Contribution à la compensation active des vibrations des machines électriques

Pierre Granjon

▶ **To cite this version:**

Pierre Granjon. Contribution à la compensation active des vibrations des machines électriques. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2000. Français. NNT : . tel-00101286

HAL Id: tel-00101286

https://theses.hal.science/tel-00101286

Submitted on 26 Sep 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

$N°$ attribué par la bibliothèque
/ / / / / / / / / / /

THESE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'INPG

Spécialité : «signal, image, parole, télécoms»

préparée au laboratoire des images et des signaux de Grenoble

dans le cadre de **l'École Doctorale**
«électronique, électrotechnique, automatique, télécommunications, signal»

présentée et soutenue publiquement

par

Pierre GRANJON

le 19 décembre 2000

Titre :

CONTRIBUTION À LA COMPENSATION ACTIVE DES VIBRATIONS DES MACHINES ÉLECTRIQUES

Directeur de thèse : Albert FOGGIA
Co-encadrant : Christine SERVIÈRE

JURY

Madame Arlette CHERUY	, Présidente
Monsieur Robert B. RANDALL	, Rapporteur
Monsieur Ménad SIDAHMED	, Rapporteur
Monsieur Albert FOGGIA	, Directeur de thèse
Madame Christine SERVIÈRE	, Co-encadrant
Monsieur Simon BRAUN	, Examinateur
Monsieur Guy D'URSO	, Examinateur

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier M Jean-Louis Lacoume de m'avoir accueilli au sein de son laboratoire pendant ces quelques années de recherche ainsi que M Jean-Marc Chassery qui, prenant sa suite, ne m'a pas mis dehors.

J'adresse également mes sincères remerciements à :
- Mme Chéruy, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour avoir accepté de présider ce jury,
- M Randall, Professeur à la New South Wales University et M Sidahmed, Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ce travail malgré leurs nombreuses obligations,
- M D'Urso, Ingénieur EDF et M Braun, Professeur à l'Israel Institue of Technology, pour avoir porté une attention particulière et originale à ce travail en participant à ce jury,
- Mme Servière, Chargée de Recherche au CNRS, et M Foggia, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui ont dirigé ce travail avec beaucoup de perspicacité, de patience et de diplomatie (et pourtant, il est têtu, l'auvergnat !).

Merci aussi à la crème de la recherche grenobloise, JIM et POA, qui ont démontré expérimentalement que mesurer plus de 180 cm, faire du foot, du ski, des enfants, des concours de boules privés, quelques excès et être chercheur pouvait très bien être des caractéristiques d'une seule et même personne. Cela ne va tout de même pas sans une ou deux blessures dues principalement à la fatigue : fracture du coude causée par un ballon récalcitrant, déchirure musculaire causée par un survêtement rebelle, *etc.*

Je remercie également tous les informaticiens du LIS, et plus particulièrement Mathieu et Hervè pour leur soutien quotidien, ainsi que Régis pour son départ inopiné.

Voici venu le moment des «spéciales dédicaces». Merci donc à :
- Nico, pour les longues soirées instructives du vendredi soir à regarder inlassablement les derniers numéros de Thalassa, mais aussi ceux qu'il avait patiemment enregistré depuis 10 ans, dans l'attente de quelqu'un qui comprenne et partage sa passion de l'océan,
- Gui's, pour les longues soirées destructives du jeudi soir à participer inlassablement aux

dernières fantaisies du Grenoble «by night» (et viva Argentina !), même s'il avait déjà rencontré pas mal de monde qui comprenne et partage sa passion de la nuit,
- Cédric, pour avoir apporté beaucoup de finesse et de sagesse dans ce labo de brutes,
- Steph, éminent spécialiste des langues (étrangères ou non, d'ailleurs), qui a survolé le «championnat du placement incongru de mots complexes dans les conversations les plus banales»,
- Seb, pour avoir courageusement infiltrés les rangs ennemis pendant plusieurs mois et au retour de cette mission, ramené des informations capitales pour notre lutte perpétuelle contre les américains,
- Steeve, pour m'avoir fait découvrir que je n'aimais décidément pas le zouc,
- Antoine, avec plaisir,
- Cyrille, Cyril, Syril ou Sirryhl, je sais plus,
- aux inséparables compères Jacky et Jean-Jacques pour leur science innée des véhicules motorisés,
- à tous les autres que je n'ai pas cité mais qui se reconnaîtront...

Je n'oublierai pas bien sûr de citer mes chers et dignes géniteurs ainsi que ma grand-mère Virginie de qui j'ai hérité «la fibre».

Pour finir, merci aux sourires et à la patience de Linda, Romain et Mathis, et félicitations pour avoir réussi à me supporter et à me remettre les pieds sur terre durant les sombres mois de la rédaction.

Table des matières

Remerciements **i**

Table des matières **iii**

Liste des figures **ix**

Introduction **1**

1 Définition du problème traité **3**
1.1 Introduction . . . 3
1.2 Point de départ . . . 3
1.2.1 Objectif . . . 3
1.2.2 Principe physique . . . 4
1.2.3 Description du banc d'essais . . . 7
1.3 Vibrations d'une machine tournante électrique . . . 8
1.3.1 Définition et mesure des vibrations . . . 8
1.3.2 Origine des vibrations d'une machine tournante électrique . . . 9
1.3.3 Analyse d'un signal vibratoire . . . 11
1.3.4 Exemple de signal vibratoire de la machine de test . . . 15
1.4 Modélisation physique du transfert . . . 19
1.4.1 Préliminaires . . . 19
1.4.2 Effet des enroulements statoriques . . . 20
1.4.3 Expression de la force de Maxwell . . . 20
1.4.4 Effet de la carcasse statorique . . . 22
1.4.5 Transfert global entre les courants de commande et les vibrations engendrées . . . 23
1.5 Conclusion . . . 24

2 Méthodes classiques de contrôle actif **25**
2.1 Introduction . . . 25
2.2 Introduction au contrôle actif classique . . . 25
2.2.1 Généralités . . . 25
2.2.2 Choix d'une stratégie de commande . . . 29

2.2.3 Contrôleur feedforward optimal 31
2.2.4 Algorithme classique du contrôle actif 35
2.3 Résultats antérieurs 37
2.3.1 Principe et objectifs 37
2.3.2 La compensation analogique 38
2.3.3 La compensation numérique 39
2.3.4 Résultats expérimentaux 40
2.4 Conclusion 41

3 Étude théorique du système **43**
3.1 Introduction 43
3.2 Étude des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps 43
3.2.1 Modèle de représentation 44
3.2.2 Définition 45
3.2.3 Domaine temporel 46
3.2.4 Domaine fréquentiel 51
3.2.5 Étude des signaux propres, notion de gain complexe 57
3.2.6 Interprétation du gain complexe matriciel 61
3.2.7 Analyse du gain complexe matriciel 65
3.3 Application 73
3.3.1 Description du système à analyser 73
3.3.2 Échantillonnage 76
3.3.3 Domaine temporel 78
3.3.4 Domaine fréquentiel 79
3.3.5 Gain complexe matriciel 81
3.4 Conclusion 85

4 Détermination et mise en œuvre des solutions **87**
4.1 Introduction 87
4.2 Modélisation mathématique de l'erreur 87
4.2.1 Discrétisation des signaux 87
4.2.2 Relation entrée-sortie du système LVPT 89
4.2.3 Expression du signal d'erreur 90
4.3 Résolution théorique : commande optimale 92
4.3.1 Fonction de coût 92
4.3.2 Commande optimale 93
4.3.3 Algorithme récursif 95
4.3.4 Cas multicapteurs 96
4.4 Implantation des solutions et étude des performances obtenues 97
4.4.1 Implantation pratique de l'algorithme de commande optimale 97
4.4.2 Cas monocapteur 100

4.4.3 Cas multicapteurs 113
4.4.4 Implantation sur processeur numérique 116
4.5 Conclusion 117

Conclusion et perspectives **119**

Bibliographie **123**

Table des figures

1.1 Contamination vibratoire par une machine tournante 4
1.2 Principe physique utilisé 6
1.3 Implantation pratique de la méthode 6
1.4 Coupe transversale de la machine synchrone de test, issue de [Far95] 7
1.5 Structure générale du banc d'essais 8
1.6 Définition de la réponse mécanique d'une structure 9
1.7 Allure théorique de la densité spectrale de puissance d'un signal vibratoire de machine tournante électrique 15
1.8 Allure temporelle de signal vibratoire brut 16
1.9 Allure temporelle des résultats après moyennage synchrone 16
1.10 Densité spectrale de puissance du signal vibratoire 17
1.11 Densités spectrales de puissance après moyennage synchrone 18
1.12 Transferts mis en jeu dans le système global 19
1.13 Enroulements statoriques de la machine synchrone de test 20
1.14 Modèle à temps continu du système global 23

2.1 Principe général du contrôle actif de son 26
2.2 Principe général du contrôle actif 26
2.3 Transferts mis en jeu dans un système de contrôle actif 27
2.4 Contrôle actif des vibrations d'une poutrelle métallique 27
2.5 Contrôle actif des vibrations d'une machine tournante électrique 28
2.6 Structure feedback 29
2.7 Structure feedforward 30
2.8 Exemple de fonction de coût quadratique généralisée 34
2.9 Description simplifiée du transfert commande→vibrations 38
2.10 Principe du contrôleur analogique [Der92, Far95] 39
2.11 Principe du contrôleur numérique [Jar95] 40
2.12 Résultat de compensation active utilisant le contrôleur feedforward (issu de [Jar95]) 41

3.1 Système discret linéaire $\mathcal{H}$ 45
3.2 Exemple de réponse impulsionnelle d'un système LVT causal 47

3.3 Exemple de réponse impulsionnelle $g(r,k)$ d'un système LVPT causal avec $P=2$ 48
3.4 Structure à modulation d'entrée d'un système LVPT P-périodique 49
3.5 Structure à modulation de sortie d'un système LVPT P-périodique 50
3.6 Exemple de relation entre les spectres d'entrée et de sortie d'un système linéaire stationnaire et causal 53
3.7 Exemple de module de réponse bifréquentielle pour un système LVPT P-périodique causal 55
3.8 Exemple de relation entre les spectres d'entrée et de sortie pour un système LVPT P-périodique causal 56
3.9 Représentation vectorielle de la transformée de Fourier d'un signal $s(n)$ pour $P=3$ 60
3.10 Propriétés de base du gain complexe matriciel 62
3.11 Modulation d'amplitude sinusoïdale 64
3.12 $\hat{\hat{h}}_{mod}(\alpha,\beta)$ correspondant au système de la figure 3.11 65
3.13 Représentation graphique de la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ 66
3.14 Structure interne d'un système LVPT $\mathcal{H}$ 68
3.15 Structure interne du système inverse $\mathcal{H}_{inv}$ 69
3.16 Modèle du système LVPT à temps continu à analyser 73
3.17 Caractéristiques du système $\mathcal{G}$ 75
3.18 Exemple schématique de module de la réponse bifréquentielle (3.61) 76
3.19 Fraction de la réponse impulsionnelle (3.70) en niveaux de gris 78
3.20 Structure à modulation d'entrée du système LVPT réel 79
3.21 Fraction du module de la réponse bifréquentielle (3.74) 80
3.22 Gain complexe matriciel du système de la figure 3.16 81
3.23 Module du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(0)$ 83
3.24 Valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(0)$ 84
3.25 Module du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(0)$ 84
3.26 Valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(0)$ 85

4.1 Modèle à temps discret du système global, discrétisé à la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = P\nu_r$ 88
4.2 Implantation pratique finale de la méthode 98
4.3 Implantation logicielle de l'algorithme 99
4.4 Modules des composantes fréquentielles optimales de la commande et de l'erreur calculés pour $\epsilon = 0,05$ 101
4.5 Allures temporelle des signaux optimaux de commande et d'erreur calculées pour $\epsilon = 0,05$ 102
4.6 Performances optimales obtenues en fonction du paramètre ϵ 103
4.7 Signal de commande optimal pour $\epsilon = 0$ 103

4.8 Caractéristiques des signaux optimaux de commande et de erreur calculées pour $\epsilon = 0,05$ 104
4.9 Performances optimales obtenues en fonction de la position angulaire du capteur θ pour une seule commande et pour $\epsilon = 0,05$ 105
4.10 Performances optimales obtenues en fonction de la position angulaire du capteur θ pour trois commandes et pour $\epsilon = 0,05$ 106
4.11 Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ (trait plein), P_v (tirets) et $P_{i_{copt}}$ (pointillés) 107
4.12 Composantes fréquentielles de l'erreur et des trois commandes en $\theta = 0$ et pour $\epsilon = 0,05$ 108
4.13 Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ en fonction de μ 108
4.14 Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ (trait plein), P_v (tirets) et $P_{i_{copt}}$ (pointillés) pour une perturbation sinusoïdale bruitée 109
4.15 Densité spectrale de puissance des signaux de commande et d'erreur pour une perturbation sinusoïdale bruitée 110
4.16 Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ (trait plein), P_v (tirets) et $P_{i_{copt}}$ (pointillés) pour une perturbation vibratoire réelle 111
4.17 Densités spectrales de puissance des signaux de commande et d'erreur pour une perturbation vibratoire réelle 111
4.18 Allures temporelles des composantes synchrones et non synchrones des signaux d'erreur (traits pleins) et de perturbation (pointillés) filtrés pour une perturbation vibratoire réelle 112
4.19 Densités spectrales de puissance des composantes synchrones et non synchrones des signaux d'erreur (traits pleins) et de perturbation (pointillés) filtrés pour une perturbation vibratoire réelle 112
4.20 Densité spectrale de puissance du signal d'erreur (trait plein) et de perturbation (pointillés) 113
4.21 Courbes d'apprentissage pour un système de contrôle actif à trois commandes et trois capteurs, portant sur des signaux de vibrations réels 114
4.22 Densités spectrales de puissance des signaux de commande et d'erreur pour trois perturbations vibratoires réelles 115
4.23 Implantation temps-réel de l'algorithme 117

Introduction

De nos jours, les machines tournantes électriques sont utilisées dans des domaines aussi variés que le transport (trains, véhicules motorisés, *etc*), la production électrique (alternateurs), l'industrie de production, ou encore l'électroménager. Les vibrations qu'elles engendrent peuvent être gênantes à plus d'un titre :

- elles sont à l'origine d'une partie du bruit rayonné par cette machine et sont donc indésirables pour les utilisateurs situés à leur proximité,
- elles peuvent être transmises aux structures avoisinantes et accélérer leur détérioration ou leur vieillissement,
- elles peuvent également endommager les machines tournantes elles-mêmes.

Il est donc intéressant de développer des méthodes visant à réduire le niveau vibratoire de ces machines, ainsi que celui de leur environnement direct.

Ces méthodes de compensation peuvent en général être qualifiées de *passives* ou d'*actives*. Comme nous le verrons au chapitre 1, les premières n'utilisent aucun apport supplémentaire d'énergie. Au contraire, les méthodes actives minimisent les vibrations naturelles à l'aide de «contre-vibrations» engendrées par des actionneurs nécessitant une alimentation extérieure.

L'objectif de ce travail de recherche est d'élaborer une méthode active de compensation des vibrations d'une machine tournante électrique, dont le but est de réduire le niveau vibratoire d'une zone de sa carcasse statorique. Cette zone pourra alors être utilisée pour la fixation de cette machine et permettre ainsi de minimiser la quantité de vibrations qu'elle transmet à son environnement direct. L'originalité de cette méthode tient au fait qu'elle n'utilise aucun actionneur externe, ceux-ci étant remplacés par les enroulements statoriques de la machine électrique parcourus par des courants de commande additifs. Le but de ce système de contrôle actif est donc d'obtenir la valeur «optimale» de ces courants, minimisant la puissance des signaux de vibrations mesurés par des capteurs accéléromètriques fixés sur le stator de la machine considérée.

Le premier chapitre a pour vocation de définir entièrement le problème à résoudre. L'objectif général ainsi que le principe physique utilisé par la méthode de compensation à élaborer sont tout d'abord exposés à la section 1.2. Les vibrations devant être atténuées sont ensuite caractérisées à la section 1.3. Enfin, le système sur lequel est appliqué le contrôle actif, qui correspond au transfert situé entre les courants de commande parcourant les enroulements statoriques de la machine et les contre-vibrations qu'ils engendrent, est déterminé à la section 1.4. Nous verrons que sous certaines hypothèses, il peut être considéré comme linéaire

et variant périodiquement dans le temps (LVPT). Cette propriété de variabilité temporelle sera donc à prendre en compte dans le calcul des courants de commande, ce qui constitue la principale difficulté, et donc le principal attrait théorique de ce travail de recherche.

Des travaux antérieurs ont déjà été effectués sur ce sujet. Ils ont conduit à l'élaboration d'un système de contrôle actif utilisant les techniques exposées à la section 2.2, qui sont classiquement appliquées aux systèmes linéaires et invariants dans le temps (LIT). Les résultats alors obtenus font l'objet de la section 2.3, et montrent que ces méthodes ne prennent pas en compte la variabilité du transfert considéré dans sa globalité, ce qui diminue leur efficacité.

Il paraît donc nécessaire d'étudier plus en détail les systèmes LVPT, ce qui est réalisé au chapitre 3. L'étude temporelle puis fréquentielle de leur réponse impulsionnelle permet de déterminer les effets qu'ils provoquent sur leur signal d'entrée. De plus, l'étude de leurs signaux propres conduit à la définition d'une matrice appelée «gain complexe matriciel», qui joue le même rôle que la fonction de transfert classique des systèmes LIT. Ces outils théoriques sont alors utilisés pour analyser un système LVPT de même structure que celui correspondant au transfert modélisé au chapitre 1.

Au chapitre 4, les résultats précédents permettent dans un premier temps de déterminer la solution théorique du problème de contrôle actif posé précédemment, et d'obtenir les courants de commande optimaux. Ceux-ci sont calculés de façon à minimiser la puissance de signaux de vibration mesurés. Finalement, l'implantation matérielle et logicielle, ainsi que les performances obtenues par cette méthode de compensation active sont analysées et quantifiées à la section 4.4.

Chapitre 1

Définition du problème traité

1.1 Introduction

Le but de ce premier chapitre est de spécifier le sujet du travail de recherche présenté, c'est à dire la compensation des vibrations d'une machine tournante électrique, en utilisant les forces magnétiques comme moyen d'action.

La section 1.2 expose l'objectif du travail, c'est à dire une méthode d'isolation vibratoire d'une machine synchrone. Le principe physique employé pour atteindre ce but, ainsi que la machine sur laquelle des tests seront effectués, y sont présentés.

Dans la section 1.3, nous détaillons l'origine des vibrations d'une telle machine, et présentons un rapide panorama des méthodes d'analyse vibratoire. Nous donnons ensuite l'allure théorique de son spectre vibratoire à partir des sources de vibrations définies précédemment, et vérifions ces hypothèses sur un signal expérimental provenant de la machine décrite à la section précédente. Le paragraphe 1.3.4 permet aussi de déterminer les composantes les plus gênantes de ce signal vibratoire, qui doivent être éliminées en priorité pour atteindre le but fixé.

Enfin, le modèle mathématique du transfert à travers lequel les forces magnétiques agissent sur les vibrations est établi à la section 1.4. Nous verrons qu'il s'agit d'un système linéaire variant périodiquement dans le temps (LVPT), nécessitant l'emploi de techniques de compensation appropriées. À la fin de ce chapitre, le problème physique est finalement modélisé en termes de traitement de signal, comme la génération de signaux de commande permettant d'atténuer «au mieux» un signal périodique à travers un système LVPT.

1.2 Point de départ

1.2.1 Objectif

Un problème fréquemment rencontré en analyse vibratoire est celui où une structure vibrante «contamine» son environnement direct, en lui transmettant tout ou partie de ses vibrations par l'intermédiaire de ses points de fixation. La structure vibrante constitue alors

la source de vibrations, tandis que les structures recevants ces vibrations sont appelées les «structures réceptrices». Un exemple simple est représenté sur la figure 1.1, où les vibrations d'une machine tournante sont transmises à une structure réceptrice par l'intermédiaire du socle de fixation de cette machine.

L'action d'isoler les structures réceptrices des vibrations de la source est appelée «isolation

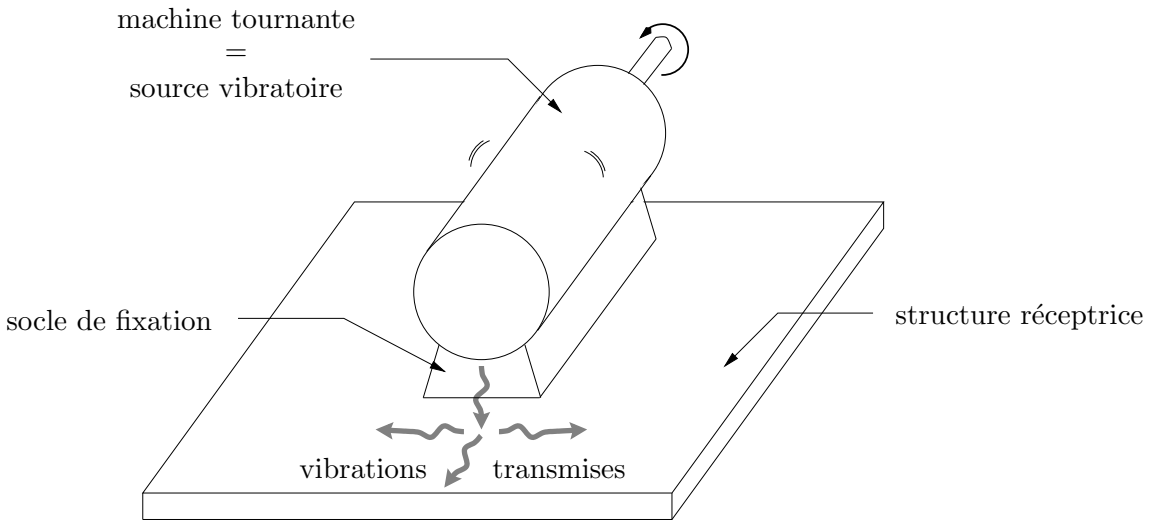


Fig. 1.1: Contamination vibratoire par une machine tournante

vibratoire» [Ful96, pages 186-187]. Elle consiste à minimiser la transmission des vibrations de la source vers les structures réceptrices, même si cette minimisation peut conduire à augmenter le niveau vibratoire global (c'est à dire spatialement moyenné) de la source [Ber97]. En ce sens, elle est à différencier de l'atténuation vibratoire globale [Ful96, pages 153-154], qui a pour but de minimiser le niveau vibratoire global de la source, mais qui peut provoquer l'augmentation de la quantité de vibrations transmises à son environnement direct.

Le but du travail de recherche exposé dans ce mémoire est de réaliser l'isolation vibratoire d'une machine synchrone, pour la configuration présentée sur la figure 1.1. Le niveau vibratoire global de la machine n'est donc pas mis en cause, seule la transmission de ses vibrations doit être atténuée.

La section suivante expose le principe physique utilisé pour agir sur les vibrations de la machine et réaliser l'isolation vibratoire recherchée.

1.2.2 Principe physique

Les différentes méthodes de contrôle de vibrations, permettant de réaliser l'atténuation vibratoire globale ou l'isolation vibratoire d'un système donné, sont classées en deux catégories :

- les méthodes de contrôle passives,
- les méthodes de contrôle actives.

La première catégorie regroupe les méthodes consistant à modifier la structure du système. Par exemple, dans le cadre de l'isolation vibratoire, les fixations de la source peuvent être

constituées de matériaux absorbant les vibrations. La forme de la source vibratoire peut aussi être optimisée pour la rendre plus discrète et donc minimiser son niveau vibratoire global (ce principe a par exemple été employé dans [Der92] et [Far95] sur une machine synchrone). Les méthodes utilisant ce principe ne nécessitent aucun apport supplémentaire d'énergie au système, d'où leur dénomination de «passives». Malheureusement, leur coût de mise en œuvre peut rapidement devenir prohibitif (par exemple, changer les matériaux constitutifs ou la forme d'une machine existante). De plus, elles sont peu efficaces sur les vibrations situées dans les basses fréquences (typiquement en dessous de 1 à 2 kHz) [Ful95].
Ces inconvénients peuvent être contournés en utilisant des actionneurs extérieurs au système comme moyens d'action sur les vibrations. Parmi les actionneurs les plus couramment utilisés, on peut remarquer les électroaimants [Ber97], les vérins hydrauliques ou pneumatiques [Ful96, chapitre 7], les actionneurs piézoélectriques [Ful96, chapitre 5], *etc.* Pour pouvoir être mis en œuvre, ils nécessitent un apport d'énergie extérieure, ce qui explique la dénomination de «méthode active». La bande passante de ces actionneurs permet un contrôle efficace pour les basses fréquences où les méthodes passives n'ont que peu d'effet, et leur coût de revient est directement lié au type et au nombre d'actionneurs utilisés.

Afin de réaliser l'isolation vibratoire d'une machine tournante électrique classique, on propose une méthode active «sans actionneur». Une telle machine est constituée d'un rotor et d'un stator, chacun générant son propre champ d'induction. Leur somme à l'instant t et à la position angulaire θ forme le champ total $\overrightarrow{b}(t,\theta)$. Si on suppose ce champ radial, on peut montrer [Juf95, pages 41-47], [Car67, pages 202-209] que l'élément de surface ds de la carcasse statorique situé à la position angulaire θ, subit à l'instant t une force $f(t,\theta)$ de direction radiale et de module :

$$f(t,\theta) = \frac{\| \overrightarrow{b}(t,\theta) \|^2}{2\mu_0} ds \tag{1.1}$$

où μ_0 est la permittivité du vide et $\| \overrightarrow{b}(t,\theta) \|$ le module du vecteur $\overrightarrow{b}(t,\theta)$.
Cette force, dénommée «force de Maxwell», est donc à tout instant et en tout point de la surface du stator proportionnelle au carré de l'induction magnétique. C'est en utilisant ce principe que l'on peut espérer pouvoir agir sur les vibrations naturelles de la machine, provoquées par sa rotation. En effet, supposons que l'on alimente les bobines statoriques avec des courants additionnels appelés «courants de compensation». Ces courants créent un champ magnétique additionnel dans l'entrefer, qui, d'après la relation (1.1), engendre une force en tout point de la surface du stator. Celui-ci réagit par des vibrations supplémentaires qui, ajoutées à celles générées par la rotation de la machine, forment les vibrations totales de la carcasse statorique. Ce principe physique est résumé par la figure 1.2. Ces vibrations additionnelles peuvent être utilisées comme des «contre-vibrations» par rapport aux vibrations naturelles, afin de minimiser les vibrations totales du stator au voisinage d'une position angulaire donnée. On pourra alors utiliser cette «zone de calme» pour fixer la machine et réaliser son isolation vibratoire vis-à-vis de la structure réceptrice. Il faut toutefois garder à l'esprit que la force donnée par (1.1) suit une direction radiale. Par conséquent, les seules vibrations

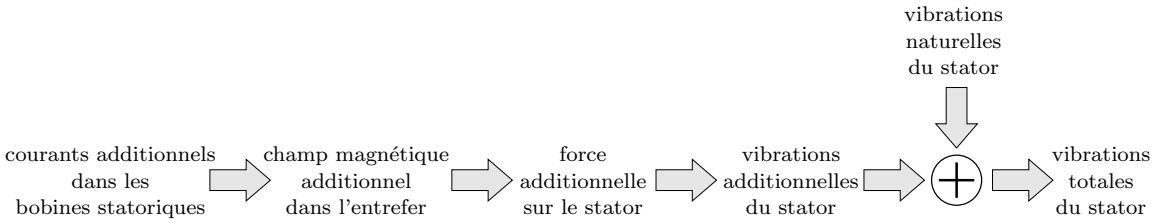


Fig. 1.2: Principe physique utilisé

que l'on peut atténuer par cette méthode, et donc les seules vibrations considérées dans la suite de ce document, sont les vibrations statoriques radiales.

Le principe physique décrit dans cette section permet d'avoir une idée précise de l'implantation pratique d'une telle méthode. Elle est représentée par la figure 1.3, où une coupe transversale de la machine tournante de test est située sur la gauche. Un ou plusieurs cap-

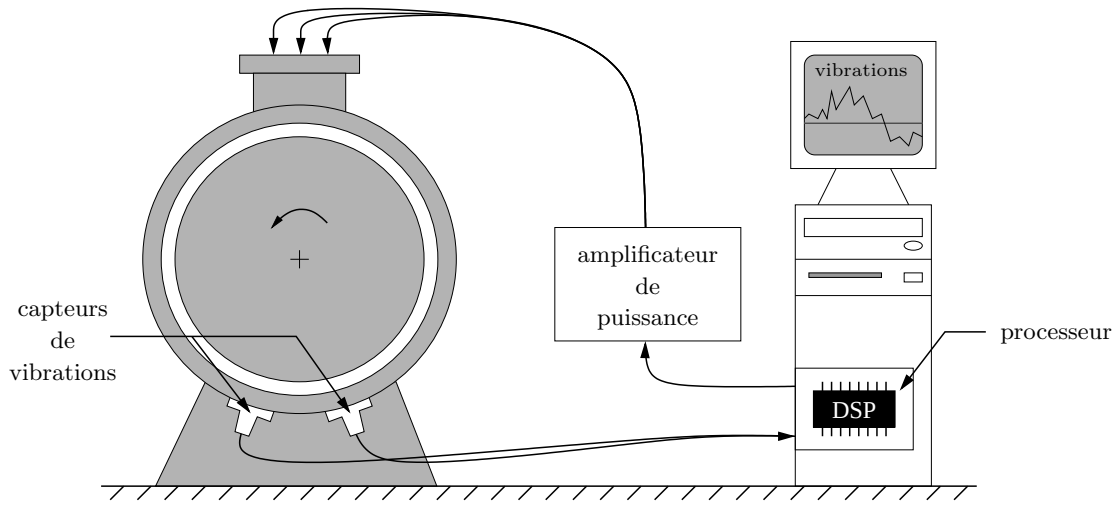


Fig. 1.3: Implantation pratique de la méthode

teurs, localisés autour d'une position angulaire donnée, sont utilisés pour mesurer les vibrations statoriques à atténuer. Les signaux ainsi obtenus sont discrétisés, puis un processeur de traitement du signal est chargé d'élaborer les signaux de commande nécessaires à leur minimisation. Les sorties de ce processeur alimentent, par l'intermédiaire d'un amplificateur de puissance, une ou plusieurs des bobines statoriques de la machine. Les actionneurs employés (les bobines statoriques de la machine) font donc partie intégrante du système cible, ce qui constitue un intérêt économique et pratique considérable, et donne un sens à l'expression de méthode «sans actionneur».

Ce principe a été employé pour la première fois dans [Mae87] sur des machines à courant continu. Il a ensuite été adapté aux machines synchrones et implanté sous forme analogique dans [Der92] et [Far95], puis sous forme numérique dans [Jar95]. Nous verrons dans le second chapitre, qu'une non-stationnarité présente dans le transfert entre les courants de commande et les vibrations qu'ils engendrent, amoindrit considérablement les performances obtenues

dans cette application. Le but de ce travail de recherche est donc d'élaborer un algorithme de commande prenant en compte cette non-stationnarité, et minimisant «au mieux» les vibrations du stator autour d'une position angulaire donnée.

Après avoir présenté le principe physique utilisé par la méthode de compensation à élaborer, la section suivante décrit les caractéristiques et les particularités du banc d'essais sur lequel cette technique sera testée.

1.2.3 Description du banc d'essais

Afin de tester les performances de cette technique d'isolation vibratoire sur une machine réelle, on dispose d'un banc d'essais constitué de deux machines. La première est la machine de test, c'est à dire celle sur laquelle on doit mettre en œuvre l'isolation vibratoire. C'est une machine synchrone triphasée à deux paires de pôles, d'une puissance de 10 kW. Sa structure est le résultat des travaux de recherche menés dans [Der92] et [Far95], visant à atténuer son niveau vibratoire global à l'aide de techniques de contrôle passif. Sa coupe transversale est représentée sur la figure 1.4. Elle est constituée d'un stator à 36 encoches inclinées

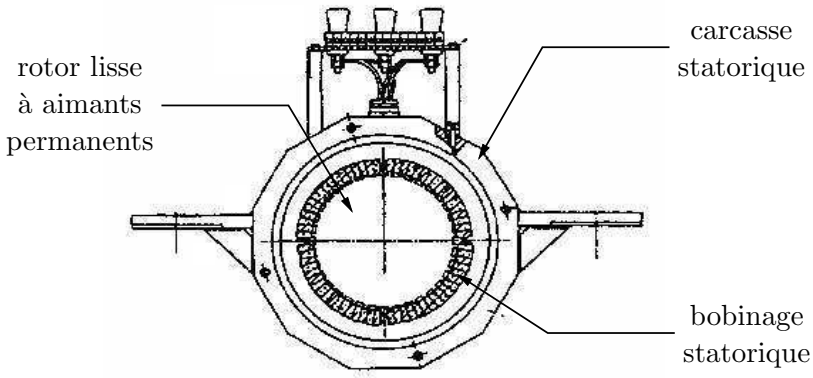


Fig. 1.4: Coupe transversale de la machine synchrone de test, issue de [Far95]

continûment d'un pas dentaire, avec un bobinage à pas diamétral. Cette inclinaison contribue fortement à la discrétion vibratoire de la machine [Der92, Far95]. On peut noter sur cette figure l'absence d'ailettes de refroidissement afin de pouvoir disposer les capteurs de vibrations au plus près de la carcasse statorique, et donc au plus près des phénomènes étudiés. Le rotor est à aimants permanents, dont la forme et les aimantations ont été optimisées de manière à générer un champ d'induction quasiment sinusoïdal. Le très faible taux d'harmoniques de ce champ magnétique permet de limiter les vibrations d'origine électromagnétiques [Far95]. La deuxième machine est à courant continu, et permet d'entraîner la machine de test si celle-ci fonctionne en alternateur, ou de constituer sa charge si elle fonctionne en moteur. La figure 1.5 montre la structure générale de ce banc d'essais. L'accouplement, ainsi que les diverses suspensions, ont pour rôle d'isoler la machine de test des vibrations du monde extérieur et de celles engendrées par la machine à courant continu. Les mesures vibratoires effectuées sur la

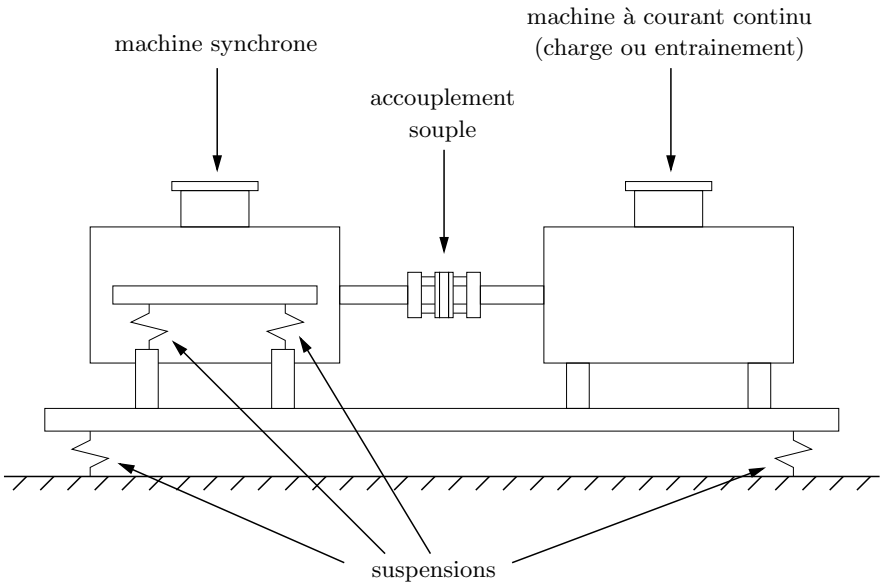


Fig. 1.5: Structure générale du banc d'essais

machine synchrone ne prendront finalement en compte que ses propres vibrations, comme il a été montré dans [Der92] et [Far95]. Toutefois, les fréquences de résonance des diverses suspensions pouvant atteindre 16 Hertz [Far95], la fréquence de rotation des machines doit être supérieure à 20 Hertz pour ne pas exciter une résonance du banc, et risquer sa détérioration.

L'objectif de ce travail, le principe physique utilisé pour l'atteindre, ainsi que la machine de test sont maintenant connus. La section suivante cherche à mieux comprendre la nature des vibrations dont on veut minimiser la transmission, c'est à dire celles des machines tournantes.

1.3 Vibrations d'une machine tournante électrique

1.3.1 Définition et mesure des vibrations

La vibration d'une structure, même complexe, est communément définie (et mesurée) en un point de cette structure. Il s'agit alors du mouvement oscillatoire de ce point de la structure autour d'une position d'équilibre, en réponse à une ou plusieurs forces excitatrices. Or les grandeurs physiques usuelles permettant de caractériser un mouvement, et donc une vibration, sont au nombre de trois :

- le déplacement,
- la vitesse,
- l'accélération.

De plus, le passage de l'une à l'autre s'effectue par simple dérivation ou intégration. On peut donc utiliser indifféremment une de ces trois grandeurs comme mesure représentative d'une vibration. Toutefois, l'accélération est celle qui permet de mettre en évidence les phénomènes vibratoires dont les fréquences sont les plus élevées [Mor92, pages 85-86]. C'est donc cette

grandeur qui est choisie pour représenter les vibrations de la machine synchrone, afin de pouvoir caractériser les effets de l'isolation vibratoire sur la plage fréquentielle la plus large possible.

Pour pouvoir effectuer ce type de mesure, nous disposons d'accéléromètres piézoélectriques [Bou98, pages 53-57], dont la sortie fournit une quantité de charges électriques proportionnelle à l'accélération subie. Cette information est transformée en tension par un amplificateur de charge [Bou98, pages 59-61], dont la sortie est un signal analogique directement exploitable par un oscilloscope, un analyseur de spectre, ou tout autre appareil de mesure. La bande passante de ces capteurs s'étend de 5 Hz à 12 kHz, et nous verrons par la suite qu'elle est largement suffisante pour notre application.

1.3.2 Origine des vibrations d'une machine tournante électrique

D'après la définition donnée à la section précédente, seules les forces excitatrices appliquées à une structure sont à l'origine de ses vibrations. Le transfert entre ces forces et les vibrations qu'elles engendrent est la réponse mécanique de la structure, illustrée par la figure 1.6.

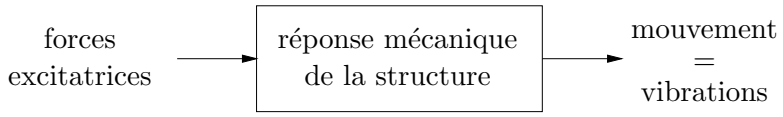


Fig. 1.6: Définition de la réponse mécanique d'une structure

Pour une machine tournante électrique, ces forces sont de trois natures différentes :

- aérodynamique,
- mécanique,
- électromagnétique.

La contribution de chacune de ces sources est fonction du type de machine étudiée, mais quelques comportements généraux peuvent être soulignés.

Les forces d'origine aérodynamique proviennent de l'écoulement du fluide de refroidissement dans les différentes parties du moteur, comme l'entrefer. Cet écoulement provoque des variations aléatoires de pression dans le moteur, ce qui engendre des forces ayant surtout un caractère large bande. Elles peuvent donc exciter les résonances mécaniques de la machine, et génèrent des vibrations qui sont elles aussi aléatoires et large bande. Toutefois, dans le cas de machines avec ventilateur de refroidissement, des vibrations sinusoïdales dont la fréquence est le produit du nombre d'ailettes du ventilateur par la fréquence de rotation peuvent apparaître. La machine de test décrite dans la section précédente étant refroidie à l'air et ne comportant pas de ventilateur, ses vibrations d'origine aérodynamique ont un caractère purement aléatoire large bande.

Les forces d'origine mécanique sont dues à des défauts de fabrication, de jeu ou d'usure. On peut par exemple citer le phénomène de balourd dynamique provenant d'un mauvais équilibrage du rotor, ou l'usure de l'accouplement reliant deux machines différentes. Ces

phénomènes génèrent en général des forces périodiques, dont les fréquences sont liées à la fréquence de rotation de la machine. Les vibrations qu'elles engendrent seront donc elles aussi périodiques, et leur transformée de Fourier consistera en un ensemble de raies spectrales, de fréquences harmoniques ou sous-harmoniques de la fréquence de rotation. En ce qui concerne la machine utilisée pour notre application, ces vibrations se limitent principalement au balourd mécanique, générant des raies spectrales de fréquence égale à la fréquence de rotation ainsi qu'à ses premiers harmoniques.

Les forces d'origine électromagnétique sont principalement des forces de Maxwell, donc directement proportionnelles au carré du champ d'induction présent dans l'entrefer de la machine (cf. équation (1.1)). Ce champ n'est jamais à répartition purement sinusoïdale, et ceci pour un grand nombre de raisons (distribution spatiale imparfaite des forces magnétomotrices créées par les enroulements et/ou les aimants, entrefer non constant, courants d'alimentation non sinusoïdaux, *etc*). Les harmoniques de l'induction engendrent donc un grand nombre de champs de force tournants à répartition périodique, qui excitent la structure de la machine. À ces forces viennent aussi s'ajouter celles dues à des défauts de fabrication comme le balourd magnétique, traduisant une excentricité du champ d'induction de la machine. Pour une machine synchrone, elles génèrent toutes des vibrations périodiques, de fréquences harmoniques à la fréquence de rotation. Une étude très complète de ces différentes fréquences est faite dans [Tim89, chapitre 3]. Pour la machine décrite au paragraphe 1.2.3, il a été montré [Far95] que l'ensemble des raies spectrales les plus importantes provoquées par ce phénomène est constitué de la raie d'encoche et de ses harmoniques. Elles ont pour origine la présence d'un entrefer denté. En effet, la variation de perméance due aux encoches provoque une variation de l'induction au droit de ces encoches. La machine de test ayant un rotor lisse et un stator à 36 encoches, la fréquence des raies vibratoires engendrées se situe autour des multiples entiers de 36 fois la fréquence de rotation.

Bien que cette section soit relativement succincte, il faut être conscient de l'extrême complexité du processus de génération des vibrations d'une machine tournante électrique. Ce rapide exposé sur l'origine des vibrations d'une telle structure, largement inspiré du premier chapitre de [Der92] traitant la question de manière plus approfondie, n'a pas la prétention d'être exhaustif. Son but est seulement de donner une idée des différents types de vibrations qui peuvent être engendrées dans une machine tournante, et des différents processus physiques qui peuvent leur donner naissance. Pour la machine synchrone utilisée, on peut retenir que les vibrations mesurées seront de deux types différents :

- les vibrations d'origine aérodynamiques auront un caractère aléatoire large bande,
- les vibrations d'origine mécanique ou électromagnétiques auront un caractère périodique, donc bande étroite.

Maintenant que les caractéristiques des vibrations générées par la machine de test sont connues, la section suivante permet de faire un choix parmi les nombreuses méthodes d'analyse existant pour un tel signal.

1.3.3 Analyse d'un signal vibratoire

Préliminaires

La plupart des méthodes d'analyse étant implantées sur calculateur numérique, le premier conditionnement à réaliser sur un signal vibratoire est son échantillonnage. De plus, beaucoup de ces méthodes font intervenir la notion de fréquence. Il est donc également nécessaire de définir la transformation permettant de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel. Cette opération est réalisée, sur des signaux échantillonnés, par la *transformation de Fourier en fréquence réduite* (TFr). De sa définition découle la condition d'échantillonnage de Shannon, suivant laquelle l'échantillonnage d'un signal se fait sans perte d'information. Nous allons voir comment la TFr et cette condition s'expriment pour des signaux mono ou bidimensionnels, c'est à dire dépendant d'une ou de deux variables. En effet, ces derniers seront nécessaires dans le chapitre 3, pour l'étude des systèmes variant périodiquement dans le temps.

signaux monodimensionnels

Les TFr directe et inverse d'un signal discret $s(n)$ sont respectivement définies par les relations :

$$\hat{s}(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) e^{-j2\pi\alpha n} \tag{1.2}$$

$$s(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{s}(\alpha) e^{j2\pi\alpha n} d\alpha \tag{1.3}$$

Pour que cette transformation existe, le signal étudié doit être de module sommable. En effet, c'est une condition suffisante pour que la série exprimée en (1.2) converge absolument vers une fonction continue [Kun91].
La fréquence réduite sans dimension α est liée à la fréquence réelle ν et à la fréquence d'échantillonnage ν_e, exprimées toutes deux en Hertz, par :

$$\alpha = \frac{\nu}{\nu_e} \quad \in \left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \tag{1.4}$$

L'intervalle de définition de α donné en (1.4) correspond à la période principale sur laquelle la fonction $\hat{s}(\alpha)$, périodique de période 1, est étudiée. Cet intervalle équivaut à la bande fréquentielle $\left]-\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2}\right]$ Hertz. Ceci conduit à la condition de Shannon permettant d'éviter tout recouvrement de spectre lors de l'échantillonnage : les signaux analogiques originaux ne doivent pas contenir de composantes fréquentielles supérieures à $\frac{\nu_e}{2}$ Hertz. Dans la pratique, on prendra soin de filtrer les signaux analogiques fournis par les accéléromètres à l'aide d'un filtre passe-bas correctement dimensionné, afin qu'ils vérifient cette condition. Une fois cette opération réalisée, l'échantillonnage des signaux à la fréquence ν_e peut se faire sans problème.

signaux bidimensionnels

L'extension du cas précédent à un signal discret bidimensionnel est immédiate :

$$\begin{aligned} \hat{\hat{s}}(\alpha,\beta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s(n,k)e^{-j2\pi(\alpha n+\beta k)} \\ s(n,k) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{\hat{s}}(\alpha,\beta)e^{j2\pi(\alpha n+\beta k)}d\alpha d\beta \end{aligned} \tag{1.5}$$

La condition suffisante d'existence d'une telle transformation devient :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(n,k)| < +\infty$$

De plus, les fréquences réduites α et β ont le même intervalle de définition qu'en (1.4). La condition de Shannon bidimensionnelle impose donc au signal analogique original de ne pas avoir de composantes fréquentielles supérieures à $\frac{\nu_e}{2}$ Hertz, et ceci suivant ses deux variables fréquentielles [Tek95].

Panorama des méthodes d'analyse

Les différentes méthodes d'analyse d'un signal vibratoire peuvent être classées en trois catégories différentes.
La première regroupe les méthodes dites classiques, permettant surtout d'analyser des signaux stationnaires. Dans le domaine temporel, on retrouve par exemple l'analyse par indicateurs, tels que l'amplitude maximale du signal, ou son facteur de crête [Big95, pages 157-161]. Des outils statistiques tels que l'histogramme, les moments d'ordre 1 ou 2, ou la recherche de corrélations peuvent aussi être utilisés [Mor92, pages 131-133]. Dans le domaine fréquentiel, la méthode la plus employée actuellement reste l'analyse spectrale, donnant accès à la répartition de la puissance ou de l'énergie d'un signal dans le domaine fréquentiel. Elle permet aussi de calculer les fonctions de transfert fréquentielles éventuelles reliant différents signaux vibratoires. Enfin, une de ses variantes, l'analyse cepstrale introduite dans [Bog63], permet de mettre facilement en évidence les modulations d'amplitude, même aux basses fréquences [Bou98, pages 99-102].
Les méthodes classées dans la deuxième catégorie peuvent être qualifiées de modernes, et permettent l'analyse de signaux non-stationnaires. Les principales sont les transformées temps-fréquence (spectrogramme, Wigner-ville, scalogramme, *etc*) [Fla93, Whi00, Bas92]. Elles ont été utilisées plus tardivement que les précédentes du fait de leur complexité théorique, et de la puissance de calcul qu'elles nécessitent.
Enfin, la troisième catégorie regroupe les méthodes émergentes et novatrices, d'un usage encore peu courant dans l'industrie. Ces outils concernent par exemple les techniques d'analyse cyclostationnaire [Gar91, Mac98, Ran00, Cap00] comme la corrélation spectrale, représentant

les liens statistiques entre différentes fréquences d'un même signal. Récemment, des statistiques d'ordre supérieur à deux ont aussi été utilisées [Lac97]. En effet, on a défini dans le domaine temporel de nouveaux indicateurs, comme des moments d'ordre supérieur à 2 (skewness, kurtosis) qui permettent de mieux caractériser la loi de répartition de l'amplitude d'un signal. Dans le domaine fréquentiel, l'emploi des multispectres (bispectre, trispectre, *etc*) peut aider à la recherche de couplages non-linéraires [Gra99b]. On peut enfin noter l'emploi de modélisations non-linéaires comme les filtres de Volterra, afin de mieux approcher les transferts mécaniques complexes [Mio96].

Pour le présent problème d'isolation vibratoire, un outil permettant non seulement de caractériser, mais aussi de quantifier les effets de la méthode employée est nécessaire. La densité spectrale de puissance répond à ces exigences, puisqu'elle permettra de localiser les fréquences des vibrations affectées, et de mesurer la variation de puissance (globale et/ou par bande de fréquence) provoquée. Le prochain paragraphe expose donc les définitions nécessaires à son utilisation.

