09 et 10) simples de représentation graphique de fonctions définies de façon implicite.

L'auteur s'intéresse ensuite aux tracés de courbes en **coordonnées polaires**. En s'appuyant sur la figure que nous reproduisons ci-après il rappelle les liens possibles entre les points de coordonnées cartésiennes et polaires en soulignant :

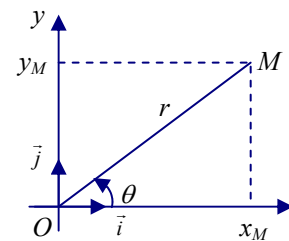
On rappelle qu'en coordonnées polaires, le point M de coordonnées (x,y) est repéré par son rayon polaire r et l'angle polaire θ définie par :

$$\begin{cases} r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})[2\pi] \text{ si } M \neq O \end{cases}$$

Le tracé d'une courbe en coordonnées polaires s'obtient par :

> **polarplot(r(theta), theta=min..max, options) ;**

> **plot(r(theta), theta=min..max, coords=polar, options) ;**



Suit un exemple (11) qui consiste à tracer la courbe de $\sin(2\theta/3)$, pour $\theta \in [-3\pi, 3\pi]$. Ainsi se termine l'étude des courbes planes.

Viennent ensuite les tracés des surfaces dans l'espace de dimension trois.

1.3.2 Section 8.2 : Surfaces dans l'espace

La section 8.2 s'intitule **Surfaces dans l'espace** et comporte 2 définitions, 4 commandes, 6 exemples et 8 syntaxes. Pour démarrer cette étude l'auteur montre l'utilisation de la fonction **Maple** nommée **plot3d**, en procédant comme suit :

Tout comme il existait une fonction **plot** en deux dimensions qui servait à générer la quasi-totalité des graphiques, il existe en 3D la fonction **plot3d**, qui permet de générer la plupart des graphiques en trois dimensions.

Comme pour le cas des courbes planes, l'auteur s'intéresse d'abord aux tracés des surfaces en **coordonnées cartésiennes**. Il donne l'outil qu'il appelle « *syntaxe générale* »⁵⁸ en précisant :

On cherche ici à représenter une expression de la forme $z=f(x,y)$.

Syntaxe générale d'un graphique en 3D

>**plot3d (expression (x,y), x=min₁..max₁, y=min₂..max₂, options) ;**

Un seul exemple (01) simple suit cette syntaxe. Il consiste à tracer le graphique de la fonction $f(x,y)=\cos(x^2+y^2)\sin(x)$ pour $x \in [-2,2]$ et $y \in [-2,2]$.

Viennent ensuite les tracés des surfaces paramétrées. Pour cela l'auteur souligne :

On peut aussi réaliser des nappes paramétrées en 3D. On utilise alors deux paramètres : t et s . La syntaxe d'une nappe paramétrée est :

⁵⁸ Si cette syntaxe est générale, alors elle doit générer tous les types de graphiques en 3D. Toutefois, ce n'est pas le cas, car des contraintes existent, en particulier la contrainte **fonctionnelle** (cf. étude du logiciel).

`>plot3d ([x (s,t), y(s,t) , z(t,s)], s=min1..max1, t=min2..max2, options) ;`

Un exemple (02) simple suit cette syntaxe. L'auteur précise que, de même qu'en 2D où on pouvait représenter plusieurs courbes sur un graphique, on peut en 3D représenter plusieurs surfaces sur un même graphique. On peut utiliser un ensemble d'expressions comme en 2D ou utiliser la fonction **display** (il faut donc charger cette fonction qui fait partie du package **plots**).

Viennent ensuite les représentations graphiques en **coordonnées cylindriques**. Comme pour le cas des courbes polaires, en s'appuyant sur la figure (que nous reproduisons ci-après), l'auteur rappelle comment se relie les coordonnées cartésiennes d'un point M et les coordonnées cylindriques, en soulignant :

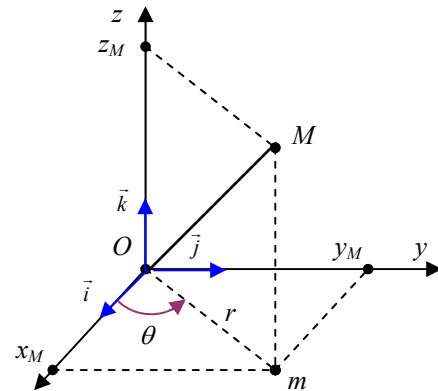
On rappelle qu'en coordonnées cylindriques, le point M de coordonnées cartésiennes (x,y,z) est repéré par le rayon polaire r et l'angle polaire θ de m (le projeté orthogonal de M dans le plan xOy) et sa cote z définis par :

$$\begin{cases} r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) [2\pi] \text{ si } M \neq O \\ z = z \end{cases}$$

Pour tracer une surface en coordonnées cylindriques, on utilise indifféremment l'une des deux commandes⁵⁹ suivantes :

`>cylinderplot (rayon, angle=min1..max1, z=min2..max2, options) ;`

`>plot3d (rayon, angle=min1..max1, z=min2..max2, coords=cylindrical, options) ;`



Un seul exemple (03) simple suit ces syntaxes. Il consiste à tracer la surface conique de sommet 0 (centrée sur l'axe Oz , convexe vers la haut). Comme précédemment, viennent ensuite les surfaces paramétrées en coordonnées cylindriques. Pour cela, l'auteur donne la syntaxe suivante :

On représente une nappe paramétrée en coordonnées cylindriques par :

`>cylinderplot ([rayon, theta, z], paramètre=min1..max1, paramètre=min2..max2, options) ;`

Suit également un seul exemple (04) qui consiste à tracer la surface parabolique du sommet le point $(0,0,4)$ (centré sur l'axe Oz , convexe vers le bas).

Viennent ensuite les représentations graphiques en **coordonnées sphériques**. L'auteur souligne :

En coordonnées sphériques, on peut utiliser indifféremment les deux syntaxes suivantes :

`>sphereplot (rayon, theta=min1..max1, phi=min2..max2, options) ;`

`>plot3d (rayon, theta=min1..max1, phi=min2..max2, coords=spherical, options) ;`

Il précise tout de suite que la première *fonction* doit être chargée avec un **with(plots)** ; et rappelle que **Maple** ne connaît pas θ et φ . Le premier intervalle (*range*) entré est attribué au θ et le second au φ du schéma.

⁵⁹ On peut ici se demander quand est-ce qu'une fonction devient une commande ? Est-ce que une *fonction Maple* est la même chose qu'une *commande* ou deux choses différentes comme cela a été précisé au départ ?

Suit un exemple (05). Ensuite, l'auteur donne l'option relative aux tracés paramétrés en coordonnées sphériques puis un exemple (6). Ainsi se termine la section 8.2.

La section 8.3 intitulée « **les options des graphiques** » présente les choix que permettent d'organiser les graphiques en deux et trois dimensions. Ceci correspond au choix : des *couleurs* ; des *échelles* ; du *nombre de points d'une courbe ou d'une surface calculés par Maple* ; des *axes* ; d'*affichage de titres* etc. C'est donc une étude dans laquelle l'auteur revient sur les types de tâches étudiés dans les deux sections précédentes pour travailler les options possibles de représentation graphique, quand il souligne :

Jusqu'ici, nous avons négligé la présentation des graphiques pour nous concentrer sur les fonctions. Mais **Maple** dispose de nombreuses options qui permettent d'agrémenter les graphiques, sur lesquelles nous allons revenir dans cette section.

Ainsi les types des graphiques étudiés dans la section 8.2 ne dépassent pas en difficulté ceux étudiés plus haut, sauf du point de vue de « l'optimisation » ou de « l'agrémentation » (en reprenant les termes de l'auteur) des graphiques en termes d'options de représentation.

Comme pour le cas de l'**intégration**, la rédaction du cours (dans chaque section relative à la *représentation graphique* dans **Maple**) est assez brève. Il se fait essentiellement à la base d'exemples relativement simples de représentation des courbes en 2D et de surfaces en 3D. Rappelons que l'auteur n'introduit aucune application portant sur les tracés des solides.

1.4 Conclusion

On a vu que, tant l'étude de l'*Intégration* que celle du *Graphisme* sont abordées dans ce manuel de façon assez succincte. L'utilisation possible des commandes du logiciel « *les fonctions Maple* » dans le travail mathématique se manifeste à travers des exemples simples des fonctions d'une variable (pour le cas de l'*Intégration*). A cela s'ajoute les exemples de fonctions de deux variables (pour le cas du *Graphisme*). L'auteur ne fait aucune application portant sur les *IM*. On ne trouve donc rien dans ce manuel relatif à l'enseignement des *IM*. On trouve cependant plusieurs tâches de représentation graphique en 2D et en 3D en utilisant **Maple**.

On remarquera que les deux domaines (*Intégration* et *Graphisme*) sont ici étudiés de façon séparée. De plus, l'étude de l'*Intégration* précède celle du *Graphisme* (de quatre chapitres). Or, on a vu que ce dernier est souvent présent dans les tâches de calcul des intégrales. Ainsi, la question de savoir comment, en utilisant **Maple**, les représentations graphiques peuvent outiller les techniques de calculs des tâches sur les intégrales reste ouverte.

On notera aussi que dans le cas des représentations graphiques (section 8.2) en 3D, on ne trouve que l'étude des fonctions définies sur le plan xOy , dont l'auteur souligne :

On cherche ici à représenter une expression de la forme $z=f(x,y)$.
 Syntaxe *générale* d'un graphique en 3D
`>plot3d (expression (x,y), x=min1..max1, y=min2..max2, options) ;`

Voilà pourquoi la syntaxe que l'auteur appelle *générale* ne pose pas des difficultés dans la description des schèmes d'utilisation dans **Maple** pour la réalisation des exemples considérés.

2. ANALYSE « STRUCTURELLE » DU MANUEL LEVI

Ce Manuel est plus ancien que celui que nous venons étudier, il comporte 8 chapitres. D'après l'auteur :

Il s'adresse à tous les publics mais en particulier aux étudiants de premier cycle d'université ou de classes préparatoires.

Comme le titre (*Exercices pour Maple*) l'indique, il n'y a pas à proprement parler de cours, mais quelques notes succinctes qui se fondent sur la base de résolutions des problèmes ou des exercices à l'aide de **Maple**. L'auteur utilise la version de **Maple V Release 3** dans l'environnement Windows.

Les exercices proposés sont d'origines diverses, certains étant issus directement des textes de cours de grandes écoles ou de DEUG, soit d'écrit soit d'oral. La correction propose souvent plusieurs méthodes permettant ainsi d'illustrer les différentes possibilités offertes par **Maple**. . . L'utilisation de **Maple** ne dispense pas de l'apprentissage des mathématiques, c'est à l'utilisateur de faire le raisonnement correct, d'apporter la preuve, de guider les calculs et de vérifier la validité des résultats (LEVI, p. 5).

Parmi les exercices proposés, ce sont ceux associés aux thèmes abordés dans le chapitre 5 qui nous intéressent, relatifs à l'étude de l'*intégration*, organisée de la façon suivante :

Thèmes abordés	N° d'exercices
Calcul d'intégrales	02
Changement des variables	03
Fonctions définies par une intégrale	07
Intégrales multiples	02
Total des exercices	14

Tableau 12 : Tableau des sujets proposés pour l'étude d'intégration.

Les exercices abordés dans les trois premiers thèmes (tableau ci-dessus) correspondent aux intégrales simples, ils illustrent donc des types de tâches qui se réalisent à l'aide des outils de **Maple**, selon des méthodes similaires à celles employées dans le manuel LION que nous venons d'étudier et sont numérotés en continu (5.1, 5.2, ...) d'un thème à un autre.

Dans cette continuité, le passage d'un thème à un autre, tel que présenté dans le tableau ci-dessus, ne s'aperçoit qu'au travers du premier exercice associé au nouveau thème à étudier.

La présence du dernier thème (même s'il ne comporte que deux exercices 5.13 et 5.14), nous a motivé à étudier ce manuel en nous attachant donc au chapitre 5. Ce sont ces deux exercices relatifs aux *Intégrales multiples* que nous étudions effectivement.

Intégrales multiples

L'exercice 5.13 est associé aux *intégrales doubles* et correspond à la tâche T_{13} du chapitre 5 :

On pose : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 - y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 - x \leq 0\}$ calculer l'intégrale double : $\iint_D (x+y)^2 dx dy$.

C'est donc une tâche importante de calcul d'*intégrale double* qui peut être interprétée de plusieurs manières. On remarquera, ce que ne fait pas l'auteur, que l'on peut considérer que cette *intégrale double* représente le volume du solide reposant sur D , coiffé supérieurement

par le graphique de la fonction $f(x,y)=(x+y)^2$. On peut également considérer que l'*intégrale double* représente la masse du domaine D , en supposant que la densité varie comme $(x+y)^2$.

Voici par la suite la contribution de l'auteur. Tout d'abord, pour accomplir la tâche à l'aide de **Maple**, il souligne :

On ne dispose pas de beaucoup d'outils pour calculer les intégrales doubles avec **Maple**, seul **Doubleint** du package **student** permet d'obtenir les intégrales doubles lorsque le domaine est un rectangle, ainsi :

> **student[Doubleint](x*y,x=0..a,y=1..b);**

$$\int_1^b \int_0^a xy \, dx \, dy$$

Qui se lit : $\int_1^b (\int_0^a xy \, dx) \, dy$. La valeur de l'intégrale précédente est obtenue par **value** :

> **value(")**,⁶⁰

$$\frac{1}{4}b^2a^2 - \frac{1}{4}a^2$$

Pour calculer l'intégrale proposée on va utiliser la méthode de *Fubini*, tout d'abord en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées polaires.

• Coordonnées cartésiennes

Définissons la fonction à intégrer et le domaine d'intégration :

> **f := (x,y) -> (x+y)^2 ;**

La fonction

> **dx := {x^2+y^2-y <= 0, x^2+y^2-x <= 0} ;**

Le domaine

L'intégrale est alors

> **A := student[Doubleint](f(x,y),x,y,DX);**

> **DX := dx ;**

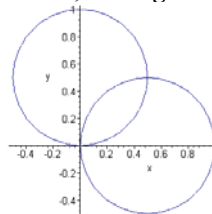
Pour faire joli

$$A := \iint_{D_{xy}} (x+y)^2 \, dx \, dy$$

$$D_{xy} = \{x^2 + y^2 - y \leq 0, x^2 + y^2 - x \leq 0\}$$

On peut représenter le domaine :

> **plots[implicitplot](dx, x=-1..1.5, y=-1..1.5, scaling=constrained) ;**



Le domaine qui nous intéresse est la lentille intersection des deux disques. Déterminons les frontières de cette lentille :

> **solve(lhs(dx[1]), y) ;**

> **y1 := "[2] ;**

borne inférieure

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

$$y1 := \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2}$$

> **solve(lhs(dx[2]), y) ;**

> **y2 := "[1] ;**

borne supérieure

$$\sqrt{-x^2+x}, -\sqrt{-x^2+x}$$

$$y2 := \sqrt{-x^2+x}$$

Les points communs aux deux cercles étant :

> **solve(map(lhs, dx)) ;**

$$\{x = 0, y = 0\}, \{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\}$$

On peut calculer l'intégrale :

> **A := int(int(f(x,y), y=y1..y2), x=0..1/2) ;**

⁶⁰ Le symbole " correspond au % utilisé précédemment dans LION pour les versions de **Maple** plus récentes.

$$\iint_{D_{xy}}(x+y)^2 dx dy = -\frac{5}{48} + \frac{3}{64}\pi$$

Tout d'abord, on remarquera qu'a priori l'outil **Doubleint** du package **student** n'est pas le seul qui permet d'obtenir le calcul d'une *intégrale double* avec **Maple**, contrairement à ce qui est souligné (plus haut) par l'auteur, en se référant au cas où le domaine d'intégration est un rectangle.

Pour réaliser la tâche T_{13} , l'auteur utilise des techniques relatives à la manipulation algébrique des expressions de l'énoncé et à des utilisations successives de l'outil **int**. Cela consiste essentiellement à la représentation de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale $\iint_{D_{xy}}(x+y)^2 dx dy$ que l'on peut expliciter par l'écriture

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} (x+y)^2 dx \right) dy,$$

selon la représentation analytique en coordonnées cartésiennes considérée par l'auteur.

En se référant au théorème de *Fubini*, l'auteur essaie donc d'établir des liens possibles entre les techniques instrumentées dans **Maple** et le travail mathématique habituel. Toutefois, ces liens pouvant permettre la mise en évidence des parties visibles (des *ostensifs*) manipulées par le logiciel et leurs résultats (*ostensifs*) conformément aux usages mathématiques, ne sont pas explicités. On ne sait pas comment **Maple** procède pour donner le résultat $-\frac{5}{48} + \frac{3}{64}\pi$.

Comme on l'a vu précédemment ceci relève de ce que nous avons appelées les **contraintes** « **boîte noire** » liées à l'existence et à la forme des syntaxes de la commande **int**.

A noter que la représentation graphique du domaine d'intégration est très présente dans la démarche de l'auteur. Elle sert, entre autres, à la détermination des frontières grâce à l'outil **solve**. On trouve donc la présence des registres graphiques, analytiques et de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale dans sa démarche. Néanmoins les liens entre ces registres ne sont pas vraiment explicités. L'ordre d'intégration mis en place (relatif à la projection possible du solide sur la région de type R_y du plan xOy) n'est pas la seule technique qui permet de réaliser la tâche T_{13} .

Vient ensuite la réalisation du problème par des techniques d'intégrations associées au calcul d'une *intégrale double* en coordonnées polaires. L'auteur procède comme suit :

- **Coordonnées polaires**

Transformons le domaine :

```
> drt := subs (x=rho*cos(theta), y=rho*sin(theta), dxy) ;
```

$$drt = \{\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2 - \cos(\theta) \leq 0, \rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2 - \sin(\theta) \leq 0\}$$

que l'on simplifie :

```
> drt := combine(drt, trig) ;
```

$$drt = \{\rho^2 - \cos(\theta) \leq 0, \rho^2 - \sin(\theta) \leq 0\}$$

```
> Ap := student[Doubleint] f(rho*cos(theta), rho*sin(theta))*rho, rho, theta, Drt) ;
```

```
> A=Ap ;
```

```
> Drt=drt ;
```

$$\iint_{D_{xy}} (x+y)^2 dx dy = \iint_{D_{rt}} (\rho \cos(\theta) + \rho \sin(\theta))^2 \rho d\rho d\theta$$

$$D_{rt} = \{\rho^2 - \cos(\theta) \leq 0, \rho^2 - \sin(\theta) \leq 0\}$$

en n'oubliant pas de multiplier par ρ pour tenir compte de $dx dy = \rho d\rho d\theta$.

On peut arranger un peu :

> **Ap := factor(Ap) ;**

$$Ap = \iint_{D_{rt}} \rho^3 (\cos(\theta) + \rho \sin(\theta))^2 d\rho d\theta$$

Il reste à intégrer, en utilisant la symétrie par rapport à la bissectrice :

> **Ap 2*int(int(op(1,op(1,Ap)),rho=0..cons(theta)),theta=Pi/4..Pi/2) ;**

$$\iint_{D_{rt}} \rho^2 (\cos(\theta) + \rho \sin(\theta))^2 d\rho d\theta = -\frac{5}{48} + \frac{3}{64}\pi$$

L'auteur donne donc des outils pertinents intervenant dans le calcul d'intégrale. Les coordonnées polaires permettent de simplifier les calculs, où la notion de la symétrie joue aussi un rôle. Cependant, il est difficile de comprendre la syntaxe de l'outil **int** utilisant la commande **op**. On ne voit pas vraiment les liens entre les objets ostensifs manipulés par le logiciel (à partir de cette syntaxe) et les ostensifs d'objets mathématiques. L'interprétation de la syntaxe donnée avec des utilisations successives de l'outil **int** n'est pas tout à fait simple. Il est nécessaire, pour comprendre cela, d'avoir une certaine connaissance du logiciel **Maple**.

On remarquera que la première aussi que la deuxième méthode ne conduit pas à des intégrales immédiates (quand on utilise les techniques papier/crayon). On peut donc se poser la question de savoir comment **Maple** procède pour calculer l'intégrale itérée $\iint_{D_{rt}} \rho^2 (\cos(\theta) + \rho \sin(\theta))^2 d\rho d\theta$ que l'on peut expliciter par l'écriture

$$2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\cos \theta} \rho^3 (\cos \theta + \sin \theta)^2 d\rho \right) d\theta$$

selon la **représentation** analytique en **coordonnées polaires** considérée par l'auteur ?

L'exercice 5.14 suivant est associé aux *Intégrales triples* et correspond à la tâche T_{14} du chapitre 5 :

Soit a et R des réels strictement positifs, on pose : $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ et } 0 \leq z \leq a\}$ calculer l'intégrale : $\iiint_D (x^3 + y^3 + z^3 - 3z(x^2 + y^2)) dx dy dz$.

C'est une tâche qui est a priori difficile à réaliser par des techniques papier/crayon. Voici la démarche proposée par l'auteur en utilisant les coordonnées cylindriques dans **Maple** :

On définit la fonction et le domaine :

> **f := (x,y,z) -> x^3 + y^3 + z^3 - 3z(x^2 + y^2);**

> **dxyz := {x^2 + y^2 - R^2 <= 0, 0 <= z, z <= a};**

L'intégrale est alors :

> **A := student[Tripleint](f(x,y,z), x,y,z, Dxyz);**

> **Dxyz = dxyz ;**

Pour faire joli

$$A := \iiint_{D_{xyz}} x^3 + y^3 + z^3 - 3z(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

$$D_{xyz} = \{x^2 + y^2 \leq R^2 \text{ et } 0 \leq z, z \leq a\}$$

On peut représenter le domaine, un morceau de cylindre :

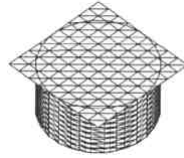
> **R := 2;**

On donne les valeurs

> **a := 2;**

pour le dessin

> **plots[implicitplot3d](dxyz, x=-R..R, y=-R..R, z=0..a, scaling=constrained, shading=NONE) ;**



Pour calculer l'intégrale, on passe en coordonnées cylindriques et on n'oublie pas de désassigner les variables **a** et **R** :

> **R := 'R'** ;

> **R := 'a'** ;

> **student[Tripleint] f(rho*cos(theta), rho*sin(theta),z)*rho, rho=0..R, theta=0..2*Pi, z=0..a) ;**

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \int_0^R (\rho^3 \cos(\theta)^3 + \rho^3 \sin(\theta)^3 + z^3 - 3z(\rho^2 \cos(\theta)^2 + \rho^2 \sin(\theta)^2)) \rho d\rho d\theta dz$$

Dont il reste à calculer la valeur :

> **A = value("")** ;

$$\iiint_{D_{xyz}} x^3 + y^3 + z^3 - 3z(x^2 + y^2) dx dy dz = -\frac{3}{4} R^4 \pi a^2 + \frac{1}{4} R^2 \pi a^4$$

Comme pour T_{13} on trouve également ici la présence des registres graphiques et analytiques et l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale dans la démarche de l'auteur. Ici, l'auteur met en évidence le lien possible entre les objets *ostensifs* manipulés par **Maple** selon l'outil **Tripleint** du package **student** et leur résultat conforme à l'usage mathématique. On peut interpréter facilement les *ostensifs* entrées dans **Maple** à l'aide du résultat retourné par l'outil **Tripleint**. Toutefois, on ne sait pas comment **Maple** évalue une telle écriture algébrique, pour donner le résultat $-\frac{3}{4} R^4 \pi a^2 + \frac{1}{4} R^2 \pi a^4$ à l'aide d'outil **value**.

A noter aussi que la représentation graphique donnée par l'auteur à l'aide de **Maple**, montre bien la technique employée. On voit bien les surfaces qui interagissent pour composer le domaine d'intégration, sauf que, le solide en question n'est pas **criblé** et qu'à aucun moment, l'auteur ne fait référence à une telle représentation dans les calculs. On ne voit donc pas l'intérêt de l'auteur pour ce dessin.

3. CONCLUSION

Tout d'abord nous pouvons constater qu'il n'existe pas beaucoup de manuels d'utilisation du logiciel **Maple** abordant la question des *Intégrales multiples*. Les manuels (LION et LEVI) étudiés (ici) s'adressent à tous les publics, en particulier aux étudiants de cycle universitaire et de classes préparatoires.

Le premier se limite aux *intégrales simples*. Le deuxième ne propose que deux exemples, un associé au thème des *intégrales doubles* et l'autre aux *intégrales triples*. Cependant, il est important de souligner que les deux exercices apportent des éléments importants pour le traitement des tâches sur les *IM* avec **Maple**. A priori, de telles possibilités peuvent favoriser l'enseignement des *Intégrales Multiples* selon l'organisation mathématique dégagée plus haut, où les représentations graphiques occupent une place importante.

Un autre élément important de notre analyse, en particulier du premier exercice de LEVI, porte sur la modification apportée par l'utilisation de **Maple**, dans les techniques pour

résoudre des tâches sur les *IM*. Nous avons souligné que l'utilisation de certaines « *fonctions* » du logiciel conduit à des « boîtes noires », qui ne permettent pas de savoir comment le logiciel effectue les calculs demandés.

L'étude du logiciel menée plus haut, nous a permis de dégager des potentialités, mais aussi des contraintes, de l'environnement **Maple** outillant les techniques de résolution des tâches sur le calcul de volumes par des *IM*. Nous avons pu constater la multiplicité des sous-tâches essentielles dans l'interaction d'un utilisateur avec les différents types de tâches autour des *IM*, en mettant en évidence les liens possibles entre une représentation graphique d'un solide (domaine d'intégration) et la représentation analytique associée, indispensable dans le calcul d'une *intégrale multiple*. Les techniques instrumentées mises en place, jouent un rôle important dans une telle liaison pour accomplir les tâches. En effet, l'utilisation des outils du logiciel modifie les techniques de résolution de certaines tâches autour des *IM*.

Dans cette optique, il nous a paru donc nécessaire, d'étudier aussi les pratiques des étudiants sur l'utilisation de ce logiciel. Comment s'approprient-ils les outils de **Maple** dans une tâche de calcul de volume par des *IM* ?

C'est sur cette étude que nous concentrons nos analyses par la suite. Elle constitue la réalisation et l'analyse de notre expérimentation réalisée selon les deux modes :

- ▶ sans l'utilisation de **Maple**
- ▶ en utilisant **Maple**,

sur une tâche emblématique du calcul de volumes par des *IM*, issue de l'organisation mathématique de deux manuels (SWO et SPIE) étudiés dans le chapitre B.

CHAPITRE

E

EXPERIMENTATION SANS ET AVEC MAPLE

CHAPITRE E EXPERIMENTATION SANS ET AVEC MAPLE

Présentation du problème

Dans notre analyse institutionnelle, nous avons dégagé une certaine typologie des tâches emblématiques de l'institution concernant les *IM*. Parmi celles-ci, nous avons sélectionné celle qui consiste à calculer le volume de l'intersection de deux cylindres droits et circulaires de même rayon dont les axes sont perpendiculaires. Avant de passer à une analyse détaillée de cette tâche et des variantes dans les énoncés possibles du problème, disons tout de suite qu'elle présente a priori trois avantages :

1. C'est une tâche présente dans les deux manuels que nous avons étudiés et dans la plupart des manuels existants sur le sujet, elle appartient à un genre dominant, tant par le type de la tâche, que par les techniques nécessaires à sa résolution.
2. Le fait qu'il n'y a que deux solides très élémentaires rend la tâche suffisamment banale pour faire croire qu'elle est simple à résoudre (cela facilite la dévolution). Or, elle ne l'est pas et c'est là son troisième avantage.
3. La complexité de la tâche vient de la difficulté qu'il y a à coordonner de façon opérationnelle la visualisation du solide et la mise en place du calcul de l'intégrale double ou triple permettant le calcul du volume. En effet, on peut rapidement, dans l'environnement papier/crayon, se faire une première idée de l'allure de l'intersection ce qui permettra un contrôle perceptif, mais la mise en place du calcul révèle des difficultés plus importantes que l'on ne pouvait envisager au départ.

Pour être résolue cette tâche combine plusieurs sous-tâches qui renvoient à un grand nombre des techniques institutionnalisées dans l'enseignement des intégrales dans l'environnement *papier/crayon*. C'est aussi une tâche où l'on peut envisager le recours au logiciel *Maple*, car l'accessibilité des configurations géométriques des objets concerné facilite la recherche, la mise en œuvre de découpage du solide en sous-solides par symétries, la dévolution du problème et donc générer de nouvelles connaissances, intervenant dans le traitement de différentes tâches de type emblématique en utilisant cet environnement.

Nous avons expérimenté en deux phases : une première avec *Maple* (en mars 2004) et une deuxième sans *Maple* (en avril 2005). Ainsi, ce chapitre se découpe en deux parties qui décrivent et analysent (a priori et a posteriori) les pratiques des étudiants devant résoudre ce problème. Pour mettre en évidence le rapport institutionnel aux, nous présentons d'abord l'étude expérimental de l'environnement *papier/crayon* (partie E1) et ensuite celle menée avec *Maple* (partie E2) dans une perspective ergonomique d'approche instrumentale.

L'objectif est de voir comment les étudiants vont résoudre cette tâche dans les deux environnements dont les contraintes intervenant dans les techniques des résolutions sont suffisamment distinctes.

PARTIE E1

LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DANS L'ENVIRONNEMENT PAPIER/CRAYON

Dans cette partie nous présentons l'analyse a priori du problème de l'intersection de deux cylindres. Il s'agit d'un exercice classique sur les intégrales multiples, qui est en particulier un exemple résolu dans les manuels SWO et SPIE, que nous reformulons de la façon suivante.

Dans un repère orthonormé direct, on considère les deux cylindres $C1$ et $C2$ d'inéquations respectives $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$, et le solide \mathcal{Q} déterminé par l'intersection de $C1$ et $C2$. Calculez le volume du solide \mathcal{Q} .

ANALYSE A PRIORI

Cette tâche comporte des expressions algébriques relativement simples (solides classiques bien connus par les étudiants). Elle peut se résoudre par une méthode purement analytique sans faire appel au dessin, pour déterminer le domaine d'intégration (soit en 2D, soit en 3D). Mais, si l'on peut s'appuyer sur les dessins, la compréhension du problème peut être simplifiée. Pour comprendre comment s'organise l'intersection des deux cylindres dont on donne les inéquations, il est essentiel d'avoir une bonne visualisation de ces objets dans l'espace. Cette visualisation peut être guidée par un travail de représentation graphique du solide. En effet, voir le graphique peut favoriser la gestion des données, par la coordination entre la représentation graphique et la résolution analytique en faisant intervenir les connaissances géométriques.

Stratégies possibles

Nous nous référons pour cette analyse à l'étude menée dans le chapitre C. Nous considérerons donc les trois stratégies (**S1**, **S2** et **S3**) que nous avons identifiées dans ce chapitre. Nous les rappelons ci-dessous. Elles correspondent respectivement aux choix selon les passages $[SP] \Leftrightarrow [RAS] \Leftrightarrow [EIM]$; $[SP] \Leftrightarrow [EIM]$ et $[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM]$ du Modèle MATIM :

- S1** : Interprétation analytique du solide
- S2** : Interprétation géométrique du solide
- S3** : Représentation graphique du solide

Seul la troisième est attendue, la seconde étant peu probable, le première étant impossible puisqu'elle n'est pas explicitée comme un objet d'enseignement dans l'organisation mathématique sur les *IM*. L'analyse a priori prend en considération les trois stratégies, mais met en avant dans la conclusion la représentation graphique du solide.

S1 : Interprétation analytique du solide

L'interprétation purement analytique nécessite de jouer sur les variables mathématiques des inéquations (ostensifs) des deux cylindres de l'énoncé que nous reprenons ci-dessous :

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (a)$$

$$x^2 + z^2 \leq 1 \quad (b)$$

Le problème est de savoir comment utiliser (a) et (b) pour mettre en place le calcul de l'intégrale ?

Cette tâche peut se résoudre suivant la même démarche menée pour le cas du problème de l'intersection de trois cylindres (cf. chapitre C). Bien entendu, ici, la complexité de la tâche est réduite puisque l'on n'a que deux cylindres. Comme précédemment, il n'y a pas (ici) de différence selon l'ordre des variables, du fait des symétries. La difficulté essentielle consiste dans le passage [SP]↔[RAS]↔[EIM], c'est-à-dire à la mise en place d'une représentation analytique et d'une écriture algébrique du calcul de l'intégrale. La technique consiste donc à transformer le volume du solide par une intégrale. La clé est d'utiliser au maximum les symétries pour découper le solide en sous-solides de mêmes volumes. Dans un premier temps nous ferons une distinction selon que l'on attaque la résolution :

1. En coordonnées cartésiennes (Sa(cc)).
2. En coordonnées cylindriques (Sa(cy)).

Sa(cc) : coordonnées cartésiennes

D'un point de vue analytique, on est dans une situation particulièrement agréable où les variables sont partiellement découplées : z et y ne sont pas, respectivement, liées par les inéquations données, $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$. Il en résulte que l'écriture en intégrales successives par l'application du théorème de *Fubini* devient particulièrement facile. Comme nous verrons dans la suite, selon que l'on valorise le choix d'une région de **type** R_x , les bornes relatives aux variations de y et z s'expriment en fonction de x . Alors que le choix d'une région de **type** R_y ou de **type** R_z rend la tâche complexe. Ceci montre que le choix d'ordre d'intégration joue un rôle fondamental.

Dans le travail à faire pour écrire une intégrale multiple, il convient de choisir pour commencer par une des trois variables. Commençons par étudier le cas où l'on privilégie l'entrée par la variable z , ce qui revient plus ou moins explicitement à calculer le volume du solide en l'interprétant comme un volume sous une surface définie à partir du plan xOy . Autrement dit, on s'intéresse à la projection du solide sur le plan de coordonnées xOy .

Premier choix : projection de \mathcal{Q} sur le plan xOy

Pour des questions de symétrie évidentes on peut ramener le calcul au cas où $0 \leq z$. Dans ce cas, on découpe \mathcal{Q} en deux sous-solides de même volume et dans la moitié où $0 \leq z$ on peut transformer les inéquations de la façon suivante :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & \text{(a)} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} & \text{(1)} \end{cases}$$

On obtient ainsi une représentation, dans laquelle on a isolé la variable z , dont on connaît l'intervalle de variation. Pour faire de même avec y puis x (ou inversement), il faut utiliser à nouveau les symétries du solide \mathcal{Q} par rapport aux plans xOz et yOz , ce qui permet de ramener le calcul dans le huitième d'espace $0 \leq x$, $0 \leq y$ et $0 \leq z$, délimitant un huitième du solide de départ \mathcal{Q}_8 . Le volume du solide total pouvant être obtenu en multipliant le résultat par 8.

On peut alors écrire une représentation analytique dans laquelle les variations de x et de y sont séparées. Pour ce faire, à nouveau deux choix sont possibles :

Soit on exprime y en fonction de x et on obtient :

$$Q_{(8)1} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

selon une région de **type R_x** .

Soit on exprime x en fonction de y et on obtient :

$$Q_{(8)2} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

selon une région de **type R_y** .

Ainsi de $Q_{(8)1}$ et de $Q_{(8)2}$ on peut passer au calcul de l'intégrale. Comme on l'a dit plus haut, la représentation $Q_{(8)1}$ conduit à un calcul relativement simple en coordonnées cartésiennes (cf. tableau de gauche, ci-dessous) alors que la deuxième conduit à un calcul laborieux (cf. tableau de gauche, ci-dessous). Ceci montre que le choix d'un ordre d'intégration peut être plus judicieux que l'autre. Dans certains cas même, cela peut conduire à un calcul infaisable par des techniques *papier/crayon*.

$$\begin{aligned} V_Q &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dy dx \\ V_Q &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx \\ V_Q &= 8 \int_0^1 1-x^2 dx \\ V_Q &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dx dy$$

Deuxième choix : projection de \mathcal{Q}_8 sur le plan xOz

Ici on considère le cas où $0 \leq y$. Dans ce cas, on découpe aussi \mathcal{Q} en deux sous-solides, celui correspondant à $0 \leq y$ peut être représenté par :

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & \text{(2)} \\ x^2 + z^2 \leq 1 & \text{(b)} \end{cases}$$

Comme pour le cas précédent, ici aussi se pose la question de savoir comment varient x et z séparément ? Or, \mathcal{Q} est symétrique par rapport aux plans yOz et xOy , ce qui permet de ramener le calcul dans le huitième correspondant à $0 \leq x$, $0 \leq y$ et $0 \leq z$.

Soit on exprime z en fonction de x et on obtient :

$$Q_{(8)3} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

selon une région de **type R_x** .

Soit on exprime x en fonction de z et on obtient :

$$Q_{(8)4} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

selon une région de **type R_z** .

Ainsi de $Q_{(8)3}$ et de $Q_{(8)4}$ on peut passer au calcul de l'intégrale. Notons que la troisième représentation $Q_{(8)3}$ ne change pas les calculs par rapport à ceux relatifs à la première. Toutefois, elle change l'ordre d'intégration (cf. colonne de gauche, tableau ci-dessous), alors que la quatrième représentation conduit à un calcul laborieux (cf. tableau de gauche, ci-dessous).

$$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydzdx$$

$$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dzdx$$

$$V_Q = 8 \int_0^1 1-x^2 dx$$

$$V_Q = \frac{16}{3}$$

$$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx dz$$

Troisième choix : projection de Q_8 sur le plan yOz

Ici on considère le cas où $0 \leq x$. Notons qu'ici x intervient dans les deux inéquations. Dans ce cas deux démarches sont possibles :

- **Première démarche :**

On peut d'abord fixer le cylindre d'inéquation (a), on obtient immédiatement la variation de la variable x en fonction de z comme suit :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & (a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} & (3) \end{cases}$$

Ensuite de (a) on peut obtenir la variation de y en fonction de x :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & (4) \end{cases}$$

Il reste à dégager l'intervalle de variation de z . C'est que l'on obtient à partir de (3), c'est-à-dire que $0 \leq z \leq 1$. On peut alors préciser une représentation analytique de Q_8 :

$$Q_{(8)5} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}, \text{ selon une région de type } R_z \text{ du plan } yOz.$$

Ainsi, de $Q_{(8)5}$ on peut passer au calcul de l'intégrale.

$$8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dx dy dz$$

Cette écriture est similaire à celle associée à $Q_{(8)4}$ (selon le choix du plan xOz , plus haut) sauf que l'on change l'ordre des variables d'intégration dans les intégrales itérées. Cependant, cette dernière écriture relative à $Q_{(8)5}$ n'est pas licite, car le calcul de l'intégrale itérée relative à y (la deuxième à réaliser), dépend de x , alors que l'intégration par rapport à x est la première à réaliser. Ce choix induit donc un résultat erroné.

- **Deuxième démarche :**

On peut d'abord fixer le cylindre d'inéquation (b) on obtient alors immédiatement la variation de la variable x en fonction de y ce qui correspond à (4). Ensuite de (b) on obtient (3). Dans ce cas la sixième valeur de la variable $V2$ donne $Q_{(8)6}$ qui est exactement la même représentation que $Q_{(8)5}$. Celle-ci induit donc un résultat erroné par rapport au problème en question. C'est-à-

dire $8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-z^2}} dx dy dz = 2\pi\sqrt{1-x^2}$.

Voyons maintenant les stratégies possibles en passant par un changement en coordonnées cylindriques.

Sa(cy) : coordonnées cylindriques

Reprenons les inéquations de l'énoncé :

$$x^2 + y^2 \leq 1 \quad (a)$$

$$x^2 + z^2 \leq 1 \quad (b)$$

Comme pour **Sa(cc)** on remarquera que le solide Q est centré en O . Ceci permet de ramener le calcul au huitième correspondant aux coordonnées positives. Le volume total sera obtenu en multipliant par huit.

A noter que si l'on ne pense pas à la symétrie du solide il est probable de tomber sur un volume nul, ce qui est absurde, car Q n'est pas dégénéré.

On considère tout d'abord le cas où $0 \leq z$ (en fixant ainsi le cylindre d'inéquation (a) où z est quelconque). Dans ce cas, on peut obtenir immédiatement (1) l'intervalle de la variation de z de la façon suivante :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & (a) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} & (1) \end{cases}$$

Le fait que les variables x et y de l'inéquation (a) n'interviennent que dans l'expression $x^2 + y^2$ conduit à utiliser les coordonnées cylindriques. Dans ce nouveau

système de coordonnées on peut obtenir la représentation suivante :

De (2), (3) on peut passer au calcul de l'intégrale en coordonnées cylindriques. En effet, deux écritures algébriques du calcul de l'intégrale sont possibles. Celle relative à une région polaire de type R_θ et celle associée à une région polaire de type R_r . L'une ou l'autre doit conduire au même résultat. Voici les calculs attendus :

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 1; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} & (2) \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} & (3) \end{cases}$$

Le choix des calculs selon une région polaire de type R_θ

$$VQ = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2 \cos^2(\theta)}} r dz dr d\theta = VQ = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2 \cos^2(\theta)} dr d\theta = VQ = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} \frac{(1-\cos(\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}{\cos(\theta)^2} - 1 \right) d\theta$$

Notons que le calcul de cette dernière intégrale, équivalente à $\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)^2} \right) d\theta$, n'est pas immédiat dans l'instrumentation classique par des techniques *papier/crayon*. De plus, l'intégrant $\left(\frac{1-\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)^2} \right)$ n'est pas défini dans tout l'intervalle d'intégration.

On remarquera qu'a priori une manipulation trigonométrique de l'intégrand est à la base des techniques de calcul de cette intégrale. Ce que nous présentons par la suite.

Transformation trigonométrique par des techniques classiques en *papier/crayon*

$$\begin{aligned} \frac{1-\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{1-\sin^3 \theta}{1-\sin^2 \theta} = \frac{(1-\sin \theta)(1+\sin \theta + \sin^2 \theta)}{(1-\sin \theta)(1+\sin \theta)} = \frac{(1+\sin \theta + \sin^2 \theta)}{(1+\sin \theta)} \\ &= \frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta}{1+\sin \theta} = \frac{1}{1+\sin \theta} + \sin \theta = \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} + \sin \theta \\ &= \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} + \sin \theta = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \sin \theta \end{aligned}$$

Cette transformation permet de mener les calculs de l'intégrale comme ci-dessous.

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \sin \theta \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t dt - \left[\frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\frac{8}{3} \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{8}{3} (1-0) \right] - \left[\frac{8}{3} (0-1) \right] = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Changement de variable

$$t = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}, dt = -\frac{d\theta}{2}$$

$$\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$$

Le changement de variable pris en compte concerne seulement le calcul de l'intégrale de la fonction **sécante**. Rappelons que l'on utilise la propriété d'inversion de bornes d'intégration comme aide aux calculs. Toutefois, on remarquera qu'ici, le risque de commettre une erreur de calcul est assez grand. Un logiciel comme **Maple** peut être un outil, permettant un contrôle

sur ce type de calculs.

Le choix des calculs selon une région polaire de type R_r

De (2) et (3) on peut obtenir l'écriture :

$$VQ = 8 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{1-r^2 \cos(\theta)^2}} r dz d\theta dr$$

Le calcul de l'intégrale itérée par rapport z est immédiat. C'est-à-dire que l'on peut passer rapidement de l'intégrale triple à l'intégrale double selon l'écriture ci-dessous.

$$VQ = 8 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1-r^2 \cos(\theta)^2} d\theta dr$$

On remarquera alors que les calculs relatifs à cette dernière écriture ne sont pas opérationnels par des techniques *papier/crayon*. Il n'est pas facile d'exprimer la primitive de l'intégrale itérée par rapport à θ . Le choix de cet ordre d'intégration mène donc aux calculs plus laborieux que le précédent. De plus, on remarquera qu'il est difficile d'envisager ce type de complexité avant de se lancer dans les calculs.

Examinons maintenant comment on peut s'appuyer sur une interprétation géométrique du solide intersection.

S2 - Interprétation géométrique du solide

Nous examinons maintenant ce qui se passe si le traitement analytique du problème s'appuie sur une visualisation (sans qu'il y ait tracé explicite d'un dessin) des objets en jeu pour situer le solide borné. Pour s'appuyer sur cette stratégie il faut d'abord comprendre comment interagissent les surfaces données dans l'énoncé par leurs équations.

D'un point de vue géométrique, on est amené à faire jouer un rôle particulier à l'axe Ox . Ce que nous exprimons les inéquations $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$ c'est en effet que la section par un plan perpendiculaire à l'axe Ox , pour x compris entre -1 et 1, est un carré d'aire $A(x)=4(1-x^2)$. Le volume cherché est donc l'intégrale simple de $A(x)$ entre -1 et 1, soit $16/3$.

Dans ce point de vue on n'a pas besoin de découper le solide en sous-solides par symétrie. Il est donc intéressant à souligner que mettre en œuvre cette vision, impose une réelle articulation entre analytique et géométrique. Elle impose de dépasser la vision géométrique des deux cylindres à travers les deux familles de cercles associées. Mais ce point de vue n'est possible qu'à la base d'application des techniques des intégrales simples, pour le calcul des volumes par des *sections transversales*. C'est donc une stratégie optimale. Mais, par l'effet de contrat qui vise la mobilisation des connaissances des *IM* au service du calcul de volume, cette technique est inattendue dans les pratiques des étudiants. Ces derniers vont donc s'outiller des techniques propres aux calculs des *IM*, notamment celle qui consiste à transformer un volume par une intégrale.

On remarquera ainsi que le solide en question est symétrique par rapport aux plans des coordonnées, ceci permet, comme précédemment, de ramener les calculs au huitième des coordonnées positives. De plus, on peut déduire que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ et $0 \leq z \leq 1$. Ainsi le huitième du volume commun aux deux cylindres est compris dans le cube $[0,1]^3$, donc $V_Q \leq 8V_{[0,1]^3}$.

Comme pour **Sa**, pour dégager une représentation analytique du sous-solide représentant un huitième du volume de Q , plusieurs démarches sont possibles. On peut fixer le cylindre d'inéquation $x^2 + y^2 \leq 1$ ensuite interpréter le volume commun sous la surface cylindrique d'inéquation $x^2 + z^2 \leq 1$. Ceci conduit à la représentation suivante :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 & \text{(a)} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} & \text{(1)} \end{cases}$$

(a) donne un disque centré du plan xOy que l'on peut exprimer analytiquement par deux représentations possibles relatives à la variable $\mathbf{V2}$:

Région - R_x Région - R_y

$$R_x = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \quad R_y = \{(x, y); 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}; 0 \leq y \leq 1\}$$

On peut maintenant dire que le Q_8 représentant un huitième du volume de Q est le solide coiffé supérieurement par la surface d'équation $z = \sqrt{1-x^2}$ de (1) et inférieurement par la région R . Ainsi, selon que l'on favorise R_x ou R_y , deux choix d'écritures algébriques du calcul de l'intégrale doubles sont possibles où $z = f(x, y) = \sqrt{1-x^2}$ est la fonction à intégrer sur R :

$$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx$$

d'après une région de **type R_x** .

$$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2} dx dy$$

d'après une région de **type R_y** .

Les calculs nécessaires pour accomplir l'intégrale relative au premier choix sont les mêmes que plus haut et conduisent à $V_Q = \frac{16}{3}$. Alors que le deuxième choix est opérationnellement difficile dans ce système des coordonnées. Toutefois, un changement de système des coordonnées, notamment les coordonnées polaires, peut entraîner un travail opérationnel par des techniques *papier/crayon*. Dans ce nouveau système des coordonnées la deuxième écriture du calcul d'intégrale double ci-dessus devient :

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2 \cos^2(\theta)} dr d\theta$$

selon une région polaire de **type R_θ**

Les calculs nécessaires pour accomplir cette intégrale sont exactement les mêmes que plus haut (cf. Sa) et conduisent à $V_Q = \frac{16}{3}$.

On remarquera que l'inversion de l'ordre d'intégration conduit à la même écriture algébrique du calcul de l'intégrale double obtenue plus haut par « **le choix des calculs selon une région polaire de type R_r** ». Comme on la dit, ce choix aboutit à des calculs qui ne sont pas opérationnels par des techniques *papier/crayon*. Plus précisément, le calcul de l'intégrale ci-contre entraîne des techniques de changement de variables dans lesquelles les risques de commettre des erreurs sont assez grands.

$$8 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1-r^2} \cos(\theta)^2 d\theta dr$$

Le plan xOy comme plan de la projection de Q

Maintenant supposons que le plan $-xOz$ soit choisi comme plan de projection de Q . Ici, l'interprétation géométrique s'appuie sur la visualisation du volume sous la surface d'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ du cylindre $C1$. Comme l'équation de la surface cylindrique de $C2$ donne aussi un cercle centré dans le plan choisi, deux représentations analytiques sont possibles. On remarquera que les écritures algébriques des calculs d'intégrales associées correspondent respectivement à celles étudiés dans S_a .

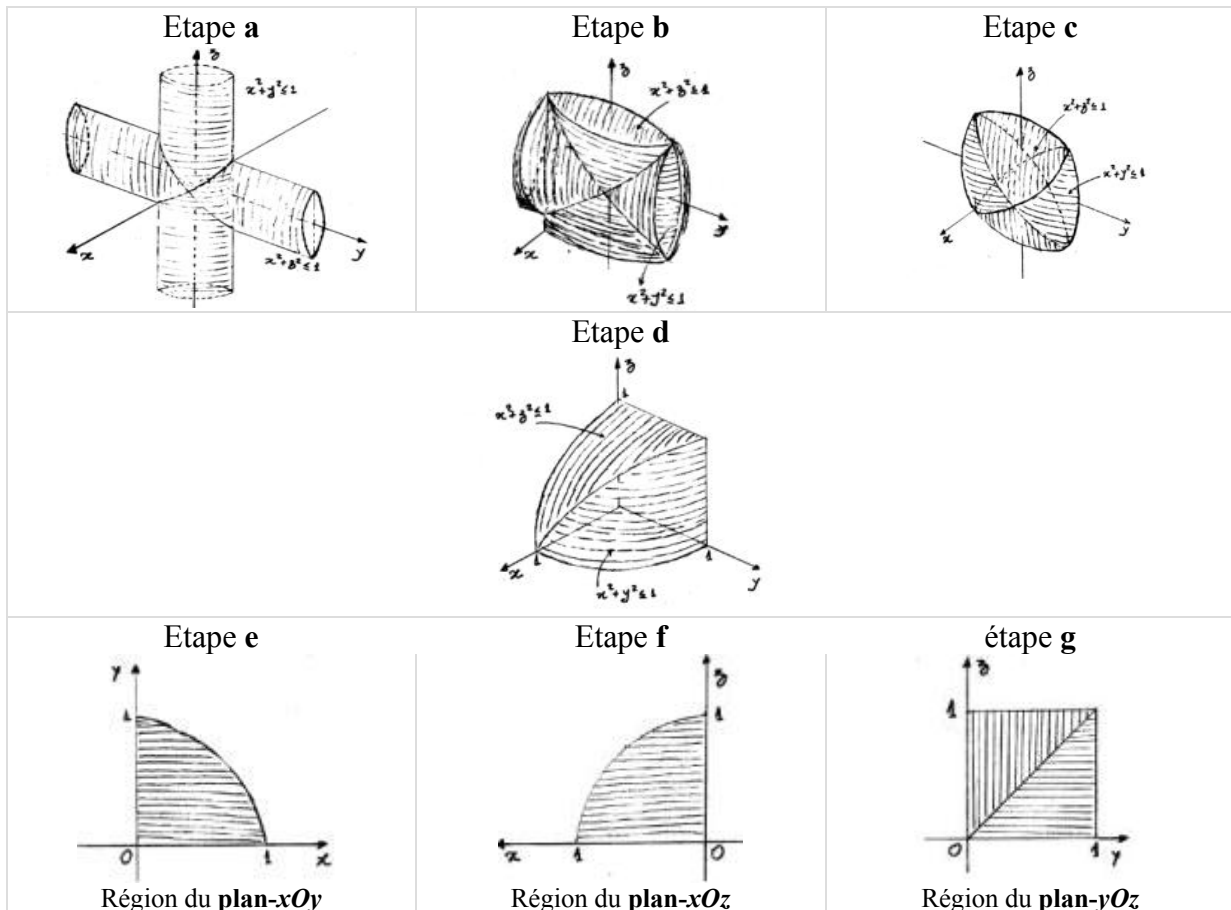
Le plan yOz comme plan de la projection de Q

Supposons à présent que le plan $-yOz$ soit choisi comme plan de projection de Q . Si le huitième des coordonnées positives est dégagé, on peut interpréter le volume commun aux deux cylindres sous la surface d'équation $x = \sqrt{1-y^2}$. Comme plus haut, le volume total sera obtenu en multipliant par huit. Ici aussi deux écritures algébriques du calcul de l'intégrale sont possibles, celle relative à la Région- R_y et celle associée à la Région- R_z . On remarquera que, une seule conduit au calcul effectif d'intégrale. Alors que l'autre, comme le montre S_a , n'est pas une écriture de réussite, elle conduit à une expression algébrique en fonction de x .

Regardons maintenant ce qu'il est possible de faire en s'appuyant sur un graphique.

S3 : Appui sur une représentation graphique du solide

Dans cette stratégie, on va s'appuyer sur l'interaction entre l'analytique et le graphique via l'interprétation géométrique de ce dernier. Pour commencer on trace le plus précisément possible une représentation graphique du solide dans l'espace. Nous faisons l'hypothèse qu'il est difficile de produire un tel dessin, représentant le graphique, dans l'environnement *papier/crayon*. Nous essayerons de le faire dans cet environnement en utilisant un crayon, une gomme et une règle.



Premièrement on trace les deux cylindres ensemble dans un repère orthonormé direct pour les représenter dans une visualisation élargie qui permet d'imaginer leurs positionnements relatifs dans l'espace (étape a ci-dessous). Il s'agit ensuite de rapprocher la représentation dans le cube $[-1,1]^3$ (car chaque cylindre est de rayon unitaire) pour voir comment ils interagissent pour former le solide commun aux deux cylindres (étape b). Dans cette étape (b) on peut voir avec une certaine difficulté qu'il y a des morceaux de chacune des surfaces cylindriques qui ne jouent pas dans la délimitation du solide commun, même si elles ont des projections sur les plans de coordonnées identiques aux parties qui délimitent effectivement le solide intersection. On voit également que la surface d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (sur l'axe Oz) et celle d'équation $x^2 + z^2 = 1$ (sur l'axe Oy) s'intersectent dans le plan d'équation $z = \pm y$ en découpant \mathcal{Q} en quatre sous solides par symétrie.

On trace ainsi la surface d'équation $x^2 + y^2 = 1$ pour $-y \leq z \leq y$ et celle d'équation $x^2 + z^2 = 1$ pour $-z \leq y \leq z$ et dans les deux cas $-1 \leq x \leq 1$, ce qui produit le dessin de la représentation graphique du solide \mathcal{Q} criblé (étape c).

Dans cette étape, on s'appuie sur la connaissance que le solide est borné et qu'il est symétrique par rapport aux plans des coordonnées pour dégager les sous-surfaces de chaque cylindre qui constituent le solide. Cela permet, avec une certaine difficulté d'interprétation géométrique dans l'espace, de dégager le dessin du huitième \mathcal{Q}_8 correspondant aux coordonnées positives (étape d). Dans cette étape (d), trois choix sont possibles et correspondent respectivement aux étapes (e), (f) ou (g). Ces trois dernières étapes conduisant

elles-mêmes chacune à des choix différents. Il y a au total 8 possibilités.

Une fois le solide « appréhendé visuellement » par le dessin, et au moins une des 8 possibilités dégagées, il s'agira alors de mettre en place le calcul de l'intégrale double ou triple, ce qui consiste implicitement à obtenir une représentation analytique du solide Q_8 .

Notons qu'un tel travail nécessite d'une bonne interprétation géométrique des objets en jeu, tant en 2D qu'en 3D. Il est peu probable que beaucoup des étudiants soient capables de le mener à terme correctement, même si par contre, la plupart devrait proposer un dessin au moins en début de résolution.

Par rapport aux deux stratégies précédentes (S1 et S2), on peut ici s'appuyer sur le dessin pour organiser la mise en place du calcul de l'intégrale. Les choix sont les mêmes que précédemment, sauf dans les deux dernières possibilités (menées plus bas) dont les choix des représentations analytiques (associés à l'étape g) peuvent être simplifiés par l'appui visuel des dessins des graphiques. S3 permet aussi de mettre en évidence la stratégie qui s'appuie sur le calcul de volume par des sections transversales à l'axe Ox .

Ainsi, quatre choix sont possibles :

Premier choix : Volume par sections transversales à l'axe Ox

Comme nous l'avons dit plus haut, cette stratégie permet de ramener les calculs par une intégrale simple. Dès l'étape d (cf. tableau ci-dessus) on peut facilement voir que pour tout x compris entre 0 et 1, le plan perpendiculaire à l'axe Ox , intercepte le solide Q selon une section transversal qui correspond à un carré d'aire $A(x)$, où A est une fonction d'une variable continue pour $x \in [0,1]$. En effet, $A(x) = yz = (1-x^2)$. Ainsi, par symétrie du solide résulte que le volume cherché est l'intégrale simple de $8A(x)$ entre 0 et 1, soit $16/3$.

Deuxième choix : Projection de Q_8 sur le plan xOy

Dès l'étape d (cf. tableau ci-dessus) on voit aussi que Q_8 est un cylindre de base circulaire et coiffé supérieurement par la surface de l'équation $z = \sqrt{1-x^2}$, car sa projection R sur le plan xOy (cf. étape e) est un quart du cercle ($x^2 + y^2 = 1$) et donc une région régulière du plan xOy . Ainsi, dès l'étape (e) on peut avoir deux représentations analytiques possibles de Q_8 :

Soit on interprète la région l'étape (e) comme une région de type R_x et on obtient :

$$Q_{(8)1} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Soit on interprète la région l'étape (e) comme une région de type R_y et on obtient :

$$Q_{(8)2} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

En effet, les représentations analytiques de Q_8 répondent à ces données comme auparavant par le premier choix de S1 et de S2. Que l'on écrive explicitement cette représentation ou non, on peut passer au calcul du volume par l'écriture d'une intégrale double ou triple en coordonnées

cartésiennes. Les calculs nécessaires pour accomplir l'intégrale relative à $Q_{(8)1}$ sont les mêmes que plus haut et conduisent à $V_Q = \frac{16}{3}$. Alors que la deuxième $Q_{(8)2}$ conduit à un calcul laborieux dans ce système des coordonnées.

Troisième choix : Projection de Q_8 sur le plan xOz

Ce choix conduit à l'interprétation de Q_8 comme un solide cylindrique de base circulaire et coiffé supérieurement par la surface de l'équation $y = \sqrt{1-x^2}$, car sa projection R sur le plan xOz (cf. étape **f**) est un quart du cercle ($x^2 + z^2 = 1$) et donc une région régulière du plan xOz . Dès l'étape (**f**) on peut avoir deux représentations analytiques possibles de Q_8 :

Soit on interprète la région l'étape (**f**) comme une région de type R_x et on obtient :

$$Q_{(8)3} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

Soit on interprète la région l'étape (**f**) comme une région de type R_z et on obtient :

$$Q_{(8)4} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Ainsi de $Q_{(8)3}$ et de $Q_{(8)4}$ on peut passer au calcul de l'intégrale. Comme pour **S1** et **S2**, la troisième valeur qui donne la représentation $Q_{(8)3}$ ne change pas les calculs par rapport à ceux relatifs à la première valeur (cf. $Q_{(8)1}$ plus haut). Cependant, ça change l'ordre d'intégration. La quatrième valeur conduit à un calcul laborieux.

Quatrième choix : Projection de Q_8 sur le plan yOz

Ce choix conduit à l'interprétation de Q_8 comme un solide cylindrique de base carrée et coiffé supérieurement par la surface d'équation $x = \sqrt{1-y^2}$ (la partie du cylindre sur l'axe Oz) et par celle d'équation $x = \sqrt{1-z^2}$ (la partie du cylindre sur l'axe Oy), car sa projection R sur le plan yOz (cf. étape **g**) découpe celle-ci en deux sous-régions triangulaires (celle qui se trouve dessous de la droite d'équation $z=y$ et celle qui se trouve dessus de cette droite) qui sont des régions régulières du plan yOz . Ainsi, dès l'étape (**f**), on peut avoir quatre représentations analytiques possibles de Q_8 . Ce choix découpe ainsi de Q_8 en deux sous-solides, ce qui ramène le découpage du solide Q en seize sous-solides ayant tous même volume, on en choisit un que l'on nomme Q_{16} . Comme on peut le voir (cf. l'étape **d**, tableau ci-dessus), dans ce découpage interviennent les trois plans des coordonnées et le plan $z=y$.

Voici les représentations analytiques possibles de Q_{16} .

Soit on interprète la région l'étape (**f**) au dessus de la droite d'équation $z=y$ comme une région de type R_y et on obtient :

Soit on interprète la région l'étape (**f**) au dessus de la droite d'équation $z=y$ comme une région de type R_z et on obtient :

$$Q_{(16)1} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \\ y \leq z \leq 1 \end{cases}$$

$$Q_{(16)2} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ 0 \leq y \leq z \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Soit on interprète la région l'étape (f) au dessous de la droite d'équation $z=y$ comme une région de type R_y , et on obtient :

$$Q_{(16)3} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq y \end{cases}$$

Soit on interprète la région l'étape (f) au dessous de la droite d'équation $z=y$ comme une région de type R_z et on obtient :

$$Q_{(16)4} = \{(x, y, z)\}; \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ z \leq y \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

A priori, ce découpage où intervient le plan $z=y$ est difficilement envisageable dans les deux premières stratégies. En effet, il n'apparaît qu'à partir de l'étape (d) ci-dessus. On notera que ceci conduit à des calculs d'intégrales relativement simples, tant en coordonnées cartésiennes qu'en coordonnées cylindriques (c'est le cas de $Q_{(16)2}$ et de $Q_{(16)3}$), mais aussi des calculs d'intégrales laborieux (c'est le cas de $Q_{(16)1}$ et de $Q_{(16)4}$).

On voit ainsi que le tracé des dessins représentant les graphiques des équations données permet d'enrichir les choix des stratégies et des techniques possibles pour résoudre cette tâche, dans la mesure où l'on peut affiner l'interprétation géométrique pour mener la résolution analytique mais aussi, bien sûr, de contrôler les difficultés éventuelles qu'il peut y avoir entre les représentations analytique et graphique. Ainsi, la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique de l'intégrale peut s'appuyer sur une telle interaction. Par ailleurs, de nouvelles possibilités peuvent apparaître. C'est le cas, par exemple, des quatre derniers choix, dans lesquels les calculs sont moins lourds que ceux développés précédemment. Cependant, la production de ce type de dessins par des techniques papier/crayon est difficile et laborieuse.

Ce qui nous intéresse dans cet exercice, c'est d'aller voir dans la pratique des étudiants, en particulier s'ils font ou non un dessin pour résoudre ce problème. S'ils le font, comment ce dessin est-il produit dans l'environnement *papier/crayon* ? Comment est-il travaillé par rapport au problème ? Est-ce que les deux cylindres sont tracés ? Dans quelle mesure les différentes composantes, en particulier l'intersection entre les deux surfaces cylindriques, sont mises en évidence ? Est-ce que :

- les symétries possibles sont mises en évidence ?
- le solide en question est dégagé ?
- l'une de leurs parties est dégagée ?

Quelles sont les difficultés rencontrées ?

Au niveau du calcul de l'intégrale on s'intéresse surtout à la façon dont les bornes de la résolution analytique du solide sont placées dans l'écriture algébrique de l'intégrale. Quelle interprétation du volume est privilégiée (volume par sections transversales, volume sous une

surface ou volume par une intégrale triple) ? Finalement, nous chercherons à savoir si le volume de Q est trouvé correctement. Cette tâche, malgré une certaine illusion de simplicité au départ, est difficilement réalisable par des intégrales multiples dans l'environnement *papier/crayon*. Notre expérimentation vise avant tout à valider cette hypothèse, sur laquelle nous nous appuyerons pour mettre en place notre dernière expérimentation de la même tâche, mais découpées en sous-tâche et outillée avec *Maple*.

ANALYSE A POSTERIORI

1. Conditions de passation

Vu les difficultés prévues dans ce problème, nous avons choisi de le faire expérimenter en binômes sous la forme d'entretiens hors classe. Nous avons ainsi analysé le travail de deux binômes, pris séparément, dans la même salle, chacun pendant une heure devant un observateur. Pendant ce temps, le reste de la classe était occupé avec l'enseignant habituel à une séance d'exercice, indépendante de notre travail, dans une autre salle. Les quatre étudiants (dont un redoublant⁶¹) ainsi analysés étaient volontaires :

- Binôme 1 (B1) : Etudiant **E1** et Etudiant **E2**.
- Binôme 2 (B2) : Etudiant Redoublant (**ER**) et Etudiant **E3** ;

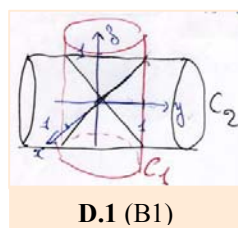
Pendant le déroulement de la séance, la production de B1 a été filmée sans interruption, alors que celle de B2 a été enregistrée par magnétophone. Nous avons choisi de filmer un binôme pour avoir (d'une façon précise) l'évolution chronologique des traces des étudiants, la visualisation (par des images) des actions, et leurs gestes au cours du traitement de la tâche (cf. protocole en annexe).

Voici l'énoncé donné aux étudiants :

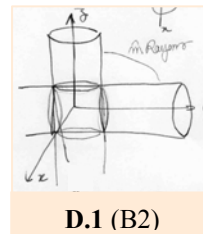
Dans un repère orthonormé direct, on considère les deux cylindres C_1 et C_2 d'inéquations respectives $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$, et le solide Q déterminé par l'intersection de C_1 et C_2 . Calculez le volume du solide Q .

2. Productions effectives des étudiants

Après lecture de l'énoncé, les deux binômes décident d'entrer dans le problème par un appui sur la représentation graphique des surfaces cylindriques, pour avoir ainsi une idée globale de la configuration du solide intersection (Q). Ils tracent correctement à main levée en perspective les deux cylindres C_1 et C_2 dans un repère orthonormé. B1 les différencie avec du rouge et du noir (cf. premier dessin **D.1**, ci-dessous de chaque binôme).



D.1 (B1)



D.1 (B2)

Cette initiative montre que, grâce aux connaissances qu'ils ont de l'espace et du mode de

⁶¹ Étudiant qui avait participé à l'expérimentation que nous avons mise en place pour le traitement du même problème en utilisant le logiciel **Maple**.

représentation géométrique, ils ont une bonne visualisation du problème dans l'espace. Ils "voient" bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur emboîtement. Par contre, ils ont du mal à voir ce qu'il y a à l'intérieur. Les deux binômes visualisent difficilement les contours du solide Q . Par ailleurs, sans que ce soit explicite, il semble bien qu'ils aient conscience que pour calculer le volume, ils devront utiliser une *intégrale multiple* et qu'il leur faudrait trouver une représentation analytique du solide. Ainsi tout l'enjeu du problème, dès ce début, consiste à mettre en place une représentation analytique adéquate avec la perception correcte du solide. Ce travail va se faire dans une interaction constante entre les deux types de registres de représentation. Ce qui nous intéresse c'est de voir comment les deux registres interagissent. Par ailleurs, un point clé réside dans l'idée de faire jouer les symétries du solide. En effet, il n'existe pas de représentation analytique univoque du solide. Mais, il est possible d'en trouver une pour un des quarts (ou des huitièmes, ou encore des seizièmes) du solide et de faire jouer les symétries pour retrouver tout le solide et pour calculer le volume total.

On remarquera qu'une fois les deux cylindres tracés en perspective à main levée (**D.1**, ci-dessus), les deux binômes pensent immédiatement au calcul du volume du solide Q . Selon une technique dont ils ont l'habitude (notamment dans leur pratique de construction mécanique), ces étudiants vont alors essayer, soit de contrôler le solide par découpage, soit de constituer la représentation analytique du solide à partir de la visualisation de projections du solide sur des plans bien choisis. En effet, les projections ainsi déterminées auront des représentations analytiques élémentaires, à partir desquelles, on peut espérer reconstituer une représentation analytique globale.

Ainsi deux stratégies sont prises en compte conjointement par les deux binômes :

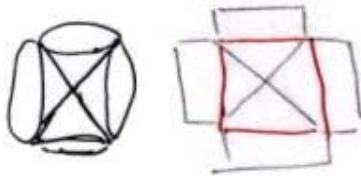
- **le contrôle du solide par des coupes ;**
- **la projection orthogonale des dessins sur un plan du repère.**

Cette dernière est classique. Elle permet de décrire la configuration géométrique des "*arêtes curvilignes*" d'un solide sur un plan de repère et de délimiter un domaine d'intégration (cf. en annexe, l'analyse de certains exemples résolus des manuels SWO et SPIE, montrant ces possibilités). Toutefois, cette stratégie, primordiale dans le problème que l'on observe ne fonctionne pas directement de la même manière que dans les cas où un solide est donné préalablement « isolé » ou « criblé ». Selon notre analyse a priori, l'appui sur RG nécessite une production d'un tel solide « isolé » avant d'utiliser sa projection ou l'un de ces morceaux dans un plan de coordonnées. Parce que la mise en place de l'intégrale permettant le calcul consiste (au moins implicitement) à donner une description analytique du solide « isolé ». Ceci peut motiver le choix du calcul selon une intégrale double ou triple.

En utilisant les projections, le binôme **B2** trouve bien les deux cercles et le carré qui sont les projections du solide dans les plans des coordonnées respectivement xOy , xOz et yOz (cf. **D.2** ci-dessous). Alors que **B1** trace un deuxième dessin encadrant l'emboîtement de Q dans un cube, puis un troisième vu comme la projection du premier sur le plan yOz dans lequel ils voient un carré et ses diagonales (cf. **D.2** ci-dessous). Toutefois, les binômes ont du mal à

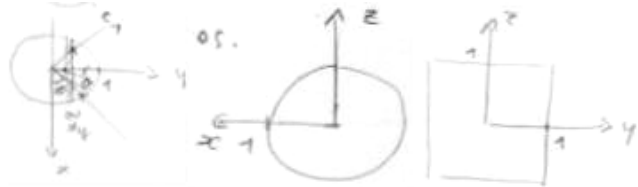
décrire le solide Q . Voici des extraits de leurs échanges :

B1
E1 : Si on **coupe** un carré là ! Ça fait quel truc ? Il coupe comme ça, ça fait une base **circulaire**, mais eh ! Eh ! Ah ! Je ne sais pas ! ... ça fait une sorte de **sphère** quoi ! ... ; **E2** : Le volume ce quoi ? **E1** : C'est l'intégrale triple ? Si on prend cette surface.



D.2 (B1)

B2
E3 : Si tu regardes l'intersection, donc ça va faire un **cercle**. Ah ! C'est **bizarre** « rires » ! Parce que si tu **coupes** ça, quand tu coupes comme ça, ça fait un **cercle**. Enfin je crois. Tu vois ce que je veux dire ? T'as un cercle sur le côté. En fait ça c'est le cylindre comme ça. **ER** : Mais ça, ce n'est pas un cercle ! **E3** : Bah ! Si ! Ça c'est la même chose, que sur ce côté, de toute façon.



D.2 (B2)

Le verbe **couper** apparaît souvent dans le discours des deux binômes. Il y a donc certaines similitudes dans leurs raisonnements. Par contre, ils ont des difficultés pour contrôler le solide par des **coupes** et pour savoir comment coordonner ces dessins avec la représentation analytique de Q dans sa totalité.

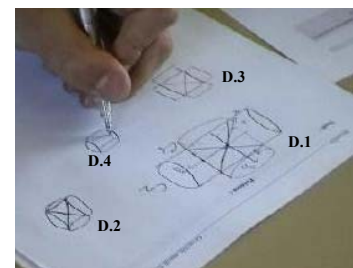
Face à ces difficultés, les deux binômes changent de stratégie l'un pour s'appuyer sur l'idée de **symétrie (B1)** et l'autre de **changement de systèmes des coordonnées (B2)**.

B1 pense aux **symétries** possibles de Q . Pour cela, un quatrième dessin est alors réalisé (une sorte d'amélioration du deuxième⁶², cf. **D.4**, image suivante). Cependant, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous, ils ont toujours des difficultés pour voir, interpréter et décrire la forme de Q .

B2 à son tour parle de **changement de variables** et utilise les « coordonnées polaires » (en fait il s'agit plutôt de coordonnées cylindriques). Comme on peut le voir dans l'extrait du protocole ci-dessous, ils voulaient exprimer chaque cylindre en coordonnées cylindriques et non en polaires. Cette manipulation algébrique les conduit à l'expression de la sphère centrée de rayon ρ . Cette tentative n'aboutit pas.

(B1, PV⁶³ 02)

E1 : En fait c'est calculer le volume de C1 et de C2 sur cette hauteur entre -1 et 1. Autrement ... je pense il faut diviser en 4 et calculer le volume d'un. Je ne vois pas trop la forme du truc. Déjà que c'est un **cône** ? **E2** : Je pense ! **E1** : Déjà il aura une base **circulaire**. **E1** : En gros c'est un truc comme ça quoi. **OBS**⁶⁴ : Il trace le dessin D.4 ; **E2** : En 3D ? **E1** : Ça fait comme ça, le Q pour calculer le volume. Ça fait **bizarre** ! C'est compris dans le cube -1 à 1. De côtés deux quoi ! -1 à 1, -1 à 1. **OBS** : Il montre sur le dessin D.1 ; On peut faire l'intégrale, je pense. Il faut la **fonction** !



⁶² Ce quatrième dessin est à la base de tous les autres dessins qu'ils ont produits au cours de la séance.

⁶³ PV : Partie de Vidéo (cf. Protocole en annexe).

⁶⁴ OBS : Observateur.

B2 (TC(083))

E3 : Tu peux dessiner deux trucs ? **ER** : Mais de toute façon y'a peut-être pas besoin ; **E3** : Non ! On va faire plus simple. Là on a les cylindres. On va chercher des variables. On va passer en **polaire** ! **ER** : Ouais, je pense ! **E3** : Et pour **changer les variables** il faut savoir... On va essayer. Par exemple là, on met l'ensemble de définition de... $f(x), y$ qui varie entre et après... un cylindre comme ça ! En polaire $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. **ER** : Là on met la variation de... Euh ! Euh ! Par exemple de x en fonction de... Euh ! Euh ! Y'aura du $\sin\theta$. **OBS** : *Ils écrivent sur le brouillon les équations ci-contre en disant* : **E3** : Il faut faire du **polaire**, ρ carré puissance, \cos carré et z carré ? **ER** : x carré plus y carré.

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$x =$$

$$\rho^2 \leq 1 \quad x = \rho \cos \theta$$

$$\rho^2 \cos^2 \theta + z^2 \leq 1$$

On voit bien que dans le binôme **B1**, les étudiants s'appuient davantage sur les tracés qu'ils font. Ils arrivent à avoir des idées sur la forme de Q à partir de coupes par **symétrie**. Ils essaient ensuite, à partir du deuxième dessin, d'en extraire les parties vues d'abord comme des cônes qui, effectivement, parmi les solides classiques, se rapprochent visuellement le plus de leurs dessins. A partir de là, ils essaient de mettre en place le calcul de l'intégrale. Ils se posent toutefois la question de la fonction à intégrer. Ceci montre qu'ils essaient d'interpréter le solide comme compris sous une surface, pour calculer le volume par une intégrale double.

Le binôme **B2**, s'appuie également sur les dessins, mais aussi sur la manipulation algébrique d'expression de l'énoncé et fait référence aux connaissances qu'ils ont des **coordonnées polaires**. Ceci les conduit à l'idée erronée que le solide cherché est une sphère, qu'ils abandonnent.

C'est alors qu'une *troisième* stratégie se dégage.

Elle est fondée sur la *recherche d'une fonction à intégrer* (**B1**) et sur la perception visuelle de deux *plans sécants* qui divisent symétriquement le solide (Q) en quatre parties (**B2**). **B1** qui ne faisait que les dessins jusqu'ici, manipule pour la première fois, les expressions de l'énoncé. Ainsi, parmi les trois variables (x, y et z) en jeu, ce binôme trouve correctement l'intervalle de variation de y en fonction de z . Ils ont cependant des difficultés à bien coordonner ce résultat avec le dessin qu'ils ont fait. En traçant un dessin (les axes de repérage, cf. brouillon en annexe), **E1** dit : *Donc y est compris entre $-z$ et z déjà.* **E2** : *Ouais !* **E1** : *Tu vois si tu traces les axes, quelque soit z , supposons que z est 1 ça paraît logique* (Rires) !

Cela ne les aide en rien. Ils décident donc de reprendre la première stratégie, et cette fois, les étudiants cherchent, sur le dessin **D.4**, la fonction (équation de la surface) à intégrer, tout en parlant du calcul d'une intégrale triple. Ils ont donc besoin d'un contrôle à la fois sur les représentations graphique, analytique et sur les liens possibles entre les deux registres, mais aussi sur le calcul de l'intégrale. On remarquera qu'il n'y a pas vraiment de coordination entre les objets qu'ils manipulent dans les deux registres. De plus, ce binôme mélange les techniques d'intégration pour le calcul du volume, notamment l'interprétation par un solide sous une surface (donc le choix du calcul de volume par une intégrale double) et la recherche de volume du solide par une intégrale triple, en connaissant la représentation analytique du solide). Comme on peut le voir dans l'extrait suivant, ils utilisent aussi l'intégrale simple.

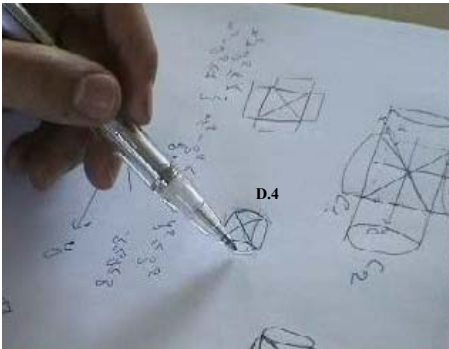
(B1, PV 02)

E1 : Si on prend cette surface, ... en fait !
E2 : Ouais ! **E1** : Cette surface là, c'est x^2+z^2 on fait l'intégrale de ça sur dy . En fait sur y il faut intégrer entre ça et ça ! Non ? Je ne sais pas !

OBS : E1 écrit l'intégrale ci-dessous, ensuite il montre sur le dessin D.4, le domaine dans lequel ils font l'intégrale.

$$\int x^2 + z^2 dy$$

E1 : On intègre ça ! Entre ça et là !



Les termes tels que : *entre ça et là*, *entre ça et ça*, accompagnés de leurs gestes (exprimant les bornes d'intégration qu'ils n'arrivent pas à écrire analytiquement) manifestent bien les difficultés qu'ils ont à coordonner les ostensifs et non-ostensifs des objets des deux registres (graphique et analytique) de représentation. Cette démarche n'était donc pas faisable pour **B1**. L'image vidéo montre bien les gestes qu'ils font souvent autour de **D.4**, celui qui se rapproche le plus du solide de l'intersection.

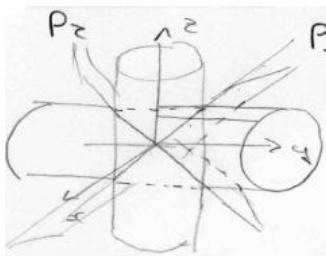
Le binôme **B2** par contre, va s'appuyer sur les deux plans qui correspondent effectivement aux plans d'intersection des deux cylindres. Rappelons qu'ils utilisent ici l'idée de la **symétrie** pour la première fois. Suivant l'extrait du protocole ci-dessous on voit que ce binôme arrive à décortiquer les difficultés qu'il avait pour visualiser le domaine dans lequel il a cherché à calculer le volume, grâce à l'intervention de l'étudiant redoublant qui se souvenait que ce problème était le même que celui traité l'année précédente, en utilisant *Maple*.

(B2, TC(170))

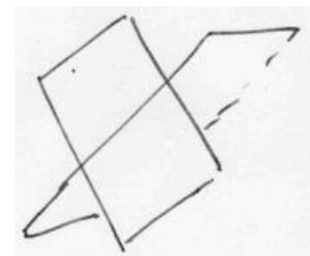
ER : Mais eh ! Déjà on peut simplifier. Eh ! Enfin eh ! Eh ! C'est pour ça que peut être les trucs [...] c'était déjà le même volume que l'an dernier « rires ».
E3 : Ah ! T'as déjà fait ? **ER** : Bah ! C'est qu'on avait fait avec *Maple* l'an dernier. **E3** : Depuis le début tu savais à

peu près comment faire ! **RE** : Bah ! Bah ! En fait on a cherché l'intersection de ce cylindre avec celui-là. Si tu regardes là, ça fait, enfin eh ! La t'as deux droites. Mais dans l'espace ça fait deux plans. Tu les vois les deux plans ?
E3 : Comme ça, non ? Les deux plans comme ça ?

Donc **E3** était surpris de savoir que **ER** connaissait le problème. Ce dernier trace ainsi le dessin des deux plans P1 et P2 ensemble avec les deux cylindres (cf. **D3** (B2) ci-dessous), comme il l'avait fait dans *Maple*. Ensuite **E3** fait également les plans, séparément avec les deux cylindres (cf. **D4** (B2) ci-dessous).



D3 (B2) Production de ER



D4 (B2) Production de E3

ER : Si tu définies tes bornes entre ces deux plans, ça c'est facile et après t'as plus que ... si tu divises ton volume par 4, tu dis que c'est quatre parties égales. Après tu calcules plus que l'intégrale de ce volume-là. Après tu n'as plus qu'une seule dimension. Ouais ! C'est en cylindrique. Tu vois ? **E3** : Ouais ! Mais il faut d'abord trouver les équations des plans ! « rires »

Merci ! Donc mon idée de ρ_1 et ρ_2 , non ! Ecoute ! Euh ! Euh ! Logiquement ça serait un plan du type $y=z$ tu vois, ça serait un plan comme ça ! Tu vois ? **ER** : Oui ! Oui ! **E3** : Avec un angle de 45 quoi ! ... Mais attends, là on se la joue, prof. de maths, on dit, on prend comme repère deux plans un peu sortis du chapeau magique. **ER** : Bah ! Disons que ça va être plus simple ! A mon avis, on a intérêt à simplifier notre cylindre.

Les deux plans dégagés par ce binôme correspondent bien avec les plans d'intersection des deux cylindres C_1 et C_2 . Le binôme ne voit cependant pas le contour de Q , alors que les deux plans auraient pu permettre de voir que le solide Q est divisé en quatre sous-solides par symétrie. Ainsi ils ont été amenés à raisonner autour des plans pour chercher une représentation analytique de Q . On voit donc dans leur discours les tentatives d'un travail d'interaction constante entre les deux registres de représentation (graphique et analytique). Une fois ces deux plans mis en place graphiquement, le problème revient donc à trouver les équations de ces plans. C'est alors qu'**E3** se manifeste en disant : *Ouais ! Mais il faut d'abord trouver les équations des plans !*

En utilisant la première stratégie (projection orthogonale de surfaces sur un plan canonique) ils concluent que ces plans ont comme équations $y=-z$ et $y=z$ (cf. TC(210) et TC(253)) et que z varie entre $-y$ et y (⁶⁵). **E3** intervient en disant : Ouais, faut dire qu'on se place dans un quart de volume.

ER : Bah ! C'est simple ça ! Enfin ! On va l'appeler P_1 et P_2 . Là on peut peut-être passer en polaire. **E3** : De tout façon, ça change rien. Le problème c'est que la condition sur z , on l'a sur θ , pas sur ρ . **ER** : Ce n'est pas grave. On fera $\sin\theta$, $\cos\theta$.

Ils expriment ainsi le volume du solide de l'intersection par un texte (cf. l'extrait de la copie de **E3** ci-dessous, cf. aussi en annexe celle de **ER** comportant les mêmes discours) avant de l'écrire analytiquement selon une représentation en coordonnées cylindriques, en prenant en compte le $\frac{1}{4}$ du volume de Q (compris entre les deux plans) par symétrie.

Texte exprimant le $\frac{1}{4}$ du volume du solide Q par symétrie

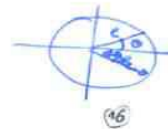
⇒ Volume de Q : délimité par ρ de C_1 et C_2 on se place ds le cas de 2 plans $z=-y$, $z=y$ qui divisent ce volume en 4. on s'intéressera à trouver le volume de $q = \frac{1}{4}$ vol de Q

Passage en coordonnées polaires

⇒ on passe en polaire pour x et y :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

dans q : $\rho \geq 0$
 $0 \leq \theta \leq \pi$
 et $-y \leq z \leq y$
 $-\rho \sin \theta \leq z \leq \rho \sin \theta$



« Représentation analytique » de Q en coordonnées cylindriques

Tentative de la mise en place d'écriture algébrique du calcul d'une intégrale triple en coordonnées cylindriques

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} \int_{z=-\rho \sin \theta}^{\rho \sin \theta} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta \stackrel{?}{=} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^{\rho} \int_{z=0}^{\rho \sin \theta} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

⁶⁵ En effet, une manipulation algébrique correcte des expressions de l'énoncé mène à ce résultat. Mais les étudiants ne font pas ça. Ils tâtonnent, ce qui se traduit par l'emploi récurrent du mot logiquement. (*Logiquement ça serait plan comme de type $y=z$ tu vois, ça serait un plan comme ça*).

On voit que leur texte exprime un certain lien entre les deux registres de représentation, graphique et analytique. Les coordonnées polaires outillent la description analytique du quart de Q (qu'ils ont noté par q) en coordonnées cylindriques. Le résultat ainsi obtenu révèle bien les bornes ad hoc pouvant permettre un calcul de l'intégrale attendu. On remarque alors que la représentation analytique de Q est implicite dans leur résultat. Ceci montre (comme dans les manuels SWO et SPIE) que le mode de représentation des solides, dans la démarche des étudiants, est fortement lié aux techniques d'intégration (effet du contrat). Comme on peut le voir, le passage de la « représentation analytique » à la mise en place d'une écriture algébrique du calcul de l'intégrale est initialement problématique. Le binôme a des difficultés à bien coordonner la représentation analytique de Q avec le calcul de l'intégrale.

ER commence les calculs en utilisant une intégrale double (cf. le protocole). Ceci laisse penser qu'il cherchait plutôt le volume sous une surface. Il considère l'équation $x^2+y^2=\rho^2$ à la place de la fonction à intégrer en donnant l'écriture :

$$4 \times \int_{z=-\rho \sin \theta}^{z=\rho \sin \theta} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 \rho d\theta d\rho$$

Mais celle-ci ne représente aucune intégrale connue.

Selon le résultat obtenu (extrait ci-dessus), ce qui varie entre 0 et 1 c'est ρ pas θ . C'est aussi z qui varie entre $-\rho \sin \theta$ et $\rho \sin \theta$ pas le ρ . **E3** intervient alors dans la démarche de **ER**. Il préfère s'inspirer du cours qu'il avait eu précédemment, dans lequel ils ont travaillé sur des tâches où tout est donné d'avance, la fonction à intégrer et l'intervalle d'intégration, données qu'ils ne trouvaient pas dans ce problème (ils devraient les chercher).

E3 : parce que, hier, on a vu que l'on avait une fonction et un intervalle d'intégration. Donc nous, pour changer de variables, bah il nous faut, enfin disons que l'on a trouvé à peu près le domaine d'intégration, mais on n'a pas la fonction. Tu vois ce que je veux dire ? Ça nous aide à trouver un domaine, mais on n'a pas la fonction. **RE** : Bah ! Ça va être ! **E3** : $f(x,y,z)$, sais pas !

Mise à part la difficulté générée par l'absence de la fonction à intégrer, ils discutent aussi sur les bornes de l'intégrale itérée la plus externe. Pour eux, la variable z est en général relative à l'intégrale itérée la plus externe (la dernière à réaliser). **E3** se pose alors la question suivante :

$$\int \int \int_{z \theta \rho} \rho d\rho d\theta dz \stackrel{?}{=} \int \int \int_{\rho \theta z} \rho dz d\theta d\rho$$

Auparavant l'intégrale de gauche prédominait dans les démarches de ce binôme. L'étudiant s'est alors posé cette question, car dans la représentation analytique qu'ils ont trouvée plus haut, la variable z est exprimée en fonction de ρ et de θ . Donc l'intégrale itérée relative à z doit venir en première dans l'ordre d'intégration. Ils disent :

E3 : Moi ce qui me choque c'est que z vas l'intégrer entre un truc qui dépend de ρ et de θ . Tu vois ce que je veux dire ? « Rires ». **OBS** : *Qu'est-ce qui vous gêne ?* **E3** : En fait, c'est ce qui se passe, c'est qu'on a trouvé ... On voulait chercher entre quoi varient ρ , θ et z . En général on fait ρ , θ et z dernier. Le problème c'est que dz , on a vu ... **OBS** : *Pourquoi vous avez fait le dessin ?* **E3** : Pour que ce soit plus clair !

Leur raisonnement révèle qu'ils ont des difficultés dans la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale double ou triple (donnant un bon ordre d'intégrale itérée). Alors qu'ils ont effectivement trouvé les bornes correctes d'intégration

mais ils ont passé trop de temps pour la mise en œuvre effective. Il semble que leurs difficultés viennent du fait qu'ils sont trop influencés par le type de tâches usuelles où tout est donné. C'est-à-dire que l'écriture algébrique du calcul d'une intégrale, comportant tous les éléments nécessaires pour procéder aux calculs, est établie. La tâche proposée à l'étudiant est simplement d'effectuer les calculs. Voilà pourquoi le type de tâche emblématique dégagé dans notre analyse institutionnelle suscite des difficultés de coordination entre registres de représentation selon le choix du passage [SP]↔[RGS]↔[EIM] du Modèle MATIM.

Pour essayer de comprendre ce qui se passe et essayer de contrôler la tâche, le binôme refait les dessins. **E3** trace le plan $z=y$ ensemble avec le cylindre $C1$ et marque correctement la variation de θ de 0 à π (cf. extrait de la copie ci-dessous). Alors que **ER** trace la projection orthogonale de $C1$ sur le plan xOy et marque $d\theta$ dans son dessin. Ils réalisent ensuite les calculs, chacun de leur côté. Ils parviennent ainsi à la solution attendue.

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 \int_{z=-\rho \sin \theta}^{\rho \sin \theta} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$q = \frac{4}{3} \Rightarrow Q = 4q = \frac{16}{3}$$

Production d'E3

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 \int_{z=-\rho \sin \theta}^{\rho \sin \theta} \rho \, dz \, d\rho \, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\rho=0}^1 2\rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{2\rho^3}{3} \sin \theta \right]_0^1 d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$$

$$Q = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

Production d'ER

Ainsi se termine la production du binôme **B2**.

En revanche le binôme **B1**, persiste à jouer sur le tracé des dessins par des coupes. Voici ce qui se passe quand l'observateur interpelle les étudiants :

(B1, PV 05)

OBS : *Quelle est votre idée principale ?*
E1 : Sont plusieurs en fait ! [...] couper la surface avec les symétries, pour avoir le volume minimal et après calculer par intégration. OBS : *qu'est ce qui vous manque ?* **E1** : L'équation à intégrer quoi !

OBS : *Quels moyens avez-vous pour trouver une telle équation à intégrer ?*
 OBS : *Silence.* OBS : *Pourquoi avez-vous fait le dessin ?*
E1 : Pour connaître le volume et ce qu'il faut pour calculer l'intégrale.

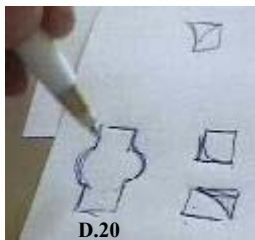
L'enjeu du problème posé est clair. Les étudiants savent donc pertinemment ce qu'ils doivent faire mais ils ne savent pas comment y accéder. Ils parlent souvent du découpage de Q sans parvenir à bien le contrôler. Ils procèdent souvent par tâtonnement. Plusieurs dessins sont réalisés, mais ils ne correspondent ni à Q , ni à un sous-solide de Q . On voit bien, ici, les difficultés qu'ils ont pour repérer le solide Q ainsi que celles relatives à la coordination entre les représentations graphique et analytique de Q ou d'un de ces sous-solides. Toutefois, ils font beaucoup d'efforts. Ils arrivent, par exemple, à trouver les bornes correctes pour la variable y en mettant en place l'écriture $\int \int \int_{-z}^z ? \, dydzdx$.

Néanmoins ils se posent encore une fois la question sur la fonction à intégrer, sans même parler des bornes des domaines de variation de x et de z . Cette question les conduit encore à la manipulation algébrique des expressions (cf. protocole en annexe) en trouvant ainsi un ellipsoïde :

(B1, PV 05) **E1** : Ça c'est un **ellipsoïde** ; **E2** : Hum ; **E1** : Parce que si c'était 1, (OBS : *E1* montre le coefficient de x^2) ce serait une **sphère** ; **E2** : Hum ! **E1** : En fait c'est une **sphère** qui est décalée à côté, donc c'est un **ellipsoïde** ! ... En fait c'est un **ellipsoïde** ... Eh ! De révolution ! **E2** : Hum !

L'énoncé ouvert de ce problème laisse les étudiants relativement libres. Ils ont donc associé plusieurs formes à Q et ses sous-solides (cône, sphère, ellipsoïde). Ils ont aussi vu plusieurs formes planes selon les projections des coupes réalisées, notamment le carré, les cercles, l'ellipse, les bouts des cercles, les demi-cercles, les triangles. Ceci montre bien l'importance des traces des dessins des figures classiques dans les pratiques des étudiants pour essayer de simplifier la difficulté du problème.

Après avoir pensé à l'ellipsoïde, ils décident cependant d'abandonner cette piste et de reprendre le dessin **D.4**. En révisant ce dessin, ils s'aperçoivent que ces parties ne sont pas des cônes. L'intervention de l'étudiant **E1** illustre parfaitement cette observation : *Cette partie-là n'est pas un cône ... ça fait un truc bizarre en fait ! : Il faut trouver la fonction euh ! Euh ! La fonction à intégrer quoi !* (cf. aussi PV 06 du protocole). Ils n'arrivent cependant toujours pas à décrire Q , ni graphiquement, ni analytiquement. Ils ne trouvent non plus la fonction dont ils



parlent. Face à ces difficultés, ce binôme essaie de trouver le volume de Q à partir d'une intégrale simple. Ils tracent le 20^{ème} dessin sur le plan xOy (cf. action dans l'image ci-contre) qu'ils agrandissent par le dessin n° 21, comme le montre l'image ci-dessous. Ensuite, les étudiants décident de découper ce dernier dessin en triangles et en demi-cercles, ils en estiment les bornes d'intégration tout en cherchant une expression

à intégrer. **E1** intervient en disant : *En gros il faut intégrer entre -1 et 1, dz. Intégrer quoi, par contre ?*

Cette question les amène à un travail analytique du dessin 21 qu'ils décrivent par l'expression

$$2\sqrt{1-z^2} + 2\pi\left(\frac{1+z}{2}\right)^2.$$

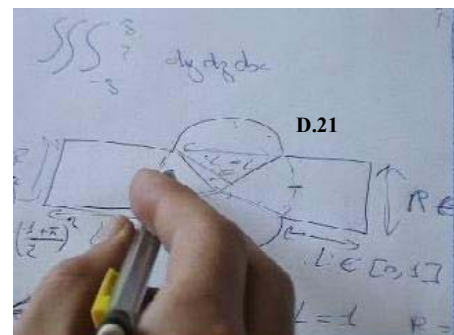
E1 dit encore : *Donc ça fait l'intégrale de ça !*

Donc $\int_{-1}^1 2\sqrt{1-z^2} + \frac{\pi}{2}(1+z)^2 dz$, c'est l'approximation de ce demi-cercle (Rires).

Ils réalisent d'abord l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{\pi}{2}(1+z)^2 dz$ mentalement.

C'est **E1** qui crie : *Huit-sixième de Pi, ça fait euh ! Euh ! Quatre tiers de Pi... Après c'est pratique quoi. Par contre c'est deux fois, non ! Quatre fois, racine.*

Ils développent ainsi les calculs de l'intégrale $\frac{4}{3}\pi + 4\int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz$ que nous transcrivons ci-dessous (cf. aussi B1, PV 09 du protocole, ainsi que les brouillons annexés).



$$\frac{4}{3}\pi + 4\int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz$$

$$4\int_0^1 (1-z^2)^{1/2} dz = \frac{8}{3} \left[(1-z^2)^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{8}{3} \times -1 = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}(\pi - 2)$$

B1 termine les calculs par $\frac{4}{3}(\pi - 2) \approx 1,52$ (cf. PV 11).

Comme nous l'avons déjà mentionné, les l'intégrales simples fournissent des techniques propres au calcul des volumes. Notamment, celle relative au calcul de volume d'un *solide de révolution*, celle associée aux volumes par des *anneaux cylindriques* et celle destinée au calcul de volume par des *sections transversales*. Cette dernière, comme le montre l'analyse a priori, est tout à fait exploitable ici. Mais, c'est peut-être par effet de contrat que les étudiants ne passent pas à cette possibilité.

Gardons à l'esprit que le calcul de l'intégrale $\int_{-1}^1 \frac{\pi}{2}(1+z)^2 dz$ réalisé mentalement par ce binôme, produit $\frac{7}{3}\pi$ et non pas $\frac{4}{3}\pi$ (quant ils disent : *Huit-sixième de Pi, ça fait euh ! Euh ! Quatre tiers de Pi*). De plus, $4\int_0^1 \sqrt{1-z^2} dz$ correspond à 4 fois $\frac{1}{4}$ d'aire du cercle centre de rayon 1. Elle produit π et pas $-\frac{8}{3}$. De ce fait, le calcul de $\int_{-1}^1 2\sqrt{1-z^2} + \frac{\pi}{2}(1+z)^2 dz$ conduit à $\frac{10}{3}\pi \approx 10,472$ et non à $\frac{4}{3}(\pi - 2) \approx 1,52$.

Voici les arguments de ce binôme suite à la dernière intervention de l'observateur.

OBS : *C'est terminé ?*

E1 : Oui, je pense !

E2 : Oui !

OBS : *Comment vous avez fait pour trouver ce résultat ?*

E1 : En fait on a pris un plan parallèle ... un plan z égal à constante ! En fait on a un truc comme ça.

OBS : *il montre le dessin n° 21, cf. son geste dans l'image ci-contre.*

E1 : c'est bizarre !

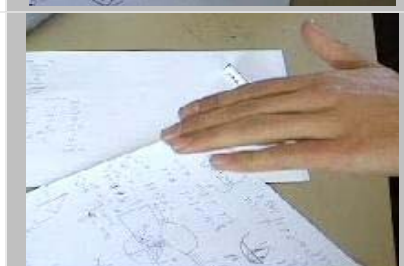
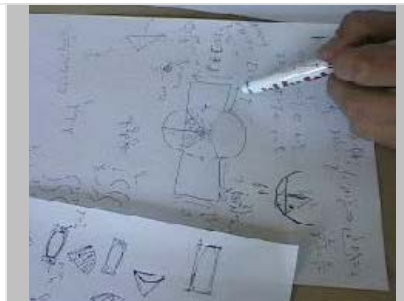
E1 : L et R ... En fait on fait une coupure par un plan z égal à une constante !

OBS : *Il fait un geste avec la main gauche dans un mouvement parallèle au plan xOy , comme le montre l'image ci-contre.*

E1 : ... Et intégrer entre -1 et 1 par z . Donc là on a ... En fonction de z ... Je dis que euh ! Euh ! Cette approximation, disons que là on avait deux demi-cercles ! De rayon euh ! La moitié ! De diamètre euh ! (cf. dernière image).

OBS : *Ça c'est pour voir le solide dans lequel vous avez cherché à calculer le volume, c'est ça ?*

E1 : En fait on a cherché à calculer la surface de ça pour intégrer euh ! Euh ! ...



Mises à part les difficultés des étudiants pour visualiser le solide de l'intersection et dégager une représentation analytique, le calcul de l'intégrale lui-même pose des difficultés dans les

pratiques de ce binôme. Le problème posé révèle donc une véritable difficulté concernant la représentation des objets dans l'espace tant graphiquement, qu'analytiquement. Finalement, le binôme **B1** n'est pas parvenu à la solution attendue.

3. Conclusion sur l'analyse a posteriori

L'analyse des productions des étudiants que nous venons d'exposer nous permet de constater certains besoins des étudiants quant à l'apprentissage des *IM*. Les deux binômes s'appuient d'emblée sur une représentation graphique pour entrer dans le traitement du problème. De ce fait, comme pour les étudiants brésiliens, c'est surtout le choix selon le passage $[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM]$ du Modèle MATIM qui prédomine dans les pratiques des étudiants devant résoudre le type de tâche emblématique dans l'environnement papier/crayon. Cependant, comme nous venons de voir, en suivant ce passage (au détriment du passage $[SP] \Leftrightarrow [RAS] \Leftrightarrow [EIM]$ selon une résolution purement analytique), les étudiants rencontrent plusieurs difficultés pour produire une représentation du solide « isolé » dont ils ont besoin dans l'interprétation, la compréhension et la réalisation du problème.

On remarquera que ce problème dont l'énoncé aurait pu laisser penser qu'il était simple constitue en fait une tâche complexe, même pour ces étudiants qui sont habitués au RG, notamment dans leur pratique de construction mécanique.

Comme nous venons de le voir dans notre présentation de leurs démarches, au début du traitement du problème les deux binômes observés montrent bien une similitude dans leurs raisonnements (en sachant que ces deux binômes ont travaillé séparément l'un de l'autre).

On a vu toutefois, qu'un seul binôme (**B2**) donne la solution attendue, grâce à l'intervention de l'étudiant redoublant (**ER**) qui se souvient que ce problème était le même que celui qu'ils avaient traité l'année dernière, en utilisant *Maple*. Alors que l'idée des plans sécants utilisés par ce binôme (**B2**) pour accomplir la tâche (qui ne leur permet toutefois pas de produire la représentation du solide « isolé » comme ils le voulaient dès le début) n'était pas à l'esprit de **B1**. En fait, le découpage de Q en quatre sous-solides à partir de tels plans n'apparaît pas dans aucun manuel comportant ce problème. Il nous semble qu'un tel découpage est non-usuel. Il ne fait donc pas l'objet de l'enseignement habituel.

Le binôme **B1** n'est pas parvenu à la solution attendue. Il a réalisé cependant 23 dessins, parmi lesquels on trouve l'idée de découpage du solide par des plans. Mais les plans considérés ne sont pas les mêmes que ceux utilisés par **B2**. Ils mobilisent plusieurs connaissances de géométrie plane (2D) et dans l'espace (3D). Malgré cela, les dessins qu'ils produisent ne leur permettent pas de décrire analytiquement ni Q , ni l'un de ces morceaux par symétrie. En effet, l'interaction entre les représentations graphiques et analytiques reste problématique dans leurs pratiques autour de ce type de tâches.

On remarquera alors que chaque fois qu'ils butent dans la mise en place de l'intégrale, ils ont besoin de s'appuyer sur un dessin. C'est-à-dire qu'au fur et à mesure qu'ils avancent dans les

calculs, ils reviennent toujours au tracé d'un dessin, ils ont donc besoin d'un contrôle graphique pour la mise en place des calculs analytiques. En effet, ils essaient d'améliorer les dessins qu'ils font. Cependant, il apparaît que ces deux aspects, graphique et analytique, de leur travail restent trop disjoints pour leur permettre des éléments de contrôle suffisants.

La lecture de productions effectives des étudiants, donne ainsi l'impression qu'avoir une représentation graphique du solide, en faisant les dessins associés, est quelque chose d'indispensable. Même si l'analyse a priori du problème montre que ce n'est pas forcément nécessaire de passer par **RG**, pour réaliser le calcul de l'intégrale. Mais, pour les étudiants une représentation graphique est importante.

Ainsi on peut dire que, les pratiques des étudiants sont révélateurs le rapport institutionnel au **RG** pour les **IM**. Cette représentation graphique est présente dans l'enseignement, mais elle n'est pas vraiment opérationnelle pour écrire les intégrales multiples, tandis qu'elle devrait l'être. En ce sens, un logiciel comme *Maple* peut être un moyen pour décharger l'étudiant de cette tâche qui lui est coûteuse, mais indispensable pour le traitement du problème. Autrement dit, si les étudiants ont besoin d'une représentation graphique qui paraît coûteuse, alors *Maple* peut jouer un rôle capital, car ce logiciel peut permettre une meilleure prise en charge de cette représentation graphique du solide isolé à partir d'un travail outillé par des techniques instrumentées, particulièrement le *crible géométrique*. Du coup, cela peut décharger l'étudiant d'une tâche qui peut le bloquer dans la résolution du problème. L'interprétation et la compréhension du problème peuvent être renforcées et la résolution devient simplifiée.

Dans la suite de notre travail, nous nous intéresserons plus particulièrement au traitement du même problème en utilisant le logiciel *Maple* (ce qui constitue la deuxième partie de notre expérimentation).

PARTIE E2

LES PRATIQUES DES ETUDIANTS DANS L'ENVIRONNEMENT INFORMATIQUE MAPLE

A la suite de cette première expérimentation, nous avons donc mis en place une nouvelle expérimentation en intégrant l'utilisation de *Maple*.

Au vu des difficultés rencontrées par les deux binômes dont nous venons d'analyser les procédures, il nous a paru nécessaire de modifier la consigne donnée aux étudiants, de façon à rendre le problème plus accessible. Il nous a également fallu négocier avec l'enseignant de la classe où l'expérimentation a été réalisée. Enfin, l'intégration du logiciel *Maple*, s'il nous semble propre à outiller les étudiants de façon à les aider dans la recherche de la solution du problème, génère également une potentialité plus grande qui peut aussi être source de choix plus complexes. Ainsi, nous avons été amenés à découper notre problème en cinq questions, constituant la consigne proposée aux étudiants. Ce découpage permet la modélisation du problème en évacuant ainsi certaines contraintes du logiciel, dégagées dans le chapitre D et de mettre en évidence les genèses instrumentales qui peuvent se construire selon les techniques de résolutions, les stratégies observables, la réduction des faits à observer lors de l'expérimentation et la généralisation du problème.

Voici l'énoncé finalement retenu :

Dans un repère orthonormé direct, on considère les deux cylindres $C1$ et $C2$ d'inéquations respectives $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$, et le solide Q déterminé par l'intersection de $C1$ et $C2$.

01	Donner des équations paramétriques des surfaces $S1$ et $S2$ délimitant $C1$ et $C2$.
02	Donner une représentation graphique de $S1$ et $S2$ à l'aide de <i>Maple</i> , d'abord séparément, puis ensemble, en les différenciant par deux couleurs.
Remarque	Il est facile de voir que Q est entièrement compris dans le cube $[-1 ; 1]^3$. Si nécessaire ajuster la représentation précédente pour la limiter à ce cube. On veut maintenant "effacer" les parties de chacun des cylindres qui ne sont pas sur la frontière de Q .
03	Montrer que $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans dont on donnera les équations (attention on ne demande pas nécessairement de déterminer des équations de l'intersection).
04	Utiliser ce résultat pour donner la représentation graphique du solide Q (en faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q) à l'aide de <i>Maple</i> (on continuera à distinguer les deux cylindres par des couleurs différentes).
05	Calculer le volume de Q .

ANALYSE A PRIORI

Les buts visés sont d'étudier comment les étudiants vont résoudre ce problème dont la sous-tâche importante consiste à obtenir une représentation adéquate du solide en jeu, en utilisant les outils du logiciel *Maple*. Comment les étudiants s'approprient ces outils dans ce type de tâche ? Le logiciel *Maple* fournit-il des rétroactions efficaces pouvant favoriser le travail des étudiants ? Comment ?

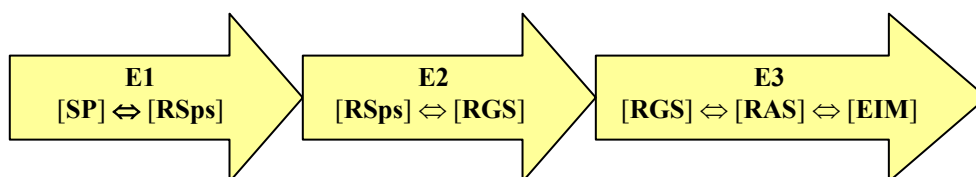
Pour atteindre ces buts, nous avons choisi un problème **adapté** et **légitimé** de l'institution en jeu. **Adapté** car, il peut se résoudre par différentes techniques institutionnalisées dans l'enseignement des intégrales. Ce problème peut entraîner des difficultés chez les étudiants lors du traitement des différents types de tâches emblématiques, mettre en évidence le lien entre les divers types de représentation des surfaces données par leurs équations (question 01), avoir la représentation analytique et graphique du solide (questions 04), faire le lien entre les objets de deux registres de représentation, choisir un découpage ou un encadrement adéquat (par symétrie du solide) qui peut permettre la mise en place d'une écriture algébrique du calcul de l'intégrale, conduisant au calcul de volume de Q (question 05) dans sa totalité. **Légitimé** car, ce problème se trouve, comme nous l'avons déjà dit, dans les deux manuels (SWO et SPIE) étudiés dans le chapitre B.

1. Techniques de résolution

Les processus d'instrumentation dans *Maple*, vont modifier la praxéologie de type de tâches emblématique. Relativement à la stratégie S3, les techniques et les procédures de réalisation de tâches ne fonctionnent pas forcément de la même manière que dans l'environnement *papier/crayon*. Nous présentons ici les stratégies possibles attachées à des processus de l'instrumentation pouvant permettre la modélisation du problème dans *Maple*.

2. La modélisation du problème selon de modèle MATIM

Le modèle MATIM nous a permis de mettre en évidence la multiplicité des sous-tâches possibles dans l'interaction du sujet avec les différents types de tâches des *IM*. Dans cette multiplicité, on a vu que c'est surtout le choix selon le passage $[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM]$ qui prédomine dans les pratiques des étudiants devant résoudre le type de tâche emblématique dans l'environnement *papier/crayon*. A la base de ce résultat nous suivrons les étapes schématisées ci-dessous (extrait du modèle MATIM).



- **E1** - L'enjeu de la première étape consiste à donner les représentations analytique et graphique des surfaces (RSps) cylindriques dans *Maple*, d'abord séparément puis ensemble. Ici prédomine l'apprentissage des outils du logiciel et les premières

transformations des objets mathématiques en jeu ainsi que le choix d'outils appropriés au traitement du problème à travers l'analyse des conditions des constructions de schèmes d'utilisation. Cette étape apporte donc les réponses aux questions 01 et 02.

- **E2** - L'enjeu de la deuxième étape est de donner à partir du travail réalisé dans l'étape E1, une représentation graphique du solide (Q) de l'intersection des deux cylindres dans *Maple*. D'où la nécessité d'enlever les "bouts" de S1 et S2 qui ne forment pas le contour de Q : C'est-à-dire la *conservation unique des morceaux de surfaces assemblés qui forment le contour du solide en tant qu'objet géométrique borné* : le **crible géométrique**. Cette étape apporte les réponses aux questions 03 et 04.
- **E3** - L'enjeu de la troisième étape est de calculer le volume de Q (après avoir développé les étapes précédentes) selon le choix d'une intégrale *double* ou *triple*. Cette étape apporte donc la réponse à la question 05.

3. Stratégies observables

Nous distinguons trois possibilités pour accomplir l'étape E1, qui débouchent sur 5 stratégies possibles.

SP	RSps				
Intersection des cylindres des inéquations $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$	Fonctions		Paramétrage		Cylindriques
	Explicites (SO1)	Implicites (SO2)	Angulaire (SO3)	Libre (SO4)	Cylinderplot (SO5)

Tableau 13

SP : Situation problème ; RSps : Représentation de surfaces.

SO1 : Stratégie observable 1

SO2 : Stratégie observable 2

SO3 : Stratégie observable 3

SO4 : Stratégie observable 4

SO5 : Stratégie observable 5

3.1 Stratégie des fonctions explicites (SO1)

Les surfaces cylindriques de C1 et C2 que l'on nomme S1 et S2 peuvent éventuellement être représentées respectivement par les fonctions suivantes :

$$S1: y = g_1(x, z) = \sqrt{1-x^2} \text{ et } y = g_2(x, z) = -\sqrt{1-x^2}, \text{ avec } -1 \leq x \leq 1, z \in \mathbb{R}$$

$$S2: z = h_1(x, y) = \sqrt{1-x^2} \text{ et } z = h_2(x, y) = -\sqrt{1-x^2}, \text{ avec } -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}$$

Où g_i et h_i , $i=1,2$ sont des fonctions continues respectivement sur les régions infinies $\{(x,z); -1 \leq x \leq 1, z \in \mathbb{R}\}$ et $\{(x,y); -1 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ des plans xOz et xOy.

Les représentations graphiques de S1 et de S2 par des techniques *papier/crayon* donnent les cylindres C1 et C2 qui ont comme axes respectifs Oz et Oy. Mais, comme nous l'avons vu plus haut, ce choix n'est pas identique dans *Maple*, qui interprète g et h comme une même fonction. C'est-à-dire qu'en utilisant la syntaxe (01) de la commande **plot3d** les graphiques de g_i , $i=1,2$ et de h_i , $i=1,2$ sont toujours identiques (cf. les résultats, tableau 2 ci-dessous).

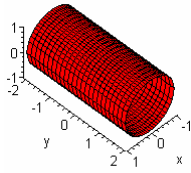
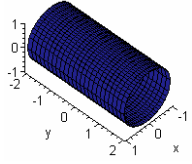
<pre>> restart: with(plots): > g1:=unapply(sqrt(1-x^2),(x,z)); g2:=(x,z)->g1(x,z); plot3d({g1(x,z), g2(x,z)},x=-1..1,z=-2..2, color=red, scaling=constrained);</pre> $g_1 := (x, z) \rightarrow \sqrt{1-x^2}, g_2 := (x, z) \rightarrow -\sqrt{1-x^2}$ 	<pre>> restart: with(plots): > h1:=unapply(sqrt(1-x^2), (x,y)); h2:=(x,y)->h1(x,y); plot3d({h1(x,y), h2(x,y)},x=-1..1,y=-2..2, color=navy, scaling=constrained);</pre> $h_1 := (x, y) \rightarrow \sqrt{1-x^2}, h_2 := (x, y) \rightarrow -\sqrt{1-x^2}$ 
---	--

Tableau 14 : Emploi de la syntaxe (01) de la commande plot3d

En effet, une fonction continue de deux variables quelconques est toujours interprétée par ce logiciel comme définie sur le plan xOy . Ainsi, par effet de la contrainte **fonctionnelle**, l'étape E1 (modèle MATIM) est irréalisable dans *Maple*. On ne peut pas avoir l'intersection des deux cylindres dans *Maple* à partir des représentations graphiques des fonctions associées.

3.2 Stratégie des fonctions implicites (SO2)

Il est possible d'envisager les représentations graphiques de deux cylindres en utilisant la syntaxe (07) de la commande **implicitplot3d**, en entrant directement les inéquations $x^2+y^2 \leq 1$ et $x^2+z^2 \leq 1$ des deux cylindres dans cette syntaxe.

Aux erreurs éventuelles de syntaxe près, les résultats attendus sont les suivants (ici l'étape E1 est accomplie) :

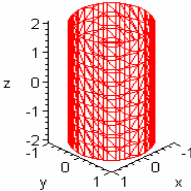
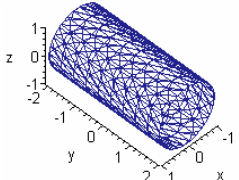
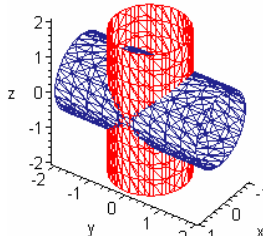
<pre>> restart: with(plots): > implicitplot3d(x^2+y^2<=1, x=-1..1, y=-1..1, z=-2..2, color=red, scaling=constrained, style=hidden,labels=[x,y,z]);</pre> 	<pre>> implicitplot3d(x^2+z^2<=1, x=-1..1, y=-2..2, z=-1..1, color=navy, scaling=constrained, style=hidden, labels=[x,y,z]);</pre> 
<pre>> display (% , %%);</pre> 	

Tableau 15 : Emploi de la syntaxe (07) de la commande implicitplot3d

La difficulté ici vient de ce qu'il ne faut conserver que certaines parties des surfaces délimitant le solide Q pour faire apparaître leur contour (E2, le **crible géométrique**). Toutefois, comme nous l'avons déjà vu, la syntaxe (07) de la commande **implicitplot3d** ne

permet d'utiliser d'autres bornes que des valeurs constantes. Donc, on ne peut pas dégager le solide Q **criblé** à l'aide de cette syntaxe (effet de la contrainte **implicite**). Ce mode de représentation conduit donc à une impasse par rapport au problème.

Ainsi aucune des deux stratégies précédentes ne permettent d'obtenir une représentation du solide criblé. Pour éviter que les étudiants ne tombent dans cette impasse, ce qui aurait pu être une source inutile de perte de temps, nous avons donc choisi de poser la première question sur la recherche des équations paramétriques de surfaces cylindriques, en évacuant ainsi les deux choix possibles relatifs à SO1 et SO2 précédents.

3.3 Stratégie de représentation paramétrique

Ainsi, dans la question 01 on peut attendre les deux représentations paramétriques suivantes :

- un paramétrage que nous appelons "**paramétrage angulaire**" contrôlé par les expressions de *sinus* et de *cosinus* d'un angle,
- un paramétrage que l'on nomme "**paramétrage libre**". Dans ce cas, on reste avec l'équation cartésienne en tirant par exemple $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ pour le cylindre C1 et $z = \pm\sqrt{1-x^2}$ pour l'autre cylindre C2.

Représentations paramétriques de C1 et C2 à partir d'un paramétrage	
I	Libre
$S1 = \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, d \in \mathbb{R} \\ z = d \end{cases}$	$S1 = \begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 1, s \in \mathbb{R} \\ z = s \end{cases}$
$S2 = \begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = h, 0 \leq \alpha \leq 2\pi, h \in \mathbb{R} \\ z = \sin \alpha \end{cases}$	$S2 = \begin{cases} x = u \\ y = v, -1 \leq u \leq 1, v \in \mathbb{R} \\ z = \pm\sqrt{1-u^2} \end{cases}$
Le solide de l'intersection	
$Q = \{(x,y,z) ; (x,y,z) \in C1 \cap C2\}$	
III	

3.3.1 Le choix de paramétrage angulaire (SO3)

A partir de ce choix, il est donc possible d'envisager la représentation graphique des deux cylindres en utilisant uniquement la syntaxe (04) de la commande **plot3d**. Ainsi, le Tableau 16 ci-dessous regroupe les sous-tâches nécessaires pour la réalisation du problème dans **Maple** en utilisant le paramétrage angulaire.

Ce tableau 4 comporte 25 lignes des commandes numérotées selon une séquence (01, 02, ..., 25) continue qui révèle les actions possibles de l'utilisateur devant résoudre le problème d'où l'on peut voir apparaître :

- ▶ les registres d'écritures en ligne pour les expressions instrumentées ;
- ▶ les registres graphiques ou analytiques pour les résultats donnés par **Maple** "conforme" aux ostensifs liés aux objets mathématiques.

Les données ainsi obtenues, permettent de mener une analyse plus détaillée suivant les trois étapes **E1**, **E2** et **E3** présentées plus haut.

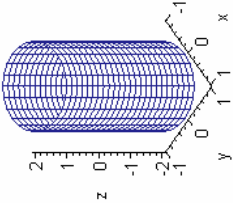
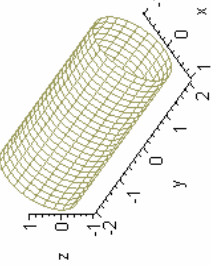
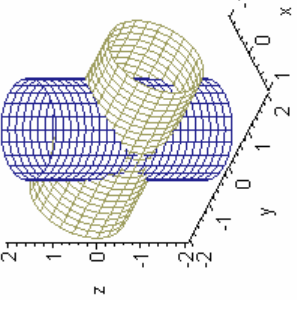
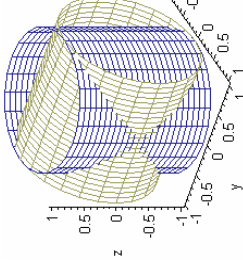
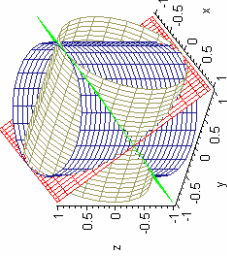
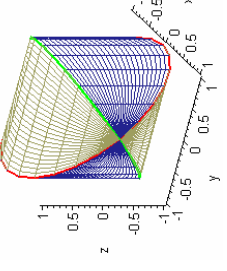
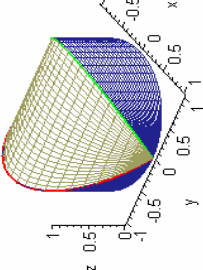
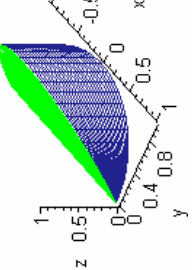
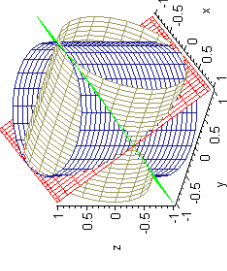
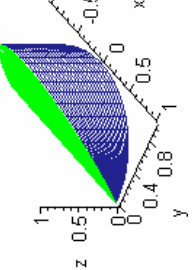
sous-tâche-1		sous-tâche-2		sous-tâche-3		sous-tâche-4			
<p>01 > restart: with(plots):</p> <p>02 > plot3d([cos(theta), sin(theta), d], theta=0..2*Pi, d=-2..2, color=navy, scaling=constrained, style=hidden, labels=[x,y,z]);</p> 	<p>03 > plot3d([cos(alpha), h, sin(alpha)], alpha=0..2*Pi, h=-2..2, color=khaki, scaling=constrained, style=hidden, labels=[x,y,z]);</p> 	<p>04 > display (%);</p> 	<p>05 > C11:=plot3d([cos(theta), sin(theta), d], theta=0..2*Pi, d=-1..1, color=navy);</p> <p>06 > C21:=plot3d([cos(alpha), h, sin(alpha)], alpha=0..2*Pi, h=-1..1, color=khaki);</p> <p>07 > display (C11, C21, style=hidden, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</p> 	<p>08 > PlanInt1:=plot3d([m, sin(a), sin(a)], a=0..2*Pi, m=-1..1, color=green);</p> <p>09 > PlanInt2:=plot3d([n, -sin(b), sin(b)], b=0..2*Pi, n=-1..1, color=red);</p> <p>10 > display (C11, C21, PlanInt1, PlanInt2, style=hidden, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</p> 	<p>11 > C12:=plot3d([cos(theta), sin(theta), d], theta=0..2*Pi, d=-sin(theta) .. sin(theta), color=navy);</p> <p>12 > C22:=plot3d([cos(alpha), h, sin(alpha)], alpha=0..2*Pi, h=-sin(alpha)..sin(alpha), color=khaki);</p> <p>13 > display (C12, C22, style=hidden, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</p> 	<p>14 > C13:=plot3d([cos(theta), sin(theta), d], theta=0..Pi, d=0..sin(theta), color=navy);</p> <p>15 > C14:=plot3d([cos(theta), sin(theta), d], theta=Pi..2*Pi, d=0..-sin(theta), color=navy);</p> <p>16 > C23:=plot3d([cos(alpha), h, sin(alpha)], alpha=0..Pi, h=-sin(alpha)..sin(alpha), color=khaki);</p> <p>17 > display (C13, C14, C23, style=hidden, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</p> 	<p>18 > PlanInt1:=plot3d([p, sin(t), sin(t)], t=0..Pi, p=0..cos(t), color=green);</p> <p>19 > C13:=plot3d([cos(theta), sin(theta), d], theta=0..Pi, d=0..sin(theta), color=navy);</p> <p>20 > display (C13, PlanInt1, style=hidden, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);</p> 		
<p style="text-align: center;">sous-tâche-5</p>		<p style="text-align: center;">sous-tâche-6</p>		<p style="text-align: center;">sous-tâche-7</p>		<p style="text-align: center;">sous-tâche-8</p>			
<p>21 > VQ:=8*Int(Int(Int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);</p> <p>22 > VQ:=8*Int(Int(Int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);</p> <p>23 > VQ:=8*Int(Int(Int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);</p> <p>24 > VQ:=8*int(int(int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);</p>		$V_Q = 8 \int_0^{\pi} \int_0^r \int_0^{r \sin(\theta)} r \, dz \, dr \, d\theta$ $V_Q = 8 \int_0^{\pi} \int_0^r r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\theta$ $V_Q = 8 \int_0^{\pi} 2r^2 \sin(\theta) \, d\theta$ $V_Q = \frac{16}{3}$		<p>25 > VS1:=evalf(VS1);</p> <p style="text-align: right;">VS1 = 5.333333333</p>		<p style="text-align: center;">sous-tâche-9</p> 		<p style="text-align: center;">sous-tâche-10</p> 	

Tableau 16 : Réalisation du problème en utilisant le logiciel Maple

L'étape E1

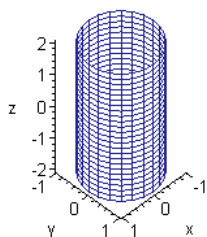
Les sept premières instructions constituent la première étape de la modélisation du problème.

On démarre (**restart**) d'abord l'environnement avec (**with**) les packages "**student**" et "**plots**" (cf. l'instruction 01).

Ensuite on donne la représentation graphique de C1 et de C2, d'abord séparément, en entrant correctement les expressions du paramétrage **angulaire** (dégagé plus haut) dans la syntaxe (04) de la commande **plot3d** (cf. sous-tâches 1 et 2), puis ensemble (cf. sous-tâche 3). Ceci répond à la question 02.

En reprenant la définition donnée par Duval (1988) (cf. cadre théorique, p. 22) on peut dire que, la lecture des résultats graphiques donnés par **Maple**, "conforme" aux *ostensifs* liés aux objets mathématiques, présuppose la discrimination des variables visuelles pertinentes et la perception des variations correspondantes de l'écriture algébrique des expressions instrumentées.

Il existe ici une similitude entre le registre de représentation des objets *ostensifs* manipulés par le logiciel et celui conforme au usage de l'environnement *papier/crayon*. En termes analytique, ces liens peuvent se préciser comme ci-dessous.

Représentation analytique usuelle (<i>papier/crayon</i>)	Représentation analytique instrumentée dans Maple
$C1 = \begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -2 \leq d \leq 2, \\ z = d \end{cases}$	$C1 = ([\cos \theta, \sin \theta, d], \theta = 0..2\pi, d = -2..2)$
Représentation graphique retournée par Maple	
	

Les deux paramètres θ et d sont d'abord les variables visuelles de contrôle sur les dimensions du cylindre affiché sur l'écran. On remarquera alors qu'un tel contrôle n'est pas évident. Il nécessite la mobilisation des références théoriques (les non-ostensifs) associées aux ostensifs que l'on manipule.

Comme le souligne Chevallard, « ...les éléments *ostensifs* font partie du réel empirique accessible aux sens. Par contraste, la présence de tel ou tel *non-ostensif* dans une pratique déterminée, ne peut être qu'induite ou supposée à partir de manipulations d'*ostensifs* institutionnellement associés. [...] (cf. cadre théorique, p. 19).

