Matrice de résistance et description du mouvement d'une particule en interaction hydrodynamique et conséquences du confinement asymétrique sur les phénomènes de transfert

Stéphane Champmartin

▶ **To cite this version:**

Stéphane Champmartin. Matrice de résistance et description du mouvement d'une particule en interaction hydrodynamique et conséquences du confinement asymétrique sur les phénomènes de transfert. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université d'Angers, 2006. Français. NNT : . tel-00102893v5

HAL Id: tel-00102893

https://theses.hal.science/tel-00102893v5

Submitted on 19 Dec 2006 (v5), last revised 10 Mar 2009 (v8)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre: 780
N° attribué par la bibliothèque : | | | | | | | | | | |

Thèse de doctorat de l'Université d'Angers

Discipline

Physique

présentée et soutenue publiquement par

Stéphane Champmartin

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université d'Angers

Titre de la thèse :

Matrice de résistance et description du mouvement d'une particule en interaction hydrodynamique et conséquences du confinement asymétrique sur les phénomènes de transfert

Soutenue le 29 septembre 2006 devant le jury composé de

MM.	Elie	Rivoalen	Rapporteurs
	Ahmed	Ould El Moctar	
MM.	Sahraoui	Bouchta	Examinateurs
	François	Feuillebois	
M.	Abdelhak	Ambari	Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse a été préparé au sein de l'Equipe Mécanique et Transfert du Laboratoire Procédé Matériau Instrumentation du Centre d'Enseignement et de Recherche de l'ENSAM d'Angers, sous la tutelle de Monsieur le Professeur Abdelhak AMBARI qui, après m'avoir guidé durant mon stage de DEA, m'a proposé d'aborder avec lui l'étude des écoulements aux faibles nombres de Reynolds. Entouré de ses conseils, guidé par son expérience, encouragé par son amitié, ce travail a pu progresser en même temps que j'apprenais l'exigence de la recherche et la rigueur scientifique. Il m'a toujours permis une grande liberté d'initiatives, me laissant parfois voyager dans des domaines forts éloignés de ceux inhérents à ma thèse (me permettant ainsi d'acquérir une culture plus grande des problèmes de la physique de la matière molle en général et de la mécanique des fluides en particulier) et sachant recentrer mon travail quand cela était nécessaire. Je suis particulièrement heureux de pouvoir enfin lui manifester ma profonde gratitude. Je lui suis indéfiniment redevable d'avoir osé le pari d'une si belle aventure qui m'aura fait grandir autant sur le plan scientifique qu'humain. Je tiens également à remercier pour leur aide Abderrahim Ben Richou et Amine Chami qui m'ont épaulé au début de ce marathon.

Je remercie également Messieurs Elie Rivoalen et Ahmed Ould El Moctar de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour cette thèse en acceptant d'en être les rapporteurs ainsi que Messieurs Sahraoui Bouchta et François Feuillebois pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Tout s'écoule et n'est jamais le même.
On ne peut pas entrer deux fois dans le même fleuve

Héraclite d'Ephèse (VI ^{e} siècle av. J.C.)

Introduction

Ce travail est entièrement consacré aux écoulements autour d'une particule cylindrique confinée en régime visqueux c'est-à-dire aux faibles nombres de Reynolds. Ce domaine est fascinant et plein de surprises. Qui peut soupçonner qu'une multitude de phénomènes qui nous entourent (la plupart du temps sans même qu'on s'en aperçoive), font intervenir des écoulements entrant dans ce domaine? Du fait de leurs petites dimensions, le déplacement des micro-organismes fait naturellement partie de cette catégorie. Ces minuscules organismes ont développé des modes de propulsion (flagelles des spermatozoïdes de la figure 1, mouvement en hélice de la queue de *Escherichia coli*...) qui sont propres à leur condition « d'êtres évoluant à faibles nombres de Reynolds »[1]. La mécanique des suspensions (particules colloïdales, lit fluidisé, transport de sédiments (fig.2)...), les macromolécules, les émulsions ou les mousses entrent également dans cette classe. En médecine, un examen très courant consiste à mesurer la vitesse de sédimentation des globules rouges dans le plasma. Ce test de routine garde un intérêt en particulier dans le diagnostic de très nombreuses affections ainsi que dans la surveillance des maladies inflammatoires. La sédimentation des impuretés solides est souvent aussi la première étape dans l'assainissement des eaux usées. On sait qu'une suspension concentrée mettra beaucoup plus de temps à décanter qu'une suspension diluée à cause des contre-écoulements vers les zones de fluide clair ce qui tend à ralentir la sédimentation. Le viscosimètre à chute de bille qui est composé d'une sphère tombant dans un tube de section cylindrique, est l'une des techniques les plus communes dans la détermination de la viscosité des fluides. Le régime de l'écoulement autour de la bille est encore un régime à faible nombre de Reynolds. La correction de la force de traînée sur la bille due à son interaction avec la paroi du tube doit être précisément connue si l'on veut faire des mesures correctes de viscosité. Dans l'industrie minière, on est parfois confronté à des explosions de matériaux combustibles sous la forme de poussières en suspension dans l'atmosphère. Un autre mode de transport est celui de la saltation rencontrée entre autres lors de la formation des dunes de sables ou de l'agrégation des flocons de neige. Les écoulements dans les milieux poreux (roches réservoirs pétrolières, colonne de chromatographie, ...) sont encore des écoulements à faibles nombres de Reynolds. Plus récemment, le développement des micro-systèmes (MEMS) et des techniques d'analyse physico-chimique intégrées ont encore élargi le champ d'application des écoulements à faibles nombres de Reynolds. Ce régime ne se

1. Pour un organisme ayant une taille de l'ordre de $1\mu m$ et une vitesse de déplacement dans l'eau de l'ordre de $1\mu m/s$, on calcule un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^{-4}

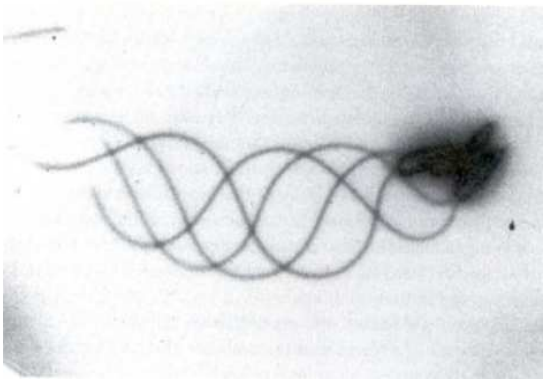

FIG. 1 – *Superposition de 4 clichés montrant le mouvement hélicoïdal du flagelle d'un spermatozoïde d'oursin (Lytechinus pictus). Source : H.A. Stone, Harvard University*

limite pas pour autant uniquement aux objets des petites dimensions. Les mouvements du magma dans le manteau terrestre (tectonique) ou ceux des glaciers (bandes de Forbes), lorsqu'on les observe sur des échelles de temps suffisamment longues, s'apparentent également, malgré leurs dimensions considérables (plusieurs kilomètres) à des écoulements très visqueux bien que les matériaux mis en jeu aient un comportement rhéologique à mi-chemin entre le solide et le fluide. Le nombre de Reynolds peut encore être petit du fait de la masse volumique du fluide. Les écoulements autour d'un objet dans l'atmosphère raréfiée à quelques kilomètres d'altitude au-dessus de la surface de la Terre entrent dans cette catégorie (évidemment dans ce cas, les dimensions de l'objet doivent être grandes en comparaison du libre parcourt moyen des molécules d'air pour rester dans le cadre de la mécanique des milieux continus). Du fait de la complexité mathématique de l'équation de Navier-Stokes, les écoulements à faibles nombres de Reynolds pour lesquels ont peut négliger l'inertie du fluide, ont également été très tôt des objets d'étude dont les solutions ont servi de base à la résolution de problèmes plus délicats. Ces travaux pionniers ont également permis de mettre au point et d'appliquer de nouvelles techniques mathématiques comme la méthode des développements asymptotiques raccordés ou la méthode de réflexions.