Introduction à l'analyse spectrale

Définition de la densité spectrale de puissance

L'analyse spectrale est un ensemble d'outils théoriques permettant d'analyser un signal dans le domaine fréquentiel. Elle concerne, entre autre, le calcul des répartitions de puissance ou d'énergie en fonction de la fréquence, également appelées «densités spectrales». La section 1.3.2 a montré que les signaux vibratoires des machines tournantes sont principalement constitués de composantes aléatoires et périodiques. Pour de tels signaux, seule la densité spectrale de puissance est définie, contrairement à celle d'énergie. Prenons par exemple un signal vibratoire à temps continu $s(t)$, mesuré sur une machine tournante électrique. On obtient, en l'échantillonnant à la fréquence ν_e vérifiant la condition de Shannon, le signal discret $s(n)$. Ce signal contenant des composantes aléatoires et périodiques, il n'est pas de module sommable, et sa transformée de Fourier définie par (1.2) ne converge pas. Par contre, sa version tronquée sur N échantillons $s_N(n)$ a bien une transformée de Fourier, que l'on note $\hat{s}_N(\alpha)$. La densité spectrale d'énergie de ce signal tronqué est définie par :

$$S_{s_N}(\alpha) = \mathrm{E}\left[|\hat{s}_N(\alpha)|^2\right]$$

où E[·] représente l'opérateur espérance mathématique, et doit sa présence au caractère aléatoire du signal de vibration.
Pour prendre en compte tout le signal $s(n)$, il faut faire tendre le nombre d'échantillons N vers l'infini, mais nous venons de voir que la transformée de Fourier $\hat{s}_{N\to\infty}(\alpha)$ n'est alors plus définie. Pour forcer la convergence de cette série, on la normalise par le nombre d'échantillons N, équivalent à une durée. On obtient donc :

$$\gamma_s(\alpha) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{|\hat{s}_N(\alpha)|^2}{N}\right] \tag{1.6}$$

La grandeur obtenue a bien une dimension de puissance (énergie divisée par temps), et est une fonction réelle de la fréquence. Il faut noter que la α est une fréquence réduite sans dimension, dont l'intervalle de définition et le lien avec la fréquence réelle ν (en Hertz) sont donnés par (1.4). En généralisant (1.6), on peut déduire la densité interspectrale de puissance entre deux signaux discrets de puissance moyenne finie $x(n)$ et $y(n)$:

$$\gamma_{xy}(\alpha) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\left[\frac{\hat{x}_N(\alpha)\hat{y}_N(\alpha)^*}{N}\right] \tag{1.7}$$

où * symbolise le complexe conjugué.
Cette grandeur n'est plus une quantité réelle mais devient une fonction complexe de la fréquence réduite α, dont le module peut être interprété comme la répartition fréquentielle de puissance commune au niveau des deux signaux.

La relation (1.6) est une définition théorique, mais elle ouvre la voie à la méthode pratique d'estimation du spectre de puissance décrite dans le paragraphe suivant.

Estimation de la densité spectrale de puissance

Sous les hypothèses conjointes de stationnarité (invariance temporelle des propriétés statistiques) et d'ergodisme (les moyennes temporelles tendent vers des valeurs finies et certaines) que nous supposerons toujours vérifiées par les signaux vibratoires analysés, l'espérance mathématique de la relation (1.6) peut être remplacée par une moyenne temporelle. On obtient alors $\gamma_s(\alpha)$ en découpant le signal discret $s(n)$ en M tranches de L échantillons, et en effectuant la moyenne suivante :

$$\gamma_s(\alpha) = \lim_{M\to+\infty} \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|\hat{s}_{L_i}(\alpha)|^2}{L}$$

où $\hat{s}_{L_i}(\alpha)$ est la transformée de Fourier de la $i^{\text{ème}}$ tranche de L échantillons notée $s_{L_i}(n)$.
Cette relation n'est toujours pas utilisable en pratique à cause du nombre infini de tranches. On construit donc une estimée de la densité spectrale de puissance notée $\tilde{\gamma_s}(\alpha)$ en prenant M fini mais suffisamment élevé :

$$\tilde{\gamma_s}(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \frac{|\hat{s}_{L_i}(\alpha)|^2}{L} \tag{1.8}$$

Cette méthode est appelée estimation par périodogramme moyenné, et on peut montrer que c'est un estimateur consistant de $\gamma_s(\alpha)$. Les différentes densités spectrales présentées dans la suite de ce rapport ont été calculées par cette méthode.

Allure théorique de la densité spectrale de puissance d'un signal vibratoire de machine tournante

D'après le paragraphe sur l'origine des vibrations d'une machine tournante électrique, les forces excitant leur structure sont soit périodiques, soit aléatoires large bande. Les signaux

vibratoires qu'elles peuvent engendrer ont donc les mêmes caractéristiques, et l'allure générale de leur densité spectrale de puissance est montrée à la figure 1.7, duale de la figure 1.6, mais en adoptant un point de vue fréquentiel.

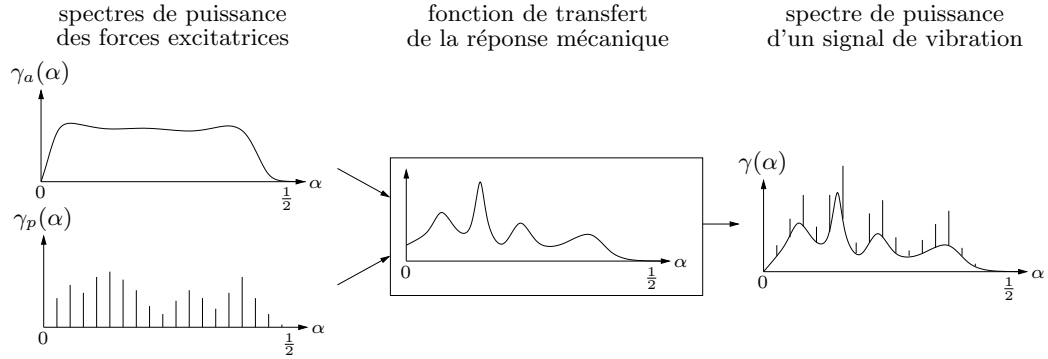


Fig. 1.7: Allure théorique de la densité spectrale de puissance d'un signal vibratoire de machine tournante électrique

La densité spectrale de puissance $\gamma_p(\alpha)$ des forces périodiques est un ensemble de raies d'amplitude variable. Celle $\gamma_a(\alpha)$ des forces aléatoires a un caractère large bande. Par l'intermédiaire de la réponse mécanique dont la fonction de transfert présente plusieurs résonances et anti-résonances, ces forces génèrent un signal vibratoire dont la densité spectrale de puissance $\gamma(\alpha)$ présente à la fois des raies spectrales, et un caractère large bande. La section suivante est dédiée à vérifier ce résultat en estimant la densité spectrale de puissance d'un signal vibratoire mesuré sur la machine synchrone de test.

1.3.4 Exemple de signal vibratoire de la machine de test

Le signal étudié dans cette section a été fourni par un accéléromètre placé sur la carcasse de la machine synchrone, afin d'en mesurer les vibrations radiales. Lors de cette acquisition, cette machine était entraînée par une machine à courant continu à une vitesse de rotation de 1428 tours par minute, ce qui correspond à une fréquence de rotation de $\nu_r = 23,8$ Hz. Cette valeur à été choisie de telle sorte qu'elle soit différente des harmoniques dus au réseau EDF. De plus, la machine synchrone fonctionnait en alternateur à vide, afin d'éliminer l'influence vibratoire des courants statoriques. Le signal mesuré a été filtré par un filtre analogique passe-bas de fréquence de coupure égale à 3 kHz et de pente -96 dB par octave. Il a ensuite été échantillonné à $\nu_e = 10$ kHz pendant 5 secondes. On dispose donc d'un signal vibratoire discret de 50000 points vérifiant la condition d'échantillonnage de Shannon. Enfin, un capteur angulaire monté sur l'arbre de rotation a permis l'acquisition d'un signal sinusoïdal appelé *top-tour*, dont la fréquence est égale à celle de rotation.

Domaine temporel

La figure 1.8 donne l'allure temporelle du signal de vibrations mesuré, ainsi que celle du signal de top-tour, dont une période représente une révolution complète du rotor de la machine.

On peut noter visuellement la présence d'un déphasage constant entre le top-tour et certaines

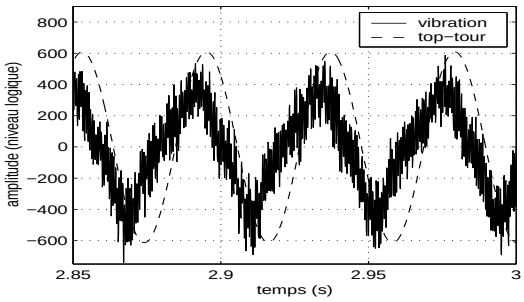
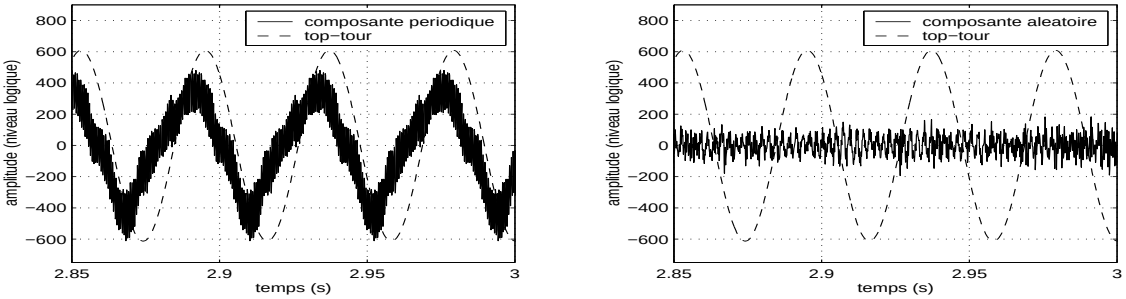


Fig. 1.8: Allure temporelle de signal vibratoire brut

composantes périodiques du signal de vibration. Ceci laisse présager la présence, au sein du signal vibratoire, d'un ensemble de composantes périodiques *synchrones* au phénomène de rotation. Ces composantes restent des harmoniques de la fréquence de rotation, même si elle varie au cours du temps. Une manière de les extraire est d'appliquer la technique du moyennage synchrone, qui consiste à utiliser le top-tour comme signal de référence pour découper le signal de vibrations en tranches de longueur égale à une période de rotation. On effectue alors une moyenne des différentes tranches, afin d'atténuer les composantes non synchrones à la rotation, qu'elles soient périodiques ou large bande. Afin que ce traitement soit réalisé dans des conditions optimales, il est nécessaire de re-échantillonner le signal de vibrations d'une manière synchrone au top-tour, c'est à dire avec une fréquence d'échantillonnage multiple de la fréquence de rotation. Le résultat obtenu pour 1024 échantillons par tour, c'est à dire une fréquence d'échantillonnage de $\nu_e = 24371$ Hz est reporté sur la figure 1.9, où on peut vérifier la stricte périodicité des composantes synchrones (1.9(a)), par rapport au caractère plus aléatoire des composantes non synchrones (1.9(b)). L'importance relative d'un type de composantes par rapport à l'autre peut être quantifiée par le rapport de leur puissance respective. Une telle grandeur, pour un signal numérique $s_N(n)$ de N échantillons est donnée



(a) composantes synchrones à la rotation

(b) composantes non synchrones à la rotation

Fig. 1.9: Allure temporelle des résultats après moyennage synchrone

par :

$$P_{s_N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |s_N(k)|^2 \tag{1.9}$$

Dans le cas présent, on obtient, pour les composantes synchrones, une puissance 16 fois supérieure à celle des composantes non synchrones. Ceci montre bien leur prédominance dans ce signal vibratoire.
Le paragraphe suivant donne une représentation de ces signaux dans le domaine fréquentiel, grâce à leurs densités spectrales de puissance.

Domaine fréquentiel

La figure 1.10 montre la densité spectrale de puissance estimée du signal vibratoire, représentée en décibels. On obtient une densité spectrale composés à la fois d'une partie

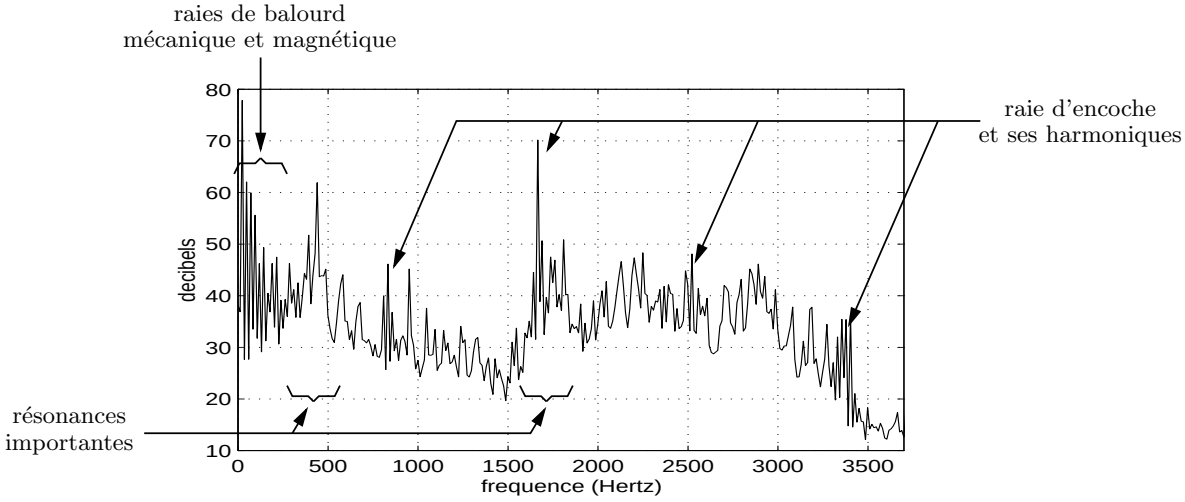
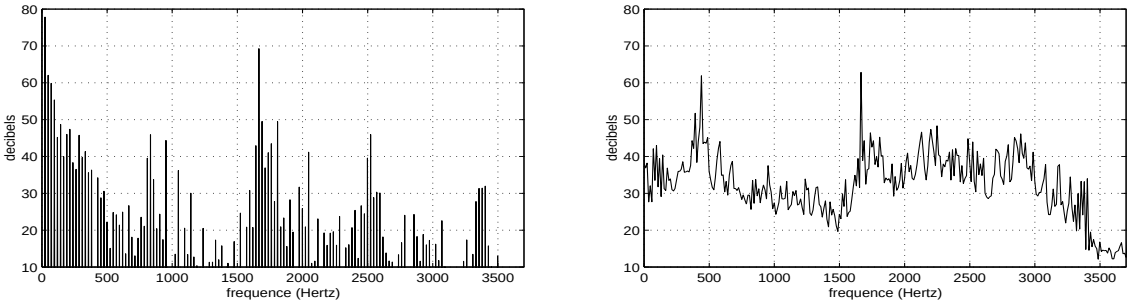


Fig. 1.10: Densité spectrale de puissance du signal vibratoire

large bande et de raies spectrales, comme prévu par la figure 1.7. On peut clairement identifier les raies spectrales dues aux balourds mécanique et magnétique, situées aux premières fréquences harmoniques de ν_r. On trouve ensuite, autour de $36 \times \nu_r \simeq 857$ Hertz, un groupe de raies d'encoche, ainsi que leurs harmoniques autour des multiples entiers de cette valeur. Pour le côté large bande, on peut noter la présence de deux résonances importantes (autour de 450 et 1700 Hertz), contribuant à l'amplification de certaines raies spectrales, dont le premier harmonique de la raie d'encoche. Les densités spectrales de puissance des composantes synchrones et non synchrones sont données respectivement par les figures 1.11(a) et 1.11(b). On retrouve, comme principaux phénomènes synchrones, les raies de balourd ainsi que les raies d'encoche, visibles jusqu'à 3400 Hz, et toutes situées à des fréquences harmoniques de ν_r. Les phénomènes non synchrones sont, quant à eux, principalement à caractère large bande, et couvrent toute la bande du filtre passe-bas utilisé dans la chaîne d'acquisition. On note la présence des deux résonances importantes repérées sur la densité spectrale (1.10), amplifiant



(a) composantes synchrones à la rotation

(b) composantes non synchrones à la rotation

Fig. 1.11: Densités spectrales de puissance après moyennage synchrone

des raies non synchrones à la rotation
Il est évident que ces deux signaux contiennent une foule de renseignements sur l'état de la machine et sur son fonctionnement. Le signal correspondant aux composantes synchrones étant strictement périodique, l'interprétation physique de chacune des raies de son spectre serait certainement des plus fructueuses. Par contre, le signal correspondant aux composantes non synchrones nécessite, de par son caractère aléatoire, une analyse plus poussée. De plus, la périodicité du phénomène de rotation qui l'engendre, incite à croire en la présence de périodicités cachées au sein de ce signal, ce qui serait vérifiable grâce aux outils cyclostationnaires. L'emploi des méthodes temps-fréquence est aussi à envisager afin de caractériser d'éventuelles non stationnarités plus complexes. Enfin, les autres outils d'analyse ne sont pas à proscrire et conduiraient à des résultats intéressants, mais l'analyse vibratoire n'étant pas l'objet de ce travail de recherche, nous n'en dirons pas plus sur ce sujet.

Cette section a donc permis de donner un rapide aperçu sur l'origine et la nature des vibrations d'une machine tournante électrique, ainsi que sur les principales méthodes de traitement du signal utilisées pour les analyser. De plus, un exemple de signal vibratoire réel mesuré sur la machine de test a montré que pour cette machine, les vibrations radiales prédominantes sont synchrones à la vitesse de rotation et que la méthode d'isolation vibratoire envisagée doit atténuer en priorité leur transmission. Elles sont représentées, dans le domaine fréquentiel, par un ensemble de raies spectrales situées aux fréquences harmoniques de ν_r. Nous verrons au chapitre 4 que leur synchronisme et leur périodicité permettent de développer des algorithmes beaucoup plus simples que pour des vibrations à caractère aléatoire. Ce point est important dans le sens où la méthode élaborée doit être implantable dans un processeur numérique, afin de pouvoir fonctionner en temps-réel. La nature des vibrations à atténuer étant maintenant connue, le modèle du transfert grâce auquel on pourra agir sur celles-ci va être déterminé dans la section suivante.

1.4 Modélisation physique du transfert

1.4.1 Préliminaires

Le principe physique utilisé pour atténuer les vibrations d'une machine tournante a été exposé à la section 1.2.2. On rappelle qu'il utilise des courants de compensation additionnels $i_{1_c}(t)$, $i_{2_c}(t)$ et $i_{3_c}(t)$ dans les enroulements statoriques qui génèrent, à la position angulaire θ, un champ magnétique supplémentaire $b_c(t,\theta)$. Ce dernier engendre une force $f_c(t,\theta)$ sur la carcasse statorique (voir équation (1.1)), qui répond par des vibrations supplémentaires $v_c(t,\theta)$. Par un choix judicieux des courants de compensation, ces contre-vibrations peuvent alors être opposées aux vibrations naturelles de la machine $v_n(t,\theta)$, afin de minimiser les vibrations totales du stator $v(t,\theta)$ autour de la position angulaire θ. Les différents transferts intervenant entre les courants de commande $i_{1_c}(t)$, $i_{2_c}(t)$ et $i_{3_c}(t)$ et le signal vibratoire $v(t,\theta)$ mesuré en sortie d'un accéléromètre placé sur la carcasse statorique en θ sont représentés sur la figure 1.12. Le but de cette section est d'établir le modèle de chacun des transferts de cette

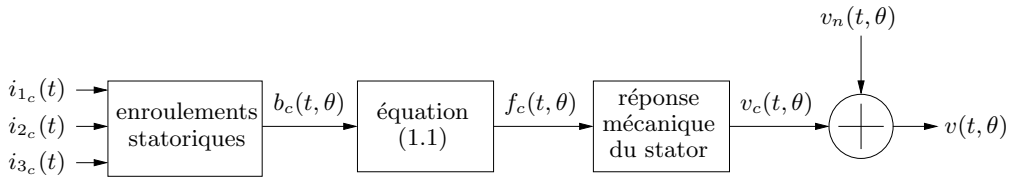


Fig. 1.12: Transferts mis en jeu dans le système global

figure, et d'énoncer les hypothèses nécessaires à leur validité.

On peut d'ores et déjà poser quelques hypothèses permettant de simplifier le problème original.

On considère premièrement que les effets de bords dus à la machine sont inexistants. Les phénomènes mis en jeu dans une coupe transversale de la machine seront donc identiques tout le long de celle-ci. Cette remarque est très importante car elle permet de réduire le problème tridimensionnel original à un problème bidimensionnel. Dans la suite de ce mémoire, il est donc suffisant de limiter l'étude théorique à celle d'une section transversale.

La seconde hypothèse concerne la perméabilité magnétique du fer qui est supposée infinie. Ceci implique la normalité du champ magnétique par rapport aux surfaces statoriques et rotoriques délimitant l'entrefer.

En troisième lieu, on considère qu'il n'y a pas de déformation des lignes de champ au voisinage des conducteurs contenus dans la machine. Ces deux dernières hypothèses, conjointement avec le fait que l'entrefer soit considéré lisse, permettent de supposer le champ magnétique radial en tout point de l'entrefer. On ne parlera donc plus dans la suite de ce rapport de la direction ou du module du champ magnétique, mais seulement de sa valeur. Celle-ci sera comptée positive si le champ est dirigé du centre de la machine vers l'extérieur, et négative dans le cas contraire.

Enfin, la quatrième et dernière hypothèse est la non-saturation du circuit magnétique de la

machine, quel que soit son état de fonctionnement. Le champ d'induction est donc toujours proportionnel au champ magnétique, quelle que soit sa valeur.

Après ces premières simplifications, nous allons «progresser» le long du schéma de la figure 1.12, en partant des courants de commande pour finalement en déduire l'expression de $v_c(t, \theta)$.

1.4.2 Effet des enroulements statoriques

Le premier transfert à modéliser est celui reliant les courants de compensation $i_{1_c}(t)$, $i_{2_c}(t)$ et $i_{3_c}(t)$ parcourant les enroulements statoriques, au champ d'induction $b_c(t, \theta)$ qu'ils créent en θ. Pour ce faire, nous devons connaître les caractéristiques des trois bobines statoriques de la machine de test. Elles sont à ouverture diamétrale, géométriquement décalées de $\frac{2\pi}{3}$ radians, et ont chacune $p = 2$ paires de pôles. Elles sont représentées schématiquement sur la figure 1.13, qui symbolise une coupe transversale de la machine de test. L'origine du repère

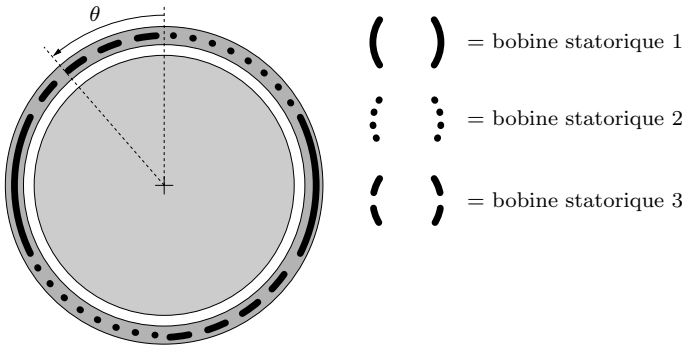


Fig. 1.13: Enroulements statoriques de la machine synchrone de test

lié au stator fixant la position angulaire θ est l'axe de la bobine statorique numéro 1. En supposant ces trois enroulements identiques et idéalement répartis, et en négligeant l'effet de saillance dû aux faibles variations de l'entrefer lisse, le champ d'induction créé par les courants de commande prend la valeur suivante :

$$b_c(t, \theta) = K \left[\cos(p\theta) i_{1_c}(t) + \cos(p\theta - \frac{2\pi}{3}) i_{2_c}(t) + \cos(p\theta - \frac{4\pi}{3}) i_{3_c}(t) \right] \tag{1.10}$$

où la constante K est fixée par les caractéristiques géométriques de la machine.

L'effet des enroulements statoriques peut donc être modélisé par un gain multiplicatif variant sinusoïdalement avec la position angulaire θ et agissant sur chaque courant, suivi d'un additionneur trois voies.

1.4.3 Expression de la force de Maxwell

La seconde expression à calculer est celle de la force $f_c(t, \theta)$ engendrée par le champ de compensation, et appliquée à la carcasse statorique en θ. D'après l'équation (1.1), elle ne dépend pas uniquement de $b_c(t, \theta)$, mais plutôt du champ d'induction total $b(t, \theta)$, généré à

la fois par le rotor et le stator. Afin de déterminer l'expression de $b(t,\theta)$, on se place dans le cas où la machine synchrone de test est en fonctionnement normal. Elle est donc utilisée en moteur alimenté par un système de courants triphasés équilibré, ou en alternateur débitant sur une charge triphasée équilibrée, sans aucun courant de compensation parcourant ses enroulements. Dans [Far95], la structure de cette machine a été optimisée de sorte que pour un tel fonctionnement, son champ d'induction ait une répartition temporelle et fréquentielle quasiment sinusoïdale. On peut alors exprimer $b(t,\theta)$ sous la forme :

$$b(t,\theta) = B\cos(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi)$$

où les constantes B et φ dépendent des caractéristiques de la machine et du mode de fonctionnement choisi. On peut remarquer que dans le cas d'une machine synchrone quelconque, l'approximation au premier harmonique permet d'écrire la même relation.
Si les courants de compensation sont injectés sous forme additionnelle dans les enroulements statoriques de la machine, ils vont créer le champ $b_c(t,\theta)$ qui s'ajoutera au champ précédent en vertu de l'hypothèse de non-saturation du circuit magnétique. On obtient donc la forme générale du champ d'induction total de la machine de test :

$$b(t,\theta) = B\cos(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi) + b_c(t,\theta) \tag{1.11}$$

où l'expression de $b_c(t,\theta)$ en fonction des courants de compensation est donnée par la relation (1.10).

L'équation (1.1), donnant l'expression de la force due au champ d'induction de la machine et subie par l'élément de surface statorique ds situé en θ peut s'écrire, en utilisant (1.11) :

$$\begin{aligned} f(t,\theta) &= \frac{ds}{2\mu_0}\left[B\cos(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi) + b_c(t,\theta)\right]^2 \\ &= \frac{B^2 ds}{2\mu_0}\cos^2(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi) + \frac{Bds}{\mu_0}\cos(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi)b_c(t,\theta) + \frac{ds}{2\mu_0}b_c(t,\theta)^2 \end{aligned}$$

Le premier terme de cette somme est engendré par le seul champ d'induction dû au fonctionnement normal de la machine. Il provoque l'apparition d'un champ de force périodique de fréquence $2p\nu_r$, et se retrouve dans tous les cas de figure, même en l'absence des courants de compensation. Ce n'est pas le cas des deux derniers termes, qui apparaissent avec $b_c(t,\theta)$, et donc avec $i_{1_c}(t)$, $i_{2_c}(t)$ et $i_{3_c}(t)$. Ils donnent l'expression de la force de compensation $f_c(t,\theta)$ créée par ces courants, que l'on peut mettre sous la forme :

$$f_c(t,\theta) = F_1\cos(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi)b_c(t,\theta) + F_2 b_c(t,\theta)^2 \tag{1.12}$$

Le transfert entre le champ de compensation et la force qu'il engendre est donc, dans le cas général, à la fois non-linéaire et variant dans le temps. En effet, ce dernier caractère est contenu dans le premier terme de la somme (1.12), où l'entrée ($b_c(t,\theta)$) est multipliée par un gain fonction du temps. Quant à la non-linéarité, elle provient du second terme de cette somme qui est quadratique.

Une dernière hypothèse, portant sur les courants de compensation, va nous permettre de simplifier cette relation. En effet, le rôle de ces courants est d'atténuer les vibrations de la machine de test, mais ils ne doivent en aucun cas perturber son fonctionnement. En ce sens, ils doivent rester faibles devant les courants statoriques présents lorsque la machine est utilisée normalement. Il en découle que le champ de compensation $b_c(t,\theta)$ qu'ils engendrent sera petit devant celui de la machine en fonctionnement normal. Donc pour des courants de compensation assez faibles, le terme quadratique de la relation (1.12) peut être négligé devant l'autre terme, d'où l'approximation suivante :

$$f_c(t,\theta) \simeq F\cos(2\pi p\nu_r t - p\theta + \varphi) b_c(t,\theta) \tag{1.13}$$

Cette relation traduit un transfert linéaire et variant périodiquement dans le temps de fréquence $p\nu_r$, entre $b_c(t,\theta)$ et $f_c(t,\theta)$, la non-linéarité de la relation (1.12) ayant disparue avec le terme quadratique. Lors de l'élaboration de l'algorithme de compensation dans le chapitre 4, on prendra soin de limiter la puissance des courants de compensation, de sorte que la relation (1.13) soit toujours valable.

1.4.4 Effet de la carcasse statorique

Le dernier transfert qu'il reste à déterminer sur la figure 1.12, relie la force de compensation appliquée à la carcasse statorique en θ, à la vibration additionnelle $v_c(t,\theta)$ que cette dernière donne en réponse. Il s'agit donc de la réponse mécanique du stator, qui est fonction de la position angulaire considérée. On imagine bien la complexité d'un tel transfert, c'est pourtant sur lui que nous allons faire l'hypothèse la plus forte : il est supposé linéaire et invariant dans le temps. Il peut donc être entièrement modélisé par une fonction de transfert fréquentielle au sens classique du terme, qui est à la fois fonction de la fréquence réelle ν et de la position angulaire θ et notée $\hat{g}(\nu,\theta)$. Cette approche a déjà été adoptée dans [Mae87], [Der92] et [Far95], avec de bons résultats de modélisation. De plus, quelques éléments de réponse peuvent être trouvés dans [Ful96, chapitre2], où l'auteur montre qu'un cylindre de longueur finie répond à divers types de champ de force sinusoïdaux en temps, par un déplacement de même fréquence. Ceci conforte donc l'hypothèse de linéarité et d'invariance dans le temps pour la réponse mécanique du stator, puisque sa structure est bien celle d'un cylindre de longueur finie. Si son comportement s'avérait malgré tout plus compliqué, $\hat{g}(\nu,\theta)$ permettrait tout de même de modéliser la partie linéaire de sa réponse mécanique.

De plus, on rappelle qu'en pratique, les signaux vibratoires sont fournis par des accéléromètres, dont le transfert est linéaire et invariant dans le temps dans la bande fréquentielle considérée. Le transfert de ce capteur devrait donc apparaître sur la figure 1.12 après le signal vibratoire $v(t,\theta)$. On peut en fait considérer que la fonction de transfert fréquentielle du stator englobe celle du capteur, puisqu'elles sont de même type. $\hat{g}(\nu,\theta)$ servira donc de modèle à la fois à la carcasse statorique et à l'accéléromètre.

1.4.5 Transfert global entre les courants de commande et les vibrations engendrées

Tous les transferts de la figure 1.12 ont donc été déterminés. En utilisant les équations (1.10) et (1.13) ainsi que les remarques du paragraphe précédent, on peut représenter le modèle du système global comme sur la figure 1.14.

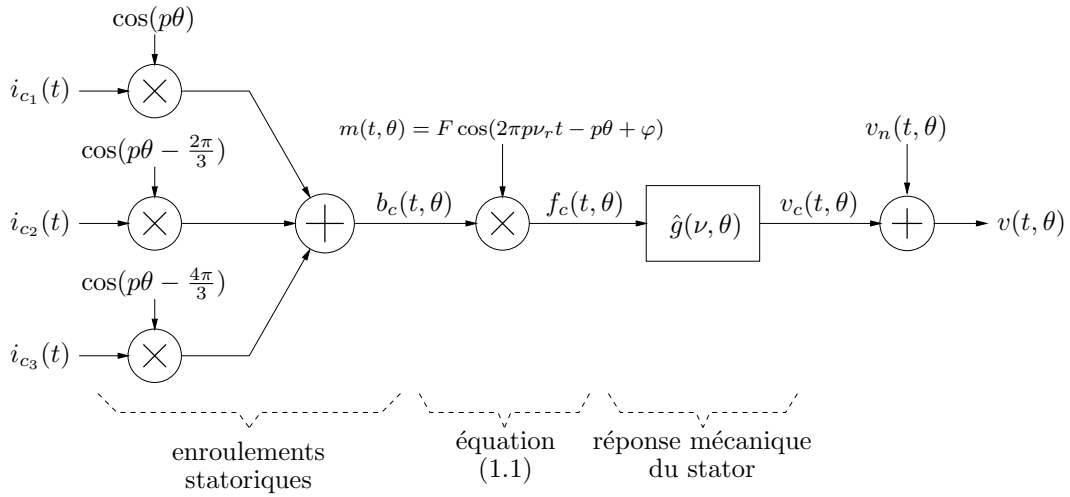


Fig. 1.14: Modèle à temps continu du système global

Le système situé entre les courants de commande et la vibration additionnelle qu'ils engendrent est bien linéaire. Toutefois, la présence du signal sinusoïdal modulant en amplitude le champ d'induction $b_c(t,\theta)$ fait varier ses caractéristiques périodiquement dans le temps. Le terme «caractéristiques» désigne ici les grandeurs représentatives du système, comme sa réponse impulsionnelle ou sa fonction de transfert fréquentielle. Le système global peut donc être vu comme un système linéaire variant périodiquement dans le temps (LVPT), à trois entrées et une sortie. Il est à noter que ce transfert a été validé grâce à des signaux réels dans [Gra98] et [Gra99b] à l'aide des statistiques d'ordre supérieur (bispectre et bicohérence). Il est sera donc considéré comme parfaitement valable, dans la suite de ce mémoire.
Enfin, on peut remarquer que chaque courant de commande ne peut agir sur toute la circonférence de la carcasse statorique. En effet, si on se limite au courant $i_{c_1}(t)$, le gain $\cos(p\theta)$ qui lui est appliqué en entrée lui interdit de pouvoir engendrer une quelconque vibration additionnelle pour des positions angulaires vérifiant $\theta = (2k+1)\frac{\pi}{2p}$, où $k \in \{0, 1, \ldots, 2p-1\}$. Par exemple, pour la machine de test le nombre de paires de pôles p étant égal à deux, cette entrée ne peut engendrer de vibrations aux positions angulaires $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{4}$ radians. Par contre, les autres entrées peuvent prendre le relais puisque leurs gains respectifs ne sont alors pas nuls. On peut donc d'ores et déjà voir qu'en se limitant à un système mono-entrée, on ne peut avoir d'action sur tout le stator, contrairement à un système multi-entrées.

1.5 Conclusion

Ce premier chapitre a permis de bien spécifier le sujet du travail de recherche présenté dans ce mémoire.
La première section définit tout d'abord l'objectif général de ce travail : réaliser l'isolation vibratoire de la machine synchrone de test présentée au paragraphe 1.2.3. Il a ensuite été montré qu'une manière d'atteindre cet objectif est de minimiser les vibrations de la carcasse statorique autour d'une position angulaire, et de se servir de cette «zone de calme» comme zone de fixation. On a vu enfin que le principe d'action sur les vibrations de la machine est l'utilisation des forces radiales d'origine magnétique, générées par des courants de compensation dans les enroulements de cette machine.
Dans la seconde section, il a été montré que les vibrations synchrones au phénomène de rotation (donc périodiques et de fréquence harmonique de la fréquence de rotation ν_r) sont prédominantes dans les vibrations radiales de la machine de test. La méthode à élaborer doit donc chercher à les atténuer en priorité, et doit pouvoir couvrir tout le spectre vibratoire fréquentiel jusqu'à 3 kHz.
Enfin, la modélisation du système mis en jeu, réalisée dans la troisième et dernière section, à mis en évidence qu'il pouvait être considéré comme linéaire et variant périodiquement dans le temps, sous l'hypothèse de courants de compensation assez faibles. Le but à atteindre est donc *d'atténuer «au mieux» un signal formé de composantes spectrales de fréquences harmoniques de ν_r, à travers un système linéaire et variant périodiquement dans le temps de fréquence $p\nu_r$ connue, tout en gardant la possibilité de limiter le niveau des signaux de commande.*

Avant d'essayer de résoudre ce problème, nous allons nous pencher, dans le prochain chapitre, sur l'étude des travaux qui ont déjà été effectués sur ce sujet.

Chapitre 2

Méthodes classiques de contrôle actif

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter les méthodes «classiques» employées dans le domaine du contrôle actif de vibrations, et de montrer leur insuffisance pour la présente application. En effet, ces méthodes supposent la présence de transferts linéaires et invariants dans le temps au sein du système global de contrôle. Elles ne sont donc pas adaptées au système linéaire et variant périodiquement dans le temps dont le modèle a été déterminé au chapitre précédent. Nous verrons que cette particularité diminue fortement leurs performances, et qu'elles deviennent alors difficilement exploitables.

La section 2.2 est une introduction au concept de base du contrôle actif, et décrit les différentes stratégies d'implantation ainsi que les algorithmes les plus couramment utilisés.

Les résultats obtenus par ce type de méthodes dans le cadre de la compensation de vibrations envisagée sont ensuite présentés dans la section 2.3. Les divers travaux de recherche dont ce sujet a précédemment fait l'objet, ainsi que les résultats obtenus y sont analysés.

2.2 Introduction au contrôle actif classique

2.2.1 Généralités

Historiquement, les techniques de contrôle actif ont été élaborées afin de lutter contre des ondes sonores indésirables [Lue36, Ols53, Con56]. La propriété fondamentale qu'elles utilisent est le principe de superposition. En effet, une source appelée «source primaire» est supposée générer un bruit que l'on veut éliminer. Un système de contrôle actif est chargé d'émettre, par l'intermédiaire d'une «source secondaire», un son de même amplitude que ce bruit, mais de phase opposée. Idéalement, ces deux ondes s'ajoutent l'une à l'autre et forment ainsi une erreur résiduelle nulle, comme indiqué sur la figure 2.1. Toutefois, les erreurs modélisation pouvant se produire sur les différents transferts présents dans le système, ainsi que le caractère

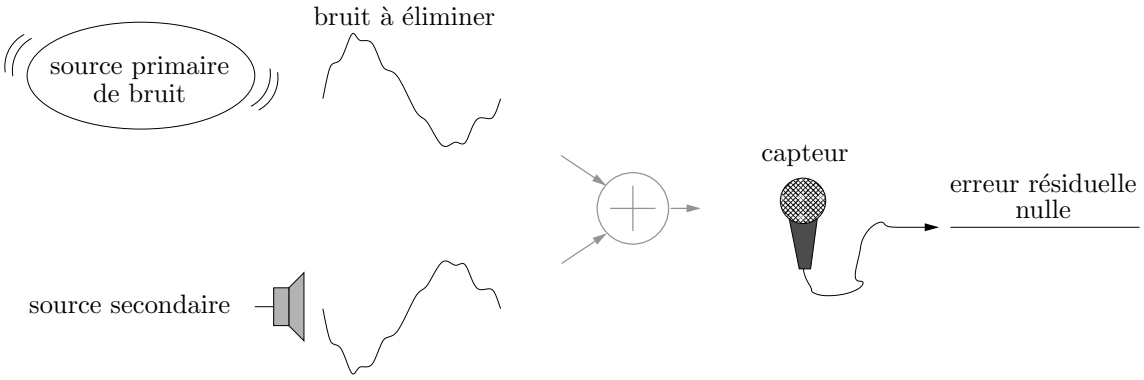


Fig. 2.1: Principe général du contrôle actif de son

souvent aléatoire des signaux de perturbation, font que dans le cas général, on ne peut annuler complètement l'erreur résiduelle. Par contre, on peut chercher à l'atténuer «au mieux» en calculant le bruit secondaire «optimal» qui minimise une fonction de coût dépendant de l'erreur résiduelle. Ce coût est choisi quadratique dans l'immense majorité des cas, d'une part parce que cette grandeur, homogène à une puissance sonore, caractérise bien les performances d'atténuation du système de contrôle, et d'autre part parce que ce type de coût permet une grande simplification des calculs. Il est à remarquer que le bruit élaboré par le système de contrôle actif ne sera optimal qu'au sens de cet indice de performance.

Plus généralement, le principe du contrôle actif peut être appliqué à divers types de perturbations, dont les vibrations. La figure 2.2 reprend la figure 2.1, mais dans un cadre plus général, où les perturbations peuvent être d'une nature physique quelconque. La perturbation

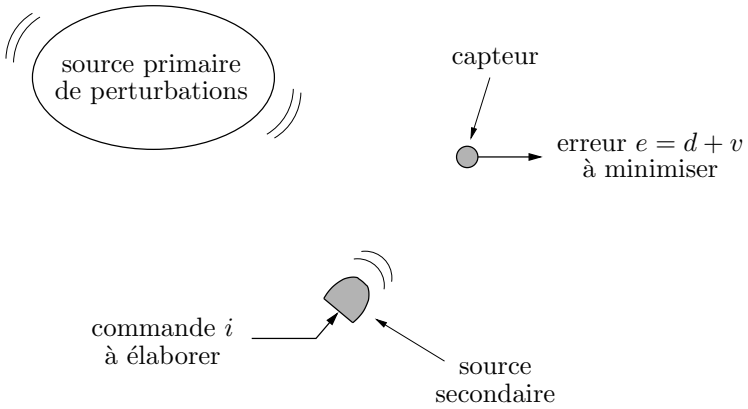


Fig. 2.2: Principe général du contrôle actif

générée uniquement par la source primaire au niveau du capteur est notée d. Celle générée au même point par la source secondaire, et donc par la commande i, est notée v, et peut être considérée comme une «contre-perturbation». Le système de contrôle actif doit être capable d'élaborer la commande i_{opt}, optimale au sens où elle doit minimiser un critère quadratique dépendant de l'erreur $e = d + v$. Une fois ce minimum atteint, on peut dire que la puissance de l'erreur résiduelle a été diminuée, et la perturbation compensée grâce à l'action de la

contre-perturbation générée par la commande optimale.
En représentant les transferts existant entre les différents signaux mis en jeu, on obtient le modèle de la figure 2.3.

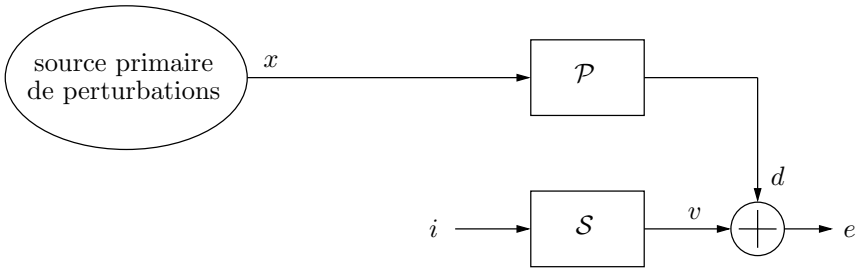


Fig. 2.3: Transferts mis en jeu dans un système de contrôle actif

On définit tout d'abord un signal x, que l'on nomme «signal de référence». Il est dû exclusivement à la source primaire, et permet de modéliser le trajet parcouru par la grandeur physique perturbatrice de cette source au capteur. En effet, le «transfert primaire» noté $\mathcal{P}$, relie la référence x à la perturbation mesurée d. Il est à noter que le signal de référence, s'il est accessible à la mesure, permettra au système de contrôle actif de prédire certaines caractéristiques des perturbations à éliminer au niveau du capteur. Ensuite, le transfert donnant le lien entre le signal de commande i de la source secondaire, et la contre-perturbation v qu'elle engendre au niveau du capteur, est noté $\mathcal{S}$. Finalement, on voit qu'on ne peut atténuer d que par l'intermédiaire de ce transfert secondaire. Il est donc naturel de penser que les performances du système de contrôle actif seront très dépendantes des caractéristiques de $\mathcal{S}$.

Afin d'illustrer les différents signaux et systèmes de la figure 2.3, nous allons décrire quelques exemples applicatifs de contrôle actif de vibrations. Le premier exemple, dont le schéma de principe est donné par la figure 2.4, concerne le contrôle actif des vibrations d'une poutrelle métallique de longueur infinie, soumise à des ondes de flexion qui se propagent de la gauche vers la droite. Un premier accéléromètre fournit le signal de référence x, représentant

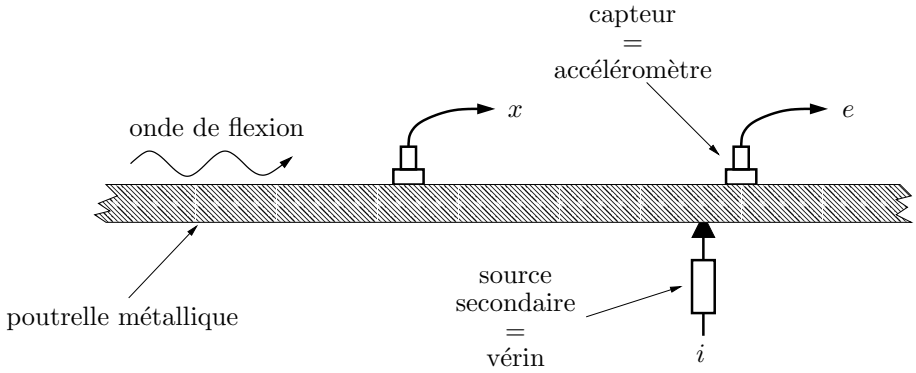


Fig. 2.4: Contrôle actif des vibrations d'une poutrelle métallique

les vibrations de la poutrelle en une position amont par rapport à un second accéléromètre. Ce dernier mesure le signal d'erreur e à minimiser, ou, en l'absence de signal de commande i,

les vibrations d à éliminer. Le transfert $\mathcal{P}$ de la figure 2.3 est donc celui reliant les signaux x et e, en l'absence de commande i. Cette dernière agit additivement sur d en créant la contre-vibration v grâce à une source secondaire, constituée par un vérin. Le transfert $\mathcal{S}$ relie quant à lui la commande i du vérin, au signal d'erreur e, en l'absence des perturbations engendrées par les ondes de flexion. Pour cette application, le signal de référence peut être considéré comme une version des perturbations qui vont affecter le second accéléromètre, et peut donc être utilisé afin de les prédire.

Le second exemple auquel on peut s'intéresser est celui de l'application décrite au chapitre précédent, concernant le contrôle actif des vibrations d'une machine tournante électrique. Dans ce cas, la difficulté revient à déterminer un signal de référence représentatif des vibrations à éliminer, dont la seule source est la rotation de la machine. Intuitivement, on peut penser que le signal de sortie d'un capteur angulaire fixé sur l'arbre de rotation (signal de top-tour) peut remplir cette condition. En effet, il fournit une sinusoïde dont la fréquence est celle de rotation ν_r. Ce point est confirmé par les résultats obtenus à la section 1.3.4, où il a été montré que les vibrations de la machine de test étaient principalement constituées d'un ensemble de sinusoïdes, dont les fréquences sont les harmoniques de ν_r. Dans la suite, c'est donc ce choix qui sera fait pour le signal de référence, qui fournira le fondamental des vibrations périodiques à éliminer. Le schéma correspondant à cette configuration est celui de la figure 2.5. Le signal d'erreur est mesuré par un accéléromètre placé sur la carcasse statorique

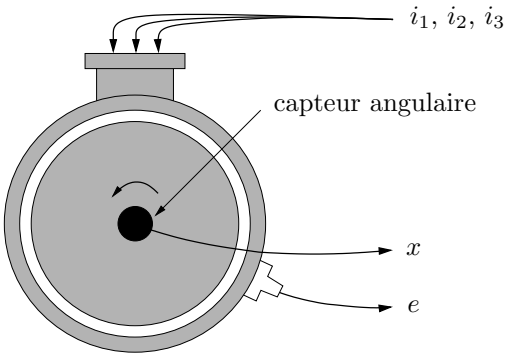


Fig. 2.5: Contrôle actif des vibrations d'une machine tournante électrique

de la machine, alors que le signal de référence est fourni par un capteur angulaire placé en bout d'arbre rotorique. Les signaux de commande sont au nombre de trois, et correspondent aux courants injectés dans chacune des bobines statoriques de la machine. Le transfert $\mathcal{P}$ relie le signal de top-tour x aux vibrations à éliminer d, que l'on peut mesurer en sortie de l'accéléromètre lorsqu'il n'y a aucun signal de commande. Le transfert secondaire $\mathcal{S}$ reliant les signaux de commande aux contre-vibrations qu'elles engendrent a déjà été étudié à la section 1.4, et sa structure est représentée à la figure 1.14. Cette fois, la référence ne représente pas une version future des perturbations à éliminer, mais permet de déterminer certaines de leurs caractéristiques, comme leurs fréquences.

Il existe beaucoup d'autres applications qui ont été étudiées dans le cadre du contrôle

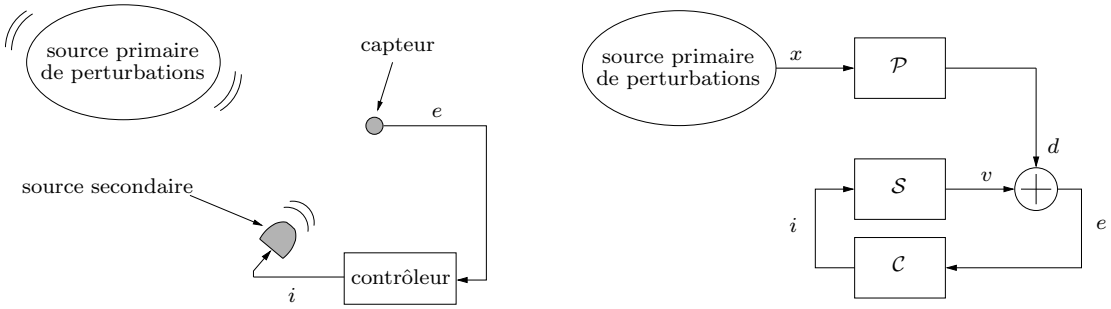
actif des vibrations (voir en particulier les exemples donnés dans [Ber97, Ful95, Ful96]). On peut néanmoins noter qu'elles reposent toutes sur le modèle de la figure 2.3.

Après avoir établi le modèle général d'un système de contrôle actif, nous allons déterminer celui du contrôleur à utiliser, qui est fonction de la disponibilité d'un signal de référence x représentatif des vibrations à éliminer.