Ainsi, les variables visuelles en jeu, sont ensuite réduites afin d'**ajuster** la représentation

précédente dans le cube $[-1,1]^3$ centré, d'arêtes 2 (unités de la longueur), permettant de visualiser les morceaux des cylindres à faire disparaître et ceux qui forment le contour de Q (cf. sous-tâche 4). Cet **ajustement** représente donc une technique fondée sur l'appréhension perceptive des *ostensifs* graphiques affichés sur l'écran. Il pourra donc apparaître dans les pratiques des étudiants, désireux de visualiser l'emboîtement dans un cube. La manipulation directe du graphique à l'aide de la souris (dans cette technique), permet de jouer sur le graphique et de visualiser sa projection sur un plan de coordonnées pour expliciter un domaine d'intégration.

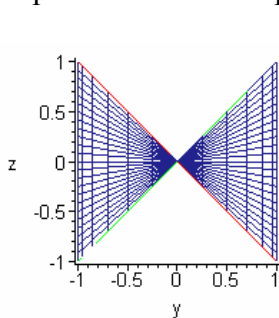
De l'étape E1 à l'étape E2

Les sous-tâches 5 et 6 (cf. Tableau 4) sont associées à la deuxième étape de la modélisation. Elles consistent à isoler le solide Q . Celle-ci se traduit par la technique du **crible géométrique** : *conservation unique des morceaux de surfaces assemblés qui forment le contour du solide en tant qu'objet géométrique borné*. Cette technique se révèle être le passage le plus difficile, mais aussi, le plus important dans le traitement du problème. En effet, une description du solide **criblé** est nécessaire. Cette description va jouer un rôle fondamental dans les liens possibles entre **RG** et **RA** du solide Q .

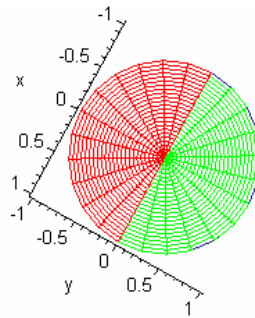
La description du crible

Comme on peut le voir (cf. Tableau 4) à partir de la sous-tâche 3, les deux surfaces cylindriques s'intersectent dans les deux plans (mis en évidence dans la sous-tâche 5) d'équations $z=-y$ et $z=y$ (question 03) (on peut montrer ceci en égalant les expressions $x^2+y^2 \leq 1$ et $x^2+z^2 \leq 1$ des cylindres).

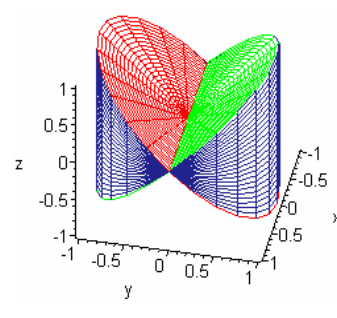
L'intérêt de connaître les deux plans est de bien discerner les parties, par exemple du cylindre C1 qui est le morceau du solide intersection qui se trouve entre les deux plans mis en évidence à la question précédente, c'est-à-dire $-y \leq z \leq y$ (si $y \geq 0$, partie en vert) et $y \leq z \leq -y$ (si $y \leq 0$, partie en rouge). De façon équivalente $-\sin\theta \leq d \leq \sin\theta$ « si $0 \leq \theta \leq \pi$, partie en vert » et $\sin\theta \leq d \leq -\sin\theta$ « si $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, partie en rouge » (l'avantage avec *Maple* c'est que l'on n'a pas besoin de distinguer le cas $y \geq 0$ du cas $y \leq 0$). Ainsi, on est amené dans la syntaxe (04) de *Maple* à mettre en place des données qui correspondent aux bornes d'intégration sur chaque sous-domaine de Q compris entre les deux plans, permettant de visualiser le solide **criblé**.



Graphique 01 (a), cylindre C1 projeté sur le plan yOz

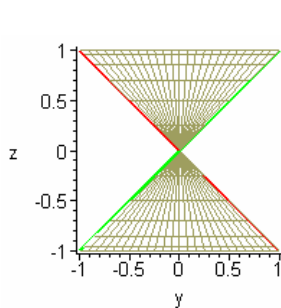


Graphique 01 (b), cylindre C1 projeté sur le plan xOy

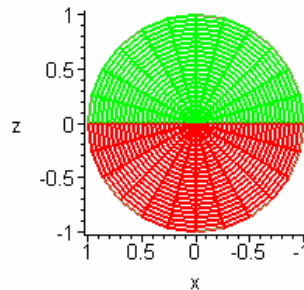


Graphique 01 (c), cylindre C1 en \mathbb{R}^3

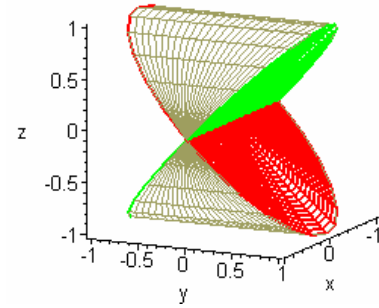
De la même façon, la partie du cylindre C2, qui est le morceau du solide intersection, se trouve entre les deux plans : $-z \leq y \leq z$ (si $z \geq 0$, partie en verte) et $z \leq y \leq -z$ (si $z \leq 0$, partie en rouge). Ou encore $-\sin \alpha \leq h \leq \sin \alpha$ « si $0 \leq \alpha \leq \pi$ » et $\sin \alpha \leq h \leq -\sin \alpha$ « si $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ », en sachant que $z = \pm \sqrt{1-x^2} = \pm \sqrt{1-\cos^2 \alpha} = \pm \sin \alpha$.



Graphique 02 (a), cylindre C2 projeté sur le plan yOz

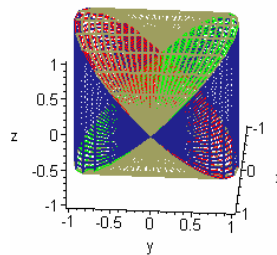


Graphique 02 (b), cylindre C2 projeté sur le plan xOz



Graphique 02 (c), cylindre C2 en \mathbb{R}^3

Dans ce cas, la détermination des plans d'intersection est une variable visuelle importante pour le contrôle du **crible géométrique**, permettant la prise de décision pour la définition de la hauteur de chaque sous-solide de Q . Ainsi l'union du graphique 01 (c) et du Graphique 02 (c) par l'utilisation de la commande **display** conduit à la représentation graphique du solide Q **criblé** (cf. le graphique 03, ci-dessous) dont on cherche à calculer le volume (question 05).



Graphique 03 (solide Q - crible)

De l'étape E2 le crible à l'étape E3 le calcul de l'intégrale

Les sous-tâches 7 et 8 sont associées à la troisième étape. Elles mettent en jeu un découpage de Q en sous-solide, une représentation analytique, une écriture algébrique du calcul de l'intégrale et les développements des calculs.

Comme nous l'avons souligné plus haut, ce solide ne se laisse pas représenter par une seule expression analytique. Il est formé par l'union de sous-solides cylindriques par symétrie. L'on ne peut donc pas, avec un seul calcul d'intégrale, calculer le volume de Q dans sa totalité. De plus, pour $z \leq 0$ le calcul de l'intégrale multiple sur Q (où la région R d'intégration est une sous-région du plan xOy) conduit à une valeur négative, qui est en fait l'opposé du volume. De même, pour $y \leq 0$ quand on considère R comme sous-région du plan xOz , ainsi que pour $x \leq 0$ si R est une sous-région du plan yOz .

Pour ces raisons, nous avons étudié le solide Q par symétrie et nous avons repéré seize sous-solides possibles de Q qui peuvent servir au calcul de son volume. De ce fait, la sous-tâche-7

(tableau ci-dessus) ne met en jeu que le découpage de Q en deux sous-solides par symétrie. Un tel découpage est assez simple : pour le faire, il suffit d'entrer dans **Maple** les expressions algébriques relatives aux parties de $C1$ comprises entre les plans $d=0$ et $d=\sin\theta$ (si $0 \leq \theta \leq \pi$) et entre les plans $d=0$ et $d=-\sin\theta$ (si $\pi \leq \theta \leq 2\pi$), et la parties du cylindre $C2$ comprises entre les plans $h=-\sin\theta$ et $h=\sin\theta$ (si $0 \leq \theta \leq \pi$).

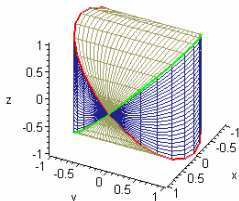
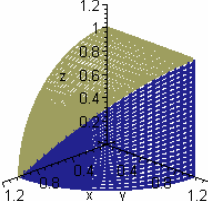
La sous-tâche-08 consiste alors à découper Q en huit sous-solides (que l'on nomme Q_8) à partir de deux méthodes possibles :

- le découpage « **usuel** » (dominant de point de vue institutionnelle).
- Le découpage « **non usuel** » (absent institutionnellement).

Nous avons joué essentiellement sur les deux variables. Ceci change notamment la difficulté de traitement du problème dans les deux environnements (*papier/crayon* et **Maple**).

Le découpage usuel du solide criblé

L'analyse écologique des manuels nous a montré que les modes de représentations des solides sont fortement liés aux techniques d'intégration. En effet, les auteurs des manuels (SWO et SPIE) proposent (indépendamment) un découpage, dont la représentation analytique se limite toujours en coordonnées cartésiennes. Voici la démarche possible en coordonnées cylindriques selon ce découpage.

Le solide Q criblé	Découpage « usuel » de Q en huit sous-solides
	 <p style="text-align: right;">Graphique 04</p>

La représentation analytique du sous-solide Q_8 peut être exprimée comme suit :

Région (polaire) d'intégration	Q_8 (huitième morceau de Q) en coordonnées cylindriques
$R_{11} = \left\{ (r, \theta), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}$	$Q_8 = \left\{ (r, \theta, z); (r, \theta) \in R_{11}, 0 \leq z \leq \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \theta} \right\}$

On peut avoir une écriture algébrique du calcul d'intégrale $V_Q = 8V_{Q_8} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \theta}} r dz dr d\theta$.

Ainsi, à partir de la méthode d'utilisation simultanée des commandes **Int** et **int** de **Maple** on obtient le résultat ci-dessous.

In	Registre en ligne des expressions instrumentées (action d'utilisateur)	Résultat (réaction de <i>Maple</i>)
1	> VQ:=8*Int(Int(Int(r, z=0..sqrt(1-(r*cos(theta))^2)), r=0..1), theta=0..Pi/2);	$VQ = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2 \cos(\theta)^2}} r dz dr d\theta$
2	> VQ:=8*Int(Int(int(r, z=0..sqrt(1-(r*cos(theta))^2)), r=0..1), theta=0..Pi/2);	$VQ = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2 \cos(\theta)^2} dr d\theta$
3	> VQ:=8*Int(int(int(r, z=0..sqrt(1-(r*cos(theta))^2)), r=0..1), theta=0..Pi/2);	$VQ = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{3} \frac{(1-\cos(\theta)^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{\cos(\theta)^2} \right) d\theta$
4	> VQ:=8*int(int(int(r, z=0..sqrt(1-(r*cos(theta))^2)), r=0..1), theta=0..Pi/2);	$VQ = \frac{16}{3}$

Notons que le calcul de l'intégrale $\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{(1-\cos(\theta)^2)^{\frac{3}{2}} - 1}{\cos(\theta)^2} \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)^2} \right) d\theta$ n'est pas aussi immédiat dans l'instrumentation classique par des techniques *papier/crayon*, que dans *Maple*. De plus, l'intégrant $\left(\frac{1-\sin(\theta)^3}{\cos(\theta)^2} \right)$ n'est pas défini en $\pi/2$.

On remarquera qu'a priori une manipulation trigonométrique de l'intégrand entraîne les techniques de calcul de cette intégrale. Voici la démarche possible (dans l'environnement *papier/crayon*) du passage de l'instruction **In3** à **In4** caché par *Maple*.

Transformation trigonométrique par des techniques classiques en <i>papier/crayon</i>
$\begin{aligned} \frac{1-\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} &= \frac{1-\sin^3 \theta}{1-\sin^2 \theta} = \frac{(1-\sin \theta)(1+\sin \theta + \sin^2 \theta)}{(1-\sin \theta)(1+\sin \theta)} = \frac{(1+\sin \theta + \sin^2 \theta)}{(1+\sin \theta)} \\ &= \frac{1}{1+\sin \theta} + \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta}{1+\sin \theta} = \frac{1}{1+\sin \theta} + \sin \theta = \frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} + \sin \theta \\ &= \frac{1}{2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)} + \sin \theta = \frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \sin \theta \end{aligned}$

Le calcul de l'intégrale simple à partir de la transformation ci-dessus en <i>papier/crayon</i>	
$\begin{aligned} \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} \sec^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \sin \theta \right) d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 t dt - \left[\frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\frac{8}{3} \tan t \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\frac{8}{3} \cos \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\frac{8}{3} (1-0) \right] - \left[\frac{8}{3} (0-1) \right] = \frac{16}{3} \end{aligned}$	Changement de variable $t = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}, dt = -\frac{d\theta}{2}$ $\theta = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$

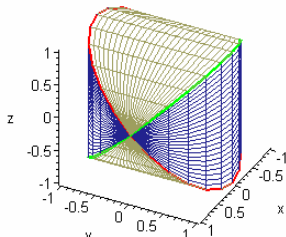
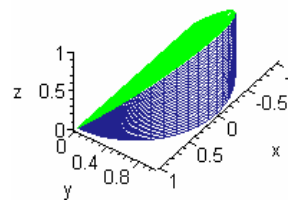
Le changement de variable pris en compte concerne seulement le calcul de l'intégrale de la fonction **sécante**, d'où la propriété d'inversion des bornes d'intégration a été utilisée pour faciliter les calculs.

Le découpage non usuel du solide criblé

La représentation graphique des plans d'intersection des deux cylindres joue un rôle important dans la représentation analytique de Q . En effet, cela contribue au calcul de l'intégrale. Les deux plans permettent d'avoir un découpage de Q qui n'a jamais été étudié dans une praxéologie traditionnelle sur les IM (comportant cette tâche). Ils sont par conséquent incités par la technique **crible géométrique**. Cette dernière justifie, peut-être l'absence de ce découpage dans l'enseignement traditionnel.

Comme nous le verrons par la suite, ce découpage suggère un calcul de l'intégrale relativement simple, tant en coordonnées cylindriques que cartésiennes. Ce nouveau découpage n'est donc pas un objet de l'enseignement traditionnel dans lequel l'encadrement du solide est souvent contrôlé par les parallélépipèdes infiniment petits inscrits dans le huitième des coordonnées positifs de Q (découpage **usuel**). Donc, le changement d'un découpage à l'autre est une valeur de variable didactique jouant un rôle dans les méthodes de calcul d'une intégrale multiple, tant par des techniques *papier/crayon* que par celles instrumentées dans *Maple*.

Voici ce que l'on peut attendre avec ce découpage.

Le solide criblé (cf. sous-tâche 7, Tableau 16)	Découpage " non usuel " de Q en huit sous-solides (cf. sous-tâche, Tableau 16)
	

Représentation analytique de	
Région (polaire) d'intégration $R_{I2} = \{(r, \theta), 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$	Q_8 (huitième morceau de Q) en coordonnées cylindriques $Q_8 = \{(r, \theta, z); (r, \theta) \in R_{I2}, 0 \leq z \leq r \sin \theta\}$

Les calculs de volume de Q en coordonnées cylindriques.	
Entrée (action du sujet)	Résultat (réaction du Maple)
> VQ:=8*Int(Int(Int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);	$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{r \sin(\theta)} r dz d\theta dr$
> VQ:=8*Int(Int(int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);	$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) d\theta dr$
> VQ:=8*Int(int(int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);	$V_Q = 8 \int_0^1 2r^2 dr$
> VQ:=8*int(int(int(r, z=0..r*sin(theta)), theta=0..Pi), r=0..1);	$V_Q = \frac{16}{3}$

On voit que les calculs de l'intégrale sont moins lourds à partir du découpage « **non usuel** ».

Nous analysons à présent le choix possible lié au traitement du problème à partir de la représentation paramétrique « **libre** » dégagée précédemment.

3.3.2 Le choix de paramétrage libre (SO4)

A priori, l'idée de la représentation paramétrique « libre » de C1 et C2 peut-être un point de départ dans le traitement du problème suivant le passage du modèle **MATIM** présenté plus haut.

Reprenons le paramétrage en question.

$$S1 = \begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{1-t^2}, -1 \leq t \leq 1, s \in \mathfrak{R} \\ z = s \end{cases}$$

$$S2 = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \pm\sqrt{1-u^2} \end{cases}, -1 \leq u \leq 1, v \in \mathfrak{R}$$

A partir de ce choix, il est donc possible d'envisager la représentation graphique de deux cylindres en utilisant uniquement la syntaxe (04) de la commande **plot3d**. Comme pour le paramétrage « angulaire », le tableau 17 (similaire au tableau 4) donné à l'annexe regroupe également les sous-tâches nécessaires pour la réalisation du problème dans **Maple** en utilisant le paramétrage libre. Comme le tableau 4, il comporte aussi 25 lignes des commandes.

Les données obtenues, permettent de mener une analyse plus détaillée suivant les trois étapes (**E1**, **E2** et **E3**) présentées plus haut.

L'étape E1

Ce choix suppose que la représentation analytique du solide **criblé** et les calculs d'intégrale soient produits en *coordonnées cartésiennes*.

Représentation usuelle avec papier/crayon	Représentation dans Maple
$C2 = \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \pm\sqrt{1-u^2} \end{cases}, -1 \leq u \leq 1, -2 \leq v \leq 2$	$C2 = \left(\left[u, v, \sqrt{1-u^2} \right], \left[u, v, -\sqrt{1-u^2} \right], u = -1..1, v = -2..2 \right)$

Les deux paramètres u et v sont d'abord les variables de contrôle de la dimension du cylindre affiché sur l'écran. La suite de modélisation est similaire au cas précédent.

L'étape E1 à l'étape E2

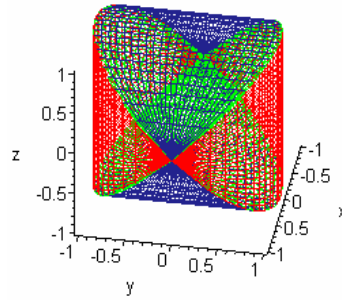
Pour isoler le solide Q on utilise la technique du **crible géométrique**. Comme nous l'avons déjà vu, l'intersection des sous surfaces des deux cylindres qui forment le contour de Q arrive dans les deux plans d'équations $z=-y$ et $z=y$.

Ainsi, à partir de la sous-tâche 03 nous pouvons voir que la partie du cylindre C1 qui appartient à Q se trouve entre les deux plans, $-y \leq z \leq y$ (si $y \geq 0$) et $y \leq z \leq -y$ (si $y \leq 0$). De façon équivalente $-\sqrt{1-t^2} \leq s \leq \sqrt{1-t^2}$, si $-1 \leq t \leq 1$ selon le paramétrage « libre » de C1.

De la même manière, la partie du cylindre C2, qui est le morceau du solide intersection, se

trouve entre les deux plans $-z \leq y \leq z$ (si $z \geq 0$) et $z \leq y \leq -z$ (si $z \leq 0$). De façon équivalente $-\sqrt{1-u^2} \leq v \leq \sqrt{1-u^2}$, si $-1 \leq u \leq 1$ selon le paramétrage « libre » de C2 (ici nous n'avons pas besoin de distinguer le cas $z \geq 0$ du cas $z \leq 0$ dans *Maple*).

Cette description permet effectivement d'isoler le solide, c'est-à-dire, la mise en place de la représentation graphique du solide **criblé** (cf. le graphique 06) dont on cherche à calculer le volume (question 04).



Graphique 06 (solide Q - criblé)

De l'étape E2 à l'étape E3 (le calcul de l'intégrale)

On remarquera que, indépendamment du paramétrage (**angulaire** ou **libre**) choisi, le découpage de Q en sous-solides sera toujours le même. Toutefois, la mise en place du calcul de l'intégrale change selon le choix du système de coordonnées.

Le découpage « usuel » de Q en sous-solides, en lien avec les données obtenues dans la description du crible, permet les représentations analytiques suivantes.

Région (cartésienne) d'intégration	Q_8 (huitième morceau de Q) en coordonnées cartésiennes
$R_4 = \{(x, y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$	$Q_8 = \{(x, y, z); (x, y) \in R_4, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}\}$

Cette représentation permet la mise en place de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale triple $V_Q = 8V_{Q_8} = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dy dx$ développée dans *Maple* comme suit, selon l'utilisation simultanée des commandes **Int** et **int**.

Les calculs de volume de Q en coordonnées cartésiennes.	
Entrée (action du sujet)	Résultat (réaction du Maple)
<code>> VQ:=8*Int(Int(Int(1,z=0..sqrt(1-x^2)),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1);</code>	$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dz dy dx$
<code>> VQ:=8*Int(Int(int(1,z=0..sqrt(1-x^2)),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1);</code>	$V_Q = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy dx$
<code>> VQ:=8*Int(int(int(1,z=0..sqrt(1-x^2)),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1);</code>	$V_Q = 8 \int_0^1 1-x^2 dx$
<code>> VQ:=8*int(int(int(1,z=0..sqrt(1-x^2)),y=0..sqrt(1-x^2)),x=0..1);</code>	$V_Q = \frac{16}{3}$

La représentation analytique de Q_8 (cf. le graphique 05 – découpage *non usuel*, plus haut)

peut être exprimée en coordonnées cartésiennes, comme ci-dessous :

Région (cartésienne) d'intégration	Q_8 (huitième morceau de Q) en coordonnées cartésiennes
$R_2 = \{(x, y), -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$	$Q_8 = \{(x, y, z); (x, y) \in R_2, 0 \leq z \leq y\}$

De cette représentation, on peut passer à l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale triple

$V_Q = 8V_{Q_8} = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y dz dy dx$ que l'on peut développer dans **Maple** comme suit, selon

l'utilisation simultanée des commandes **Int** et **int**.

Les calculs de volume de Q en coordonnées cartésiennes.	
Entrée (action du sujet)	Résultat (réaction du Maple)
> VQ:=8*Int(Int(Int(1, z=0..y), y=0..sqrt(1-x^2)), x=-1..1);	$V_Q = 8 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y 1 dz dy dx$
> VQ:=8*Int(Int(int(1, z=0..y), y=0..sqrt(1-x^2)), x=-1..1);	$V_Q = 8 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx$
> VQ:=8*Int(int(int(1, z=0..y), y=0..sqrt(1-x^2)), x=-1..1);	$V_Q = 8 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x^2 dx$
> VQ:=8*int(int(int(1, z=0..y), y=0..sqrt(1-x^2)), x=-1..1);	$V_Q = \frac{16}{3}$

Analysons à présent comment on peut arriver à tracer le solide « isolé » suivant **SO5**.

3.4 Stratégie cylinderplot (SO5)

Il est possible d'envisager la représentation graphique des deux cylindres en utilisant la syntaxe (06) de la commande **cylinderplot** ou encore la syntaxe (01) de la commande **plot3d** avec l'option **coords=cylindrical** en entrant directement les inéquations $x^2+y^2 \leq 1$ et $x^2+z^2 \leq 1$ en coordonnées cylindriques, comme on le voit dans l'encadré ci-dessous.

Lc	Action du sujet	Réaction d'instrument
01	> restart: with(plots): Warning, the name changecoords has been redefined	
	sous-tâche 01	
02	> f:=(r,alpha)->sqrt(1-(r*cos(alpha))^2);	$g(r, \alpha) := \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \alpha}$
	sous-tâche 02	
03	> C1z:=cylinderplot([1,theta,z],theta=0..2*Pi,z=-1..1, color = theta,	
04	> C2y:=cylinderplot([r,alpha,f(r,alpha)],r,alpha,-f(r,alpha)),	
05	> alpha=0..2*Pi,r=0..1, color=blue); > display(Cz1,Cy1,scaling=constrained,style=hidden,labels=[x,y,z]);	
	sous-tâche 03	

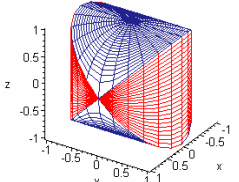
<pre> 06 > C1:=cylinderplot([1,theta,z],theta=0..2*Pi,z=-sin(theta)..sin(theta), color=theta,color=red); 07 > C2:=cylinderplot([r,alpha,f(r,alpha)],r,alpha,-f(r,alpha)), alpha=0..2*Pi,r=0..1,color=navy); 08 > display(Cz,Cy,scaling=constrained,style=hidden,labels=[x,y,z]); </pre>	
--	---

Tableau 18 : Emploi de la syntaxe (06) de la commande cylinderplot

Ici on s'appuie donc sur les transformations des systèmes de coordonnées.

On remarquera que $x^2+y^2=1 \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = 1 \Rightarrow r = 1, r \geq 0$. Donc, on peut représenter le cylindre C1, comme $r=1$, en coordonnées cylindriques ou de façon équivalente $[1, \theta, z]$ avec $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$. Le registre d'écriture en ligne pour cette transformation est celui associé à Lc 03 (cf. tableau ci-dessus).

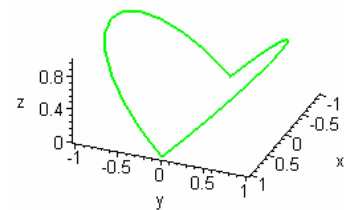
Le cylindre C2 correspond à l'écriture en ligne selon la syntaxe relative à Lc 04, dans laquelle on prend en compte $z = \pm \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \alpha}$. Selon Lc 04, C2 ne parcourt pas l'axe Oy . En effet z est une coordonnée cylindrique dépendant de r et α .

Comme $z = \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 - r^2 \cos^2 \alpha \leq 0 \Rightarrow -1 \leq r \cos \alpha \leq 1$ alors, pour $\alpha=0$ on a $-1 \leq r \leq 1$. Finalement : $0 \leq r \leq 1$ car $r \geq 0$. Donc la représentation de $x^2+z^2=1$ en coordonnées cylindriques est donnée par $[r, \alpha, \pm \sqrt{1 - r^2 \cos^2 \alpha}]$, $0 \leq r \leq 1$ et $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ avec les particularités suivantes.

De C2, on peut conclure que $\forall r \in [0, 1]$ et $\forall \alpha \in [0, 2\pi]$:

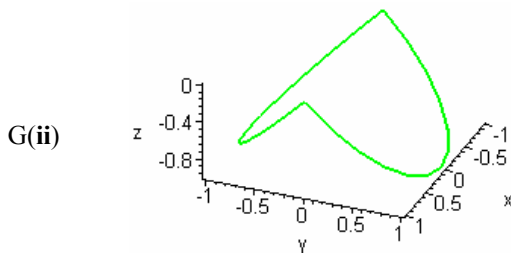
- si $r = 0$, alors C2 est la courbe $[0, \alpha, -1] \cup [0, \alpha, 1]$.
- si $r = 1$ alors C2 est la courbe $[1, \alpha, -\sin \alpha] \cup [1, \alpha, \sin \alpha]$

en coordonnées cylindriques, que l'on nommé « arêtes curvilignes » de Q , que l'on peut représenter graphiquement selon G(i) ci-contre (pour $z \geq 0$).

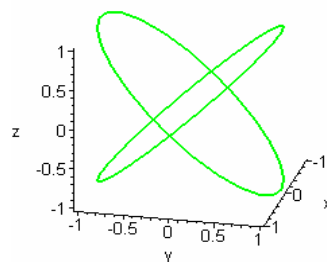


G (i)

Cette interprétation est équivalente pour $z = -\sqrt{1 - r^2 \cos^2 \alpha}$, permettant la visualisation des « arêtes curvilignes » de Q pour $z \leq 0$ que l'on peut représenter graphiquement selon G(ii) ci-dessous, dont G(iii) représente grâce à la commande **display** la courbe qui apparaît dans la graphique de la sous-tâche 02 (cf. (cf. Tableau 6)).



G(ii)



G(iii)

Notons que les deux plans d'intersection de C1 et C2 repérés précédemment contiennent exactement les arêtes curvilignes de Q présenté par G(iii).

Donc, comme on peut le voir (cf. Lc 07, tableau 6), la description du **crible** propose que :

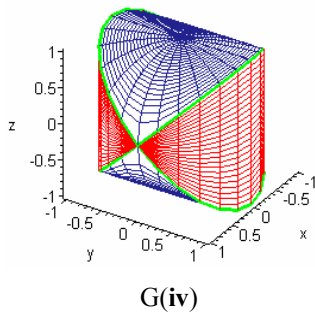
$\forall r \in [0,1]$ et $\forall \alpha \in [0,\pi]$ une partie de C2 soit comprise :

- entre $z = -\sqrt{1-r^2 \cos^2 \alpha}$ et $z = -\sin \alpha$ et entre $z = \sin \alpha$ et $z = \sqrt{1-r^2 \cos^2 \alpha}$

Et $\forall r \in [0,1]$ et $\forall \alpha \in [\pi, 2\pi]$, l'autre partie soit comprise :

- entre $z = -\sqrt{1-r^2 \cos^2 \alpha}$ et $z = \sin \alpha$ et entre $z = -\sin \alpha$ et $z = \sqrt{1-r^2 \cos^2 \alpha}$

Pour le cylindre C1, le **crible** admet la même description que nous avons repérée plus haut (cf. Lc 06, tableau ci-dessus). Le solide Q (cf. G(iv)) criblé est alors, à l'aide d'outils display, le résultat G(iv) ci-dessous.



Le découpage et le calcul de volume de Q en coordonnées cylindriques se développent de la même manière comme nous venons de voir (cf. SO3 ou SO4). On remarquera que l'on peut aussi avoir l'écriture :

$$VQ = 4 \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-r^2 \cos^2(\theta)}} r dz dr d\theta = \frac{16}{3}$$

selon un découpage usuel de Q en quatre sous-solides par symétrie que l'on peut représenter analytiquement comme suit :

$$Q_4 = \left\{ (r, \theta, z); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} \right\}$$

Il est important de souligner que, tous les calculs des intégrales, menés jusqu'ici, sont également possible en utilisant les syntaxes (16) et (19) des commandes **Doubleint** et **Tripleint** respectivement (cf. Chapitre D) pour chercher le volume de Q . Néanmoins, comme pour le cas des syntaxes (14) et (17) de la commande **Int**, on ne peut attendre qu'une écriture algébrique du calcul de l'intégrale. Cependant, le calcul effectif peut être achevé à l'aide des outils **evalf** et **value** selon les syntaxes (20), (21) ou (22). Voici des résultats possibles du problème.

Entrée (action du sujet)	Résultat (réaction du Maple)	Interprétation
<code>> 8*Tripleint(1,z=0..y,y=0..sqrt(1-x^2),x=-1..1);</code>	$8 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y 1 dz dy dx$	Ecriture du calcul
<code>> VQ:=evalf(%, 15);</code>	$VQ = 5.33333333333333$	Calcul approché
<code>> VQ:=value(%%);</code>	$VQ = \frac{16}{3}$	Calcul exact

On remarquera aussi comme on l'a vu précédemment dans chapitre D, que l'ordre d'entrée des variables d'intégration, dans les écritures en lignes pour les expressions instrumentées, mérite une attention spéciale. Car, une fois dégagée une représentation analytique de Q , les erreurs possibles d'utilisation d'outils d'intégrations peuvent consister à l'inversion de l'ordre de placement de variables d'intégration dans les lignes de commandes. Dans ce cas le résultat du calcul d'intégrale n'est pas un calcul numérique effectif conforme à ce que l'on peut

attendre. C'est donc un résultat erroné selon les exemples ci-dessous.

Entrée (action du sujet)	Résultat (réaction du Maple)
$> 8 * \text{Int}(\text{Int}(\text{Int}(1, z=0..y), x=0..1), y=0.. \sqrt{1-x^2});$	$V_{\Omega} = 8 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-1}^1 \int_0^y 1 dz dx dy = 8 - 8x^2$
$> 8 * \text{Int}(\text{Int}(\text{Int}(1, y=0.. \sqrt{1-x^2}), x=-1..1), z=0..y);$	$V_{\Omega} = 8 \int_0^y \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx dz = 4\pi y$

4. Généralisation du problème

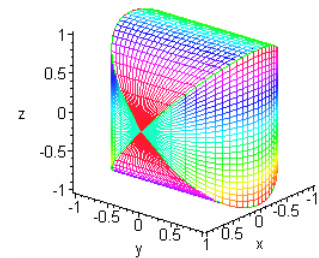
L'analyse que nous venons de faire permet facilement de généraliser le problème posé au cas de deux cylindres ayant le même rayon quelconque.

Le théorème d'intersection de deux cylindres

Soit, C_1 et C_2 deux cylindres de même diamètre D qui s'intersectent à angle droit. Le volume du solide Ω formé par l'intersection des deux cylindres est donné par :

$$V_{\Omega} = \frac{2}{3} D^3$$

Considérons dans un repère orthonormé direct les deux cylindres C_1 et C_2 d'inéquations respectives $x^2 + y^2 \leq a^2$ et $x^2 + z^2 \leq a^2$, dont $D=2a$ et le solide Ω (graphique ci-contre) déterminé par l'intersection de C_1 et C_2 . Ainsi, en s'appuyant sur le travail préliminaire de représentation graphique dans **Maple** développé plus haut, on peut découper le solide Ω en 8 sous-solides selon la représentation analytique ci-dessous :



$\Omega_8 = \{(x, y, z) ; (x, y) \in R, 0 \leq z \leq y\}$ d'où $R = \{(x, y), -a \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$ à partir d'un découpage *non usuel*. Ceci permet la mise en place de l'écriture algébrique du calcul de volume de Ω par l'intégrale triple $8 \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^y dz dy dx$ ou par l'intégrale double suivante :

$$\begin{aligned} V_{\Omega} &= 8 \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} y dy dx \\ V_{\Omega} &= 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 4 \left[xa^2 - \frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a \\ V_{\Omega} &= 4 \left[\left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) - \left(-a^3 + \frac{a^3}{3} \right) \right] \\ V_{\Omega} &= 8 \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{16}{3} a^3 \end{aligned}$$

Comme $D=2a \Rightarrow a = \frac{D}{2}$, alors $V_{\Omega} = \frac{2}{3} D^3$. Ce qu'il fallait démontrer.

5. Conclusion sur l'analyse a priori

L'analyse que nous venons de mener va nous permettre d'organiser l'observation des pratiques des étudiants devant résoudre le problème proposé, dont la sous-tâche importante consiste à obtenir une représentation ad hoc du solide en jeu, en utilisant les outils du logiciel *Maple*. Nous chercherons à analyser comment les étudiants s'approprient ces outils dans ce type de tâche, à déterminer si le logiciel *Maple* fournit des rétroactions efficaces pouvant favoriser le travail des étudiants.

Comme nous venons de le voir, en suivant le passage [SP]↔[RGS]↔[EIM] du modèle MATIM (selon les besoins des étudiants, cf. a posteriori, Partie E1), le traitement de ce problème dans *Maple* va modifier la praxéologie du type de tâche emblématique. En effet, pour s'appuyer sur une **RG** du solide, pour contrôler la mise en place du calcul d'une intégrale, le logiciel *Maple* permet un travail spécifique où l'interaction entre l'utilisateur et la machine fait apparaître des éléments de l'articulation entre graphique et analytique.

Cependant, comme nous l'avons vu dans le cadre de *Maple*, il est nécessaire de passer par la notion de *paramétrage* de surfaces (cf. **SO3** et **SO4**). Toutefois, comme le montre notre analyse des manuels, dans l'organisation mathématique des *IM* (cf. Chapitre B) c'est plutôt la notion de *fonctions* de deux et trois variables qui est à la base de l'enseignement des *IM*. Or dans l'environnement *Maple*, la notion de *fonctions*, tant explicites (cf. **SO1**) qu'implicites (cf. **SO2**) ne permet pas d'accomplir toutes les tâches du problème en jeu (conséquence des contraintes **fonctionnelle** et **implicite**, respectivement).

Il est important cependant de souligner que l'un des avantages du logiciel *Maple* dans le traitement de ce type de tâches, est qu'il nécessite un travail préliminaire dans le registre analytique pour permettre de choisir le type et les valeurs des commandes à entrer dans la machine propres à produire la représentation cherchée. En effet, les syntaxes du logiciel (cf. chapitre D) sont données dans ce registre. Par ailleurs, les rétroactions relatives aux actions de l'utilisateur sont elles données, soit dans le registre graphique, soit dans l'analytique. Donc, notre hypothèse est que *Maple* va permettre à l'étudiant, à travers l'un des deux registres, l'appui sur ces rétroactions pour contrôler le domaine d'intégration (dans les registres analytique et graphique) et conduire à la mise en place du calcul de l'intégrale. Contrairement à l'environnement *papier/crayon*, où l'on peut produire un premier dessin en mobilisant peu de connaissance sur le lien avec le registre analytique, dans *Maple*, au contraire, la production correcte d'un dessin nécessite un plus gros travail dans le registre analytique. Comme nous l'avons souligné, en utilisant cet environnement, dans le traitement du type de tâche en jeu, on doit passer par la notion de *paramétrage*, alors qu'une fois que l'on a utilisé cette notion pour avoir le solide « **isolé** » on doit, ensuite revenir à la notion de fonctions pour la mise en place du calcul d'intégrale.

Donc, au-delà des rétroactions possibles⁶⁶ du logiciel, on remarquera qu'une fois le solide

⁶⁶ Rétroactions inattendues, pouvant permettre un contrôle dans l'interaction entre les représentations graphiques et analytiques.

« **isolé** » (selon la technique **crible géométrique**) soit à partir du paramétrage « **angulaire** » (**SO3**) soit à partir du paramétrage « **libre** » (**SO4**) ou encore selon (**SO5**), la tâche consiste alors en la mise en place d'une écriture algébrique du calcul de l'intégrale, qui nécessite de revenir à la notion de fonction.

Les étudiants perçoivent-ils ce passage ? Cet aller-retour pose-il des difficultés dans les productions des étudiants ?

On remarquera cependant qu'il n'est pas forcément nécessaire de chercher une fonction à intégrer, si on fait le choix d'utiliser une intégrale triple.

Par contre, comme on l'a vu (dans les trois stratégies de réussite), (cf. aussi le chapitre D) la description du **crible géométrique** passe par la manipulation des données (qui sont ensuite introduites dans les syntaxes du logiciel) permettant de limiter les surfaces cylindriques aux seuls contours du solide intersection. La détermination de ces données, est très proche du travail nécessaire à la mise en place du calcul de l'intégrale double (ou triple) conduisant au calcul du volume du solide (notamment dans la détermination des bornes d'intégration).

Le travail nécessaire pour permettre de représenter avec *Maple* le solide **criblé** est donc une aide directe dans la mise en place de l'intégrale, indépendamment du choix du calcul (via intégrale double ou triple). Mais, les étudiants s'approprient-ils ces données lors de la mise en place de l'intégrale ? Dans quelle mesure les étudiants peuvent-ils comprendre que le travail développé dans les deux premières étapes est une aide pour le calcul de volume du solide Q ? Se rendent-ils compte que le travail préliminaire de la représentation graphique du solide criblé comporte les bornes d'intégration ?

Une autre question porte sur la nature de l'intégrale : quelle interprétation du volume est privilégiée, l'intégrale double ou triple ?

Pour répondre à ces questions et nous permettre de vérifier nos hypothèses, nous avons fait passer le problème que nous venons d'étudier, auprès d'étudiants d'une institution de CPGE-Technologique (qui utilisent régulièrement le logiciel *Maple*) en France. Dans cette partie de notre travail, nous nous sommes donc limités à un environnement informatique. L'analyse des résultats de cette expérimentation, à la lumière de notre analyse a priori fait l'objet de la partie suivante.

ANALYSE A POSTERIORI

1. Conditions de passation

Nous avons réalisé cette deuxième expérimentation, au mois de mars 2004, dans une classe de Mathématiques Spéciales -Technologique (Bac + 2) de Grenoble. Les étudiants avaient à cette époque fini le cours sur les intégrales multiples.

Le travail a été proposé en demi-classe, en salle informatique, les étudiants travaillant en binôme. Nous avons observé deux séances consécutives de deux heures chacune avec les deux demi-classes. Trois observateurs étaient présents, ils ont pris des notes sur le travail d'un binôme par séance. Nous avons ainsi analysé le travail de six binômes (B1, B3 et B5 pour la première séance, et de 8^h à 10^h et B2, B4 et B6, de la deuxième séance de 10^h à 12^h, le même jour). Les douze étudiants seront nommés en utilisant la première lettre de leur prénom.

Le professeur (que nous appelons **P**) avait seul la conduite de la classe, les observateurs étant neutres. Les interactions des étudiants entre eux et avec leur professeur ont été enregistrées par magnétophone, dans chacun des binômes observés. Un magnétophone a aussi servi à enregistrer les interventions du professeur à toute la classe. Ce qu'il notait au tableau a été retranscrit. A la fin des séances, les fichiers *Maple* et les brouillons des étudiants ont été récupérés. Les données ainsi recueillies ont été retranscrites et constituent un protocole que nous mettons en annexe.

2. Enoncé de la tâche

L'énoncé de la tâche précise proposée aux étudiants a été conçu en interaction avec l'enseignant de la classe. Vu les difficultés observées lors de la première expérimentation et des éléments de notre analyse a priori, il nous est paru nécessaire de découper suffisamment la tâche pour pouvoir observer des éléments pertinents. Le souci du professeur que ces étudiants puissent y arriver nous a aussi contraint. Nous sommes arrivés finalement à un découpage en 5 questions :

Dans un repère orthonormé direct, on considère les deux cylindres $C1$ et $C2$ d'inéquations respectives $x^2 + y^2 \leq 1$ et $x^2 + z^2 \leq 1$, et le solide Q déterminé par l'intersection de $C1$ et $C2$.

01	Donner des équations paramétriques des surfaces $S1$ et $S2$ délimitant $C1$ et $C2$.
02	Donner une représentation graphique de $S1$ et $S2$ à l'aide de <i>Maple</i> , d'abord séparément, puis ensemble, en les différenciant par deux couleurs.
Remarque	Il est facile de voir que Q est entièrement compris dans le cube $[-1 ; 1]^3$. Si nécessaire ajuster la représentation précédente pour la limiter à ce cube. On veut maintenant "effacer" les parties de chacun des cylindres qui ne sont pas sur la frontière de Q .
03	Montrer que $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans dont on donnera les équations (attention on ne demande pas nécessairement de déterminer des équations de l'intersection).
04	Utiliser ce résultat pour donner la représentation graphique du solide Q (en faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q) à l'aide de <i>Maple</i> (on continuera à distinguer les deux cylindres par des couleurs différentes).
05	Calculer le volume de Q .

Les quatre premières questions visent à organiser le travail de représentation graphique outillé par **Maple**. La première question permet, en mettant les étudiants sur la voie de la représentation paramétrée, d'éviter qu'ils ne perdent du temps dans une voie qui ne permet pas d'aboutir (voir notre analyse a priori stratégies **SO1** et **SO2**). La remarque et la question 2 permettent de même dans un souci d'économie de temps, de guider les étudiants dans l'organisation des sous-tâches. La question 3, qui se situe hors de l'utilisation de *Maple*, permet à l'étudiant de disposer d'un élément clé dans la mise en place du **crible** qui fait l'objet de la question 4 et reste une question très ouverte, sans doute la plus complexe. La question 5 est la finalité du problème. Elle est posée sans faire référence aux précédentes. Nous voulons juger ainsi de la capacité des étudiants à réinvestir le travail précédent.

3. Analyse a posteriori

Tout d'abord, nous présentons une analyse globale de l'expérimentation, en nous appuyant sur la lecture des productions des étudiants. Elle met en évidence la *dévolution* du problème, les *enjeux*, les *compétences* mises en jeu, les *sous-étapes* et les *problèmes techniques* possibles dans chaque étape, selon le choix de passage $[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM]$ du modèle MATIM.

Ensuite, nous présentons une synthèse générale basée sur les difficultés rencontrées par les six binômes (B1, ..., B6). Celle-ci, révèle les fortes similitudes dans les productions des binômes. Pour cette raison, nous ne présenterons l'analyse détaillée que de deux binômes, et placerons l'analyse de quatre autres en annexe.

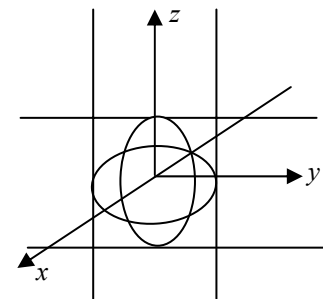
4. Dévolution du problème

Le professeur **P** distribue les feuilles, énoncé et brouillon à 8h15. Il rappelle ensuite comment utiliser la commande "**plot3d**" pour tracer les surfaces puis, il écrit au tableau la syntaxe de représentations paramétriques des objets en 3D (cf. TC004, protocole, séance1)⁶⁷.

Les étudiants lisent alors l'énoncé. Tous les binômes observés montrent une bonne visualisation du problème posé, à l'appui d'un rapide dessin papier. Parfois, ils ont quelques problèmes liés aux dualités de l'espace, notamment sur les objets *cercle/cylindre* ainsi que sur les liens entre des *équations/inéquations*. En nous rapportant aux protocoles des binômes en annexe, on voit bien ces dualités (dans les interactions entre les étudiants, que nous transcrivons dans le tableau 01 suivant) quand le binôme B3 parle d'équation $x^2+y^2=1$, repérée dans les inéquations données, pour exprimer la surface cylindrique de C1.

Pendant cette interaction, l'étudiant **L** (binôme B3, sans utiliser le logiciel) arrive à dessiner tout de suite les deux cylindres sur le brouillon (que l'on reproduit sur la figure ci-dessous) dans un repère orthonormé. On trouve aussi la trace du même dessin (fait à main levée en perspective par des techniques habituelles *papier/crayon*) chez les binômes [A,B]⁶⁸ et [B,M] non observés et le binôme B4. La plupart des étudiants montre d'ailleurs une telle visualisation en utilisant les expressions gestuelles (avec leur mains : mouvement vertical de haut en bas et horizontal de gauche à droite).

On perçoit une appropriation du problème grâce à une certaine connaissance qu'ils ont de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension. Ils « voient » bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur emboîtement.



Cette bonne visualisation du problème est notée dans tous les binômes. Celle-ci motive alors les étudiants qui conçoivent (de façon floue) le solide intersection. C'est-à-dire qu'ils voient que l'intersection des deux cylindres est un solide borné, et que calculer son volume est donc un problème pertinent. Cela a conduit rapidement les étudiants à une bonne dévolution du problème au niveau perceptif (en s'appropriant la tâche).

Les étudiants ont les moyens de représenter le problème. Toutefois, ces moyens ne sont pas suffisants pour arriver à la représentation graphique du solide de l'intersection **criblé**. De ce fait, le travail de représentation graphique dans *Maple* c'est de rendre cette visualisation plus efficace, tandis que la validation d'ordre graphique des expressions algébriques imposées par l'énoncé du problème et l'obtention de bornes pour la mise en place de l'intégrale multiple (double ou triple) conduisent au calcul de volume.

⁶⁷ TC : Tour du conteur de magnétophone, une référence permettant la lecture du protocole en annexe.

⁶⁸ b[A,B] : binôme formé par les étudiants Aquesbi et Boris ; b[B,M] : Bouly et Marin.

(B1, TC(040))	(B3, TC(087))
<p>B : C'est égalité ? Z : Non ! C'est plus compliqué ... ; B : Comment tu appelles ça quand tu as mis inégalités ? Z : Non... ça donne juste l'extérieur ; B : Comme quand t'as l'inférieur, ça donne tout ce qu'il y'a à l'intérieur non ? Z : Ben... ; B : C'est comme quand tu as un cercle ? Et comment on fait ? C'est cool.</p>	<p>J : Alors et l'autre ? Ah, non ! C'est pas un cylindre ça, ça c'est pas ah ! L : Si, parce que c'est un cercle, $x^2+y^2=1$ c'est un cercle, on est dans l'espace et vu que c'est indépendant z, ça fera un cylindre ; J : Ouais ; L : Donc l'autre c'est pareil.</p>
(B3, TC(079))	
<p>...L : T'as un cylindre de diamètre 1 comme ça et rayon 1 comme ça, sur l'axe z et un sur l'axe y et nous, on va prendre le solide qu'est au milieu.</p>	

Tableau 01

5. Les enjeux et compétences mises en jeu

5.1 L'étape E1 : Les questions q1 et q2

Enjeu de la première étape

L'enjeu de la première étape du problème posé (questions **q1** et **q2**) est clair. Elle consiste à représenter les deux cylindres avec des couleurs différentes dans *Maple*, d'abord séparément et puis ensemble. D'où la nécessité d'avoir des équations paramétriques (demandées dans l'énoncé **q1**).

Compétences mises en jeu dans la première étape

Dans cette première étape, nous distinguerons deux types de compétences :

Type1	Type2
<p>Connaissance de la géométrie dans l'espace, à la fois sur RG et sur RA (soit par des fonctions de deux variables, soit par des équations paramétriques), et leurs interactions avec les coordonnées polaires, cylindriques et sphériques. Ces dernières peuvent d'ailleurs compliquer la situation, comme on peut le voir dans l'extrait de protocole ci-dessous.</p>	<p>Compétences sur l'utilisation du logiciel <i>Maple</i>, le rôle que peuvent jouer ses outils techniques dans l'étude de l'interaction entre les représentations analytiques et graphiques. Particulièrement l'utilisation des outils disponibles à propos des RG, recensés précédemment (cf. Chapitre D).</p>

(B3, TC(117) et TC(145))

L : Il faut juste paramétrer les deux quoi et après [...] ;
J : En sphérique tu crois que ça marche ?
L : Hein ? **J** : En sphérique non ?
J : Il me semble, en sphérique euh [...] ça devrait marcher ; [...]
J : Non, mais en fait il faut exprimer x, y et z en sphérique ?
L : Hum, hum ;
J : Comme tu ne le connais pas par cœur ;
L : Donc $x = \rho \sin \varphi \cos \theta$, d'accord ? D'accord, ou pas d'accord ?

J : Donc $\cos \theta$ c'est la projection et $\sin \varphi$, ouais ;
L : Et euh, euh $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, et $z = \rho \cos \varphi$, donc là on a $x^2 + y^2 \leq 1$, donc ça va faire $\rho^2 \sin^2 \varphi$;
J : Plus, plus $\rho^2 \sin^2 \varphi$ ça fait $2\rho^2 \sin^2 \varphi$;
L : Pourquoi $\rho^2 \sin^2 \varphi$?
J : Parce que là $\sin^2 + \cos^2$ ça fait 1 ;
L : Ouais, mais ... $\cos^2 + \sin^2 \leq 1$, ça fait $\rho^2 \sin^2 \varphi \leq 1$, le premier c'est ça. Et le deuxième ? $y^2 + z^2$?
J : Et oui, oui, oui $x^2 + z^2$;
L : ça va faire $\rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta$ égale non ... ;
J : Plus $\rho^2 \cos^2 \varphi$;
L : plus $\rho^2 \cos^2 \varphi$ donc ça fait euh ;

Ce dialogue conduit les étudiants au travail suivant sur les brouillons. C'est **E4** qui écrit :

$$\begin{array}{l}
 x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\
 y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\
 z = \rho \cos \varphi
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \rho^2 \sin^2 \varphi (\sin^2 + \cos^2) \leq 1 \\
 \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 1 \\
 \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi \leq 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 -1 \leq \rho \sin \varphi \leq 1
 \end{array}$$

Voici leurs réactions face à la dernière inéquation :

J : *Ça ne se simplifie pas ?* **L** : *Bah, non !*

Donc, face à ce résultat, ils se bloquent (cf. la suite, de l'analyse du binôme).

Les sous-étapes et les problèmes techniques dans la première étape

On peut distinguer dans la première étape les sous étapes suivantes :

- (a) Représentation paramétrique correcte de la première surface cylindrique (S1) ;
- (b) Représentation paramétrique correcte de la deuxième surface cylindrique (S2) ;
- (c) Représentation de S1 et S2 dans *Maple* séparément avec des couleurs différentes ;
- (d) Représentation de S1 et S2 dans *Maple* ensemble avec des couleurs différentes.

Les deux sous-étapes (a) et (b) d'ailleurs quasiment identiques ne sont pas trop difficiles. Par contre, on peut repérer deux *problèmes techniques* essentiels, dans les sous-étapes (c) et (d), liés à l'utilisation de *Maple* (compétence de type2) :

- (1) Utilisation des commandes "**plot3d**" et les techniques de représentations simultanées (**superposition, affectation, rappel**) (cf. chapitre D) ;
- (2) Echelle - limiter la représentation des deux cylindres ensemble dans un cube $[-1,1]^3$.

Remarques : On perçoit dans cette étape l'interaction entre les compétences des étudiants en cours d'acquisition dans *Maple* et une appropriation dans la visualisation des deux cylindres. Cette étape, ainsi que les suivantes sont très laborieuses (adaptation des étudiants à la situation problème et au rôle des outils *Maple*) mais sûrement utiles. Certains binômes mettent presque une heure (avec des interventions du professeur) pour arriver à la solution attendue. Ceci montre que les étudiants n'ont pas une connaissance suffisante de *Maple* pour que ce logiciel soit un outil qui les aide d'emblée dans la résolution du problème. Ils ont encore besoin d'apprendre les syntaxes des commandes de *Maple*, ce qu'elles peuvent produire, afin d'organiser la résolution du problème, pour que le logiciel devienne un outil d'aide. Donc, dans cette séance, l'apprentissage des outils *Maple* s'est développé conjointement avec un réinvestissement des connaissances de géométrie dans l'espace. C'est-à-dire que les deux types de compétences soulignées précédemment se complètent. Ainsi, le temps qu'ils passent pour résoudre une sous-tâche peut paraître long, mais c'était nécessaire

5.2 De l'étape E1 à l'étape E2 : le crible géométrique - q3 et q4

La deuxième étape s'est révélé la plus difficile comme le montre le travail des étudiants.

Enjeu de la deuxième étape

L'enjeu de cette étape est de donner à partir du travail réalisé dans l'étape précédente, une représentation graphique du solide Q intersection des deux cylindres dans *Maple*. D'où la nécessité d'enlever les « bouts » de S1 et S2 qui ne forment pas le contour de Q . C'est-à-dire, donner à la syntaxe (04) de la commande **plot3d** les bornes qui vont permettre d'« isoler » le solide, en conservant ainsi les bouts des surfaces cylindriques qui forment le contour de Q .

Compétences mises en jeu dans la deuxième étape

Celles-ci peuvent encore être séparées en **type1** et **type2**, comme dans l'étape précédente: connaissances de la *géométrie dans l'espace* et compétences sur l'utilisation du logiciel *Maple*.

Les sous étapes et les difficultés dans la deuxième étape

On distingue dans cette étape les deux sous-étapes essentielles suivantes :

- (a) Représenter graphiquement les deux plans de l'intersection ;
- (b) Conserver seulement les bouts de S1 et de S2 qui délimitent Q (crible géométrique).

Difficultés : On perçoit dans cette étape que les étudiants ont des difficultés à mettre en place des représentations analytiques des objets géométriques dans l'espace 3D, dont ils ont pourtant une bonne visualisation (type1). Donc, ils montrent des difficultés dans la coordination de ce qu'ils voient avec les équations qui les représentent. En fait ils ont des difficultés techniques à bien utiliser des commandes de *Maple* (type2). Ils procèdent donc souvent par tâtonnement. Ils y arrivent après plusieurs essais-erreurs avec un contrôle perceptif. C'est-à-dire qu'ils sont avant tout dans l'action au détriment d'une réflexion et d'une anticipation de ce que *Maple* va donner.

Mis à part les interventions du professeur qui les a beaucoup aidés dans l'accomplissement des tâches (cf. protocole), ils s'appuient surtout sur le logiciel qui leur envoie des réponses qui ne correspondent pas à ce qu'ils attendent ; ils reviennent alors en arrière et modifient les choses à partir de là. Donc on voit un manque de travail en amont pour pouvoir prévoir ce que le logiciel va tracer. La facilité de tracé dans *Maple* fait qu'au lieu de contrôler ces équations, ils essaient un peu au hasard. Ainsi des interactions du genre de celles qui suivent se retrouvent souvent dans tous les binômes :

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Vas-y essaye [...]; • On va essayer quand même [...]; • On tente on a pas peur? [...] • On recommence ; ça ira tu crois ? [...] • On change ; Pourquoi ça ne marche pas ? [...] | <ul style="list-style-type: none"> • Essaie de faire [...] pour vérifier [...]; • Il (Maple) comprend ça ? [...] • Mets la même chose pour voir ce que ça fait [...]; • Allez on peut changer de toute façon [...]; • Bon ça a marché, on ne sait pas pourquoi [...] ! |
|---|--|

Le solide criblé : L'important dans cette étape est que les étudiants voient bien, à partir de l'étape **E1**, les bouts de surfaces cylindriques qu'il faudra enlever [sous-étape (b)], et surtout qu'ils soient capables de distinguer dans les représentations paramétriques le rôle des deux plans d'intersection [sous-étape (a)]. On perçoit que progressivement le dispositif les amène à construire à partir de leurs actions, les bonnes équations pour la bonne représentation graphique.

Ainsi des connaissances en acte s'élaborent autour des équations, et de leur interaction entre une représentation analytique (par des fonctions ou par des équations paramétriques) et une représentation graphique à l'écran (visuelle et dynamique). Dynamique dans le sens où on peut bouger la figure (dans toutes les directions possibles) à partir de la manipulation directe avec la souris. On voit bien que dans *Maple* ce n'est pas vraiment le fait de « voir » le solide *criblé* qui aide les étudiants. Mais, cela leur donne une forme précise de validation d'une

bonne représentation analytique du solide à partir de la description de *crible géométrique* comportant les équations utiles dans la troisième et dernière étape de la résolution du problème, que nous analysons ci-dessous.

5.3 De l'étape E2 à l'étape E3 : le calcul de l'intégrale – q5

Enjeu de la troisième étape

L'enjeu de cette étape est de calculer le volume de Q (après avoir développé les étapes précédentes) par une intégrale double ou triple.

Mise en jeu de la troisième étape

Ici aussi nous pouvons distinguer deux types de compétences :

Type3	Type4
Connaissance des IM à la fois sur l'utilisation d'une intégrale double ou d'une intégrale triple, et de leurs interactions avec les représentations graphique et analytique d'un domaine d'intégration en coordonnées cartésiennes, polaires ou cylindriques (cf. Chapitre B).	Compétences sur l'utilisation du logiciel <i>Maple</i> , sur le rôle que peuvent jouer les outils techniques de cet environnement à propos des calculs d'intégrales multiples. En particulier l'emploi des outils recensés précédemment (cf. Chapitre D).

Les sous-étapes et les problèmes techniques dans la troisième étape

On peut distinguer dans cette étape les sous étapes suivantes :

- Découpage de Q en sous-solides par symétrie ;
- Représentation analytique d'un des morceaux obtenus en (a) ;
- Ecriture algébrique de l'intégrale (double ou triple) ;
- Développement des calculs.

On peut repérer dans cette étape les *problèmes techniques* suivants liés aux sous étapes ci-dessus, sauf l'étape (b) qui n'est pas forcément représentable dans *Maple* : l'utilisation des commandes "**plot3d**", "**display**", "**Int**" et "**int**". Les problèmes techniques possibles associés aux schèmes d'utilisations de ces outils ainsi que les sous-étapes ci-dessus nous permettent de poser la question suivante :

Dans quelle mesure les étudiants s'appuient sur le travail développé dans les étapes précédentes pour le calcul de volume du solide Q ?

Remarque : On perçoit finalement dans cette étape que les étudiants arrivent (difficilement) à la solution du problème posé. Chaque binôme, à sa façon, avec les interventions du professeur, arrive à la bonne réponse conformément à ce que l'on attend de lui. Toutefois, dans l'accomplissement de la tâche, les étudiants ne s'appuient que sur la stratégie de tâtonnement (le jeu d'essais-erreurs avec un contrôle perceptif). Ils montrent des difficultés à investir dans les étapes suivantes, le travail qu'ils viennent de développer. Ils préfèrent chercher, dans la fonction « help » du logiciel, s'il existe des commandes qui permettent de

calculer le volume du solide Q . Ainsi les questions suivantes se trouvent souvent dans les interactions :

Il n'y a pas de commande qui calcule le volume de tout ce qu'on fait ? [...]
Si je sais tracer ça alors comment ça s'intègre ? [...]
Bah, sinon on fait les calculs de tête ? [...]
Mais comment on écrit $\rho d\rho d\theta dz$? [...]

Donc là on met $\pi/2$ direct pour voir que ça peut donner ? [...]
Mais pourquoi "**integer**" me donne ça ? [...]
Je ne suis pas sûr qu'il (*Maple*) connaisse ça dans l'intégrale. [...]

Après cet aperçu rapide de ce qui s'est passé et des difficultés rencontrées, nous donnons, dans le tableau suivant, une synthèse générale, en mettant en évidence certaines difficultés dégagées d'après la lecture de productions des étudiants.

6. Synthèse générale de l'expérimentation autour des difficultés des étudiants

Codage des Eléments des Difficultés Observées -EDO

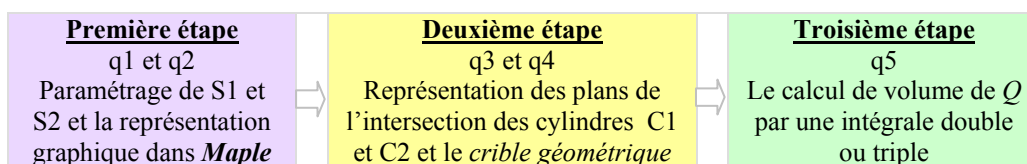
<p>A : Dualité des objets :</p> <p>A_1 : <i>solide/surface</i>⁶⁹ ; A_2 : <i>cercle/cylindre</i> ; A_3 : <i>surface/courbes</i> ;</p> <p>B : Dualité des objets (expression paramétrique à une variable)/ (expression paramétrique à deux variables avec une variable manquante) ;</p> <p>C : Exprimer les équations paramétriques des surfaces cylindriques ;</p> <p>D : Coordination des objets visuels dans l'espace (2D ou 3D) avec les expressions algébriques qui les représentent ;</p> <p>E : Contrôle du domaine de variation des paramètres. E' : Contrôle du zoom (<i>taille des paramètres</i>)</p>	<p>F : Difficultés techniques à bien utiliser <i>Maple</i> (<i>plot3d</i>, <i>display</i>, etc.). F' : Représentation des deux surfaces ensemble dans <i>Maple</i> ;</p> <p>G : Coordination du mode habituel de représentation analytique des surfaces dans l'environnement <i>papier/crayon</i> et de celui utilisé dans <i>Maple</i> ;</p> <p>H : Appliquer les exemples proposés par la fonction "help" ;</p> <p>I : Difficultés liées aux bornes des variables dans la syntaxe de la commande plot3d. I' : Difficultés mathématiques et techniques sur la description du Crible ;</p> <p>J : Investir le travail de la représentation graphique du solide dans la mise en place du calcul de l'<i>intégrale multiple</i> ;</p>	<p>K : Difficulté à préciser le domaine (sous-solide de Q) sur lequel ils vont calculer l'intégrale ;</p> <p>L : Représentation erronée de l'écriture du calcul de l'intégrale triple.</p> <p>M : Utilisation des commandes (Int, int, Doubleint ou Tripleint) de <i>Maple</i> ;</p> <p>N : Interprétation des messages d'erreurs renvoyés par le logiciel en fonction de leurs actions ;</p> <p>O : Coordination entre le mode habituel de représentation de l'écriture du calcul d'une intégrale triple et celui employé dans les syntaxes de la commande "int" du logiciel ;</p> <p>P : Manque de moyens ou de connaissances suffisantes pour valider ou réfuter un résultat donné par le logiciel à partir de leurs actions.</p>
--	--	--

⁶⁹ Même que dualité des objets *équation/inéquation*.

Classification des EDOs par binômes en termes de type des compétences

Les Binômes	Séance 1 (binômes impairs)			Séance 2 (binômes pairs)		
	B1	B3	B5	B2	B4	B6
Difficultés Liées aux Compétences de type 1	A	A	A	A	A	A
	⁷⁰ -	-	B	-	-	-
	C	C	C	-	C	-
	D	D	D	D	D	D
	E	E	E	E	E	E
Difficultés Liées aux Compétences de type 2	F	F		F	F	F
	G	G	G	G	-	G
	-	-	-	H	-	-
	I	I	I	I	I	I
	N	N	N	N	N	N
Difficultés Liées aux Compétences de type 3	J	J	J	J	J	J
	K	K	K	K	K	K
	L	-		-	-	L
Difficultés Liées aux Compétences de type 4	M	M	M	M	M	M
	N	N	N	N	N	N
	O	O	O	O	O	O
	P	P	P	P	P	P
Total (EDO)	14	13	13	13	12	13

Nous pouvons constater, au vu de ce tableau, de fortes similitudes dans les productions des différents binômes. C'est pourquoi, nous avons choisi de ne présenter l'analyse des productions effectives que de deux binômes (l'un ayant rencontré beaucoup de difficultés : **B1** et l'autre moins : **B4**). L'analyse de quatre autres binômes se trouve en annexe. Nous tenons toujours compte des étapes présentées précédemment (selon le passage [SP]↔[RGS]↔[EIM] du modèle MATIM) que nous résumons dans le tableau ci-dessous.



Dans un premier temps, nous présentons l'analyse des productions effectives de **B1**. Nous analyserons ensuite celle du binôme **B4**. A la suite de ces analyses, nous présentons une analyse globale des deux séances, axées sur les rétroactions observées avec *Maple*. Enfin, nous concluons en prenant en compte tous les binômes observés.

⁷⁰ (-) Aucun indice ne justifie cet élément de difficulté.

7. Analyse a posteriori du travail du binôme B1

Le professeur **P** distribue les feuilles (l'énoncé et les brouillons) à 8h15. Ensuite il donne les premières instructions aux étudiants. Il leur rappelle de charger le package **with(plots)**, et puis il met l'accent sur l'emploi de la commande **plot3d**, en écrivant au tableau sa syntaxe de la représentation graphique des surfaces paramétrées, selon sa première intervention (cf. Séance 1, TC004). Ensuite, les étudiants lisent l'énoncé du problème.

7.1 L'étape E1 : Les questions q1 et q2

Question q1 : La dualité des expressions algébriques entre *équations/inéquations* que l'on a soulignée dans notre analyse a priori a posé quelques difficultés à **B1** dans la recherche des équations paramétriques correctes de la première surface cylindrique [sous-étape (a)]. Toutefois, assez rapidement ce binôme a trouvé le bon paramétrage *angulaire* de S1, après certaines tentatives, en faisant par exemple $x=x, \sqrt{1-y^2}$ (cf. TC085, protocole expérimental, **B1**) qui nous semble une tentative de paramétrage *libre*. Par contre, une fois que S1 a été trouvée, ils ont obtenu facilement le paramétrage de l'autre surface S2 [sous-étape (b)].

Question q2 : L'entrée des expressions de S1 et de S2 [sous-étape (c)] dans *Maple* en utilisant la syntaxe (04) de la commande **plot3d**, n'a posé aucun problème technique, comme le montrent leurs fichiers et le TC118 du protocole (sans avoir différenciés les surfaces visualisées par des couleurs).

Les problèmes techniques apparaissent lors de la réalisation du travail instrumenté relatif à la sous-étape (d). Néanmoins, ils apprennent rapidement à utiliser correctement le logiciel dans l'action par tâtonnement, et cet apprentissage l'aide à mieux voir la situation en jeu. L'extrait du protocole ci-dessous illustre ces observations.

(B1, TC(156))	[...] Z : Maintenant il faut mettre ensemble en fait ;	B : Ouais, d'accord, ok ce n'est pas faux;
	B : Alors là ça va être du [...];	Z : Tu mets, tu rajoutes y...et après le contraste ;
	Z : J' sais pas ; [...];	Z : Maintenant il faut que tu différencies euh ... ;
	B : Le problème c'est que là on a à la fois..., ça veut dire qu'il va falloir intégrer certainement. Il faut intégrer cet argument là-dedans pour que le z soit uniquement ;	B : par des couleurs ? $\sin\theta$ [...];
	Z : On s'en fout de toute façon, l'autre tu mets y [...];	Z : Vas-y $\sin\theta, y, \cos\theta$ [...];
	B : Tu crois ?	B : On tente on a pas peur ?
	Z : Bah, oui on s'en fout;	Z : Ouais, vas-y ;
	> plot3d ([sin(theta), cos(theta), z], [sin(theta), y, cos(theta)]), theta=0..2*Pi, y=-10..10, z=-10..10);	OBS : <i>Ils entrent les instructions ci-dessous ;</i>
	Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional argument, z = -10...10	
	B : Non! Echec ;	Z : Quoi ? B : C'est marqué là optional ;
Z : On recommence, d'abord copier ça... il appelle z - 10 à 10 ;	Z : Ah ! Ouais. Non c'est-à-dire qu'il n'a pas compris [...];	
B : Ah ! Tu crois [...];	B : Tu es sûr [...];	
Z : Mets optimal avec... après;	Z : Attends [...]; B : Ce n'est pas comme ça.	
B : Non, optional ;		

Les connaissances mises en jeu dans cette interaction (entre **B** et **Z**) ne touchent pas seulement les problèmes techniques, mais surtout la coordination entre les deux types de compétences soulignées plus haut, la connaissance de la géométrie dans l'espace et la compétence sur

l'utilisation du logiciel *Maple*. On voit bien que les étudiants essaient de tracer simultanément dans l'espace les deux surfaces (S1 et S2) comportant correctement deux variables chacune (θ et z pour S1, et θ et y pour S2), mais avec trois paramètres (θ , y et z) variant dans la même ligne de commande "**plot3d**". Celle-ci rend bien sûr une erreur, car il y a un paramètre de trop⁷¹. De plus, les étudiants ne connaissaient pas la commande "**display**".

Ce binôme arrive alors à la bonne réponse (cf. TC200, protocole B1) après une intervention de P à toute la classe sur l'utilisation de la commande "**display**" et de l'option "**color**" (cf. TC182, séance1). Cette interaction du professeur est primordiale non seulement pour B1, mais aussi pour la classe entière. On peut alors dire que la difficulté d'utilisation de la fonction "**display**", liée à la compétence des étudiants dans le domaine de la représentation graphique des surfaces avec *Maple*, a été momentanément "surmontée" après l'intervention de P.

Le contrôle des paramètres z et y (valeurs des variables liées à la hauteur des cylindres) a posé des difficultés de visualisation⁷², dès que les deux cylindres sont représentés en même temps [sous-étape (d)], sans les avoir différenciés par les couleurs (cf. B1, TC(200)). Lorsque les deux surfaces cylindriques sont repérées à l'échelle 1:1, les bornes des variables z et y jouent alors un rôle important. D'après notre analyse a priori, ce sont les variables visuelles de contrôle sur les dimensions des cylindres affichés sur l'écran. L'extrait (B1, TC(200)) ci-dessous montre le travail de ce binôme au moment où ils essaient de s'appuyer sur les instructions de P (cf. extrait de séance 1, TC(200)) pour corriger l'erreur dans leur activité (cf. extrait du protocole de B1, TC004):

(Séance 1, TC(200))

P : ... le meilleur moyen de tracer c'est avec le euh, l'instruction **plot3d**, d'accord ? On définit de façon paramétrique, alors la valeur x de t , y de t , alors x pardon... on va plutôt mettre x de u et de v , y de u et de v , z de u et de v ..., ensuite les valeurs de u , u égale $a..b$ et puis v égale $c..d$.

```
plot3d ([x(u,v), y(u,v), z(u,v)],u=a..b, v=c..d);
```

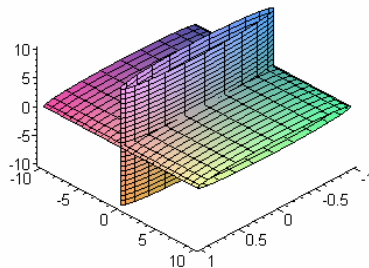
Bon la plupart du temps pour avoir une bonne vision de la surface il faut avoir euh être 1:1 donc une fois que vous avez le dessin on clique au-dessus, vous avez des options sur la nature du repère, si le repère va être orthonormé ou pas ah, une chose comme ça, bon bah, si non je vous laisse euh vous débrouillez avec le sujet.



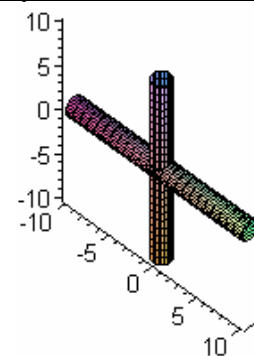
(B1, TC(200))

Représentation avec l'échelle hors de 1:1

```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,z=-10..10);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,y=-10..10);
> display(s1,s2);
```



Représentation avec l'échelle 1:1



⁷¹ Celle-ci marcherait en faisant par exemple $z=y$ (une fois pris en compte que les deux cylindres ont la même hauteur), donc :

```
> plot3d([sin(theta), cos(theta), h], [sin(theta), h, cos(theta)]), theta=0..2*Pi, h=-1..1, scaling=constrained);
```

⁷² Problème technique lié à la taille des objets graphiques affichés sur l'écran de *Maple*.

La représentation à gauche (production de **B1**) donne l'impression d'avoir affaire à deux cylindres elliptiques. Visuellement le graphique ne correspond pas aux équations de départ. La figure (croix) à droite obtenue après avoir cliquer sur l'icône **I.1** (une fois le dessin sélectionné) n'a pas contenté **B1** qui revient à la première représentation à gauche. Donc, le fait que le solide de l'intersection soit entièrement compris dans le cube $[-1,1]^3$ n'était pas repéré spontanément par ce binôme, qui a pris initialement cette représentation dans le parallélépipède $[-1,1] \times [-10,10] \times [-10,10]$ (cf. B1, TC(200)). Il s'en est aperçu lorsqu'il a lu la remarque suggérée par l'énoncé, pour les aider dans le passage de cette étape à l'étape suivante. Ici, on voit, comme le souligne Duval (cf. cadre théorique, p. 22) que la lecture des résultats graphiques « retournés par *Maple* » présuppose la discrimination des variables visuelles.

7.2 L'étape E2 : Les questions q3 et q4

Question q3 : "Montrer que $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans" n'a pas été une tâche évidente pour ce binôme. Par contre **Z** arrive à voir "spontanément" les deux plans à partir de la figure de l'étape précédente (**q2**) en la bougeant avec la souris, pour que son collègue voit la même chose que lui. Toutefois, coordonner ce qu'ils voient avec les équations paramétriques correctes qui rendent compte de la représentation graphique dans *Maple* [sous-étape (a)] a donné lieu à une longue discussion entre eux. Ils ont passé à peu près 20' pour y arriver comme le montre le protocole (TC309 à TC542). Voilà leurs premières interactions, dans cette étape, après une lecture de la question **q3**.

(B1, TC(309))

Z : Se coupent sur deux plans [...];
B : Comment tu fais pour voir [...], tu prends l'intersection pour raison paramétrique on [...];
Z : J'ne sais pas, attends [...];
B : Moi j'ai du mal à voir la question ;
Z : Se coupent sur deux plans [...] c'est comme ça ;

B : Ah ! C'est comme ça ?
Z : C'est comme ça ;
Z : Ça va ?
Z : Tu vois si tu le bouges ;
B : Donc, mais ... ;
Z : En fait tu le verras si tu regardes comme ça ;
B : Ouais, d'accord ; **Z** : Ah ! Voilà.

D'abord les étudiants ne s'appuient pas spontanément sur les expressions des deux cylindres de l'énoncé pour exprimer les deux plans. Ils préfèrent s'appuyer sur la figure précédente affichée à l'écran, à laquelle ils rajoutent les plans qu'ils ont trouvés, pour essayer de voir si le logiciel leur trace les plans au bon endroit. Ensuite **Z** commence à réfléchir sur les équations (après avoir encore consulté l'énoncé) :

(B1, TC(357))

Z : Donc, donc, donc, il faut donner les équations, il faut les calculer ou [...] enfin il faut les mettre en évidence [...];
B : Franchement redis-moi, je vois pas où ils sont, se coupent sur deux, sur deux plans, dont, j'arrive pas à voir ;
Z : T'arrives pas à voir ? Les deux plans ?
B : Hun, les deux plans en fait ;
Z : Ça veut dire que la totalité d'intersection est contenue dans deux plans, l'intersection des deux cylindres est contenue dans deux plans ;
B : T'as celui-là ?
Z : Bah, celui-là ;
OBS : *Qu'est-ce que tu n'arrives pas à voir ?*
B : Je n'arrive pas à comprendre que euh $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans ;

OBS : *Qu'est-ce que ton collègue vient de dire ?*
B : Que c'était les plans là ;
Z : Que l'intersection est contenue dans ces deux plans là ;
B : Parce que moi je n'arrive pas à y voir en fait, dans ma tête, c'est pour ça en fait ;
O : *Que ce qu'on peut faire pour... ?*
B : Pour voir ? Bah [...];
Z : Ah ! On avance, oui alors, là effectivement on voit ;
B : J'arrive pas à comprendre ça, montrer que $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans, dont on donnera les équations ; **P** : *Vous voyez pas les deux plans... le déjà sur une feuille on le verra peut être, d'accord, ça me paraît pas inutile*

L'intervention de **P** (cf. Séance1, TC(393)) pour toute la classe, (après s'être confronté à la difficulté de **B1**), fait alors avancer tous les binômes. **P** considère deux points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$ quelconques respectivement sur la surface $S1$ et $S2$, et écrit au tableau les expressions suivantes.

$$\begin{aligned} S1 &:= M(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)] \\ S2 &:= M'(u,v) = [x', y', z'] \end{aligned}$$

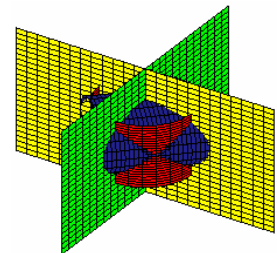
Il montre qu'un point sur l'intersection des deux surfaces doit satisfaire aux égalités $x(u,v)=x'(u,v)$, $y(u,v)=y'(u,v)$ et $z(u,v)=z'(u,v)$, ou simplement $x=x'$, $y=y'$ et $z=z'$. Donc l'idée d'égaliser les composantes des deux surfaces fait avancer les binômes. Ils commencent alors à raisonner non seulement en regardant la figure précédemment affichée sur l'écran, mais surtout analytiquement, "en mettant alors en évidence" l'interaction entre les deux types de représentations. **B1** se met à raisonner comme suit malgré le dérapage algébrique (qui d'ailleurs provoque une rétroaction).

Z : Ça fait, ça fait $x=y$ ou $x=-y$ et z indifférent, donc ça fait comme ça et comme ça⁷³. En fait on pourra dessiner les plans ? **B** : Bah dessine, comme ça, ça va être plus joli ; **Z** : Ça si on égale ce deux trucs donc ça fait en fait $x=\pm y$ et z indifférent ;

Cette production de **B1** ne se fait que par un processus interactif d'essais-erreurs. Sa validation dans le registre graphique en utilisant *Maple* ne rend que la réponse inattendue par les étudiants. Et donc une rétroaction de l'environnement, selon leur action quand ils entrent dans *Maple* les instructions suivantes précédées par des problèmes techniques (cf. B1, TC(400)) d'utilisation du logiciel.

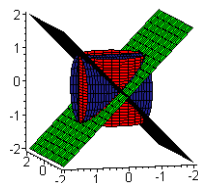
```
> s3:=plot3d([y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow):
s4:= plot3d ([y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green):
display(s1,s2,s3,s4);
```

Z : C'était magnifique ;
B : N'est pas bon ! C'était bien essayé quand même... ;
Z : Ah ! Oui, oui, oui ! Échec, c'est pas y , y c'est x indifférent et $y=\pm z$.



On voit bien que les étudiants se rendent compte de la situation (et trouvent les bonnes équations) après que *Maple* n'ait pas affiché les plans au bon endroit. Donc ils reviennent en arrière et modifient les positions des paramètres des deux plans dans la syntaxe (04). Avec x indifférent et $y=\pm z$, selon l'intervention d'étudiant **Z** ci-dessus. Ainsi, la validation d'ordre graphique de ces dernières équations dans *Maple* leur affiche sur l'écran les plans dans les positions attendues selon leur production ci-dessous (cf. TC542, protocole, B1).

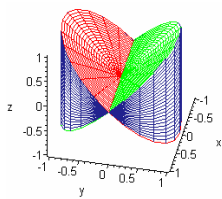
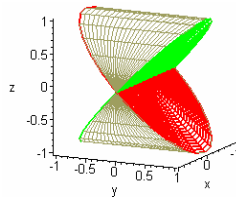
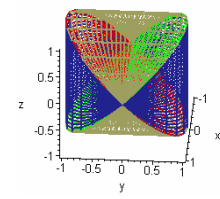
```
> s3:=plot3d([x,y,y], x=-2..2, y=-2..2, color= yellow):
s4:= plot3d ([x,-y,y], x=-2..2, y=-2..2, color= green):
display(s1,s2,s3,s4);
```



Question q4 - le crible : Les deux plans de la sous-étape précédente ont bien sûr aidé les étudiants dans leurs échanges : cela leur a permis le placement dans la syntaxe de la commande **plot3d** des données qui correspondent aux bornes d'intégration (sur chaque sous-solide de Q compris entre les deux

⁷³ **Z** montre avec ses mains les positions des deux plans sur la figure de la tâche précédente (q2).

plans - cf. figure (a) et (b) ci-dessous). On note que la réunion de ces sous-solides, grâce à l'usage correct de représentations simultanées, rend la visualisation graphique du solide **criblé** (cf. figure c ci-dessous).

(a) cylindre $C1$ en \mathbb{R}^3 (b) cylindre $C2$ en \mathbb{R}^3 (c) solide Q – *criblé*

Par contre, celle-ci ne s'est pas faite tout de suite par les étudiants. L'accomplissement de cette étape a pris plus de temps que prévu, car les étudiants n'avaient pas l'habitude ou les connaissances suffisantes pour traiter rapidement le type de tâche emblématique en utilisant *Maple*. Néanmoins, comme nous l'avons souligné plus haut, les étudiants voient bien dans l'intersection les bouts de surfaces qu'il va falloir enlever et l'importance des deux plans, comme le montre l'extrait de protocole ci-dessous :

(B1, TC568 et TC689)

Z : C'est mieux maintenant, tu les vois maintenant ?

B : Oui ! J'ai compris juste avant [...];

Z : Alors⁷⁴, en faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q ... Il faut tracer l'intersection [...];

B : Moi c'est le faire disparaître qui me gêne c'est [...];

Z : Faire disparaître dans le sens où ça va être vraiment une instruction qui va [...] ou c'est plutôt dessiner l'intersection [...];

Z : Ouais ! Donner une représentation graphique ! Ah ! D'accord, ... ;

B : Si on trace juste ces deux plans sur -1 à 1 on aura une belle représentation graphique [...];

Z : Il n'y a pas de l'aide ?

B : Bah, non ; **Z** : Il faut enlever ça et ça ;

B : De quoi ?

Z : Dans cette partie à cette partie il faut enlever le cylindre rouge, et de cette partie à cette partie il faut enlever le cylindre bleu. Il va rester du bleu ici et du bleu ici, et du rouge et du rouge et ça sera la même surface ;

B : Pourquoi ?

Z : Parce que le bleu il est bloqué là et il apparaîtra, quand on enlève le rouge là et le rouge là il reste que la surface commune au deux... à l'intérieur des deux ;

P : Ouais, exact ;

B : Ah ! Parce que c'est l'intérieur du cylindre. D'accord... ;

Z : Moi j'ai raisonné comme ça.

B : C'est juste pour savoir par rapport au plan, quand on est au-dessous de ce plan là il faut enlever le [...];

Z : Ah ! Ce n'est pas facile à faire, c'est facile à dire ;

B : Bah, oui ;

Z : Bon, entre, ça veut dire que, parce que là il faut raisonner en θ , entre $\pi/4$, entre $\theta = \pi$ [...];

B : $\theta=0$ et $\pi/4$;

Z : Parce que θ [...] Ah ! Non, on est comme ça, mais là, mais là on partait comme ça en fait ;

B : Ça veut dire que entre 0 et $\pi/4$;

Z : On fait quoi, on dessine qui ?

B : Que le, que le rouge ;

Z : Non, non ! Que le bleu ;

B : Que le rouge ;

Z : Que le bleu ;

B : Entre là et là que le rouge ;

Z : Non ! Que c'est le bleu ;

B : Que le rouge ;

Z : C'est le bleu qui est là ;

B : Non, on va garder que le rouge là ! On est d'accord.

L'enjeu de cette étape est assez clair, bien que très laborieux, car pour les étudiants conserver seulement les bouts de $S1$ et de $S2$ qui forment Q n'était pas simple. Comme l'exprime **Z** : **Ce n'est pas facile à faire, c'est facile à dire**. Donc, ils n'avaient pas une démarche spontanée pour arriver à décrire le **crible géométrique** et avoir le solide « isolé ». En effet, comme nous n'avons pas proposé une démarche à suivre pour décrire le crible, ils l'ont construit au cours

⁷⁴ Lecture de l'énoncé.

du temps. Nous trouvons que "*faire disparaître*" imposé par l'énoncé était vraiment un défi pour les étudiants. En fait "*faire disparaître les bouts qui ne font pas Q*" est l'opposé de "*conserver uniquement les bouts qui font Q, c'est-à-dire avoir le contour de Q*".

On perçoit que les échanges entre les étudiants, les stratégies de tâtonnement (c'est souvent leur mode d'action dans toutes les étapes), et les interventions de **P** font avancer les binômes par rapport aux deux catégories (type1 et type2) soulignées précédemment (cf. protocole).

Un des résultats intéressants (inattendu pour les étudiants) qui apparaît lors de la tentative de la visualisation graphique du solide **criblé** dans *Maple*, concerne les courbes d'intersection de S_1 et S_2 (les « *arêtes curvilignes de Q* » cf. **SO5**, analyse a priori). Ce résultat est arrivé après l'intervention de **P**, suivie d'interactions entre **B** et **Z**.

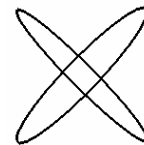
(B1, TC(788))

P : Là t'essaies de faire un petit peu au petit bonheur..., regardez pour quelles valeurs je suis sur le plan, pour quelles valeurs du paramètre je suis sur le plan qu'est ici... l'équation qui est ici d'un des deux plans, n'importe lequel, c'est assez simple, tu les avais données de façon cartésiennes... par exemple, le premier, le premier ici tu m'as dit c'est $y=z$, d'accord ? Quand est-ce que $y=z$ dans le premier cylindre ? Par exemple dans le cylindre eh, eh, eh rouge, tu prends le cylindre rouge, ses équations paramétriques, elles sont où ? J'en sais rien ! Celui-là ! $y=z$ qu'est-ce que ça donne ?

Z : D'accord !**B** : Je t'ai expliqué mais tu ne comprenais pas ;**Z** : J'ai attendu que tu comprennes par toi-même ;**B** : Attends je vais finir mon dessin... ;**B** : C'est $y = -z$?**Z** : Alors c'est bon **sinus**, **cos θ** , **cos θ** ... et les deuxième c'est **sin θ** , **-cos θ** , **cos θ** ;**B** : C'est bon, on ne dessine pas les plans alors ;**Z** : On va essayer quand même ...

A noter que le paramètre z dans S_1 est indépendant de θ ainsi que y dans le deuxième cylindre. Par contre **B1** entre dans *Maple* les instructions suivantes, croyant obtenir ainsi le solide **criblé**.

```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),cos(theta)], theta=0..2*Pi,z=-1..1, color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),-cos(theta),cos(theta)], theta=0..2*Pi,y=-1..1, color=navy);
> display(s1,s2);
```



Voilà les réactions des étudiants face à ce résultat :

(B1, TC(828))

Z : Ah ! Il a tracé que les courbes d'intersections ;**B** : Ouais ; « *Pourquoi ?* »**Z** : Parce que c'est juste l'intersection, parce que comme c'est des égalités on a tracé que la surface extérieur, donc forcément on a des intersections ...;**B** : C'est pas, c'est pas un volume quoi ;**Z** : Il nous faudrait une surface d'intersection quoi ;**B** : Un volume quoi ; **Z** : Bah ;**B** : Va s'y ;**Z** : Non ! Je réfléchir, je réfléchis ;**B** : Il nous faudrait presque des inégalités pour avoir ... ;**B** : Moi je n'arrive pas bien à voir pourquoi ça fait une courbe.

On remarque que les arguments des étudiants sont souvent basés sur ce qu'ils voient sur l'écran (après une validation d'ordre graphique des expressions entrées dans *Maple*), et ils essaient d'établir des liens avec les équations imposées par l'énoncé. D'après le résultat ainsi trouvé, et malgré les difficultés liées à la dualité *équations/inéquations*, on perçoit un progrès des étudiants dans la méthode de description du **crible**. En effet *Maple* ne représente que le contour (la surface externe) d'un solide et non son volume. L'interprétation de ce résultat par **B1**, en parallèle avec le rôle des plans d'intersection de C_1 et C_2 , les a beaucoup aidé à avoir les bornes du solide criblé (avec des interventions du professeur) selon l'extrait ci-dessous (cf.

aussi protocole B1 à partir de TC866).

(B1, TC(908))

P : [...] Ici quand tu regardes le cylindre rouge, d'accord, quand est-ce qu'il coupe le plan qui est ici ?⁷⁵ Ce plan là ? Ce plan, il a quoi pour équation ? Qu'est ce qu'il a comme équation ?

B : Bah, $x=y$;

P : Non ! $x=y$ non ! ça ne doit pas être ça ;

Z : $y=z$;

P : $y=z$, celui-là c'est le plan $y=z$! On est d'accord, $y=z$. Un point est sur le cylindre si ses coordonnées s'écrivent sous quelle forme ?

Z : $\sin\theta$, $\cos\theta$ et z ;

P : $\sin\theta$, $\cos\theta$ et z ; **Z** : Ouais ;

P : Donc, quels sont les points du cylindre qui sont là dessus ? Comment vous les caractérisez ? Un point d'ici ?

Z : Comme ça $\sin\theta$, $\cos\theta$ et z ;

P : $\cos\theta$, c'est-à-dire z égale ... $\cos\theta$;

Z : Ouais ; **B** : Ouais ;

P : C'est-à-dire, quand est ce que, sur mon cylindre je suis sur ce plan quand z est égal à $\cos\theta$? Quels sont ceux que j'enlève, a priori ? Ceux qui ne m'intéressent pas ?

Z : Supérieurs ;

P : Pour z ? Oui ! Supérieurs à $\cos\theta$. Donc ceux que je garde z inférieur à $\cos\theta$;

Z : ... donc on enlève ... les z supérieurs à $-\cos\theta$, et donc on garde ceux qui sont inférieur à $-\cos\theta$;

P : Non ! C'est le contraire. Tu enlèves ceux qui sont en dessous de ce plan ;

B : Ouais d'accord ;

P : Donc, tu vas garder, donc les points, les valeurs de z comprises entre $-\cos\theta$ et $\cos\theta$;

B : D'accord ;

Z : D'accord ;

P : Donc on reprend le tracé des courbes θ . Continues à tracer entre 0 et 2π , mais par contre la valeur de z on va la modifier, on va garder que les valeurs de z que sont entre $-\cos\theta$ et $\cos\theta$, D'accord ?

B : Ok ; **Z** : D'accord ;

P : Ça c'est pour ce cylindre là, maintenant il faut réfléchir à l'autre ;

B : Si je mets θ égal à [...] ;

Z : $-\cos\theta$ et $\cos\theta$;

B : Il arrive à le faire ?

P : Il arrive à le faire. Il arrive à tracer avec, donc des paramètres qui sont liés entre eux, d'accord ?

B : Donc il manquait bien un paramètre en fait, parce qu'on en a viré un ;

Z : Ouais, ouais copier coller ;

B : C'est fait... Alors ; Tu mets $-\cos\theta$ et $\cos\theta$?

B : Ouais ;

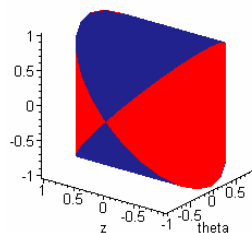
Z : Alors, là on a gardé donc ceux qui étaient entre $-\cos\theta$ et $\cos\theta$, pour les autres, c'est y qui va jouer euh, euh bah là ça va revenir au même en fait ;

Z : Attends, on va réfléchir ;

B : Ouais ... Mets la même chose, pour voir ce que ça fait ... Allez, mets la même chose...

Suite à cette interaction avec **P** (qui met en évidence le crible de S1) le binôme discute en essayant de donner à la syntaxe (**04**) de la commande **plots3d** les éléments de crible du deuxième cylindre ; il entre d'abord par tâtonnement avec les instructions suivantes, dont **Maple** rend effectivement le solide cherché. Les étudiants entre avec les données par tâtonnement car **Maple** permet un comportement dans l'action expérimentale, on essaie des équations – inéquations et on valide par la réponse du logiciel.

```
> s1:=plot3d([sin(theta), cos(theta), z], theta=0..2*Pi, z=-cos(theta)..cos(theta),color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta), y, cos(theta)], theta=0..2*Pi, y=-cos(theta)..cos(theta), color=navy);
> display(s1,s2);
```



Voici l'expression de joie de B1 face à ce résultat :

"Ce n'est pas du jeu. Ok ! Donc on explique ? Ça marche ! Bon c'est déjà ça ".

On peut alors dire que :

Les registres d'écritures en ligne pour les expressions instrumentées, correspondent bien avec le registre graphique pour le résultat donné par Maple "conforme" au l'ostensif lié à l'objet

⁷⁵ P montre d'abord sur la figure de TC542 affichée sur l'écran.

mathématique cherché (le solide **criblé** de l'intersection des deux cylindres).

7.3 L'étape E3 : La question q5 - calcul du volume de Q criblé

Après avoir trouvé le solide **criblé**, ce binôme se pose les questions suivantes (cf. TC(+35) du protocole de B1) :

On intègre ? Et comment ? On ne l'a pas l'équation de la surface. On l'a paramétré quoi. Il faut l'équation de la surface si on veut pouvoir intégrer en fait.

Cette première réaction des étudiants face à cette dernière question montre qu'ils ont des connaissances suffisantes sur les intégrales multiples pour se faire une idée du problème. Le fait d'avoir besoin d'une surface pour mettre en place le calcul d'intégrale nous permet de dire qu'ils ont pensé tout de suite au calcul de volume du solide sous une surface, et donc au calcul d'une intégrale double.

Ceci nécessite donc un retour à la notion de *fonction* de deux variables. Il est alors essentiel d'avoir un moyen de contrôle permettant le passage de la notion de *paramétrage* (qui a permis de cribler le solide) à celle de *fonction* de deux variable. Cette dernière doit permettre le calcul de volume de Q par une intégrale double. D'où la nécessiter de dégager l'expression d'une surface à intégrer.

Toutefois, les étudiants ne savaient pas quelle surface prendre en compte. On remarquera alors que la notion de *paramétrage* semble perturber la démarche habituelle des étudiants devant résoudre le type de tâche emblématique. Il apparaît qu'ils ne perçoivent pas vraiment les liens possibles entre *les composants d'écritures en ligne pour les expressions instrumentées* et le *graphique* obtenu. Donc le travail de la représentation graphique du solide **criblé** n'est pas tout de suite un moyen utilisable pour la mise en place du calcul de l'intégrale. Il semble que les connaissances qu'ils ont sur la notion d'intégrale multiple ne sont pas suffisantes pour arriver à percevoir immédiatement que les composantes, qu'ils ont mises en place pour la représentation graphique du solide **criblé**, correspondent aux bornes d'intégration sur chaque sous-solide de Q compris entre les deux plans, en prenant en compte la symétrie de Q par rapport à ces plans, ainsi que les plans de coordonnées (xOy , xOz et yOz).

Les raisonnements préliminaires repérés dans le passage de l'étape précédente à celle-ci donne d'une certaine manière quelques éléments importants pour l'organisation du travail des étudiants. Ils voient par exemple que les équations des plans jouent un rôle important. Ils parlent souvent des expressions de z ainsi que de la symétrie perceptible sur le solide, à la fois à l'aide de couleurs, et en utilisant des gestes avec leurs mains ou par la manipulation de la figure avec la souris, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous.

(B1, TC(+35))

B : En fait il suffit d'intégrer ?
Z : Ouais, entre non !
B : Non ! Il faut tenir compte de z ;
Z : J'sais pas ce que ça fait si on intègre ça sur z égal à $-\cos\theta$ et l'autre sur $-\cos\theta$. Ça fait une intégrale double avec ces deux trucs à la fois ;
B : Ça doit forcément être ça ;
Z : Mais il faut une équation de surface là pour intégrer ;

B : T'en as même deux ;
Z : Il y a une certaine symétrie. Ça, on prend juste ce truc là ;
B : Ouais, on a l'équation c'est bon, c'est bon ;
Z : Essaie ;
B : ça ?
Z : Ah ! Ouais, en fait il suffit d'intégrer ça sur ça en fait. Et multiplier par huit.

On voit aussi bien que les jeux d'essais-erreurs (stratégie de tâtonnement), déjà observés dans l'étape précédente, persistent dans celle-ci. Cela montre que les difficultés des étudiants ne se trouvent pas seulement au niveau des compétences de type1 et de type2 repérées dans les deux premières étapes. On perçoit que l'évolution de ce binôme dans les sous-étapes distinguées plus haut concernant cette dernière étape, est souvent conditionnée par les interventions de l'enseignant. Autrement dit, les étudiants acquièrent souvent certaines démarches de résolution du problème à la lumière de **P**. Ainsi, la sous-étape (a) apparaît dans le travail de ce binôme après l'intervention de **P** suivante. En fait, c'est le professeur qui donne la définition manquante au travail de ce binôme.

(Séance 1, TC(+043))

Une fois que vous avez déterminé, donc, vous avez certaine, une certaine symétrie, donc vous allez tout dessiner, d'accord ? Donc ce que vous faites, vous allez le séparer et **vous me dessinez juste un petit morceau, le morceau dont vous allez calculer l'aire**. **O** : « *En fait ce n'est pas une aire qu'on cherche à calculer c'est le volume de Q* ». Y'a certaine symétrie vous allez enlever tout ce qui n'appartient pas à Q , et garder ce qui vous intéresse. Ensuite on y va, on calcule l'intégrale triple, sur ce domaine, hop. **O** : « *il écrit au tableau* » $\iiint dx dy dz$ sur le domaine que je cherche $dx dy dz$, alors en fonction de ce que vous avez fait on va bien sûr se mettre avec le paramétrage que vous avez choisi... C'est-à-dire il va falloir changer deux paramètres.

L'étape du découpage de Q en sous-solides par symétrie est une sous-étape nécessaire dans le processus heuristique. De ce fait, la visualisation de Q criblé dans **Maple** est obtenue par l'union des sous-solides comprise entre les deux plans d'intersection. Ainsi pour avoir par exemple $\frac{1}{8}$ de Q , selon le raisonnement de **Z** dans l'extrait ci-dessus, il suffit de soustraire S_2 dans **display** et de visualiser S_1 par $\theta \in [0, \pi]$ et $0 \leq z \leq \cos\theta$. Voici donc ce qui arrive à ce binôme lorsqu'il cherche à découper le solide Q .

(B1, TC(+113))

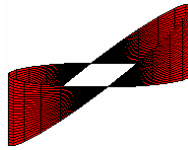
B : [...] On a fait quoi ? 0 et 2π ?
Z : Là si on fait 0 et π on va avoir que ça en fait ;
B : Mais c'est pas grave... ;
Z : On essaie de π à 2π ?
B : Avec un peu de chance tu vas avoir juste celle en dessus ;
B : Echec ; « *Rires* »
Z : On prend que ça ;
B : Allez, vas-y, change ;
Z : Attends ;
B : Il faut faire de $\pi/4$... ;
Z : Mais, attends, attends, attends ;
B : Copy ;
Z : Oui ! Copy déjà, mais, c'est pas sur θ qu'il faut jouer comme ça ;

B : Ouais ;
B : Je vais te dire ce qu'il faut mettre, $\pi/2$ premièrement ;
Z : Voilà, exactement ;
B : C'est bien ;
Z : Attends, attends, on va réfléchir, ... deux ;
B : π à 2π , donc il nous faut de... allez mets $\pi/2$;
Z : Non ! De $-\pi/2$ à $\pi/2$. $-\pi/2$ à $\pi/2$;
B : Sinon on va voir la partie du bas ;
Z : Ouais ;
B : Tient ça ;
Z : Ça fait une **couronne** ;
B : Un **diadème** ;
Z : Nous ne faisons pas n'importe quoi ;
B : Ouais !

Cette interaction conduit alors le binôme à la mise en place de l'écriture en ligne pour les expressions instrumentées ci-dessous, dont **Maple** rend le dessin inattendu (ci-dessous) et donc une rétroaction de l'environnement. Ce dessin est alors interprété par eux comme une

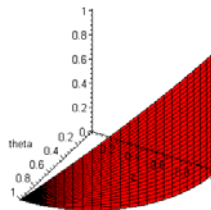
couronne selon leur expression dans l'extrait ci-dessus.

```
> plot3d([sin(theta), cos(theta), z], theta=0..2*Pi, z=0..cos(theta), color=red);
```



On voit bien dans l'intervention ci-dessus (B1, TC(+113)) qu'ils ont voulu conserver la partie positive du cylindre rouge, quand **B** dit : *Avec un peu de chance*⁷⁶ *tu vas avoir juste celle en dessus* (en montrant avec la souris le solide criblé obtenu plus haut affiché sur l'écran). Dans ce raisonnement, on peut dire que ce binôme regarde initialement le rôle d'un des deux paramètres (dans ce cas le paramètre z), et oublie que le paramètre θ est aussi là pour jouer son rôle. Lorsqu'ils trouvent un résultat inattendu, ils reviennent en arrière et modifient les données. Toutefois, avec ce jeu d'essai-erreur, ils arrivent à avoir un découpage qui correspond à un seizième du volume de Q , en entrant dans *Maple* avec la ligne de commande suivante, portant une modification sur le paramètre θ par rapport à l'action précédente.

```
> plot3d([sin(theta),cos(theta),z], theta=0..Pi/2, z=0..cos(theta), color=red);
```



On voit graphiquement dans ce résultat que *Maple* ne dessine que les bouts des surfaces qui forment le contour du solide ou sous-solide envisagé. Toutefois, les bornes entrées dans la syntaxe (04) de la commande **plot3d**, qui rendent possible le découpage du solide en sous-solide, permettent aussi bien sûr d'obtenir le solide **criblé** visuellement borné, une fois que les expressions de ces bornes représentent des bouts des surfaces qui délimitent le sous-solide obtenu. En effet, ce travail de visualisation du solide **criblé** et borné dans *Maple* requière de la part d'utilisateur un approfondissement des connaissances dans les trois premiers types de compétence soulignés plus haut.

Par contre, on voit bien que les données mises en jeu dans la ligne de la commande **plot3d** correspondent aux bornes d'intégration, donc celles-ci permettent de façon immédiate l'accomplissement des sous-étapes (b) et (c). Néanmoins, cette possibilité d'organisation de la tâche n'était pas prise en compte par ce binôme. Après avoir obtenu la seizième partie de Q , ils entrent dans *Maple* l'instruction ci-dessous en utilisant la commande **integer**. Mais, cette commande est inexistante dans l'ensemble des outils disponibles à propos des *IM*. En effet, ils obtiennent la description analytique (d'une partie) de S_1 paramétrée (cf. aussi TC(+143) protocole) :

```
> integer([sin(theta),cos(theta),z], theta=-Pi/2 .. Pi/2, z=0..cos(theta));
```

⁷⁶ Cette expression donne de certaine manière une signification à la technique d'essai-erreur possible avec *Maple*, souvent présente dans l'action des étudiants.

Maple rend la description ci-dessous qui ne correspond pas à celle que **B1** a voulue :

$$\text{integer} \left([\sin(\theta), \cos(\theta), z], \theta = -\frac{1}{2}\pi .. \frac{1}{2}\pi, z = 0 .. \cos(\theta) \right)$$

Voici l'expression de l'étudiant **B** face à ce résultat ci-dessus :

Mais pourquoi "integer" il me donne ça ?

On peut repérer dans cette action de **B1** (qui rend ce résultat) les problèmes techniques suivants liés aux compétences de **type4**:

- Manque de connaissance sur l'utilisation des commandes **int**, **Int**, **Doubleint** et **Tripleint** ;
- Difficultés pour interpréter les expressions des surfaces paramétrées : on voit facilement cette difficulté quand ils entrent dans la syntaxe de commande "**integer**", le paramétrage de S1, au lieu d'une seule expression algébrique qui doit correspondre à la surface repérée sur le domaine d'intégration (en pensant au volume du solide sous une surface, et donc à une intégration double). Ceci montre encore une fois que la notion de *paramètre* a perturbé les pratiques habituelles des étudiants sur les *IM*.
- Difficultés à investir dans les étapes suivantes le travail qu'ils viennent de développer. On voit bien dans leur schème d'utilisation le manque d'interaction entre les données mises en place dans la dernière syntaxe et celles prises en compte dans le découpage de *Q* en 16 parties.
- Difficultés à interpréter les résultats rendus par le logiciel.

On voit alors bien la difficulté d'utilisation des outils disponibles à propos de calcul d'intégrale quand ce binôme réessaie de calculer l'intégrale envisagée, en remplaçant **integer** par **int**, et en conservant la paramétrage de S1 :

```
> int([sin(theta),cos(theta),z], theta=-Pi/2 .. Pi/2, z=0..cos(theta));
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments
```

Voilà l'expression de **B1** face à ce résultat inattendu.

(B1, TC(+H13))	<p>B : Echec ; Z : Bon ! Il ne connaît pas, deuxième échec ; B : Pourquoi je n'ai pas le bon ... la bonne aide sur ça alors ? Z : Ça ne va pas du tout ; B : Bah, essaie quelque chose ; Z : Pourquoi, n'ai-je pas "integer" là dedans ? Je ne comprends pas là. Z : Je comprends là ; B : Ce n'est pas versé ça en fait, "integer" je ne sais pas ce qu'il nous fait mais ce n'est pas "integer", c'est "int" peut-être ou je ne sais pas ce que c'est, mais ... ;</p>
----------------	--

On perçoit que les étudiants ont certaines connaissances de **type3**, mais il apparaît que ces connaissances ne sont pas suffisantes pour arriver à utiliser cet environnement dans la résolution du problème. Les étudiants cherchent souvent dans la fonction « help » de **Maple** les instructions qui peuvent les aider dans leurs actions. Ce binôme montre des difficultés lors de l'interaction entre ce qu'il sait des *IM* et la mise en place des données dans les syntaxes des commandes du logiciel, notamment les liens entre les écritures algébriques usuelles du calcul d'une *IM* et celles en ligne pour les expressions instrumentées (cf. la dernière ligne de la commande ci-dessus, pour laquelle **Maple** rend effectivement une erreur).

L'interaction entre les étudiants eux-mêmes ((B1, TC(+113)) a été suivie par l'intervention de **P** à toute la classe. Il rappelle aux étudiants la notion d'intégrale triple (donc les compétences de type3) et la formule de changement en coordonnées cylindriques. En effet, **P** ne conduit les étudiants que dans la réalisation de la tâche à partir d'une intégrale triple en coordonnées cylindriques⁷⁷, comme le montre son discours ci-dessous.

(Séance1, TC(+149))

... maintenant on va passer en coordonnées cylindriques... Quel est l'intérêt de ce que vous avez fait ? Que vous avez précisément les valeurs du paramètre de votre domaine, c'est-à-dire $\varphi^{-1}(D)$ vous l'avez pratiquement, d'accord ? En cylindriques je rappelle hein, on va partir de θ , ρ et z , on associe en fonction y'en a qui ont préféré prendre $\sin\theta$, $\cos\theta$, etc., donc c'est $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$. **O** « *P note au tableau* »

$$(\theta, \rho, z) \rightarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

Et maintenant l'intérêt de ce qu'on a fait qu'est-ce que ça nous a permis de faire, de le dessiner et couper en morceaux, c'est que, sur le petit domaine, on a simplifié déjà par symétrie, et là maintenant mon petit domaine me permet d'avoir $\varphi^{-1}(D)$, $\varphi^{-1}(D)$ vous l'avez pratiquement de façon simple. Attention, ce que vous allez tracer c'est la **surface externe**, ce que devez calculer c'est le **volume interne**, d'accord ? Ce n'est pas la surface externe. On ne vous demande pas de faire un calcul de l'intégrale de surface, seulement le volume. On est bien d'accord [...]. Alors, pour si vous voulez vraiment calculer une intégrale double ou une intégrale triple **Maple** le fait aussi, ... il le fait dans les paquets "**student**" mais on va le faire à la main, moi je préfère qu'on le fasse à la main - éventuellement après on demandera à **Maple** de faire chacune des intégrales simples qu'on va récupérer. On va intégrer par rapport à chacun des paramètres les un après les autres. Moi ce qui m'intéresse, déjà, c'est que vous me donniez sur votre papier l'intégrale que vous avez à calculer de façon précise, d'accord ? Le 1/16, le 1/8, le 1/4 d'intégrale que vous avez à calculer.

Avec cette intervention, ce binôme reprend les calculs de l'intégrale par des techniques papier/crayon et chaque étudiant procède comme suit (transcription de leurs brouillons).

B	Z
<p>Le problème c'est qu'on va intégrer quoi ? Je ne sais pas... $\sin(\pi/2)$ ça fait 1. Wau ! J'ai trouvé quelque chose de négatif. 1 moins Pi sur deux... Ah ! Je me suis trompé là, z c'est entre zéro, il n'y a pas ça, ça fait 2, ça fait 1, ça fait huit, moi j'ai trouvé 8, bah, 8 ! J'ai trouvé 8. Ce n'est pas 8 ?</p> $V = \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$ $= \int \rho d\rho \int d\theta \int dz = 8 \int \rho d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta [(\cos\theta - 1)]$ $= 8 \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^1 \left[\sin\theta - \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 8 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \right)$	<p>On intègre ρ ! Parce que pour définir ça comme une intégrale triple, on prend ça ?</p> $V = \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\varphi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$ $\int_0^1 \rho d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\rho\cos\theta} dz \otimes \int_0^1 \rho d\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \cos\theta d\theta$ $\otimes \int_0^1 \rho d\rho \left[\sin\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \int_0^1 \rho d\rho (2)$ $= 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$ $\times 8 = \frac{16}{3}$
<p>OBS « Il efface $-\pi/2$ et l'autre $-\pi/2$, et reste alors avec l'expression qui résulte à 8 » cf. brouillons annexés.</p>	

Mis à part l'emploi erroné (produit de trois intégrales simples) de l'écriture du calcul de l'intégrale triple, **Z** trouve le résultat attendu. En effet, le $\varphi^{-1}(D)$ – selon l'intervention de **P** – pris en compte par **Z** ne correspond pas avec le seizième (sous-solide) qu'ils ont dessiné. C'est bien ce que **P** tente de souligner quand il leur dit :

"[...] l'intérêt de ce que l'on a fait qu'est-ce que ça nous a permis de faire, de le dessiner et couper en morceaux, c'est que, sur le petit domaine, on a simplifié déjà par symétrie, et là maintenant mon petit domaine me permet d'avoir $\varphi^{-1}(D)$, $\varphi^{-1}(D)$ vous l'avez pratiquement

⁷⁷ Alors qu'il semble B1 ne pense qu'à une intégrale double.

de façon simple (cf. extrait (**Séance1**, **TC(+149)**) ci-dessus).

On peut donc dire que le rapport dessin – calcul d'intégrale multiple (soit double, soit triple) se place encore loin dans le raisonnement de ce binôme. En trouvant le résultat attendu, ce binôme ne savait même pas y donner un sens. Voilà ce qu'ils racontent dans l'interaction ci-dessous avec l'observateur.

(B1, TC(+395))	<p>OBS : Cette partie (découpage) correspond à quoi, dans le solide que vous avez trouvé ?</p> <p>Z : Ça correspond à un huitième ! Tu veux monter, on monte ;</p> <p>OBS : Où se trouve ce morceau là ?</p> <p>Z : C'est ça ;</p>	<p>B : Ouais, voilà c'est ça, ça correspond à un quart, quoi ! Un huitième ;</p> <p>Z : Ce quoi le ... ;</p> <p>B : Ce n'est pas le bon paramétrage ;</p> <p>Z : C'est la même ! Entre zéro et ... « rires » ;</p> <p>B : Entre ça, ... ce n'est pas un truc plus grand ?</p>
-----------------------	--	--

On voit donc que le travail préliminaire de représentation graphique (à partir de la notion de *paramètre*) dans **Maple** a provoqué une certaine perturbation dans le mode de raisonnement des étudiants autour des *IM*. Ils développent facilement les calculs par des techniques *papier/crayon* (malgré le dérapage d'écriture algébrique du calcul d'intégrale), mais ils ne voient pas la correspondance entre les calculs et le résultat trouvé. De plus, ils persistent à se poser la question initiale sur la surface à intégrer. En revenant au travail dans **Maple**, ils présentent toujours les mêmes difficultés autour des outils **Maple**, notamment les syntaxes des commandes **int** et **Int**. Ils n'arrivent pas à voir des liens entre les modes d'utilisation (les représentations successives) de ces commandes et les écritures usuelles du calcul de l'intégrale multiple. Celle-ci est encore remarquable dans leur dernière interaction et dans le registre en ligne pour les expressions instrumentées ci-dessous.

(B1, TC(+480))	<p>B : Si on met du $\rho \cos \theta$ ça marche pas non plus, très bien ?</p> <p>B : Ce n'est pas ça !</p> <p>P : Pourquoi il fait ça ?</p> <p>Z : Je ne sais pas ;</p> <p>B : Bah par contre il faut intégrer quoi là ?</p> <p>Z : Bah, il faut intégrer ρ avec $\theta = 0.. \pi/2$, $z = 0.. \rho \cos \theta$, et [...] ;</p> <p>B : Je ne sais pas s'il comprend ça ? Il y a encore un truc à faire varier ? Z : ρ !</p> <p style="padding-left: 20px;">> Int(rho,theta=0..Pi/2,z=0..rho*cos(theta),rho=0..1);</p> <p style="padding-left: 20px;">> Int(rho, theta = 0 .. pi/2, z = 0 .. rho*cos(theta), rho = 0 ..1) ;</p> <p>B : Pourquoi ça ne marche pas ?</p>
-----------------------	--

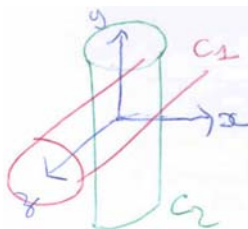
Notons que même dans le cas d'utilisation adéquate de syntaxe de la commande **Int** afin de calculer l'intégrale triple (comme ils essaient de la faire), l'ordre du placement des bornes ci-dessus ne conduit qu'à une expression algébrique, qui n'est donc pas une valeur numérique.

Ainsi se termine le travail de **B1**

8. Analyse a posteriori du travail du binôme B4

8.1 L'étape E1 : Les questions q1 et q2

Question q1 : Ce binôme est arrivé à dessiner tout de suite les deux cylindres sur papier (cf. dessin ci-dessous, extrait de leur brouillon) à partir des inéquations données.



Puis les étudiants raisonnent autour des équations cartésiennes de surfaces $S1$ et de $S2$ (quand **N** dit : *Allons-y, pour les équations paramétriques, tu mets égal, ...*, cf. B4, TC(058) ci-dessous). Ceci semble montrer que le binôme cherche d'abord à remplacer les inégalités des inéquations données par des égalités, afin de déterminer les équations paramétriques des surfaces cylindriques. Toutefois, l'écriture des équations de $S1$ et $S2$ sur papier a donné lieu à une longue discussion entre eux, qui n'aboutit qu'après l'intervention de **P** pour toute la classe (cf. Séance 2, TC(069)).

(P, TC(069), Séance 2)

Vous faites attention, ce que vous allez tracer, on vous demande pas de tracer un volume, on vous demande de tracer l'extérieur du volume, l'extérieur du volume c'est pas $x^2+y^2 \leq 1$, le cylindre extérieur c'est $x^2+y^2=1$, donc on vous demande pas de tracer le volume, on vous demande de tracer l'extérieur du volume, d'accord ? La surface qui enveloppe le volume, d'accord ? Donc ce que vous avez à tracer c'est le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$, pas $x^2+y^2 \leq 1$ c'est pas une inégalité.

Donc c'est **P** qui instruit les étudiants pour préciser l'écriture de l'équation cartésienne de $S1$, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessus. A partir de là, les étudiants donnent, assez facilement, l'écriture de $S2$.

Ensuite, ils ont pensé immédiatement à un paramétrage **angulaire**. Toutefois ils s'opposent sur le choix d'une lettre pour le deuxième paramètre du premier cylindre. Ainsi **N** considère le paramétrage $[\cos\theta, \sin\theta, t]$ pour $S1$ (sans donner le domaine de variation des deux paramètres, θ et de t). Alors que **F** le conteste et dit que le paramétrage pour $S1$ c'est $[\cos\theta, \sin\theta, \theta]$ avec θ variant de $-\infty$ à ∞ . Mais l'écriture proposée par **F** (avec un problème dans la dualité des objets *surface/courbe*) n'est pas mise en œuvre dans **Maple**. Ensuite, ils se mettent rapidement d'accord en choisissant la lettre z pour le deuxième paramètre de $S1$. Cette première étape se fait dans l'environnement *papier/crayon*, au brouillon et où l'on trouve aussi le bon paramétrage de $S2$ sans préciser les domaines des paramètres (cf. en annexe).

En utilisant les équations paramétriques écrites au brouillon, ils commencent leur travail de représentation graphique des surfaces $S1$ et de $S2$ dans **Maple**, en utilisant la syntaxe (04) de la commande **plot3d**. L'extrait du protocole ci-dessous illustre leurs premières interactions

avec le logiciel.

(B4, TC(058))

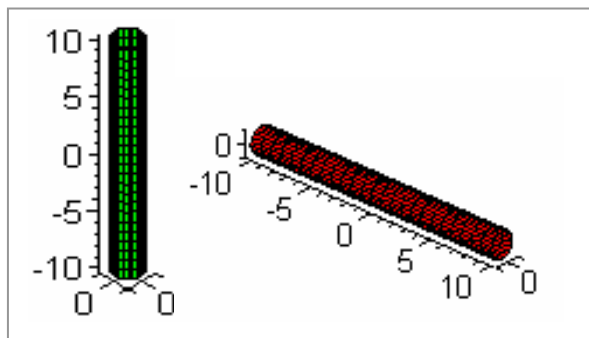
F : Moi je connais *Maple* « rires » [...];
 N : Allons-y pour les équations paramétriques, tu mets égal [...];
 F : Hum ; N : Tu mets égal [...]
 O : Intervention de P pour toute la classe. Ensuite ils écrivent sur le papier, voir les brouillons ;
 F : Les équations paramétriques c'est $\rho \sin \theta$, [...];
 N : Les équations paramétriques c'est $x^2+y^2=1$, et $y^2+z^2=1$;
 P : $x^2+y^2=1$ c'est quoi ça dans le plan $z=0$?
 F : Un cercle ;
 P : Un cercle, un plan $z=0$ c'est un plan. Alors, paramétrez ça, comment on paramètre un cylindre. Ce n'est pas très compliqué quand même [...];
 N : $\cos \theta$, $\sin \theta$, t ;
 F : Non, c'est $\cos \theta$, $\sin \theta$, θ . θ variant $-\infty$ à ∞ ;
 N : Tu crois ? x égal, x ...euh... ;

F : $\cos \theta$;
 N : $\sin \theta$ et tu mets ce que tu veux quoi, tu mets z égal ;
 F : z ;
 N : $z = z$;
 F : Hum ! [...];
 F : x en fonction de $\cos \theta$; y c'est $\sin \theta$ et z ou ;
 N : Ouais, z , et θ de 0 à 2π ;
 F : 0 à 2π . Et z ? Pour l'instant on prend de ...euh... -10 à 10 ?
 N : Hum, **color blue** ;
 F : Quoi ?
 N : **color blue** « rires » ;
 F : C'est une jolie couleur ?
 N : Oui ; [...];
 F : Copier, coller tu remplaces y par ...euh... ;
 N : y par z ?
 F : Ouais ;

On peut donc dire que ce binôme a une bonne visualisation tridimensionnelle du problème, grâce à une certaine connaissance qu'il a de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension. Ils « voient » bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur réunion. Mis à part le problème de dualité sur les objets *surface/courbe* (F lors de l'écriture des équations paramétriques de S1) on voit dans le travail de ce binôme B4 une certaine organisation de la tâche, par des techniques *papier/crayon* ainsi que dans *Maple*, qui conduit à une réussite rapide à la première question (q1).

Question q2 : L'extrait (B2, TC(058)) ci-dessus montre deux choses importantes : la réussite à la première question et des initiatives correctes d'utilisation de la syntaxe (04) de la commande **plot3d** avec les options des couleurs. Ainsi, l'entrée des deux écritures paramétriques de S1 et S2 dans *Maple* n'a posé aucun problème de syntaxe, comme l'indique le travail instrumenté ci-dessous.

```
> plot3d([cos(theta), sin(theta), z], theta=0..2*Pi, z=-10..10, color=green);
> plot3d([cos(theta), y, sin(theta)], theta=0..2*Pi, y=-10..10, color=red);
```



A noter que visuellement les deux cylindres à gauche ne posent pas de problèmes. Toutefois on trouve dans ce travail quelques problèmes techniques sur le contrôle des paramètres z et y (valeurs de variables liées aux hauteurs des cylindres). Comme nous l'avons constaté pour les binômes (B1, B2, et B5), quand les deux surfaces cylindriques sont repérées à l'échelle 1:1 (cf. représentation de droite ci-dessus), les bornes des variables z et y jouent alors un rôle important, notamment sur la visualisation des dimensions des cylindres affichés à l'écran. Mais cette observation n'est pas prise en compte par B4 qui a pris initialement chaque cylindre dans le parallélépipède $[-1,1] \times [-1,1] \times [-10,10]$.

De plus, on observe que le travail suivant portant sur la représentation graphique des deux cylindres ensembles est en grande partie guidé par **P**. Ce dernier, parle précisément des problèmes techniques possibles que l'on peut rencontrer lors de la réalisation du travail de **RG** simultanées des objets dans *Maple*. Notamment l'affectation des deux surfaces par une variable et la substitution du *point virgule (;)* par *deux points (:)* à la fin de chaque ligne de la commande **plot3d**. Comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous.

(B4, TC(136))

P : Je suis d'accord pour la couleur rouge, le vert c'était quoi ? « *Rires* » c'est un peu violent, bon, allons-y l'intersection des deux là, maintenant on peut faire l'intersection des deux ;

N : On fait **display** ;

P : Ouais **display** attention, soit tu fais un copier coller de tout ce qu'il y'a au-dessus, soit tes deux dessins tu les **affectes** dans des variables ;

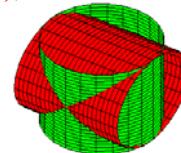
F : Ouais, plutôt ;

P : D'accord ? On commence par **affecter** les deux trucs qui sont au-dessus en deux variables. Il faut faire attention quand tu les injectes,... là tu mets surtout pas un **point virgule** sinon il va rentrer comme un affichage, il va y avoir ce que tu as mis dans le mémoire, ce que tu as mis dans mémoire c'est tous les points, donc tu vas avoir un tableau de valeurs absolument terrible qui va sortir, d'accord ? Tu fais ça, première chose pour C1 et C2 et après **display** C1, C2, d'accord ?

En s'appuyant sur cette intervention de **P**, ce binôme vérifie d'abord la validité de la technique d'affectation des surfaces en utilisant exactement C1 et C2 (au lieu de S1 et S2) comme **P** l'avait proposé, et il voit que ça marche, comme l'indique l'expression de **F** suivante : "On va juste vérifier ...euh..., $\cos\theta$, $\sin\theta$, z , ah c'est bon". Ensuite ils utilisent correctement la commande **display** (sauf que dans cette commande on n'a pas besoin d'accolades) comme le montre leur travail dans *Maple* retranscrit ci-dessous.

On voit bien à partir de cette action que ce binôme a repéré l'intersection de Q dans le cube $[-1,1]^3$. L'anticipation de **N** quand il dit : "En fait tu peux mettre de -1 à 1 ", montre bien cette initiative, mais avec l'incertitude de **F** qui questionne : " -1 à 1 ça suffirait ?". D'ailleurs cette incertitude de **F** a fait changer l'idée de **N** en disant :

```
> C2:=plot3d([cos(theta),y,sin(theta)], theta=0..2*Pi,
y=-1..1,color=red):
> C1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),z], theta=0..2*Pi,
z=-1..1,color=green):
> display({C1,C2});
```



"Ou alors -2 à 2 , histoire de voir ce que ça donnait". Toutefois ils se comprennent rapidement et avancent avec la première idée de **N** sans même avoir à consulter la remarque d'énoncé qui le suggère, pour aider les étudiants dans le passage de cette étape à la suivante. Donc on observe une réussite de la question **q2**, mais avec l'intervention de **P**.

8.2 L'étape E2 : Les questions q3 et q4

Question q3 : À noter que sans avoir bougé la figure, ce binôme est arrivé à visualiser tout de suite les deux plans à partir de la figure précédente affichée à l'écran. C'est **F** qui remarque spontanément qu'il y a deux plans et la bonne position de ces deux plans. Ce binôme n'a pas trop bougé les figures après les avoir obtenues pour se faire des idées sur l'intersection. Donc ils "voient" bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur emboîtement, ainsi que les plans d'intersection. Néanmoins on observe que coordonner ce qu'ils voient avec les équations paramétriques correctes, qui rendent compte de la représentation graphique dans *Maple* [sous-étape (a)], a donné lieu à une longue discussion entre eux, ainsi qu'à des essais-

erreurs dans *Maple*. Les termes suivants reviennent souvent dans leur anticipation face à cette question :

- On voit les deux plans ; [...]
- Les deux plans qui se coupent ; [...]
- On prend les équations là-dessus et on va exprimer le y et le z non ? [...]
- Tu es d'accord pour les ...euh..., pour les plans ? [...]
- Essaie de tracer les plans ; [...]
- Je voulais reprendre les équations de cylindre 1 et cylindre 2, l'idée c'est d'enlever ce qui dépasse, ce que l'on ne veut pas ; [...]

Donc les difficultés de ce binôme face à **q3** étaient d'abord de trouver les équations des deux plans qu'ils arrivent pourtant bien à visualiser dans la figure affichée à l'écran. Ceci montre que les connaissances qu'ils ont de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension, ne sont pas suffisantes pour arriver à coordonner immédiatement les objets géométriques de cette dimension avec les expressions algébriques qui les représentent. Ils y arrivent, mais après plusieurs essais-erreurs.

Le protocole montre bien aussi que souvent les étudiants bloquent après une lecture de la question proposée. Toutefois, ils réfléchissent, leurs interactions montrent en général une bonne appropriation de la tâche, ils cherchent les stratégies pour la résolution du problème, comme nous l'avons vu dans leurs anticipations montrées ci-dessus. Par exemple quand un étudiant dit : "*Je voulais reprendre les équations de cylindre 1 et du cylindre 2, l'idée c'est d'enlever ce qui dépasse, ce que l'on ne veut pas*". Donc l'initiative de reprendre les équations des surfaces est tout à fait pertinente pour chercher les équations des plans.