On pourrait penser que tous les problèmes où entrent en jeu des écoulements visqueux sont parfaitement connus et maîtrisés. Hélas (ou heureusement pour les chercheurs), il n'en est rien. On comprend aujourd'hui correctement l'hydrodynamique d'une particule de forme simple isolée mais de nombreuses questions restent ouvertes lorsqu'il s'agit de comprendre le comportement d'un tel objet en présence d'autres particules ou de parois. En compagnie de voisines ou proche de parois solides, le mouvement d'une particule est en effet très perturbé par rapport à la situation où cette particule se trouverait seule dans un fluide s'étendant à l'infini. Le comportement collectif de particules n'est pas simplement égal à la somme des comportements individuels de chacune de ses parties. On parle alors généralement d'*interactions hydrodynamiques*. Le transfert de quantité de mouvement aux faibles nombres de Reynolds étant peu efficace, une particule en mouvement induit dans le fluide une perturbation qui s'atténue

FIG. 2 – *La baie de Mahajamba à Madagascar chargée de sédiments suite à la déforestation. Source : NASA ISS EarthCam*

très lentement dans l'espace. Le comportement d'une particule est alors influencé par la présence des objets dans son voisinage et ce, même à très grandes distances. C'est ce comportement que nous avons essayé de comprendre dans ce travail. Il reste encore aujourd'hui un enjeu aussi bien fondamental et théorique que pratique.

Un des problèmes qui a intéressé notre équipe est celui de la modélisation numérique du transport de fibres courtes. Ce travail est tributaire d'une part de l'influence des interactions hydrodynamiques sur leur orientation et d'autre part de l'influence de ces mêmes interactions sur l'hypothèse, communément admise dans la plupart des études voulant modéliser le transport de ces fibres, qui consiste à supposer que la fibre à la même cinématique que la particule du fluide non perturbé. L'autre problème qui nous a intéressé est celui de la correction de la viscosité en se basant uniquement sur un effet volumique (à la manière Einstein, Batchelor, ...). La question que l'on se pose est : l'introduction d'un bruit géométrique dans une telle suspension, à fraction volumique constante, affecterait-elle la viscosité de la suspension ? Afin d'élucider la physique sous-jacente à ces problèmes, nous nous sommes volontairement restreints à l'étude d'un objet de forme simple (une particule cylindrique peut parfaitement modéliser une fibre courte aux fortes concentrations ; ceci n'est plus le cas en régime très dilué) en présence de parois solides parallèles dans divers types d'écoulements (écoulement à vitesse uniforme, écoulement de Poiseuille, rotation de la particule). La première partie du manuscrit est dédiée à l'étude des écoulements bidimensionnels autour d'un cylindre confiné. Nous traitons tout d'abord le cas du cylindre centré avant de généraliser l'étude à la situation où le cylindre se trouve à une position quelconque entre les plans. Nous tirons profit de ces études pour développer la technique de la matrice de résistance que nous avons élargie au terme de pression permettant de déterminer certaines caractéristiques des problèmes de la sédimentation et du transport d'une particule cylindrique libre dans un écoulement de Poiseuille. La seconde partie du mémoire est consacrée à l'étude du transfert d'un scalaire passif (masse ou chaleur) sur la paroi d'un cylindre confiné. Comme dans la première partie, nous découplons le cas particulier d'un cylindre en situation symétrique du cas d'un cylindre excentré. Ces études sont conduites pour

deux types de conditions aux limites sur les parois parallèles (température uniforme ou adiabaticité). Elles peuvent permettent de répondre à la question : l'introduction d'un bruit géométrique (position ou taille) sur un système ordonné constitué de cylindres parallèles en écoulement transverse aux faibles nombres de Reynolds et aux forts nombres de Péclet a-t-il un effet sur le rehaussement ou de réduction du flux global ?

Table des matières

Remerciements **i**

Introduction **v**

I Ecoulement bidimensionnel autour d'un cylindre confiné entre deux plans parallèles **1**

1 Etude bibliographique **3**
1.1 Cylindre en milieu infini aux faibles nombres de Reynolds 5
1.1.1 Etudes analytiques et numériques 5
1.1.2 Etudes expérimentales 13
1.2 Cylindre en milieu confiné aux faibles nombres de Reynolds 14
1.2.1 Etudes analytiques et numériques 14
1.2.2 Etudes expérimentales 26
1.3 Conclusion 31

2 Méthode numérique **33**
2.1 Le principe de la technique des volumes finis 33
2.2 Le code Fluent 35
2.3 La méthode de projection 36
2.4 Comparaisons des différents codes de calcul 39
2.4.1 Utilisation du code Fluent 39
2.4.2 Utilisation du code « maison » 41
2.4.3 Résultats 41
2.5 Conclusion 45

3 Cylindre confiné en situation centrée **47**
3.1 Cylindre en translation uniforme 47
3.1.1 Influence du nombre de Reynolds 48
3.1.2 Solutions de type Stokes 52
3.2 Cylindre fixe dans un écoulement de Poiseuille 60
3.2.1 Influence du nombre de Reynolds 61
3.2.2 Solutions de type Stokes 63

3.3 Cylindre en rotation uniforme 68
3.3.1 Influence du nombre de Reynolds 69
3.3.2 Solution de type Stokes 69
3.4 Conclusion 77

4 Cylindre confiné en situation excentrée 79
4.1 Cylindre en translation uniforme 80
4.1.1 Répartition des débits de fluide 80
4.1.2 Points d'arrêt et extrema de pression 82
4.1.3 Force de traînée 84
4.1.4 Moment 90
4.1.5 Perte de charge 92
4.1.6 Remarques concernant la structure de l'écoulement 93
4.2 Cylindre fixe dans un écoulement de Poiseuille 95
4.2.1 Répartition des débits de fluide 95
4.2.2 Points d'arrêt et extrema de pression 96
4.2.3 Force de traînée 101
4.2.4 Moment 101
4.2.5 Perte de charge 101
4.3 Cylindre en rotation uniforme 105
4.3.1 Structure des lignes de courant 105
4.3.2 Force de traînée 110
4.3.3 Moment 110
4.3.4 Perte de charge 110
4.4 Conclusion 114