2.2.2 Choix d'une stratégie de commande

Stratégie «feedback»

Dans un premier temps, on suppose ne pas disposer d'un signal de référence correct. Ceci peut arriver par exemple si on ne possède pas le capteur correspondant (le capteur angulaire dans notre cas de figure), ou si ce signal est physiquement impossible à mesurer (le bruit ambiant dans une pièce contenant de nombreuses personnes, par exemple). La seule information disponible sur la perturbation à éliminer et sur l'atténuation réalisée par le système est donc le signal d'erreur. Il constitue la seule entrée du contrôleur, alors que sa sortie est le signal de commande à élaborer. On obtient une structure à boucle de rétroaction, plus communément dénommée «structure feedback», dont le principe et les transferts mis en jeu sont représentés sur la figure 2.6, et où le transfert du contrôleur est noté $\mathcal{C}$. Cette structure a été intensément



(a) principe

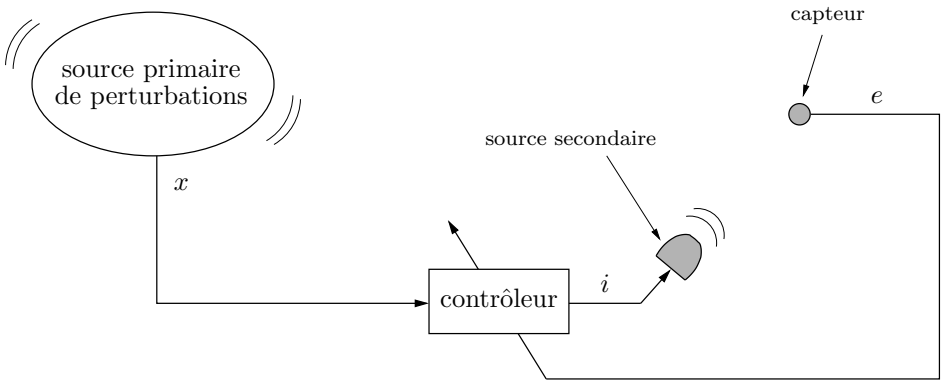
(b) transferts mis en jeu

Fig. 2.6: Structure feedback

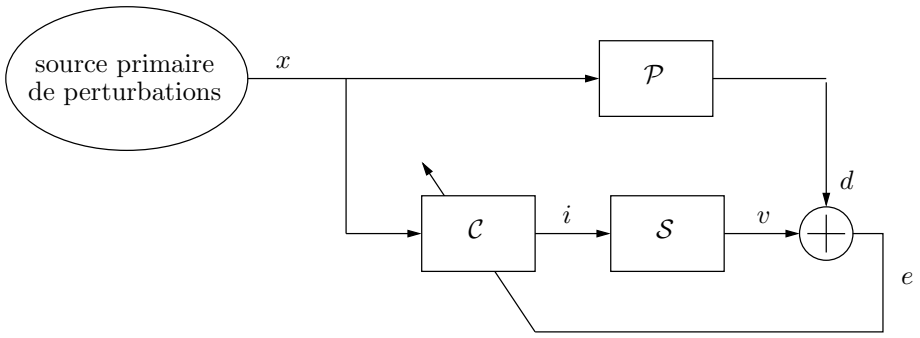
étudiée en automatique, et une multitude de méthodes ont été élaborées pour trouver un correcteur satisfaisant, qui ne seront pourtant pas utilisées par la suite. En effet, la plupart d'entre elles supposent le transfert $\mathcal{S}$ linéaire et invariant dans le temps alors qu'il a été montré linéaire et variant périodiquement dans le temps (voir section 1.4). D'autre part, elles imposent toutes d'étudier la stabilité du système bouclé, ce qui peut devenir difficile avec un tel transfert. Enfin, nous disposons d'un signal de référence fourni par le capteur angulaire décrit précédemment. Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, la présence de ce signal permet d'adopter une structure différente pour le contrôleur.

Stratégie «feedforward»

Dans un second temps, on suppose pouvoir mesurer un signal de référence fournissant assez d'indications sur les perturbations engendrées par la source primaire. Le contrôleur bénéficie alors de deux sources d'informations pour élaborer la commande optimale et estimer le taux de compensation qu'il atteint : le signal de référence et le signal d'erreur. Il peut donc prendre la structure décrite sur la figure 2.7, appelée «structure feedforward». Le signal de



(a) principe



(b) transferts mis en jeu

Fig. 2.7: Structure feedforward

référence constitue l'entrée de ce contrôleur, qui utilise les informations qu'il contient sur les perturbations à éliminer pour élaborer la meilleure commande i. Le signal d'erreur, quant à lui, est utilisé pour mesurer les performances atteintes par le système de contrôle actif, et modifier les caractéristiques du contrôleur si elles ne sont pas satisfaisantes. Grâce à ce principe, le contrôleur et la commande i, vont converger vers leur valeur optimale, et la fonction de coût vers son minimum.

D'après la figure 2.5, nous disposons, pour réaliser le système de contrôle actif désiré, d'un signal de référence grâce au capteur angulaire monté sur l'arbre de rotation de la machine. Le contrôleur utilisé aura donc une structure feedforward, et le prochain paragraphe a pour but

d'établir sa valeur optimale permettant d'atteindre le maximum de compensation, et donc le minimum de la fonction de coût.

2.2.3 Contrôleur feedforward optimal

Le contrôleur employé est supposé avoir une structure feedforward identique à la figure 2.7. De plus, les transferts $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ mis en jeu dans le système global de contrôle actif sont supposés linéaires.

Cas général

On peut donner, dans le cas général de la figure 2.7(b), l'expression du transfert optimal $\mathcal{C}_{opt}$ du contrôleur feedforward ne vérifiant aucune contrainte de causalité ni de stabilité. Pour cela, il faut exprimer le signal d'erreur e en fonction des signaux et des transferts du système global. Dans un premier temps, les transferts $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ ne sont pas supposés invariants dans le temps, et le symbole mathématique «$\circ$» se lisant «appliqué à» doit être utilisé pour relier leur entrée à leur sortie. Par exemple, le signal de commande i est la sortie du transfert $\mathcal{C}$ d'entrée x, ce qui se note :

$$i = \mathcal{C} \circ x \tag{2.1}$$

En suivant cette notation, on obtient pour des transferts linéaires :

$$e = d + v = \mathcal{P} \circ x + \mathcal{S} \circ \mathcal{C} \circ x = (\mathcal{P} + \mathcal{S} \circ \mathcal{C}) \circ x \tag{2.2}$$

Pour annuler l'erreur, le transfert du contrôleur optimal doit donc vérifier l'équation :

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{C}_{opt} = -\mathcal{P}$$

On peut alors définir $\mathcal{S}_{inv}$, le transfert inverse de $\mathcal{S}$ qui vérifie, pour un signal y quelconque :

$$\mathcal{S}_{inv} \circ \mathcal{S} \circ y = \mathcal{S} \circ \mathcal{S}_{inv} \circ y = y \tag{2.3}$$

L'expression du contrôleur optimal sans contrainte devient finalement :

$$\mathcal{C}_{opt} = -\mathcal{S}_{inv} \circ \mathcal{P} \tag{2.4}$$

Cette équation montre qu'il est nécessaire d'inverser le transfert secondaire $\mathcal{S}$ pour obtenir une compensation parfaite de la perturbation d. Les caractéristiques de ce transfert auront donc une grande influence sur les performances obtenues par le système de contrôle actif feedforward, ce qui peut même poser des problèmes de réalisation si $\mathcal{S}_{inv}$ est instable ou non-causal.

Cas des systèmes linéaires et invariants dans le temps

Si les transferts $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont linéaires et invariants dans le temps (LIT), ils sont entièrement décrits par leur réponse impulsionnelle, ou par sa transformée de Fourier. Ce point sera étudié

plus en détail dans le chapitre 3, portant sur l'étude théorique des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps. On peut toutefois définir dès maintenant les quelques notations qui nous serons nécessaires dans ce chapitre, en prenant l'exemple du transfert $\mathcal{C}$. Sa réponse impulsionnelle est notée $c(r)$, où r représente le retard en nombre d'échantillons par rapport à celui de l'impulsion d'excitation. Dans le domaine temporel, le signal de sortie est alors donné par la convolution du signal d'entrée par $c(r)$. Pour des signaux représentés sous leur forme temporelle, on a donc une relation entrée-sortie équivalente à (2.1), où l'opérateur «$\circ$» devient l'opérateur de convolution. La transformée de Fourier $\hat{c}(\alpha)$ de $c(r)$ est appelée «gain complexe» ou «fonction de transfert en fréquence» du système $\mathcal{C}$. Elle permet quant à elle de donner la relation entrée-sortie du système dans le domaine fréquentiel, où l'opérateur «$\circ$» devient alors un simple produit. Pour simplifier les calculs qui vont suivrent et faciliter la compréhension des résultats, on suppose que tous les signaux mis en jeu dans la figure 2.7(b) sont déterministes et de module sommable. Dans ce cas, on peut calculer leur transformée de Fourier et la relation générale (2.1) transposée en fréquence devient :

$$\hat{i}(\alpha) = \hat{c}(\alpha)\hat{x}(\alpha)$$

où le domaine de définition de la fréquence réduite α est donnée par (1.4), et la définition de la transformée de Fourier par (1.2). Les fonctions complexes $\hat{i}(\alpha)$ et $\hat{x}(\alpha)$ sont respectivement les transformées de Fourier des signaux i et x.
En appliquant ce résultat à la relation générale (2.2), on obtient l'expression du signal d'erreur en fréquence :

$$\hat{e}(\alpha) = \hat{d}(\alpha) + \hat{c}(\alpha)\hat{s}(\alpha)\hat{x}(\alpha) \tag{2.5}$$

À partir de cette équation, on peut définir la fonction de coût que doit minimiser le contrôleur optimal. Le choix de son expression est primordial, car elle doit représenter à elle seule les performances que l'on attend du système de contrôle actif. Elle peut prendre une forme quelconque, mais sa minimisation sera rendue infiniment plus simple si elle ne comporte pas de minima locaux. Une forme très largement utilisée et vérifiant cette propriété est la fonction de coût des moindres carrés, ou coût quadratique. Sa forme la plus simple dans le domaine fréquentiel est le module carré de la transformée de Fourier du signal d'erreur :

$$\mathfrak{C} = |\hat{e}(\alpha)|^2 \tag{2.6}$$

Cette fonction de coût représente l'énergie de ce signal à la fréquence α, que le contrôleur optimal minimisera sans aucune autre contrainte. Au contraire, on peut définir des coûts quadratiques imposant diverses contraintes, comme ajouter un terme pénalisant l'énergie du signal de commande. La fonction de coût peut alors prendre la forme suivante :

$$\mathfrak{C} = |\hat{e}(\alpha)|^2 + \epsilon|\hat{c}(\alpha)|^2 \tag{2.7}$$

où la constante ϵ est réelle positive ou nulle.
Le contrôleur minimisant (2.7) cherchera à réduire l'énergie du signal d'erreur en α, tout en

ayant un gain complexe de module minimum. La valeur de la constante ϵ permet de régler l'équilibre désiré entre la minimisation de ces deux termes. En effet, plus ϵ est faible, plus on favorise la minimisation du premier terme de cette somme au détrimant du second. À la limite, ϵ est nulle et le contrôleur optimal est le même que pour le coût quadratique basique (2.6). Inversement, si ϵ est élevée, on obtiendra alors une réduction moindre de l'énergie de l'erreur avec à la limite, ϵ infini, un contrôleur et donc un signal de commande nul. Dans ce cas, le signal d'erreur restera inchangé. Cette technique, dénommée «régularisation de la fonction de coût», est intéressante dans le cadre de notre application car elle permet de limiter le signal de commande, tout en minimisant l'erreur. Or le fait que les courants de commande optimaux soient faibles est une des hypothèses nécessaires à la validité du modèle du transfert établi à la section 1.4.

Sachant que le signal d'erreur est formé par la somme de la perturbation d et de la contre-perturbation v, la fonction de coût quadratique régularisée (2.7) devient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= |\hat{d}(\alpha)|^2 \\ &\quad +\hat{d}(\alpha)\hat{v}(\alpha)^* + \hat{v}(\alpha)\hat{d}(\alpha)^* \\ &\quad +|\hat{v}(\alpha)|^2 + \epsilon|\hat{c}(\alpha)|^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

où $\hat{v}(\alpha)\hat{d}(\alpha)^*$ est défini comme l'interspectre d'énergie des signaux v et d à la fréquence α. Cette grandeur est l'équivalent, pour les signaux de module sommable, de la densité interspectrale de puissance définie par (1.7).
Sous cette forme, l'interprétation physique de $\mathfrak{C}$ est immédiate. En effet, le premier terme est l'énergie des seules perturbations d. Sans signal de commande i et donc sans contre-perturbation v, la fonction de coût reste égale à cette valeur. La troisième ligne, quant à elle, est constituée par la somme de l'énergie des contre-perturbations, ajoutée à une fraction du module carré du gain complexe du contrôleur. Toutes ces valeurs étant positives, elles ne pourront pas être utilisées pour minimiser $\mathfrak{C}$. Par contre, cette tâche peut être remplie par les interspectres situés à la seconde ligne, qui peuvent prendre des valeurs négatives. Pour obtenir une minimisation effective, le contrôleur optimal doit donc faire en sorte que la contre-perturbation v générée par la commande et la perturbation d à éliminer aient un interspectre important, ou ce qui est équivalent, que ces deux signaux soient fortement corrélés.
En utilisant (2.5), l'expression (2.8) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} &= |\hat{d}(\alpha)|^2 \\ &\quad +\hat{c}(\alpha)^*\hat{s}(\alpha)^*\hat{d}(\alpha)\hat{x}(\alpha)^* + \hat{c}(\alpha)\hat{s}(\alpha)\hat{x}(\alpha)\hat{d}(\alpha)^* \\ &\quad +|\hat{c}(\alpha)|^2\left[|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon\right] \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\mathfrak{C}$ est donc bien une fonction quadratique du gain complexe du contrôleur $\hat{c}(\alpha)$. Si on décompose ce gain complexe en sa partie réelle $\Re[\hat{c}(\alpha)]$ et sa partie imaginaire $\Im[\hat{c}(\alpha)]$, la fonction $\mathfrak{C}$ peut alors être vue comme une fonction réelle de ces deux variables réelles. Tracée dans le plan orthonormé dont l'axe des abscisses représente $\Re[\hat{c}(\alpha)]$ et celui des ordonnées $\Im[\hat{c}(\alpha)]$,

elle forme un paraboloïde. Cette surface est convexe, et comporte donc un unique minimum seulement si la valeur réelle $|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon$ est positive, ce qui peut toujours être imposé grâce à ϵ. La figure 2.8 montre un exemple d'une telle surface.

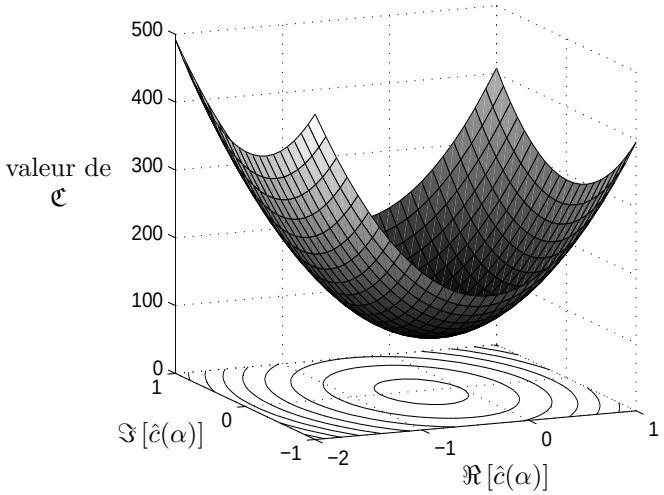


Fig. 2.8: Exemple de fonction de coût quadratique généralisée

Les coordonnées du point minimum sont les parties réelles et imaginaires du gain complexe $\hat{c}_{opt}(\alpha)$ du contrôleur optimal $\mathcal{C}_{opt}$. Son expression analytique peut être facilement déterminée en remarquant que pour $\hat{c}(\alpha) = \hat{c}_{opt}(\alpha)$, le gradient de $\mathfrak{C}$ s'annule dans toutes les directions. On peut alors définir un gradient complexe $\nabla\mathfrak{C}$ dont le module et l'argument donnent respectivement, au point $\hat{c}(\alpha)$ de coordonnées $(\Re[\hat{c}(\alpha)], \Im[\hat{c}(\alpha)])$, la valeur de la plus grande pente de $\mathfrak{C}$ ainsi que sa direction [Nel92, pp 416-420] :

$$\nabla\mathfrak{C} = \nabla\mathfrak{C}[\hat{c}(\alpha)] = \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\Re[\hat{c}(\alpha)]} + j\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\Im[\hat{c}(\alpha)]} \tag{2.10}$$

Le gain complexe optimal $\hat{c}_{opt}(\alpha)$ minimisant la fonction de coût (2.7) est donc la valeur complexe annulant le gradient ci-dessus. En calculant (2.10) dans le cas du coût quadratique régularisé (2.9), on obtient :

$$\nabla\mathfrak{C} = 2\hat{s}(\alpha)^*\hat{d}(\alpha)\hat{x}(\alpha)^* + 2\hat{c}(\alpha)\left[|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon\right] \tag{2.11}$$

On en déduit $\hat{c}_{opt}(\alpha)$:

$$\hat{c}_{opt}(\alpha) = -\frac{\hat{s}(\alpha)^*\hat{d}(\alpha)\hat{x}(\alpha)^*}{[|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon]} \tag{2.12}$$

Cette solution est souvent appelée «solution de Wiener», et on peut noter qu'elle est directement proportionnelle à l'interspectre entre les signaux d et x, donc à leur intercorrélation. Reportée dans l'équation (2.9), cette expression donne la valeur minimale que peut prendre

la fonction de coût :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}\left[\hat{c}_{opt}(\alpha)\right] = \mathfrak{C}_{min} &= |\hat{d}(\alpha)|^2 - \frac{|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2|\hat{d}(\alpha)|^2}{|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon} \\ &= \frac{\epsilon|\hat{d}(\alpha)|^2}{|\hat{s}(\alpha)|^2|\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon} \end{aligned} \tag{2.13}$$

La première expression de ce minimum montre que si la corrélation entre x et d est élevée, $|\hat{x}(\alpha)|^2|\hat{d}(\alpha)|^2$ l'est aussi, et $\mathfrak{C}_{min}$ est alors faible. Ceci permet de quantifier la qualité d'un signal de référence dans le cas où les transferts $\mathcal{P}$ et $\mathcal{S}$ sont LIT : plus le signal de référence est corrélé avec la perturbation à éliminer, meilleurs seront les performances du système de contrôle actif. De plus, les relations (2.12) et (2.13) permettent de caractériser l'effet de la régularisation sur les performances du système de contrôle actif. En effet, sans régularisation ($\epsilon = 0$), la fonction de coût se réduit à (2.6) et sa valeur minimale est nulle lorsque le contrôleur à le gain complexe suivant :

$$\hat{c_{opt}}(\alpha) = -\frac{\hat{p}(\alpha)}{\hat{s}(\alpha)} \tag{2.14}$$

Cette expression, qui est un cas particulier de l'équation générale (2.4), est donc celle du contrôleur annulant complètement l'énergie du signal d'erreur à la fréquence α. Toutefois, il n'y a alors aucune contrainte sur le signal de commande, dont l'énergie peut atteindre des valeurs très élevées. De plus, si la fréquence à laquelle on cherche à minimiser l'énergie de l'erreur est un zéro du transfert secondaire (c'est à dire $\hat{s}(\alpha) = 0$), $\hat{c_{opt}}(\alpha)$ ne peut alors pas être calculé. Par contre, si ϵ est choisie positive et différente de zéro, non seulement le gain complexe optimal existe quel que soit $\hat{s}(\alpha)$, mais elle fournit aussi un moyen de limiter l'énergie de la commande. Malgré tout, la relation (2.13) montre que la valeur minimum de la fonction de coût croît avec ϵ, jusqu'à ce que le contrôleur ait un gain complexe nul et que le coût reste figé à $|\hat{d}(\alpha)|^2$. Le réglage de la valeur de ϵ est donc une tâche très délicate, où il faut déterminer le juste milieu entre un coût minimal suffisamment faible et une commande optimale d'énergie peu importante.

L'expression du correcteur optimal permettant de minimiser la fonction de coût quadratique régularisée (2.7), ainsi que ses performances sont donc connues dans le cas où les transferts primaire et secondaire sont LIT. Tout le problème revient maintenant à déterminer la manière de faire converger le contrôleur $\mathcal{C}$ vers cette valeur. Le paragraphe suivant donne le principe d'un algorithme classiquement utilisé en contrôle actif pour réaliser cette tâche.

2.2.4 Algorithme classique du contrôle actif

Le but de ce paragraphe est d'établir un algorithme récursif, réactualisant la valeur du gain complexe du contrôleur en vue de sa convergence vers sa valeur optimale (2.12). Cette réactualisation permettra de prendre en compte les éventuelles variations des perturbations à éliminer, qui peuvent se produire dans tout système réel. En effet, dans le cadre de l'application décrite au chapitre 1, les vibrations d'une machine tournante peuvent varier dans le

cas d'un changement de son régime de fonctionnement, d'un désserrement progressif de son socle de fixation, d'un changement du couple de charge, *etc.*
L'algorithme recherché doit minimiser une fonction de coût quadratique $\mathfrak{C}[\hat{c}(\alpha)]$, ne comportant qu'un seul minimum. Dans ce cas, on peut utiliser l'algorithme du gradient pour rechercher la valeur optimale de $\hat{c}(\alpha)$, dont la forme générale est :

$$\hat{c}(\alpha)_{l+1} = \hat{c}(\alpha)_l - \mu \nabla \mathfrak{C}[\hat{c}(\alpha)_l] \tag{2.15}$$

où $\hat{c}(\alpha)_l$ est la valeur du gain complexe à l'itération courante l, et $\hat{c}(\alpha)_{l+1}$ sa prédiction à l'itération suivante.
La valeur de $\hat{c}(\alpha)_{l+1}$ est donc déduite de $\hat{c}(\alpha)_l$ en lui enlevant une fraction du gradient de la fonction de coût calculé au point $\hat{c}(\alpha)_l$. Nous avons vu précédemment que ce gradient donne la valeur et la direction de la plus grande pente de la surface $\mathfrak{C}$ au point considéré. Le gain complexe va donc «descendre» progressivement le long de cette courbe, de sa valeur originale fixée par l'utilisateur à sa valeur optimale $\hat{c}_{opt}(\alpha)$, en suivant le chemin de la plus grande pente. Le coefficient réel positif μ, appelé «pas d'adaptation» et fixé par l'utilisateur, quantifie l'importance de la réactualisation, et donc le temps de convergence de cet algorithme.

Afin d'obtenir une relation itérative utilisable en pratique, on peut écrire le gradient (2.11) de la fonction de coût choisie sous la forme :

$$\nabla \mathfrak{C}[\hat{c}(\alpha)] = 2\hat{s}(\alpha)^* \hat{x}(\alpha)^* \hat{e}(\alpha) + 2\epsilon \hat{c}(\alpha) \tag{2.16}$$

En reportant cette expression dans (2.15), on obtient :

$$\hat{c}(\alpha)_{l+1} = (1 - 2\mu\epsilon)\hat{c}(\alpha)_l - 2\mu \hat{s}(\alpha)^* \hat{x}(\alpha)^* \hat{e}(\alpha)_l \tag{2.17}$$

La première propriété à étudier est celle de la convergence. Pour cela, on définit une variable $\mathcal{E}_l$, traduisant l'erreur entre le gain complexe courant et sa valeur optimale :

$$\mathcal{E}_l = \hat{c}(\alpha)_l - \hat{c}_{opt}(\alpha)$$

Ce vecteur utilisé conjointement avec les équations (2.12) et (2.5) permet d'écrire la relation (2.17) sous la forme :

$$\mathcal{E}_{l+1} = \left[1 - 2\mu \left(|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon\right)\right] \mathcal{E}_l = \left[1 - 2\mu \left(|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon\right)\right]^l \mathcal{E}_0$$

Si cette valeur tend vers 0 lorsque l tend vers l'infini, l'algorithme est dit convergent. Cette condition est réalisée quelle que soit la valeur d'initialisation $\mathcal{E}_0$, si et seulement si $|1 - 2\mu \left(|\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon\right)| < 1$, ce qui est équivalent à :

$$0 < \mu < \frac{1}{\hat{s}(\alpha)|^2 |\hat{x}(\alpha)|^2 + \epsilon} \tag{2.18}$$

Donc quelle que soit la valeur d'initialisation de l'algorithme (2.17), si le pas d'adaptation vérifie cette relation, l'algorithme convergera vers le gain complexe optimal recherché.

Pour implanter d'une manière pratique l'algorithme précédent, il est nécessaire de réaliser des traitements par blocs. En effet, afin de connaître les transformées de Fourier des signaux d'erreur e et de référence x directement mesurés par les deux capteurs présents dans le système de contrôle, la solution la plus simple est d'employer un algorithme de transformée de Fourier rapide, portant sur des blocs d'échantillons. Ce type d'implantation permet de lever l'hypothèse très contraignante suivant laquelle les signaux utilisés doivent être de module sommable pour assurer l'existence des transformées de Fourier. Cette condition est alors vérifiée quelle que soit leur nature puisqu'ils sont observés sur un intervalle de temps fini correspondant à la longueur d'un bloc. Il est aussi nécessaire de connaître la valeur du gain complexe $\hat{s}(\alpha)$ du transfert secondaire, qui devra être estimé durant une étape préliminaire à l'étape de contrôle. En surmontant les grandeurs estimées d'un tilde ($\tilde{}$), on obtient l'algorithme pratique suivant :

$$\hat{c}(\alpha)_{l+1} = (1 - 2\mu\epsilon)\hat{c}(\alpha)_l - 2\mu\widetilde{\hat{s}(\alpha)}^* \widetilde{\hat{x}(\alpha)}_l^* \widetilde{\hat{e}(\alpha)}_l \tag{2.19}$$

Contrairement à (2.17), ce n'est plus le gradient théorique qui est utilisé dans cette relation mais son estimée, d'où le nom d'«algorithme du gradient stochastique». Il est aussi appelé «algorithme des moindres carrés x filtré pondéré» [Ell87], et constitue une variante de «l'algorithme des moindres carrés x filtré» (FxLMS), originellement développé dans le domaine temporel [Wid85, Chap. 11] pour le contrôle actif.

Cet algorithme fréquentiel a été généralisé au cas multi-entrées multi-sorties dans [Ell92], et employé avec succès pour le contrôle de perturbations périodiques. Il faut toutefois remarquer que le traitement par bloc génère un retard dans le signal de commande proportionnel au nombre d'échantillons contenus dans un bloc, et qu'il ne peut être employé dans le cas de perturbations aléatoires. Pour ce type de perturbations, un algorithme récursif temporel réactualisant le contrôleur échantillon par échantillon est préférable. Ces algorithmes sont la plupart du temps dérivés de celui du gradient, et sont l'équivalent temporel de l'équation (2.19). Ils ne sont pas exposés dans ce mémoire, le but étant de donner leur principe général étudié à l'aide de l'exemple précédent, et non une bibliothèque de traitements déjà existante dans plusieurs ouvrages [Nel92, Ful96, Kuo96].

Après avoir présenté les méthodes courantes de contrôle actif, la prochaine section décrit les résultats qu'elles ont permis d'obtenir dans le cadre de l'application décrite au chapitre précédent.

2.3 Résultats antérieurs

2.3.1 Principe et objectifs

Divers travaux de recherche ont été effectués sur cette méthode de compensation active de vibrations d'une machine tournante. Les résultats obtenus sont résumés dans [Der92, Far95, Jar95]. Le principe utilisé est le même que celui présenté au chapitre 1, mis à part le fait qu'un enroulement supplémentaire appelé «enroulement de compensation» est ajouté

au stator. Il est destiné à recevoir le courant de commande nécessaire à la compensation, et permet de découpler complètement la commande des courants statoriques. Le modèle du transfert entre cette commande et les vibrations engendrées sur la carcasse statorique garde la même structure que celui de la figure 1.14 utilisant les trois enroulements statoriques, mais il ne comporte cette fois qu'une seule entrée. Il est rappelé d'une manière simplifiée sur la figure 2.9.

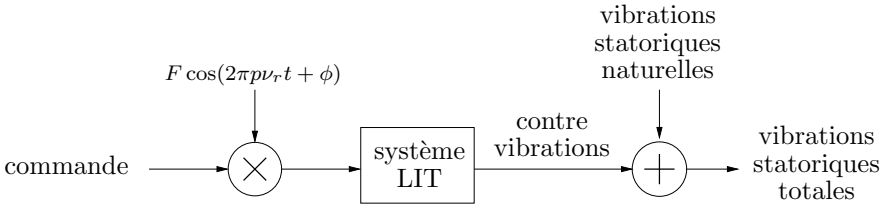


Fig. 2.9: Description simplifiée du transfert commande→vibrations

où ν_r est la fréquence de rotation et p le nombre de paires de pôles de la machine.
On retrouve en entrée une modulation d'amplitude à la fréquence $p\nu_r$, suivie d'un système linéaire et invariant dans le temps, le tout formant un système linéaire et variant périodiquement dans le temps de fréquence $p\nu_r$. Le but est, comme au chapitre 1, de minimiser les vibrations statoriques totales à l'aide de contre-vibrations engendrées par la commande à élaborer, cette dernière devant traverser le système LVPT précédent.

2.3.2 La compensation analogique

Le premier contrôleur issu des travaux décrits dans [Der92, Far95] est analogique. Il a pour but de minimiser les vibrations du stator à une seule fréquence et pour une seule position angulaire. Il s'agit d'un contrôleur de structure feedback, dont l'entrée est le signal de vibrations statoriques totales, correspondant à l'erreur. Son principe est décrit sur la figure 2.10, où les spectres des différents signaux sont schématisés en gris. Cette figure est à rapprocher de la figure 2.6, décrivant un tel système dans le cas général.

En sortie de l'accéléromètre mesurant les vibrations totales de la carcasse statorique, la composante spectrale vibratoire de fréquence ν_d est isolée par un filtre passe-bande sélectif. Ce signal bande étroite est ensuite modulé en amplitude par une sinusoïde de fréquence $p\nu_r$, ce qui le décale aux fréquences $\nu_d \pm p\nu_r$. La fréquence de cette modulation est tirée du signal de top-tour, fourni par un capteur angulaire monté en bout d'arbre rotorique. Un filtre réjecteur rejette alors la composante de plus petite fréquence. Il reste donc, à l'entrée du contrôleur, une seule composante bande étroite, de fréquence $\nu_d + p\nu_r$. Le contrôleur est linéaire et invariant dans le temps, et applique une amplification et un déphasage sur son entrée, que l'on peut régler manuellement. On a donc une composante de fréquence $\nu_d + p\nu_r$ en entrée de l'enroulement de compensation qui, une fois modulée et filtrée par le transfert de la machine, génère des contre-vibrations à deux fréquences différentes : ν_d et $\nu_d + 2p\nu_r$. Le déphasage et l'amplification imposée par le contrôleur permettent de minimiser la composante de fréquence

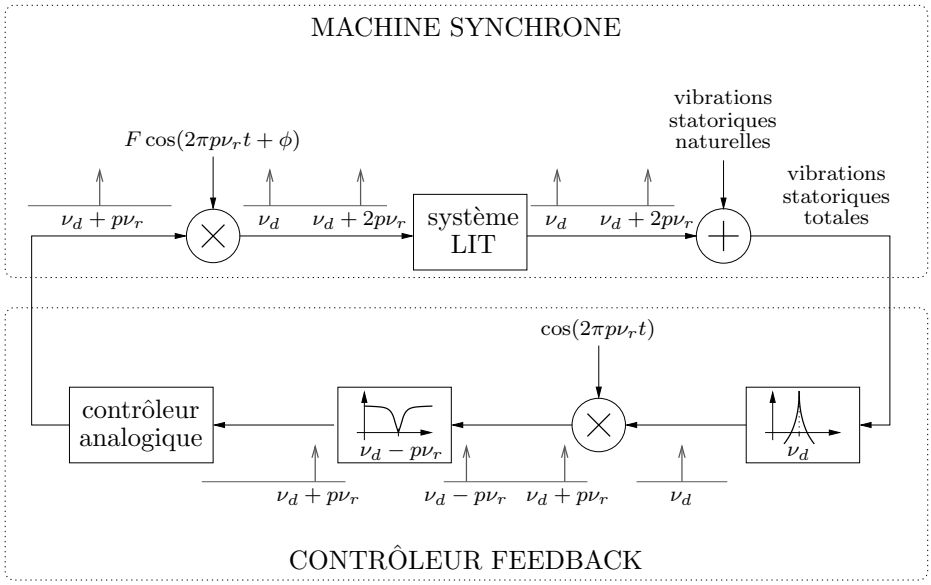


Fig. 2.10: Principe du contrôleur analogique [Der92, Far95]

ν_d contenue dans les vibrations naturelles de la machine. Malheureusement, la composante de fréquence $\nu_d + 2p\nu_r$ ne peut être modifiée indépendamment et s'ajoute au spectre vibratoire total, sans pouvoir minimiser les vibrations correspondant à cette fréquence.

Ce type de contrôleur permet donc d'éliminer une raie spectrale de fréquence ν_d quelconque, mais il créé en contrepartie une raie parasite incontrôlable de fréquence $\nu_d + 2p\nu_r$ dont l'amplitude est fonction de la réponse mécanique du stator.

2.3.3 La compensation numérique

Dans un second temps, une version numérique adaptative de ce contrôleur a été réalisée dans le but d'augmenter le nombre de composantes spectrales vibratoires touchées par ce traitement, et de suivre les éventuelles variations de vitesse de la machine [Jar95]. Une étape importante a alors été franchie, puisque le contrôleur prend une structure feedforward afin d'éviter tout problème de stabilité. Son principe est donné sur la figure 2.11, qui est un cas particulier de la figure générale 2.7.

Le signal d'erreur est filtré par un filtre passe-bande sélectif centré sur la fréquence $N\nu_r$. C'est donc cette composante spectrale du spectre vibratoire de la machine qui doit être atténuée et qui constitue la fonction de coût. Ce signal réactualise dans ce cas le contrôleur adaptatif en utilisant l'algorithme décrit au paragraphe 2.2.4. Le signal de référence, qui doit être de même fréquence que l'erreur, consiste en une sinusoïde dont la fréquence $N\nu_r$ peut est déduite du signal de top-tour grâce à un multiplieur fréquentiel. Le même principe de prémodulation et de filtrage permet alors à ce contrôleur d'éliminer du spectre vibratoire de la machine la composante visée, tout en générant une raie parasite incontrôlable de fréquence $(N + 2p)\nu_r$. On obtient donc les mêmes performances de contrôle qu'avec la

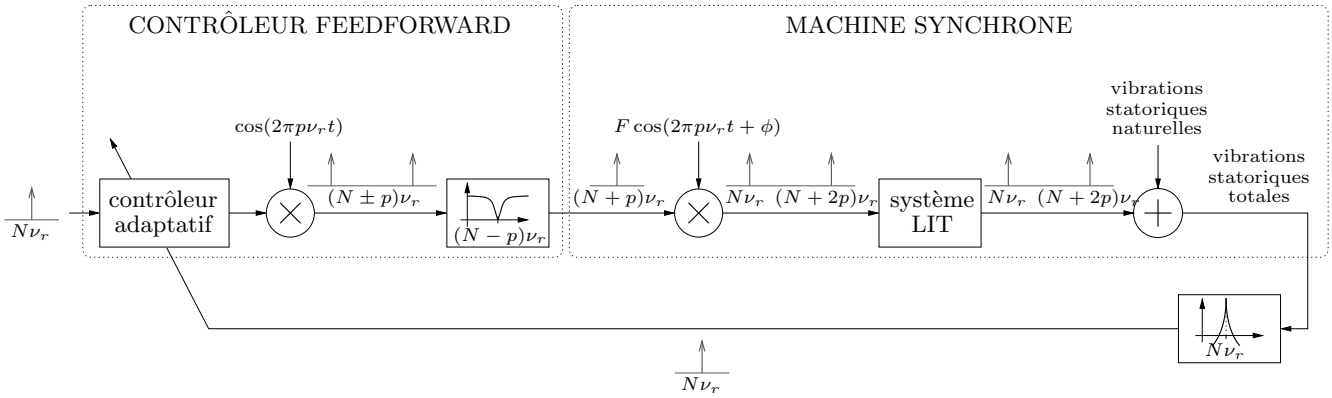


Fig. 2.11: Principe du contrôleur numérique [Jar95]

méthode analogique. Toutefois, la référence étant un harmonique de la rotation, seules des raies spectrales de fréquence multiple de ν_r pourront être compensées par le contrôleur feedforward, contrairement au cas précédent où aucune contrainte n'était imposée sur la fréquence ν_d visée. L'implantation numérique apporte tout de même plusieurs avantages pratiques par rapport au cas analogique :

- les réglages manuels fastidieux du contrôleur analogique ne sont plus nécessaires,
- le système est capable de suivre les variations de vitesse de la machine, car les différents filtres utilisés sont synchronisés sur sa fréquence de rotation.

2.3.4 Résultats expérimentaux

La figure 2.12 montre un exemple de résultat obtenus par le contrôleur feedforward précédent sur une machine réelle. Il s'agit de la machine synchrone de test décrite au paragraphe 1.2.3, qui comporte $p = 2$ paires de pôles.

Lors de cette expérimentation, sa fréquence de rotation ν_r était fixée à 25 Hz, et la fréquence de sa première raie d'encoche se trouvait à $36\nu_r = 900$ Hz. La fréquence du signal de référence a été réglée sur cette dernière valeur afin de l'éliminer du spectre vibratoire de la machine.

La courbe du haut représente le spectre des vibrations du stator en échelle linéaire et sans aucune compensation. Le spectre du bas est celui obtenu une fois que le contrôleur adaptatif a convergé vers sa valeur optimale. Cette seconde courbe montre bien l'élimination de la raie spectrale visée, et la création d'une composante parasite décalée de $2p\nu_r = 100$ Hz vers les fréquences les plus élevées.

On peut déduire de ce résultat que l'application des méthodes de contrôle actif habituellement utilisées dans le cadre des systèmes linéaires et invariant dans le temps, ne donne pas de résultats probants pour cette application. Ceci est dû au fait que le transfert entre le courant de commande et les vibrations qu'il engendre est linéaire et variant périodiquement dans le temps. Il paraît donc nécessaire de réaliser une étude théorique des systèmes LVPT

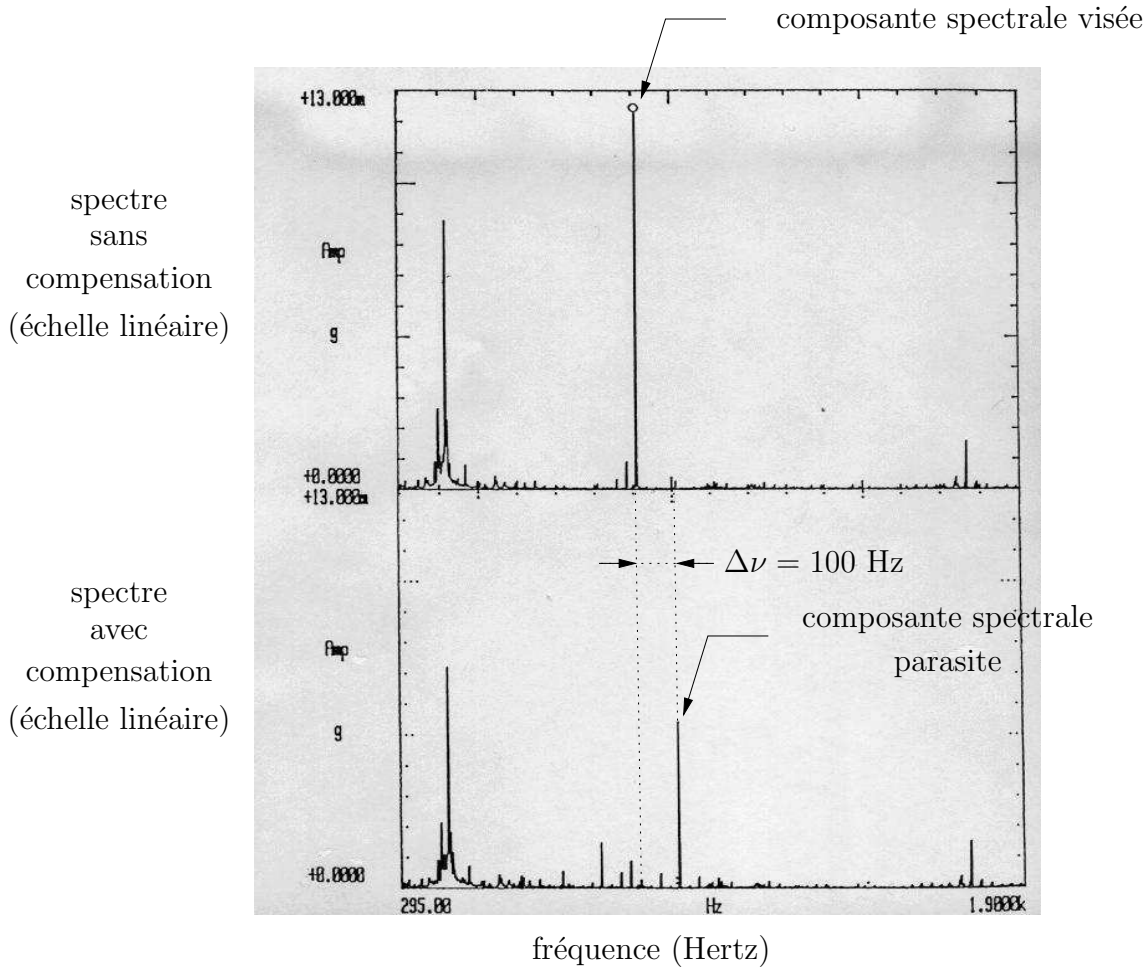


Fig. 2.12: Résultat de compensation active utilisant le contrôleur feedforward (issu de [Jar95])

afin d'élaborer une méthode prenant en compte cette particularité.

2.4 Conclusion

Ce chapitre, composé de deux sections, a permis de montrer l'insuffisance des méthodes classiques de contrôle actif, pour l'atténuation des vibrations d'une machine tournante en utilisant le principe décrit au chapitre 1.

La première section est une introduction aux méthodes de contrôle actif, utilisées pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps. L'étude du contrôleur de structure feedforward y est particulièrement mise en avant, puisque c'est ce choix qui sera fait pour l'application étudiée. La définition d'un coût quadratique fonction de ce contrôleur, permet de déterminer l'expression de son transfert optimal, ainsi qu'un algorithme récursif convergent vers cette solution.

Une étude des travaux de recherche déjà effectués sur cette application de contrôle actif nous permet de voir, dans la seconde section, que l'utilisation de ces méthodes ne donne

pas de résultats satisfaisants dans ce cas. En effet, l'astuce de prémodulation et de filtrage sélectif mise en œuvre par ces contrôleurs permet à l'algorithme récursif de converger vers une valeur fixe. Celle-ci supprime une composante spectrale du spectre vibratoire de la machine, mais génère également une raie spectrale parasite, dont l'amplitude est fonction de la seule réponse mécanique du stator, et reste donc non maîtrisable par l'utilisateur. Cet inconvénient est dû au transfert secondaire du système global de contrôle actif, qui a la particularité de varier périodiquement dans le temps. Il s'avère donc nécessaire d'étudier plus en détail ce type de transferts afin de prendre en compte leurs caractéristiques dans l'expression du coût, du contrôleur optimal, et dans l'algorithme récursif de contrôle actif.

Chapitre 3

Étude théorique du système

3.1 Introduction

Ce chapitre livre les outils théoriques nécessaires à l'étude du type de système rencontré dans le problème de compensation active posé au chapitre 1.
La section 3.2 est consacrée à l'étude théorique des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps. Les propriétés de leur réponse impulsionnelle, ainsi que leurs propriétés fréquentielles, permettent de caractériser les effets qu'ils produisent sur le signal d'entrée. Finalement, on aboutit à la définition d'une matrice, jouant le même rôle que la fonction de transfert des systèmes linéaires invariants dans le temps. L'étude de cette matrice peut fournir des informations importantes sur le système.
Enfin, dans la section 3.3, les outils théoriques précédemment définis sont utilisés pour analyser un système linéaire variant périodiquement dans le temps de même structure que celui exposé à la section 1.4.5. Les résultats obtenus dans cette section seront donc utilisés au chapitre suivant, et permettront d'élaborer un algorithme de contrôle actif de vibrations efficace pour ce type de système.

3.2 Étude des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps

La plupart des méthodes décrites dans la littérature classique du traitement du signal et de l'automatique adoptent l'hypothèse que les systèmes mis en jeu sont linéaires, et invariant dans le temps (LIT). Tout au plus, certains domaines, comme le traitement adaptatif du signal [Wid85, Hay96], permettent de prendre en compte des variations lentes de leurs caractéristiques.
Ceci vient en partie du fait que les systèmes variant dans le temps d'une manière complexe sont rarement rencontrés dans la pratique. Les résultats peu exploitables obtenus en considérant les systèmes linéaires variant dans le temps dans un cadre général, sans faire d'hypothèses sur leurs variations [Zad50, Zad61] y sont également pour beaucoup.
L'étude des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps (LVPT) est beaucoup

plus simple, et des résultats facilement utilisables peuvent être mis à jour. De plus, ce type de systèmes se rencontre couramment dans la pratique. En effet, un échantillonneur est typiquement un système LVPT [Cla82], tout comme une modulation d'amplitude sinusoïdale, ou un filtre à capacités commutées [Lux90]. Un système de sur- ou de sous-échantillonnage peut lui aussi être considéré comme un système LVPT [Cro81]. Enfin, certains systèmes physiques sont naturellement LVPT comme celui présenté au chapitre 1. Ce type de systèmes n'est donc pas dénué d'intérêt, et leur étude détaillée va être réalisée dans cette section.
Après avoir argumenté le choix du modèle utilisé pour représenter ces systèmes, leur étude est d'abord réalisée en temps, puis en fréquence. On aboutit alors à un opérateur de type «gain complexe» que l'on peut mettre sous une forme matricielle, et qui caractérise leur effet d'un point de vue fréquentiel. L'étude de ce «gain complexe matriciel» grâce à des techniques d'algèbre matricielle (décomposition en valeurs singulières et calcul de normes) fournit des informations intéressantes sur le système. Ces techniques permettent, en outre, de donner les conditions d'inversibilité d'un tel opérateur.

3.2.1 Modèle de représentation

Deux grands types de modèles sont utilisés dans la littérature, pour décrire les systèmes LVPT.
Le premier est le modèle d'état, régi par des matrices périodiques en temps [Bit86, Kit88]. Son étude peut être réalisée grâce au théorème de Floquet [Wer90]. Il montre l'existence d'une transformation linéaire variant périodiquement dans le temps, permettant de transformer le système de départ en un système invariant. Ce dernier contient beaucoup d'informations sur le système périodique original, qu'il soit continu ou discret [Cor79]. Pour les systèmes discrets, on peut aussi utiliser une transformation par blocs permettant d'obtenir des matrices d'état invariantes [Mey75].
Le second modèle est celui de la réponse impulsionnelle. L'étude de ce signal, dans le domaine temporel aussi bien que dans le domaine fréquentiel, permet de caractériser complètement les effets des systèmes LVPT sur leur entrée, qu'ils soient continus ou discrets.
Pour le premier modèle, il est nécessaire de choisir les variables d'état composant le vecteur d'état du système. Ce choix n'est jamais facile, et peut même poser des problèmes si ces variables ne résument pas parfaitement l'état du système à un instant donné. Par contre, la réponse impulsionnelle ne peut être choisie, puisqu'elle est fournie par le système lui-même en réponse à une impulsion. Cette deuxième solution écarte donc tout risque d'erreur de modélisation, lié au choix des variables d'état. De plus, ce modèle permet une interprétation fréquentielle quasi immédiate des effets du système étudié, puisque la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle fournit directement la fonction de transfert en fréquence. Pour ces différentes raisons, le modèle de la réponse impulsionnelle sera utilisé dans la suite de ce mémoire pour représenter et étudier les systèmes LVPT.
La dernière question à se poser sur le modèle utilisé est de savoir s'il sera discret ou continu. Le but de ce travail étant d'élaborer une stratégie de contrôle implantée, à terme, dans un

processeur numérique de signal, le système présenté au chapitre 1 à travers lequel les perturbations doivent être compensées, sera vu par le processeur comme un système discret. Seuls des systèmes LVPT *discrets* seront donc considérés ici. De plus, si leur réponse impulsionnelle provient de l'échantillonnage de celle d'un système continu, elle sera supposée avoir été correctement échantillonnée, et vérifier la condition de Shannon énoncée au paragraphe 1.3.3, afin d'éviter tout problème de recouvrement spectral.

3.2.2 Définition

Soit le système $\mathcal{H}$ discret, linéaire, d'entrée $x(n)$ et de sortie $y(n)$ à temps discret n, représenté à la figure 3.1. où l'opérateur «$\circ$» peut se lire «appliqué à» et a été défini au

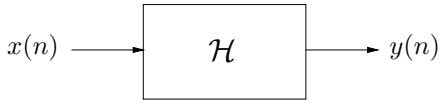


Fig. 3.1: Système discret linéaire $\mathcal{H}$

paragraphe 2.2.3.
Les signaux $x(n)$ et $y(n)$ sont discrets, et la relation d'entrée-sortie qu'ils vérifient s'exprime par :

$$y(n) = \mathcal{H} \circ x(n) \tag{3.1}$$

Afin de définir correctement le concept de système discret variant ou invariant dans le temps, il est nécessaire d'introduire l'opérateur retard de N échantillons. Noté R_N et appliqué à un signal $s(n)$, il vérifie :

$$R_N \circ s(n) = s(n - N) \tag{3.2}$$

Le système linéaire $\mathcal{H}$ est dit *invariant dans le temps* (LIT) si, pour une même entrée retardée de N échantillons, on obtient la même sortie, retardée de N échantillons. Sachant que (3.1) est vérifiée, ceci revient à écrire :

$$\mathcal{H} \circ [x(n - N)] = y(n - N) \qquad \text{pour tout } N \in \mathbb{Z} \tag{3.3}$$

Pour un tel système, les opérateurs $\mathcal{H}$ et R_N peuvent donc commuter quelle que soit la valeur du retard. En effet, en utilisant les relations (3.2) et (3.3), on obtient :

$$\mathcal{H} \circ [R_N \circ x(n)] = R_N \circ [\mathcal{H} \circ x(n)] \qquad \text{pour tout } N \in \mathbb{Z} \tag{3.4}$$

Si cette commutation n'est pas réalisée pour tout N, le système linéaire est dit *variant dans le temps* (LVT).

Si la relation (3.4) est vérifiée pour une valeur particulière de N, elle l'est aussi pour tous ses multiples entiers. Le système linéaire $\mathcal{H}$ est alors dit *variant périodiquement dans le temps* (LVPT) et sa période, notée P, est la plus petite valeur de N pour laquelle la commutation

(3.4) est possible. Ce type de systèmes est donc un cas particulier des systèmes LVT. De plus, on remarque que les systèmes invariant dans le temps peuvent être considérés comme périodiques de période $P = 1$, et constituent eux-mêmes un cas particulier des systèmes LVPT.