Dans cette étape, on observe que ce binôme essaie de résoudre les questions **q3** et **q4** conjointement, c'est-à-dire, exprimer les équations des deux plans, les représenter graphiquement dans *Maple* et décrire le *crible*. Mais ils n'ont pas le temps d'avancer beaucoup dans cette tâche, car **P** intervient tout de suite, en conduisant les étudiants à la recherche des équations de plans et dans leurs visualisations graphiques ensemble avec les deux cylindres, comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous :

(B4, TC(367))	P : C'est bien ça ;	F : En fait il faut supprimer sur le cylindre rouge c'est ce qui est ...euh... en dehors de...euh... quand tu prends ces plans ;
	« <i>P parle de la figure précédente</i> »	N : Ouais ;
	N : En fait, on a supprimé les bouts ;	F : Supprime ce qui est là et là en fait et pour le vert c'est ce qui est là et là. P1 et P2 ...euh..., plot3d ...euh... ; le x pour les plans je l'exprime comment ? Je re-exprime les équations des plans comme tout à l'heure ?
	P : Supprimer les bouts, donc l'intersection ;	N : Tu mets $x, y, -x$;
	F : Donc, on a l'intersection avec les plans ;	F : x, y et ?
	P : C'est quoi les plans ?	N : $-x$;
	B4 : x ...euh..., $y = z, y^2 = z^2$;	F : Tu es sûr ?
	P : Donc, ça fait $x=y$?	N : Ouais ;
	N : Et y , non, $y = z$ et $y = -z$;	F : Tac et après ...euh... x ;
	P : Allons-y, tracez les aussi d'accord ? Tracer moi les deux plans d'intersection. P1 ...euh..., P2 et comme ça tu fais un display C1, C2, P1, P2 ;	« <i>il entre avec ces données et ça ne marche pas</i> »
	N : Tu peux mettre les axes ?	F : C'est justement ce qu'on voulait pas tout à l'heure ;
	F : Les axes ?	
	N : Hum ;	
	P : Dans display il n'y a pas besoin des accolades ;	
	F : Ça c'est x, y et z ; N : ...euh..., ça c'est ...euh..., j'sais pas, mais ...euh... nous on met ...euh... y ... ;	

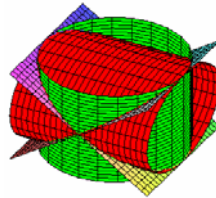
A noter que les questions posées par **P** aident bien sûr les étudiants à exprimer correctement

les équations des deux plans. Toutefois, ils montrent des difficultés lors de la représentation graphique de ces plans dans *Maple*. Ils tâtonnent pour avoir les représentations paramétriques de ces objets. D'abord ils entrent le paramétrage $[x,y,-x]$, avec $x, y \in [-1,1]$ dans *Maple* pour essayer de voir ce plan dans la position prévue par eux, mais le logiciel renvoie une solution inattendue. C'est **F** qui se manifeste en disant : « *C'est justement ce qu'on ne voulait pas tout à l'heure* ». Face à cette rétroaction de l'environnement, **P** pose encore une fois des questions :

P : Tu es sûr que c'est ça ? Qu'est-ce que tu m'avais dits comme équations ?
N : ...euh... $y = z$;
P : $y = z$, et tu as l'impression que tu traces $y = z$ là ?
F : $y = -z$;
P : Ah, ça c'est mieux ... entre crochets toujours ;
F : Ouais, et là je mets y, y ? [...] **display**.

Ainsi ils entrent correctement dans *Maple* les instructions ci-dessous, et le logiciel affiche les plans corrects.

```
> p1:=plot3d([x,y,-y], x=-1..1, y=-1..1);
> p2:=plot3d([x,y,y], x=-1..1, y=-1..1);
> display(p1, p2, C1, C2);
```



On voit bien que ce *binôme* y arrive, mais grâce à **P** qui intervient avec un certain contrôle en posant des questions. On remarquera alors qu'à partir de ce résultat, ce binôme reprend les raisonnements qu'il a fait avant de tracer les plans. C'est-à-dire, repérer dans la figure les bouts qui constituent le contour de Q . Cette fois, en s'appuyant non seulement sur la perception des plans dans l'espace et sur les couleurs des cylindres, mais aussi sur l'affichage de ces plans qu'ils viennent de tracer. C'est donc le rôle des variables visuelles qui entrent en jeu. C'est **F** qui s'exprime en disant :

"Non, regarde pour ça, pour le rouge ce que tu veux enlever c'est ce qui est entre ce plan là et ce plan-là".

Il montre donc sur la figure affichée à l'écran la partie de $C2$ qui est hors de l'intersection. Et **N** le confirme :

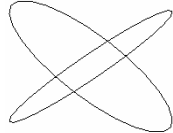
"Ouais c'est justement ce que je t'ai dit".

Question q4 – le crible :

Le passage de la question précédente à celle-ci est réalisé selon la remarque ci-dessus. Ainsi pour répondre cette question, les étudiants s'appuient bien sur la question **q3**, et voient bien ce qu'ils doivent faire. Mais ils ne savent pas bien comment. Ils tâtonnent. Donc ils ne traduisent pas correctement ce qu'ils visualisent dans l'espace. A noter que, comme pour les binômes **B1**

et **B5**, les premières instructions données à *Maple* par **B4** pour la tentative de visualisation graphique du solide **criblé** conduisent aux « *arêtes curvilignes de Q* », comme le montre leur travail que l'on a reproduit ci-dessous (cf. aussi B4, TC(790), protocole et archive *Maple*).

```
> q1:=plot3d([cos(theta),sin(theta), sin(theta)],
theta=0..2*Pi, u=0..1):
> q2:=plot3d([cos(theta),sin(theta),-sin(theta)],
theta=0..2*Pi, u=0..1):
> display(q1,q2);
```



On voit dans cette action une certaine dualité entre le raisonnement des étudiants et leur façon d'exprimer les objets qu'ils visualisent dans l'espace 3D. Ils pensent à une chose et écrivent une autre. A noter que pour décrire le crible de Q , on ne modifie pas les équations paramétriques de $S1$ et de $S2$. Ce que l'on modifie, ce sont les bornes des domaines de variation de leurs paramètres.

Ce binôme essaie donc de visualiser le solide **criblé**. Néanmoins les étudiants altèrent les paramétrages de chaque surface en remplaçant y et z par $\sin(\theta)$, ce qui fait que *Maple* affiche les « *arêtes curvilignes de Q* » (résultat inattendu pour eux). A noter que cette action est interprétée par le logiciel *Maple* comme une instruction portant sur le tracé des surfaces qui n'ont pas d'épaisseurs. Puisque celles-ci sont indépendantes du paramètre u mis en place.

On peut souligner encore ici que (comme pour les binômes B1 et B5) les *arêtes curvilignes de Q* ci-dessus représentées par $[\cos(\theta), \sin(\theta), \sin(\theta)]$ et $[\cos(\theta), \sin(\theta), -\sin(\theta)]$ (de paramètre $\theta \in [0, 2\pi]$) sont respectivement contenues dans les plans $[x, y, y]$ et $[x, y, -y]$ (de paramètres $x, y \in \mathbf{R}$) selon la définition prise en compte par **B4** lors de la représentation paramétrique de $p1$ et $p2$. Donc ces courbes forment effectivement l'intersection de $p1$ et $p2$ avec les surfaces $S1$ et $S2$. Mais ce n'est pas à ça que les étudiants ont pensé. Selon eux cette action se fait uniquement pour essayer de voir ce que ça donnait, comme l'exprime **F** quand **P** se confronte avec la difficulté de B4 pour trouver le **crible** de Q . Ainsi **P** confirme (cf. B4, TC(679)) : *C'est que vous avez tracé ce sont des courbes. Alors que F s'explique : Ouais, nous avons voulu voir ce que cela donnait ..., mais...*

Ensuite **P** va plus loin dans son intervention en posant toujours des questions pour conduire les étudiants aux méthodes pertinentes pour accomplir la tâche, avec les questions suivantes qui reviennent souvent dans ses instructions aux étudiants face à **q4** :

- Qu'est-ce que je veux enlever ? [...]
- Votre cylindre vous l'avez défini par ? [...]
- Alors on enlève les valeurs de z qui correspondent plus, c'est-à-dire les valeurs de z qui sont ? [...]
- Qui correspondent plus, c'est-à-dire qui sont entre quoi et quoi ? [...]
- Les deux plans ils ont quoi comme équations ? [...]

Par ailleurs, certains arguments des étudiants montrent bien les difficultés qu'ils ont à coordonner les objets qu'ils visualisent dans l'espace avec leurs représentations analytiques. En effet, la représentation analytique des objets de la géométrie dans l'espace n'a pas toujours été une tâche facile. L'expression suivante de **F**, par exemple, justifie bien cette observation, quand il dit :

En fait, on n'arrive pas à mettre en équation, pour le cylindre vert ce qu'on veut enlever c'est ce qu'il y'a en dessus et au-dessous deeuh....., des deux plans.

Les étudiants voient très bien ce qu'ils veulent, mais ils ne savent pas bien comment le représenter analytiquement. Ils s'appuient surtout sur le logiciel qui leur envoie des réponses qui ne correspondent pas souvent à ce qu'ils ont voulu ; ils reviennent alors en arrière et modifient les choses à partir de là. Donc, on voit aussi avec ce binôme un manque de travail en amont pour prévoir ce que le logiciel va tracer. La facilité de tracé dans *Maple* fait qu'au lieu de contrôler ces équations, ils essaient un peu au hasard, en réajustant au coup par coup.

Par contre, les étudiants répondent parfois correctement aux questions de **P** sur la tâche. Donc **P** joue un rôle important dans le progrès des étudiants dans la réalisation de cette tâche, ainsi que dans le réinvestissement des connaissances des étudiants. Car, à partir de leurs réponses correctes ils réorganisent la tâche de façon pertinente, ce qui les conduit à réussir. En reprenant par exemple quelques questions de **P** aux étudiants sur la description de **crible**, on trouve les réponses correctes des étudiants comme l'indique l'extrait de protocole ci-dessous :

(B4, TC(679))	P : Les deux plans ils ont quoi comme équations ?	F : Là donc ...euh... on dit juste z varie, au lieu de z varie de -1 à 1 , comme on faisait tout à l'heure, on peut lui dire que ...euh... z varie de $-\sin\theta$ à $\sin\theta$?
	N : Ah ! C'est les valeurs de z qui sont entre bah, ah, ah avec $y = z$ et $y = -z$;	P : Bien sûr, oui tu peux, tu peux modifier ton deuxième paramètre en fonction du premier, d'accord ?
	N : En fait ce qu'on veut enlever ce qui est à droite et à gauche ;	F : Ok !
	P : Donc tu vas lui demander, la valeur du paramètre z , ce que tu vas regarder c'est ce qui est compris entre $-\sin\theta$ et $\sin\theta$;	P : Donc c'est pas des courbes que tu traces, c'est une surface ;
	« Affirmation clés de P »	

Donc on voit bien que l'intervention de **P** fait d'une certaine manière avancer les étudiants dans la description du **crible géométrique**, tout d'abord du premier cylindre C_1 , car ils répondent correctement aux questions posées par **P**. En effet, le **crible** de C_1 est réalisé par **P** à partir des équations des plans d'intersection (quand il questionne : *Les deux plans ils ont quoi comme équations ?*)⁷⁸. Ensuite, les étudiants ont trouvé le **crible** de C_2 facilement.

A noter que comme pour les binômes B2 (séance 2) et B5 (séance 1), la question de **F**, dans l'extrait (B4, TC(679)) ci-dessus révèle les difficultés des étudiants dans la représentation graphique des surfaces (dans *Maple*) définies sur des domaines autres que des rectangles ou des parallélépipèdes.

Donc le fait que z peut varier entre deux courbes (des expressions $-\sin(\theta)$ et $\sin(\theta)$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$) a surpris ce binôme lors de l'utilisation de la commande **plot3d** pour visualiser Q . Néanmoins, la difficulté liée à ce type de tâche a été momentanément surmontée grâce à **P**.

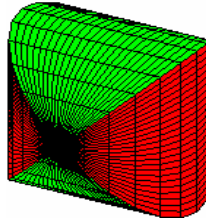
Ainsi, ils entrent dans *Maple* les instructions portant les descriptions correctes du **crible** de C_1 et de C_2 , qui conduisent effectivement au solide intersection⁷⁹, conformément à ce qui est attendu dans **q4**. Voilà leur activité instrumentée dans *Maple* que l'on a reproduit ci-dessous :

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),z], theta=0..2*Pi, z=-sin(theta)..sin(theta), color=red):
> s2:=plot3d([cos(theta),y,sin(theta)], theta=0..2*Pi, y=-sin(theta)..sin(theta), color=green):
```

⁷⁸ Cette question est primordiale dans la recherche du **crible**. Car, les parties de chaque cylindre qui constituent Q sont effectivement coiffées inférieurement et supérieurement par les deux plans.

⁷⁹ Sauf l'inversion des couleurs de chaque cylindre par rapport à celui donné dans la tâche 02.

> display(s1,s2);



8.3 L'étape E3 : La question q5

Le calcul du volume de Q

Après avoir trouvé le solide criblé, ce binôme se met aux réflexions suivantes :

(B4, TC(790) et TC(829))

F : J' sais pas comment on intègre ; « rires ». L'expression et puis l'expression on prend ...euh..., il faut qu'on prenne notre expression ...euh..., l'expression qu'on a fait avec S1 et S2 quoi ;
N : C'est l'intégrale de 1 sur le volume ; ce qui va être chiant c'est de mettre le domaine ;
F : Justement le domaine c'est ...euh... « blocage » [...] Hum ! Hum ! Hum ! Le domaine, le domaine, nous on l'a, c'est S1 et S2. C'est ce qui est à l'intérieur, le problème c'est les bornes. Si t'intègres ton volume direct je suis pas sûr que ça va pouvoir nous faire une **intégrale triple** ;

N : **Intégration de volume en paramètre ?**
F : Hum, le volume élémentaire [...] ρ et θ , ρ et $\sin\theta\sin\phi$;
N : Tu arrives à nommer le volume par l'intégrale de 1 sur ça ;
F : Quoi, intégrale de 1 sur le volume [...] ;
N : Bon, comment on peut délimiter le volume ?
F : C'est le truc, le truc de ...euh..., de ρ je pense « rires » si on a fait le volume c'est pas pour repartir en sphérique. Là tu dois pouvoir avoir délimiter le volume ;
N : Là on a le domaine limite [...].

Cette première réaction des étudiants face à cette dernière question (q5) montre qu'ils possèdent les connaissances minimales de la notion d'intégrale multiple pour se faire une idée du problème. Le fait d'avoir besoin d'une expression (d'une surface) pour mettre en place l'intégrale nous permet de dire qu'ils ont pensé tout de suite au calcul de volume du solide sous une surface, et donc au calcul d'une intégrale double. Ils parlent bien des surfaces S1 et S2. Toutefois, ils ne savent pas quelle surface prendre en compte.

On voit alors ici, comme pour B1 le besoin de retour à la notion de fonction à deux variables pour la mise en place de l'intégrale. Le raisonnement suivant :

... L'expression et puis l'expression on prend ...euh..., il faut qu'on prenne notre expression ...euh..., l'expression qu'on a fait avec S1 et S2 quoi ;

exprime un tel besoin. Alors que la question:

Intégration de volume en paramètre ?

est problématique. On voit aussi que ces étudiants pensent au calcul de l'intégrale de la fonction constante sur le volume, et donc au calcul de l'intégrale triple de $f(x,y,z)=1$ sur Q qu'ils viennent de tracer. Malgré cela, leur difficulté tient dans le repérage sur Q d'un sous-domaine précis dans lequel ils pourraient calculer l'intégrale.

Donc, ils ne voient pas que les bornes qu'ils ont entrées dans *Maple*, pour arriver à la représentation graphique du solide **criblé**, correspondent avec un certain contrôle aux bornes de calcul de l'intégrale conduisant au calcul de volume du solide Q . L'intervention de F

justifie bien cette observation quand il dit :

«...le domaine, nous on l'a...c'est ce qui est à l'intérieur, le problème c'est les bornes ».

Donc, ce binôme n'a pas pensé tout de suite au découpage de Q .

Donc, comme pour les autres binômes, le travail de la représentation graphique du solide n'apparaît pas tout de suite un moyen utilisable pour la mise en place du calcul de l'intégrale. Mais les raisonnements préliminaires repérés dans le passage de l'étape précédente (**E2**) à celle-ci (**E3**) donnent d'une certaine manière quelques éléments importants pour l'organisation du travail des étudiants. Ils voient par exemple que Q est borné (quand N dit : *Là on a le domaine limité [...]*). De plus, ils pensent tout de suite au calcul de l'intégrale de la fonction $f(x,y,z)=1$ sur le solide qu'ils viennent de tracer. Donc le calcul de volume de Q ($V_Q = \iiint_Q dV$). Malgré cela, ils ne se servent pas trop des moyens fournis par le travail préliminaire de **RG** pour préciser le domaine sur lequel ils vont calculer l'intégrale. Il préfèrent plutôt de faire des essais. Ainsi ils reprennent les expressions des deux cylindres de l'énoncé pour calculer l'intégrale, et procèdent comme suit :

(B4, TC(887))

F : On fait trois fois : une première par rapport à x , une deuxième par rapport à y et la troisième par rapport à z ;
N : C'est toi qui mets ça sur papier, moi j'essaie de tracer ce que je peux après ;
F : Et si tu fais l'intégrale de 1, 1 sur notre volume ? Faut que l'on arrive à l'exprimer en fonction les unes et les autres $dx dy dz$?

N : Je ne sais pas [...];
F : On essaie ?
N : Commence par z ;
F : Par z ?
N : Tu mets 1, z et z égale [...];
F : Après j'intègre par rapport à y ;

Cette interaction a d'abord conduit ce binôme à l'activité instrumentée que nous transcrivons ci-dessous. A noter qu'ils utilisent correctement la syntaxe (**17**) de la commande "**int**" sans commettre aucune erreur de syntaxe. Malgré cela, le résultat obtenu surprend les étudiants.

```
> v:=int(int(int(1,z=-y..y), y=-sqrt(1-x^2).. sqrt(1-x^2)), x=-1..1);
```

0

Voilà leurs expressions face à ce résultat :

N : Bien, on a un joli volume ;
F : Zéro « rires » ;
N : Zéro « rires ».

Ensuite pour visualiser l'écriture usuelle du calcul de cette intégrale, ils font le Ctrl+C/Ctrl+V de la même instruction ci-dessus et remplacent le petit **i** par le grand **i** (en utilisant ainsi la syntaxe (**18**) de la commande "**Int**") comme le montre leur action ci-dessous.

```
> v:=Int(Int(Int(1,z=-y..y), y=-sqrt(1-x^2).. sqrt(1-x^2)), x=-1..1);
```

$$v := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^y 1 dz dy dx$$

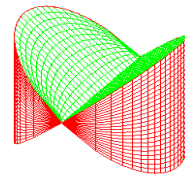
Voilà leurs réactions une fois que **Maple** affiche correctement l'écriture de calcul de cette intégrale:

F : Hum, hum ; [...];
N : On changeeuh..... ;

On observe que ce binôme utilise correctement la syntaxe des commandes **int** et **Int**. A noter que la syntaxe de calcul d'intégrale dans *Maple* est analogue à la manière papier/crayon de représentation et de placement de bornes dans l'écriture du calcul d'intégrale. Cette approximation est favorable aux étudiants du point de vue de l'apprentissage des outils de ce logiciel.

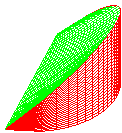
On remarquera que, savoir placer correctement les écritures algébriques dans la syntaxe du logiciel, est plutôt une condition nécessaire que suffisante pour résoudre ce problème. Et prévoir ce que le logiciel va reproduire à partir des instructions qu'on met en place est en quelque sorte un moyen de contrôler l'action. Donc, on observe pour ce binôme un manque de contrôle ou de compétence suffisante pour le traitement de calcul de volume par des *IM*.

A noter que le calcul de l'intégrale précédent est sûrement développé sur un sous-solide de Q . Notamment la partie de $C1$ comprise entre les deux plans et qui fait donc partie de Q **criblé** que l'on peut représenter analytiquement par :



$$Q_{C1} = \{(x, y, z), -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -y \leq z \leq y\}$$

et graphiquement comme l'indique le graphique ci-contre (selon leur travail précédent). Donc le calcul de l'intégrale triple (en coordonnées cartésiennes) mis en place par ce binôme, pourrait conduire (avec un certain contrôle) à la bonne réponse. Ainsi, celle-ci marcherait en considérant par exemple le sous-solide $Q_8 \subset Q_{C1}$ de représentation analytique :



$$Q_8 = \{(x, y, z), -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq y\}$$

et de la visualisation graphique que l'on peut préciser ci-contre, selon un découpage "**non usuel**" de Q en huit sous-solide.

Ainsi le volume de Q_8 est :

$$V_{Q_8} = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y dz dy dx = \frac{2}{3} \Rightarrow V_{Q_{C1}} = 4 \bullet V_{Q_8} . \text{ Et donc } V_Q = 2 \bullet V_{Q_{C1}} .$$

Ainsi reprendre les équations cartésiennes des surfaces cylindriques (après avoir visualisé le solide à partir du paramétrage *angulaire*) est une stratégie tout à fait correcte. Néanmoins, on observe bien avec ce binôme que les difficultés à coordonner ce qu'ils voient dans l'espace et leur représentation analytique se répètent dans toutes les étapes du traitement du problème. A noter que ces difficultés compromettent aussi la mise en place d'une écriture algébrique correcte du calcul de l'intégrale.

Ensuite, **P** intervient dans l'activité des étudiants, une fois qu'il se confronte avec la difficulté de ce binôme pour préciser le domaine d'intégration. Il parle ainsi pour toute la classe comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous :

Réfléchissez bien sinon ça va me pose des problèmes, donc après quand vous avez défini vos domaines, vous avez à calculer l'intégrale triple sur un domaine D , $dx dy dz$. La démarche naturelle c'est de dire, je vais regarder avec les paramétrages que j'ai fus, je vais changer de paramétrages, je vais intégrer sur ... euh... $\Phi^{-1}(D)$ de ...euh... c'est que vous voulez de ...euh..., $dudv$ de...euh... j' sais pas quoi, ça veut être ρ , $d\rho$, $d\theta$, avec $\rho d\rho d\theta dz$, sans doute on va passer en cylindrique et on essaie...

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

A noter que le fait d'avoir visualiser le solide à partir du paramétrage angulaire n'implique pas forcément que le calcul d'intégrale doit se faire en coordonnées cylindriques. L'étudiant peut aussi développer des calculs tant en coordonnées cartésiennes qu'en polaires.

Par contre, le raisonnement en coordonnées cylindriques devient pertinent, car le travail de visualisation graphique comporte bien sûr les bornes nécessaires (avec un certain contrôle) dans la mise en place du calcul de l'intégrale, conduisant au calcul de volume de Q . Celle-ci justifie peut-être le fait que **P** amène toujours les étudiants à raisonner en coordonnées cylindriques, quand il dit : "*on va passer sans doute en cylindrique*" en écrivant d'ailleurs au tableau la formule de transformation, comme le montre son intervention que l'on a transcrite ci-dessus. Alors que, pour transformer une intégrale d'un système de coordonnées, **A** en un autre **B** et vice-versa, on doit d'abord connaître cette intégrale dans le système d'origine. Ainsi, comment transformer $\iiint_D dx dy dz$ par $\iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$, si on ne connaît pas la

représentation analytique de D ?

Après son intervention (Séance 2, TC(958)) à toute la classe, **P** interagit particulièrement avec **B4** comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous :

P : Alors, attends ici avant de, ouais là vous revenez en coordonnées ...euh..., ...euh..., paramétriques alors, moi ce que j'aurais aimé c'est que vous me définissiez déjà le domaine, remarquez pourquoi pas, ... euh... x , z variant entre $-y$ et y oui ;
F : Là on fait un truc brut mais de toute façon il nous donne 0 donc [...] ;
P : y variant entre ? Ce qui me, ce qui me gêne un petit peu c'est que je ne vois pas quel domaine vous êtes en train de calculer ? Exprimez-moi, proprement le volume que vous êtes en train de calculer, c'est le volume global, c'est la moitié, c'est le tiers de ce que vous cherchez à déterminer, etc. Pour le tracer on l'a paramétré en cylindrique ;

N : Ouais ;

P : C'est un peu bizarre d'aller recalculer une intégrale en cartésienne, alors qu'a priori on était en cylindrique ;

N : Hun ;

P : Alors, sinon y , pourquoi y variant entre..., vous m'avez pas dit entre... ;

N : C'était un truc brut, histoire de voir ce que ça donnait.

Face à l'intervention de **P** ci-dessus (B4, TC(+13)), ce binôme change alors momentanément sa façon de voir la tâche. C'est **F** qui fait des remarques en disant : "*...sinon $\rho d\rho d\theta$ ah en cylindrique*", et **N** questionne : "*un truc en cylindrique ?*". Mais ils n'ont pas avancé tout de suite avec cette idée de développer le calcul de l'intégrale en coordonnées cylindriques. Car **P** mène encore une fois la discussion sur le calcul de l'intégrale développée initialement par **B4** en coordonnées cartésiennes. Il retrace presque toutes les hypothèses possibles sur les actions des étudiants qui ont conduit au volume nul. Notamment la question de *symétrie*, le problème des domaines « négatif » et « positif » d'intégration, le rôle de la couleur de chaque cylindre sur Q , comme le montre (B4, TC(+43), protocole) :

(B4, TC(+43))

P : [...] une intégrale de volume, il faut toujours aller de la plus petite à la plus grande borne, comme y vous ne le prenez pas que sur un domaine positif.
 [...] vous, vous comptez de façon positive ce que vous avez d'un coté et négatif ce qui est de l'autre côté, donc c'est normal que votre volume globalement soit égal à zéro [...]
 Donc il faudrait regarder, ce que vous êtes en train de faire là, quand vous calculez ça vous calculez le volume de la partie rouge, je crois, d'accord ? Et toute la partie rouge, donc délimitée par mes deux plans, d'accord ? Ce qu'on va faire, c'est dire que c'est deux fois la partie qui correspond que y positif. Ce qui est très gênant c'est cette histoire-là, j'intègre de $-y$ à y , c'est ici que c'est faux déjà, [...].
N : valeur absolue ; **P** : Eventuellement on met la valeur absolue ;

Avec cette intervention, ce binôme reprend les dernières instructions entrées dans *Maple* et change alors les bornes de z en remplaçant $-y$ par $-\text{abs}(y)$ et y par $\text{abs}(y)$ et ils obtiennent le résultat $8/3$, comme le montre leur travail que l'on a reproduit ci-dessous.

> $v := \text{int}(\text{int}(\text{int}(1, z = -\text{abs}(y) .. \text{abs}(y)), y = -\sqrt{1-x^2} .. \sqrt{1-x^2}), x = -1 .. 1);$

$v := 8/3$

Ensuite ils entrent avec la même instruction en remplaçant le petit **i** par le grand **I** pour voir l'écriture usuelle de cette intégrale.

> $v := \text{Int}(\text{Int}(\text{Int}(1, z = -y .. y), y = -\sqrt{1-x^2} .. \sqrt{1-x^2}), x = -1 .. 1);$

$$v := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-|y|}^{|y|} 1 \, dz dy dx$$

Le professeur **P** voit ce résultat et interroge tout de suite :

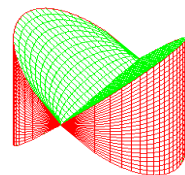
(B4, TC(+96))

P : Le volume total, ça serait quoi ? Ça c'est un huitième ;
F : Le volume total ...euh... ;
P : Est-ce que vous avez calculé tout le volume là ?
N : pas sûr ;
P : Là vous avez fait varier z de moins valeur absolue de y à plus valeur absolue de y , donc vous avez ... un solide qui est coincée entre ces deux plans là ;
F : C'est 4 fois, 4 fois ce volume. Non ? C'est ça ?
P : Ça c'est la même chose de l'autre coté puisque y varie de moins racine de $1-y^2$ à plus racine de $1-y^2$;
F : Donc à ce moment là... ;

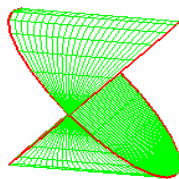
P : Donc y on l'autorise à être négatif effectivement, tu, tu..., vous avez délimité le volumes des parties qui sont délimitées par la surface rouge ;
N : ... et bleu donc c'est pas quatre nan ? Au total ;
P : Non, vous avez toute la partie rouge, ça fait ça et ça ;
F : Ouais, mais on aurait ce volume là donc en entier ;
P : Et il me manque ça et ça ;
F : Voilà, c'est le même ;

On voit bien avec cet extrait que les étudiants arrivent à trouver un résultat correct (le volume de Q_{CI}), mais ils ne savent expliquer ce résultat. Ceci montre qu'ils n'ont pas les moyens ou les connaissances suffisantes pour valider ou réfuter un résultat donné par le logiciel à partir de leurs actions. De plus, ils montrent des difficultés pour préciser le domaine (tant analytique que graphiquement) dans lequel vont intégrer. Ils ne voient pas de liens entre le travail précédent de la visualisation graphique et le calcul de l'intégrale, tant par des techniques papier crayon que de *Maple*. Alors que **P** insiste à montrer aux étudiants les liens possibles entre ce qu'ils ont fait plus haut et le travail actuel, quand il dit :

« Là vous avez fait varier z de moins valeur absolue de y à plus valeur absolue de y , donc vous avez un solide qui est coincé entre ces deux plans là », ..., « Non, vous avez toute la partie rouge, ça fait ça et ça ».



Donc **P** parle effectivement de morceau Q_{CI} (solide rouge ci-dessus). Alors que les étudiants



ne pensent pas à ce moyen possible de contrôle. Ils tâtonnent, en essayant de multiplier le résultat qu'ils ont obtenu par 4. A noter que quand **P** dit : « *Et il me manque ça et ça* » il montre sur le solide **criblé** (affiché sur l'écran) la partie Q_{C2} (solide vert ci-contre). Cette observation de **P** a conduit alors ce binôme à s'exprimer comme suit, c'est **F** qui dit : « *Voilà, c'est le même* ».

Alors que **N** précise le résultat : « *D'accord, donc fois deux* ».

A noter que la multiplication du résultat ($v := 8/3$) par deux (par raison de symétrie) conduit effectivement au résultat attendu dans **q5**. A noter aussi que **P** confirme la question posée par **N**, mais on voit que **P** n'est pas convaincu que les étudiants ont vraiment appris quelque chose à partir de cette démarche. Ainsi, il insiste pour amener les étudiants à raisonner en coordonnées cylindriques, en mettant l'accent sur le travail précédent, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous.

(B4, TC(+96))

P : Fois deux. Si vous aviez mis entre 0 et racine de, là effectivement il fallait multiplier par 4, et si vous aviez voulu être sûr de tout ce que vous dites, vous vouliez faire varier z donc la partie z , ça, ça correspond à ça z entre 0 et y , y variant en 0 et racine [cubiqueeuh.....] racine de $1-x^2$, x variant entre 0 et 1, comme vous avez juste un tout petit morceau et tout se définit bien et après on aurait multiplié par 16. Alors ce qu'on peut faire c'est de regarder, on aurait pu le faire en utilisant un petit peu ce qui a été fait au-dessus, c'est-à-dire en regardant en coordonnées cylindriques, d'accord ? C'est-à-dire définir déjà, tracer juste le morceau sur lequel vous voulez avoir l'intégrale, d'accord ? Au lieu de tracer tout ça, tracer juste le volume que vous voulez calculer, d'accord ? Par exemple si voulez tracer le volume vert juste la partie qui vous intéresse, le petit, le petit morceau de volume qui vous intéresse, d'accord ? Et après regarder entre quoi et quoi varient les paramètres [...]

Après cette interaction particulière de **P** avec ce binôme, il développe son point de vue pour toute la classe (cf. séance 2, TC(+167)). Il met l'accent sur les éléments pris en compte au départ. Notamment les composantes du paramétrage **angulaire** de $S1$ et $S2$, la représentation graphique de Q et puis leurs applications dans le calcul d'intégrale en coordonnées cylindriques. Il parle aussi du jacobien en cylindrique (selon la technique classique de calcul de volume d'un solide dans ce système des coordonnées) et de la description du domaine qu'il appelle $\Phi^{-1}(D)$.

Suite à cette intervention de **P** pour toute la classe, ce binôme commence alors à raisonner comme suit :

(B4, TC(+198))

N : On essaie en cylindrique ?
F : Ouais ;
N : Jacobien est ρ ;
F : ça ok « rires » ;
N : intégrale de ρ ;
F : Il faut juste définir $\Phi^{-1}(D)$, intégrale deeuh..... ;
N : ρ ;
F : J'sais pas comment on l'écrit par contre ;
N : On va faire ρ , c'est pas de ρ mais bon, ρ attends ;
N : On fixe z d'abord et puiseuh..... ;
F : On va délimiter leeuh....., on va prendre justeeuh....., on va tout écrire d'un coup ;
N : On prend, on va essayer d'exprimer x et y ;
F : On prend les symétries pour d'abord délimitereuh... ;

N : On va couper en 8 ;
F : 8 ouais, c'est pas grave ; **O** : *c'est quoi ça ? J'ai mis un ρ je ne sais pas comment écrire ρ ;*
O : *rho* ;
F : ρ euh...,euh... de 0 à ? ... de 0 à 1 ;
N : Il va jusqu'en 1 ?
F : Le cylindreeuh... de diamètre 1. De 0 à 1, x euh... ; **N** : θ ?
F : θ euh... varie deeuh..., deeuh..., de 0 à π ;
N : π ou $\pi/2$?
F : π , et z varie deeuh... ... de 0 à $\sin\theta$ je crois ;
N : comme ça ?
F Ouais ;

Ces échanges ont mené les étudiants à l'activité instrumentée ci-dessous, qui résulte en une expression algébrique, et la fonction $v(\theta)$ inattendue par ce binôme, et donc une rétroaction de l'environnement.

Ecriture en ligne pour les expressions instrumentées

> **v:=int(int(int(rho,rho=0..1), theta=0..Pi), z=0..sin(theta));**

Réaction du logiciel

v:=($\pi/2$)sin θ

Voilà l'expression de **N** : « *Il y a encore un petit problème là* », « *rires* » ;

Ensuite ils entrent avec la même instruction en remplaçant le petit **i** par le grand **I** pour voir l'écriture usuelle de cette intégrale.

> **v:=Int(Int(Int(rho,rho=0..1), theta=0..Pi), z=0..sin(theta));**

$$v:=\int_0^{\sin(\theta)} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho \, d\rho d\theta dz$$

Comme pour les binômes B1 (séance 1) et B2 (séance 2) on peut repérer dans cette action, le manque de moyens de contrôle des étudiants sur le mode d'entrée des données dans la syntaxe du logiciel, ainsi que sur le calcul d'intégrale multiple. A noter que dans la théorie des intégrales multiples les bornes de l'intégrale la plus externe doivent forcément être constantes. Mais ce moyen de contrôle de placement des bornes n'est pas pris en compte par ce binôme. Ainsi pour voir l'écriture usuelle de l'intégrale triple mise en place, ils utilisent la commande **Int**. Toutefois, on observe que cette stratégie les aide à contrôler le mode d'entrée des données dans la syntaxe d'**int**. Donc, suite à la rétroaction de l'environnement, ils reviennent en arrière et inversent les positions des bornes de ρ et de z dans les lignes des commandes. Avec cette correction ils ont obtenu le résultat $2/3$, comme le montre leur travail dans *Maple* qu'on a reproduit ci-dessous.

Ecriture en ligne pour les expressions instrumentées

> **v:=int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)), theta=0..Pi),rho=0..1);**

Réaction du logiciel

v:= $2/3$

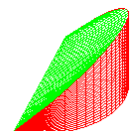
Voilà l'écriture usuelle de cette intégrale quand **i** est remplacé par grand **I** :

> **v:=Int(Int(Int(rho,z=0..rho*sin(theta)), theta=0..Pi), rho=0..1);**

$$v:=\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\rho \sin(\theta)} \rho \, dz d\theta d\rho$$

On observe que ce binôme ne savait pas comment valider ou réfuter ce résultat. De plus, ils n'ont pas pensé à comparer ce résultat avec celui qu'ils ont trouvé précédemment lors du développement de calcul de l'intégrale en coordonnées cartésiennes, où ils ont trouvé $8/3$.

On voit bien que cette dernière intégrale est développée sur un huitième (Q_8) de volume de Q qu'ils ont tracé plus haut, que l'on peut représenter analytiquement par $Q_8 = \{(\rho, \theta, z) ; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq z \leq \rho \sin \theta\}$ en coordonnées cylindriques, et graphiquement comme ci-contre.



En effet, sur ce domaine Q_8 on obtient :

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\rho \sin(\theta)} \rho \, dz d\theta d\rho.$$

Donc ils y arrivent, mais ils n'ont pas les compétences ou moyens suffisants pour valider ou réfuter les réponses du logiciel à partir de leurs actions. Alors qu'ils avaient les moyens proposés par le découpage du problème. C'est-à-dire, les possibilités d'investir dans les étapes suivantes le travail développé dans les étapes précédentes. Malgré cela, ils ne pensent pas à ça. Ils tâtonnent, et interprètent les résultats obtenus non mathématiquement mais en termes de « acceptable ou non ». De plus, les résultats envoyés par le logiciel surprennent souvent les étudiants. Comme le montrent leurs expressions face à ce résultat :

N : deux tiers ! « Rires » ... ;
F : deux tiers ! « Rires » ... ;

Ensuite c'est l'observateur qui pose des questions comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous :

(B4, TC(+340) et TC(+375))	« Vous faites souvent ce type d'exercices ? » F : Pardon ? « Vous faites souvent ce type des exercices ? » F : ...euh..., ...euh... ! Non ! O : Les intégrales multiples ? F : Géo, géométrie sur <i>Maple</i> on en fait de temps en temps, mais ..., volume et autre on en a pas fait si souvent que ça ; « D'accord » « Vous avez utilisé des logiciels en géométrie ? » F : Géométrie <i>Maple</i> ... plus pour tracer des quadriques ...euh..., plus pour tracer des quadriques, ce genre des choses ; « d'accord » ; surfaces un peu aussi, on fait tout avec <i>Maple</i> ;	« d'accord », « tous les étudiants dans ce...? » F : ...euh..., non ! Une petite partie, par exemple même dans la classe là, y pas beaucoup de personnes qui vont au cours de <i>Maple</i> , parce qu'il y'a qu'une partie des concours où on a besoin de <i>Maple</i> , donc tout le monde ne suit pas forcément <i>Maple</i> , puisque ...euh..., je fais pas le concours donc, bon bah c'est pas la peine d'aller au cours de <i>Maple</i> ; « D'accord. »
----------------------------	--	--

Pour terminer cette dernière question ils procèdent comme suit en fonction des questions suivantes posées par l'observateur :

« Est-ce que ça c'est la partie la plus petite que l'on puisse découper le solide là ? »

F : On peut aller jusqu'à $\pi/2$ non ?

« Vous avez fait quoi ? »

N : Le ...euh..., la moitié de..., $1/4$ de ...euh..., de tout le volume. On peut encore le couper en deux ;

F : On met θ jusqu'à $\pi/2$?

N : Ouais ;

Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, ils n'ont pas calculé $1/4$ de tout le volume de Q comme le dit **N**. Ceci montre bien aussi le manque de contrôle sur le travail qu'ils font. Ainsi, suite à cette interaction avec l'observateur, ils entrent les instructions suivantes en modifiant les bornes de θ dans la ligne de commande précédente, et ils ont obtenu le résultat $1/3$ comme le montre leur dernier travail développé dans *Maple* que l'on a reproduit ci-dessous :

Ecriture en ligne pour les expressions instrumentées	Réaction du logiciel
> v:=int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)), theta=0..Pi/2),rho=0..1);	v:=1/3

Donc ils ont considéré la moitié de Q_8 . Et naturellement ce résultat se réduit par 2 par rapport au calcul précédent. Mais, ils ne savent pas encore interpréter ce résultat mathématiquement. Malgré cela, c'est **F** qui donne le résultat correct (attendu dans **q5**) en multipliant par 8 le résultat obtenu dans le calcul d'intégrale qui a précédé celui-ci, comme le montre leur fichier *Maple* où on trouve l'instruction suivante :

Action	Réaction du logiciel
> v := 8 * v	v:=16/3

Ce binôme est arrivé à la solution attendue, mais avec difficultés et beaucoup d'aide de **P**.

9. Catégorisation du travail des étudiants à partir des rétroactions de Maple

Dans l'utilisation d'un logiciel comme *Maple* qui fait les tracés des graphiques à partir d'expressions algébriques ou de fonctions (à une ou à deux variables), il est possible de contrôler les objets mathématiques mis en jeu. L'utilisateur doit avoir des connaissances préalables et des contrôles théoriques, ainsi que des contrôles perceptifs sur les objets ostensifs en question. *Maple* pourra jouer un rôle important, car il permet d'avoir une dialectique entre le registre **analytique** et le registre **graphique**. Par ailleurs, les rétroactions de l'environnement *Maple* peuvent jouer un rôle important dans l'apprentissage des objets mathématiques mis en jeu. Une fois que l'utilisateur a construit un schéma d'utilisation d'une représentation graphique, sa mise en œuvre dans *Maple* à partir d'une représentation analytique, fournit une rétroaction sur laquelle l'utilisateur aura un certain contrôle. C'est à partir des ostensifs, notamment du registre graphique, que l'on peut effectuer un tel contrôle, afin de bien fonder la représentation analytique.

La puissance de l'utilisation du logiciel *Maple* est de renvoyer des rétroactions qui permettent une dialectique entre les deux registres (**analytiques** et **graphiques**) de représentations. Cette dialectique ne sera vraiment efficace que si les rétroactions le sont. C'est l'efficacité de ces dernières qui mesure l'efficacité de l'utilisation de l'environnement informatique. Pour voir l'efficacité des rétroactions, il est essentiel d'analyser leur nature. Nous considérons dans la suite, la nature des rétroactions possibles de l'environnement informatique *Maple* par rapport aux domaines de représentation graphique et du calcul des intégrales multiples, selon la grille d'analyse suivante.

9.1 Croisement entre le travail mathématique d'un étudiant et sa mise en œuvre dans l'environnement informatique Maple

Ce croisement nous permet de dégager six cas dans l'étude des rétroactions possibles de l'environnement informatique *Maple* (que nous nommons *Rétroaction-Maple*) comme le présente le tableau 01 ci-dessous.

<i>Mathématique</i> / <i>Maple</i>	Pas d'erreur d'utilisation du logiciel	Erreur d'interprétation d'une commande du logiciel	Erreur dans la syntaxe d'une commande du logiciel
Pas d'erreur Mathématique	<i>Rétroaction-Maple</i> (Résultat attendu) Cas (I)	<i>Rétroaction-Maple</i> Cas (III)	<i>Rétroaction-Maple</i> Cas (V)
Erreur Mathématique	<i>Rétroaction-Maple</i> Cas (II)	<i>Rétroaction-Maple</i> Cas (IV)	<i>Rétroaction-Maple</i> Cas (VI)

Tableau 01

Les six cas (tableau 01) dépendent donc de deux pôles : les connaissances mathématiques préalables de l'étudiant en lien avec le sujet d'étude et les connaissances sur l'utilisation de

l'environnement informatique *Maple*. Les liens entre les deux pôles doivent permettre l'interaction entre les techniques instrumentées [dans *Maple*] (au sens de Lagrange 2000, p. 169) et les techniques papier/crayon. A noter que la "facilité" de tracé dans *Maple* fait que souvent, au lieu que l'étudiant contrôle les expressions algébriques mises en œuvre ainsi que les techniques instrumentées, il essaie un peu au hasard, ce qui fait que les actions des étudiants aboutissent souvent à des réponses qu'ils n'attendent pas, ce qui les oblige à revenir en arrière pour modifier les données. Nous étudions ainsi chaque cas (tableau 01) dans la phase de la représentation graphique du solide criblé (étapes **E1** et **E2**) et ensuite dans la phase du calcul de volume par des *IM* (étape **E3**), en nous appuyant sur les productions des étudiants. Est-ce que, avec ce découpage, les types des rétroactions changent, du fait que dans les deux phases, il ne s'agit pas de la même tâche mathématique ? Si oui, cela implique différents types de situations. Est-ce que cela entraîne aussi différents types de contrôles ?

9.2 Etude des rétroactions possibles : la phase de la représentation graphique du solide criblé

1. Premier cas (I)

Considérons pour commencer le cas le plus simple, d'une action où l'étudiant n'a pas commis d'erreur, ni mathématique, ni d'utilisation du logiciel *Maple*. A priori la réponse sera conforme à ce qu'il attend. Donc dans le premier cas (**I**) où il n'a pas fait d'erreur, il obtient la solution correcte et continue le travail de la tâche suivante (si elle existe), ou finit le traitement du problème.

2. Deuxième cas (II)

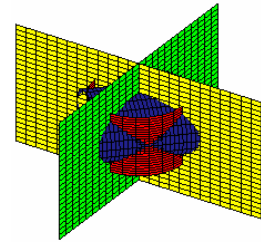
Si le contrôle est possible dans le registre d'arrivée⁸⁰ du logiciel *Maple*, alors il y a la rétroaction qui conduit à remettre en cause le travail mathématique préalable. En conséquence, si l'étudiant a une représentation mentale correcte du problème, et que le logiciel lui fournit un objet mathématique qui ne correspond pas à cette représentation mentale, alors il aura un contrôle perceptif du problème. La question est de savoir si cet objet mathématique que *Maple* produit lui permet de voir qu'il a commis une erreur.

A priori si cet objet est une représentation graphique, la réponse est oui, car mentalement l'étudiant a un contrôle perceptif. Donc il pourra percevoir visuellement que l'objet affiché sur l'écran d'ordinateur n'est pas ce qu'il attendait. Ainsi, l'étudiant devrait revenir à son travail mathématique préalable.

Regardons par exemple la production des étudiants (binôme B1, TC(462)) dans laquelle ils entrent dans *Maple* les lignes des commandes suivantes qui aboutissent à la visualisation graphique ci-contre :

⁸⁰ Registre dans lequel *Maple* donne sa réponse selon l'action du sujet (étudiant), que ce soit le registre graphique, ou le registre analytique ou encore numérique.


```
> s3:=plot3d([y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow);
> s4:= plot3d ([y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green);
> display(s1,s2,s3,s4);
```



Voici les premières réactions des étudiants :

Z : C'était magnifique ;

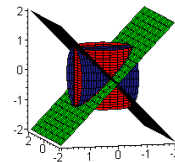
B : Ce n'est pas bon ! C'était bien essayé quand même... ;

Z : [...] En fait quand on égale les deux équations [...] Ah ! Oui, oui, oui ! Échec, c'est pas y , y c'est x indifférent et $y = \pm z$.

En voyant la rétroaction-*Maple*, les étudiants sont surpris que le logiciel n'ait pas affiché les plans au bon endroit. Donc ils reviennent en arrière et modifient les positions des paramètres des deux plans. Avec x indifférent et $y = \pm z$, selon l'intervention de **Z** ci-dessus. Ensuite, la validation d'ordre graphique de ces dernières équations dans *Maple* leur affiche sur l'écran les plans cherchés dans les positions attendues selon leur production ci-dessous.

Les étudiants utilisent le logiciel dans une démarche d'essai/erreur. C'est-à-dire qu'ils essaient de résoudre la tâche, et si ça ne marche pas, ils recommencent.

```
> s3:=plot3d([x,y,y], x=-2..2, y=-2..2, color= yellow);
> s4:= plot3d ([x,-y,y], x=-2..2, y=-2..2, color= green);
> display(s1,s2,s3,s4);
```



D'abord les étudiants se servent de leurs connaissances préalables sur la géométrie dans l'espace pour anticiper ou interpréter les résultats obtenus. Ils montrent bien qu'ils ont une bonne visualisation du problème posé. Ils ont une représentation mentale des objets qu'ils doivent tracer et cette représentation se construit progressivement au cours du traitement du problème. A noter qu'une fois qu'ils arrivent à représenter simultanément les deux cylindres dans *Maple* et à pouvoir les manipuler directement avec la souris, ils voient les plans. Ils n'auraient pas nécessairement vu les deux plans s'ils avaient fait un tracé dans l'environnement papier/crayon. Ensuite le problème est de tracer les deux plans dans *Maple*, donc d'arriver à utiliser les bonnes expressions à partir de l'analyse du problème. Mais cette analyse est « quasiment inexplorée » par les étudiants du fait qu'ils peuvent essayer, en entrant les expressions dans *Maple* ; mais souvent ces expressions ne correspondent pas à ce qu'ils imaginaient graphiquement. Donc le logiciel met d'abord les étudiants dans l'action plutôt que dans la réflexion. Et l'interprétation des rétroactions graphiques leur permet d'effectuer un contrôle perceptif afin de bien fonder la représentation analytique.

Par contre si l'étudiant n'a pas un contrôle perceptif sur l'objet mathématique produit dans *Maple*, il ne sera pas tout à fait évident qu'il se rende compte qu'il a commis une erreur mathématique. C'est le cas, par exemple, où les étudiants (binôme B5, TC(073)) entrent dans *Maple* les expressions ci-dessous pour exprimer le paramétrage de la surface $S1$.

Action de l'étudiant	Rétroaction de Maple	Réactions des étudiants
<pre>> x1:=theta->cos(theta); > y1:=theta->sin(theta); > z1:=theta->theta;</pre>	<pre>x1:= cos y1 := sin z1 := theta -> theta</pre>	<p>Essaie de faire euh pour vérifier ; [...] de 0 si ça marche ?</p> <pre>> x1(0);</pre> <p>1</p> <p>Ah ! Donc c'est bien entré ; [...] ; On essaie d'autres ; On reprend de la même manière et après euh ; Pour rentrer, faut entrer x2 ? Ouais ; Je mets thêta aussi ? Ouais.</p>

Mais celui-ci n'a qu'un seul paramètre, c'est donc une courbe de l'espace tridimensionnel (une hélice circulaire) et non un cylindre comme ils le voulaient. Pour vérifier si les expressions de x_1 , y_1 et z_1 sont correctes du point de vue du logiciel, ce binôme utilise les connaissances qu'ils ont sur les fonctions à une variable. Donc, ils essaient de calculer la valeur fonctionnelle de x_1 pour $\theta=0$ comme on peut le voir dans l'extrait du protocole ci-dessus (colonne de droite). Après ce test, ils continuent la tâche suivante en représentant le deuxième cylindre S2 de la même façon que S1 en croyant que c'est la bonne représentation analytique des deux surfaces cylindriques. Toutefois ils ne parviennent pas à valider ces expressions graphiquement, car le professeur intervient tout de suite dans l'activité des étudiants, dès qu'il voit que les étudiants sont dans une démarche inadéquate par rapport au but de la sous-tâche en question, ils reviennent alors en arrière et modifient les données.

Ainsi, les étudiants veulent tracer une surface cylindrique, mais ils n'ont pas de contrôle sur les expressions qu'ils entrent correctement dans *Maple*. En effet, le logiciel ne nous permet pas de voir « l'erreur » dans le travail mathématique. Il arrive seulement à interpréter les instructions des étudiants qui représentent une courbe au lieu de la surface. Ils n'ont pas vu tout de suite l'erreur mathématique qu'ils ont commise, et le professeur intervient immédiatement. Le contrôle perceptif sur les objets mis en œuvre est donc un des moyens importants dans le contexte de l'apprentissage des étudiants par rapport à la rétroaction du logiciel, comme le montre l'exemple précédent (binôme B1, TC(462)) où les étudiants s'aperçoivent tout de suite de l'erreur mathématique et procèdent à la correction. Le contrôle perceptif par rapport à la rétroaction-*Maple* (cas II) est notable dans les réactions des étudiants par rapport aux tâches de la représentation graphique des surfaces (E1) et du solide criblé (E2) ainsi que dans le découpage de ce dernier en sous-solides.

3. Troisième cas (III)

Dans le cas (III), l'étudiant n'a pas fait d'erreur mathématique, par contre, il a entré dans *Maple* des données qui ne correspondent pas à l'objet mathématique qu'il cherche, mais qui produisent un objet que le logiciel sait interpréter comme un objet mathématique. Un tel cas est assez rare dans la phase de représentation graphique du solide. Nous donnerons par contre quelques exemples plus bas lors de la lecture des productions des étudiants dans la phase de calcul de l'intégrale.

4. Quatrième cas (IV) :

Le cas (IV) est le plus difficile à gérer dans les deux phases de traitement du problème, car là il y a double erreur (mathématique et informatique). Ce qui est donc difficile à interpréter du fait de la superposition des erreurs. En fait, dans notre expérimentation, un tel cas n'apparaît pas.

5. Cinquième cas (V)

Examinons maintenant le cas (V) dans lequel l'étudiant n'a pas fait d'erreur mathématique,

par contre il a commis une erreur dans la syntaxe du logiciel qui lui renvoie tout de suite une réponse qu'il n'attend pas. Dans ce cas, il mettra d'abord en cause la façon dont il a entré les données dans *Maple* et la commande utilisée. Donc la rétroaction est immédiate dans *Maple* et si la difficulté est surmontée, elle devrait conduire au cas (I). Le message d'erreur peut à lui seul suffire à l'étudiant pour trouver l'erreur qu'il a commise, ou alors il peut s'appuyer sur la fonction **help** du logiciel pour chercher l'origine de son erreur. Toutefois, la fonction **help** de *Maple* ne répond pas toujours au besoin de l'étudiant. Dans ce contexte, les questions suivantes peuvent émerger dans les réactions des étudiants : *Pourquoi n'ai-je pas la bonne aide sur ça ? ; Pourquoi n'ai-je pas cette commande là dedans ? ; N'y a-t-il pas une commande qui calcule le volume de tout ça ? ; On recommence ?* Par contre, si son action conduit à une réponse codée ou à une instruction non interprétable par le logiciel, sa réaction peut susciter des questions telles que : *Où est l'erreur ? ; Pourquoi cette instruction me donne t-elle ça ? ; Pourquoi y a-t-il plein de choses ? ; Pourquoi il (le logiciel) a marqué tout ça alors ?* Les trois exemples suivants illustrent les types de rétroactions liées à ce cas et comment les étudiants y réagissent.

Regardons d'abord la production des étudiants (binôme B1, TC(156)) dans laquelle ils ont entré dans *Maple* l'instruction suivante (colonne de gauche, tableau ci-dessous) pour la visualisation des deux surfaces cylindriques S1 et S2 ensemble :

Action de l'étudiant	rétroaction de l'environnement	Réactions des étudiants
<pre>> plot3d([sin(theta),cos(theta),z], [sin(theta),y, cos(theta)], theta=0..2*Pi, y=-10..10, z=-10..10) ;</pre>	<pre>Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional argument, z = -10...10</pre>	<p>Echec ! On recommence ! Il appelle z de -10 à 10 ; Ah ! Tu crois ? Mets optimal avec [...] après ; Non, optional ; Quoi ? C'est marqué là optional ; Ah ! Ouais. Non c'est-à-dire qu'il n'a pas compris [...] ; Tu es sûr ; Attends [...] ; Ce n'est pas comme ça ?</p>

Dans cette instruction, les étudiants n'ont pas fait d'erreur mathématique, par contre ils ont commis une erreur dans la syntaxe du logiciel qui leur renvoie tout de suite un message d'erreur. La première réaction des étudiants face à la *rétroaction-Maple* est de revenir en arrière (quand ils disent : *Non ! Echec ; On recommence*) et ensuite ils essayent d'interpréter l'origine de l'erreur. Mais, ils n'arrivent pas vraiment à comprendre le message d'erreur. Les connaissances mises en jeu dans l'interaction entre les étudiants ne touchent pas seulement les problèmes techniques, mais surtout la coordination entre leurs connaissances de la géométrie dans l'espace et leurs compétences sur l'utilisation du logiciel *Maple*. Par contre, ils ont une visualisation correcte du problème et essaient de tracer simultanément dans l'espace tridimensionnel les deux surfaces cylindriques S1 (**[sin(theta),cos(theta),z]**) et S2 (**[sin(theta),y,cos(theta)]**), comportant correctement deux paramètres chacune (θ et z pour S1, et θ et y pour S2, donc mathématiquement il n'y a pas de problème). Mais, ils entrent les trois paramètres (θ , y et z) dans la même ligne de la commande **plot3d** du logiciel⁸¹. Et tout de suite, *Maple* détecte un paramètre de trop (le troisième). La réaction des étudiants est alors de rajouter des éléments qu'ils voient dans le message d'erreur. De plus, les étudiants ne

⁸¹ Celle-ci marcherait en faisant par exemple $z=y$, donc :