5 La matrice de résistance 115
5.1 Généralités 115
5.2 La matrice de résistance dans le cas du cylindre confiné 116
5.3 Exploitation de la matrice 118
5.3.1 Sédimentation du cylindre 118
5.3.2 Transport du cylindre dans un écoulement de Poiseuille 130
5.4 Prise en compte de la force de portance 137
5.4.1 Ecriture des matrices M_0 et M_1 137
5.4.2 Problème de la sédimentation du cylindre 146
5.4.3 Problème du transport du cylindre en écoulement de Poiseuille . 148
5.5 Remarques sur les travaux de Wannier [44] et de Jeffrey *et al.* [45] . . . 149
5.6 Conclusion 152

II Transfert de masse ou de chaleur sur un cylindre confiné entre deux plans parallèles 155

1 Etude bibliographique 157

1.1 Conclusion 165

2 Cylindre en situation centrée **167**
2.1 Conditions aux limites de type Dirichlet 167
2.1.1 Influence du nombre de Péclet 168
2.1.2 Influence du rapport de confinement k 171
2.1.3 Solutions de type Stokes 175
2.2 Conditions aux limites de type Neumann 177
2.2.1 Influence du nombre de Péclet 178
2.2.2 Influence du rapport de confinement 178
2.2.3 Solutions de type Stokes 182
2.3 Conclusion 185

3 Cylindre en situation excentrée **187**
3.1 Conditions aux limites de type Dirichlet 187
3.2 Conditions aux limites de type Neumann 196
3.3 Conclusion 205

III Conclusion générale **207**

Bibliographie **211**

première partie

Ecoulement bidimensionnel autour d'un cylindre confiné entre deux plans parallèles

Chapitre 1

Etude bibliographique

L'écoulement d'un fluide autour d'un cylindre, à l'instar de celui autour d'une sphère, est un problème classique que l'on rencontre dans tous les livres de mécanique des fluides [1–6]. Son étude s'est révélée être d'une extraordinaire richesse comme en témoigne l'abondante littérature scientifique qui lui est consacrée. Le paramètre qui contrôle l'écoulement d'un fluide newtonien incompressible de masse volumique ρ, de viscosité dynamique μ et de vitesse uniforme au loin U_∞, autour d'un cylindre circulaire de longueur infinie de diamètre D est le nombre de Reynolds $Re = \rho U_\infty D/\mu$ qui est le rapport des forces d'inertie $\rho U^2/D$ aux forces de viscosité $\mu U/D^2$ par unité de volume (ou qui peut également être interprété comme le rapport du temps $\rho D^2/\mu$ mis par la quantité de mouvement pour diffuser sur une distance D au temps D/U qu'elle met pour être convectée sur la même distance). Les différents régimes et leurs transitions sont aujourd'hui bien étudiés d'un point de vue expérimental, analytique et numérique dans le cas d'un cylindre en milieu infini dont nous rappelons ici quelques caractéristiques (voir la figure 1.1) :

- pour $Re \ll 1$, on parle d'écoulement purement visqueux ou d'écoulement *rampant*. C'est ce régime des très faibles nombres de Reynolds auquel sera consacrée une grande partie de ce mémoire. L'écoulement est laminaire, stationnaire, parfaitement symétrique entre l'amont et l'aval du cylindre. Cette propriété découle directement de la réversibilité des écoulements aux faibles nombres de Reynolds, caractéristique qui sera largement exploitée dans ce travail dans le cas des écoulements confinés. On peut encore remarquer sur la photographie en haut à gauche de la figure 1.1 que l'écoulement autour du cylindre est perturbé sur des distances très importantes. Ceci est dû à la moindre efficacité de la diffusion à transporter la quantité de mouvement.

- pour $5 < Re < 47$, l'écoulement est encore stationnaire mais il apparaît en aval du cylindre deux tourbillons contrarotatifs fixes appelés *tourbillons de recirculation*. La symétrie amont-aval de l'écoulement a disparu. La taille de ces tourbillons augmente de façon continue jusqu'à $Re \approx 30$ puis décroît. Leur taille est de l'ordre du diamètre du cylindre pour $Re \approx 20$.

- pour $47 < Re < 140 - 200$, le régime cesse d'être stationnaire et l'écoulement dépend explicitement du temps. Les tourbillons se détachent alternativement et périodi-

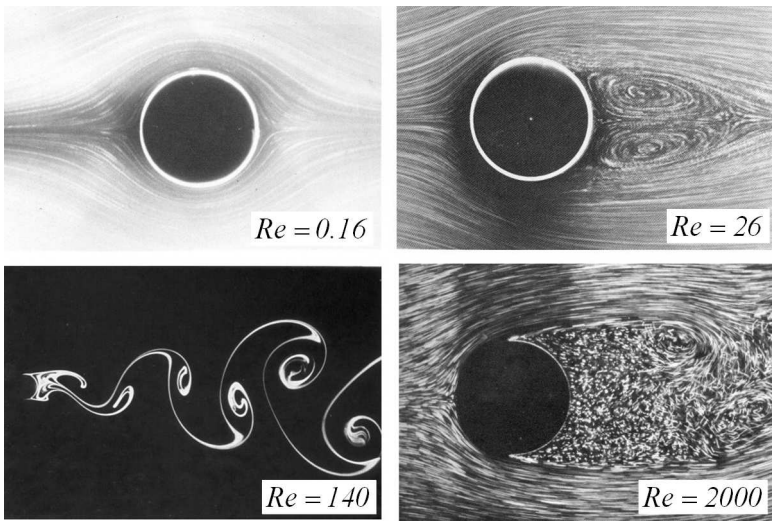

FIG. 1.1 – *Ecoulements à différents nombres de Reynolds autour d'un cylindre. Source : M. Van Dyke, An Album of Fluid motion [7]*

quement en aval du cylindre formant ce qu'on appelle *une allée oscillante de Bénard-Von Kármán*. Les tourbillons du coté supérieur du cylindre tournent dans le même sens et ceux du côté opposé ont le sens de rotation inverse. Dans la direction longitudinale, les tourbillons d'un même côté se trouvent à mi-distance des tourbillons du côté opposé. Ils peuvent être observés jusqu'à des nombres de Reynolds très élevés comme dans les écoulements océanographiques ou atmosphériques derrière des obstacles de grandes dimensions (Fig.1.2). Du fait de la dissymétrie de l'écoulement et sa périodicité, la force résultante instantanée n'est plus parallèle à la vitesse de l'écoulement à l'infini. Il apparaît une force de portance perpendiculaire à cette vitesse, dirigée alternativement dans un sens puis dans l'autre. Le nombre de Strouhal $St = fD/U_\infty$, caractérisant la fréquence f de largage des tourbillons, est une fonction du nombre de Reynolds. La force de traînée oscille à la fréquence f autour d'une valeur moyenne non-nulle alors que la force de portance oscille à la fréquence $f/2$ autour d'une valeur moyenne nulle. La limite haute de ce régime, comprise entre 140 et 200, présente une grande dispersion dans la littérature.

- aux nombres de Reynolds encore supérieurs, le sillage devient tridimensionnel, des mouvements turbulents incohérents à des échelles spatiales de plus en plus petites se superposent aux grandes structures cohérentes. La régularité de l'allée tourbillonnaire disparaît peu à peu et la partie avale du cylindre est occupée par un sillage qui oscille irrégulièrement. Une série de bifurcations se succèdent pour mener l'écoulement vers un régime chaotique.