3.2.3 Domaine temporel

système discret linéaire variant dans le temps

réponse impulsionnelle

On se place dans le cas général où le système $\mathcal{H}$ est LVT. Il n'y a donc aucune hypothèse sur la loi suivant laquelle l'équation (3.4) est vérifiée en fonction de N. Néanmoins, la propriété de linéarité de $\mathcal{H}$ permet à ce système d'être entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle [Cla82]. Elle peut être exprimée en temps absolu, c'est à dire sans utiliser la notion de retard ou de différence entre deux instants. Elle est alors notée $h(n, k)$ et représente la réponse du système observée à l'échantillon n, à une impulsion envoyée à l'échantillon k. On peut définir deux autres formes de cette réponse, en introduisant par changement de variables le retard $r = n - k$ qui est le laps de temps entre l'instant d'observation de la sortie et l'impulsion d'excitation [Cla82, Pra92] :

$$g(r, k) = h(r + k, k) \tag{3.5}$$

$$f(n, r) = h(n, n - r) \tag{3.6}$$

$g(r, k)$ est donc la réponse du système, observée r échantillons après l'impulsion d'excitation envoyée en k. Quant à $f(n, r)$, elle peut s'interpréter comme étant la réponse du système observée à l'instant n, à l'impulsion d'excitation envoyée r échantillons auparavant. L'équation reliant ces trois formes de la réponse impulsionnelle peut s'écrire, en éliminant r de (3.5) et (3.6) :

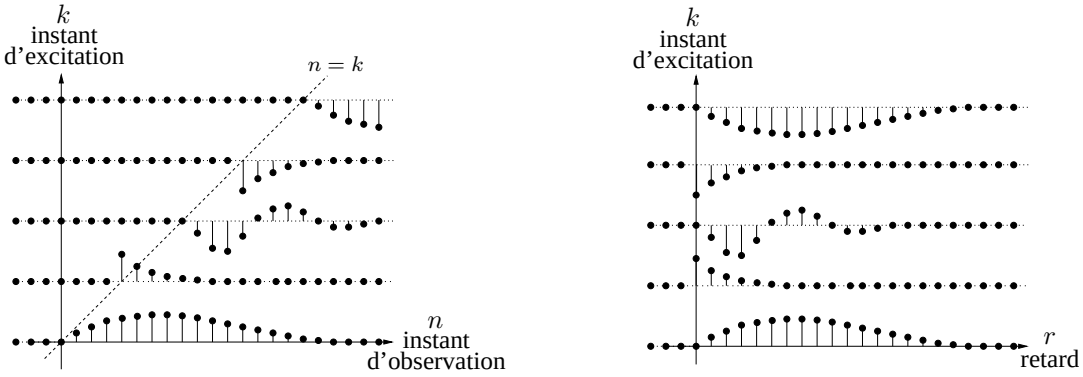
$$h(n, k) = g(n - k, k) = f(n, n - k) \tag{3.7}$$

Enfin, si le système considéré est causal, sa réponse impulsionnelle est nulle pour $r = n-k < 0$. La figure 3.2 donne un exemple d'allure temporelle de $h(n, k)$ et de $g(r, k)$ pour un système LVT causal. $f(n, r)$ n'a pas été représentée d'une part parce qu'elle contient exactement la même information, et d'autre part parce qu'elle est moins explicite d'un point de vue visuel. On voit que la forme du signal obtenu en sortie du système varie en fonction de l'instant d'excitation k. Si le système avait été invariant, toutes les réponses auraient été de forme et d'amplitude identiques, et la réponse impulsionnelle n'aurait été fonction que du retard r.

relation d'entrée-sortie

La relation temporelle d'entrée-sortie d'un système LVT est donnée par [Hua80] :

$$y(n) = \mathcal{H} \circ x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n, k)x(k) \tag{3.8}$$



(a) $h(n,k)$ (b) $g(r,k)$

Fig. 3.2: Exemple de réponse impulsionnelle d'un système LVT causal

L'équation (3.7) permet d'exprimer la sortie du système en fonction des deux autres formes de la réponse impulsionnelle :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(n-k,k)x(k) \tag{3.9}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(n,n-k)x(k) \tag{3.10}$$

Ces équations montrent que la réponse impulsionnelle permet de relier complètement l'entrée $x(n)$ à la sortie $y(n)$ du système, et qu'elle résume donc bien son comportement entrée-sortie. La définition de f et g ne simplifie en rien la notion de réponse impulsionnelle, mais elle permet de revenir rapidement au cas d'un système invariant. En effet, ces signaux discrets ne sont alors plus fonction du moment d'excitation k ou d'observation n, mais seulement du retard $r = n - k$. Les relations (3.9) et (3.10) se simplifient donc directement en une équation de convolution, caractéristique des systèmes LIT.

système discret linéaire variant périodiquement dans le temps

réponse impulsionnelle

Le système linéaire $\mathcal{H}$ est maintenant supposé LVPT de période P. Il vérifie donc :

$$\mathcal{H} \circ [R_N \circ x(n)] = R_N \circ [\mathcal{H} \circ x(n)] \qquad \text{pour tout } N = m \times P \text{ avec } m \in \mathbb{Z} \tag{3.11}$$

A partir de (3.11) et (3.8), on peut montrer que la réponse impulsionnelle de $\mathcal{H}$ vérifie la relation [Pra92] :

$$h(n,k) = h(n+P, k+P) \tag{3.12}$$

D'après les équations (3.5) et (3.6) ceci est équivalent à :

$$g(r,k) = g(r,k+P) = g(r,k_{modP}) \tag{3.13}$$

$$f(n,r) = f(n+P,r) = f(n_{modP},r) \tag{3.14}$$

où $k_{mod\ P}$ signifie k pris modulo P.
La forme temporelle (3.5) de la réponse impulsionnelle d'un système LVPT est représentée sur la figure 3.3 avec $P = 2$. La périodicité apparaît suivant l'instant d'excitation du système. Les réponses impulsionnelles du même type que celle d'un système LIT apparaissent quant à elles suivant l'axe des retards.

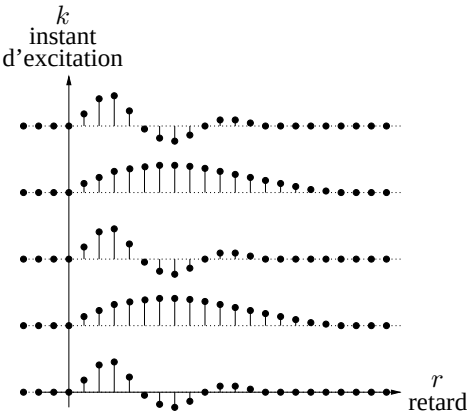


Fig. 3.3: Exemple de réponse impulsionnelle $g(r,k)$ d'un système LVPT causal avec $P = 2$

relation d'entrée-sortie

Les relations de périodicité (3.13) et (3.14), ainsi que les relations d'entrée-sortie (3.9) et (3.10) vont nous permettre de déterminer la structure interne d'un système LVPT de période P, et nous aider ainsi à comprendre son effet sur le signal d'entrée. Par exemple, le signal bidimensionnel $g(r,k)$ est P-périodique suivant k, et peut être développé en série de Fourier discrète (ou d'une manière équivalente, en transformée de Fourier discrète) suivant cette variable [Gas90] :

$$g(r,k) = \sum_{l=0}^{P-1} g_l(r) e^{j2\pi \frac{l}{P} k} \tag{3.15}$$

avec

$$g_l(r) = \frac{1}{P} \sum_{k=0}^{P-1} g(r,k) e^{-j2\pi \frac{l}{P} k} \tag{3.16}$$

La relation d'entrée-sortie (3.9) peut donc s'écrire, en utilisant (3.15) :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{P-1} g_l(n-k) e^{j2\pi \frac{l}{P} k} \right) x(k) \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k) x(k) e^{j2\pi \frac{l}{P} k} \right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

La sortie $y(n)$ du système considéré est donc constituée d'une somme de P éléments. Chacun de ces éléments est la sortie d'un système LIT de réponse impulsionnelle $g_l(r)$ dont l'entrée est une version modulée de $x(n)$ par une exponentielle complexe de fréquence $\frac{l}{P}$. En effet, on reconnaît en (3.17) la somme de P équations de convolutions entre $g_l(n)$ et $x(n)e^{j2\pi\frac{l}{P}n}$. La figure 3.4 représente la traduction graphique de l'équation (3.17), et montre qu'un système LVPT P-périodique peut être considéré comme un banc de P filtres parallèles à entrées modulées. Cette représentation est dénommée «structure à modulation d'entrée».

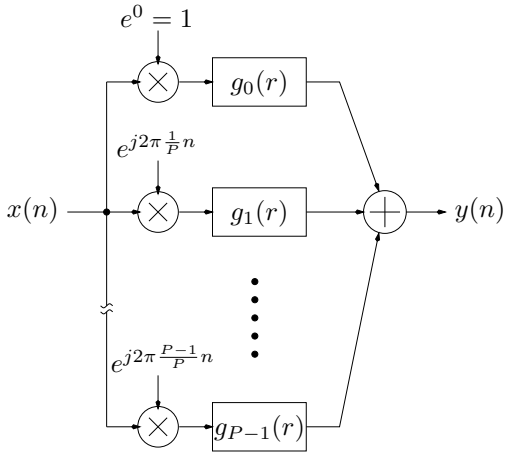


Fig. 3.4: Structure à modulation d'entrée d'un système LVPT P-périodique

Une structure tout à fait équivalente peut être déterminée en décomposant $f(n,r)$ P-périodique suivant n en série de Fourier discrète :

$$f(n,r) = \sum_{l=0}^{P-1} f_l(r) e^{j2\pi\frac{l}{P}n} \tag{3.18}$$

avec

$$f_l(r) = \frac{1}{P} \sum_{n=0}^{P-1} f(n,r) e^{-j2\pi\frac{l}{P}n} \tag{3.19}$$

L'équation d'entrée-sortie (3.10) utilisant $f(n,r)$ devient :

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=0}^{P-1} f_l(n-k) e^{j2\pi\frac{l}{P}n} \right) x(k) \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} e^{j2\pi\frac{l}{P}n} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_l(n-k) x(k) \right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Le signal d'entrée passe donc d'abord dans P systèmes LIT de réponse impulsionnelle $f_l(r)$. Les sorties de ces filtres sont ensuite modulées en amplitude par des exponentielles complexes de fréquence $\frac{l}{P}$. La structure correspondante est représentée sur la figure 3.5. Par analogie avec le cas précédent, cette représentation sera appelée «structure à modulation de sortie».

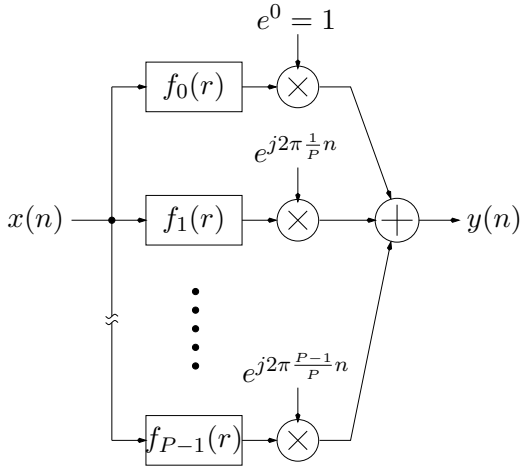


Fig. 3.5: Structure à modulation de sortie d'un système LVPT P-périodique

Afin d'établir un lien entre les systèmes LIT présents dans ces deux structures, l'équation (3.17) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} y(n) &= e^{j2\pi\frac{l}{P}n} e^{-j2\pi\frac{l}{P}n} \sum_{l=0}^{P-1} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k)x(k)e^{j2\pi\frac{l}{P}k} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{P-1} e^{j2\pi\frac{l}{P}n} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k)e^{-j2\pi\frac{l}{P}(n-k)}x(k) \right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Par identification entre (3.20) et (3.21), la relation entre $f_l(r)$ et $g_l(r)$ est donnée par :

$$f_l(r) = g_l(r)e^{-j2\pi\frac{l}{P}r} \tag{3.22}$$

Les réponses impulsionnelles $f_l(r)$ et $g_l(r)$ sont donc liées par une modulation d'amplitude sinusoïdale complexe de fréquence $\frac{l}{P}$, ce qui équivaut à un décalage fréquentiel de même fréquence. Cette relation permet de confirmer l'équivalence entre les représentations à modulation d'entrée et de sortie.

La décomposition en série de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un système LVPT P-périodique conduit donc aux structures décrites par les figures 3.4 et 3.5, qui permettent d'analyser facilement l'effet d'un tel système. Les différentes modulations provoquent des décalages fréquentiels de $\frac{l}{P}$ ($l \in \{0, \ldots, P-1\}$), alors que le banc de P systèmes LIT à un effet de filtrage linéaire et invariant sur les signaux. On retrouve finalement en sortie P versions fréquentiellement décalées et filtrées de l'entrée. L'effet caractéristique d'un système LVPT P-périodique sera donc *à la fois de filtrer, mais aussi de décaler le signal d'entrée en fréquence*, ce que ne fait pas un système LIT.

Cette caractéristique permet d'ores et déjà d'affirmer que les exponentielles complexes ne sont pas les signaux propres des systèmes LVPT. En effet, si l'entrée est une exponentielle complexe, on ne retrouve pas en sortie la même exponentielle amplifiée et déphasée comme pour les systèmes LIT [Lac96, page 16], mais une somme de P exponentielles de fréquences

différentes. Cette particularité compromet donc l'existence d'un gain complexe du même type que celui des systèmes LIT. Ce point sera discuté plus longuement à la section 3.2.4.
Enfin, ces deux structures peuvent être vues comme une généralisation du cas invariant. Si le système analysé est LIT, il peut être considéré comme LVPT de période $P = 1$, et seule la première branche des représentations existe. Le système est alors caractérisé par la seule réponse impulsionnelle $g_0(r) = f_0(r)$, et sa relation d'entrée-sortie est donnée par :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_0(n-k)x(k) \tag{3.23}$$

Après avoir réalisé une étude temporelle des systèmes LVPT en analysant leurs effets grâce aux propriétés de leurs réponses impulsionnelles, nous allons nous attacher à les décrire d'une manière purement fréquentielle.

3.2.4 Domaine fréquentiel

système discret linéaire variant dans le temps

réponse fréquentielle

La réponse fréquentielle d'un système LIT, appelée aussi gain complexe, est définie comme la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle [Lac96, pages 16-17]. Pour de tels systèmes, une transformée de Fourier monodimensionnelle suffit, la réponse impulsionnelle étant fonction de la seule variable r. Le gain complexe représente alors les effets du système sur chacune des composantes fréquentielles du signal d'entrée, en terme d'amplification et de déphasage.

Dans le cas d'un système LVT, les diverses formes de la réponse impulsionnelle sont toutes fonctions de deux variables temporelles. Il est donc nécessaire, dans ce cas, d'utiliser la transformation de Fourier bidimensionnelle. Une telle opération, définie par (1.5) et appliquée à l'équation (3.7), permet d'écrire les relations :

$$\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta) = \hat{\hat{g}}(\alpha,\beta+\alpha) = \hat{\hat{f}}(\alpha+\beta,-\beta) \tag{3.24}$$

Les fonctions définies en (3.24) sont complexes, et dépendent des deux variables fréquentielles α et β, associées respectivement aux variables temporelles n et k. Elles sont appelées «réponses en fréquence bidimensionnelles» ou «réponses bifréquentielles». Dans la suite, on se limitera à l'étude de $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$, puisque ces trois fonctions sont toutes équivalentes et contiennent la même information, à un changement de variable près.

Pour représenter graphiquement les caractéristiques d'une telle fonction, comme son module ou sa phase, il est nécessaire de définir un repère bidimensionnel, nommé *plan bifréquence* [Zad50], dont les abscisses et les ordonnées sont des fréquences réduites. La localisation de $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$ dans ce plan pour les systèmes linéaires, causaux et stationnaires a été étudié dans [Cla82]. Avant d'énoncer les conclusions de cet article, il est intéressant de développer le concept de système stationnaire. Il découle du théorème de Wold [Pic93, pages 516-522] qui

statue que toute réalisation d'un signal aléatoire *stationnaire* peut se décomposer en deux parties :

- une partie *purement stochastique*, pouvant être générée par la sortie d'un système LIT excité par un bruit blanc,
- une partie *purement déterministe*, consistant en une somme de sinusoïdes, parfaitement définies par leur fréquence, leur amplitude et leur phase.

Un signal déterministe est alors dit *stationnaire* s'il est exclusivement constitué d'une somme de signaux sinusoïdaux. De même, un système est dit stationnaire si, excité par une entrée déterministe stationnaire, il délivre un signal de sortie déterministe stationnaire. Les auteurs montrent alors que pour un système linéaire, stationnaire et causal, la fonction $\hat{\hat{h}}(\alpha, \beta)$ ne peut être localisée que sur un réseau de droites parallèles, et de pente -1 dans le plan d'abscisses α et d'ordonnées β.
Il faut remarquer l'indépendance des propriétés de stationnarité et d'invariance dans le temps. Un exemple frappant est celui d'un système LVPT P-périodique. D'après la section 3.2.3, ses effets se limitent à des décalages fréquentiels proportionnels à $\frac{1}{P}$, et à des filtrages LIT. À une entrée déterministe stationnaire, un tel système fait donc correspondre une sortie elle aussi déterministe stationnaire. En effet, même si les sinusoïdes de l'entrée sont décalées en fréquence et filtrées par des systèmes LIT, le signal de sortie reste constitué d'une somme de sinusoïdes. Un tel système est donc stationnaire, tout en étant variant dans le temps. S'il est de plus causal, sa réponse bifréquentielle restera limitée à des droites de pente -1 dans le plan bifréquence.

relation entrée-sortie

La transposition de la relation d'entrée-sortie (3.8), dans le domaine fréquentiel permet de donner une signification précise aux réponses bifréquentielles définies en (3.24). Pour cela, il est nécessaire d'utiliser le théorème de Parseval qui s'écrit pour deux signaux $u(k)$ et $v(k)$ discrets :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)v^*(k) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{u}(\beta)\hat{v}^*(\beta)d\beta \tag{3.25}$$

où * représente le complexe conjugué.
En appliquant cette relation à l'équation d'entrée-sortie temporelle (3.8) suivant la variable k et en notant que la réponse impulsionnelle ainsi que les différents signaux discrets sont réels, on obtient :

$$y(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{h}(n, \beta)\hat{x}^*(\beta)d\beta$$

ce qui devient, après une transformée de Fourier suivant n :

$$\hat{y}(\alpha) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{\hat{h}}(\alpha, \beta)\hat{x}^*(\beta)d\beta \tag{3.26}$$

La réponse bifréquentielle $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$ est donc bien une extension bidimensionnelle du gain complexe d'un système LIT. En effet, comme le montre cette équation, elle permet de relier le spectre du signal de sortie à celui du signal d'entrée. La figure 3.6 illustre la relation (3.26) en montrant graphiquement ce lien pour un système linéaire, stationnaire et causal. La réponse bifréquentielle reste alors confinée sur des droites parallèles de pente -1, avec des ordonnées à l'origine quelconques. Le spectre d'amplitude du signal d'entrée, représenté sur la gauche de la figure, est celui d'un signal monofréquentiel réel. Ses composantes fréquentielles «traversent» le plan bifréquence horizontalement pour aller se «refléter» sur les droites constituant $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$. Ceci donne alors naissance à de nouvelles composantes dans le spectre d'amplitude de la sortie, représenté en bas de cette figure. À des fins de simplification, seules les droites où est localisée $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$ sont représentées, et non son module.

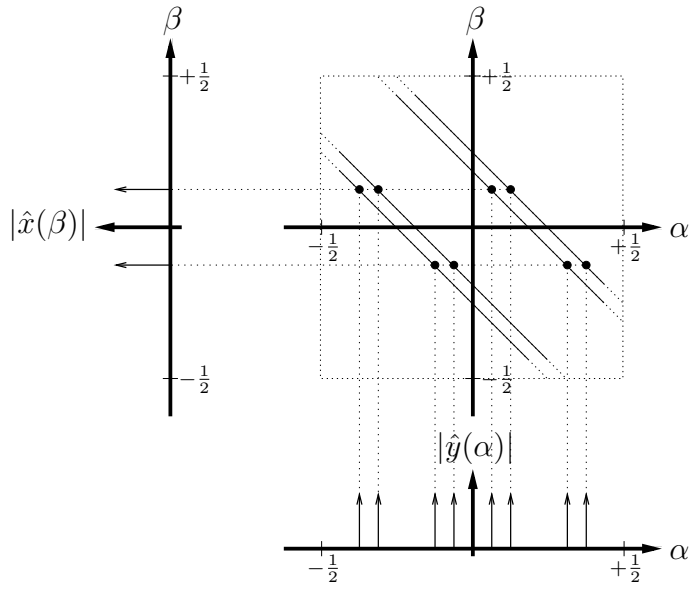


Fig. 3.6: Exemple de relation entre les spectres d'entrée et de sortie d'un système linéaire stationnaire et causal

système discret linéaire variant périodiquement dans le temps

réponse fréquentielle

Si le système considéré est LVPT de période P, les équations (3.7), (3.15) et (3.18) permettent d'écrire la réponse impulsionnelle sous deux formes :

$$h(n,k) = \sum_{l=0}^{P-1} g_l(n-k)e^{j2\pi\frac{l}{P}k} = \sum_{l=0}^{P-1} f_l(n-k)e^{j2\pi\frac{l}{P}n} \tag{3.27}$$

avec $g_l(r)$ et $f_l(r)$ définies respectivement par (3.16) et (3.19).
Une transformée de Fourier bidimensionnelle de (3.27) donne l'expression de la réponse

bifréquentielle pour ce type de systèmes :

$$\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{l}{P}) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{f}_l(-\beta)\delta(\alpha+\beta-\frac{l}{P}) \tag{3.28}$$

où $\delta(x)$ est la distribution de Dirac vérifiant les relations :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$
$$\delta(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^*$$

D'après (3.28), la réponse bifréquentielle d'un système LVPT reste confinée sur des droites parallèles de pente -1, comme pour un système LVT. Ceci est dû à la présence des distributions de Dirac dans l'expression de $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$. Toutefois, la contrainte de périodicité impose à ces droites d'être régulièrement espacées de $\frac{1}{P}$, fréquence de variation du système. Cette propriété montre bien que les systèmes LVPT sont un cas particulier des systèmes LVT, et que la périodicité de leurs variations se retrouve directement dans le plan bifréquence à travers cette contrainte d'espacement.

Enfin, on retrouve sur chacune de ces droites les gains complexes $\hat{g}_l(\alpha)$ ou $\hat{f}_l(-\beta)$, correspondant aux P systèmes LIT constituant le système LVPT, et qui apparaissent sur les figures 3.4 et 3.5. On peut vérifier l'égalité entre $\hat{g}_l(\alpha)$ et $\hat{f}_l(-\beta)$ en appliquant une transformée de Fourier à (3.22), grâce à laquelle on obtient :

$$\hat{f}_l(\lambda) = \hat{g}_l(\lambda + \frac{l}{P}) \tag{3.29}$$

Les distributions de Dirac de l'équation (3.28) imposent à la réponse impulsionnelle, et donc aux fonctions $\hat{g}_l(\alpha)$ et $\hat{f}_l(-\beta)$, d'être localisées uniquement sur les droites d'équation $\alpha = -\beta + \frac{l}{P}$. En utilisant l'équation de ces droites ainsi que (3.29), on peut écrire :

$$\hat{f}_l(-\beta) = \hat{f}_l(\alpha - \frac{l}{P}) = \hat{g}_l(\alpha) \tag{3.30}$$

Les expressions de $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$ données par (3.28) sont donc parfaitement équivalentes et contiennent la même information. Dans la suite, la réponse bifréquentielle sera préférentiellement exprimée en fonction des gains complexes $\hat{g}_l(\alpha)$.

La figure 3.7 représente en perspective $\left|\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)\right|$ pour un système LVPT P-périodique causal. Les seuls points non nuls sont situés sur les droites de pente -1 et d'ordonnée à l'origine proportionnelle à $\frac{1}{P}$. Cette réponse bifréquentielle pourrait être obtenue, par exemple, par échantillonnage puis par transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un système LVPT continu. Puisqu'on suppose vérifier la condition d'échantillonnage de Shannon, il est normal que $\left|\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)\right|$ soit nul lorsque $|\alpha|$ ou $|\beta|$ sont égaux à $\frac{1}{2}$. L'emplacement des différents gains complexes $\hat{g}_l(\alpha)$ est déterminé grâce à la propriété de périodicité de la fonction $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$, qui est 1-périodique suivant α et β.

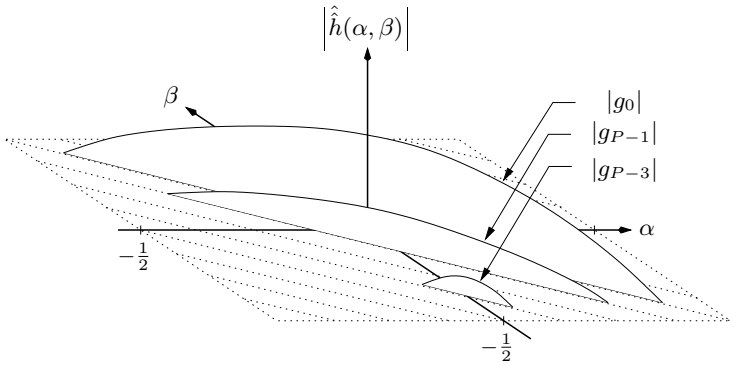


Fig. 3.7: Exemple de module de réponse bifréquentielle pour un système LVPT P-périodique causal

relation entrée-sortie

Les équations (3.28) et (3.26) permettent d'établir la relation d'entrée-sortie d'un système LVPT P-périodique dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}\hat{y}(\alpha) &= \sum_{l=0}^{P-1}\left[\hat{g}_l(\alpha)\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\hat{x}^*(\beta)\delta(\alpha+\beta-\frac{l}{P})d\beta\right] \\ &= \sum_{l=0}^{P-1}\hat{g}_l(\alpha)\hat{x}^*(-\alpha+\frac{l}{P}) \qquad (3.31)\end{aligned}$$

Dans le cas de signaux réels, la symétrie hermitienne de la transformée de Fourier permet d'écrire :

$$\hat{y}(\alpha) = \sum_{l=0}^{P-1}\hat{g}_l(\alpha)\hat{x}(\alpha-\frac{l}{P}) \qquad (3.32)$$

Le spectre en fréquence de la sortie est donc une somme de P spectres de l'entrée, décalés d'une fréquence multiple de $\frac{1}{P}$ et filtrés par des systèmes LIT de gains complexes $\hat{g}_l(\alpha)$. Cette équation caractérise bien le recouvrement spectral inhérent à ce type de système, et confirme le résultat obtenu dans le domaine temporel : un système LVPT produit à la fois un effet de décalage fréquentiel et de filtrage LIT sur son entrée.

L'équation (3.32) traduit aussi le fait que le contenu spectral de l'entrée aux fréquences $\alpha-\frac{l}{P}$ (avec $l\in\{0,\ldots,P-1\}$) participe à l'élaboration du contenu spectral de la sortie à la fréquence α. Or, pour un système LIT, il n'y a aucun décalage fréquentiel et seul $\hat{x}(\alpha)$ influe sur $\hat{y}(\alpha)$. En effet, on a alors $P=1$ et (3.32) se simplifie en :

$$\hat{y}(\alpha) = \hat{g}_0(\alpha)\hat{x}(\alpha) \qquad (3.33)$$

Ceci montre que $\hat{g}_0(\alpha)$ représente la partie invariante du système LVPT, alors que les gains complexes $\hat{g}_l(\alpha)$ pour $l\geq 1$ caractérisent sa partie variante dans le temps.

La figure 3.8 représente schématiquement, pour le même système que celui de la figure 3.7, les liens existant entre le spectre du signal d'entrée et celui du signal de sortie. Les droites de pente -1 en pointillés représentent les points de $\left|\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)\right|$ pouvant être non nuls, alors que les

mêmes droites en traits pleins représentent les points réellement non nuls de cette fonction. Elle peut être lue de deux manières différentes :

- sens entrée → sortie : la composante spectrale de l'entrée située en $\beta = \beta_0$ traverse la réponse bifréquentielle horizontalement (lignes tirets). Elle peut influencer, suivant les valeurs de $\left|\hat{\hat{h}}(\alpha, \beta)\right|$, le spectre de la sortie aux fréquences $-\beta_0 + \frac{l}{P}$, avec $l \in \{0, \ldots, P-1\}$.
- sens sortie → entrée : on remonte cette fois la réponse bifréquentielle verticalement (lignes point-point-tiret). la composante spectrale de la sortie à la fréquence α_0 peut donc être influencée, suivant les valeurs de $\left|\hat{\hat{h}}(\alpha, \beta)\right|$, par le spectre de l'entrée aux fréquences $-\alpha_0 + \frac{l}{P}$, avec $l \in \{0, \ldots, P-1\}$. C'est l'illustration directe de l'équation (3.31).

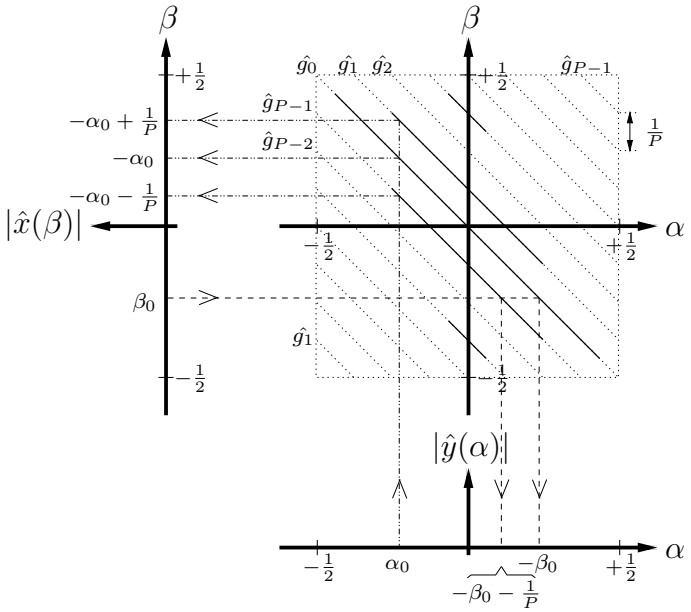


Fig. 3.8: Exemple de relation entre les spectres d'entrée et de sortie pour un système LVPT P-périodique causal

Ce type de représentation illustre donc clairement à la fois le décalage fréquentiel, et les changements d'amplitude et de phase provoqués par le système LVPT sur les composantes fréquentielles de l'entrée. Elle a aussi l'avantage de séparer graphiquement les différents transferts LIT composant le système LVPT.

Finalement, on peut définir une valeur Δ représentant la «quantité de variations» pour un système LVPT :

$$\Delta = \frac{\sum_{l=0}^{P-1} ||\hat{g}_l(\alpha)||^2 - ||\hat{g}_0(\alpha)||^2}{\sum_{l=0}^{P-1} ||\hat{g}_l(\alpha)||^2} \qquad \text{avec} \qquad ||\hat{g}_l(\alpha)||^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\hat{g}_l(\alpha)|^2 d\alpha \tag{3.34}$$

Si le système analysé est LIT, alors la somme $\sum_{l=0}^{P-1} ||\hat{g}_l(\alpha)||^2$ se réduit à $||\hat{g}_0(\alpha)||^2$ et Δ prend la valeur 0. Au contraire, si le système ne comporte pas de partie invariante, alors $||\hat{g}_0(\alpha)||^2$ devient nul et Δ vaut 1.

Les résultats obtenus dans le domaine fréquentiel confirment un résultat déjà ennoncé à la section 3.2.3, où il avait été montré que les exponentielles complexes n'étaient pas les signaux propres des systèmes LVPT. En effet, une exponentielle complexe en entrée produira, suivant les valeurs de $\left|\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)\right|$, non pas une, mais un ensemble d'exponentielles complexes en sortie. La notion de fonction de transfert est donc à revoir pour les systèmes LVPT, et la section suivante est dédiée à définir un opérateur du même type utilisable pour ce genre de systèmes.

3.2.5 Étude des signaux propres, notion de gain complexe

Recherche des signaux propres des systèmes LVPT

systèmes LIT

Il est bien connu que les exponentielles complexes sont les signaux propres des systèmes LIT. Cette propriété peut être démontrée à partir de leur relation d'entrée-sortie en temps, donnée par (3.23). Si le signal d'entrée $x(k)$ est une exponentielle complexe d'amplitude unitaire, de phase nulle et de fréquence réduite α, cette relation devient :

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_0(n-k)e^{j2\pi\alpha k}$$

En effectuant le changement de variable $u = n - k$, on obtient :

$$y(n) = \left[\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_0(u)e^{-j2\pi\alpha u}\right] e^{j2\pi\alpha n}$$

L'équation (1.2) permet d'identifier le terme entre crochets comme la valeur de la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle du système LIT, à la fréquence α. Cette équation peut donc s'écrire :

$$y(n) = \hat{g_0}(\alpha)e^{j2\pi\alpha n} \tag{3.35}$$

Finalement, on retrouve en sortie la même exponentielle complexe qu'en entrée pondérée par le nombre complexe $\hat{g_0}(\alpha)$, d'où le terme de «signaux propres». Ce nombre, dépendant de la fréquence, est appelé réponse fréquentielle ou gain complexe. Il résume, par son module et sa phase, l'effet de filtrage qu'a ce type de système sur son entrée. On comprend alors qu'il soit important de pouvoir décomposer un signal sur une base d'exponentielles complexes, ce qui est réalisé par la transformation de Fourier.

La définition des signaux propres des systèmes LIT nous a conduit à la notion de gain complexe, la même démarche va donc être adoptée pour les systèmes LVPT.

systèmes LVPT

Pour de tels systèmes, les signaux propres ne sont plus de simples exponentielles complexes. En effet, supposons que le signal d'entrée $x(k)$ d'un système LVPT P-périodique soit

une exponentielle complexe d'amplitude unitaire, de phase nulle et de fréquence réduite α. La relation d'entrée-sortie temporelle, donnée par (3.17), devient alors :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_l(n-k) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{l}{P}\right)k}$$

En effectuant le changement de variable $u = n - k$, on obtient :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \left(\sum_{u=-\infty}^{+\infty} g_l(u) e^{-j2\pi\left(\alpha+\frac{l}{P}\right)u} \right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{l}{P}\right)n}$$

L'équation (1.2) permet d'écrire :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l \left(\alpha + \frac{l}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{l}{P}\right)n}$$

Le double effet de filtrage et de décalage fréquentiel de ces système, mis en évidence dans les sections précédentes, est confirmé par cette équation. En effet, on ne retrouve pas en sortie la seule exponentielle complexe d'entrée, mais la somme de P exponentielles complexes de fréquence $\alpha + \frac{l}{P}$, pondérées respectivement par $\hat{g}_l\left(\alpha + \frac{l}{P}\right)$ pour $l = 1, \ldots, P$.

Une exponentielle complexe en entrée engendre donc P exponentielles complexes en sortie, décalées d'un multiple de $\frac{1}{P}$ en fréquence. La TFr étant une fonction 1-périodique, on peut espérer qu'un signal d'entrée constitué de P exponentielles régulièrement espacées de $\frac{1}{P}$ en fréquence, redonne le même type de signal en sortie. Afin de vérifier cette proposition, prenons un signal d'entrée de la forme :

$$x(k) = \sum_{m=0}^{P-1} e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{m}{P}\right)n} \tag{3.36}$$

En appliquant le changement de variable $u = n - k$ et en utilisant (1.2), la relation d'entrée-sortie temporelle (3.17) devient :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \sum_{m=0}^{P-1} \hat{g}_l \left(\alpha + \frac{l+m}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{l+m}{P}\right)n}$$

Un deuxième changement de variable $q = l + m$ permet d'écrire :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1} \underbrace{\sum_{q=l}^{P-1+l} \hat{g}_l \left(\alpha + \frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n}}_{S_l} \tag{3.37}$$

S_l peut être décomposé en une somme de deux termes :

$$S_l = \sum_{q=l}^{P-1} \hat{g}_l \left(\alpha + \frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n} + \sum_{q=P}^{P-1+l} \hat{g}_l \left(\alpha + \frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n}$$

Les fonctions $\hat{g}_l\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)$ et $e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n}$ étant 1-périodique suivant α, l'indice q du deuxième terme de S_l peut être exprimé modulo P, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} S_l &= \sum_{q=l}^{P-1} \hat{g}_l\left(\alpha+\frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n} + \sum_{q=0}^{l-1} \hat{g}_l\left(\alpha+\frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n} \\ &= \sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_l\left(\alpha+\frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n} \end{aligned}$$

L'équation (3.37) devient alors :

$$y(n) = \sum_{l=0}^{P-1}\sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_l\left(\alpha+\frac{q}{P}\right) e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{q}{P}\right)n}$$

En inversant l'ordre des sommations, et en changeant l'indice q en m, on obtient finalement :

$$y(n) = \sum_{m=0}^{P-1}\left[\sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l\left(\alpha+\frac{m}{P}\right)\right] e^{j2\pi\left(\alpha+\frac{m}{P}\right)n} \tag{3.38}$$

La réponse du système à une somme d'exponentielles complexes de la forme (3.36) est donc une somme pondérée des *mêmes exponentielles complexes, aux mêmes fréquences*. Ce résultat montre bien que ces signaux constituent les signaux propres des systèmes LVPT.

Décomposition des signaux

On peut donc espérer trouver une relation d'entrée-sortie simple en décomposant les signaux sur une base de P exponentielles complexes, décalées en fréquence de $\frac{1}{P}$. Pour un signal $s(n)$, ceci revient à «éclater» sa transformée de Fourier $\hat{s}(\alpha)$ en P intervalles fréquentiels différents de longueur $\frac{1}{P}$. On sélectionne alors, à un même instant, une composante fréquentielle dans chaque intervalle. Rangées sous forme vectorielles, ces composantes forment le vecteur $\hat{\mathbf{s}}(\alpha)$ suivant :

$$\hat{\mathbf{s}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{s}\left(\alpha\right) \\ \hat{s}\left(\alpha-\frac{1}{P}\right) \\ \vdots \\ \hat{s}\left(\alpha-\frac{P-1}{P}\right) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \left]-\frac{1}{2P};\frac{1}{2P}\right] \tag{3.39}$$

Ceci constitue une description fréquentielle équivalente à la transformée de Fourier, mais en observant P composantes fréquentielles à la fois. Cette décomposition de la réponse fréquentielle est appelée «décomposition en composantes de recouvrement» dans [She94], «réponse fréquentielle augmentée» dans [Zha97], ou encore «décomposition à modulations» dans [Vet87] où la même étude a été réalisée dans le domaine de la transformée en z. Le domaine de définition adopté pour α permet à $\hat{\mathbf{s}}(\alpha)$ de décrire sans redondance toute la transformée de Fourier du signal analysé. Un exemple graphique du lien entre la transformée de Fourier $s(\alpha)$ et le vecteur $\hat{\mathbf{s}}(\alpha)$ est donné par la figure 3.9 pour $P = 3$. Enfin, on peut remarquer que si $P = 1$, $\hat{\mathbf{s}}(\alpha)$ se réduit à $\hat{s}(\alpha)$.

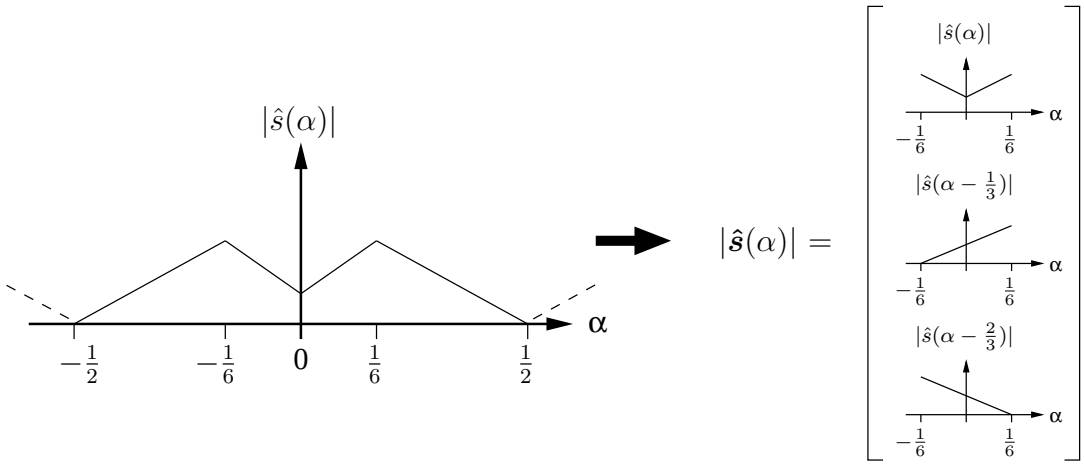


Fig. 3.9: Représentation vectorielle de la transformée de Fourier d'un signal $s(n)$ pour $P = 3$

Extension de la notion de gain complexe aux systèmes LVPT

Afin d'étendre la notion de gain complexe initialement définie pour les systèmes LIT aux systèmes LVPT P-périodiques, prenons un tel système, d'entrée $x(k)$ réelle et de sortie $y(k)$. Le but étant de donner la relation liant les vecteurs $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{y}}(\alpha)$, une composante quelconque du vecteur de sortie $\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right)$ doit être exprimée en fonction de celles du vecteur d'entrée. La relation d'entrée-sortie fréquentielle (3.32) permet d'écrire :

$$\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) = \sum_{l=0}^{P-1} \hat{g}_l\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{l+m}{P}\right)$$

En effectuant le changement de variables $q = l + m$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) &= \sum_{q=m}^{P-1+m} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) \\
&= \sum_{q=m}^{P-1} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) + \sum_{q=P}^{P-1+m} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right)
\end{aligned}$$

La TFr étant 1-périodique, l'indice q présent dans la fonction $\hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right)$ peut s'exprimer modulo P. Il en est de même pour la fonction $\hat{g}_{q-m}(\alpha - \frac{m}{P})$ puisque l'équation (3.16) implique l'égalité des fonctions $g_l(r)$ et $g_{l+P}(r)$. Le deuxième terme de cette expression peut donc être exprimé sous la forme d'une somme allant de 0 à $m-1$, et la composante $\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right)$ devient finalement fonction de $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$:

$$\begin{aligned}
\hat{y}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) &= \sum_{q=0}^{P-1} \hat{g}_{q-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \hat{x}\left(\alpha - \frac{q}{P}\right) \\
&= \left[\hat{g}_{-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \quad \hat{g}_{1-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right) \quad \cdots \quad \hat{g}_{P-1-m}\left(\alpha - \frac{m}{P}\right)\right] \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha)
\end{aligned}$$

En utilisant cette dernière expression, et le fait que la fonction $g_l(k)$ soit P-périodique suivant l'indice l, on peut lier les vecteurs $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{y}}(\alpha)$ par la relation matricielle suivante :

$$\hat{\mathbf{y}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) \quad \text{avec} \quad \alpha \in \left]-\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P}\right] \tag{3.40}$$

où $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ est une matrice carrée de dimension $P \times P$, fonction de la fréquence et de la forme :

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{g}_0(\alpha) & \hat{g}_1(\alpha) & \cdots & \hat{g}_{P-1}(\alpha) \\ \hat{g}_{P-1}(\alpha - \frac{1}{P}) & \hat{g}_0(\alpha - \frac{1}{P}) & \cdots & \hat{g}_{P-2}(\alpha - \frac{1}{P}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_1(\alpha - \frac{P-1}{P}) & \hat{g}_2(\alpha - \frac{P-1}{P}) & \cdots & \hat{g}_0(\alpha - \frac{P-1}{P}) \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

Les équations (3.40) et (3.41) fournissent donc une relation simple entre les vecteurs $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{y}}(\alpha)$, décrivant dans le domaine fréquentiel les signaux d'entrée et de sortie du système. La matrice $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ sera appelée «gain complexe matriciel» ou «réponse fréquentielle matricielle» dans la suite de ce document. La section suivante est dédiée à son interprétation, et à l'étude de quelques unes de ses propriétés.

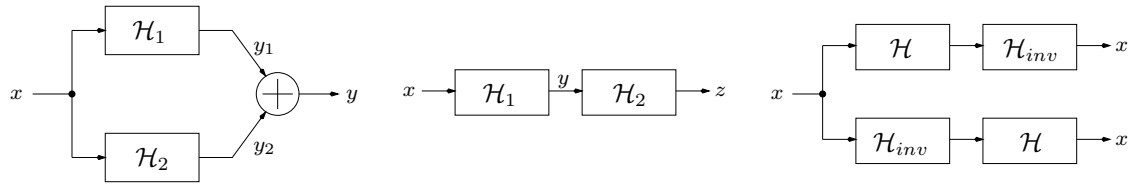
3.2.6 Interprétation du gain complexe matriciel

D'après les équations (3.39), (3.40) et (3.41), l'élément situé sur la ligne m et la colonne n de la matrice $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ représente le gain complexe existant entre la composante fréquentielle de fréquence $\alpha - \frac{n}{P}$ du signal d'entrée, et celle de fréquence $\alpha - \frac{m}{P}$ du signal de sortie. Le gain complexe matriciel peut donc prendre en compte les relations éventuelles existant entre les signaux d'entrée et de sortie *à des fréquences différentes*. De telles relations n'existant pas pour un système LIT, son gain complexe matriciel est diagonal, et seul $\hat{g}_0(\alpha)$ peut être non nul.

De plus, un lien peut être établi entre la réponse bifréquentielle d'un système LVPT et son gain complexe matriciel. $h(\alpha, \beta)$, définie à la section 3.2.4, représente le lien entre la transformée de Fourier du signal d'entrée et celle du signal de sortie du système. Le gain complexe matriciel joue le même rôle entre les réponses fréquentielles augmentées de ces deux signaux. Or ce type de représentation, définie par (3.39), peut être vue comme une version échantillonnée de la transformée de Fourier du signal. La matrice $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ n'est donc rien d'autre qu'une version échantillonnée de la réponse bifréquentielle, l'emplacement des échantillons variant avec la fréquence α.