```
> plot3d([sin(theta), cos(theta), k], [sin(theta), k, cos(theta)], theta=0..2*Pi, k=-1..1, scaling=constrained);
```


par rapport à S1, et ils finissent par y arriver. A priori on peut supposer que la correction de S1 se fait par la comparaison avec l'écriture en ligne pour les données de S2, vu que celle-ci ne pose pas de problème (elle n'apparaît pas dans le message d'erreur).

Examinons maintenant l'exemple suivant, qui est aussi lié à la technique d'**affectation**, dans laquelle les étudiants (binôme B1, TC(156)) veulent représenter les deux plans de l'intersection des deux cylindres C1 et C2.

Action de l'étudiant	rétroaction de l'environnement	Réactions des étudiants
<pre>> s3:=(y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow): > s4:=(y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green): > display(s1,s2,s3,s4);</pre>	<pre>Error, (in display) invalid argument [y, y, z] which must be a plot structure, or a list/set/array thereof</pre>	<p>Que ce que j'ai fait ? J ne vois pas l'erreur Pourquoi il ne veut pas ?</p>

Les étudiants ont une représentation analytique correcte des deux plans, sauf qu'elle n'exprime pas ce qu'ils voulaient (les deux plans de l'intersection de C1 et C2). La *rétroaction-Maple* est fondée sur le fait que dans les tâches de représentation graphique dans *Maple*, la commande **display** ne reconnaît que les instructions assurées par la technique d'**affectation** comportant les outils du paquet **with(plots)**. Le message d'erreur renvoyé par le logiciel (cf. colonne centrale) essaie de nous dire que l'instruction mise en place doit être une structure du **plot**, ou une liste/ensemble/rangée. Donc l'argument **[y,y,z]** est incomplet par rapport à l'outil **display**. Dans ce cas, l'interprétation de la rétroaction de l'environnement n'est pas évidente pour les étudiants, comme l'indiquent leurs réactions. Cette interprétation requiert de la part du sujet une large connaissance par rapport au domaine de la validité de l'outil **display**. Les étudiants sont arrivés à corriger l'erreur après l'intervention d'un des observateurs qui leur pose la question : *Regardez d'abord les lignes des commandes précédentes, qu'est-ce qui ne va pas dans vos instructions ?* Donc, ils n'ont pas vu tout de suite qu'il manquait la commande **plot3d** dans leurs instructions (quand ils réagissent en disant : *Je ne vois pas l'erreur*). On peut donc dire que la réorganisation de la tâche par les étudiants passe par la réussite de l'interprétation de la rétroaction de l'environnement. Autrement dit, les étudiants s'attachent souvent à la *rétroaction-Maple* avant de revoir leurs actions. Alors que les messages d'erreurs que le logiciel renvoie ne sont pas toujours facilement interprétables, comme le montre aussi le cas suivant.

6. Sixième cas (VI)

Le sixième cas est le plus complexe, car là aussi (comme dans le cas (IV)) il y a double erreur (erreur mathématique et erreur de syntaxe d'une commande du logiciel). A priori ce que l'étudiant peut identifier en premier est l'erreur dans *Maple*, mais sa détection ne peut pas le ramener directement au cas (I), mais au mieux au cas (II). A noter que ce cas peut aussi entraîner une remise en cause totale, à tous les niveaux.

Considérons par exemple le cas suivant où les étudiants (binôme B3, TC(225)) entrent dans *Maple* l'instruction ci-dessous (colonne de gauche) pour la visualisation graphique de la surface cylindrique S1.

Action de l'étudiant	Rétroaction-Maple	Réactions des étudiants
<code>>plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho=-1..1, theta = -Pi..Pi, z = -3..3) ;</code>	Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional argument: z = -3..3	ρ n'est pas un angle, $\rho\cos\theta$ c'est les coordonnées en polaire $\rho\cos\theta$, $\rho\sin\theta$ paramètrent un cercle et en indépendant de z , ça va être un cylindre ; En fait il dépend de euh [...] ; En fait là ça doit dépendre que de deux paramètres au lieu de trois, à chaque fois nous, on en met un troisième c'est pour cela qu'il le prend pas [...] (cf. B3, TC(285)).

D'abord les étudiants utilisent les données $[\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z]$ ⁸³ dans la syntaxe (4) de la commande **plot3d**. Cette démarche nous permet de souligner que les étudiants ont pensé tracer plutôt un volume (solide), c'est-à-dire, la visualisation graphique du cylindre C1 ($[\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z]$) au lieu de sa surface S1 ($[\cos(\theta), \sin(\theta), z]$). Alors qu'on leur demande (dans la question 02) la représentation graphique de S1 et de S2. Car, comme l'on a déjà souligné, dans *Maple*, on ne représente pas des solides, mais leurs surfaces ou les bouts des surfaces qui les délimitent. Donc, la mise en œuvre du résultat $[\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z]$ dans *Maple* conduit les étudiants à mobiliser trois paramètres (ρ , θ et z), ce qui n'est pas possible dans la syntaxe de la commande **plot3d**⁸⁴. En conséquence *Maple* renvoie le message d'erreur. Ce message (cf. colonne centrale) est partiellement interprété par les étudiants, ils comprennent que le logiciel détecte un paramètre de trop dans les données qu'ils ont mises en œuvre. Ils s'aperçoivent alors que le paramétrage d'une surface ne doit comporter que deux paramètres et non trois (quant ils disent : *En fait là ça doit dépendre que de deux paramètres au lieu de trois, à chaque fois nous, on en met un troisième c'est pour cela qu'il le prend pas*). Leurs réactions par rapport à la *rétroaction-Maple* est de revenir en arrière et d'enlever $z=-3..3$ dans leur instruction. Par ailleurs, le nouveau raisonnement de ce binôme a fait avancer son mode de représentation analytique de la surface. Mais le résultat n'était pas tout de suite plausible, car leur raisonnement ne correspond pas à leur mode de représentation, tant dans l'environnement *papier/crayon* que dans *Maple*. En conséquence, le message d'erreur est encore moins clair, comme le montre le résultat de la correction de la tâche (tableau ci-dessous).

Action de l'étudiant	Rétroaction-Maple	Réactions des étudiants
<code>>plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho=-1..1, theta = -Pi..Pi) ;</code>	Plotting error, empty plot	[...] Là en mettant un angle t'en a mis 1 ? Je met ρ , θ ; θ il varie de $-\pi$ à π ; Hun ; Oh ! Oh ! Oh ! Très joli ; C'est pas mal « rires ». Non, non, mais c'est joli euh ; « ouais » ; Hélicoïdal, C'est clair [...]

A la suite de ce résultat, il y a des passages qui ne sont pas clairs dans l'interaction des étudiants face à la rétroaction, on ne sait pas trop ce qu'ils font, apparemment ils sont arrivés à tracer une surface hélicoïdale⁸⁵. Ensuite ils modifient encore les données après une intervention du professeur (cf. B3, TC385) en enlevant le troisième paramètre **rhô** dans le

⁸³ Résultat de la technique classique de changement des coordonnées (cartésiennes et cylindriques).

⁸⁴ La représentation $[\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), z]$ ne sera interprétée correctement par la commande **plot3d** qu'en définissant préalablement un des éléments ρ , θ ou z comme constante. Dans cette condition, cette représentation pourra produire respectivement trois objets différents : une surface cylindrique, un plan ou un disque.

⁸⁵ On ne trouve pas cette visualisation graphique dans leur fichier *Maple*, ni l'instruction qui permet de le faire. Celle-ci n'apparaît que dans leurs réactions (cf. protocole B3, TC(333)).

paramétrage, ils remplacent z par a , et changent le domaine de variation des paramètres (θ et a) en obtenant ainsi l'instruction correcte `>plot3d([cos(theta),sin(theta),a], theta=-Pi..Pi, a=-3..3);` qui rend alors la représentation graphique du premier cylindre attendu. Une fois que les étudiants arrivent à représenter le premier cylindre, ils obtiennent le deuxième assez facilement.

7. Types de rétroaction-Maple

La lecture des productions des étudiants dans cette phase de représentation graphique (étapes E1 et E2) nous permet de repérer les trois types de rétroactions suivants :

- Un message d'erreur ;
- Une réponse codée ;
- Une représentation graphique.

9.3 Etude des rétroactions possibles : la phase du calcul de volume par des intégrales multiples

Nous allons maintenant regarder les productions des étudiants dans la phase du calcul du volume (étape E3). Nous reprendrons ensuite ces types de rétroactions pour tirer notre conclusion de cette partie de notre travail.

1. Premier cas (I)

Comme précédemment, ce cas, le plus simple, correspond au cas où l'étudiant n'a pas fait d'erreur, et obtient la solution correcte et continue le travail de la tâche suivante (si elle existe), ou finit le traitement du problème.

2. Deuxième cas (II)

Reprenons le cas (II) - tableau 01- où l'étudiant n'a pas commis d'erreur d'utilisation du logiciel *Maple*, par contre leur travail mathématique comporte des erreurs. C'est le cas par exemple où les étudiants (binôme B2, TC(+04)) entrent dans *Maple* les instructions ci-dessous (colonne de gauche) pour calculer le volume de Q par une intégrale triple.

Action de l'étudiant	Rétroaction-Maple	Réactions des étudiants
<code>> int((x^2+y^2-1), x = -1..1);</code> $-\frac{4}{3} + 2y^2$	0	Oh ! Bah le volume est nul euh ! A mon avis c'est dans les bornes, tu vois qu'on s'est plantés. Parce que, pourquoi on fait varier de -1 à 1, moi je dis de 0 à 1 ; Ouais, vas-y mets de 0 à 1, comme ça on aura pas de zéro, puisque attends z il est là ; z bah on le fait varier de 0 à 1, comme ça on aura ce volume-là normalement ! Après le volume-là on le multiplie par quatre ! Ouais vas-y, on a pas le droit de le faire, parce que là si tu remets un pourcentage, ça marcherait pas, essaie de faire int avec ça ; Ouais ? Fais int ... ouais essaie ;
<code>> int(%, y = -z..z);</code> $-\frac{8}{3}z + \frac{4}{3}z^3$		
<code>> int(%, z = -1..1);</code>		

Les étudiants utilisent correctement la syntaxe de l'outil **int** pour chercher le volume de Q à partir d'une itération⁸⁶ des intégrales simples, alors que, normalement, on calcule une

⁸⁶ Cette démarche est mise en place en tâtonnant, quand ils disent : essaie de faire **int** avec ça.

intégrale triple dans *Maple* par la représentation séquentielle de trois **int**⁸⁷, c'est-à-dire par la technique **int(int(int(x^2+y^2-1), x=-1..1), y=-z..z), z=-1..1);**. Néanmoins, quand les étudiants ont utilisé cette technique, ils se sont trouvés dans le cas (V), que nous verrons plus bas.

Ici la *rétroaction-Maple* (réponse zéro) est fondée sur le fait que les étudiants calculent l'intégrale triple de la fonction $f(x,y,z)=x^2+y^2-1$ sur un domaine qui comporte des morceaux symétriques par rapport aux plans des coordonnées⁸⁸, domaine que l'on peut représenter analytiquement par $D = \{(x,y,z); -1 \leq x \leq 1, -1 \leq z \leq 1, -z \leq y \leq z\}$ ⁸⁹. Ainsi, le manque de contrôle sur le domaine mis en place conduit les étudiants au calcul d'un volume nul. En voyant la *rétroaction-Maple*, les étudiants sont surpris, car le logiciel leur renvoie une valeur qu'ils n'attendaient pas (quand ils disent : Oh ! Bah le volume est nul euh !). En interprétant la réponse (zéro) du logiciel pour le volume de Q , ce binôme se rend compte que la cause d'erreur mathématique se trouve sur le domaine d'intégration (quand ils disent : *A mon avis c'est dans les bornes, tu vois qu'on s'est plantés*). Ils changent alors les bornes de la variable z . Cette interprétation conduit ensuite les étudiants à un travail correct sur le domaine D et sur le calcul de l'intégrale en entrant l'instruction **int(-8/3*z+4/3*z^3,z=0..1);**⁹⁰ dans *Maple*. Ils croient que celle-ci va leur produire un résultat significatif. Mais la réponse de l'environnement les surprend encore une fois, car *Maple* renvoie la solution (-1) ⁹¹. La *rétroaction* de l'environnement les force à revoir la tâche, mais ils n'ont pas de contrôle sur ce qu'ils font. A noter que ce n'est pas seulement la question de la définition correcte du domaine d'intégration qui est problématique dans leur démarche. On observe aussi le manque de compétences de **type 3**. On voit qu'ils mélangent la technique du calcul de volume sous une surface (donc le calcul de l'intégrale double d'une fonction f à deux variables et positive sur le domaine d'intégration) avec la technique du calcul de volume par l'intégrale triple. On voit bien cette difficulté quand ils mettent en œuvre l'écriture $\int_{-1-z}^z \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 - 1) dx dy dz$ pour calculer le volume (par itération des intégrales simples, cf. colonne de gauche, tableau précédent), au lieu $\iiint_D dy dx dz$ ou encore $\iint_{\mathbb{R}} f(x,y) dx dz$. Cette dernière, est d'ailleurs problématique, dans la mesure où elle nécessite un moyen de contrôle permettant le passage de la notion du paramétrage à la notion de fonction de deux variables. C'est-à-dire qu'il est nécessaire de dégager une fonction à intégrer.

A noter qu'après avoir visualisé le solide de l'intersection des deux cylindres, ce binôme a bien repéré visuellement le domaine d'intégration en **3D**. De plus, il voit bien que le solide intersection est compris dans un cube (quand ils disent : *Parce que déjà l'intersection elle est*

⁸⁷ Cette représentation séquentielle met en évidence l'écriture en ligne entrée dans *Maple* en lien avec qu'une écriture habituelle du calcul de l'intégrale triple dans l'environnement *papier/crayon*. En effet, la substitution de petit **i** par grand **i** rend une telle écriture visible sur l'écran.

⁸⁸ Notamment les plans Oxy , Oxz et Oyz .

⁸⁹ A noter que ce domaine D ne correspond ni au solide intersection des deux cylindres, ni à un de ses morceaux.

⁹⁰ Calcul de l'intégrale du résultat qui précède la dernière instruction dans le tableau ci-dessus, colonne de gauche.

⁹¹ Ils disent : Ouais euh c'est faux ; Mais euh, ouais, où est le problème ? Parce que déjà l'intersection elle est comprise euh, dans le cube, on a dit ! (cf. B2, TC(+54)).

PS. Jusqu'à ce moment, le travail de ce binôme sur le calcul de l'intégrale s'est toujours développé hors de la question posée, et sans l'intervention de **P** dans un délai d'à peu près 31'.

comprise euh, dans le cube, on a dit ! (cf. B2, TC(+54))). Ils savent bien que le calcul de l'intégrale ne doit pas conduire à une valeur nulle, ni à une valeur négative. Mais ils ont du mal à coordonner ce qu'ils voient avec la représentation analytique correcte. Ainsi, ils ne savent pas se servir des moyens fournis par le travail de la représentation graphique, pour préciser le domaine sur lequel ils vont calculer l'intégrale. C'est-à-dire qu'ils ne voient pas que les bornes qu'ils ont entrées dans *Maple*, pour arriver à la représentation graphique du solide Q correspondent, avec un certain contrôle, aux bornes de l'intégrale conduisant au calcul de son volume. Cependant, ce binôme arrive à révéler le seizième de Q par un découpage « non usuel ». Par contre, ils ne parviennent pas à se servir de ce découpage. Donc ils ne sont pas arrivés à la solution effective de cette dernière tâche.

Alors qu'une fois que les étudiants arrivent à représenter le solide **criblé**, et à pouvoir le manipuler directement avec la souris, ils voient bien le contour du solide. Ils n'auraient pas forcément vu le contour du solide **criblé** s'ils avaient réalisé le travail de la représentation dans l'environnement papier/crayon (cf. par exemple le travail de deux binômes dans la Partie E1). Ensuite le problème est de calculer le volume de ce solide à partir d'un de ses sous-solides par symétrie, d'abord en le représentant graphiquement et analytiquement pour ensuite arriver à utiliser les bornes de ce sous-solide dans l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale double ou triple. Les deux registres (graphique et analytique) du solide où l'un de ses sous-solides offrent les moyens de contrôle du domaine précis d'intégration ainsi que le calcul de son volume. Mais ces moyens sont presque inexplorés par les étudiants, qui procèdent souvent par tâtonnement, et leurs anticipations aboutissent aux réponses inattendues. Toutefois, la rétroaction de l'environnement donne des moyens de valider ou réfuter le résultat. Comme le montre aussi la situation suivante (cf. aussi le tableau qui rassemble tous les cas en annexe).

Cet exemple (tableau ci-dessous) entraîne un type de rétroaction-*Maple* différent de celui rencontré par B2 dans l'exemple précédent où, pour résoudre la même tâche, ils se sont placés sur un domaine d'intégration qui comporte des morceaux symétriques par rapport aux plans canoniques.

Action de l'étudiant	Rétroaction- <i>Maple</i>	Réactions des étudiants
<code>> v:=int(int(int(rho,rho=0..1), theta=0..Pi), z=0..sin(theta));</code>	<code>v:=(pi/2)sin0</code>	Il y a encore un petit problème là [...]; Quand t'es là, t'es sûr que ton rho vaut 1 ; A chaque fois que tu es sur le vert ou sur le rouge rho vaut 1, c'est le cylindre de rayon 1 ; z varie de euh 0 [...]; Moi je suis ... d'accord [...]; Là, mettre psin0. Tu l'inverses, tu mets le p en dernier ; Le rho en dernier ? Hun ; Comme ça ? Hun ; (cf. B4,TC(+293)).

Ici, les étudiants (binôme B4, TC(+198)) arrivent à dégager les bornes qui correspondent au contour d'un morceau de Q (sans avoir à le visualiser graphiquement dans *Maple*). Ils utilisent correctement la syntaxe (17) de la commande **int**. Par contre, ils manquent de contrôle sur le mode d'entrée des données dans la syntaxe de cet outil, ainsi que sur le calcul d'intégrale multiple en coordonnées cylindriques. En conséquence, *Maple* renvoie une expression en fonction de θ (au lieu d'une valeur effective qu'ils attendaient). Alors que dans l'organisation mathématique sur les *IM* (cf. chapitre B) on a vu que, les bornes de l'intégrale extérieure doivent être nécessairement constantes. Donc cette instruction ne doit pas se

terminer par l'intégration partielle par rapport à z . Mais ce moyen de contrôle de placement des bornes n'était pas pris en compte par ce binôme. A noter que ce n'est pas seulement la question de l'ordre de placement des bornes d'intégration qui est problématique dans leur démarche. On observe aussi le problème de dualité des objets *surface/solide*. Une telle dualité est liée au fait que les deux objets ont le même paramétrage angulaire, à un paramètre près (le rayon ρ). Ce paramètre dissocie les deux objets. D'un part, il joue le rôle d'une constante (un) dans le traitement de la surface cylindrique, donc il n'intervient pas dans la représentation graphique du solide criblé dans *Maple*. D'autre part, il (ρ) est une variable dans la définition du volume du solide, donc il intervient dans le calcul de volume par des intégrales multiples en coordonnées cylindriques. Ici, on trouve encore une fois, les difficultés pour retourner au calcul d'une intégrale, une fois que l'on dispose des expressions paramétrées.

Or, les étudiants utilisent bien dans l'instruction entrée dans *Maple* les bornes qui correspondent au contour d'un morceau de Q pour calculer son volume. Mais, ils leur manquent le contrôle d'une utilisation raisonnable de la notion de calcul de volume en coordonnées cylindriques. Alors que dans ce cas le paramètre ρ intervient dans la borne supérieure de z . C'est-à-dire qu'au lieu de $z=0..\sin(\theta)$, on doit avoir $z=0..\rho*\sin(\theta)$ comme définition des bornes de l'intégrale la plus intérieure.

Face à la rétroaction de l'environnement, les étudiants mettent tout de suite en cause leurs actions. Ensuite ils reviennent en arrière et renversent les positions des bornes de ρ et de z dans les lignes des commandes, et corrigent la borne supérieure de z . Avec cette correction ils ont obtenu le résultat $2/3$ qui correspond au huitième de Q . Mais ils ne savaient même pas comment valider ou réfuter ce résultat, vraisemblablement, parce qu'ils manquent de compétences à bien explorer le travail préliminaire de la représentation graphique, comme moyen de contrôle pour la mis en place du calcul de volume du solide. Ainsi, les connaissances qu'ils ont sur la notion d'intégrale multiple ne semblent pas suffisantes pour arriver à dégager immédiatement le rôle d'un tel travail, dans le calcul de volume. Par contre, on voit bien que la *rétroaction-Maple* (expression $v:=(\pi/2)\sin\theta$) force les étudiants à revoir la tâche en fonction des connaissances minimales qu'ils ont sur les intégrales définies. Donc, ils ont un contrôle visuel par rapport à la réponse du logiciel. De plus, ils s'appuient bien sur les couleurs du solide criblé, pour interpréter leur travail (cf. colonne de droite). On voit alors que la *rétroaction-Maple* peut être interprétée d'une façon très riche, du point de vue de l'apprentissage des objets mathématiques mis en place. Comme le montre aussi le cas suivant.

3. Troisième cas (III)

Reprenons maintenant le cas (III)-tableau 01-où l'étudiant n'a pas fait d'erreur mathématique, par contre il a entré dans *Maple* l'instruction qui ne correspond pas à l'objet mathématique qu'il cherche, mais qui produit un objet que le logiciel sait interpréter comme un objet mathématique. C'est le cas par exemple où les étudiants (binôme B3, TC(258)) entrent dans *Maple* l'instruction suivante, et ils croient que cela va leur rendre la valeur effective du volume du solide intersection. Mais le logiciel renvoie l'écriture du calcul de l'intégrale triple.

Action de l'étudiant	Rétroaction- <i>Maple</i>	Réactions des étudiants
> 16*Int(Int(Int(rho,z=0..sin(theta)), theta=0..Pi/2), rho=0..1) ;	$16 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} \rho dz d\theta d\rho$	[...] En fait quand on [...] Ah ! Oui, oui, oui ! Échec, ce n'est pas grand i , c'est comme tout à l'heure.

Voyant la *rétroaction-Maple*, les étudiants sont surpris que le logiciel n'ait pas affiché la valeur effective de l'intégrale mise en œuvre. Néanmoins, ils détectent tout de suite la signification de la rétroaction. De plus, ils ont un contrôle visuel par rapport à la réponse du logiciel. Ainsi ils reviennent en arrière et modifient l'outil **Int**, en remplaçant grand **i** par petit **i** (cf. leurs réactions, colonne de droite). A noter que comme pour B4 (exemple précédent), on trouve aussi le problème de dualité des objets *surface/solide* (comme on le voit dans leur production). Mais ce problème a été surmonté dans la suite du travail. Car ils remplacent **sin(theta)** par **rho*sin(theta)** dans la borne supérieure de **z**, après une intervention ciblée du professeur⁹². Avec cette réorganisation ils finissent par y arriver.

4. Quatrième cas (IV)

Comme dans la phase précédente, un tel cas n'apparaît pas non plus dans la production des étudiants dans cette phase de calcul de l'intégrale.

5. Cinquième cas (V)

Pour arborer ce cas, considérons la production suivante, dans laquelle les étudiants (binôme B2, TC(988)) entrent dans *Maple* les instructions (colonne de gauche) pour calculer le volume de Q par une intégrale triple.

Action de l'étudiant	Rétroaction- <i>Maple</i>	Réactions des étudiants
> int((int(int(x^2+y^2-1), x=-1..1), y=-z..z),z=-1..1);	Error, (in int) wrong number (or type) of arguments	Ouais mais il y a un problème avec notre euh, notre intégrale ; Je crois aussi ; Je crois que c'est pas comme ça les intégrales triples, c'est pas possible. Non ! Mais il faut suffit de euh, j' sais pas ! Ça sert à rien de faire l'intégrale de l'intégrale, de l'intégrale, de l'intégrale ; Ouais ; Moi je dirais que euh, j'ai envie de tester un truc [...] (cf. B2,TC(+04)).

Le dysfonctionnement de l'action des étudiants dans *Maple* tient dans l'omission (ou excès, ou encore mauvais placement) d'un ou des parenthèses⁹³ de contrôle d'entrée de données dans la syntaxe de commande **int**. On voit que la rétroaction-*Maple* surprend les étudiants, qui mettent tout de suite en cause leur travail mathématique sur les intégrales multiples (cf. colonne de droite). A noter que dans ce cas le message d'erreur (colonne centrale) est très laconique. Il ne spécifie pas vraiment l'erreur des étudiants. En effet, les étudiants n'essaient même pas d'interpréter un tel message. Ils tâtonnent. Dans ce jeu d'essai-erreur ils arrivent à utiliser correctement la syntaxe de l'outil **int** selon la procédure d'itération d'intégrales simples. Toutefois, en utilisant cette procédure, les étudiants se sont trouvés au cas (II). Donc, mis à part l'excès ou le mauvais placement des parenthèses, une telle instruction (colonne de gauche, tableau ci-dessus) ne conduit pas au calcul de volume de Q . Il est important de noter que le placement correct des parenthèses ne résout que le problème technique. Ainsi la réponse du logiciel aurait été zéro.

⁹² C'est le $\sin\theta$ là qui ne va pas, z ne varie pas entre 0 et $\sin\theta$, z varie entre euh ? (cf. B3, TC(+450)).

⁹³ Les parenthèses de la syntaxe de commande **int** de *Maple* jouent un rôle analogue aux crochets de la représentation habituelle des intégrales multiple itérées dans l'environnement *papier/crayon*.

6. Sixième cas (VI)

Revenons maintenant au dernier cas où l'étudiant a une double erreur (erreur mathématique et erreur de syntaxe d'une commande du logiciel). Et analysons la production suivante dans laquelle les étudiants (binôme B1, TC(+143)) entrent dans *Maple* l'instruction ci-dessous (colonne de gauche) pour calculer le volume du solide Q par une intégrale multiple.

Action de l'étudiant	Rétroaction-Maple	Réactions des étudiants
<pre>> integer([sin(theta),cos(theta), z], theta=-Pi/2 .. Pi/2, z=0..cos(theta));</pre>	$\text{integer}\left([\sin(\theta), \cos(\theta), z], \theta = -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, z = 0.. \cos(\theta)\right)$	<p>Parce que ce n'est pas, c'est tout ça [...] ; Ah ! C'est cool ! Il y a plein des choses ; [...] on fait exactement ; [...] Mais pourquoi "integer" me donne ça ? Attends [...] ça va pas du tout ça ! [...] ; Allez, allez, prendre autre une équation ; Bon ! D'accord ; [...] Tu vas intégrer ça alors ? Ouais moi j'intègre ; Intègre tout ... ; [...] : Bon ! Réfléchissons ; [...] (cf. B1, TC(+145)).</p>

Dans cette action les étudiants donnent à *Maple* une instruction qui utilise la commande **integer**⁹⁴ qui aboutit à la représentation analytique de S1 **crible**⁹⁵. Ainsi, la *rétroaction-Maple* (colonne centrale) répond à l'action erronée des commandes **int**, **Int**, **Doubleint** et **Tripleint** du calcul de l'intégrale. A noter qu'ils sont arrivés à visualiser graphiquement un découpage qui correspond à un seizième du volume de Q en utilisant l'instruction **plot3d([sin(theta),cos(theta),z], theta=0..Pi/2, z=0..cos(theta), color=red)**. L'action (colonne de gauche) des étudiants suppose alors qu'ils ont pensé tout de suite au calcul d'une intégrale double, et donc au calcul de volume sous une surface. C'est pourquoi ils utilisent ensuite la même syntaxe de **plot3d**, où ils enlèvent l'option **color** et remplacent l'outil **plot3d** par **integer** en conservant le paramétrage **[sin(theta),cos(theta),z]** de la surface S1, pour tenter de calculer l'intégrale. Donc, une fois que les étudiants obtiennent correctement la représentation paramétrique de la surface S1, ils pensent à l'utiliser pour calculer le volume sans repérer l'expression de la fonction à intégrer. C'est-à-dire qu'ils placent tout de suite **[sin(theta),cos(theta),z]** au lieu de l'expression de la fonction à intégrer dans l'écriture $\iint f(u,v)dA$. Ici aussi on trouve la difficulté générée par la notion de paramétrage.

Il manque donc dans leur démarche des éléments de contrôle sur interaction possibles entre les techniques de calcul de l'intégrale et celles prises en compte dans la représentation graphique du solide Q . De plus, on observe aussi, dans leur production, le problème de dualité des objets *surface/solide* repéré précédemment. Face à la *rétroaction-Maple*, les étudiants sont surpris que le logiciel n'ait pas affiché la valeur de l'intégrale, comme le montrent leurs réactions (colonne de gauche). Ensuite ils essaient d'interpréter l'erreur. Mais ils ne trouvent pas tout de suite la cause de la faute. D'ailleurs ils se posent la question : *Mais pourquoi integer me donne ça ?* Dans la suite de l'activité, ils sont arrivés à connaître la commande **int** qu'ils ont aussi utilisée de façon erronée. En effet, ils reprennent leur première instruction et remplacent "**integer**" par "**int**" et tout de suite *Maple* renvoie un message d'erreur. Ensuite les étudiants changent l'environnement de travail. Ils se servent des techniques habituelles de

⁹⁴ Commande qui n'existe pas dans les paquets de *Maple* à propos du calcul d'intégrale.

⁹⁵ Donc, le logiciel interprète partiellement l'instruction des étudiants.

l'environnement *papier/crayon*, techniques qu'ils utilisent, aussi, de façon erronée. Malgré tout, ils finissent par y arriver.

7. Types de rétroaction-Maple

Comme pour la phase précédente (étapes **E1** et **E2**), la lecture des productions des étudiants dans cette phase (étape **E3**) nous permet de repérer les types de rétroactions suivants :

- Un nombre réel ;
- Un message d'erreur ;
- Une expression algébrique ;
- Une écriture du calcul de l'intégrale ;
- Interprétation partielle de la commande dans laquelle un ou plusieurs termes ne sont pas reconnus par *Maple*.

Pour interpréter ces résultats et tirer les conclusions sur notre expérimentation dans sa totalité, nous reprenons d'abord les types de rétroactions que nous avons repérées dans la phase précédente, qui sont les suivants :

- Un message d'erreur ;
- Une réponse codée ;
- Une représentation graphique.

9.4 Recensement global de type de réponse des étudiants en termes de rétroaction-Maple

Comme on le voit, la lecture des productions des étudiants dans les deux phases révèle sept types de rétroactions différentes dont l'un apparaît toujours dans les deux phases, c'est le cas du **message d'erreur**. Nous regardons ce résultat dans un contexte global selon le problème posé aux étudiants. Ainsi, le tableau ci-dessous récapitule ces rétroactions que nous découpons en deux groupes remarquables : groupe (**α**) (colonne de gauche), et groupe (**β**) (colonne de droite).

groupe (α)	groupe (β)
α 1. Un message d'erreur ⁽⁹⁶⁾	β 1. Un nombre réel
α 2. Une réponse codée pas toujours facilement interprétable	β 2. Une expression algébrique
α 3. Interprétation partielle de la commande dans laquelle un ou plusieurs termes ne sont pas reconnus par <i>Maple</i> .	β 3. Une représentation graphique
	β 4. Une écriture du calcul d'une intégrale

Tableau : 02

Les deux groupes mettent ainsi en évidence deux caractéristiques différentes de rétroactions que l'environnement informatique *Maple* peut donner à l'utilisateur, par rapport au domaine de représentation graphique et à celui du calcul des intégrales multiples.

1. Le groupe (**α**)

Les rétroactions du groupe (**α**) montrent un dysfonctionnement dans l'utilisation du logiciel *Maple* par rapport à la demande d'utilisateur. Elles caractérisent aussi les exigences du

⁹⁶ Dans *Maple* ces messages sont produits en anglais (langue du concepteur du logiciel).

logiciel et les limites de *rétroaction-Maple* en fonction de l'anticipation et de l'action de l'utilisateur. A travers ce dysfonctionnement traduit par les rétroactions, nous pouvons constater un rôle important dans l'apprentissage des objets mathématiques et des commandes de *Maple* mises en place, dans la mesure où, face à la rétroaction, les étudiants sont toujours obligés de revenir en arrière pour réorganiser leur travail mathématiques et/ou l'utilisation du logiciel. On voit aussi que les possibilités de contrôle sont moins accessibles dans ces types de rétroactions (groupe (α)). Souvent les étudiants n'ont pas des éléments suffisants, qui devraient (de la façon simple) leur permettre d'identifier l'origine des erreurs. En conséquence, ils se compliquent davantage dans le processus heuristique. On remarquera que souvent, ils n'interprètent pas vraiment la rétroaction, mais tâtonnent. Ainsi, on peut encore dire que les exigences du logiciel, traduites par les rétroactions, mettent les étudiants à l'épreuve dans l'utilisation des techniques instrumentées dans *Maple*.

2. Le groupe (β)

Contrairement au groupe (α), les rétroactions du groupe (β) produisent dans *Maple* un objet mathématique, qui ne correspond pas à l'attente de l'étudiant en fonction de ses anticipations et de ses actions, mais qui permet ensuite d'avoir un contrôle perceptif sur les ostensifs des objets mathématiques mis en jeu, grâce à une certaine connaissance qu'ils ont de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension. Malgré tout, on aperçoit le manque d'interaction entre ce que les étudiants voient et les expressions mathématiques qu'ils entrent dans *Maple*. Dans ce groupe, souvent les étudiants s'aperçoivent d'abord de l'erreur mathématique (via la rétroaction), pour ensuite procéder à la correction. Selon le recensement présenté par le tableau suivant, le grand nombre des rétroactions de ce groupe est lié au cas (II) où interviennent notamment les connaissances mathématiques relatives au sujet d'étude.

Le tableau récapitulatif ci-dessous présente les types de réponses des étudiants en termes de *rétroaction-Maple* dans les six cas (cf. tableau 01) de notre grille d'analyse.

Séance 1						Séance 2				
Les cas ↗	II	III	IV	V	VI	II	III	IV	V	VI
Les rétroactions α et β ↘	$\alpha 1$	$\beta 4$		$\alpha 1$	$\alpha 1$	$\beta 1$	$\beta 4$		$\alpha 1$	$\alpha 1$
	$\beta 1$			$\alpha 1$	$\alpha 1$	$\beta 1$			$\alpha 1$	$\alpha 1$
	$\beta 2$					$\beta 1$			$\alpha 1$	
	$\beta 3$					$\beta 2$			$\alpha 1$	
	$\beta 3$					$\beta 3$			$\alpha 2$	
	$\beta 3$					$\beta 3$				
	$\beta 3$					$\beta 3$				
A	7	1	0	2	5	8	1	0	5	2

*⁹⁷

(Séance 1)+ (Séance 2)					
Les cas ↗	II	III	IV	V	VI
B	15	2	0	7	7

Total global des Exemples repérées	31
------------------------------------	-----------

Tableau - 03

La ligne A de ce tableau, donne (par séance) le total partiel des exemples repérés pour chaque

⁹⁷ Le cas (I) est absent de ce tableau car, a priori, cela ne révèle que le résultat attendu. Donc il n'est pas intéressant dans cette partie de notre étude.

cas de notre grille d'analyse (cf. tableau 01). Et la ligne **B** donne le total général pour chaque cas et le global de l'expérimentation.

D'après ce tableau, c'est surtout les rétroactions relatives au cas (II), où interviennent notamment les connaissances mathématiques relatives au sujet d'étude, qui prédominent dans les pratiques des étudiants devant résoudre le type de tâches emblématique dans *Maple*.

Dans la suite, nous présentons la conclusion de notre expérimentation dans sa totalité et ensuite la conclusion générale de la thèse.

10. Conclusion sur la deuxième expérimentation

Pour chercher des éléments des réponses à nos questions et vérifier nos hypothèses, nous avons découpé notre analyse en trois parties :

- Analyse globale de l'expérimentation ;
- Analyse détaillée de deux binômes ;
- Analyse des rétroactions de *Maple*, pour les six binômes.

La première partie nous a permis de mettre en évidence la *dévolution* du problème, les *enjeux*, les *compétences* (de **type 1**, ..., **type 4**) mises en jeu, les *sous-étapes* (**E1**, **E2** et **E3**) et les *problèmes techniques* possibles dans chaque étape, selon le choix de passage [SP]↔[RGS]↔[EIM] du modèle MATIM, mais aussi de donner les éléments permettant de justifier notre choix de deux binômes (**B1** et **B4**).

L'analyse détaillée de ces derniers (sans perdre de vue les quatre autres, dont les analyses sont placées en annexe) nous permet de donner des éléments de réponses aux questions initialement posées (relatives à cette partie de notre travail). Rappelons que les buts visés étaient d'étudier comment les étudiants vont résoudre le problème posé, dont la sous-tâche importante consistait à obtenir une représentation adéquate du solide en jeu, en utilisant les outils du logiciel *Maple*.

1. *Comment les étudiants s'approprient-ils ces outils dans ce type de tâche ?*
2. *Comment le logiciel Maple fournit-il des rétroactions efficaces pouvant favoriser le travail des étudiants ?*

Nous avons également souligné, qu'en utilisant ce logiciel, dans le traitement du type de tâches en jeu, on doit passer par la notion de *paramétrage*, alors qu'une fois que l'on a utilisé cette notion pour avoir le solide « **criblé** » on doit, ensuite revenir à la notion de fonction pour la mise en place du calcul d'intégrale, d'où les questions :

3. *Les étudiants perçoivent-ils ce passage ?*
4. *Cet aller-retour pose-t-il des difficultés dans les productions des étudiants ?*

Finalement on a souligné que, le travail nécessaire pour représenter avec *Maple* le solide **criblé** est une aide directe dans la mise en place de l'intégrale, indépendamment du choix du calcul (via une intégrale *double* ou *triple*) :

5. *Les étudiants s'approprient-ils ces données lors de la mise en place de l'intégrale ?*
6. *Dans quelle mesure les étudiants peuvent-ils comprendre que le travail développé dans les deux premières étapes est une aide pour le calcul de volume du solide Q ?*
7. *Se rendent-ils compte que le travail préliminaire de la représentation graphique du solide criblé comporte les bornes d'intégration ?*

Nous concentrons donc la conclusion de notre expérimentation sur ces questions.

En suivant le passage [SP]↔[RGS]↔[EIM] du modèle MATIM, nous avons pu constater que tous les binômes observés montraient une bonne visualisation du problème, à l'appui d'un rapide dessin papier. Ils s'approprient le problème posé grâce aux connaissances qu'ils possèdent de l'espace et des modes de représentation dans cette dimension. Ils « voient » bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur emboîtement. Ceci a donc motivé les étudiants qui conçoivent (de façon floue) le solide de l'intersection. C'est-à-dire qu'ils voient bien que l'intersection des deux cylindres est un solide borné, et que calculer son volume est donc un problème pertinent. Cela a conduit rapidement les étudiants à une bonne *dévolution* du problème au niveau perceptif, ce qui leur permet de s'approprier la tâche.

Nous avons toutefois, constaté certains besoins des étudiants devant résoudre ce problème en utilisant les outils du logiciel *Maple*. En effet, certains binômes ont mis presque une heure (avec des interventions du professeur) pour arriver à la solution attendue (dans les deux premières questions – **q1** et **q2**). Ceci montre que les étudiants n'ont pas une connaissance suffisante de *Maple* pour que ce logiciel soit un outil qui les aide d'emblée dans la résolution du problème. Ils ont encore besoin d'apprendre les syntaxes des commandes de *Maple*, ce qu'elles peuvent produire, afin d'organiser la résolution du problème, pour que le logiciel devienne un outil d'aide. D'après la classification des EDOs (Elément des Difficultés Observées), tous les six binômes comporte l'EDO **F** qui se traduit par les difficultés techniques à bien utiliser les outils du logiciel (**plot3d**, **display**, etc.), ce qui correspond aux compétences de *type 2*. On peut donc dire que dans leur genèse instrumentale les schèmes correspondant ne sont pas encore construits et qu'ils tâtonnent dans une stratégie d'essais-erreurs et de réadaptation locale.

Malgré les difficultés relatives aux compétences de *type 1* (cf. la classification des EDOs), on a pu remarquer alors que *l'appropriation des outils Maple par ces étudiants s'est développée conjointement avec un réinvestissement des connaissances de la géométrie dans l'espace*. C'est-à-dire que les deux types de compétences (*type 1* et *type 2*) (étape **E1**) se complètent dans l'acquisition des schèmes. Ainsi, le temps qu'ils passent pour résoudre une sous-tâche peut apparaître long, mais, était sans doute nécessaire.

Comme nous l'avons dit, les étudiants ont une bonne visualisation de la situation. Cependant, les difficultés existent dans la coordination entre ce qu'ils voient et les correspondants analytiques qu'ils doivent mettre en place. En plus, il existe des difficultés techniques à bien utiliser les outils du logiciel (*type 2*). En conséquent les étudiants procèdent souvent par tâtonnement. Ils arrivent ainsi généralement à leurs fins après plusieurs *essais-erreurs* grâce au contrôle perceptif. Mais aussi grâce aux interventions répétées de **P**. Ils sont donc avant

tout dans l'action au détriment d'une réflexion et d'une anticipation de ce que **Maple** va donner. **Maple** fournit donc des rétroactions efficaces favorisant le travail des étudiants, à partir de la technique *essais-erreurs*. En effet, la facilité qu'il y a à obtenir à peu de coût des représentations graphiques dans **Maple** fait qu'au lieu de contrôler les expressions instrumentées, ils essaient un peu au hasard. Comme on l'a vu, les interactions suivantes se retrouvent souvent dans tous les binômes observés :

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • Vas-y essaye [...]; • On va essayer quand même [...]; • On tente on a pas peur? [...] • On recommence ; ça ira tu crois ? [...] • On change ; Pourquoi ça ne marche pas ? [...] | <ul style="list-style-type: none"> • Essaie de faire [...] pour vérifier [...]; • Il (Maple) comprend ça ? [...] • Mets la même chose pour voir ce que ça fait [...]; • Allez on peut changer de toute façon [...]; • Bon ça a marché, on ne sait pas pourquoi [...] ! |
|---|--|

Par ailleurs, on a vu que le passage de l'étape 1 à l'étape 2 était à la base de la description du **crible géométrique** permettant de dégager le solide « **isolé** » (questions 3 et 4). En effet, notre analyse a priori a montré que la réussite de cette dernière (questions 4) passe par la notion de *paramétrage*, alors qu'une fois que l'on a utilisé cette notion pour avoir le solide « **isolé** » on doit, ensuite revenir à la notion de fonctions pour la mise en place de l'intégrale. La lecture des productions des étudiants montre cependant qu'ils *ne perçoivent pas ce passage*. Ils cherchent une fonction à intégrer, sans s'appuyer sur le travail de représentation qu'ils viennent d'effectuer, qu'ils ne semblent concevoir que comme une tâche préliminaire, dont le seul but est d'obtenir à l'écran une représentation graphique. Comme nous l'avons vu dans nos analyses institutionnelles, il semble bien que la production d'un dessin soit un passage obligé implicite, mais que l'appui sur ce dessin et les outils mis en œuvre pour y arriver ne soient pas réinvestis dans la mise en place de l'intégrale. Par exemple, les étudiants disent :

On intègre ? Et comment ? On ne l'a pas l'équation de la surface. On la paramètre quoi. Il faut l'équation de la surface si on veut pouvoir intégrer en fait.

En effet, ce besoin pose des difficultés dans les productions des étudiants. La notion de *paramétrage* semble donc perturber la démarche habituelle des étudiants devant résoudre le type de tâche emblématique. Il apparaît que les étudiants ne perçoivent pas vraiment les liens possibles entre *les composants d'écritures en ligne pour les expressions instrumentées* et le *graphique* obtenu. Ainsi, le travail de la représentation graphique du solide **criblé** n'est pas tout de suite un moyen utilisable pour les étudiants dans la mise en place du calcul de l'intégrale. Or, l'aller-retour « *équations (de surfaces) ⇔ paramétrages* » pose des difficultés dans les pratiques des étudiants mais, il est sans doute importante, dans le sens où (en utilisant **Maple**) il intervient fortement dans la dialectique entre **RG** et **GA**.

D'après notre *analyse a priori* (dans les trois stratégies de réussite), (cf. aussi le chapitre D), la description du **crible géométrique** passe par la manipulation des données (qui sont ensuite introduites dans les syntaxes du logiciel) permettant de limiter les surfaces cylindriques aux seuls contours du solide de l'intersection. La détermination de ces données, est très proche du travail nécessaire à la mise en place du calcul de l'intégrale double (ou triple) conduisant au calcul du volume du solide (notamment dans la détermination des bornes d'intégration).

Toutefois, l'analyse du travail des binômes révèle que les étudiants ne se rendent pas compte que le travail préliminaire de la représentation graphique du solide **criblé** comporte les bornes d'intégration. Ceci fait écho à ce que nous avons pu observer dans l'environnement *papier/crayon* (et serait donc un effet du contrat) où les étudiants ont l'habitude de **lire** et de **reproduire** les dessins, mais souvent ils ne s'appuient absolument pas sur ce travail pour organiser la suite (cf. chapitre C et Partie E1). Alors que le travail préliminaire de **RG** qu'ils ont réalisé dans *Maple* ne leur donne pas uniquement un bon dessin (le solide **criblé**) mais devrait produire pour les étudiants des connaissances sur **RA** utiles pour la mise en place du calcul de l'intégrale. Il semble donc que les connaissances qu'ils ont sur la notion d'intégrale multiple ne sont pas suffisantes pour arriver à percevoir immédiatement que les composantes, qu'ils ont mises en place pour la représentation graphique du solide **criblé**, correspondent aux bornes d'intégration sur chaque sous-solide de Q compris entre les deux plans. Un autre point clé de la réussite touche à l'utilisation des symétries pour réduire la recherche à un huitième, voire un seizième, du solide. Cette étape essentielle du travail a été entièrement prise en charge par l'enseignant dans notre expérimentation. Nous en avons vraisemblablement négligé l'importance. Il semble que cette technique classique dans ce type de problème n'avait pas encore été suffisamment travaillée par les étudiants. Ceci a un peu parasité notre expérimentation.

En effet, les binômes sont arrivés à la solution attendue dans la question **5**, mais avec difficultés et bien sûr avec beaucoup d'aide de **P**. Soulignons cependant que seul le binôme B2 (cf. l'analyse en annexe) n'est pas parvenu à la solution effective de **q5**.

Revenons à présent sur notre analyse des *rétroactions-Maple* en prenant compte les travaux de six binômes.

Le tableau **3** (présenté plus haut) nous permet de voir, d'une façon assez fine, ce qui s'est passé dans chaque classe. En effet, nous avons repéré 31 exemples⁹⁸ de *rétroactions-Maple* des groupes α et β , dont 15 correspondent à la séance 1 et 16 à la séance 2. Ce résultat nous montre également que :

- Presque la moitié (**48%**) des réponses erronées, dans la résolution du problème proposé, proviennent du côté mathématique et non liées à l'utilisation du logiciel *Maple*. Cela nous permet de mettre en évidence que, les difficultés des étudiants dans le traitement de type de tâche emblématique en utilisant *Maple*, sont surtout originaires du pôle *Mathématique*, non du pôle *informatique*. Par ailleurs, les liens possibles entre ces deux pôles ne peuvent vivre institutionnellement dans l'enseignement universitaire actuel. C'est-à-dire qu'il manque un enseignement qui nourrisse une interaction favorable entre les techniques instrumentées dans *Maple* et les techniques habituelles *papier/crayon*. Notamment dans l'enseignement des *IM*. Ce résultat confirme l'hypothèse que nous avons formulée au début :

⁹⁸ A noter que certains binômes ont effacés tout de suite les résultats erronés. Donc nous ne sommes pas arrivés à récupérer toutes les erreurs commises par les étudiants. Ce qui réduit significativement le total général des exemples repérés.

Au-delà de la connaissance des commandes et des syntaxes du logiciel Maple, la réussite des tâches mathématiques passe par l'enseignement et l'apprentissage des techniques instrumentées au sein de l'institution d'enseignement.

- Le cas (V) où interviennent principalement les connaissances du logiciel est moins présent (surtout dans la première séance), alors que, globalement, ce cas se confond au cas le plus complexe (le cas (VI)) où les étudiants ont des difficultés dans les deux pôles. Comme on peut le voir dans le tableau précédent, **23%** des réponses erronées sont à la fois d'origine mathématique et liées à l'utilisation du logiciel, pareillement **23%** ne sont que d'origine informatique. Ainsi, une partie d'entre elles ne sont pas de source mathématique, sur le sujet d'étude, mais tiennent à des représentations insuffisantes ou erronées des écritures en ligne pour les expressions instrumentées. Cependant, on voit que le cas où l'étudiant interprète une commande du logiciel de façon erronée est assez rare (**6%** des cas).

Ainsi, nous pouvons préciser qu'un des enjeux importants de l'enseignement des *IM* est de mettre au cœur de la tâche emblématique l'interaction entre **RG** et **RA** qu'il faut outiller par des techniques. Notre expérimentation montre bien que les difficultés existent dans cette interaction.

Le logiciel **Maple** est présent dans les pratiques des étudiants. Mais, il exige des processus d'instrumentations pour devenir un outil d'aide dans ce type de tâches. Tel processus doit engager des connaissances mathématiques enseignées.

Dans la suite nous présenterons la conclusion globale de notre thèse.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Revenons sur les objectifs et les questionnements initiaux qui nous ont conduit à mener cette recherche. Comme nous l'avons souligné en introduction au chapitre A, nous voulions mener une étude sur *les IM* en nous concentrant plus particulièrement sur l'étude des *interactions possibles entre la représentation graphique (RG) et la représentation analytique (RA) des solides dans les tâches de calculs de volumes, en particulier en utilisant les logiciels de calcul formel*.

D'une part, ces choix ont été motivés par des difficultés rencontrées par les étudiants et les enseignants dans l'enseignement et apprentissage des *IM*. D'autre part, ils sont aussi justifiés par les diverses initiatives mises en place dans les années récentes au Brésil, concernant l'utilisation des outils informatiques dans l'enseignement de tous niveaux. Cette utilisation est également encouragée par le Ministère de l'Education Nationale brésilien. On a vu que les initiatives précitées sont essentiellement personnelles et au stade de l'innovation, dans le mesure où l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement, notamment des mathématiques, n'est pas institutionnalisée dans la plupart des IES brésiliennes, en particulier à l'UESC.

En France, dans les classes préparatoires aux grandes écoles (CPGE) on a trouvé un contexte d'enseignement qui est proche de celui du Brésil, pour l'enseignement des *IM*, en particulier dans les CPGE-Technologiques. De plus, on a vu que l'environnement informatique *Maple* est installé dans ces classes et donc reconnu institutionnellement. Dans ce contexte, nous avons décidé de nous intéresser aux CPGE, pour identifier les conditions et les contraintes liées aux outils du logiciel *Maple* (relatifs à cet enseignement) et pour en analyser le rôle lors de la construction d'une solution par un étudiant dans la mise en place d'une *IM* conduisant au calcul de volumes à l'aide de cet environnement.

Ces points de départ nous ont mené à situer notre recherche dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique et celui de l'ergonomie cognitive, en nous appuyant aussi sur la notion de *registre* de représentation sémiotique. Ces champs de la didactique, nous ont alors permis de conduire les deux grands axes d'analyses qui s'articulent.

⇒ **une analyse institutionnelle de l'enseignement des *IM* (cf. chapitre B) ;**

⇒ **une étude de l'environnement informatique *Maple* (cf. chapitre D).**

PREMIER AXE DES ANALYSES

Le premier axe qui s'appuie essentiellement sur l'analyse des programmes et des manuels nous a apporté des éléments des réponses aux trois premières questions de recherches :

Q1. Quelle est l'organisation mathématique relative au calcul des *IM* dans les institutions d'enseignement supérieur brésiliennes et dans les classes prépas technologiques en France ?

Q2. Quel est le rapport institutionnel à l'instrument *Maple* dans ces institutions ? Quelles sont les pratiques qui émergent de ces institutions sur les *IM* en rapport avec *Maple* ?

Quelles contraintes ces institutions imposent-elles, quelles conditions offrent-elles à l'enseignement du calcul des *IM* avec *Maple* ?

- Q3. Comment les représentations analytiques et graphiques des solides sont-elles présentées dans l'organisation mathématique dégagée plus haut ? Comment interagissent les deux types de représentation dans les pratiques de calcul de volumes par des *IM* ?

Nous avons donc mené une analyse institutionnelle des *IM* dans une perspective écologique du cadre de la TAD, découpée en deux parties qui décrivent et analysent l'ensemble des contraintes et des conditions institutionnelles au tour des *IM* en utilisant ou non le logiciel *Maple*.

Première partie : L'analyse des programmes

L'objectif principal de la première partie, était de mettre en évidence le choix fait par les institutions lors de l'introduction de la notion des *IM* d'un côté en spécialités "*Bacharelado* et *Licenciatura*" dans l'institution UESC depuis 1999 (au Brésil) et d'autre côté en spécialités mathématique de CPGE-Tecnologique depuis 2004 (en France), afin de décrire et d'analyser le rapport institutionnel actuel aux *IM*. Le questionnement écologique qui a été développé ici nous a permis d'analyser les conditions d'introduction des *IM* en termes des niches dans les deux institutions (UESC et CPGE)⁹⁹. Autrement dit, il a permis d'analyser les diverses fonctions que les *IM* peuvent occuper dans l'ensemble de l'enseignement dans ces institutions. Nous avons obtenu les résultats suivants :

Les programmes de formation en Mathématiques dont font partie deux spécialités "*Bacharelado*" et "*Licenciatura*" de l'UESC crée depuis 1999 placent l'enseignement des *IM* dans le cours dénommé "*Cálculo IV*". Ce dernier vise à approfondir les notions de l'*Analyse* rencontrées par les étudiants dans la discipline dénommée "*Cálculo Diferencial e Integral – CDI*" ou simplement "*Cálculo*" découpée en quatre disciplines (Calcul-I,..., Calcul-IV) semestrielles. Le **CDI** est ainsi présent dans les trois premières années de la formation en Mathématiques dans les deux « spécialités » et constitue l'habitat des *IM*. L'enseignement des *IM* trouve donc une place toute naturelle dans l'enseignement de l'*Analyse*. Après l'étude des fonctions d'une variable, et les calculs différentiel et intégral, sont étudiées les fonctions de plusieurs variables avec le calcul différentiel et bien sûr le calcul intégral. Ceci nous a permis ainsi de dégager une première niche des *IM*, que nous avons nommée **niche structurelle de l'Analyse**, dans le sens où celles-ci viennent compléter un programme d'étude dont elles renforcent la cohérence, selon un schéma en deux parties (fonctions d'une, puis de plusieurs variables réelles) et trois temps (définition, calcul différentiel, calcul intégral). Par ailleurs, on a pu constater que les *IM* servent à calculer des aires des surfaces et des volumes des solides, dans ce contexte, elles s'outillent, via les graphiques, des modes de représentation et de raisonnement géométriques pour occuper une **niche géométrique**. Enfin, les *IM* servent à calculer des moments d'inertie, des masses et plusieurs éléments issus de la physique. Ce contexte d'application des *IM* révèle ce que nous avons appelé **niche physique**.

Comme nous l'avons dit, les contenus des programmes des *IM* sont étroitement liés à l'étude

⁹⁹ Rappelons qu'il ne s'agissait pas d'une étude comparative (cf. introduction, chapitre A).

des fonctions de plusieurs variables réelles (Cálculo III) qui est un habitat pour les représentations graphiques dans l'espace. Cependant, la place occupée par les fonctions de plusieurs variables dans l'enseignement des *IM* (Cálculo IV), révèle des fonctionnalités distinctes par rapport à la représentation graphique dans l'espace dans l'enseignement précédent (Cálculo III), où les fonctions de plusieurs variables sont étudiées d'une façon isolée en examinant une seule fonction dans chaque tâche. Alors que dans la plupart des situations de résolution de problèmes et d'exercices d'application des *IM*, une fonction interagit avec d'autres fonctions pour former un solide¹⁰⁰. De fait, la représentation graphique dans l'espace prend un autre statut dans l'étude des *IM* par rapport à l'enseignement précédent.

L'enseignement de l'*Analyse* mathématique est aussi présent dans les programmes officiels mis en place, pour l'enseignement de Mathématiques dans l'institution des classes préparatoires (CPGE) et constitue l'habitat des *IM*. Ces programmes comportent deux objectifs majeurs proches des programmes pour l'enseignement (des *IM*) similaire dans les universités étrangères, particulièrement dans les brésiliennes (cf. Chapitre B). Par ailleurs, la vie des *IM* est renforcée par la présence de la section sur l'*Analyse* vectorielle résumée par les notions de Gradient et de potentiel scalaire. On a vu également que l'interprétation géométrique et les représentations graphiques des fonctions des plusieurs variables, occupent une place importante dans les programmes. Ainsi comme au Brésil, les *IM* occupent trois niches : **structurelle de l'Analyse**, **géométrique** et **physique**. Il apparaît que dans les programmes la **niche géométrique** est très présente. D'une façon générale, dans les programmes de mathématiques des CPGE, une place importante est accordée à la résolution de problèmes et d'exercices d'application. Les programmes montrent aussi un intérêt particulier de l'institution pour l'usage des outils informatiques, le logiciel *Maple* plus particulièrement. En conséquence, l'enseignement des *IM* et le logiciel *Maple* ont des conditions de se rencontrer dans cette institution. Toutefois, rien dans ce qui est décrit (dans le programme d'informatique du tronc commun au CPGE) ne permet de savoir, de façon précise, ce qui peut être travaillé dans les cours d'informatique en rapport avec les *IM*. Mais, on a pu remarquer qu'il y a une ouverture permettant de travailler de façon plus outillée les aspects liés aux **niches géométrique** et **physique** qu'occupent les *IM* dans les programmes de mathématiques. Toutefois, on a rien trouvé sur la représentation des solides, qui aurait pu être un outil pour les calculs de volumes par les *IM*. Le programme d'informatique fait cependant allusion à la représentation des courbes et des surfaces.

Deuxième partie : De l'analyse des programmes à l'analyse des manuels

Nous avons analysé deux manuels universitaires d'*Analyse mathématique*, SWO et SPIE, dont le premier est l'ouvrage de référence dans les institutions brésiliennes que nous avons observées. Pour mener cette analyse, nous avons choisi de développer une étude détaillée, section après section, de la partie cours, et paquet après paquet, de la partie exercices, mettant en évidence les types de tâches propres aux *IM* proposés dans ces manuels, les organisations mathématiques et didactiques dans lesquelles ce type de tâche entre en jeu, identifier les

¹⁰⁰ Ceci deviendra, selon nous, un type de tâches emblématique (cf. la deuxième partie de l'analyse institutionnelle qui suit).

praxéologies sur le calcul de volumes par des *IM*, les techniques disponibles pour les résoudre et leurs justifications technologico-théoriques. Nous avons obtenu les résultats suivants :

Dans les deux manuels, les trois niches possibles pour les *IM* (**structurelle de l'Analyse**, **géométrique** et **physique**) telles que nous les avons définies dans notre analyse des programmes apparaissent. Néanmoins, la niche **structurelle de l'Analyse** ne peut pas vraiment vivre dans les deux manuels, car le prolongement du calcul d'intégrale dans ce cas n'est pas mis en question en raison de l'absence de démonstrations des théorèmes, des intégrales généralisées et des techniques de convergence. Elle "vit" cependant dans l'organisation du cours, qui s'appuie sur une analogie avec les intégrales simples. Toutefois, le fait que les théorèmes ne sont jamais démontrés montre que cette niche reste au niveau de l'évocation. Globalement, les niches **géométrique** et **physique** sont plus investies dans SWO. Dans les deux manuels, c'est bien la **niche géométrique** qui est la plus investie, notamment à travers de nombreux exercices et exemples illustrant des calculs *d'aires* et de *volumes*.

Par ailleurs, les organisations tant mathématiques que didactiques des deux manuels sont très semblables. Dans l'un comme dans l'autre, l'enseignement des *IM* s'appuie sur une analogie avec les intégrales simples, commence par l'étude des *intégrales doubles*, puis se généralise aux calculs des *intégrales triples*. Les théorèmes les plus difficiles sont admis, mais dans SWO, il y a une volonté nette de donner un maximum d'interprétations intuitives de ces résultats. Le texte du cours dans SPIE est réduit au minimum.

Concernant plus précisément, les calculs *d'aires* et de *volumes*, dans les deux manuels, de nombreux problèmes résolus donnent d'emblée en début de solution une représentation graphique des solides ou des surfaces en jeu. Ces derniers sont produits par ordinateur, sans que soit explicitée la façon dont ils ont été réalisés. Dans la mise en place de l'intégrale multiple, l'appui sur ces représentations graphiques est important. Donc, il y a une articulation entre la représentation graphique (donnée comme allant de soi) et la représentation analytique (implicite) qui conduit à la mise en place de l'intégrale. En effet, en particulier dans le cas d'un calcul de *volume*, la mise en place de l'intégrale permettant ce calcul consiste (au moins implicitement) à donner une description du solide, sous la forme : soit d'un solide sous une surface, par la donnée d'une région *R* dans un plan de repérage et d'une fonction définie sur cette région pour ensuite utiliser une intégrale double ; soit d'une représentation analytique permettant le calcul du volume par une intégrale triple. On a bien remarqué que, le type de tâches *calculer le volume d'un solide* est très présent dans ces manuels, il alimente la **niche géométrique** qui est la plus investie.

Or, ce type de tâche ne s'insère que dans une praxéologie mathématique tronquée, dans la mesure où seul le calcul de l'intégrale qui permet d'obtenir le volume est en jeu de savoir dans ces manuels. La mise en place de l'intégrale qui constitue en quelque sorte une phase de modélisation du problème reste transparente. En effet, il semble que l'on attende de l'étudiant qu'il **lise** (voire **reproduise**) les dessins présents dans le cours, alors que dans les tâches qui lui sont proposées, il doit **produire** lui-même ce type de dessins et s'y appuyer pour mettre en place l'écriture de l'intégrale dont le calcul lui permettra d'aboutir. Toutefois, il y a une grande différence entre la **lecture** (ou même la **reproduction** des graphiques déjà produits par ordinateur) et la **production** de graphiques à partir des équations données, pour finalement dégager et représenter graphiquement le solide « **isolé** ». Nous avons montré que

dans le type de tâches sur le calcul du volume, un sous type apparaît en grand nombre d'exemplaires et représente ainsi une tâche emblématique : **calcul du volume d'un solide délimité par des surfaces données par des équations**.

Nous avons également souligné que *l'articulation* entre la représentation graphique et la représentation analytique (dans ce type de tâches) joue un rôle important, notamment dans la mise en place de l'intégrale. Cependant, la **production** des graphiques dans ces manuels reste du domaine du *topos* de l'enseignant. Elle est cachée à l'étudiant. Elle n'est pas transformée en tâche explicite avec la praxéologie associée. Il n'y a pas de techniques, dans l'organisation mathématique qui seraient des moyens permettant la réalisation des sous-tâches de **productions** des graphiques en 3D avec plusieurs surfaces.

Ceci nous a conduit à formuler une première hypothèse du travail :

Pour résoudre la tâche emblématique « calcul du volume d'un solide délimité par des surfaces données par des équations », l'étudiant doit produire une représentation graphique de ce solide « isolé ». Cette première étape ne fait pas l'objet d'un enseignement explicite et reste problématique. Or, elle peut s'avérer essentielle dans la mise en place de l'intégrale conduisant au volume cherché.

Notre analyse des manuels montre aussi que dans la réalisation de la tâche emblématique, le niveau de difficulté n'est pas seulement lié à la complexité des surfaces en jeu, ni à leur nombre. Même avec peu de surfaces toutes élémentaires, on peut avoir une tâche complexe (c'est d'ailleurs le cas, par exemple, du problème de l'intersection des deux cylindres). Donc il est difficile d'évaluer le niveau de difficulté d'une tâche à partir des équations de l'énoncé. Par ailleurs, nous avons vu que des considérations de symétrie peuvent permettre de simplifier (parfois énormément) la tâche en se ramenant à la moitié, voir le quart ou même le huitième ou le seizième, du solide de départ.

Dans notre travail, nous avons donc voulu nous intéresser plus précisément aux capacités et aux difficultés des étudiants dans ce type de tâches. Nous avons cherché à savoir si les étudiants font spontanément des représentations graphiques, mais aussi l'usage qu'ils en font. Savoir dans quelle mesure leur représentation graphique leur sert d'appui à la résolution analytique (recherche des bornes d'intégration)? Quelles sont les difficultés qu'ils rencontrent, tant dans la **production** de la représentation graphique, que lors de la mise en œuvre effective de l'écriture algébrique de l'intégrale double ou triple conduisant au calcul de volume et dans l'articulation entre les deux ?

Pour répondre à ces questions et nous permettre de vérifier nos hypothèses, nous avons fait passé un test comportant quatre exercices qui consistaient à **calculer le volume d'un solide délimité par des surfaces données par des équations**, repérés dans les manuels, auprès des étudiants brésiliens (qui utilisaient d'ailleurs le manuel SWO). Dans cette partie de notre travail, nous nous sommes limités à un environnement *papier/crayon*. Les analyses (a priori et a posteriori) de ce test font l'objet de notre pré-expérimentation, découpé en deux parties, dont les résultats obtenus sont les suivants :

Première partie : l'analyse a priori

Pour mener à bien notre analyse, nous avons dégagé trois stratégies possibles communes à tous les exercices du test, mais aussi importantes pour un grand nombre de type de tâche des *Intégrales Multiples* :

S1 : Interprétation analytique du solide

Ici nous avons proposé une résolution du problème par une méthode purement analytique sans faire appel au dessin, pour déterminer une représentation analytique (le domaine d'intégration). Pour ce faire, il est nécessaire de remplacer les égalités des équations qui définissent les surfaces délimitant le solide par des inégalités. Cette technique est très intéressante. Toutefois, elle n'est pas explicitée comme un objet de l'enseignement dans l'organisation mathématique sur les *IM*. En effet, dans les manuels que nous avons étudiés, les représentations analytiques sont données directement à la suite de l'énoncé, sans indication sur les techniques employées, souvent en regard d'une représentation graphique du solide. Il semble que l'on considère que cette part du travail ait été assumée dans une partie antérieure du cours et fasse donc partie des pré-requis.

S2 : Interprétation géométrique du solide

Dans cette stratégie on s'appuie sur une interprétation géométrique (la visualisation : faculté de se représenter mentalement un objet par la pensée) sans tracer explicitement ou en tous cas de « façon précise » le dessin des objets en jeu pour situer le solide borné. Cette technique permet un contrôle de type géométrique sur la mise en place des sens des inégalités déterminant la représentation analytique. Pour s'appuyer sur cette stratégie, il faut d'abord comprendre comment interagissent les surfaces données par les équations concernées.

S3 : Représentation graphique du solide

Dans cette stratégie, on commence par exécuter une représentation graphique (en faisant explicitement les dessins des surfaces données par des équations concernées pour voir le solide). Dans ce cas la compréhension du problème peut être renforcée et la résolution simplifiée. En effet, voir le solide peut aider la gestion des données, par la coordination entre les représentations graphique et analytique.

D'après notre analyse écologique des manuels, l'appui sur la représentation graphique est mis en avant dans l'organisation mathématique des *IM*, sauf que la production des graphiques dans cette organisation reste problématique. En effet, les liens entre les représentations graphiques (produites par ordinateur) et les techniques d'intégration sont implicites, en l'absence d'explication (discours technologique sur) des techniques permettant les productions de ces graphiques. En effet, (sans perdre de vue de nos questionnements mis en évidence plus haut) il nous a paru intéressant de savoir quelles sont les tendances des pratiques des enseignants dans ce domaine, et de voir du côté des étudiants, si les représentations graphiques sont présentes. Nous avons obtenu les résultats suivants :

Deuxième partie : Analyse a posteriori

L'analyse des productions des étudiants nous a permis de constater certains besoins des étudiants quant à l'apprentissage des *IM*. Ces besoins correspondent bien aux différentes étapes des trois stratégies possibles communes à tous les exercices du test (cf. analyse a priori). Cette analyse révèle que les étudiants, souvent commencent le traitement des exercices par les tracés des dessins à main levée en perspective cavalière, dans un repère orthonormé. C'est donc « S3 » qui prédomine dans leurs pratiques. Mais, dans la plupart des cas, la représentation graphique par des techniques *papier/crayon* est difficile. En effet, les dessins qu'ils font ne sont pas vraiment sollicités pour permettre la visualisation du domaine d'intégration. Cela montre le manque d'un travail d'interaction entre la représentation graphique et la représentation analytique. La production d'un dessin semble ainsi n'être qu'une réponse à l'injonction du contrat didactique : quand on résout un problème de calcul d'intégrale, on doit faire un dessin. Cependant, cette règle n'est pas suivie d'une pratique explicite d'enseignement pour montrer comment on doit s'appuyer sur le dessin pour résoudre les exercices. Ce travail possible semble être laissé à la charge de l'étudiant.

Par ailleurs, les enseignants que nous avons interrogés montrent des tendances qui correspondent aux stratégies « S2 » et « S3 » que nous avons dégagées dans notre analyse a priori. A la base de ces tendances, ils reconnaissent l'existence de certaines difficultés liées à l'enseignement des *IM*, particulièrement dans le traitement des exercices qu'ils jugent a priori difficiles. Nous avons plus précisément relevé les tendances suivantes :

« **IG** » recours à la visualisation graphique : Emploi fréquent de l'interprétation géométrique comme point de départ pour rentrer dans le problème.

« **RG** » recours à la représentation graphique : Recherche du comportement du graphe d'une fonction comme point d'appui pour rentrer dans le problème.

« **OI** » recours aux outils informatiques : Utilisation d'un logiciel comme outil devant permettre de relier les deux premiers critères « IG » et « RG » afin de mettre en place une représentation analytique.

Ces éléments d'analyse sont toutefois à pondérer par le choix que nous avons fait de nos exercices. Ceux-ci, pourtant issus des manuels analysés, se sont avérés trop complexes pour que les réponses des étudiants soient réellement exploitables. Nous avons sûrement été trop ambitieux dans nos attentes. Néanmoins, ce fait révèle que l'enseignement des *IM* peut déboucher rapidement sur des problèmes très complexes et qu'il faut être vigilant sur le choix des exemples, dont, comme nous l'avons souligné plus haut, la difficulté a priori est difficile à juger. En effet, même avec des solides apparemment simples, la tâche de calcul du volume peut s'avérer rapidement très complexe.

Ces tendances des enseignants, les besoins des étudiants et les résultats dégagés dans l'organisation mathématique des *IM*, ont motivé le travail suivant.

DEUXIEME AXE DES ANALYSES

Le deuxième axe qui s'appuie essentiellement sur l'analyse du logiciel *Maple*, l'analyse des manuels d'utilisation de cet environnement et nos expérimentations nous ont apporté, au fur et à mesure, des éléments des réponses aux trois dernières questions de recherche :

- Q4.** Quels sont les outils disponibles dans l'environnement informatique *Maple* concernant :
- (d) la géométrie analytique dans l'espace (GA)¹⁰¹ ?
 - (e) le calcul des intégrales multiples ?
 - (f) les interactions entre (a) et (b) ?
- Q5.** Comment l'utilisation de ces outils, modifie-t-elle les techniques de résolution de certaines tâches ?
- Q6.** Comment les étudiants s'approprient-ils ces outils dans une tâche de calcul de volume par des intégrales multiples ?

Nous avons donc mené une analyse du logiciel *Maple* dans une perspective ergonomique selon l'approche d'instrumentation en mettant l'accent sur les techniques d'utilisation de nouveaux outils. Comme le souligne Lagrange (cf. cadre théorique, p.28) « pour que les techniques [instrumentées] prennent du sens, il faudrait construire les praxéologies dans lesquelles ces techniques pourraient s'insérer et prendre une signification mathématique ». Dans notre analyse, nous avons essayé, au fur et à mesure, de confronter les différents points de vue qu'offrent les trois approches (instrumentation, la notion de registre de représentation sémiotique et anthropologique) sur les pratiques éducatifs. Cet axe d'analyse est découpé en

¹⁰¹ A la fois sur les représentations analytique et graphique – soit par des fonctions de deux variables, soit par des équations paramétriques.

trois parties :

Première partie : L'analyse du logiciel Maple

Il s'agissait d'identifier les potentialités, mais aussi les contraintes, de l'environnement *Maple* pour outiller les techniques de résolution des tâches sur les calculs d'aires et de volumes par des *IM*. En nous appuyant sur l'analyse institutionnelle (premier axe), nous avons examiné les outils disponibles et essentiels pour une utilisation de cet environnement dans l'enseignement et l'apprentissage des *IM*. Nous avons mis en évidence, via la technique **crible géométrique**, les liens possibles entre une représentation graphique d'un solide (domaine d'intégration) et la représentation analytique associée, indispensable dans le calcul d'une *IM*. Nous avons aussi mis en place un modèle que nous avons nommé MATIM, en mettant en valeur la multiplicité des sous-tâches essentielles dans l'interaction d'un utilisateur avec les différents types de tâches autour des *IM*. Les potentialités, mais aussi les contraintes, mises en évidence dans cette partie, jouent un rôle important dans une telle interaction. En effet, l'utilisation des outils du logiciel modifie les techniques de résolution de certaines tâches autour des *IM*, certains outils conduisent aussi à des « boîtes noires », qui ne permettent pas de savoir comment le logiciel effectue les calculs demandés.

Deuxième partie : L'analyse des manuels d'utilisation du logiciel Maple

Il n'existe pas beaucoup de manuels d'utilisation de l'environnement *Maple* abordant la question des *IM*. Ceux qui existent, se limitent surtout aux *intégrales simples*. C'est pourquoi, nous n'avons analysé que deux manuels (LION et LEVI). Le premier se limite aux *intégrales simples*. Le deuxième ne propose que deux exemples, l'un associé au thème des *intégrales doubles* et l'autre aux *intégrales triples*.

Troisième partie : Expérimentation avec et sans Maple

Notre expérimentation sans *Maple* (réalisée en France) montre que les étudiants ont les mêmes besoins que ceux révélés par des étudiants dans notre pré-expérimentation (réalisée au Brésil). C'est-à-dire que c'est surtout le choix selon le passage $[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM]$ du Modèle MATIM qui prédomine dans les pratiques des étudiants devant résoudre le type de tâches emblématique dans l'environnement *papier/crayon*. Cependant, en suivant ce passage (au détriment du passage $[SP] \Leftrightarrow [RAS] \Leftrightarrow [EIM]$ selon une résolution purement analytique), les étudiants rencontrent plusieurs difficultés pour **produire** une **RG** du solide « **isolé** » dont ils ont besoin dans l'interprétation, la compréhension et la réalisation du problème. Ceci valide notre hypothèse énoncée plus haut (cf. la partie d'analyse des manuels). Les pratiques des étudiants révèlent donc un rapport institutionnel aux **IM** dans lequel les graphiques sont centraux. Mais, nos résultats confirment que la sous-tâche de **RG** est non opérationnelle dans les productions des étudiants pour l'écriture de l'intégrale, tandis qu'elle devrait l'être.

La deuxième expérimentation intègre le logiciel *Maple*. La modélisation du problème proposé suivait le passage $[SP] \Leftrightarrow [RGS] \Leftrightarrow [EIM]$ du Modèle MATIM motivé par les résultats précédents et a introduit de nouvelles sous-tâches importantes dans le traitement de la tâche

emblématique. En effet, le traitement de ce type de problèmes dans *Maple* va modifier la praxéologie du type de tâches en question. Dans notre analyse a priori nous avons montré que, pour s'appuyer sur une **RG** du solide, pour contrôler la mise en place du calcul d'une intégrale, le logiciel *Maple* permet un travail spécifique où l'interaction entre l'utilisateur et la machine fait apparaître des éléments de l'articulation entre graphique et analytique. Par contre, dans un tel travail, il est nécessaire de passer par la notion de *paramétrage* de surfaces dont on donne les équations. Toutefois, on a bien vu que ce passage lui-même est problématique dans les pratiques effectives des étudiants. Ces derniers ne se rendent pas compte de ce passage, qui introduit une nouvelle tâche dans les pratiques des étudiants. En effet, dans l'organisation mathématique des *IM*, c'est plutôt la notion de *fonctions* de deux et trois variables qui est à la base de l'enseignement des *IM*, alors que dans *Maple*, la notion de *fonctions*, tant explicites qu'*implicites* ne permet pas d'accomplir toutes les tâches de ce type de problèmes (conséquence des contraintes **fonctionnelle** et **implicite**). Donc le passage de la notion de *paramétrage* à la notion de *fonction* et vice et versa, est un résultat important associé à l'analyse du logiciel et à notre expérimentation et suscite de nouveaux questionnements (voir dans la suite).

La mobilisation de la notion de *paramétrage* permet la description du **crible**, cette description passe par la manipulation des données (dans le registre analytique) qui sont ensuite introduites dans les syntaxes du logiciel, permettant la représentation du solide **criblé** (dans registre graphique). On a vu que la détermination de ces données correspond, avec un certain contrôle, aux bornes d'intégration. Par ailleurs, les rétroactions relatives aux actions de l'utilisateur sont données, soit dans le registre graphique, soit dans l'analytique. Nous avons donc fait l'hypothèse que *Maple* va permettre à l'étudiant, à travers l'un des deux registres, l'appui sur ces rétroactions pour contrôler le domaine d'intégration (dans les registres analytique et graphique) et conduire à la mise en place du calcul de l'intégrale.

Cette hypothèse est au cœur des trois étapes (**E1**, **E2** et **E3**) et des quatre compétences (*type1*, ..., *type4*) mises en valeurs dans notre expérimentation selon le passage [SP]↔[RGS]↔[EIM] du Modèle MATIM, dans le mesure où dans tous les étapes de la modélisation du problème, on découvre des rétroactions relatives aux actions des étudiants liées aux quatre types de compétences.

Le fait que les étudiants ne se sont pas rendu compte que le travail préliminaire de la représentation graphique du solide **criblé** conduisait à l'explicitation des bornes d'intégration, est aussi un résultat très important de l'expérimentation qui révèle les difficultés des étudiants dans le traitement de ce type de tâches. Comme nous l'avons souligné plus haut, ceci fait réfléchir à ce que nous avons pu observer dans l'environnement *papier/crayon* où les étudiants ont l'habitude de **lire** et de **reproduire** les dessins, mais souvent ne s'appuient que peu sur ce travail pour organiser la suite. Alors que le travail préliminaire de la représentation graphique possible dans *Maple* ne donne pas uniquement le solide **criblé**, mais devrait produire pour les étudiants des connaissances sur la représentation analytique utiles pour la mise en place du calcul de l'intégrale. On remarquera également que la notion de *symétrie* joue un rôle capital dans cette production.

Un double travail d'investissement sur la mobilisation des connaissances mathématiques et des outils du logiciel *Maple* semble être nécessaire pour que ce dernier devienne un moyen

utilisable dans l'enseignement des *Intégrales Multiples*. Il y a donc des limites et des nouvelles questions générées par notre recherche que nous présentons dans la suite.

Limites de l'étude et nouvelles directions de recherche

Notre travail reste une première investigation dans un domaine encore vierge de recherches en didactique. Le niveau d'enseignement, mais aussi le contenu mathématique très spécifique et enfin l'utilisation du logiciel *Maple* sont autant de facteurs qui nous ont demandé de faire preuve d'innovation. De plus, notre questionnement parti de notre expérience d'enseignement au Brésil n'a pu trouver qu'un écho limité dans le cadre des études supérieures françaises. A ce niveau, le choix du manuel SWO reste sûrement très spécifique du contexte brésilien. Il aurait sûrement fallu faire une analyse plus poussée du point de vue épistémologique à l'appui de traités de référence plus proche du savoir savant.

Il n'en reste pas moins, malgré ces limites, que notre travail constitue une première ébauche qui peut servir surtout aux enseignants brésiliens, qui ont la charge des cours sur les intégrales multiples. Nous espérons avoir montré de façon argumentée et variée, le travail nécessaire dans le cadre des calculs de volumes, sur l'élaboration de techniques permettant une interaction riche entre représentations graphique et analytique. Notre expérimentation avec *Maple* montre les potentialités de ce logiciel pour outiller efficacement ces techniques. Il montre aussi qu'on ne peut pas seulement s'appuyer sur ce logiciel et que le processus d'instrumentation doit intégrer la problématique du calcul du volume de façon plus global en faisant appel de façon certainement plus explicite aux connaissances des étudiants de la géométrie dans l'espace. L'usage des symétries ou du paramétrage par exemple doit être travaillé de façon plus systématique comme un outil fondamental dans la mise en place du calcul.

Dans l'état actuel de l'enseignement, le temps imparti aux intégrales multiples reste faible et toutes les questions ne peuvent être abordées avec suffisamment de temps, surtout si on admet qu'un re-travail sur les connaissances de géométrie dans l'espace, en particulier sur le lien entre représentations graphique et analytique est nécessaire. De plus, la question générale d'une meilleure anticipation dans l'utilisation d'un outil puissant comme *Maple*, et pas seulement d'une progression par essais-erreurs, reste posée. Enfin, l'utilisation d'une représentation graphique pose la question de savoir comment l'étudiant peut acquérir les connaissances suffisantes pour déterminer ce dont il a besoin de représenter pour s'aider dans la mise en place de l'intégrale et ce qui sera superflu. On l'a vu en effet, la production d'une représentation graphique précise peut être extrêmement coûteuse, au regard de l'information nécessaire. L'expert sait lui économiser son énergie pour n'obtenir que ce qui lui sera utile. Comment transmettre un peu de ce savoir-faire aux étudiants ? Peut-on s'économiser un premier travail où les étudiants devront de toute façon obtenir des représentations graphiques complètes, avant de pouvoir avoir les clefs pour faire leur choix ? La question reste entière et appelle certainement d'autres travaux, que nous l'espérons, nos premiers résultats aideront à fonder.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE M. (1995), Un regard didactique sur l'utilisation d'outils de calcul formel dans l'enseignement des mathématiques, *Repères Irem*, n° 19, p. 77-108.

BALACHEF N. (1994a), Transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. In Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavnigot P. (eds) *Vingt ans des didactiques en France* (p. 364-370). La Pensée Sauvage. Grenoble.

BARTIN J. (1977), La graphique et le traitement graphique de l'information. *Paris Flammarion*.

BESSOT A., COMITI C. (1985), Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, V. 6, n° 2-3, p. 305-346.

BESSOT A. (2005), Etude didactique des relations entre l'enseignement de la notion de limite et la programmation d'algorithmes de calcul dans un environnement 'calculatrice'. *Séminaire franco-vietnamien de didactique des mathématiques*. UPHCM, p. 1-6.

BOSCH M, CHEVALLARD Y. (1999), Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, V. 19/1, p. 77-123.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, V. 19/2, p. 221-266.

CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, V. 12, n°1, p. 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation In G. Arsac et al. *La transposition didactique à l'épreuve* (p. 135-180). La Pensée Sauvage. Grenoble.

CNE/CES. (2001) Diretrizes curriculares nacionais para os cursos de matemática, Bacharelado e Licenciatura. *Diário oficial da união*, 05/12/2001, seção 1°, p. 13.

<http://portal.mec.gov.br/sesu/arquivos/pdf/130201mat.pdf>

COULANGE L. (1997-1998), Les problèmes "concrets" à "mettre en équations" dans l'enseignement. *Petit x*, n° 47, p. 33-58.

DUVAL R. (1988), Graphiques et équations : L'articulation de deux registres. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 1, p. 235-253.

DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994), Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, V. 14/1, p. 165-210.

LABORDE C., CAPPONI B. (1995), Modélisation à double sens. In Noïrfalise (ed) *VIII^e école et université de didactique des mathématiques* (p. 265-278). Clermont-Ferrand : IREM de Clermont-Ferrand.

LAGRANGE J.B. (2000), Approche didactique et cognitive d'un instrument technologique dans l'enseignement : le cas du calcul formel en lycée. *Document pour l'habilitation à diriger les recherches*. Université Paris VII.

GUIN D. & TROUCHE L. (Coord. par) (2000), Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La pensée sauvage éditions.

_____ LAGRANGE J.B. Etudier les mathématiques avec les calcul symboliques : quelle place pour les techniques. p. 151-185.

_____ TROUCHE L. Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans l'environnement calculatrice symbolique. p. 187-214.

_____ DRIJVERS P. L'algèbre sur l'écran, sur le papier et la pensée algébrique. p. 215-242.

MATHERON Y. (2000), Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. *Petit x*, n° 54, p. 51 à 78.

LDB (1996) Lei de diretrizes de base da educação nacional. Ministério da Educação – Brasil <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>

RABARDEL P. (1995), Les hommes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains, *Editions Armand Colin*.

VERILLON P. (1996), La problématique de l'enseignement : un cadre pour penser l'enseignement du graphisme, *Revue GRAF & TEC. V. 0 n° 0, Université Fédérale Santa Catarina, Brésil*.

TROUCHE L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, V. 25/1, p. 91-138.

Les livres de l'analyse mathématique

ARNAUDIES J.M., LELONG-FERRAND J. (1977), Equations différentielles, Intégrales multiples, Fonction Holomorphes, 2^e édition corrigée. Bordas, Paris.

FRANK A. Jr. (1993), Calcul différentiel et intégral - cours et problèmes. *Serie Schaum, 2^e ed. MacGraww-Hill, Paris*.

KRASNOV M., KISSELEV A., MAKARENKO G. CHIKINE E. (1993), *Mathématiques supérieures pour ingénieurs et polytechniciens*. Traduit du russe par EMBAREK D. Tome 2. De Boeck Université.

SPIEGEL M. R. (1973), *Théorie et applications de l'analyse*. Serie Schaum, MacGraww-Hill, Paris.

STEWART J. (2001), *Analyse concepts et contextes*. Traduction de la 1^{ère} édition par

Micheline Citta-Vantheimsche. De Boeck Université.

SWOKOWSKI, E. W. (1993), *Analyse*. Traduit de l'anglais par Michelim. Cita. 5^e ed. De Boeck Université.

SWOKOWSKI, E. W. (1994), *Cálculo com geometria analítica*. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2^a ed. Makron Books. São Paulo - Brasil.

Les manuels d'utilisation du logiciel Maple

FERRARD J.M. (2001), *Introduction à Maple*. www.mathprepa.com.

FERROL R. LEHNING H. LEROUX A. VIDIANI LG. (1999), *Travaux pratiques avec Maple*. Sciences & info Prépas. Editions Pole – Paris.

LEVINE A. (1995) *Exercices pour Maple*. Edition Marketing – Ellipses, Paris.

PORCHERON L. (2004), *Maple : cours et applications* – MPSI-PCSI-PTSI-MP-PSI-PC-PT, 2^e édition, Dunod, Paris.

Les programmes officiels de mathématiques pour l'UESC

Filière Licenciature et Bacharelado

Projeto pedagógico do curso de matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz, UESC, Bahia – Brasil. www.uesc.br

Les programmes officiels de mathématiques pour les CPGE

Filière Physique et Technologie (PT)

Programme de 2004. Le B.O. Hors-Série n° 3 du 29 Avril 2004 : Ce document est disponible sur le site internet : Associations des Professeurs des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles : <http://prepas.org/ProgrammesCPGE/MathematiquesPT.pdf>

ANNEXES

ANNEXE

II

ANALYSE DES MANUELS

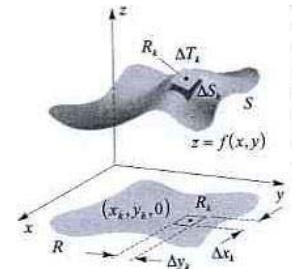


ANNEXE I : ANALYSE DE MANUELS

1. SECTIONS DE MANUEL SWO

Aire de surfaces (section 17.4)

La section 17.3 s'intitule *Aire de surfaces* et comporte 1 définition, 1 formule, 2 exemples et 16 exercices regroupés en 4 paquets. Elle commence par un rappel du travail mené dans section 6.5, relatif au calcul d'aire d'une surface de révolution. Le but ici est le calcul d'aire de surfaces plus générales. Pour cela, l'auteur part de l'idée du calcul d'aire d'une portion de la surface représentative d'une fonction f de deux variables, supposée positive, et qui admet de dérivées partielles continues. En s'appuyant sur la figure 17.33 l'auteur considère une telle portion de surface appelée S (et de l'aire A) dont la projection verticale sur le plan xOy est une région R . Pour simplifier, il suppose également qu'aucun vecteur normal à S n'est parallèle au plan xOy .



Ensuite, il considère un découpage $d = \{R_k\}$ intérieur de R où Δx_k et Δy_k désignent les dimensions d'un élément d'aire R_k . Pour chaque point $(x_k, y_k, 0)$ de R_x auquel correspond sur S le point $B_k(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$ il désigne par ΔS_k l'aire de la portion de S dont la projection est R_k et pour ΔT_k l'aire de la portion du plan tangent à S en B_k . Ainsi il montre que ΔT_k est une assez bonne approximation de ΔS_k et l'aire A de S est à peu près égale à $\sum_k \Delta T_k$ quand le pas $\|d\|$ du découpage est petit. Cette approximation s'améliore à mesure que $\|d\|$ s'approche de 0. La définition suivante est alors mise en place.

Définition (17.16)
$$A = \lim_{\|d\| \rightarrow 0} \sum_k \Delta T_k$$

Pour arriver à une expression de A sous forme d'intégrale, l'auteur fait référence au théorème (16.10) relatif aux pentes des droites tangentes à une surface en un point (ici, le point B_k). Ainsi il montre que $\Delta T_k = \|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}\| = \sqrt{[f'_x(x_k, y_k)]^2 + [f'_y(x_k, y_k)]^2 + 1} \Delta x_k \Delta y_k$ où $\Delta x_k \Delta y_k = \Delta A_k$, \mathbf{a} et \mathbf{b} sont les vecteurs issus de B_k , et tangents respectivement aux traces dans S des plans verticaux $y = y_k$ et $x = x_k$. Enfin, en prenant la limite des sommes des ΔT_k et en exploitant la définition de l'intégrale double il énonce la formule (17.17) comme suit.

Formule d'aire d'une surface (17.17)
$$A = \iint_R \sqrt{[f'_x(x, y)]^2 + [f'_y(x, y)]^2 + 1} dA$$

L'auteur précise tout de suite que cette formule reste valable quand $f(x, y) \leq 0$ sur R .

Deux exemples (01 et 02) suivent cette formule. Le premier s'intéresse au calcul de l'aire d'une surface (d'équation donnée) dont la projection sur le plan xOy est une région triangulaire dont les sommets sont donnés. Le deuxième calcule l'aire de la partie positive d'un parabolôïde centré et de sommet $(0, 0, 4)$. Notons que les deux exemples sont accompagnés d'une représentation graphique.

Avant de proposer les exercices, l'auteur souligne que la formule (17.17) se rapporte à une surface S projetée sur une région R du plan xOy , mais qu'il existe des formules analogues pour des surfaces qui ont des projections convenables sur les plans xOz ou yOz . Viennent ensuite les exercices (non résolus proposés aux étudiants). Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 16 regroupés en 4 paquets.

Le premier paquet $T_1=T[t_1, t_4]$ correspond à la tâche : établir l'intégrale itérée dont la valeur soit l'aire de la portion d'un graphique d'équation donnée qui se projette selon une région R du plan xOy décrite. Exploiter si possible les symétries. Ici les 4 tâches comportent des expressions de surfaces classiques (a priori bien connues des étudiants : surfaces sphériques, hyperboliques, elliptiques et paraboliques) et les régions de projections sont très simples (carrés ou triangles de sommets donnés ou cercle de centre et de rayon donnés) possédant des symétries simples. La tâche est essentiellement de dégager les bornes d'intégration et d'établir un ordre correct à l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale itérée. On ne demande pas forcément de tracer la surface ni de faire le calcul explicite de l'aire.

Le paquet $T_2=T[t_5, t_8]$ correspond à la tâche : *calculer l'aire de la portion d'un graphique d'équation donnée qui se projette selon une région R du plan xOy décrite*. Les quatre exercices de ce paquet sont en fait décomposables en deux sous-paquets $T_{2[a]}$ et $T_{2[b]}$. Le sous-paquet $T_{2[a]}=T[t_5, t_6]$ se ramène aux tâches de T_1 où les équations sont explicites (et simples) et les régions de projection sont des carrés ou des triangles de sommets donnés. La seule différence ici est que le calcul explicite est demandé. Dans le sous-paquet $T_{2[b]}=T[t_7, t_8]$ la description des surfaces est un peu plus complexe, ce sont en fait des intersections de deux surfaces (plans ou cylindres) d'équation données. De fait, la région de projection est à déterminer. $T_{2[b]}$ est donc plus complexe que $T_{2[a]}$ dans la mesure où on doit dégager la région R et sa représentation analytique, et puis mettre en place l'écriture algébrique du calcul d'intégrale et procéder aux calculs.

Le paquet $T_3=T[t_9, t_{14}]$ correspond à la tâche : *calculer l'aire de la surface S* . Ici aussi on trouve deux sous-paquets $T_{3[a]}$ et $T_{3[b]}$. Le sous-paquet $T_{3[a]}=T[t_9, t_{12}]$ comporte des tâches où sont données deux surfaces permettant la description de S . La technique consiste à dégager la frontière de S par intersection des deux surfaces concernées, puis d'appliquer la formule (17.17). $T_{3[a]}$ se ramène donc aux tâches de type $T_{2[b]}$. Le sous-paquet $T_{3[b]}=T[t_{13}, t_{14}]$ comporte deux problèmes de modélisation. Le premier consiste à calculer la surface d'un toit de tente à base circulaire, le second est un peu plus complexe. Néanmoins, dans les deux cas la part de la modélisation laissée à l'élève est assez mince et les applications liées aux *Intégrales Multiples* sont simples.

Le paquet $T_4=T[t_{15}, t_{16}]$ est le dernier de la section 17.4. Il se rapporte aux sous-tâches 51 et 52 de la section 17.1 et correspond à la tâche : *calculer une valeur approchée, à l'aide de la méthode des trapèzes avec $n=2$, de l'aire du graphique de f qui coiffe la région carrée R de sommets données*. C'est donc une tâche d'intégration numérique en mettant en évidence l'utilisation des outils informatiques. En effet le début de T_4 est symbolisé par \square .

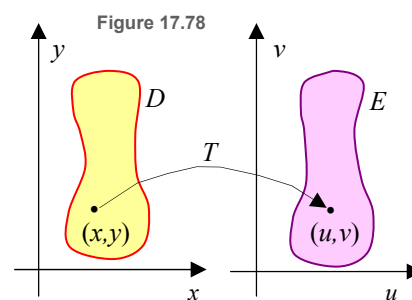
On peut ici remarquer qu'aucune tâche de cette section ne demande la représentation graphique. Alors que les exemples mis en place au niveau *logos* les outillent. Cela laisse supposer que c'est à l'étudiant à faire le lien avec son cours.

Changement de variables et Jacobiens (section 17.9 de SWO)

La section 17.9 s'intitule : *Changement de variables et Jacobiens*. Elle comporte 2 définitions, 2 théorèmes, 1 corollaire, 1 formule, 6 exemples et 38 exercices regroupés en 9 paquets.

Le *changement de variables et Jacobiens* sont ici introduits comme une généralisation des méthodes de changements de variables dans les *Intégrales Multiples*, étudiées dans les

sections précédentes (17.3, 17.7 et 17.8). L'auteur précise tout de suite que la théorie sous-jacente est celle de transformations de coordonnées. Pour cela, il considère d'abord une fonction (notée) T dont le domaine de définition est une région D du plan xOy et dont l'ensemble image (noté) E est une région du plan (quelconque) noté uOv . Ensuite, en s'appuyant sur la figure 17.78 (que nous reproduisons ci-contre), il explique qu'à chaque point (x,y) de D correspond exactement un point (u,v) de E tel que $T(x,y)=(u,v)$. La fonction T est ainsi appelée *transformation de coordonnées* du plan xOy en le plan uOv . Puisque chaque couple (u,v) est univoquement déterminé par (x,y) , u et v sont chacun fonction de x et y . L'auteur peut alors donner la formule de transformation suivante, où f et g sont des fonctions définies sur le même domaine D que T .



Formule de transformation de coordonnées (17.33) $u = f(x, y), v = g(x, y); (x, y)$ dans $D, (u, v)$ dans E .

Afin de construire un découpage curviligne de la région du plan xOy , l'auteur considère d'abord un découpage de la région du plan uOv par des droites verticales $u=c_j$ et des droites horizontales $v=d_k$, mises en évidence dans la figure 17.79(I). En utilisant la formule (17.33), il précise tout de suite qu'à ces constantes (c_j et d_k) pour u et v correspondent des courbes de niveau de f et g dans le plan xOy , d'équations :

$$u = f(x, y) = c_j \text{ et } v = g(x, y) = d_k$$

pour $j=1,2,\dots$ et $k=1,2,\dots$. L'ensemble des ces courbes constitue un découpage curviligne du plan xOy mis en évidence dans la figure 17.79(II). L'allure des courbes de niveaux dépend de la nature des fonctions f et g .

Suit un exemple (01) où l'auteur considère une transformation T , de coordonnées du plan xOy en coordonnées du plan uOv , déterminée par des équations et des constantes c_j et d_k données. Les courbes de niveaux des équations concernées dans le plan xOy sont des droites (illustrées graphiquement dans la figure 17.80). C'est donc un exemple simple qui permet de « valider » la formule de transformation des coordonnées. De plus, comme le souligne l'auteur : la transformation T de cet exemple est une transformation injective. C'est-à-dire que si $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ dans le plan xOy , alors $T(x_1, y_1) \neq T(x_2, y_2)$ dans le plan uOv . Cette implication permet la mise en place de la définition de la transformation inverse. Ainsi l'auteur explique : si T est une transformation injective, en renversant la correspondance, on obtient une transformation T^{-1} du plan uOv décrit par des équations $x=F(u, v), y=G(u, v)$ pour certaines fonctions F et G . Cette transformation est illustrée graphiquement dans la figure 17.81 (similaire à la figure 17.78 ci-dessus, avec la flèche de T renversée).

Suivent deux exemples (02 et 03). L'exemple 02 est une reprise de l'exemple 01. Il s'intéresse à la transformation inverse et à une courbe du plan uOv à laquelle cette transformation, fait correspondre une ellipse d'équation donnée. L'exemple (03) consiste à tracer, dans le plan $rO\theta$ des coordonnées polaires, les graphiques déterminées par les équations d'une transformation T (donnée) du plan xOy en plan $rO\theta$. Il s'intéresse aussi aux tracés des courbes du plan xOy qui correspondent à certaines valeurs de r et de θ données. C'est donc deux exemples importants qui permettent d'illustrer les résultats théoriques du cours.

Ensuite l'auteur s'attache à l'étude des méthodes de changement de variables dans une intégrale double. Pour cela, il rappelle d'abord la méthode de substitution ou changement de

variable, étudiée dans la section 5.6 (pour le cas des intégrales simples). Puis, partant de l'écriture emblématique $\iint_R F(x, y)dA$, où R est une région du plan xOy , il considère la substitution $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, où f et g sont des fonctions qui ont des dérivées secondes partielles continues. Ainsi il souligne que ces équations définissent une *transformation de coordonnées* W du plan uOv en coordonnées du plan xOy . Quand x et y sont remplacés par leur expression en u et v dans la fonction à intégrer, celle-ci dévient une fonction de u et v .

Il est important de souligner que jusqu'ici l'introduction de tous les cours (au moins dans ce chapitre) est toujours accompagnée d'une représentation graphique, soit dans le plan, soit dans l'espace 3D (selon le cas), de même, pour tous les exemples mis en place (qui permettent de valider les résultats théoriques des cours).

Ensuite, en utilisant la figure 17.84 (que nous reproduisons ci-contre) l'auteur se pose la question de trouver une région S du plan uOv que W transforme en R telle que :

$$\iint_R F(x, y)dA = \iint_S F(f(x, y), g(x, y))dA$$

Les conditions suivantes sont ainsi prises en compte :

Pour qu'une telle région S existe, il est nécessaire d'imposer quelque restrictions à la région R et à la fonction à intégrer $F(x, y)$. Supposons que R est délimitée par une courbe simple fermée et lisse par morceaux C (les points de C peuvent appartenir à R) et que F possède des dérivées partielles premières continues sur une région ouverte qui contient R . Le **sens positif** de C est celui que parcourt un point P quand la région R est continuellement à sa gauche. Le **sens négatif**, quand la région R est continuellement à droite. Nous allons encore faire l'hypothèse que la transformation W de S du plan uOv en R est injective et que S est bornée par une courbe simple fermée et lisse par morceaux K que W transforme en C . Enfin, notre dernière exigence est que lorsque (u, v) parcourt K une fois dans le sens positif, le point correspondant (x, y) parcourt C une fois, soit dans le sens positif, soit dans le sens négatif. (SWOF, p. 952), (SWOP, p. 546)

L'auteur peut alors donner formellement la définition suivante, où la fonction de u et v intervient dans les changements de variables, en précisant que le nom de cette définition provient du mathématicien allemand C.G. Jacobi (1804-1851).

Définition
(17.34)

Si $x=f(u, v)$ et $y=g(u, v)$, le **jacobien** de x et y par rapport à u et v , noté $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, est :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}$$

Dans tous les énoncés qui suivent, tous les symboles ont la même signification que précédemment, les régions et les fonctions sont supposées satisfaire les conditions énoncées ci-dessus. De plus, les notations $dx dy$ et $du dv$ remplacent la notation dA , pour éviter toute confusion à propos de la région d'intégration.

Suit le théorème suivant :

Théorème (17.35)

Si $x = f(u, v)$ et $y = g(u, v)$ est une transformation de coordonnées, alors

$$\iint_R F(x, y) dx dy = \pm \iint_S F(f(u, v), g(u, v)) \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv$$

Quand (u, v) fait une fois le tour de K dans le sens positif, le point correspondant (x, y) fait une fois le tour de C , frontière de R , soit dans le sens positif, auquel cas, c'est le signe plus qui est à retenir, soit dans le sens négatif et c'est le signe moins qui est à choisir.

Ce théorème n'est pas démontré ici. Toutefois, l'auteur donne en annexe une démonstration (de 17.35) basée sur le théorème de Green. Ce dernier est un objet d'étude pour le chapitre 18, notamment dans la section 18.4 de ce manuel. Ensuite, il est souligné que dans le cas particulier où $F(x,y)=1 \forall (x,y) \in R$, l'intégrale du membre de gauche de (17.35) est égale à l'aire A de R et (17.35) et devient

$$A = \pm \iint_S \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$$

De plus, si $\partial(x,y)/\partial(u,v) > 0$ sur S , l'intégrale double du membre de droite de cette équation est positive et c'est donc le signe positif qui doit être choisi. Ceci montre que, quand le **Jacobien** est toujours strictement positif (négatif), à un parcours unique du point (u,v) sur K dans le sens positif correspond un parcours unique de (x,y) sur C dans le sens positif (négatif). C'est ce qu'exprime le corollaire suivant :

Corollaire (17.36) Si $x = f(u, v)$ et $y = g(u, v)$ est une transformation de coordonnées et si le **Jacobien** $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ ne change pas de signe sur S , alors

$$\iint_R F(x,y) dx dy = \iint_S F(f(u,v), g(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$

Suivent deux exemples (04 et 05). L'exemple (04) consiste à calculer l'intégrale double de la fonction $F(x,y)=e^{(y-x)/(y+x)}$ sur une région en forme trapézoïdale du plan xOy de sommets donnés. C'est un exemple simple d'application du théorème (17.35) où les facteurs $y-x$ et $y+x$ en puissance de e suggèrent la transformation $T : u=y-x$ et $v=y+x$ du plan xOy en le plan uOv , qui est injective. L'exemple (05) s'intéresse au calcul de l'intégrale double de $F(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ sur une région R en forme d'un quart d'anneau donné graphiquement. C'est une tâche qui pourrait être résolue comme dans la section 17.3 par passage aux coordonnées polaires. Toutefois, l'auteur précise que l'intérêt ici est d'appliquer le théorème 17.35. Cependant, la substitution polaire ($x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$) joue un rôle important dans cet exemple, dans la mesure où elle détermine une *transformation de coordonnées* du plan $rO\theta$ et le plan xOy dont le Jacobien est r . A noter que la transformation de cet exemple transforme l'anneau du plan xOy en un rectangle du plan $rO\theta$. Tandis que la transformation de l'exemple (04) conserve la forme de la figure, en changeant toutefois son positionnement dans le plan uOv par rapport au dessin de départ. Les deux exemples sont accompagnés des dessins illustrant graphiquement les transformations mises en jeux.

Par la suite l'auteur s'attache à la généralisation de la définition (17.34) aux fonctions de trois variables, il donne ainsi la définition suivante.

Définition (17.37) Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$ et $z = h(u, v, w)$, le **Jacobien** de x, y et z par rapport à u, v et w , noté $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$, est :

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Suit un théorème (17.38) qui correspond au corollaire (17.36) en trois dimensions.

Théorème (17.38) Si $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ est une transformation de coordonnées d'une région S d'un système des coordonnées uvw en une région R d'un système des coordonnées xyz et si le **Jacobien** $\partial(x,y,z)/\partial(u,v,w)$ ne change pas de signe sur S , alors

$$\iint_R F(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_S G(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

où $G(u, v, w)$ est l'expression obtenue par substitution de x, y et z dans $F(x, y, z)$.

Pour illustrer la définition (17.37), l'auteur prend en compte les formules du Théorème (17.31)(1) et en faisant référence à t_{33} du paquet T_7 des exercices non résolus de cette section, il obtient à la base du théorème (17.38) un résultat qui correspond au théorème (17.32) obtenu de façon intuitive dans la section précédente (17.8).

Suit le dernier exemple (06) que l'auteur considère comme une application, nécessitant un changement de variables dans une intégrale double. En fait, cet exemple est un problème de calcul de volume et de la profondeur moyenne de l'eau d'un lac où le bord à la forme d'une ellipse. L'auteur précise d'abord que les sinusoides elliptiques sont de bonnes approximations de la forme de fonds des lacs. C'est donc une application difficile du cours qui s'outille notamment du théorème 17.36. Ainsi se termine la partie cours de cette section.

Viennent ensuite les exercices non résolus. Rappelons qu'ici ils sont au nombre de 38, regroupés en 9 paquets.

Le premier paquet $T_1 = T[t_1, t_8]$ correspond à la tâche : décrire les courbes correspondantes à un découpage au plan uOv par des parallèles aux axes à partir d'une transformation T du plan xOy donnée. Etablir les formules que définissent les transformations inverses T^{-1} . Les transformations comportent des expressions algébriques assez simples. La plupart sont des fonctions linéaires ou exponentielles. Ce sont donc des applications directes et simples du cours.

Le paquet $T_2 = T[t_9, t_{12}]$ correspond à la tâche : *soit T une transformation de coordonnées donnée. Déterminer la courbe du plan uOv qui correspond à une courbe du plan xOy donnée.* Ici sont données les transformations T du plan xOy en le plan uOv qui sont les mêmes que celles des quatre premières tâches de T_1 respectivement. On donne également les sommets ou les équations des courbes du plan xOy . C'est une tâche similaire à l'exemple (02) étudié au niveau du cours. Au niveau des techniques, il est nécessaire de dégager la transformation inverse T^{-1} ensuite remplacer les expressions ainsi trouvées dans l'équation de la courbe du plan xOy donnée. A noter qu'ici on ne demande pas de faire le dessin. C'est une application du cours, qui n'est pas tout à fait simple.

Le paquet $T_3 = T[t_{13}, t_{16}]$ correspond à la tâche : *calculer le Jacobien $\partial(x, y) / \partial(u, v)$.* Ici sont données les transformations inverses T^{-1} du plan uOv en plan xOy . La technique consiste donc à l'application directe de la définition (17.34).

Le paquet $T_4 = T[t_{17}, t_{18}]$ correspond à la tâche : *calculer le jacobien $\partial(x, y, z) / \partial(u, v, w)$.* C'est une tâche similaire à la tâche précédente (T_3) dans le cas de fonctions de trois variables. C'est donc une tâche d'application directe de la définition (17.37) où sont également données les transformations de coordonnées d'une région S d'un système des coordonnées uvw en une région R d'un système des coordonnées xyz .

Le paquet $T_5 = T[t_{19}, t_{22}]$ correspond à la tâche : *pour une intégrale donnée, quelle est l'intégrale itérée sur une région S du plan uOv à laquelle conduit le changement de variables indiqué ? La frontière R (région) du plan xOy est décrite par des équations relativement*

simples et les changements de variables à prendre en compte sont également données. De tels changements sont des transformations des coordonnées du plan uOv en plan xOy . En somme, c'est une tâche d'application directe du théorème (17.35). Or, les transformations sont déjà données d'avance comme technique nécessaire pour accomplir T_5 , l'étudiant n'a donc pas l'initiative d'en dégager lui-même. A souligner que l'étudiant n'a pas à procéder au calcul de l'intégrale.

Le paquet $T_6=T[t_{23}, t_{28}]$ correspond à la tâche : *calculer l'intégrale par le changement de variable indiqué*. Cette tâche est similaire à T_5 , à l'exception qu'ici, on demande en plus à l'étudiant de procéder au calcul, afin d'obtenir la valeur effective de l'intégrale itérée. Le traçage des dessins n'est pas exigé, mais, comme pour le cas de calcul de volume, cela pourra apparaître, notamment par effet de contrat.

Le paquet $T_7=T[t_{29}, t_{32}]$ correspond à des exercices qui proposent une modélisation de situations "réelles". Le premier s'intéresse au calcul de volume de la terre dont la surface est approximativement de forme ellipsoïdale d'équation donnée. Il devient simple, car il est suggéré une transformation des coordonnées comme technique permettant d'accomplir la tâche. Les trois dernières sont un peu plus complexes, mais sont très téléguidés. Une d'elles (t_{30}) s'intéresse à la loi de gaz et au calcul du travail (W) effectué par le gaz d'équation donnée par une intégrale triple. Les tâches t_{31} et t_{32} font référence à la tâche t_{41} de la section 17.8 et mettent en évidence les difficultés possibles de prévoir la position finale de la main d'un bras articulé d'un robot composé de cinq ou six articulations. Elles utilisent les angles d'Euler de rotations des axes des coordonnées, pour simplifier le problème. Elles s'intéressent également au calcul du Jacobien. A noter que, les calculs nécessaires ici sont aussi laborieux et une machine peut être une aide (ce qui n'est pas indiqué dans l'énoncé, absence du symbole \square).

Le paquet $T_8=T[t_{33}, t_{36}]$ correspond à des exercices qui proposent une démonstration ou une vérification des relations ou équations qui intègrent les Jacobiens. Ces sont donc des tâches simples d'application du cours.

Le dernier paquet $T_9=T[t_{37}, t_{38}]$ de cette section correspond à la tâche : soit T la transformation indiquée du plan uOv en plan xOy . Marquer les points (u,v) qui annulent $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ dans l'intervalle prévu de u . Ici sont données les transformations de coordonnées et les intervalles de la variable u par chaque tâche. La technique permettant d'accomplir la tâche est relative à l'application directe de la définition 17.34 et de la continuité. En effet, l'auteur signale ici que dans les points (x,y) où l'expression $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ est discontinue, la transformation T n'est pas injective. Ainsi se termine la section 17.9.

2. ANALYSE DES MANUELS SPIE

Organisation mathématique et didactique du chapitre 9 du manuel SPIE

Ce Manuel est plus ancien que le précédent que nous ayons étudié, il comporte 17 chapitres. C'est le chapitre 9 qui nous intéresse. Il est consacré aux études des *Intégrales Multiples*. Il est organisé de la façon suivante :

Section	Sous-titre	Déf	Théo	Cor	For	Exp	Exos	Pq	P
xxx	Intégrales doubles	01	-	-	-	02	-	-	0.5
xxx	Méthode d'intégration	-	-	-	02	-	-	-	0.5
xxx	Intégrales triples	01	-	-	01	01	-	-	0.5
xxx	Changement des variables dans les IM	-	-	-	04	-	-	-	0.5
Total		02	-	-	07	03	-	-	02
xxx	Problèmes résolus (Pr)				Pr				P
xxx	Intégrales doubles				03				02
xxx	Transformations des intégrales doubles				05				02
xxx	Intégrales triples				02				03
xxx	Transformations des intégrales triples				06				2.5
xxx	Problèmes divers				02				0.5
Total					18				10
xxx	Problèmes supplémentaires				35				03

Déf = Définition, Théo = Théorème, Cor = Corollaire, For = Formule, Exp = Expression, Exos = Exercices, Pq = Paquet, P=Page.

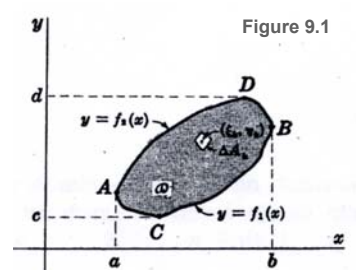
Tableau 19: Sous-sections découpant le chapitre 9 du manuel SPIE

Les *Intégrales Multiples* sont ici présentées dans un ensemble de 4 sous-titres, occupant au maximum une demi-page chacun (cf. tableau ci-dessus). Les définitions, les expressions et les formules mises en place sont numérotées en continu d'un sous-titre à un autre. La partie cours proprement dite ne présente aucun exemple, ceux-ci sont exposés dans la partie intitulée "*problèmes résolus*" comportant 18 exemples associés aux sous-titres précédents selon le tableau ci-dessus. On peut noter que l'accent est très nettement mis sur ce qui est appelées les transformations, c'est-à-dire aux changements de variables. A noter aussi que, contrairement au manuel SWO, ici les sections ne sont pas numérotées.

1. Intégrales doubles

Le premier sous-titre correspond à l'étude des *intégrales doubles*. Il comporte 1 définition et 2 expressions.

Pour introduire l'enseignement des *intégrales doubles*, l'auteur considère une fonction F de deux variables, définie sur un domaine \mathcal{D} du plan xOy (cf. figure 9.1). Celui-ci est ensuite découpé virtuellement¹⁰² en n sous-domaines $\Delta\mathcal{D}_k$ d'aire ΔA_k , $k=1, 2, \dots, n$ (comme dans SWO). En choisissant un point (ξ_k, η_k) quelconque de $\Delta\mathcal{D}_k$, l'auteur donne tout de suite l'expression (1) correspondant à la somme de Riemann¹⁰³ de la fonction F :



¹⁰² La division de \mathcal{D} en sous-domaine n'est pas montrée graphiquement dans la figure considérée.

¹⁰³ C'est nous qui soulignons, car cette somme n'est pas nommée dans ce manuel.

$$\sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k \quad (1)$$

Puis il considère l'expression (2) suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k) \Delta A_k \quad (2)$$

en précisant que la limite est prise sur un nombre n (tendant vers l'infini) des sous-domaines de $\Delta \mathcal{D}_k$, dont chaque diamètre tend vers zéro. La définition (3) suivante appelée *intégrale double* de $F(x, y)$ sur le domaine \mathcal{D} est ainsi mise en place,

$$\iint_{\mathcal{D}} F(x, y) dA \quad (3)$$

si une telle limite existe (mais aucune discussion n'apparaît sur les conditions d'une telle existence).

L'auteur explique ensuite que l'on peut démontrer que cette limite existe si $F(x, y)$ est continue (ou continue par morceaux). Toutefois, une telle démonstration n'est pas présentée dans ce manuel. Ce résultat est donc admis comme vrai. On peut noter que contrairement au manuel SWO, ici les *intégrales doubles* ne sont pas introduites comme prolongement des intégrales simples de Riemann. Néanmoins, l'auteur y fait appel dans la méthode d'intégration qu'il propose par la suite.

2. Méthode d'intégration

Le deuxième sous-titre correspond à l'étude des *méthodes d'intégration*. Il comporte 2 formules. Pour introduire cette étude l'auteur procède comme suit :

Si le domaine \mathcal{D} est tel que chaque droite parallèle à l'axe Oy rencontre sa frontière en deux points au plus (comme dans la figure 9.1, ci-dessus), alors on peut écrire les équations des deux courbes ACB et ADB bordant \mathcal{D} , respectivement $y=f_1(x,y)$ et $y=f_2(x,y)$, où f_1 et f_2 sont des fonctions réelles définies et continue sur $[a, b]$. Dans ce cas, on peut calculer l'intégrale double (3), en choisissant pour $\Delta \mathcal{D}_k$ des rectangles de côtés parallèles aux axes et d'aire ΔA_k . Alors (3) s'écrit comme ci-contre : (4) ☞

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} F(x, y) dA &= \int_{x=a}^b \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy dx \\ &= \int_{x=a}^b \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

Le résultat (4) montre qu'une intégrale double peut être calculée en l'exprimant sous la forme de deux *intégrales simples*, appelées *intégrales répétées*.

Si \mathcal{D} est tel que chaque droite parallèle à l'axe Ox rencontre sa frontière en deux points au plus (comme dans la figure 9.1), alors les équations des courbes CAD et CBD peuvent s'écrire respectivement $x=g_1(y)$ et $x=g_2(y)$ et nous trouvons le résultat : (5) ☞

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{D}} F(x, y) dA &= \int_{y=c}^d \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx dy \\ &= \int_{y=c}^d \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

Si l'intégrale double existe, (4) et (5) prennent la même valeur.

On remarque que les deux méthodes d'intégration qui résultent des formules (4) et (5), présentées sous la forme de deux intégrales simples appelées *intégrales répétées*, sont les mêmes *intégrales itérées* calculées sur des régions de type respectivement R_x et R_y prises en compte dans le manuel SWO étudié précédemment. Notons également que dans le cas particulier où les fonctions f_i et g_i , avec $i=1,2$, sont constantes « $f_1 \neq f_2$ et $g_1 \neq g_2$ » les formules (4) et (5) expriment exactement le *théorème de Fubini* à condition que la fonction F soit continue sur \mathcal{D} . Néanmoins, ce théorème n'est pas énoncé dans ce manuel. De plus, le cours est très

orienté vers l'idée de déboucher sur les méthodes qui vont guider les étudiants, notamment sur les tâches proposées dans le sous-titre qui correspond aux problèmes supplémentaires.

Vient ensuite l'étude des intégrales triples.

3. Intégrales triples

Le troisième sous-titre correspond à l'étude des *intégrales triples*. Il comporte 1 définition, 1 formule et 2 expressions.

Les *intégrales triples* des fonctions de trois variables x , y et z sont présentées dans ce manuel comme généralisation des résultats précédents correspondant à l'étude des intégrales doubles à des domaines fermés en dimension trois. Pour cela, l'auteur précise.

Considérons une fonction $F(x, y, z)$ définie sur un domaine fermé \mathcal{D} , en dimension trois. Partageons \mathcal{D} en n sous-domaines $\Delta\mathcal{D}$ de volume ΔV_k , $k=1, 2, \dots, n$. Soit (ξ_k, η_k, ζ_k) un point quelconque de $\Delta\mathcal{D}$. Considérons alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n F(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k \quad (6)$$

où le nombre n de sous-divisions tend vers l'infini de telle façon que le diamètre de chaque sous-domaine tende vers zéro. Si cette limite existe, elle est notée

$$\iiint_{\mathcal{D}} F(x, y, z) dV \quad (7)$$

et appelée *intégrale triple* de $F(x, y, z)$ sur \mathcal{D} . Cette limite existe si $F(x, y, z)$ est continue (ou continue par morceaux) dans \mathcal{D} . Si nous construisons une grille formée de plans parallèles aux plans xOy , yOz , et xOz , le domaine \mathcal{D} est alors recouvert par des parallélépipèdes rectangles. Dans ce cas, on peut exprimer l'intégrale triple sur \mathcal{D} donnée par (7), comme une intégrale de la forme :

$$\int_{x=a}^b \int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z) dz dy dx = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=g_1(x)}^{g_2(x)} \left\{ \int_{z=f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} F(x, y, z) dz \right\} dy \right] dx \quad (8)$$

où l'intégrale du milieu doit être calculée en premier ou la somme de telles intégrales. On peut intervertir l'ordre d'intégration sans changer le résultat.

De suite, il précise que ce résultat se généralise en dimension supérieure. Ainsi se termine le deuxième sous-titre.

Suit le changement de variables dans les *Intégrales Multiples*.

4. Changement de variables dans les Intégrales Multiples

Pour introduire les méthodes des changements de variables dans les *Intégrales Multiples*, l'auteur fait référence aux études développées dans un des chapitres précédents relatifs aux changements des coordonnées, en précisant que :

Pour calculer une intégrale multiple sur un domaine \mathcal{D} , il est souvent plus commode d'utiliser des coordonnées curvilignes (considérées aux chapitres 6 et 7) que des coordonnées cartésiennes.

Ainsi l'auteur désigne par le couple (u, v) les coordonnées curvilignes des points du plan. Ce couple est ensuite interprété comme les images des points (x, y) du plan xOy par la transformation des équations $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$. Dans ce cas, l'image du domaine \mathcal{D} du plan xOy est un domaine D' du plan uOv . Ensuite l'auteur donne la formule (9) ci-dessous.

$$\iint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(x,y) dx dy = \iint_{\mathcal{D}'} \mathbf{G}(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \quad (9)$$

où $\mathbf{G}(u,v) \equiv \mathbf{F} \{ \mathbf{f}(u,v), \mathbf{g}(u,v) \}$ et en se référant encore une fois au chapitre 6, il donne le Jacobien de x et y par rapport à u et v par la formule 10 ci-dessous.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (10)$$

Par la suite l'auteur s'attache à la généralisation des résultats ci-dessus aux fonctions de trois variables. Pour cela il souligne que, si (u,v,w) désignent les coordonnées curvilignes des points en dimension trois, et vérifient les équations $x = f(u,v,w)$, $y = g(u,v,w)$ et $z = h(u,v,w)$. Ensuite il donne tout de suite la formule (11) qui correspond à la formule (9) en trois dimensions.

$$\iiint_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\mathcal{D}'} \mathbf{G}(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du dv dw \quad (11)$$

Où $\mathbf{G}(u,v,w) \equiv \mathbf{F} \{ \mathbf{f}(u,v,w), \mathbf{g}(u,v,w), \mathbf{h}(u,v,w) \}$ et le Jacobien de x, y et z par rapport à u, v et w est donné par la formule 12 ci-dessous.

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (12)$$

L'auteur précise tout de suite que les résultats (9) et (11) correspondent à un changement des variables pour les intégrales triples et se généralisent aisément en dimension supérieure. Ainsi se termine le troisième sous-titre.

5. Problèmes Résolus

Viennent ensuite les **Problèmes Résolus**. Rappelons qu'ils sont au nombre de 18, et renvoient aux sous-titres précédents.

Les trois premiers **problèmes** sont associés au sous-titre : *intégrales doubles*.

La tâche centrale du premier problème consiste à calculer une intégrale double T_I , mais elle est découpée en trois sous-tâche première correspond à la tâche et consiste à :

- (a) tracer le domaine \mathcal{D} du plan xOy limité par les graphiques des courbes des équations données ;
- (b) donner une interprétation physique de $\iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2) dx dy$ (\mathcal{D} est celui dégagé en (a)) ;
- (c) calculer l'intégrale double donnée en (b).

L'auteur donne deux représentations graphiques en réponse à la sous-tâche (a). Mais rien n'est dit sur la façon dont elles ont été construites.

Ces deux graphiques sont identiques, sauf que, dans un cas, il fait apparaître la région comme une région de type R_x (selon la dénomination de SWO) et dans l'autre, comme une région de type R_y . Il y a donc ici une anticipation du calcul demandé dans la question (c), sans que ceci ait été demandé.

Dans la question (b) l'interprétation physique de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale donnée en correction est la suivante :

(b) comme x^2+y^2 est le carré de la distance du point (x, y) à $(0, 0)$, nous pouvons considérer que l'intégrale double représentant le moment d'inertie par rapport à l'origine du domaine \mathcal{D} supposé de densité unité. On peut aussi considérer que l'intégrale double représente la masse du domaine \mathcal{D} , en supposant que la densité varie comme x^2+y^2 .

Cette réponse est surprenante, dans la mesure où les notions de moment d'inertie ou de densité n'ont pas été abordées dans le cours. Il semble donc que l'auteur fasse vivre la niche « physique » en référence au cours de physique uniquement dans les exercices, alors que nous avons vu que de telles notions étaient abordées dans le cours de SWO.

Ensuite l'auteur s'outille des méthodes (4) et (5) (correspondantes respectivement aux régions de type R_x et R_y) pour procéder aux calculs de l'intégrale double itérée selon deux méthodes et en référence à la question (a). L'auteur met donc en œuvre les deux méthodes d'intégration proposées auparavant (au niveau *logos*) appelées *intégrales répétées*. C'est donc un type de tâche simple d'application directe du cours.

Le deuxième **problème** correspond à la tâche T_2 : *trouvez le volume du domaine commun aux deux cylindres d'équations données*. C'est une tâche a priori difficile, de l'application de la méthode (4) ou (5) où sont données les équations de deux surfaces cylindriques de rayon a centrées sur les axes Oy et Oz chacun. Cette tâche est similaire à l'exemple 04 (section 17.2 des manuels SWO) sauf que précédemment les cylindres avaient comme axes Ox et Oz chacun. Pour accomplir cette tâche l'auteur utilise de façon immédiate la méthode proposée (4). Celle-ci laisse supposer que T_2 est une tâche élémentaire. En s'appuyant sur la figure 9.4 (qui accompagne la résolution) il souligne :

Pour aider à comprendre cette intégrale, remarquons que $zdydx$ correspond au volume d'une colonne parallélépipédique intérieure à la figure.

Cette interprétation est ainsi prise comme moyen permettant d'organiser l'ordre d'intégration. On peut voir clairement dans le dessin mis en place, les équations des surfaces limitant le solide, que l'auteur rapporte ensuite convenablement dans l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale suivant la méthode (4). Ceci laisse supposer que l'auteur fait allusion aux liens possibles entre les registres graphique et analytique et l'écriture du calcul de l'intégrale. A noter aussi, que l'ordre mis en place (relatif à la projection du solide sur la région de type R_x du plan xOy lié à la méthode (4)) n'est pas la seule technique qui permet de réaliser la tâche T_2 . De même, le domaine commun aux deux cylindres (consigne de l'énoncé) n'est pas montré entièrement dans la figure 9.4 mise en place. Celle-ci présente un sous-solide « la huitième partie » du domaine en question. On ne trouve pas non plus, les techniques qui ont permis la représentation graphique d'un tel huitième du solide) envisagé. Cela reste donc implicite dans la résolution de l'auteur.

Le troisième **problème** correspond à la tâche T_3 : *trouvez le volume du domaine limité par les graphiques des équations données*. C'est une tâche similaire à T_2 sauf qu'ici toutes les surfaces concernées sont des plans, et sont au nombre de 5. Pour accomplir cette tâche, l'auteur fait également appel à la méthode (4) et donc au calcul de volume du solide reposant sur une région de type R_x du plan xOy . A noter qu'ici comme pour la tâche T_2 l'énoncé du problème ne demande pas de tracer le dessin. Toutefois, dans la résolution mise en place, l'auteur donne une représentation graphique (figure 9.5, p. 184). Cela laisse supposer que le tracé du dessin est une sous-tâche nécessaire dans la réalisation de ce type de tâches.

Les cinq **problèmes** suivants sont associés au sous-titre : **Transformations des intégrales doubles**.

Le quatrième **problème** correspond à la tâche T_4 : justifiez l'équation (9) (vu dans le cours) par changement de variables dans une intégrale double. Cette tâche consiste en fait en une démonstration de la formule (9) donnée au niveau cours (relative au calcul de l'intégrale double d'une fonction $F(x,y)$ sur un domaine \mathcal{D} noté $\iint_{\mathcal{D}} F(x,y) dx dy$) par changement de variables en utilisant les coordonnées curvilignes. C'est donc une tâche difficile qui intègre les fonctions transformations de coordonnées en 2D et le Jacobien dans l'analyse du problème. A noter que la solution proposée par l'auteur est accompagnée par une représentation graphique. L'auteur souligne aussi qu'une autre méthode pour justifier l'équation (9) utilise les intégrales curvilignes et la formule de Green dans le plan (objet d'étude du chapitre 10).

Le cinquième **problème** correspond à la tâche T_5 : trouvez le Jacobien $\partial(x,y)/\partial(u,v)$ en fonction de u et v , d'une transformation de coordonnées du plan xOy en plan uOv donnée. C'est une tâche pas tout à fait simple d'application de la formule 10. Les expressions des transformations données nécessitent une certaine connaissance sur l'identité et la similitude des expressions algébriques. Dans la résolution, l'auteur fait aussi référence à un problème étudié précédemment, le problème 45 du chapitre 6, dans lequel il utilise pour conclure le traitement de T_5 . Il suggère aussi une autre technique permettant réaliser T_5 .

Le sixième **problème** correspond à la tâche T_6 : trouvez le moment d'inertie par rapport à l'origine du domaine du plan xOy limité par des équations données en supposant que la densité est unitaire. Les expressions des équations données ici, dont les courbes délimitent le domaine en question, correspondent aux courbes de niveaux de la transformation données en T_5 . C'est une tâche qui consiste à trouver le moment d'inertie demandé par la transformation des coordonnées ; elle s'outille de T_5 . A priori, comme dans l'énoncé, on ne dit rien sur une telle transformation de coordonnées, alors T_6 peut être interprétée comme une tâche difficile. Cependant une fois une telle transformation dégagée, T_6 dévient une tâche élémentaire de calcul d'une intégrale double en coordonnées hyperboliques. Concernant ces dernières, l'auteur souligne :

Remarquons que les limites d'intégration pour le domaine \mathcal{D}' peuvent être trouvées directement à partir du domaine \mathcal{D} du plan xOy , sans construire le domaine \mathcal{D}' . Dans ce cas, nous utilisons une grille comme dans le problème 4. Les coordonnées (u, v) sont des curvilignes appelées dans ce cas coordonnées hyperboliques « SPIE, p. 185 ».

Le septième **problème** correspond à la tâche T_7 : calculez l'intégrale double donnée, où \mathcal{D} est un domaine du plan xOy limité par deux circonférences de mêmes centres et de rayons distincts, données par leurs équations. Cette tâche est similaire à l'exemple 05 (section 17.9 u manuel SWOF). Le domaine et la transformation suggérée pour simplifier la résolution sont les mêmes, alors que les fonctions à intégrer (données sous les signes d'intégration) sont distinctes. Comme pour SWOF, ici aussi la solution proposée est accompagnée d'une représentation graphique. Tous les problèmes résolus étudiés jusqu'ici sont accompagnés d'un dessin.

Le huitième **problème** correspond à la tâche T_8 : trouvez l'aire du domaine, du plan xOy , limité par un lemniscate d'équation donnée. Ici la courbe en question est donnée directement en coordonnées polaires (ρ, ϕ) . En donnant les valeurs à ϕ dans l'équation en question, l'auteur donne la représentation graphique du lemniscate (dans la figure 9.9). Il établit l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale double (en utilisant la symétrie du graphe) et procède aux calculs qui aboutissent au calcul d'aire souhaité. C'est donc une tâche simple d'application du cours.

Les deux **problèmes** suivants sont associés au sous-titre : **Intégrales triples.**

Le neuvième **problème** comme le premier se découpe en trois sous tâches :

- (a) dessiner le domaine \mathcal{D} à trois dimensions limité par les graphiques des équations données ;
- (b) donner une interprétation physique de $\iiint_{\mathcal{D}}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$ (\mathcal{D} est celui dégagé en (a)) ;
- (c) calculer l'intégrale triple de la question (b).

C'est donc une généralisation du premier problème pour des fonctions de trois variables. Ici aussi, l'auteur donne d'avance une représentation graphique (consigne de la tâche) sur laquelle il va s'appuyer par la suite. Ainsi il dit :

Le domaine \mathcal{D} est représenté par la figure 9.10.

Sans explication sur la façon dont un tel domaine a été construit. Puis il donne tout de suite l'interprétation physique de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale proposé en (b) :

Comme $x^2+y^2+z^2$ est le carré de la distance du point (x, y, z) à $(0, 0, 0)$, on peut considérer l'intégrale triple comme représentant le moment d'inertie du domaine \mathcal{D} par rapport à l'origine (en supposant une densité unité). On peut aussi considérer l'intégrale triple comme représentant la masse du domaine, si la densité varie comme $x^2+y^2+z^2$.

Ensuite l'auteur s'outille de la formule (8) vu dans le cours, pour établir l'écriture de calcul de l'intégrale selon la projection du solide (en question) sur une région de type R_x du plan xOy et ensuite procéder aux calculs. Puis, il donne tout de suite une interprétation des calculs réalisés en langage naturel, mettant en évidence les choix faits dans l'ordre d'intégration. C'est donc un type de tâche simple d'application directe du cours.

Le dixième **problème** correspond à la tâche T_{10} : chercher (a) le volume et (b) le centre d'inertie d'un domaine limité par un cylindre parabolique et des plans des équations données en supposant que la densité est constante est égale à σ . C'est une tâche simple de calcul d'une intégrale triple où l'auteur donne d'avance une représentation graphique en 3D du domaine en question, même si l'énoncé n'évoque pas d'une telle sous-tâche (tracé du dessin). Ensuite en utilisant la formule (8) de façon immédiate, il donne le volume cherché (a). Puis en tenant compte du résultat de la sous-tâche précédente, l'auteur exprime la masse totale comme le produit de ce volume par la densité (puisque σ est constante). Finalement, il donne le centre d'inertie noté $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ par la même définition que celle étudiée dans SWO

Les six **problèmes** suivants sont associés au sous-titre : **Transformations des intégrales triples.**

Le onzième **problème** correspond à la tâche T_{11} : justifiez l'équation (11) (vue dans le cours) par changement de variables dans une intégrale triple. C'est donc une tâche qui généralise T_4 pour des fonctions de trois variables. Comme pour T_4 , celle-ci consiste en une démonstration de la formule (11) donnée au niveau cours (relative au calcul de l'intégrale double d'une fonction $F(x,y,z)$ sur un domaine \mathcal{D} noté $\iint_{\mathcal{D}}F(x,y,z)dxdydz$) par changement de variables. C'est donc une tâche difficile d'application des transformations de coordonnées en 3D et du Jacobien. A noter que, comme précédemment, la solution proposée par l'auteur est ici aussi accompagnée par une représentation graphique. L'auteur souligne également qu'une autre méthode pour justifier l'équation (11) utilise le théorème de Stoker (objet d'étude du chapitre 10).

Le douzième **problème** correspond à la tâche T_{12} : exprimer $\iiint_{\mathcal{D}} F(x,y,z) dx dy dz$ dans un système de coordonnées (a) cylindriques, (b) sphériques. Ici l'auteur s'outille des équations de passage aux coordonnées cylindriques étudiées dans un chapitre précédent et de la formule 12 vue au niveau cours. Ensuite il utilise T_{11} pour conclure la résolution de la sous-tâche $T_{12(a)}$. De même les équations de passage en coordonnées sphériques et le Jacobien associé (selon la formule 12) sont pris en compte pour accomplir la sous-tâche $T_{12(b)}$. C'est donc une tâche simple d'application directe des cours.

Le treizième **problème** correspond à la tâche T_{13} : chercher le volume du domaine situé au-dessus du plan xOy et limité par un paraboloïde et un cylindre d'équations données en coordonnées cartésiennes. C'est une tâche dont les équations données suggèrent une transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées cylindriques. C'est ce qui est souligné par l'auteur quant il dit :

Le volume est très aisément trouvé en utilisant les coordonnées cylindriques.

Ainsi il dégage une telle transformation, donne une représentation graphique (laquelle montre un quart du domaine en question dans la figure 9.13 par symétrie). Puis le calcul de l'intégrale qui conduit au calcul de volume souhaité est développé en utilisant la symétrie. Par ailleurs, l'auteur précise tout de suite que l'intégration peut aussi être faite dans un autre ordre : le même résultat est obtenu.

Le quatorzième **problème** correspond à la tâche T_{14} : (a) cherchez le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du domaine donné dans le problème précédent, en supposant que la densité est égale à une constante σ . (b) cherchez le rayon de radiation. La technique pour résoudre cette tâche renvoie à la tâche T_{13} (où est donnée la représentation graphique du domaine en question) et à la définition du moment d'inertie. L'auteur donne ainsi les limites d'intégration comme dans T_{11} en utilisant la définition de moment d'inertie par rapport à l'axe Oz en coordonnées cylindriques. A noter que la représentation graphique n'est pas donnée ici, l'auteur s'outille de celle donnée précédemment en T_{11} . Une fois $T_{14(a)}$ accompli, il explique : (b) le rayon de giration est une valeur \mathcal{K} , telle que $\mathcal{M}\mathcal{K}^2 = (2/3)\mathcal{M}a^2$, c.à.d. $\mathcal{K}^2 = (2/3)a^2$ ou $\mathcal{K} = a\sqrt{2/3}$ (a est le rayon d'un cylindre des équations données en T_{13}). L'auteur précise tout de suite que, la signification physique de \mathcal{K} est la suivante : si toute la masse M était concentrée dans une mince couche cylindrique de rayon \mathcal{K} , le moment d'inertie de cette couche par rapport à l'axe du cylindre serait I_z (moment d'inertie par rapport à l'axe Oz).

Le quinzième **problème** correspond à la tâche T_{15} : (a) cherchez le volume du domaine limité par-dessus par une sphère et par-dessous par un cône d'équations données en coordonnées cartésiennes. (b) A partir du résultat de (a), déduire le volume de la sphère de rayon a . C'est une tâche à priori difficile en coordonnées cartésiennes dont on donne les équations. Elle se résout facilement selon une transformation adéquate en coordonnées sphériques. En effet, les équations données suggèrent une telle possibilité. A noter que, dans cette tâche, l'auteur donne dès le début un dessin représentant graphiquement le quart des coordonnées positives du domaine en question par symétrie, sur lequel il s'appuie pour organiser l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale. A noter aussi que, comme précédemment, on ne demande pas explicitement de faire le dessin. Mais la présence du dessin dans le corrigé de l'auteur laisse penser qu'une telle représentation est nécessaire pour organiser la tâche. Ainsi, l'auteur souligne : le volume cherché est égal à 4 fois le volume (ombré) sur la figure 9.14. Puis il donne tout de suite l'écriture algébrique du calcul d'intégrale et les calculs correspondants.

Le seizième et dernier **problème** associé au sous-titre **Problèmes résolus** correspond à la tâche T_{16} : (a) cherchez le centre d'inertie du domaine donné le problème précédent ; (b) utiliser le résultat obtenu en (a) pour trouver le centre d'inertie d'un hémisphère. C'est une tâche simple d'application directe de la formule de centre d'inertie. Elle renvoie à la T_{15} . En effet, l'auteur donne une solution mettant en évidence la symétrie du domaine en question, en simplifiant ainsi les calculs.

Viennent ensuite deux problèmes qui sont nommés **PROBLEMES DIVERS**.

Le premier correspond au type de tâche T_{17} qui consiste à démontrer des égalités d'intégrales doubles établies en rapport avec leurs valeurs respectives. C'est une tâche qui joue sur le changement d'ordre d'intégration, en montrant (comme pour l'exemple 07, section 17.1, SWO) que ce changement n'est pas toujours possible. C'est pourquoi l'auteur souligne :

Cet exemple montre que le changement d'ordre d'intégration ne peut pas toujours donner le même résultat. Une condition suffisante pour que l'on puisse permuter les variables d'intégration est que l'intégrale double ait un sens sur le domaine d'intégration correspondant. Dans le cas présent l'intégrale double établie sur le domaine \mathcal{D} donnée, n'a pas de sens à cause de la discontinuité de la fonction à intégrer en un point de \mathcal{D} . L'intégrale est une intégrale double "impropre" (ou généralisée).

A noter que les expressions algébriques données sous les signes d'intégration, sont des fractions rationnelles relativement simples. Toutefois, une telle simplicité ne signifie pas forcément que les tâches soient forcément simples. Cela demande parfois du savoir-faire sur la manipulation des expressions algébriques et sur leurs sens dans le problème en jeu.

Le deuxième correspond au type de tâche T_{18} qui consiste également à démontrer une égalité d'une intégrale double. Sauf qu'ici la fonction sous les signes d'intégration n'est pas définie.

Ce sont donc deux tâches a priori difficiles associées à la sous-section *intégrales doubles*. Ainsi se termine la partie cours du chapitre 9 du ce manuel. Suivent les problèmes non résolus.

6. Problèmes supplémentaires

Les problèmes supplémentaires correspondent aux exercices non résolus proposés aux étudiants. Rappelons qu'ils sont au nombre de 34 regroupés en types de tâches associées aux sous-titres des cours. Ces type de tâches sont tous similaires à ceux étudiées précédemment (lors des problèmes résolus) et sont numérotés en continu d'un **groupe** à un autre. A noter qu'ici l'auteur ne résout pas les tâches. Mais, il donne à la fin de chaque énoncé du problème, la solution attendue.

Le premier **groupe** comporte **7 tâches** $T[t_{19}, t_{25}]$ et les techniques permettant de les réaliser sont à la base des **Intégrales doubles**. L'auteur met surtout l'accent sur :

- les tâches de représentations graphiques d'un domaine d'intégration ;
- la recherche des moments et des centres d'inertie d'un domaine \mathcal{D} ;
- l'interprétation physique d'une intégrale double donnée ;
- le calcul de volume.

Ce sont des tâches simples d'application du cours.

Le deuxième **groupe** comporte également **7 tâches** $T[t_{26}, t_{32}]$. Ici les techniques nécessaires pour accomplir ces tâches sont à la base des **Transformations des intégrales doubles**. Ces

exercices tournent tout autour du *calcul d'une intégrale donnée, où le domaine est délimité par des surfaces d'équations données. En utilisant une transformation donnée, démontrer une relation entre l'intégrale et sa valeur effective.* Ce sont des tâches d'entraînement.

Le troisième **groupe** comporte **5 tâches** $T[t_{33}, t_{37}]$, les techniques permettant de les réaliser sont à la base des **Intégrales triples**. Comme pour premier groupe, ici aussi l'auteur valorise le travail sur le calcul de volume, la recherche du moment et de centre d'inertie d'un domaine en 3D délimité par des surfaces d'équations données. Une tâche, la t_{33} , consiste à donner une interprétation physique d'une intégrale triple où tout est établi. Ce sont donc des tâches importantes du calcul d'intégrales triples.

Le quatrième et dernier groupe des problèmes supplémentaires comporte **8 tâches** $T[t_{37}, t_{45}]$. Les techniques permettant de les réaliser sont à la base des **Transformations des intégrales triples**. Les tâches proposées ici ne sont rien d'autre que la généralisation des types de tâches étudiées dans le deuxième groupe pour les fonctions de trois variables. Elles consistent donc à *calculer le volume d'un domaine \mathcal{D} borné, la recherche de centre d'inertie, le moment d'inertie d'un domaine \mathcal{D} .* Comme pour le troisième **groupe**, on trouve également ici des tâches simples qui consistent à donner une interprétation physique d'une intégrale triple.

Notons que, comme pour SWOF, certains groupes de cette sous-section peuvent comporter des tâches assez compliquées (en termes de représentations, soit graphiquement soit analytiquement). Cependant, les degrés de difficulté ne dépassent pas celles des types de tâches relatives aux problèmes résolus (cf. cinquième sous-section) précédente. En général les types de tâches présents dans les 4 groupes (sixième sous-section) sont répétitifs, avec comme variante les types des fonctions (ou équations) qui définissent la tâche. Donc les 34 problèmes supplémentaires ont la même finalité que précédemment, et sont essentiellement des exercices d'entraînement.

3. Analyse de certains exemples extraits de SWOF

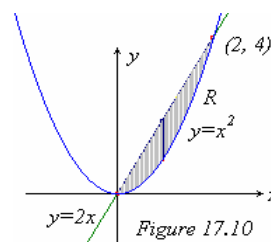
L'analyse détaillée des exemples résolus (extraits du manuel) révèle des éléments caractéristiques relatifs aux stratégies choisies par l'auteur pour la résolution des exercices. Pour voir cela, nous avons ainsi choisi trois exemples :

- SWOF, section 1, p. 892 ou SWOP, section 1, p. 469, **Exemple 5**
- SWOF, section 5, p. 918 ou SWOP, section 5, p. 503, **Exemple 3**
- SWOF, section 5, p. 920 ou SWOP, section 5, p. 505, **Exemple 4**

Dans l'**EXEMPLE 5**, p. 892, section 17.1 (intégrales doubles) on peut lire : Soit R la région du plan des xOy délimitée par les graphiques de $y = x^2$ et $y=2x$. Calculer $\iint_R (x^3 + 4y)dA$ **(a)** par le théorème (17.8) (1), **(b)** par le théorème (17.8) (2). « (17.8) (1) et (17.8) (2) sont respectivement les théorèmes de calcul de l'intégrale double de f sur une région de type R_x et R_y ¹⁰⁴ ».

Voilà la **SOLUTION PROPOSEE** :

- (a)** La figure 17.10 montre la région R , qui est à la fois de type R_x et R_y . Regardons-la d'abord comme une région de type R_x . Sa frontière inférieure est $y = x^2$ et sa frontière supérieure, $y=2x$ pour $0 \leq x \leq 2$. Nous avons dessiné un segment vertical entre ces frontières pour marquer que la première intégration est relative à y (depuis la frontière inférieure jusqu'à la frontière supérieure). Suivant le théorème (17.8)(1),

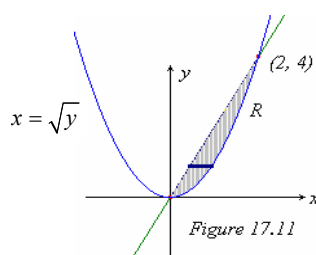


$$\begin{aligned} \iint_R (x^3 + 4y)dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^3 + 4y)dydx \\ &= \int_0^2 \left[x^2 y + 4 \left(\frac{y^2}{2} \right) \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \int_0^2 \left[(2x^4 + 8x^2) - (x^5 + 2x^4) \right] dx \\ &= \int_0^2 \left[\frac{8}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2 \right]_0^2 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

- (b)** En vue d'employer le théorème (17.8) (2), regardons R comme une région du type R_y dont l'équation des frontières s'obtient en résolvant les équations données par rapport à x .

$$x = \frac{1}{2}y \text{ et } x = \sqrt{y} \text{ pour } 0 \leq y \leq 4$$

Le trait horizontal dans la figure 17.11 s'étend de la frontière gauche à la frontière droite, montrant par là que la première intégration porte sur la variable x . Suivant le théorème (17.8) (2),



$$\begin{aligned} \iint_R (x^3 + 4y)dA &= \int_0^4 \int_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} (x^3 + 4y)dx dy = \int_0^4 \left[\frac{1}{4}x^4 + 4yx \right]_{\frac{1}{2}y}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^4 \left[\left(\frac{1}{4}y^2 + 4y^{\frac{3}{2}} \right) - \left(\frac{1}{64}y^4 + 2y^2 \right) \right] dy = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

On voit que la représentation graphique des équations de l'énoncé est pris ici comme stratégie de la résolution du problème. Elle permet un contrôle dans la mise en place d'écriture algébrique du calcul de l'intégrale (dans les deux possibilités **(a)** et **(b)**).

On remarque que $f(x,y) = x^3 + 4y \geq 0$ est continue en tous points (x,y) de R que nous représentons analytiquement par $R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$ comme région R_x ou encore par

¹⁰⁴ C'est nous qui les soulignons

$R = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 4 \text{ et } y/2 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ comme région R_y .

Donc la région tridimensionnelle, dressée sur R et coiffée par le graphique de $f(x, y) = x^3 + 4y$, décrit le solide Q de volume $V = \frac{32}{3}$ que l'on peut représenter analytiquement par

$$Q = \{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R} \text{ et } 0 \leq z \leq x^3 + 4y\}.$$

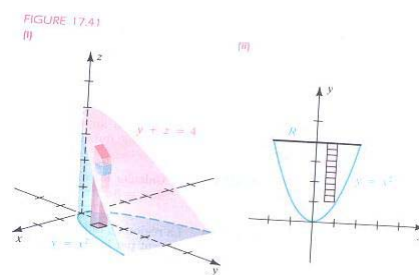
Bien que l'énoncé de l'exercice précise que les graphiques des équations délimitent la région R du plan- xy , l'auteur met à part le sens du résultat attendu. Cela pourrait pourtant permettre de faire le lien entre le calcul de l'intégrale multiple et le volume du solide Q , car $f(x, y) = x^3 + 4y \geq 0$ pour tout (x, y) de la région R .

Au contraire des intégrales proposées dans les quatre exemples qui précèdent, celui-ci, sauf le troisième, ne calcule pas le volume des solides reposant sur les régions R du plan- xy et coiffés par les graphiques des fonctions considérées. De plus, les fonctions données sont négatives dans certaines parties des régions considérées. Mais les résultats sont positifs sauf dans l'exemple 4. Le fait que les fonctions aient des valeurs négatives pour certaines parties des régions considérées et que le calcul d'intégrale produise des résultats positifs n'est pas discuté.

Dans l'EXEMPLE 3, p. 918, section 5 « étude des intégrales multiples » on peut lire : calculer le volume du solide borné par le cylindre $y = x^2$ et par les plans $y + z = 4$ et $z = 0$.

Voilà la SOLUTION PROPOSEE : Ce solide est présenté dans la figure 17.41 (i). La colonne qu'il contient illustre la première sommation parallèle à l'axe des z et s'étend de $z=0$ jusqu'à $z=4-y$. La figure 17.41 (ii) montre la région R du plan de xy ainsi qu'un rectangle témoin de la première des deux intégrations de l'intégrale double sur R par rapport à y . Le théorème (17.19) avec $f(x, y) = 1$ mène aux calculs suivants :

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_0^{4-y} dz dy dx = \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 [z]_0^{4-y} dy dx \\ &= \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (4-y) dy dx = \int_{-2}^2 \left[4y - \frac{1}{2}y^2 \right]_{x^2}^4 dx \\ &= \int_{-2}^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = \left[8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \right]_{-2}^2 = \frac{256}{15} \approx 17. \end{aligned}$$



Cette activité est intéressante car elle permet d'établir un lien entre le calcul d'intégrale triple et le calcul de volume d'un solide borné. Mais le fait que le solide est borné n'est pas prouvé dans cette tâche, ni dans aucune des tâches de calcul de volume proposées dans ces manuels. Cela est admis comme vrai à l'appui du dessin (pour lequel les méthodes et les techniques de construction restent toujours implicites). On ne sait jamais comment le changement entre le registre analytique et graphique est réalisé.

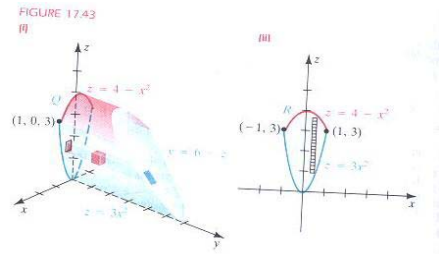
L'observation de la figure comme critère pour la mise en place de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale demande à l'étudiant d'avoir les pratiques des représentations graphiques dans l'espace, avant d'utiliser le théorème proposé (ou parallèlement comme le fait l'auteur de ce manuel). Toutefois les démarches pour cette représentation possible ne sont pas discutées au niveau cours. Celle-ci est laissée à la charge de l'étudiant.

Au niveau des techniques, on peut percevoir à partir de l'écriture dont l'intégrale itérée calcule le volume dans cet exemple que $Q = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq 4 - y\}$ est une représentation analytique du solide, qui correspond à la représentation graphique montrée dans la figure 17.41 (i). Mais cette représentation analytique qui peut permettre le lien entre les deux registres de représentations n'est pas prise en compte. Notons que le solide (de la figure ci-dessus) peut également être représenté analytiquement d'autres manières en utilisant éventuellement la symétrie. Ceci dépend du choix des stratégies de résolution du problème.

Dans la page 920, section 5 de l'étude des intégrales triples, on trouve l'**EXEMPLE 4** suivant: Calculer le volume de la région Q délimitée par les graphiques de $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$, $y = 0$ et $z + y = 6$.

Voilà la **SOLUTION PROPOSEE** : La région Q , représentée dans la figure 17.43 (i), est bornée inférieurement par le cylindre, $z = 4 - x^2$ et supérieurement par le cylindre de $z = 3x^2$, et terminée à gauche par le plan des xz et à droite par le plan $z + y = 6$. Elle entre dans la catégorie de résolution où la région R est sous-région du plan- xz avec $k_1(x, z) = 0$ et $k_2(x, z) = 6 - z$. La région R du plan des xz est présentée dans la figure 17.43 (ii). L'application de (17.20) donne.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_Q dV = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} \int_0^{6-z} dy dz dx = \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} [y]_0^{6-z} dz dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{3x^2}^{4-x^2} (6-z) dz dx = \int_{-1}^1 \left[6z - \frac{1}{2} z^2 \right]_{3x^2}^{4-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 (16 - 20x^2 + 4x^4) dx = \frac{304}{15} \approx 20,3. \end{aligned}$$



17.20 comporte en effet une écriture qui précède cet exemple au niveau logos, présentée comme **théorème de calcul d'une intégrale triple** pour le cas où R est une région de type R_x du plan- xz . Plus précisément $\iiint_Q dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x, y, z) dy dz dx$ où le positionnement des composantes $a = -1$, $b = 1$, $h_1(x) = 3x^2$, $h_2(x) = 4 - x^2$, $k_1(x, z) = 0$ et $k_2(x, z) = 6 - z$ dans cette écriture est d'une certaine manière contrôlé à l'aide des positions de morceaux de surfaces des fonctions $h_i(x)$ et $k_i(x, z)$ avec $i = 1, 2$ qui forment le contour du solide Q présenté dans la figure ci-dessus (extraite de ce manuel). Aucune technique dans le discours de l'auteur n'exprime comment on peut avoir ce solide. Ou encore comment un étudiant peut représenter un tel solide dans les exercices qui ont la même finalité proposé systématiquement à la fin de chaque chapitre.

Comme dans l'exemple précédent, on peut voir dans l'écriture dont l'intégrale itérée calcule le volume dans cet exemple que $Q = \{(x, y, z) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 6 - z, 3x^2 \leq z \leq 4 - x^2\}$ est une *représentation analytique* du solide Q , qui correspond à la *représentation graphique* montrée dans la figure 17.43 (i). Ici encore cette représentation analytique qui peut permettre le lien entre les deux registres de représentations n'est pas évoquée. En plus, les techniques utilisées pour avoir les bornes de x , de z et de y sont complètement basées sur la visualisation.

ANNEXE

III

PRE-EXPERIMENTATION



ANNEXE II : PRE-EXPERIMENTATION

1.1..1 Les consignes du test : Etudiants débutants

Nom (facultatif):	Cours:
Université :	
Local :	Date : / /
<p>EXERCICE UNIQUE</p> <p>Calculer le volume du solide Q qui, dans le huitième des coordonnées positives est délimité par les graphiques des équations $z=x^2+y^2+1$ et $2x+y=1$.</p>	

1.1..2 Les consignes du test : Etudiants avancés

Nom (facultatif):	Cours:
Université :	
Local :	Date : / /
<p>Exercice 01 Calculer le volume du solide défini par les graphiques des fonctions $g(x,y)=0.2$, $h(x,y)=2.33$ et $f(x,y) = 3e^{(-x^2-y^2)}$.</p> <p>Exercice 02 Calculer le volume commun aux trois cylindres d'équations $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$ et $y^2+z^2\leq 1$.</p> <p>Exercice 03 Calculer le volume du solide Q délimité par les graphiques d'équations ci-dessous : $z = 1 - x^2; \quad \forall(x,y) \quad y = -\sqrt{x}; \quad x \in [0, \infty[\quad y = -x^2; \quad x \in]-\infty, 0]$ $z = 1 - y; \quad y \in [0, \infty[\quad y = 1 - x; \quad x \in [(-1 + \sqrt{5})/2, 1] \quad z = 0, \forall(x,y); \quad y = 0, \forall(x,z)$</p> <p>Exercice 04 Un solide Q est l'intersection du solide délimité par les paraboloides des équations : $y - x^2 - z^2 = 0$ et $y - 8 + x^2 + z^2 = 0$ et celui délimité par les cônes des équations $y - 3 - \sqrt{x^2 + z^2} = 0$ et $y - 5 + \sqrt{x^2 + z^2} = 0$. La densité en chaque point $P(x, y, z)$ de Q est proportionnelle au carré de la distance qui sépare ce point à l'axe de Q. Calculez la masse du solide Q.</p>	

O questionário

- Qs1.** Em relação ao teste que acabou de fazer, você tem certeza na veracidade da solução encontrada em cada problema? Justifique.
- Qs2.** Houve dificuldades, na resolução dos problemas propostos? Descreva-as sucintamente.
- Qs3.** Que métodos e recursos materiais utilizou na resolução dos problemas.
- Qs4.** Liste alguns campos (ou conceitos) matemáticos indispensáveis para a resolução desses problemas.
- Qs5.** Que interpretação farias em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática (em particular no Cálculo Diferencial e Integral) à cada um dos itens abaixo. Por que?
- (Quadro negro e giz) x (Papel e lápis);
 - (Computador) x (Papel e lápis);
 - (Transparências) x (Papel, lápis).
 - (Quadro negro e giz) x (Papel e lápis) x (computador e software educativo);
- Qs6.** Certamente você está fazendo ou já fez a disciplina que aborda os assuntos inerentes ao teste. Se fosse fazer uma auto-avaliação sobre os conhecimentos que está adquirindo ou adquiriu, em qual das seguinte posições se colocaria? Justifique.
- Baixo Médio Alto

1.1..3 Le questionnaire

- Qs1.** Nous voulions tout d'abord avoir les opinions des étudiants sur la véracité des solutions qu'ils obtiennent dans le calcul d'une intégrale multiple.
- Qs2.** Nous voulions savoir si les étudiants ont rencontré des difficultés dans le traitement des exercices en essayant de les décrire.
- Qs3.** Nous voulions les méthodes et les outils qu'ils ont utilisés pour le traitement des exercices.
- Qs4.** Ici, nous voulions connaître les domaines ou concepts mathématiques que les étudiants jugent importants pour la résolution de ce type d'exercices.
- Qs5.** Ici, nous cherchions à obtenir les avis des étudiants quant aux outils pour l'enseignement et l'apprentissage des Mathématiques, tels que papier/crayon, informatiques, rétroprojecteurs, tableau, etc.
- Qs6.** Ici, on propose une auto-évaluation sur les connaissances acquises ou en cours d'acquisition sur les *IM*, où nous établissions trois niveaux :
- Faible, Moyen et Fort

1.1..4 Les copies : Etudiants débutants – Ed1 à Ed7

Ed1

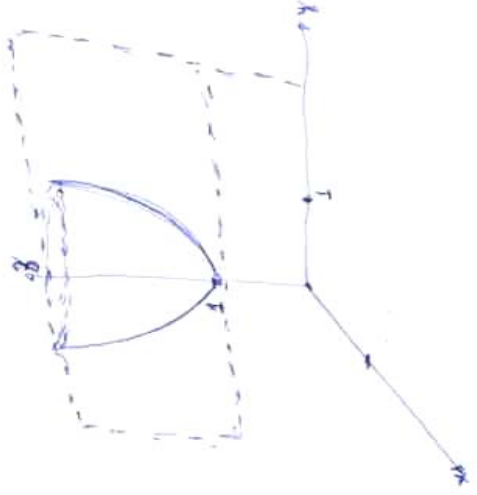
Ed2

Ed3

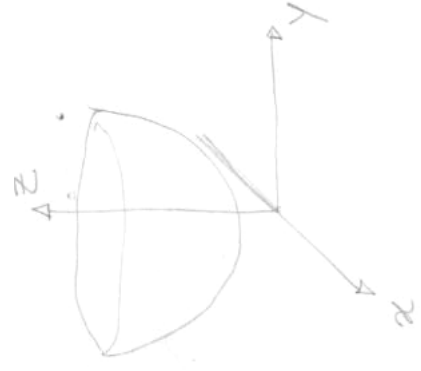
$$z = x^2 + y^2 + 1$$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ y = 1 - 2x \end{cases}$$

- $z = x^2 + y^2 + 1$ (x, y, z)
- $z = 0^2 + 0^2$ (0, 0, 1)
- $z = 1$ (1, 1, 2)
- $z = 2$ (1, 1, 2)
- $z = 9$ (2, 2, 9)



Ed4



$$z = x^2 + y^2 + 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$$

$$x = \frac{1 - y}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y$$

$$\left(\frac{1-y}{2}\right)^2 + y^2 + 1$$

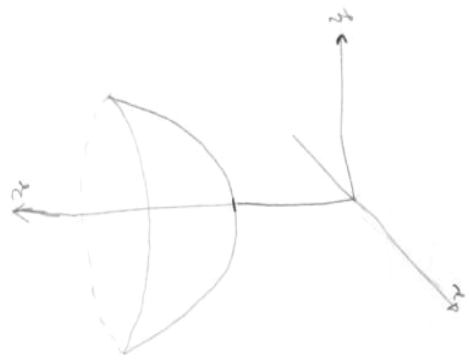
$$\left(\frac{1-y}{2}\right)^2 + y^2 + 1 = 0$$

$$\frac{1 - 2y + y^2 + 4y^2 + 4}{4} = 0$$

$$\frac{1 - 2y + 5y^2 + 4}{4} = 0$$

$$5y^2 - 2y + 5 = 0$$

Ed5

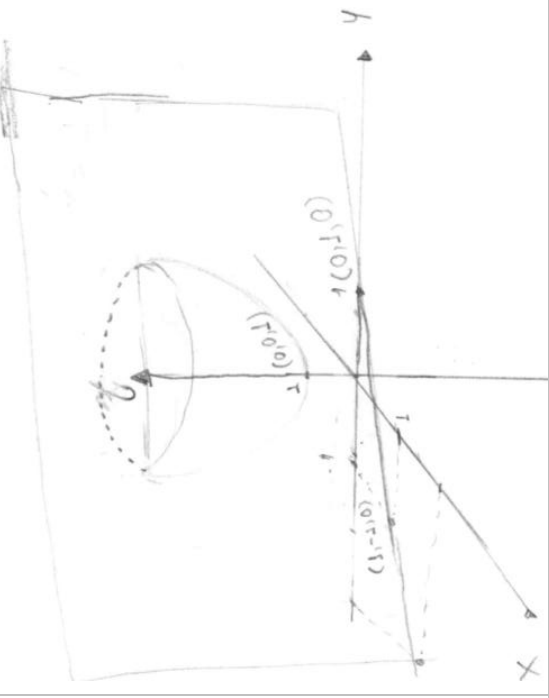


Ed6

$$z = x^2 + y^2 + 1$$

$$2x + y = 1$$

$$y = 1 - 2x$$



$$(1 - 2x)^2 + (1 - 2x)^2 + 1$$

$$1 - 2x - 2x^2 + 1 + 2x$$

$$z = x^2 + y^2 + 1$$

$$z = x^2 + (1 - 2x)^2 + 1$$

$$z = x^2 + 4x^2 - 4x + 1 + 1$$

$$z = 5x^2 - 4x + 2$$

$$\Delta = -24$$

Ed7

$$z = x^2 + y^2 + 1 \quad y = 1 - 2x$$

$$z - x^2 - 1 = y^2$$

$$z - x^2 - 1 = (1 - 2x)^2$$

$$z - x^2 - 1 = 1 - 4x + 4x^2$$

$$z = 1 - 4x + 4x^2 + x^2 + 1$$

$$z = 5x^2 - 4x + 2$$



$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 - 4$$

$$x = 1 - 2$$

$$z = \left(\frac{1-2}{2}\right)^2 + 1 + 1$$

$$z = \frac{1 - 2y + y^2}{4} + y^2 + 1$$

$$z = \frac{1 - 2y + y^2 + 4y^2 + 4}{4}$$

$$z = \frac{5y^2 - 2y + 5}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$2x + y^2 + 1 = 0$$

$$y = 1 - 2x$$

$$5x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$z = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

$$z = \frac{1}{4} + 1$$

$$z = \frac{1 + 4}{4} = \frac{5}{4}$$

$$z = \frac{5}{4}$$

$$z = 0$$

$$y = 1$$

$$z = 2$$

$$(0, 1, 2)$$

$$(-1/2, 0, 5/4)$$

1.1..5 Les copies : Etudiants Avancés – Ea1 à Ea8

Exercice 01

Ea2

1) $\sqrt{z} = 1 \Rightarrow z = 1$

$\partial = 0,330 \Rightarrow \frac{2}{3} = e^{-x^2-y^2}$

$\partial = 3e^{-x^2-y^2} \Rightarrow \frac{2}{3} = e^{-x^2-y^2}$

$\ln \frac{2}{3} = -x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = \ln \frac{3}{2}$

$r = \sqrt{\ln \frac{3}{2}}$

VOLUME do cilindro + VOLUME do cone

$V_g = V_c + V_{s-c}$

$V_{s-c} = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx$

Esqui a ~~...~~ para encontrar as coordenadas cilíndricas.

Ea3

$\frac{1}{3e} = 3e^{-(x^2+y^2)}$

$\ln \frac{1}{3e} = \ln 3e^{-(x^2+y^2)}$

$-\ln 3e = -(x^2+y^2) \ln 3e$

$x^2 + y^2 = 1$

$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$\frac{3}{9e} = 0,2$

$\frac{1}{3e} = 0,2$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = e^{-(x^2+y^2)}$

$\frac{1}{9} = e^{-(x^2+y^2)}$

$\ln \frac{1}{9} = \ln e^{-(x^2+y^2)}$

$-\ln 9 = -(x^2+y^2)$

$x^2 + y^2 = \ln 9$

$r = \sqrt{\ln 9}$

$V = -\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dy dx$

$V = -\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy dx$

Ea5

$f(x,y) = 3 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$
 $= f(x,y) = 3 \cdot e^{-(x^2+y^2)}$
 $(x,y) = 3 \cdot e^{-r^2}$
 $f(0,0) = 3 \cdot e^{-0} = 3$
 $3e^{-r^2} = 0,2 \rightarrow e^{-r^2} = 0,0667$
 $-r^2 = \ln 0,0667$
 $r_1 = 1,645$
 $3e^{-r^2} = 2,33 \rightarrow e^{-r^2} = 0,777$
 $-r^2 = \ln 0,777$
 $r_2 = 0,502$
 $V = \int_{0,2}^{2,33} \int_0^{2\pi} \int_{0,502}^{1,645} \pi r dr dz = \int_{0,2}^{2,33} \int_0^{2\pi} \frac{\pi r^2}{2} \Big|_{0,502}^{1,645} dz$
 $V = 1,23 \int_{0,2}^{2,33} 2\pi dz = 2,46\pi [z]_{0,2}^{2,33}$
 $V = 2,46\pi \cdot [2,33 - 0,2]$

Ea6

$f(x,y) = 3e^{-(x^2+y^2)}$
 $g(x,y) = 0,2$
 $h(x,y) = 2,33$

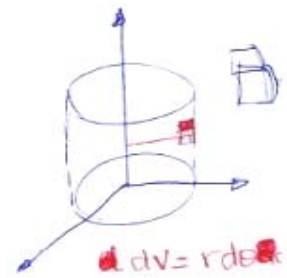
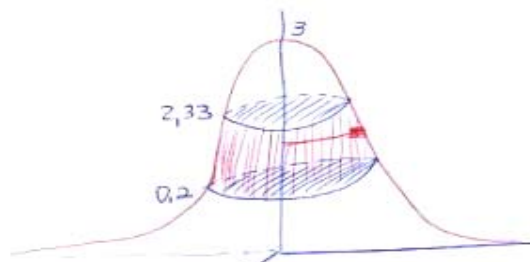
EM COORDENADAS CILINDRICAS, TEMOS

$f(r) = 3e^{-r^2}$
 $0,2 = 3e^{-r^2}$
 $e^{-r^2} = \frac{0,2}{3}$
 $\ln e^{-r^2} = \ln \frac{0,2}{3}$
 $-r^2 = \ln \frac{0,2}{3}$
 $r_1 = 0,503$

$f(r_2) = 3e^{-1}$
 $2,33 = 3e^{-r^2}$
 $\ln e^{-r^2} = \ln \frac{2,33}{3}$
 $-r^2 = \ln \frac{2,33}{3}$
 $r_2 = 1,64$

$V = \iiint_V dV$
 $V = 2 \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_{0,2}^{2,33} r dr d\theta dz = 2 \int_0^{2\pi} \int_{0,2}^{2,33} \frac{r^2}{2} \Big|_{0,2}^{2,33} d\theta dz$
 $V = 2,456 \cdot 2\pi \int_{0,2}^{2,33} dz = 2,456 \cdot 2\pi (2,33 - 0,2)$
 $V = 4,942\pi \cdot 2,13 = 40,463\pi \text{ u.v}$

Ea8



$$f(x, y) = 3e^{-(x^2+y^2)} \quad r^2 = x^2 + y^2$$

$$f(r) = 3e^{-r^2} \rightarrow z_{33} = 3e^{-r^2}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{z(r)} \int_{0.2}^{2.33} r \, dz \, dr$$

$$e^{-r^2} = \frac{2.33}{3}$$

$$-r^2 = \ln\left(\frac{2.33}{3}\right) \quad r^2 = -\ln\left(\frac{2.33}{3}\right)$$

$$r = 0.5027$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{f(r)} r \, dr$$

$$V = 2\pi \int_0^{f(r)} 3r^2$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{0.2}^{2.33} \int_0^{f(r)} r \, dr \, dz \, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{0.2}^{2.33} \frac{3r^2}{z} dz \, d\theta$$

$$\int_{0.2}^{2.33} \frac{(3r^2)^2}{z} dz \, d\theta$$

$$V = 2\pi \int_{0.2}^{2.33} \int_0^{f(r)} r \, dr \, dz$$

Exercise 02

Ea1



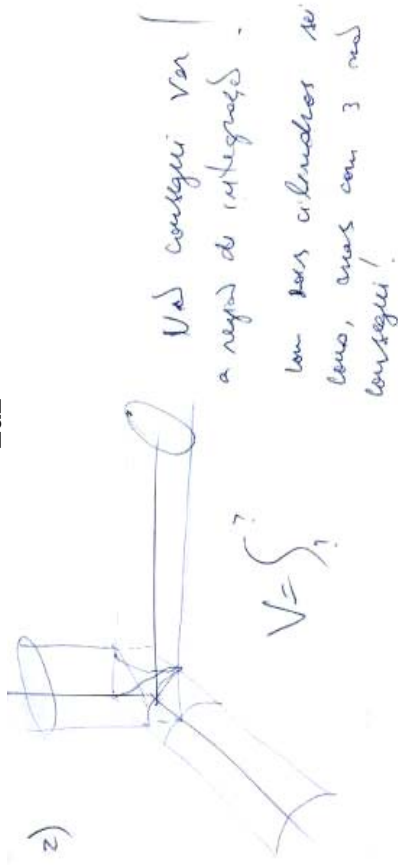
o para a interseção dos três cilindros, encontramos uma figura para calcular seu volume vamos usar uma integral tripla na figura é uma esfera, então podemos integrar em qual ordem; bom, para facilitar o trabalho, vou calcular o volume primeiro depois multiplico por 2 e assim tenho seu volume

integrar primeiro em relação a z, depois:

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz dy dx = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (\sqrt{1-x^2}) dy dx$$

ao continuar a resolução, encontramos (no mesmo volume) uma resposta não conveniente, pois volume se espalha de 4,19 e encontramos um valor totalmente diferente.

Ea2



Ea3

1) A interseção de sólidos resulta em uma esfera de raio $R=1$ tipo, usando coordenadas esféricas, temos

$$V = \iiint dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

$$(a=1) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin \phi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 d\phi d\theta$$

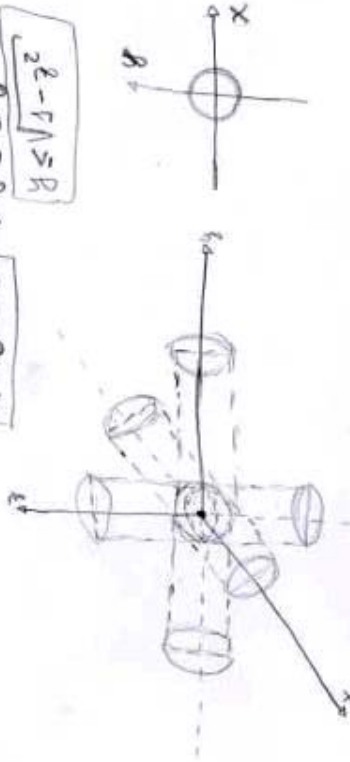
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{3} \sin \phi d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} (-\cos \phi) \Big|_0^{\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

Ea4

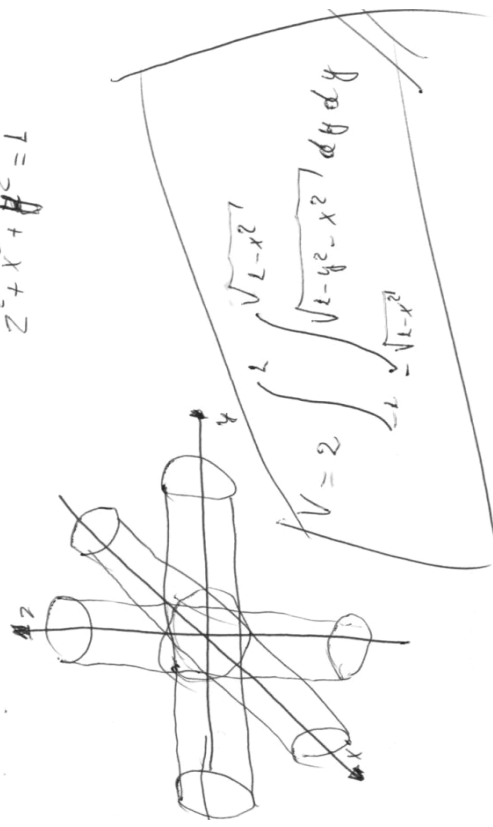
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \Rightarrow z = 0 \\ x^2 + z^2 &\leq 1 \Rightarrow y = 0 \\ y^2 + z^2 &\leq 1 \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ (1-z^2) + y^2 &\leq 1 \\ y^2 - z^2 &\leq 0 \Rightarrow y^2 \leq z^2 \\ y^2 + z^2 &\leq 1 \Rightarrow y^2 \leq 1-z^2 \\ R &\leq \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$



Ea6

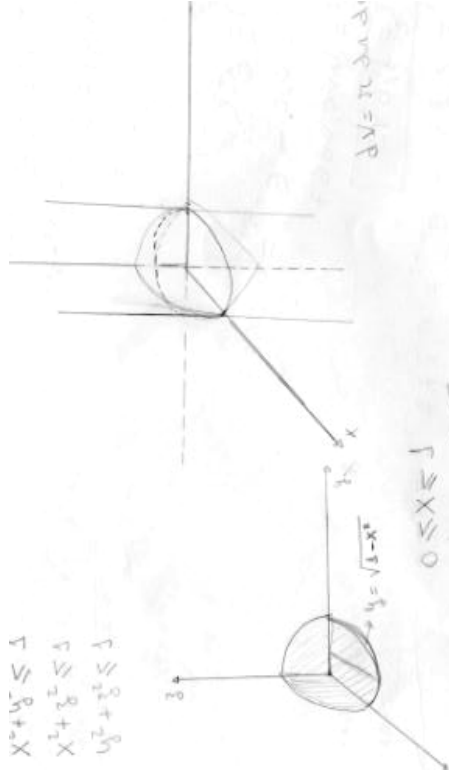
$$z^2 + x^2 + y^2 = 1$$



$$V = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx dz$$

Ea5

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ x^2 + z^2 &\leq 1 \\ y^2 + z^2 &\leq 1 \end{aligned}$$



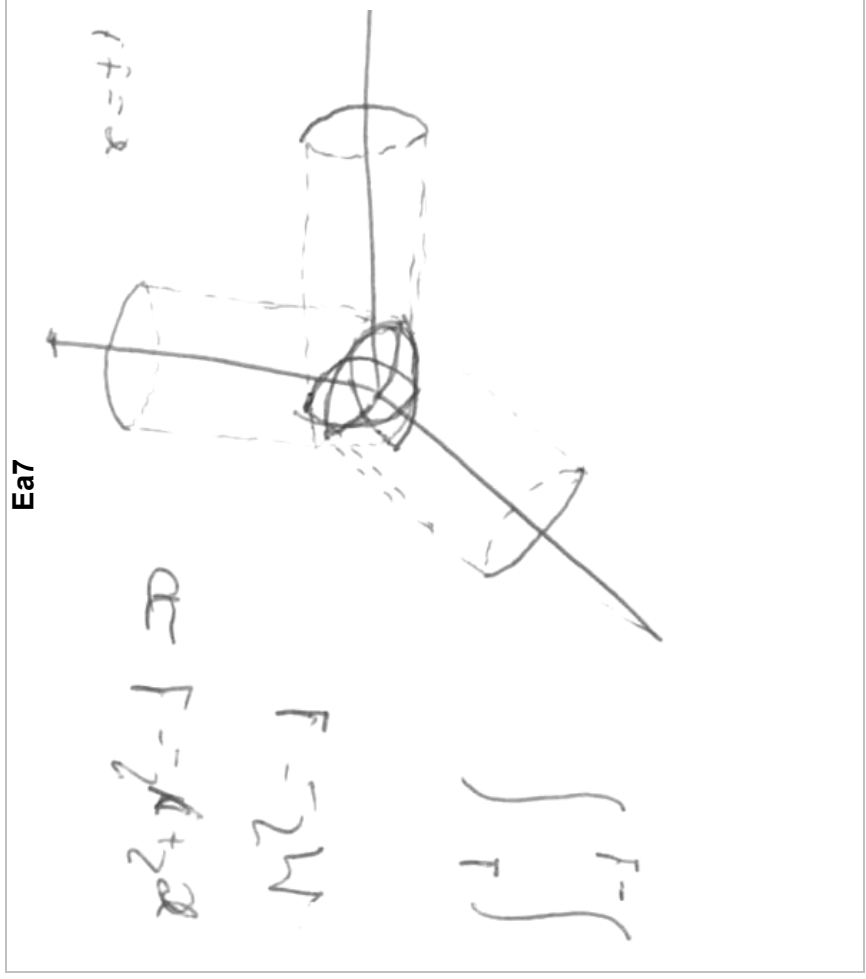
$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 1 \\ 0 &\leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 &\leq z \leq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 dy dz dx \\ V &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2)^{1/2} dz dx = 8 \int_0^1 (1-x^2) dx \\ V &= 8 \int_0^1 dx - 8 \int_0^1 x^2 dx = 8 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \end{aligned}$$

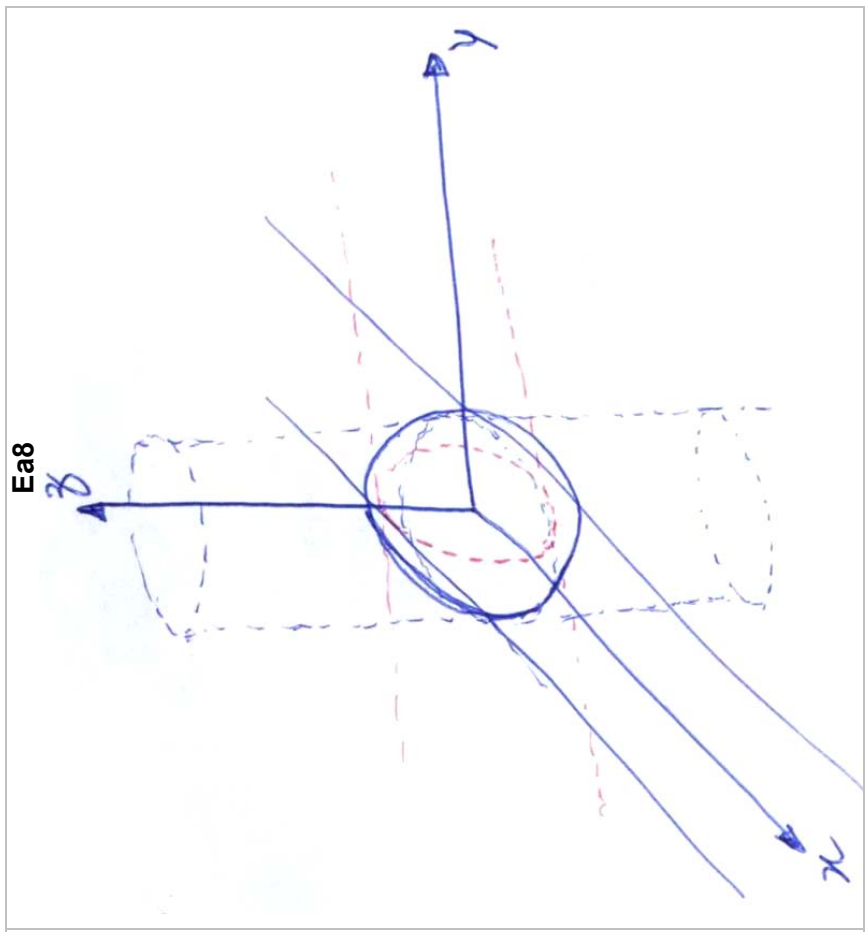
$$V = \left(1 - \frac{1}{3} \right) 8 \rightarrow V = 8 \cdot \frac{2}{3} \text{ m.v}$$

$$V = \frac{16}{3} \text{ m.v}$$

Ea7

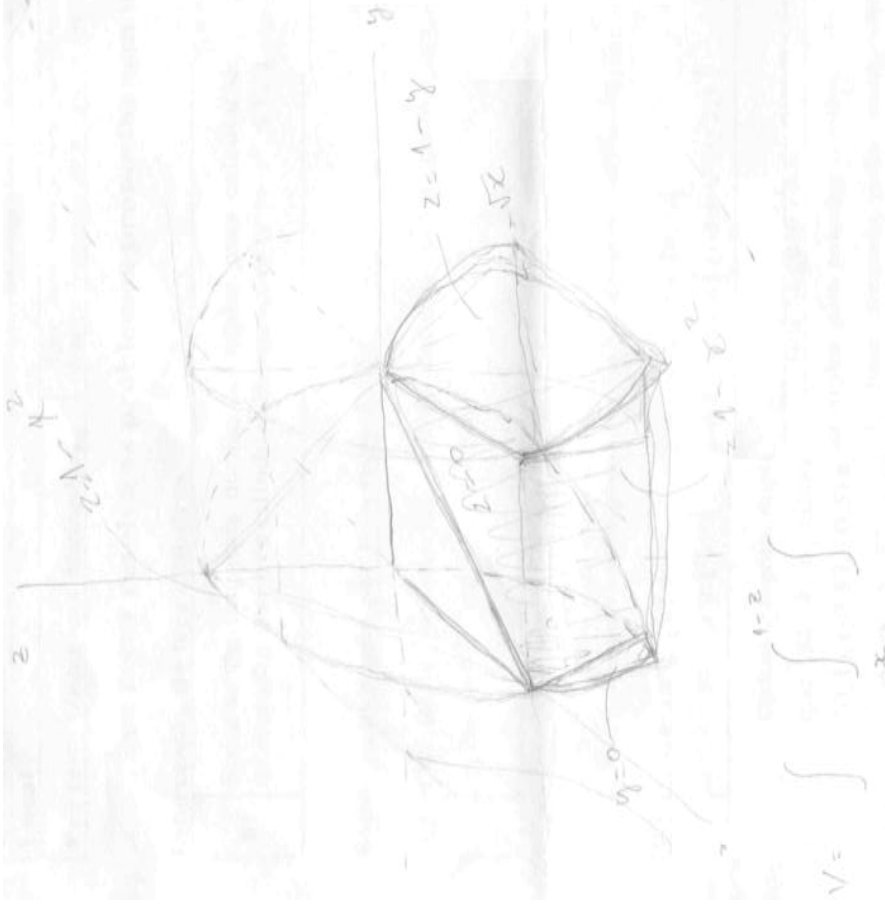


Ea8



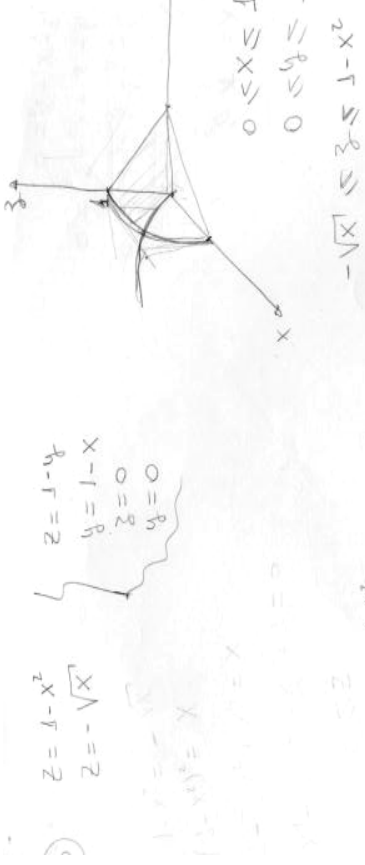
Exercise 03

Ea3



$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{x}} dz dy dx$$

Ea5



$$\begin{cases} z = 1-y \\ y = 1-x \\ z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{x}} dz dy dx$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} [1-x^2 + \sqrt{x}] dy dx$$

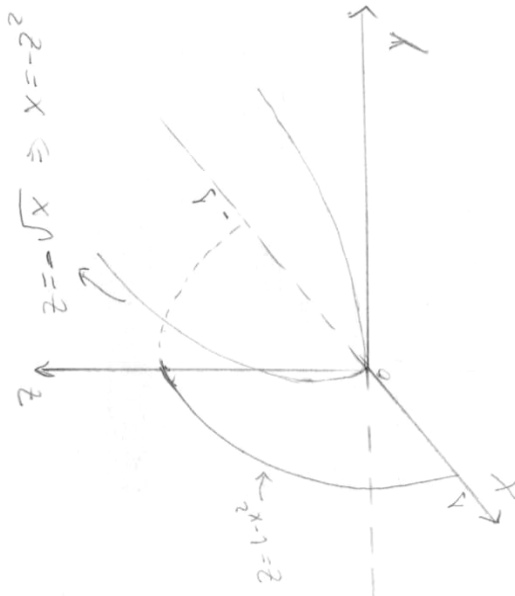
$$= \int_0^1 [(1-x^2 + \sqrt{x}) \cdot (1-x)] dx = \int_0^1 [1-x^2 + \sqrt{x} - x + x^3 - x\sqrt{x}] dx$$

$$= \int_0^1 [1-x^2 + \sqrt{x} - x + x^3 - x^{3/2}] dx = \int_0^1 [1 - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \int_0^1 x^{1/2} dx]$$

$$V = \frac{13}{12} - \frac{2}{5}$$

$$V = \frac{41}{60} \text{ m}^3$$

Ea6



$$\int_0^1 \int_{-x}^x \int_0^{1-x^2} dz dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{-x}^x (1-x^2) dy dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2) \left(\frac{y}{1} \right) \Big|_{-x}^x dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2)(x - (-x)) dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2)(2x) dx$$

$$\int_0^1 (2x - 2x^3) dx$$

$$\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_0^1$$

$$1 - \frac{1}{2} - \left(0 - 0 \right)$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ea7



$$\int_0^1 \int_{-x}^x \int_0^{1-x^2} dz dy dx$$

$$\int_0^1 \int_{-x}^x (1-x^2) dy dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2) \left(\frac{y}{1} \right) \Big|_{-x}^x dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2)(x - (-x)) dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2)(2x) dx$$

$$\int_0^1 (2x - 2x^3) dx$$

$$\left(\frac{2x^2}{2} - \frac{2x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{2}x^4 \right) \Big|_0^1$$

$$1 - \frac{1}{2} - \left(0 - 0 \right)$$

$$= \frac{2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exercise 04

Ea5

$$y - x^2 - z^2 = 0$$

$$y - 8 + x^2 + z^2 = 0$$

$$y - 3 - \sqrt{x^2 + z^2} = 0$$

$$y - 5 + \sqrt{x^2 + z^2} = 0$$

$$z = k \rho^2$$

Ea7

$$x^2 - x^2 - z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = x^2 - x^2$$

$$x - 8 + x^2 + z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 8 - x - x^2$$

$$y - 3 - \sqrt{8 - x - x^2} = 0, \Rightarrow \sqrt{8 - x - x^2} = y - 3$$

$$y - 5 + \sqrt{8 - x - x^2} = 0$$

$$\sqrt{8 - x - x^2} = x + 3$$

$$8 - x - x^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$3 + \sqrt{8 - x - x^2} = 5 - \sqrt{8 - x - x^2}$$

$$2\sqrt{8 - x - x^2} = 2$$

$$\sqrt{8 - x - x^2} = 1$$

$$8 - x - x^2 = 1$$

$$x^2 + x - 7 = 0$$

$$x = 2$$

$$z = \sqrt{8 - 2 - 4} = 2$$

$$y = 3 + 2 = 5$$

$$y = 5 + 2 = 7$$

$$z = \sqrt{8 - 7 - 49} = \sqrt{-41}$$

1.1..6 Les opinions des étudiants et des enseignants

Opinions des étudiants (UESC)		
Qs1. Véracité des solutions données	Qs2. Difficultés rencontrées dans la résolution des exercices	Qs3. Méthodes et outils utilisés dans la résolution des exercices
<ol style="list-style-type: none"> Non ! Non ! D'abord je n'ai trouvé aucune solution. Ensuite, même si j'avais trouvé je n'aurais pas de certitude sur la solution. Seulement certaines tâches. Les autres je ne peux pas affirmer, car je ne suis pas arrivé à la fin. 	<ol style="list-style-type: none"> ... ; J'ai rencontré des difficultés. Certains exercices avaient des expressions algébriques relativement simples, mais les régions d'intégration ne sont pas faciles à visualiser. Des tâches où je suis arrivé à visualiser facilement, je ne suis pas arrivé à la solution finale, car j'ai oublié certains concepts et démarches du calcul différentiel et intégral ; Assez de difficultés, principalement pour visualiser les solides, éléments importants pour arriver à la solution. 	<ol style="list-style-type: none"> Papier/crayon et calculatrice ; ... ; Les méthodes utilisées dans les cours de calcul et j'ai utilisé le livre de calcul (Swokowski).
Qs4. Domaines ou concepts mathématiques importants pour les IM	Qs5. Un avis sur les environnements d'enseignement et d'apprentissage	Qs6. Auto validation sur les connaissances acquises ou en acquisition sur les IM (Faible, Moyen, Fort)
<ol style="list-style-type: none"> Connaissance en géométrie, ensembles, intégrales, construction graphiques et autres. La géométrie analytique, résolution d'équations (nécessaire pour trouver les intersections des surfaces), habilité dans la résolution des intégrales ainsi que leur modélisation ; Reconnaissance de tracés des graphiques, intégrales doubles et triples. 	<ol style="list-style-type: none"> ... ; Le papier/crayon et le tableau sont essentiels. Le rétroprojecteur est intéressant aussi, car on peut avoir les transparents produits avec un ordinateur et les travailler en classe. L'ordinateur a beaucoup de pouvoir, on doit donc en profiter, la combinaison entre le travail développé sur papier/crayon, tableau et avec ordinateur est très importante, car pour l'apprentissage des mathématiques, on ne peut pas tout faire sur papier, ni sur tableau et ni sur ordinateur, ainsi l'utilisation simultanée de ces environnements est très importante ; Le papier/crayon et le tableau noir sont nécessaires, mais la visualisation des fonctions non familières pour les étudiants est difficile. Le travail sur ordinateur en rapport avec le travail papier crayon améliore la compréhension. L'idéal serait l'intégration des ressources disponibles comme l'ordinateur, le logiciel éducatif, les transparents et le tableau noir. 	<ol style="list-style-type: none"> Moyen ; Moyen. Je ne me considère pas fort, car je ne suis pas arrivé à résoudre les problèmes car j'ai oublié certains concepts et méthodes d'analyse. De plus j'ai peu d'expérience avec la manipulation et l'exploration des objets dans l'espace. Moyen.
Opinions des étudiants (UNEB)		
Qs1. Véracité des solutions données	Qs2. Difficultés rencontrées dans la résolution des exercices	Qs3. Méthodes et outils utilisés dans la résolution des exercices
<ol style="list-style-type: none"> Non ! Pour avoir travaillé beaucoup cette semaine, ce n'était pas possible de résoudre les exercices adéquatement ; Je ne me suis pas senti préparé pour résoudre les tâches. Non ! Non ! Non ! Non ! Non ! Je ne suis pas arrivé à résoudre les problèmes proposés. 	<ol style="list-style-type: none"> Beaucoup. Nous avons étudiés les IM superficiellement. Nous ne sommes pas arrivés à voir les intégrales doubles dans les problèmes de calcul de volume. Beaucoup ; Beaucoup. Parce que certains contenus n'étaient pas bien expliqués en classe. En effet, on a des difficultés dans la résolution des problèmes ; J'avais des difficultés ; J'avais des difficultés, car je ne domine pas les techniques d'intégration ; J'avais des difficultés ; J'avais des difficultés, pour absence de connaissances sur le sujet ; 8. Toutes. 	<ol style="list-style-type: none"> ... ; ... ; J'ai fait une recherche dans les livres, mais ce n'était pas suffisant pour résoudre les problèmes ; Aucun ; Papier/crayons ; Livres de calcul (analyse) ; Livres ; Aucun.
Qs4. Domaines ou concepts mathématiques importants pour	Qs5. Un avis sur les environnements d'enseignement et d'apprentissage	Qs6. Auto validation sur les connaissances acquises ou en

les IM		acquisition sur les IM (Faible, Moyen, Fort)
<ol style="list-style-type: none"> 1. Connaissance de la géométrie dans l'espace (R3) ; Connaissance sur les intégrales doubles et triples ; connaissance sur les équations différentielles et intégrales ; 2. Intégrales itérées ; 3. Intégrales triples et le calcul différentiel ; 4. Intégrales ; volume ; géométrie spatiale, et autres ; 5. Je n'ai pas de connaissances ; 6. Géométrie analytique et intégrales multiples ; 7. Assez de connaissance de la géométrie dans l'espace, des intégrales double et triple ; 8. Volume, géométrie spatiale, intégrale, trigonométrie, calcul différentiel. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. ... ; 2. ... ; 3. Dans la plupart des cours on utilise le tableau noir, mais on devrait avoir d'autres ressources qui pourraient dynamiser les cours ; 4. Dans nos écoles les outils les plus utilisés dans l'enseignement des mathématiques sont le tableau, papier/crayon. L'ordinateur est moins utilisé à cause de l'absence des ordinateurs et de la qualification des professeurs pour utiliser ces instruments ; 5. ... ; 6. L'informatisation et l'utilisation des logiciels éducatifs viabilisent la compréhension et la visualisation de concepts traitée dans la théorie de l'analyse mathématique. Ils sont des instruments importants dans l'apprentissage des étudiants. 7. ... ; 8. ... ; 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Faible ; 2. Moyen. Car je devrais me dédier beaucoup au cours si je ne travaille pas ; 3. Faible. Il y avait quelques problèmes pendant les cours comme la grève des enseignants, par exemple, ce qui empêche le progrès des nos activités ; 4. Faible ; 5. Faible ; 6. Faible - Car les cours de calcul différentiel et intégral, notamment celui des IM ne sont pas arrivés à propos ; 7. Faible ; 8. Moyen.

Opinions des enseignants (UESC)

Qs1. Vérité des solutions données	Qs2. Difficultés rencontrées dans la résolution des exercices	Qs3. Méthodes et outils utilisés dans la résolution des exercices
<ol style="list-style-type: none"> 1. Seulement le premier exercice que j'ai essayé de faire avec un peu de confiance ; 2. Non ! ce n'était pas possible de résoudre les problèmes. 3. Je crois que oui ! 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Difficultés à visualiser les surfaces. Donc je ne suis pas arrivé à trouver les domaines de définition ; 2. Absence des connaissances sur le sujet ; 3. Les difficultés sont surtout liées à l'impossibilité de la visualisation des figures géométriquement. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. J'ai utilisé seulement le papier/crayon ; 2. Recherche dans les manuels, mais ce n'était pas suffisant pour résoudre les problèmes ; 3. Papier/crayon.
Qs4. Champs ou concepts mathématiques importants pour les IM	Qs5. Un avis sur les environnements d'enseignement et d'apprentissage	Qs6. Auto validation sur les connaissances acquis ou en acquisition sur les IM (Faible, Moyen, Fort)
<ol style="list-style-type: none"> 1. Connaissances des fonctions de plusieurs variables, intégrales doubles et triples ; 2. Construction graphique, connaissance sur les solides géométriques, intégrales doubles et triples ; 3. Intégrales multiples (doubles et triples), coordonnées polaires, cylindriques, sphériques. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Je crois que pour une bonne visualisation et compréhension des concepts, la combinaison des travaux menés dans l'environnement papier/crayon, tableau, l'ordinateur et les logiciels serait assez efficace ; 2. L'utilisation des ordinateurs serait excellente, et donc devrait être présente dans les institutions d'enseignement de mathématiques ; 3. ... 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Moyen. Je crois avoir une bonne approbation à l'époque où j'ai suivi le cours des IM ; 2. Moyen ; 3. Moyen, je crois que je dois rappeler des concepts, faire beaucoup d'exercices pour avoir une bonne connaissance.

(DME - UFCG) : Entretien

Portugais

"... existem problemas aqui, de fato : mesmo que o aluno saiba a teoria, como é que ele vai calcular o volume via integral dupla ou tripla... ele precisa basicamente saber como se transforma uma integral múltipla em integral iterada... isso depende essencialmente da visualização do sólido ... depende da geometria do sólido. Essa passagem é bem

Français

... Réellement des problèmes existent ici : même si l'étudiant connaît la théorie, comment calculera-t-il le volume via intégrale double ou triple. Il a besoin à la base de savoir comment se transforme une intégrale multiple par une intégrale itérée. Cela dépendra essentiellement de la visualisation de la géométrie du solide. Ce passage est bien compliqué, soit l'étudiant a

complicada... ou você tem uma visualização ou fica muito difícil. Em geral o aluno... principalmente o aluno da engenharia teria que ter essa visão no espaço (habilidade essencial do engenheiro). Mas ele não a tem porque o ensino da geometria no 2º grau praticamente não existe mais hoje em dia. Então existe essa dificuldade. Mas também para ele ver essas coisas no espaço via computador ele precisa de ter habilidade algébrica..."

Então são duas coisas :

- A capacidade de manipular o programa e ter
- Habilidade algébrica para tirar informações das equações que definem a geometria do sólido, para obter uma visão do sólido adequado.

Porque se ele não tiver, ele não vai conseguir trabalhar com o computador. A noção de perspectiva ... que vai pegar um sólido e vai o projetar num plano mais adequado, se é no plano Oxy , se é no plano Oxz , se é no plano Oyz . Essa noção de perspectiva também é uma coisa interessante... são várias coisas que ele precisa ter para ele resolver o problema.

Por exemplo : o problema como esse aqui, não é fácil (ele aponta ao 2º problema do teste). Essa aqui também não é fácil de visualizar (ele aponta ao terceiro exercício no papel). Essa aqui é fácil (primeira questão)... Mas é essa dificuldade que a gente sente. Eu tentei trabalhar com o computador ... Trabalhando com *Maple*. Basicamente usando *Maple* para a visualização de superfícies e sólidos. Tem algumas rotinas, você conhecendo os limites de integração, as variações x , y e do z , você monta o sólido. O projeto do sólido... desenhar o sólido no espaço... Mas existem algumas dificuldades porque não temos o laboratório com máquinas suficientes para eles (estudantes) interagirem com os programas e começarem a descobrir coisas novas.

Outra coisa interessante é que você tem uma melhor visualização se você pegar as superfícies e representá-las na forma *paramétrica*. Que é a melhor maneira de você ter uma boa visualização. A representação implícita não é lá essa coisa. E a forma paramétrica fica uma visão bem melhor... Outra coisa você encontra as mudanças de coordenadas adequadas, baseando-se na visualização.

Mesmo que o aluno visualiza esse tipo de sólidos que são definidas a partir de equações, ele precisa ter um pouco de percepção geométrica. Porque parametrizar uma superfície é mais uma habilidade algébrica. Mas ele saber qual a parte da superfície é essencial na construção da fronteira do sólido, aí é o \mathbf{q} da questão. Porque você pode dar três equações que delimitam o sólido e ele não conseguir enxergar o sólido a partir dessas três equações manipulando com o computador.

une visualisation du problème, soit cela reste très difficile à faire. En général l'étudiant, principalement l'étudiant ingénieur, devrait avoir cette vision dans l'espace (habilité essentielle de l'ingénieur). Mais il ne l'a pas, car actuellement, l'enseignement de la géométrie dans l'enseignement secondaire n'existe pratiquement plus. Donc il existe cette difficulté. Mais aussi pour voir ce type de choses dans l'espace via l'ordinateur, l'étudiant a besoin d'avoir une habilité algébrique.

Alors sont deux choses :

- La capacité de manipuler le logiciel et avoir
- Habilité algébrique pour retirer des informations des équations qui définissent la géométrie du solide, pour obtenir une vision du solide approprié.

Parce que s'il ne l'a pas, il ne va pas réussir à travailler avec l'ordinateur. La notion de perspective... où il (l'étudiant) va prendre un solide et va le projeter dans un plan plus ajusté, qui se soit le plan Oxy , ou le plan Oxz , ou encore le plan Oyz . Cette notion de perspective est aussi une chose intéressante. Il y a beaucoup des choses que l'étudiant a besoin pour résoudre le problème.

Par exemple : l'exercice comme celui-ci, ce n'est pas facile (il montre le deuxième exercice sur papier). Cela aussi n'est pas facile à visualiser (il montre l'exercice 03). Celle-ci c'est facile (1^{er} exercice). Mais c'est ça la difficulté que l'on perçoit. Moi j'ai essayé de travailler avec l'ordinateur, en travaillant avec *Maple*. Basiquement avec *Maple* pour la visualisation de surfaces et les solides. Il y a quelque démarche en connaissant les limites d'intégration, les variations de x , y et de z , tu arrive à construire le solide. Le projet du solide... tracer le solide dans l'espace... Mais existent certaines difficultés parce que l'on n'a pas des machines suffisantes pour les étudiants interagirent avec le logiciel et commencer à découvrir les nouvelles choses.

Autre chose intéressante c'est que, tu auras une meilleure visualisation si tu prends les surface et les représenter dans la forme *paramétrique*. Qu'est la meilleure manière d'avoir une bonne visualisation. La représentation implicite ce n'est pas une grande chose. Dans la forme paramétrique la vision devient meilleure. De plus, tu trouves les changements de coordonnées en s'appuyant sur la visualisation.

Même si l'étudiant visualise ce type de solides qui sont définis à partir d'équations, il a besoin d'avoir un peu de perception géométrique. Parce que paramétrer une surface est plus qu'une habilité algébrique. Mais savoir quelle partie de la surface est essentiel dans la construction du contour du solide, est le \mathbf{q} de la question. Parce que tu peux donner trois équations qui délimitent un solide et l'étudiant n'arrive pas voir le solide à partir de trois équations en les manipulant

Você tem que saber quais são, exatamente, as partes de superfícies a cortar. Ou seja, qual é o domínio de variação dos parâmetros que você vai apresentar no computador para ele desenhar os pedaços adequados para se visualizar o sólido. Mas é um trabalho que exige uma orientação do professor e a dedicação do aluno e ter um ambiente adequado para trabalhar.

... mesmo o *Maple* que é um programa relativamente amigável em relação aos outros, você tem que ir trabalhando e amadurecendo as idéias. Hoje em dia eu já tenho uma certa habilidade que a partir das equações fazer o sólido. Mas o aluno que não tem esse maturidade... a não ser que você desenvolva rotinas apropriadas para essas coisas. Mas você não vai deixar de ter esse trabalho de manipulação algébrica... para poder enxergar...

Quando você pega um sólido que tem uma projeção regular num dos planos coordenados, a descrição do sólido é simples... x , y e z acabam sempre nos intervalos de limites fixos... Mas quando o sólido não tem uma projeção regular aí você tem que saber como cortar. Aí, a visão espacial é extremamente necessária.

Você tentou de resolver algum desses exercícios?

Não! cheguei de resolver nenhum exercício específico, mas... essa aqui, não escrevi, mas é fácil (primeira questão)... você tem um corte aqui, um corte aqui. A parte central é um cilindro, e a outra parte você tem a projeção regular de um anel. Você vai pegar aí embaixo um anel. Usando coordenadas polares ele sai fácil.

Esse aqui (terceira questão) quando vai descrever o sólido... As vezes quando você não escreve as equações de forma correta dá margem a várias interpretações. Você pode ter uma interpretação e outra pessoa uma outra interpretação. Nessa, a equação disse que o y é negativo... que o x é positivo. Nessa daqui você tem z positivo, e nessa daqui você tem o y igual a zero. Então o y passa de negativo para positivo e você tem o z igual a zero, que faz uma seção que está limitado por esses dois... Na verdade você tem dois sólidos sobrepostos... é como se pegasse isso aqui e colocar em cima do outro.

Essa aqui (quarta questão) você tem dois paraboloides e dois cones... mas eu não cheguei a desenhar no papel porque... tem eixo de simetria... aqui o eixo de y ... são dois assim... você tem esse daqui. Esse daqui é 8... aqui é menos, está para esquerda...então você já tem aqui uma região do espaço delimitado por esses dois... e agora você vai olhar para esses dois cones que seria o que ? y igual a 3 mais... esse outro é 5... estaria para cá... então você tem esses dois sólidos. Agora se esse

avec l'ordinateur. Tu dois savoir exactement les parties de surfaces à découper. C'est-à-dire quel est le domaine de variation des paramètres que tu vas présenter par l'ordinateur pour qu'il trace les morceaux adéquats du solide. Mais c'est un travail qui exige une orientation de l'enseignant, la bonne volonté de l'étudiant et d'avoir un environnement approprié pour travailler.

... même le *Maple* qui est un logiciel relativement amical par rapport les autres, tu dois travailler fréquemment pour nourrir les idées. De nos jours j'ai une certaine habilité qu'à partir des équations j'arrive à construire un solide. Mais l'étudiant qui n'a pas cette maturité... à moins que tu développes de méthodes appropriées pour ces choses. Mais tu ne vas pas cesser d'avoir ce travail de manipulation algébrique... pour pouvoir visualiser...

Quand tu prends un solide qui a une projection régulière dans des plans des coordonnées, la description du solide est simple... x , y et z finissent toujours dans les intervalles de limites fixes... Mais quand le solide n'a pas une projection régulière là tu dois savoir comment découper. La visualisation spatiale est extrêmement nécessaire.

Tu as essayé de résoudre quelques uns des exercices ?

Non ! J'ai ne suis pas arrivé à résoudre aucun exercice spécifique. Mas... ça par exemple, je ne le pas écrit, mais c'est facile (première question)... t'as un découpage ici, un découpage là. La partie centrale est un cylindre, et l'autre partie tu as une projection régulière d'un anneau. En utilisant les coordonnées polaires t'arrive facilement.

Cela (troisième question) quand tu vas décrire le solide... De fois si tu n'écris pas correctement tu donnés une marge de plusieurs interprétations. Tu peux avoir une interprétation et l'autre personne une autre interprétation. Celle-ci, l'équation dit que y est négatif ... x c'est positif. Celle-ci, tu as z positif, et celle-la t'as y égal à zéro. Donc y change de négatif par positif et t'a z égal à zéro qui fait une section limitée par ces deux-là... En vérité t'as deux solides superposés... c'est comme mettre ce-ci sous l'autre.

Celle-ci (quatrième question) tu as deux paraboloides et deux cones... mais je ne suis pas arrivé à dessiner dans le papier parce que... il y a l'axe de symétrie... ici l'axe de y ... sont deux comme ça... t'as celui-ci. Celui-ci c'est 8... ici est moins, est ver la gauche... donc là t'as déjà une région de l'espace délimité par ces deux-là... et maintenant tu vas regarder les deux cônes qui sont quoi ? y égal à 3 plus... celui-là est 5... serait pour ici... donc tu as ces deux solides. Maintenant si celui-

estiver contido dentro desse... alguém vai dizer que o sólido é esse daqui... Agora se esse outro tiver contido aqui, então o sólido é esse daqui...então estão deixando você enxergar quem é maior do que o outro... Você pode pensar assim, olha, se esse sólido... se o sólido limitado por esses outros dois... você está pensando o sólido como sendo... isso com esse buraco... porque quando você fala da intercessão do sólido que tem por essas superfícies comme fronteira...

là soit contenu à l'intérieur de celui-ci... quelqu'un va dire que le solide est celui-là... Maintenant si celui-là est contenu ici, alors le solide est celui-là... donc ils permettent de voir qui est plus grand que l'autre... Tu pouvez penser ainsi, regardez, si ce solide... si le solide limité par ces autres deux... tu penses le solide comme en étant... cela avec ce trou... parce que quand tu parle de l'intercession du solide qui a ces surfaces comme contour...

EXEMPLE D'INTERPOLATION

L'interpolation est une technique usuellement adaptée pour estimer les valeurs inconnues d'une fonction à partir de valeurs connues d'une telle fonction. Voici un exemple d'*interpolation linéaire*.

L'exemple suivant illustre l'interpolation linéaire dans le calcul d'un nombre qui manque dans le tableau fourni. Supposons que $f(x)$ est une fonction continue sur son domaine de définition. Le tableau ci-contre présente les valeurs de la fonction $f(x)$ pour quelques valeurs de x donnés.

x	$f(x)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	?
x_3	$f(x_3)$
x_4	$f(x_4)$

Pour chercher la valeur de $f(x)$ pour $x=x_2$, c'est-à-dire $f(x_2)$, on peut procéder comme suit :

Supposons que $f'(x_2)$ représente une valeur estimée à $f(x_2)$ et que $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. L'*interpolation linéaire* propose l'utilisation des composantes de x plus proches de x_2 pour estimer $f'(x_2)$. De ce fait on a:

$$f'(x_2) = f(x_1) \frac{(x_2 - x_1)}{(x_3 - x_1)} + f(x_3) \frac{(x_3 - x_2)}{(x_3 - x_1)}$$

Cette technique présuppose que $(x_3 - x_1)$ est assez petit, pour que la fonction puisse avoir un comportement linéaire dans cet intervalle.

ANNEXE

IIII

PROTOCOLE D'EXPERIMENTATION

SANS MAPLE

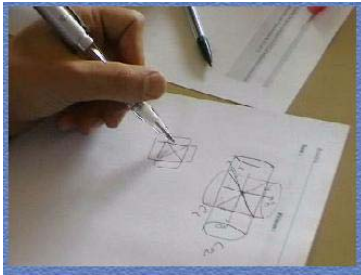


ANNEXE III : PROTOCOLE D'EXPERIMENTATION SANS MAPLE

Binôme 1 : Etudiant E1 et Etudiant E2

« Après une lecture de l'énoncé ce binôme trace tout de suite les deux cylindres C1 et C2 dans un repère orthonormé sur les brouillons (cf. image ci-dessous). C'est E1 qui fait le tracé »¹⁰⁵

Partie du Vidéo (PV) 01 (00 : 01 : 30)



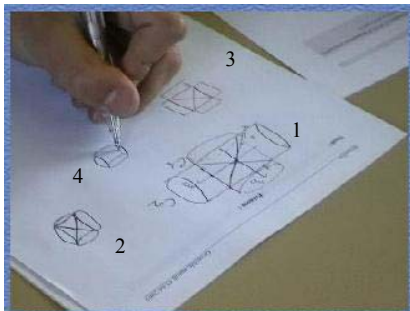
E1 : C1 $x^2 + y^2 \leq 1$, donc ça c'est C1, et C2 donc c'est $x^2 + z^2 \leq 1$, donc c'est pareil sur x ! **E2** : Ouais ! **E1** : Dans l'axe- y . Le volume, je sais plus exactement comment on calcule l'intersection des deux cylindres ; **E2** : C'est des ellipses ! **E1** : Non ! C'est un truc comme ça ! **E2** : Ah ! Ouais !

« E1 trace le dessin 2 et E2 le dessin 3 ci-dessous : »

E2 : On va partager en plusieurs volumes, quoi ! Il faut faire le volume de ce cylindre-là ; **E1** : En fait, ça c'est un carré quoi ! (E1 montre sur le dessin 3 ci-dessus et E2 trace un tel carré en rouge sur cet dessin). **E1** : En fait, c'est un bout de cylindre ! **E2** : Pas tout à fait.

PV 02, T(00 : 00 : 16)

E1 : En fait c'est calculer le volume de C1 et de C2 sur cette hauteur entre -1 et 1. Autrement ... **E1** : Je pense il faut diviser en 4 et calculer le volume d'un. Je vois pas trop la forme du truc. Déjà que c'est un cône ? **E2** : Je pense ! **E1** : Déjà il aura une base circulaire.

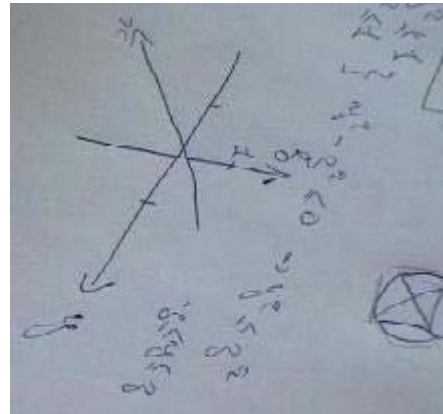


E1 : En gros c'est un truc comme ça quoi ! (Il trace le dessin 4). **E2** : En 3D ? **E1** : ça fait comme ça, le Q pour calculer le volume. Ça fait bizarre ! C'est compris dans le cube -1 à 1. De côtés deux quoi ! -1 à 1, -1 à 1 (il montre sur le dessin 1). On peut faire l'intégrale, je pense. Faut la fonction !

« C'est E1 qui écrit : »

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + z^2 \leq 1 \end{array} \right\} \text{Ça c'est équivalent donc à } y^2 - z^2 \leq 0.$$

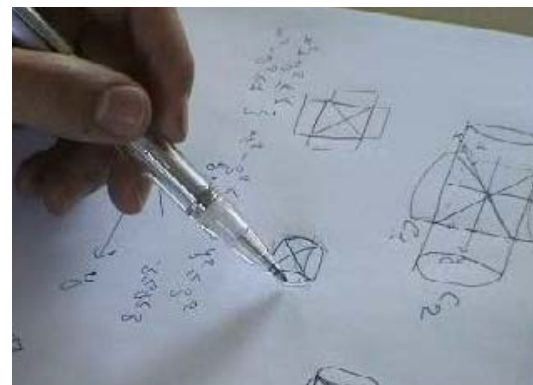
Donc y est compris entre $-z$ et z déjà. **E2** : Ouais ! **E1** : Tu vois si tu traces les axes, pour quel que soit z , supposons que z est 1 (Rires) ça paraît logique ! « C'est E1 qui écrit le suivant : »



E1 : Si on coupe un carré là ! Ça fait quel truc ? On coupe comme ça, ça fait une base circulaire, mais... Euh ! Euh ! « E1 montre la partie indiquée par le flèche dans le dessin 4 ci-dessus et trace le dessin ci-contre, E1 fait encore une lecture de l'énoncé »



E1 : Ah ! Je ne sais pas ! Enfin pas une sphère mais ça fait une sorte de sphère quoi ! ...Le volume c'est quoi ? C'est intégrale triple ? Si on prend cette surface « E1 indique une telle surface sur le dessin 2, comme le montre son geste ci-dessous »

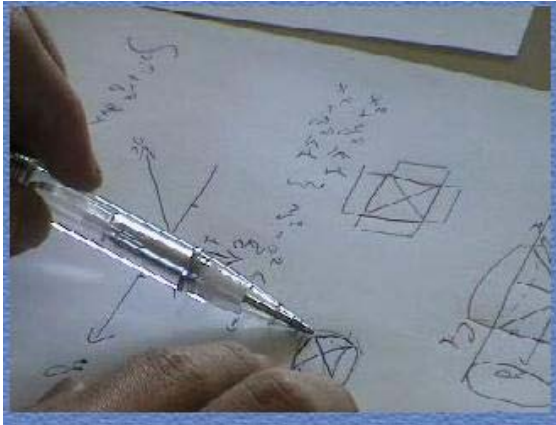


¹⁰⁵ «...» : Interventions d'observateur

E1 : Si on prend cette surface, l'intégrale de cette surface sur cette... En fait ! **E2** : Ouais ! **E1** : Cette surface là, c'est x^2+z^2 on fait l'intégrale de ça sur dy . En fait sur y il faut intégrer entre ça et ça ! Non ? Je ne sais pas ! « *E1 écrit l'intégrale ci-dessous, et ensuite il montre sur le dessin 4, le domaine dans le quel ils font l'intégrale* ».

$$\int x^2 + z^2 dy$$

On intègre ça ! Entre ça et ça « *C'est E1 qui montre le domaine sur lequel ils cherchent à calculer le volume, en s'appuyant toujours sur le dessin 2* ». Je ne sais pas ! Parce que ça c'est quoi ? C'est $x^2+y^2=1$ (*Rires*).



E2 : En coordonnées polaires ! **E1** : En polaires ? **E2** : Hum ! [...]; **E1** : Tu vois que c'est l'intégrale ! Si on trouve la surface... Euh ! Euh ! C'est la surface qui est là en fait ! « *E1 s'appuie toujours sur le dessin 2 et montre la partie de la surface qu'il se réfère* » **E1** : Quant on a un cercle comme ça ! Un truc comme ça ! En fait quand ils se coupent comme ça ! Ça fait un truc bizarre quand même (*Rires*). Le truc que j'avais dit ce n'était pas quand même pas mal quoi ! Trouver la bonne équation quoi !

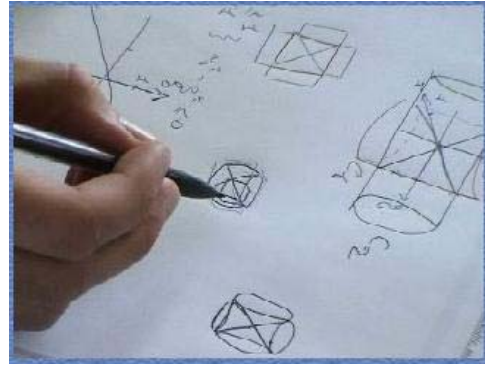


C'est E1 qui fait le dessin ci-contre pour montrer les courbes d'intersection des deux cylindres quand il dit : en fait ils se coupent comme ça !

PV 03, T(00 :00 : 08)

E1 : Parce que l'autre on peut couper en petit je veux dire on prend un quart d'aire, la moitié et la moitié quoi ! En gros sur un demi-cercle comme ça. **E2** : Après tu multiplies par ? **E1** : Par huit ? **E2** : Hum ! **E1** : En gros, tu peux couper comme ça !

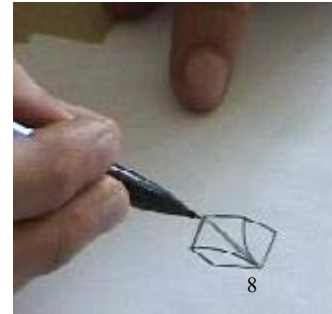
« C'est E2 qui fait un tel découpage en traçant un cube sur le dessin 4, comme le montre son action dans le dessin ci-dessous. »



E1 : Si on prend un quart de cercle ! Un quart comme ça « *E1 fait le tracé 7 -cf. brouillon- et E2 trace le dessin 8 et dit* » : comme ça ?

E1 : Pour calculer ce volume, on peut juste le couper par deux ! « *Il montre le dessin 8 ci-dessous* » Et après... Euh !

Euh ! Il faut trouver une forme « *Ils centrent leur attention sur ce dessin 8 et restent en silence pendant un certain temps* ». En fait, faudrait vraiment arriver à définir cette forme. C'est un truc comme ça, en fait !



« E1 trace le dessin 9 - cf. brouillon ». Si on prend au dessus « Il montre avec le crayon un mouvement du haut vers le bas, sur le dessin 8, et trace le dessin 10 - cf. brouillon ».

C'est un truc comme ça ! Comme ça quoi ! **E2** : Hum ! **E1** : En fait c'est le volume du cylindre-là, plus le volume qui est là. « *Silence* ». **E1** : En fait ça fait un volume assez bizarre, comme ça !

« E2 trace le dessin 11 (cf. brouillon), et la compare avec le dessin 9, en faisant un geste d'aller retour entre les deux dessins avec le crayon »

E1 : De toute façon, faut faire ça avec l'intégrale, bien sûr ! **E2** : Hum ! **E1** : En fait il faut commencer par surface, on intègre, en fait l'intégrale, x et z sur cette surface t'intègres y sur cette surface entre les deux courbes ! « *Il fait les gestes au tour de le dessin 4 pour montrer la surface à laquelle il se réfère* ».

PV 04, T(00 :00 :28)

E1 : Bah ! Ça fait quoi, intégrale triple, donc de...

Euh ! De quoi ? « *E1 écrit le symbole de l'intégrale triple ci-contre et ensuite l'efface* » En fait, je pense que l'on peut même prendre l'intégrale simple ! Parce que ça c'est ...

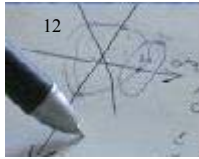


Facilement quoi ! **E2** : Hum ! **E1** : Parce que c'est

l'intersection de la sphère de centre 0 de rayon 1 et de plan entre là quoi « Il montre une telle sphère et le plan en faisant un mouvement circulaire sur le dessin 4 ». En gros c'est z égale à un, $x^2+y^2+z^2=1$ intersection des plans en fait, comme ça ! Et en gros c'est $x^2+y^2=0$.
« Il écrit le système ci-dessous : »

$$\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=0 \end{cases}$$

E1 : C'est ça ? **E2** : Ouais ! **E1** : C'est quoi ça ? Ce n'est pas tellement ça en fait ! C'est bizarre ! « Ils réinterprètent le dessin 4 » **E1** : Nous on a une sphère de ce centre là, comme ça ! C'est la sphère de centre zéro et de rayon... **E2** : 1 ; **E1** : Rayon 2 peut être, c'est l'intersection de... Euh ! Remarque, c'est l'intersection de ce plan et de cylindre ! C'est C1 en fait « ils font le dessin ci-dessus ».



E1 : Donc en gros c'est :

$$\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases} \quad \text{« cf. brouillons. »}$$

E1 : Ça c'est un cercle !

« Il montre la deuxième équation ». Donc ce cercle en fait sur z . On a l'intégrale de $\int x^2+y^2 dz$, pour z qui varie entre... Euh ! Euh ! -1 et 1 « Il montre cette variation de z sur le dessin 4 ». **E1** : En fait, on intègre entre ce cercle-là et ce cercle-là ! « Il montre ces cercles sur le dessin 12 ». En gros, ça fait un truc $dx dy dz$, y centre entre -1 et 1, puis x aussi, ça fait ce carré « il écrit l'écriture ci-dessous : »

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy dz \quad \text{« cf. brouillons. »}$$

E1 : En fait, on va intégrer un truc comme ça en fait ! Un truc comme ça « il trace le dessin 13 - cf. brouillons » on va intégrer un cylindre en fait ! **E2** : Hum ! **E1** : J'aurai le volume d'un cylindre en fait ! **E2** : Hum ! **E1** : Ce n'est pas ce qu'on cherche malheureusement ! Ah ! C'est bizarre !

PV 05, T(00 :01 : 18)

« Quelle est votre idée ? »

E1 : Ils sont plusieurs en fait !... Faut couper la surface avec les symétries « E1 montre le dessin 4 avec le stylo ». Pour avoir le volume minimal et après calculer par intégration.

« Et qu'est-ce qui vous manque maintenant ? **E1** : L'équation à intégrer quoi ! « Quels moyens vous avez pour trouver une telle équation à intégrer ? (Silence) Pourquoi vous avez fait ce dessin ? » **E1** : Pour connaître le volume et ce qu'il faut pour calculer l'intégrale. « Silence ». « Bon ! Continuons (Silence) ». **E1** : Il faut intégrer ce truc-là, en fait ! « Il monte le système qu'ils ont développé plus haut reproduit ci-dessous ».

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x^2+z^2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2+z^2 \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq z^2 \\ -z \leq y \leq z \end{cases}$$

E1 : Et du coup [...] on a intégrale de $-z$ à z , dy et après... Euh ! **E2** : Hum ! **E1** : $dz dx$! « Il écrit sur le brouillon le résultat suivant : »

$$\int \int \int_{-y}^y ? dy dz dx$$

E1 : « inaudible » Paramètres ? ... fait quoi ? Deux x deux, plus y deux, plus z deux, inférieur ou égal à deux en fait ! **E2** : Ouais ! « E1 écrit l'inégalité suivante »

$$2x^2+y^2+z^2 \leq 2$$

E1 : Ca c'est ellipsoïde. **E2** : Hum ! **E1** : Parce que si c'était 1, ce serait une sphère ! « E1 montre le coefficient de x^2 » ; **E2** : Hum ! **E1** : En fait c'est une sphère qui est décalée à côté, donc c'est un ellipsoïde ! En fait, c'est x deux, plus y deux sur deux, plus z deux sur deux, égal à zéro ! Ça, ce serait un ellipsoïde ! « E1 écrit l'inégalité suivante : »

$$x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 0$$

E1 : En fait c'est un ellipsoïde... Euh ! De révolution ! **E2** : Hum ! (Silence) **E1** : Et tant qu'on a ça, y deux, égale à z deux, on peut trouver que x deux, plus y deux égale à zéro « E1 écrit l'équation suivante : »

$$x^2+y^2=0$$

PV 06, T(00 :00 :14)

E1 : Au lieu de zéro c'est un « E1 corrige les deux dernières équations ci-dessus, en remplaçant zéro par un - cf. aussi les brouillons ». **E2** : Hum ! **E1** : Cette partie-là n'est pas un cône ? « E1 montre une telle partie sur le dessin 4 -cf. geste ci-dessous ».



E2 : Un cône ! **E1** : ça fait un truc bizarre en fait !

(Rires)

(Silence)

E1 : Il faut trouver la fonction... Euh !

Euh ! La fonction à intégrer quoi ! En fait... Tout à l'heure un cercle ! On intègre en fait z entre... Euh ! Euh ! Ça et ça ! « Il montre sur le dessin 4 avec le stylo ». Entre ce demi-cercle et ce demi-cercle quoi ! **E2** : Hum ! **E1** : Ah ! Je sais pas ! (Silence). **E1** : En fait si on prend ça en polaire En fait ! **E2** : Hum ! (Silence). **E1** : Si on prend dans le plan $z=0$. Un truc comme ça, en $z=0$. En fait, comme ça, le cylindre C2 il sera... Un cercle comme ça quoi ! Non ? **E2** : Ouais ! (E1 trace le dessin 14 -cf. brouillon). **E1** : Donc en gros, le volume ne sera que le cercle !

Binôme 1 : Etudiants (E1), Etudiants (E2)

Ça je peux l'enlever en fait ! (Cf. action ci-dessous).

E1 : En fait, l'intersection avec un plan, c'est un cercle.

E2 : Hum ! **E1** : plan $z=0$ en tout cas ! ... T'as x deux, plus y deux, c'est un cercle. Et de même si $y=0$ d'ailleurs pour $y=0$ on aura un truc comme ça, avec un cercle au-dedans ! « E1 trace le dessin 15 -cf. brouillon »



E2 : Si z est constant, 2 mettons, on aura x deux, inférieur ou égal à moins trois ; **E2** : Hum ! **E1** : Donc c'est bizarre quoi ! (Rires). **E1** : En fait, c'est x deux, plus trois, négatif ! C'est impossible. Dès qu'on passe aux équations d'un cercle... z égal à constante, ce n'est pas possible. **E2** : Hum ! **E1** : Ce n'est pas normal « C'est E1 qui écrit les expressions de l'encadré 16- cf. brouillon »... Un truc bizarre, quoi ! En fait il faut voir si z est constante on aura un carré, rectangle pour le cylindre C2, plutôt, c'est plutôt... Euh ! En gros, on aura tout le temps un cercle, de toute façon ! A priori ! (Silence); Je ne sais pas ! Parce que, qu'est-ce que t'en penses toi ? **E2** : [...]; **E1** : Peut être, en fin ! Parce que là... Donc l'intersection des cylindres... Le cylindre rouge c'est toujours un cercle, de toute façon !

PV 07, T(00 : 00 : 31)

E1 : Même si ce n'est pas un cercle de même rayon que l'autre ! **E2** : Hum ! **E1** : Ou même une ellipse, peut-être ! (Silence) En fait je pense qu'il faut intégrer ce cercle entre... Euh ! Euh ! Je ne sais pas ! C'est bizarre ce truc ! **E2** :



Hum ! **E1** : En fait, c'est un cercle fini par des bords droits quoi ! « Il marque des tels bords sur le dessin- cf. action ci-contre », entre comme ça quoi ! Parce qu'en fait... Euh ! Euh ! Ça fera les bouts des cercles,

ces côtés de cercle (Il montre le dessin 1) entre là et là ! **E2** : Hum ! **E1** : En fait, il faut intégrer ça (Il montre le dessin ci-contre) entre en bas et en haut ! Entre -1 à 1 quoi, sur z ! En fait, sur cette surface déjà, qu'est-ce qu'on sait sur cette surface ? (Il montre le dessin ci-dessus) (Silence). On sait, c'est l'intersection ! On sait que ce plan-là, c'est $y=1$ et $y=-1$ (cf. dessin 17, brouillon). Ce cercle-là ! Ça fait bizarre quand même, ces bouts de cercles ! Parce que c'est les bouts du cercle $x^2 + y^2 = 1$. Donc c'est l'intersection de ça et de $y=-1$ et de $y=1$ « E1 écrit donc le système 18 sur le brouillon, qu'on a reproduit ci-dessous ».

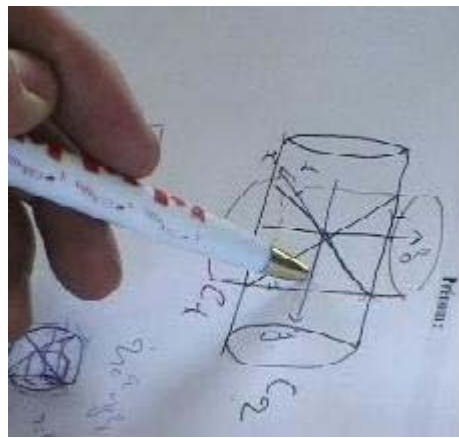
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

E2 : En fait les plans sont tangents à ce cercle ! **E1** :

Quel cercle ? **E2** : Celui-là ! **E1** : Ah ! En fait, c'est ça. Je vois ce que tu veux dire ! (E2 montre la première équation du système ci-contre). **E1** : Ah ! Ce n'est pas ça en fait ! C'est ça en fait ! Un truc tangent ! (Il trace le dessin 19 cf. les brouillons). Ce n'est pas ça en fait ! L'intersection c'est un plan comme ça, comme ça, ou un cercle un peu, comme ça, comme ça.

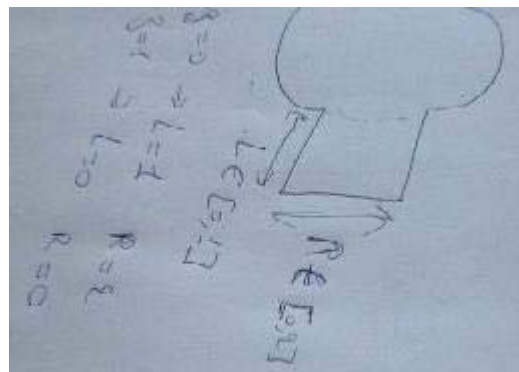
C'est un truc comme ça ! **E2** : Hum ! **E1** : Tu vois, si tu regardes c'est comme ça, ça fait... **E2** : Ah ! Oui ! « E1 montre le dessin 1 ci-contre ».

E1 : C'est bien compliqué ! **E2** : Hum ! (Silence). En fait... **E2** : On va refaire ce truc là ! (Ils grandissent le dessin 20, en traçant le dessin 21, cf. les brouillons). **E1** : En fait, cette distance qu'on a là, je l'appelle L... Parce qu'en $z=1$ on aura un cercle ! (Il montre le dessin 4).



PV 08, T(00 : 00 : 18)

E1 : Et en $z=0$ on a un rectangle ! **E2** : Hum ! **E1** : En fait quand z augmente, ça, ça diminue ! « Il montre la distance qu'il appelle L -cf. dessin 21, dans les brouillons ». Et Quand z diminue jusqu'à zéro... Euh ! Euh !... Est-ce que on peut intégrer ça ? « Il parle de le dessin 21 »... Lui va être entre 0 et 2, et y entre 0 et 1, d'accord ? (cf. dessin 21, que l'on a reproduit ci-dessous). **E1** : On sait que $z=0$, implique $L=1$, $R=2$ et $z=1$, implique $L=0$, $R=0$; **E2** : Hum !



E1 : En fait... Si z est linéaire... Sont linéaires quoi ! **E2** : Hum ! **E1** : [...] je pense. Là, si tu prends z et x (il trace le dessin 22, cf. brouillon), L va être entre là et là quoi ! (Il montre un tel dessin sur le dessin 1). Ce triangle là, c'est ça, en fait ! C'est de savoir si ce

triangle est linéaire ou non ! **E2** : Hum ! Comme ça ! (C'est E2 qui trace le dessin 23 -cf. les brouillons). **E1** : R ne peut être pas linéaire, mais L est linéaire, ça c'est sûr ! **E1** : [...] $L = -L + 1$ quand tu fais la somme ça marcherait ! (Il montre les équations -cf. dessin ci-dessus). Donc et puis $L + z = 1$, en fait ! Il faut faire ça en fait ! $L + |z| = 1$. Si on intègre ce triangle-là, ça marche ! Mais... Euh ! Euh ! En gros, on intègre L entre 1 et 0. R par contre... En fait ce n'est pas tellement compliqué, parce que t'as z ici, t'as 0 et z, ici on a R, donc $z^2 + R^2 = 1$. Donc R égal racine de 1 moins z deux (Il écrit le suivant :

$$R = \sqrt{1 - z^2} \leftarrow z^2 + R^2 = 1 \Big|$$

Donc ! **E2** : [...] **E1** : Ah ! Bah ! Plus ou moins quoi ! Donc du coup, L est en fonction de z, mais... Euh ! Euh ! Donc il faut intégrer quoi ! (Rires). **E1** : En gros, il faut intégrer entre -1 et 1, dz. Intégrer quoi, par contre ? (Il écrit le résultat suivant :

$$\int_{-1}^1 dz$$

Cette surface-là ! (Il montre le dessin 20, cf. le brouillon). Je sais que là on a aussi L de ce côté-là, là on a encore R, donc... Euh ! Euh ! Ça sera, là on aura 2-L. Donc, en gros, on aura... Euh ! Euh ! 2R plus deux fois le cercle de diamètre !

E2 : Si tu prends demi-cercle ; [...] le cercle ça sera ça en fait ; **E1** : Oui, je suis d'accord ! Mais ça c'est le cercle de rayon 1... En fait, ce cercle c'est x deux, plus y deux, égale à 1 ? **E2** : Ouais !

E1 : Puisque, attends, ça c'est deux fois Pi, fois un moins z sur deux, carré (Il écrit ce qui suit :

$$2R + 2\pi \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2$$

PV 09, T(00 : 00 : 14)

E1 : En fait, ça c'est demi-cercle de rayon ça.

E1 : C'est une approximation ! Ça fait, deux fois racine de 1 moins z carré, plus deux Pi. (Il écrit »):

$$2\sqrt{1 - z^2} + 2\pi$$

E1 : Ensuite L c'est quoi ? Moins z plus 1, donc, -L ça fait z moins 1, sur deux, sur deux. (Il écrit :

$\frac{-L}{2} = \frac{z-1}{2}$. Donc 1 moins ça, donc un demi plus z sur deux, au carré. (Il écrit :

$$2\sqrt{1 - z^2} + 2\pi \left(\frac{1+z}{2}\right)^2$$

E1 : Donc ça fait l'intégrale de ça ! Donc, c'est

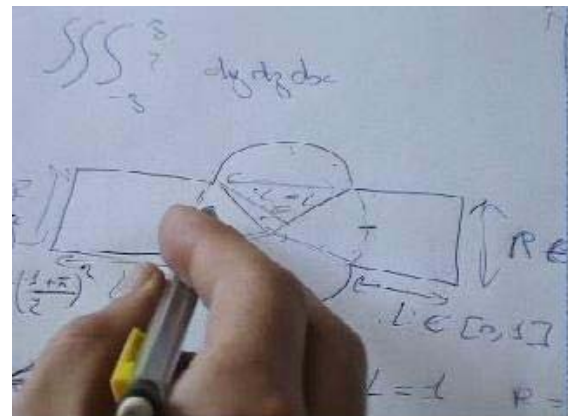
$$\int_{-1}^1 2\sqrt{1 - z^2} + 2\pi \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 dz$$

L'approximation de ce demi-cercle (Rires)

E1 : Bon ! Je te laisse, donc il y a encore deux parties à faire. Huit sixième de Pi, ça fait ... Euh ! Euh ! Quatre tiers de Pi [...] après c'est pratique quoi. Par contre, c'est deux fois, non ! Quatre fois, racine (il écrit).

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}\pi + 4 \int_0^1 \sqrt{1 - z^2} dz \\ & 4 \int_0^1 (1 - z^2)^{1/2} dz = \frac{8}{3} \left[(1 - z^2)^{3/2} \right]_0^1 \\ & = \frac{8}{3} \times -1 = -\frac{8}{3} \\ & \frac{4}{3}(\pi - 2) \end{aligned}$$

E1 : Quatre tiers, Pi moins deux, c'est positif ! **E2** : Ouais ! **E1** : Trois quatorzième moins deux, ça fait eh ! Un quatorzième ! **E2** : Hum ! **E1** : Bon ! C'est un truc... Euh ! Je pense que c'est l'approximation, parce que eh ! On a ce résultat, de toute façon ! Ce qu'on a trouvé c'est le résultat de ce cercle quoi, exactement ! (Il montre le dessin ci-dessous).



E1 : Sachant que... **E2** : De ce côté-là... **E1** : Donc cet angle-là et cet angle là ! Il faut trouver cet angle, vas y quoi !... Par contre tu peux faire comme ça quoi !

« Ils analysent le dessin ci-dessus et marquent les angles du triangle ».

PV 10, T(00 : 00 : 15)

Cet angle-là, alpha, thêta... (C'est E1 qui écrit les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{h}{a} \\ \tan \alpha &= \frac{h}{b} \end{aligned} \quad \text{cf. le brouillon.}$$

E1 : Ce côté c'est thêta, tangente de thêta, ça vaut h sur b... Ca vaut, donc ça fait, h sur tan alpha, (il écrit l'expression suivante :

$$aH = 1 = \frac{h}{\tan \alpha} + \frac{h}{\tan b}$$

Binôme 1 : Etudiants (E1), Etudiants (E2)

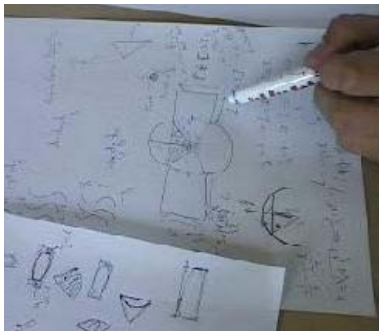
E1 : Alpha c'est quatre-vingt dix moins thêta sur deux : $\alpha = 90 - \frac{\theta}{2}$ donc... Euh ! Euh !
 $2\alpha = 180 - \theta$, et $\theta = 2\alpha - 180$ En fait $\tan \theta = \tan 2\alpha = \frac{\tan 2\alpha}{1}$.

PV 11, T(00 : 01 : 14)

E1 : ... Ca fait... Euh ! Euh ! Un virgule cinquante deux, peut-être ! Je ne sais pas ah ! Peut-être ! (Il conclut les calculs de l'intégrale qu'ils ont développée plus haut).

$$\frac{4}{3}(\pi - 2) \approx 1,52$$

E1 : C'est possible... Euh ! Ce n'est pas beaucoup ! C'est possible !... Calculer le volume à partir de le dessin comme ça, je ne sais pas comment on fait ! Il faut intégrer une surface ! Mais il faut trouver la surface ! **E2** : C'est très difficile ! « C'est terminé ? » **E1** : Oui, je pense ! **E2** : Oui ! « Comment vous avez fait pour trouver ce résultat ? » **E1** : En fait on a pris un plan parallèle... Un plan z égal à constante ! En fait on a un truc comme ça « il montre le dessin ci-dessous » c'est bizarre !



E1 : L et R... En fait, on fait une coupure par un

plan égal à une constante

« il fait un geste avec la main gauche dans un mouvement parallèle au plan xOy, comme le montre l'image ci-dessous ».



E1 : [...] et intégrer entre -1 et 1 par z. Donc là on a... En fonction de z ... Je dis que... Euh ! Euh ! Cette approximation, disons que là on avait deux demi-cercles ! De rayon... Euh ! La moitié ! De diamètre... Euh !



« Ça c'est pour voir le solide dans lequel vous avez cherché à calculer le volume, c'est ça ? »

E1 : En fait on a cherché à calculer la surface de ça pour intégrer... Euh ! Euh !...

« Bon ! Merci pour votre contribution ».

FIN

Brouillon p. 3

Nom :

Prénom :

$$\frac{4}{3} \pi + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} dz$$

$$4 \int_0^1 (1-z^2)^{-1/2} dz = \frac{8}{3} \left[(1-z^2)^{3/2} \right]_0^1$$

$$= \frac{8}{3} \times -1 = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3} (\pi - 2) \approx 1,52$$

Binôme 2 : Etudiant Redoublant ER et Etudiant E3

« Après la lecture de l'énoncé, les deux étudiants copient les inéquations des deux cylindres sur les brouillons ».

ER écrit :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases} \quad (e1)$$

E3 écrit :

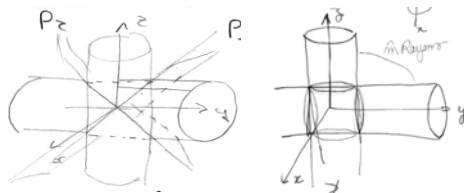
$$\begin{cases} C_1 : x^2 + y^2 \leq 1 \\ C_2 : x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases} \quad Q = C_1 \cap C_2 \quad (e2)$$

« Ensuite ER trace tout de suite les deux cylindres dans un repère orthonormé (cf. figure ci-dessous sans les plans P1 et P2). Et ensuite E3 l'interroge »

TC(018)

E3 : Comment tu peux faire ça ? ER : Ben ! $x^2 + y^2 \leq 1$ c'est... si on se place dans un plan xOy ; E3 : $z=0$ quoi ! ER : Ouais ! C'est vrai quel que soit z ; E3 : Et l'autre cylindre ... pareil pour y .

« Les deux font ainsi le même dessin sur les brouillons »



G1 : Production de ER

G2 : Production de E3

E3 : Il faut calculer le volume de ces trucs ! ER : C'est deux cylindres qui ont les mêmes rayons. E3 : Ouais !

TC(040)

E3 : De toute façon si tu regardes... Ah ! C'est ce qu'on va faire, c'est regarder sur un plan. Ça c'est un cercle.

ER : Ça donne quoi sur un plan quand on a... E3 : Si tu regardes l'intersection, donc ça va faire un cercle. Ah ! C'est busard (rires) ! Parce que si tu coupes ça, quand tu coupes comme ça, ça fait un cercle. Enfin je crois. Tu vois ce que je veux dire ? T'as un cercle sur le côté. En fait ça c'est le cylindre comme ça. ER : Mais ça, ce n'est pas un cercle ! E3 : Bah ! Si ! Ça c'est la même chose, que sur ce côté, de toute façon.

« L'étudiant E3 fait une grosse trace sur la figure pour exprimer ce cercle, cf. G2, ci-dessus »

TC(074)

ER : Parce que quand tu coupes ton cylindre avec un plan, ça fait un cercle, mais... E3 : Quand tu le coupes avec un autre cylindre ça ne fait pas un cercle ? ER : Ouais ! Regarde ! Les cylindres sont

de même diamètre, l'intersection des deux ça sera...

TC(083)

E3 : Tu peux dessiner deux trucs ? ER : Mais de toute façon y'a peut-être pas besoin ; E3 : Non ! On va faire plus simple. Là on a les cylindres. On va chercher des variables. On va passer en **polaire** ! ER : Ouais, je pense ! E3 : Et pour **changer les variables** il faut savoir... On va essayer. Par exemple là, on met l'ensemble de définition de... $f(x)$, y qui varie entre et après... un cylindre comme ça ! En polaire. $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (e3) ER : Là on met la variation de... Euh ! Euh ! Par exemple de x en fonction de... Euh ! Euh ! Y'aura du $\sin\theta$. E3 : Il faut faire du **polaire**, **rhô** carré puissance, **cos** carré et **z** carré ? ER : x carré plus y carré.

« C'est E3 qui écrit les expressions suivantes sur le brouillon : »

$$\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ x &= \end{aligned} \quad (e4)$$

$$\rho^2 \leq 1 \quad x = \rho \cos \theta$$

$$\rho^2 \cos^2 \theta + z^2 \leq 1$$

« Ensuite S exprime les deux cylindres par : »

$$\begin{cases} x = \rho_1 \cos \theta \\ y = \rho_1 \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho_2 \cos \theta \\ z = \rho_2 \sin \theta \end{cases} \quad (e5)$$

E3 : D'accord ! Moi je disais, on s'en fout de savoir si x est avec $\cos\theta$, et y est avec $\sin\theta$. De toute façon ! Je ne suis pas sûr pour celui-là en fait. ER : Au départ tu peux poser ce que tu veux ; E3 : Parce que je me suis dit, maintenant on va réfléchir sur chaque cylindre, on regarde le premier on va faire un changement des variables ρ_1 avec θ_1 et θ_1 . On regarde le deuxième on va faire un changement des variables ρ_2 avec θ_2 et θ_2 .

« E3 rajoute l'indice 1 dans le θ des deux premières expressions de E5 et l'indice 2 dans le θ des deux deuxièmes expressions, comme ci-dessous »

$w = z$

$$\begin{cases} x = \rho_1 \cos \theta_1 \\ y = \rho_1 \sin \theta_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \rho_2 \cos \theta_2 \\ z = \rho_2 \sin \theta_2 \end{cases} \quad (e5')$$

TC(170)

ER : Mais... Euh ! Déjà on peut simplifier. Euh ! Enfin... Euh ! Euh ! C'est pour ça que peut être les trucs [...] C'était déjà le même volume que l'an dernier (rires).

« Le redoublant se rappelle que c'est le même problème qu'ils ont résolu l'année dernière en utilisant Maple ».

E3 : Ah ! T'as déjà fait ?

« E3 est surpris de savoir que ER connaissait déjà le problème »

Binôme 2 : Etudiant Redoublant (ER), Etudiant (E3)

ER : Bah ! C'est ce qu'on avait fait avec Maple l'an dernier. **E3** : Depuis le début tu savais à peu près comment faire ! **ER** : Bah ! Bah ! En fait on a cherché l'intersection de ce cylindre avec celui-la. Si tu regardes là, ça fait, enfin... Euh ! La t'as deux droites. Mais dans l'espace ça fait deux plans.

« ER rajoute sur le dessin G1 - plus haut - les deux plans P1 et P2 comme il l'avait fait dans Maple »

ER : Tu les vois les deux plans ? **E3** : Comme ça, non ? Les deux plans comme ça ?

« Il fait les gestes avec les mains et trace les deux plans sur le brouillon séparément avec les deux cylindres (cf. dessin ci-dessous). »



(G3)

ER : Si tu définies tes bornes entre ces deux plans, ça c'est facile et après t'as plus que... si tu divises ton volume par 4, tu dis que c'est quatre parties égales. Après tu calcules plus que l'intégrale de ce volume-là. Après t'as plus qu'une seule dimension. Ouais ! C'est en cylindrique. Tu vois ?

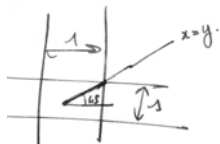
E3 : Ouais ! Mais il faut d'abord trouver les équations des plans ! (rires) Merci !

E3 : Donc mon idée de ρ_1 et ρ_2 , non ! Ecoute ! Euh ! Euh ! Logiquement ça serait un plan du type $y=z$ tu vois, ça serait un plan comme ça !

TC(210)

E3 : Tu vois ? **RE** : Oui ! Oui ! **E3** : Avec un angle de 45 quoi !

« E3 fait le dessin suivant » :



(G4)

E3 : Une droite $x=y$. Logiquement ça serait comme ça ! Regarde. Je me suis trompé ! Moi je suis en train de te dire que ça c'est 1, mais non ! Mais en fait c'est $\sqrt{2}$, si tu fais Pythagore (E3 montre la distance sur la figure ci-dessus) **RE** : L'angle c'est 45° ! **E3** : Oui, bon ! C'est ça que je te disais. **ER** : Donc... Euh ! Euh ! Déjà il y a... ; **E3** : Mais attends, là on se la joue, prof. de maths, on dit, on prend comme repère deux plans un peu sortis du chapeau magique. **ER** : Bah ! Disons que ça va être plus simple ! A mon avis, on a intérêt à simplifier notre cylindre.

« RE écrit sur le brouillon les équations suivantes »

$$\left. \begin{array}{l} y = z \\ y = -z \end{array} \right\} 2 \text{ plans} \quad (\text{E6})$$

TC(253)

E3 : y est égal à z ? **ER** : Oui.

Recherche des 2 plans :

$$\left. \begin{array}{l} \text{plan 1: } y = z \\ \text{plan 2: } y = -z \end{array} \right\} (\text{E7})$$

« D'où viennent ces équations ? »

E3 : Parce qu'on doit se placer dans un nouveau repère, qui serait par rapport à deux plans... Euh ! Euh ! Comment dire ! C'est mieux sur ton dessin ! On essaie d'exprimer en fait le volume de l'intersection des deux cylindres, par rapport à ces deux plans ! En supposant ! En fait ! On sait que, ce sera plus simple ! En fait le volume total c'est quatre fois le volume qui est là, en fait.

TC(269)

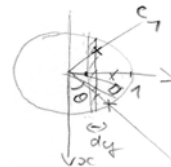
ER : Donc on a deux plans $y=z$ et $y=-z$! **E3** : Ouais ! **ER** : Et on intègre entre... Euh ! Euh ! **E3** : On peut faire le changement de variables. T'intègres entre quoi et quoi ? **ER** : Il faut d'abord qu'on prenne un repère qui marcherait avec ces plans-là ! **E3** : Nous on a un point M.

« E3 écrit le point M de coordonnées x, y et z sur son dessin, cf. figure ci-dessous : »

$$\left. \begin{array}{l} \text{plan 1: } y = z \\ \text{plan 2: } y = -z \end{array} \right\} (\text{G5})$$

E3 : On a un point $M(x,y,z)$ par exemple. Nous ce qu'on veut c'est exprimer M dans les deux plans. **ER** : T'as peut-être pas besoin ! Regarde ! Pour ton x fixé, ton y il se balade.

« ER montre la variation de y sur son dessin ci-dessous » :



(G5)

E3 : Ah ! Je vois ce que ça veut dire ! **ER** : Donc, ton y tu sais où il se balade [...]. **E3** : Ah ! $-y$ il me semble que c'est là ! [...] Tu ne crois pas !

TC(294)

ER : Non ! Mois ce que je voulais dire, c'est que... Attends ! **E3** : Qu'y'a un lien directement entre x et y ! **ER** : C'est facile à voir ! [...] Et après sur z , s'il est compris entre les deux plans ! Tu vois ? **E3** : Alors ! **ER** : Pour une position de y donnée, on peut facilement savoir z . **E3** : C'est comme ça tu veux dire ! **ER** : z sera compris entre y et $-y$. **E3** : Tu... x et y . Tu trouves la relation entre x et y . Après avec z , avec le plan. **ER** : Voilà ! Là t'as... T'intègres d'abord sur x , sur y , sur z . Et sur z les bornes c'est z compris entre $+y$ et $-y$. **E3** : Ouais, faut dire qu'on se place dans un quart de volume.

« E3 écrit sur le brouillon le suivant »

$$\text{Dans } \frac{1}{4} \text{ volume : } -y \leq z \leq y$$

ER : Bah ! C'est simple ça ! Enfin ! On va l'appeler P_1 et P_2 .

Il nomme les deux plans, sur. G1 (cf. plus haut). les deux expriment le volume du solide intersection par un texte, (cf. les brouillons).

RE : Là on peut peut-être passer en polaire. **E3** : De tout façon, ça change rien. Le problème c'est que la condition sur z , on l'a sur θ , pas sur ρ . **ER** : Ce n'est pas grave. On fera $\sin\theta$, $\cos\theta$.

E3 écrit le suivant :

$$\begin{aligned} \text{Dans } q : 1 \geq \rho \geq 0 \\ 0 \geq \theta \geq 2\pi \\ \text{et } -y \leq z \leq y \\ -\rho \sin\theta \leq z \leq \rho \sin\theta \end{aligned}$$

ER écrit le suivant :

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \\ y &= \rho \sin\theta \\ x^2 + y^2 &= \rho^2 \\ I &= 4 \times \int_{z=-\rho \sin\theta}^{z=\rho \sin\theta} \int_{\rho=0}^{\rho=1} \rho^2 \rho d\theta d\rho \\ &\quad -\rho \sin\theta \leq z \leq \rho \sin\theta \\ &\quad 0 \leq \rho \leq 1 \\ &\quad 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

TC(417)

E3 : De toute façon θ il est entre zéro et deux Pi ? (*Rires*); **ER** : [...]; **E3** : Je crois qu'on commence... Attends, attends, il y a un souci ! Non ! De toute façon, je sais pas si on a besoin de déterminer le Jacobien.

E3 : Par contre le souci, tu fais varier quoi en premier ? Parce que z dépend de ρ ... z en premier ; **ER** : Non ! **E3** : Tu ne peux pas faire varier z en dernier, parce que z dépend de ρ ; **ER** : Mais justement ! Faut que tu aies une grosse expression ; **E3** : Ah, mais t'as qu'à commencer par intégrale double avec x et y ; **ER** : Oui ! **E3** : Mais je comptais faire directement l'intégrale triple avec $\rho d\rho d\theta dz$

E3 écrit sur le brouillon le suivant :

$$\int \int \int_{z, \theta, \rho} \rho d\rho d\theta dz = \int \int \int_{\rho, \theta, z} \rho dz d\theta d\rho$$

E3 : Parce que hier (*dans le cours qu'ils ont eu avec leur professeur*) on a vu qu'on avait une fonction et un intervalle d'intégration. Donc nous, pour changer de variables, bah il nous faut, enfin, disons qu'on a trouvé à peu près le domaine d'intégration, mais on n'a pas la fonction. Tu vois ce que je veux dire ? Ça nous aide à trouver un domaine, mais on n'a pas la fonction. **ER** : Bah ! Ça va être ! **E3** : $f(x,y,z)$, sais pas !

« Vous cherchez quoi maintenant ? »

E3 : Nous ce que l'on cherche c'est le volume.

« Non ! Tout à l'heure ... » **E3** : Une fonction ! *« Pourquoi vous avez fait le dessin ? »* **E3** : Pour

que ce soit plus clair ! *« C'est-à-dire qu'il est déjà clair ? »* **E3** : Ouais ! (*Rires*); **ER** : Bah ! On intègre juste... Euh ! Euh ! Là on intègre sur tout le domaine. **E3** : Ce que tu veux faire c'est intégrer $\rho d\theta$ et après intégrer avec z ? **ER** : Oui !

TC(504)

E3 : Moi ce qui me choque c'est que z tu vas l'intégrer entre un truc qui dépend de ρ et de θ . Tu vois ce que je veux dire ? (*Rires*); *« Que ce qui vous gêne ? »* **RN** : En fait c'est qui ce passe, c'est qu'on a trouvé... On voulait chercher entre quoi varient ρ , θ et z . En général on fait ρ , θ et z en dernier. Le problème c'est que dz , on a vu... **E3** : C'est bête ! On avait le bon truc quand même ! On vérifie que ρ est entre 0 et 1 ; θ entre 0 et 2π et ; z entre $-y$ et y . **ER** : Donc on s'est placé dans un petit cube, j'ai dit que c'était le quart de volume de Q , donc qui était fait par séparation avec les plans $x=y$ et $x=-y$. **E3** : Donc z est compris entre $-y$ et $+y$, et y pour le paramètre c'est $-\rho$, enfin c'est $\rho \sin\theta$.

E3 trace le dessin ci-dessous et conclut que θ varie entre 0 et π .



E3 : Du coup θ varie entre 0 et π . Bon on va faire ça. **ER** : On va voir. **E3** : D'accord ! **ER** : C'est comme si t'avais deux fonctions une de θ , une de ρ .

E3 écrit le suivant :

$$\begin{aligned} \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{z=-\rho \sin\theta}^{\rho \sin\theta} \rho dz d\theta d\rho &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \rho^2 \sin\theta d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 \rho^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} d\rho = \int_{\rho=0}^1 \rho^2 (1 - (-1)) d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 2\rho^2 d\rho = 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

E3 : Seize tiers, c'est ça ?

ER écrit alors le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int \int \int \rho d\rho d\theta dz &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{z=-\rho \sin\theta}^{\rho \sin\theta} \rho dz d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} 2\rho^2 \sin\theta d\theta d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 2\rho^2 [-\cos\theta]_0^{\pi} d\rho = \int_{\rho=0}^1 2\rho^2 (1 - (-1)) d\rho \\ &= \int_{\rho=0}^1 4\rho^2 d\rho = \left[\frac{4\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

→ un quart du volume total

$$I = 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

FIN

Binôme 2 : Etudiant Redoublant (ER), Etudiant (E3)

Brouillons p.1

Grenoble, mardi 05/04/2005

Nom : RADICÉ Prénom : SIMON

$C_1: x^2 + y^2 \leq 1$
 $C_2: x^2 + y^2 \leq 1$
 $Q = C_1 \cap C_2$

$x, y \rightarrow$ cercle
 $z \rightarrow$ cône
 $y, z \rightarrow$ cône

VQ?



$x^2 + y^2 \leq 1$
 $x^2 + y^2 \leq 1$
 $x = \sqrt{1 - y^2}$

$r^2 \leq 1 \quad r = \rho \cos \theta$
 $\rho^2 \cos^2 \theta + z^2 \leq 1$

$w = z$
 $x = \rho \cos \theta$
 $y = \rho \sin \theta$
 $z = \rho \cos \theta$
 $z = \rho \sin \theta$



$\iint_D f(x, y, z) dx dy dz$

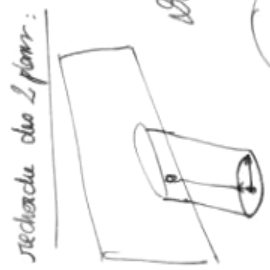
$\int_{\rho(0)}^{\rho(1)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \rho) |\rho| d\rho d\theta dz$

Brouillons p.2

Grenoble, mardi 05/04/2005

Nom : RADICÉ Prénom : SIMON

$f_{\text{plan 1}}: y = z$
 $f_{\text{plan 2}}: y = -z$



Plan $\frac{z}{2}$ volume: $-y < z < y$



Volume de Q: délimité par Γ de C_1 et C_2 on se place do Γ en
 de Γ dans $\Gamma = -y, z = y$ qui donne $\frac{1}{2}$ le volume
 en Γ . on s'intéresse à trouver le volume de $q: \frac{1}{2}$ vol de Q.

on passe en polaire pour x et y :
 $0 \leq \rho \leq 1$
 $0 \leq \theta \leq \pi$
 et $-y \leq z \leq y$
 $-\rho \sin \theta \leq z \leq \rho \sin \theta$



$\int_0^1 \int_0^\pi \int_{-\rho \sin \theta}^{\rho \sin \theta} \rho dz d\theta d\rho$

Binôme 2 : Etudiant Redoublant (ER), Etudiant (E3)

Brouillons p.3

Brouillon Grenoble, mardi 05/04/2005

Nom : Prénom :



$$\int_0^{\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 \rho \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^{\pi} \int_0^1 \int_{-1}^1 \rho \, dz \, d\rho \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho \sin \theta \, d\theta \, d\rho = \int_0^{\pi} \left[-\rho \cos \theta \right]_0^{\pi} d\rho = \int_0^{\pi} \rho \, d\rho$$

$$= \frac{1}{2} \rho^2 \Big|_0^1 \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[\rho^2 \Big|_0^1 \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[1 - 0 \right] \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[1 \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left[1 \right] = \frac{1}{2}$$

$$Q = \frac{4}{3} \Rightarrow Q = 4q = \frac{16}{3}$$

Brouillons p.4

Brouillon Grenoble, mardi 05/04/2005

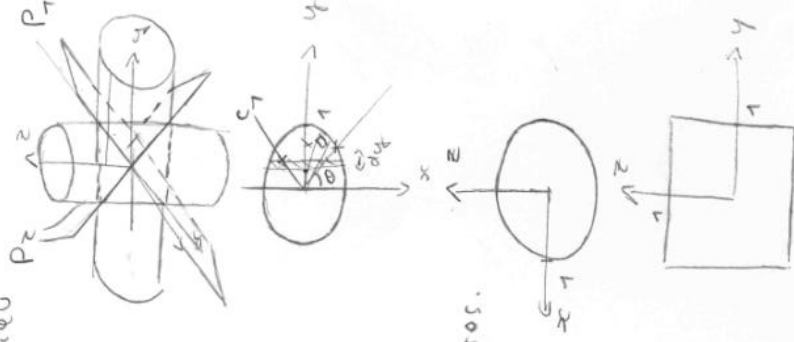
Nom : Prénom : Mathieu

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x^2 + z^2 \leq 1 \end{cases} \quad \text{2 plans}$$

$$P_1: y = z$$

$$P_2: y = -z$$

Le volume à calculer est composé dans deux plans de 4 sous volumes égaux délimités par les 2 plans P_1 et P_2 , et les 2 cylindres.



$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$I = 4 \int_{z=-1}^1 \int_{\rho=0}^1 \int_{\theta=0}^{\pi} \rho \, d\theta \, d\rho \, dz$$

$$- \rho \sin \theta \Big|_0^{\pi} \Big|_{z=-1}^1 = 0 \leq \rho \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

Brouillons p.4

Brouillon

Grenoble, mardi 05/04/2005

Nom :

Prénom : Mathieu

z varie entre $\rho \sin \theta$ et $-\rho \sin \theta$

$$\iiint z \rho d\theta d\rho dz$$

$$\rho=1 \quad \theta=\pi$$

$$\rho=0 \quad \theta=0$$

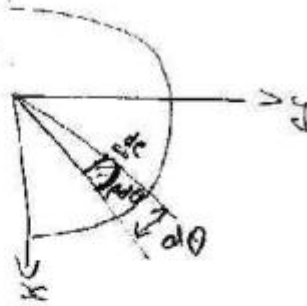
$$\int \int 2\rho \sin \theta \cdot \rho d\theta d\rho$$

hauteur
de l'élément de
volume

$$= \int_0^1 \int_0^\pi 2\rho^2 \sin \theta d\theta d\rho = \int_0^1 2\rho^2 [-\cos \theta]_0^\pi d\rho$$

$$= \int_0^1 2\rho^2 \times 2 d\rho = \boxed{\frac{4}{3}} \rightarrow \text{un quart du volume total}$$

$$\bar{I} = 4 \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$



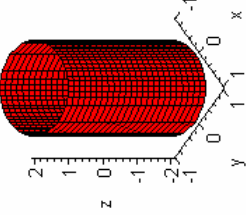
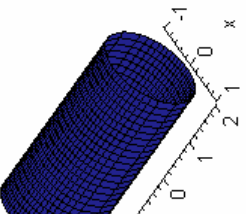
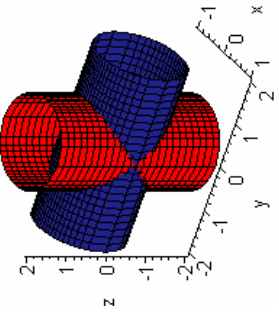
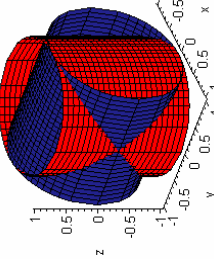
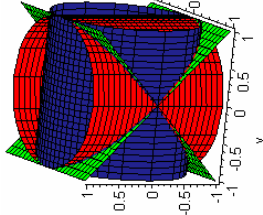
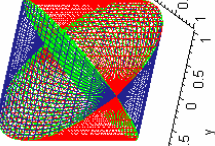
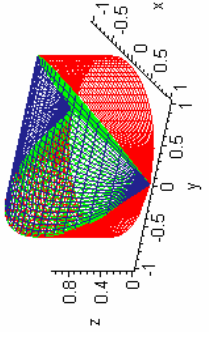
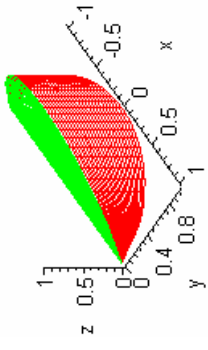
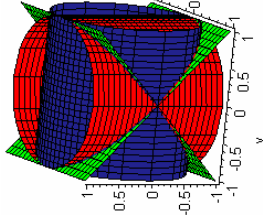
sous-tâche-1		sous-tâche-2		sous-tâche-3		sous-tâche-4	
01 > restart: with(plots):							
02 > plot3d([t,sqrt(1-t^2)], [t,-sqrt(1-t^2)], t=-1..1, s=-2..2, color=red, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);		03 > plot3d([u,v,sqrt(1-u^2)], [u,v,-sqrt(1-u^2)], u=-1..1, v=-2..2, color=navy, scaling=constrained, labels=[x,y,z]);		04 > display(%,%);		05 > Cz2:=plot3d([t,sqrt(1-t^2)], [t,-sqrt(1-t^2)], t=-1..1, s=-1..1, color=red);	
06 > Cy2:=plot3d([u,v,sqrt(1-u^2)], [u,v,-sqrt(1-u^2)], u=-1..1, v=-1..1, color=navy);						07 > display(Cz2,Cy2,labels=[x,y,z]);	
sous-tâche-5		sous-tâche-6		sous-tâche-7		sous-tâche-8	
08 > Plans1:=plot3d([x,y],[x,y,y]), x=-1..1, y=-1..1, color=green);		10 > Plans2:=plot3d([x,y,y],[x,y,y]), x=-1..1, y=-sqrt(1-x^2), color=green);		14 > PlanIP:=plot3d([x,y],x=-1..1, y=0..sqrt(1-x^2),color=green);		19 > Cz3:=plot3d([t,sqrt(1-t^2)], t=-1..1, s=0..sqrt(1-t^2),color=red);	
09 > display(Cz2,Cy2,Plan1, Plan2, scaling=constrained,labels=[x,y,z]);		11 > Cz2:=plot3d([t,sqrt(1-t^2)], [t,-sqrt(1-t^2)], t=-1..1, s=-sqrt(1-t^2)..sqrt(1-t^2),color=red);		15 > PlanIN:=plot3d([x,y,y],x=-1..1, y=-sqrt(1-x^2)..0,color=green);		20 > display(Cz3,scaling=constrained, PlanIP,style=wireframe,labels=[x,y,z]);	
		12 > Cy2:=plot3d([u,v,sqrt(1-u^2)], [u,v,-sqrt(1-u^2)], u=-1..1, v=-sqrt(1-u^2)..sqrt(1-u^2),color=navy);		16 > Cz2:=plot3d([t,sqrt(1-t^2)], [t,-sqrt(1-t^2)], t=-1..1, s=0..sqrt(1-t^2),color=red);			
		13 > display(%,%,% ,style=wireframe);		17 > Cy2:=plot3d([u,v,sqrt(1-u^2)], [u,v,-sqrt(1-u^2)], u=-1..1, v=-sqrt(1-u^2)..sqrt(1-u^2),color=navy);			
				18 > display(Cz2,Cy2,PlanIP,PlanIN, scaling=constrained,style=wireframe,labels=[x,y,z]);			
sous-tâche-9		sous-tâche-10					
21 > VQ:=8*int(int(int(1,z=0..y),y=0..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);		$V_Q = 8 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^y 1 dz dy dx$	$V_Q = 8 \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy dx$				
22 > VQ:=8*int(int(int(1,z=0..y),y=0..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);			$V_Q = 8 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^2 dx$				
23 > VQ:=8*int(int(int(1,z=0..y),y=0..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);			$V_Q = \frac{16}{3}$				
24 > VQ:=8*int(int(int(1,z=0..y),y=0..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);							
				25 > VQ:=evalf(VQ1);	$V_Q = 5.333333333$		

Tableau 17 : Réalisation du problème d'intersection de deux cylindres en utilisant le logiciel Maple selon la stratégie SO4 (cf. l'analyse a priori, chapitre E)

ANNEXE

IV

ANALYSE A POSTERIORI DE TRAVAILS
DES BINOMES B2, B3, B5, B6



ANNEXE IV : ANALYSE A POSTERIORI DE TRAVAUX DES BINOMES B2, B3, B5 et B6

1.1..7 Analyse du travail de Binôme 2

Le professeur **P** distribue les feuilles (l'énoncé et les brouillons) à 10h10. Ensuite il donne les premières instructions aux étudiants. Il leur rappelle de charger le package **with(plots)**, l'usage de la commande **display** et leur déconseille d'utiliser la commande **implicitplot**. **P** met alors l'accent sur l'emploi de la commande **plot3d**, en écrivant au tableau la syntaxe de la représentation graphique des surfaces paramétrées, donc il donne la syntaxe (04), selon ses premières interventions (cf. Séance 2, TC001 et TC024).

Question q1 : Après une lecture de l'énoncé, ce binôme dégage tout de suite¹⁰⁶ l'équation cartésienne de la surface S1. Ensuite il pense immédiatement à un paramétrage *angulaire*¹⁰⁷. Ces premières actions se font par des techniques *papier/crayon*, en utilisant les brouillons fournis, où on trouve aussi le paramétrage *angulaire* "correct" de S2 (sans exprimer les domaines de variations des paramètres). Ensuite, en s'appuyant sur les équations écrites sur les brouillons, ils commencent le travail de représentation graphique de la surface S1 dans *Maple*, en utilisant la syntaxe (04) de la commande **plot3d**. D'un côté, les brouillons de ce binôme révèlent que cette première tâche a été assez simple pour les étudiants, d'un autre côté, on observe une certaine difficulté chez ce binôme liée à la dualité des objets "*surface paramétrée*" (qui doit comporter deux paramètres) et "*courbe paramétrée*" (qui ne comporte qu'un paramètre). Paradoxalement, on observe que ce binôme reconnaît qu'un des paramètres de la surface S1 et de S2 est indépendant, respectivement z et y . Néanmoins, l'écriture de S1, tant sur les brouillons que dans *Maple*, n'a comporté initialement que le paramètre t . Ils corrigent (après l'intervention de **P**) en remplaçant t par z dans le second membre de la dernière équation de S1. Avec cette correction ils obtiennent les paramétrages corrects des deux surfaces cylindriques. Voici leurs premières actions face à cette tâche.

(B2, TC(028))

A : Donc déjà, bah ..., déjà pour trouver les équations paramétriques. Je crois que c'est $x^2 + y^2 = 1$, faudra faire intervenir les **cosinus** et les **sinus** ;

G : Si possible...

O : Ils écrivent sur le papier (cf. brouillon) :

$$\begin{array}{l}
 x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \\
 (S_1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \cos(t) + \sin(t) \\ z = z \end{array} \right. \\
 \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{array} \right. \\
 (S_2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = y \\ z = \sin(t) \end{array} \right.
 \end{array}$$

A : Bah, donc on peut essayer de taper ça non ? **plot3d** ;

G : En **sinus**, ah ! Donc c'est bon ;

A : Mais euh **cos(t)**...ouais, donc c'est bon ;

P : Non ! Égale à un, $x^2 + y^2 = 1$, donc ça, ça va. Mais par contre il me manque une valeur ? Il me manque z quand même ;

G : Ouais, bah, ouais, mais z il est quelconque ;

A : z égale à... ;

G : Bah, z égale t j' sais pas ;

A : Bah, donc on va essayer ;

A : Tu crois que c'est **cos(t)** virgule **sin(t)** virgule t par exemple ?

¹⁰⁶ Cella a été fait avec incertitude, quand **A** nous dit (cf. B2, TC(028)): *je crois que c'est...*

¹⁰⁷ Une fois qu'il parle de *cosinus* et de *sinus* (cf. B2, TC(028)).

Mis à part le problème de la dualité des objets *surface/courbe* (révélé lors de l'écriture des équations paramétriques de S1), on voit chez B2 une certaine organisation de la tâche, par des techniques *papier/crayon*. Cette organisation est prise comme point de départ pour le développement d'activité instrumentée relative à la deuxième question dans *Maple*. Ainsi, on observe "malgré tout" une réussite de la première question (q1) grâce à une certaine connaissance qu'il a de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension.

Question q2 : L'extrait (B2, TC(028)) ci-dessus montre deux choses importantes : la réussite à la première question et les difficultés d'utilisation correcte du logiciel *Maple*. Ainsi, on observe que les jeux d'*essais-erreurs* se mettent en place, tout de suite, lors du développement de la première activité instrumentée dans *Maple*. C'est-à-dire que, l'entrée des données de S1 dans *Maple* en utilisant la syntaxe (04) de la commande **plot3d** a posé des difficultés (*mathématiques* et *techniques*) : *mathématiques* à cause d'une description incorrecte de la surface dans l'espace 3D, et *techniques* à cause de l'utilisation erronée de la syntaxe (04) de la commande **plot3d**, comme l'indique la première action de ce binôme dans *Maple*, qu'on a retranscrite ci-dessous.