On peut trouver une revue très détaillée de ces différents régimes dans le livre de Tritton [6] ou dans l'article de Williamson [8].

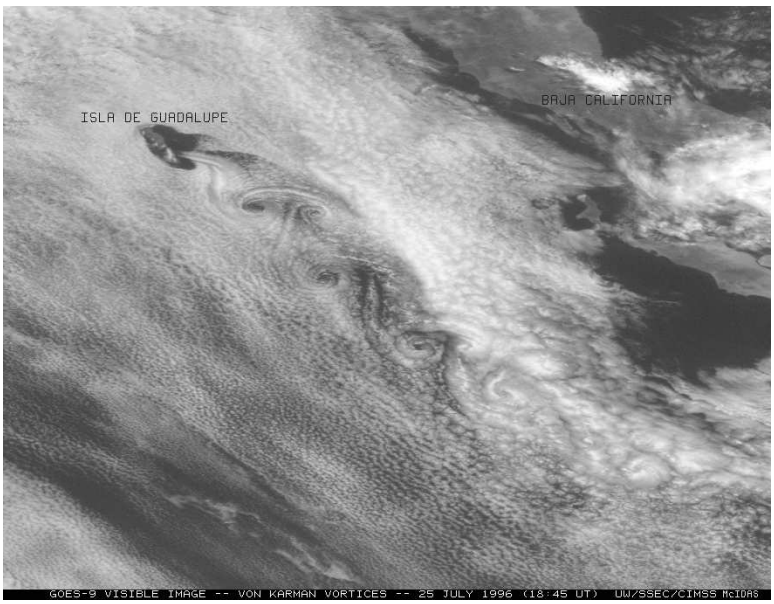

FIG. 1.2 – *Vue satellite d'une allée de Bénard-Von Kármán générée derrière l'île de Guadalupe, à l'ouest de la Basse-Californie, Mexique. Source : GOES-CIMMS*

1.1 Cylindre en milieu infini aux faibles nombres de Reynolds

1.1.1 Etudes analytiques et numériques

De part leurs implications industrielles, une grande partie des études consacrées aux écoulements autour des cylindres, tant expérimentales que théoriques, est dédiée aux régimes des grands nombres de Reynolds. Comme nous l'avons précisé en introduction, les écoulements à petits nombres de Reynolds n'en sont pas moins dignes d'intérêts. L'approche théorique des problèmes autour d'objets aux faibles nombres de Reynolds peut être faite dans l'ouvrage de Happel et Brenner [3]. On cite généralement Stokes [9] comme étant l'un des pionniers dans l'étude des écoulements correspondant à ce régime. Il proposa de linéariser l'équation de Navier-Stokes en négligeant le terme d'inertie devant le terme de viscosité, conduisant ainsi à l'équation de Stokes :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u}$$

Cette approximation se justifie dans le cas où la vitesse est très faible (les termes d'inertie sont quadratiques en vitesse), dans le cas où la viscosité est très grande et dans le cas où le cylindre est de petite dimension (les forces d'inertie sont inversement proportionnelle à cette dimension alors que les forces de viscosité sont inversement proportionnelles au carré de cette dimension). La résolution de l'équation de Stokes fut

un succès pour le problème tridimensionnel d'une sphère fixe[1] de rayon R dans un fluide à la vitesse U_∞. Stokes [9] donna la solution des champs hydrodynamiques et l'intégration des contraintes sur la surface de la sphère aboutit à la célèbre formule de Stokes pour la traînée $F_S = 6\pi\mu R U_\infty$. En 1889, Whitehead [10] tenta d'améliorer cette expression en prenant en compte l'inertie du fluide. Dans son approche, il a cherché une solution de l'équation de Navier-Stokes en supposant qu'elle pouvait s'écrire comme la somme de la solution de l'équation de Stokes déjà résolue et d'une perturbation. Cette démarche conduit alors pour la perturbation à une solution qui est non nulle à l'infini ce qui n'est pas acceptable. On parle alors parfois de *paradoxe de Whitehead*[2]. L'utilisation de l'équation de Stokes pour obtenir la solution correspondant à l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre fut un autre échec. Sa résolution conduit alors à des solutions qui, si elles satisfont à la condition aux limites à la surface du cylindre, doivent croître au moins de façon logarithmique à l'infini. Il est alors impossible de trouver une solution non-triviale vérifiant à la fois la condition de non-glissement sur le cylindre et la condition aux limites à l'infini. C'est ce qu'on appelle le *paradoxe de Stokes*. Il fallut attendre Oseen [11] en 1910 pour comprendre ce paradoxe. Il comprit que l'équation de Stokes n'est pas valide lorsqu'on s'éloigne du cylindre. Il montra en outre que le champ de vitesse obtenu dans le problème de la sphère n'est pas correct à grande distance de celle-ci car lorsqu'on s'en éloigne, les termes d'inertie, négligés dans l'équation de Stokes, deviennent plus grands que les termes de viscosité. En d'autres termes, l'équation de Stokes n'est pas une bonne approximation de l'équation du mouvement dans la région éloignée de l'obstacle. Il proposa également un moyen de résoudre ce problème : puisque les termes d'inertie sont importants à grande distance et que la vitesse tend alors vers sa valeur à l'infini $\vec{U}_\infty$, il émit l'idée de linéariser les termes d'inertie $(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u}$ dans l'équation de Navier-Stokes autour de la vitesse à l'infini, c'est-à-dire de les remplacer par $(\vec{U}_\infty.\vec{\nabla})\vec{u}$. Les équations linéaires qui en découlent sont appelées les équations d'Oseen :

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \rho(\vec{U}_\infty.\vec{\nabla})\vec{u} = -\vec{\nabla}P + \mu\nabla^2\vec{u}$$

Cette approche fut couronnée de succès[3]. Oseen [11] résolut le problème de l'écoulement autour d'une sphère et Lamb [12] celui de l'écoulement autour d'un cylindre. Son calcul donne alors l'expression de la force de traînée que l'on nomme généralement *formule de Lamb* :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon} \tag{1.1}$$

avec $\epsilon = 1/2 - \gamma + ln(8/Re)$ et $\gamma = 0.5772...$ la constante d'Euler. Bairstow *et al.* [13]

1. Il s'agit en fait d'un problème $3D$ dégénéré en un problème $2D$ à cause à sa symétrie axiale

2. En réalité, il n'existe pas de paradoxe : l'erreur de Whitehead consiste à chercher une perturbation de la solution de Stokes dont on sait, comme le montrera plus tard Oseen [11], qu'elle n'est pas valide à l'infini