Enfin, on peut montrer que le gain complexe matriciel vérifie les mêmes propriétés de base que le gain complexe classique. Pour cela, supposons deux systèmes LVPT $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ de même fréquence. Leur association en parallèle est représentée à la figure 3.10(a). Le signal de sortie global y est dans ce cas :

$$y = y_1 + y_2 = \mathcal{H}_1 \circ x + \mathcal{H}_2 \circ x$$



(a) association en parallèle (b) association en série (c) inversion

Fig. 3.10: Propriétés de base du gain complexe matriciel

En représentant les signaux par leur réponse fréquentielle augmentée, et les systèmes par leur gain complexe matriciel, on obtient :

$$\hat{\mathbf{y}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) + \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) = \left(\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}(\alpha) + \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}(\alpha)\right) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha)$$

Le gain complexe matriciel global de plusieurs systèmes LVPT de même fréquence en parallèle est donc la somme des gains complexes matriciels de chaque système.
La figure 3.10(b) représente l'association en série des deux systèmes précédents. Le signal de sortie global est cette fois donné par :

$$z = \mathcal{H}_2 \circ \mathcal{H}_1 \circ x$$

Dans le domaine fréquentiel, on obtient donc :

$$\hat{\mathbf{z}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{y}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{2}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{1}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha)$$

Le gain complexe matriciel global de plusieurs systèmes LVPT de même fréquence mis en série est donc le produit des gains complexes matriciels de chaque système. Toutefois, contrairement aux systèmes LIT, l'ordre des gains complexes matriciels ne peut être changé puisque le produit matriciel n'est pas commutatif. En effet, dans le cas général, les systèmes LVT, et donc les systèmes LVPT, ne peuvent être intervertis sans changer la forme de leurs signaux de sortie.
Le système inverse d'un système LVPT $\mathcal{H}$, noté $\mathcal{H}_{inv}$, est défini par la figure 3.10(c). Il vérifie donc les équations :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{H}_{inv} \circ x = \mathcal{H}_{inv} \circ \mathcal{H} \circ x = x$$

Cette équation, traduite dans le domaine fréquentiel à l'aide des outils précédemment définis, devient :

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) = \mathbf{I}_P \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha)$$

où $\mathbf{I}_P$ est la matrice identité de dimension $P \times P$. Alors, si le vecteur $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ est différent du vecteur nul, $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha)$ vérifie les équations suivantes :

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha) = \mathbf{I}_P \tag{3.42}$$

Si la matrice $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ est régulière quelle que soit la fréquence α comprise entre $-\frac{1}{2P}$ et $\frac{1}{2P}$, ces équations sont résolues par :

$$\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-1} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \left]-\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P}\right] \tag{3.43}$$

où $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-1}$ est la matrice inverse de $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$. *Le gain complexe matriciel de l'inverse d'un système est donc la matrice inverse du gain complexe matriciel de ce système.*

Le gain complexe matriciel associé aux systèmes LVPT vérifie donc, comme le gain complexe classique, les propriétés énoncées ci-dessus. De plus, il prend en compte d'éventuels liens entre des fréquences de valeurs différentes des signaux d'entrée et de sortie. Il peut donc être interprété comme une extension de la notion de gain complexe, appliquée aux systèmes LVPT. Des exemples de gain complexe matriciel de systèmes simples sont donnés dans la suite.

système LIT

Si nous sommes en présence d'un système LIT ($P = 1$), les vecteurs et les matrices définis précédemment redeviennent tous des scalaires. $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{y}}(\alpha)$ se réduisent en $\hat{x}(\alpha)$ et $\hat{y}(\alpha)$, et $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ en $\hat{g_0}(\alpha)$. L'équation matricielle (3.40) redevient le simple produit de fonctions (3.33), l'intervalle de définition de α étant alors donné par (1.4). Malgré tout, il peut être utile de calculer le gain complexe matriciel de ce système avec une dimension supérieure à 1. En effet, cette matrice sera nécessaire s'il est associé à des systèmes LVPT de période $P > 1$. Comme il a été vu précédemment, les gains complexes $\hat{g}_i(\alpha)$ d'un système LIT sont nuls si $i \neq 0$. On obtient donc, un gain complexe matriciel diagonal de la forme :

$$\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{LIT}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{g}_0(\alpha) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \hat{g}_0(\alpha - \frac{P-1}{P}) \end{bmatrix} \tag{3.44}$$

Ce résultat confirme le fait que le gain complexe matriciel est une version échantillonnée de la réponse bifréquentielle. En effet, dans le cas d'un système LIT, les seuls points de $h(\alpha, \beta)$ non nuls sont ceux de sa diagonale principale.

modulation d'amplitude sinusoïdale

Le deuxième exemple est une modulation d'amplitude sinusoïdale. Le système, formé d'un simple multiplieur, est donné par la figure suivante :
Le signal modulateur est un cosinus d'amplitude A, de phase ϕ et de fréquence réduite $\frac{1}{P}$. Ce système est donc LVPT P-périodique, et son signal de sortie est donné par :

$$y(n) = A\cos\left(\frac{2\pi}{P}n + \phi\right) x(n)$$

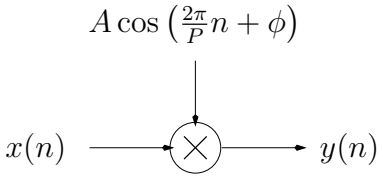


Fig. 3.11: Modulation d'amplitude sinusoïdale

Sa réponse impulsionnelle $h_{mod}(n,k)$ est obtenue en réponse au signal d'entrée :

$$x(n) = \delta_{n-k}$$

où δ_n est la fonction de Dirac discrète vérifiant :

$$\begin{cases} \delta_0 = 1 \\ \delta_n = 0 \quad \text{si} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

Ce système a donc une réponse impulsionnelle de la forme :

$$h_{mod}(n,k) = A\cos\left(\frac{2\pi}{P}n+\phi\right)\delta_{n-k} = A\cos\left(\frac{2\pi}{P}k+\phi\right)\delta_{n-k} \tag{3.45}$$

La transformée de Fourier bidimensionnelle de cette fonction est, par définition, la réponse bifréquentielle du système. D'après les propriétés de la fonction de Dirac discrète, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\hat{h}}_{mod}(\alpha,\beta) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\frac{2\pi}{P}k+\phi\right)\delta_{n-k}e^{j2\pi(\alpha n+\beta k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A\cos\left(\frac{2\pi}{P}k+\phi\right)e^{-j2\pi(\alpha+\beta)k} \end{aligned}$$

La transformée de Fourier en fréquence réduite du cosinus permet finalement d'écrire :

$$\hat{\hat{h}}_{mod}(\alpha,\beta) = \frac{Ae^{j\phi}}{2}\delta(\alpha+\beta-\frac{1}{P}) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\delta(\alpha+\beta+\frac{1}{P})$$

Cette fonction étant 1-périodique en α et β, le deuxième terme peut s'écrire :

$$\hat{\hat{h}}_{mod}(\alpha,\beta) = \frac{Ae^{j\phi}}{2}\delta(\alpha+\beta-\frac{1}{P}) + \frac{Ae^{-j\phi}}{2}\delta(\alpha+\beta+\frac{P-1}{P})$$

Par identification avec (3.28), on peut voir que ce système LVPT est composé de deux systèmes LIT de transformées de Fourier constantes :

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(\alpha) &= \frac{A}{2}e^{j\phi} \\ \hat{g}_{P-1}(\alpha) &= \frac{A}{2}e^{-j\phi} \end{aligned}$$

Cette réponse bifréquentielle est donc confinée sur deux droites différentes, d'ordonnées à l'origine $\pm\frac{1}{P}$ et de pente -1. Les deux morceaux de droite supplémentaires apparaissant dans

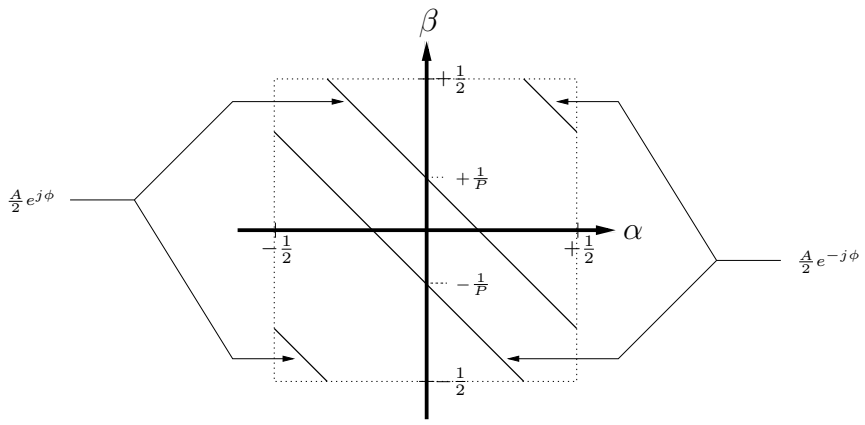


Fig. 3.12: $\hat{\hat{h}}_{mod}(\alpha, \beta)$ correspondant au système de la figure 3.11

$$\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{mod}}(\alpha) = \frac{A}{2}\begin{bmatrix} 0 & e^{j\phi} & & & e^{-j\phi} \\ e^{-j\phi} & & & \mathbf{0} & \\ & & & & e^{j\phi} \\ & & \mathbf{0} & & \\ e^{j\phi} & & & e^{-j\phi} & 0 \end{bmatrix}$$

les coins haut droit et bas gauche de la figure 3.12 appartiennent aux droites d'équation $\alpha + \beta \pm \frac{P-1}{P}$. Leur présence est due à la périodicité de $\hat{\hat{h}}_{mod}(\alpha, \beta)$.
Finalement, la définition du gain complexe donnée en (3.41) montre que pour ce système,on obtient une matrice $P \times P$ de la forme :
Sa structure est bien identique à celle de la réponse bifréquentielle de la figure 3.12.

Après avoir interprété le gain complexe matriciel comme une extension du gain complexe classique, la prochaine section est dédiée à l'emploi de techniques d'algèbre matriciel afin d'extraire des informations supplémentaires sur le système.

3.2.7 Analyse du gain complexe matriciel

L'intérêt d'obtenir un gain complexe sous une forme matricielle est de pouvoir lui appliquer des techniques d'algèbre linéaire, susceptibles d'apporter des informations supplémentaires sur le système correspondant. Dans cette section, la décomposition en valeurs singulières, ainsi que le calcul de normes matricielles ont été employés dans ce but. Dans la suite, l'opérateur $(\cdot)^H$ représente le transposé complexe conjugué d'un vecteur ou d'une matrice.

Décomposition en valeurs singulières

définition

La décomposition en valeurs singulières [Gol96] permet de décomposer une matrice sous une forme canonique. Dans le cas d'un gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ de dimension $P \times P$, on a :

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) = \hat{\mathbf{U}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{V}}(\alpha)^H \tag{3.46}$$

où :

- $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)$ est la matrice $P \times P$ unitaire formée des vecteurs propres de $\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^H$,
- $\hat{\mathbf{V}}(\alpha)$ est la matrice $P \times P$ unitaire formée des vecteurs propres de $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)$,
- $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)$ est la matrice $P \times P$ diagonale dont la diagonale principale est formée de la racine carrée des valeurs propres de $\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^H$, appelées «valeurs singulières». Elles sont notées $\sigma_i(\alpha)$ et rangées par ordre décroissant :

  $$\hat{\sigma}_1(\alpha) \geq \hat{\sigma}_2(\alpha) \geq \cdots \hat{\sigma}_r(\alpha) > \hat{\sigma}_{r+1}(\alpha) = \cdots \hat{\sigma}_P(\alpha) = 0$$

  Seules les r premières valeurs singulières sont donc supposées non nulles, r pouvant aller de 1 à P.

La figure 3.13 représente l'équation (3.46) sous une forme graphique. De plus, elle montre

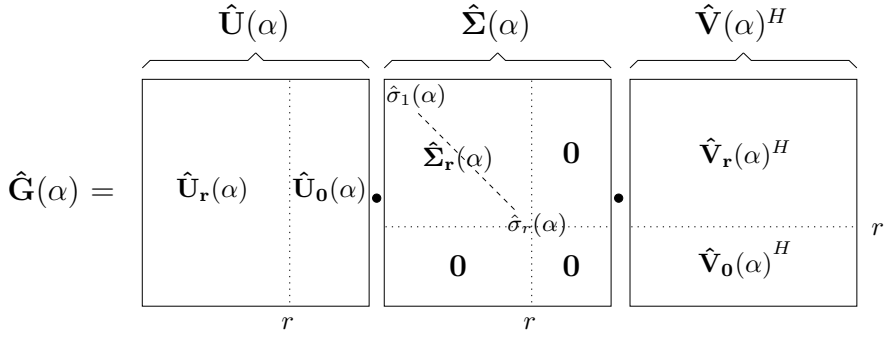


Fig. 3.13: Représentation graphique de la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$

que l'on peut obtenir une expression réduite de l'équation (3.46), en négligeant les matrices $\hat{\mathbf{U}}_\mathbf{0}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{0}(\alpha)$:

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) = \hat{\mathbf{U}}_\mathbf{r}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}_\mathbf{r}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{V}}_\mathbf{r}(\alpha)^H \tag{3.47}$$

La matrice $\hat{\mathbf{\Sigma}}_\mathbf{r}(\alpha)$ est alors une matrice diagonale de dimension $r \times r$, ne comportant aucune valeur singulière nulle sur sa diagonale principale. Les matrices $\hat{\mathbf{U}}_\mathbf{r}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{V}}_\mathbf{r}(\alpha)$ sont, quant à elles, de dimension $P \times r$.

Interprétation

Pour un système LVPT P-périodique $\mathcal{H}$ (P est ici supposé supérieur à 1) , d'entrée x et de sortie y, une relation d'entrée-sortie simple est donnée par l'équation (3.40). Elle relie

la représentation fréquentielle augmentée $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ de l'entrée à celle $\hat{\mathbf{y}}(\alpha)$ de la sortie, grâce au gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$. Cette matrice n'étant pas diagonale, une composante du vecteur d'entrée peut influencer plusieurs composantes du vecteur de sortie. Les composantes de ces vecteurs ne sont donc pas découplées. La transformation permettant d'accéder à des composantes fréquentielles découplées est la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel. En effet, en utilisant (3.46) dans (3.40), on obtient :

$$\hat{\mathbf{y}}(\alpha) = \hat{\mathbf{U}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{V}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) \tag{3.48}$$

En multipliant cette expression par la matrice unitaire $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)^H$, cette relation devient :

$$\hat{\mathbf{U}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{y}}(\alpha) = \hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{V}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) \tag{3.49}$$

On peut alors définir les «composantes fréquentielles principales» de l'entrée et de la sortie par :

$$\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(\alpha) = \hat{\mathbf{V}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha) \tag{3.50}$$

$$\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{p}(\alpha) = \hat{\mathbf{U}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{y}}(\alpha) \tag{3.51}$$

Ces deux vecteurs peuvent être considérés comme les représentations fréquentielles augmentées des signaux temporels $x_p(n)$ et $y_p(n)$. L'équation (3.49) montre que ces nouvelles coordonnées vérifient la relation :

$$\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{p}(\alpha) = \hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(\alpha) \tag{3.52}$$

La différence entre les relations (3.40) et (3.52) vient du fait que la matrice $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)$ est toujours diagonale. Une composante de $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(\alpha)$ n'agit alors plus que sur une seule composante de $\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{p}(\alpha)$ par l'intermédiaire de la valeur singulière correspondante. Toutes les composantes de ces vecteurs sont donc bien découplées. Le même type de démarche a été effectuée dans [Cab99] en appliquant la décomposition en valeurs singulières sur la matrice de gains complexes d'un système LIT multi-entrées multi-sorties, pour une fréquence fixe.
Les matrices $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{V}}(\alpha)$ peuvent être vues comme des matrices de changement de base, il en est donc de même pour leurs inverses $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)^H$ et $\hat{\mathbf{V}}(\alpha)^H$. Les transformations décrites par les équations (3.51) et (3.50) peuvent donc être vues comme deux changements de base différents, permettant de passer des composantes de départ $\hat{\mathbf{x}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{y}}(\alpha)$ aux composantes principales $\hat{\mathbf{x}}_\mathbf{p}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{y}}_\mathbf{p}(\alpha)$. Dans le cas présent, ces matrices peuvent aussi être vues comme les gains complexes matriciels correspondant à différents systèmes :

- le gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{V}}(\alpha)^H$ correspond à un système LVPT noté $\mathcal{P}_1$,
- le gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)$ correspond à un système LVPT noté $\mathcal{P}_2$,
- le gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)$ étant diagonal, il correspond à un système LIT noté $\mathcal{I}$.

L'équation (3.48) permet alors de décomposer le système LVPT d'origine $\mathcal{H}$ en trois systèmes associés en série, dont la sortie est reliée à l'entrée par la relation :

$$y = \mathcal{H} \circ x = \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{I} \circ \mathcal{P}_1 \circ x$$

Comme le montre la figure 3.14, $\mathcal{H}$ peut donc être vu comme deux systèmes LVPT différents entourant un système LIT. Le premier système LVPT $\mathcal{P}_1$ permet de passer de l'entrée $x(n)$

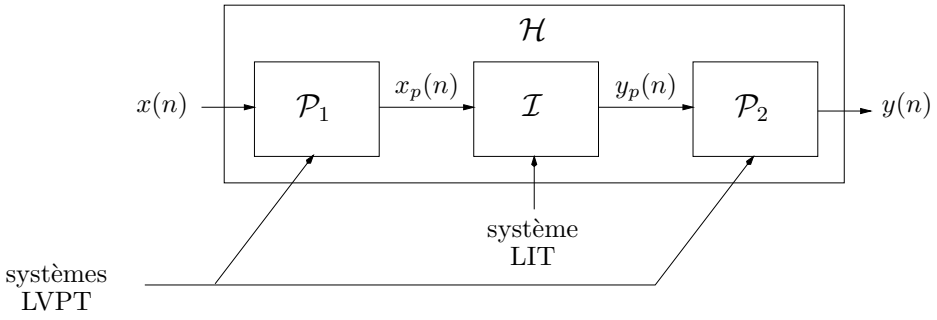


Fig. 3.14: Structure interne d'un système LVPT $\mathcal{H}$

au signal $x_p(n)$. Ce signal passe ensuite par un système LIT $\mathcal{I}$ qui applique, à chaque composante fréquentielle principale, un gain égal à la valeur singulière correspondante. Le deuxième système LVPT $\mathcal{P}_2$ permet alors de repasser de $y_p(n)$ au signal de sortie $y(n)$ du système global.

Ce modèle, mis à jour grâce à la décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel, permet donc de mieux comprendre la structure interne des systèmes LVPT. Nous allons voir qu'il permet aussi de donner leurs conditions d'inversion.

inversion d'un système LVPT

Les équations (3.43) et (3.46) montrent que le gain complexe du système inverse de $\mathcal{H}$ peut s'exprimer par :

$$\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-1} = \hat{\mathbf{V}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}(\alpha)^{H} \quad \text{avec} \quad \alpha \in \left]-\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P}\right]$$

Ce système peut donc être vu comme la mise en série des trois systèmes suivants :

- le système de gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)^{H}$, inverse de $\hat{\mathbf{U}}(\alpha)$, et donc noté $\mathcal{P}_{2inv}$,
- le système LIT de gain complexe matriciel diagonal $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)^{-1}$, inverse de $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)$, et noté $\mathcal{I}_{inv}$,
- le système de gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{V}}(\alpha)$, inverse de $\hat{\mathbf{V}}(\alpha)^{H}$, et noté $\mathcal{P}_{1inv}$.

La figure 3.15 montre la structure interne de ce système. On peut noter qu'il est constitué de deux systèmes LVPT et d'un système LIT, qui sont les inverses de ceux décrits par la figure 3.14. L'existence des gains complexes matriciels de $\mathcal{P}_{1inv}$ et $\mathcal{P}_{2inv}$ est toujours assurée puisque ce sont les transposés hermitiens de ceux de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. La matrice $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)^{-1}$, quant à elle, n'existe pas forcément. En effet, sa diagonale principale est constituée des éléments inverses de celle de $\hat{\mathbf{\Sigma}}(\alpha)$, et elle ne peut être calculée si l'un d'eux est nul. Un système sera donc *non-inversible* en α si une ou plusieurs des valeurs singulières de son gain complexe matriciel s'annulent pour cette fréquence.

Pour palier à ce problème et essayer d'inverser «au mieux» un système non-inversible, on peut utiliser la notion de matrice inverse généralisée [Sch90, page 49]. Pour le gain complexe

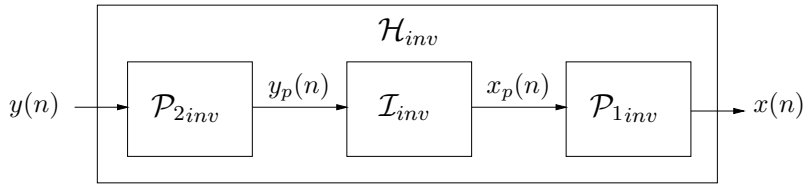


Fig. 3.15: Structure interne du système inverse $\mathcal{H}_{inv}$

matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$, elle est notée $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g}$, et vérifie les propriétés suivantes :

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha) = \hat{\mathbf{G}}(\alpha) \tag{3.53}$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} = \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} \tag{3.54}$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha) \quad \text{et} \quad \hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} \quad \text{sont} \quad \text{hermitiennes} \tag{3.55}$$

Cette matrice est alors unique et donnée par :

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g} = \hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{r}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{r}}(\alpha)^{-1} \cdot \hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{r}}(\alpha)^{H} \tag{3.56}$$

où $\hat{\mathbf{V}}_{\mathbf{r}}(\alpha)$, $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{r}}(\alpha)$ et $\hat{\mathbf{U}}_{\mathbf{r}}(\alpha)$ sont définies par l'équation (3.47) et la figure 3.13. L'avantage d'utiliser l'inverse généralisée par rapport à l'inverse exacte réside dans le fait qu'elle existe *toujours*, même si $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ n'est pas inversible. En effet, la matrice diagonale $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{r}}(\alpha)$ ne comporte aucun élément nul sur sa diagonale principale, de telle sorte que $\hat{\mathbf{\Sigma}}_{\mathbf{r}}(\alpha)^{-1}$ est toujours définie. De plus, on peut remarquer que si $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ est inversible, alors $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g}$ est égale à $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-1}$. Si, par contre, $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ est singulière, alors son inverse généralisée tend à avoir le même comportement que l'inverse exacte (relations (3.53), (3.54), et (3.55)), sans pour autant vérifier la relation stricte (3.42). En fait, l'équation (3.56) indique que si $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ a une valeur singulière nulle, la valeur singulière correspondante de son inverse généralisée restera nulle, alors qu'elle devrait prendre une valeur infinie pour l'inverse exacte. Cette remarque peut être illustrée grâce à un exemple simple. Soit la matrice $\mathbf{G}$ complexe :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est singulière, et ne comporte pas d'inverse exacte. Le calcul de son inverse généralisée nécessite sa décomposition en valeurs singulières :

$$\mathbf{G} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{j}{\sqrt{2}} \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}^H}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{j}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{U_r}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma_r}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V_r}^{\mathbf{H}}}$$

Cette décomposition, ainsi que l'équation (3.56) donnent l'inverse généralisée recherchée :

$$\mathbf{G}^{-g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -j\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^{-g}$ vérifient bien les relations (3.53), (3.54) et (3.55), et on a de plus les deux relations :

$$\mathbf{G}^{-g} \cdot \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}^{-g} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{j}{2} & 0 & 0 \\ \frac{j}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ces produits donnent donc «presque» la matrice identité, mais l'inverse généralisée ne fait qu'approcher le comportement de l'inverse exacte vérifiant (3.42).
Cette méthode d'inversion, appliquée à un système LVPT $\mathcal{H}$ de gain complexe $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$, donne les résultats suivants :

- Si on se trouve à une fréquence α pour laquelle $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ n'a aucune valeur singulière nulle, elle est alors inversible. Le gain complexe matriciel du système inverse $\mathcal{H}_{inv}$ est donc, pour cette fréquence, la matrice inverse exacte de $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$. Le gain complexe matriciel du système constitué par la mise en série de $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_{inv}$ est alors la matrice identité.
- Si on se trouve à une fréquence α pour laquelle $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$ a une ou plusieurs de ses valeurs singulières qui s'annulent, elles seront conservées dans le gain complexe matriciel du

système inverse. L'association en série des deux systèmes aura alors un gain complexe matriciel global approchant «au mieux» la matrice identité. On peut montrer [Sch90, pages 393-398] que le critère permettant de dire que cette matrice est approchée «au mieux» est quadratique. En effet, l'inverse généralisée minimise la norme quadratique de la différence entre la matrice identité $\mathbf{I}_p$ et le produit $\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{G}}(\alpha)^{-g}$.

Ce résultat est très facilement interprétable pour un système LIT $\mathcal{H}_{LIT}$. Pour les fréquences où son gain complexe $\hat{g}_0(\alpha)$ est différent de 0, le système inverse $\mathcal{H}_{LITinv}$ a alors comme gain complexe $\frac{1}{\hat{g}_0(\alpha)}$. Par contre, pour les fréquences où $\hat{g}_0(\alpha)$ est nul, le gain complexe de $\mathcal{H}_{LITinv}$ l'est aussi. L'association en série de ces deux systèmes donne donc un gain complexe global égal à 1, sauf pour les zéros de $\hat{g}_0(\alpha)$ où il est également nul.

La décomposition en valeurs singulières du gain complexe matriciel a donc permis de préciser la structure interne générale d'un système LVPT, et d'établir ses conditions d'inversibilité en fonction de ses valeurs singulières. Nous allons maintenant explorer quelles informations supplémentaires peut fournir le calcul de la norme de son gain complexe matriciel.

Calcul de normes

Afin d'introduire correctement le concept de norme, il est nécessaire de mieux définir les objets sur lesquels vont porter les calculs, c'est à dire les systèmes linéaires discrets, et les signaux présents en entrée et en sortie de ces systèmes. Afin de vérifier la condition d'existence de la transformée de Fourier (1.2) donnée au paragraphe 1.3.3, les signaux numériques qui suivent sont supposés de module sommable. Pour un tel signal s, on peut montrer que l'on a également :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 < \infty$$

On parle alors de signal à «énergie finie», puisque la quantité $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2$ est homogène à l'énergie contenue dans s. Si, de plus, on suppose que ces signaux sont à valeurs complexes, alors ils peuvent être considérés comme les éléments d'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes. En ajoutant à cet ensemble la notion de distance entre deux de ses éléments, on obtient un espace vectoriel normé, que l'on peut montrer complet (il est alors appelé «espace de Banach»). Enfin, en définissant le produit scalaire entre s_1 et s_2 par :

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_1(n)^* s_2(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \hat{s}_1(\alpha)^* \hat{s}_2(\alpha) d\alpha \tag{3.57}$$

on obtient un ensemble dénommé *espace de Hilbert des signaux à module sommable*, noté $\mathfrak{H}_1$. Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que tous les signaux rencontrés sont des éléments de $\mathfrak{H}_1$. Ils peuvent donc être vus comme des *vecteurs*, et représentés sous différentes formes

- la forme temporelle, constituée de l'ensemble de leurs échantillons,
- la forme fréquentielle classique, c'est à dire leur transformée de Fourier en fréquence réduite,

– la forme fréquentielle augmentée, définie, pour le signal s, par (3.39).

Un système LVPT peut alors être vu comme un *opérateur linéaire*, faisant correspondre le sous-espace de hilbert des signaux d'entrée à celui des signaux de sortie. Une forme pratique pour le représenter est la forme matricielle donnée par (3.41), qui relie les représentations fréquentielles augmentées des signaux d'entrée et de sortie.

norme des signaux

Les signaux étant équivalents à des vecteurs, leur «mesure» va pouvoir être quantifiée grâce à une norme. Il existe une multitude de normes vectorielles, mais la plus utilisée en traitement du signal reste la norme introduite par le produit scalaire (3.57). La norme au carré d'un élément s de $\mathfrak{H}_1$ est alors définie par :

$$\|s\|_2^2 = \langle s, s \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |s(k)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} |\hat{s}(\alpha)|^2 d\alpha \tag{3.58}$$

Cette valeur a une signification physique importante puisqu'elle représente l'énergie E_s contenue dans le signal. Elle peut encore s'exprimer en fonction de la représentation fréquentielle augmentée de s par :

$$\|s\|_2^2 = \int_{-\frac{1}{2P}}^{+\frac{1}{2P}} \hat{\mathbf{s}}(\alpha)^H \cdot \hat{\mathbf{s}}(\alpha) d\alpha = \|\hat{\mathbf{s}}(\alpha)\|_2^2$$

norme des systèmes

La norme de l'opérateur linéaire qu'est un système LVPT $\mathcal{H}$ est donnée par celle de son gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$. Une fois de plus, il existe une multitude de normes matricielles, mais les normes d'opérateurs sont le plus souvent induites par des normes vectorielles. La norme quadratique d'un système LVPT d'entrée x et de sortie y, induite par la norme vectorielle (3.58), est définie par [Gol96, pages 14-16] :

$$\|\mathcal{H}\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|y\|_2}{\|x\|_2} = \|\hat{\mathbf{G}}(\alpha)\|_2 = \sup_{\hat{\mathbf{x}}(\alpha) \neq 0} \frac{\|\hat{\mathbf{y}}(\alpha)\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}(\alpha)\|_2} = \sup_{\hat{\mathbf{x}}(\alpha) \neq 0} \frac{\|\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\alpha)\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}(\alpha)\|_2}$$

Pour calculer cette norme, il faut donc chercher le signal d'entrée non nul, qui engendre le «gain en norme» maximal entre l'entrée et la sortie du système. La valeur de cette norme élevée au carré est équivalente au «gain en énergie» maximal que peut présenter le système. En effet, il a été vu que la norme au carré d'un signal représente l'énergie qu'il contient. Il est montré, dans [Mir96], que cette norme matricielle est donnée par :

$$\|\mathcal{H}\|_2 = \|\hat{\mathbf{G}}(\alpha)\|_2 = \sup_{-\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2}} \sigma_{max} \left[\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \right]$$

où $\sigma_{max} \left[\hat{\mathbf{G}}(\alpha) \right]$ représente la plus grande valeur singulière de la matrice $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$.

La norme d'un système LVPT est donc la plus grande valeur singulière que puisse avoir le gain complexe matriciel, sur l'ensemble de définition de α. Cette valeur représente l'amplification

maximum que peut provoquer le système de son entrée vers sa sortie. Par exemple, pour un système LIT, cette norme est égale au maximum du module de son gain complexe $|\hat{g}_0(\alpha)|$.
Ce résultat permet donc de définir un gain d'entrée-sortie pour les systèmes LVPT, mais il permet aussi de donner un sens plus physique aux valeurs singulières. En effet, leurs valeurs, élevées au carré, peuvent être vues comme de véritables gains d'entrée-sortie en énergie, appliqués sur les composantes fréquentielles principales définies au paragraphe précédent.

Les outils théoriques introduits dans cette section vont pouvoir être utilisés afin d'étudier les caractéristiques du système LVPT présent dans le transfert décrit à la fin du chapitre 1.

3.3 Application

Cette section est consacrée à l'utilisation des outils théoriques précédemment définis, dans le but d'étudier un système LVPT de même structure que celui décrit au chapitre 1, situé entre les courants de commande et les vibrations qu'ils engendrent.
Tout d'abord, le paragraphe 3.3.1 rappelle la structure de ce système qui est à temps continu. Sa réponse impulsionnelle ainsi que sa réponse bifréquentielle y sont aussi étudiées.
Ensuite, les contraintes que doit vérifier la fréquence d'échantillonnage, pour que l'échantillonnage de ce système permette d'obtenir un système LVPT discret sont données au paragraphe 3.3.2.
Enfin, les trois derniers paragraphes (3.3.3 à 3.3.5) sont consacrés à l'étude des caractéristiques de ce système discret, en reprenant le plan utilisé dans la section précédente : domaine temporel, domaine fréquentiel, puis détermination et analyse du gain complexe matriciel.

3.3.1 Description du système à analyser

Le modèle décrit à la section 1.4.5 est un système LVPT multi-entrées mono-sortie. Or, les outils développés à la section précédente permettent d'analyser un système à une entrée et une sortie. Nous allons donc nous intéresser à une seule «branche» du système global, c'est à dire au transfert entre le courant envoyé dans une des bobines statoriques de la machine, et les vibrations qu'il engendre en un seul endroit de la carcasse statorique. Les résultats obtenus au chapitre 1 permettent de donner la structure générale de ce système à temps continu, rappelée sur la figure 3.16. On rappelle que l'entrée $i_c(t)$ du système global, équivalente au

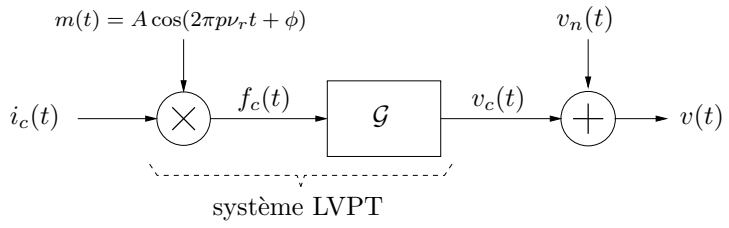


Fig. 3.16: Modèle du système LVPT à temps continu à analyser

courant de commande, est modulée par un signal sinusoïdal $m(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t + \phi)$ de

fréquence $\nu_0 = p\nu_r$, où ν_r est la fréquence de rotation de la machine et p son nombre de paires de pôles magnétiques. L'amplitude et la phase de $m(t)$ dépendent de la machine et de la position angulaire spécifiant le point de mesure des vibrations. Ce point étant considéré comme fixe, ces deux grandeurs sont des constantes. Le signal obtenu $f_c(t)$ est alors filtré par un système LIT $\mathcal{G}$ de réponse impulsionnelle $g(\tau)$, modélisant la réponse mécanique du stator. Sa sortie $v_c(t)$ représente les vibrations du stator engendrées par le seul courant de commande $i_c(t)$. La périodicité de $m(t)$ permet à l'ensemble multiplieur-système LIT d'être vu comme un système LVPT.

La structure du système à étudier étant connue, on doit fixer les valeurs des différentes variables qu'il comporte pour détailler l'allure de sa réponse impulsionnelle. Dans un cas pratique, il faudrait donc passer par une phase d'identification afin de déterminer les caractéristiques de $m(t)$ et la réponse impulsionnelle $g(\tau)$. Dans notre cas, nous allons fixer ces valeurs numériquement pour illustrer les caractéristiques d'un tel système :

– L'amplitude et la phase du signal de modulation sont choisies d'une manière arbitraire. Sa fréquence, quant à elle, est imposée égale à la fréquence statorique nominale de la machine de test, c'est à dire $\nu_0 = 50$ Hz, ce qui correspond à une fréquence de rotation de $\nu_r = 25$ Hz. Ce signal est alors donné par :

$$m(t) = 2,5 \cos\left(2\pi \times 50 \times t + \frac{2\pi}{3}\right) \tag{3.59}$$

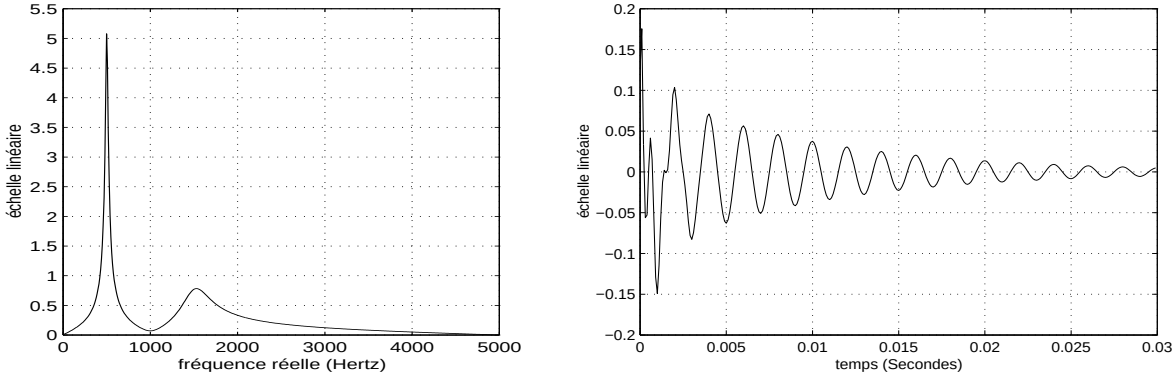
– Afin d'avoir une réponse fréquentielle réaliste, tout en étant assez simple pour faciliter l'interprétation des résultats, on choisit un système $\mathcal{G}$ dont le module du gain complexe est représenté sur la figure 3.17(a). Sa réponse en fréquence présente deux résonances à 0,5 et 1,5 kHz, ainsi qu'une anti-résonance à 1 kHz, puis a tendance à s'annuler pour les fréquences supérieures à 4 kHz. La réponse impulsionnelle correspondante est donnée à la figure 3.17(b).

Une grandeur intéressante à calculer afin de caractériser le système LVPT de la figure 3.16, est sa réponse impulsionnelle $h(t, s)$. Il faut tout d'abord noter que le modèle employé est un modèle à temps continu, ce qui impose aux variables temporelles d'être des variables continues, contrairement à ce qui a été décrit dans la section précédente. On peut néanmoins définir $h(t, s)$ de la même manière que dans la partie 3.2.3 : c'est la réponse du système observée au temps t, à une impulsion envoyée au temps s. Une impulsion à temps continu étant modélisée par une distribution de Dirac, l'entrée du système est alors :

$$i_c(t) = \delta(t - s)$$

Après modulation par $m(t)$, ce signal devient :

$$f_c(t) = m(t)\delta(t - s) = m(s)\delta(t - s)$$



(a) module du gain complexe $\hat{g}(\alpha)$

(b) réponse impulsionnelle $g(\tau)$

Fig. 3.17: Caractéristiques du système $\mathcal{G}$

La sortie du système LIT est donnée par l'équation de convolution suivante :

$$\begin{aligned} h(t,s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) f_c(t-\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) m(s) \delta(t-s-\tau) d\tau \\ &= m(s) g(t-s) \end{aligned}$$

En remplaçant le signal modulant par son expression générale, on obtient :

$$h(t,s) = A\cos\left(2\pi\nu_0 s + \phi\right) g(t-s) \tag{3.60}$$

Cette réponse impulsionnelle est bien celle d'un système LVPT, puisqu'elle vérifie la relation $h(t,s) = h(t+T_0, s+T_0)$ avec $T_0 = \frac{1}{\nu_0}$, relation identique à (3.12), mais pour les systèmes continus.

À partir de cette réponse impulsionnelle, on peut définir, comme en 3.2.4, la réponse bifréquen -tielle $\hat{\hat{h}}(\xi,\zeta)$. Elle correspond à la transformée de Fourier à deux dimensions de $h(t,s)$, mais ne possède pas de propriété de périodicité, comme son homologue définie en (3.28) pour les systèmes discrets. En partant de l'équation (3.60), on obtient :

$$\hat{\hat{h}}(\xi,\zeta) = \left[\frac{A}{2} e^{-j\phi} \hat{g}(\xi)\right] \delta(\xi+\zeta+\nu_0) + \left[\frac{A}{2} e^{j\phi} \hat{g}(\xi)\right] \delta(\xi+\zeta-\nu_0) \tag{3.61}$$

Cette fonction ne peut être non nulle que sur les deux droites de pente -1 et d'ordonnées à l'origine $\pm\nu_0$. Un exemple schématique est donné sur la figure 3.18. Le module du gain complexe de $\mathcal{G}$ est représenté sur la partie gauche de la figure. Étant de largeur de bande B, il est donc nul si la fréquence est à l'extérieur de l'intervalle $\left[-\frac{B}{2}\,;\,+\frac{B}{2}\right]$. Le résultat obtenu pour le module de la réponse bifréquentielle est montré sur la partie droite de cette figure. On peut voir que $|\hat{\hat{h}}(\xi,\zeta)|$ s'annule si $|\xi| > \frac{B}{2}$ ou $|\zeta| > \frac{B}{2} + \nu_0$. Le domaine où la réponse bifréquentielle est non nulle est donc fonction de la largeur de bande de $\mathcal{G}$ et de la fréquence

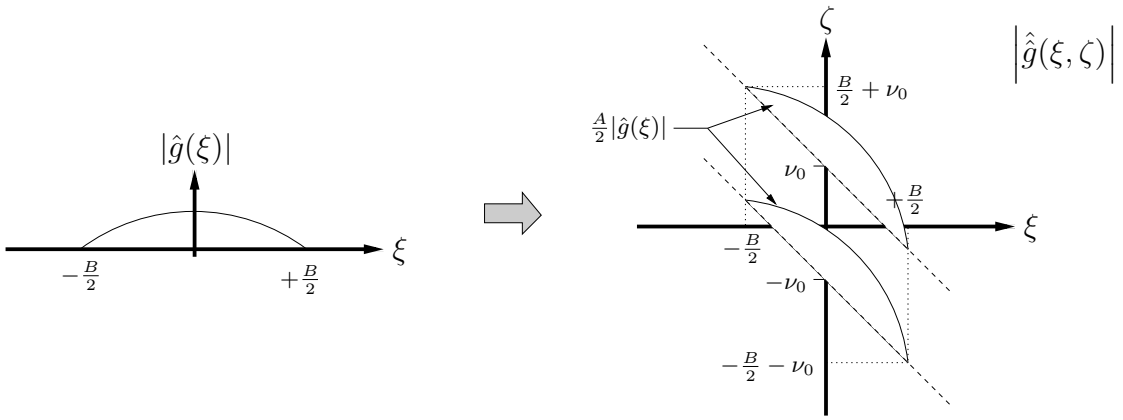


Fig. 3.18: Exemple schématique de module de la réponse bifréquentielle (3.61)

de modulation ν_0. Pour les valeurs numériques fixées précédemment, la largeur de bande du système LIT peut être estimée à $B \simeq 8$ kHz. Le domaine où la réponse bifréquentielle peut être non nulle correspond alors à $|\xi| \leq 4$ kHz et $|\zeta| \leq 4,05$ kHz.

3.3.2 Échantillonnage

Il y a deux types de contraintes d'échantillonnage à respecter. La fréquence d'échantillonnage ν_e doit tout d'abord être assez élevée afin de vérifier le théorème de Shannon. Ceci permet d'éviter le recouvrement spectral, et autorise la reconstruction de la réponse impulsionnelle à temps continu, à partir de sa version échantillonnée. D'après la section 1.3.3, cette condition est vérifiée pour un signal bidimensionnel analogique comme $h(t,s)$, si ν_e est supérieure à deux fois la plus haute fréquence présente dans le plan bifréquence, et ceci suivant les deux axes fréquentiels. Appliqué au système décrit à la figure 3.16, et donc à la réponse bifréquentielle de la figure 3.18, cette condition donne une première contrainte fixant une limite inférieure pour ν_e :

$$\nu_e > B + 2\nu_0 \tag{3.62}$$

La deuxième contrainte à imposer à ν_e vient du fait que l'échantillonnage du système LVPT continu original, doit fournir un système discret *périodique* pour pouvoir employer les outils d'analyse développés à la section 3.2. Si on échantillonne la réponse impulsionnelle à temps continu $h(t,s)$ du système de la figure 3.16 avec une période d'échantillonnage $T_e = \frac{1}{\nu_e}$, l'équation (3.60) permet d'écrire, aux instants d'échantillonnage :

$$\begin{aligned} h(nT_e, kT_e) &= A\cos\left(2\pi\nu_0 kT_e + \phi\right) g\left((n-k)T_e\right) \\ &= A\cos\left(2\pi\frac{\nu_0}{\nu_e}k + \phi\right) g\left((n-k)T_e\right) \end{aligned} \tag{3.63}$$

Pour que cette réponse impulsionnelle soit celle d'un système linéaire discret $\wp$-périodique, elle doit vérifier la relation (3.12), c'est à dire :

$$h(nT_e + \wp T_e, kT_e + \wp T_e) = h(nT_e, kT_e)$$

D'après l'expression de $h(nT_e, kT_e)$, ceci est équivalent à :

$$\cos\left(2\pi\frac{\nu_0}{\nu_e}(k+\wp)+\phi\right) = \cos\left(2\pi\frac{\nu_0}{\nu_e}k+\phi\right)$$

Ce qui est vérifié si la fréquence d'échantillonnage est de la forme :

$$\nu_e = \wp\nu_0 \tag{3.64}$$

Pour que le système discrétisé soit périodique, il faut que la fréquence d'échantillonnage soit égale à un nombre entier de fois celle du système LVPT continu. Il est donc nécessaire de synchroniser l'échantillonnage des signaux d'entrée et de sortie du système sur la fréquence de variation de ce système. Cette méthode est appelée «échantillonnage synchrone». Dans le cadre de l'application décrite au chapitre 1, le signal de top-tour fournit directement une sinusoïde de fréquence ν_r. En utilisant ce signal, il est donc plus facile de synchroniser l'échantillonnage des signaux sur ν_r, plutôt que sur ν_0. Au lieu d'utiliser la relation (3.64), on va donc partir de l'hypothèse suivant laquelle la fréquence d'échantillonnage est un multiple d'ordre P de ν_r :

$$\nu_e = P\nu_r \tag{3.65}$$

D'après le lien existant entre ν_0 et ν_r, cette relation équivaut à :

$$\nu_e = \frac{P}{p}\nu_0$$

Pour une telle fréquence d'échantillonnage, l'expression de la réponse impulsionnelle discrète (3.63) devient :

$$h(nT_e, kT_e) = A\cos\left(2\pi\frac{p}{P}k+\phi\right) g\left((n-k)T_e\right) \tag{3.66}$$

On peut alors remarquer que $h\left((n+P)T_e, (k+P)T_e\right) = h(nT_e, kT_e)$. Ce système est donc P-périodique, quelle que soit la valeur de p. Par contre, en examinant (3.66), on peut noter que si la valeur $\frac{P}{p}$ est entière, le système est également $\frac{P}{p}$-périodique. Toutefois, même dans ce cas, il reste aussi P-périodique et sera considéré comme tel. Finalement, pour des raisons de simplicité d'écriture, les réponses impulsionnelles ne sont plus notées qu'en fonction des indices temporels n et k, leur dépendance à T_e devenant implicite. l'équation (3.66) peut donc s'écrire :

$$h(n,k) = A\cos\left(2\pi\frac{p}{P}k+\phi\right) g(n-k) \tag{3.67}$$

Les résultats précédents montrent que pour échantillonner correctement l'entrée et la sortie du système LVPT continu de réponse impulsionnelle (3.60), et obtenir un système LVPT discret P-périodique, il suffit que la fréquence d'échantillonnage ν_e vérifie à la fois les conditions (3.62) et (3.65). Si on prend les valeurs numériques choisies précédemment pour

ce système, une valeur de 10 kHz convient parfaitement pour ν_e. En effet, elle est à la fois largement supérieure à sa limite inférieure $8000+2\times 50 = 8100$ Hz, et reste un multiple entier de $\nu_r = 25$ Hz. On obtient une période de $P = \frac{10000}{25} = 400$ et une réponse impulsionnelle de la forme :

$$h(n,k) = 2,5\cos\left(\frac{\pi}{100}k + \frac{2\pi}{3}\right) g(n-k) \tag{3.68}$$

Les valeurs de $g(n-k)$ sont connues par discrétisation de la réponse impulsionnelle continue donnée à la figure 3.17(b).

3.3.3 Domaine temporel

On suppose dans cette partie que la fréquence d'échantillonnage a une valeur de 10 kHz, et que la réponse impulsionnelle du système analysé est donnée par (3.68). En utilisant la relation (3.5) et en définissant le retard $r = n-k$, on peut exprimer la réponse impulsionnelle sous une autre forme :

$$g(r,k) = A\cos\left(2\pi\frac{p}{P}k + \phi\right) g(r) \tag{3.69}$$

$$= 2,5\cos\left(\frac{\pi}{100}k + \frac{2\pi}{3}\right) g(r) \tag{3.70}$$

La figure 3.19 représente une partie de cette réponse impulsionnelle, représentée en niveaux de gris. On voit apparaître une période de $P = 400$ échantillons suivant l'axe des k, alors que

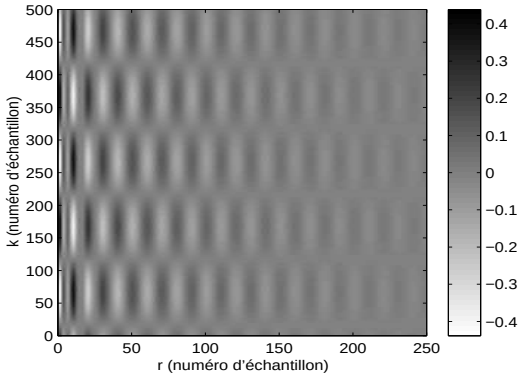


Fig. 3.19: Fraction de la réponse impulsionnelle (3.70) en niveaux de gris

les réponses impulsionnelles du type de celle de la figure 3.17(b) sont situées suivant l'axe des retards r. La valeur $\frac{P}{p} = \frac{400}{2} = 200$ étant un nombre entier, ce système à également une période de 200 échantillons suivant l'axe des k, mais il reste considéré comme étant 400-périodique. Comme prévu par (3.13), $g(r,k)$ est P-périodique en k, et donc décomposable en série de Fourier discrète par (3.15) et (3.16). En écrivant le cosinus présent dans (3.69) sous sa forme exponentielle, on obtient immédiatement la série de Fourier recherchée :

$$g(r,k) = \frac{A}{2}e^{j\phi}g(r)e^{j2\pi\frac{p}{P}k} + \frac{A}{2}e^{-j\phi}g(r)e^{j2\pi\frac{P-p}{P}k}$$

Cette équation, par identification avec (3.15), permet de définir les réponses impulsionnelles des deux systèmes LIT composant le système LVPT analysé :

$$g_p(r) = \frac{A}{2} e^{j\phi} g(r) \tag{3.71}$$

$$g_{P-p}(r) = \frac{A}{2} e^{-j\phi} g(r) \tag{3.72}$$

Il peut donc être représenté par une structure à modulation d'entrée à deux branches, comme le montre la figure 3.20. On pourrait en déduire sa structure à modulation de sortie par la

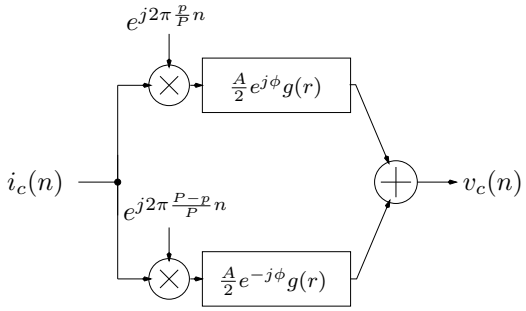


Fig. 3.20: Structure à modulation d'entrée du système LVPT réel

relation (3.22), mais celle-ci ne sera pas utilisée par la suite.
Ce système applique sur son signal d'entrée deux modulations différentes. L'une provoque un décalage fréquentiel de $\frac{p}{P}$ en fréquence réduite, et l'autre de $\frac{P-p}{P}$ équivalent à $-\frac{p}{P}$, la fonction $e^{j2\pi(u)k}$ étant 1-périodique en u. Ces signaux décalés sont alors filtrés par des systèmes LIT, dont les réponses impulsionnelles sont données par (3.71) et (3.72). On retrouve donc dans ce système, les effets couplés des décalages fréquentiels et des filtrages LIT, mis en évidence pour les systèmes LVPT dans la section 3.2. Nous allons voir que ce résultat se retrouve également dans le domaine fréquentiel.

3.3.4 Domaine fréquentiel

La réponse bifréquentielle de ce système LVPT peut être déterminée en prenant la transformée de Fourier à deux dimensions de sa réponse impulsionnelle (3.67), ou en utilisant les relations (3.71) et (3.72) dans la forme générale (3.28). Dans les deux cas, on obtient :

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta) &= \hat{g}_p(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{p}{P}) + \hat{g}_{P-p}(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{P-p}{P}) \\
&= \frac{A}{2}e^{j\phi}\hat{g}(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{p}{P}) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}\hat{g}(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{P-p}{P}) \\
&= \frac{A}{2}e^{j\phi}\hat{g}(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{p}{P}) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}\hat{g}(\alpha)\delta(\alpha+\beta+\frac{p}{P}) \qquad (3.73) \\
&= 1,25e^{j\frac{2\pi}{3}}\hat{g}(\alpha)\delta(\alpha+\beta-\frac{1}{200}) + 1,25e^{-j\frac{2\pi}{3}}\hat{g}(\alpha)\delta(\alpha+\beta+\frac{1}{200}) \qquad (3.74)
\end{aligned}$$

L'équation (3.73) est justifiée par la 1-périodicité de $\hat{\hat{h}}(\alpha,\beta)$ suivant ses deux variables. La figure 3.21 représente une partie du module de cette fonction en niveaux de gris, avec les

valeurs numériques précédemment définies. La réponse bifréquentielle est bien formée des deux droites d'équation $\beta = -\alpha \pm \frac{p}{P} = -\alpha \pm \frac{1}{200}$, sur lesquelles sont situés les gains complexes $\frac{A}{2}e^{j\phi}\hat{g}(\alpha)$ et $\frac{A}{2}e^{-j\phi}\hat{g}(\alpha)$. On retrouve, sur chacune de ces droites, l'allure en niveaux de gris du module du gain complexe de la figure 3.17(a).