```
> plot3d([cos(t), sin(t), t], t=0..2*Pi);
Error, (in plot3d) at least three arguments are required
```

On voit bien que ce binôme essaie d'obtenir la représentation graphique de S1. Mais leur instruction sur la commande **plot3d** ne comporte qu'un seul paramètre. Ceci explique que le logiciel renvoie une erreur d'arguments, puisque la représentation graphique d'une surface en trois dimensions doit nécessairement comporter deux paramètres. En interprétant la réponse du logiciel, les étudiants ne savaient même pas s'il s'agissait d'une erreur *technique* ou de *mathématiques*. Cette action montre que les étudiants ont des difficultés, non seulement dans l'utilisation de la commande **plot3d** de *Maple*, mais surtout avec la coordination entre le graphique des surfaces (qu'ils perçoivent dans l'espace) et leurs représentations analytiques. De plus, cette action ne se réalise que par tâtonnement : ainsi les termes suivants reviennent souvent dans leur anticipation lors de cette première étape :

```
Donc on peut essayer de taper ça non ?
Donc on va essayer ... ;
Tu crois que c'est ... ;
Tentez ... ;
Vas dans help ... ;
Mais je ne vois pas où c'est un problème en fait ...
```

Ainsi pour essayer de comprendre la syntaxe (04) de la commande **plot3d** et reprendre la résolution de la tâche, ce binôme cherche dans la fonction "**help**" de *Maple* les instructions qui peuvent l'aider dans ses actions de représentation graphique de surfaces paramétrées. Toutefois, ils ont des difficultés à appliquer les différents exemples proposés par la fonction "**help**", sur l'utilisation de la commande **plot3d**. Cette difficulté, conduit d'ailleurs les étudiants à la remarque suivante : *On n'est pas obligé de les tracer en paramétriques sinon ; Bah, ouais, c'est demandé je crois, non ?* On peut d'ailleurs souligner ici qu'il n'est pas exigé dans cette première étape de visualiser graphiquement les deux surfaces cylindriques par des équations paramétriques. Néanmoins, ce choix est une condition nécessaire pour l'accomplissement d'une des deux tâches de la deuxième étape, notamment le **crible géométrique**. Donc le tracé de S1 et de S2 en paramétriques n'est pas demandé dans l'énoncé, mais est implicite dans l'organisation de la séquence proposée. Ainsi, la question **q1** (qui demande les équations paramétriques de S1 et de S2) a aussi pour but de servir comme pré-requis pour les tâches suivantes.

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

Ce binôme arrive à visualiser le graphique de la première surface S1, après une interaction avec **P**, comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous.

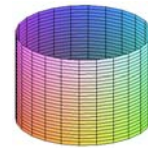
(B2, TC(141))

P : Ça c'est sympa, vous tracez une fameuse surface qui ne dépend que d'un paramètre ;
G : Ouais ;
A : C'est ça le problème ;
P : Qu'est ce que tu m'avais dis sur z ?
A : z il est, z il est quelconque ;
G : Ouais ;
A : Ah ! Bah, finalement il faudra mettre z ici ;

G : z, et on fait varier z après ;
P : Ce que vous tracez là c'est très intéressant, mais on verra ça après, c'est une courbe, ça dépend d'un seul paramètre, qui en fonction de t, elle veut comme t. Ouais ça va être une hélice. Il aurait fallu mettre en **spacecurve**, une courbe de l'espace, vous auriez hélice ;
A : C'est pas important, z on va jusqu'à 4 et puis voilà ;
G : Va, allez-y.

Après cette interaction avec **P**, ce binôme effectue le copier coller de la première instruction entrée dans *Maple*. Ainsi ils rajoutent dans cette instruction le deuxième paramètre identifié par z, comme le montre le résultat ci-contre. On peut donc dire que ce binôme apprend à utiliser correctement les syntaxes des commandes du logiciel non seulement à partir de jeux d'essais-erreurs, mais aussi grâce à **P** qui intervient en posant certaines questions aux étudiants pour faire évoluer leurs modes de raisonnement autour de la tâche. A noter que les connaissances mises en jeu dans les interventions de **P** rendent souvent possibles à réussite des étudiants dans le processus heuristique.

```
> plot3d([cos(t), sin(t), z], t = 0..2*Pi, z = 0..4) ;
```



A noter qu'une fois que la représentation graphique de S1 a été mise en place, ils ont obtenu celle de S2 assez facilement, mises à part les erreurs de frappe (ex. au lieu de **sin(t)**, on voit **siin(t)**, type d'erreur qu'ils identifient facilement). Les problèmes techniques réapparaissent lors de la réalisation de l'activité instrumentée relative à la sous-étape (d), notamment la représentation graphique de S1 et S2 ensemble. Néanmoins, ils apprennent rapidement à utiliser correctement le logiciel en tâtonnant, et grâce aux interventions de **P**. Et cet apprentissage les aide à mieux voir la situation en jeu. L'extrait du protocole ci-dessous illustre cette observation.

(B2, TC(167))

A : Ah ! Non ! **siin** ;
G : Non ! Il faut laisser, il faut laisser. De toute façon il faut que l'on trace les deux ! Vas-y, Ctrl+V ;
A : Là, il faut rechanger ;
G : On est... mets deux de direct, là il faut que l'on trace les deux ;

A : Alors comment ? Mais, je crois qu'il faut remettre des accolades après !
G : Ouais, on met virgule accolades ;
A : Je ne sais pas, je crois qu'il faut remettre accolades ;
G : Genre comme ça ?
A : Non ! Il faut mettre les autres accolades des fonctions que tu veux tracer, je crois !

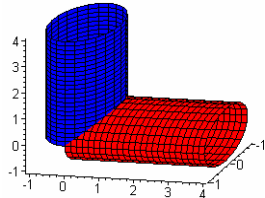
On voit bien que ce binôme a des difficultés pour représenter les deux surfaces S1 et S2 en même temps. Donc ces étudiants n'ont pas les compétences suffisantes dans l'utilisation de la commande **display**. C'est **P** qui aide les étudiants lors de son intervention à toute la classe sur l'utilisation de cette commande et de l'option "**color**", que l'on a transcrite dans l'extrait ci-dessous :

(Séance 2, TC(207))

On peut, donc ici, si tu veux tracer plusieurs choses à la fois tu peux mettre **plot3d** le premier, accolade ici, le deuxième entre crochets. Le plus simple, si tu veux jouer sur les couleurs, savoir quel est celui que tu traces en **rouge** et qu'est celui que tu traces en **bleu**, quel est celui tu traces en **vert pomme** euh, euh, tu, tu vas rentrer ça dans une variable. On va mettre S1 par exemple deux points égal etc. D'accord ? Tu fais attention qu'au moment où tu le rentres, ici il faut absolument mettre un deux points, si tu mets point virgule il apparaît l'ensemble de toutes les valeurs qui sont, que tu rentres là-dedans, donc deux points, et après avec la fonction **display**, la fonction **display** va faire que tu vas tracer S1 et S2 et ça, ça trace simultanément S1 et S2. Donc comme ça tu pourras les récupérer et après tu peux modifier ...

Cette intervention du professeur est primordiale non seulement pour B2, mais aussi pour la classe en général. On peut donc dire que la difficulté d'utilisation de la fonction "display", liée à la compétence des étudiants dans le domaine de la représentation graphique des surfaces dans *Maple*, a été momentanément "surmontée" après l'intervention de P. Car, suite à cette intervention, ce binôme réorganise sa tâche et entre dans *Maple* les lignes de commandes suivantes qui résultent en la visualisation des deux cylindres simultanément.

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..4,color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..4,color=red):
display(S1,S2);
```



On peut repérer dans cette action les problèmes *techniques* et *mathématiques* suivants :

Manque de compétences sur la syntaxe de la commande **display**. Car pour arriver à ce résultat, ils ont échoué trois fois, en employant les jeux d'essais-erreurs, pour différencier les deux

cylindres par des couleurs (cf. archive *Maple* et le protocole B2 annexé).

Le contrôle des paramètres z et y (valeurs de variables liées à la hauteur des cylindres)¹⁰⁸ révèle des problèmes de symétrie et de visualisation, dès que les deux cylindres sont représentés en même temps [sous-étape (d)].

On voit qu'ils réussissent à afficher les graphiques de S1 et S2 ensemble, mais ils sont surpris, car ils ne trouvent pas la totalité de l'intersection des deux cylindres comme attendu. Ils reviennent alors en arrière et corrigent le problème de symétrie après une lecture de la remarque proposée par l'énoncé. C'est A qui lit : "*Il est facile de voir que Q est entièrement compris dans le cube [-1;1]³*". Ensuite ils s'expriment comme suit :

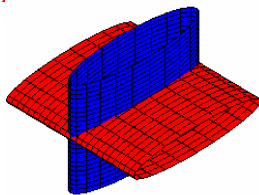
A : Ah ! Non, en fait il n'est pas assez long, tu vois ?
 G : Ah ! Ouais, il faudrait... ;
 A : Il faudrait changer y et z , pour voir vraiment l'intersection. Ctrl+C ! Ctrl+V ;
 G : En fait c'est euh... c'est z et y qu'il faut faire varier, on va aller de -4 à 4 par exemple ;

Les échanges ci-dessus conduisent ainsi le binôme à l'activité instrumentée suivante, dans laquelle *Maple* affiche la représentation graphique envisagée.

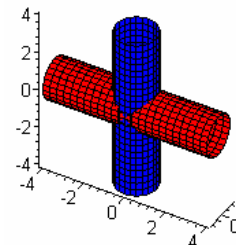


Représentation avec l'échelle hors de 1:1

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-4..4, color =blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-4..4, color= red):
display(S1,S2);
```






Visualisation avec un clique sur



A noter que la représentation à gauche donne l'impression d'avoir affaire à deux cylindres elliptiques. Visuellement le graphique ne correspond pas aux équations de départ (qui sont des

¹⁰⁸ Problème technique lié à la taille des objets graphiques affichés sur l'écran de *Maple*.

cylindres circulaires droits). Cet aspect n'a pas contenté B2 qui lit encore une fois la remarque de l'énoncé. Ensuite il cherche les icônes  qui permettent de rajouter les axes des coordonnées et l'icône  de contrôle de l'échelle. Ainsi, le graphique à droite obtenue après avoir cliqué sur  (cf. les icônes de la barre d'outils de Maple ci-dessus) une fois le dessin sélectionné, les étudiants semblent satisfaits. Voici leurs expressions de joie face à ce résultat à droite. **G** : *Ah ! Ouais, c'est mieux là quand même, c'est mieux, ça claque* ; **A** : *ça claque* ;

Question q3 : Ce binôme s'appuie sur la remarque pour visualiser l'intersection dans le cube $[-1,1]^3$, mais ils n'y parviennent pas tout de suite. Ils préfèrent réaliser la tâche suivante (c'est-à-dire la question **q4** : le *crible* au lieu de **q3**), en s'appuyant sur le résultat ci-dessus. Encore une fois, c'est **A** qui se manifeste :

(B2, TC(292))

A : Là il dit en fait que, tout ça, l'intersection elle est comprise dans le cube $[-1;1]^3$;
G : Ouais ;
A : Ouais, donc ça on passe ;
G : Ouais ;
A : On veut maintenant effacer les parties de chacun des cylindres qui ne sont pas sur la frontière de Q ;
G : Alors là ;
A : Alors là il faut évaluer en fait les deux trucs là, les deux équations qu'on a ;
G : Ah ! Ouais pour avoir le euh... ;
A : $x^2+y^2 \leq 1$ et x^2+z^2 alors ça me donne... $2x^2+y^2+z^2=1$, avec le même paramétrage...

Cet extrait révèle que le fait que le solide intersection Q soit entièrement compris dans le cube $[-1;1]^3$ n'avait pas d'importance pour ce binôme, qui a pris initialement cette représentation dans le parallélépipède $[-1,1] \times [-4,4] \times [-4,4]$. Ensuite, ils ont du mal à mettre en place le raisonnement dégagé dans les échanges de l'extrait ci-dessus. Puis leur mode de raisonnement ne correspond pas à leur mode de développement des calculs : ils réfléchissent correctement sur un objet (par ex. quand **A** dit : *Alors là il faut évaluer en fait les deux trucs là, les deux équations qu'on a*) mais ils commettent erreur, comme le montre le résultat obtenu dans la dernière ligne de l'extrait ci-dessus. On voit que ce résultat est plus complexe que les équations de départ. D'ailleurs face à cette complexité, les étudiants arrêtent les calculs. Ainsi ils recherchent (dans la fonction "**help**" du logiciel, et dans l'ensemble des commandes du paquets **with(plots)**) la fonction "**intersect**" pour essayer de visualiser (d'une façon automatique) le graphique du solide intersection des deux cylindres.

A noter que, la fonction **intersect** existe dans Maple. Mais celle-ci est destinée aux problèmes d'intersection d'ensembles algébriques ou numériques, et non aux problèmes d'intersections géométriques (que ce soit de surfaces ou de solides). Ainsi, l'absence de cette fonction pour résoudre cette tâche a amené les étudiants à penser à l'intersection des fonctions **plot3d** portant sur les surfaces S_1 et S_2 . C'est-à-dire, qu'ils essaient rentrer dans Maple, **plot3d(S1)=plot3d(S2)** comme l'indique l'extrait du protocole suivant :

(B2, TC(292))

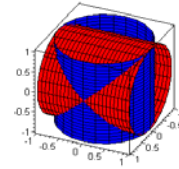
A : Peut-être si on fait j'sais pas **plot3d** $S_1=S_2$;
G : Ah ! Ouais ?
A : Bah j'sais pas, je propose ;
G : on peut essayer ;
A : Non ! Tu n'as pas le droit d'effacer ;
G : Ah ! Ouais, c'est vrai ;
G : On peut essayer quoi ;
A : Ah ! Mais S_1 et S_2 c'est déjà des plots en fait !... ;
A : Tu crois ? Bon ! Essaie, on verra de toute façon ;
G : Ouais ;
O : Qu'est-ce que vous cherchez ?

A : On essaie de tracer justement Q , montrer que C_1 et C_2 se coupent sur ... ah ! Non, ce n'est pas ça qu'il demande ;
G : Bah, c'est pareil ;
A : Ah ! Non, il ne demande pas les équations de l'intersection, il demande les deux plans. Montrer que C_1 et C_2 se coupent sur deux plans ;
G : Mais c'est ça, on veut maintenant effacer les parties qui ne sont pas sur la frontière de Q , ça revient à tracer l'intersection ;
A : Ah ! Ouais, bah ouais, là on essaie de faire ça... n'est pas mal.

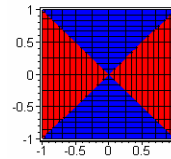
Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

On voit bien que la stratégie de tâtonnement (jeux d'essais-erreurs) se développe aux moments du traitement des tâches. A noter que la technique proposée par A pour essayer de trouver le graphique du solide intersection n'était pas mise en place. Car P est intervenu tout de suite, lors de la question suivante, posée par A : *Mais est-ce qu'on a le droit, par exemple si on a mis S1 et S2, on les a définis comme ça, de mettre par exemple pour tracer l'intersection plot3d S1=S2 ?* P : Non, ça ne sert à rien ça.

Ainsi, P persiste pour montrer aux étudiants l'intérêt de visualiser l'intersection dans le cube $[-1;1]^3$, et ensuite voir (à l'aide de manipulations directes avec la souris) les deux plans visibles dans la projection de Q dans un plan canonique. Ces deux plans sont les plans d'intersection de C1 et C2, projetés sur ce plan, comme l'indiquent les deux figures ci-contre :



S1 et S2 ensemble dans le cube $[-1;1]^3$



Projection de Q dans le plan-xy

Après cette intervention de P ce binôme reprend les équations de surfaces S1 et S2 sur leur brouillon. Notamment $x^2+y^2=1$ et $x^2+z^2=1$. La stratégie choisie par ce binôme pour chercher les équations des plans consiste d'abord à utiliser la technique classique de substitution de variable. Donc il met x en jeu et voit qu'il reste y^2 et z^2 . Mais initialement il ne savait même pas quoi faire avec ce résultat. Donc il ne trouve pas les équations des deux plans par cette méthode. Comme le montre leur raisonnement dans l'extrait ci-dessous :

- (B2, TC(394))
- A : L'intersection des deux cylindres; G : Alors ;
 - O : *Ils écrivent sur les brouillons ;*
 - A : Donc $x^2+y^2=1$ et $x^2+z^2=1$, bah ça, ça appartient à un plan... ;
 - G : Ça, ça définit deux plans ça ; A : Ouais ;
 - G : Donc pour trouver leur équation il suffit de remplacer x là, et de remplacer euh... ;
 - A : Quoi ?
 - G : Si on exprime x en fonction de z et qu'on le remplace là, on aura peut-être euh ... non ! Si normalement on aura d'équation de plan ;
 - A : De quoi ? G : Si on remplace x par ... ;
 - A : Bah, on trouvera y^2, z^2 , ça va pas quoi ?
 - G : Ah ! Ça nous avancera à rien ;
 - A : Là on voit que les deux plans ils passent par zéro ; G : Ouais ;
 - A : Et il y a un qui, en fait il y a un ... Parce que ça, c'est quel axes ça ? On peut nommer les axes ?
 - G : Euh, Euh, nommer les axes ;
 - A : Quoi, dire si c'est x, y ou z ? Essaie d'appuyer là pour voir s'il donne les axes ;

Ainsi, on observe une certaine difficulté chez ce binôme à mettre en place les représentations algébriques ou analytiques des objets géométriques dans l'espace tridimensionnel, dont ils ont pourtant une bonne visualisation (type1). Donc, ils ont des difficultés à coordonner ce qu'ils voient avec les équations qui les représentent. Mais ils ont aussi des difficultés techniques à bien utiliser les commandes de Maple (type2). Ils procèdent donc souvent par tâtonnement. Ils y arrivent après plusieurs essais-erreurs avec un contrôle perceptif. C'est-à-dire qu'ils sont avant tout dans l'action au détriment d'une réflexion mathématique permettant en minimum de contrôle et d'anticipation de que Maple peut faire.

Suite à l'interaction de l'extrait (B2, TC(394)) ci-dessus, on observe que les étudiants changent de stratégie de recherche des équations de plans. Ils s'appuient alors sur les équations paramétriques de S1 et S2 qu'ils ont exprimées précédemment, en obtenant ainsi par des techniques papier/crayon les résultats qu'on a transcrits ci-contre.

$$\begin{cases} \cos(t) = \cos(t) \\ \sin(t) = y \\ z = \sin(t) \end{cases}$$

Cependant, avec cette démarche ils ne trouvent l'équation que d'un plan ($y=z$). Toutefois, ils tâtonnent, et concluent que l'autre plan ce serait $y=-z$, sans aucune justification mathématique, comme l'indique leur discussion dans l'extrait du protocole ci-dessous.

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

(B2, TC(464))	A : L'intersection c'est pas deux plans, c'est [...];	G : ça, ça serait celui-là, je pense ; A : Ouais ;
	G : Parce que nous on cherche bien ces plans là ;	G : Donc, quelque soit x puisque x nous donnera ... ouais. Donc, on a un plan déjà ici ;
	A : Ouais. Ouais, mais si on fait l'intersection on aura juste euh, euh, si tu veux une ellipse comme ça, euh comme ça non ?	A : Là on aura un plan, ouais, et l'autre plan ce serait $y = -z$;
	G : Mais, regarde là, ça donne $y = z$, non ?	G : Ouais, mais pourquoi ?
	A : $y=z$, ouais, donc c'est ça le plan en fait ;	A : Ouais, si c'est bien ;

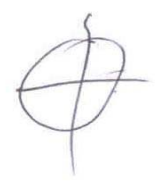
Ensuite c'est **P** qui intervient auprès de ce binôme, quand il voit la difficulté des étudiants à déterminer les équations des deux plans. Le professeur **P** parle alors des valeurs des paramètres des équations paramétriques de surfaces S_1 et S_2 dégagées précédemment par les étudiants : ils avaient utilisé le même paramètre lors de la représentation paramétrique de surface S_1 et S_2 , et **P** suggère alors aux étudiants d'utiliser des lettres différents pour le paramètre de chaque surface. Avec cette suggestion, ce binôme reprend les calculs sur les brouillons. Ils trouvent alors les deux plans cherchés. Mais on observe que les démarches qu'ils ont utilisées ne sont pas claires, comme le montre les copies ci-dessous.

Production d'étudiant G

Intersection de S_1 et S_2 :

$$\begin{cases} \cos t = \cos t' \\ y = \sin(t) \\ \sin(t) = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = t' \text{ ou } t = -t' \\ y = z \\ \cos t = t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y - z = 0 : \text{plan 1} \\ |y + z = 0 : \text{plan 2} \end{cases}$$

Production d'étudiant A

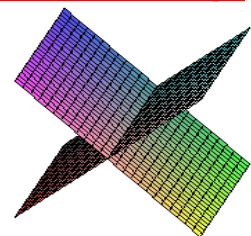
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(t) = \cos t' \\ \sin(t) = y \\ z = \sin(t') \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = t' \text{ ou } t = -t' \\ y = z \\ y = -z \end{cases}$$


Une fois que les équations des deux plans ont été trouvées, ils entrent dans *Maple* les lignes des commandes ci-contre, qui conduisent à la visualisation graphique des deux plans sans les deux cylindres C_1 et C_2 .

Action des étudiants

```
> p1:=plot3d([x,y,-y],x=-1..1,y=-1..1):
> p2:=plot3d([x,y,y],x=-1..1,y=-1..1):
> display(p1,p2);
```

Réaction de Maple



Question 04 – le crible :

Initialement ce binôme ne savait même pas à quoi pouvaient servir les deux plans qu'ils venaient de tracer. C'est **G** qui pose d'abord la question :

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

(B2, TC(601))

G : Ces plans ils vont nous servir à quoi en fait pour tracer Q ?

A : Non, ça c'est intersection alors ;

G : Ouais ! J'comprend pas à quoi ils peuvent nous servir pour trouver Q , quoi ;

A : On a ces deux plans parce que l'intersection ne se trouve que la dessus ! Tu es d'accord ?

G : Ouais ;

A : En fait il faudra réussir à tracer les courbes. En fait, tout les points qui se trouvent sur ces deux plans là ;

G : Hun ! Dans ce cas on aurait une ellipse comme ça sur ce plan, et une ellipse sur ce plan. Nous ce qu'on veut c'est l'ellipse plus les faces qu'on voit là, donc cette face là on la veut, cette face là on la veut, cette face là on la veut. On veut euh, on veut celle-ci, euh, ce n'est pas évident ;

A : Celui-là comment on peut faire ?

G : En fait, dans cette zone là il faut tracer le rouge, dans cette zone là il faut tracer le bleu, dans cette zone là il faut tracer le rouge, dans cette zone là il faut tracer le bleu ;

A : Ouais, mais là c'est pas possible !

G : On tient les bouts là ;

A : Maintenant c'est très compliqué, maintenant.

La question posée par G a perdu son sens après leurs échanges dans l'extrait ci-dessus. Ainsi on observe que, même avec les plans tracés (sans les deux cylindres C1 et C2), ce binôme arrive à distinguer les parties des cylindres qui ne font pas partis de Q , et ainsi à dégager les rôles que ces deux plans peuvent jouer dans cette tâche. G discerne (en s'appuyant sur les couleurs) les parties des surfaces de S1 et de S2 qui conviennent dans la visualisation du contour de Q . De plus, il voit les courbes intersections des surfaces S1 et S2 avec les deux plans. A noter que ces courbes décrivent exactement les "arêtes curvilignes" de Q criblé. Toutefois au contraire de ce qui a été fait par B1 et B3 (séance 1), ces courbes appelées "ellipses" par B2 n'étaient pas visualisées graphiquement. Cependant, ils utilisent ces courbes qu'ils voient sur les plans pour décrire le solide Q par "zones" (mot utilisé par G). Comme l'indiquent leurs raisonnements dans l'extrait (B2, TC(601)) du protocole ci-dessus.

Donc on perçoit une appropriation de la tâche grâce à une certaine connaissance que ces étudiants ont de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension. Ils "voient" bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur emboîtement. Donc, ils ont des moyens pour représenter le problème, mais ces moyens ne sont pas suffisants pour arriver à la description du *crible* du solide Q .

On observe souvent qu'ils tâtonnent. De plus ils essaient de mettre en œuvre les connaissances qu'ils ont sur les intégrales, pour dégager le domaine d'intégration, mais ils ont des difficultés pour investir ces connaissances dans cette étape. Ils leur manquent donc encore des connaissances pour que le logiciel et les intégrales multiples deviennent des outils d'aide pour le calcul de volume. L'extrait ci-dessous illustre cette observation.

(B2, TC(822))

A : Mais y a pas de moyen de faire, tu sais quand on limitait un domaine quand on faisait les intégrales, il y a moyen de limiter le domaine avec ça, regarde. Si tu fais varier attends, il faudrait qu'on trouve les axes déjà,

G : Ouais, mais je pense que ça c'est encore plus compliqué ;

A : Regarde, si tu fais varier ça de -1 à 1, et l'autre tu dis euh, tu dis que c'est x , non ! Attends ;

G : Ouais, c'est vrai que c'est intéressant ; « rires » ouais, ouais ;

A : Ouais, non tu te souviens comment on limite les domaines quand on a intégrait ?

G : Ouais, je m'en souviens ;

A : L'idée c'est de euh, l'idée c'est dans cette zone de tracer euh S2, dans cette zone de tracer euh S2, et là dans cette zone S1 et celle-ci aussi S1. Parce qu'on a vu sur le dessin au-dessus que euh ça permettrait d'enlever les parties inutiles ;

G : Voilà ;

A : Ça enlèverait le bleu ici, le bleu ici, le rouge ici et le rouge ici ;

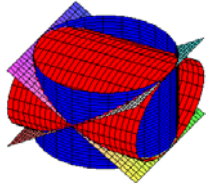
G : Ouais, ouais ; A : Après l'idée, pour la traduire à Maple... ;

On observe que les étudiants arrivent à argumenter correctement tout ce qu'ils perçoivent dans la tâche. Donc ils comprennent bien ce qu'ils doivent faire. Néanmoins ils ne savent pas comment mettre en œuvre leurs idées. Ensuite P intervient dans les démarches des étudiants et il tape lui-même sur le clavier en entrant la fonction **display** pour récupérer les descriptions précédentes de surface S1 et S2, ainsi que des plans p1 et p2 dégagés par B2. Donc l'objectif

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

est de tracer les plans et les deux cylindres en même temps grâce à une utilisation simple de la fonction **display**, comme le montre le résultat ci-dessous précédé par l'interaction suivante.

> **display(S1,p1,S2,p2);**



(B2, TC(766))

P : Ça y est ?
G : Ouais, on a traduit, mais on n'arrive pas à mettre euh;
P : Qu'est-ce que vous avez traduit ? Alors, regarde là. Donc ça c'est les plans, vous m'avez pas tracé tout en même temps ;
G : Bah, non ! Après c'est visible ;
P : Non ça marche bien ça, S1, S2 ;
A : Il faut faire copier et coller ;
P : Grand S1 ...Laisse comme ça ;
G : T'as pas le droit d'effacer ;

La visualisation graphique des quatre surfaces (S1, S2, p1, p2) ensemble avec des couleurs différentes est réalisée par **P** pour aider les étudiants à décrire le *crible* en s'appuyant sur leurs expressions algébriques des plans, sur la visualisation graphique ci-dessus, et sur les couleurs qui différencient les cylindres.

A noter que **P** pose toujours des questions importantes aux étudiants, qui les font avancer dans la description du *crible géométrique*, car ils y répondent correctement. A noter aussi que comme pour le binôme **B5** (séance 1), l'expression de **A**, dans l'extrait (B2, TC(766)) suivant (concernant les bornes de z , quand il nous dit : *Mais on peut pas mettre "-sin(t) et sin(t)" dans les bornes*), est un indice pour affirmer que la représentation graphique (dans *Maple*) des surfaces définies sur des domaines autres que des rectangles ou des parallélépipèdes n'est pas un type de tâche familier pour ce binôme. En effet les étudiants ont l'habitude de tracer les surfaces définies sur des domaines de type $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ en utilisant **plot3d** ou sur des domaines tridimensionnels de type $[a,b] \times [c,d] \times [m,n] \subset \mathbb{R}^3$ en utilisant la commande **implicitplot3d** (où a, b, c, d, m, n sont constants), ce sont des deux types de tâches couramment proposées par les auteurs des ouvrages conçus pour l'utilisation du logiciel *Maple* à propos de la visualisation graphique des surfaces. De plus, les exemples proposés dans la fonction "**help**" du logiciel sur l'utilisation des commandes **plot3d** et **implicitplot3d** ne concernent que la représentation graphique des surfaces définies sur des domaines réguliers.

Donc le fait que z peut varier entre deux courbes (**-sin(t)** et **sin(t)**), avec $t \in [0, 2\pi]$ a surpris ce binôme lors de l'utilisation de la commande **plot3d**. Puis la difficulté liée à cette utilisation a été momentanément "surmontée" grâce à **P**. L'extrait ci-dessous illustre ces observations.

(B2, TC(766))

P : Bon alors, le cylindre bleu là, donc il est, pour chaque valeur du paramètre, donc c'est celui qui est là, pour chaque valeur du paramètre t et du paramètre z , d'accord ? J'allume un point en bleu c'est bon ? **G** : Ouais ;
P : Je me dis, est ce que je veux enlever là c'est la partie que là au-dessus et la partie qui est là, en dessous. Alors, maintenant je me dis, pour quelles valeurs je suis juste à l'intersection. Pour quelles valeurs de t et de z je suis sur ce plan d'intersection ?
A : $\pi/4$?
P : Attention, le t c'est l'angle dans le plan x et y , c'est pas l'angle qui est ici, d'accord ?
G : Pour quelque soit t alors ?
P : Quelque soit t , pour quelles valeurs de z il faut quand même euh. C'est quel plan ça ? Il a quoi comme équation ? **A** : Euh $y=z$;
P : $y=z$, donc un point de cylindre il s'écrit comme ça, d'accord ? Quand est ce qu'il est sur le plan ?
G : Bah, quand $z=\sin(t)$;
P : Qu'est-ce que je vais enlever ?
A : Eh ! C'est qui est supérieur ?
P : Quand z est supérieur à, **sin(t)** ;
G : **sin(t)** ouais ;
P : Et Qu'est-ce que je vais enlever aussi ?
A : Inférieur à au moins **sin(t)** ;
P : Donc ce que je vais tracer c'est z compris entre ?
A : **-sin(t)** et **sin(t)** ;
P : Voila ! Ok !
A : Mais on peut pas mettre dans les bornes ;
P : Si, on peut le mettre dans les bornes, on a le droit de mettre des bornes, et des bornes une de l'autre. D'accord ?

On voit bien que ce binôme arrive à décrire le crible de S1 suite aux questions posées par **P**.

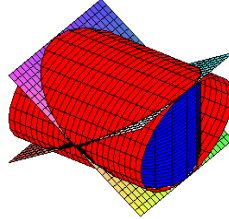
Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

Ensuite on observe que même après cette longue interaction avec **P**, ce binôme montre encore des difficultés pour décrire le crible de S2. Il tâtonne dans la recherche des bornes de y . Ainsi les termes suivants reviennent souvent dans leurs échanges.

C'est quoi du coup là ?
 Ce qu'il faut tracer c'est y de -1 à $-\sin(t)$, -1 à $-\sin(t)$ et $\sin(t)$ ah j' sais pas ;
 Et là comment je fais tu crois je redéfinis y ;
 J' sais pas, ouais ;
 y égale, j' sais pas si ça marche ça euh, de $\sin(t)$ à 1 du coup ;
 Ouais, je pense, vas-y ...
 De toute façon la première fois ça ne marche plus ;
 C'est vrai « Rires » si non ... vérifier sur *Maple*

Mises à part les interventions de **P** qui les aident beaucoup dans l'accomplissement des tâches, ils s'appuient surtout sur le logiciel (quand ils disent : *si non ... vérifier sur Maple*) qui leur envoie des réponses qui ne correspondent pas souvent à ce qu'ils ont voulu ; ils reviennent alors en arrière et modifient les choses à partir de là. Donc on voit un manque de travail essentiellement mathématique en amont pour une utilisation raisonnée du logiciel. La facilité de tracer dans *Maple* fait qu'au lieu de contrôler ces équations, ils essaient un peu au hasard, comme le montre leurs actions dans leur travail instrumenté dans *Maple* qu'on a retranscrit ci-dessous.

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi, z = - sin(t)..sin(t), color=blue);
> S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi, y=-1..- sin(t), y=sin(t) ..1, color=red);
> display(S1,p1,S2,p2);
Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional argument: y =sin(t) .. 1
```



On voit bien qu'ils réussissent à visualiser la partie de S1 (le cylindre bleu) comprise entre les deux plans. Donc c'est le crible de S1 décrit avec l'aide de **P** qui est correct. Le crible de S2 a posé des problèmes d'interaction entre les bornes mises en place et la visualisation graphique attendue. Ils ne rencontrent ainsi que des problèmes techniques liés à l'utilisation de la commande **plot3d**. Voici leurs expressions face à cette rétroaction de l'environnement.

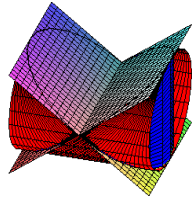
(B2, TC(822))	A : Tu vois il a compris là ;	G : Si, on peut faire ça, on met S3 ?
	G : Ah ! On a enlevé ça t'as vu ;	A : Ouais là ça serait $-\sin(t)$;
	A : Ouais, mais c'est les deux trucs, alors euh ;	G : On en met un troisième, on le met en rouge
	G : C'est les deux trucs qu'il n'a pas compris ;	aussi, on verra pas la différence c'est un peu de
	A : C'est les bornes ;	"bidouillage" mais euh je vois pas pourquoi ça
	A : Alors peut-être il faudrait plus lui dire	marcherait pas;
	qu'il enlève y égale, ou met deux points...	A : Ouais, ...;
	si on définissait les deux intervalles,	G : Ah, ouais $\sin(t)$ à 1 ;
1 à $-\sin(t)$, ah j' sais pas ;	A : Pas mal, bonne idée.	

On voit bien que les productions de B2 ne s'effectuent souvent que par des essais-erreurs. Les validations d'ordre graphique dans le logiciel *Maple* ne rendent surtout que des réponses inattendues par les étudiants, et constituent les rétroactions de l'environnement. Ainsi en s'appuyant ensuite sur les réponses du logiciel, ils réorganisent la tâche. Toutefois, cette réorganisation conduit parfois à des réponses inattendues. Donc on observe des lacunes dans les compétences des étudiants autour du sujet. A noter que ces lacunes souvent "disparaissent" momentanément au cours du processus heuristique, grâce à **P** ou en fonction des rétroactions

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

de l'environnement. Le travail instrumenté ci-dessous, résultat des échanges de l'extrait ci-dessus, justifie ces observations. D'abord ils entrent dans *Maple* les instructions suivantes :

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-sin(t)..sin(t), color=blue);
> S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-1..-sin(t), color=red);
> S3:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=sin(t)..1,color=red);
> display(S1,p1,S2,p2,S3);
```

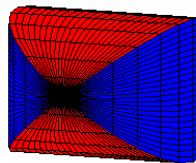


Voici leurs observations face à ce résultat.

A : Super ça. Le problème il était dans l'autre en fait ;
G : En fait le truc... ; **A** : Attends, on a gardé le bas ah, je crois qu'on a gardé le bas, alors ; **G** : Mais je ne sais pas, on a tout enlevé ; **A** : regarde, en bas ça a marché, en haut ... ; **G** : On aurait voulu faire ça mais on n'aurait jamais réussi ; **A** : Franchement c'est joli euh ; **A** : Vas-y, on va repartir de ça ; **G** : En fait là c'est $-\sin(t)$, $\sin(t)$, pas y que l'autre en fait ; **A** : Quoi ? **G** : Enlève ça et met $\sin(t)$ là ; **A** : J'enlève tout ça ? **G** : Ouais, je pense, ouais, cela $-\sin(t)$, non ! Là ; **A** : Qui ? **G** : Ici $-\sin(t)$; **A** : Ah ! Ouais, hop ! On va encore rigoler un coup ; **G** : Allez, j'espère que là c'est bon.

On observe que ce binôme conserve le résultat exact de S1. Mais il dérape encore une fois par rapport à S2, en enlevant d'ailleurs un de ses morceaux qui fait partie de Q . Ainsi la réaction des étudiants sur la réponse inattendue du logiciel leur a permis d'abord de réorganiser la tâche et ensuite d'exprimer la bonne description de crible de S2. Et puis ils comprennent l'inutilité de rajouter S3. Donc on voit que ce binôme progresse malgré tout dans le processus heuristique. Comme le montre leur travail instrumenté ci-dessous qui révèle la description correcte de crible du solide Q et de sa représentation graphique dans *Maple* conformément à ce qui est attendu dans **q4**. Toutefois cette description correcte ne s'est faite que par des jeux d'essais-erreurs en s'appuyant surtout sur la rétroaction de l'environnement.

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-sin(t)..sin(t), color=blue);
> S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-sin(t)..sin(t), color=red);
> display(S1,S2);
```



Voici leur expression de joie face à ce résultat.

B2 : Euh, euh, euh ! Hou ! Hou ! On est fort.

Question q5 – le calcul du volume de Q : Après avoir trouvé le solide criblé, ce binôme se met aux réflexions suivantes :

(B2, TC(877))

G : Voilà ! Maintenant il demande, calculez le volume de Q ;
A : C'est vrai ? **G** : Là maintenant il faudrait une fonction de calcul d'aire là dedans ;
A : Le volume ; **G** : Voilà le volume là dedans ;
A : Alors euh ;
G : Donc il faut intégrer. Ah ! Si c'est avec les bornes euh, ah ! Alors, donc là, tu vois puisque ici il faudra intégrer la truc bleu, donc de $-x$, euh ! Pas de $-x$, de $-y$ à y ;
A : Tu es sûr que tu veux intégrer ?
G : Oui, plutôt ! *<rires>* Ouais, ... pour calculer le volume. Tu vois par exemple on va faire plusieurs trucs. On va le diviser en quatre, entre euh, ce volume ;
A : Ouais ;
G : Par exemple ce petit triangle, chaque triangle quoi ! En fait ;
A : On se met dans un plan précis,

G : On va reprendre en compte que euh S2, ça c'est S2 ? **A** : En bleu ? **G** : Ouais ;
A : J'sais plus ;
G : Je crois que c'est S2, attends plus loin, c'est S1, S1 c'est bleu ;
A : Je vais mettre ;
G : Donc, ici on a intégré euh, donc S1 c'est x^2+y^2 ;
A : dx ; **G** : dy ; **B2** : dz ; **G** : Ça c'est euh ;
A : On fait varier x de -1 à 1 ;
G : x c'est ça ? **A** : Ouais, de -1 à 1 ;
G : Donc, non c'est y qu'il faut faire varier, non ?
A : Bah, en fait on fait varier x de y à ... ;
G : Ah ! Ouais, x de -1 à 1 ;
A : y on fait varier de euh, on cherche quelle volume déjà ?
G : On cherche par exemple ce volume là, bah après une fois qu'on a fait ce truc là ça ira tout seul.

Ces premières interactions des étudiants face à cette dernière question montrent que le travail

préliminaire de la visualisation graphique de Q peut jouer un rôle important dans la mise en place du calcul de volume. On voit bien que les étudiants pensent tout de suite à un outil (fonction) du logiciel qui peut favoriser le calcul de volume du solide qu'ils viennent de tracer. De plus ils s'appuient bien sur les couleurs qui différencient les morceaux de Q possibles pour le domaine d'intégration. A noter qu'ils voient bien les quatre morceaux de Q (différenciés par des couleurs) compris entre les deux plans $z=-y$ et $z=y$.

Donc ils ont pensé tout de suite au découpage de Q en sous-solides, mais ils ont du mal à le mettre en place [sous-étape (a)]. Ils ont aussi des difficultés pour décrire la représentation analytique d'un domaine précis d'intégration [sous-étape (b)]. Ils tâtonnent sur les bornes d'intégrations pour essayer d'exprimer l'écriture du calcul d'intégrale. Donc ils ne voient pas que les bornes qu'ils ont entrées dans *Maple* (pour arriver à la représentation graphique du solide *criblé*), correspondent, avec un certain "contrôle", aux bornes de l'intégrale conduisant au calcul du volume du solide Q .

A noter qu'ils s'approprient bien la tâche grâce aux connaissances qu'ils ont sur le calcul d'intégrale, néanmoins ces connaissances ne sont pas suffisantes pour arriver à appliquer immédiatement le travail de la visualisation graphique de Q au calcul d'intégrale multiple.

De plus ce binôme a des difficultés techniques pour utiliser le logiciel *Maple*, bien qu'ils aient pensé ensuite à l'emploi de la commande "**int**". Ainsi pour savoir comment utiliser de cette commande, ils cherchent dans la fonction "**help**" du logiciel les instructions d'utilisation d'"**int**". Mais la fonction "**help**" de la commande "**int**" ne décrit que les exemples de calcul des intégrales simples. Toutefois ils tâtonnent et supposent que l'instruction pour le calcul d'une intégrale triple c'est la représentation séquentielle de trois "**int**", comme le montre l'extrait du protocole :

(B2, TC(885))

A : On va faire un petit "**help**";

G : Ouais, c'est "**int**" ça je le sais mais ça c'est une intégrale simple quoi ! Parce que à la limite même après on pourra faire fois quatre, parce que chaque volume c'est ... alors ça c'est intégrale simple, intégrale simple, série intégrale, tu vois il fait que des intégrales simples ;

A : C'est nul ; G : Ah ! Non, je sais ..., t'écris je crois "**int**", de "**int**", de "**int**" je crois ; A : Ah ! Ouais ?

G : Ouais, deux "**int**" par exemple. Donc par exemple x^2+y^2 , avec x égale -1, 1 ;

A : Tiens, essaie de tape ça ;

G : z de -1 à 1 ;

A : Donc y de $-z$ à z .

G : On va voir ce que ça donne de toute façon ;

A : Ouais, ouais, ouais, au pire on fait un truc marrant ;

G : De toute façon à chaque fois que j'ai essayé de faire des intégrales avec *Maple*, ça a raté ;

A : y euh égale $-z$ à z ?

G : $-z$ à z , voilà, point virgule, on va voir, appuie !

Ces interactions ont conduit d'abord ce binôme au travail instrumenté suivant (cf. B2, TC(974), protocole).

```
> int((int(int(x^2+y^2),x=-1..1),z=-1..1),y=-z..z);
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments
```

On peut repérer dans cette action les problèmes techniques et les difficultés mathématiques suivantes :

- ✍ Manque de compétence sur la syntaxe de la commande "**int**".
- ✍ Difficultés pour interpréter les messages d'erreurs renvoyées par logiciel en fonction de leurs actions. On voit bien que le logiciel détecte les parenthèses mal placées dans cette action, notamment l'écriture du calcul de l'intégrale la plus interne et la plus externe. A noter que celle-ci marcherait en enlevant une des deux premières

parenthèses et la parenthèse qui est placée après y^2 dans la ligne de la commande. Cette correction ne résout que le problème technique. Ainsi la réponse du logiciel aurait été une expression ou fonction V dépendant de z , notamment la fonction $V(z) = \frac{8}{3}z + \frac{8}{3}z^3$.

- ✍ Difficultés à coordonner le mode usuel de la représentation de l'écriture du calcul d'une intégrale triple et celle employée dans les syntaxes de la commande "int" du logiciel. On voit facilement ces difficultés quand ce binôme rapporte de façon erronée la surface du cylindre C1 au lieu de la fonction constante $f(x, y, z) = 1$ pour essayer de calculer le volume de Q ($V_\Omega = \iiint_\Omega dV$). Donc, la démarche de ce binôme nous permet de dire qu'il a pensé tout d'abord au calcul de volume du solide sous une surface, et donc au calcul d'une intégrale double.
- ✍ La surface rapportée ne correspond pas à S1. De plus l'ordre de placement de bornes d'intégrations dans la syntaxe de la commande "int" ne conduit les calculs qu'à un résultat inattendu, notamment la fonction $V(z)$ exprimée précédemment.

Les problèmes liés à ces derniers points ont été identifiés par les étudiants après qu'ils ont été confrontés à la réponse inattendue du logiciel. Ainsi ils reviennent en arrière et modifient les données, dans un délai de temps d'à peu près 8' après avoir visualisé le Q criblé. Voici leurs remarques dans l'extrait ci-dessous :

(B2, TC(988))

- G : D'ailleurs pourquoi on finit par z , on ne devrait pas finir par z ? On devrait finir par euh ! Pour quoi t'intègres d'abord par z ;
- A : Pourquoi justement j'ai essayé de, de faire les deux, deux plans quoi, tu vois ?
- G : Ouais, mais regarde, si on inverse là ;
- A : En plus, moi il me manque le, le 1, attends le 1 mais, tu vois x^2+y^2 il y a plus le 1.

Avec ces observations ce binôme produit alors le travail instrumenté suivant qui aboutit encore une fois à une erreur.

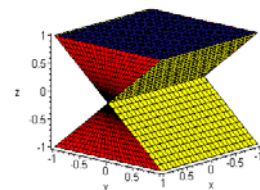
> **int((int(int(x^2+y^2-1), x=-1..1), y=-z..z), z=-1..1);**
 Error, (in int) wrong number (or type) of arguments

A noter que les difficultés d'interprétation des erreurs de syntaxe se prolongent dans cette action. Notamment le problème de parité des parenthèses dans les mêmes positions. A noter aussi que l'expression x^2+y^2-1 , ainsi placée dans cette instruction, est interprétée comme une fonction à trois variables. Donc mis à part le problème technique, l'écriture de l'intégrale

int(int(int(x^2+y^2-1), x=-1..1), y=-z..z), z=-1..1); ou équivalente à $\int_{-1}^1 \int_{-z}^z \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 - 1) dx dy dz$

calcule l'intégrale triple de la fonction $f(x,y,z)=x^2+y^2-1$ (surface parabolique) sur le domaine de 3D de représentation analytique $D = \{(x, y, z); -1 \leq x \leq 1, -z \leq y \leq z, -1 \leq z \leq 1\}$.

Donc l'écriture de calcul de l'intégrale triple mise en place par ce binôme ne conduit pas au calcul du volume de Q comme ils le voulaient. De plus, D ne correspond ni à Q ni à un de ses morceaux. Comme le montre aussi sa visualisation graphique qu'on peut préciser ci-contre.



On voit bien que les difficultés à coordonner ce qu'ils voient dans l'espace et les expressions algébriques correspondantes se répètent dans toutes les étapes du

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

processus heuristique. A noter qu'ils ont bien repéré visuellement les parties de Q pour le domaine probable d'intégration, mais ils ont encore des difficultés à représenter analytiquement les domaines tridimensionnels. Donc ils ne savent pas se servir des moyens fournis par le travail de visualisation graphique pour préciser le domaine sur lequel ils vont calculer l'intégrale. En plus, ils montrent des difficultés dans le rôle de la commande "**int**" dans cette tâche.

Face à ces difficultés ce binôme change alors les méthodes d'exploitation de cette commande comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous :

(B2, TC(+04))	A : Ouais mais il y a un problème avec notre euh, notre intégrale ;	G : Vas-y, Ctrl+C... Alors tu vas intégrer quoi là ?
	G : Je crois aussi ;	A : Ah ! Ouais, mais non ça va pas marcher ;
	A : Je crois que c'est pas comme ça les intégrales triples, c'est pas possible. Non ! Mais il faut suffit de euh, j' sais pas ! Ça sert à rien de faire l'intégrale de l'intégrale, de l'intégrale, de l'intégrale ;	G : Puisque déjà on a même pas de z ici, dans cette intégrale, donc lui il ne comprend pas déjà je pense ;
	G : Ouais ;	A : Sinon, on le fait petit à petit euh !
	A : Moi je dirais que euh, j'ai envie de tester un truc... tu vois ;	G : Bah, ouais ça ne marchera pas peut-être ;
		A : Si on intègre sur x, après on intègre sur z ;
	G : Ouais, ouais, bah tente, ... ;	
	A : On le fera avec le signe pourcentage ;	
	G : Ok ! Ouais, vas-y ;	

Cette interaction a d'abord conduit ce binôme au travail instrumenté suivant. A noter que cette nouvelle méthode d'exploitation de la commande "**int**" est tout à fait correcte. Malgré cela, le résultat obtenu surprend les étudiants.

$$\begin{array}{ll}
 > \text{int}((x^2+y^2-1), x = -1..1); & -\frac{4}{3} + 2y^2 \\
 > \text{int}((\%), y = -z..z); & -\frac{8}{3}z + \frac{4}{3}z^3 \\
 > \text{int}((\%), z = -1..1); & 0
 \end{array}$$

A chaque réponse inattendue du logiciel en fonction de leurs actions, ce binôme revient en arrière et modifie ses stratégies d'action. A noter qu'ils essaient d'identifier l'origine des erreurs tant d'ordre technique que d'ordre mathématique. Les termes suivants reviennent souvent dans leurs réflexions, suite à une réponse inattendue de *Maple* :

Moi je ne comprends pas pourquoi ça a pas marché au-dessus ;
A mon avis c'est dans les bornes, tu vois qu'on s'est planté ;
Mais euh, ouais, où est le problème ?
x il ne pose pas de problème.

En interprétant la réponse (*zéro*) du logiciel pour le volume de Q , ce binôme se rend compte que leur difficulté se trouve sur le domaine d'intégration. A noter que ce n'est pas seulement la question de la définition du domaine qui est problématique dans leur démarche. On observe aussi le manque de compétence sur le calcul de volume par l'intégrale triple, et par l'intégrale double. On voit qu'ils mélangent la technique du calcul de volume sous une surface (donc le calcul de l'intégrale double d'une fonction f positive sur le domaine d'intégration) avec la technique du calcul de volume par l'intégrale triple. On voit bien cette difficulté quand ils mettent en place l'écriture suivante pour calculer le volume.

$$\int_{-1}^1 \int_{-z}^z \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 - 1) dx dy dz$$

A noter que le domaine D mis en jeu comporte des morceaux symétriques par rapport au plan-

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

$xy (z=0)$. Ainsi le manque de contrôle sur la démarche mise en place conduit effectivement au calcul d'un volume nul.

D'abord cette, propriété de symétrie des morceaux de D a été repérée par ce binôme, après avoir été confronté avec la réponse inattendue du logiciel. Ils raisonnent alors ainsi :

(B2, TC(+54))	<p>G : Oh ! Bah le volume est nul euh !</p> <p>A : A mon avis c'est dans les bornes, tu vois qu'on s'est plantés. Parce que, pourquoi on fait varier de -1 à 1, moi je dis de 0 à 1 ;</p> <p>G : Ouais, vas-y mets de 0 à 1, comme ça on aura pas de zéro, puisque attends z il est là ;</p> <p>A : z bah on le fait varier de 0 à 1, comme ça on aura ce volume-là normalement ! Après le volume-là on le multiplie par quatre !</p> <p>G : Ouais vas-y, on a pas le droit de le faire, parce que là si tu remets un pourcentage, ça marchera pas, essaie de faire int avec ça ;</p> <p>A : Ouais ? G : Fais int ... ouais essaie ;</p> <p>O : <i>Ils entrent avec l'instruction suivante qui résulte à -1;</i></p> <p style="text-align: center;">int(-8/3*z+4/3*z^3,z=0..1);</p> <p>G : Ouais euh c'est faux ;</p>	<p>A : Mais euh, ouais, où est le problème ? Parce que déjà l'intersection elle est comprise euh, dans le cube, on a dit !</p> <p>G : Mais non, en fait, attends, c'est normal qu'on trouve zéro il est à cheval sur... ;</p> <p>A : Sur quoi ?</p> <p>G : Sur zéro ! Donc on délimite euh, regarde ... de coup cette intégrale là positive, cette intégrale là négative ;</p> <p>A : Quoi ?</p> <p>G : Bah, le volume il le prend entre zéro et la fonction ! Donc là c'est positif, là c'est négatif, c'est normal qu'on trouve zéro du coup ;</p> <p>A : Ouais ;</p> <p>G : Ce qu'il faut c'est découper en deux là faire varier ;</p>
----------------------	---	---

Les échanges de l'extrait du protocole ci-dessus conduisent les étudiants à un travail correct sur le domaine D et sur le calcul de l'intégrale triple en utilisant correctement la commande "**int**" (cf. B2, TC(+76)). Ce résultat surprend les étudiants encore une fois. A noter que jusqu'à ce moment, le travail de ce binôme sur le calcul de l'intégrale s'est toujours développé hors de la question **q5**, et sans l'intervention de **P** dans un délai d'à peu près 31'. Comme le montre le protocole (B2, TC(822) à TC(+200)).

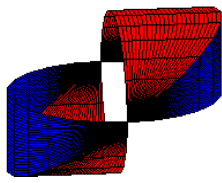
On observe que ce binôme fait quelques efforts par tâtonnement pour essayer d'interpréter la représentation analytique du solide qu'il vient de tracer. Par exemple quand ils disent :- *ce qu'il faut c'est découper en...* - sans savoir s'ils se trouvent avec le domaine d'intégration correct ou non. Donc leurs choix ne sont pas tout à fait précis sans l'intervention de **P**. Cette observation nous permet d'ailleurs de dire que les interventions ciblées de **P** sont des éléments clés dans l'apprentissage des outils *Maple* qui se développe conjointement avec un réinvestissement des connaissances de calcul des intégrales multiples. C'est-à-dire que les types de compétences soulignées précédemment se complètent.