3. Pour anecdote, en se basant sur un raisonnement erroné, Oseen arriva à la conclusion abusive que ces équations étaient également valables aux grands nombres de Reynolds

ont étendu la solution de l'équation d'Oseen à des nombres de Reynolds supérieurs et ont obtenu pour la force l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{K_0(Re/4)I_0(Re/4) + K_1(Re/4)I_1(Re/4)} \tag{1.2}$$

où les I_n et K_n sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées du premier et du second type. Nous avons simplifié cette expression lorsque $Re << 1$ grâce aux développements asymptotiques des fonctions de Bessel (voir par exemple l'ouvrage de Watson [14]) et en utilisant le logiciel Mathematica :

$$K_0(x) = (ln\frac{2}{x} - \gamma)(1 + \frac{x^2}{4}) + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4) \tag{1.3}$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}(\frac{1}{2} - \gamma + ln\frac{2}{x}) + \mathcal{O}(x^3) \tag{1.4}$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4) \tag{1.5}$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \mathcal{O}(x^4) \tag{1.6}$$

où l'on a posé $x = Re/4$. En négligeant les termes d'ordre supérieur à Re^2, la formule 1.2 devient :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}[1 - \frac{Re^2}{64}(1 + \frac{1}{4\epsilon})] \tag{1.7}$$

Bairstow *et al.* [13] ont donné également la force de traînée sur un cylindre elliptique de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$. Lorsque l'écoulement est parallèle au grand axe, ils ont obtenu :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{a/(a+b) - \gamma + ln(8/Re)} \tag{1.8}$$

avec $Re = \rho U_\infty(a+b)/\mu$. On retrouve évidemment la formule 1.1 lorsque $a = b$. Dans le cas où l'écoulement est parallèle au petit axe, il suffit d'intervertir a et b dans l'expression 1.8. Harrison [15] a également poursuivi le travail de Lamb [12] et a donné la force de traînée sous la forme très complexe suivante :

$$F = \frac{8\pi\mu U_\infty}{1 + (K_0(Re/4)/K_1(Re/4))[8/Re - K_0(Re/4)/K_1(Re/4)]} \tag{1.9}$$

La simplification de cette expression pour $Re << 1$ par l'utilisation des développements 1.3 et 1.4 donne :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}(1 - \frac{Re^2}{32}) \tag{1.10}$$

Faxén [16] a étudié le même problème et a calculé la force de traînée sous la forme du rapport de deux déterminants infinis. Il a évidemment résolu l'équation d'Oseen pour aboutir à ce résultat. En prenant le premier terme dans le développement de chacun de ces deux déterminants, on trouve en première approximation, l'expression de la force de traînée suivante :

$$F = \frac{8\pi\mu U_\infty}{(Re/4)K_1(Re/4) + 2K_0(Re/4)} \tag{1.11}$$

Nous avons simplifié de la même manière la formule 1.11 pour les faibles valeurs de Re :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}(1 - \frac{Re^2}{128\epsilon}) \tag{1.12}$$

Les formules 1.2 de Bairstow *et al.* [13], 1.9 de Harrison [15] et 1.11 de Faxén [16] n'apportent qu'une très faible amélioration à la formule 1.1 de Lamb comme on peut s'en rendre compte sur la figure 1.3 où l'on a tracé le coefficient de traînée $C_D = 2F/(\rho U_\infty^2 D)$ en fonction du nombre de Reynolds. Davies [17] a calculé les expressions du champ de vitesse à partir de l'équation d'Oseen en utilisant la méthode de Lamb poussée à un ordre supérieur. Il a obtenu pour la force de traînée l'expression :

$$F = \pi\mu U_\infty Re \frac{K_1(Re/4) - (Re/16)K_0(Re/4) + (Re/16)^2 K_1(Re/4)}{K_0(Re/4) + (Re/8)[K_1(Re/4) - (Re/16)K_0(Re/4)]} \tag{1.13}$$

Davies [17] s'est contenté du développement à l'ordre 1 de cette expression et a donc retrouvé la formule 1.1 de Lamb [12]. En poussant le développement à l'ordre supérieur, nous avons obtenu :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}[1 - \frac{Re^2}{16^2}(12\epsilon + \frac{3}{\epsilon} - 5)] \tag{1.14}$$

L'expression 1.13 corrige sensiblement mieux la formule de Lamb que les formules 1.2 de Bairstow *et al.* [13], 1.9 de Harrison [15] et 1.11 de Faxén [16] (Fig. 1.3 et 1.4). L'article de Davies [17] n'est pourtant que rarement cité, ceci provenant peut-être de la complexité de l'expression 1.13. Cette dernière formule est en outre bien meilleure que les expressions obtenues à partir de techniques plus récentes et plus complexes.

Depuis ces premiers travaux en effet, de nombreux auteurs ont tenté de trouver, en particulier par la méthode des développements asymptotiques raccordés, de nouvelles approximations à ce problème. Son principe est le suivant : le domaine fluide est divisé en une région intérieure où se trouve le cylindre dans laquelle on cherche une solution de l'équation de Stokes avec la condition de non-glissement sur le cylindre et en une région extérieure avec la condition aux limites portant sur la vitesse U_∞ où l'on résout l'équation d'Oseen. Les deux solutions sont ensuite raccordées à l'interface des deux domaines pour obtenir une solution unique. Des variantes plus détaillées faisant intervenir des domaines intermédiaires ont également été utilisées. Kaplun [18], en se basant

sur la résolution des équations de Navier-Stokes, a par exemple obtenu l'expression de la force de traînée suivante :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}(1 + \sum_{n=2} \frac{a_n}{\epsilon^n}) \tag{1.15}$$

On y voit que la formule 1.1 de Lamb [12] est corrigée par la série du membre de droite, la première approximation étant obtenue pour le coefficient $a_2 = -0.8669$. Kida *et al.* [19, 20], utilisant une approche intégrale des développements asymptotiques, ont proposé l'expression suivante :

$$F = \frac{8\pi\mu U_\infty}{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + 3.5}} \tag{1.16}$$

Tomotika *et al.* [21, 22] donnent quant à eux la force de traînée sous la forme :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}[1 - \frac{Re^2}{32}(\frac{5}{16\epsilon} - \frac{1}{2} + \epsilon)] \tag{1.17}$$

Proudman *et al.* [23] ont également étudié ce problème. Dans leur travail, ils ont fait la remarque qu'il était vain de chercher à obtenir des solutions meilleures que celle obtenue par Lamb [12] à partir des équations d'Oseen car la formule 1.1 était déjà la plus précise qu'on puisse obtenir à cet ordre de précision. Sur cette base, les travaux de Bairstow *et al.* [13] ou de Tomotika *et al.* [21, 22] seraient à peine valides. Concernant les travaux traitant des raccordements asymptotiques, on peut encore citer ceux de Lagerstrom [24], Van Dyke [25], Tamada *et al.* [26] ou encore Skinner [27] qui a étendu les développements de Kaplun [18] et de Proudman *et al.* [23], pour obtenir l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty}{\epsilon}[1 - \frac{0.8669}{\epsilon^2} - \frac{Re^2}{128}(\epsilon - \frac{1}{2})] \tag{1.18}$$

On constate que cette expression est identique à la formule 1.15 donnée par Kaplun [18] au terme en Re^2 près qui ne représente d'ailleurs qu'une correction très minime. En combinant la technique des développements asymptotiques raccordés avec des résultats numériques, Keller *et al.* [28] ont également résolu ce problème et ont obtenu exactement la même expression 1.18 que Skinner [27]. Lee *et al.* [29] ont utilisé une méthode numérique de collocation couplée avec la technique des développements asymptotiques pour obtenir l'expression :

$$F = -\frac{4\pi\mu U_\infty}{ln(Re/2)}[1 + \frac{1}{ln(Re/2)}(\frac{1}{2} - \gamma + ln4)] \tag{1.19}$$