Finalement, la relation entrée-sortie en fréquence dans le cas de signaux réels est déduite de

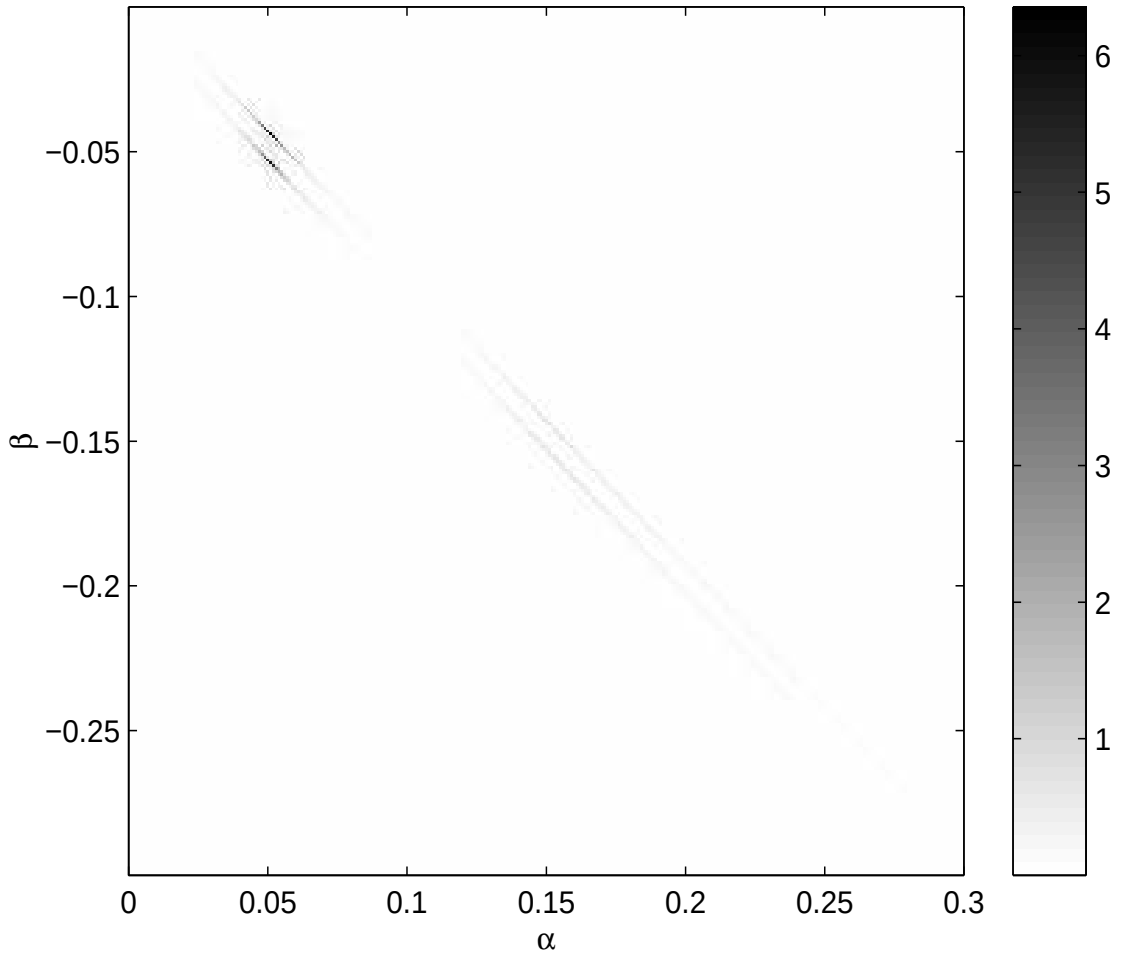


Fig. 3.21: Fraction du module de la réponse bifréquentielle (3.74)

la forme générale (3.32) :

$$\begin{aligned}
\hat{y}(\alpha) &= \hat{g}_p(\alpha)\hat{x}(\alpha - \frac{p}{P}) + \hat{g}_{P-p}(\alpha)\hat{x}(\alpha - \frac{P-p}{P}) \\
&= \frac{A}{2}e^{j\phi}\hat{g}(\alpha)\hat{x}(\alpha - \frac{p}{P}) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}\hat{g}(\alpha)\hat{x}(\alpha - \frac{P-p}{P}) \\
&= \frac{A}{2}e^{j\phi}\hat{g}(\alpha)\hat{x}(\alpha - \frac{p}{P}) + \frac{A}{2}e^{-j\phi}\hat{g}(\alpha)\hat{x}(\alpha + \frac{p}{P})
\end{aligned}$$

Cette expression montre explicitement que la transformée de Fourier de la sortie $\hat{y}(\alpha)$ est la somme de deux versions décalées et pondérées (ou filtrées) de celle de l'entrée. Les mêmes conclusions peuvent être déduites de l'étude du module de la réponse bifréquentielle, en

reprenant l'interprétation graphique qui a été faite à la partie 3.2.4.
De plus, la diagonale de la réponse bifréquentielle de ce système étant nulle, il ne comporte pas de partie invariante. Le système LIT de gain complexe $\hat{g}_0(\alpha)$ est donc nul, et la quantité Δ, définie par (3.34), et représentant le taux de variation normalisé du système est maximale et égal à 1.

Tous ces résultats auraient pu être déterminés sans représenter la réponse bifréquentielle qui, pour un système aussi simple, ne semble pas très utile. Elle a toutefois l'avantage de résumer graphiquement les effets du système LVPT analysé, et prend toute son importance dans le cas de systèmes plus complexes [Loe84, Cla82]. Elle permet aussi de donner une première idée du gain complexe matriciel du système, dont le calcul et l'analyse sont l'objet de la partie suivante.

3.3.5 Gain complexe matriciel

Calcul

Le calcul du gain complexe matriciel de ce système est immédiat si on utilise sa définition donnée par (3.41). En effet, on sait que tous les gains complexes nécessaires à son expression sont nuls, sauf $\hat{g}_p(\alpha)$ et $\hat{g}_{P-p}(\alpha)$ donnés par les transformées de Fourier des fonctions définies en (3.71) et (3.72). On obtient donc la matrice représentée sur la figure 3.22, dont seules les $p^{\text{ième}}$ et $(P-p)^{\text{ième}}$ sur- et sous-diagonales sont non nulles.

$$\hat{\mathbf{G}}(\alpha) = \begin{bmatrix} \hat{g}_p(\alpha) & & & \hat{g}_{P-p}(\alpha) \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & \ddots & & & \hat{g}_{P-p}(\alpha - \frac{p-1}{P}) \\ \hat{g}_{P-p}(\alpha - \frac{p}{P}) & & & \ddots & \\ & \ddots & & & \ddots \\ & & \hat{g}_p(\alpha - \frac{P-p-1}{P}) & & \\ & & & \ddots & \\ \hat{g}_p(\alpha - \frac{P-p}{P}) & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \hat{g}_{P-p}(\alpha - \frac{P-1}{P}) & \\ & & \hat{g}_p(\alpha - \frac{P-1}{P}) & & \end{bmatrix}$$

Fig. 3.22: Gain complexe matriciel du système de la figure 3.16

Cette matrice contient des fonctions de la variable $\alpha \in \left]-\frac{1}{2P}; \frac{1}{2P}\right]$. Les traitements décrits à la section précédente peuvent lui être appliqués, mais les résultats sont alors eux-mêmes fonctions de α (matrice inverse, décomposition en valeurs singulières). Afin d'obtenir des

résultats facilement interprétables, on impose à la fréquence une valeur fixe. Une valeur particulièrement intéressante est la fréquence nulle, pour laquelle la relation (3.40) entre les réponses fréquentielles augmentées de l'entrée et de la sortie devient :

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{0}) = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{0}) \cdot \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{0}) \tag{3.75}$$

Or, en se basant sur la définition de la réponse fréquentielle augmentée d'un signal donnée par (3.39), et en utilisant la périodicité de la TFr, on peut écrire, pour $\alpha = 0$:

$$\hat{\mathbf{x}}(0) = \begin{bmatrix} \hat{x}\,(0) \\ \hat{x}\left(-\frac{1}{P}\right) \\ \vdots \\ \hat{x}\left(-\frac{P-1}{P}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x}\,(0) \\ \hat{x}\left(\frac{P-1}{P}\right) \\ \vdots \\ \hat{x}\left(\frac{1}{P}\right) \end{bmatrix}$$

Si le signal x est un signal discret P-périodique, ce vecteur regroupe les composantes non nulles de sa transformée de Fourier (ou les coefficients de sa série de Fourier discrète) et le caractérise entièrement. En effet, il permet de retrouver ses caractéristiques temporelles aussi bien que fréquentielles. L'équation (3.75) donne donc la réponse d'un système LVPT P-périodique de gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha)$, à un signal d'entrée x P-périodique. y est alors lui-même un signal P-périodique, caractérisé par le vecteur $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{0})$.
On retrouve exactement le même cas dans le problème de contrôle actif original. D'une part, on vient de voir que le système à travers lequel on peut agir sur les vibrations de la machine est P-périodique. D'autre part, on peut montrer (voir section 4.2) que pour atténuer le type de vibrations envisagé dans le chapitre 1, l'entrée de ce système est nécessairement P-périodique. Les résultats obtenus en analysant le gain complexe matriciel du système de la figure 3.16 pour $\alpha = 0$ nous seront donc très utiles par la suite.
L'application numérique, à l'aide des valeurs précédemment définies, fournit une matrice $\hat{\mathbf{G}}(0)$ de taille 400×400 dont le module est représenté sur la figure 3.23. Comme on pouvait s'y attendre, seules les sur- et sous-diagonales d'ordre $p = 2$ et $P - p = 398$ sont non nulles et portent les valeurs des gains complexes $\hat{g}_2(\alpha)$ et $\hat{g}_{398}(\alpha)$ à des fréquences multiples de $\frac{1}{400}$, calculés par (3.71) et (3.72). Toutefois, les diagonales les plus éloignées de la diagonale principale ne sont pas visibles du fait de leur très faible amplitude. L'équation (3.75) et la forme du gain complexe matriciel obtenu montrent que chaque composante spectrale du signal de sortie y est fonction de deux composantes spectrales de x. Ceci est dû à la modulation d'amplitude sinusoïdale présente dans le système LVPT global, qui décale en fréquence le signal d'entrée de deux valeurs différentes. On peut remarquer que si le signal modulant $m(t)$ avait eut une série de Fourier comprenant plus de deux coefficients, d'autres droites parallèles seraient apparues dans la réponse bifréquentielle, ainsi que dans le gain complexe matriciel.
Le paragraphe suivant est consacré à l'analyse de ce gain complexe matriciel particulier, à l'aide des outils théoriques introduits à la section 3.2.7.

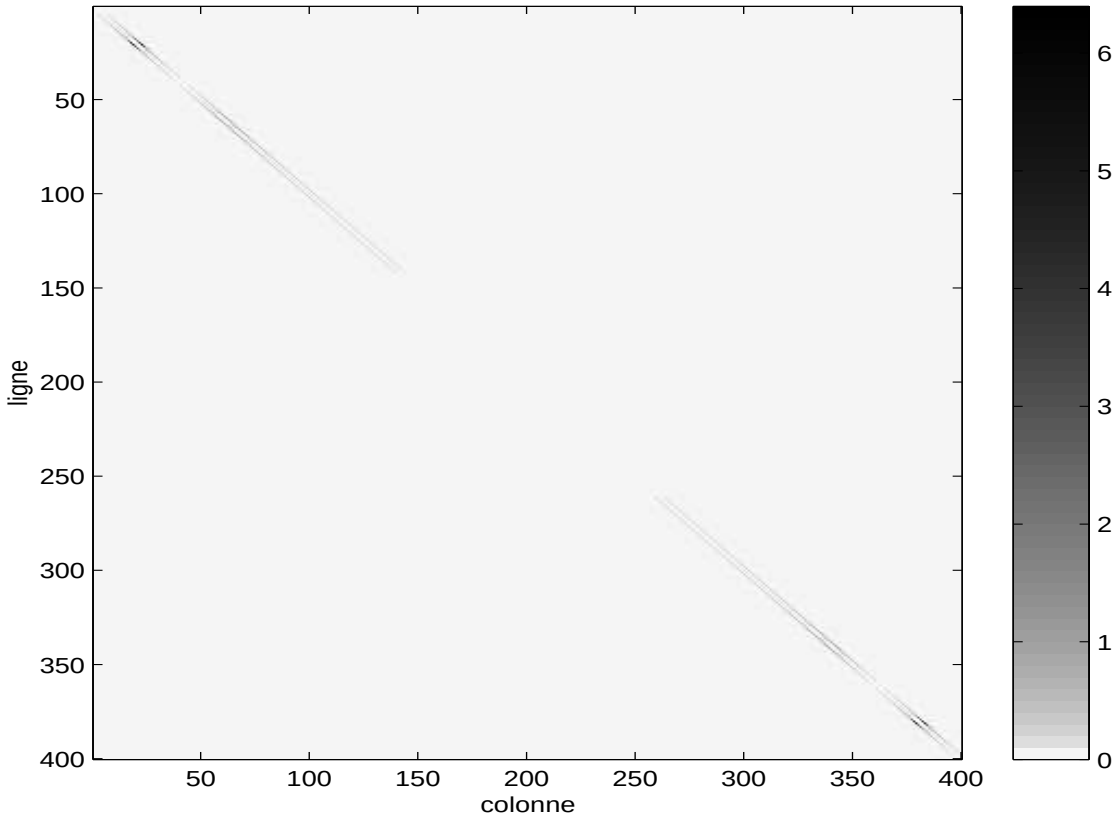


Fig. 3.23: Module du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(0)$

Analyse

La décomposition en valeurs singulières de $\hat{\mathbf{G}}(0)$ donne, d'après la relation (3.46), trois matrices 400×400 vérifiant :

$$\hat{\mathbf{G}}(0) = \hat{\mathbf{U}}(0) \cdot \hat{\mathbf{\Sigma}}(0) \cdot \hat{\mathbf{V}}(0)^H$$

L'information la plus importante est concentrée sur la diagonale principale de $\hat{\mathbf{\Sigma}}(0)$ contenant les valeurs singulières du gain complexe matriciel, rangées par ordre décroissant. Elles sont représentées sur la figure 3.24, et on peut noter que la valeur singulière maximale est $\sigma_1(0) \simeq 9,1$ alors que la minimale est de l'ordre de $\sigma_{400}(0) \simeq 1,6\,10^{-4}$. L'interprétation de la norme d'un gain complexe matriciel a montré que chaque valeur singulière élevée au carré, est équivalente à un gain en énergie. Ce système LVPT peut donc appliquer un gain en énergie dont l'ordre de grandeur varie de 10^{-8} à 100, suivant le signal d'entrée.

Inversion

Aucune valeur singulière n'étant nulle, le gain complexe matriciel du système inverse est donné par l'inverse exacte de $\hat{\mathbf{G}}(0)$. On obtient alors la matrice $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(0) = \hat{\mathbf{G}}(0)^{-1}$, dont le module est représenté sur la figure 3.25. Ses valeurs singulières sont les inverses de celles de

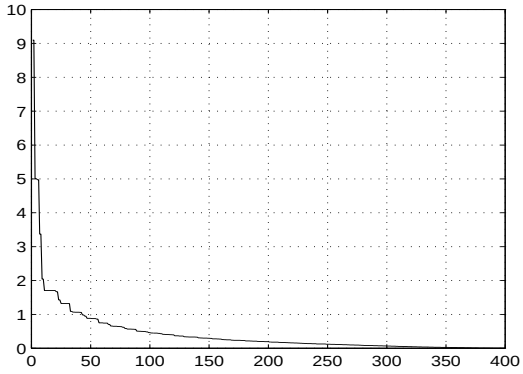


Fig. 3.24: Valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(0)$

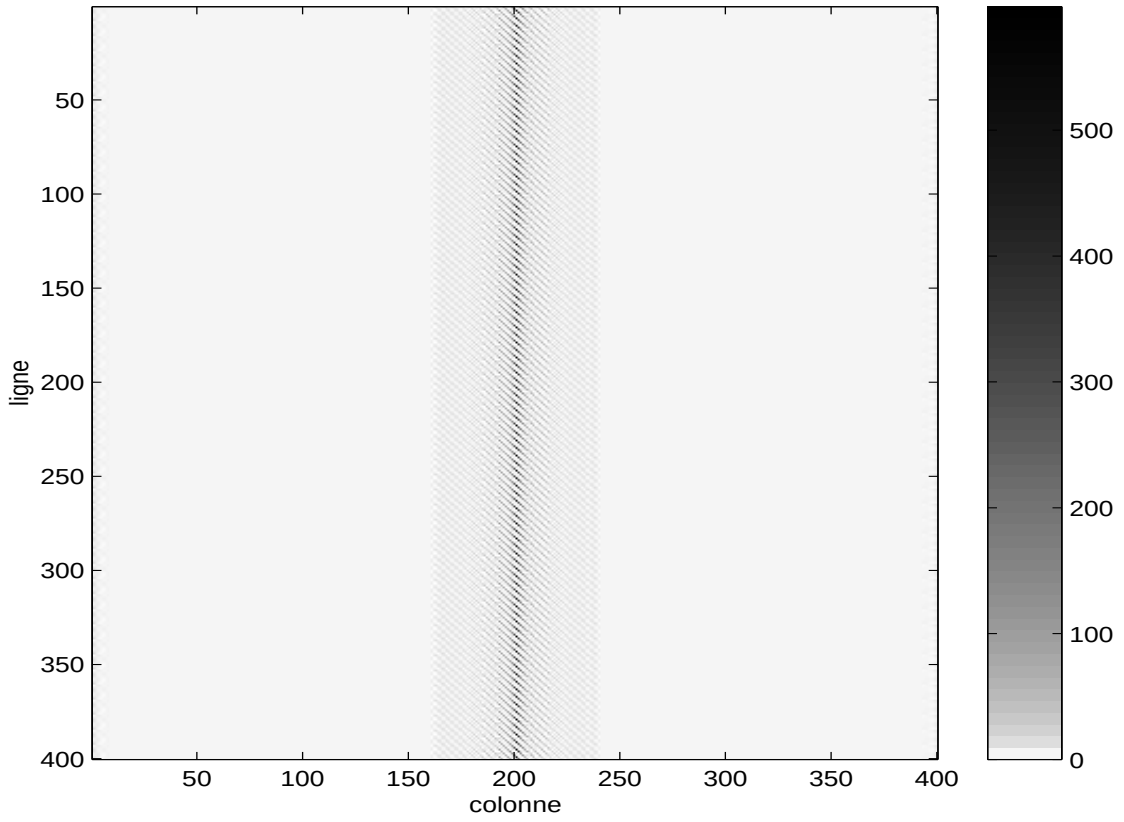


Fig. 3.25: Module du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(0)$

$\hat{\mathbf{G}}(0)$, et sont représentées sur la figure 3.26. Certaines prennent des valeurs très élevées, tout comme le gain en énergie du système inverse, qui peut approximativement varier entre 10^{-2} et 10^{8}.

Le système inverse exact est donc susceptible de présenter des gains en énergie très élevés, ce qui peut être gênant pour certaines applications. Comme dans le cas des systèmes non-inversibles, l'inverse généralisée peut fournir une solution à ce problème. En effet, le gain complexe matriciel du système inverse peut être calculé en prenant l'inverse généralisée de

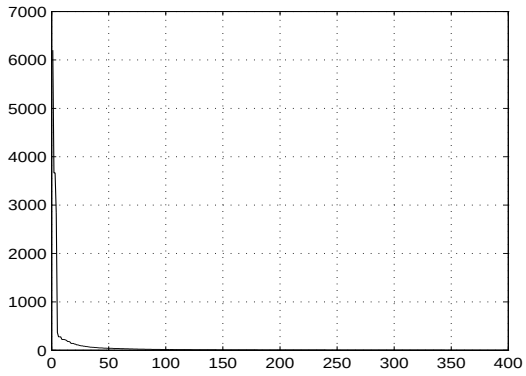


Fig. 3.26: Valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(0)$

celui du système direct, où on aura annulé les valeurs singulières situées en dessous d'un seuil choisi. On obtient alors une approximation de $\hat{\mathbf{G}}_{\mathbf{inv}}(\alpha)$ dont la valeur singulière maximum est moins élevée que celle de l'inverse exacte, ce nouveau maximum étant fixé par l'inverse du seuil précédent.

3.4 Conclusion

Ce chapitre est donc dédié à l'étude des systèmes LVPT, ce type de système étant présent dans le problème de contrôle actif posé au chapitre 1.
Les outils théoriques nécessaires à leur étude sont fournis dans la section 3.2. L'étude de leur réponse impulsionnelle (domaine temporel), ainsi que de leur réponse bifréquentielle (domaine fréquentiel), permet de mettre à jour les effets qu'ils provoquent sur leur signal d'entrée. Ils sont non seulement capables de le filtrer comme le ferait un système LIT, mais aussi de le décaler en fréquence. Ces deux effets sont particulièrement visibles lorsque ces systèmes sont représentés sous leur forme à modulation d'entrée ou de sortie, comme sur les figures 3.4 et 3.5. Leur sortie peut donc être considérée comme une somme de versions filtrées et décalées en fréquence du signal d'entrée, ce qui est résumé mathématiquement par la relation fréquentielle (3.32). De plus, une matrice fonction de la fréquence appelée «gain complexe matriciel», que l'on peut considérer comme l'extension du gain complexe des systèmes LIT, apparaît en étudiant les signaux propres de ces systèmes. Elle relie les représentations fréquentielles «augmentées» des signaux d'entrée et de sortie, tout comme la réponse en fréquence des systèmes LIT relie leur transformée de Fourier. Son analyse, réalisée à l'aide de techniques d'algèbre matriciel comme la décomposition en valeurs singulières et le calcul de normes, permet de définir des notions importantes pour le système. En effet, il apparaît que le carré de chaque valeur singulière de la matrice précédente représente un gain d'entrée-sortie en énergie du système correspondant. De plus, si une de ses valeurs singulières est nulle, le système n'est pas inversible.
L'application de ces outils théoriques sur un système analogue à celui rencontré au chapitre 1

est réalisée dans la section 3.3. Son étude dans les domaines temporels et fréquentiels montre qu'il provoque seulement deux décalages fréquentiels sur son signal d'entrée, qui sont dûs à la modulation d'amplitude sinusoïdale présente dans le système global. De plus, dans le cadre de notre application, le signal d'entrée peut être montré périodique de même période que le système (voir section 4.2). L'étude du gain complexe matriciel correspondant est alors limitée à la fréquence nulle, et la relation d'entrée-sortie en fréquence devient (3.75), qui sera intensivement utilisée dans le chapitre 4. Enfin, pour l'exemple numérique choisi, le système est montré inversible, mais le système inverse exact présente des gains entrée-sortie très élevés.

Une partie de ces résultats sera utilisée dans le chapitre suivant afin d'élaborer une solution au problème de contrôle actif original.

Chapitre 4

Détermination et mise en œuvre des solutions

4.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'élaborer les solutions théoriques au problème original de contrôle actif, puis de tester leurs performances sur le système LVPT considéré.

Dans le chapitre 1, le transfert entre un courant de commande et un signal de vibrations a été modélisé par un système LVPT. Le gain complexe matriciel de ce système a été étudié et la relation qu'il permet d'écrire entre les représentations fréquentielles augmentées de ses signaux d'entrée et de sortie à été développée à la section 3.3. La section 4.2 utilise cette relation pour modéliser le système global à temps discret entre les trois courants statoriques et un ou plusieurs capteurs accéléromètriques placés sur la carcasse statorique de la machine de test. L'expression fréquentielle augmentée des signaux de vibration à compenser est finalement déterminée.

La section 4.3 propose une fonction de coût quadratique pour minimiser la puissance globale sur un ou plusieurs capteurs de vibrations. Elle permet de déterminer la commande dite optimale minimisant cet indice de performance. Un algorithme récursif est finalement développé afin de faire converger les valeurs de la commande vers cet optimal. Il permet aussi à la commande de s'adapter à d'éventuelles variations des vibrations à minimiser au cours du temps.

Enfin, la section 4.4 décrit les performances atteintes par cet algorithme sur le système considéré, ainsi que la manière pratique de les implanter.

4.2 Modélisation mathématique de l'erreur

4.2.1 Discrétisation des signaux

Le modèle du système global, représenté sur la figure 1.14, a été obtenu à la section 1.4 sous la forme d'un système LVPT à temps continu. Le système de contrôle actif à élaborer

devant être implanté sur un processeur numérique, les signaux d'entrée et de sortie doivent être échantillonnés. Le problème revient donc à déterminer les conditions que doit respecter la fréquence d'échantillonnage ν_e, pour que la version échantillonnée de ce transfert soit bien LVPT, afin de pouvoir lui appliquer les outils théoriques développés au chapitre 3.
On peut remarquer que la structure du transfert entre l'une quelconque des entrées $i_{c_1}(t)$, $i_{c_2}(t)$ ou $i_{c_3}(t)$ et la sortie $v_c(t,\theta)$ est la même que celui de la figure 3.16, étudié à la section 3.3. Les conditions d'échantillonnage précédemment obtenues peuvent donc être étendues au système global. On rappelle que la fréquence réelle des variations de ce système est de $p\nu_r$ Hertz, et que le gain complexe $\hat{g}(\nu,\theta)$ du système LIT $\mathcal{G}_\theta$ est supposé s'annuler après une fréquence limite de $+\frac{B}{2}$ Hertz. On a alors les conditions d'échantillonnage suivantes :

- si ν_e est supérieure à $B+2p\nu_r$ Hz, il n'y a pas de recouvrement spectral dans les signaux échantillonnés,
- si ν_e est un multiple d'ordre P de la fréquence de rotation de la machine ν_r, le système LVPT obtenu peut être considéré comme P-périodique, c'est à dire de fréquence réduite $\frac{1}{P}$.

Il est donc nécessaire, comme à la section 3.3, d'avoir une fréquence d'échantillonnage suffisamment élevée, et un échantillonnage synchrone à la rotation de la machine, ce qui peut être facilement réalisé en utilisant le signal de top-tour. Dans la suite, on suppose que ν_e vérifie ces propriétés, et que le modèle numérique des transferts entre l'une quelconque des entrées échantillonnées $i_{c_1}(n)$, $i_{c_2}(n)$ ou $i_{c_3}(n)$ et la sortie $v_c(n,\theta)$, est celui d'un système LVPT discret P-périodique. On obtient le transfert à trois entrées et une sortie dont la structure est représentée à la figure 4.1.

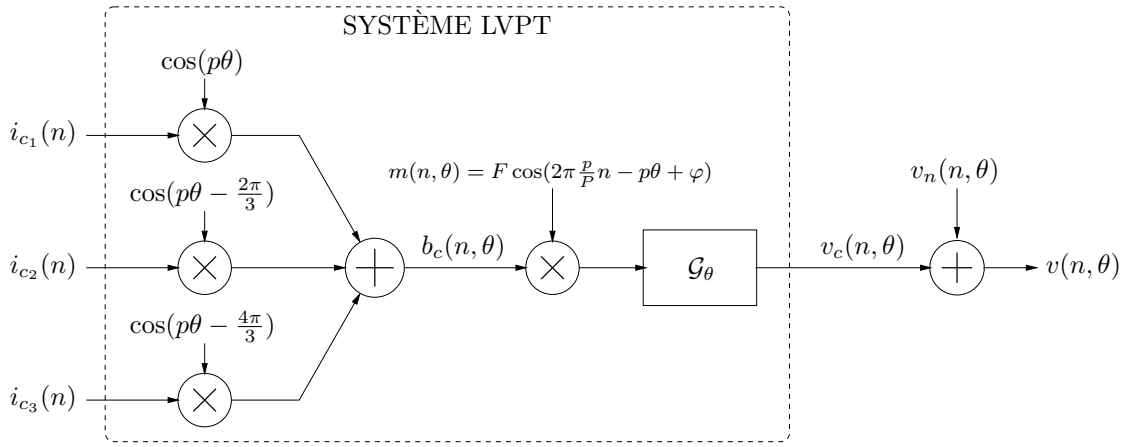


Fig. 4.1: Modèle à temps discret du système global, discrétisé à la fréquence d'échantillonnage $\nu_e = P\nu_r$

Le transfert $\mathcal{G}_\theta$ reste un système LIT, de réponse impulsionnelle $g(r,\theta)$ et de gain complexe en fréquence réduite $\hat{g}(\alpha,\theta)$.

4.2.2 Relation entrée-sortie du système LVPT

Pour pouvoir déterminer la relation entrée-sortie de ce système LVPT discret, on se place dans un cas pratique où tous les signaux sont analysés sur un temps fini. Cette hypothèse permet d'une part de se rapprocher de la réalité, et d'autre part de pouvoir calculer les transformées de Fourier en fréquence réduite qui seront nécessaires. En effet, les signaux sont alors de module sommable et la série (1.2) est convergente. De plus, les paragraphes 3.2.5 et 3.2.6 ont permis d'établir et d'interpréter l'équation (3.40) comme une relation entrée-sortie en fréquence pour un système LVPT discret P-périodique, où le gain complexe matriciel du système défini en (3.41), relie les représentations fréquentielles augmentées de ses signaux d'entrée et de sortie. Nous allons chercher à établir une relation équivalente pour le système de la figure 4.1.

Le système LVPT considéré étant P-périodique, les différents signaux seront représentés dans le domaine fréquentiel par leur représentation fréquentielle augmentée qui, pour un signal $s(n)$, est définie par la relation (3.39). En tenant compte des propriétés de linéarité de la transformée de Fourier, la représentation fréquentielle augmentée $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}(\alpha,\theta)$ du signal $b_c(n,\theta)$ peut s'écrire en fonction de celle des entrées du système :

$$\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}(\alpha,\theta) = \cos(p\theta)\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_1}}(\alpha) + \cos\left(p\theta - \frac{2\pi}{3}\right)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_2}}(\alpha) + \cos\left(p\theta - \frac{4\pi}{3}\right)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_3}}(\alpha) \tag{4.1}$$

Afin de faciliter les calculs matriciels ultérieurs, nous allons adopter une notation en «longs vecteurs», pour laquelle les représentations fréquentielles augmentées des entrées sont réunies dans un seul vecteur :

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(\alpha)^T = \left[\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_1}}(\alpha)^T & \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_2}}(\alpha)^T & \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_3}}(\alpha)^T \end{array}\right]$$

La relation (4.1) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\begin{array}{rcll} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{c}}(\alpha,\theta) & = & \underbrace{\left[\begin{array}{ccc} \cos(p\theta)\,\mathbf{I}_P & \cos\left(p\theta-\frac{2\pi}{3}\right)\mathbf{I}_P & \cos\left(p\theta-\frac{4\pi}{3}\right)\mathbf{I}_P \end{array}\right]}_{\mathbf{C}(\theta)} & \cdot\begin{array}{l}\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(\alpha)\\ \\ \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(\alpha)\end{array} \\ & = & & \end{array} \tag{4.2}$$

où la matrice $\mathbf{I}_P$ est la matrice identité de dimension $P \times P$.
La matrice $\mathbf{C}(\theta)$ n'est fonction que de la position angulaire de mesure des vibrations, et caractérise quantitativement la participation de chaque courant de commande à la création du champ magnétique additionnel représenté par le signal discret $b_c(n,\theta)$. De plus, il faut noter que si on se limite à une seule entrée, cette matrice se réduit au seul coefficient multiplicateur associé à l'entrée considérée, c'est à dire $\cos(p\theta)$, $\cos\left(p\theta-\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $\cos\left(p\theta-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Il est ensuite nécessaire de déterminer l'expression de la représentation fréquentielle augmentée du signal $v_c(n,\theta)$ en fonction de celle de $b_c(n,\theta)$. Pour cela, on peut noter que la structure du système situé entre ces deux signaux est strictement identique à celle de la figure 3.16 étudiée à la section 3.3. Seules les notations de l'amplitude et de la phase du signal de modulation, alors notées A et ϕ, doivent être respectivement remplacées par F et $-p\theta+\varphi$. On obtient donc pour ce système un gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{G}}(\alpha,\theta)$ identique à celui décrit à

la figure 3.22. Les seuls éléments non nuls qu'il contient sont situés sur ses $p^{\text{ième}}$ et $(P-p)^{\text{ième}}$ sur- et sous-diagonales, et sont les transformées de Fourier en fréquence réduite des signaux :

$$\begin{aligned} g_p(r,\theta) &= \frac{F}{2} e^{j(-p\theta+\varphi)} g(r,\theta) \\ g_{P-p}(r,\theta) &= \frac{F}{2} e^{-j(-p\theta+\varphi)} g(r,\theta) \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\begin{aligned} \hat{g}_p(\alpha,\theta) &= \frac{F}{2} e^{j(-p\theta+\varphi)} \hat{g}(\alpha,\theta) \\ \hat{g}_{P-p}(\alpha,\theta) &= \frac{F}{2} e^{-j(-p\theta+\varphi)} \hat{g}(\alpha,\theta) \end{aligned}$$

La représentation fréquentielle augmentée du signal de sortie $v(n,\theta)$ est donc donnée par :

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{c}(\alpha,\theta) = \hat{\mathbf{G}}(\alpha,\theta) \cdot \hat{\mathbf{b}}_\mathbf{c}(\alpha,\theta)$$

En reportant (4.2) dans cette équation, on obtient finalement :

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{c}(\alpha,\theta) = \hat{\mathbf{G}}(\alpha,\theta) \cdot \mathbf{C}(\theta) \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(\alpha) = \hat{\mathbf{T}}(\alpha,\theta) \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(\alpha) \tag{4.3}$$

où le gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{T}}(\alpha,\theta)$ regroupe les caractéristiques fréquentielles du système. Cette relation constitue bien la relation entrée-sortie en fréquence du système LVPT discret décrit à la figure 4.1. Elle peut être étendue au cas multicapteurs en utilisant de nouveau la notation en longs vecteurs. En effet, si M capteurs sont placés sur la carcasse statorique de la machine aux positions angulaires θ_1, …, θ_M, M signaux de sortie vérifiants (4.3) sont alors disponibles. En regroupant les représentations fréquentielles augmentées de chacun de ces signaux dans un même vecteur $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{c}(\alpha,\Theta)$, où $\Theta = \{\theta_1,\ldots,\theta_M\}$, on obtient :

$$\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{c}(\alpha,\Theta) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{c}(\alpha,\theta_1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{c}(\alpha,\theta_M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{G}}(\alpha,\theta_1) \cdot \mathbf{C}(\theta_1) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{G}}(\alpha,\theta_M) \cdot \mathbf{C}(\theta_M) \end{bmatrix} \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(\alpha) = \hat{\mathbf{T}}(\alpha,\Theta) \cdot \hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(\alpha) \tag{4.4}$$

Cette nouvelle équation constitue bien une généralisation de (4.3), et relie les représentations fréquentielles augmentées de tous les signaux de sortie du système LVPT considéré à celles de ses entrées.

4.2.3 Expression du signal d'erreur

Le signal discret $v(n,\theta)$ de la figure 4.1 représente les vibrations totales de la carcasse statorique, mesurées par un accéléromètre fixé à la position angulaire θ. Il constitue donc le signal que doit minimiser la commande optimale, et a été dénommé «signal d'erreur» lors du chapitre 2 où est exposé le principe général du contrôle actif. Son expression mathématique

est nécessaire pour établir celle de la commande optimale, et peut facilement être déduite dans le cas mono et multicapteurs, des relations (4.3), (4.4) et de la figure 4.1. En effet, en se plaçant dans le cas monocapteur, les propriétés de la transformée de Fourier et la relation (4.3) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(\alpha,\theta) &= \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{c}}(\alpha,\theta) + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(\alpha,\theta) \\ &= \hat{\mathbf{T}}(\alpha,\theta)\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(\alpha) + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(\alpha,\theta) \end{aligned} \tag{4.5}$$

où le gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{T}}(\alpha,\theta)$ est défini en (4.3).
La relation (4.5) constitue l'expression fréquentielle du signal d'erreur $\hat{\mathbf{v}}(\alpha,\theta)$ dans un cas général. Nous allons voir que dans le cadre de cette application, elle peut n'être considérée que pour une seule et unique valeur de la fréquence réduite α.

On rappelle que d'après la section 1.3.4, l'objectif à atteindre par le système de contrôle actif est de minimiser, dans le signal d'erreur $v(n,\theta)$, les composantes synchrones au phénomène de rotation. Or les fréquences de ces composantes sont les harmoniques de la fréquence réduite de rotation, qui est par définition et du fait de l'échantillonnage synchrone égale à $\alpha_r = \frac{\nu_r}{\nu_e} = \frac{1}{P}$. Les valeurs des composantes à minimiser sont donc toutes contenues dans le vecteur $\hat{\mathbf{v}}(\alpha,\theta)$ pris à la fréquence nulle $\alpha = 0$. En effet, en se basant sur l'équation (3.39) et sur la périodicité de la TFr, on peut écrire la relation :

$$\hat{\mathbf{v}}(0,\theta) = \begin{bmatrix} \hat{v}\,(0,\theta) \\ \hat{v}\left(\frac{P-1}{P},\theta\right) \\ \hat{v}\left(\frac{P-2}{P},\theta\right) \\ \vdots \\ \hat{v}\left(\frac{1}{P},\theta\right) \end{bmatrix}$$

En utilisant (4.5), ce vecteur prend finalement la forme matricielle suivante :

$$\hat{\mathbf{v}}(0,\theta) = \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta) \tag{4.6}$$

Cette relation est importante dans le sens où elle montre que les seules composantes fréquentielles-des signaux de commande capables d'agir sur $\hat{\mathbf{v}}(0,\theta)$, et donc de le minimiser, sont contenues dans le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$. Les signaux de commande optimaux ne contiennent donc des composantes fréquentielles qu'aux fréquences multiples de $\frac{1}{P}$, ou d'une manière équivalente, sont nécessairement P-périodiques. Le problème revient maintenant à déterminer le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)$, optimal dans le sens où il minimise un critère quadratique à déterminer, fonction de l'erreur $\hat{\mathbf{v}}(0,\theta)$.
Ce résultat est directement généralisable au cas multicapteurs, pour lequel la relation (4.5) devient :

$$\hat{\mathbf{v}}(\alpha,\Theta) = \hat{\mathbf{T}}(\alpha,\Theta)\cdot\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(\alpha) + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(\alpha,\Theta)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}(\alpha,\Theta)^T &= \left[\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{v}}(\alpha,\theta_1)^T & \cdots & \hat{\mathbf{v}}(\alpha,\theta_M)^T \end{array}\right] \\ \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(\alpha,\Theta)^T &= \left[\begin{array}{ccc} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(\alpha,\theta_1)^T & \cdots & \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(\alpha,\theta_M)^T \end{array}\right] \end{aligned}$$

Dans ce cas, le vecteur regroupant les composantes fréquentielles à minimiser s'écrit :

$$\hat{\mathbf{v}}(0,\Theta) = \hat{\mathbf{T}}(0,\Theta) \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\Theta) \tag{4.7}$$

Cette dernière équation est tout à fait générale, et se réduit au cas monocapteur (4.6) en fixant $M = 1$.

La section suivante utilise ce modèle mathématique de l'erreur afin de déterminer l'expression de la commande optimale qui, avec une puissance bornée, permet de minimiser le vecteur (4.7).

4.3 Résolution théorique : commande optimale

Le but de cette section est non seulement de déterminer l'expression optimale du signal de commande minimisant un critère donné, mais aussi d'élaborer et d'étudier un algorithme récursif permettant à ce signal de converger vers cette solution. Cette stratégie utilise le même principe que celle présentée au chapitre 2, consistant à choisir une fonction de coût que doit minimiser la grandeur optimale recherchée. Elle est toutefois légèrement différente dans le sens où on ne détermine pas le gain complexe d'un contrôleur, mais directement les composantes fréquentielles du signal de commande, d'où le nom de «commande optimale». L'intérêt de minimiser ces paramètres plutôt que le gain complexe d'un contrôleur réside dans le fait que leur valeur optimale est constante. Les paragraphes 4.3.1, 4.3.2 et 4.3.3 sont consacrés à l'étude détaillée du cas monocapteur, alors que le paragraphe 4.3.4 expose les mêmes résultats généralisés au cas multicapteurs.

4.3.1 Fonction de coût

Comme il a été vu au paragraphe 2.2.3, l'expression de la fonction de coût, généralement choisie quadratique, dépend directement des objectifs que l'on veut atteindre à l'aide du système de contrôle actif. D'après le chapitre 1, le but est ici de minimiser les vibrations statoriques synchrones au phénomène de rotation, pour une position angulaire donnée et avec des courants de commande de puissance contrôlable. Grâce aux résultats de la section précédente, on sait que cela revient à minimiser en fonction de $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$ le vecteur $\hat{\mathbf{v}}(0,\theta)$ défini par (4.6), tout en ayant la possibilité de contrôler l'importance des composantes de $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$. La fonction de coût quadratique la plus simple que l'on puisse utiliser est donnée par :

$$\mathfrak{C} = \hat{\mathbf{v}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}(0,\theta) \tag{4.8}$$

Cette relation est l'extension vectorielle de (2.6), où le coût $\mathfrak{C}$ devient proportionnel à la puissance contenue dans le signal d'erreur aux fréquences multiples de $\frac{1}{P}$. En effet, en développant cette expression en fonction des composantes du vecteur $\hat{\mathbf{v}}(0,\theta)$, on obtient :

$$\mathfrak{C} = \sum_{l=0}^{P-1} \left| \hat{v}\left(\frac{l}{P},\theta\right) \right|^2$$

Minimiser ce coût remplit donc le premier objectif correspondant à minimiser les composantes vibratoires synchrones au phénomène de rotation. Par contre, cela ne donne aucun moyen d'action sur les composantes de la commande $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$. En s'inspirant des résultats du paragraphe 2.2.3, on peut définir une fonction de coût quadratique qui permet de contourner ce problème :

$$\mathfrak{C} = \hat{\mathbf{v}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}(0,\theta) + \epsilon\, \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)^H \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) \tag{4.9}$$

On retrouve une expression du même type que (2.7) qui peut être développée en fonction du vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$ à optimiser :

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} \;=\; & \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta) \\ & + \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)^H \cdot \left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\, \mathbf{I}_{3P}\right] \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) \\ & + \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta) + \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Comme au paragraphe 2.2.3, on peut interpréter physiquement cette expression, où les grandeurs ne sont considérées que pour un ensemble de fréquences constitué des seuls harmoniques de $\frac{1}{P}$. Le premier terme correspond au coût en l'absence de signal de commande, sa valeur étant proportionnelle à la puissance contenue dans le signal de perturbation à atténuer. En utilisant l'équation (4.3), le terme situé sur la seconde ligne peut être vu comme la puissance des contre-vibrations $v_c(n,\theta)$ additionnée d'une fraction de la puissance de la commande. Enfin, les termes de la troisième ligne correspondent à la puissance d'interaction entre les contre-vibrations engendrées par la commande et les perturbations à atténuer. Ce sont les seuls à pouvoir prendre des valeurs négatives et seront donc utilisés pour minimiser $\mathfrak{C}$.
Cette fonction de coût est une version vectorielle de la forme quadratique complexe (2.9). Elle est appelée forme quadratique hermitienne [Nel92, pages 416-420], et peut être exprimée comme une fonction réelle des $2P$ variables réelles définies par les parties réelle et imaginaire du vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$, respectivement notées $\Re\left[\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)\right]$ et $\Im\left[\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)\right]$. Elle prend alors une forme de paraboloïde, dont les propriétés de courbure sont fixées par les valeurs propres de la matrice hermitienne $\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\, \mathbf{I}_{3P}\right]$. En effet, on peut montrer que la fonction $\mathfrak{C}$ est convexe et comporte donc un unique minimum si et seulement cette matrice est définie positive, ce qui peut être imposé grâce à la constante réelle positive ϵ.

La minimisation d'une fonction de coût de la forme (4.10) dans le cadre d'un système de contrôle actif a déjà été étudiée en détail dans [Nel92]. En effet, on obtient un coût identique si le transfert secondaire sur lequel est appliqué le contrôle actif est un système LIT, multi-entrées et multi-sorties. Les résultats exposés dans les sections suivantes étant directement inspirés de ceux donnés dans ce papier, certaines démonstrations seront omises.

4.3.2 Commande optimale

Les coordonnées du point où $\mathfrak{C}$ prend sa valeur minimale définissent le vecteur complexe $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)$ regroupant les valeurs optimales des composantes fréquentielles du signal de

commande aux fréquences harmoniques de $\frac{1}{P}$. Afin de déterminer son expression, on définit comme au paragraphe 2.2.3 le vecteur gradient de $\mathfrak{C}$ au point $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$ par :

$$\nabla\mathfrak{C} = \nabla\mathfrak{C}\left[\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)\right] = \frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\Re\left[\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)\right]} + j\frac{\partial\mathfrak{C}}{\partial\Im\left[\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)\right]}$$

Calculé pour la fonction de coût (4.10), il devient :

$$\nabla\mathfrak{C}\left[\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)\right] = 2\left\{\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right] \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) + \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)\right\} \tag{4.11}$$

Le vecteur correspondant à la commande optimale annule $\nabla\mathfrak{C}$ et vérifie donc la relation suivante :

$$\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right] \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0) = -\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)$$

Cette équation, similaire aux équations normales obtenues habituellement dans le cas linéaire et invariant dans le temps, a une solution si la matrice $\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]$ est inversible. Ceci est vérifié dès que $\epsilon > 0$ puisque $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$ est hermitienne, et a donc des valeurs singulières positives ou nulles. Le vecteur optimal $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)$ prend alors la forme :

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0) = -\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]^{-1} \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta) \tag{4.12}$$

Cette solution est l'équivalent de la solution de Wiener obtenue en filtrage optimal LIT classique. Elle est fonction des caractéristiques fréquentielles du système contenues dans $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$, et de celles du signal de perturbation contenues dans $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)$.

L'influence du paramètre ϵ sur la valeur de cet optimal peut être étudiée en exprimant une grandeur proportionnelle à la puissance du signal de commande :

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)^H \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0) = \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) \cdot \left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]^{-2} \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta) \tag{4.13}$$

Cette grandeur est inversement proportionnelle au carré de ϵ, et diminue lorsque ce paramètre augmente. Pour que la puissance de la commande optimale reste inférieure à un seuil fixé par l'utilisateur, ϵ doit donc être choisi suffisamment élevé.

Ce même paramètre joue également sur la valeur minimale de la fonction de coût, qui peut être déterminée en reportant l'expression du vecteur optimal (4.12) dans (4.10) :

$$\mathfrak{C}_{min} = \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)^H \cdot \left[\mathbf{I}_P - \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) \cdot \left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]^{-1} \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H\right] \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta) \tag{4.14}$$

On se place dans le cas où la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$ inversible. Si ϵ est choisi nul, la commande optimale annule alors complètement la fonction de coût, au prix d'une puissance de commande éventuellement très élevée. Si le système expérimental ne peut supporter une telle puissance, le paramètre ϵ est imposé strictement positif. La valeur minimale du coût n'est alors plus nulle, et augmente pour atteindre $\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\theta)$ lorsque ϵ est infini.

Le paramètre ϵ joue donc un rôle capital dans le comportement du système de contrôle actif. Il assure tout d'abord l'existence d'une solution optimale même dans le cas où la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$ n'est pas inversible, ce qui est mis en évidence par la relation (4.12). Il permet aussi de limiter la puissance du signal de commande en dessous d'un seuil fixé (équation (4.13)), tout en diminuant les performances globales de compensation (équation (4.14)). Son choix est donc difficile, et reste dépendant de l'application étudiée. Ce paramètre est néanmoins très important pour la réalisation pratique de ce système de contrôle actif, puisqu'il permet de limiter la puissance des courants de commande, et de valider ainsi le modèle du transfert élaboré à la section 1.4.

Après avoir étudié théoriquement les performances que peut atteindre le système de contrôle actif avec un signal de commande optimal, nous allons nous intéresser à la manière pratique d'obtenir ces conditions de fonctionnement.

4.3.3 Algorithme récursif

Le but de ce paragraphe est d'élaborer un algorithme récursif permettant de réactualiser le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)$ pour le faire converger vers sa valeur optimale (4.12), puis d'étudier ses propriétés de convergence. Une fois le vecteur optimal atteint, le coût est réduit à son minimum (4.14), et le système de contrôle a les performances décrites au paragraphe précédent. Cet algorithme prend tout son intérêt lorsque les vibrations perturbatrices, contenues dans $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,\theta)$, évoluent dans le temps en fonction des conditions de fonctionnement de la machine. L'adaptation de la commande est alors nécessaire car sa valeur optimale $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)$ dépend explicitement de $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,\theta)$, et évolue donc elle-même dans le temps.

La fonction de coût à minimiser étant convexe, l'algorithme choisi est un algorithme du gradient, qui est l'extension au cas vectoriel de celui présenté au paragraphe 2.2.4. L'avantage de ce type d'algorithme est qu'il conduit souvent à des réactualisations peu complexes, pouvant être facilement implantées sur processeurs numériques, ce qui est le but de cette étude. Appliqué au vecteur $\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)$, il prend la forme :

$$\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)_{l+1} = \hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)_l - \mu \nabla \mathfrak{C}\left[\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)_l\right] \tag{4.15}$$

Les grandeurs indicées l correspondent aux valeurs de ces grandeurs pour la $l^{\text{ième}}$ itération. Cette relation permet donc de prédire la valeur du vecteur $\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)$ à la prochaine itération en fonction de sa valeur courante $\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)_l$, et a le même comportement que la relation récursive du paragraphe 2.2.4. Une expression plus pratique est obtenue en notant que le gradient de la fonction de coût (4.11) peut s'écrire, à l'aide de (4.6) :

$$\nabla \mathfrak{C}\left[\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)\right] = 2\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}(0,\theta) + 2\epsilon\, \hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0) \tag{4.16}$$

En reportant (4.16) dans (4.15), on obtient :

$$\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)_{l+1} = (1 - 2\mu\epsilon)\hat{\mathbf{i}}_\mathbf{c}(0)_l - 2\mu\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}(0,\theta)_l \tag{4.17}$$

Les propriétés de convergence de cet algorithme peuvent être étudiées de la même manière qu'au paragraphe 2.2.4. On définit un vecteur $\boldsymbol{\mathcal{E}}_l$ représentant, à l'itération l, l'erreur entre le vecteur commande courant et sa valeur optimale :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_l = \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_l - \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0) \tag{4.18}$$

On obtient alors une relation de récurrence sur cette erreur en reportant (4.18), (4.6) et (4.12) dans (4.17) :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{l+1} &= \left[\mathbf{I}_{3P} - 2\mu\left(\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right)\right] \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_l \\ &= \left[\mathbf{I}_{3P} - 2\mu\left(\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right)\right]^l \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \end{aligned}$$

La condition à vérifier par le pas d'adaptation μ pour que ce vecteur converge vers zéro, ainsi que l'influence que peut avoir le paramètre ϵ sur cette convergence ont été étudiées en détail dans [Nel92] à l'aide de la décomposition en valeurs singulières de la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$. Il apparaît tout d'abord que le pas d'adaptation μ doit avoir une valeur comprise dans l'intervalle :

$$0 < \mu < \frac{1}{\hat{\sigma}_1(0,\theta)^2 + \epsilon} \tag{4.19}$$

où $\hat{\sigma}_1(0,\theta)$ est la valeur singulière la plus élevée de $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$.
Cette condition assure la convergence du vecteur de commande $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_l$ vers sa valeur optimale $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_{opt}$, quelle que soit sa valeur initiale $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_0$.
De plus, il est montré que la convergence globale du vecteur $\boldsymbol{\mathcal{E}}_l$ est due à celle de différents modes indépendants, tous associés à une valeur propre de la matrice $\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]$. Plus cette valeur propre est faible, plus le mode qui lui est associé convergera lentement. Or, chacune de ces valeurs propres est formée par la somme d'une valeur propre de la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\theta)$ et du paramètre ϵ. Ce dernier, s'il est correctement choisi, permet donc de donner une borne inférieure positive aux valeurs propres globales les plus faibles, sans avoir d'effet notable sur les plus élevées. Le temps de convergence de l'algorithme est ainsi amélioré par ϵ, puisqu'il accélère les modes les plus lents sans trop influencer les modes rapides.