Ce binôme montre bien ce réinvestissement des connaissances après l'intervention de **P** suivante. Ainsi il reprend ensuite les instructions qui ont permis la visualisation graphique de Q criblé. Il modifie les bornes pour procéder au découpage de Q et à la visualisation graphique d'un de ses morceaux. La validation d'ordre graphique dans *Maple* de cette nouvelle démarche des étudiants, permet d'afficher correctement deux morceaux symétriques de Q , à partir d'un découpage *usuel*. L'extrait du protocole suivant confirme ces observations.

(B2, TC(+200))	<p>P : Tu m'as coupé ça en plusieurs morceaux ?</p> <p>G : Bah ! Là ouais ;</p> <p>P : Ça c'est super facile. Donc vous me coupez cette surface en morceaux pour avoir juste une partie, d'accord ?</p> <p>A : Déjà mets zéro, ici je pense ;</p> <p>G : Ouais ;</p> <p>A : Et même là il y a t qui change aussi, je pense;</p>
-----------------------	--

Donc ils entrent avec les instructions suivantes :

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t),color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..sin(t),color=red);
display(S1,S2);
```



Voilà leurs expressions de joie :

G : Euh, euh, déjà on a un peu découper c'est déjà quelque chose ;

A : Ouais, il y a un souci là, donc ça serait t de de 0 à π ? Non ?

G : De 0 à π tu penses ? A : Ouais.

Ensuite ils font plusieurs découpages, en modifiant toujours correctement les bornes du dernier morceau de Q affiché par le logiciel, comme le montre leur fichier *Maple* et le protocole expérimental.

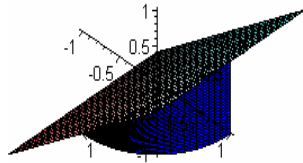
La séquence de sous-solides ainsi obtenue par ce binôme est tout à fait guidée par les symétries visibles dans chaque morceau de Q . En effet, à chaque fois, ils pourraient

voir facilement les symétries sur le graphique "à l'aide de couleurs" et à partir des bornes des paramètres t , y et z . Ainsi les termes suivants reviennent souvent dans leurs réflexions.

- Et là on peut encore couper tu vois ? [...]
- Ouais, on peut couper là, on peut couper là, de 0 à $\pi/2$? [...]
- Et ça c'est huitième de volume en fait ; [...]
- Donc là on est maintenant en coordonnées cylindriques ? [...]
- Alors on va délimiter dans ce plan d'abord ; [...]
- Là en sous, tu vois ton Q là, si tu mets ton plan ici comme ça, le volume qui est là est égal au volume qui est là ; [...]
- Là on a un huitième. Donc divisé par deux, on a un seizième. [...]
- Je n'ai jamais autant travaillé dans Maple que ça. [...]

On observe que le dernier morceau mis en place dans la séquence de découpage de Q par ce binôme révèle le seizième du solide Q par un découpage "non usuel". Comme le montre leur travail instrumenté dans *Maple* qu'on a retranscrit ci-dessous (cf. aussi TC(+345) du protocole et leur fichier *Maple*).

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z], t=0..Pi/2,z=0..sin(t), color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t), color=red);
display(S1,p2);
```



Après avoir visualisé la seizième partie de Q qu'on peut nommer Q_{16} , ce binôme commence son travail de description analytique de ce morceau. Ils parlent donc de l'ensemble des points qui décrivent Q , c'est-à-dire l'identification de la variation de x , y et z dans Q_{16} . Ainsi les termes suivants

sont fréquents dans les interactions des étudiants :

- Mets les axes, voilà ! Alors, là ça c'est facile maintenant comme intégrale ;
- Alors là ok ! On voit un peut ici, attends laisse le comme ça¹⁰⁹ ;
- Voilà, alors ici on a z , donc z il varie de 0 à... ;
- Ici t'a y là non ?
- Je crois que c'est y varie y varie de 0 à x ;
- Là on a z qui varie de 0, de euh 0 à y ;
- y de 0 à x ? T'es d'accord ? Quoi ?
- Ou sinon on dit que c'est égale à ça ;
- Ça on peut dire que c'est un huitième de cylindre ?
- Donc, ça c'est facile à calculer le volume ;
- Mais, aussi il y a ce plan, on peut l'enlever ce plan non ?
- Bah, il m'aide moi ce plan là ;

On observe que la représentation analytique de Q_{16} a posé des difficultés à ce binôme. Ils voient bien graphiquement (surtout à l'aide des axes) les propriétés des variables x , y et z de Q_{16} . Mais ils ne pensent pas à utiliser les bornes (qui ont servi à la représentation graphique de Q_{16} et qui sont "facilement" visibles dans les lignes de commandes) dans la représentation analytique de Q_{16} . Ils tâtonnent en regardant et manipulant le graphique à l'aide de la souris, pour essayer d'estimer les domaines de x , y et z .

A noter que ce binôme a choisi le paramétrage *angulaire* comme stratégie de la visualisation

¹⁰⁹ Résultat de la manipulation du graphique avec la souris

Binôme 2 : Etudiants (A), Etudiants (G)

graphique de Q . Donc ils ont travaillé dans toutes les étapes avec les composantes angulaires, qui servent dans la mise en place du calcul de volume de Q par une intégrale multiple en coordonnées polaires ou cylindriques. Ou encore en coordonnées cartésiennes à partir des techniques classiques de changements de paramètres. Toutefois, ils n'utilisent pas tous les moyens qu'ils ont à leur disposition pour résoudre la tâche. Ils préfèrent "construire" les procédés par tâtonnement pour essayer de voir ce que le logiciel va leur répondre à partir de leurs actions.

A noter que les échanges portant sur les termes qu'on a soulignés ci-dessus, après avoir visualisé Q_{16} , consistent à tenter de trouver la représentation analytique de Q_{16} . Mais ils n'arrivent pas à le faire, ni dans *Maple* et ni par des techniques papier/crayon comme le montre le protocole expérimental et leurs brouillons.

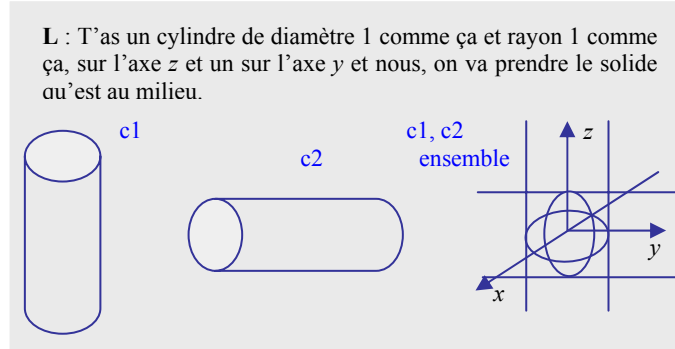
Face à cette difficulté ce binôme essaie de trouver le volume de Q par analogie avec le volume du cylindre de rayon 1 et de hauteur 1, en s'appuyant d'abord sur la représentation graphique de Q_{16} . Voici leurs raisonnements lors de leur dernière l'interaction avec **P**.

(B2, TC(+413))	P : Ça y est ?	P : Ouais, d'accord donc ça, un huitième de ?
	A : Je comprends pas on peut pas dire ... ;	G : Du cylindre euh de rayon 1 et de hauteur 1 ;
	G : On a dit que au maximum c'est un seizième de volume ;	P : Ouais, donc euh ;
	P : Ouais ;	A : Un volume avec des π c'est pas bon ça ;
	A : On pensait justement dire que ce volume là c'est un huitième de ;	G : Ça fait $\pi/8$ et après un seizième de $\pi/8$. En gros ça nous fait trouver 16π ;
	G : Cylindre de hauteur 1 et rayon 1 ;	A : 16π ?
	P : Un huitième de ;	G : Ouais ;
	A : Bah, du cylindre qui...;	P : Mais pourquoi, pourquoi le volume intérieur et extérieur serait le même là ? Euh, sur le cylindre, la partie qu'est là ;
	P : Euh, euh, tu mets l'autre partie dessous par symétrie ;	G : Bah, c'est le même ;
	G : Ouais ; P : Par symétrie, oui ;	P : Bah, non ;
	G : Là c'est le même volume, l'autre coté c'est pareille, donc un huitième ;	G : Non ?

Donc l'utilisation du problème connu est tout à fait une démarche pertinente dans le processus heuristique d'un problème nouveau. Néanmoins, dans ce cas, le calcul du volume du cylindre de rayon 1 et de hauteur 1 n'était pas une stratégie de réussite pour l'accomplissement de **q5**. Comme le montre l'extrait (B2, TC(+413)) ci-dessus. Donc ce binôme n'arrive pas à la solution effective de **q5**.

1.1..8 Analyse du travail de Binôme 3

Question q1 et q2 : Ce binôme est arrivé à dessiner tout de suite les deux cylindres (c1 et c2) sur papier (qu'on reproduit sur la figure ci-contre). À partir de ces dessins, il utilise leur main (mouvement vertical de haut en bas et horizontal de gauche à droite), il a dessiné dans un repère orthonormé sur le brouillon les deux cylindres (c1, c2 ensemble comme ci-dessous).



On peut donc dire que ce binôme montre une bonne visualisation tridimensionnelle du problème, grâce à une certaine connaissance qu'il a de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension. Il "voit" bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur réunion. Toutefois ce qui suit montre clairement que les connaissances qu'ils ont, notamment sur la visualisation géométrique dans l'espace, ne sont pas suffisantes pour arriver à coordonner ce qu'ils visualisent dans cette dimension avec les expressions algébriques qui le représentent. On observe en outre une certaine difficulté chez ce binôme, lié à la dualité sur les objets *cercle* et *cylindre*.

Cette observation nous permet d'ailleurs de souligner que cette difficulté est d'une certaine manière liée au fait que les deux objets géométriques (*cercle* et *cylindre*) ont la même expression algébrique, mais des représentations analytiques et géométriques différentes, qu'on peut préciser dans les tableaux ci-dessous selon le cas lié au problème posé.

Cercle (L)	
Expression algébrique	Représentation analytique
$x^2 + y^2 \leq 1$	L: $\{(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\}$
Représentation graphique	

Cylindre (C)	
Expression algébrique	Représentation analytique
$x^2 + y^2 \leq 1$	C: $\{(x, y, z), x^2 + y^2 \leq 1, z \in \mathbb{R}\}$
Représentation graphique	

Les différentes caractéristiques de ces deux objets, qui ont des expressions algébriques semblables, interfèrent sûrement dans les modes de raisonnement des étudiants. En nous rapportant précisément au protocole de la séance 1 (binômes impairs, annexe VI), on trouve ce problème de *dualité* sur les objets ci-dessus, dans les interactions entre L et J (cf. B3, TC087), ci-dessous), quand ils parlent de l'équation $x^2 + y^2 = 1$, repérée dans les inéquations de l'énoncé, pour exprimer la surface cylindrique de C1. Celle-ci est précédée de l'intervention de P qui parle de l'équation de la surface qui délimite C1 (cf. P, séance 1, TC053).

Binôme 2 : Etudiants (J), Etudiants (L)

(B3, TC087)

J : Alors et l'autre ? Ah, non ! C'est pas un cylindre ça, ça c'est pas ah !
L : Si, parce que c'est un cercle, $x^2+y^2=1$ c'est un cercle, on est dans l'espace et vu que c'est indépendant de z , ça fera un cylindre ;
J : Ouais ;
L : Donc l'autre c'est pareil.

Après avoir repéré l'équation de surface de chaque cylindre, la difficulté de ce binôme est d'exprimer les équations paramétriques demandées par l'énoncé (**q1**). Dans ce but, B3 parle d'abord (avec incertitude) du paramétrage en *coordonnées sphériques*. Cette initiative nous permet d'ailleurs de penser que ce binôme a interprété le solide intersection des deux cylindres comme un objet tridimensionnel facilement représentable en *coordonnées sphériques*. Néanmoins, la manipulation algébrique des expressions de cylindres transformées en *coordonnées sphériques* a compliqué la situation, car B3 s'est retrouvé avec une expression plus sophistiquée, que **L** a d'abord écrite sur le papier comme suit :

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z &= \rho \cos\varphi \end{aligned}$$

C1 :
 $\rho^2 \sin^2\varphi (\sin^2 + \cos^2) \leq 1$
 $\rho^2 \sin^2\varphi \leq 1$ $-1 \leq \rho \sin\varphi \leq 1$

C2 :
 $\rho^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + \rho^2 \cos^2\varphi \leq 1$

J : ça ne simplifie pas ? **L** : Bah, non !

On voit bien que les trois équations prises en compte sont relatives à la transformation des expressions cartésiennes en *coordonnées sphériques*. La représentation de C1 est correcte par contre, les étudiants on confondu y et x dans la représentation de C2. Le binôme se rend de tout façon compte que les *coordonnées sphériques* ne simplifient pas la représentation.

Les étudiants changent alors la façon de voir la tâche et commence à raisonner sur le paramétrage "*angulaire*" de surfaces. La première expression rentrée dans *Maple* par B3 comporte d'ailleurs correctement les expressions usuelles de la transformation en *coordonnées cylindriques*. Toutefois, la syntaxe erronée de la commande **plot3d** ainsi que la définition classique d'une surface en 3D (qui doit forcément comporter deux paramètres) a conduit à une erreur comme l'indique leur instruction ci-dessous.

```
> plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho = -1..1, theta = -Pi..Pi, z = -3..3) ;
Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional argument: z = -3 .. 3
```

Mais B3 ne savait pas s'il s'agissait d'une faute de syntaxe ou de mathématiques. Cette action montre que les étudiants ont des difficultés non seulement dans l'utilisation de la syntaxe (04) de la commande **plot3d** de *Maple*, mais surtout dans l'interaction entre les graphiques de surface qu'ils perçoivent dans l'espace et leurs représentations analytiques. En plus, cette action ne se réalise que par tâtonnement : dont les termes suivants reviennent souvent dans leur anticipation lors de cette première étape :

T'es perplexe, tu penses que ça ne va pas marcher ;
 Si, si, si, j' sais pas ;
 On va avoir un petit cylindre, met -3, 3 quoi ;
 Vas-y essaie ; Pourquoi ça ne marche pas ?

En interprétant la rétroaction de l'environnement à partir de leur action, ce binôme se rend compte que le paramétrage d'une surface ne doit comporter que deux paramètres et non trois (cf. TC285, B3, annexe VI). Par ailleurs, le nouveau raisonnement de ce binôme a fait avancer son mode de représentation analytique de la surface. Mais le résultat n'était pas tout de suite plausible, car leur raisonnement ne correspond pas avec leur mode de représentation tant dans l'environnement *papier/crayon* que par les techniques instrumentées dans *Maple*. D'abord ils entrent l'instruction (1) dans *Maple* qu'ils réécrivent ensuite selon instruction (2).

- (1) > `plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho = -1..1, theta = -Pi..Pi, z = -3..3) ;`
 Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional argument: z = -3 .. 3
- (2) > `plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho=-1..1, theta = -Pi..Pi) ;`
 Plotting error, empty plot

On peut repérer dans ces actions le problème technique et les difficultés suivantes :

- Manque de compétence sur la syntaxe (04) de la commande **plot3d**.
- Difficulté à coordonner le mode usuel de représentation analytique des surfaces par des techniques *papier/crayon* et celle outillée par la syntaxe (04) de la commande **plot3d** : On voit facilement ces difficultés quand ce binôme essaie de tracer la surface S1 de dimension trois avec trois paramètres. D'ailleurs il est remarquable que la commande **plot3d** de *Maple* ne comporte naturellement que :
 - ✍ deux paramètres dans les cas de tracé des surfaces paramétrées (cf. syntaxe (04), chapitre D)
 - ✍ deux variables dans les cas de représentation des surfaces par des fonctions (cf. syntaxe (04)).

Les cas de trois variables sont réservés pour le choix de la visualisation des expressions exprimées implicitement. Celle-ci est alors possible grâce à la syntaxe (07) de la commande **impliciteplot3d**, dont les bornes des trois variables doivent forcément être constantes.

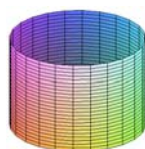
- Dualité des objets *solide/surface*. Celle-ci est visible dans les instructions que B3 anticipe avec l'ensemble des points `[rho*cos(theta),rho*sin(theta),z]` (expressions usuelles de la transformation en coordonnées cylindriques). Cette action nous permet de dire que ce binôme a pensé à tracer plutôt un volume, c'est-à-dire, la visualisation du cylindre C1 au lieu de la surface S1. Mais *Maple* ne trace pas de solides, mais des surfaces ou des bouts de surfaces qui font le contour du solide.
- Dualité entre *paramétrage* `[rho*cos(theta),rho*sin(theta),z]` et *paramètres* (`rho=-1..1, theta=-Pi..Pi`). On voit bien que le paramétrage pris en compte comporte trois variables (ρ, θ, z) dont deux varient, ce qui explique que *Maple* rend une erreur.

Après l'intervention de **P** suivante, ces difficultés sont momentanément "surmontées", et **B3** arrive à résoudre la tâche.

(B3, TC385)	<p>P : Attends, $\rho \cos \theta, \rho \sin \theta$, ce qui est un tout petit peu gênant dans votre histoire, c'est que vous essayez de tracer une surface de dimension trois et que vous avez trois paramètres ;</p> <p>L : Ouais, ouais ;</p> <p>P : A priori ce serait plutôt un volume, non ! Ça c'est bien là tu me le laisses, par contre qu'est-ce qui va me manquer ? C'est euh, pourquoi vous mettez $\rho \cos \theta$? L'équation de votre cylindre c'est quoi ? J : $x^2 + y^2 \leq 1$; P : Non ! L : Non ?</p>	<p>P : ça c'est l'équation du volume intérieur $x^2 + y^2 \leq 1$. $x^2 + y^2 = 1$ nous ce qu'on cherche à tracer, on cherche pas à tracer le volume, on cherche à tracer la surface extérieure, d'accord. $x^2 + y^2 = 1$, donc le ρ ici n'intervient pas, d'accord ?</p> <p>J : Bah il fait 1 quoi ?</p> <p>P : Oui, si tu veux, donc tu me l'effaces parce que c'est plus un paramètre tu m'enlèves la valeur de ρ qui est là-bas ;</p> <p>J : Là ? P : Oui ; L : Ah, ouais.</p>
-------------	---	--

Avec cette intervention très directive de **P**, ce binôme revient en arrière et modifie alors les données en enlevant **rhô** dans l'instruction (2), comme le montre leur instruction ci-dessous qui produit alors le premier cylindre attendu.

> `plot3d([cos(theta), sin(theta), a], theta = -Pi..Pi, a = -3..3) ;`



On peut donc dire que ce binôme apprend à utiliser correctement les syntaxes des commandes du logiciel non seulement à partir de plusieurs essais-erreurs, mais

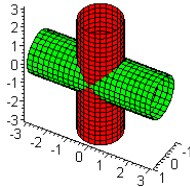
aussi grâce à **P** qui intervient en posant parfois certaines questions aux étudiants pour faire évoluer leurs modes de raisonnement autour de la tâche (cf. B3, TC385, extrait ci-dessus). D'une part, les connaissances mises en jeu dans les interactions de **P** avec les étudiants rendent souvent possibles les réussites des étudiants dans les processus heuristiques. D'autre part, ces interactions sont d'une certaine manière ciblées. C'est-à-dire que **P** prend en charge certaines démarches de la résolution de la tâche pour que ses étudiants arrivent à la bonne réponse, comme l'indique l'intervention ci-dessous.

(B3, TC(406))

P : Donc, ça c'est le premier, premier cylindre¹¹⁰, donc éventuellement ensuite on reprend la même chose tu me fais un copier coller, pour garder les instructions que tu as, donc tu copies ça, tac, tac, Ctrl+V. Et donc ce qu'on va faire c'est affecter cette valeur là, dans une variable qu'on va appeler par exemple S1 ok ? S1 et deux points là bas, parce que sinon tu, te rends l'ensemble des nombre, et tu me modifies la couleur, **color**, à la fin virgule **color** et tu choisis une couleur, et vous vous dépêchez un tout petit peu pour tracer l'autre cylindre..., la fonction **display** vous me donnez, donc tu peux reprendre un Ctrl+V si tu veux.

A la lumière de ce discours de **P**, ce binôme entre alors les instructions suivantes dans Maple qui rend les deux cylindres simultanément, comme attendu pour la question **02**.

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=-Pi..Pi, a=-3..3, color=purple);
> s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)],theta=-Pi..Pi,a=-3..3, color=green);
> display (s1, s2);
```



Voilà l'expression de B3 ; **L** : c'est bon, ensuite ; **J** : On va faire quoi ?

Question q3 : "Montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans" n'a pas été une tâche facile pour ce binôme. Voilà les premiers échanges entre eux après une lecture de **q3**.

(B3, TC459)

J : Tu es d'accord toi ? Ils se coupent sur deux plans ? **L** : Ouais, ouais ; **J** : Lesquels ?
L : Mois je dirais deux plans comme ça en fait, toc, toc tu vois ça c'est un plan, et puis un plan comme ça, un plan comme ça ;
O : *Il fait le geste avec ses mains en mouvements curvilignes selon la configuration géométrique du cylindre ;*

L : En fait, imagine le vert qui traverse, faut imaginer que c'est plat ;
O : *Il parle du graphique ci-dessus ;*
J : Hun ;
L : Imagine la surface du cylindre vert qu'on ne voit pas. En haut et en bas, ça serait un plan.

Ensuite c'est **J** qui fait des manipulations en bougeant les deux cylindres ensemble afin d'essayer de déterminer les deux plans. Il réduit l'intervalle $[-3 ; 3]$ à $[-2 ; 2]$; **L** (avec ses mains) dit que ces plans sont curvilignes alors que **J** objecte en disant que « un plan c'est un plan » et avec la souris il essaie de bouger encore la figure pour déterminer les équations des deux plans. Ils font plusieurs essais pour tracer les plans de l'intersection, par exemple :

```
> plot3d([1,1,a], a=-3..3, color=yellow);
```

Cela n'est pas marché. Dans leurs tentatives ces étudiants n'utilisent aucun contrôle par des connaissances mathématiques qu'ils ont. Ici par exemple, ils devraient se rendre compte que ce paramétrage va donner une courbe (ici en fait une droite) et pas une surface comme demandé.

J arrive à voir "spontanément" les deux plans à partir de la figure de l'étape précédente (**q2**) en la bougeant avec la souris, pour que son collègue **L** voit la même chose que lui. Néanmoins, coordonner ce qu'ils voient avec les équations paramétriques correctes, qui

¹¹⁰ **P** parle du cylindre précédent obtenu par B3 après extrait 20 ci-dessus,

rendent compte de la représentation graphique dans *Maple* [sous-étape (a)], a donné lieu à une longue discussion entre eux, ainsi qu'à des essais-erreurs dans *Maple*.

En plus, ils n'utilisent pas les expressions des deux cylindres imposées par l'énoncé pour chercher les équations des deux plans. Ils préfèrent s'appuyer sur la figure précédente affichée à l'écran, à laquelle ils rajoutent les plans qu'ils tracent par tâtonnement. Voilà l'expression de **P** au moment où il voit la difficulté de **B3**.

(B3, TC640)

P : Ça y est, ça a avancé un peu ? [...]
Alors **1, 1, a** c'est quoi, **1, 1, a** ? Ça c'est une courbe ça, ça dépend d'un paramètre ;
B3 : Ouais, on veut faire un plan ;
P : C'est quoi ça, c'est un plan ?
B3 : Hun ;

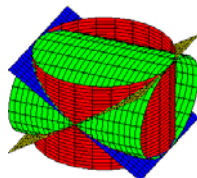
P : Un plan qui a quoi comme équation ?
L : C'est un plan qui passe par 1, $x=1$;
P : Oui d'accord, ça c'est le plan d'équation $x=1$, pourquoi tu veux tracer ça ?
L : J'sais pas, en fait on voit pas bien euh on voit pas bien comment ça s'intersectionne.

On voit bien que les difficultés des étudiants pour coordonner la visualisation graphique et la représentation analytique des objets de l'espace sont présentes dans chaque phase du processus heuristique de ce problème. Ils font quelques efforts (par exemple quand ils disent - *on veut faire un plan* - sans même savoir en quoi cette action va les aider) à partir du travail instrumenté de représentation graphique (par tâtonnement) pour essayer de dégager les caractéristiques analytiques des objets qu'ils visualisent dans l'espace. On s'aperçoit alors que les interventions ciblées de **P** sont des éléments clés dans l'apprentissage des outils *Maple* qui se développe conjointement avec un réinvestissement des connaissances de géométrie dans l'espace. C'est-à-dire que les types de compétences soulignées précédemment se complètent.

Ce binôme montre bien ce réinvestissement des connaissances après l'intervention de **P** ci-dessus, quand ils reprennent la dernière instruction rentrée dans *Maple* et modifie le paramétrage en incluant le paramètre **b** sans réelle justification. La validation dans l'ordre graphique dans *Maple* de ce nouveau paramétrage affiche correctement le 1^{er} plan. Ensuite ils font plusieurs essais, pour chercher le paramétrage du deuxième plan et sa représentation graphique, d'où **L** indique « $a = b$ » puis il fait des tâtonnements en observant le résultat obtenu sur l'écran.

Après un long échange de raisonnements entre eux (cf. B3, TC(740) du protocole), ils entrent alors avec les instructions ci-dessous qui affichent ainsi les deux plans ensemble avec les deux cylindres, comme attendu dans **q3**.

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a], theta=-Pi..Pi, a=-1..1, color= purple):
s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)], theta=-Pi..Pi,a=-1..1, color=green):
p1:=plot3d([b,a,a],a=-1..1, b=-1..1,color=yellow):
p2:=plot3d([b,a,-a],a=-1..1, b=-1..1,color=blue):
display(s1,s2,p1,p2);
```



On voit bien que, le fait que le solide intersection Q soit entièrement compris dans le cube $[-1, 1]^3$ n'était pas repéré spontanément par ce binôme, qui a pris initialement cette représentation dans le parallélépipède $[-2,2] \times [-3,3] \times [-3,3]$ (cf. résultat dans **q2**). Il s'en est aperçu lorsqu'il a lu la remarque suggérée par l'énoncé, pour les aider dans le passage de la 1^{ère} étape à la 2^{ème} étape.

Question q4 – le crible géométrique

Ce binôme a repéré spontanément les parties des deux cylindres qui ne font pas le contour de Q . Ils voient bien les parties du solide Q comprises entre les deux plans. Ceci nous permet donc de dire que les deux plans d'intersection obtenus dans l'étape précédente ont beaucoup aidé les étudiants dans leurs échanges. Cela leur a permis le placement dans la syntaxe de la commande **plot3d** des données qui correspondent aux bornes d'intégration. Toutefois, la recherche permettant l'obtention de ces bornées (qui sont en effet suggérées par les équations des deux plans) n'a été pas réalisée tout de suite.

Les étudiants savaient bien ce qu'ils devaient faire, mais ils ne savaient pas comment. Cette question "*comment faire*" était souvent présente dans leurs échanges. Celle-ci montre aussi que les connaissances qu'ils ont, qui leur permettent la visualisation géométrique dans l'espace, ne sont pas suffisantes pour trouver une bonne représentation analytique.

L'importance des deux plans visibles pour ce binôme est notable dans leurs échanges comme le montre l'extrait de protocole ci-dessous :

(B3, TC835)	L : Tu vois les deux plans là ?	J : Hun ;
	J : Ouais ;	L : D'accord, alors comment faire ça ?
	L : Eh ! Bien là il faut enlever le purple ;	J : Eh, bah il faut oh, oh, il faut qu'on trace tous les
	J : Ouais ;	purples sauf quand c'est au-dessus de ces deux plans,
	L : Et de ce côté là il faut enlever le green ;	ou en dessous de ces deux plans ;
	J : D'accord ;	L : Ouais ;
L : D'accord ? On va faire ça ?	J : Et ensuite voilà [...].	

Cet extrait montre bien que grâce au tracé des plans, les étudiants ont une bonne visualisation de ce qu'il faut faire pour mettre en place le *crible*. Par contre la réalisation avec les outils de *Maple* va être plus problématique.

De plus ils ont choisis le paramètre **a** au lieu de **y** ou **z** (dans l'intersection de S_1 et S_2 qui conduit à $z=\pm y$ et ensuite $z=\pm \sin\theta$). Le choix du paramètre **a** a perturbé leurs raisonnements. En effet, ils ont bien l'idée de faire varier **z** entre les plans d'équations $y=-\sin\theta$ et $y=\sin\theta$ pour le 1^{er} cylindre (le **rouge**) et par conséquent de faire varier **y** entre $-\sin\alpha$ et $\sin\alpha$ pour le 2^{ème} cylindre (le **vert**), et de faire varier les deux angles (les paramètres **a** et **θ**) entre 0 et 2π . Mais ils ont du mal à mettre cela en œuvre dans *Maple*.

Ils sont d'une certaine manière perturbés par la notion de *paramétrage* des surfaces. Ils analysent les deux paramètres de chaque cylindre de façon isolée. C'est-à-dire qu'ils regardent le rôle, disons de **θ**, sans simultanément prendre en compte la fonction du deuxième paramètre. Encore une fois, c'est **P** qui arrive à éclaircir leurs idées.

L'enjeu de cette étape est pourtant assez clair, bien que très laborieux. En effet les étudiants n'arrivent pas immédiatement à conserver seulement les bouts de S_1 et S_2 qui forment Q , comme l'exprime **L** : ...*de ce côté il faut enlever "green" ...alors comment faire ça ?* Donc ils n'avaient pas une démarche spontanée pour la représentation graphique du solide *criblé*. Ils l'ont construit au cours du temps avec les interventions de **P**, comme le montre l'extrait ci-dessous.

Binôme 2 : Etudiants (J), Etudiants (L)

(B3, TC(886))

P : ... donc ce n'est pas très compliqué, je dis pour quelles valeurs je suis sur le plan ;

J : Bah, pour euh ... 1, quand x égal euh $y=1$?

P : Ça m'étonnerait ! Je sais pas pourquoi un blocage sur ce $x=1$. Vous en aviez déjà tracé un très beau qui cachait tout mais, c'est pas celui-là qui m'intéresse. Montre moi tes plans là, remonte un petit peu pour que je voie tes équations. Ça c'est quoi l'équation du plan P1 ?

J : C'est $z=y$;

P : $z=y$ d'accord, donc c'est pas $x=1$, on est d'accord ;

L : C'est vrai, mais euh ;

P : Ça c'est $z=y$, donc quand on revient au-dessus maintenant je regarde mon cylindre qui est là, d'accord, le cylindre qui est là c'est ? Le premier qui est là ;

J : Le vert ?

P : Non le rouge ;

L : C'est **purple** ;

J : Son équation ?

P : Hun ;

J : Bah c'est $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et une constante... non ;

P : C'est pas une constante c'est une valeur du paramètre, d'accord ?

J : Hun ;

P : Alors quand est-ce que je suis sur le plan ? Quand est-ce que **$[\cos(\theta), \sin(\theta), z]$** intersecte le plan d'équation $y=z$?

L : Quand $z = \sin(\theta)$;

P : Quand $z = \sin(\theta)$, ce serait peut-être pas mal d'écrire un minimum ce genre de choses parce que si tu attends que Laurent écrive, c'est foutu, ça n'arrivera jamais. Donc ça correspond à $z = \sin(\theta)$, donc pour une valeur de θ ..., le point d'équation **$[\cos(\theta), \sin(\theta), z]$** et $z = \sin(\theta)$ est sur ce plan là, d'accord ? Ce qui m'intéresse c'est d'enlever ce qu'il y a là, c'est-à-dire pour les valeurs de z qui sont au-dessus, supérieurs à ;

L : $z = \sin(\theta)$;

P : Et donc de garder que celles qui sont en dessous ou au-dessus de celui qui est là, celui qui est en dessous $-\sin(\theta)$.

On voit bien que la coordination possible entre les deux registres de représentation (analytique et graphique) est un moyen essentiel dans le processus heuristique de ce problème ; donc **P** insiste pour faire comprendre à ses étudiants ce qui se passe dans l'activité instrumentée, ainsi que sur les liens que les étudiants doivent faire entre les équations mises en place et leurs surfaces. Donc l'intérêt dans cette étape est d'arriver à conserver unique les morceaux de surfaces ensembles (compris entre les deux plans) qui forment le contour de Q (le **crible géométrique**).

Voilà l'expression de ce binôme après cette longue intervention de **P**.

(B3, TC(936))

J : C'est ce que j'ai pensé tu vois ;

L : Mais nous c'est **a** ça va pas marcher ;

J : Si ça va marcher ...

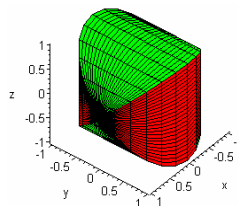
L : Bon, bah on va essayer déjà, on essaie ;

J : Allez tac ; « échec ».

L : Donc le vert, qu'est-ce qui se passe, quel était la logique ? Quand est-ce que le vert est sur le plan ?

Même avec ce long discours de **P**, ce binôme n'arrive pas encore à décrire le **crible géométrique** de Q . Ils tâtonnent, ils bougent la figure pour essayer de décrire le **crible**. Ils font plusieurs *allers-retours*, dont les instructions ci-dessous, extrait de leur fichier *Maple*, rendent visible le solide attendu pour la question **q4**.

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=-Pi..Pi, a=-sin(theta)..sin(theta), color=red);
> s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)],theta=-Pi..Pi, a=-sin(theta)..sin(theta), color=green);
> p1:=plot3d([b,a,a],a=-1..1,b=-1..1,color=yellow);
> p2:=plot3d([b,a,-a],a=-1..1,b=-1..1,color=blue);
> display(s1,s2);
```



Question q5 – le calcul du volume de Q :

Après avoir trouvé le solide criblé, ce binôme se pose les questions suivantes :

(B3, TC(994))

- L : Y'a pas une commande qui calcule le volume de tout ce qu'on a fait ?
 J : Hun, c'est [...] mais ;
 « *Ils regardent le help de Maple* »
 L : int[numerical] ;
 « *L il lit "for numerical integration, see int[numerical]"* »
 J : J'ne sais pas comment on fait ;
 L : Sinon on rentre juste une intégrale normale à plusieurs variables ... ;
 J : Ouais, ouais ; « *blocage* » [...].

Cette première réaction des étudiants face à cette dernière question montre qu'ils n'ont pas eu immédiatement de moyens d'investir dans cette étape le travail qu'ils viennent de développer. Donc ils ne voient pas que les bornes qu'ils ont entrées dans *Maple*, pour arriver à la représentation graphique du solide **criblé** correspondent avec un certain "contrôle" aux bornes de calcul de l'intégrale conduisant au calcul de volume du solide Q . De plus, ils ne pensent pas au découpage. Les étudiants pensent spontanément que *Maple* va pouvoir le calculer l'intégrale demandée avec un minimum de travail de leur part. Donc ils cherchent dans la fonction "**help**" du logiciel l'instruction qui permet de le faire. Malheureusement, le solide intersection des deux cylindres $C1$ et $C2$ n'est pas un solide classique, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de formule "toute/faite", ni de découpage qui permette de s'y ramener.

Donc ce binôme n'a pas pensé tout de suite au découpage de Q , c'est le professeur **P** qui le suggère dans son intervention pour toute la classe (cf. Séance 1, TC(+043)), après avoir été confronté à la difficulté des étudiants.

On voit avec ce binôme que le travail de la représentation graphique du solide n'était pas tout de suite un moyen utilisable pour la mise en place du calcul de l'intégrale. Donc les connaissances qu'ils ont sur la notion d'intégrale multiple ne sont pas suffisantes pour arriver à percevoir immédiatement que les composantes, qu'ils ont mises en place pour la représentation graphique du solide, correspondent aux bornes d'intégration sur chaque sous-solide de Q compris entre les deux plans, en prenant en compte les symétries de Q .

Les raisonnements préliminaires repérés dans le passage de l'étape précédente à celle-ci donne d'une certaine manière quelques éléments importants pour l'organisation du travail des étudiants. Car, l'absence dans *Maple* de la commande qui calcule de façon immédiate le volume de Q , les a mené à la réorganisation de leurs modes de raisonnement. Puis après ce blocage, ils voient par exemple que les équations des plans jouent un rôle important. Ils parlent maintenant des expressions de z (qui suggèrent un découpage non usuel) ainsi que de la symétrie perceptible sur le solide, à la fois à l'aide de couleurs, et en utilisant des gestes avec leurs mains ou par la manipulation de graphique avec la souris, comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous (où **P** insiste à montrer pour les étudiants la nécessité de la découpage de Q en sous-solide).

(B3, TC(+134))

- L : Allez ... on va intégrer z ; [...];
 P : Ça y est ? [...]
 L : Voilà, là on a le z ;
 P : Attends, mais euh avant de calculer l'intégrale, c'est quoi ça ? Alors, moi ce que j'aurais aimé c'est que, déjà si tu veux, là on voit bien quand même les surfaces elles sont, il y a des euh, il y a des symétries ;
 J : Hun !
- L : En fait on va intégrer juste le **purple** de droite ;
 P : Voilà, alors pour être sûr de ton domaine là ;
 J : Ouais ;
 P : Trace-le, c'est-à-dire, trace moi, juste ton, ta partie, la partie que tu vas vouloir intégrer, comme ça tu vas avoir de façon assez précise de ;
 L : Si je trace c'est comme si je savais intégrer ?
 P : Justement l'intérêt c'est de...

Avec cette idée ce binôme reprend la représentation graphique du solide Q et fait un découpage. C'est-à-dire qu'il dégage une représentation analytique (et implicite) d'un morceau de Q par tâtonnement, selon l'expression de **L** et **J** : *Je suis pas sûr là ; Mets y de 0 à 1, z de 0 à 1 et x euh, euh, de 0 à $\cos\theta$* . Ceci n'est pas marché. De plus, les bornes prises en compte pour dégager la représentation analytique que l'on peut préciser par $\{(x,y,z), 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq \cos\theta\}$ n'exprime aucun sous-solide du solide intersection de $C1$ et $C2$.

D'abord les étudiants ne s'appuient pas spontanément sur les bornes qu'ils ont utilisé pour exprimer le solide **criblé** (même après s'être posé la question (cf. extrait ci-dessus) : *Si je trace c'est comme si je savais intégrer ?*). Donc ils voient bien l'intérêt du travail préliminaire de la représentation graphique de Q . Malgré cela, ils préfèrent fabriquer les données par tâtonnement pour essayer de voir si le logiciel leur trace ce qu'ils attendent.

On voit donc que les jeux d'essais-erreurs déjà observés dans les étapes antérieures, continuent dans cette étape. Ceci montre clairement que les difficultés des étudiants ne se trouvent pas seulement au niveau des compétences de *type1* et de *type2* repérées dans les deux premières étapes. De plus on aperçoit que l'évolution de ce binôme dans les sous-étapes distinguées plus haut (relatif à l'étape **E3**) est souvent éclairée par les interventions de l'enseignant. Ainsi, la sous-étape (c) apparaît dans le travail de ce binôme après l'intervention de **P** (cf. Séance 1, TC(+149)).

Cette intervention de **P** (pour toute la classe) ne fait pas seulement avancer ce binôme, mais toute la classe. Dans ses discours **P** parle de l'intérêt de ce que les étudiants ont "fait" sur la représentation graphique de Q et son découpage en sous-solide. Il met l'accent sur la précision de valeurs du paramètre du domaine qu'il a nommé $\phi^{-1}(D)$ pour caractériser la représentation analytique (d'ailleurs implicite) d'un domaine du calcul de l'intégrale par changement en *coordonnées cylindriques*. Donc il rappelle aux étudiants la formule du calcul du volume d'un solide D , en écrivant au tableau le suivant :

$$(\theta, \rho, z) \rightarrow (\rho \cos\theta, \rho \sin\theta, z)$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

Dans son discours **P** va encre plus loin :

"...attention, ce que vous allez tracer c'est la surface externe, ce que devez calculer c'est le volume interne, d'accord ? Ce n'est pas la surface externe. On ne vous demande pas de faire un calcul de l'intégrale de surface, seulement bon le volume. On est bien d'accord..."

Face à l'intervention de **P** ci-dessus, ce binôme change alors sa façon de voir les sous-étapes (c) et (d). La première expression rentrée dans *Maple* par B3 pour la tentative de calcul de l'intégrale comporte d'ailleurs correctement les bornes qui correspondent à contour d'un sous-solide de Q par un découpage "*non usuel*" (sans avoir à le tracer, puisqu'ils tâtonnent).

Avec ces bornes, ce binôme a employé l'écriture usuelle de la transformation en *coordonnées cylindriques*. Toutefois, l'utilisation erronée de cette écriture, qui doit nécessairement comporter le jacobien et la définition classique de changement de variables en *coordonnées cylindriques* (où les équations paramétriques doivent forcément comporter le variable r) a conduit à un résultat incorrect.

On remarque qu'il manque r dans l'expression du borne supérieur de z (donc on doit avoir $r \sin\theta$ au lieu de $\sin\theta$) et le jacobien ρ au lieu de 1. Voilà leur travail instrumenté :

Binôme 2 : Etudiants (J), Etudiants (L)

Action de l'étudiant	Ecriture de calcul usuelle	Réaction de <i>Maple</i>
$> 16*\text{int}(\text{int}(\text{int}(1, z=0..\sin(\text{theta})), \text{theta}=0..\text{Pi}/2), \text{rho}=0..1);$	$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin\theta} 1 dz d\theta d\rho$	16

B3 : 16 ; **P** : 16 ? **B3** : Ouais ; **P** : Pourquoi 16 ? Alors, intégrale de euh, non ! Alors, c'est tout juste, la seule chose c'est qu'il manque le jacobien. Attends, 0 et $\pi/2$ vous l'avez tracé cette partie-là ? 0 et $\sin\theta$? [...] Ah ! Oui d'accord, vous avez aussi coupé en deux ce morceau là. Ah ! Ouais vous avez vraiment fait... alors effectivement c'est en 16. Alors c'est 16 fois, alors qu'est-ce qu'il me manque, quand tu passais dans $\varphi^{-1}(D)$...

Dans cette dernière étape, **P** a parlé tout le temps de $\varphi^{-1}(D)$ (domaine image de D dans le changement d'écriture algébrique du calcul de volume en *coordonnées cartésiennes* par *coordonnées cylindrique*). Mais, les étudiants ne savaient même pas ce que ça voulait dire, comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous.

(B3, TC(+380))	<p>J : Ah ! Nous avons oublié le jacobien ; L : Bah ! Oui ; $\rho d\rho d\theta dz$, donc c'est bon, il manque juste ρ en fait ; J : Mais comment on écrit $\rho d\rho d\theta dz$? L : Bon, il a dit qu'il nous manque que le jacobien ; J : C'est très bien ;</p>	<p>L : Allez, un peu d'initiative ; Ah ! Non, le jacobien c'est pas ça, on s'est trompé je crois $\rho d\theta d\rho dz$; J : Non, ρdp, il nous manque $\varphi^{-1}(D)$; L : C'est quoi $\varphi^{-1}(D)$; J : Le jacobien peut-être ; L : $\varphi^{-1}(D)$ c'est quoi $\varphi^{-1}(D)$? J : C'est l'inverse de euh, d'une surface. Arrête de dire n'importe quoi ; L : Tu ne comprends pas ce que tu dis ; « rires »</p>
-----------------------	---	---

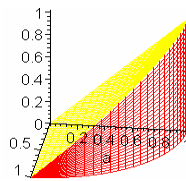
Ces échanges sont alors suivis du travail instrumenté dans *Maple*, où ils incluent le jacobien ρ au lieu de 1 dans la ligne de commande d'outil **Int** qui résulte à $16 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin\theta} \rho dz d\theta d\rho$.

L : [...] En fait quand on [...] ; **J** : Ah ! Oui, oui, oui ! Échec, ce n'est pas grand **i**, c'est comme tout à l'heure.

Ensuite ils représentant graphiquement le seizième morceau¹¹¹ de Q pour lequel ils cherchent à calculer l'intégrale, ils remplacent grand **i** par petit **i** et $z=0..\sin(\text{theta})$ par $z=0..\text{rho}*\sin(\text{theta})$.

Cette réorganisation conduit au calcul de volume attendu. Voilà leur production.

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=0..Pi/2, a=0..sin(theta),color=red) ;
> P1:=plot3d([p,sin(theta),sin(theta)],theta=0..Pi/2,p=0..cos(theta),color=yellow):display(s1,P1);
```



```
> 16*int(int(int(rho, z=0..rho*sin(theta)), theta=0..Pi/2), rho=0..1);
```

16/3

¹¹¹ On voit bien que ce seizième est produit d'un découpage non usuel comportant le sous-solide (compris entre les plan $z=\sin\theta$, et $z=0$) de représentation analytique $Q_{16} = \{(\rho, \theta, z) ; 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2, 0 \leq z \leq \rho \sin\theta\}$. C'est nous qui rajoutons l'instruction P1 pour visualiser la surface supérieure (le plan en jaune) de Q_{16} .

1.1..9 Analyse du travail de Binôme 5

Avant la lecture de l'énoncé, ce binôme prépare initialement sa feuille "électronique" d'activité, en démarrant ainsi l'environnement *Maple* avec l'instruction **restart** et puis le paquet **with(plots)** des outils de représentations graphiques. Cette initiative s'est déroulée pendant la première intervention de **P** pour toute la classe (cf. TC004, séance 1) qui parle de la commande **plot3d** (incluse dans le paquet chargé par B5) pour les traces des surfaces dans l'espace tridimensionnel et puis, il (**P**) donne une formule (la syntaxe) de tracer les surfaces paramétrées.

Question q1 : Ce binôme lit alors l'énoncé du problème et de la 1^{ère} question, et montre une certaine compréhension de cette 1^{ère} tâche et de la compétence dans l'utilisation du logiciel, notamment sur l'affectation des expressions algébriques. Car ils ont entré tout de suite dans *Maple* (sans commettre d'erreurs de syntaxe) les expressions paramétriques de S1, malgré les difficultés liées à la dualité sur les objets *cercle* et *cylindre*. En effet les premières expressions entrées dans *Maple* ne comportent qu'un paramètre et donc une courbe plane, notamment le cercle de rayon unitaire centré et non un cylindre comme attendu. Voici leur première action ci-dessous.

Action de B5

```
> x1:=theta->cos(theta) ;
> y1:=theta->sin(theta) ;
```

Réaction de Maple

```
x1:= cos
y1 := sin
```

Donc, les difficultés de ce binôme étaient d'abord d'exprimer le paramétrage correct de S1. Toutefois, après avoir repéré les expressions ci-dessus il est arrivé à rajouter la troisième expression en obtenant alors assez rapidement le bon paramétrage angulaire de S1 et de S2 pendant l'intervention de **P** suivante face à ce binôme.

(B5, TC(075))

P : Ok ! Donc attention tu dois avoir x, y, z donc là t'as défini x et y il me reste encore la valeur de z , d'accord en paramétrique, donc ;

M : Ouais, mais euh parce que là si on paramètre, on a pris $z=\sin\theta$, on a $y=z$;

P : Ça ce n'est pas l'équation d'un cylindre. Là, t'es dans un plan $y=z$;

A : Oui. [...] $x=\cos\theta, y=\sin\theta$ et z . Et l'autre c'est $x=\cos\theta, y=y$ et $z=\sin\theta$.

On voit dans cette interaction une réorganisation de la tâche chez ce binôme, où **A** est arrivé à exprimer correctement les équations paramétriques de S1 et S2, qu'on a transcrites ci-dessous. On trouve aussi la même production des étudiants dans leurs brouillons d'activité en révélant ainsi le résultat attendu par cette première question, sauf qu'il manque le domaine de variations des paramètres (θ et z par S1) et (θ et y par S2).

S1

```
x = cosθ
y = sinθ
z = z
```

S2

```
x = cosθ
y = y
z = sinθ
```

Question q2 : Cette réorganisation de la tâche révèle que les étudiants ont d'une certaine manière la visualisation tridimensionnelle du problème. Toutefois, mise à part l'utilisation du même paramètre pour les angles (ce qui n'est pas gênant dans *Maple*) des deux surfaces (S1 et S2), et l'absence du domaine de variations des paramètres, on voit que ce binôme a une difficulté pour coordonner les objets qu'ils visualisent par les techniques *papier/crayon* et leur mis en œuvre dans *Maple*. En effet, l'entrée des expressions de S1 et de S2 dans *Maple* a posé des problèmes mathématiques liés à la dualité sur les objets *surface/courbe* de l'espace 3D, comme l'indique leur fichier, le TC073 et TC139 du protocole qu'on reproduit ci-dessous.

Binôme 2 : Etudiants (J), Etudiants (L)

S1	S2
Action B5	Action B5
> x1:=theta->cos(theta);	> x2:=theta->cos(theta);
> y1:=theta->sin(theta);	> y2:=theta->theta;
> z1:=theta->theta;	> z2:=theta->sin(theta);
Réaction de Maple	Réaction de Maple
<i>x1</i> := cos	<i>x2</i> := cos
<i>y1</i> := sin	<i>y2</i> := $\theta \rightarrow \theta$
<i>z1</i> := $\theta \rightarrow \theta$	<i>z2</i> := sin

On voit bien que ce binôme essaie de rentrer dans *Maple* les expressions algébriques de S1 et de S2 qu'il a obtenues correctement dans la question précédente. Mais celles-ci n'ont qu'un seul paramètre chacune, et donc une courbe de l'espace tridimensionnel et non un cylindre comme attendu. Mise à part l'entrée erronée de la surface paramétrée dans *Maple*, on observe que la démarche utilisée par **B3** nous semble intéressante. Car une fois les expressions paramétriques de chaque surface sont affectées correctement dans une variable (comme **x1**, **y1** et **z1**), on peut les recouper dans n'importe quelle étape de la résolution du problème. De plus, pour vérifier si les expressions de **x1**, **y1** et **z1** sont correctement définies par affectation dans *Maple*, ce binôme utilise les connaissances qu'il a sur la notion de fonctions d'une variable. Donc il calcule la valeur fonctionnelle de **x1** pour $\theta=0$ comme le montre l'extrait ci-dessous.

(B5, TC(139))	<p>A : Essaie de faire euh pour vérifier ; M : ... de 0 si ça marche ? O : ils entrent dans <i>Maple</i> l'instruction suivante :</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin: 5px 0;"> <thead> <tr> <th style="width: 70%; text-align: left; border-bottom: 1px solid black;">Action</th> <th style="width: 30%; text-align: left; border-bottom: 1px solid black;">réaction</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">> x1(0) ;</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">1</td> </tr> </tbody> </table> <p>M : Ah ! Donc c'est bien entré ; A : x2 ... on essaie d'autres ; M : On reprend de la même manière et après euh ; A : Pour rentrer, faut entrer x2 ? M : Ouais ; ... Je mets θ aussi ? A : Ouais.</p>	Action	réaction	> x1(0) ;	1
Action	réaction				
> x1(0) ;	1				

Par contre on voit bien que cette action "sur la vérification d'entrée de données dans *Maple*" correspond à une démarche d'essais-erreurs. De plus, l'action de ce binôme révèle un doute dans la prise en compte du même angle pour la représentation de S2. Il est arrivé à entrer dans *Maple* la définition correcte de S1 après l'intervention de **P** suivante :

(B5, TC(217))	<p>P : Non ! Non je voudrais, trace-les déjà, donc euh ; A : En fait après on allait faire plot S1 et θ euh ; P : D'accord, si vous voulez, ouais mais pourquoi pas, ... faire les choses étape par étape c'est pas gênant. $\sin\theta$, ce qui est surprenant ce qui me gêne un petit peu c'est que, normalement quand on trace une surface ; A : Ouais ;</p>	<p>P : Il n'y a qu'un paramètre, alors quand il n'y a qu'un paramètre même en dimension 3 c'est une courbe. Quand on trace une surface il y a deux paramètres, donc il manque quelque chose par rapport à votre euh, d'accord ? Ça c'est effectivement une équation d'un cylindre ; M : Hun ; P : Et y ne dépend pas de θ, c'est indépendant de θ, A : D'accord ; P : Donc essayez avec un paramètre.</p>
---------------	--	--

En s'appuyant sur l'intervention de **P** ci-dessus ce binôme reprend la tâche et modifie les définitions des expressions paramétriques premièrement de S1 en utilisant les paramètres t et u , ils entrent alors dans *Maple* les instructions suivantes :

S1	Réaction Maple
Action B5	
> x1:=t->cos(t);	<i>x1</i> := cos
> y1:=t->sin(t);	<i>y1</i> := sin
> z1:=u->u;	<i>z1</i> := $u \rightarrow u$

Il y a un point important dans la démarche choisie par ce binôme. Il définit chaque expression paramétrique de S1 comme une fonction à une variable facilement interprété par *Maple*. Par contre, on trouve un certain désaccord entre leur mode de raisonnement sur les paramétrages des objets *bidimensionnels* et *tridimensionnels*. Usuellement chaque expression paramétrique

de l'espace *bidimensionnel* ne doit comporter forcément qu'un paramètre, alors que les expressions paramétriques de l'espace 3D comportent deux paramètres, c'est-à-dire qu'au lieu de $\mathbf{x1}(t)$, $\mathbf{y1}(t)$ et $\mathbf{z1}(u)$ on écrit respectivement $\mathbf{x1}(t,u)$, $\mathbf{y1}(t,u)$ et $\mathbf{z1}(t,u)$.

En fait, leur façon d'affecter les équations paramétriques et l'utilisation de la syntaxe (04) de la commande **plot3d** a initialement compliqué l'activité instrumentée, car en utilisant cette commande les étudiants entrent les définitions de $\mathbf{x1}$, $\mathbf{y1}$ et de $\mathbf{z1}$ comme P l'avait écrite au tableau (pendant la 1^{ère} intervention pour toute la classe), selon la syntaxe (04) par la représentation : **plot3d** ($[\mathbf{x}(u,v), \mathbf{y}(u,v), \mathbf{z}(u,v)]$, $u=a..b$, $v=c..d$). Mais, la définition des paramètres est évidemment différente de celle utilisée par eux au-dessus – ce qui explique que *Maple* rend effectivement une erreur¹¹² comme le montre leur production ci-dessous (1^{ère} tentative de représentation graphique de S1).

```
> plot3d([x1(t,u), y1(t,u), z1(t,u)], t=0..2*Pi, u=-10..10);
Error, (in cos) expecting 1 argument, got 2
```

Initialement B5 ne savait pas s'il s'agissait d'une faute de syntaxe ou de mathématiques.

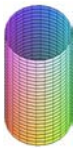
Cette action montre que les étudiants ont des difficultés non seulement dans l'utilisation de la commande **plot3d** de *Maple*, mais surtout avec l'interaction entre le dessin de surface qu'ils perçoivent dans l'espace, et sa représentation analytique. De plus, cette action ne se réalise que par tâtonnement, où les termes suivants reviennent souvent dans leur anticipation lors de cette première tentative :

On trace ça ?	De t et u ou ... de t et de u ou juste de t ?
On met plot3d de tout ça ?	Normalement de t et u ... ;
Comme ça, ça marche ?	Par contre ils ne sont pas marqués de t , enfin c'est $x1(t)$ donc ;
Ouais. $x1$ de t ...;	On met t et u ..., virgule t variant de 0 à 2π ?

On voit que les étudiants montrent souvent des hésitations lors de l'utilisation des outils de représentation graphiques de *Maple*, en particulier la syntaxe de la commande **plot3d**. Celle-ci montre que les connaissances qu'ils ont sur l'utilisation des certains outils du logiciel, ne sont pas suffisantes pour arriver spontanément à la visualisation géométrique du contour du solide intersection.

Par contre on voit une certaine amélioration chez ce binôme au cours du travail. En interprétant la rétroaction de l'environnement à partir de leur première tentative de tracer S1, ce binôme se rend alors compte que les définitions ($\mathbf{x1}(t,u)$, $\mathbf{y1}(t,u)$ et $\mathbf{z1}(t,u)$), entrée dans la syntaxe (04) de la commande **plot3d** pour visualiser le premier cylindre ne sont pas les mêmes ($\mathbf{x1}(t)$, $\mathbf{y1}(t)$ et $\mathbf{z1}(t)$) qu'il a défini précédemment. A lumière de cette interprétation ce binôme modifie ses instructions en utilisant ainsi les définitions correctes de $\mathbf{x1}$, $\mathbf{y1}$ et $\mathbf{z1}$ préalablement fixées pour récupérer les expressions paramétriques de S1, comme l'indique l'instruction suivante qui rend le premier cylindre attendu.

```
> S11 := [x1(t), y1(t), z1(u)] :
> plot3d(S11, t = 0..2*Pi, u = -10..10) ;
```



On peut donc dire que ce binôme apprend à utiliser correctement les syntaxes des commandes du logiciel non seulement à partir de plusieurs essais-erreurs, mais aussi grâce à une certaine familiarité qu'il a du logiciel *Maple*. Voici leurs expressions de joie face à ce résultat :

C'est bon, c'est bon ; Ok ! Euh ! Euh !

¹¹² Celle-ci ça marcherait si ils définissent $\mathbf{x1} := (t,u) \rightarrow \cos(t)$; $\mathbf{y1} := (t,u) \rightarrow \sin(t)$; et $\mathbf{z1} := (t,u) \rightarrow u$;

Une fois que ce binôme a trouvé S1 et sa représentation graphique, la recherche de S2 et sa visualisation en utilisant la commande "**plot3d**" n'ont posé aucun problème ni technique ni mathématique, comme le montrent leurs fichiers *Maple* et le TC346 du protocole.

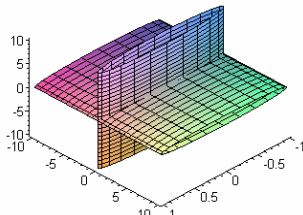
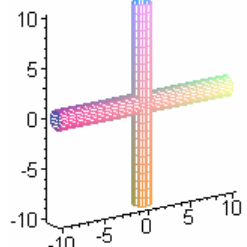
Les problèmes techniques réapparaissent lors de la réalisation du travail instrumenté de la sous-étape (d), c'est-à-dire la représentation de S1 et S2 dans *Maple* ensemble avec des couleurs différentes. Néanmoins, ils apprennent rapidement à utiliser correctement le logiciel dans l'action par tâtonnement, et cet apprentissage les aide à mieux voir la situation en jeu et améliorer leur connaissance de l'utilisation de *Maple*, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous.

(B5, TC(410))
 A : Après on dit quoi, display S1, S2 ?
 M : Ouais, **display** S1, S2 ;
 A : Ouais, mais parce que lui, il avait défini S1 et S2 comme étant les tracés des courbes ; [...] ;
 M : Sinon, on fait plot euh de tout ça ? Plot 3D euh de tout ça, non ?
 A : J' sais pas ; [...] A : On les affecte après on les reprend en dessous ce sera plus simple ;
 M : C1 et C2, les cylindres ?
 A : Oui.

A chaque étape les étudiants s'appuient et réutilisent du maximum ce qui a été mise en place à l'étape précédente. On voit bien que les étudiants cherchent à tracer simultanément dans l'espace les deux surfaces (S1 et S2) qu'ils ont visualisées séparément. Donc ils utilisent correctement la définition S11 pour exprimer S1 et la définition S22 pour la deuxième surface S2 dans la commande **display** comme le montrent leurs fichiers et le TC(410) du protocole (sans les avoir différenciés par les couleurs, (cf. B5, TC(410)) suivant).

On trouve dans cette action quelques problèmes techniques sur le contrôle du paramètre u (valeur de la variable liée à la hauteur des cylindres). Celle-ci a posé d'ailleurs des difficultés de visualisation¹¹³ dès que les deux cylindres sont représentés en même temps (cf. extrait 33 ci-dessous). Comme nous l'avons déjà souligné plus haut, quand les deux surfaces cylindriques sont repérées dans une échelle 1:1, les bornes de la variable z et y jouent alors un rôle important, notamment sur la visualisation du problème. Car ces variables permettent de repérer l'intersection des deux cylindres.

Cette difficulté dans la visualisation rencontrée par **B5** montre bien aussi, le fait que le solide intersection des deux cylindres est entièrement compris dans le cube $[-1, 1]^3$ n'était pas repéré spontanément par ce binôme, qui a pris initialement cette représentation dans le parallélépipède $[-1,1] \times [-10,10] \times [-10,10]$ comme l'indique l'extrait 33 ci-dessous. Il s'en est aperçu lorsqu'il a lu la remarque suggérée par l'énoncé, pour les aider dans le passage de cette étape à l'étape suivante.

(B5, TC(410))	<p>Représentation avec l'échelle hors de 1:1 > display(plot3d(S11,t=0..2*Pi, u=-10..10),plot3d(S22, t=0..2*Pi, u=-10..10));</p>	Visualisation avec un clique sur icône 1:1
		

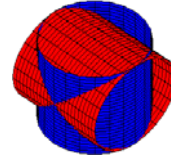
La représentation à gauche (production de B5) donne l'impression d'avoir affaire à deux cylindres elliptiques. Visuellement le graphique ne correspond pas aux équations de départ.

¹¹³ Problème technique lié au contrôle de la taille des objets graphiques affichés sur l'écran de *Maple*.

Le graphique (croix) à droite, qu'on obtient après avoir cliqué sur l'icône **1:1** ou en utilisant correctement l'option "**scaling = constrained**" de contrôle de représentation graphique, n'est pas adéquate pour la visualisation du problème.

L'absence d'option "**scaling = constrained**" dans la ligne de la commande **plot3d** ou **display** rend la représentation graphique par défaut, ainsi le logiciel interprète l'option "**unconstrained**" pour le contrôle d'échelle - c'est qui explique que *Maple* rend la visualisation des cylindres elliptiques à gauche (extrait 33)-. Ensuite ce binôme est arrivé à réduire la définition du paramètre u dans l'intervalle $[-1,1]$, lorsqu'il a lu la remarque suggérée par l'énoncé, en obtenant ainsi la représentation des deux cylindres dans le cube $[-1,1]^3$ et en les différenciant par les couleurs, comme l'indique leur travail ci-contre, qui répond d'ailleurs correctement la question **q2**.

```
> display(plot3d(S11, t=0..2*Pi, u=-1..1,
color=blue), plot3d(S22, t=0..2*Pi, u=-1..1,
color=red));
```



Question – q3 : "*Montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans*" n'a pas été facile pour ce binôme. D'abord il s'est demandé comment écrire les équations des plans d'intersection des deux cylindres. Cette question s'est posée justement lors du passage de l'étape précédente à celle-ci. Ce qui démontre que ce binôme n'avait pas "spontanément" les démarches nécessaires pour mettre en équations les plans qu'il est arrivé à visualiser à partir de le graphique de l'étape précédente (q2) selon leur expression dans l'interaction avec **P** suivante :

(B5, TC(748))

P : Alors, ensuite maintenant on vous dit l'intersection c'est deux plans, allons-y ;

M : On les voit ;

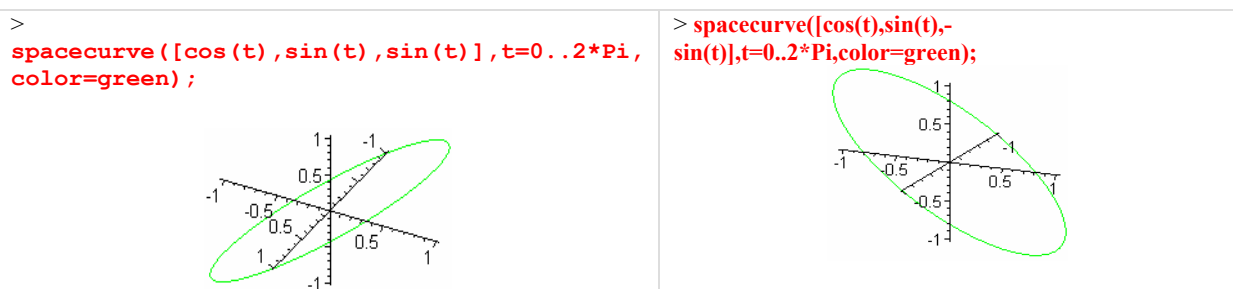
P : Bon, vous les voyez, quelles sont les équations, parce que je veux les tracer en même temps ;

A : Justement on se demandait comment écrire les équations ?

P : Si vous me donnez les équations des plans ça avancera vite.

On voit bien que les étudiants se trouvent en difficulté pour formuler les équations des deux plans d'intersection de C1 et C2. De plus ils ne s'appuient pas sur les expressions des deux cylindres de l'énoncé pour rechercher tels plans. Ils préfèrent réorganiser les expressions des équations paramétriques utilisées dans **q2** pour la visualisation graphique de S1 et S2. Cette réorganisation les conduits à des courbes, qui sont les "*arêtes curvilignes de Q*", et donc les courbes sur les plans cherchés par eux. Même avec cette organisation ce binôme n'arrive pas encore à exprimer les équations de plans.

Ensuite, en partie grâce à l'intervention de **P** pour toute la classe (cf. Séance 1, TC(747)) qui parle de la commande **spacecurve** ce binôme entre dans *Maple* les paramètres des « *arêtes curvilignes de Q* » d'abord séparément en utilisant cette commande, comme le montre leur fichier, le TC845 et TC878 du protocole qu'on reproduit ci-dessous.

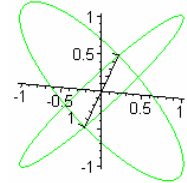


A : Et maintenant il faut trouver les plans de ça ? [...] ; **M :** Oui, il passe par le plan, par le point (0, 0) et euh prend ... ; **A :** Le point (1,1) aussi ; **M :** Sinon il passe par le point (0, 0) et par ce point et il contient cette courbe et le point 0 ; **A :** Ouais ; [...] **A :** Et bah les ... ; **M :** Sur le guide de tracer la courbe et les

enfin ; A : L'ensemble ? M : Ouais,

On voit dans cette interaction une certaine dualité entre le raisonnement des étudiants et leurs façons d'exprimer les objets qu'ils visualisent dans l'espace 3D. Ils ignorent souvent la présentation de z . Mise à part cette dualité, on perçoit que la représentation des courbes séparément n'était pas une aide suffisante pour eux, qui ensuite parlent de l'ensemble des deux courbes qui conduit effectivement aux "arêtes curvilignes de Q " en utilisant simultanément les commandes **display** et **spacecurve** comme l'indique la visualisation ci-dessous.

```
> display(spacecurve([cos(t),sin(t), sin(t)],t=0..2*Pi,color=green),
spacecurve([cos(t),sin(t),-sin(t)], t=0..2*Pi, color=green));
```



A noter que les "arêtes curvilignes de Q " ci-dessus représentés par $[\cos(t), \sin(t), \sin(t)]$ et $[\cos(t), \sin(t), -\sin(t)]$ (de paramètre $t \in [0, 2\pi]$) reposent respectivement sur les plans $[x, y, y]$ et $[x, y, -y]$ (de paramètres $x, y \in \mathbb{R}$) selon la définition prise en compte par **B5** lors de la représentation paramétrique de $S1$ et $S2$, donc l'entrée "correcte" de $[x, y, y]$ et $[x, y, -y]$ dans la commande **plot3d** de *Maple* rend évidemment la visualisation graphique des plans qui contient les "arêtes curvilignes de Q ". De plus $S1 \cap S2$ conduit à $z = \pm y$. On peut donc dire qu'ils avaient dans leur réorganisation "d'une façon implicite" les équations des deux plans d'intersection. Mais ils n'avaient pas spontanément de moyens pour les repérer. Donc ce binôme il a des difficultés à mettre en place les représentations analytiques des certains objets géométriques de l'espace tridimensionnel, dont ils ont pourtant une bonne visualisation. L'accomplissement de la tâche s'est déroulé souvent par tâtonnement, comme le montrent leurs échanges dans l'extrait du protocole suivant :

(B5, TC(920))

M : Je crois que ça c'est égal à ça ;
 A : Ouais, attends, en fait il faut changer les valeurs de u et de t [...];
 M : Parce que nous ce qu'on veut virer c'est toutes les parties [...] comme ça et comme ça ?
 A : Ouais. Enfin tous ce qui est au-dessus euh [...] J'ai du mal à visualiser [...];
 M : $y=z$ et $y=-z$ c'est les plans, d'accord ;
 A : Donc après ... ;
 M : Il faut changer la valeur des paramètres ;
 A : Notre y il est, il varie donc ... par rapport [...]

On voit dans cette interaction que **M** (avec un doute quand il dit : *je crois que ça c'est égale à ça*) arrive à trouver les équations des deux plans (en prenant $S1 \cap S2$) sans les avoir représenté graphiquement. Ces échanges entre eux se sont déroulés après l'intervention de l'observateur qui parle de l'importance de visualiser les deux plans (cf. TC890, B5, séance1). Ce qui suit montre clairement que la découverte des plans d'intersection de $C1$ et $C2$, même sans les avoir représenté graphiquement, les a aidés bien sûr dans leurs échanges sur la description du *crible géométrique*.

Question q4 – le crible : Ce binôme a identifié facilement les parties des deux cylindres qui ne constituent pas le contour de Q . Il voit bien les parties du solide Q comprises entre les deux plans, à partir du résultat de **q2** qui montre implicitement les "arêtes curvilignes de Q " et donc les positionnements des plans d'intersection demandés dans **q3**. On peut donc dire que les plans d'intersections obtenus dans la question précédente les ont aidés largement pour mieux repérer c'est qui est vraiment dans l'intersection des deux cylindres. Néanmoins, la recherche permettant l'obtention des bornes (qui sont suggérées par les équations des deux plans) n'a été pas réalisée tout de suite. Toutefois, les étudiants savaient bien ce qu'ils devaient faire, mais ils ne savaient pas comment. Ce qui nous permettons de dire que la description du *crible géométrique* n'était pas une tâche évidente. Ils sont arrivés à décrire le *crible* du premier cylindre (le **bleu**) après l'interaction suivante avec l'observateur:

Binôme 2 : Etudiants (J), Etudiants (L)

(B5, TC(973))

O : Donc là vous allez garder que les valeurs de z qui sont plus petites que y et donc z compris entre $-y$ et y . Donc y dans votre paramétrage il est quoi ?

M : Euh, de S1 il vaut $\sin\theta$, $\sin(t)$;

O : $\sin(t)$, donc \underline{u} au lieu de le faire varier de -1 à 1 vous le faites varier comment ?

A : Ah ! Ouis de euh, euh ;

M : De moins $\sin(t)$ à ah $\sin(t)$;

A : Non ; **M** : Si, ouais ;

A : D'accord ;

O : Et pour l'autre il faut réfléchir ... au lieu de dire z qu'est compris entre $-y$ et y , maintenant c'est y qu'est compris entre $-z$ et z ;

M : Mais là ça va pas poser de problème de euh de définir t égal à 0 à 2π et après u de $-\sin(t)$ à $\sin(t)$?

O : Non, non c'est justement ... en fin vous essayez et vous verrez il y a un moyen d'y arriver.

La question posée par **M** dans l'extrait ci-dessus, est un indice pour affirmer que la représentation graphique (dans *Maple*) des surfaces définies sur des domaines autres que rectangulaires ou parallélépipédiques n'est pas un type de tâche familière pour ce binôme. En effet les étudiants ont l'habitude de tracer les surfaces définies sur domaines réguliers de type $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ en utilisant **plot3d** ou sur domaines tridimensionnels de type $[a,b] \times [c,d] \times [m,n] \subset \mathbb{R}^3$ en utilisant la commande **implicitplot3d** (dont a, b, c, d, m, n sont constants). Celles-ci sont en effet les deux types de tâches couramment proposées par des auteurs des ouvrages conçus sur l'utilisation du logiciel *Maple* à propos de la visualisation graphique des surfaces. De plus, les exemples proposés dans la fonction "**help**" du logiciel sur l'utilisation des commandes **plot3d** et **implicitplot3d** ne concernent que la représentation graphique des surfaces définies sur des domaines réguliers.

Donc le fait que le paramètre t varie entre deux bornes constants $[0, 2\pi]$ et le paramètre u varie entre deux courbes ($-\sin t$ et $\sin t$, avec $t \in [0, 2\pi]$) a posé une difficulté pour ce binôme sur l'utilisation de la commande **plot3d**. Toutefois, cette difficulté a été momentanément "surmontée" avec l'aide de l'observateur. Et ils arrivent d'ailleurs à trouver le crible de S1.

Une fois que le crible de S1 a été trouvé, des stratégies d'essais-erreurs se mettent rapidement en place pour la recherche du crible de l'autre surface S2, en se posant d'abord les questions :

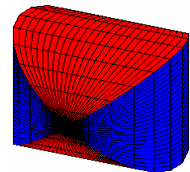
Pour l'autre ça fait quoi ?
Et le rouge c'est ? :
On met la même chose, $-\sin(t)$ à $\sin(t)$?

Suite à ces questions, ce binôme entre dans *Maple* les données qui rendent visible le crible de S1 et S2, en utilisant simultanément de façon correcte les commandes **display** et **plot3d**, en obtenant ainsi la visualisation graphique de Q criblé comme le montre leur travail (cf. TC(+02), B5, séance1) qu'on reproduit ci-dessous.

```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi, u=-sin(t)..sin(t), color=blue), plot3d(S22,
t=0..2*Pi, u=-sin(t)..sin(t), color=red));
```

Voilà leurs expressions de joie face à ce résultat :

A : Q c'était ? **M** : C'est ça, non !
A : C'est quoi, je ne crois pas !
M : Si Q c'est euh C1 intersection C2 ;
A : C'est l'intersection des deux cylindres c'est ça ?
M : Ouais ;



La réaction des étudiants face à ce résultat montre qu'ils arrivent (pas facilement) à la solution de la tâche conformément à ce qu'on attend d'eux. Néanmoins ils ne savent pas bien ce qu'ils font. Donc le traitement de la tâche se développe souvent par tâtonnement, dont les résultats (produits par le logiciel *Maple*) surprennent souvent.

Question q5 – le calcul du volume de Q : Le travail du calcul de volume de Q par ce binôme est anticipé par l'intervention de **P**, après que les étudiants sont arrivés à accomplir la tâche précédente. D'abord **P** parle du calcul de l'intégrale triple de ce qui est à l'intérieur de Q ,

ensuite il souligne les démarches possibles pour le développement des calculs en mettant l'accent sur les deux couleurs de Q qui permettent de distinguer assez facilement les parties du solide criblé par symétrie. De plus **P** révèle aux étudiants la possibilité de découper le volume de Q par $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ et ensuite la visualisation graphique de n'importe quel morceau obtenu dans ce découpage (cf. B5, TC(+50)). Celle-ci permet en effet, de dégager les valeurs des paramètres t et u qui correspondent aux bornes d'intégration sur $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{8}$ ou encore sur $\frac{1}{16}$ de Q .

On voit donc facilement que **P** a apporté certaines aides aux étudiants pour le traitement de cette dernière tâche. Suite à l'intervention de **P** (dans le passage de **q4** à celle-ci) ce binôme commence à raisonner autour des deux paramètres t et u envisageant donc le travail du découpage de Q en sous-solides, dont il se pose d'ailleurs certaines questions et tâtonnent pour avoir un découpage comme le révèle l'extrait ci-dessous.

(B5, TC(+73))

A : Maintenant il faut faire varier t ? De 0 à 2π et puis on ne va pas tracer euh, tracer Q déjà? Tracer ... c'est la même [...];
M : Au lieu de 2π on prend $\pi/4$? Met 0 à $\pi/4$;
A : Non, non, non parce que c'est pas $\pi/4$ là c'est t de 0 à 2π ;
M : Non, mais quand tu fais un tour sur 2π ;
A : Donc on va garder juste ça ... on fait varier le rouge, on a fait varier de 0 à 2π donc ça fait comme ça, donc on peut varier de 0;
M $\pi/2$; **A** : à $\pi/2$ on va garder ça. A $\pi/2$ on va garder que ce petit morceau là? ...Donc là on met $\pi/2$ direct pour voir ce que ça peut donner? **M** : Ouais;

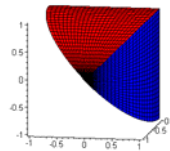
Dans leurs échanges, ils discutent surtout sur les positions des deux cylindres (l'un dit c'est comme ça, l'autre dit, c'est pas comme ça, c'est comme ça – en montrant le dessin affiché sur l'écran avec leurs mains) ils cherchent la partie d'un des deux cylindres à conserver pour le calcul de l'intégrale. Pour cela ils remettent le graphique obtenue dans la question q2 à côté de celui du résultat de q4 (le solide criblé) pour voir la position correcte de morceaux de S1 et S2 sur Q criblé.

Cette action est encore une fois une indice pour affirmer que les étudiants s'appuient surtout sur le logiciel *Maple* qui leur envoie des réponses qui ne correspondent pas souvent à ce qu'ils ont voulu; ils reviennent alors en arrière et modifient les donnés. Donc on voit un manque de travail en amont pour pouvoir envisager ce que le logiciel va tracer. La facilité de tracer dans *Maple* fait qu'au lieu de contrôler ces équations, ils essaient un peu au hasard, comme le révèle leur travail instrumenté. Ainsi ils entrent avec les instructions suivantes, en utilisant simultanément les commandes **display** et **plot3d** dans la même ligne d'instructions.

(B5, TC(+153))

```
> display(plot3d(S11,t=0..Pi/2,u=-sin(t)..sin(t),color=blue),plot3d(S22,t=0..Pi/2,u=-sin(t)..sin(t),color=red));
```

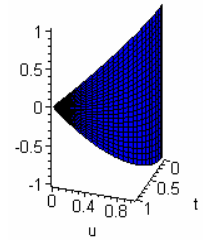
A : En fait on a pris la moitié;
M : Ouais;
A : Ah! Non, non;
M : $\frac{1}{4}$;
A : $\frac{1}{4}$. On a coupé comme ça, on a $\frac{1}{4}$; ..., En fait il faut prendre juste, juste le volume délimité par $\frac{1}{8}$ euh, par $\frac{1}{8}$ de volume;
M : En fait il faut qu'on prenne que le rouge comme ça, on obtient le $\frac{1}{8}$ de rouge, ça nous donne euh parce que nous on a coupé comme ça;



On voit bien dans les réactions des étudiants face à ce résultat, qu'ils n'ont voulu conserver que le seizième de Q à partir d'un découpage usuel, quand **M** dit (avec doute dans l'extrait 37 ci-dessus) : *Au lieu de 2π on prend $\pi/4$? Mets 0 à $\pi/4$.* Toutefois, la réponse de *Maple* n'affiche que le partie du solide délimitée par les valeurs des paramètres t et u au-dessus de plan $z = -y$. C'est-à-dire, $-\sin(t) \leq u \leq \sin(t)$, avec $t \in [0, \pi/2]$ pour chaque cylindre. On voit donc

une difficulté chez les étudiants pour dégager les valeurs des paramètres t et u qui permettent de visualiser la partie de Q dans laquelle ils vont calculer le volume. Donc ils ont des difficultés pour dégager les bornes d'intégration.

Toutefois, en interprétant ensuite le résultat ci-dessus (réponse de *Maple*) ce binôme est arrivé à modifier correctement les données à partir de là, en obtenant ainsi la visualisation graphique du huitième partie de Q (selon un découpage non usuel), en enlevant d'abord la partie rouge et ensuite en prenant les valeurs de paramètres t et u entre les plans $z = -y$ et $z=y$. Donc il conserve la partie de surface bleu pour $-\sin(t) \leq u \leq \sin(t)$ et $0 \leq t \leq \pi/2$ (cf. résultat ci-contre). Ainsi, pour procéder les calculs de volume de ce sous-solide par une intégrale multiple, il est nécessaire une autre découpage pour conserver que la partie positive (en obtenant ainsi le seizième sous-solide de Q). Mais ce problème de symétrie (qui révèle un moyen de contrôle des calculs) n'était pas remarqué par ce binôme.



Après avoir visualisé la partie (huitième) de Q dont ils ont voulu calculer le volume, la difficulté de ce binôme était alors de mettre en place l'intégrale. En effet, on voit qu'ils essaient utiliser les données qu'ils ont dégagés lors du découpage de Q . Malheureusement ils montrent encore des difficultés sur l'utilisation des commandes du calcul d'intégrales dans *Maple*, notamment la syntaxe des commandes **int**, **Int**, **Doubleint** et **Tripleint**. Face à cette difficulté ce binôme reprend le calcul de l'intégrale par des techniques papier/crayon, selon la suggestion de **P** quant il dit (cf. TC(+532), b5, séance1):

Séance 1, TC(+532)

Vous avez tout bloqué ? C'est pas mal, donc on fait à la main, de toute façon la partie finale c'est juste ce qui me reste, donc alors ici où est qu'on en est donc

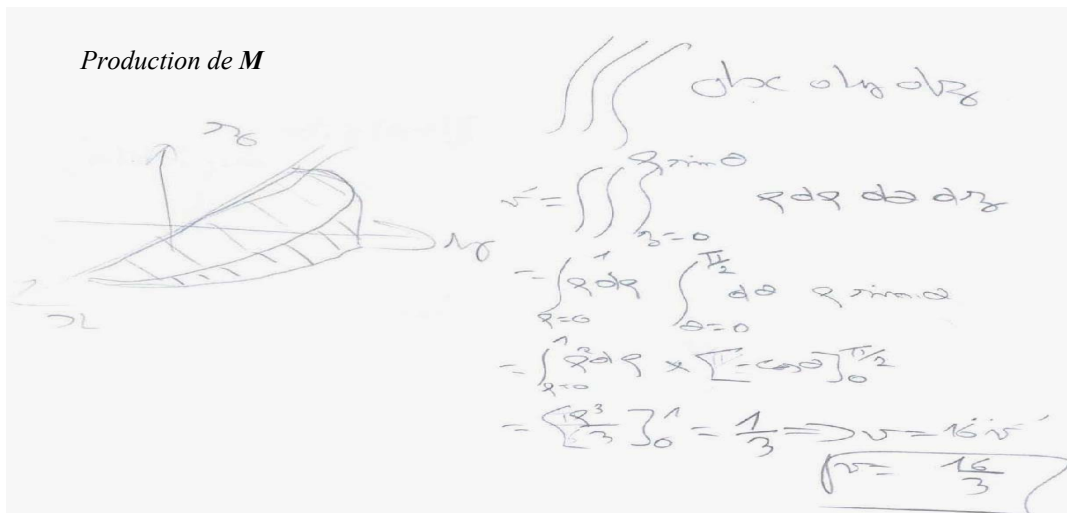
$$\iiint dx dy dz$$

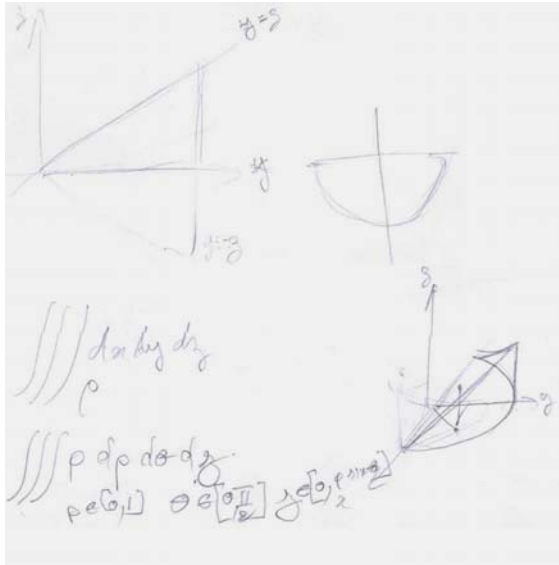
Donc qui se transforme en intégrale on a dit

$$\iiint \rho \, dp \, d\theta \, dz.$$

Donc là maintenant il faut que je trouve $\varphi^{-1}(D)$.

Avec le changement de l'environnement de traitement de cette dernière tâche, les étudiants sont arrivés à reproduire sur papier la partie de Q dans laquelle ils ont voulu calculer le volume. Toutefois les données des dessins reproduits (qui d'ailleurs illustrent les huitièmes de Q selon un découpage non usuel) ne correspondent pas ni avec les calculs mis en place par eux, ni avec le découpage procédé dans *Maple*. Chaque étudiant procède comme suit (transcription de leur brouillon) en s'appuyant d'ailleurs sur l'intervention de **P** ci-dessus.



Production de A

$$\int_0^c \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \rho^2 d\rho d\theta dz = \int_0^c \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta dz$$

$$= \int_0^c \rho^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta dz$$

$$\frac{Q}{c} = \left[\frac{1}{3} \right] \left[-\cos \theta \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{3} \left[\frac{2\pi}{2} \right] = \frac{2\pi}{3}$$

$$Q = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot c = \frac{2\pi c}{3}$$

On voit bien que les calculs de l'intégrale sont développés sur le seizième de volume de Q (selon le découpage non usuel obtenu dans *Maple*) et les dessins faits à la main sur les brouillons montrent le huitième du solide (selon un découpage non usuel), dont les paramètres θ varie entre 0 et π et dans les calculs ce même paramètre est pris dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Mise à part l'incohérence entre le dessin et le calcul de l'intégrale, on trouve aussi dans leurs démarches l'emploi erroné de l'écriture du calcul de l'intégrale triple (produit d'intégrales simples) et le positionnement inadéquat de résultat de calcul de l'intégrale la plus interne. Notamment chez l'étudiant **M** (cf. linge 3, copie ci-dessus).

Toutefois, ils trouvent le résultat attendu dans **q5**, mais ils ne sont pas sûrs de la validité de la solution trouvée par eux, comme l'indique leurs réactions face à ce résultat :

(B5, TC(+460))

- A** : Moi j'ai 1/3 c'est ça ?
M : Euh, ouais [...] ¹¹⁴ moi j'ai 1/3 ;
A : Et après maintenant, ce facteur multiplicatif ;
M : On va dire euh multiplier par 16 ;
P : Ça y est ?
A : Bah, ah 1/3 fois ;
P : 1/3 bon voilà, multiplier par ?
B5 : par 16 ;
P : Par 16 si vous avez calculé sur $\pi/2$.

De toute façon on peut dire que le travail préliminaire de représentation graphique dans *Maple* les a aidés beaucoup dans la mise en place du calcul de l'intégrale, conduisant au calcul de volume de Q , malgré l'emploi erroné de l'écriture du calcul de l'intégrale triple.

¹¹⁴ Ils trouvent le résultat, mais ils ne sont pas sûrs de la validité de la solution trouvée.

1.1..10 Analyse du travail de Binôme 6

Question q1 : Après une lecture de l'énoncé, ce binôme cherche un moyen d'écrire les équations paramétriques des surfaces S1 et S2. Tout d'abord, on observe un blocage chez les étudiants lors de la familiarisation avec cette première question, comme le montrent leurs premières expressions (quand **D** se manifeste en disant : *Les équations paramétriques ! Les équations paramétriques ! Paramétrique, comme on dit ?* Alors que **B** s'exprime en disant : *Il suffit d'écrire euh paramétrique c'est ...*, cf. B6, TC(022)). Donc ils n'arrivent pas tout de suite à exprimer les équations paramétriques des deux surfaces cylindriques. De plus, on voit qu'ils n'ont pas pensé immédiatement aux équations cartésiennes de S1 et de S2. Comme pour le binôme B4, ils ont parlé d'équations cartésiennes seulement après l'intervention de **P** suivante pour toute la classe (cf. Séance 2, TC(069)), et après s'être confrontés avec les "difficultés" de B4 pour dégager ces équations.

(Séance 2, TC(069))

Vous faites attention, ce que vous allez tracer, on vous demande pas de tracer un volume, on vous demande de tracer l'extérieur du volume, l'extérieur du volume c'est pas $x^2+y^2 \leq 1$, le cylindre extérieur c'est $x^2+y^2=1$, donc on vous demande pas de tracer le volume, on vous demande de tracer l'extérieur de volume, d'accord ? La surface qui enveloppe le volume, d'accord ? Donc ce que vous avez à tracer c'est le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$, pas $x^2+y^2 \leq 1$, c'est pas une inégalité.

Donc (comme pour B4) c'est **P** qui guide les étudiants pour préciser l'écriture de l'équation cartésienne de S1, comme le montre l'extrait du protocole ci-contre. A partir de là, ils ont présenté l'écriture de S2 facilement, en écrivant sur le papier les inéquations des deux cylindres (qu'ils ont appelées paramétriques de façon erronée) et les équations cartésiennes des deux

surfaces comme l'indique l'extrait du brouillon ci-dessous.

+ equations paramétriques
 $C_1: x^2 + y^2 \leq 1$
 l'extérieur du volume
 $x^2 + y^2 = 1$
 $C_2: x^2 + z^2 \leq 1$
 $x^2 + z^2 = 1$

Comme pour les autres binômes observés (B1, B2, B3, B4 et B5) la dualité sur les objets *équations* et *inéquations* a posé quelques difficultés à B6 dans la recherche des équations paramétriques correctes du premier cylindre [sous-étape (a)]. A noter qu'ils ont trouvé le paramétrage *angulaire*

correct de S1 après certaines tentatives en faisant par exemple $x = \sqrt{1-y^2}$, qui nous semble une tentative de paramétrage *libre*, comme le montre l'extrait (B6, TC(055)) du protocole ci-dessous. Une fois que le paramétrage de S1 a été trouvé, ils ont obtenu le paramétrage *angulaire* de l'autre surface S2 assez facilement.

(B6, TC(055))

D : Tu mets x est égal à racine de "machin" ?
B : Hum ; **D** : Sinon on met en polaire ? ;
B : Ouais si tu veux ;
D : C'est un peu plus simple que des racines de $1-x^2$;
B : Ouais, ouais, ouais ;
D : $1-x^2$ [...] ;
 « Ils écrivent sur les brouillons » ;
B : Tu as oublié le ρ , si tu l'écris en polaire $x = \rho \cos \theta$;

D : C'est quoi S1 ?
B : Tu l'écris en polaire $x = \rho \cos \theta$;
D : Oui, mais ρ c'est 1 ;
B : J' sais pas ;
D : Puisque x^2+y^2 égale à 1, égale à 1, x^2+y^2 ;
B : Ah ! Ouais, ouais ;
D : Je vais l'écrire parce que [...] ;

Cette interaction a amené les étudiants au travail suivant sur les brouillons. Ainsi **D** écrit :

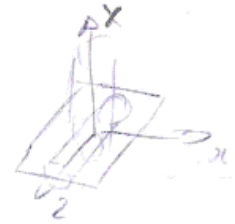
$x = \cos \theta_1$
 $y = \sin \theta_1$
 avec $\rho = 1$ } C_1 | $x = \cos \theta_1$
 $y = \sin \theta_1$
 $z = z$
 C_2 | $x = \cos \theta_2$
 $y = y$
 $z = \sin \theta_2$
 avec $\rho = 1$

Et **B** écrit seulement le paramétrage de C1 ci-contre. On voit bien que cette écriture de **B** ne représente pas la surface S1 comme il le voulait, mais le "paramétrage" du cylindre C1.

$x = \rho \cos \theta$
 $y = \rho \sin \theta$
 $z = z$

On remarque que, quand les étudiants expriment la représentation des équations paramétriques dans l'environnement *papier/crayon*, ils ne définissent pas les domaines de variation des paramètres en jeu (cf. extrait de brouillons ci-dessus). Mais ensuite, pour entrer ces écritures dans *Maple*, ils ont besoin de définir les domaines de paramètres qu'ils négligent lors de la réalisation du travail dans l'environnement *papier/crayon*. Cette remarque nous permet de souligner qu'il existe des « lacunes mathématiques »¹¹⁵ dans les connaissances des étudiants dans le domaine de la représentation analytique des objets dans l'espace 3D dans l'environnement *papier/crayon*. Toutefois, on voit que ces lacunes sont surmontées à l'occasion de l'apprentissage des outils du logiciel. Autrement dit, l'utilisation des outils du logiciel *Maple* oblige les étudiants à préciser les domaines de variation des paramètres (variables) en jeu, en particulier dans la représentation des objets *surfaces* et *solides* en 3D. Cette remarque est valable dans le travail de tous les binômes observés.

Ensuite, on observe qu'après avoir écrit les "équations paramétriques" sur les brouillons, ce binôme est arrivé à dessiner tout de suite les deux cylindres sur papier (cf. figure ci-contre). Cette initiative nous permet de dire que ce binôme a une bonne visualisation tridimensionnelle du problème, grâce à une certaine connaissance qu'il a de l'espace et du mode de représentation dans cette dimension. Il "voit" bien les deux cylindres qui se coupent orthogonalement et leur réunion. Mis à part le problème de dualité sur les objets *équations/inéquations* (révélé lors de la recherche des équations cartésiennes de S1) et le manque de contrôle sur les domaines de variation des paramètres (lors de la représentation analytique de S1 et S2), on observe chez B6 une réussite à la question (q1).



Question q2 : L'entrée des écritures paramétriques de S1 et de S2 dans *Maple* en utilisant la syntaxe (04) de la commande **plot3d** n'a posé aucun problème. Ainsi pour se faire une idée du problème dans *Maple* selon le dessin fait sur le brouillon, ils procèdent comme ci-dessous :

(B6, TC(107))	D : plot3d ... ; B : x tu mets cos(t) ;	B : Pour faire la même chose, on va inverser le euh ;
	D : Enfin on va faire plus court, on va mettre... virgule sin(t) ;	D : Inverse z euh ;
	B : sin(t) et l'autre ? ...	B : Attends, j' sais pas si, on va essayer de faire ça directement dans le même euh ...
	D : t égal 0 deux points 2Pi , majuscule à P ;	« Ils arrivent à tracer le deuxième cylindre ».
	B : Ah, ouais, ouais ; [...] z ça va être quoi ? ...	« Pour avoir les deux en même temps il faut utiliser la fonction display ».
	D : z égale à -1 à 1 ?	D : display ?
	B : Ouais...	B : display ;
	D : Bon ;	
	B : C'est bon ;	
	« Ils arrivent à tracer le premier cylindre » ;	

Cet extrait montre bien la nécessité des étudiants de définir les domaines de paramètres en jeu pour visualiser les surfaces, par l'exigence des syntaxes du logiciel. On voit bien que les questions comme : « **z** ça va être quoi ? **z** égale à -1 à 1 ? » n'apparaissent pas lors de la représentation de ces objets dans l'environnement *papier/crayon*. A noter que comme pour le binôme B4, ce binôme a repéré tout de suite (mais avec doute) l'intersection de Q dans le cube $[-1,1]^3$. L'anticipation de D quand il questionne : " **z** égale à -1 à 1 ? ", montre bien cette initiative. Toutefois on observe qu'ils ont des difficultés lors de la réalisation de la sous-tâche (d), c'est-à-dire, la représentation graphique de S1 et S2 ensemble. C'est l'observateur qui suggère l'emploi de la commande **display**. Suit l'intervention de P pour toute la classe.

¹¹⁵ Défauts ou erreurs mathématiques souvent commis par les étudiants dans l'utilisation des techniques *papier/crayon*. Ces défauts ne provoquent aucun déséquilibre dans le travail des étudiants, mais ils sont importants tant dans l'étude des outils du logiciel que dans l'exigence mathématique.

Comme pour **B2** et **B4**, le travail portant sur la représentation graphique des deux cylindres ensemble est en grande partie guidé par **P**, qui parle précisément des problèmes techniques possibles que l'on peut rencontrer lors de la réalisation du travail sur la visualisation simultanée des surfaces dans *Maple*. Notamment l'affectation des deux surfaces par une variable et la substitution du *point virgule (;)* par *deux points (:)* à la fin de chaque ligne de la commande **plot3d** (cf. chapitre D). Après cette intervention de **P** ce binôme a réussi à représenter les deux cylindres simultanément dans le cube $[-1,1]^3$, conformément à ce qui est attendu dans **q2**.

Question q3 : "Montrer que $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans" n'a pas été une tâche évidente pour ce binôme. Par contre **B** arrive à voir "spontanément" les deux plans à partir de la figure de l'étape précédente (**q2**) en la bougeant avec la souris, pour que son collègue voit la même chose que lui. Toutefois, coordonner ce qu'ils voient avec les équations paramétriques correctes qui rendent compte de la représentation graphique dans *Maple* [sous-étape (a)] a donné lieu à une longue discussion entre eux. Finalement c'est **P** qui aide les étudiants dans la réalisation de la tâche, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous :

(B6, TC(107))

D : "Montrez que $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans dont on donnera les équations" ;
B : Donc ils se coupent sur ce plan et ce plan ;
P : Bon alors, donc là vous avez délimité ... euh donc le problème maintenant : on dit $C1$ et $C2$ se coupent sur deux plans dont on va chercher des équations, premièrement moi je voudrais avoir les équations de mes plans, déterminer l'équation, regarder un petit peu comment ça se

passer et puis on va les tracer toujours sur le même dessin, donc on pourra rajouter **display** etc. Et puis, une fois que l'on aura les intersections, mon idée ça va être de regarder, de se débrouiller pour enlever ce que l'on voit là finalement, pour garder que ce que l'on voit pas, au-dedans là, la partie jaune qui est à l'intérieur celle qui est là, là, ce col-là, celui-là il faut l'enlever, d'accord ?

On observe que même avec ces instructions de **P**, ce binôme passe un long moment à essayer de tracer les deux plans. Ainsi la première instruction entrée dans *Maple* pour tenter de tracer les plans a abouti à une erreur, comme le montre leur travail que l'on a reproduit ci-dessous :

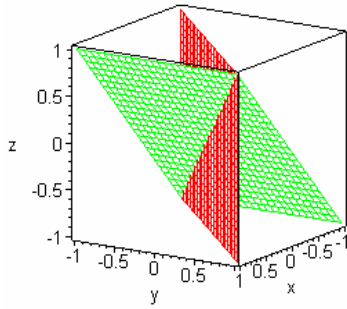
```
> plot3d([t,y,t],t=-1..1,y=0);
> plot3d([t,t,z],t=-1..1,z=0..0);
Error, (in plot3d/expression) bad range arguments: t=-1..1, y = 0
Error, (in plot3d) ranges must be non-empty
```

On peut repérer dans ces actions le problème technique et les difficultés mathématiques suivantes :

- Manque de compétence dans l'utilisation de la syntaxe (04) de la commande **plot3d**.
- Difficulté à coordonner le mode usuel de représentation analytique des surfaces planes dans l'espace par des techniques *papier/crayon* et celui utilisé dans les syntaxes (04) de la commande **plot3d** du logiciel *Maple*. On voit facilement ces difficultés quand ce binôme essaie de tracer les plans en trois dimensions avec un des paramètres nul. D'ailleurs il est remarquable que les syntaxes (01) et (04) de la commande **plot3d** de *Maple* comporte respectivement :
 - ☞ deux variables, non simultanément nulles dans leurs domaines de définition, c'est le cas de représentation des surfaces par des fonctions.
 - ☞ deux paramètres dans les cas de tracés des surfaces paramétrées, un variant de **a** à **b** et un autre de **c** à **d** avec **a**, **b**, **c** et **d** constantes réelles non simultanément nulles.

Donc les syntaxes de la représentation graphique dans *Maple* sont analogues à la manière *papier/crayon* de représentation des surfaces sur un domaine borné. A noter que ces actions marcheraient en considérant par exemple le même domaine de t pour les paramètres y et z . Cette correction ne résout que le problème technique. Ainsi la réponse du logiciel aurait été la

visualisation graphique des plans $x=z$ et $x=y$ qui ne correspondent pas à ceux attendus par les étudiants. Comme on peut le voir dans la figure ci-dessous.



Ainsi, comme pour tous les autres binômes observés, ce binôme a des difficultés à bien coordonner ce qu'ils voient dans l'espace et les expressions algébriques correspondantes. A noter qu'ils ont bien repéré visuellement les deux plans à partir de la [sous-tâche (d)]. Toutefois ils tâtonnent pour trouver les équations correctes qui donnent dans *Maple* la bonne visualisation des plans. De plus, on observe que les étudiants ne s'appuient pas spontanément sur les expressions des deux cylindres de l'énoncé pour exprimer les deux plans. Ils

préfèrent s'appuyer sur la figure précédente affichée à l'écran, à laquelle ils rajoutent les plans qu'ils ont trouvés, pour essayer de voir si le logiciel leur trace les plans au bon endroit.

En analysant la rétroaction de l'environnement à partir leurs actions précédentes, pour essayer de régler le problème, ils procèdent alors comme ci-dessous :

(B6, TC(107))

- B** : Non, non on va virer P1 et P2 pour voir déjà s'il nous met le bon truc ... ;
- D** : Attends, les équations ça va être une avec z donc ça sera $x=y$... ;
- B** : Si on met directement $y=0$ ou euh $z=0$ quoi ;
- D** : Bah, 0 ce n'est pas possible que ça marche, mais euh, pourquoi tu ne laisses pas θ et z là, tu rentres euh, euh tu mets z euh ;

- B** : z égal 0 ? Ah ! Non, ça va faire pareil que comme tout à l'heure quoi ... ; Non, on peut dessiner ça comme ça en mettant $x, x=-1$ à 1 et $y=0$;
- D** : Mais $y=0$ il ne veut pas ;
- B** : il faut qui ... Pourquoi il n'accepte pas de 0 à 0 ? « Vous avez déterminé les équations de ces plans ? »
- B** : Il y a une où $z=0$ et une t euh ;
- D** : $y=0$; On a un plan comme ça et l'autre comme ça ;

On voit bien que les difficultés des étudiants pour exprimer tant les plans que les domaines de variation des paramètres se prolongent jusqu'à ce moment. Ces difficultés font donc bloquer les progrès de **B6** dans le processus heuristique. Ensuite c'est l'observateur qui intervient auprès de ce binôme, quand il voit la difficulté des étudiants à déterminer les équations correctes des deux plans. Cette intervention les a aidés alors dans le passage de cette tâche à la question suivante. Donc c'est l'observateur qui aide les étudiants en révélant les équations correctes des deux plans d'intersection des deux cylindres, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous.

(B6, TC(107))

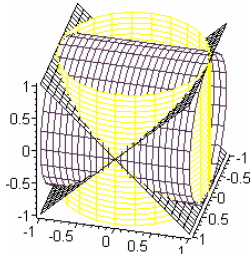
- O** : Regardez avec les équations cartésiennes ;
- B** : $[t, t, z]$;
« Pour les tracer vous pouvez les tracer, c'est pas x , c'est $y=z$, $x^2+y^2=1$, donc ça fait $y^2-z^2=0$, donc $y=z$ ou $y=-z$, ça pour le tracer il suffit de prendre `plot3d` et mettre x quelconque ».
« Après cette intervention ciblé de l'observateur, le binôme procède comme suit » ;

- D** : Comme tu as mis $y=0$ il faut le **restart** ; [...]
- B** : Euh, euh on fait **restart** ici [...] ce que nous avons dit tout à l'heure c'était ?
- D** : $y=-z$ [...];
« Vous tracez $[x, y, x]$ en fait c'est $[x, y, y]$ avec x variant de -1 à 1 par exemple. Après l'autre plan c'est le même, $[x, y, -y]$. Vous les nommez et après vous mettez le **display** »

Avec ces instructions, ce binôme reprend les dernières lignes de commandes et modifie les équations paramétriques de chaque plan et les domaines de variation des paramètres, et ils réussissent ainsi la tâche, comme le montre leur travail dans *Maple* qu'on a transcrit ci-dessous, où ils visualisent les deux plans avec les deux cylindres simultanément, en utilisant correctement la commande **display** (sauf que dans cette commande, on n'a pas besoin d'accolades).

Question 04 – le crible géométrique

```
> p1:=plot3d([x,y],y=-1..1,x=-1..1,color=black);
> p2:=plot3d([x,-y],y=-1..1,x=-1..1,color=black);
> display({C1, C2, p1, p2});
```



Une fois la question **q3** accomplie, l'observateur précise aux étudiants l'objectif de la tâche suivante (cf. B6, TC(736) en disant : *Maintenant ce qu'il faut arriver à faire c'est à virer ces bouts-là qui ne font pas partie de l'enveloppe du solide..., le but c'est quand même de calculer le volume du solide, le volume à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres...*

Suite à cette intervention, les étudiants cherchent les moyens pour décrire le **crible géométrique**. Ils voient bien les bouts des surfaces cylindriques qui forment le contour du solide Q compris entre les deux plans. Mais ils ont des difficultés pour arriver à décrire le **crible** et sa mise en œuvre dans *Maple*. Donc, mise à part la perception visuelle qu'ils ont du contour du solide compris entre les deux plans, ils ne pensent pas tout de suite à investir les équations des deux plans dans la description du **crible**. Ainsi ils tâtonnent en cherchant une fonction qui peut les aider à accomplir la tâche, comme le montrent les interactions ci-dessous.

(B6, TC(756))

D : Donc ...
B : On vire tout ce qui est au-dessus de l'intersection des deux plans en fait [...];
D : Les axes sont comment ? Celui-là c'est l'axe des x , comme ça ?
B : Hum ;
D : Celui-là c'est y , si tu me les bouges à chaque fois je ne vais pas y arriver ;

B : Il faut qu'on trouve une fonction pour dire que tout ce qui est au-dessus de l'intersection de ces deux plans ... Ah ! Attends on va plutôt donner à y une fonction euh à y une fonction de x en fait, qui sera l'équation de ça. Donc, on va reprendre notre cylindre. Il faut faire deux trucs différents en fait sur euh suivant si c'est -1 , si c'est $+1$.

Cette idée de donner une fonction à y les a menés à penser ensuite au paramètre z , de sorte que ces deux éléments (y et z) soient liés entre eux selon les équations des plans. Ainsi c'est **D** qui propose (mais avec doute) la mise en place des expressions **moins sinus** et **sinus** au lieu de la fonction cherchée par **B**. Cette idée nous semble pertinente, car les expressions **moins sinus** et **sinus** sont tout à fait liées aux équations des deux plans qu'ils ont tracés précédemment à partir d'un paramétrage *libre*. Mais **B** n'était pas tout de suite d'accord avec **D**, posant d'ailleurs la question suivante : *Si, mais euh je ne vois pas ce que vient faire moins sinus et le sinus ?* Mais l'explication de **D** a convaincu tout de suite son collègue (quand il dit : *sinus c'est ce que t'as défini euh, c'est ton y* (cf. B6, TC(756))) puis ils se mettent rapidement d'accord, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous, en décrivant ainsi le *crible*.

(B6, TC(756))

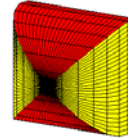
D : Il faut oh ! Il faut que tu vires z qu'est plus grand, ça c'est euh c'est ton **sinus**, il faut garder les z qui sont entre ton **sinus** et moins le **sinus** en fait ; il me semble que c'est ça, tu gardes que les z qui sont compris entre euh, entre **moins sinus** et le **sinus** ;

B : **moins sinus** et le **sinus** ?
D : Ouais. Il me semble ;
B : Si, mais euh je ne vois pas ce que vient faire **moins sinus** et le **sinus** ?
D : **sinus** c'est ce que t'as défini euh, c'est ton y ;
B : Ouais, ouais je suis d'accord ;
D : Il faut que tu vires le euh [...].

On voit que ce binôme progresse, malgré tout, dans le processus heuristique. Suite à cette interaction, ils entrent dans *Maple* les instructions portant les descriptions correctes du *crible* de $C1$ et de $C2$, qui produisent effectivement le solide intersection, conformément à ce qui est

attendu dans q4. Voici leur activité instrumentée dans *Maple* :

```
> C11:=plot3d([cos(t), sin(t), z], t=0..2*Pi, z=-sin(t)..sin(t), color=yellow);
> C22:=plot3d([cos(t), y, sin(t)], t=0..2*Pi, y=-sin(t)..sin(t), color=red);
> display({C11, C22});
```



Question q5 – le calcul du volume de Q :

Après avoir trouvé le solide criblé, ce binôme se met aux réflexions suivantes :

(B6, TC(756))

- D** : Tu connais une fonction volume ?
B : Non, mais il y a une fonction avec, par contre il faut savoir ah, mais il l'a pas trouvé donc euh ;
D : Le volume de ça ?
B : Ouais, ouais on va essayer ;
B : Bah, voilà fait **with (geom3d)** et volume de euh, le volume de **display** ?
D : Bah il suffit de définir ton oh, oh ton V comme display de "**machin**" ?

Cette première réaction des étudiants face à cette dernière question montre qu'ils n'ont pas eu immédiatement le moyen d'investir, dans cette étape, le travail qu'ils viennent de développer. Donc ils ne voient pas que les bornes qu'ils ont entrées dans *Maple*, pour arriver à la représentation graphique du

solide **criblé** correspondent, avec un certain "contrôle", aux bornes de calcul de l'intégrale conduisant au calcul de volume du solide Q . De plus, ils ne pensent pas au découpage de Q . Ainsi comme pour B3 (séance 1) ce binôme a pensé spontanément que *Maple* allait pouvoir calculer l'intégrale demandée avec un minimum de travail de leur part. Donc ils cherchent dans le paquet "**with (geom3d)**" du logiciel l'instruction qui permet de le faire. Malheureusement, le solide intersection des deux cylindres C1 et C2 n'est pas un solide de base (classique), c'est-à-dire qu'il n'y a pas de formule "toute faite", ni de découpage qui permette de s'y ramener.

A noter que le paquet "**with (geom3d)**" de *Maple* pris en compte par ce binôme comporte effectivement une commande nommée **volume** qui permet de calculer automatiquement le volume des solides classiques. Les exemples proposés dans la fonction "**help**" de cette commande montrent bien son rôle assez limité. Mais les étudiants ont pensé tout de suite que la commande **volume** est utilisable dans le calcul de volume de tous les types de solides. Comme l'exprime **D** dans l'extrait (B6, TC(878)) ci-dessous :

Pour calculer le volume d'un cube y'avait ça comme exemple on s'est dit que c'était possible à calculer mais euh ...

Pour se servir de cette commande ils entrent dans *Maple* les instructions suivantes qui aboutissent à une erreur, par des raisons que l'on a soulignées ci-dessus.

```
> with(geom3d);
> v:=display({C11,C22});
> volume(v);
Error, (in volume) wrong type of arguments
```

Ces actions des étudiants montrent qu'ils n'ont pas pensé tout de suite aux intégrales multiples pour calculer le volume de Q . Ils n'ont pas, non plus, pensé tout de suite au découpage de Q . C'est **P** qui le suggère, après avoir été confronté à la difficulté des étudiants, comme le montre l'extrait du protocole ci-dessous.

(B6, TC(878))

- P** : [...] volume, v ouais volume. Qu'est-ce que c'est que cette histoire-là « *rires de P* » Ah ! On peut essayer ;
- B** : Nous avons tapé volume il a marqué ça ;
- P** : Attendez je peu regarder qu'est-ce qui se passe un petit peu au-dessus, là on a presque fini. Bien alors, donc l'idée qu'on peut avoir maintenant, d'accord ? C'est de se dire ma ah, ma surface qu'est là, elle a visiblement quand même certaines symétries, d'accord ?
- B** : On peut couper ça en deux ou ?
- P** : Bah, on va couper de manière à se simplifier au maximum les calculs, c'est-à-dire on va essayer d'exploiter toutes les symétries qu'on voit pour tracer juste la partie qu'on va essayer de calculer le volume et puis après qu'on a vu toutes ces symétries-là bah on saura pas combien on a divisé le volume, je calcule le volume de ce qui reste d'accord ? Puis euh [...] je ne connais pas l'expression **volume** je ne sais pas ce que ça fait ;
- D** : Pour calculer le volume d'un cube y'avait ça comme exemple ont s'est dit c'était possible à calculer mais euh ;

- P** : [...] toujours [...] c'est terrible ça [...] volume, attends montre-moi au-dessus, ça fait que des cubes ? "**object which is a sphere, a regular polyhedron**" ça marche pas trop ;
- « *P lit les consignes de help du paquet (geom3d)* »
- B** : C'était pas mal quand même ;
- P** : C'était pas mal « *rires* » A priori surtout à l'oral, pensez à ça, essayez d'éviter des fonctions qui sont prédéfinies parce que c'est pas ce qui va intéresser les examinateurs, les examinateurs essaient de voir comment vous utilisez les outils *Maple* pour exploiter vos connaissances Mathématiques, si vous avez un truc qui vous calcule le volume de la sphère sans même être capable de donner l'équation de sphère il y a très peu de chance pour que ce soit validé comme ça c'est la même chose quand on diagonalise une matrice, si vous tapez [...] d'accord, ça fait tout, tout seul mais ça veut pas dire que vous avez été capable d'expliquer pourquoi *Maple* a donné [...] Bon enfin on fait pas la diagonalisation, donc ici déjà, exploitons les symétries, exploitons les symétries, tracez-moi juste la surface qui délimite le volume que vous voulez calculer ;

A partir de ces observations de **P**, ce binôme cherche ensuite les moyens pour découper le solide Q en sous-solides. D'abord ils voient les morceaux symétriques suggérés par les courbes d'intersection de S_1 et S_2 . En même temps ils parlent du volume du cube $[-1,1]^3$ ainsi que du volume de la sphère. Ainsi, comme pour **B3**, ce binôme a d'abord pensé que le solide Q est une sphère inscrite dans le cube $[-1,1]^3$. Ils ont voulu utiliser les problèmes connus (le calcul du volume d'un cube et d'une sphère) pour essayer de résoudre celui-ci. C'est **B** qui se manifeste en disant : *Moi je pense qu'il faut partir du cube et t'enlèves deux ... deux euh bouts de chaque côté*. Alors que **D** confirme en disant : *... l'avantage du grand cube, c'est que tu connais déjà le volume c'est 1 ...* ; **B** : *donc c'est cube* ; **D** : *c'est sphère quoi ...* ; **B** : *ça c'est 1 moins le volume de la sphère* ; **D** : *En fait, c'est deux fois la différence de ça, de 1 moins le volume ...* ; **B** : *Ah ! Ouais c'est ça* ; **D** : *Ah ! On a trouvé euh* ; **ON EST VRAIMENT TRES FORTS** ;

On observe que même avec la longue intervention de **P** ci-dessus ce binôme n'arrive pas encore à se servir des moyens fournis par le travail de représentation graphique pour préciser le domaine sur lequel ils vont calculer l'intégrale. D'ailleurs, ils ne parlent même pas de calculer le volume de Q par des intégrales multiples. Ils préfèrent chercher des problèmes connus pour essayer de résoudre celle-ci.

Ensuite c'est l'observateur qui intervient quant il voit que les difficultés se prolongent pour calculer le volume de Q , comme l'indique l'extrait du protocole ci-dessous :

(B6, TC(878))

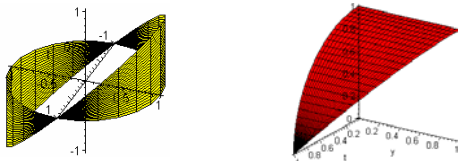
- D** : On a enlevé les angles là, c'est un cube moins une sphère en fait, et on a deux fois ce euh, cette différence ...
- O** : *Mais pourquoi c'est une sphère, parce que les angles euh ... attention vous avez pas des choses en sphérique, vous avez ces arêtes là, là il faut utiliser une intégrale multiple, c'est pas des solides euh, là vous avez pas un solide classique, donc il faut trouver maintenant [...], le problème c'est d'arriver à un calcul de l'intégrale, le truc ... quand vous avez ...*

si vous cherchez un domaine d'intégration le problème c'est qu'il faut que vous retrouvez au-dessus déjà que sur du rouge ou sur du jaune. Vous avez vachement de symétries-là, vous avez des symétries par rapport à ce plan-là, vous avez des symétries par rapport à tous les axes des coordonnées, tous les plans des coordonnées, donc il faut arriver à découper ce truc-là en, chaque fois en deux, plusieurs fois pour arriver à un seizième de volume, maintenant il faut arriver à le mettre en place.

Donc l'idée d'utiliser l'intégrale multiple pour le calcul de volume du solide qu'ils viennent de tracer est suggérée par l'observateur, qui met aussi l'accent sur le découpage de Q en sous-solides par symétrie comme **P** l'avait déjà souligné plus haut lors de son intervention (B6, TC(878)).

Suite à cette intervention de l'observateur, les étudiants procèdent au découpage dans *Maple*. C'est **B** qui propose la première tentative quand il dit : *Ce que l'on aura c'est ça, ça, ça*¹¹⁶. *Donc je te propose que l'on le redessine sauf que là on fait de 0 à sin(t), de 0 à sin(t) c'est ça ?* La suggestion de **B** est tout à fait correcte. Mais, pour procéder au découpage de C1 ils ne raisonnent que sur le paramètre z . Alors que pour le découpage de C2 ils ont joué correctement sur les deux paramètres t et y . De plus les deux découpages sont visualisés séparément, comme le montre leur travail dans *Maple* que l'on a reproduit ci-dessous.

```
> plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t), color=yellow);
> plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t), color=red);
```



Cette représentation séparée, compromet une interprétation adéquate du problème. En effet, le découpage concernant C1 ne se réalise pas dans le même domaine que celui de C2.

Toutefois, ce binôme commence ensuite à raisonner sur le calcul de volume de Q par une intégrale triple. D'abord **D** s'exprime en disant : *Ça, ça doit bien être le 1/16*. Alors que **B** dit : *... maintenant on va faire l'intégrale. Intégrale triple, integer*. Mais ils rencontrent des difficultés pour procéder aux calculs dans *Maple*. Alors que l'observateur fait un commentaire en disant : *Avec Maple vous avez des possibilités de mener les calculs...* Mais les étudiants ne pensent pas à ça, ils préfèrent changer l'environnement de travail, en développant les calculs de l'intégrale sur les brouillons fournis. C'est **B** qui dit : *On va le faire à la main....* **D** écrit sur le papier :

$$V = 16V_1$$

$$V_1 = \iiint (x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx$$

$$x^2 = 1 - y^2 \quad x \in [0, 1]$$

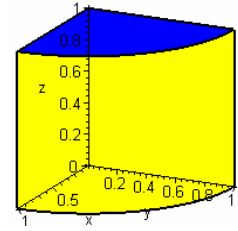
$$z \in [0, 1]$$

$$z \in [0, (1-x^2)^{1/2}]$$

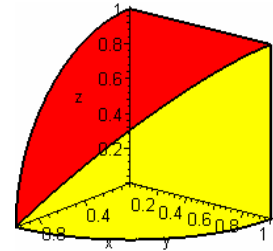
A noter que l'écriture du calcul de l'intégrale triple mise en place par ce binôme ne calcule pas le volume de Q . Donc, ils ont de difficultés à mener les calculs même sur papier. De plus, le découpage qu'ils ont utilisé que l'on peut représenter analytiquement par $\Omega = \{(x, y, z), 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$ ne correspond ni à celui développé plus haut dans *Maple*, ni à aucun autre morceau de Q . Comme le montre aussi sa visualisation graphique que l'on peut préciser ci-dessous.

¹¹⁶ Il montre la figure affichée sur l'écran.

On voit bien qu'ils tâtonnent pour dégager les données (bornes) nécessaires dans le calcul de l'intégrale. Cette démarche (tâtonnement) souvent utilisée par les étudiants montrent bien qu'ils ne cherchent pas à utiliser les moyens fournis par le travail de représentation graphique pour calculer l'intégrale. On observe aussi que le mode de représentation de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale triple ci-dessus ne montre qu'un produit des trois intégrales simples, et donc se trouve hors du modèle classique de la théorie de calcul des intégrales multiples (cf. les organisations mathématiques et didactique, chapitre B).



Les deux écritures correctes possibles pour calculer l'intégrale triple avec les données de Ω seraient $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx dz dy$ et $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dx dy dz$ ou encore $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dz dy$ ou $\int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy dz$ correspondantes au calcul de volume sous une surface. Notamment la surface jaune « $f(y, z) = \sqrt{1-y^2}$ » définie sur le carré $[0,1]^2$ du plan yOz . Cette correction ne résoud que le problème de représentation de l'écriture algébrique du calcul de l'intégrale, car le résultat possible ne répond pas à la question posée. Le découpage réalisé plus haut (dans *Maple*) pour ce binôme correspond bien¹¹⁷ à un huitième de Q que l'on peut représenter analytiquement en coordonnées cylindriques par



$Q_8 = \left\{ (t, r, z), 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{1-r^2 \sin^2 t} \right\}$ et graphiquement comme le montre la figure ci-contre¹¹⁸ (selon les données dégagées par les étudiants plus haut). On peut donc dire qu'ils avaient toutes les données suffisantes pour arriver immédiatement à calculer correctement le volume de Q . Mais ils n'ont pas eu les compétences suffisantes pour exploiter les connaissances qu'ils ont sur les intégrales multiples pour se servir de ces données. On peut donc dire que les connaissances qu'ils ont sur les intégrales multiples ne sont pas suffisantes pour arriver à percevoir immédiatement que les données qui leur a permis de visualiser les sous-solides de Q correspondent aux données nécessaires pour la mise en place du calcul correct d'une intégrale triple ou double, conduisant au calcul de volume de Q .

Ensuite c'est **P** qui intervient pour toute la classe, face à la difficulté rencontrée par B4 (qui est la même difficulté que B6 dans la même séance) pour préciser le domaine d'intégration. Le professeur **P** parle du domaine $\Phi^{-1}(D)$ dans le passage de l'intégrale en coordonnées cylindriques (cf. TC(958), séance 2), comme l'indique l'extrait ci-dessous.

(Séance 2, TC(958))

Réfléchissez bien sinon ça va me pose des problèmes, donc après quand vous avez défini vos domaines, vous avez à calculer l'intégrale triple sur un domaine D , $dx dy dz$. La démarche naturelle c'est de dire, je vais regarder avec les paramétrages que j'ai, je vais changer de paramétrages, je vais intégrer sur euh $\Phi^{-1}(D)$ de euh c'est que vous voulez de euh, $dudv$ de euh j' sais pas quoi, ça veut être ρ , $d\rho$, $d\theta$, avec $\rho d\rho d\theta dz$, sans doute on va passer en cylindrique et on essaie...

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

En s'appuyant sur cette intervention de **P**, ce binôme commence à mettre en place le calcul de l'intégrale en coordonnées cylindriques, en utilisant toujours l'environnement *papier/crayon*. A aucun moment ils n'ont parlé des commandes de calcul de l'intégrale dans l'environnement informatique *Maple*, en particulier les commandes (**int**, **Int**, **Doubleint** ou **Tripleint**).

¹¹⁷ Quand le paramètre t du premier cylindre est défini dans le même domaine de définition du paramètre t du deuxième cylindre.

¹¹⁸ Découpage "usuel" de Q en huit sous-solides par symétrie (le huitième de Q).

Pour réaliser les calculs au brouillon ils procèdent ainsi : d'abord **D** développe les calculs ci-dessous sur le papier que nous reproduisons dans l'encadré à droite pour faciliter la lecture de travail d'étudiant.

$$\begin{aligned} \frac{V}{16} &= \int_0^1 \left(\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} 1 \times \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy \right) dz dx \\ \frac{V}{16} &= \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{\pi/2} 1 \times \left(\int_0^1 \rho \times \left(\int_0^{\sin\theta} dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{V}{16} &= \int_0^1 \left(\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} 1 \times \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy \right) dz dx \\ \frac{V}{16} &= \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho \left(\int_0^{\sin\theta} dz \right) d\rho \right) d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Reproduction du travail de D

Alors que **B** procède selon l'extrait du brouillon ci-dessous qu'on a reproduit dans l'encadré à droite.

$$\begin{aligned} &\iiint dx dy dz \quad z^2 = 1 - y^2 \quad z \in [0,1] \\ &V = \iiint dx dy dz \quad y \in [0, (1-x^2)^{1/2}] \\ &= \int_{y=0}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^1 dx dy dz \\ &\text{passage en cyl} \quad \left(V_T = \frac{16}{3} \right) \\ &\iiint \rho d\rho d\theta dz \\ &\int_{\rho=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{z=0}^1 dz \right) d\theta \right) \rho d\rho = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \iiint dx dy dz \quad x^2 = 1 - y^2 \quad x \in [0,1] \\ &= \int_{y=0}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^1 dx dy dz \quad y \in [0, (1-x^2)^{1/2}] \\ \text{Passage en cylindriques} \quad V_T &= \frac{16}{3} \\ V &= \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz \quad \frac{1}{16} \\ &= \int_{\rho=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{z=0}^1 dz \right) d\theta \right) \rho d\rho = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Reproduction du travail de B

On peut repérer dans ces démarches des étudiants les problèmes mathématiques suivants :

✗ Manque de compétence sur la représentation d'intégrales itérées. On voit bien ce problème quand :

D'un côté, **D** écrit $\int_0^1 \left(\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} 1 \times \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy \right) dz dx$ au lieu de $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} \left[\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy \right] dz dx$ ou bien $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dz dx$.

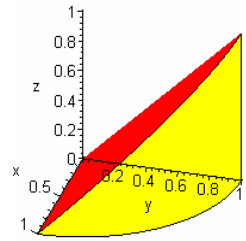
D'un autre côté, **B** représente l'intégrale triple par $\int_{y=0}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^1$ sans exprimer le différentiel (dV) d'élément du volume infiniment petit. En supposant que dV est

correctement placé, ainsi les calculs de $\int_{y=0}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^1 dx dz dy$ conduit à une fonction, et pas à une valeur effective, car l'intégrale la plus externe est une intégrale indéfinie.

Donc ni l'écriture de **B** ni l'écriture de **D** ne se conforment à la théorie des intégrales multiples.

- ✎ Le domaine¹¹⁹ tridimensionnel $\Phi^{-1}(D)$ pris en compte par **B** qu'on peut représenter de façon analytique par $\Phi^{-1}(D) = \left\{ (\theta, \rho, z); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq z \leq \rho \sin \theta \right\}$ en

coordonnées cylindriques représente bien un seizième sous-solide de Q à partir d'un découpage « *non usuel* », comme le montre aussi sa visualisation graphique présentée ci-contre. Toutefois ce domaine $\Phi^{-1}(D)$ ne correspond pas avec le domaine D de départ (quand il écrit : *passage en cylindriques*) en coordonnées cartésiennes. De plus on ne trouve ni dans leur fichier *Maple* ni dans les brouillons, les démarches mathématiques utilisées par **B**



pour calculer l'intégrale $\int_{\rho=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{z=0}^{\rho \sin \theta} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho$ qui donne $\frac{1}{3}$, et ensuite $\frac{16}{3}$ (résultat correct attendu dans **q5**).

- ✎ On observe aussi l'incohérence dans le mode de transformation de l'intégrale des coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques réalisé par **D**. A noter que le domaine D d'intégration pris en compte par **D** en coordonnées cartésiennes représente bien un huitième de Q à partir d'un découpage « *usuel* » qu'on peut représenter analytiquement par $D = \left\{ (x, y, z), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2} \right\}$. Alors que la transformation réalisée mène au calcul de l'intégrale en coordonnées cylindriques sur un seizième sous-solide de Q à partir d'un découpage « *non usuel* » (le même domaine $\Phi^{-1}(D)$ ci-dessus utilisé par **B**). Donc n'il y a aucun lien entre D et $\Phi^{-1}(D)$. Toutefois le résultat présenté est celui attendu dans **q5**.

On peut donc conclure que les étudiants arrivent à la solution, mais en tâtonnant sans aucun moyen de contrôle des calculs qu'ils font.

Comme pour tous les autres binômes observés on voit aussi avec ce binôme que le travail de la représentation graphique du solide n'était pas tout de suite un moyen de contrôle utilisable pour la mise en place du calcul de l'intégrale.

On peut aussi dire que les connaissances qu'ils ont sur la notion d'intégrale multiple ne sont pas suffisantes pour arriver à investir le travail de la visualisation graphique du solide dans le calcul de volume par des intégrales multiples.

¹¹⁹ Attention : le **D** en gras représente l'étudiant, alors que (pour utiliser la même notation de **P**) le *D* en italique représente le domaine tridimensionnel d'intégration.

ANNEXE

V

PROTOCOLE D'EXPERIMENTATION

AVEC MAPLE



ANNEXE V : PROTOCOLE D'EXPERIMENTATION AVEC MAPLE

La première demi-classe de trente étudiants.