Ces techniques de raccordements asymptotiques sont très difficiles à mettre en œuvre et les solutions qu'elles donnent ne sont généralement plus valides au-delà de $Re \approx 0.1$ comme on peut s'en rendre compte sur la figure 1.3 exception faite de la formule 1.16 proposée par Kida *et al.* [19, 20] qui reste valable jusqu'à des nombres de Reynolds bien supérieurs. On peut par ailleurs s'étonner de la bonne tenue de la formule 1.13 de Davies [17] dont le travail est pourtant rarement cité. Nous avons rassemblé dans

la figure 1.4 les expressions qui nous apparaissent être les meilleures accompagnées de résultats expérimentaux. Tous ces résultats analytiques, issus de développements asymptotiques ou de calcul de perturbations, donnent des solutions où intervient un terme logarithmique du nombre de Reynolds. Nous allons voir dans le prochain paragraphe que les solutions des problèmes concernant les cylindres confinés donnent des solutions qui ne présentent plus ce caractère singulier. Disons également rapidement un mot sur le travail de Batchelor [30] utilisant la «*théorie des corps élancés*[4]» pour déterminer le mouvement d'un object de section arbitraire. Cette technique est basée sur l'utilisation de singularités distribuées le long de l'axe du cylindre placé dans un écoulement décrit par l'équation de Stokes. Appliquée au cas d'un cylindre de longueur finie l grande devant son rayon a évoluant à vitesse constante en milieu illimité, cette théorie conduit pour la force de traînée à l'expression :

$$F = 4\pi\mu U l\varepsilon(1 - 0.193\varepsilon + 0.215\varepsilon^2 + 0.97\varepsilon^3) \tag{1.20}$$

où $\varepsilon = [ln(l/a)]^{-1}$ est un paramètre géométrique fonction du rapport de forme du cylindre. Ce résultat a été confirmé par Keller *et al.* [31]. Il est très important de noter que dans le cas d'un cylindre de longueur finie, la solution de l'équation de Stokes existe. Cette force tend évidement vers l'infini lorsque $l \to \infty$. Quant à la force par unité de longueur F/l, elle tend vers 0 dans cette même limite ce qui démontre que la solution de l'équation de Stokes pour un cylindre infini conduit à une force par unité de longueur nulle confirmant la formule 1.1 de Lamb [12] pour $Re \to 0$.

Des résolutions numériques nombreuses, utilisant des techniques et des algorithmes très variés, ont également été menées pour tenter de résoudre le problème du cylindre en milieu infini. Elles concernent pourtant rarement le régime des faibles nombres de Reynolds. On peut par exemple citer l'article de Allen *et al.* [32] pour des nombres de Reynolds allant de 0 à 10^3, celui de Dennis *et al.* [33] dans la gamme 0.01 à 10^6, celui de Dennis *et al.* [34] pour $Re < 100$ ou récemment celui de Lange *et al.* [35] qui utilisent la technique des volumes finis pour simuler l'écoulement autour d'un cylindre dans la gamme $10^{-4} \leq Re \leq 200$. Dans la plupart des cas, ces études numériques sont en accord avec les formules analytiques. Notons que dans les travaux numériques consacrés aux écoulements aux faibles nombres de Reynolds, on est confronté au problème du confinement dû à la finitude du domaine de calcul.

Disons enfin quelques mots sur le problème du cylindre en mouvement de rotation uniforme à la vitesse ω en milieu infini. Aux faibles nombres de Reynolds $Re = 2\rho\omega a^2/\mu$, la résolution de ce problème classique[5] montre que le moment (par unité de longueur) des forces visqueuses par rapport à l'axe du cylindre a pour expression :

$$M = 4\pi\mu\omega a^2$$

4. En anglais : slender body theory
5. voir par exemple page 96 du livre de Comolet [5]

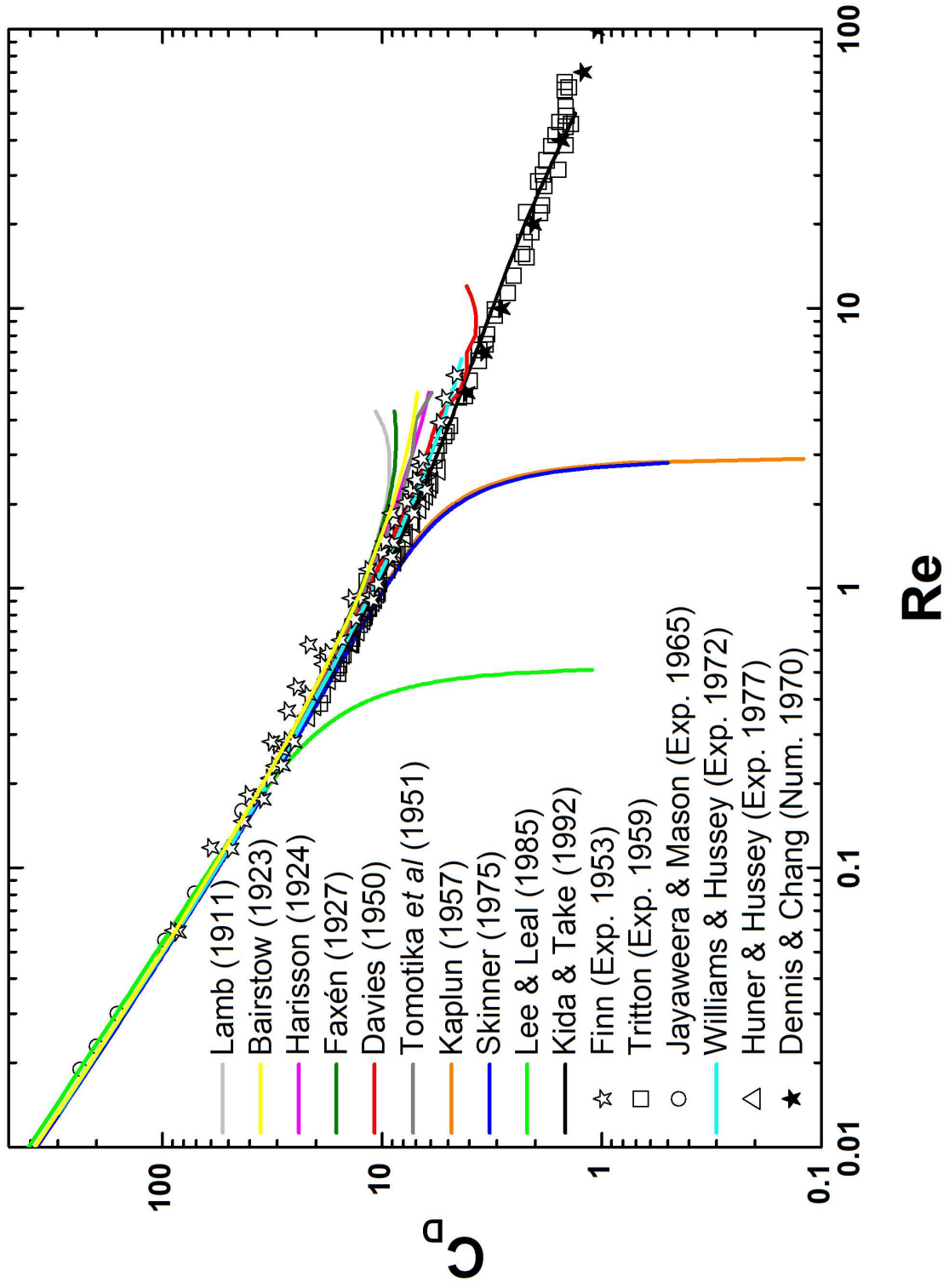

FIG. 1.3 – *Coefficient de traînée pour un cylindre en milieu infini en fonction du nombre de Reynolds*