Les divers résultats qui viennent d'être obtenus dans le cas monocapteur vont être généralisés au cas multicapteurs dans le paragraphe suivant.

4.3.4 Cas multicapteurs

Le cas multicapteurs correspond au cas où M accéléromètres sont disposés sur la carcasse statorique à M positions angulaires $\theta_1, \ldots, \theta_M$ différentes. L'expression du signal d'erreur correspondant, déterminée au paragraphe 4.2.3, est donnée en (4.7). Les résultats précédents sont facilement généralisables en utilisant $\hat{\mathbf{v}}(0,\Theta)$ en lieu et place de $\hat{\mathbf{v}}(0,\theta)$ dans l'expression de la fonction de coût (4.9). On obtient donc l'expression de la nouvelle fonction de coût multicapteurs à minimiser :

$$\mathfrak{C} = \hat{\mathbf{v}}(0,\Theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}(0,\Theta) + \epsilon\,\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)^H \cdot \hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0) \tag{4.20}$$

Le second terme de cette somme reste équivalent à celui du cas monocapteur (4.9). Par contre, le premier terme est maintenant formé de la somme des puissances contenues dans les M signaux d'erreur, aux fréquences multiples de $\frac{1}{P}$.

Par la même méthode qu'au paragraphe précédent, on peut montrer que le vecteur optimal minimisant ce coût prend la forme :

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0) = -\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\Theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]^{-1} \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{n}}(0,\Theta) \tag{4.21}$$

Les signaux de commande dont les caractéristiques fréquentielles vérifient la relation précédente minimisent donc en même temps la puissance des M signaux d'erreur issus des M capteurs.

La relation de récurrence permettant de faire converger le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)$ vers sa valeur optimale devient alors :

$$\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_{l+1} = (1-2\mu\epsilon)\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_l - 2\mu\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)^H \cdot \hat{\mathbf{v}}(0,\Theta)_l \tag{4.22}$$

Les expressions trouvées dans le cas multicapteurs sont donc tout à fait équivalentes à (4.9), (4.12) et (4.17), obtenues dans le cas monocapteur. Il faut toutefois utiliser les matrices et les vecteur «longs», définis à la fin du paragraphe (4.2.3). De plus, la valeur du pas d'adaptation vérifie le même type de contrainte que celle définie par (4.19), où $\hat{\sigma}_1(0,\theta)$ est remplacée par $\hat{\sigma}_1(0,\Theta)$, la plus grande valeur singulière de la matrice $\left[\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)^H \cdot \hat{\mathbf{T}}(0,\Theta) + \epsilon\,\mathbf{I}_{3P}\right]$. Enfin, le paramètre ϵ garde les mêmes propriétés, et permet de limiter la puissance des signaux de commande et d'accélérer la convergence de l'algorithme (4.22), tout en limitant les performances optimales du système de contrôle actif.

L'équation générale (4.22) donne donc l'algorithme récursif permettant de faire converger le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_l$, contenant les composantes fréquentielles de la commande, vers sa valeur optimale (4.21). La section suivante est dédiée à l'étude de l'implantation pratique d'un tel algorithme, et des performances qu'il atteint lorsqu'il est appliqué à des signaux synthétiques ou réels de vibrations.

4.4 Implantation des solutions et étude des performances obtenues

4.4.1 Implantation pratique de l'algorithme de commande optimale

La méthode pratique d'implantation de l'algorithme (4.22) peut être déduite des divers résultats précédemment obtenus.

On rappelle tout d'abord que cette méthode de compensation active est destinée à être implantée sur la machine synchrone de test présentée au paragraphe 1.2.3. Les signaux vibratoires à atténuer ainsi que leur gamme de fréquence sont décrits au paragraphe 1.3.4. Puisque leur spectre s'étend jusqu'à environ 3 kHz, la fréquence d'échantillonnage ν_e doit se situer au-delà de 6 kHz afin de vérifier la condition d'échantillonnage de Shannon et éviter ainsi tout recouvrement spectral.

De plus, le paragraphe 3.3.2 montre qu'il est nécessaire de synchroniser l'échantillonnage des signaux sur la fréquence de variation du système LVPT à temps continu auquel on applique le contrôle actif. Ceci permet d'obtenir un transfert dont le modèle est LVPT discret. Cette synchronisation peut être réalisée à l'aide du signal de top-tour défini au chapitre 2, et dont la fréquence est égale à celle du système LVPT en question, c'est à dire la fréquence de rotation de la machine ν_r. Il est donc nécessaire d'utiliser un multiplieur de fréquence par P afin d'obtenir un signal de fréquence $\nu_e = P\nu_r$ commandant l'échantillonnage. La figure 4.2 reprend la figure 1.3 représentant l'implantation pratique de la méthode, tout en la complétant par ce système. Le modèle du système global devient alors celui du système discret LVPT de

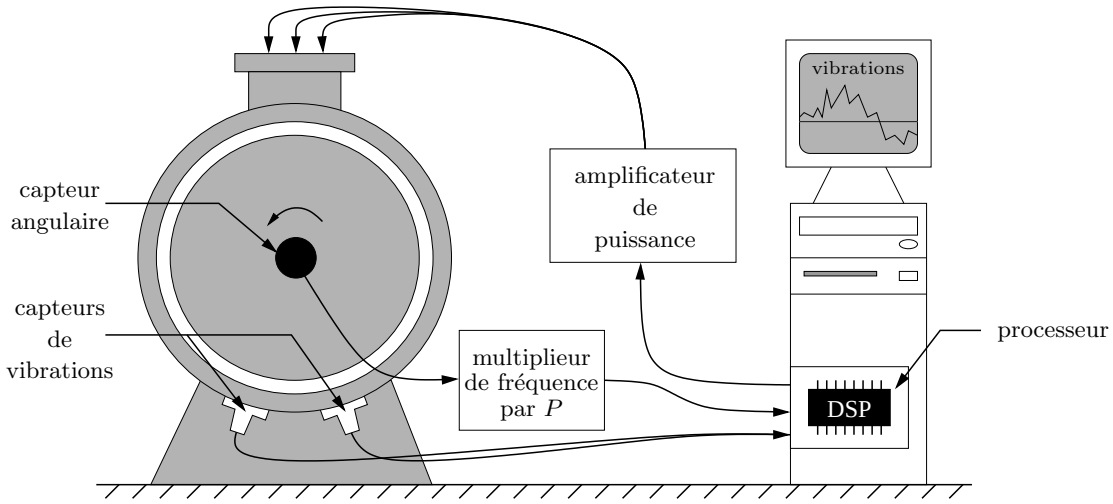


Fig. 4.2: Implantation pratique finale de la méthode

fréquence réduite $\frac{1}{P}$ donné par la figure 4.1. À chaque instant d'échantillonnage, on dispose finalement dans la mémoire du processeur numérique, des échantillons courants et précédents des M signaux d'erreur $v(n,\theta_1),\ldots,v(n,\theta_M)$, échantillonnés d'une manière synchrone à la rotation de la machine.

La programmation de l'algorithme général (4.22) peut maintenant être abordée. Cette récurrence s'effectue dans le domaine fréquentiel, et nécessite le calcul de transformées de Fourier discrètes (TFD), portant sur des blocs d'échantillons. La longueur optimale de ces blocs peut être déterminée en notant qu'il est nécessaire, afin de réactualiser le vecteur commande $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_l$, de connaître le vecteur $\hat{\mathbf{v}}(0,\Theta)_l$. Celui-ci contient les P composantes fréquentielles de chaque signal d'erreur, aux fréquences réduites multiples de $\frac{1}{P}$. Ces coefficients peuvent être calculés avec une grande précision par une TFD portant sur une longueur de bloc proportionnelle à P. Les blocs de traitement sont donc choisis de longueur égale à la période du système LVPT, c'est à dire avec P échantillons.

L'algorithme (4.22) consiste donc à acquérir P échantillons de chaque signal d'erreur pour former M blocs de traitement de longueur P et d'indice l. Une fois ces blocs complets, on leur applique une TFD, dont le résultat permet de construire le vecteur $\hat{\mathbf{v}}(0,\Theta)_l$. On en déduit ensuite le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c}}(0)_{l+1}$ par l'équation de récurrence (4.22). Les P échantillons des trois

signaux de commande correspondants peuvent alors être déterminés par TFD inverse sur ce vecteur. Ils sont envoyés à l'entrée du système LVPT en même temps que l'acquisition des blocs suivants, d'indice $l+1$. Le chronogramme de la figure 4.3 résume ce traitement, où chaque instant d'échantillonnage est symbolisé par un cercle de couleur différente suivant le bloc auquel il appartient.

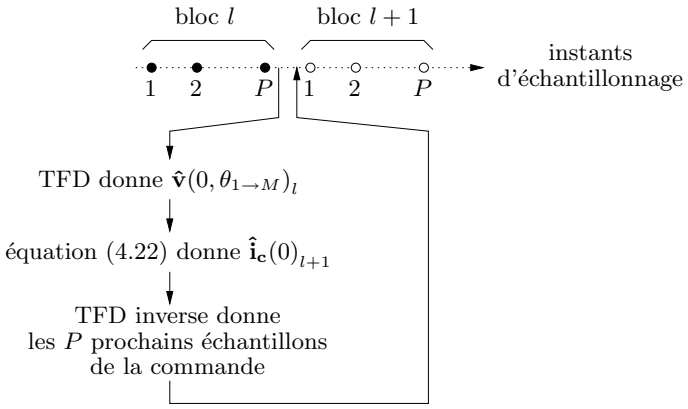


Fig. 4.3: Implantation logicielle de l'algorithme

La relation (4.22) nécessite également la connaissance de la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)$ dont la structure est donnée à la fois par l'équation (4.4) et la figure 3.22. Son expression est fonction des positions angulaires des capteurs θ_i où $i \in \{1,\ldots,M\}$, des fonctions de transfert $\hat{g}(\alpha,\theta_i)$ représentant les réponses mécaniques de la carcasse statorique à ces positions, et des signaux de modulation associés à chaque capteur $m(n,\theta_i)$.
Les positions angulaires sont des grandeurs supposées connues. Les fonctions de transfert $\hat{g}(\alpha,\theta_i)$ peuvent être identifiées lors d'une étape préalable au contrôle. En effet, si on se place dans le cas où la machine est à l'arrêt, sa fréquence de rotation est nulle et les signaux de modulation $m(n,\theta_i)$ se réduisent à une constante. Le système global n'est alors plus LVPT mais LIT, et des techniques classiques d'identification [Wid85, chapitre 9] peuvent être employées afin d'identifier les M gains complexes présents entre la commande et les différents capteurs. Ces fonctions de transfert fréquentielles seront donc soit supposées connues dans les simulations, soit identifiées au préalable pour un système réel.
Enfin, les signaux sinusoïdaux $m(n,\theta_i)$ modulant la commande en amplitude interviennent également dans l'expression de la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)$. Il est montré à la section 1.4, qu'ils sont l'image du champ magnétique naturel généré dans la machine en rotation, aux différentes positions angulaires $\theta_1,\ldots,\theta_M$. Leurs amplitudes sont donc toutes identiques et notées F dans la figure 4.1, ce paramètre se trouvant finalement en facteur de $\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)$. La connaissance de sa valeur n'est donc pas nécessaire pour mettre en œuvre l'algorithme (4.22). En effet, étant multipliée par le pas d'adaptation, elle peut être inclue dans la valeur finale de μ fixée par l'utilisateur, et déterminée en pratique par essais successifs. Quant à la phase de ces signaux, elle dépend à la fois de la position angulaire considérée et d'un terme additif noté φ sur la figure 4.1, fonction de la machine et de son point de fonctionnement. Ce paramètre est indis-

pensable pour déterminer l'expression exacte de $\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)$ mais il est difficile à connaître pour tout point de fonctionnement. En pratique, il sera donc nécessaire de l'estimer en étudiant le champ magnétique naturel de la machine pour le point de fonctionnement considéré, et sera supposé connu pour les différentes simulations qui suivent.

4.4.2 Cas monocapteur

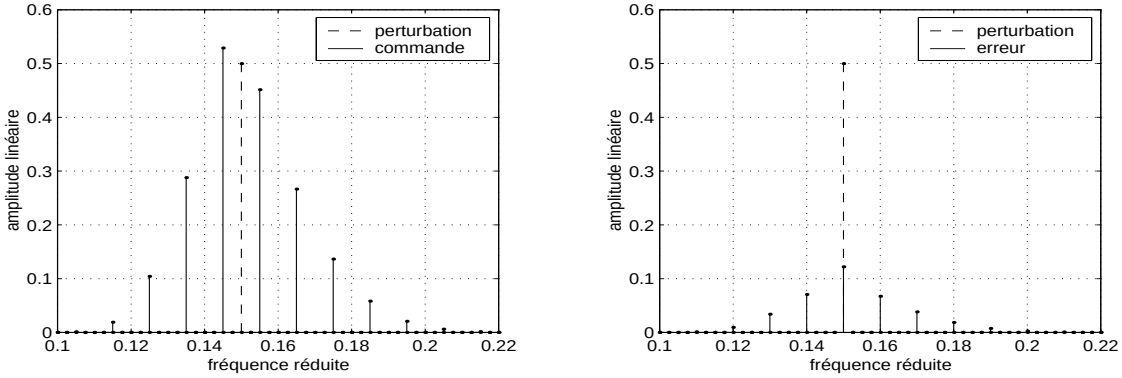
Nous allons tout d'abord nous placer dans le cas où le seul courant de commande $i_{c_1}(t)$ parcourant la bobine statorique numérotée 1 à la figure 1.13, est utilisé pour atténuer les vibrations mesurées par un seul accéléromètre fixé sur le stator. Sa position angulaire est choisie telle qu'il soit situé dans l'axe de cette bobine, c'est à dire $\theta = 0$. On a alors un système LVPT à une entrée et une sortie. Afin de pouvoir utiliser les résultats numériques obtenus à la section 3.3, nous nous plaçons dans les mêmes conditions de fonctionnement :

- la machine synchrone est supposée avoir $p = 2$ paires de pôles, et tourner à une fréquence de $\nu_r = 25$ Hz,
- le signal de modulation $m(t,\theta) = m(t,0)$ est donné par la relation (3.59),
- le gain complexe $\hat{g}(\nu,\theta) = \hat{g}(\nu,0)$ modélisant la réponse statorique en $\theta = 0$ est supposé avoir été identifié au préalable, et ses caractéristiques sont données par la figure 3.17,
- La fréquence d'échantillonnage est de 10 kHz.

Le modèle du transfert LVPT discret obtenu est alors exactement celui de la section 3.3. La matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta) = \hat{\mathbf{T}}(0,0)$ correspondante à ce système se réduit donc au gain complexe matriciel déterminé au paragraphe 3.3.5, dont le module est représenté à la figure 3.23.
De plus, on se trouve maintenant dans le domaine discret, et toutes les fréquences sont données sous leur forme réduite, le retour à la fréquence réelle exprimée en Hertz se faisant par une simple multiplication par $\nu_e = 10000$. La perturbation à atténuer est choisie la plus simple possible, et comporte une seule sinusoïde d'amplitude unitaire et de phase nulle. Sa fréquence réduite est fixée à 0,15, qui est l'harmonique d'ordre 60 de celle du système LVPT ($0,15 = 60 \times \frac{1}{400}$). Elle correspondrait à la présence d'une raie de fréquence 1,5 kHz dans le spectre vibratoire de la machine. Ces caractéristiques permettent de déterminer la valeur du vecteur $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,\Theta) = \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)$, dont une seule composante est alors non nulle et égale à $\frac{1}{2}$.

Performances optimales

Nous allons tout d'abord étudier les performances optimales que peut atteindre ce système de contrôle actif, c'est à dire celles obtenues lorsque l'algorithme récursif élaboré précédemment a convergé. Pour cela, on utilise directement les équations du paragraphe 4.3.2. La relation (4.12) permet de calculer le vecteur optimal $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)$ qui, une fois placé dans (4.6), donne la valeur de $\hat{\mathbf{v}}(0,0)$ obtenue pour une telle commande en $\theta = 0$. On peut tirer de ces deux vecteurs les valeurs complexes des composantes fréquentielles optimales des signaux de commande et d'erreur, aux fréquences réduites multiples de $\frac{1}{P} = \frac{1}{400}$. Les modules de ces valeurs calculés pour $\epsilon = 0,05$ sont représentés sur la figure 4.4 en fonction de la fréquence réduite. Le module



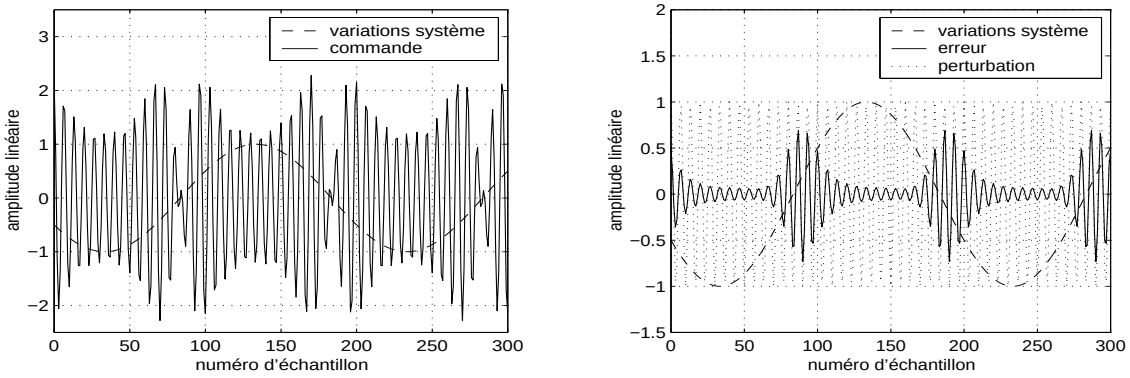
(a) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)|$=traits pleins

(b) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{v}}(0,0)|$=traits pleins

Fig. 4.4: Modules des composantes fréquentielles optimales de la commande et de l'erreur calculés pour $\epsilon = 0,05$

des composantes fréquentielles du signal de perturbation est représenté en tirets sur les figures 4.4(a) et 4.4(b), où l'on peut vérifier que sa seule valeur non nulle se situe à la fréquence réduite 0,15. Celui du signal de commande optimale est donné en traits pleins sur la figure 4.4(a). Il s'agit d'un ensemble de sinusoïdes réparties autour de 0,15 et dont les fréquences sont espacées de $\frac{4}{400}$. Elles vont toutes être décalées de $\pm\frac{2}{400}$ par la modulation d'amplitude sinusoïdale que comporte le système LVPT. Certaines composantes pourront alors interagir destructivement avec celle de la perturbation, mais il y aura également création de raies parasites espacées de $\frac{4}{400}$ autour de la fréquence visée dans le signal d'erreur. C'est le résultat que montre la figure 4.4(b), où l'on a représenté le module des composantes fréquentielles du signal d'erreur. On peut remarquer que la raie spectrale perturbatrice a bien été atténuée, au prix de l'apparition de plusieurs raies parasites.

Les allures temporelles de ces différents signaux peuvent être obtenues en appliquant une TFD inverse sur les vecteurs précédents. Les résultats sont exposés sur la figure 4.5 où une sinusoïde de même fréquence et de même phase que le signal sinusoïdal de modulation $m(n,0)$ est représentée. Cette courbe est donc l'image des variations du système LVPT global et permet une interprétation plus aisée des résultats. La figure 4.5(a) montre que la commande essaie de «contrer» l'effet de la modulation d'amplitude sinusoïdale en prenant une amplitude inversement proportionnelle à $m(n,0)$. Toutefois, lorsque la valeur de la modulation est très proche de zéro, la commande ne peut devenir infinie, la valeur positive du paramètre ϵ l'obligeant à garder une puissance bornée. Elle a alors tendance à s'annuler, et ne cherche plus à atténuer la perturbation. Ce phénomène se retrouve dans le signal d'erreur tracé sur la figure 4.5(b). En effet, celui-ci est faible lorsque la modulation d'amplitude prend des valeurs importantes, mais il devient beaucoup plus grand autour des zones où $m(n,0)$ est proche de zéro. Ce sont ces «bouffées» espacées de 100 échantillons dans le signal d'erreur, qui correspondent aux composantes fréquentielles parasites espacées d'une fréquence réduite de $\frac{1}{100}$ à la



(a) $i_{c_1\,opt}(n)$

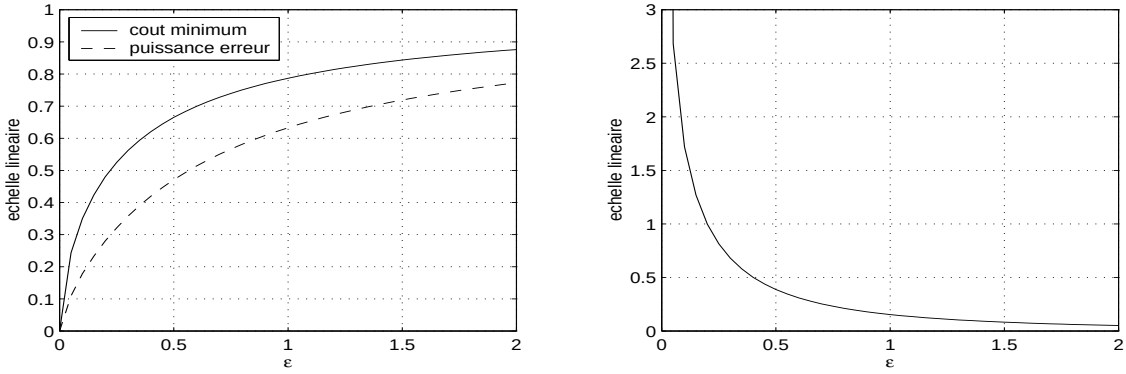
(b) $v(n,0)$=traits pleins, $v_n(n,0)$=pointillés

Fig. 4.5: Allures temporelle des signaux optimaux de commande et d'erreur calculées pour $\epsilon = 0,05$

figure 4.4(b). Elles seront présentes dans tous les résultats ultérieurs, et nous verrons qu'elles ne peuvent être évitées qu'à l'aide d'une commande de puissance très importante, inadaptée à la présente application. Ceci est bien entendu lié au fait que les valeurs singulières du gain complexe matriciel $\hat{\mathbf{T}}(0,0)$ de ce système LVPT sont très faibles. Celles du système inverse qui intervient dans l'expression de la commande optimale annulant complètement l'erreur sont donc très importantes, ce qui engendre une commande optimale de puissance trop élevée pour être utilisée.

On peut finalement quantifier les performances de cette méthode en calculant la valeur minimale de la fonction de coût $\mathfrak{C}_{min}$, ainsi que la puissance du signal d'erreur optimal P_v. Lorsqu'il n'y a aucun contrôle, ces grandeurs sont toutes deux égales à la puissance du signal de perturbation notée P_{v_n}, et peuvent donc être exprimées en pourcentage relativement à cette valeur. Pour $\epsilon = 0,05$, on obtient $\mathfrak{C}_{min} \simeq 25$ % de P_{v_n} et $P_v \simeq 11$ % de P_{v_n}. La puissance de la commande optimale $P_{i_{c_1\,opt}}$ nécessaire peut elle-même être calculée relativement à la puissance de la perturbation, ce qui donne $P_{i_{c_1\,opt}} \simeq 270$ % de P_{v_n}. Ces résultats montrent que pour ce cas particulier, il est nécessaire d'avoir une commande dont la puissance est 2,7 fois celle de la perturbation afin d'atténuer 90 % de cette dernière.

Afin de vérifier l'influence du paramètre ϵ sur les performances obtenues, on peut calculer, pour les mêmes conditions que précédemment, les grandeurs $\mathfrak{C}_{min}$, P_v et $P_{i_{c_1\,opt}}$ en fonction de ϵ. Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 4.6, où 4.6(a) montre le coût minimum ainsi que la puissance du signal d'erreur et 4.6(b) la puissance de la commande optimale pour ϵ variant de 0 à 2. Ces courbes montrent que si la valeur de ce paramètre est proche de zéro, le coût minimal et la puissance de l'erreur seront eux-mêmes très faibles, au détriment d'une puissance de commande élevée. Inversement, si ϵ devient trop important, la puissance de la commande restera faible, mais la perturbation ne sera alors quasiment pas atténuée, ce qui correspond bien aux conclusions du paragraphe 4.3.2.



(a) $\mathfrak{C}_{min}$ et puissance du signal d'erreur P_v (b) Puissance de la commande optimale $P_{i_{c1\,opt}}$

Fig. 4.6: Performances optimales obtenues en fonction du paramètre ϵ

Le signal de commande optimal permettant d'annuler complètement le signal d'erreur considéré peut être calculé en posant $\epsilon = 0$. Son allure temporelle est représentée sur la figure 4.7, et peut être comparée avec celle de la figure 4.5(a) obtenue pour ϵ égal à 0,05. Les principales

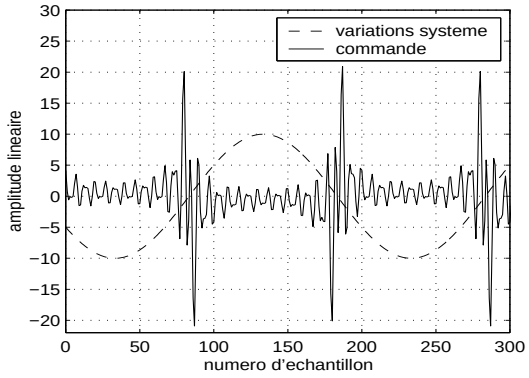
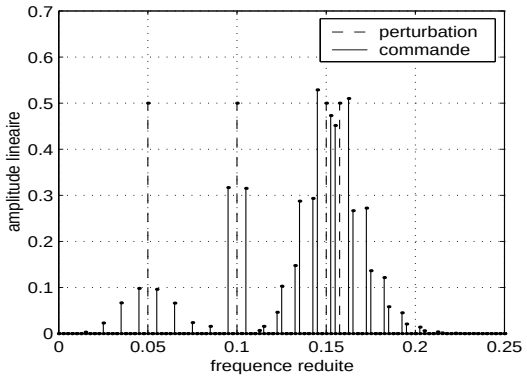


Fig. 4.7: Signal de commande optimal pour $\epsilon = 0$

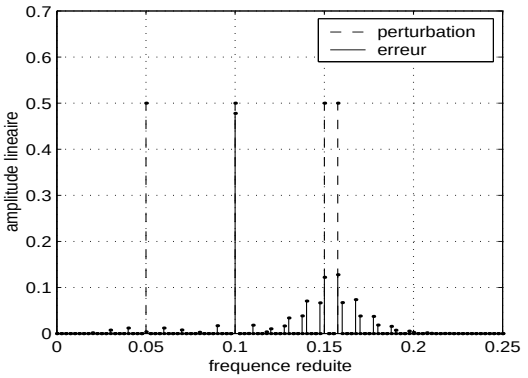
différences se situent autour des zones où la modulation d'amplitude est proche de zéro. En effet, pour ϵ nul, la commande optimale peut devenir aussi importante que nécessaire et tend alors à prendre de très grandes valeurs. C'est donc principalement en ces endroits que le paramètre ϵ limite l'amplitude de la commande, et permet d'obtenir un signal de puissance bornée.

On rappelle que le module $|\hat{g}(\nu, 0)|$ du gain complexe du transfert LIT présent dans le système LVPT global est donné par la figure 3.17(a). Il comporte une résonance importante à 500 Hz, une antirésonance à 1 kHz et une autre résonance plus faible à 1,5 kHz. Pour comprendre l'influence de sa forme sur les performances optimales de compensation, on définit un signal de perturbation formé de quatre sinusoïdes de fréquences différentes. La première est située juste au niveau de la plus grande résonance, avec une fréquence réduite de 0,05.

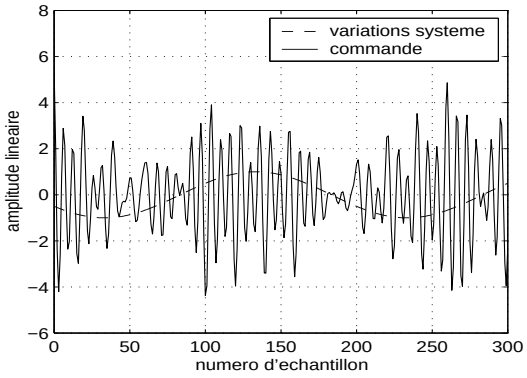
La seconde sinusoïde de fréquence réduite 0,1 se trouve dans l'antirésonance. Enfin, les deux dernières ont des fréquences réduites très rapprochées (0,15 et 0,1575) et se trouvent au niveau de la seconde résonance. La figure 4.8 expose les résultats obtenus pour une telle perturbation, où les graphiques du haut donnent les composantes fréquentielles des signaux et ceux du bas leurs allures temporelles. Les figures de gauche concernent le signal optimal de commande et celles de droite sont dédiées à celui de l'erreur. On peut noter sur 4.8(b) que les composantes



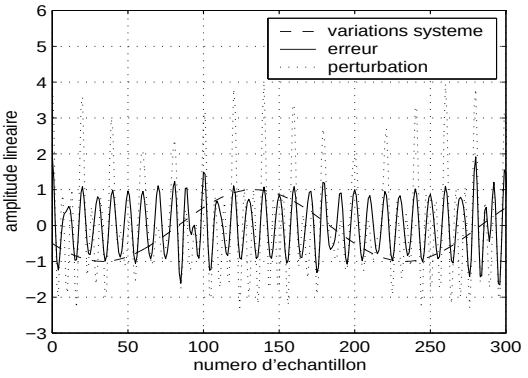
(a) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)|$=traits pleins



(b) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{v}}(0,0)|$=traits pleins



(c) $i_{c_1\,opt}(n)$



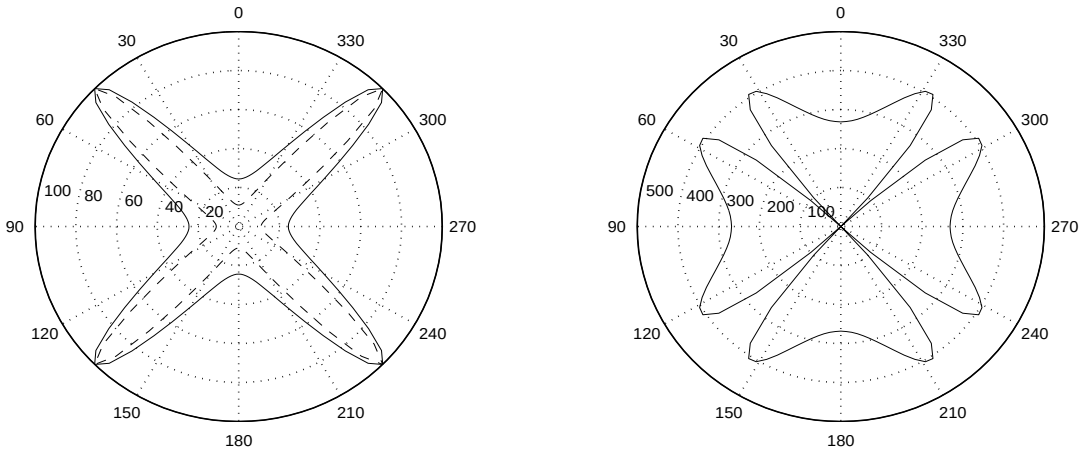
(d) $v(n,0)$=traits pleins, $v_n(n,0)$=pointillés

Fig. 4.8: Caractéristiques des signaux optimaux de commande et de erreur calculées pour $\epsilon = 0,05$

fréquentielles de la perturbation situées sur des résonances sont fortement atténuées, alors que celle située dans l'antirésonance ne diminue que très peu. On la retrouve présente dans 4.8(d), où le signal d'erreur est principalement constitué d'une sinusoïde de période égale à 10 échantillons. En effet, cette composante ne peut être diminuée qu'au prix d'une commande de forte puissance, ce qui n'est pas autorisé par la valeur choisie pour le paramètre ϵ. De plus, on remarque en 4.8(c) que la commande se comporte de la même manière que précédemment, et tend à s'annuler lorsque la modulation d'amplitude devient faible. On peut enfin noter

que ce type de commande peut agir sur plusieurs composantes fréquentielles à la fois, pourvu qu'elles soient harmoniques de la fréquence fondamentale des variations du système LVPT.

La dernière variable dont on peut étudier l'influence sur les performances de cette méthode de compensation est la position angulaire du capteur θ. Pour simplifier l'interprétation des résultats, la perturbation est de nouveau supposée sinusoïdale de fréquence réduite 0,15 et le transfert $\hat{g}(\nu, \theta)$ est choisi identique au précédent, quelle que soit la position angulaire θ. Les courbes de la figure 4.9 sont tracées en coordonnées polaires et ont toutes été calculées pour $\epsilon = 0,05$. Elles représentent le coût et la puissance du signal d'erreur en fonction de θ (figure 4.9(a)) ainsi que la puissance de la commande en fonction de la même variable (figure 4.9(b)). Elles peuvent être interprétées comme une coupe transversale de la machine, sur



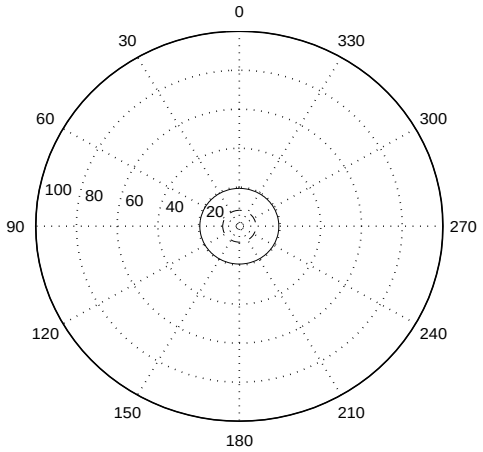
(a) $\mathfrak{C}_{min}$ (trait plein) et puissance du signal d'erreur P_v (tirets)

(b) Puissance de la commande optimale $P_{i_{c_1\,opt}}$

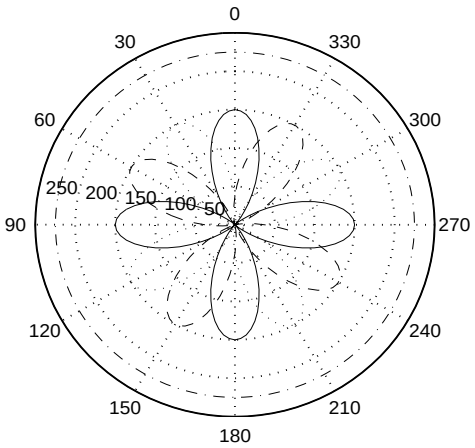
Fig. 4.9: Performances optimales obtenues en fonction de la position angulaire du capteur θ pour une seule commande et pour $\epsilon = 0,05$

laquelle on aurait représenté graphiquement ces différentes grandeurs en fonction de θ. Elles sont exprimées en pourcentage par rapport à la puissance de la perturbation. La figure 4.9(a) montre que dans le cas où l'on n'utilise qu'un seul courant de compensation, les performances obtenues ne sont pas constantes sur toute la circonférence du stator. En effet, le coût minimum $\mathfrak{C}_{min}$ ainsi que la puissance du signal d'erreur redeviennent égaux à 100 % de la puissance de la perturbation pour $\theta = \frac{\pi}{4} + k \times \frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$, où il n'y a donc aucune atténuation. Ce phénomène vient du coefficient multiplicatif $\cos(2\theta)$ appliqué sur le signal d'entrée $i_{c_1}(n)$. Il est visible sur la figure 4.1, et représente le transfert de l'enroulement statorique numéroté 1 sur la figure 1.13. Lorsqu'il s'annule, le signal de commande ne peut générer aucune contre-vibration et la compensation est alors inefficace. La figure 4.9(b) montre que la commande optimale s'adapte aux variations de ce coefficient multiplicatif en faisant évoluer sa puissance $P_{i_{c_1\,opt}}$ afin d'obtenir des performances correctes, pour finalement s'annuler complètement lorsque $cos(2\theta) = 0$. Le fait d'utiliser un seul courant de compensation, et donc une seule bobine

statorique, a donc l'inconvénient d'imposer des limitations spatiales à la compensation.
On peut penser que le fait d'utiliser les trois bobines statoriques parcourues alors par les trois courants de commande $i_{c_1}(n)$, $i_{c_2}(n)$ et $i_{c_3}(n)$ peut aider à résoudre ce problème. Cette question trouve sa réponse dans la figure 4.10(a), représentant les mêmes courbes que sur 4.9(a), mais calculées cette fois-ci en utilisant les trois signaux de commande précédents. On



(a) $\mathfrak{C}_{min}$ (trait plein) et puissance du signal d'erreur P_v (tirets)



(b) $P_{i_{c_1\,opt}}$ (trait plein), $P_{i_{c_2\,opt}}$ (tirets),$P_{i_{c_3\,opt}}$ (pointillés), $P_{i_{c\,opt}}$ (tirets-points)

Fig. 4.10: Performances optimales obtenues en fonction de la position angulaire du capteur θ pour trois commandes et pour $\epsilon = 0,05$

voit que les performances obtenues deviennent constantes quelle que soit la position angulaire θ, et que cette méthode de compensation ne comporte alors plus de limitations spatiales. La figure 4.10(b) représente, en fonction de θ, les puissances respectives de chaque signal de commande $P_{i_{c_1\,opt}}$, $P_{i_{c_2\,opt}}$ et $P_{i_{c_3\,opt}}$, ainsi que leur somme $P_{i_{c\,opt}}$ exprimées elles aussi en pourcentage relativement à P_{v_n}. $P_{i_{c\,opt}}$ reste constante quel que soit l'endroit où se trouve le capteur mesurant les vibrations à minimiser, mais les autres courbes mettent en évidence le rôle joué par chaque signal de commande. Par exemple, pour $\theta = 0$ c'est $P_{i_{c_1\,opt}}$ qui est la plus importante et qui génère la plupart des contre-vibrations nécessaires à l'atténuation des perturbations. Au contraire, pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $P_{i_{c_1\,opt}}$ s'annule et ce sont les deux autres signaux de commande qui prennent le relais afin de minimiser le signal d'erreur. C'est donc le déphasage spatial des trois bobines statoriques qui leur permet d'agir à des endroits différents sur le stator et de garder des performances de compensation constantes. Dans la suite, les trois commandes seront toujours utilisées en même temps, et les performances obtenues seront indépendantes de la position angulaire du capteur θ.

Après avoir étudié les performances optimales que peut atteindre cette méthode de contrôle actif, nous allons nous attarder sur le comportement de l'algorithme récursif décrit au paragraphe 4.3.3, qui permet au signal de commande de converger vers la solution désirée.

Algorithme récursif

Le comportement de l'algorithme récursif va tout d'abord être étudié dans le cas où il réactualise les composantes fréquentielles de trois signaux de commande afin d'atténuer, à la position angulaire $\theta = 0$, une perturbation sinusoïdale de fréquence réduite 0,15. Le gain complexe $\hat{g}(\nu, 0)$ garde la même valeur et le paramètre ϵ est fixé à 0,05. Les performances globales doivent donc être les mêmes que celles de la figures 4.10 pour la position angulaire considérée. Le pas d'adaptation μ de l'algorithme (4.17) a été choisi de telle sorte qu'il y ait convergence et prend la valeur 0,08. Les courbes de convergence, généralement appelées «courbes d'apprentissage», sont données sur la figure 4.11. Elles représentes la valeur du coût $\mathfrak{C}$, celle de la puissance du signal d'erreur P_v ainsi que la somme des puissances des commandes $P_{i_{c_{opt}}}$ non pas en fonction des échantillons, mais en fonction de la période du système LVPT sur laquelle ces grandeurs ont été calculées. Chaque unité de l'axe des abscisses représente alors une période, ce qui correspond à 400 échantillons temporels. La forme de ces courbes,

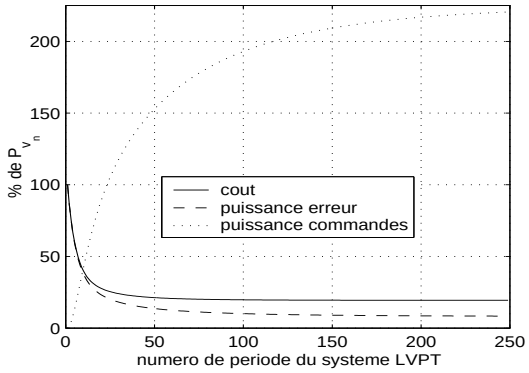
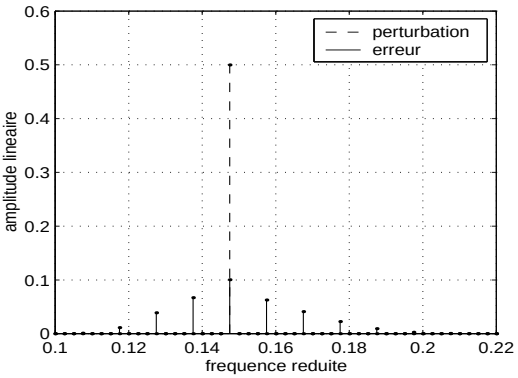


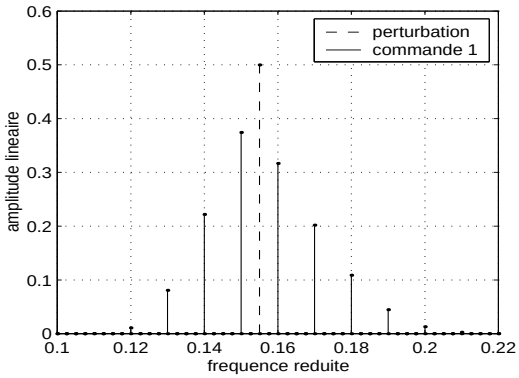
Fig. 4.11: Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ (trait plein), P_v (tirets) et $P_{i_{c_{opt}}}$ (pointillés)

ainsi que les valeurs vers lesquelles ces grandeurs convergent correspondent à ce qui était attendu. De plus, la figure 4.12 montre les composantes fréquentielles de l'erreur ainsi que celles des trois signaux de commande obtenues pour la période numérotée 250, c'est à dire une fois que l'algorithme a convergé. Le vecteur $\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{opt}}}(0)$ regroupant les composantes fréquentielles des trois commandes converge donc bien vers sa valeur optimale. De plus, on peut vérifier que le signal de commande le plus important pour cette position angulaire est $i_{c_1}(n)$, comme prévu par la courbe 4.10(b).

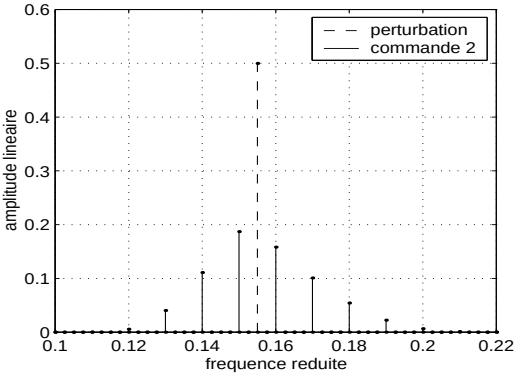
L'influence du pas d'adaptation μ sur la vitesse de convergence est illustré par la figure 4.13. L'évolution de la valeur du coût en fonction de la période du système LVPT y est représentée pour trois valeurs différentes de μ, et on peut vérifier que le temps de convergence de l'algorithme étudié est inversement proportionnel à ce paramètre.
L'algorithme récursif élaboré au paragraphe 4.3.3 se comporte donc bien comme prévu dans le cas de perturbations sinusoïdales synchrones aux variations du système LVPT. Nous allons maintenant étudier ce qu'il se passe en présence de bruit large bande et de sinusoïdes non synchrones dans le signal de perturbation à atténuer.



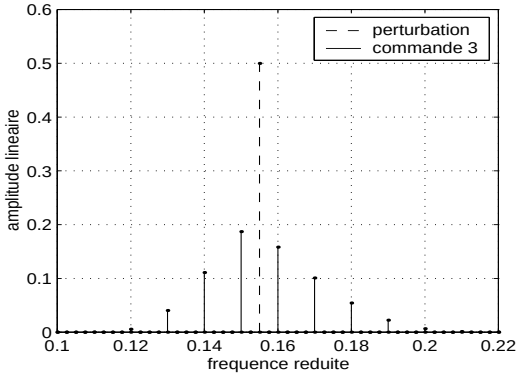
(a) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{v}}(0,0)|$=traits pleins



(b) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{1_{opt}}}}(0)|$=traits pleins



(c) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{2_{opt}}}}(0)|$=traits pleins



(d) $|\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{n}(0,0)|$=tirets, $|\hat{\mathbf{i}}_{\mathbf{c_{3_{opt}}}}(0)|$=traits pleins

Fig. 4.12: Composantes fréquentielles de l'erreur et des trois commandes en $\theta = 0$ et pour $\epsilon = 0,05$

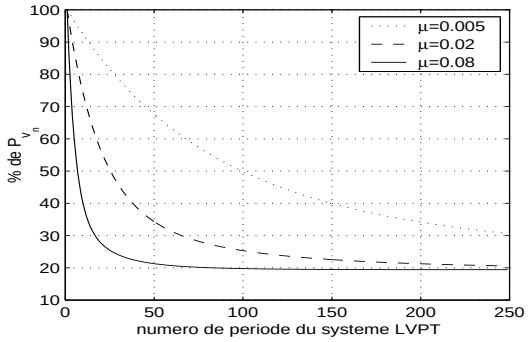


Fig. 4.13: Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ en fonction de μ

Les conditions de simulation restent complètement identiques aux précédentes, mis à part le signal de perturbation. Il est constitué d'un bruit aléatoire gaussien large bande ajouté à deux sinusoïdes pures, l'une de fréquence 0,15 qui est un multiple de la fréquence du système LVPT, l'autre non synchrone de fréquence 0,131. Le rapport entre la puissance de la sinusoïde représentant les composantes synchrones et celle des autres composantes de ce signal (le bruit et la sinusoïde non synchrone) peut être interprété comme le rapport signal à bruit (RSB). Les puissances de chaque sinusoïde ainsi que celle du bruit étant choisies égales, ce rapport est de $\frac{1}{2}$ ou, ce qui est équivalent, de -3 décibels. La figure 4.14 représente les courbes d'apprentissage de l'algorithme pour $\mu = 0,08$, qui sont du même type que celles de la figure 4.11. On remarque que la puissance du signal d'erreur, une fois que l'algorithme a convergé,

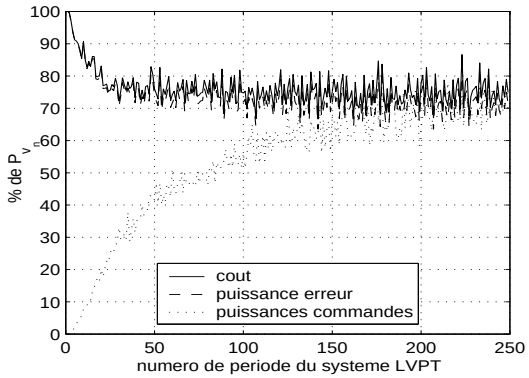
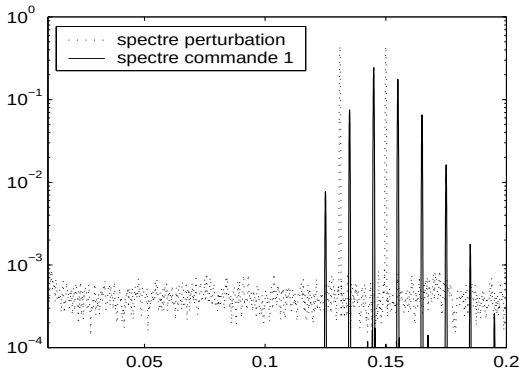


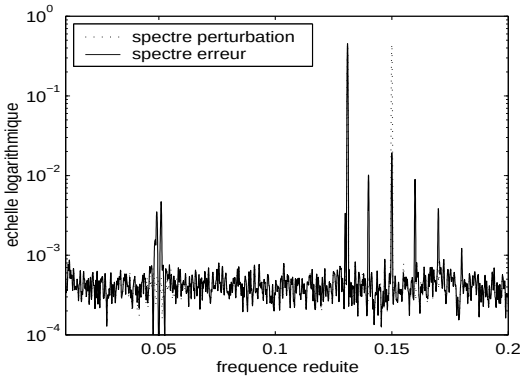
Fig. 4.14: Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ (trait plein), P_v (tirets) et $P_{i_{c_{opt}}}$ (pointillés) pour une perturbation sinusoïdale bruitée

représente environ 70 % de sa valeur initiale. Cette méthode de contrôle n'agissant que sur les composantes synchrones, les 30 % qui ont été atténués doivent normalement appartenir exclusivement à la sinusoïde de fréquence 0,15. Ceci peut être vérifié sur la figure 4.15, représentant suivant une échelle logarithmique les densités spectrales de puissance des signaux de perturbation, de commande et d'erreur. En effet, la présence d'une composante aléatoire dans la perturbation impose de calculer les densités spectrales de puissance comme elles ont été définies au paragraphe 1.3.3. On remarque sur la figure 4.15(a) que la commande n'est quasiment pas perturbée par la présence du bruit et de la sinusoïde non synchrone. En effet, ses composantes fréquentielles sont réparties autour de la seule fréquence 0,15 et ne prennent en compte ni le bruit, ni la sinusoïde non synchrone. La figure 4.15(b) prouve que cette dernière se retrouve inchangée dans le spectre du signal d'erreur, et que ce traitement n'atténue que les composantes synchrones aux variations du système LVPT. Une légère amplification du bruit se produit toutefois au niveau de la forte résonance que comporte le système LIT $\hat{g}(\nu, 0)$. Pour éviter ce genre de problèmes en pratique, il faudra donc limiter la gamme de fréquence sur laquelle porte le contrôle actif, en filtrant le signal d'erreur par un filtre dont la bande passante ne correspond pas aux fréquences de forte résonance du système.

Après avoir vu que la présence de bruit aléatoire large bande et de sinusoïdes non syn-



(a) Spectre du signal de commande (trait plein) et de perturbation (pointillés)



(b) Densité spectrale de puissance du signal d'erreur (trait plein) et de perturbation (pointillés)

Fig. 4.15: Densité spectrale de puissance des signaux de commande et d'erreur pour une perturbation sinusoïdale bruitée

chrones aux variations du système LVPT dans les vibrations naturelles de la machine ne gênait par outre mesure le calcul de la commande optimale, l'algorithme (4.17) va être appliqué à des signaux vibratoires mesurés sur une machine synchrone en rotation.