BINOMES IMPAIRS

B1 [Bigerel (B), Parazon (Z)]

B3 [Laurent (L), Jérémie (J)]

B5 [Albert (A), Meter (M)]

Nous appelons binômes impairs les binômes observés pendant la première séance. Pour faciliter la lecture et l'interprétation de notre protocole nous l'organisons comme suit. Les étudiants sont ensemble deux à deux et nous les appelons respectivement par la première lettre de leurs noms (sauf Parazon pour ne pas le confondre avec l'intervention de Professeur identifiée par **P**) en constituant un binôme observé pendant la séance, dont à certain moment, chacun intervient suffisamment fort dans le micro pour être audible. Le texte entre guillemets « » comporte certains commentaires ou intervention d'observateur. La prise chronologique est graduée par le compteur de magnétophone que nous identifions TC¹²⁰. Les interventions sont transcrites par paquets en ressemblant un débat de succès, d'échec ou qui n'aide à rien. Les trois points indiquent les interventions inaudibles et on sépare deux interventions successives par un point virgule ou par un point d'interrogation quand il convient. Les crochets [] indiquent soit le silence, soit les passages sans intérêt. Les interventions du professeur pour toute la classe sont repérées selon le TC de la séance concernée.

Séance 1 : Intervention du professeur à toute la classe

« Le professeur **P** distribue les feuilles (l'énoncé et le brouillon) à 8h15. Ensuite, il participe au cours de toute la séance selon ses interventions suivantes à toute la classe »

TC(004) Bon alors, a priori vous n'en avez plus besoin parce que euh, euh, on va tracer juste des courbes en paramétrique, et je vous rappelle quand même que pour tracer les courbes le mieux c'est de faire ça avec le package **with(plots)**, donc pour charger ce sera le plus simple, d'accord ? [...] Je rappelle aussi que pour tracer une surface [...] donc vous allez tracer, le plus simple pour tracer une surface, vous pouvez tracer bien sûr de façon implicite et c'est pas, vous savez que ça donnera pas quelque chose, une surface c'est euh, euh une manière de tracer disons un peu approximative, donc le meilleur moyen de tracer c'est avec le euh, l'instruction **plot3d**, d'accord ? On définit de façon paramétrique, alors la valeur x de t , y de t , alors x pardon, x de t , x de u et de v on va plutôt mettre x de u et de v , y de u et de v , z de u et de v , et puis euh, euh, ensuite les valeurs de u , u égale $a..b$ et puis v égale $c..d$. « Le professeur écrit d'abord au tableau la ligne de commande suivante »

plot3d ([x(u,v), y(u,v), z(u,v)],u=a..b, v=c..d);

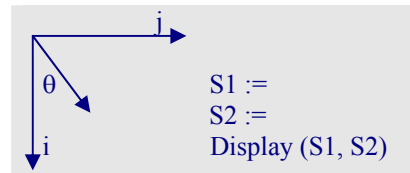
Bon la plupart du temps pour avoir une bonne vision de la surface il faut avoir euh être 1:1 donc une fois que vous avez le dessin on clique au-dessus, vous avez des options sur la nature du repère, si le repère va être orthonormé ou pas ah, une chose comme ça, bon bah, si non je vous laisse euh vous débrouillez avec le sujet.

TC(053) P : On vous demande l'équation paramétrique de la surface S_1 et de S_2 ...c'est pas très compliqué, paramétrer euh, euh...La surface, la surface qui délimite, la première surface qui délimite le cylindre c'est $x^2+y^2=1$. Je vous rappelle que, ça c'est bien l'équation d'une surface, pas l'équation d'un cercle c'est indépendant de z ... ;

TC(182) Donc, je rappelle qu'une fois que vous aurez tracer un cylindre, et l'autre une fois qu'on a un, on a l'autre assez facilement, alors les instructions ... il faut préciser ensuite...vous allez entrer par exemple le premier cylindre sous la forme **S1** : Faites attention quand vous l'appellez comme ça, à la fin vous mettez surtout deux points, si vous mettez un point virgule il va apparaître ce que vous avez affecté, c'est-à-dire l'instruction avec l'ensemble de tout les points qu'il a calculé, donc vous allez avoir une page de, de nombres qui correspond à point par point l'ensemble des points que *Maple* va tracer, donc vous faites pas ça, vous mettez deux points de manière à ce qu'il n'y ait pas d'affichage, **S2** la même chose et ensuite la fonction **S2** deux points égale, la même

¹²⁰ Un tour de compteur [(001) à (002)] dure à peu près 5 seconds en vitesse normale.

chose ... Alors ce qu'on va faire, ce on vous demande de changer la couleur, donc vous aller choisir c'est option **color** et vous mettez ce que vous voulez. Alors je sais que sub-marine a beaucoup de succès, mais maintenant vous pouvez choisir tout ce que vous voulez dans les options couleurs et ensuite vous avez la fonction **display** qui trace simultanément **S1** et **S2**, d'accord ? Donc quand on a des fonctions, des instructions graphes, la fonction **display** va le faire en même temps.



TC(393) Maple ne fait pas tout dans ces cas là, montrer que l'intersection c'est deux plans, on peut peut-être essayer de résoudre le problème, donc si vous avez les deux plans vous avez un point M [...] D'accord, c'est un point qui appartient à la surface ... c'est un autre point qui va appartenir à un autre surface M' . Alors attention si je mets ici de u et de v , on va essayer de dire que M égale M' c'est-à-dire que un points sur l'intersection des ces deux surfaces de valeurs x', y' et z' d'accord, $x=x', y=y'$ et $z=z'$, il faut faire attention que ces paramètres u et v ici ne représentent pas la même chose, donc c'est pas pour mêmes valeurs des paramètres. Donc il faut tu change, il faut que tu change ... des paramètres que tu regarde après le condition $x=x', y=y'$ et $z=z'$ sur les valeurs du paramètre u et v .

« Le professeur écrit au tableau »

$$S1 := M(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$

$$S2 := M'(u,v) = [x', y', z']$$

TC(680) Bon alors, donc l'idée c'est de se dire, il faut que j'enlève, dans mon dessin, il faut que j'enlève les valeurs du paramètres il faut que je trace d'accord ! En $x(t), y(t)$, donc tas $x(u,v), y(u,v)$ et $z(u,v)$, ... θ ou j' sais pas quoi, il faut que j'enlève les valeurs du paramètre qui sont pas, qui sont là, qui...il faut que je garde juste les valeurs de paramètre qui sont à l'intérieur, d'accord ? Il faut réfléchir quand est ce que, pour quel le valeur de, je sais pas que vous avez, θ . Ben ! Pour quel valeur de θ et de z ou de θ et de x je suis entre ces deux plans. Si j'arrive à enlever ça, j'ai gagné, j'ai toute la partie qui me reste. C'est pas compliqué, il suffit de savoir pour quels les valeurs de paramètres je suis sur les plans, et puis.

TC(747) Alors, si vous voulez tracer la courbe d'intersection, une fois que vous l'avez paramétrée, vous pouvez le faire, je vous rappelle, pour tracer une courbe c'est **spacecurve** d'accord, ça c'est tracer une courbe dans l'espace. Avec $x(t), y(t), z(t)$ ça c'est pas obligatoire. L'avantage d'avoir *Maple* ici, c'est d'avoir un support graphique, euh parce que sinon le reste c'est évident.

TC(+043) Une fois que vous avez déterminé, donc, Vous avez certain une certaine symétrie, donc vous allez tout dessiner, d'accord ? Donc ce que vous faites, vous le séparer et vous me dessiner juste un petit morceau, le morceau dont vous allez calculer l'aire. « En fait n'est pas aire qu'on cherche à calculer c'est le volume du Q ». Y'a certaine symétrie vous allez enlever tout ce qui n'appartiens pas à Q , et garder ce qui vous intéresse, ensuite on y va, on calcule l'intégrale triple, sur ce domaine, hop. Sur le domaine que je cherche $dx dy dz$, alors en fonction de ce que vous avez fait on va bien sûr se mettre avec le paramétrage que vous avez choisi... C'est-à-dire il va falloir changer deux paramètres.

« Le professeur écrit au tableau »

$$\iiint dx dy dz$$

TC(+100) Alors, vous voyez que, c'est eh ! Maple ... quand vous mettez $0, \cos\theta, \cos\theta$ pour θ variant entre 0 et 2π , ça passe négatif, ça gêne pas de tracer de zéro à moins quelque chose. Si vous aviez voulu avoir vraiment la partie du dessous et il aurait fallu imposer que on mette valeur absolue ici.

TC(+149) Par exemple là sauf que vous faites attention, vous avez posé, quand vous avez regardé x, y etc. Donc vous regardez pour quelles valeurs de paramètres maintenant on va passer en coordonnées cylindriques..., on va regarder ça en cylindriques. Mon intégrale je vais la mettre en cylindrique. Quel est l'intérêt de ce que vous avez fait ? Que vous avez précisément les valeurs du paramètre de votre domaine, c'est-à-dire $\phi^{-1}(D)$ vous l'avez pratiquement, d'accord. En cylindriques je rappelle hein, on va partir de θ, ρ et z , on associe en fonction y en a qui ont préfère prendre $\sin\theta, \cos\theta$, etc., donc c'est $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$;

« Le professeur note au tableau »

$$(\theta, \rho, z) \rightarrow (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

Et maintenant l'intérêt de ce qu'on a fait qu'est-ce que ça nous a permis de faire, de le dessiner et couper en morceaux, c'est que, sur le petit domaine, on a simplifié déjà par symétrie, et là maintenant mon petit domaine me permet d'avoir $\varphi^{-1}(D)$, $\varphi^{-1}(D)$ vous l'avez pratiquement de façon simple. Attention, ce que vous allez tracer c'est la surface externe, ce que devez calculer c'est le volume interne, d'accord ? Ce n'est pas la surface externe. On ne vous demande pas de faire un calcul de l'intégrale de surface, seulement bon le volume. On est bien d'accord [...]. Alors, pour si vous voulez vraiment calculer une intégrale double ou une intégrale triple Maple le fait aussi, ... il le fait dans le paquets "**student**" mais on va le faire à la main, mais je préfère qu'on le fasse à la main - éventuellement après on demandera à Maple de faire chacune des intégrales simples qu'on va récupérer. On va intégrer par rapport à chacun des paramètres les un après les autres. Moi ce qui m'intéresse, déjà, c'est que vous me donniez sur votre papier l'intégrale que vous avez à calculer de façon précise, d'accord ? Le 1/16, le 1/8, le 1/4 d'intégrale que vous avez à calculer.

TC(+261): Allez, l'intégrale de mon volume, donc c'est $\iiint dx dy dz$ D'accord ? Alors, maintenant si je passe en coordonnées, en coordonnées cylindriques quel est ... ? C'est-à-dire quelle valeur des paramètres θ , ρ et z intervient dans..., quelles valeurs des paramètres que correspond à un domaine que vous avez dessiné ? Pas l'extérieur, l'intérieur. Une fois que vous avez récupéré le morceau ... Moi je rappelle que je cherche à tracer ... l'intérieur de ce petit carré - d'accord ? Donc ce qui m'intéresse c'est pour quelle valeurs θ , ρ et z je suis à l'intérieur. Et ensuite une fois que j'aurais ça, je passerais sur l'intégrale de ..., c'est-à-dire du domaine que j'ai considéré. Du passage au coordonnées cylindriques, vous vous rappelez c'est le jacobien, ça va être combien ici ? C'est ρ comme si on était en polaire, sauf que $z=z$ et dz ça change rien, donc ça va être un $\rho d\rho d\theta dz$. Finalement voilà ce qui j'ai à calculer $\iiint \rho d\rho d\theta dz$.

TC(+312) Se qui vous pouvez faire éventuellement pour bien repérer ce qui vous voulez intégrer, ça fera joli le jour d'oral. Vous mettez en **int** à grand **Int**, **Int** c'est l'intégrale inerte, c'est-à-dire que va vous dessiner l'intégrale et puis après **evalf** de l'intégrale et là ça fait les calculs, d'accord ? Comme ça vous vérifiez que vous avez bien calculé, c'est plus visible à l'écriture **Int(Int(Int** etc., à la fin vous intégrer.

TC(+472) Le plan qui, [...] le plan qu'est ici là quand vous êtes comme ça [...] regarde euh, là il y a un plan, qui a comme équation ? Donc on a dit $y=z$, d'accord, $y=z$. Donc quand vous avez un point qui est ici au milieu avec comme coordonnées, en coordonnées polaires, ρ et θ quelle est la hauteur, la hauteur d'intersection ici, cette hauteur, la valeur de z qui correspond à ça, c'est la même que la valeur de y ? y c'est quoi ? y c'est ? $\rho \sin\theta$ ou $\rho \cos\theta$ ça dépend du choix du θ pour ceux ont voulu prendre θ complètement à l'opposé de ce qu'on fait d'habitude. Donc la valeur de y , elle est ici, et cette l'hauteur là c'est la même que celle-là. Puisque je suis sur un plan $y=z$, d'accord ? Quelle est la valeur de y ? La valeur de y ici c'est $\rho \sin\theta$, d'accord ? Donc on n'intègre pas entre 0 et $\sin\theta$, mais entre 0 et ? **Z** : 0 et euh, 0 et $\rho \cos\theta$; **P** : $\rho \cos\theta$, ouais ! Il faut faire attention parce que, $\rho \cos\theta$ ça veut dire que il faut ça ce soit la première intégrale que tu fais parce que la valeur de z elle dépend de ρ et de θ , ensuite tu intègre soit par rapport ρ , soit par rapport à θ .

Séance 1 : Protocole des étudiants

1.1..11 Binôme 1 : Etudiant B et Etudiant Z

«Le professeur (P) distribue les feuilles (l'énoncé et le brouillon) à 8h15. Il rappelle ensuite la commande « **plot3d** » pour tracer les surfaces et puis une formule de paramétrage d'une surface, selon son intervention, voir TC(004), Séance1 »

Z : (023) Au travail ; [...] ; **P** : (031) Enregistrez votre travail, vous mettez votre nom... ;

TC(040)

B : C'est égalité ? **Z** : Non ! C'est plus compliqué ... ; **B** : Comment tu appelles ça quand tu as mis inégalités ? **Z** : Non... ça donne juste l'extérieur ? **B** : Comme quand t'as l'inférieur, ça donne tout ce qu'il y'a à l'intérieur non ? **Z** : Ben... ; **B** : C'est comme quand tu as un cercle ? [...] Et comment on fait ?[...] c'est cool ... ;

« TC(053) intervention de P à toute la classe, voir TC(053), Séance1 » ;

TC(059)

Z : x égal, $x = \sin\theta$ quoi... ; **B** : Pourquoi ? **Z** : J'sais pas [...] ; **B** : Tu fait exprès d'écrire mal ou ... ; **Z** : Ah ! Oui c'est un réflexe, c'est un brouillon oui ; **B** : Pourquoi \sin là et \cos là ; **Z** : J'sais pas [...] ; **B** : Oh ! Bah, on met les même ; **B** : Donc là, ça veut dire qu'on rentre que [...], on rentre que x et z ? T'as pas de rond non plus ? T'as pas de rond non plus ? **Z** : ... **B** : Donc quand tu mets du x de u et v tu vas avoir x de u ;

TC(085)

B : Parce que là va, ça va être uniquement des fonctions de x et y ... ; **Z** : Bah, non avant 1 ; **B** : Vas-y, ouais [...] ; **Z** : Non ! C'est pas trop ça en fait ; **B** : J'ai du mal j'aime pas la géo [...] ; **Z** : Ah ! Oui on paramètre C2 directement par rapport à ah, par rapport à x en fait, ça fait du $x = x$, et y , $\sqrt{1-y^2}$; **B** : On sais ça revient au même ; **Z** : je sais pas si ça revient au même en fait ; **B** : Racine c'est quoi ? **Z** : $\sqrt{\quad}$... [...] ; **B** : Deuxième c'est quoi ? **Z** : $\cos\theta$... et après tu met z , **B** : Ouais ; **Z** : Non !

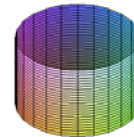
TC(118)

P : Ok donc ensuite les valeurs du paramètre ? ... les valeurs des paramètres ? **Z** : Euh ! Euh ! De 0 à 2π non ? **B** : Bah, de 0 à 2π [...] ; **P** : Bon tu feras attention à la définition de ton θ , si x c'est $\sin\theta$ et y c'est $\cos\theta$, c'est pas l'angle qu'on a traditionnellement en coordonnées cylindriques d'habitude, x c'est $\cos\theta$ et y c'est $\sin\theta$; **Z** : Ouais ! Ouais ! Ouais ; « Ils tapent sur le clavier » ; **P** : C'est bon, c'est pareil, ça veut juste dire que vous avez ρ équivalent à l'angle qui est de l'autre côté ; **B** : Il faut définir z aussi ? **B** : Bah non ... ; **P** : Ça

change rien à la définition de votre repère, parce que après quand vous allez avoir des égalités entre différentes valeurs ça risque de poser plus problème. **B** : Vas-y essaye ; **Z** : Professeur il faut définir z ? **B** : Essaye ; **P** : Les valeurs de z ? **Z** : Ah, ouais mais euh -10, 10 ? **B** : Ouais ;

« Ils entrent avec les lignes des commandes suivantes qui résulte au G1 ».

```
> with (plots) ;  
> plot3d ([sin(theta), cos(theta), z], theta=0..2*Pi,  
z=-0..10);
```

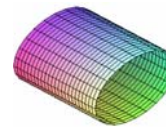


TC(143)

Z : Vas-y copie tu changes ... ; **Z** : Juste inverser [...] ; **B** : Tu met y [...] ; **B** : Vas-y lance ce trique [...] ;

« Ils copient la dernière ligne et collent au-dessous. Ensuite cette ligne est transformée en ce qui suit en changeant les positions d'équations paramétriques et ajoutant y dans la position correcte pour exprimer S2 ».

```
> plot3d([sin(theta),y, cos(theta)], theta=0..2*Pi, y=-  
10..10);
```



« Ils réussissent à représenter les deux cylindres séparément. Ensuite pour ensemble les deux cylindres ils procèdent comme suit. Ils utilisent encore la commande plot3d en copiant la ligne de la commande de première cylindre et ajoutent la paramétrage de deuxième cylindre, voila le résultat »

TC (156)

Z : Fait copier coller ; **B** : Pourquoi ? **Z** : Maintenant il faut mettre ensemble en fait, **B** : Alors là ça va être du ... ; **Z** : J'sais pas ; [...] **B** : Le problème c'est que là on a à la fois [...], ça veut dire qu'il va falloir intégrer certainement. Il faut intégrer cet argument là-dedans pour que le z soit uniquement ; **Z** : On s'en fout de toute façon, l'autre tu met y [...] ; **B** : Tu crois ? **Z** : Bah, oui on s'en fout ; **B** : Ouais, d'accord, ok c'est pas faux ; **Z** : Tu mets, tu rajoute y ...et après le contraste ; **Z** : Maintenant il faut que tu différencies euh ... ; **B** : par des couleurs ? $\sin\theta$... ; **Z** : Vas-y $\sin\theta$, y , $\cos\theta$ [...] ; **B** : On tente on a pas peur ? **Z** : Ouais, vas-y ... « Il fait entrée » ;

```
> plot3d([sin(theta),cos(theta),z],[sin(theta),y,
cos(theta) ]), theta=0..2*Pi, y=-10..10, z=-10..10);
Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad
optional argument, z = -10[...]
```

B : Non! Echec.

TC(174)

Z : On recommence, « d'abord copier ça »... il appelle z -10 à 10 ; **B** : Ah ! Tu crois ... ; **Z** : Mets optimal avec... après ; **B** : Non, optional ; **Z** : Quoi ? **B** : C'est marqué là optional ; **Z** : Ah ! Ouais. Non c'est-à-dire qu'il ne pas compris ... ; **B** : Tu est sûr [...] ; **Z** : Attends ... ; **B** : Ce n'est pas comme ça ?

« TC(182) intervention de P à toute la classe, voir TC(182), Séance1 » ;

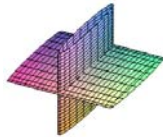
« Avec cette intervention ce binôme recommence »

TC(200)

P : C'est bon ? **B** : C'est bon, on est content ; **Z** : parfait ... ; **B** : On va reprendre ça... ; **Z** : Tu mets deux points à la fin ... ; **B** : ...voilà, S2 c'est, cela... ; **Z** : Entrée ; **B** : Display ... ; **Z** : Display c'est avec majuscule, ou ... ; **B** : Non ! Tu, tu ... ; **Z** : J'vais y arriver display c'est bon... ;

« A partir des instructions de l'enseignant, ils définissent alors S1 et S2 comme suit, et ajoutant la commande display » ;

```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z], theta=0..2*Pi,z=-
10..10);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)], theta=0..2*Pi,y=-
10..10);
> display(s1,s2);
```



TC(220)

B : Copie, copie. On prend tout ça ? **Z** : Ouais on prend, descend prend display prend tout, prend tout [...] ; **B** : 5 ça ira tu crois ? **Z** : On va faire du moins, moins, -3 à 3 mais ça ne parait pas mal ; **B** : Fait entrée ... T'as pas validé là dessus ... ; **Z** : Ça c'est, c'est une seul ... ; **B** : Ah ! Ouais ? **Z** : On a besoin de faire un restart ! Tu crois ? [...] **B** : Pourquoi ? **Z** : J'sais pas, par réflexe, pour éviter que les choses se soit dans [...] ; **B** : Bah, enlève-le il sa serve à rien ; ... ; **B** : Mais pourquoi il a marqué tout ça alors ?[...]. « Essaie de changer le nom » ; **Z** : Mais c'est pour ça qu'on a mis le restart, donc c'est bon pour les affecter normalement ; **B** : Il faut pas le faire dans une autre ... on va change le nom ? **Z** : Mais normalement si on fait le restart on peut reprendre le même nom [...], mais il faut qui soit dans les mêmes parenthèses ; **B** : Surprise ? **Z** : Essaie, essaie ; **B** : Ah ! Mais, d'accord [...] ; **B** : Qu'est-ce qui passe là ? [...] ; **Z** : Je me suis trompé de tout enlever. Remets les deux points alors,

remets les deux points, si il y avait déjà deux points ; **B** : C'est ça ? **Z** : Non après display où il avait deux points tout à l'heure tu avais changé, met encore deux points, mais deux points virgule ; « Ils se confondent et ils rient et ça ne marche pas » ; **B** : Pourquoi ça marche plus ? C'est le restart que nous a tout truc ; **Z** : Vas-y... reprend doucement deuxième essaie allez, il faut pas trop l'embêter, il faut y aller doucement il est fatigué il a beaucoup travaillé déjà ... Allez encore... ensuite...

TC(275)

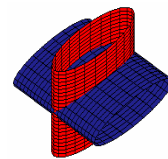
B : Non ! Non ! Cela ça marché, nous a fiché ; **Z** : Celui-là, c'est celui avec -10 à 10 ; **B** : C'est bon ça marche... là ... ; **Z** : Là, euh, euh, là par contre ... ; **B** : Pourquoi il fait ça ? **Z** : Mets le restart dans une autre truc...attends c'est comme ça ... ; **B** : Je comprends pas pourquoi le restart ... ; **Z** : Ah ! Si c'est à cause de with(plots) quand tu fait le restart il a viré la, la bibliothèque de... Ah d'accord... ; **B** : (284) Ah ! Ok... ; **Z** : Dac...Ah ! Il n'est pas d'accord... ; **B** : Pourquoi tu veux pas, ... ; **Z** : Non ! Il ne veut pas, d'accord, c'est intéressant, **B** : C'est super... ; **Z** : Par contre on n'a pas mis les couleurs.

TC(289)

P : Bah, oui, donc changer les couleurs de manière à repérer bien le premier et le deuxième ; **B** : Alors copy coller, il faut que tu copy colle ... il faut les mettre où le couleurs ; **P** : Il y a deux choses importantes : la couleur pour repérer bien les deux cylindres, et deuxièmement le euh, ... essayer de mieux regarder l'intersection, puisqu'on s'intéresse à l'intersection des deux cylindres, d'accord ? **B** : D'accord...A l'intersection, on met rouge et ... ;

« il entrent alors avec les instructions suivantes »

```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta), z], theta=0..2*Pi,
z=-3..3,color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)], theta=0..2*Pi,
y=-3..3,color=navy);
> display(s1,s2);
```



Z : Wahoo ! Trop joli ! « Rires »

TC(309)

B : Juste c'est l'intersection ? **Z** : Ouais ; [...] Ajuste la représentation, ah ! On recommence [...] ; **B** : Comment on est sûr qu'on a tout là ? **Z** : Parce que, parce que regarde ; **B** : Bon il est facile à voir ... ; **Z** : Bon, voilà, on voit. Ajuste si nécessaire la représentation,... ; **B** : Alors on veut maintenant effacer les parties de chaque cylindre qui ne sont pas sur la frontière de Q ; [...]. Montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans dont on donnera les

équations [...] alors; **Z** : Se coupent sur deux plans [...]; **B** : Comment tu fais pour voir [...], tu prends l'intersection pour raison paramétrique on [...]; **Z** : J'sais pas, attends [...]; **B** : Moi j'ai du mal à voir la question; **Z** : Se coupent sur deux plans [...] c'est comme ça; **B** : Ah ! C'est comme ça ? **Z** : C'est comme ça; **Z** : Ça vas ? **Z** : Tu vois si tu le bouges; **B** : Donc, mais ...; **Z** : En fait tu le verrais si tu regarde comme ça; **B** : Ouais, d'accord; **Z** : Ah ! Voila;

TC(357)

Z : Donc, donc, donc, il faut donner les équations, il faut les calculer ou [...] enfin il faut les mettre en évidence ? [...]; **B** : Franchement redis-moi, je vois pas où ils sont, se coupent sur deux, sur deux plans, dont, j'arrive pas à voir; **Z** : T'arrive pas à voir ? Les deux plans ? **B** : Hun, les deux plans en fait; **Z** : Ça veut dire que la totalité d'intersection est contenue dans deux plans, l'intersection des deux cylindres est contenant dans deux plans; **B** : T'as celui-là ? **Z** : Bah, celui-là;

« *Qu'est-ce que tu n'arrives pas à voir ?* »

TC(271)

B : Je n'arrive pas à comprendre que euh C1 et C2 se coupent sur deux plans; « *Qu'est-ce que ton collègue vient de dire ?* » **B** : Que c'était les plans là; **Z** : Que l'intersection est contenue dans ces deux plans là. **B** : Parce que moi j'arrive pas à y voir en fait, dans ma tête, c'est pour ça en fait; « *Que ce qu'on peut faire pour... ?* »; **B** : Pour voir ? Bah [...]; **Z** : Ah ! On avance, oui alors, là effectivement on voit; **B** : J'arrive pas à comprendre ça, *montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans, dont on donnera les équations*; **P** : Vous voyez pas les deux plans...prenez le déjà sur une feuille on le verra peut être, d'accord, ça me paraît pas inutile;

« TC(282) intervention de P à toute la classe, voir TC(393), Séance1 »;

TC (400)

Z : Ça fait, ça fait $x = y$ ou $x = -y$ et z indifférent, donc ça fait comme ça et comme ça. En fait on pourra dessiner les plans ? **B** : Bah dessine, comme ça, ça va être plus joli; **Z** : Ça si on égale ce deux trucs donc ça fait en fait $x = \pm y$ et z indifférent; **P** : Oui, l'équation ça va être $x = y$ ou $x = -y$, et $x = y$ c'est équation d'un plan dans l'espace, d'accord ? **B** : Ah oui ! Mais comme les autres je les déjà définis en θ [...]; **P** : Ce n'est pas gênant ! Ce n'est pas gênant, à partir du moment c'est exactement comme dans une intégrale, quand tu marques ici y et z c'est valeur d'un paramètre, c'est-à-dire c'est variable mue par rapport au dessin...d'accord, donc ça, ça te donnera un plan ? C'est ça ? Tu fais attention, là il faut à ce moment-là mettre deux points oui, S3 à ce moment là ça serait ... **P** : (442) Il faut que t'aïles,

entre -2 et 2. **B** : Pourquoi ? Pour qu'on les voit en peut déboucher ? **P** : Ouais; **B** : Je sais pas je trouve ça plus joli; **P** : Et donc un **disply** il faut que tu traces tout à la fois...; « *Ils cherchent à représenter les deux plans, et entrant dans Maple avec les lignes de commandes suivantes, mais ça ne marche pas, en fait il manque l'instruction plot3d* »

```
> s3:=[y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow);
```

```
s4:=[y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green);
```

```
display(s1,s2,s3,s4);
```

Error, (in display) invalid argument [y, y, z] which must be a plot structure, or a list/set/array thereof

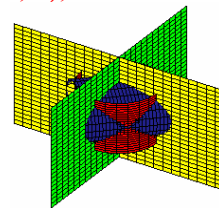
TC(462)

Z : Que ce que j'ai fait ? **B** : J ne vois pas l'erreur; « *Regardent d'abord les lignes des commandes précédentes, qu'est ce qui ne va pas dans vos instructions ? (Ils copient et collent et ajoutent la commande plot3d)* »; **Z** : (494) Pourquoi il ne veut pas ? **Z** : C'était magnifique... je sais pas ce qu'on a fait [...]

```
> s3:=plot3d([y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow);
```

```
s4:= plot3d ([y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green);
```

```
display(s1,s2,s3,s4);
```



TC(515)

Z : C'était magnifique; **B** : N'est pas bon ! (Ils rient) C'était bien essayé quand même; « *Ils réussissent, mais le fichage (les plans, cf. résultat ci-dessous) n'est pas celui attendu* »,

« *Où vous avez trouvé cette idée de mettre [y, y, z] là ?* »

TC(530)

Z : C'était, euh... parce que euh ... En fait quand on égale les deux équations ...; « *...Où vous avez fait ça sur le papier ?* »; **Z** : D'accord !

« *Ils faisaient alors les manipulation des équations de l'énonce sur le papier/crayon, voir les brouillons* »

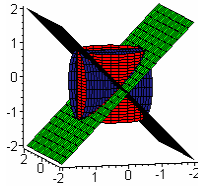
TC(542)

Z : Ah ! Oui, oui, oui ! Échec, c'est pas y , y c'est x indifférent et $y = \pm z$. « *Ensuite ils recommencent en changeant les positions des paramètres. D'abord x indifférent et $y = \pm z$ comme les montrent les lignes des commandes suivantes* »

```
> s3:=plot3d([x,y,y], x=-2..2, y=-2..2, color= yellow);
```

```
s4:= plot3d ([x,-y,y], x=-2..2, y=-2..2, color= green);
```

```
display(s1,s2,s3,s4);
```

Maple affiche alors le résultat suivant »

TC(568)

Z : C'est mieux maintenant, tu les vois maintenant ? **B** : Oui ! Je compris juste avant... ; **Z** : Alors : en faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q ... il faut tracer l'intersection ... ; **B** : C'est cool ! « Blocage » ; **Z** : Alors ;

« Qu'est-ce que demande la question ? »

B : De tracer l'intersection de euh ! euh ! De ces deux plans et des cylindres, donc de tracer Q en fait, en faisant disparaître les parties qui ne sont pas Q en fait. **Z** : Donc, en fait il faut tracer l'intersection des plans et des cylindres, et faire disparaître... je ne vois pas ... déjà les plans on peut les enlever, nous en avons eu besoin seulement pour voir, mais il faut refaire ; **B** : Tout ce qui ne vérifie pas $y=\pm z$ et des deux équations...

TC(608)

B : Moi c'est le faire disparaître qui me gêne c'est est [...] **Z** : Faire disparaître dans le sens où ça va être vraiment une instruction qui va ... ou c'est plutôt dessiner l'intersection... ; **Z** : Ouais ! Donner une représentation graphique ! Ah ! D'accord, ... ; **B** : Si on trace juste ces deux plans sur -1 à 1 on aura une belle représentation graphique [...] ; **Z** : Il n'y a pas de l'aide ? **B** : Bah, non ; **Z** : Il faut enlever ça et ça ; **B** : De quoi ? **Z** : Dans cette partie à cette partie il faut enlever le cylindre rouge, et de cette partie à cette partie il faut enlever le cylindre bleu. Il va rester du bleu ici et de bleu ici, et du rouge et de rouge et ça sera la même surface ; **B** : Pourquoi ? **Z** : Parce que le bleu il est bloqué là et il apparaîtra, quand on enlève le rouge là et le rouge là il reste que la surface commune au deux... à l'intérieur des deux ; **P** : (660) Ouais, exacte ; **(B)** Ah ! Parce que c'est l'intérieur du cylindre. D'accord... ; **Z** : Moi j'ai raisonné comme ça.

« TC(664) intervention de P à toute la classe, voir TC(680), Séance1 » ;

TC(689)

Z : Met les axes, met les axes, ... tu vas mettre les axes ? **B** : C'est quelle est euh ; **Z** : Nous on ! On a en θ , donc ; **B** : C'est juste pour savoir par rapport au plan, quand on est au-dessous de ce plan là il faut enlever le ... ; **Z** : Ah ! Ce n'est pas facile à faire, c'est facile à dire ; **B** : Bah, oui ; **Z** : Bon, entre, ça veut dire que, parce que là il faut raisonner en θ , entre $\pi/4$, entre $\theta = \pi$... ; **B** : $\theta=0$ et $\pi/4$; **Z** :

Parce que θ ... Ah ! Non, on est comme ça, mais là, mais là on partait comme ça en fait ; **B** : Ça veut dire que entre 0 et $\pi/4$; **Z** : On fait quoi, on dessine qui ? **B** : Que le, que le rouge ; **Z** : Non, non ! Que le bleu ; **B** : Que le rouge ; **Z** : Que le bleu ; **B** : Entre là et là que le rouge ; **Z** : Non ! Que c'est le bleu ; **B** : Que le rouge ; **Z** : C'est le bleu qui est là ; **B** : (723) Non, on va garder que le rouge là ! On est d'accord.

TC(727)

Z : Ouais, ça c'est pas, c'est pas très claire, je vois pas comment ... ; **B** : Tu es sûr que l'angle il est là ? **Z** : À moins qu'on puisse définir ... qu'on puisse faire rentrer les arguments θ à l'intérieur même de la définition ; **B** : Je ne vois pas pourquoi ton angle il est là ? **Z** : Ah mais si on peut le faire ça, puisqu'on on a défini chaque courbe séparément ; **Z** : Donc, ça c'est pour ... sur le, sur le ; **B** : Cylindre bleu on va peut-être l'appeler un peut différemment ?

TC(741)

Z : Il faut savoir si c'est S1 ou S2 le cylindre bleu quand même [...] ; **B** : Ah ! Oui ta raison... Cylindre bleu c'est ... va être S1 ; **Z** : Non ! C'est S2, c'est S2, c'est sûr, c'est S2, c'est S2 ; **B** : Oui c'est S2 tout à fait, ... S2 donc S2 il faut qu'il apparaisse ... ; **Z** : D'ailleurs c'est $\pi/4$, c'est $\pi/4$; **B** : Pourquoi tu pars comme ça ? **Z** : C'est peut-être plutôt là ! ... $\pi/4$, $7\pi/4$; **B** : Après sur S1 c'est le rouge. C'est ce qui reste ; **Z** : C'est ce qui reste, entre 0 et $\pi/4$. Mais $-\pi/4$ peut-être, $-\pi/4$ et $\pi/4$ et $\pi/4$? On parte delà ...

TC(761)

B : Tu vas avoir quatre unions alors ? **Z** : Non ! Trois unions, entre $3\pi/4$ et $5\pi/5$ [...] et à [...] zéro ; **B** : C'est $\pi/4$ tu mets ; **Z** : 0 à 2π ; **B** : Cette fois, une fois qu'on arrivé de définir deux unions de euh, deux unions de domaine [...] ; « Ils discutent et écrivent plutôt sur le papier comme suit »

Cylindre Bleu

$$\rightarrow S_2 \rightarrow \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$$

Rouge

$$\rightarrow S_1 \rightarrow \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$$

TC(767) intervention de P à toute la classe, il parle de spacecurve, voir TC(747), Séance1 » ;

TC(775)

P : Alors, qu'est-ce que vous avez trouvé ? [...] Eh ! $-\pi/4$, $\pi/4$... Alors quand tu enlèves eh... tu fais attention ... supposons que le cylindre du dessus c'est un cercle, tu enlèves un domaine ; **B** : Voilà c'est ça tu fais pas ce qu'on veut ... ; **Z** :

Description ? **B** : Oui ! Oui, oui, ... ; **Z** : Si tu vois un fromage, quand tu coupes une partie tu as sûr une grande longueur... après on va se trouvé avec un truc comme ça... à la place du cylindre ; **B** : Non ! C'est pas ce qu'on veut, on veut pas enlever ce genre de partie. C'est pour ça que je ne comprenais pas, parce que ton angle, il est, il est défini autour de, autour de... ; **Z** : D'accord, d'accord, d'accord ;

TC(788)

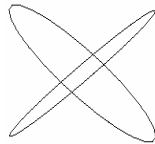
P : Là t'essaies de faire un petit peu au petit bonheur. Tu dis tiens je le sens comme ça...regarder pour quelles valeurs je suis sur le plan, pour quelles valeurs du paramètres je suis sur le plan qu'est ici... l'équation qui est ici d'un des deux plans, n'importe lequel, c'est assez simple, tu ne les avais données de façon cartésiennes... par exemple, le premier, le premier ici tu m'as dit c'est $y=z$, d'accord ? Quand est-ce que $y=z$ dans le premier cylindre ? Par exemple dans le cylindre eh, eh, eh rouge, tu prends le cylindre rouge, ses équations paramétriques, elles sont où ? J'en sais rien ! Celui-là ! $y=z$ qu'est-ce que ça donne ?

TC(797)

Z : D'accord ! **B** : J'ai t'ai expliqué mais tu comprenais pas ; **Z** : J'ai attendu que tu comprenais par toi-même ; **B** : Attend je vais finir mon dessin... ; **B** : C'est $y = -z$? **Z** : Alors c'est bon **sinus**, **cos** θ , **cos** θ ... et les deuxième c'est **sin** θ , -**cos** θ , **cos** θ ; **B** : C'est bon, on ne dessine pas les plans alors ; **Z** : On va essayer quand même ...

« Ils entrent d'abord avec les lignes des commandes suivantes, en attendant le solide crible. En effet telle paramétrage exprime que des courbes d'intersection des deux cylindres (cf. figure ci-contre) »

```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),cos(theta)],
theta=0..2*Pi,z=-1..1,color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),-cos(theta),cos(theta)],
theta=0..2*Pi,y=-1..1,color=navy);
> display(s1,s2);
```



TC(828)

Z : Ah ! Il a tracé que les courbes d'intersections ; **B** : Ouais ;
« Pourquoi ? »

TC(830)

Z : Parce que c'est juste l'intersection, parce que comme c'est des égalités, on a tracé que la surface extérieure, donc forcément on a des intersections

... ; **B** : C'est pas, c'est pas un volume quoi ; **Z** : Il nous faudrait une surface d'intersection quoi ; **B** : Un volume quoi ; **Z** : Bah ; **B** : Va s'y ; **Z** : Non ! Je réfléchir, je réfléchis. **B** : Il nous faudrait presque des inégalités pour avoir ... ; **Z** : Déjà z il ne sert plus à rien ; **B** : Donc, et y ? **Z** : Ouais ;

« Blocage, ils regardent sur les cours et silencieux ! »

TC(841)

Z : Oui ! Je comprends ! **B** : Vas-y, copy déjà ça ! **Z** : Bon ! Alors[...] ; **B** : Tu es sûr que tu t'es pas trompé ? Tu as fait quoi en fait ? **Z** : Attends, regarde ! J'ai, en fait j'ai pris l'intersection de euh... j'ai pris l'intersection de Q avec S_1 ...mais moi S_1 c'est uniquement une surface et l'intersection de S_2 avec cette intersection et j'ai tracé les ?

« **Z** écrit d'abord sur le papier telle intersection qu'il avait pris de la façon suivante »

$$S_1 \cap Q \rightarrow \begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \cos \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sin \theta \\ y = \cos \theta \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

$$S_2 \cap Q \rightarrow \begin{cases} x = \sin \theta \\ y = -\cos \theta \\ z = \cos \theta \end{cases}$$

TC(852)

B : Ce qu'il nous faut maintenant ? **Z** : C'est en fait c'est, c'est de l'inégalité quoi ; **B** : Ouais ; **Z** : Paramétrer ça de façon à avoir ; **Z** : Bon ! La surface délimitée par ça ... ; **B** : Moi je n'arrive pas bien à voir pourquoi ça fait une courbe.

TC(866)

Z : Non, regarde, je sais. ... là c'est inférieur ou égale à 1 alors que nous on a pris égale à 1 ; **B** : Mais tout à l'heure on a bien tracé, on avait euh... ; **Z** : En fait on a qu'un paramètre. **B** : ça en fait si tu dis $x^2+y^2 \leq 1$! Ça c'est en fait $x^2+y^2 = \rho$ avec $\rho=1$. En fait tu vas mettre ρ , il faut ρ soit, ρ que soit inférieur à 1... ; **Z** : Regarde ; **B** : Vas-y, vas-y, je te ... ; **Z** : Là, à chaque fois, regardes, quand il prends un θ il a un point. Donc, il trace une courbe. Tendes que tout à l'heure quand il y avait le z euh bah pour un θ , il faisait varier tout z , c'est pour ça qu'il dessine un cylindre. Donc là... ; **B** : Non, non, mais là tu as pris une intersection, donc c'est normal que le... ; **Z** : On va rajouter un paramètre, mais qui tout à l'heure aurait été encore un paramètre en plus, qui nous manque depuis le début, et qui fait qu'on avait des cylindres, mais par des cylindres pleins. Et ce paramètre qu'on a pris $x^2+y^2=1$ et ça c'est pas ... c'est pas un volume ça ; **B** : Ouais d'accord, ouais ; **Z** : En fait, et ça, ça par contre, c'est un volume... en fait ça, ça revient au même que... ; **B** : En fait

moi je pensait qu'on allait juste euh, en fait on allait les dessiner ? ... ; **Z** : Ça fait du, ça fait du ρ et $\dots \cos\theta/\rho \dots$; **B** : Pourquoi ? En général on choisit $\rho \sin\theta$; **Z** : Là comme ρ vaut entre 0 et 1 ... ; **B** : Fait, je suis pas d'accord avec toi ; **Z** : Vas-y ; **B** : Si c'est x quand tu remplaces alors là il faut que tu mettes $1/\rho^2$; **Z** : Oui, tout à fait, d'accord.

TC (908)

P : Attention ! La vous allez tracer l'intérieur de cercle c'est pas ça qui, moi je reste toujours sur le cercle. Ce que tu veux c'est juste tracer une partie du cylindre, donc c'est la même équation, c'est toujours l'équation du cylindre. Les valeurs $x(t)$, $y(t)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ ne changent pas, c'est que les domaines sur lesquels tu vas tracer ça, que les valeurs de u et de v qui tu vas modifier, d'accord les valeurs du paramètre ; **Z** : En fait il nous faut un autre paramètre non ; **P** : Alors, reprenons là, quand on est là au-dessus là, on reprend le dessin, on essaie de comprendre où est-ce qu'on est... Ici quand tu regardes le cylindre rouge, d'accord, quand est-ce qu'il coupe le plan qu'est ici ? « *P montre d'abord sur la figure de TC542 affichée sur l'écran* » Ce plan là ? Ce plan, il a quoi pour équation ? Qu'est ce qu'il a comme équation ?

TC(921)

B : Bah, $x=y$; **P** : Non ! $x=y$ non ! ça doit pas être ça ; **Z** : $y=z$; **P** : $y=z$, celui-là c'est le plan $y=z$! On est d'accord, $y=z$. Un point est sur le cylindre, si ses coordonnées s'écrivent sous quelle forme ? **Z** : $\sin\theta$, $\cos\theta$ et z ; **P** : $\sin\theta$, $\cos\theta$ et z ; **Z** : Ouais ; **P** : Donc, quels sont les points du cylindre qui sont là dessus ? Comment vous les caractérisez ? Un point d'ici ? **Z** : Comme ça $\sin\theta$, $\cos\theta$ et z ; **P** : $\cos\theta$, c'est-à-dire z égale ... $\cos\theta$; **Z** : Ouais ; **B** : Ouais ; **P** : C'est-à-dire, quand est ce que, sur mon cylindre je suis sur ce plan quand z est égale à $\cos\theta$? D'accord ? Quels sont ceux que j'enlève, a priori ? Ceux qui ne m'intéressent pas ? **Z** : Supérieurs ; **P** : Pour z ? Oui ! Supérieurs à $\cos\theta$. Donc ceux qui je garde z inférieur à $\cos\theta$. Qu'est ce qui... l'intersection avec l'autre plan qui est en dessous ?

TC(935)

Z : C'est euh, euh ... il manque ... égale à z ... donc on enlève ... les z supérieurs à $-\cos\theta$, et donc on garde ceux qui sont inférieur à $-\cos\theta$; **P** : Non ! C'est le contraire. Tu enlève ceux qui sont en dessous de ce plan ; **Z** : Ouais ; **B** : Ouais ; **Z** : Ouais, d'accord ; **P** : Donc, tu va garder, donc les points, les valeurs de z comprises entre $-\cos\theta$ et $\cos\theta$; **B** : D'accord ; **Z** : D'accord ; **P** : Donc on reprend le tracé des courbes θ continue à tracer entre 0 et 2π , mais par contre la valeur de z on va la modifier, on va garder que les valeurs de z qui sont entre $-\cos\theta$ et $\cos\theta$. D'accord ; **B** : Ok ; **Z** : D'accord ; **P** : Ça c'est pour ce cylindre là, maintenant il faut réfléchir à l'autre ; **B** : Si je met

θ égale à ... ; **Z** : $-\cos\theta$ et $\cos\theta$; **B** : Il arrive à le faire ? **P** : Il arrive à le faire. Il arrive à tracer avec, donc des paramètres qui sont liés entre eux D'accord ?

« *Le binôme reste seul et recommence à entrer avec les données* ».

TC(948)

B : Donc il manquait bien un paramètre en fait, parce qu'on en a viré un ; **Z** : Ouais, ouais copier coller ; **B** : C'est fait... Alors ; « *Ils copient les lignes des commandes de TC797 et modifient les paramètres* » **Z** : Tu mets $-\cos\theta$ et $\cos\theta$? **B** : Ouais ; **Z** : Alors, là on a gardé donc ceux qui étaient entre $-\cos\theta$ et $\cos\theta$, pour les autres, c'est y qui va jouer euh, euh bah là ça va revenir au même en fait ; **Z** : Attend, on va réfléchir ; **B** : Ouais, Ouais. **Z** : Voilà donc on avait le z ... ; **B** : C'est quoi là ce ? Enfin [...] ; **Z** : Donc, là le deuxième ce le ... ; **B** : Reste $y=z$, et l'autre c'est euh, c'est $x=z$ l'autre ? **Z** : L'autre c'est... non, c'est euh le deuxième c'est euh, euh ... ; **B** : C'est $-z$, $y = -z$; **Z** : C'est $y = -z$; **B** : Oui, là c'est y sur lequel on va jouer, $y = -z$, donc on met ... ; **Z** : On va essayer d'avoir la même démarche ! **B** : (977) Quand on est au-dessus... **Z** : C'est là et là qu'il faut regarder en fait ! Ça c'est y , ça c'est z ; **B** : Ça c'est quoi ? Le plan ? Le plan c'est $z = -y$? **Z** : Celui-là c'est $y = -z$, celui-là c'est $y = z$.

« *Blocage* », « *il montre les plans de la sous-tâche plus haut, ils réfléchissent* ».

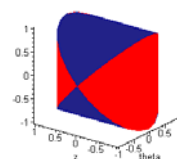
TC(986)

Z : Donc, quand ah, ah, quand, quand, quand... ; **B** : Sur le, sur le 1, c'est-à-dire sur le rouge on a gardé que les z supérieurs à $\cos\theta$... ; **Z** : Parce que c'est les z supérieur à y ;

TC(+01)121

B : Mets la même chose, pour voir ce que ça fait ... Allez, met la même chose... ça va être ... ; « *Ils rient et discutent pour essayer de définir la description de crible de deuxième cylindre* » ; **B** : Va s'y ; **Z** : Attends, attends ; « *Pourquoi c'est la même chose !* » ; Je le sens comme ça ; « *Ils entrent d'abord avec les lignes des commandes suivantes* »

```
> s1:=plot3d([sin(theta), cos(theta), z], theta=0..2*Pi,
z=-cos(theta)..cos(theta),color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta), y, cos(theta)], theta=0..2*Pi,
y=-cos(theta)..cos(theta), color=navy);
> display(s1,s2);
```



¹²¹ Le numéro qui précède du signe + marque le deuxième tour du compteur.

TC(+09)

B : Ce n'est pas du jeu. Ok!. « *Ils réussissent d'avoir le solide Q criblé ci-contre, et sont contentes* » **B** : Donc, on explique ; **Z** : Ça marche ! Bon c'est déjà ça « *Ils rient beaucoup, et très contents* » ; **Z** : Ça marche ; **B** : C'est bien, c'est sûr [...]; **Z** : Bon, ça à marché, ... on ne sait pas pourquoi ?

TC(+19)

B : Donc, la on a fait, on a pris pour les ... ; **Z** : Enfin je sais pas, c'est la même chose quoi ; **B** : Tout à l'heure on prenait $y > z$, la on a pris les ... oh ! La ! La ; **Z** : Pourquoi on a pris $y > z$? **B** : Qu'est-ce qu'on a fait varier ? **Z** : Si, c'est z qu'on a fait varier tout à l'heure ; **B** : D'accord ; **Z** : Et là, c'est y qu'on a fait varier entre moins ... ; **B** : Le volume de Q ... c'est cool !

TC(+35)

Z : On intègre ? **B** : Ouais, bah, ouais ; **Z** : Et comment ? On ne l'a pas l'équation de la surface. On l'a paramétrée, quoi ; **B** : Ouais ; **Z** : On l'a paramétrée, mais on a deux trucs ; **Z** : Eh ben ! On intègre celle-là sur z égale machin ; **B** : Il faut l'équation de la surface si on veut pouvoir intégrer en fait ; **Z** : Mais l'équation de la surface c'est... ; « *Ils rient* » ; **B** : C'est tout bête ; **Z** : Je ne sais pas ce que ça fait si l'intégrer ; **Z** : Ça, cette surface là sur ... ; **B** : En fait il suffit d'intégrer ? **Z** : Ouais, entre non ! ; **B** : Non ! Il faut, il faut tenir compte de z ; **Z** : J' sais pas ce que ça fait si on intègre ça sur $z = -\cos\theta$ et l'autre sur $-\cos\theta$. Ça fait une intégrale double avec ces deux trucs à la fois ; **B** : ça doit forcément être ça ; **Z** : Mais il faut une équation de surface là pour intégrer ; **B** : T'en as même deux ;

TC(+60)

Z : Il y a une certaine symétrie ; **B** : Ils ont déjà trouvé ? « *Il parle de la résultat de l'autre binôme* » **Z** : Ça, on prend juste ce truc là. **B** : Ouais, on a l'équation c'est bon, c'est bon ; **Z** : Essaie ; **B** : ça ? **Z** : Ah ! Ouais, en fait il suffit d'intégrer ... ça sur ça en fait. Et multiplier par huit ;

« TC(+071) intervention de P à toute la classe, voir TC(+043), Séance1 » ;

TC(+79)

Z : Maintenant il faut trouver les bornes ; **B** : ... C'est tout ; **Z** : Ouais, attends ; **B** : Va allez-y, copier coller ; **Z** : En fait il suffit de, il suffit de... ; **B** : Ouais, vas-y, allez. T'as pas besoin de faire un **display** ? **B** : ... ; **Z** : Ouais, ouais ; **B** : Alors là on fait entre quoi et quoi ? **Z** : C'est ça qu'il faut changer surtout, c'est entre ... ; **P** : Oui ! Alors, enlève, on continue, oui on continue, maintenant vous avez enlevé la partie la plus délicate, ça va pas être trop compliqué, maintenant... ;

TC(+88)

B : On est dessus-là, c'est bon ; **Z** : Bah, $-\cos\theta$... ; **P** : Alors $-\cos\theta$, $\cos\theta$ c'était les valeurs que étaient... votre, voilà, là, là, donc là maintenant je voudrais enlever, euh, euh, donc de tout façon si j'en trace qu'un seul, j'ai que, qu'un petit morceau, d'accord ? **Z** : Bah, $-\cos\theta$ et 0 déjà, essaie, là ; **P** : De 0 à $\cos\theta$; **Z** : Ouais, ou l'inverse essaie voir, ça va donner un quart ; **P** : Ça va donner t'en as, eh ! Ce qui est en haut là ; **Z** : Ouais, attends, enlevé la moitié donc c'est pas mal ; **P** : On enlève la moitié, là oui c'est bien ; **B** : Sur la moitié, sur la moitié de ça ? **Z** : On peut faire pour la moitié de ça !

TC(+100)

P : Alors, vous voyez que, c'est eh ! Maple ... quand vous mettez 0, $\cos\theta$, $\cos\theta$ pour θ variant entre 0 et 2π , ça passe négatif, ça gêne pas de tracer de zéro à moins quelque chose. Si vous aviez voulu avoir vraiment la partie du dessous et il aurait fallu imposer que on mette valeur absolue ici.

TC(+104)

Z : Ah ! Donc si nous avons mis $-\cos\theta$... ; **P** : Donc peut-être on pourrait enlever la demi partie qui est là quoi ! Dans c'est... ; **Z** : C'est ... ; **P** : C'est la valeur de θ pour lequel justement c'est négatif là non ? On va peut-être jouer aussi sur θ .

TC(+113)

B : [...] On a fait quoi ? 0 et 2π ? **Z** : Là ... là si on fait 0 et π on va avoir que ça en fait ; **B** : ...Mais c'est pas grave on s'en fout ; **Z** : On essaie de π à 2π ? **B** : Avec un peu de chance tu vas avoir juste celle en dessus ; « *Rires* » ; **B** : Echec ; « *Rires* » **Z** : On prend que ça ; « *Rires* » ; **B** : Allez, vas-y ; **Z** : ... ; **B** : Change ; **Z** : Attends ; **B** : Il faut faire de $\pi/4$... ; **Z** : Mais, attends, attends, attends ; **B** : Copy ; **Z** : Oui ! Copy déjà, mais, c'est pas sur θ qu'il faut jouer comme ça ; **B** : Ouais ; « *Ils rient* ».

TC(+129)

B : Je vais te dire ce qu'il faut mettre, $\pi/2$ premièrement ; **Z** : Voilà, exactement ; **B** : C'est bien ; **Z** : Attends, attends, on va réfléchir, ... deux ; **B** : π à 2π , donc il nous faut de... allez met $\pi/2$; **Z** : Non ! De $-\pi/2$ à $\pi/2$. $-\pi/2$ à $\pi/2$; **B** : Sinon on va voir la partie du bas ; **Z** : Ouais ;

```
> plot3d([sin(theta), cos(theta), z], theta=0..2*Pi,
z=0..cos(theta), color=red);
```



B : Tient ça ; **Z** : Ça fait une *couronne* ; **B** : Un *diadème* ; **Z** : Nous ne faisons pas n'importe quoi ; **B** : Ouais !

TC(+143)

Z : Réfléchissons avant d'agir ! Tout d'abord

utilisons cette ... ; **B** : Pourquoi tu ne fais pas S1? « Ils entrent d'abord avec la ligne suivante avec la commande **integer**, inexistante dans la séquence des outils de calcul des intégrales avec Maple, et aboutissent la description de la paramétrage de S1 criblé au lieu de l'expression à intégrer » ;

> **integer([sin(theta),cos(theta),z], theta=-Pi/2 .. Pi/2, z=0..cos(theta));**

```
integer([sin(theta), cos(theta), z], theta = -1/2 * pi .. 1/2 * pi, z = 0 .. cos(theta))
```

TC(+145)

Z : Parce que ce n'est pas, s'est tout ça ... ; **Z** : Ah ! C'est cool ! Il y a plein des choses.

B : (+150) Bon ! On intègre notre équation importe quoi, comme ça on avance ! **Z** : ... on fait exactement ; **B** : Pourquoi ... intègre équation, intègre équation ; **Z** : Intègre équation ; **B** : Mais pourquoi "**integer**" il me donne ça ? **Z** : Attends... ça va pas du tout ça ! ... ; **B** : ... mon angle ? **Z** : Allez, allez, prendre autre une équation ; **B** : Bon ! D'accord ; **Z** : ... ; **B** : Tu vas intégrer ça alors ? **Z** : Ouais moi j'intègre ; **B** : Intègre tout ... ; [...] **Z** : Bon ! Réfléchissons ; **B** : **Color** ça va être très chaud ! Je ne suis pas sûr qu'il reconnaisse ça dans l'intégrale.

« Ils entrent d'abord avec la ligne de commande de TC+143 en remplaçant **integer** par **int** ».

> **int([sin(theta),cos(theta),z], theta=-Pi/2 .. Pi/2, z=0..cos(theta));**

Error, (in int) wrong number (or type) of arguments

TC(+168)

B : Echec ; **Z** : Bon ! Il ne connaît pas, deuxième échec ; **B** : Pourquoi j'ai ne pas le bon ... la bonne aide sur ça alors ? **Z** : Ça va pas du tout ; **B** : Bah, essaie quelque chose ; **Z** : Pourquoi j'ai pas "**integer**" là dedans ? Je ne comprends pas là. **Z** : Je comprends là ; **B** : C'est pas versé ça en fait, "**integer**" je sais pas ce qu'il nous fait mais c'est pas "**integer**", c'est "**int**" peut-être ou je sais pas ce c'est, mais ... ;

« TC(+179) intervention de P à toute la classe, voir TC(+149), Séance1 » ;

TC(+221)

Z : Donc, alors mon domaine il est limité par... ; **B** : Il faut remplacer l'équation ? **Z** : Ouais, ça va être ton domaine quoi ; **B** : C'est ça qu'on veut intégrer ; **Z** : Ça ! Ça c'est, ça c'est ce qui va définir le domaine ? **B** : Tu vas intégrer... parce que intégrer une équation, ça va être très, très difficile ; **Z** : Une équation de surface... ; **B** : Tu prends égal à 1, tu as la surface ; **Z** : Ça c'est qu'on a fait au début ; **B** : Et maintenant ? **Z** : Alors, alors, alors !

« Blocage » [...].

TC(+261)

B : Moi j'aimerais bien savoir c'est l'équation de quoi qu'on intègre ? C'est très long ? **Z** : Bon ! C'est bien ; **P** : Ça y est ? Vous avez avancé ? **B** : Oui vachement ; **Z** : Non.

« Intervention de P, voir TC(+261), Séance1 » ; « Avec cette Intervention ce binôme reprend les calculs de l'intégrale sur papier/crayon, voir copy ».

TC (+320)

B : Je suis, franchement ... ; **Z** : Attends, là on a pris quoi ? On a un quart ? Un huitième ? **B** : Un huitième ; **B** : ρ varie entre... ; **Z** : Entre 0 et 1, 0 et 1. Ensuite, on a θ varie entre ? **B** : $-\pi/2$ et $\pi/2$; **Z** : De 0 et $\cos\theta$; **B** : Et z il varie entre ? Et z il varie entre ? 0 et $\cos\theta$? **Z** : Hum !

« TC(+345) intervention de P à toute la classe, voir TC(+312), Séance1 » ;

TC(+357)

B : Le problème c'est qu'on va intégrer quoi ? **Z** : On intègre ρ ! Parce que pour définir ça comme une intégrale triple, on prend ça ? **B** : Je ne sais pas... $\sin(\pi/2)$ ça fait 1. Wau ! J'ai trouvé quelque chose de négatif. 1 moins Pi sur deux... Ah ! Je me suis trompé là, z c'est entre zéro, il n'y a pas ça, ça fait 2, ça fait 1, ça fait huit, moi j'ai trouvé 8, bah, 8 ! J'ai trouvé 8 ; **Z** : Bon ; **B** : Ce n'est pas 8 ? « Il parle à la classe », « B il fait d'abord sur le papier »

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int \rho d\rho \int d\theta \int dz = 8 \int \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta [] (\cos\theta - 1) \\ &= 8 \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_0^1 \left[\sin\theta - \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 8 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{2} + 1 - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

« Il efface $-\pi/2$ et l'autre $-\pi/2$ il reste alors avec l'expression qui résulte à 8 »

« Z fait les calculs suivants »

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^1 \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\rho \cos\theta} dz \otimes \int_0^1 \rho d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cos\theta d\theta \\ &\otimes \int_0^1 \rho d\rho \left[\sin\theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^1 \rho d\rho (2) \\ &= 2 \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \\ &\times 8 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

TC(+395)

Z : Oh ! Attends ; « Blocage » ; **Z** : (+412) $\cos\theta$, $\sin\theta$, ... « Blocage » ; **B** : (+434) Echec ! [...] ; « Cette partie (découpage) correspond à quoi, dans le solide que vous avez trouvé ? » ; **Z** : Ça correspond à un huitième ! Tu veux monter, on monte ; « Où se trouve ce morceau là ? » ; **Z** : C'est ça ; **B** : Ouais, voilà c'est ça, ça correspond à un quart, quoi ! Un huitième ; **Z** : Ce quoi le ... ; **B** : Ce n'est pas le bon paramétrage ; **Z** : C'est la même ! Entre zéro et ... « rires » ; **B** : Entre ça, ... c'est pas un truc plus grand ?

« FIN DE LA CASSETTE N° 1 »

TC(+420)

Z : Ouais, donc maintenant il faut arriver à paramètre ton ρ en fonction de θ . Ou ton θ en fonction de ρ . **B** : Bah ouais, bien sûr ! **Z** : En fait c'est du ρ , du ρ , $\pi/2$ à chaque fois ; **Z** : C'est pour ça que ça marche pas. Non du $1-\rho\pi/2$, un truc comme ça ; **P** : Voilà ! Voilà exactement là tu l'as exactement la valeur de z ; **Z** : Ça varie entre $\rho\pi/2$.

En fait, entre $-\rho\pi/2$ et $\rho\pi/2$? **P** : C'est quoi l'équation de ce plans là ? **Z** : ... ; **P** : $y=z$, $y=z$ quelle est la valeur de y ? **B** : $\cos\theta$! Valeur de y ?

« TC(+440) intervention de P à toute la classe, voir TC(+472), Séance1 » ;

TC(+480)

B : Si on met du $\rho\cos\theta$ ça marche pas non plus, très bien ? **B** : Ce pas ça ! **P** : Pourquoi il fait ça ? **Z** : Je ne sais pas. **B** : Bah par contre il faut intégrer quoi là ? **Z** : Bah, il faut intégrer ρ avec $\theta = 0.. \pi/2$, $z=0.. \rho\cos\theta$, et ... ; **B** : J' sais pas s'il comprend ça ? Il y a encore un truc à faire varier ? **Z** : ρ ! « Ils entrent d'abord avec la ligne de la commande suivante »

> **Int(rho,theta=0..Pi/2,z=0..rho*cos(theta), rho=0..1);**

Int(ρ , $\theta = 0 .. \pi/2$, $z = 0 .. \rho\cos(\theta)$, $\rho = 0 .. 1$)

B : (+494) Pourquoi ça ne marche pas ?

FIN (Binôme 01)

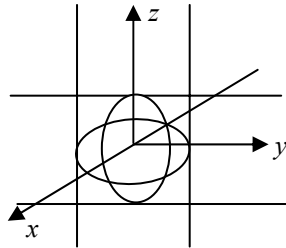
Séance 1

1.1..12 Binôme 3 : Etudiant L et Etudiant J

TC(013)

L : Tout d'abord faisons un **restart** « rires » ; **J** : Charge package **with(plots)** ; « TC075 intervention de P, cf. TC(053), Séance1 ».

L : T'as trouvé un truc génial ? **J** : Ouais ; **L** : là x1 [...] ; **J** : Ouais euh, bien c'est pas mal ; **L** : Et l'autre ? **J** : ... ; **L** : Tu vas commencer ? **J** : Hein ? **L** : Tu vas... ? **J** : Ouais, ouais ; **L** : T'as un cylindre de diamètre 1 comme ça et rayon 1 comme ça, sur axe z et un sur axe y et nous, on va prendre le solide qu'est au milieu ; « L il fait sur le papier le dessin ci-contre »



J : Alors et l'autre ? Ah, non ! C'est pas un cylindre ça, ça c'est pas ah ; **L** : Si parce que c'est un cercle, $x^2 + y^2 = 1$ c'est un cercle, on est dans l'espace et vu que c'est indépendant z, ça fera un cylindre ; **J** : Ouais ; **L** : Donc l'autre c'est pareil ; **J** : Ouais, ... ; **L** : Hun ! Attends je prends un ... ;

TC(117)

L : Il faut juste paramétrer les deux quoi et après [...] ; **J** : En sphérique tu crois que ça marche ? **L** : Hein ? **J** : En sphérique non ? **J** : Il me semble, en sphérique euh [...] ça devrait marcher ; [...] **J** : Non, mais en fait il faut exprimer x, y et z en sphérique ? **L** : Hun, hun ; **J** : Comme tu le connais pas par cœur ;

L : Donc $x = \rho \sin\phi \cos\theta$, d'accord ? D'accord, ou pas d'accord ? **J** : Donc $\cos\theta$ c'est la projection et $\sin\phi$, ouais ; **L** : Et euh, euh $y = \rho \sin\phi \sin\theta$, et $z = \rho \cos\phi$, donc là on a $x^2 + y^2 \leq 1$, donc ça va faire $\rho^2 \sin^2\phi$; **J** : Plus, plus $\rho^2 \sin^2\phi$ ça fait $2\rho^2 \sin^2\phi$; **L** : Pourquoi $\rho^2 \sin^2\phi$? **J** : Parce que là $\sin^2 + \cos^2$ ça fait 1 ; **L** : Ouais, mais ... $\cos^2 + \sin^2 \leq 1$, ça fait $\rho^2 \sin^2\phi \leq 1$, le premier c'est ça. Et le deuxième ? $y^2 + z^2$? **J** : Et oui, oui, oui $x^2 + z^2$; **L** : ça va faire $\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta$ égale non ... ; **J** : Plus $\rho^2 \cos^2\phi$; **L** : plus $\rho^2 \cos^2\phi$ donc ça fait euh « Blocage » « L écrit d'abord sur le papier le suivent » ;

$$x = \rho \sin\phi \cos\theta$$

$$y = \rho \sin\phi \sin\theta$$

$$z = \rho \cos\phi$$

$$\rho^2 \sin^2\phi (\sin^2 + \cos^2) \leq 1$$

$$\rho^2 \sin^2\phi \leq 1$$

$$\rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \cos^2\phi \leq 1$$

$$-1 \leq \rho \sin\phi \leq 1$$

J : Ça ne se simplifie pas ? **L** : Bah, non ! « En fait, ces équations sont relatives à la transformations en coordonnées sphériques en plus la dernière substitution n'est pas en accord avec ces équations dont y c'est $\rho \sin\phi \sin\theta$ et pas $\rho \sin\phi \cos\theta$ » ;

TC (197)

J : Il comprend ça ? Le ρ , le ϕ et le θ ? [...] **L** : Tu rentre ça, entre crochets euh tu met à chaque fois les expressions qui dépendent des variables, après entre accolades les variables là, et là donc ... ; **J** : Donc lui ne sais pas entre θ et ϕ si θ c'est l'angle ... ; **L** : Quoi ? Non, [...]

« TC205 intervention de P à toute la classe, voir TC182, séance 1 » « J tape sur le clavier la première instruction entrée dans Maple »

J : Comment t'écris ρ ? **L** : r h o ; **J** : et θ ? **L** : t h e t a ; **J** : Tu devrais le savoir « rires » [...] **J** : T'es perplexe tu penses que ça ne va pas marcher ; **L** : Si, si, si, j' sais pas ; **J** : Ah oui ! x c'est $\rho \cos\theta$, donc $\rho \cos\theta$, ah ouais après tu voulais mettre euh bon on va en ; **L** : tracer un déjà ; **J** : tel que ρ est égale à -1, 1 ... , θ on met de $-\pi, \pi$? **L** : Hun, hun ; [...] ; **J** : Et z ? **L** : Bah mettre euh ... **J** : De -1 à 1 ? Il faut marquer dans que euh l'intersection est compris dans, dans -1 à 1 cube donc euh ; **L** : On va avoir un petit cylindre, met -3, 3 quoi ; **J** : -3, 3 ? **L** : Allez on peut changer de toute façon « Entrée » ;

```
> plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho = -1..1,
theta = -Pi..Pi, z = -3..3) ;
Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad
optional argument: z = -3 .. 3
```

« Elle n'a pas marché. Et ils ne savaient pas s'il s'agit d'une faute de syntaxe ou de mathématique »

TC(285)

L : C'est ρ ... , ρ n'est pas un angle, $\rho \cos\theta$ c'est les coordonnées en polaire $\rho \cos\theta$, $\rho \sin\theta$ paramètrent un cercle et en indépendant de z, ça va être un cylindre ; [...] **J** : En fait il dépend de euh ; **L** : En fait là ça doit dépendre que de deux paramètres au lieu de trois, à chaque fois nous, on en met un troisième c'est pour cela qu'il le prend pas... [...] ;

Ils ont changé par ce qui suit »

```
> plot3d([rho*cos(theta),rho*sin(theta),z], rho=-1..1,
theta = -Pi..Pi) ;
Plotting error, empty plot
```

J : (310) ... on paramètre en t ? **L** : J' sais pas ; **J** : Essaie ; [...] ... ; **L** : Très bien parle au micro ; **J** : ça fais trois ans que tu fais du Maple, tu devrait être super fort ; [...]

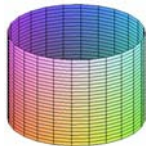
L : (333) Là en mettant un angle t'en a mis 1 ? L : Je met ρ , θ ; J : θ il varie de $-\pi$ à π ; L : Hun ; [...] J : Oh ! Oh ! Oh ! Très joli « rires » ; L : C'est pas mal « rires ». Non, non, mais c'est joli euh ; « ouais » ; J : Hélicoïdal, « rires » L : C'est claire ; « rires » ; « Si c'est un angle pourquoi ρ varie de -1 à 1 ? » ; L : De 0 à 1 alors ? ... L : Non, ρ c'est la valeur absolue de la ah en coordonnées c'est la ah, c'est cette croqueurs-là en fait, en coordonnées polaires ; « donc c'est un angle ? » L : Non, c'est pas un angle [...] ; J : Cette distance là je pense ; [...]. J : Pourquoi ça ne marche pas ? L : Vas-y essaie ;

TC (385)

P : Attends, $\rho \cos \theta$, $\rho \sin \theta$, ce qui est un tout petit peu gênant dans votre histoire, c'est que vous essayez de tracer une surface de dimension trois et que vous avez trois paramètres ; L : Ouais, ouais ; P : A priori ce serait plutôt un volume, non ! Ça c'est bien là tu me le laisses, par contre qu'est-ce qui va me manquer ? C'est euh, pourquoi vous mettez $\rho \cos \theta$? L'équation de votre cylindre c'est quoi ? J : $x^2 + y^2 \leq 1$; P : Non ! L : Non ? P : ça c'est l'équation du volume intérieur $x^2 + y^2 \leq 1$. $x^2 + y^2 = 1$ nous ce qu'on cherche à tracer, on cherche pas à tracer le volume, on cherche à tracer la surface extérieure¹²², d'accord. $x^2 + y^2 = 1$, donc le ρ ici n'intervient pas, d'accord ? J : Bah il fait 1 quoi ? P : Oui, si tu veux, donc tu me l'effaces parce que c'est plus un paramètre tu m'enlève la valeur de ρ qui est là-bas ; J : Là ? P : Oui ; L : Ah, ouais.

L'étudiant enlève alors le ρ dans la ligne de commande de TC285, et reste avec l'instruction suivante qui rend d'abord le premier cylindre attendu »

```
> plot3d([cos(theta), sin(theta), a], theta = -Pi..Pi, a = -3..3);
```



P : (406) Donc, ça c'est le premier, premier cylindre, donc éventuellement ensuite on reprend la même chose tu me fais un copier coller, pour garder les instructions qui tu as, donc tu copies ça, tac, tac, Ctrl+V. Et donc ce qu'on va faire c'est affecter cette valeur là, dans une variable qu'on va, appeler par exemple S1 ok ? S1 et deux points là bas, parce que sinon tu, te rends l'ensemble des nombre, et tu me modifie la couleur, **color**, à la fin virgule **color** et tu choisie une couleur, et vous vous dépêchez un tout petit peu pour tracer l'autre cylindre..., la fonction **display** vous me donnez, donc tu peux reprendre un Ctrl+V si tu veux.

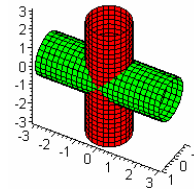
Le binôme B3 entrée d'abord avec les instructions suivantes qui rendent les deux cylindres simultanément »

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=-Pi..Pi,a=-3..3,color=purple);
s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)],theta=-Pi..Pi,a=-3..3,color=green);
display (s1, s2);
```

L : C'est bon. Ensuite ; J : On va faire quoi ?

J : **Color** euh, euh, tu crois que s'avien **pulpe**,... L : Euh, euh, ouais un **pulpe**, [...] green ! Ok. L : Tu plot S1 et S2 ; J : **display** ;

« La représentation graphique qui est le résultat de la discussion ci-dessus ne paraît pas dans la fiche de travail de ce binôme. Toutefois celle-ci résulte sûrement sur le graphique ci-contre en escale 1 : 1 »



TC(459)

« il lise la troisième question de l'énoncé » L : Montrez que C1 et C2 se coupent sur deux plans ; « blocage » ah bon ; J : Montre que quoi ? L : Montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans dont on donnera les équations (attention on ne demande pas nécessairement de déterminer des équations de l'intersection). Il est facile de voir que \mathcal{Q} , "donc ça, c'est ça" est entièrement compris dans le cube $[-1; 1]^3$; « blocage » [...] ; J : Donc on a pas fait ça ; L : Ah ! Non c'est normal que euh [...] ; Ah ! On va effacer ; J : C'est quoi ce qu'il faut faire ? L : Montrez que C1 et C2 se coupent sur deux plans dont on donnera les équations, attention « blocage » [...] ; J : Tu es d'accord toi ? Ils se coupent sur deux plans ! L : Ouais, ouais ; J : Lesquels ? L : Mois je dirais deux plans comme ça en fait, toc, toc tu vois ça c'est un plan, et puis un plan comme ça, un plan comme ça « il fait le geste avec ses mains » en fait, imagine le vert qui traverse, faut imaginer que c'est plat « il parle du graphique ci-dessus » ; J : Hun ; L : Imagine la surface du cylindre vert, qu'on voit pas. En haut et en bas, ça serait un plan ; J : Hun ; L : Et la surface du cylindre rouge qu'on voit pas, ça serait autre un plan ; J : Hun ; L : Peut-être ; J : Ouais un plan là et un plan de l'autre côté quoi ; L : Ouais, un comme ça, et un comme ça ; « il monte sur la figure » ; J : Et alors ; L : Avec **1:1** c'est comme ça tu vois ? Et comme ça. En fait, le plan du vert que tu ne vois pas et le plan du rouge que tu ne vois pas, parce que ça, regarde ... ; J : Mais le plan c'est comme ça ; L : Ah ! Tu penses ça plutôt ? J : Bah ! Ouais, là où il y a la croix ; L : Donc, c'est pas là l'intersection ? [...]

TC(552)

J : Tu as des idées ? L : Non, ..., imagine le rouge là tu vois ? J : Hun ; L : C'est un plan, comme ça,

¹²² Problématique chez tous les étudiants.

si il y a un plan dans euh ; J : Un plan, un hyperplan de \mathbb{R}^3 tu vois ;

« J et L (c'est J qui fait des manips) bougent les deux figures afin d'essayer de déterminer les deux plans. J réduit l'intervalle $[-3; 3]$ à $[-2; 2]$; L (avec ses mains) dit que ces plans sont curvilignes alors que J l'objecte en disant que « un plan c'est un plan » ; « J (avec Maple) essaie de bouger la figure pour déterminer les équations de deux plans. Ils font plusieurs essais, par exemple : > **plot3d([1, 1, a], a=-3...3, color=yellow)** ; mais cela ne marche pas »

TC(640)

P Ça y est, ça a avancé un peu ? [...] Alors **1, 1, a** c'est quoi, **1, 1, a** ? Ça c'est une courbe ça, ça dépend d'un paramètre ; B3 : Ouais, on veut faire un plan ; P : C'est quoi ça, c'est un plan ? B3 : Hun ; P : Un plan qui a quoi comme équation ? L : C'est un plan qui passe par 1, $x=1$; P : Oui d'accord, ça c'est le plan d'équation $x=1$, pourquoi tu veux tracer ça ? L : J'sais pas, en fait on voit pas bien euh on voit pas bien comment ça s'intersectionne ; P : $a[-2, 2]$, vous avez tracé vas-y, vas-y, entre ça déjà, fais **display** vas-y qu'on voit un petit peu c'est qui se passe ; L : Faut que je fasse b égale quelque chose ? P : Oui [...], fais attention plus tu augmentes ça, ça veut dire que c'est un plan qui est tracé entre $-3, 3$ et $-3, 3$. Donc par rapport au valeurs enfin, vas-y allez trace ; « il entre d'abord avec l'instruction suivante » ;

> **plot3d([b, a, a], a=-3...3, b=-3...3, color=yellow)** ;

J : Y'a un gros plan de toute manière ; P : Bon, alors il est très sympa ton plan mais euh « rires », c'est dommage il cache l'intersection. Alors d'abord sur ton à l'intersection, on fait un remarque, il est dans le cube compris entre -1 et 1 , d'accord ; J : Ouais ; P : Donc je voudrais que tu m'enlève les bouts qui sont en trop, d'accord ; J : Ouais ; P : Ce plan-là, il est pas génial, « rires » ; L : Je comprends pas, c'est pas des plans des intersections, de euh ; P : Ben, l'intersection de deux surfaces, a priori c'est ? ; L : Une courbe ; P : Une courbe, cette courbe c'est donc pas un plan, parce que un plan c'est une surface, ce qu'on vous dit c'est que cette courbe-là elle est plane, elle est dans un plan ; J : Ouais mais, même ça ah ; P : Alors, il semble pas qu'on est un, un seul plan, il semble qu'on est deux. Un qu'est ici et un qu'est ici ; J : C'est ce que tu disais ? « J parle à L » ; P : Voila, là ça semble quand même être plan, ça semble assez alignés ces points-là quand je regarde la projection, d'accord ? L : Vous voudriez que je trace ce plan là ? P : Alors, déjà ce que je voudrais c'est que l'intersection de tes cylindres tu l'as ah, tu l'as de façon un peu plus précise, puisqu'elle est entre $-1, 1$, débrouilles toi pour que les valeurs du paramètre, ils soient bien entre -1 et 1 ; (TC707) « Le binôme reste seul »

« Intervention de P pour toute la classe, voir TC680) séance 1 » ;

O : « Après les étudiants font plusieurs essais, pour chercher à représenter le deuxième plan d'où L indique « $a = b$ » puis il fait des tâtonnements en observant le résultat obtenu sur l'écran » ;

TC(740)

J : Attends, on peut réfléchir aussi ; « Intervention de P pour toute la classe, voir TC747 séance 1 » ;

L : A mon avis ça c'est euh, à mon avis c'est juste [...] c'était quoi ? C'était **[b,a,a]**, à mon avis c'était **[b,-a, a]** un truc comme ça J : Mais en fait, c'est qu'il y'a c'est que le paramètre constant, ça doit être le même qui là ; L : Tu mets n'importe quoi [...] ; O : « Il entrée d'abord avec les instructions suivantes » ;

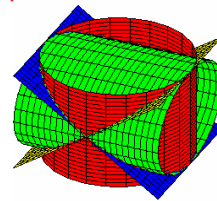
> **s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a], theta=-Pi..Pi, a=-1..1, color= purple);**

s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)], theta=-Pi..Pi, a=-1..1, color=green);

p1:=plot3d([b,a,a],a=-1..1, b=-1..1,color=yellow);

p2:=plot3d([b,a,-a],a=-1..1, b=-1..1,color=blue);

display(s1,s2,p1,p2);



TC(835)

L : Tu vois les deux plans là ? J : Ouais ; L : Eh ! Bien là il faut enlever le **purple** « même de que **red** ou rouge » ; J : Ouais ; L : Et de ce côté là il faut enlever le **green** ; J : D'accord ; L : D'accord ? On va faire ça ? J : Hun ; L : D'accord, alors comment faire ça ? J : Eh, bah il faut oh, oh, il faut qu'on trace tous les **purples** sauf quand c'est au-dessus de ces deux plans, ou en dessous de ces deux plans ; L : Ouais ; J : Et ensuite voilà [...].

L : **cos(theta), sin(theta)**, on a paramétré euh **a**, et **a** faut le faire varier entre ça et ça « il montre sur le dessin » [...] ; J : Il faut le faire varier entre $-x$ et x ..., tu vois ce que je veux te dire c'est que tu vois là on a fait varier **a** entre -1 et 1 , en fait on veut le faire varier entre euh « blocage » [...] ; L : Tu veux me dire que euh ; J : Ah, non en fait c'est le θ qui va pas ; L : c'est θ qui va pas ; J : Ouais, tu vois faudrait faire varier θ entre euh ; « blocage, il chante » ; [...] ; « P s'approche, il regarde la représentation graphique, TC835 et dit »

TC(886)

P : Ouah, vous êtes forts ; L : C'est tout moi qui ai fait ; P : C'est toi qui a tout fait ; L : Ouais ; J : Bah, ouais il tape quoi mais euh ; « rires » ; P : Bien, alors donc maintenant on a presque tout, on a presque tout maintenant faut un petit peu réfléchir ;

L : On a décidé d'enlever le **purple** là et le **green** là ; P : D'accord ; L : On a bien décidé quand même ; P : Vous avez très bien décidé, alors maintenant, le cylindre il est tracé donc en gros, point par point, chaque valeur du paramètre u et v , moi c'est u et v , vous c'est peut-être ρ et θ ça fait rien, chaque valeur du paramètre ρ et θ il calcule un point qu'il a lien, d'accord ? Mon idée c'est de dire il va falloir que j'enlève les valeurs des paramètres ρ et u ou ρ et θ qui font que je suis au-delà des plans ; L : Ouais, c'est ça que nous se disiez ; P : D'accord ? Donc ce n'est pas très compliqué, je dis pour quelles valeurs je suis sur le plan ; J : Bah, pour euh ... 1, quand x égal $y=1$? P : Sa m'étonnerait ! Je sais pas pourquoi un blocage sur ce $x=1$. Vous aviez déjà tracé un très beau qui cachait tout mais, c'est pas celui-là qui m'intéresse. [...] Montre moi tes plans là, remonte un petit peu pour que je voie tes équations. Ça c'est quoi l'équation du plan P1 ? J : C'est $z=y$; P : $z=y$ d'accord, donc c'est pas $x=1$, on est d'accord ; L : C'est vrai, mais euh ; P : Ça c'est $z=y$, donc quand on revient au-dessus maintenant je regarde mon cylindre qui est là, d'accord, le cylindre qui est là c'est ? Le premier qui est là ; J : Le vert ? P : Non le rouge ; L : C'est **purple** ; J : Son équation ? P : Hun ; J : Bah c'est $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et une constante... non ; P : C'est pas une constante c'est une valeur du paramètre, d'accord ? J : Hun ; P : Alors quand est-ce que je suis sur le plan ? Quand est-ce que **cos(theta), sin(theta), z** intersecte le plan d'équation $y=z$? L : Quand $z = \sin(\theta)$; P : Quand $z = \sin(\theta)$, ce serait peut-être pas mal d'écrire un minimum ce genre de choses parce que si tu attends que Laurent écrive, c'est foutu, ça n'arrivera jamais, donc ça correspond à $z = \sin(\theta)$, donc pour une valeur de θ , d'accord, pour une valeur de θ le point d'équation **cos(theta),sin(theta),z** et $z = \sin(\theta)$ est sur ce plan là, d'accord ? Ce qui m'intéresse c'est d'enlever ce qu'il y a là, c'est-à-dire pour les valeurs de z qui sont au-dessus, supérieurs à ; L : $z = \sin(\theta)$; P : Et donc de garder que celles qui sont en dessous ou au-dessus de celui qui est là, celui qui est en dessous $-\sin(\theta)$. Donc ça va être les valeurs, je reprend, tu vas faire un copier coller de ce qu'on avait là au-dessus, donc on reprend les équations de mes deux cylindres ; L : On récrit ; P : Oui, copie tout ça, tac. Donc tu vas tracer que pour les valeurs de z , au lieu de les prendre entre -1 à 1 tu vas juste tracer entre ... ; (TC934) « *Le binôme reste seul* ».

TC(936)

J : C'est ce que j'ai pensé tu vois ; L : Mais nous c'est **a** ça va pas marcher ; J : Si ça va marcher ; [...] L : Bon, bah on va essayer déjà, on essaie ; J : Allez tac ;

« *Échec* »

« *Même avec le long discours de P le B3 n'arrive pas à*

décrire le crible géométrique de Q. Il tâtonne, il bouge la figure pour essayer de décrire le crible »

L : Donc le vert, qu'est-ce qui se passe, quel tait la logique ? Quand est-ce que le vert est sur le plan ?

TC(994)

L : Y'a pas une commande qui calcule le volume de tout ce qu'on a fait ? J : Hun, c'est [...] mais ; « *ils regardent le help de Maple* » ; L : int[numerical] « *L il lit "for numerical integration, see int[numerical]"* » ; J : J'sais pas comment on fait ; L : Sinon on rentre juste une intégrale normale à plusieurs variables ... ; J : Ouais, ouais ; « *blocage* » [...].

TC(+73)

L : Donnez les équations paramétriques des surfaces ; J : C'était quoi déjà ? L : Bah, $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, z égale euh z , on peut dire ; J Et l'autre c'était euh $x=\cos\theta$, $y=y$ et $z=\sin\theta$; L : Voila ! [...]

J : En fait on peut peut-être intégrer que sur euh, on en fait, « *blocage* » [...], si on intègre que sur le, le, ... par exemple, et après on arriver, [...] où on peut peut-être intégrer sur lui et faire varier z entre euh $-\cos\theta$, « *blocage* » [...];

« *Intervention de P, voir TC(+043) séance 1* » ;

TC(+134)

L : Allez ... on va intégrer z ; [...] ; P : Ça y est ? [...] L : Voilà, là on a le z ; P : Attends, mais euh avant de calculer l'intégrale, c'est quoi ça ? Alors, moi ce que j'aurais aimé c'est que, déjà si tu veux, là on voit bien quand même les surfaces elles sont, il y a des euh, il y a des symétries ; J : Hun ! L : En fait on a intégré juste le **purple** de droite ; P : Voilà, alors pour être sûr de ton domaine là ; J : Ouais ; P : Trace-le, c'est-à-dire, trace moi, juste ton, ta partie, la partie que tu vas vouloir intégrer, comme ça tu vas avoir de façon assez précise de ; L : Si je trace c'est comme si je savais intégrer ? P : Justement l'intérêt c'est de... ; « *Le binôme reste seul* »

(+164)

L : Bon, tu vas me donner des paramètres ? J : Hun, hun, -1 et 1 , non 0 et 1 ; L : Je suis pas sûr là ; J : Mets x de 0 à 1 , c'est y de 0 à 1 , z de 0 à 1 et x euh, euh, non, $\sin\theta$, $\cos\theta$, θ de 0 à π ; L : Non en fait c'est 0 c'est pas $\sin\theta$; « *ils se confondent, et tâtonnent avec le commande Int* » [...].

« *Intervention de P à toute la classe, voir TC(+149) séance 1* » ;

TC(+258)

J : On aurait pu calculer de 0 à $\pi/2$ même ; L : Oui ; J : On va le mettre courageusement, pourquoi il ne veut pas mon ρ là ; L : Mais c'est ρ qu'il a dit tout à l'heure ; J : Mais non, je vais mettre un c , si ρ il ne veut pas [...]. On va intégrer 1 ; L : de 0 à

sin θ ; **J** : Pourquoi ? « Rires » [...] ; **L** : z euh, et θ on fait varier, on peut varier ? **J** : Ouais ; **L** : On va trouver une valeur, personne va nous dire que c'est faux ; « ils entrent alors la ligne de commande suivante » [...] ¹²³.

```
> 16*int(int(int(1,z=0..sin(theta)),
theta=0..Pi/2),rho=0..1);
```

TC(+360)

B3 : « il disent à l'enseignant P » 16 ; **P** : 16 ? **B3** : Ouais ; **P** : Pourquoi 16 ? Alors, intégrale de euh, non ! Alors, c'est tout juste, la seule chose c'est qu'il manque le jacobien. Attends, 0 et $\pi/2$ vous l'avez tracé cette partie-là ? 0 et sin θ ? [...] Ah ! Oui d'accord, vous avez aussi coupé en deux ce morceau là. Ah ! Ouais vous avez vraiment fait... alors effectivement c'est en 16. Alors c'est 16 fois, alors qu'est-ce qu'il me manque, quand tu passais dans $\varphi^{-1}(D)$...

TC(+380)

J : Ah ! Nous avons oublié le jacobien ; **L** : Bah ! Oui ; $\rho d\rho d\theta dz$, donc c'est bon, il manque juste ρ en fait, [...] ; **J** : Mais comment on écrit $\rho d\rho d\theta dz$? « Rires » [...] ; **L** : Bon, il a dit qu'il nous manque que le jacobien ; **J** : C'est très bien ; « blocage », « ils ne savent pas comment exprimer le jacobien dans la ligne de commande » [...];

L : Allez, un peu d'initiative ; [...] Ah ! Non, le jacobien c'est pas ça, on c'est trompé je crois $\rho d\theta d\theta dz$; **J** : Non, $\rho d\rho$, il nous manque $\varphi^{-1}(D)$; **L** : C'est quoi $\varphi^{-1}(D)$; **J** : Le jacobien peut-être. [...] ; **L** : $\varphi^{-1}(D)$ c'est quoi $\varphi^{-1}(D)$? **J** : C'est l'inverse de euh, d'une surface ; Laurent Belle arrête de dire n'importe quoi ; **L** : Tu ne comprends pas ce que tu dis ; « rires »

Fin de cassette 1

TC(+450)

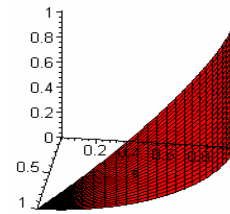
P : C'est le sin θ là qui ne va pas, z ne varie pas entre 0 et sin θ , z varie entre euh ? **J** : 0 et 1 ?... « Intervention de P, voir TC(+472) séance 1 » « Ils entrent alors avec l'instruction suivante »

```
> 16*Int(Int(Int(rho,z=0..sin(theta)),theta=0..Pi/2),
rho=0..1);
```

$$16 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin \theta} \rho dz d\theta d\rho$$

L : [...] En fait quand on [...] ; **J** : Ah ! Oui, oui, oui ! Échec, ce n'est pas grand **i**, c'est comme tout à l'heure.

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=0..Pi/2,
a=0..sin(theta),color=red);
display(s1);
```



```
> 16*int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi/2), rho=0..1);
```

16/3
L : (+495) Seize tiers ? Oui c'est ça ; [...] **J** : Bon ! Laurent Belle ce fût un plaisir de ne pas travailler avec toi ; **L** : Comment tu peu dire ça ? C'est moi qui ai trouvé..., c'est moi qui ai dit **psin θ** c'est moi qui a dit que le résultat était probable, plausible.

FIN (Binôme 03)

¹²³ Ils tâtonnent avec la commande **int**, puis trois **int** et ils trouvent un résultat égal à 16, et ils ne savent pas si c'est le résultat correct ou non.

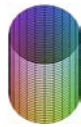
Comme ça, ça marche ? **A** : Ouais. $x1$ de t ; **M** : de t et u ou [...] de t et de u ou juste de t ? [...] **A** : Normalement de t et u ; **M** : Ouais de t et u ; **A** : Par contre ils ne sont pas marqués de t , enfin c'est $x1(t)$ donc ; **M** : Non, $x1$ c'est euh c'est ... ; **A** : On met t et u [...] **M** : virgule t variant de euh t il varie de 0 à 2π ? **A** : Ouais ;

« Ils entrent alors avec la ligne de commande suivante en écrivent l'expression de $x1$, $y1$ et de $z1$ comme P l'avait écrite au tableau. Mais ces écritures sont évidemment différentes à celles définies pour eux au-dessus, dont Maple rend effectivement une erreur »¹²⁵

```
> plot3d([x1(t,u),y1(t,u),z1(t,u)],t=0..2*Pi,u=-10..10);
Error, (in cos) expecting 1 argument, got 2
```

« Ensuite le binôme entre avec les instructions suivantes »

```
> S11:=[x1(t),y1(t),z1(u)];
> plot3d(S11,t=0..2*Pi,u=-10..10);
```



M : C'est bon, c'est bon ; **A** : Ok ! Euh, Euh

TC(346)

M : $S2$, ... **A** : $x2$, $y2$ euh **M** : ... ; **A** : Non ; **M** : Comment on fait pour copier ? **A** : Ctrl+C ; **M** : Attends, attends, attends ; **A** : Ctrl+C, Ctrl+V ; [...] Ctrl+V ; **M** : Faut que je trouve le V attends sois pas pressé « rires » ; « ils copient les instructions définies précédemment en TC233 et modifient les données »

```
> x2:=t->cos(t);
y2:=u->u;
z2:=t->sin(t);
S22:=[x2(t), y2(u), z2(t)];
> plot3d(S22, t=0..2*Pi, u=-10..10);
```



M : Voilà, d'accord ; **A** : Eue, on est ;

TC(410)

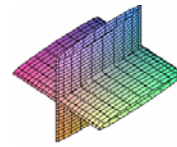
A : Après on dit quoi, display $S1$, $S2$? **M** : Ouais, display $S1$, $S2$; **A** : Ouais, mais parce que lui, il avait défini $S1$ et $S2$ comme étant les tracés des courbes ; [...] ; **M** : Sinon, on fait plot euh de tout ça ? Plot 3D euh de tout ça, non ? **A** : J' sais pas ; [...] **A** : On les affecte après on les reprend en dessous ce sera plus simple ; **M** : $C1$ et $C2$, les cylindres ? **A** : Oui [...] ¹²⁶

« Après certaines tentatives ils arrivent à ensemble les deux cylindres avec l'instructions suivantes »

```
125 Celle-ci ça marchera si ils définissent x1:=(t,u)->cos(t); y1:=(t,u)->sin(t); et z1:=(t,u)->u;
```

¹²⁶ Ils ont les difficultés pour ensemble des deux cylindres.

```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi, u=-10..10),plot3d(S22,
t=0..2*Pi, u=-10..10));
```



TC(536)

P : Quand tu mets "==" dans une affectation ce qu'il t'affiche, c'est ce qu'il entre en mémoire, *Maple* va pas entrer en mémoire ce qu'il met dans la mémoire de l'ordinateur c'est pas un tracé, c'est l'instruction tracé, il va entrer en mémoire, le fait que tu demandes une instruction tracé et tous les points, tous les points qu'il a calculé, pour tracer. Donc finalement quand tu fais ça tu obtiens une liste de tous les points qu'il cherche à tracer, donc une fois que tu l'as vu, tu reprends l'instruction, tu la copie à côté, mais tu le met dans une variable, et après tu n'oublies pas d'afficher l'affectation d'accord ? Tu vas mettre $C :=$ ou $S1$ ou $S2 :=$ **plot** machin et puis deux points à la fin. Deux points ce qui fait que ça fait le calcul, ça l'affecte dans cette variable, mais ça ne te affiche pas et après comme ça dans **display** tu n'as plus qu'à mettre $S1$ et $S2$ d'accord ? Bon, alors ça c'est bon, ça ... ; Là peut être vous avez pas chargé le package **with(plots)**, **B5** : Si, si, ... **A** : Parce qu'on a réussi de tracer les deux cylindres ; **P** : Hun ; **A** : Et en mettant le **display** de ce qu'on avait mis pour tracer ? Ça ne marche pas ; **P** : Il n'y a pas eu de **restart** mais si il y a un **restart** là ; **A** : D'accord ; **P** : Attention ne pas faire de **restart** euh, à chaque fois que vous faites le **restart** eh il faut recharger le package **with(plots)**, ... Il faut faire attention sur *Maple*, l'enchaînement de ce que t'écrit, d'accord ? Ça veut pas dire que quand tu vas, si tu remontes et que tu entres l'instruction qu'est tout en haut, s'est la dernière instruction que tu as faite, même que si elle s'écrit, c'est-à-dire que *Maple*, c'est qui est important c'est ce que tu touches au clavier, c'est-à-dire, ce que tu vas rentrer à un moment ou à un autre, c'est pas la manière dont ça s'affiche, si tu l'affiches et que tu reviens en haut faire un **restart** ça a beau être affiché ici, ça n'a pas été affiché d'accord ? Donc c'est l'organisation que tu as par rapport à tes calculs ; **A** : D'accord ; **P** : Donc là on voit que c'est très aplatie. Pourquoi, parce que tu traces peut-être sur un domaine qu'est trop grand par rapport à ton intersection. C'est très beau mais ils sont, vraiment c'est tout petit. Donc ce qui m'intéresse moi c'est le petit machin qui est en plein milieu. Donc comment modifier les valeurs de mes paramètres sur mon tracé... là vous tracez tout ça. Déjà enlever moi les deux grand bâtons ;

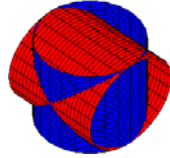
(598)

M : ça il faut changer le l'intervalles de u ? **A** : Ouais mais euh ; **M** : Oui de -1 à 1 , ça va nous le

faire plus petit ; A : Oui voilà ça fera de -1 à 1 mais il faut effacer ; [...] ; M : copie ça ; A : Ouais ;

« Ils entrent d'abord avec l'instructions suivantes »

```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi, u=-1..1,color=blue),
plot3d(S22, t=0..2*Pi, u=-1..1,color=red));
```



TC(748)

A : Pour tracer les plans ; A : $xI=yI$, $\theta=\theta'$, $u=\sin\theta$, $u=u'$; P : ça y est ? A : Non ; P : Alors, ensuite maintenant on vous dit l'intersection c'est deux plans, allons-y ; M : On les voit ; P : Bon, vous les voyez, quelles sont les équations, parce que je veux les tracer en même temps ; A : Justement on se demandait comment écrire les équations ? P : Si vous me donnez les équations des plans ça avancera vite. Donc maintenant supposons euh, allons-y on peut résoudre ça égale ça ; M : On a $\theta=\theta'$; P : Ouais ; M : $u=u'$; P : Attends, $\theta=\theta'$ pas tout à fait, c'est $\cos\theta=\cos\theta'$; M : Ah ! D'accord ; P : Donc deux valeurs, $\theta=\theta'$ et ? M : $\theta=-\theta'$; P : Donc premier cas $\theta=\theta'$, d'accord, ça me donne ensuite je regarde qui se passe, donc $\sin\theta=u'$ et $u=\sin\theta'$ et $\theta'=\sin\theta$; M : D'accord ; P : D'accord, donc ça veut dire $u=u'$ aussi et donc, quand je reporte là dedans ça me donne quoi ? $\cos\theta$, $\sin\theta$ et le, le "mâchin" qu'est là ; M : Hun ; P : ça c'est la courbe intersection, d'accord ? Attention, c'est pas, donc z égal, j'ai dit $\sin\theta$, donc j'ai $\cos\theta$, $\cos\theta$, $\sin\theta$ ça c'est la courbe qu'est sur l'intersection. Elle dans quel plan ? M : Dans un plan euh, euh intersection ; P : Mais c'est quel plan, quel est l'équation de ce plan ? Une courbe plane, regarde, donne moi l'équation. L'équation de la courbe d'intersection est [...] dans quel plan elle est ?

«TC767, Intervention de P pour toute la classe, SPACECURVE, voir TC747, séance 1 »

TC(775)

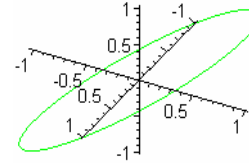
A : Il faut trouver les équations de euh ; M : Des deux plans ; A : Ouais ; [...] ¹²⁷ A : La première c'est ? M : $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\sin\theta$, la courbe intersection, donc avec $\theta=\theta'$; A : Ouais $\cos\theta$, $\sin\theta$, $\sin\theta$... ; M : Si tu fais l'égalité, $\cos\theta=\cos\theta'$; A : Ouais ; M : Donc on prend 1^{ère} cas $\theta=\theta'$, $\sin\theta=u'$ et u c'est $\sin\theta'$; A : Ouais ; M : Qu'égal à $\sin\theta$ quoi, donc si tu reportes, t'as $\cos\theta$, $\sin\theta$, et u c'est $\sin\theta$, ça c'est la première courbe d'intersection, celle là. Alors elle est dans quel plan ? Oui mais il est où ton plan ? La courbe elle comme ça [...] ; A : C'est juste le euh ; M : C'est juste la courbe ; [...] M : ça c'est la

¹²⁷ Difficulté pour trouver les deux plans, après l'intervention de P ils écrivent sur les brouillons.

première courbe ; A : Ouais ; [...] ; A : Ça, ça sert à rien, c'est les courbes d'intersection ; M : Non ; [...] ; A : On peut tracer déjà ces euh ; M : Là on a juste un paramètre ; A : Ouais ; M : Faut avoir une courbe, c'est ce qu'il disait ; A : C'est **spacecurve** ; M : Ouais, ouais [...] **spacecurve** ; [...] A : Si on trace ça va nous donner euh ; M : La courbe ; A : Le **spacecurve** on va le mettre euh ; M : Là ; A : ... **Plot3dspacecurve** ; M : Non, non **spacecurve** ; A : **spacecurve** ;

« TC845 ils entrent alors avec l'instruction suivante »

```
> spacecurve([cos(t),sin(t),sin(t)],t=0..2*Pi,color=green);
```

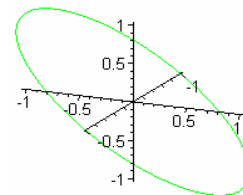


« Rires » A : Met les axes ; M : Pourquoi ? [...]

TC(878)

A : Et l'autre ? [...] M : Et l'autre ça serait $-\sin\theta$ [...]

```
> spacecurve([cos(t),sin(t),-sin(t)],t=0..2*Pi,color=green);
```



TC(890)

A : Et maintenant il faut trouver les plans de ça ? [...] M : Oui, il passe par le plan, par le point (0, 0) et euh prend ... ; A : Le point (1,1) aussi ; M : Sinon il passe par le point (0, 0) et par ce point et il contient cette courbe et le point 0 ; A : Ouais ; [...] A : Et bah les ... ; M : Sur le guide de tracer la courbe et les enfin ; A : L'ensemble ? M : Ouais, l'ensemble euh, la courbe et le point 0 ; A : Comme la courbe euh ; M : La courbe tu dis il **plot3d** entre crochets tu ... bah S1..., **plot3d** de euh [...] **plot3d** de la courbe virgule euh le point (0,0,0) [...];

« on ne vous demande pas forcément de euh de la tracer la courbe, ce qu'il faudrait surtout, vous avez compris, c'est d'arriver à visualiser la, les plans c'est pour vous aider à visualiser c'est qui est vraiment dans l'intersection des deux cylindres, ce qu'il vous faut vraiment arriver c'est à l'intersection des deux cylindres » [...] « c'est qu'il vous faut arriver maintenant c'est à modifier un peu votre tracer vous voyez de façon à faire disparaître les parties, les parties là, ça, tout ça » ; B5 : Ouais, tous ce qui est à l'extérieur ; O : « c'est à cela qu'il faut que vous réfléchissiez maintenant, l'idée des plans c'est pour vous aider... »

TC(920)

M : Je crois que ça c'est égal à ça ; A : Ouais, attends, en fait il faut changer les valeurs de u et de

t [...] ; **M** : Parce que nous ce qui on veut virer c'est toutes les parties [...] comme ça et comme ça ? **A** : Ouais. Enfin tous ce qu'est au-dessus euh [...] J'ai du mal à visualiser «*blocage*» [...] ¹²⁸

TC(973)

M : $y=z$ et $y=-z$ c'est les plans, d'accord ; **A** : Donc après ... ; **M** : Il faut changer la valeur des paramètres ; **A** : Notre y il est, il varie donc ... par rapport [...]

«*Donc là vous allez garder que les valeurs de z qui sont plus petits que y et donc z compris entre $-y$ et y . Donc y dans votre paramétrage il est quoi ?*»

M : Euh, de S1 il vaut $\sin\theta$, $\sin(t)$;

« *$\sin(t)$, donc u au lieu de le faire varier de -1 à 1 vous le faites varier comment ?*»

A : Ah ! Ouis de euh, euh ; **M** : De $-\sin(t)$ à $\sin(t)$; **A** : Non ; **M** : Si, ouais «*»* ¹²⁹ ; **A** : D'accord ;

«*Et pour l'autre il faut réfléchir ... au lieu de dire z qu'est compris entre $-y$ et y , maintenant c'est y qu'est compris entre $-z$ et z* »

M : Mais là ça va pas poser de problème de euh de définir t égale à 0 à 2π et après u de $-\sin(t)$ à $\sin(t)$;

«*Non, non c'est justement ... en fin vous essayez et vous verrez il y a un moyen d'y arriver*»

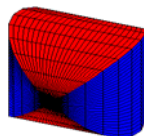
«*Ils tapent sur le clavier*»

TC(+02)

A : pour l'autre ça fait quoi ? **M** : ça fait $y=z$, ... **A** : Et le rouge c'est ? «*C'est les mêmes plans pour les deux, les deux jouent les même rôle*» **A** : D'accord ; **M** : On met la même chose, $-\sin(t)$ à $\sin(t)$?

«*Au lieu d'être, comme je disais, z compris entre $-y$ et y , là c'est y compris entre $-z$ et z* », «*du coup comme y c'est \sin ça change rien*» «*Ils entrent alors avec l'instruction suivante*»

```
> display(plot3d(S11, t=0..2*Pi, u=-sin(t)..sin(t),
color=blue), plot3d(S22, t=0..2*Pi, u=-sin(t)..sin(t),
color=red));
```



A : Q c'était ? **M** : c'est ça, non ! **A** : C'est quoi, je ne crois pas ! **M** : Si Q c'est euh C1 intersection C2 ; **A** : c'est l'intersection des deux cylindres c'est ça ? **M** : Ouais ; «*A ne le croit pas et il lit encore la*

¹²⁸ Discussion sur la description de crible géométrique. Ils voient les parties à enlever mais ils ne savent pas comment le faire dans Maple et ni sur papier.

¹²⁹ Ils arrivent à décrire le crible du 1^{er} cylindre à l'aide des interventions de l'observateur ;

4^{ème} question de l'énoncé » ...donner la représentation graphique du solide Q (en faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q) [...] ; **M** : Maintenant, calculer le volume ? **A** : D'accord, alors calculez le volume «*il lit la dernière question*» ;

TC(+50)

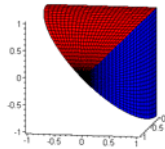
M : Maintenant il faut faire varier euh [...] ; **P** : Ah ! C'est joli, bon alors ; **A** : On a fait ça comme de grands tout seuls ; «*rires*» ; **P** : C'est bien «*rires*» alors on continue, maintenant voyez que, donc maintenant le but c'est du calculer le volume de l'intérieur, d'accord ? **B5** : D'accord ; **P** : Donc c'est de calculer l'intégrale triple de ce qui est à l'intérieur de ça, d'accord. Donc déjà pour continuer on s'aperçoit qu'est-ce qui nous intéresse ici ? C'est qu'il y a des parties rouges et des parties bleues. On voit quand même qu'il y a certaines symétries ; **M** : Donc on peut calculer $\frac{1}{4}$? **P** : Oui le volume de $\frac{1}{4}$ même on peut prendre $\frac{1}{8}$, et puis même peut-être encore couper ça aussi à un autre, il y a une autre symétrie qui est sans doute ici là, d'accord ? Alors, faites ce que vous voulez, ce que je veux c'est que euh votre $\frac{1}{4}$, votre $\frac{1}{8}$ ou votre $\frac{1}{16}$ vous le dessiniez, d'accord ? C'est-à-dire que vous me délimitiez les valeurs des paramètres t et u d'accord ? Qui vont faire que je ne vais dessiner que $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$. Une fois que vous avez tout ça normalement [...] «*intervention de P à toute la classe en portant la discussion qu'il a terminé de faire avec le B5*»

TC(+73)

A : Maintenant il faut faire varier t ? De 0 à 2π et puis on ne va pas tracer euh, tracer Q déjà ? Tracer ... c'est la même [...] **M** : Au lieu de 2π on prend $\pi/4$? Mets 0 à $\pi/4$; **A** : Non, non, non parce que c'est pas $\pi/4$ là c'est t de 0 à 2π ; **M** : Non, mais quand tu fais un tour sur 2π ; [...] ¹³⁰ ... ; **A** : Donc on va garder juste ça ... on fait varier le rouge, on a fait varier de 0 à 2π donc ça fait comme ça, donc on peut varier de 0 ; **M** $\pi/2$; **A** : à $\pi/2$ on va garder ça. A $\pi/2$ on va garder que ce petit morceau là ? ...Donc là on met $\pi/2$ direct pour voir ce que ça peut donner ? **M** : Ouais ; «*ils entrent d'abord avec les instructions suivantes*»

```
> display(plot3d(S11,t=0..Pi/2,u=-sin(t)..sin(t),
color=blue),plot3d(S22,t=0..Pi/2,u=-sin(t)..sin(t),
color=red));
```

¹³⁰ Ils discutent sur la position des deux cylindres (un dit c'est comme ça, l'autre dit, c'est pas comme ça, c'est comme ça) en cherchant la partie de quel et quel cylindre à conserver par le calcul de l'intégrale. Ils remettent la figure de TC598 à côté de la figure de TC(+02) pour voir la position correcte de chacun.

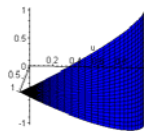


TC(+153)

A : Et donc là on a ... on va voir ce qui peut donner ? **M** : Ouais ; [...] **A** : En fait on a pris la moitié ; **M** : Ouais ; **A** : Ah ! Non, non ; **M** : $\frac{1}{4}$; **A** : $\frac{1}{4}$. On a coupé comme ça, on a $\frac{1}{4}$; ... , En fait il faut prendre juste, juste le volume délimité par $\frac{1}{8}$ euh, par $\frac{1}{8}$ de volume ; **M** : En fait il faut qu'on prenne que le rouge comme ça, on obtient le $\frac{1}{8}$ de rouge, ça nous donne euh parce que nous on a coupé comme ça, « TC(+183) intervention de P à toute la classe il parle de transformation de l'intégrale cartésienne en coordonnées cylindriques, voir TC(+149 séance 1) » ;

« Ensuite le binôme entre avec les instructions suivante, en faisant copier coller l'instruction précédente »

> `display(plot3d(S11,t=0..Pi/2,u=-sin(t) ..sin(t), color=blue));`



TC(+229)

A : Donc c'est euh ; **M** : ça sera le $\frac{1}{8}$ de euh ça, attends ; **A** : $\frac{1}{16}$; **M** : On a enlevé le rouge ; **A** : Ah ! Ouais pas comme ça, on peut couper encore comme ça « il montre avec les gestes sur la figure à l'écran » ; **M** : Donc il nous reste que ça, que celui-là ; **A** : Parce que pas de, de euh $-\sin t$ à $\sin t$ alors ? **M** : Si, si ; ... ; **A** : De toute façon on enlève la partie rouge ; **M** : Ouais ; **A** : Et on a baise l'intervalle de t , on l'a réduit ;

« Enregistrement de fichier » « problème avec le fichier, redémarre l'ordinateur »

M : Donc euh, il faut calculer ... etc. ; « ils écrivent sur le brouillon »... **A** : Fait t varier de 0 à $\pi/2$; **M** : Ah ; $\pi/2$ ouais ... ; [...] **A** : Normalement si on a bien fait tout, nous on a bien coupé en fait on a coupé, comme ça ; **M** : Oui ; **A** : Mais ça c'est $y = z$, ... ; **M** : ça c'est le plan d'intersection ; **A** : Là on avait euh, là on avait $y = -z$; **M** : Donc cette aire là c'est la même que celle-là donc euh ; **A** : Donc on garde que ça, c'est qu'en haut [...] ; ... **M** : x il fait de 0 à 1

« Ils ont des difficultés pour écrire l'écriture de calcul de volume de Q » « Intervention de P à toute la classe, voir TC(+472), séance 1 » ...

(+300)

M : Bah, sinon on fait les calculs de tête ? **A** :

Ouais, **M** : On peut faire ça, sans calculette ; **A** : On peut calculer euh, qu'est-ce qu'on a dit, on dit ça, ça ; **M** : Mais, non un volume c'est x , y et z ? ... ; **B5** : Il y a plus rien ; **P** : Vous avez tout bloqué ? C'est pas mal, donc on fait à la main, de toute façon la partie finale c'est juste ce qui me reste, donc alors ici où est qu'on en est donc $\iiint dx dy dz$ donc qui se transforme en intégrale on a dit $\iiint \rho dp d\theta dz$. Donc là maintenant il faut que je trouve $\varphi^{-1}(D)$; **B5** : Ouais ; **P** : On a dit que ici, donc on a délimité ça, donc ici un point est à l'intérieur de mon volume si ρ est compris entre **M** : 0 et 1 ; **P** : ρ appartenant à 0 et 1 ; **P** : Et θ ? **M** : 0 à $\pi/2$; **P** : Alors 0 à $\pi/2$, si tu fais vraiment le $\frac{1}{4}$ qu'est juste ici. Si tu mets 0 à π tu as toute la boucle. Alors θ appartenant à 0 et $\pi/2$ tu me dis. Juste après ce sera le facteur de multiplication, d'accord ? Et z variant entre ? Donc la valeur qu'est ici, 0 ; **B5** : Hun ; **P** : et la valeur qu'est ici ; **B5** : $\sin\theta$; **P** : on a dit $\rho \sin\theta$, c'est bon ? **B5** : Ouais ; **P** : Alors il reste ça... ça y'est j'ai l'intégrale triple avec un domaine qui est relativement simple, ρ et θ c'est les pavés, y a que z qui varie dans ça... d'abord intégrer par rapport à z et après par rapport à ρ et θ .

« Avec cette intervention de P ils écrivent sur le brouillon »

TC(+420)

M : $\rho dp dz$; **A** : Hun, donc ρdp , ρ à $\pi/2$, 0 à $\pi/2$ $d\theta$ [...] ; **M** : C'est $\rho \sin\theta$? **A** : Ouais ; « ils écrivent sur le papier ce qui suit qui est donc le résultat présenté à la fin qui est le résultat correct obtenue sans les démarches claires. Voir les brouillons »

$$\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\rho \sin\theta} dz$$

A : Moi j'ai $\frac{1}{3}$ c'est ça ? **M** : Euh, ouais [...] ¹³¹ moi j'ai $\frac{1}{3}$; **A** : Et après maintenant, ce facteur multiplicatif ; **M** : On va dire euh multiplier par 16 ; **P** : Ça y est ? **A** : Bah, ah $\frac{1}{3}$ fois ; **P** : $\frac{1}{3}$ bon voilà, multiplier par ? **B5** : par 16 ; **P** : Par 16 si vous avez calculé sur $\pi/2$.

FIN (Binôme 05)

¹³¹ Ils trouvent le résultat, mais ils ne sont pas sûrs de la validité de la solution trouvée.

Séance 2 : Intervention du professeur à toute la classe

« Le professeur (P) distribue les feuilles (l'énoncé et le brouillon) à 10h10 Après il participe pendant toute la séance selon ses intervention suivantes »

TC(001) Vous avez le sujet à côté un brouillon n'effacez pas qui vous écrivez au brouillon, d'accord. De la même manier vous ouvrez un document, vous l'enregistrez ... et vous mettez en, en titre de document vos noms tous les deux, d'accord ? Et puis en euh... Dans le document Maple que vous allez utiliser si possible, vous n'effacez pas, les premiers instructions ... l'instructions que vous aller utiliser. Donc, si vous voulez re-utiliser l'instruction dessus fêtez un copy coller, vous reprendrez l'instruction au-dessus et on va modifier dans Maple, d'accord ?

TC(024) Bon, alors juste une petite remarque même si euh j'ai marqué la dernière fois ... D'abord on va tracer les surfaces, donc si possible on va charger le package **with(plots)** et qui vous permet de tracer agréablement en particulier avec la fonction **display**. Donc, on commence par **with(plots)**; ... on met deux points ou point virgule. Point virgule l'avantage ce qui vous recouperont toutes les instructions que vous avez le droit d'utiliser, d'accord ? Ensuite pour tracer, pour tracer une surface, [] pour tracer une surface vous avez besoin, vous pouvez soit tracer par son équation, équation cartésienne sous la forme **implicitplot**, vous souvenez on a déjà fait plusieurs fois **implicitplot** ne donne pas des résultats intéressants, pourquoi ? Parce que c'est, c'est moins précis ça se définit par un cube et on a déjà fait des testes, on obtient quelque chose qui n'est pas très intéressant. Donc on va plutôt tracer les surfaces avec l'instruction **plot3d**, d'accord ? Avec entre crochets les valeurs de x , y et z . Je vous rappelle que pour tracer une surface : pour tracer une courbe ça dépend d'un paramètre et pour tracer une surface ça va dépendre de deux paramètres, donc ce que vous aller tracer c'est x de u et de v , y de u et de v , z de u et de v . Attention, quand j'écris ça, ça veut pas dire qu'il faut écrire x de u et v , c'est pour remplacer x de u et de v par les valeurs que vous allez avoir à tracer. Je ne sais pas ... ensuite u égal petit a point, point petit b , virgule v égal petit c point, point d .

« Le professeur écrit d'abord au tableau la ligne de commande suivante »

```
plot3d ([x(u,v), y(u,v), z(u,v)], u=a..b, v=c..d);
```

Eventuellement, après on verra quand on a plusieurs cylindres à tracer, on peut modifier la couleur, vous avez un choix de couleurs, à votre disposition, en paramètre après qui se met donc à la fin deux points.

TC(069) Vous faites attention, ce que vous allez tracer, on vous demande pas de tracer un volume, on vous demande de tracer l'extérieur du volume, l'extérieur du volume c'est pas $x^2+y^2 \leq 1$, le cylindre extérieur c'est $x^2+y^2=1$, donc on vous demande pas de tracer le volume, on vous demande de tracer l'extérieur du volume, d'accord ? La surface qui enveloppe le volume, d'accord ? Donc ce que vous avez à tracer c'est le cylindre d'équation $x^2+y^2=1$, pas $x^2+y^2 \leq 1$ c'est pas une inégalité.

TC(207) : On peut, donc ici, si tu veux tracer plusieurs choses à la fois tu peux mettre **plot3d** le premier, accolade ici, le deuxième entre crochets. Le plus simple, si tu veux jouer sur les couleurs, savoir qu'est celui que tu traces en **rouge** et quel est celui que tu traces en **bleu**, quel est celui tu traces en **vert pomme** euh, euh, tu, tu vas rentrer ça dans une variable. On va mettre S1 par exemple deux points égal etc. D'accord ? Tu fais attention qu'au moment où tu le rentres, ici il faut absolument mettre un deux points, si tu mets point virgule il apparaît l'ensemble de toutes les valeurs qui sont, que tu rentres là-dedans, donc deux points, et après avec la fonction **display**, la fonction **display** va faire que tu vas tracer S1 et S2 et ça, ça trace simultanément S1 et S2. Donc comme ça tu pourras les récupérer et après tu peux modifier ... ;

TC(958) Réfléchissez bien sinon ça va me pose des problème, donc après quand vous avez défini vos domaines, vous avez à calculer l'intégrale triple sur un domaine D , $dx dy dz$. La démarche naturelle c'est de dire, je vais regarder avec les paramétrages que j'ai, je vais changer de paramétrages, je vais intégrer sur euh $\Phi^{-1}(D)$ de euh c'est que vous voulez de euh, $dudv$ de euh j'sais pas quoi, ça veut être ρ , $d\rho$, $d\theta$, avec $d\rho d\theta dz$, sans doute on va passer en cylindrique et on essaie ... m'intéresse ; « P écrit d'abord au tableau »

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

TC(+167) Donc on regarde ici : donc on va passer (vous avez pas droit de ajouter un troisième cylindre), alors c'est qu'on a regardé au départ on est parti de $x = \cos(\theta)$, $y = \sin(\theta)$ et puis z on a regarder ces valeurs là, bien sûr c'est que s'applique de mieux c'est le passage en cylindrique, donc qu'est ce qu'on va, on va intégrer le jacobien cylindrique, le jacobien en cylindrique c'est $\rho d\rho d\theta dz$, donc tout le problème et qu'est-ce que nous l'intéresse c'est d'avoir $\Phi^{-1}(D)$ dans c'est domaine là. Alors pour l'exprimer le mieux possible on va déjà regarder par symétrie la surface la plus simple possible.

Séance 2 : Protocole des étudiants

1.1..14 Binôme 2 : Etudiant A et Etudiant G

Le professeur (P) distribue les feuilles (l'énoncé et le brouillon) à 10h10. Ensuite il donne les premiers instructions aux étudiants et il rappelle de charger le package **with(plots)**, l'usage de la fonction **display** et déconseille d'utilisation de la commande **implicitplot** mettant l'accent sur l'emploi de **plot3d** et sa syntaxe de représentation graphique des surfaces paramétrées en dimension trois, selon sa première intervention, (cf. TC001 et TC024, séance 2) ;

TC(028)

A : Il faut parler fort pour les micros ; G : Bah, allez ! P : Bon, allez-y ; A : Donc déjà, bah ..., déjà pour trouver l'équations paramétriques, je crois que c'est $x^2 + y^2 = 1$, faudra faire intervenir les **cosinus** et les **sinus** ; G : Si possible [...] ; O : Ils écrivent sur le papier, voir les brouillons ;

TC(042)

A : Bah, donc on peut essayer de taper ça non ? **plot** ; G : En **sinus** ; O : Intervention de P voir TC069, Séance 2 »¹³² ; G : Ah ! Donc c'est bon ; A : mais euh **cos(t)**...ouais, donc c'est bon ; O : Ils écrivent sur le papier, voir les brouillons ;

TC(060)

P : Non ! Égale à un, $x^2 + y^2 = 1$, donc ça, ça va ? Mais par contre il me manque une valeur ? Il me manque z quand même ; G : Ouais, bah, ouais, mais z il est quelconque ; A : z égale à [...] ; G : Bah, z égale t je ne sais pas ; A : Bah, donc on va essayer ; G : Ah ! Y'avait déjà **plot** ; A : Là j'ai de droit d'effacer ou pas ? «Non ! Copier ça, et puis fait continue ». G : Ouais, on va faire entrée ; A : Attends là t'es encore dans le même, le même cadre ; G : Ouais ! [...] **plotplot** ; A : C'est pas bon ! Ce n'est pas bon ! « Rires »

TC(073)

G : Donc [...] x^2 [...] ; A : Là on a euh [...] ; G : Alors ! Est-ce que c'est ça ? **cos(t)** [...] ; A : Tu crois que c'est **cos(t)** virgule **sin(t)** virgule t par exemple ? G : Euh, euh, ouais ; A : Ouais ; G : Ouais, ouais, ouais, c'est ça ; A : Tentez ; G : Après tu fais varier t de telle à telle valeur ;

TC(079)

A : Mais là on aura pas le rayon du cylindre ! G : Quoi ? A : Le rayon de cylindre ; G : On aura si, on

¹³² Intervention ciblée de P pour tout la classe. Les étudiants on difficulté de déterminer les équations paramétriques demandées.

aura un cylindre comme ça ; A : Ouais, mais de rayon 1 si tu veux faire varier ! [...] ouais, ce n'est pas grave ; G : Ah ! Ouais, attends, là on fait ... si on a [...] ;

TC(084)

G : [...] **cos(t)**, **sin(t)**, t [...] ; A : On ferme, je crois ? G : Ouais, on ferme, virgule t ; A : Mais là le problème tu vois on a pas u et v là ; G : Mais, c'est pas grave on met t ; A : Ouais, t [...] ; G : Ah ! Mais **3D** [...] ; A : t égale donc de 0 et 2π ; G : C'est pas un zéro que tu as mis là, c'est un δ ! « N'efface pas », « Rires » ; A : Ah ! Non ; « Rires » ; G : Donc ! Copie ça ; A : Alors, Ctrl+C ; G : Vas-y ; A : Ctrl+C ; G : Vas-y, Ctrl+V.

TC(101)

A : Ah ! La couleur ; G : On verra après quand y'en on aura plusieurs. Non, ce n'est pas ça ; A : Non c'est que tu fermes, point virgule ; G : Ouais, essaie, teste, ouais !

« Ils entrent d'abord avec la ligne suivante qui comporte la commande **plot3d** avec un seul paramètre, en résultant évidemment dans un erreur, puisque la représentation graphique en 3D doit comporter deux paramètres »

```
> plot3d([cos(t),sin(t),t],t=0..2*Pi);
```

Error, (in plot3d) at least three arguments are required

TC(103)

A : Erreur ; « Rires » ; G : On a le trois, non ? A : Ah ! Trois éléments sont nécessaires. Ça y est ; G : On en a pas trois là ? A : Là je suis déjà [...] vas dans help ; G : Help ? A : Attends on va descendre ; G : Ouais les exemples, c'est bien les exemples. Genre là 1, x , y [...] Bah ! Nous on a pareil ! Sauf qu'on a juste un paramètre ; A : Non ! Mais là c'est pas des paramétriques ça ; G : Ouais ! « Ils regardent les exemples de Help de Maple ; « Blocage » [...] »

TC(113)

G : Mais ! On est pas obligé de les tracer en paramétriques sinon ; A : Bah, ouais, c'est demandé je crois, non ? « Ils lisent l'énoncé » (Donnez les équations paramétriques des surfaces S1 et S2 délimitant C1 et C2) ; G : Ouais, et après (Donnez une représentation graphique...). Donc, à la limite on a l'équation paramétrique. Maintenant on trace normalement ! Tu n'es pas d'accord ? A : Bah, si ! « Rires »

TC(118)

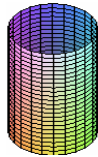
G : Euh, euh, ça fait, euh... Ah ! Ouais mais non, ça va être la [...]; **A** : Tu n'as pas le droit d'effacer ; **G** : Ouais... On part de ça déjà ? Vas-y Ctrl+V ; Ctrl+C ; Bah, ouais, on a déjà ; **A** : Bah, non ! On avait mis un [...]; **G** : Bah, ouais, on changera, c'est pas grave ! « *Rires* » ; **A** : Ah ! Bah ! Là j'ai tout effacé alors ; **G** : Tu l'as plus ? **A** : Ouais ; **G** : Bon c'est reparti ; **A** : Ctrl+C ! Ctrl+V ! Et là ? **G** : Mais je ne vois pas où c'est un problème en fait ; **A** : Puisque $x(t)$ c'est égal à [...]; **G** : Je sais, t peut-être c'est une variable que lui, il se sert [...] pour telle truc ? **A** : Non !

TC (141)

P : Ça c'est sympa, vous tracez une fameuse surface qui ne dépend que d'un paramètre ; **G** : Ouais ; **A** : C'est ça le problème ; **P** : Qu'est ce que tu m'avais dis sur z ? **A** : z il est, z il est quelconque ; **G** : Ouais ; **A** : Ah ! Bah, finalement il faudra mettre z ici ; **G** : z , et on fait varier z après ; **P** : Ce que vous tracez là c'est très intéressant, mais on verra ça après, c'est une courbe, ça dépend d'un seul paramètre, qui en fonction de t , elle veut comme t . Ouais ça va être une hélice. Il aurait fallu mettre en **spacecurve**, une courbe de l'espace, vous auriez hélice ; **A** : C'est pas important, z on va jusqu'à 4 et puis voilà ; **G** : Va, allez-y.