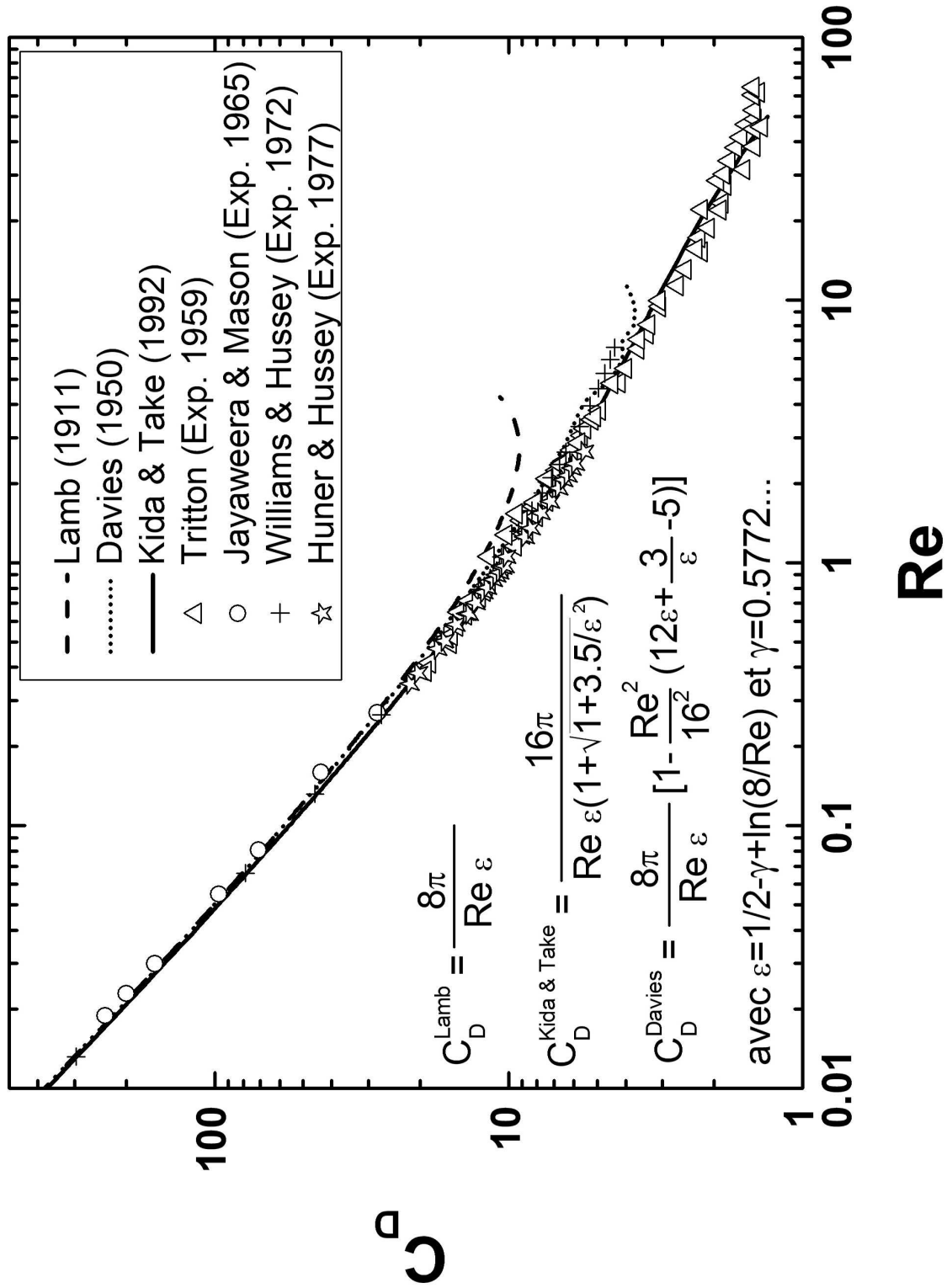

FIG. 1.4 – *C_D en fonction de Re*

Le moment M étant proportionnel à la vitesse de rotation ω du cylindre, cette solution est une *solution de type Stokes*. Contrairement au cas de la translation, il n'y a pas de paradoxe pour le problème de la rotation.

1.1.2 Etudes expérimentales

Les études expérimentales sont également très nombreuses pour les écoulements autour des cylindres à grands nombres de Reynolds mais plutôt rares dans le cas des régimes très visqueux. Entrant dans cette dernière catégorie qui nous intéresse plus particulièrement, on peut par exemple se référer au travail de Tritton [36]. Ce dernier a étudié la force de traînée sur un cylindre (une fibre de quartz) qui fléchit sous l'action d'un écoulement pour des nombres de Reynolds se situant dans la gamme $0.5 < Re < 100$. Les expériences de Jayaweera *et al.* [37] se situent dans la gamme $0.001 < Re < 1000$. Ce travail consiste en la mesure de la force de traînée sur des fibres cylindriques en sédimentation dans des fluides visqueux. Huner *et al.* [38] ont effectué des expériences du même acabit dans la gamme $0.23 < Re < 2.6$. Dans ces deux derniers travaux, les auteurs ont corrigé de façon empirique ou semi-empirique leurs résultats pour tenir compte de la longueur finie de leurs cylindres et de leur confinement. Les mesures de Finn [39] se situent dans la gamme $0.06 < Re < 6$. Son montage consiste en un fil métallique de quelques microns de diamètre accroché par son extrémité supérieure à un support et à l'autre extrémité duquel est suspendue une petite masse. Sous l'action d'un écoulement d'air, le fil s'incline et connaissant la valeur de l'angle d'inclinaison, un simple bilan des moments à l'équilibre permet de déterminer la traînée sur le fil cylindrique. Une approche expérimentale indirecte de ce problème peut être trouvée dans le travail de Williams *et al.* [40]. Leur montage qui consiste en un pendule de torsion dont les bras supportent deux cylindres baignant dans un fluide visqueux, permet la mesure des coefficient d'inertie et d'amortissement du système. Les auteurs extrapolent leurs résultats au cas où la période d'oscillation du pendule est infinie et moyennant quelques hypothèses, ils proposent l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U_\infty k' Re^2}{173.98} \tag{1.21}$$

où le coefficient d'amortissement k' est donné par l'expression :