Application aux signaux réels

Il est maintenant nécessaire d'étudier les performances de cette méthode de contrôle actif pour des signaux réels de vibration. Pour cela, on l'applique au signal vibratoire ré-échantillonné analysé au paragraphe 1.3.4, provenant d'une expérimentation mettant en œuvre la machine synchrone de test décrite au paragraphe 1.2.3. On rappelle que la fréquence de rotation de la machine est $\nu_r = 23,8$ Hz, que la fréquence d'échantillonnage est $\nu_e = 24371$ Hz et que l'on dispose également du signal de top-tour réel fourni par un capteur angulaire. Le signal vibratoire correspondant à la perturbation à atténuer et dont le spectre de puissance est donné à la figure 1.10, est filtré à l'aide d'un filtre passe-bande dont la bande passante s'étend de 1 kHz à 2,5 kHz. La principale composante synchrone située dans cette gamme de fréquence est l'harmonique de rang 2 de la raie d'encoche. C'est donc elle qui doit être atténuée en priorité par la commande optimale. Le transfert de la figure 4.1 entre les signaux de commande et les vibrations qu'ils engendrent est, quant à lui, toujours simulé. La position angulaire θ est supposée nulle, le transfert LIT $\hat{g}(\nu, 0)$ reste le même, et le signal de modulation $m(n, 0)$ est connu et obtenu en doublant la fréquence du top-tour. On obtient donc le même système LVPT que précédemment, avec un gain complexe matricielle gardant les mêmes caractéristiques. Les courbes d'apprentissage alors obtenues sont présentées à la figure 4.16. Les valeurs du coût $\mathfrak{C}$ et de la puissance du signal d'erreur P_v convergent bien vers un minimum situé autour de 17 % de leur valeur initiale. Ces bonnes performances nécessitent une commande dont la puissance représente 225 % de celle de la perturbation à éliminer.

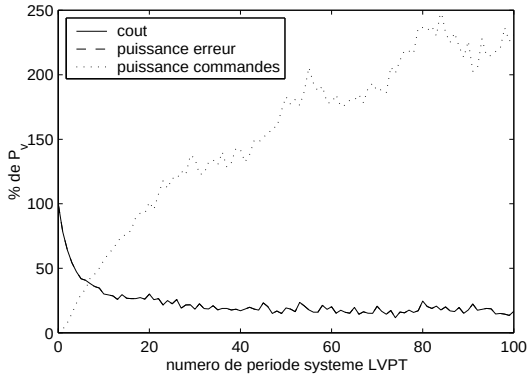
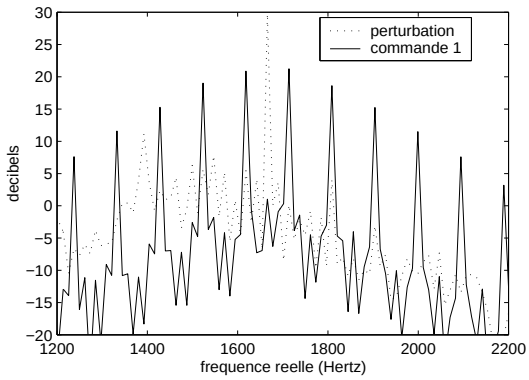
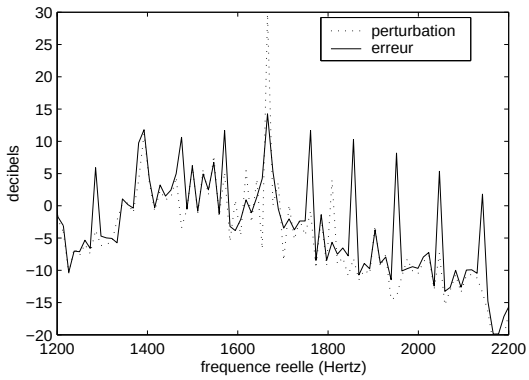


Fig. 4.16: Courbes d'apprentissage $\mathfrak{C}$ (trait plein), P_v (tirets) et $P_{i_{copt}}$ (pointillés) pour une perturbation vibratoire réelle

La figure 4.17 montre les densités spectrales de puissance des signaux de perturbation, de commande et d'erreur une fois que l'algorithme récursif a convergé. Comme prévu, les com-



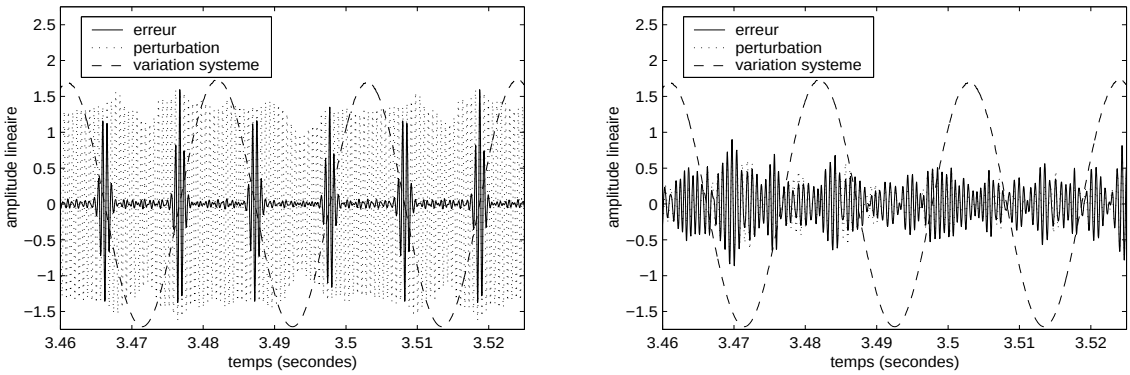
(a) Densité spectrale de puissance du signal de commande (trait plein) et de perturbation (pointillés)



(b) Densité spectrale de puissance du signal d'erreur (trait plein) et de perturbation (pointillés)

Fig. 4.17: Densités spectrales de puissance des signaux de commande et d'erreur pour une perturbation vibratoire réelle

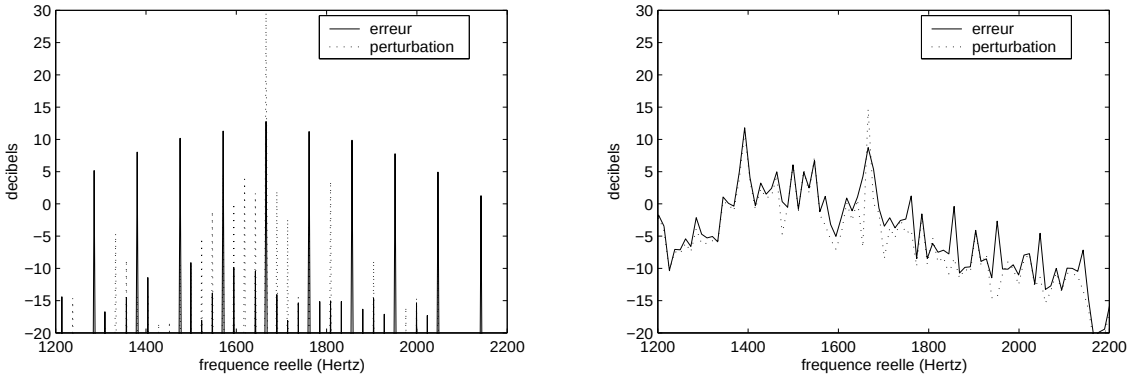
posantes fréquentielles de la commande se concentrent autour de l'harmonique de rang 2 de la raie d'encoche afin de l'atténuer. Finalement, celui-ci est réduit d'environ 15 dB dans le spectre du signal d'erreur. De plus, les raies parasites crées par la commande optimale dans le signal d'erreur apparaissent bien autour de la composante visée, et la composante fréquentielle non synchrone du signal de perturbation située autour de 1400 Hz n'est pas affectée par ce traitement. Ces résultats vérifient donc ceux obtenus lors des simulations précédentes portant sur des signaux synthétiques. Ces caractéristiques sont encore plus visibles dans les figures 4.18 et 4.19, montrant respectivement les allures temporelles et les spectres de puissance des composantes synchrones et non synchrones des signaux de perturbation et d'erreur en sortie du passe-bande et après la convergence de l'algorithme. Ces deux figures montrent claire-



(a) Composantes synchrones

(b) Composantes non synchrones

Fig. 4.18: Allures temporelles des composantes synchrones et non synchrones des signaux d'erreur (traits pleins) et de perturbation (pointillés) filtrés pour une perturbation vibratoire réelle



(a) Composantes synchrones

(b) Composantes non synchrones

Fig. 4.19: Densités spectrales de puissance des composantes synchrones et non synchrones des signaux d'erreur (traits pleins) et de perturbation (pointillés) filtrés pour une perturbation vibratoire réelle

ment que la commande optimale agit presque exclusivement sur les composantes synchrones du signal de perturbation. En effet, les composantes non synchrones (4.18(b) et 4.19(b)) ne sont pratiquement pas modifiées, alors que les composantes synchrones (4.18(a) et 4.19(a)), principalement constituées par l'harmonique de la raie d'encoche, ont été fortement atténuées. Finalement, une fois que l'algorithme récursif a fait converger le signal de commande vers sa forme optimale, la puissance des vibrations totales du stator en $\theta = 0$ est réduite à environ 17 % de sa valeur initiale. Ceci démontre l'efficacité d'une telle méthode de contrôle actif pour les signaux vibratoires générés par la machine synchrone de test, dans le cas où un seul accéléromètre est utilisé.

À des fins de comparaison, la figure 4.20 montre les résultats obtenus en appliquant au même signal vibratoire la méthode de compensation développée dans [Far95] et [Jar95] et décrite au paragraphe 2.3. La raie spectrale correspondant à l'harmonique 2 de la raie d'encoche est

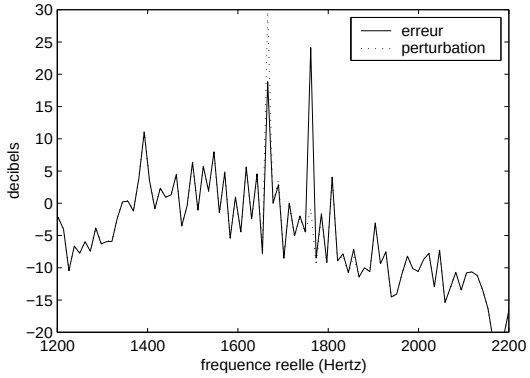


Fig. 4.20: Densité spectrale de puissance du signal d'erreur (trait plein) et de perturbation (pointillés)

atténuée de 10 dB, et une composante parasite de forte amplitude est créée comme prévu en $1666 + 4 \times 23.8 = 1761,2$ Hz. La puissance du signal d'erreur représente, après convergence, environ 40 % de celle de la perturbation à éliminer. On voit donc que par rapport à la méthode précédente, les performances obtenues sont moins bonnes, même si le spectre vibratoire est modifié sur une plage fréquentielle plus restreinte.

Il faut maintenant étudier la possibilité de minimiser les vibrations mesurées par plusieurs capteurs à la fois, pour que le contrôle actif n'agisse plus seulement en une seule position angulaire, mais sur une zone de la carcasse statorique.

4.4.3 Cas multicapteurs

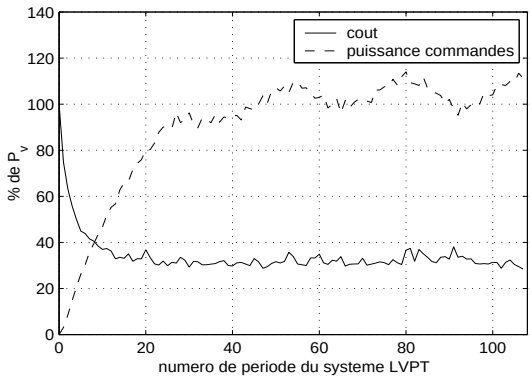
Le cas multicapteurs peut être étudié à l'aide de l'équation (4.22), donnant l'algorithme récursif traitant les vibrations mesurées par M capteurs. Cet algorithme sera testé directement sur des signaux de vibrations réels, car les relations de phase liant ces différents signaux sont difficiles à modéliser. Ils ont été mesurés lors de la même expérimentation que précédemment, sur trois accéléromètres situés aux positions angulaires $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \frac{\pi}{8}$ et $\theta_3 = \frac{\pi}{4}$ radians sur le stator.

Les transferts LIT $\hat{g}(\nu, \theta_1)$, $\hat{g}(\nu, \theta_2)$ et $\hat{g}(\nu, \theta_3)$ sont tous du même type que $\hat{g}(\nu, 0)$ utilisé précédemment. Ils comportent les mêmes résonances et antirésonances, tout en étant choisis légèrement différents les uns des autres. En effet, ces transferts sont liés à la réponse mécanique de la carcasse statorique pour différentes positions angulaires, et ne peuvent être très différents si ces positions sont suffisamment proches.

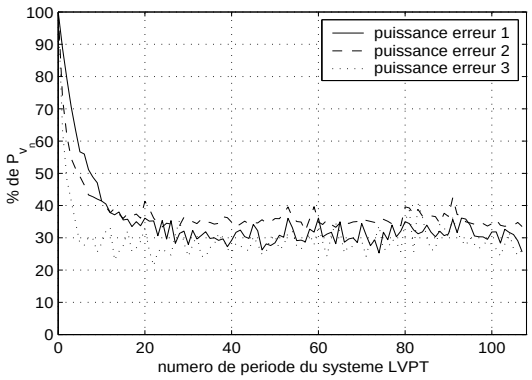
Les signaux de modulation $m(n, \theta_1)$, $m(n, \theta_2)$ et $m(n, \theta_3)$ sont ici aussi issus du signal réel de top-tour, dont la fréquence a été doublée.

Les valeurs de ces transferts LIT et de ces signaux sont toutes connues et peuvent être

utilisées pour calculer la matrice $\hat{\mathbf{T}}(0,\Theta)$ où $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta 3\}$, nécessaire à l'équation (4.22). Les transferts LVPT situés entre les signaux de commande et les contre-vibrations qu'ils engendrent aux positions angulaires θ_1, θ_2 et θ_3 peuvent donc être simulés, alors que les vibrations traitées sont des signaux réels. Différentes courbes d'apprentissage obtenues en fixant $\mu = 0.02$ et $\epsilon = 0.001$ sont tracées sur la figure 4.21. 4.21(a) représente l'évolution de la



(a) $\mathfrak{C}$ (trait plein) et $P_{i_{copt}}$ (pointillés)

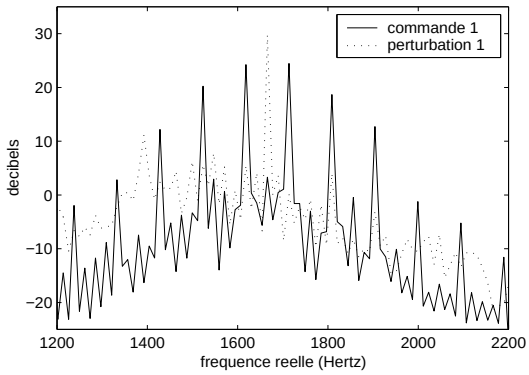


(b) Puissance des signaux d'erreur en sortie de chaque capteur

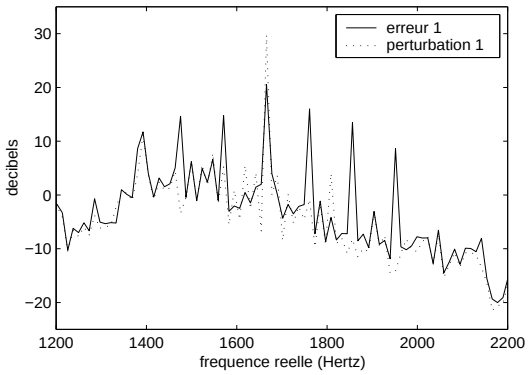
Fig. 4.21: Courbes d'apprentissage pour un système de contrôle actif à trois commandes et trois capteurs, portant sur des signaux de vibrations réels

somme des puissances de chaque commande $P_{i_{copt}}$, ainsi que celle du coût global $\mathfrak{C}$ calculé par (4.20), ces grandeurs étant exprimées en pourcentage relativement à la somme des puissances des trois perturbations. Le comportement de ce système de contrôle actif est le même que dans le cas monocapteur, où le coût global converge vers un minimum qui devient proche de 30 % de sa valeur initiale. La figure 4.21(b) permet de connaître dans quelle mesure les vibrations sont atténuées pour chaque capteur puisqu'elle représente l'évolution de la puissance du signal en sortie de chaque capteur, exprimée en pourcentage de sa valeur initiale. On remarque que ces valeurs sont toutes réduites à approximativement 30 % de leur valeur initiale, et quel que soit le capteur.
La figure 4.22 représente les densités spectrales de puissance de chaque signal de commande (colonne de gauche) et de chaque signal d'erreur (colonne de droite), obtenues après la phase de convergence de l'algorithme. On voit que ces courbes ont toutes l'allure de celles obtenues dans le cas monocapteur, et qu'il y a bien compensation des vibrations sur chacun des trois capteurs. On peut donc penser qu'il est possible d'atténuer les vibrations statoriques d'une machine synchrone sur une zone continue plutôt qu'en une seule position angulaire.

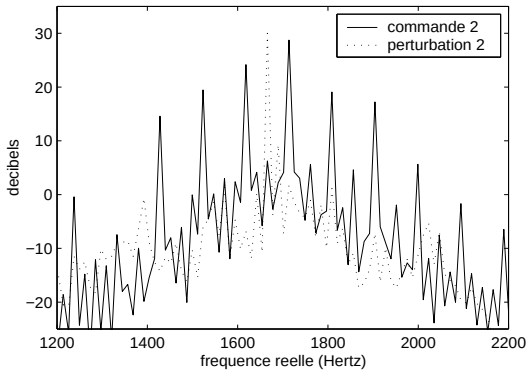
Nous allons maintenant discuter de l'implantation de ce traitement en temps-réel à l'aide d'un processeur numérique de signal.



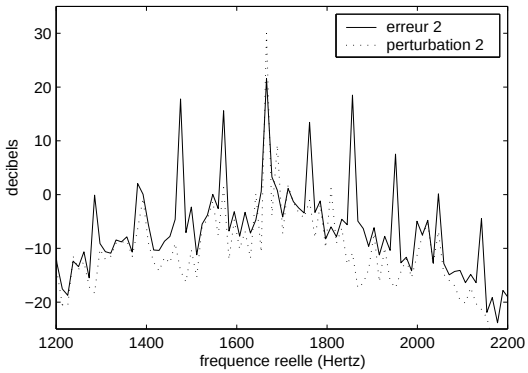
(a) Densité spectrale de puissance de la commande numéro 1



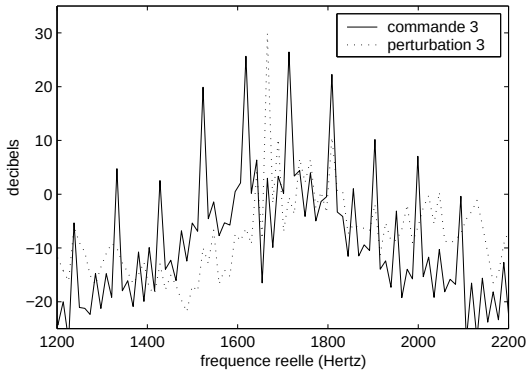
(b) Densités spectrales de puissance de la perturbation numéro 1 (tirets) et de l'erreur numéro 1 (traits pleins)



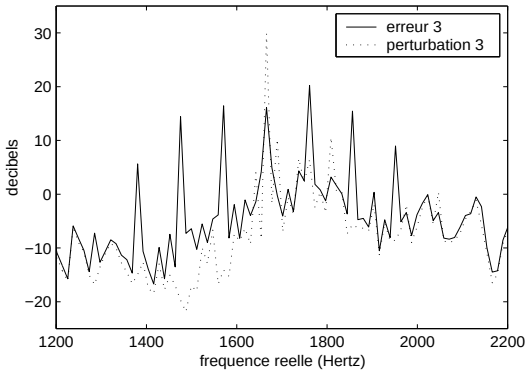
(c) Densité spectrale de puissance de la commande numéro 2



(d) Densités spectrales de puissance de la perturbation numéro 2 (tirets) et de l'erreur numéro 2 (traits pleins)



(e) Densité spectrale de puissance de la commande numéro 3



(f) Densités spectrales de puissance de la perturbation numéro 3 (tirets) et de l'erreur numéro 3 (traits pleins)

Fig. 4.22: Densités spectrales de puissance des signaux de commande et d'erreur pour trois perturbations vibratoires réelles

4.4.4 Implantation sur processeur numérique

L'implantation de l'algorithme (4.22) a déjà été discutée au paragraphe 4.4.1. Ceci a permis de déterminer la méthode donnée par la figure 4.3, qui a été utilisée pour réaliser les simulations présentées lors des paragraphes 4.4.2 et 4.4.3. Nous allons reprendre exactement le même schéma, mais quelques modifications sont nécessaires afin de l'implanter en temps réel sur un processeur numérique de signal. Les diverses TFD doivent être réalisées à l'aide d'un algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT = «Fast Fourier Transform»), qui nécessite des blocs de traitement contenant un nombre d'échantillons égal à une puissance de 2. La valeur de P, qui est celle du multiplieur fréquentiel de la figure 4.2, doit donc être une puissance de 2, mais elle fixe aussi celle de la fréquence d'échantillonnage par la relation $\nu_e = P\nu_r$. P doit donc être choisi de telle sorte qu'il n'y ait pas de recouvrement spectral dans les signaux échantillonnés. Un exemple concret permet de déterminer une valeur possible pour ce paramètre. Supposons que la machine synchrone sur laquelle on désire implanter cette méthode de contrôle actif tourne à une vitesse de rotation de $\nu_r = 25$ Hz, et que l'atténuation de ses vibrations soit nécessaire jusqu'à 3 kHz. Des filtres anti-repliement peuvent donc être insérés dans la chaîne d'acquisition afin de supprimer les composantes fréquentielles des signaux vibratoire au-delà de 3 kHz, et ν_e doit alors être choisie supérieure à 6 kHz pour vérifier la condition d'échantillonnage de Shannon. La valeur de P doit finalement vérifier $25 \times P > 6000$, ce qui est équivalent à $P > 240$. Pour cet exemple précis, P prendra la puissance de 2 immédiatement supérieure à 240, c'est à dire 256. Les différentes TFD directes et inverses apparaissant dans la figure 4.3 porteront dans ce cas sur des blocs de 256 échantillons. On peut alors se rendre compte qu'il va être très difficile, voire impossible de réaliser tous les calculs nécessaires à la réactualisation (4.22) en un instant d'échantillonnage. Pour remédier à cela, on peut modifier légèrement la figure 4.3 en calculant, à partir des mesures effectuées au bloc l, non pas les échantillons des signaux de commande du bloc $l+1$ mais ceux du bloc $l+2$ suivant. Ce principe, représenté à la figure 4.23, laisse au processeur le temps d'effectuer les calculs nécessaires, mais il provoque un retard d'un bloc pour l'envoie de la commande. Toutefois, nous avons vu que dans le cas de perturbations synchrones aux variations du système LVPT, la commande était nécessairement périodique, de période P correspondant à celle du système, mais aussi à la longueur d'un bloc. Ce retard sera donc complètement transparent au niveau de la convergence de l'algorithme, ou au niveau des performances optimales d'atténuation.

Cet algorithme a été implanté sur un processeur numérique de type *TMS320C32* fabriqué par *Texas instruments*, intégré sur une carte électronique fabriquée par *Blue Wave Systems*. La version programmée comporte une entrée et une sortie, et calcule donc en temps-réel les échantillons d'une seule commande, afin de minimiser le signal mesuré par un seul capteur de vibrations. Elle a été testée sur des signaux issus de générateurs et donne des résultats analogues à ceux du paragraphe 4.4.2. Par manque de temps, elle n'a malheureusement pas pu être mise en œuvre sur la machine de test.

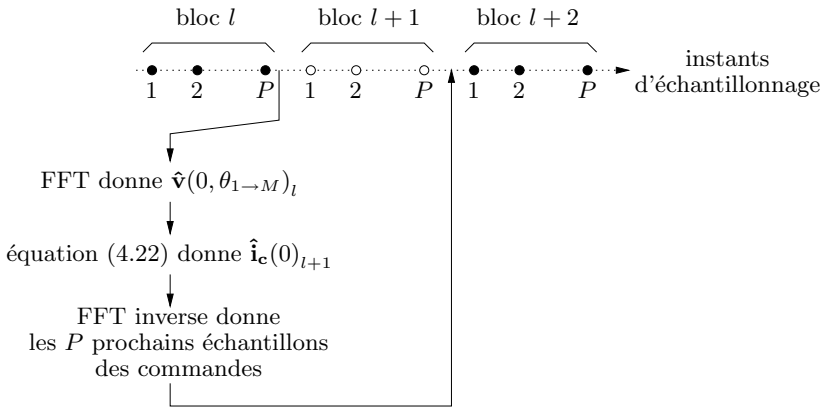


Fig. 4.23: Implantation temps-réel de l'algorithme

4.5 Conclusion

Ce chapitre a permis d'élaborer des solutions au problème de contrôle actif posé au chapitre 1, et qui peuvent être implantées en temps-réel à l'aide d'un processeur numérique.

Dans la section 4.2, l'utilisation des notions théoriques du chapitre 3 sur les systèmes LVPT a permis de donner l'expression (4.7), qui représente les composantes fréquentielles du signal d'erreur à minimiser en fonction des autres caractéristiques du système.

Cette expression a été utilisée tout au long de la section 4.3 afin de développer la relation (4.21) donnant les composantes fréquentielles optimales des signaux de commande minimisant la fonction de coût globale (4.20). Un algorithme récursif permettant de suivre les éventuelles variations des perturbations à minimiser a également été déterminé et est donné par l'équation (4.22).

L'implantation pratique de ces résultats, ainsi que les performances qu'ils permettent d'obtenir sont ensuite exposées à la section 4.4. Que ce soit avec un ou plusieurs capteurs, les diverses simulations des paragraphes 4.4.2 et 4.4.3, et en particulier celles portant sur des signaux réels de vibrations, montrent que l'algorithme proposé permet d'atténuer fortement les vibrations en une zone donnée de la carcasse statorique. La plupart des résultats présentés dans cette section ont également été exposés dans [Gra99c, Gra99a, Gra00]. Finalement, le paragraphe 4.4.4 décrit le principe de programmation qui a été utilisé pour implanter cet algorithme dans un processeur numérique du signal. Les résultats alors obtenus correspondent à ceux des simulations précédentes.

Les performances des solutions présentées dans ce chapitres atteignent donc les objectifs de compensation fixés, et peuvent de plus fonctionner en temps-réel.

Conclusion et perspectives

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire a permis d'élaborer une solution pratique au problème d'isolation vibratoire d'une machine synchrone posé au chapitre 1.

L'originalité de cette méthode est d'engendrer des contre-vibrations à l'aide des forces magnétiques générées par des courants additionnels parcourant les enroulements statoriques de la machine considérée. Ces contres-vibrations doivent minimiser les vibrations totales de la carcasse statorique, mesurées par des accéléromètres fixés en plusieurs points de celle-ci. En faisant abstraction de la chaîne de commande (processeur et amplificateur de puissance), aucun actionneur externe à la machine n'est donc nécessaire, ceux-ci étant remplacés par ses bobines statoriques.

Cet avantage matériel est acquis au prix d'une plus grande complexité théorique puisque le transfert entre les courants de commande et les contre-vibrations qu'ils engendrent n'est plus, comme dans la plupart des cas pratiques, invariant dans le temps. En effet, la modélisation effectuée à la section 1.4 du premier chapitre permet de montrer que les caractéristiques de ce système linéaire varient périodiquement dans le temps, avec une fréquence proportionnelle à celle de la fréquence de rotation de la machine. Il fait donc partie du groupe des systèmes linéaires variant périodiquement dans le temps (LVPT), qui constituent une généralisation des systèmes linéaires invariants dans le temps (LIT). De plus, l'analyse d'un signal de vibrations mesuré sur une machine synchrone en rotation est effectuée au paragraphe 1.3.3. Elle montre que les composantes synchrones au phénomène de rotation sont particulièrement importantes dans le spectre vibratoire obtenu. Ce sera donc ce type de composantes que le système de contrôle cherchera à atténuer.

Les travaux précédemment effectués sur le sujet, dont les principaux résultats sont exposés au chapitre 2, ont abouti à l'élaboration d'un premier système de contrôle. Celui-ci peut utiliser les techniques classiques de contrôle actif malgré la variabilité temporelle du transfert, grâce à un ensemble de filtrages sélectifs et d'une prémodulation. Ce système est capable d'annuler une composante fréquentielle du spectre vibratoire de la machine, mais provoque alors l'apparition d'une raie parasite, dont l'amplitude ne peut être contrôlée par l'utilisateur. Cet inconvénient est exclusivement dû à la présence du système LVPT, et peut conduire à des performances de compensation inacceptables.

Il s'avère donc nécessaire de faire une étude plus approfondie des systèmes LVPT, afin d'élaborer une stratégie de contrôle prenant en compte leurs particularités. Ceci est réalisé au chapitre 3, où le modèle choisi est celui de la réponse impulsionnelle de ces systèmes. Une

étude dans le domaine temporel est réalisée au paragraphe 3.2.3, et permet de mettre en évidence le double effet de décalage fréquentiel et de filtrage LIT qu'ils provoquent sur leur entrée. Ce double effet apparaît également dans le domaine fréquentiel, où les liens existant entre les composantes fréquentielles des signaux d'entrée et de sortie sont donnés par la réponse bifréquentielle définie au paragraphe 3.2.4. Enfin, l'étude des signaux propres de ces systèmes, réalisée au paragraphe 3.2.5, conduit à la définition d'un «gain complexe matriciel» qui constitue l'extension du gain complexe classique des systèmes LIT. En effet, cette matrice permet de relier les «représentations fréquentielles augmentées» des signaux d'entrée et de sortie à l'aide d'un simple produit matriciel (équations (3.40) et (3.41)). Comme il est montré au paragraphe 3.2.7, son analyse peut être conduite à l'aide d'outils classiques de l'algèbre linéaire (décomposition en valeurs singulières, calcul de normes), et fournit des renseignements utiles sur le système considéré, comme son inversibilité, ou les gains entrée-sortie minimaux et maximaux qu'il peut présenter. Un exemple de système LVPT est alors analysé en utilisant les différents outils théoriques qui viennent d'être présentés. Ce système a la même structure que celui dont le modèle a été élaboré au chapitre 1, et sa réponse impulsionnelle, sa réponse bifréquentielle, ainsi que son gain complexe sont calculés et interprétés à la section 3.3.

Après avoir présenté les outils théoriques permettant de caractériser les systèmes LVPT, une solution pratique au problème initialement posé peut être déterminée. Ceci est l'objet du chapitre 4, où il est tout d'abord montré que pour obtenir un système LVPT discret, l'échantillonnage des différents signaux doit être synchronisé sur la fréquence de rotation de la machine. On utilise alors le gain complexe matriciel de ce système pour pouvoir exprimer les signaux de vibrations statoriques à minimiser, appelés «signaux d'erreur». Cette expression, donnée par la relation (4.7), est valable pour plusieurs capteurs fixés sur le stator de la machine et fournit les composantes fréquentielles des signaux d'erreur en fonction des autres paramètres du système. Elle est utilisée dans l'équation (4.20) pour construire un critère quadratique appelé «fonction de coût». Cette grandeur peut être physiquement interprétée comme la somme de la puissance des signaux d'erreur, avec une fraction de celle des signaux de commande. La commande minimisant cette fonction est alors considérée comme optimale vis-à-vis de ce critère, et peut être calculée soit d'une manière directe (équation (4.21)), soit par un algorithme récursif (équation (4.22)). Ce dernier est plus avantageux que la forme directe car il autorise le suivi d'éventuelles variations du spectre des vibrations à atténuer.

La section 4.4 étudie l'implantation pratique matérielle et logicielle de cet algorithme (figures 4.2 et 4.3) pour aboutir, au paragraphe 4.4.4, à l'implantation de sa version la plus simple (un seul courant de commande minimisant les vibrations mesurées par un seul capteur de vibrations) dans un processeur numérique. Il faut remarquer que cette mise en œuvre nécessite la connaissance du gain complexe matriciel du système LVPT considéré, ce qui réclame :

- une phase d'identification effectuée machine à l'arrêt (avant le contrôle), qui n'est valable que pour une seule fréquence d'échantillonnage et donc une seule vitesse de rotation,
- la connaissance de la phase du champ magnétique généré dans la machine synchrone,

dépendante de son point de fonctionnement, et difficile à connaître d'une manière générale.

Le calcul en ligne de ce gain complexe matriciel et de ses éventuelles variations, c'est à dire pendant le contrôle des vibrations, permettrait une amélioration notable de cette identification, et constitue donc une perspective de recherche qui paraît nécessaire pour un système pratique.

Les performances d'atténuation obtenues par la commande optimale sont également étudiées. Les différents signaux sont tout d'abord synthétiques puis ils sont remplacés par des signaux réels de vibrations mesurés sur une machine synchrone. Le transfert LVPT situé entre les commandes et les contre-vibrations qu'ils engendrent est quant à lui toujours simulé. Les résultats obtenus grâce aux diverses simulations mettent en avant plusieurs caractéristiques de cette méthode de contrôle. Tout d'abord, la puissance de la commande optimale est réglable par l'utilisateur, et peut donc être imposée inférieure à un certain seuil, ce qui peut être très utile en pratique pour éviter toute saturation dans la chaîne de commande. De plus, cette méthode peut agir à la fois sur toutes les composantes synchrones à la rotation de la machine présentes dans son spectre vibratoire. L'action de la commande optimale sur l'une d'elles est de diminuer la raie spectrale principale, tout en créant des raies parasites autour d'elle. Toutefois, plus la commande est importante, meilleures sont les performances obtenues, pour finir par annuler complètement les vibrations synchrones perturbatrices si aucune limitation de puissance n'est imposée. Une autre caractéristique intéressante est qu'en utilisant conjointement trois courants de commande parcourant chacun une des bobines statoriques de la machine, les performances obtenues sont identiques sur toute la circonférence du stator, et la méthode de contrôle ne comporte alors pas de limitations spatiales. Enfin, une simulation effectuée sur des signaux réels montre qu'une atténuation des composantes vibratoires synchrones peut être obtenue sur plusieurs capteurs à la fois, et peut donc porter sur une zone entière du stator, et non plus en une seule position angulaire.

Le problème qu'il reste à résoudre pour parvenir à une méthode de contrôle facilement implantable sur une machine synchrone est donc principalement l'identification du gain complexe matriciel nécessaire à l'algorithme de calcul de la commande. En effet, si cette identification était réalisée en ligne, elle permettrait de suivre les éventuelles fluctuations de cette matrice, mais aussi d'adapter automatiquement le système de contrôle à un changement de vitesse de rotation, et donc de fréquence d'échantillonnage. Il semble que le domaine temporel soit plus propice à l'élaboration d'un algorithme d'identification automatique pour les systèmes LVPT, en utilisant les techniques de gradients adaptatifs.

De plus, il serait intéressant de pouvoir adapter ce système à d'autre types de machines tournantes, en particulier les machines de type asynchrone. Le problème est que pour de telles machines, les fréquences mécaniques et électriques ne sont pas identiques, ce qui génère des vibrations comprenant deux familles d'harmoniques, dont l'une est liée au phénomène de rotation, et l'autre au fondamental des courants statoriques. Une solution possible serait de générer des signaux de commande constitués par la somme de deux signaux différents, cal-

culés par un algorithme synchronisé pour l'un sur la rotation de la machine, et pour l'autre sur ses courants statoriques.
Enfin, l'étude théorique des systèmes LVPT réalisée au chapitre 3 permet d'envisager leur application dans la modélisation de signaux vibratoires de machines. En effet, nous avons vu qu'un tel système provoque sur son entrée à la fois des décalages fréquentiels, et des filtrages LIT. S'il est correctement synchronisé et alimenté par un bruit blanc ajouté au fondamental de la rotation de la machine considérée, sa sortie est alors formée d'une composante aléatoire stationnaire, d'une autre cyclostationnaire, et d'un ensemble de sinusoïdes de fréquences multiples à la fréquence de rotation. Ces caractéristiques correspondent à celles d'un signal de vibrations d'une machine synchrone, qui peut donc être modélisé par le système LVPT en question. Ce modèle pourrait être utilisé à des fins de diagnostic ou de surveillance pour de telles machines. En effet, un dysfonctionnement modifiant le signal vibratoire ferait alors de même sur les paramètres du système LVPT, et pourrait donc être détecté.

Bibliographie

[Bas92] M. Basseville, N. Martin, and P. Flandrin. Signaux non-stationnaires, analyse temps-fréquence et segmentation. *Traitement du Signal*, 9(1) :77–147, 1992.

[Ber97] E. F. Berkman and E. K. Bender. Perspectives on active noise and vibration control. *Sound and Vibration*, 31(1) :80–93, January 1997.

[Big95] R. Bigret and J. L. Féron. *Diagnostic-maintenance-disponibilité des machines tournantes*. Masson, 1995.

[Bit86] S. Bittanti and G. Guardabassi. Optimal periodic control and periodic systems analysis : an overview. In *Proceedings of the* 25^{th} *Conference on Decision and Control*, volume 2, pages 1417–1423, Athènes, 1986.

[Bog63] B. P. Bogert, M. J. R. Healy, and J. W. Tukey. The quefrency analysis of time series for echoes : cepstrum, pseudo-autocovariance, cross cepstrum and saphe cracking. In *Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis*, New-York, 1963.

[Bou98] A. Boulenger and C. Pachaud. *Surveillance des machines par analyse des vibrations*. AFNOR, 1998.

[Cab99] R. H. Cabell. A principal component algorithm for feedforward active noise and vibration control. *Journal of Sound and Vibration*, 227(1) :159–181, 1999.

[Cap92] C. Capdessus. *Aide au diagnostic des machines tournantes par traitement du signal*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.

[Cap00] C. Capdessus, M. Sidahmed, and J. L. Lacoume. Cyclostationary processes : application in gear faults early diagnosis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 14(3) :371–385, May 2000.

[Car67] G. W. Carter. *The electromagnetic field in its engineering aspects*. Longmans, 1967.

[Che97] L. Chen, T.and Qiu. Linear periodically time-varying discrete-time systems : aliasing and lti approximations. *Systems and Control Letters*, 30(5) :225–235, June 1997.

[Cla82] T. A. C. M. Claasen and W. F. G. Mecklenbräuker. On stationary linear time-varying systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 29(3) :169–184, March 1982.

[Con56] W. B. Conover. Fighting noise with noise. *Noise control*, 2 :78–82, 1956.

[Cor79] D. R. Corral. On the stability of periodically time varying systems. *International Journal of Control*, 29(3) :497–504, March 1979.

[Cro81] R. E. Crochiere and L. R. Rabiner. Interpolation and decimation of digital signals - a tutorial review. *Proceedings of the IEEE*, 69(3) :300–331, March 1981.

[Der92] S. Dérou. *Contribution à l'étude des vibrations des machines synchrones*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1992.

[Ell87] S. J. Elliot, I. M. Stothers, and P. A. Nelson. A multiple error lms algorithm and its application to the active control of sound and vibration. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35 :1423–1434, October 1987.

[Ell92] S. J. Elliot, C. C. Boucher, and P. A. Nelson. The behavior of a multiple channel active control system. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(5) :1041–1052, May 1992.

[End92] A. W. M. Van Den Enden and N. A. M. Verhoeckx. *Traitement numérique du signal, une introduction*. Masson, 1992.

[Far95] P. S. Farah. *Étude de la réduction des vibrations des machines synchrones*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995.

[Fla93] P. Flandrin. *Temps-fréquence*. Hermès, 1993.

[Ful95] C. R. Fuller and A. H. von Flotow. Active control of sound and vibration. *IEEE Control Systems magazine*, 15(6) :9–19, December 1995.

[Ful96] C. R. Fuller, S. J. Elliot, and P. A. Nelson. *Active control of vibration*. Academic Press, 1996.

[Gar91] W. A. Gardner. Exploitation of spectral redundancy in cyclostationary signals. *IEEE Signal Processing Magazine*, pages 14–36, Avril 1991.

[Gas90] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications : filtrage, calcul numérique, ondelettes*. Masson, 1990.

[Gol96] R. Golub and C. Van Loan. *Matrix computations,third édition*. The John Hopkins University Press, 1996.

[Gra98] P. Granjon, C. Servière, and A. Foggia. Active control of synchronous machine vibrations. In *Proceedings of the* 3^{rd} *International Conference on acoustical and vibratory surveillance methods and diagnostic techniques*, volume 2, pages 501–510, Senlis, France, 1998.

[Gra99a] P. Granjon, C. Servière, and A. Foggia. Annulation d'un signal périodique à travers une fonction de transfert périodique. In *Actes du GRETSI 99*, Vannes, France, 1999.

[Gra99b] P. Granjon, C. Servière, and A. Foggia. Compensation active des vibrations d'une machine synchrone. *Revue Française de Mécanique*, (1) :21–28, 1999.

[Gra99c] P. Granjon, C. Servière, and A. Foggia. Sine wave cancelation through a periodic transfer function. In *Proceedings of the International Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, Antalya, Turkey, 1999.

[Gra00] P. Granjon, C. Servière, and A. Foggia. Active control of synchronous machine vibrations : an adaptive optimal mimo controller. In *Proceedings of the IEEE ICASSP 2000*, Istanbul, Turkey, 2000.

[Hay96] S. Haykin. *Adaptive filter theory, third edition*. Prentice Hall, 1996.

[Hua80] N. C. Huang. On linear shift-variant digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 27(8) :672–679, August 1980.

[Jar95] A. Jarosz. Compensation active des vibrations d'une machine synchrone. Rapport de dea 21-95, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1995.

[Juf95] M. Jufer. *Électromécanique*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.

[Kit88] F. L. Kitson and L. J. Griffiths. Design and analysis of recursive periodically time-varying digital filters with highly quantized coefficients. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 36(5) :674–685, May 1988.

[Kun91] M. Kunt et al. *Techniques modernes de traitement numérique des signaux*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1991.

[Kuo96] S. M. Kuo and D. R. Morgan. *Active noise control systems : algorithms and DSP implementations*. John Wiley and sons, Inc., 1996.

[Lac96] J. L. Lacoume and J. Max. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Masson, 1996.

[Lac97] J. L. Lacoume, P. O. Amblard, and P. Comon. *Statistiques d'ordre supérieur pour le traitement du signal*. Masson, 1997.

[Loe84] C. M. Loeffler and C. S. Burrus. Optimal design of periodically time-varying and multirate digital filters. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 32(5) :991–997, October 1984.

[Lue36] P. Lueg. Process of silencing sound oscillations. US Patent No 2,043,416, 1936.

[Lux90] L. A. Luxemburg. Frequency analysis of time varying periodic linear systems by using modulo p transforms and its applications to the computer-aided analysis of switched netwoks. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 9(1) :3–29, 1990.

[Mac98] A. C. McCormick and A. K. Nandi. Cyclostationarity in rotating machine vibrations. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 12(2) :225–242, 1998.

[Mae87] J. F. Maestre. *Étude des vibrations d'origine électromagnétique dans les machines à courant continu en vue de les réduire*. Thèse de doctorat, École centrale de Lyon, 1987.

[Mey75] R. A. Meyer and C. S. Burrus. A unified analysis of multirate and periodically time-varying digital filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 22(3) :162–168, March 1975.

[Mio96] K. Mio. *Étude de filtres et de processus non linéaires discrets*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.

[Mir96] S. Mirabbasi, B. Francis, and T. Chen. Input-output gains of linear periodic discrete-time systems with application to multirate signal processing. In *Proceedings of the IEEE International Symposium on Circuits And Systems*, volume 2, pages 193–196, Atlanta, 1996.

[Moo95] D. Otte. The use of svd for the study of multivariate noise and vibration problems. In M Moonen and B. De Moor, editors, *SVD and signal processing, III*, pages 357–366. Elsevier, 1995.

[Mor92] J. Morel. *Vibrations des machines et diagnostic de leur état mécanique*. Eyrolles, 1992.

[Nel92] P. A. Nelson and S. J. Elliot. *Active control of sound*. Academic Press, 1992.

[Ols53] H. F. Olson and E. G. May. Electronic sound absorber. *Journal of the Acoustical Society of America*, 25 :1130–1136, 1953.

[Pic93] B. Picinbono. *Random signals and systems*. Prentice-Hall, 1993.

[Pra92] S. J. Prater and C. M. Loeffler. Analysis and design of periodically time-varying iir filters, with application to transmultiplexing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(11) :2715–2725, November 1992.

[Ran00] R. B. Randal, J. Antoni, and S. Chobsaard. A comparison of cyclostationary and envelope analysis in the diagnostics of rolling elements bearings. In *Proceedings of the IEEE ICASSP 2000*, volume 6, pages 3882–3885, Istanbul, 2000.

[Roh87] T. Rohlev and C. Loeffler. Invertible periodically time-varying digital filters. In *Proceedings of the IEEE ICASSP 87*, volume 4, pages 2380–2383, New York, 1987.

[Sch90] L. L. Scharf. *Statistical signal processing : detection, estimation, and time series analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[She94] R. G. Shenoy, D. Burnside, and T. W. Parks. Linear periodic systems and multirate filter design. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(9) :2242–2255, September 1994.

[Tek95] A. M. Tekalp. *Digital video processing*. Prentice Hall, 1995.

[Tim89] P. L. Timar et al. *Noise and vibration of electrical machines*. Elsevier, 1989.

[Vet87] M. Vetterli. A theory of multirate filter banks. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 35(3) :356–372, March 1987.

[Vet89] M. Vetterli. Invertibility of linear periodically time-varying filters. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 36(1) :148–150, January 1989.

[Wer90] N. M. Wereley and S. R. Hall. Frequency respone of linear time periodic systems. In *Proceedings of the* 29^{th} *Conference on Decision and Control*, pages 3650–3655, Hawaii, 1990.

[Wer91] N. M. Wereley and S. R. Hall. Linear time periodic systems : transfer function, poles, transmission zeroes and directional properties. In *Proceedings of the 1991 American Control Conference*, volume 2, pages 1179–1184, Boston, 1991.

[Whi00] P. R. White and D. M. Lopes. Time-frequency methods for analyzing structural response data. In *Proceedings of the IEEE ICASSP 2000*, volume 6, pages 3878–3881, Istanbul, 2000.

[Wid85] B. Widrow and S. D. Stearns. *Adaptive signal processing*. Prentice-Hall, 1985.

[Zad50] L. A. Zadeh. Frequency analysis of variables networks. *Proceedings of the IRE*, 38 :291–299, 1950.

[Zad61] L. A. Zadeh. Time-varying networks–1. *Proceedings of the IRE*, 49 :1488–1503, 1961.

[Zha97] C. Zhang, J. Zhang, and K. Futura. Analysis of h_2 and h_∞ performance of discrete periodically time-varying controllers. *Automatica*, 33(4) :619–634, 1997.

RÉSUMÉ

Ce travail de recherche est consacré à l'élaboration d'une méthode de compensation active des vibrations d'une machine tournante électrique. Son originalité tient au fait que les enroulements statoriques sont alimentés par des courants de commande additionnels afin d'engendrer des forces radiales sur le stator. Celui-ci répond alors par des vibrations additionnelles qui interagissent avec les vibrations naturelles de la machine. Le but de ce système de contrôle actif est donc de calculer la valeur "optimale" de ces courants, permettant de minimiser la puissance des signaux vibratoires au niveau de capteurs accéléromètriques fixés à la périphérie du stator.
Dans un premier temps, la modélisation du transfert situé entre les commandes et les contre-vibrations engendrées conduit à un système linéaire et variant périodiquement dans le temps (LVPT). La fréquence fondamentale de ses variations est alors proportionnelle à la fréquence de rotation de la machine.
Après avoir montré l'insuffisance des méthodes classiques de contrôle actif pour cette application, une étude théorique détaillée des systèmes LVPT est réalisée. Elle conduit à la définition d'une matrice de transfert, jouant le même rôle que la fonction de transfert classique employée pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps. Cette matrice permet d'écrire simplement la relation entre les entrées et les sorties du système considéré dans le domaine fréquentiel.
Finalement, les résultats précédents sont utilisés afin de déterminer l'expression optimale des courants de commande minimisant la puissance des signaux de vibrations mesurés. Un algorithme récursif permet également de converger vers cet optimum, et de prendre en compte d'éventuelles variations des perturbations vibratoires à éliminer. Divers résultats, obtenus sur des signaux synthétiques puis sur des signaux vibratoires réels, illustrent les performances obtenues par ce système de contrôle actif. Il permet une réduction significative des vibrations synchrones au phénomène de rotation, sans pour autant modifier les caractéristiques des autres. Enfin, son implantation en temps-réel dans un processeur numérique de traitement de signal est discutée et réalisée.

ABSTRACT

This work is devoted to elaborate an active control system of rotating machine vibrations. It is based on additional currents supplying the stator coils of the machine. They generate radial forces on the stator frame, and finally create additional vibrations which interact with the machine ones. Therefore, the aim of this system is to process the optimal value of the input currents, in order to minimize the vibration signals power measured on the stator frame by several accelerometers.
First, the transfer function between the input currrents and the engendered vibrations is modelized by a linear and periodically time-varying (LPTV) system. Moreover, its fondamental frequency is shown proportional to the machine rotating frequency.
Applied to the present problem, classical active control methods reach middling performance, a theoritical study of LPTV systems is thus realized. It leads to the definition of a transfer matrix, having the same properties than the classical transfer function used for linear and time-invariant systems. By using this matrix, a simple frequency relation can be obtained linking inputs and outputs of a LPTV system.
Then, previous results are used to determine the optimal value of the input currents minimizing the power of the measured vibration signals. Moreover, an adaptive algorithm permits to reach this optimum and to take into account some potential variations of the vibratory disturbances. The performance obtained by this processing are illustrated thanks to simulations on synthetic and real data. The synchronous vibrations with the machine rotation are significantly reduced, unlike the asynchronous ones, which are left unchanged. The real-time implementation of this algorithm is finally described and realized thanks to a digital signal processor.

MOTS-CLÉS

contrôle actif ; systèmes non stationnaires ; vibrations ; machine synchrone ; traitements adaptatifs ; systèmes variant périodiquement dans le temps ; machines tournantes ; temps-réel

Laboratoire des Images et des Signaux-ENSIEG
Rue de la houille blanche, B.P. 46, 38402 Saint Martin d'Hères Cédex, France
URL : http :\\www.lis.inpg.fr