« Ils ajoutent alors z dans l'instruction de TC101 précédant ».

```
> plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi, z=0..4);
```



TC (152)

B2 : Eh ! Eh ! Ça y est ; **A** : Après ; **G** : Bah, là on fait la même chose sauf avec [...] avec les deux ; **A** : Vas-y ; **G** : On a trouvé que le paramétrique de $S1$ en fait il faut paramétrer $S2$; **A** : Quoi ? $S2$? Bah c'est pareil, **G** : C'est pareil, sauf suivant [...]; **A** : Ouais, donc on peut faire [...]; **G** : Faut la noter ! « *Voir brouillons* » ; **A** : Alors, $x=\cos(t)$, $z=\sin(t)$, quelque soit y !
« Pour exprimer le 2^{ème} cylindre ils entrent avec la ligne suivante ».

```
> plot3d([cos(t),y,siin(t)],t=0..2*Pi, y=0..4);
Plotting error, empty plot
```

A « Echec ».

TC (167)

A : Ah ! Non ! **siin** ; **G** : Non ! Il faut laisser, il faut laisser. De toute façon il faut qu'on trace les deux ! Vas-y, Ctrl+V ; **A** : Là il faut rechanger ; **G** : On

est... mets deux de direct, là il faut qu'on trace les deux ; **A** : Alors comment... Mais, je crois qu'il faut remettre des accolades après ! **G** : Ouais, on met virgule accolades ; **A** : Je sais pas, je crois qu'il faut remettre accolades ; **G** : Genre comme ça ? **A** : Non ! Il faut mettre les autres accolades des fonctions que tu veux tracer, je crois !

« Ils cherchent dans help les exemples pour tracer deux surfaces simultanément et des couleurs différentes »

A : Là y'en a une ; **G** : Mais, ouais, ils en tracent que une fonction. Ah ! Ou ils définissent d'abord les fonctions ; **G** : Ah ! Ils définissent, alors on va faire ça ; **A** : Bon ! On va définir les deux fonctions ;

TC (180)

P : Vous n'êtes pas obligés, hein ! Oui mais c'est possible, **A** : Mais je sais pas quelles accolades on met pour mettre par exemple 2 fonctions ; **P** : Pourquoi ! Alors, ce que je préfère [...].

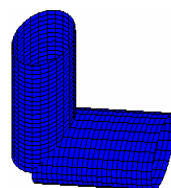
« Intervention de **P** par toute la classe, voir TC(207), séance 2 », « Après cette intervention de l'enseignant ce binôme réussit à tracer $S1$ et $S2$ simultanément selon c'est qui suit ».

TC (195)

A : Met point virgule, euh deux points ; **G** : Maintenant on va faire $S2$; **A** : Ouais ; **G** : Alors, je crois que c'est ... ; **A** : Attends, il faut mettre $S2$ devant ; **G** : Attends, il faut retaper devant. Là maintenant il faut changer **sin(t)**, alors y , **sin(t)**, alors là il faut faire très attention sur les touches ; **A** : D'ailleurs on va peut-être faire un cylindre plus grand, de 0 à 4 c'est peut-être un peu petit non ? **G** : ça suffit non ? **A** : Ça suffit ? **G** : On verra après tu sais on peut changer ; **A** : Ouais ; **G** : Donc là faut mettre deux points ; **A** : Deux points ok ; **G** : Alors maintenant **display** ; **A** : Donc, display, $S1$, $S2$; **G** : Et les couleurs derrière ; **A** : Ah ! Les couleurs, donc virgule color égale ; **G** : Et là on met color ; **A** : Bah, mais attends là ça fait la couleur de quoi ? **B** : Bah, je ne sais pas ! « *Rires* » ; **A** : Je Sais pas, on va essayer : blue « *Rires* » ; **G** : Ouais mais là, ça va tracer les deux en bleu logiquement.

« Ils entrent d'abord avec les lignes de commandes suivantes »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..4);
S2:=plot3d([cos(t),y,siin(t)],t=0..2*Pi,y=0..4);
display(S1,S2,color=blue);
```



TC (215)

G : Ouais, les deux en bleu. Ah ! Non tu n'as pas le droit « *Ils parlent du droit d'effacer* » ; A : Ah ! Ouais, c'est vrai. « *Rires* ». On copie au-dessous ; G : On peut essayer de mettre ici **color** quelque chose, à mon avis y'a moyen de mettre le deux derrière, mais on va voir si ça marche ; A : **color** égale **red**... « *Ils incluent la couleur rouge dans l'instruction display de TC195 comme suit* »

```
> display(S1, color=red,S2,color=blue);
```

« *Echec, le résultat n'est pas changé* »

TC(224)

G : Ah ! C'est bien fait ; A : Ouais, ouais, c'est beau, ouais. Alors, **color blue**, euh ; G : virgule **color red** ; A : Non ; G : Ouais, il faut remarquer **color** ; A : On aura bien travaillé ! « *Ils entrent alors avec la ligne suivante en plaçant alors les deux couleurs après S1 et S2* ».

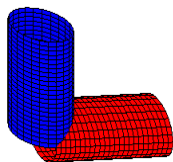
```
> display(S1,S2,color=blue, color=red);
```

« *Encore une échec, le résultat n'est pas changé* » et « *Ils sourient* »

TC (231)

A : Attends, et si on les définissait, couleurs comme S1 et S2 ; G : Ah ! Ouais, ça c'est une bonne idée ça ! C'est une bonne idée ; A : Non ! Tu n'as pas le droit d'effacer ; G : Ouais, mais on avait pas finalisé quoi ! Alors, alors il faut rechercher ça sans modifier en fait ; A : Donc, Ctrl+C, Ctrl+V ; G : Voilà ! « *Ils copient les lignes de commandes de la sous-tâche TC195 et aident correctement la couleur par chaque cylindre* » ; A : Alors là il faut remettre les couleurs maintenant, virgule **color** égale donc **blue** ; G : Ouais, et là **color** égale **red** ; A : Et maintenant on va réécrire **display** ; G : Et là **display** ouais ; « *Ils parlent correctement, néanmoins écrivent mal la fonction display sans se percevoir* » A : Euh ! Display... ; G : Suspense !!!

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..4,
color= blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..4,
color=red);
display(S1,S2);
```



TC(252)

G : Oh ! Là, là, là ; A : Ça va pas ça, bon il l'a écrit en bleu ; « *Echec, Ils sourient, puisque Maple a affiché l'erreur avec l'ensemble des points en codés prévu par S1 et S2* » ; G : Oh ! Là, là, là ; A : Eh ! Ouais, display n'est pas marrant ; A : Ah ! Mais tu

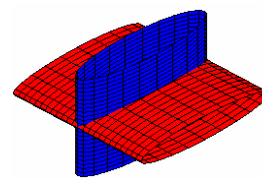
as mis **display** là ; « *Ils sourient* » ; G : J'ai mis **display** ; A : Bon, allez, Ctrl+C ! Ctrl+V ! Ah les fautes de frapper ; G : Ah ! Attends, attends, on change ; A : Vas-y ; G : **display**, peut-être y arriver ! « *Entrée* » ; B2 : Hou, hou, hou ; A : Superbe ; G : Ok ;

« *Ils réussissent d'afficher les deux cylindres simultanément, mais il n'y a pas la totalité de l'intersection des deux cylindres comme attendu, selon le résultat ci-dessous* », « *ensuite ils lisent alors l'énoncé* »

TC (262)

G : [...] délimitant C1 et C2, donc ça on l'a fait ça ; A : La 2 on l'a fait aussi ; G : Donner une représentation graphique ... d'abord séparément, puis ensemble, en les différenciant par deux couleurs. Ce n'est pas grave si on ne les a pas fait les 2 séparément. Une seule, ça suffit ; G : Là ! On a fait les 2 premières là ; A : Ah ! Ouais, ok ! Attends, je crois qu'on peut mettre les, même les trucs là ; G : Quoi, quel truc, les axes ? A : Les axes, ouais... ; G : On va enlever les axes ; A : Remarque, Il est facile de voir que Q est entièrement compris dans le cube $[-1; 1]^3$. « *Ils lisent la remarque de l'énoncé* ». Ah ! Non, en fait il n'est pas assez long, tu vois ? G : Ah ! Ouais, il faudrait... ; A : Il faudrait changer y et z, pour voir vraiment l'intersection. Ctrl+C ! Ctrl+V ; G : En fait c'est euh... c'est z et y qu'il faut faire varier, on va aller de -4 à 4 par exemple ;

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-4..4,
color =blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-4..4,
color= red);
display(S1,S2);
```



G : Ouais ; Là on est pas mal là ; « *rires* » ; A : Voilà ; G : C'est mieux là ;

TC (282)

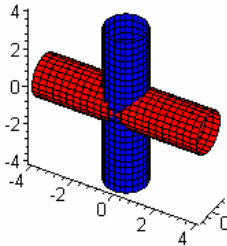
A : Là il paraît qu'il faut voir que c'est dans le cube l'intersection, entre -1 et 1 ; G : Quoi ? A : Voilà, ils disent il est facile de voir que Q est entièrement compris dans le cube $[-1; 1]^3$. Si nécessaire ajuster la représentation précédente pour la limiter à ce cube ;

« *Ils lisent encore la remarque de l'énoncé* » ;

A : Là, il faudrait la limiter à ce cube même disent ; G : Mais, attends, c'est pas trop bizarre on devrait

pas avoir un cylindre euh... ; A : Si, mais c'est le l'échelle je crois, c'est ici je crois, tape là 1:1 ;

«1:1 c'est l'icône de la barre des outils de Maple qui sert à visualiser les figures dans un escalier 1 par 1, dont la représentation précédente peut alors être visualisée comme suit»



G : Ah ! Ouais, c'est mieux là quand même, c'est mieux, ça claque ; A : ça claque ;

TC (292)

A : Alors, là ils disent euh de limiter entre -1 et 1 je crois. Vas-y, ah ! Ouais si nécessaire, ouais tu le vois ; G : Quoi ? A : Là il dit en fait que, tout ça, l'intersection elle est comprise dans le cube $[-1; 1]^3$; G : Ouais ; A : Ouais, donc ça on passe ; G : Ouais ; A : On veut maintenant effacer les parties de chacun des cylindres qui ne sont pas sur la frontière de Q ; G : Alors là ; A : Alors là il faut égaliser en fait les deux trucs là, les deux équations qu'on a ; G : Ah ! Ouais pour avoir le euh... ; A : $x^2+y^2 \leq 1$ et x^2+z^2 alors ça me donne... $2x^2+y^2+z^2=1$, avec le même paramétrage, attends ;

« Il écrit sur les brouillon, voir copy » ; Oh ! Là, là [...] ; « ça pourquoi ? » ça c'est pour l'intersection de Q des deux cylindres ; G : Bah je sais pas... ; A : Il n'y a pas de fonction **intersect** ? G : Sûrement ouais ;

« ils tapent pour vérifier si existe une fonction **intersect** pour avoir l'intersection des deux cylindres » ;

A : Union, **intersect** ; G : Union, alors on va regarder ; A : Ah ! Non, c'est bizarre, ça c'est pour des... ; G : Ouais, mais peut-être ça marche non ? G : Ouais ça m'étonne... Regard **with(plots)**, peut-être il y a un truc euh j' sais pas ;

« Ils regardent l'ensemble des commandes affichés par Maple lors de chargement de **with(plots)** » ;

A : Non, il y a rien ! **display... contourplot...** Ouais descend tout en bas ! A : Peut-être si on fait je ne sais pas **plot3d S1=S2** ; G : Ah ! Ouais ? A : Bah je sais pas, je propose ; G : on peut essayer ; A : Non ! Tu n'as pas le droit d'effacer ; G : Ah ! Ouais, c'est vrai ; G : On peut essayer quoi ; A : Ah ! Mais S1 et S2 c'est déjà des plots en fait ! [...] ; A : Tu crois ? Bon ! Essaie, on verra de toute façon ; G : Ouais ; « Qu'est-ce que vous cherchez ? » A : On essaie de tracer justement Q , montrer que C1 et C2 se coupent sur ... ah ! Non, ce n'est pas ça qu'il demande ; G : Bah, c'est

pareil ; A : Ah ! Non, il ne demande pas les équations de l'intersection, il demande les deux plans. Montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans ; G : Mais c'est ça, on veut maintenant effacer les parties qui ne sont pas sur la frontière de Q , ça revient à tracer l'intersection ; A : Ah ! Ouais, bah ouais, là on essaie de faire ça [...] n'est pas mal.

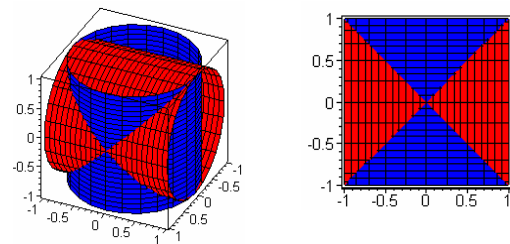
TC(361)

P : Et on enlève les bouts là ! Non il y a trop des bras encore là ! On voit facilement que Q est entièrement compris dans le cube $[-1;1]^3$; B2 : Ouais ; P : Alors, dessinez moi l'intérieur de cube $[-1;1]^3$; G : On voit quand même les bouts qui dépassent... ; P : Légèrement, mais on verra quand même en peu mieux ce qui se passe, donc là pour instant ça me convient pas, ..., c'est encore trop haut ;

« Après cette intervention de P ils copient les lignes des commandes de TC262 et modifient la hauteur de chaque cylindre » ;

TC(376)

A : Alors, il faut qu'on change ; A : Bah, met de -1 à 1 ; G : Alors, ouais, z de -1 à 1 ; P : ça c'est la valeur des paramètres z et y,... ; A : Mais est-ce qu'on a le droit, par exemple si on a mis S1 et S2 on les a définis comme ça, de mettre par exemple pour tracer l'intersection **plot3d S1=S2** ? P : Non, c'est sert à rien ça. Alors, voilà, maintenant (Le P fait pour que tourne le dessin par la manipulation avec la souris) tu reviens un peu en arrière, perpendiculaire, tum ! Voilà, donc là on voit qu'il y a deux plans visiblement dans la projection, si en plus, on se met euh... tum ! Voilà, donc on voit bien euh ! On est bien effectivement dans un plan perpendiculaire ici, et on a deux plan qui sont les intersections des deux cylindres. C'est bon ? Donc c'est ce qu'on cherche, l'intersection des deux cylindres ... montrer que c'est.



TC (394)

A : L'intersection des deux cylindres... ; G : Alors ; « Ils écrivent sur les brouillons » A : Donc $x^2+y^2=1$ et $x^2+z^2=1$, bah ça, ça appartient à un plan... G : ça, ça définit avec deux plans ça ; A : Ouais ; G : Donc pour trouver leur équation il suffit de remplacer x là, et de remplacer euh... ; A : Quoi ? G : Si on exprime x en fonction de z et qu'on le remplace là, on aura peut-être euh ... non ! Si normalement on

aura d'équation de plan ; A : De quoi ? G : Si on remplace x par ... ; A : Bah, on trouvera y^2, z^2 , ça va pas quoi ; G : Ah ! Ça nous avancera à rien ; A : Là on voit que les deux plans ils passent par zéro ; G : Ouais ; A : Et il y a un qui, en fait il y a un [...] Parce que ça, c'est quel axes ça ? On peut nommer les axes ? G : Euh, Euh, nommer les axes ; A : Quoi, dire si c'est x, y ou z ? « Blocage » [...]

TC (432)

A : Essaie d'appuyer là pour voir s'il donne les axes ; G : Tac ! Ouais c'est bon ;

« Il fait un clique sur l'icône que de barre d'outils qui rend les axes » ;

A : Essaie de mettre les noms des axes ; G : Axes ; A : Ah ! Non ! Laisse le comme ça en fait. G : Si on met normal ; G : Donc, là on cherche ... ; A : Là, en bleu on a z et en rouge on a y, z, x ; G : Et si on mettait euh, euh... ; A : Si on essaie de résoudre l'équation euh, euh sans... « Blocage » [...]

TC (464)

G : Si on égale ça, ça fait x , donc $\cos(t) = \cos(t)$, on est d'accord ? A : Ouais ; A : Après on a $\sin(t)$ égale donc, on a dit à y et z égale à $\sin(t)$, tu es d'accord ? G : Ouais ; A : Donc ça, ça, ça c'est pas important, et donc on a ces deux équations ; « Il écrit sur le parier le suivant »

$$\begin{cases} \cos(t) = \cos t \\ \sin(t) = y \\ z = \sin(t) \end{cases}$$

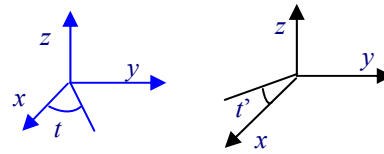
G : Ouais ! Mais, ça nous avance à quoi ? Bon allez s'il te plaît A : Ouais ; « Ils sourient » ; A : Si, on peut essayer de tracer ça ! Non ? G : Ah ! Mais là, attends... Ah ! Parce que l'intersection c'est pas un plan, en fait ; G : Ouais ? A : L'intersection c'est pas deux plans, c'est euh... G : Parce que nous on cherche bien ces plans là ; A : Ouais. Ouais, mais si on fait l'intersection on aura juste euh, euh, si tu veux une ellipse comme ça, euh comme ça non ? G : Mais, regarde là, ça donne $y = z$, non ? A : $y=z$, ouais, donc c'est ça le plan en fait ; G : ça, ça serait celui-là, je pense ; A : Ouais. G : Donc, quelque soit x puisque x nous donnera ... ouais. Donc, on a un plan déjà ici ; A : Là on aura un plan, ouais, et l'autre plan ce serait $y=-z$; G : Ouais, mais pourquoi ? « Ils sourient » ; A : Ouais, si c'est bien ; A : (504) Eh ! Attends... « Blocage » [...]

TC (515)

P : L'intersection donc ça vérifie ça et ça... Allez ; A : Ouais, bah on a le problème pour trouver l'autre plan. P : Alors, t'as ça, ce qui ne marche pas dans ton histoire, c'est que tu prends pour les deux, tu prends les mêmes valeurs du paramètres, ça serait t et t' ici ; G : Ah ! Ouais ? P : Bah oui, les valeurs

des t , cette valeur de t là c'est la valeur, quand tu fais ton dessin, c'est l'angle qui est ici, notre x , donc ici t'as x, y et z

« Le Professeur P fait le dessin des axes sur le brouillon » ;



P : Et quand c'est ici t'a y fixé, donc t' c'est quoi ? Donc si je met x, z ici y la valeur t' elle là. D'accord ? Donc, ça ne repère pas les mêmes points. Donc on fixe ça $\cos(t) = \cos(t')$, ça implique quoi ? G : Bah, que $t = \pm t'$; P : $t = t$ ou $t = -t'$, d'accord ? Ensuite, ça me donne les autres valeurs. Alors, ce qui est important c'est de voir effectivement quand on a ça, donc $\sin(t), \sin(t')$ c'est $\sin(t)$. Donc, y devient égale à z . Donc, effectivement il y a un plan qui est $y=z$. Et l'autre $t = -t'$ mais bon ça peut se faire aussi si tu prends ces deux équations là, ça se fait très simplement !!!

TC (529)

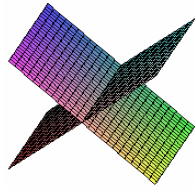
G : Bah, on fait ça moins ça et on obtient $(y-2)(y+2)=1$; P : Quoi ? A : Égale euh zéro ! P : Donc, ça donnera ces deux plans là, on va les tracer les deux plans là. A : Traçons-les ... A : Bah, allez plot3d. Ah non on les remet comme ça, on va faire P1 et P2 ? A : Hun ; A : Allez va pour P1 et P2[...]deux points égale ; G : Mais attends il nous demande pas tracer là ? A : Non ! B : Bon on le trace, c'est intéressant. Allez ; A : Ah ouais ! Il faut faire que ce qu'on met là dedans ? Il faut tracer les plans ou pas ? G : Ouais, on va les tracer ; A Allez, G : Allez, c'est marrant ; A : plot3d, donc ... donc on a x, y ; G : y ; A : $-y$; G : Ah Ouais ; A :

Donc, on ferme, donc virgule x on met donc euh ; G : De -1 à 1 on reste dans ce carré-là comme ça ; G : Ok ; G : Attends y'a moyen de faire varier x, y et z , de moins un à un, ah non, z on s'en fout, moins un ; A : moins un à un virgule, y égale donc de moins un à un. Donc ok ; G : Mais attends euh, on a aucun plot qui est défini par x , ah si x ... A : Ah ! Puisque elle est quelconque. A :

Donc P2 deux points égale ... donc là, pareil x aussi ; G : x ; A : virgule, donc là G : z, z ou A : y ; G : y et y ; A : Virgule, donc x égale, -1 à 1 virgule, y égale, -1 à 1, on ferme ; A : Deux points display P1 virgule P2, point virgule. Il va tracer les deux plans normalement ! G : Ouais, par contre ils vont être de la même couleur ; A : Ouais, alors maintenant on peut. Est-ce que ça vaut le coup de tout traces ?

« Ils entrent d'abord avec les lignes des commandes suivantes qui résultent dans la représentation de plans ci-dessous »

```
> p1:=plot3d([x,y,-y],x=-1..1,y=-1..1):
p2:=plot3d([x,y,y],x=-1..1,y=-1..1):
display(p1,p2);
```



« Exclamation de joie », « Rires »

TC(601)

G : Maintenant il demande quoi ? [...] ; **A** : Utiliser ce résultat pour donner la représentation graphique du solide Q (en faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q) à l'aide de *Maple* (on continuera à distinguer les deux cylindres par des couleurs différentes) ; **A** : Ah ! Là il faut trouver Q en fait. Hein ? **G** : Ouais ; Ces plans ils vont nous servir à quoi en fait pour tracer Q ? **A** : Non, ça c'est intersection alors ; « *Blocage* » ; **G** : Ouais ! J'comprend pas à quoi ils peuvent nous servir pour trouver Q , quoi ; **A** : On a ces deux plans parce que l'intersection se trouve que la dessus ! Tu es d'accord ? **G** : Ouais ; **A** : En fait il faudra réussir à tracer les courbes. En fait, tout les points qui se trouvent sur ces deux plans là ; **G** : Hun ! Dans ce cas on aurait une ellipse comme ça sur ce plan, et une ellipse sur ce plan. Nous ce qu'on veut c'est l'ellipse plus les faces qu'on voit là, donc cette face là on la veut, cette face là on la veut, cette face là on la veut. On veut euh, on veut celle-ci, euh, ce n'est pas évident ; (638) « *Blocage* » ;

TC(642)

A : Celui-là comment on peut faire ? **G** : En fait, dans cette zone là il faut tracer le rouge, dans cette zone là il faut tracer le bleu, dans cette zone là il faut tracer le rouge, dans cette zone là il faut tracer le bleu ; **A** : Ouais, mais là c'est pas possible ! « *Rires* » ; Ah ! D'accord, Ah ! D'accord ; **G** : Ah ! On tient les bouts là. « *Rires* » ; **A** : Ah ! Maintenant c'est très compliqué, maintenant. En fait, là il faut déterminer ; **G** : Ainsi on a le, on a le euh ; **A** : Exprimer tout ça ; **G** : Déjà on va chercher $S'1$, $S'2$ et après c'est en faisant varier x et y , on varie x et y euh, bas y et z euh ; **A** : Ctrl donc C ; **G** : Vas-y, Ctrl+V. Maintenant il faut trouver, maintenant les paramètres ; **A** : Alors, ça on garde, les équations, t on fait varier de zéro, non ; **G** : En fait il faudra essayer de le délimiter par les deux points, euh les deux plans quoi, tu vois ; **A** : Ouais, il faudrait définir cette zone, c'est euh ; **G** : Bah ! Attends ; **A** : Bah ! C'est hum, hum ; **G** : ça c'est x , cet axe c'est x ; **G** : C'est $y-z \geq 0$ et $y+z \geq 0$, on se place ici ; **A** : Voilà ; **G** : Et là dedans, il faut tracer lequel ? Au-dessus ... Au-dessus il faut tracer le rouge, le rouge c'est lequel déjà... ; **A** : Ah mais mince, on a

pas mis le couleur ; **G** : Ah non, on a pas pris le bon ouais ; **A** : Ah ! Non, non, est au descend encore ; **G** : Ah ! Ouais, ouais, on est au-dessus. En rouge c'est quoi ? En rouge c'est $S2$; **A** : $S2$ ouais. Donc maintenant ici ; **G** : Attends, il faut tracer là et en bas ; **A** : Et en bas ; **G** : $y-z$; **A** : $y-z$; $y+2$; **G** : Voilà, pas mal ! ; **A** : Pas mal ouais ; **G** : Donc, maintenant il faut définir en fait euh $S2$. Alors $y-z$ [...] **A** : On peut pas, dans ce cas, prendre en paramétrique ? **G** : Bah ! Là c'est déjà en paramétrique. Et nous là ce qu'on demande c'est $y-z$, donc $y-z$, ça fait $\sin(t)$... ; **A** : Bas ouais, si on définit, si on définit les... ; **G** : ...ça fait $-\sin(t)+y \geq 0$. Là je traduis ça ; « *Il écrit sur le papier* » ; et l'autre ça fait $y+z$; **A** : Mais y a pas de moyen de faire, tu sais quand on limitait un domaine quand on faisait les intégrales, il y a un moyen de limiter le domaine avec ça, regarde. Si tu fais varier attends, il faudrait qu'on trouve les axes déjà, ... ; **G** : Ouais, mais je pense que ça c'est encore plus compliqué ; **A** : Regarde, si tu fais varier ça de -1 à 1 , et l'autre tu dis euh, tu dis que c'est x , non ! Attends ; **G** : Ouais, c'est vrai que c'est intéressant ; « *rires* » ouais, ouais ; **A** : Ouais, non tu te souviens comment on limite les domaines quand on a intégré ? **G** : Ouais, je m'en souviens ; « *rires* » ... ; **A** : Attends, égale ... supérieur que t'a mis ? Ça nous donne quoi ça ? « *Silence* » parce qu'on a ... ; **G** : x on s'en fout, on fait varier de -1 à 1 ; **A** : Attends, si on utilisait ça ? **G** : En fait, il faut qu'on définisse ce volume-là quoi ; **A** : Ouais, bah, ouais. Parce que on a délimité les plans, mais euh. « *Qu'est-ce que vous cherchez maintenant ?* » ; **G** : Tracer Q ; « *A quoi ça sert ces deux plans là ?* » ; **G** : On a compris qu'il fallait tracer les parties de chaque courbe, à chaque endroit mais on arrive pas à traduire en *Maple* ; « *Rires* »

TC (758)

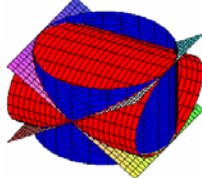
A : L'idée c'est de euh, l'idée c'est dans cette zone de tracer euh $S2$, dans cette zone de tracer euh $S2$, et là dans cette zone $S1$ et celle-ci aussi $S1$ « *Il montre la figure qu'ils avait trouvé en TC361* » parce qu'on a vu sur le dessin au-dessus que euh ça permettrait d'enlever les parties inutiles ; **G** : Voilà ; **A** : Ça enlèverait le bleu ici, le bleu ici, le rouge ici et le rouge ici ; **G** : Ouais, ouais ; **A** : Après l'idée, pour la traduire à *Maple*[...] ; « *Silence et l'enseignant s'approche* » ;

TC (766)

P : Ça y est ? **G** : Ouais, on a traduit, mais on arrive pas à mettre euh ; **P** : Qu'est-ce que vous avez traduit ? **P** : Alors, regarde là. Donc ça c'est les plans, vous m'avez pas tracé tout en même temps ; **G** : Bah, non ! Après c'est visible ; **P** : Non ça marche bien ça, $S1$, $S2$; **A** : Il faut faire copier et coller ; « *Rires* » **P** : Grand $S1$... Laisse comme ça ; **G** : T'as pas le droit d'effacer ; **P** : T'as pas le droit

d'effacer, parce que si tu fais des bêtises il faut que ça apparaisse ... pourquoi ... c'est toujours entre -4 et 4 ? **G** : Parce qu'on a ... trop haut je pense ; **O** : « l'enseignant tape sur le clavier et entre la fonction display en récupérant S1, S2, p1 et p2 dégagés précédemment par B2. Ainsi l'objectif c'est de tracer les plans et les deux cylindres en même temps, comme le montre le résultat ci-dessous » ; **P** : On va modifier... bon voilà les cylindres, là c'est très beau vous avez des belles couleurs... vous avez choisi des belles couleurs.

> **display(S1,p1,S2,p2);**



P : Bon alors, le cylindre bleu là, donc il est, pour chaque valeur du paramètre, donc c'est celui qui est là, pour chaque valeur du paramètre t et du paramètre z , d'accord ? J'allume un point en bleu c'est bon ? **G** : Ouais ; **P** : Je me dis, est ce que je veux enlever là c'est la partie qui là au-dessus et la partie qui est là, en dessous. Alors, maintenant je me dis, pour quelles valeurs je suis juste à l'intersection. Pour quelles valeurs de t et de z je suis sur ce plan d'intersection ; **A** : $\pi/4$? **P** : Attention, le t c'est l'angle dans le plan x et y , c'est pas l'angle qui est ici, d'accord ? **G** : Pour quelque soit t alors ? **P** : Quelque soit t , pour quelles valeurs de z il faut quand même euh. C'est quel plan ça ? Il a quoi comme équation ? **A** : Euh $y=z$; **P** : $y=z$, donc un point de cylindre il s'écrit comme ça, d'accord ? Quand est ce qu'il est sur le plan ? **G** : Bah, quand $z=\sin(t)$; **P** : Qu'est-ce que je vais enlever ? **A** : Eh ! C'est qui est supérieur ? **P** : Quand z est supérieur à, $\sin(t)$; **G** : $\sin(t)$ ouais ; **P** : Et Qu'est-ce que je vais enlever aussi ? **A** : Inférieur à ah moins $\sin(t)$; **P** : Donc ce que je vais tracer c'est z compris entre ? **A** : moins $\sin(t)$ et $\sin(t)$; **P** : Voilà ! Ok ! **A** : Mais on peut pas mettre dans les bornes ; « Il parle de la définition de z entre deux fonctions, dans ce cas $g_1(t)=-\sin(t)$ et $g_2(t)=\sin(t)$ » **P** : Si, on peut le mettre dans les bornes, on a le droit de mettre des bornes, et des bornes une de l'autre. D'accord ?

TC (809)

G : [...] on a dit $-\sin(t)$; **A** : Ah ! Il y a déjà le moins ; **G** : Ah ! Ouais exacte ; $\sin(t)$... ; **P** : Réfléchissez à l'autre aussi ; **G** : Bah, l'autres les bornes sont inversés ; **P** : Alors y , est-ce que c'est y , donc ce qu'on enlève c'est y par rapport à ça, là c'est $y=z$, donc j'enlève dès que y est plus grand que z , donc que y plus grand que z , vous avez ça l'air de marcher ;

« Ils entrent d'abord avec les données de S1 ci-dessous selon la discussion ci-dessus, et après

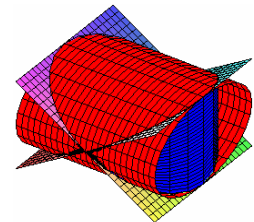
ils entrent avec la ligne des commandes de S2 sans la présence de l'enseignant, voilà ce qu'a arrivé »

A : (822) C'est quoi du coup là ? **G** : Donc si euh ; **A** : Pareil ? « Ils tapent sur clavier » **G** : Non ! C'est plus grand, là tu vas faire le plus petit là ; **A** : Ouais, là j'ai fait le plus petit, euh ; **G** : Ce qu'il faut tracer c'est y de 1 à, ah ! -1 à $-\sin(t)$, -1 à $-\sin(t)$ et $\sin(t)$ ah j' sais pas ; **A** : Et là comment je fais tu crois je redéfinit y ; **G** : J' sais pas, ouais ; **A** : y égale, j' sais pas si ça marche ça euh, de $\sin(t)$ à 1 du coup ; **G** : Ouais, je pense, vas-y ... **A** : Thant, thant, thant ; **G** : De toute façon la première fois ça ne marche plus « Rires » ; **A** : C'est vrai « Rires » si non ... vérifier sur Maple ; « Voilà le produit de cette discussion »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,
z = - sin(t)..sin(t), color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-1..- sin(t), y=sin(t) ..1, color=red);
display(S1,p1,S2,p2);
```

Error, (in plot3d/options3d)
unknown or bad optional
argument: y =sin(t) .. 1

« S1 ça marché et pas le S2 »

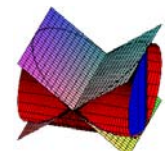


A : Tu vois il a compris là ; **G** : Ah ! On a enlevé ça t'as vu ; **A** : Ouais, mais c'est les deux trucs, alors euh ; **G** : c'est les deux trucs qu'il n'a pas compris ; **A** : C'est les bornes ;

A : (839) Alors peut-être il faudrait plus lui dire qu'il enlève y égale, ou met deux points... si on définissait les deux intervalles, 1 à $-\sin(t)$, ah j' sais pas ; **G** : Si, on peut faire ça, on met S3 ? [...] **A** : Ouais là ça serait $-\sin(t)$; **G** : On en met un troisième, on le met en rouge aussi, on verra pas la différence c'est un peu de "bidouillage" mais euh je vois pas pourquoi ça marcherait pas ; **A** : Ouais, ... ; **G** : Ah, ouais $\sin(t)$ à 1 ; **A** : (852) Pas mal, bonne idée.

« Ils entrent alors avec les instructions suivantes, que rends un véritable rétroaction par les étudiants selon leurs répercussions en voyant le résultat inattendu »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-sin(t)..sin(t),
color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-1..-sin(t), color=red);
S3:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=sin(t)..1,color=red);
display(S1,p1,S2,p2,S3);
```



« Rires » **A** : Super ça ; « Rires » le problème il était dans l'autre en fait ; « Rires » **G** : En fait le truc... ; **A** : Attends, on a gardé le bas ah, je crois qu'on a gardé le bas, alors ; **G** : Mais je ne sais pas, on a tout enlevé ; **A** : regarde, en bas ça a marché, en haut ... ; **G** : On aurait voulu faire ça mais on aurait jamais réussi ; **A** : Franchement c'est

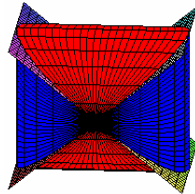
joli euh !

TC(867)

A : Vas-y, on va repartir de ça ; G : En fait là c'est $-\sin(t)$, $\sin(t)$, pas y que l'autre en fait ; A : Que ? G : Enlève ça et met $\sin(t)$ là ; A : J'enlève tout ça ? G : Ouais, je pense, ouais, cela $-\sin(t)$, non ! Là ; A : Qui ? G : Ici $-\sin(t)$; A : Ah ! Ouais, hop ! On va encore rigolé un coup ; G : Allez, j'espère que là c'est bon.

« Ils entrent d'abord avec les lignes des commandes suivantes qui résultent dans la représentation de solide Q en recherche »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-sin(t)..sin(t),
color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-sin(t)..sin(t),
color=red);
display(S1,p1,S2,p2);
```

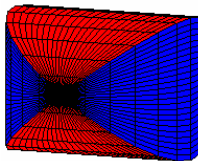


B2 : Euh, euh, euh ! Hou ! Hou ! Hou « Exclamation de joie ». On est fort.

TC (877)

G : Voilà ! Maintenant il demande, calculez le volume de Q ; A : C'est vrai ? « Rires et ensuite enlèvent les plans ». On vas enlever les plans ; G : On a besoin d'enlever les plans ? Ah ! Alors **display**, met **display**. Non ! Met juste display ; A : Quoi ? G : Prends juste **display** ; A : Ah ! Ouais c'est vrai c'est défini. « Il écrit alors »

> **display (S1, S2);**



TC (885)

G : Là maintenant il faudrait fonction de calcul d'aire là dedans ; A : Le volume ; G : Voilà le volume là dedans ; A : Alors euh ; G : Donc il faut intégrer. Ah ! Si c'est avec les bornes euh, ah ! Alors, donc là, tu vois puisque ici il faudra intégrer la truc bleu, donc de $-x$, euh ! Pas de $-x$, pas de $-x$, de $-y$ à y ; A : Tu es sûr que tu veux intégrer ? « rires » ; G : Oui, plutôt ! « Rires » ouais, ... pour calculer le volume. Tu vois par exemple on va faire plusieurs trucs. On va le diviser en quatre, entre euh, ce volume ; A : Ouais ; G : Par exemple ce petit triangle, chaque triangle quoi ! En fait ; A : On se met dans un plan précis, attends je vais remettre les axes ; G : Alors, là on va calculer l'aire là

dedans, eh bah on va reprendre en compte que euh S2, ça c'est S2 ? A : En bleu ? G : Ouais ; A : J'sais plus ; G : Je crois que c'est S2, attends plus loin, c'est S1, c'est S1, S1 c'est bleu ; A : Je vais mettre ; G : Donc, ici on a intégré euh, donc S1 c'est x^2+y^2 ; A : dx ; G : dy ; B2 : dz ; G : ça c'est euh ; A : On fait varier x de -1 à 1 ; G : x c'est ça ? A : Ouais, de -1 à 1 ; G : Donc, non c'est y qu'il faut faire varier, non ? A : Bah, en fait on fait varier x de y à ... ; G : Ah ! Ouais, x de -1 à 1 ; B2 : x de -1 à 1 ; G : y ; A : y on fait varier de euh, on cherche quelle volume déjà ? G : On cherche par exemple ce volume là, bah après une fois qu'on a fait ce truc là ça ira tout seul ; A : Ouais ; G : y donc euh, ça c'est quel équation ça ? A : Bah, c'est $x-y$; G : z ; A : $z-y$; G : $z-y$; A : Non ! C'est $z = -y$; G : Donc, de $-z$ à z , tu es d'accord ? A : de $-z$ à z , ouais ; G : Et donc, z varie ; A : Bah, de -1 à 1 de coup ; G : Tu es sûr ? A : Non ! G : Ouais, si ça me paraît pas mal de -1 à 1 , donc si on écrit ... ça fait euh, ... ; A : On va faire un petit help ; G : Ouais, c'est **int** ça je le sais mais ça c'est une intégrale simple quoi ! Parce que à la limite même après on pourra faire fois quatre, parce que chaque volume c'est ... alors ça c'est intégrale simple, intégrale simple, série intégrale, tu vois il fait que des intégrales simples ; « ils regardent le help de Maple » A : C'est nul ; G : Ah ! Non, je sais ..., t'écris je crois **int**, de **int**, de **int** je crois ; A : Ah ! Ouais ? G : Ouais, « silence » deux **int** par exemple ; donc par exemple x^2+y^2 , avec x égale moins un, un. A : Tiens, essaie de tape ça « Il tape la ligne de commande qu'il avait écrit sur papier, voir copy » ; G : z de -1 à 1 ; A : Donc y de $-z$ à z . G : On va voir ce que ça donne de toute façon ; [...] ¹³³ A : Ouais, ouais, ouais, au pire on fait un truc marrant ; G : De toute façon à chaque fois que j'ai essayé de faire des intégrales avec Maple, ça a raté ; A : y euh égale $-z$ à z ? G : $-z$ à z , voilà, point virgule, on va voir, appuie !

« Ils entrent d'abord avec l'instruction suivante »

```
> int(int(int(x^2+y^2),x=-1..1),z=-1..1),y=-z..z);
Error, ')' unexpected
```

TC(974)

G : Eh ! Non, eh non, ça c'est l'erreur de base, t'as pas droit de faire un x carre comme ça ; A : C'est vrai ? G : Eh ! Ouais ; A : Pourtant c'est joli, attends c'est joli ; G : C'est comme ça qu'il faut faire regarde ; A : Entrée ; G : Alors, parenthèse, quelle parenthèse ? A : Une parenthèse de trois là, attends, ah non on a oublié une parenthèse ici ; G : C'est ça ; A : Ouais, ici ; G : Ici ; A : Ouais, appuie.

« Deuxième échec de calcul de l'intégral »

```
int((int(int(x^2+y^2),x=-1..1),z=-1..1),
y=-z..z);
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments
```

¹³³ Ils utilisent beaucoup la stratégie de tâtonnement.

TC(988)

G : D'ailleurs pourquoi on finit par z , on ne devrait pas finir par z ? On devrait finir par euh ! Pour quoi t'intègres d'abord par z ; **A** : Pourquoi justement j'ai essayé de, de faire les deux, deux plans quoi, tu vois ? **G** : Ouais, mais regarde, si on inverse là ; **A** : En plus, moi il me manque le, le 1, attends le 1 mais, tu vois x^2+y^2 il y a plus le 1. « *Ils incluent alors le 1 dans la ligne de commande de TC974, c'est qui résulte par les troisième échec* ».

> **int((int(int(x^2+y^2-1),x=-1..1),y=-z..z),z=-1..1);**

Error, (in int) wrong number (or type) of arguments

TC(+04)

A : Ouais mais il y a un problème avec notre euh, notre intégrale ; **G** : Je crois aussi ; **A** : Je crois que c'est pas comme ça les intégrales triples, c'est pas possible. Non ! Mais il faut suffir de euh, j' sais pas ! Ça sert à rien de faire l'intégrale de l'intégrale, de l'intégrale, de l'intégrale ; **G** : Ouais ; **A** : Moi je dirais que euh, j'ai envie de tester un truc... tu vois ; **G** : Vas-y, Ctrl+C... Alors tu vas intégrer quoi là ? **A** : Ah ! Ouais, mais non ça va pas marcher ; **G** : Puisque déjà on a même pas de z ici, dans cette intégrale, donc lui il comprend pas déjà je pense ; **A** : Sinon, on le fait petit à petit euh ! **G** : Bah, ouais ça marchera pas peut-être ; **A** : Si on intègre sur x , après on intègre sur z ; **G** : Ouais, ouais, bah tente, ..., **A** : On le fera avec le signe pourcentage ; **G** : Ok ! Ouais, vas-y ; « *Ils entrent avec l'intégrale suivante* »

> **int((x^2+y^2-1), x = -1..1);** $-\frac{4}{3} + 2y^2$

TC(+36)

G : Ok ! Là on a ça, maintenant ; **A** : On intègre ça, **int** deux parenthèses pourcentage ; **G** : Pas deux parenthèses c'est suffir de mettre un ; **A** : Non ! Non deux et un ; **G** : Mais ça sert à rien, même de coup d'avant ça servait à rien ; **A** : y ; **G** : y égale $-z$ à z ; « *Ils entrent avec l'instruction suivante* »

> **int((%), y = -z..z);** $-\frac{8}{3}z + \frac{4}{3}z^3$

TC(+45)

A : Moi je comprends pas pourquoi ça a pas marché au-dessus euh ; **G** : Parce que Maple il comprends pas ; « *Maintenant ils entrent avec l'instruction suivante, dont le résultat c'est zéro* »

> **int((%), z = -1..1);** 0

TC(+54)

B2 : Euh, euh, euh, « *Ils sourient* » hou, hou vas être zéro ? **G** : Oh ! Bah le volume est nul euh ! « *Rires* » ; **A** : A mon avis c'est dans les bornes, tu vois qu'on s'est plantés. Parce que, pourquoi on fait

varier de -1 à 1 , moi je dis de 0 à 1 ; **G** : Ouais, vas-y met de 0 à 1 , comme ça on aura pas de zéro, puisque attends z il est là ; **A** : z bah on le fait varier de 0 à 1 , comme ça on aura ce volume-là normalement ! Après le volume-là on le multiplie par quatre ! **G** : Ouais vas-y, ... je sais pas si ça va marcher ça, on a pas le droit de le faire, parce que là si tu remets un pourcentage, ça marchera pas, essaie de faire **int** avec ça ; **A** : Ouais ? **G** : Fais **int** ... ouais essaie ;

B2 : Euh, euh, euh, « *Ils sourient* » **G** : Pas mal le gars ; **A** : ça va ouais ; **A** : z ; **G** : égale de 0 à 1 ; **A** : Egle 0 à 1 ; « *Il entrent avec l'instruction suivante* »

> **int(-8/3*z+4/3*z^3,z=0..1);** -1

TC(+76)

G : Ouais euh c'est faux ; **A** : Mais euh, ouais, où est le problème ? **A** : Parce que déjà l'intersection elle est comprise euh, dans le cube, on a dit ! « *Bonne observation* » ; **G** : Mais non, en fait, attends, c'est normal qu'on trouve zéro il est à cheval sur... ; **A** : Sur quoi ? **G** : Sur zéro ! Donc on délimite euh, regarde ... de coup cette intégrale là positive, cette intégrale là négative ; **A** : Quoi ? **G** : Bah, le volume il le prend entre zéro et la fonction ! Donc là c'est positif, là c'est négatif, c'est normal qu'on trouve zéro du coup ; **A** : Ouais ; **G** : Ce qu'il faut c'est découper en deux là faire varier ; **A** : Ah ! Ouais, ça veut dire que ça serai y ; **G** : Il faudrait faire 8 fois ce petit truc là ! ... **A** : Déjà l'aire il est inférieur à 8 et c'est compris dans le cube d'aire 2 ; **G** : Hun ! Partons delà ; **A** : Ouais attends, -1 à 1 , y ... Non ! De 0 à z ; **G** : Ouais je changerais après ; **A** : Attends là tu fais quoi là ? Je crois que ça marche pas les pourcentage comme ça, il faut chaque fois les affichée, parce que le pourcentage c'est ce qui est affiché au-dessus ; **G** : Ouais [...] là déjà c'est de 0 à z ; **A** : Même pour x ; **G** : Non, x c'est le seul justement ; **A** : De 0 à z et de 0 à 1 ; **G** : Point virgule ; « *Il entrent avec l'instructions suivantes* »

> **a:=int((x^2+y^2-1),x=-1..1);**
b:=int(a, y=0..z); $c := -\frac{1}{2}$
c:=int(b, z=0..1);

TC(+124)

G : Mais pourquoi -1 ça veut rien dire ce qu'on fait ? **A** : Parce que là on a fait y varier entre donc 0 et z , z c'est ça, on pris cette aire-là alors ? On a pris la moitié de ça ? **G** : Ouais ; **A** : Donc tu es d'accord, que x varie entre -1 et 1 ; **G** : x il ne pose pas de problème ; **A** : Mais x ne varie même pas entre -1 et 1 ; **G** : Si ; **A** : Non ! Il varie ici de -1 et 1 « *Il montre dans la figure* » et ici il varie ne plus de -1 et 1 « *Il montre dans le calcul de l'intégrale* » ; **G** : Pourquoi ? **A** : Ici il varie de, euh ouais regarde on a $x^2+y^2 \leq 1$ « *il écrit sur le papier voir le brouillon* », donc $x^2 \leq 1-y^2$, donc x varie donc

de, je sais pas moi de 0 à 1 tu vois [] ; G : C'est dans le domaine qu'on s'est planté [] ;

TC(+162)

A : On intègre ça [...], puisque tu vois euh x on a dit c'est $\cos(t)$, tu vois x il varie en fait euh ; G : x de -1 et 1 il ne pose pas de problème ; A : Non ! Regarde, tu es d'accord que ici t'as x ? Ici t'as x ; G : Hun ; A : Eh, Bah x il se réduit tout au long ; G : Ouais, mais de toute façon on le prend en compte là qu'il se réduit : x^2+y^2 ; A : Ouais, non mais là tu le prends, euh si tu mets -1 à 1 ça va se réduire de façon linéaire, tu vois là il se réduit de façon, tu vois, comme **cosinus** tu vois ? G : Hun ! A : Hun j' sais pas euh [...] puisque là en fait [...] ; « ça c'est quoi » A : Sa c'est la définition de contour de $S1$, $x^2+y^2-1=0$ [...].

TC(+200)

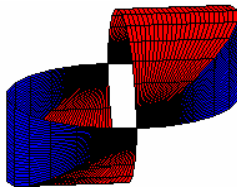
P : Tu m'as coupé ça en plusieurs morceaux ? G : Bah ! Là ouais « Rires » P : Ça c'est super facile. « P parle par toute la classe, voir TC(+167), séance 2 » ;

TC(+219)

P : Donc vous me coupez cette surface en morceaux pour avoir juste une partie, d'accord ? [] A : Déjà mets zéro, ici je pense hein ; G : Ouais ; A : Et même là il y a t qui change aussi, je pense ;

« Il entrent alors avec l'instruction suivante »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t),color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..sin(t),color=red);
display(S1,S2);
```

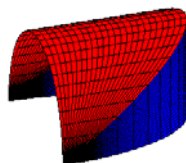


TC(249)

G : Euh, euh, déjà on a un peu découper c'est déjà quelque chose ; A : Ouais « Rires » il y a un souci là ; A : Ouais, donc ça serait t de 0 à π ? Non ? G : De 0 à π tu penses ? A : Ouais ; « Rires » ;

« Ils changent l'intervalle de t selon les instructions suivantes »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t),color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..sin(t),color=red);
display(S1,S2);
```

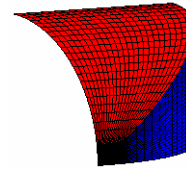


TC(+262)

G : Et là on pourrait même encore couper tu vois ?

A : Ouais, on peut couper là, on peut couper là, de 0 à $\pi/2$? G : Voilà, Ctrl+C, Ctrl+V ; A : $\pi/2$ alors ? G : Ouais.

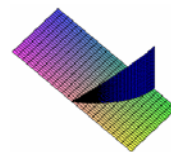
```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi, z=0..sin(t),
color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..sin(t),color=red);
display(S1,S2);
```



TC(+271)

A : Et ça c'est un huitième de volume en fait ; G : Non ! Seize, un seizième ; A : Un huitième de volume. Donc là on est maintenant en coordonnées cylindriques ? G : Alors on va délimiter dans ce plan d'abord ; A : Donc là c'est, attends, ça c'est $\cos(\theta)$ t'es d'accord ? G : Hun ; A : Donc, ça c'est z attends, non c'est $\cos(\theta)$. Si $\cos(\theta)$; G : Mais on a t ici ; A : Quoi ? J' sais pas c'est quoi t , on a mit quoi alors ? Puisque là on a du bleu, en fait ça fait un cube coupé par euh, et là on a ah bah voilà ok, et même là on peut encore diviser par deux ici non ? G : Ouais ; A : Donc finalement tu pourras enlever **S1** ? Display que, puisque regarde, tourné-là, montre le creux là, en fait, là en dessous, tu vois en fait l'aire-là, si tu mets ton plan ici comme ça, l'aire qui est là est égale à l'aire qui est là ; G : Ouais mais c'est assez compliqué, c'est compliqué parce que, parce que ton plan de section il est comme ça ; A : Bah ce sera le bon après qui aura un truc en plus ; G : Ouais ça permet d'avoir qu'un seul euh, qu'un seul ... ; A : Voilà ça simplifie, non ! Il faut refaire tout le... ; G : Là on a un huitième ; A : Donc divisé par deux, on a un seizième ; G : Voilà, là sa ressemble encore à un petit 'Thio' « Rires » ; A : En fait c'est le volume comme ça, faudrait tracer ce plan à la limite ; G : Ouais, je crois c'est **p1** ; A : Attends ; G : Mets petit p1, ou c'est **p1** ou c'est **p2** de toute façon ; A : Ouais, on s'autorise une petite entorse à la règle « Il entrent donc avec l'instructions suivantes »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z], t=0.. Pi/2, z=0..sin(t),
color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2, y=0..sin(t),
color=red);
display(S1,p1);
```



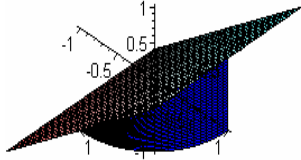
TC(+345)

G : C'est pas la bonne, « rires », ça c'est joli, ouais regarde ; A : Vous avez ... ; A : Non ! C'est deux ;

G : J'ai jamais autant travaillé dans Maple que ça « rires » ; On recommence ;

«Ils copient les instructions ci-dessus et remplacent p1 par p2 »

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z], t=0..Pi/2,z=0..sin(t),
color=blue);
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t),
color=red);
display(S1,p2);
```



TC(+353)

A : Met les axes, voilà ! Alors, là ça c'est facile maintenant comme intégrale, c'est très facile « rires » **G** : Sans moi « rires » ... **A** : Alors là ok ! On voit un peu ici, attends laisse le comme ça « ils manipulent la dernière figure avec la souris » laisse le comme ça, laisse le comme ça ; **G** : Comme ça ; **A** : Voilà, alors ici on a z , donc z il varie de 0 à truc comme ça x , z il varie de 0 à grand x , ici là, ici t'as y là non ? **G** : Eh ! Ouais ; **A** : Je crois que c'est y varie ; **G** : Pareille [] ; **A** : y varie de 0 à x , là c'est embêtant « le ton change », attends là ça [] c'est un triangle « rires » ; **G** : Laisse le comme ça, laisse le comme ça, là on a z qui varie de 0, de euh 0 à y ; **A** : De 0 à quoi ? **G** : à y ; **A** : y de 0 à x ? T'es d'accord ? **G** : Quoi ? **A** : Ou sinon on dit que c'est égale à ça, cette aire là c'est égale à quoi ? ... Attends, ça voilà, on dit que c'est aire ça fait 1 ici, ça deux, huit. Ça on peut dire que c'est un huitième de cylindre ? « Il écrit sur le papier, voir le brouillon » ... donc, ça c'est facile à calculer l'aire en fait ; « n cherche pas l'aire c'est volume » ; **A** : donc, ça c'est facile à calculer le volume ; **G** : Attends on a un huitième, deux seizième là ? **A** : Un huitième de $\pi R^2 h$, la hauteur c'est 1 le rayon 1 donc ça fait $\pi/8$ et ça on avait dit c'est un seizième de l'aire ... ça c'est volume d'un cylindre, un huitième d'un volume euh, tu as en fait que cette aire, cette aire là je dit que c'est un huitième du volume de ce cylindre, non ? « Parce que on a pas je comprends pas, pourquoi on a pas le droit de dire c'est un huitième de, de volume ; **P** : Ça y est ? **A** : Je comprends pas on peut pas dire ... ; **G** : On a dit que au maximum c'est un seizième de volume ; **P** : Ouais ; **A** : On pensait justement dire que ce volume là c'est un huitième de ; **G** : Cylindre de hauteur 1 et rayon 1 ; **P** : Un huitième de ; **A** : Bah, du cylindre qui [...] ; **P** : Euh, euh, tu mets l'autre partie dessous par symétrie ; **B1** : Ouais ; **P** : Par symétrie, oui ; **G** : Là c'est le même volume, l'autre coté c'est pareille, donc un huitième ; **P** : Ouais, d'accord donc ça, un huitième de ? **G** : Du euh, cylindre euh de rayon 1 et de hauteur 1 [...] ; **P** : Ouais, donc euh ; **A** : ... un volume avec des π c'est pas bon ça [...] ; **G** : ça fait $\pi/8$ et après un seizième

le volume d'un cylindre entier là, c'est une partie d'un cylindre » ; **A** : Ah ! C'est vrai ; **G** : ça marche pas ? **A** : Non ! ... **A** : Alors, si, t'es bien parti z il varie de 0 à y , t'as dis, c'était très bien ! **G** : En fait ça me saoule parce que les axes, là on a z de fois il marque t euh ; **A** : Ouais, ouais, mais si tu tournes dans tous les sens c'est sûr que va changer dans tout les sens ; « rires » ; **G** : Mais, aussi il y a ce plan, on peut l'enlever ce plan non ? **A** : Bah, il m'aide moi ce plan là ; **A** : Il t'aide ? Regarde quand on est comme ça on voit rien ; **G** : Ouais, même sans plan, même sans plan tu sais ça va pas aider [] .

FIN CASSETTE 1

TC(+393)

A : [...] varie de 0 à y [] ; **G** : Ouais ; **A** : y varie de 0 à 1 ? T'es d'accord ? **G** : Ouais, mais après il faut se mettre dans ce plan là ? **A** : Ah ! Ouais, ça c'est x , attends, ça c'est x , c'est ça x ; **G** : Ouais, donc là z ; **A** : Et x varie de ? **G** : z varie de 0 à 1, et x on va le faire varier en fonction de z ça fait quoi déjà ? [...] ça ressemble à rien ; **A** : De 0 à [...] ; **G** : $\sin(t)$... ; **A** : C'est facile x varie de 0 à z^2 ? [...] ; **A** : Bon allez, t'as une idée là ? **G** : Non ! « Rires », [...] me plaisait bien cette méthode pourquoi sa ne marche pas ? **A** : Mais, non ... pas du tout ; **G** : ... j'ai une idée ; [] **A** : Mais x varie ? **G** : Notre méthode est il un peu... cette méthode par rapport à celle du jacobien, j'aime pas trop le jacobien moi, « Rires », « Ils manipulent la figure » c'est joli franchement ; **A** : Allez ; **G** : Moi je trouve pas l'idée là je bloque.

« Blocage »

TC(+413)

A : [...] j'ai ne reconnais même pas ce qu'on a tracé [...] ... mais moi je trouvais ça pas ça mal ; **G** : La méthode euh qui marche pas ; **A** : Ouais ; **G** : ... [...] ... pourquoi ça marche pas en fait ; **A** : En fait, c'est sûr que c'est eux qui sont trompés ; **G** : Franchement ça marche ? **A** : Bah, ouais regarde [[...]], excusiez-moi moi je comprends pas,

de $\pi/8$; [...], en gros ça nous fait trouver 16π ; **A** : 16π ? **G** : Ouais ; **P** : Mais pourquoi, pourquoi le volume intérieur et extérieur serait le même là ? Euh, sur le cylindre, la partie qu'est là ; **G** : Bah, c'est le même ; **P** : Bah, non ; **G** : Non ? [[...]] ; **A** : Non ! En fait le volume qu'est en dessous ce n'est pas du tout le même qui celui qui est au-dessus c'est ça ? ; **G** : Bah, pourquoi ? **A** :

Parce que euh, parce que là t'es haut c'est égale à 1 à ce niveau là et là c'est égale à 1 à ce niveau là ; **G** : Bah, oui, et alors. Si tu mets le symétrie ça devrait marcher ?

A : Ah ! Mais le symétrique ça te fait euh [...], symétrique ça te fait ça ; « Enregistre ça s'il vous

plait » **P** : Le prof. il n'est pas là hein, c'est juste les deux euh ; « *rires* » alors quelle partie ? **G** : Donc, c'est pas bon ça ? **P** : C'est vrai que géométriquement j'ai du mal à le voir. Pourquoi quand le cylindre comme ça on le coupe en deux ; **A** : D'accord, on coupe comme ça, on coupe en cylindre comme ça, un demi cylindre comme ça c'est beaucoup plus grand en dessous que au-dessus quoi ; **G** : Bas, non ; **A** : Si ; **G** : Pas d'accord ; **A** : Bien sûr ; **P** : Découpe en deux, oui ; **A** : On prend un demi cylindre on coupe là comme ça ; **P** : Parce que regarde, la partie qu'est dessus, ... la partie qu'est dessus elle est délimité par un arrondi, alors que la partie qu'est dessous elle en ligne droite ; **G** : Bas, oui, là aussi ; **P** : Non, non, là il y a un volume, le bord, le bord extérieur ici c'est un plan, c'est un morceau de plan, c'est un carré, d'accord, donc bien sûr la partie qu'est au-dessus elle est nettement plus petite que la partie qu'est en dessous, d'accord ? C'est-à-dire que si on avait un cube ça marcherait, mais là c'est un cylindre ça marche pas ; **A** : C'est à cause du plan en fait ? **G** : ça marchait si on coupait comme ça en fait, mais en biais...euh ; **A** : On peut arrêter ? **P** : (+450) Ouais.

FIN (Binôme 2)¹³⁴

¹³⁴ (PC1450x5=7250"/3600'≅2^h01')

Séance 2

1.1..15 Binôme 4 : Etudiant F et Etudiant N

TC(017)

F : Moi je connais *Maple* « rires » ;

TC(058)

N : Allez-y pour les équations paramétriques, tu mets égal ; F : Hun ; N : Tu mets égal ...

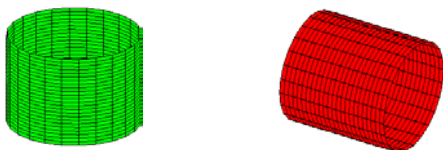
« ils écrivent sur le papier, voir les brouillons » ; « intervention de P voir TC069, séance 2 » ;

F : Les équations paramétriques c'est $\text{psin}\theta$, ... ; N : Les équations paramétriques c'est $x^2+y^2=1$, et $y^2+z^2=1$; P : $x^2+y^2=1$ c'est quoi ça dans le plan $z=0$? F : Un cercle ; P : Un cercle, un plan $z=0$ c'est un plan. Alors, paramétrisez ça, comment on paramètre un cylindre. Ce n'est pas très compliqué quand même ... ; N : $\cos\theta$, $\sin\theta$, t ; F : Non, c'est $\cos\theta$, $\sin\theta$, θ . θ variant $-\infty$ à ∞ ; N : Tu crois ? x égal, x euh ; F : $\cos\theta$; N : $\sin\theta$ et tu mets ce que tu veux quoi, tu mets z égal ; F : z ; N : $z = z$; F : Hun ! ... ; F : x en fonction de $\cos\theta$; y est $\sin\theta$ et z ou ; N : Ouais, z , et θ de $0, 2\pi$; F : $0, 2\pi$. Et z ? Pour l'instant on prend de euh $-10, 10$? N : Hun, **color blue** ; F : Quoi ? N : **color blue** « rires » ;

F : C'est une jolie couleur ? N : Oui ... ; F : Copier, coller tu remplaces y par euh ; N : y par z ? F : Ouais ;

« B4 après avoir chargé le package **with(plots)** l'entrée ensuite avec les instructions suivantes comportant le bon paramétrage angulaire »

```
> plot3d([cos(theta), sin(theta), z], theta=0..2*Pi,
z=-10..10, color=green);
> plot3d([cos(theta), y, sin(theta)], theta=0..2*Pi,
y=-10..10, color=red);
```



TC(136)

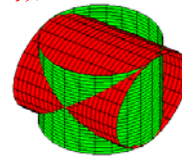
P : Je suis d'accord pour la couleur rouge, le vert c'était quoi ? « Rires » c'est un peu violent, bon, allons-y l'intersection des deux là, maintenant on peut faire l'intersection des deux ; N : On fait **display** ; P : Ouais **display** attention, soit tu fais un copier coller de tout ce qu'il y'a au-dessus, soit tes deux dessins tu les affectes dans des variables ; F : Ouais, plutôt ; P : D'accord ? On commence par affecter les deux trucs qui sont au-dessus en deux variables. Il faut faire attention quand tu les injectes, ... là tu mets surtout pas un point virgule sinon il va rentrer comme un affichage, il va y avoir ce que tu as mis dans le mémoire, ce que tu as mis

dans mémoire c'est tous les points, donc tu vas avoir un tableau de valeur absolument terrible qui va sortir, d'accord ? Tu fais ça, première chose pour C1 et C2 et après display C1, C2, d'accord ?

TC(160)

F : On va juste vérifier euh, $\cos\theta$, $\sin\theta$, z , ah c'est bon, après on met **display** ! N : En fait tu peux mettre de -1 à 1 ; F : -1 à 1 ça suffirait ? N : Ou alors -2 à 2 , histoire de voir ce que ça donnait ; « ils entrent d'abord avec les instructions suivantes »

```
> C2:=plot3d([cos(theta),y,sin(theta)],
theta=0..2*Pi, y=-1..1,color=red);
> C1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),z],
theta=0..2*Pi,z=-1..1,color=green);
> display({C1,C2});
```



« Intervention de P (cf. TC207, séance 2) »

TC(216)

F : On voit les deux plans ; N : Les ; F : Les deux plans qui se coupent ; N : Hun ; « F lit l'énoncé »
 N : ... qui ne sont pas sur la frontière de Q , d'accord. Montrer que C1 et C2 se coupent sur deux plans ... « blocage » [...] ¹³⁵ ;

TC(284)

N : On prend les équations là-dessus et on va exprimer le y et le z non ? [...] ; « Ils écrivent sur la feuille » N : Tu es d'accord pour les euh, pour les plans ? F : Essaie de tracer les plans ; N : Tu veux tracer quoi ? Tu veux tracer les plans ?

« Ils tapent sur le clavier »

F : Je voulais reprendre les équations des cylindre 1 et cylindre 2, l'idée c'est d'enlever ce qui dépasse, ce qu'on ne veut pas ; N : Hun ; F : Comme on a x , y pour quelque soit z ...

« N lit encore la question 4 »

F : En faisant "disparaître" les parties de chaque cylindre qui ne délimitent pas Q . F : Ce qui ne délimite pas Q , ça fera pas partie de euh, des équations des plans, donc euh ... ;

« F lit encore la remarque »

F : "effacer" les parties de chacun des cylindres qui ne sont pas sur la frontière de Q . O : « Blocage » ; N : En fait les bouts qu'il faut supprimer pour le euh, euh, le rouge ce serait euh, si tu prends les

¹³⁵ Ils réfléchissent en cherchant les stratégies pour déterminer les deux plans.

deux plans ? F : Hun ; N : Les bouts à supprimer pour le rouge ce sont là, là ;
« il montre sur la figure de TC160 précédente »

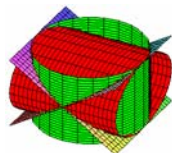
TC(367)

P : C'est bien ça « il parle du figure de TC160 » ;
N : En fait on a supprimé les bouts ; P : Supprimer les bouts, donc l'intersection ; F : Donc, on a l'intersection avec les plans ; P : C'est quoi les plans ? B4 : $x = y$, $y = z$, $y^2 = z^2$; P : Donc, ça fait $x=y$; N : Et y , non, $y = z$ et $y = -z$; P : Allons-y, tracez les aussi d'accord ? Tracer moi les deux plans d'intersection. P1 euh, P2 et comme ça tu fais un **display** C1, C2, P1, P2 ; N : Tu peux mettre les axes ? F : Les axes ? N : Hun ; P : Dans **display** il y a pas besoin d'accolade ; F : ça c'est x , y et z ; N : Euh, ça c'est euh, j' sais pas, mais euh nous on met euh y ... ; F : En fait il faut supprimer sur le cylindre rouge c'est ce qui est euh en dehors de euh quand tu prends ces plans ; N : Ouais ; F : Supprime ce qui est là et là en fait et pour le vert c'est ce qui est là et là. P1 et P2 euh, **plot3d** euh ; le x pour les plans je l'exprime comment, je re-exprime les équations des plans comme tout à l'heure ; N : Tu mets x , y , $-x$; F : x , y et ? N : $-x$; F : Tu es sûr ? N : Ouais ; F : Tac et après euh x ;
« Il entre avec ces données et ça ne marche pas »
F : C'est justement ce qu'on voulait pas tout à l'heure ;
« Ils effacent et changent les données, et P s'approche »

TC(410)

P : Tu es sûr que c'est ça ? Qu'est-ce que tu m'avais dis comme équations ? N : Euh $y = z$; P : $y = z$, et tu as l'impression que tu traces $y = z$ là ? F : $y = -z$; P : Ah, ça c'est mieux ... entre crochets toujours ; F : Ouais ; [...] et là je mets y , y ? ...
display ;
« ils entrent alors avec les instructions suivantes »

```
> p1:=plot3d([x,y,-y],x=-1..1,y=-1..1);
> p2:=plot3d([x,y,y],x=-1..1,y=-1..1);
> display(p1,p2,C1,C2)
```

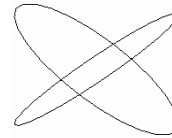


TC(456)

N : Attends ... ; F : Non, regarde pour ça, pour le rouge ce que tu veux enlever c'est ce qui est entre ce plan là et ce plan là ; N : Ouais ; F : Mais de ce côté-là et de ce côté-là ; N : Ouais c'est justement ce que je t'ai dis ; F : Et tu veux garder ce qui est en dessus et en dessous ? N : Alors !!! ... ;
F : On a trois équations ? Les équations de chaque plan, les deux équations des cylindres. « Blocage »

[...] ¹³⁶. « Ils entrent d'abord avec les instructions suivantes » ;

```
> q1:=plot3d([cos(theta),sin(theta), sin(theta)],
theta=0..2*Pi,u=0..1);
> q2:=plot3d([cos(theta),sin(theta),-sin(theta)],
theta=0..2*Pi,u=0..1);
> display(q1,q2);
```



TC(679)

P : Les deux plans vous les avez tracés ? F : Les deux plan ouais, nous les avons tracés mais euh, euh on arrive pas ah ; P : Où est-ce qu'ils sont vos deux plans ; N : Ils sont au-dessus là ; P : Ah, si d'accord, d'accord alors, si vous tracez là il y a pas, il y a qu'un seul paramètre ; B4 : Ouais ; P : C'est que vous avez tracé ces courbes ; F : Ouais on a voulu voir ce que ça donnait la courbe, mais ; P : Pour tracer une courbe il faudrait euh ça, ça serait bien, ça serait de le faire en **display** parce que là il trace une surface qui n'a pas d'épaisseur, puisque c'est indépendant de u , alors **spacecurve** ça serait mieux ça, tu as effectivement l'intersection exacte de ce qui est là, d'accord ? F : Hun ; P : Alors, maintenant regardez un petit peu ; Est-ce que possible de dire à Maple de garder... ; P : Le cylindre vert, d'accord. Donc sur, l'intersection de cylindre vert c'est ces points là, c'est effectivement ces coordonnées là **[cos(theta), sin(theta), sin(theta)]**, d'accord ? Qu'est-ce que je veux enlever ? Votre cylindre vous l'avez défini par ?
F : En fait on n'arrive pas à mettre en équation, par le cylindre vert ce qu'on veut enlever c'est ce qu'il y'a en dessus et au-dessous de euh, des deux plans ; P : Oui ; F : Et après euh ; P : Qu'est-ce que vous avez dessiné, vous avez dessiné, là vous dessinez c'est lui là, votre cylindre vert, **[cos(theta),sin(theta), z]**, ces valeurs de θ et de z , donc il allume à chaque fois qu'on prend une valeur de θ ou valeur de z il allume le point, d'accord ? B4 : Hun ; P : Qu'est-ce qu'il faut j'enlève ? N : Toutes les valeurs de z qui euh, qui correspondent plus, juste en haut ? P : Oui, alors on enlève les valeurs de z qui correspondent plus, c'est-à-dire les valeurs de z qui sont ? N : Euh, euh qui sont pas dans l'autre plan ; P : Qui correspondent plus, c'est-à-dire qui sont entre quoi et quoi ? F : Entre euh, euh ; P : Les deux plans ils ont quoi comme équations ? N : Ah ! C'est les valeurs de z qui sont

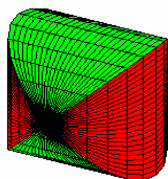
¹³⁶ Maintenant ils cherchent à décrire le crible géométrique de Q . C'est-à-dire ils commencent à chercher comment supprimer la partie qui ne faisant pas partie de l'intersection à l'aide de Maple. Ils savent les parties à supprimer, mais ils ne savent pas encore le réaliser avec Maple.

entre bah, ah, ah avec $y = z$ et $y = -z$; **P**: Oui; **N**: En fait ce qu'on veut enlever ce qui est à droite et à gauche; **P**: Donc ici c'est qu'on veut enlever...; **F**: Moins sinus, Pi sur euh, on peut exprime avec $\pi/4$? **P**: Bah non, pas $\pi/4$ pourquoi $\pi/4$? **N**: Bah, puisque on a le euh; **P**: ça ne correspond pas à ça. Par rapport à ton dessin... θ c'est pas l'angle du plan y avec z ; **F**: Ouais; **P**: θ c'est l'angle de euh entre Ox et Oy en coordonnées cylindriques, d'accord. Donc ici c'est pas ça, tu veux pas, c'est ce valeurs ici, c'est z ne peut pas être plus grand que $\sin\theta$, et z ne peut pas être plus petit que $-\sin\theta$, ne peut pas être plus petit que $-y$. Donc tu vas lui demander, la valeur de paramètre z , ce que tu vas regarder c'est que ce qui est compris entre $-\sin\theta$ et $\sin\theta$; **F**: Là donc que euh on dit juste z varie, au lieu de z varie de -1 à 1 , comme on faisait tout à l'heure, on peut lui dire que euh z de varie de $-\sin\theta$ et $\sin\theta$; **P**: Bien sûr, oui tu peux, tu peux modifier ton deuxième paramètre en fonction du premier, d'accord? **F**: Ok! **P**: Donc c'est pas des courbes que tu traces, c'est une surface;

TC(750)

« Le binôme reste seul », « et à partir de cette intervention de P, ils reprennent la question 04 et commencent à entrer avec les instructions suivantes, qui résultent effectivement au solide Q criblé, mise à part l'inversion des couleurs de chaque cylindre par rapport à celui donné dans le tâche 02, selon TC410 »

```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),z],
theta=0..2*Pi,z=-in(theta)..sin(theta),
color=red);
> s2:=plot3d([cos(theta),y,sin(theta)],
theta=0..2*Pi,y=-sin(theta)..sin(theta),
color=green);
> display(s1,s2);
```



TC(790)

F: J' sais pas comment on intègre; « rires ». L'expression et puis l'expression on prend euh, faut qu'on prenne notre expression euh, l'expression qu'on a fait avec S1 et S2 quoi; **N**: C'est l'intégrale de 1 sur le volume; ce qui va être chiant c'est de mettre le domaine; **F**: Justement le domaine c'est euh « blocage » ... Hun! Hun! Hun! Le domaine, le domaine ... nous on l'a c'est S1 et S2? C'est ce qui est à l'intérieur, c'est les bornes. Si t'intègres ton volume direct je suis pas sûr que ça va pouvoir nous faire une intégrale triple; **N**: Intégration le volume en paramètre? **F**: Hun... le volume élémentaire... ρ et θ , ρ et

$\sin\theta\sin\phi$; **N**: T'arrives à nommer le volume par l'intégrale de 1 sur ça; **F**: Quoi, intégrale de 1 sur le volume ... « blocage ».

TC(829)

N: Bon, comment on peut délimiter le volume? **F**: C'est le truc, le truc de euh, de ρ je pense « rires » si on a fait le volume c'est pas pour repartir en sphérique. Là tu dois pouvoir avoir délimiter le volume; **N**: Là on a le domaine limite ...

TC(841)

F: Je en fait, je ... de dire dx , dy et dz Je suis pas sûr qu'on puisse intégrer sur, sur travail ... « Ils ont des difficultés pour exprimer l'intégrale triple dans Maple »

TC(887)

N: On dirait qu'il marche avec une variable si on le laisse comme ça; **F**: On fait trois fois: une première par rapport à x , une deuxième par rapport à y et la troisième par rapport à z ; **N**: C'est toi qui mets ça sur papier, moi j'essaie de tracer ce que je peux après; **F**: Et si tu fais l'intégrale de 1, 1 sur notre volume? Faut qu'on arrive à l'exprimer en fonction les unes les autres $1 dx dy dz$? **N**: Je ne sais pas ...; **F**: On essaie? **N**: Commence par z ; **F**: Par z ? **N**: Tu mets 1, z et z égale ...; **F**: Après j'intègre par rapport à y ;

« Ils entrent avec les instruction suivantes qui résulte en zéro »

```
> v:=int(int(int(1,z=-y..y),
y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)), x=-1..1);
```

0

N: Bien on a un joli volume; **F**: Zéro; **N**: Zéro « rires ».

« Pour voir l'écriture de cette intégrale, ils entrent la même instruction en remplaçant i par grand i »

```
> v:=Int(Int(Int(1,z=-y..y),
y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)), x=-1..1);
```

$$v := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^y 1 dz dy dx$$

F: Hun, hun...; **N**: On change euh; « Intervention de P à toute la classe, voir TC(958) séance 2 ».

TC(+13)

P: Alors, attends ici avant de, ouais là vous revenus en coordonnées euh, euh, paramétriques alors, moi ce qui j'aurais aimé c'est que vous me définissez déjà le domaine, remarquez pourquoi pas, euh x , z variant entre $-y$ et y oui; **F**: Là on fait un truc brut mais de toute façon il nous donne 0 donc ...; **P**: y variant entre? ... Ce qui me, ce qui me gêne un petit peu c'est que je ne vois pas quel domaine vous êtes en train de calculer? Exprimez-moi,

proprement le volume que vous êtes en train de calculer, c'est le volume global, c'est la moitié, c'est le tiers de ce que vous cherchez à déterminer, etc. Pour le tracer on la paramétré en cylindrique ; **N** : Ouais ; **P** : C'est un peu bizarre d'aller recalculer une intégrale cartésienne, alors qu'a priori on était en cylindriques ; **N** : Hun ; **P** : Alors, sinon y , pourquoi y variant entre ..., vous m'avez pas dit entre... ; **N** : C'était un truc brut, histoire de voir ce que ça donnait ;

TC(+43)

F : ... sinon $\rho d\rho d\theta$ ah en cylindrique; **N** : un truc en cylindrique ?

« *P regarde sur l'instruction de TC887 et dit* »

P : Il y a sûrement un problème de signe par rapport à ce que vous intégrez ; **N** : Ouais ; **P** : C'est-à-dire que sans doute à un moment vous écrivez que vous intégrez de $-y$ à y et comment ensuite vous changez le signe, vous inversez les intégrales alors, il faut normalement quand vous intégrez, une intégrale de volume, il faut toujours aller de la plus petite à la plus grande borne, comme y vous ne le prenez pas que sur un domaine positif. D'accord, vous n'allez pas tout le temps de la plus petite à la plus grande borne. Donc dans votre intégrale, elle ne correspond pas au volume, d'accord. Donc, il faudrait, c'est juste euh, l'idée globale est juste sauf que y a certain domaine où vous intégrez de 5 à -5 , donc comme la partie, pour des raisons de symétrie, tu regardes un petit peu la courbe que vous avez là, le volume que vous avez là, d'accord ? Vous, vous comptez de façon positive ce que vous avez d'un coté et négatif ce qui est de l'autre côté, donc c'est normal que votre volume globalement soit égal à zéro, d'accord. Donc il faudrait regarder, ce que vous êtes en train de faire là, quand vous calculez ça vous calculez le volume de la partie rouge, je crois, d'accord ? Et toute la partie rouge, donc délimitée par mes deux carrés, d'accord ? Ce qu'on va faire, c'est dire que c'est deux fois la partie qui correspond que y positif. Ce qui est très gênant c'est cette histoire-là, j'intègre de $-y$ à y , c'est ici que c'est faux déjà, parce que y vous le faites varier entre deux valeurs positives, enfin deux valeurs négatives, donc quand y est négatif ici vous intégrez de la plus petite à la de la plus grande borne à la plus petite, donc c'est pour ça que votre truc devient nul, parce que vous intégrez 1 , si vous faisiez une bonne intégrale de volume, ça va pas avoir un volume nul, d'accord ? **N** : valeur absolue ; **P** : Eventuellement on met le valeur absolue ; [...] ; « *Le binôme change alors les bornes de z de $-y$ à y en $-abs(y)$ à $abs(y)$ dans l'instruction de TC887 et ils ont obtenu $8/3$* »

> $v := \text{int}(\text{int}(\text{int}(1, z = -abs(y) .. abs(y)), y = -\text{sqrt}(1-x^2) .. \text{sqrt}(1-x^2)), x = -1 .. 1)$;

8/3

« *Pour voir l'écriture de cette intégrale, ils entrent la même instruction en remplaçant i par $grand\ i$* »

> $v := \text{Int}(\text{Int}(\text{Int}(1, z = -abs(y) .. abs(y)), y = -\text{sqrt}(1-x^2) .. \text{sqrt}(1-x^2)), x = -1 .. 1)$;

$$v := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^y 1 dz dy dx$$

TC(+96)

P : Le volume total, ça serait quoi ? Ça c'est une huitième ; **F** : Le volume total euh ; **P** : Est-ce que vous avez calculé tout le volume là ? **N** : pas sûre ; **P** : Là vous avez fait varier z de moins valeur absolue de y à plus valeur absolue de y , donc vous avez un solide qui est coincée entre ces deux plans là ; **F** : C'est 4 fois, 4 fois ce volume. Nan ? C'est ça ? **P** : Ça c'est la même chose de l'autre coté puisque y varie de moins racine de $1-y^2$ à plus racine de $1-y^2$; **F** : Donc à ce moment là... ; **P** : Donc y on l'autorise à être négatif effectivement, tu, tu..., vous avez délimité le volumes des parties qui sont délimitées par la surface rouge ; **N** : ... et bleu donc c'est pas quatre nan ? Au total ; **P** : Nan, vous avez toute la partie rouge, ça fait ça et ça ; **F** : Ouais, mais on aurait ce volume là donc en entier ; **P** : Et il me manque ça et ça ; **F** : Voilà, c'est le même ; **P** : Oui, enfin vous allez diviser par deux nan ? **F** : En tout c'est ... ; **P** : Vous avez calculé tout ça, y vous l'avez autorisé avec y positif c'est là, y négatif c'est là ; **N** : d'accord, donc fois deux ? **P** : Fois deux. Si vous aviez mit entre 0 et racine de, là effectivement il fallait multiplier par 4 , et si vous aviez voulu être sûre de tout ce que vous dites, vous vouliez faire varier z donc la partie z , ça, ça correspond à ça z entre 0 et y , y variant en 0 et racine [cubique ... euh] racine de $1-x^2$, x variant entre 0 et 1 , comme vous avez juste un tout petit morceau et tout se définit bien et après on aurait multiplié par 16 . Alors ce qu'on peut faire c'est de regarder, on aurait pu le faire en utilisant un petit peu ce qui a été fait au-dessus, c'est-à-dire en regardant en coordonnées cylindriques, d'accord ? C'est-à-dire définir déjà, tracer juste le morceau sur lequel vous voulez avoir l'intégrale, d'accord ? Au lieu de tracer tout ça, tracer juste le volume que vous voulez calculer, d'accord ? Par exemple si vous voulez tracer le volume vert juste la partie qui vous intéresse, le petit, le petit morceau de volume qui vous intéresse, d'accord ? Et après regarder entre quoi et quoi varient les paramètres... ;

TC(+150)

F : Vous savez que, en cylindrique, le z le dz il faut l'exprimer en fonction de z ? C'est $\rho d\rho d\theta dz$?
« *Après cette intervention de P le binôme entre alors avec les instructions suivantes qui résulte en une expression algébrique ou fonction $v(\theta)$* »

TC(+198)

N : On essaie en cylindrique ? **F** : Ouais ; **N** : Jacobien est ρ ; **F** : ça ok « rires » ; **N** : intégrale de ρ ; **F** : Il faut juste définir $\Phi^{-1}(D)$;

« ils tapent sur clavier »

F : Intégrale de euh ; **N** : ρ ; **F** : J' sais pas comment on l'écrit par contre ; **N** : On va faire ρ , c'est pas de ρ mais bon, ρ attends ... ; **N** : On fixe z d'abord et puis euh ; **F** : On va délimiter le euh, on va prendre juste euh, on va tout écrire d'un coup ; **N** : On prend, on va essayer d'exprimer x et y ; **F** : On prend les symétries pour d'abord délimiter euh ; **N** : On va couper en 8 ; **F** : 8 ouais, c'est pas grave ; « c'est quoi ça ? ». J'ai mis un ρ je ne sais pas comment écrire ρ , « r h o » ; **F** : ρ euh, euh de 0 à ? ... de 0 à 1 ; **N** : Il va jusqu'en 1 ? **F** : Le cylindre euh de diamètre 1. De 0 à 1, x euh ; **N** : θ ? **F** : θ euh varie de euh, de 0 à π ; **N** : π ou $\pi/2$? **F** : π , et z varie de euh ... de 0 à $\sin\theta$ je crois ; **N** : comme ça ? **F** Ouais ;

> **v:=int(int(int(rho,rho=0..1),
theta=0..Pi), z=0..sin(theta));**

$$v:=(\pi/2)\sin\theta$$

N : Il y a encore un petit problème là « rires » ;
« Voici avec grand **i** l'écriture de cette intégrale »

> **v:=Int(Int(Int(rho,rho=0..1), theta=0..Pi),
z=0..sin(theta));**

$$v:=\int_0^{\sin(\theta)} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

« Ils regardent les instructions fournies à Maple »

TC(+293)

N : Quand t'es là, t'es sûr que ton ρ vaut 1 ; **F** : A chaque fois que tu es sur le vert ou sur le rouge ρ vaut 1, c'est le cylindre de rayon 1 ; **N** : z varie de euh 0 ... ; **F** : Moi je suis ... d'accord ... ; « blocage »

TC(+316)

F : Là, mettre $\rho \sin\theta$. Tu l'inverses, tu mets le ρ en dernier ; **N** : Le ρ en dernier ? **F** : Hun ; **N** : comme ça ? **F** : Hun ;
« Ils inversent alors les positions des bornes de ρ et de z dans la ligne de commande qui résulte en 2/3 comme suit et ils ne savent pas comment valider ou réfuter ce résultat »

> **v:=int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi), rho=0..1);**

$$v:=2/3$$

« Voila avec grand **i** l'écriture de cette intégrale »

> **v:=Int(Int(Int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi), rho=0..1);**

$$v:=\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\rho \sin(\theta)} \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

TC(+340)

N : deux tiers ! « Rires » **F** : deux tiers ! « Rires » ;
« Vous faites souvent ce type d'exercices ? »
F : Pardons ?
« Vous fêtez souvent ce type des exercices ? »

F : Euh, euh ! Non !

« Les intégrales multiples ? »

F : Géo, géométrie sur Maple on en fait de temps en temps, mais euh, volume et autre on en a pas fait si souvent que ça ;

« D'accord » ;

« Est-ce que ça c'est la partie la plus petite qu'on puisse découper ? »

TC(+375)

F : On peut aller jusqu'à $\pi/2$ non ?

« Vous avez fait quoi ? »

N : Le euh, la moitié de ..., $1/4$ de euh, de tout le volume. On peut encore le couper en deux ; **F** : On met θ jusqu'à $\pi/2$? **N** : Ouais ;

O : Vous avez utilisé des logiciels en géométrie ?

F : Géométrie Maple ... plus pour tracer des quadriques euh, plus pour tracer des quadriques, ce genre des choses ; « d'accord » ; surfaces un peu aussi, on fait tout avec Maple ;

« d'accord », « tous les élèves dans ce... ? »

F : Euh, euh, non ! Une petite partie, par exemple même dans la classe là, y pas beaucoup de personnes qui vont au cours de Maple, parce qu'il y'a qu'une partie des concours où on a besoin de Maple, donc tout le monde ne suit pas forcément Maple, puisque euh, je fais pas le concours donc, bon bah c'est pas la peine d'aller au cours de Maple ; « d'accord ».

« Ensuite ils entrent avec les instructions suivantes en modifiant les bornes de θ dans la ligne de commande qui résulte en 1/3 comme suit et ils ne savent pas encore comment valider ce résultat »

> **v:=int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi/2),rho=0..1);**

$$v:=1/3$$

« Ensuite c'est F qui donne le résultat correct en multipliant par 8 le résultat obtenu dans la sous tâche TC(+316) » selon leur fichier de travail »

> **V := 8*v**

$$V := 16/3$$

FIN (Binôme 04)

Séance 2

1.1..16 Binôme 6 : Etudiant B et Etudiant D

TC(022)

D : Les équations paramétriques... ; **B** : On a ... ;
« Intervention de P à tout la classe (cf. TC002, B2) ».

TC(055)

D : Les équations paramétriques ;
« Il écrit sur le brouillon ; ... intervention de P (cf. TC069, séance 2) »
D : Paramétrique, comme on dit ? **B** : Il suffit d'écrire euh paramétrique c'est ... ; **D** : Tu mets x est égale à racine de "machin" ? **B** : Hum ; **D** : ... ; **B** : Ouais si tu veux ; **D** : C'est un peu plus simple que des racines de $1-x^2$; **B** : Ouais, ouais, ouais ; **D** : $1-x^2$; ... ;

« Ils écrivent sur les brouillons »

B : Tu as oublié le ρ , si tu l'écris en polaire $x = \rho \cos \theta$; **D** : C'est quoi S1 ? **B** : Tu l'écris en polaire $x = \rho \cos \theta$; **D** : Oui, mais ρ c'est 1 ; **B** : J'sais pas ; **D** : Puisque ... égale à 1, égale à 1 ... ; **B** : Ah ! Ouais, ouais ; **D** : Je vais l'écrire parce que ... ;
« Ils entrent avec les premières instructions dans Maple »

TC(107)

D : **plot3d** ... ; **B** : x tu mets $\cos(t)$; **D** : Enfin on va faire plus court, on va mettre ... virgule $\sin(t)$; **B** : $\sin(t)$ et l'autre ? ... ; **D** : t égal 0 deux points 2π , majuscule à P ; **B** : Ah, ouais, ouais ; ... z ça va être quoi ? ... ; **D** : z égale à -1 à 1 ? **B** : Ouais ; ... ; **D** : Bon ; **B** : C'est bon ;

« Ils arrivent à tracer le premier cylindre »

TC(151)

B : Pour faire la même chose, on va inverser le euh ; **D** : Inverse z euh ; **B** : Attends, j'sais pas si, on va essayer de faire ça directement dans le même euh ... ;

« Ils arrivent à le deuxième cylindre » ; « Pour avoir les deux en même temps il faut utiliser la fonction **display** »

TC(207)

D : **display** ? **B** : **display** ;
« Intervention de P Il parle de la fonction **display**, (cf. TC207, séance 2) »

D : C1, mets C1 ... Tu mets **display**, accolade, virgule **color** égale ... tu mets **black**

TC(321)

D : Montrez que C1 et C2 se coupent sur deux plans dont on donnera les équations ;

O : Il lit la 3^{ème} question de l'énoncé ; **B** : Donc ils se coupent sur ce plan et ce plan ; **P** : Bon alors, donc là vous avez délimité ... euh donc le problème maintenant : on dit C1 et C2 se coupent sur deux plans dont on va chercher des équations, premièrement moi je voudrais avoir les équations de mes plans, déterminer l'équation, regarder un petit peu comment ça se passe et puis on va les tracer toujours sur le même dessin, donc on pourra rajouter **display** etc. Et puis une fois qu'on aura les intersections mon idée ça va être de regarder, de se débrouiller pour enlever ce qu'on voit là finalement, pour garder que ce qu'on voit pas, au-dedans là, la partie jaune qu'est à l'intérieur celle qui est là, là, ce col-là, celui-là il faut que l'enlever, d'accord ?

TC(350)

B : Les deux plans d'intersections ; **D** : ... ; **B** : Il ne faut deux plans d'intersections dans ce truc ; ... ; **D** : Je vois pas trop ton histoire en fait, x en fin ton plan euh, sur les axes de euh ; **B** : Non, mais euh ; ...¹³⁷

TC(371)

D : Equations des plans ... Les équations des plans donc euh ... ; **B** : Deux égale, alors le plan 1, c'est quoi ? ... x est égal "machin" ... c'est quoi c'est z donc là je mets euh 0 ou euh, on fait varier y de 0 à 0 quoi ? C'est une solution ? **D** : Hum, Hum ; ... x tu le fais varier de -1 à 1 ; **B** : -1 à 1 ? **D** : Parce que c'est dans le cube donc euh ; **B** : Ah, ouais, ouais ; **D** : Et z ? **B** : Tu ne veux pas qu'on met y , et y égale à 0 ? Comme ça on sera sûr, parenthèse, point virgule ... ; **B** : On fait la même chose non ? **D** : Ouais ... c'est $x=0$; **B** : C'est $x=0$? **D** : Bah, non ; **B** : Ou c'est z ;

« En fait ils entrent avec les instructions suivantes, pour essayer de tracer les deux plans »

```
> plot3d([t,y,t],t=-1..1,y=0);
> plot3d([t,t,z],t=-1..1,z=0..0);
Error, (in plot3d/expression) bad range
arguments: t = -1..1, y = 0
Error, (in plot3d) ranges must be non-empty
```

TC(434)

B : Non, non on va virer P1 et P2 pour voir si déjà il nous met le bon truc ... ; **D** : Attends, les équations ça va être une avec z donc ça sera $x = y$, ... ; **B** : Si on met directement $y = 0$ ou euh $z = 0$ quoi ; **D** : Bah, 0 c'est pas possible que ça marche mais euh ... ; Pourquoi tu ne laisses pas θ et z là, tu

¹³⁷ Ils cherchent les moyens pour tracer les deux plans.

rentres euh, euh tu mets z euh ; **B** : z égal 0 ? Ah ! Non, ça va faire pareil que comme tout à l'heure quoi ... ; Non, on peut dessiner ça comme ça en mettant x , $x=-1$ à 1 et $y=0$; **D** : Mais $y=0$ il ne veut pas ; **B** : il faut qui ...¹³⁸ Pourquoi il n'accepte pas de 0 à 0 ?

« Vous avez déterminé les équations de ces plans ? »

TC(558)

B : Il y a une où $z=0$ et une t euh ; **D** : $y=0$; On a un plan comme ça et l'autre comme ça ;

« Regardez avec les équations cartésiennes »

B : $[t, t, z]$;

« Pour les tracer vous pouvez les tracer, c'est pas x , c'est $y=z$, $x^2+y^2=1$, donc ça fait $y^2-z^2=0$, donc $y=z$ ou $y=-z$, ça pour le tracer c'est suffit de prendre `plot3d` et mettre x quelconque. Après cette intervention ciblé de l'observateur, le binôme procède comme suit »

TC(601)

D : Comme tu as mis $y=0$ il faut le **restart** ; ... ; **B** : Euh, euh on fait **restart** ici ... ce que nous avons dit tout à l'heure c'était ? **D** : $y=-z$... ;

« Vous tracez x , y , z en fait c'est $[x, y, y]$ avec x variant de -1 à 1 par exemple ... Après l'autre plan c'est le même, $[x, y, -y]$... vous les nommez et après vous mettez les `display` »

« Ils entrent d'abord dans Maple les instructions suivantes »

```
> p1:=plot3d([x,y,y],y=-1..1,x=-1..1,color=black):
p2:=plot3d([x,y,-y],y=-1..1,x=-1..1,color=black):
> display({p1,p2});
```

TC(736)

« Maintenant ce qu'il faut arriver à faire c'est à virer ces bouts là qui ne font pas partie de l'enveloppe du solide, dont on va calculer le volume, le but c'est quand même de calculer le volume du solide, le volume à l'intérieur de l'intersection des deux cylindres, donc il faut virer cette partie là, cette partie là et tout ce qui est là et cette partie là, donc commencer peut-être par le jaune par exemple ..., donc il faut arriver à trouver dans les points de l'enveloppe du cylindre là, ceux-là comment ils se particularisent ?, il faut arriver à trouver dans la façon de tracer la limitation qui fait qu'on peut pas avoir les parties là, quand vous faites `plot3d`, le truc qu'il faut savoir, quand vous fait là, les valeurs de x et de y ne peuvent dépendre l'une de l'autre, c'est-à-dire que là par exemple vous pouvez avoir x en fonction de y , l'avantage de `plot3d` c'est qu'on peut très bien déterminer le, l'intervalle de variation d'un variable en fonction

¹³⁸ Les difficultés pour tracer les deux plans continuent.

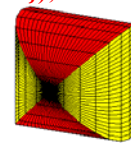
de l'autre, c'est pas forcément des valeurs fixe »

TC(756)

D : Ok ! Donc là on a ... ; **B** : Alors ... ; **D** : Donc ... ; **B** : On vire tout ce qui est au-dessus de l'intersection des deux plans en fait euh ... ; **D** : Les axes sont comment ? Celui-là c'est l'axe des x , comme ça ? **B** : Hum ; ... ; **D** : Celui-là c'est y , si tu me les bouges à chaque fois je ne vais pas y arriver ; ... ; **B** : Il faut qu'on trouve une fonction pour dire que tous ce qui est au-dessus de l'intersection de ces deux plans ... Ah ! Attends on va plutôt donner à y une fonction euh à y une fonction de x en fait, qui sera l'équation de ça. Donc on va reprendre notre cylindre. Il faut faire deux trucs différents en fait sur euh suivant si c'est -1 , si c'est $+1$ [...] ¹³⁹ ; **D** : Il faut oh ! Il faut que tu vires z qu'est plus grand, ça c'est euh c'est ton **sinus**, il faut garder les z qui sont entre ton **sinus** et moins le **sinus** en fait ; il me semble que c'est ça, tu gardes que les z qui sont compris entre euh, entre moins sinus et le sinus ; **B** : moins sinus et le sinus ? **D** : Ouais. Il me semble ; **B** : Si, mais euh je ne vois pas ce que vient faire **moins sinus** et le **sinus** ? **D** : **sinus** c'est ce que t'as défini euh, c'est ton y ; **B** : Ouais, ouais je suis d'accord ; **D** : Il faut que tu vires le euh

« Ils arrivent à entrée avec les instructions suivantes »

```
> C11:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,
z=-sin(t)..sin(t),color=yellow):
> C22:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-sin(t)..sin(t),color=red):
> display({C11,C22});
```



TC(856)

D : Tu connais une fonction volume ? **B** : Non, mais il y a une fonction avec, par contre il faut savoir ah, mais il l'a pas trouvé donc euh ; **D** : Le volume de ça ? **B** : Bah, voilà fait **with (geom3d)** et volume de euh, le volume de **display** ? **D** : Bah il suffit de définir ton oh, oh ton V comme `display` de "**machin**" ? **B** : Ouais, ouais on va essayer « il entre avec les instructions suivantes pour chercher le volume de Q , mais ça ne marche pas »

```
> with(geom3d):
> v:=display({C11,C22}):
volume(v);
Error, (in volume) wrong type of arguments
```

¹³⁹ Ils cherchent les moyens pour décrire le crible géométrique. Même avec l'intervention précédente d'observateur ils trouvent difficultés pour y arriver à décrire et de traduire dans Maple.

TC(878)

P: C'est bon ? « *Il parle de la figure* » C'est bien ça, c'est bon. Volume, v ouais volume. Qu'est-ce que c'est que cette histoire-là « *rires de P* » Ah ! On peut essayer ; **B** : Nous avons tapé volume il a marqué ça ; **P** : Attendez je peu regarder qu'est-ce qui se passe un petit peu au-dessus, là on a presque fini. Bien alors, donc l'idée qu'on peut avoir maintenant, d'accord ? C'est de se dire ma ah, ma surface qu'est là, elle a visiblement quand même certaines symétries, d'accord ? **B** : On peut couper ça en deux ou ? **P** : Bah, on va couper de manière à se simplifier au maximum les calculs, c'est-à-dire on va essayer d'exploiter toutes les symétries qu'on voit pour tracer juste la partie qu'on va essayer de calculer le volume et puis après qu'on a vu toutes ces symétries-là bah on saura pas combien on a divisé le volume, je calcule le volume de ce qui reste d'accord ? Puis euh ... je ne connais pas l'expression **volume** je ne sais pas ce que ça fait ; **D** : Pour calculer le volume d'un cube y'avait ça comme exemple on s'est dit c'était possible à calculer mais euh ; **P** : ... toujours ... c'est terrible ça ... volume, attends montre-moi au-dessus, ça fait que des cubes ? "**object which is a sphere , a regular polyhedron**" ça marche pas trop ;

« *P lit les consignes de help du paquet (geom3d)* »

B : C'était pas mal quand même ; **P** : C'était pas mal « *rires* » A priori surtout à l'oral, pensez à ça, essayez d'éviter des fonctions qui sont prédéfinies parce que c'est pas ce qui va intéresser les examinateurs, les examinateurs essaient de voir comment vous utilisez les outils *Maple* pour exploiter vos connaissances Mathématiques, si vous avez un truc qui vous calcule le volume de la sphère sans même être capable de donner l'équation de sphère il y a très peu de chance pour que ce soit validé comme ça c'est la même chose quand on diagonalise une matrice, si vous tapez ... d'accord, ça fait tout, tout seul mais ça veut pas dire que vous avez été capable d'expliquer pourquoi *Maple* a donné ... Bon enfin on fait pas la diagonalisation, donc ici déjà un exploitons les symétries, exploitons les symétries, tracez-moi juste la surface qui délimite le volume que vous voulez calculer ;

TC(920)

D : Alors par une seule [...]. Je sais exactement ; **B** : Moi ... t'enlèves un cube, et t'enlèves euh $\frac{1}{4}$ de ça ; **D** : Et ce volume là c'est ? **B** : Attends ; **D** : T'as un cube comme ça et tu vires ça à chaque fois ... ; **B** : Moi je pense qu'il faut partir du cube et t'enlèves de, de euh bouts de chaque côté ; **D** : Ouais, voilà ouais, ouais en fait on fait le cube qui va delà, là, là et là Ecoute moi, l'avantage du grand cube, c'est que tu connais déjà le volume c'est 1 ; **B** : Ah ! Ouais ; **D** : Ah ! Ouais ...

« *Ils cherchent les moyens pour exploiter des*

symétries, discutent beaucoup et ne s'appuient pas sur le travail précédant qu'en effet perme c'est exploitation »

B : Donc ce cube là ... ; **D** : ... c'est sphère quoi ... ; **B** : A mon avis sincèrement je pense qu'il faut enlever ça ; **D** : Combien de façon ? **B** : Une fois, deux fois, trois fois, quatre fois, huit fois ... quatre fois ... tu retournes ; **D** : C'était huit fois ... normalement il faut trouver ça ... ça c'est le volume d'un cube ; **B** : ça c'est 1 moins le volume de la sphère ; **D** : En fait c'est deux fois la différence de ça, de 1 moins le volume ... ; **B** : Ah ! Ouais c'est ça ; **D** : Ah ! On a trouvé euh ; ON EST VRAIMENT TRES FORT ; **D** : Ça c'est parce qu'il y a le micro « *rires* » **B** : Ah ! Mais je croyais qu'il avait coupé l'enregistrement ; **D** : La sphère, la sphère elle a comme volume $4\pi/3$; **B** : ... deux fois ça allez ; ... ; **D** : On a une théorie mais ce n'est pas sûr que ce soit la bonne ; **B** : C'est un cube ; **D** : On a enlevé les angles là, c'est un cube moins une sphère en fait, et on a deux fois ce euh, cette différence ... « *rires* » ;

TC(975)

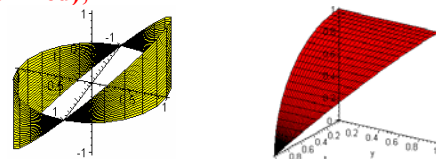
« *Mais pourquoi c'est une sphère, parce que les angles euh, attention vous avez pas des choses en sphérique, vous avez ces arêtes là* », « *là il faut utiliser une intégrale multiple, c'est pas des solides euh, là vous avez pas un solide classique, donc il faut trouver maintenant, le problème c'est d'arriver à un calcul de l'intégrale, le truc ... quand vous avez ... si vous cherchez un domaine d'intégration le problème c'est qu'il faut que vous retrouvez au-dessous déjà que sur du rouge ou sur du jaune. Vous avez vachement de symétries-là, vous avez des symétries par rapport à ce plan-là, vous avez des symétries par rapport à tous les axes des coordonnées, tous les plans des coordonnées, donc il faut arriver à découper ce truc-là en, chaque fois en deux, plusieurs fois pour arriver à un seizième de volume, maintenant il faut arriver à le mettre en place* »

TC(994)

B : Ce qu'on aura c'est ça, ça, ça. Donc je te propose qu'on le redessine sauf que là on fait de **0** à **sin(t)**, de **0** à **sin(t)** c'est ça ? **D** : Euh, ouais si tu veux ... ;

« *Ils entrent d'abord avec les instructions suivantes qui rendent respect. Les graphiques ci-dessous* »

```
> plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t),
color=yellow);
> plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t),
color=red);
```



TC(+74)

D : Ça, ça doit bien être le 1/16 ; **B** : Ouais ; **D** : Alors, maintenant on va faire l'intégrale. Intégrale triple, **integer** ;

« Avec Maple vous avez des possibilités de mener les calcul »

B : On va le faire à la main ... ; **O** : C'est un 1/16 ou c'est un 1/8 que vous avez ? **D** : C'est 1/8 ; **B** : Alors euh ... $\pi/2$? **D** : Ouais ; ... Alors c'est l'intégrale de cosinus de $x^2 + \dots$; **B** : Tu veux pas qu'on fasse dans Maple ça serait plus rapide ; **D** : Bon, fait le, fait le ; **B** : Intégrale c'est **integer** c'est ça ? **D** : y, quoi ? **integer** ; **B** : Comme ça ? ... ; **D** : Le problème c'est qu'en fait il faut que, dans notre équation là, dx "machin" dz , après il faut que t'aies un plan précis et un autre comme ça en fait, l'équation de ton plan ... l'intégrale il faut que tu la fasses entre euh, ce plan, ce plan et le plan euh, ... n'importe quoi déjà, ... $x^2=1-y^2$ dans le plan, des axes ... avec y appartenant à 0 à 1 et on a ah, ça, ça va être, on doit dire que c'est x , attends, attends il faut pas confondre les deux, ça, ça sera z , pour moi, je n'ai pas pris la bonne équation, donc forcément $x = y^2$ et t varie de 0 à 1 ?¹⁴⁰ ; **B** : Ouais ; **D** : Donc, ... égale à intégrale entre 0 et ... intégrale entre 0 et 1 dz ; « D'abord D écrit intégrale suivante sur le papier »

$$V = \iiint (x^2+z^2) dx dy dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^{(1-y^2)^{1/2}} dx$$

« Vous voyez bien que vous tenez pas du tout compte des deux cylindres les plans de l'intersection ... là vous allez avoir 1/16 du volume de l'intersection des deux cylindres »

TC(+182)

D : En fait il faudrait que je fasse varier ce, il faudrait que je mette la deuxième équation du plan, donc qui je fasse varier en fait euh mon z , qui je fasse varier de euh de l'équation qu'on a au-dessus en fait, donc z n'appartient pas ça en fait, appartient à 0 et euh « blocage » ... ;

« De toute façon dans la théorie des intégrales-là ..., ça s'interprète comme un produit des intégrales, c'est intégrale triple ça c'est un produit des trois intégrales simples que tu as écrites, les dx , dy et dz sont derrières »

D : Oui, je suis d'accord mais enfin, t'as pas pris ton cours correctement au la dernière fois ? **B** : Je

peux t'assurer que j'avais, qu'il les avait mis au début ; **D** : Alors on va le faire, le volume c'est euh.

TC(+212)

B : Ton z c'est quoi là bas ... ; **D** : Le volume est égal à l'intégrale de 0 à 1 ; **B** : 0 à 1, 0 à 1, 0 à $1-x^2$; **D** : A chaque fois j'ai deux fois la même chose quoi ; **B** : Moi j'ai mis deux fois de 0 à 1 ; **D** : Mais c'est ce que j'ai fait au début le problème c'est que ça tient pas compte de ça ; **B** : On va dire l'intégrale de 0 à 1 deux fois la même chose en fait ... ;

TC(+246)

« Intervention de P pour toute la classe, il parle du domaine $\Phi^1(D)$ de l'intégrale en coordonnées cylindrique, (cf. TC(+167), séance 2) ;

« Après cette intervention de P ils commencent à raisonner l'intégrale en coordonnées cylindriques »

TC(+278)

D : Bon alors, ... ; **B** : Tu l'écris là, tu mets $y=0$ à sinus ... ; **D** : ρ c'est égale à ah, ... ; **B** : z va varier de euh 0 à $\sin(t)$... tu as de 0 à 1 entre ρ , θ de 0 à $\pi/2$ et z de 0 à $\sin(t)$; **D** : J'suis pas sûr ; **B** : Pourquoi ? C'est bien ce qu'on a défini ; **D** : Ah ! Oui d'accord. Ah ! J'ne sais pas du tout, ... je ne suis pas tout à fait d'accord ;

O : B écrit sur le brouillon l'intégrale ci-dessous ;

$$V = \iiint dx dy dz$$

$$= \int_{y=0}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{z=0}^1 \int_{x=0}^1$$

Passage en cyl $V_T = \frac{16}{3}$

$$V = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_{\rho=0}^1 \left(\int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_0^{\rho \sin \theta} dz \right) d\theta \right) \rho d\rho = \frac{1}{3}$$

O : D écrit sur le brouillon l'intégrale ci-dessous ;

$$\frac{V}{16} = \int_0^1 \left(\int_0^{(1-x^2)^{1/2}} 1 \times \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy \right) dz dx$$

$$\frac{V}{16} = \iiint_{\Phi^{-1}(D)} \rho d\rho d\theta dz$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \rho \left(\int_0^{\rho \sin \theta} dz \right) d\rho \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{16}{3}$$

FIN (Binôme 6)

¹⁴⁰ Obs. Je ne vois pas où il écrit celle-ci. Ni dans les copies et ni dans le fichier Maple.

ANNEXE

VI

LES FICHIERS PRODUCTIONS MAPLE
DES ETUDIANTS

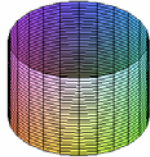


ANNEXE VI : LES FICHIERS PRODUCTIONS MAPLE DES ETUDIANTS

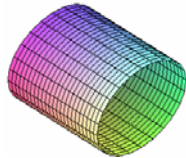
BINOME B1

```
> restart; with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined

> plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-10..10);
```

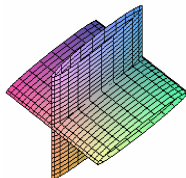


```
> plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-10..10);
```

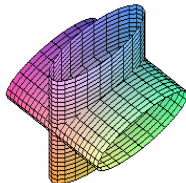


```
> plot3d([sin(theta),cos(theta),z],[sin(theta),y,
cos(theta)], theta=0..2*Pi,y=-10..10,z=-10..10);
Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional
argument: z = -10 .. 10
```

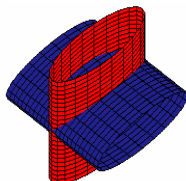
```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-10..10);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-10..10);
> display(s1,s2);
```



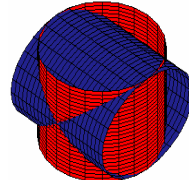
```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-3..3);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-3..3);
> display(s1,s2);
```



```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-3..3, color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-3..3, color=navy);
> display(s1,s2);
```

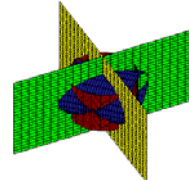


```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-1..1, color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-1..1, color=navy);
> display(s1,s2);
```

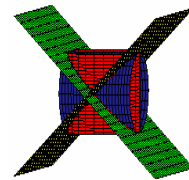


```
> s3:=[y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow);
s4:=[y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green);
display(s1,s2,s3,s4);
Error, (in display) invalid argument [y, y, z] which must
be a plot structure, or a list/set/array thereof
```

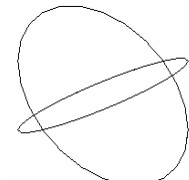
```
> s3:=plot3d([y,y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=yellow);
s4:=plot3d([y,-y,z],y=-2..2,z=-2..2,color=green);
display(s1,s2,s3,s4);
```



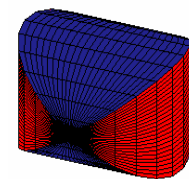
```
> s3:=plot3d([x,y,y],x=-2..2,y=-2..2,color=yellow);
s4:=plot3d([x,-y,y],x=-2..2,y=-2..2,color=green);
display(s1,s2,s3,s4);
```



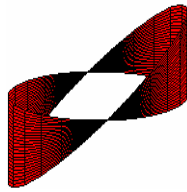
```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),cos(theta)],
theta=0..2*Pi, z=-1..1,color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),-cos(theta),cos(theta)],
theta=0..2*Pi, y=-1..1,color=navy);
> display(s1,s2);
```



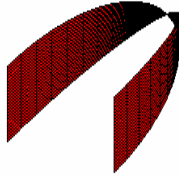
```
> s1:=plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-cos(theta)..cos(theta),color=red);
> s2:=plot3d([sin(theta),y,cos(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-cos(theta)..cos(theta),color=navy);
> display(s1,s2);
```



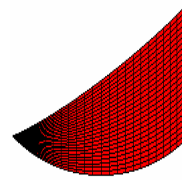
```
> plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=0..cos(theta),color=red);
```



```
> plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=Pi..2*Pi,
z=0..cos(theta),color=red);
```



```
> plot3d([sin(theta),cos(theta),z],theta=0..Pi/2,
z=0..cos(theta), color=red);
```



```
> integer([sin(theta),cos(theta),z],theta=-Pi/2..Pi/2,
z=0..cos(theta));
```

```
integer([sin(theta),cos(theta),z],theta=-1/2*Pi..1/2*Pi,z=0..cos(theta))
```

```
> int([sin(theta),cos(theta),z],theta=-Pi/2..Pi/2,
z=0..cos(theta));
```

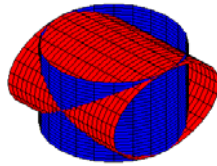
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments

```
> Int(rho,theta=0..Pi/2,z=0..rho*cos(theta),rho=0..1);
```

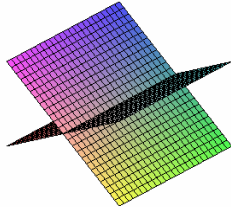
```
Int(rho,theta=0..1/2*Pi,z=0..rho*cos(theta),rho=0..1)
```

FIN BINOME B1

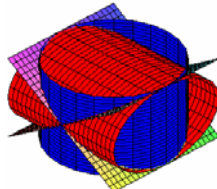

```
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-1..1,color=red):
display(S1,S2);
```



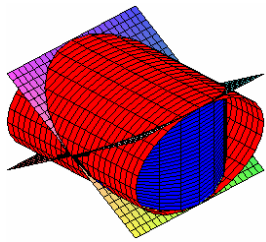
```
> p1:=plot3d([x,y,-y],x=-1..1,y=-1..1):
p2:=plot3d([x,y,y],x=-1..1,y=-1..1):
display(p1,p2);
```



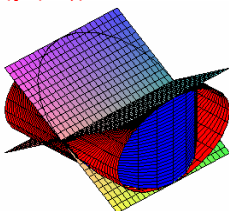
```
>S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,
z=-1..1,color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-1..1,color=red):
display(S1,p1,S2,p2);
```



```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,
z=-sin(t)..sin(t),color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-1..-sin(t),y=sin(t)..1,color=red):
display(S1,p1,S2,p2);
Error, (in plot3d/options3d) unknown or bad optional
argument: y = sin(t) .. 1
```

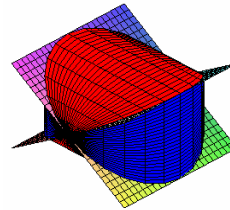


```
>S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,
z=-sin(t)..sin(t),color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
y=-1..-sin(t),color=red):
S3:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=sin(t)..1,
color=red):
display(S1,p1,S2,p2,S3);
```

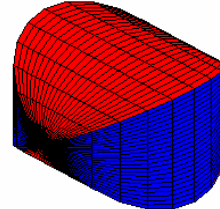


```
>S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,
z=-sin(t)..sin(t),color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,
```

```
y=-sin(t)..sin(t),color=red):
display(S1,p1,S2,p2);
```



```
> display(S1,S2);
```



```
> int(int(int(x^2+y^2),x=-1..1),z=-1..1),y=-z..z);
Error, ')' unexpected
> int(int(int(x^2+y^2),x=-1..1),z=-1..1),y=-z..z);
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments
> int(int(int(x^2+y^2-1),x=-1..1),y=-z..z),z=-1..1);
Error, (in int) wrong number (or type) of arguments
```

```
> int((x^2+y^2-1),x=-1..1);
```

$$-\frac{4}{3} + 2y^2$$

```
> int(% ,y=-z..z);
```

$$-\frac{8}{3}z + \frac{4}{3}z^3$$

```
> int(% ,z=-1..1);
```

$$0$$

```
> int(-8/3*z+4/3*z^3,z=0..1);
```

$$-1$$

```
> a:=int((x^2+y^2-1),x=-1..1);
```

```
b:=int(a,y=0..z);
```

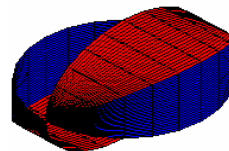
```
c:=int(b,z=0..1);
```

$$c := \frac{-1}{2}$$

```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t),
color=blue):
```

```
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=0..sin(t),
color=red):
```

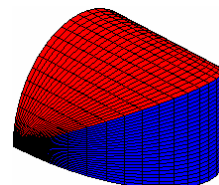
```
display(S1,S2);
```



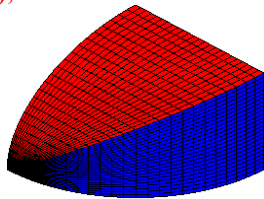
```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..Pi,z=0..sin(t),
color=blue):
```

```
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi,y=0..sin(t),
color=red):
```

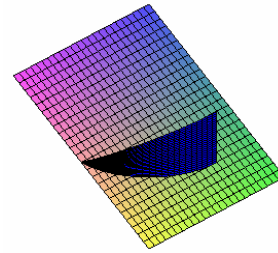
```
display(S1,S2);
```



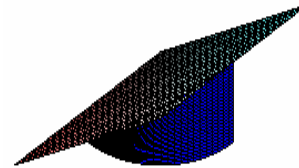
```
> S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..Pi/2,z=0..sin(t),
color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t),
color=red):
display(S1,S2);
```



```
>S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..Pi/2,z=0..sin(t),
color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t),
color=red):
display(S1,p1);
```



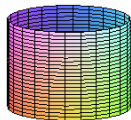
```
>S1:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..Pi/2,z=0..sin(t),
color=blue):
S2:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t),
color=red):
display(S1,p2);
```



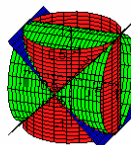
FIN BINOME B2

BINOME B3

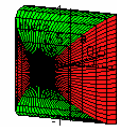
```
> restart:
> with(plots):
> plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=-Pi..Pi,
a=-3..3);
```



```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],
theta=-Pi..Pi, a=-1..1,color=purple):
s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)],theta=-Pi..Pi,
a=-1..1,color=green):
p1:=plot3d([b,a,a],a=-1..1,b=-1..1,color=yellow):
p2:=plot3d([b,a,-a],a=-1..1,b=-1..1,color=blue):
display(s1,s2,p1,p2);
```



```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],
theta=-Pi..Pi,a=-sin(theta)..sin(theta),
color=purple):
s2:=plot3d([cos(theta),a,sin(theta)],
theta=-Pi..Pi,a=-sin(theta)..sin(theta),
color=green):
p1:=plot3d([b,a,a],a=-1..1,b=-1..1,color=yellow):
p2:=plot3d([b,a,-a],a=-1..1,b=-1..1,color=blue):
display(s1,s2);
```



```
> ?int
```

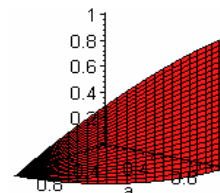
```
>
```

```
16*Int(Int(Int(rho,z=0..sin(theta)),theta=0..Pi/2),
rho=0..1);
```

$$16 \int_0^1 \int_0^{1/2 \pi} \int_0^{\sin(\theta)} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho$$

```
>
```

```
s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),a],theta=0..Pi/2,
a=0..sin(theta),color=purple):
display(s1);
```

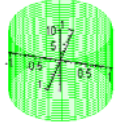


```
> 16*int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi/2),rho=0..1);
```

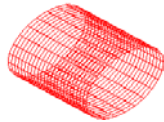
$$\frac{16}{3}$$

FIN BINOME B3

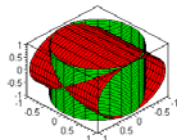
```
> restart;
> with(plots);
> plot3d([cos(theta),sin(theta),z],theta=0..2*Pi,
z=-10..10,color=green);
```



```
> plot3d([cos(theta),y,sin(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-10..10,color=red);
```

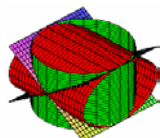


```
> C2:=plot3d([cos(theta),y,sin(theta)],
theta=0..2*Pi,y=-1..1,color=red);
> C1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),z],
theta=0..2*Pi,z=-1..1,color=green);
> display({C1,C2});
>
```



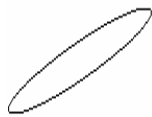
on veut supprimer les "bouts" qui dépasse...

```
> p1:=plot3d([x,y,-y],x=-1..1,y=-1..1);
> p2:=plot3d([x,y,y],x=-1..1,y=-1..1);
> display(p1,p2,C1,C2);
```

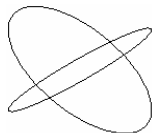


pour C1, on supprime ce qui est au dessus et en dessous des plans

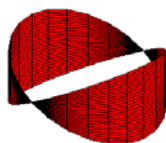
```
> q1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),sin(theta)],
theta=0..2*Pi,u=0..1);
> display(q1);
```



```
> q2:=plot3d([cos(theta),sin(theta),-sin(theta)],
theta=0..2*Pi,u=0..1);
> display(q1,q2);
```

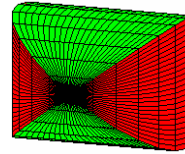


```
> s1:=plot3d([cos(theta),sin(theta),z],theta=0..2*Pi, z=-
sin(theta)..sin(theta),color=red);
> display(s1);
```



```
> s2:=plot3d([cos(theta),y,sin(theta)],theta=0..2*Pi,
y=-sin(theta)..sin(theta),color=green);
```

```
> display(s1,s2);
```



```
> v:=int(int(int(1,z=-abs(y)..abs(y)),
y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);
v := 8/3
```

```
> v:=Int(Int(Int(1,z=-y..y),
y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);
```

$$v := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-y}^y 1 \, dz \, dy \, dx$$

```
> v:=Int(Int(Int(1,z=-abs(y)..abs(y)),
y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);
```

$$v := \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-|y|}^{|y|} 1 \, dz \, dy \, dx$$

```
> v:=int(int(int(rho,rho=0..1),theta=0..Pi),
z=0..sin(theta));
```

$$v := \frac{1}{2} \pi \sin(\theta)$$

```
> v:=int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)),theta=0..Pi),
rho=0..1);
```

$$v := \frac{2}{3}$$

```
> V:=8*v;
```

$$V := \frac{16}{3}$$

```
> v:=Int(Int(Int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi),
rho=0..1);
```

$$v := \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{\rho \sin(\theta)} \rho \, dz \, d\theta \, d\rho$$

```
> v:=int(int(int(rho,z=0..rho*sin(theta)),
theta=0..Pi/2),rho=0..1);
```

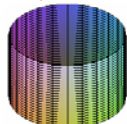
$$v := \frac{1}{3}$$

FIN BINOME 4

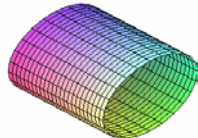
```
> restart;
> with(plots):
> x1:=theta->cos(theta);
y1:=theta->sin(theta);
z1:=theta->theta;
      x1 := cos
      y1 := sin
      z1 :=  $\theta \rightarrow \theta$ 
> x1(0);
      1
> x2:=theta->cos(theta);
y2:=theta->theta;
z2:=theta->sin(theta);
      x2 := cos
      y2 :=  $\theta \rightarrow \theta$ 
      z2 := sin
```

```
> S1:=[x1(theta),y1(theta),z1(theta)];
S2:=[x2(theta),y2(theta),z2(theta)];
> restart;
> x1:=t->cos(t);
y1:=t->sin(t);
z1:=u->u;
      x1 := cos
      y1 := sin
      z1 :=  $u \rightarrow u$ 
```

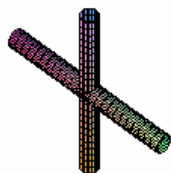
```
> S1:=plot3d([x1(t),y1(t),z1(u)],
t=0..2*Pi,
u=-10..10);
> S11:=[x1(t),y1(t),z1(u)];
> plot3d(S11,t=0..2*Pi,u=-10..10);
```



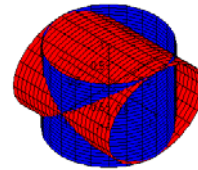
```
> x2:=t->cos(t);
y2:=u->u;
z2:=t->sin(t);
S22:=[x2(t),y2(u),z2(t)];
> plot3d(S22,t=0..2*Pi,u=-10..10);
```



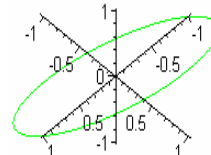
```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi, u=-10..10),
plot3d(S22,t=0..2*Pi,u=-10..10));
```



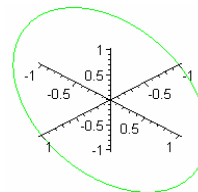
```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi,u=-1..1,
color=blue),plot3d(S22,t=0..2*Pi,u=-1..1,
color=red));
```



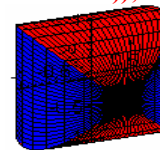
```
> spacecurve([cos(t),sin(t),sin(t)],t=0..2*Pi,
color=green);
```



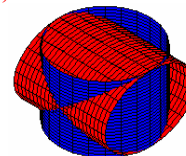
```
> spacecurve([cos(t),sin(t),-sin(t)],t=0..2*Pi,
color=green);
```



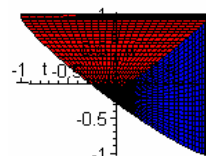
```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi,u=-sin(t)..sin(t),
color=blue),plot3d(S22,t=0..2*Pi,
u=-sin(t).. sin(t), color=red));
```



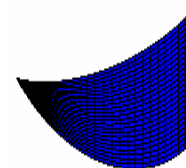
```
> display(plot3d(S11,t=0..2*Pi,u=-
1..1,color=blue),plot3d(S22,t=0..2*Pi,u=-
1..1,color=red));
```



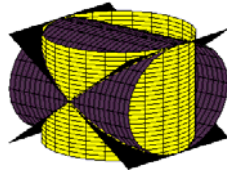
```
> display(plot3d(S11,t=0..Pi/2,u=-sin(t)..sin(t),
color=blue),plot3d(S22,t=0..Pi/2,
u=-sin(t) .. sin(t),color=red));
```



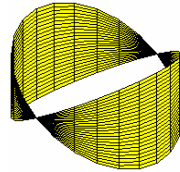
```
> display(plot3d(S11,t=0..Pi/2,u=-sin(t)..sin(t),
color=blue));
```



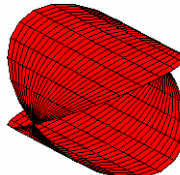
```
> with(plots) :
> plot3d([t,y,t],t=-1..1,y=0);
plot3d([t,t,z],t=-1..1,z=0..0);
> restart;
Error, (in plot3d/expression) bad range arguments, t = -1 .. 1, y = 0
Error, (in plot3d) ranges must be non-empty
> p1:=plot3d([x,y,y],y=-1..1,x=-1..1,color=black) :
p2:=plot3d([x,y,-y],y=-1..1,x=-1..1,color=black) :
display({C1,C2,p1,p2});
```



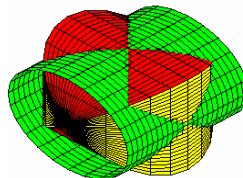
```
> plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-sin(t)..sin(t),color=yellow);
```



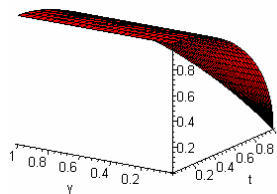
```
>
> plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-sin(t)..sin(t),color=red);
```



```
> C11:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=-sin(t)..sin(t),color=yellow) :
C22:=plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..2*Pi,y=-sin(t)..sin(t),color=red) :
C33:=plot3d([z,sin(t),cos(t)],t=0..2*Pi,z=-1..1,color=green) :
display({C11,C22,C33});
```



```
> with(geom3d) :
> v:=display({C11,C22}) :
volume(v);
Error, (in volume) wrong type of arguments
> C11:=plot3d([cos(t),sin(t),z],t=0..2*Pi,z=0..sin(t),color=yellow) :
plot3d([cos(t),y,sin(t)],t=0..Pi/2,y=0..sin(t),color=red);
```



```
> integer
```