$$k' = \frac{4N_1}{xN_0} sin(\varphi_1 - \varphi_0 - \frac{3\pi}{4})$$

avec N_n et φ_n le module et la phase de la fonction de Kelvin $ker_n(x) + ikei_n(x)$ d'argument $x = 0.15163Re$. Une partie des résultats de Tritton [36], Finn [39], Jayaweera *et al.* [37] et de Huner *et al.* [38] est reportée sur la figure 1.3 et 1.4. Dans les articles de Wieselberger [41,42] et de Relf [43], on trouve encore quelques résultats expérimentaux mais pour des nombres de Reynolds généralement supérieurs à l'unité. On peut faire la remarque qu'il est impossible de faire des expériences sur un cylindre en milieu infini (comme le prouvent les corrections dans les travaux de Jayaweera *et al.* [37] et de Huner *et al.* [38]). L'environnement du cylindre, qu'il soit dans une soufflerie ou un réservoir

quelconque, va créer immanquablement un confinement. Si cela ne prête pas trop à conséquence pour les écoulements à grands nombres de Reynolds, il n'en est pas de même dans le cas des écoulements où la viscosité est prédominante et l'épaisseur de couche limite très grande. Nous verrons en effet que l'influence du confinement est d'autant plus marquée que le nombre de Reynolds est faible. On comprend alors aisément les difficultés qu'on eu les expérimentateurs pour essayer de faire coïncider leurs mesures avec les expressions analytiques données plus haut, sans compter les difficultés liées à la mesure de quantités très faibles.

1.2 Cylindre en milieu confiné aux faibles nombres de Reynolds

1.2.1 Etudes analytiques et numériques

Dans les travaux analytiques, le confinement d'un cylindre peut être réalisé de plusieurs façons : il peut être dû à la proximité d'une seule paroi ou de plusieurs. Dans ce cas, le *paradoxe de Stokes*, propre aux écoulements en milieu illimité, disparaît car les solutions de l'équation de Stokes n'ont plus à être raccordées à l'infini. On a en quelque sorte introduit une longueur de coupure par la biais des conditions aux limites. Un argument dimensionnel élégant est donné dans l'ouvrage de Happel et Brenner [3] pour justifier cette observation[6]. L'équation d'Oseen donne évidemment toujours des solutions mais l'équation de Stokes en possède maintenant également. Les solutions de ce type de problèmes ont la particularité de donner une force de traînée qui est proportionnelle à la vitesse du cylindre (où à la vitesse du fluide à l'infini si le cylindre est immobile) à l'instar de la force de Stokes sur une sphère en milieu infini. En d'autres termes, le coefficient de traînée est du type $C_D \propto Re^{-1}$. Par analogie, nous appellerons par la suite «*solutions de type Stokes*» les solutions qui présenteront cette particularité. Ce comportement est donc fondamentalement différent de celui observé et décrit dans le paragraphe précédent traitant du cylindre en milieu infini où il apparaît un terme singulier logarithmique comme on peut le voir par exemple dans la formule 1.1 page 6 de Lamb [12]. On trouve très tôt dans la littérature de telles solutions. Elles peuvent être regroupées principalement en sept familles : celle concernant un cylindre se déplaçant en milieu semi-infini parallèlement à un seul plan (1), celle d'un cylindre se déplaçant en milieu semi-infini perpendiculairement à un seul plan (2), celle concernant un cylindre se déplaçant à vitesse constante entre deux plans de manière symétrique (3), celle

6. Dans le cas d'un cylindre de longueur infinie de rayon a dans un écoulement à la vitesse U_∞ dans un fluide illimité de viscosité dynamique μ, la force F sur le cylindre est une force *par unité de longueur*. En régime visqueux, cette force ne peut dépendre que des paramètres U_∞, μ et a, la masse volumique ρ n'étant pas un paramètre (elle n'apparaît pas dans l'équation de Stokes stationnaire). Le seul groupe sans dimension qu'on puisse former à partir de ces grandeurs est $F/\mu U_\infty$ et l'on doit donc avoir $F/\mu U_\infty = Cste$. Une telle loi est visiblement impossible puisqu'elle indique que la force par unité de longueur est indépendante du rayon du cylindre. En d'autres termes, si $a \to 0$, cette force ne disparaît pas alors que le cylindre a disparu. Si l'on introduit par le biais du confinement une seconde longueur caractéristique de coupure b, l'analyse dimensionnelle conduit maintenant à une loi du type $F/\mu U_\infty = \text{fonction}(a/b)$ qui n'est plus nécessairement paradoxale

d'un cylindre se déplaçant à vitesse constante parallèlement à deux plans de façon dissymétrique (4), celle concernant un cylindre fixe placé symétriquement entre deux plans parallèles dans un écoulement de Poiseuille plan (5), celle traitant d'un cylindre en rotation uniforme près d'un plan infini (6) et enfin celle concernant un cylindre en rotation uniforme placé symétriquement entre deux plans (7). Dans ce qui suit, le rayon du cylindre sera noté a. Dans le cas où il n'y a qu'un seul plan, on appellera b la distance entre le centre du cylindre et ce plan. En présence de 2 plans, b représentera la demi distance les séparant. On définit le paramètre sans dimension $k = a/b$ qui traduit le confinement du cylindre. Lorsque le cylindre confiné entre deux plans est en dehors du plan de symétrie, on notera c la distance entre le centre du cylindre et ce plan de symétrie et on définit le paramètre d'excentrement $e = c/b$. La vitesse du cylindre mobile s'appellera U, la vitesse maximale de l'écoulement de Poiseuille sera notée U_{max} et la vitesse de rotation du cylindre sera notée ω (voir la figure 1.5 pour toutes ces définitions). Les caractéristiques de ces études sont regroupées dans le tableau 1.1. On y constate que la majorité des études analytiques sont basées sur l'équation de Stokes ce qui confirme la disparition du *paradoxe de Stokes* dans le cas où le cylindre est confiné.

1.2.1.1 Cylindre se déplaçant à vitesse constante parallèlement à un seul plan (figure 1.5-1)

Takaisi [48] a résolu l'équation d'Oseen [7] et obtenu pour la force de traînée l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{ln(2/k)} \tag{1.22}$$

En 1950, Wannier [44] s'est intéressé à l'écoulement entre deux cylindres excentrés en résolvant l'équation de Stokes. En faisant tendre le rayon du cylindre extérieur vers l'infini, on obtient la situation équivalente d'un cylindre près d'un plan. La force de traînée sur le cylindre est alors :

$$F = \frac{8\pi\mu U}{ln[(1+\sqrt{1-k^2})/(1-\sqrt{1-k^2})]} \tag{1.23}$$

Plus récemment, Jeffrey *et al.* [45] se sont penchés sur le même problème en résolvant l'équation de Stokes dans un système de coordonnées bisphériques. Ils ont obtenu l'expression de la force résistante suivante :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{ln[(1+\sqrt{1-k^2})/k]} \tag{1.24}$$

Les expressions 1.23 et 1.24 sont identiques. De plus, lorsque $k \to 0$, elles tendent toutes deux vers l'expression 1.22 obtenue par Takaisi [48]. Par ailleurs, les études de Wannier [44] et de Jeffrey *et al.* [45] révèlent que dans l'approximation de Stokes, le cylindre n'est soumis à aucun moment lorsqu'il se translate parallèlement à un seul plan.

7. Rappelons que l'obtention de cette solution ne nécessite nullement l'utilisation de l'approximation d'Oseen

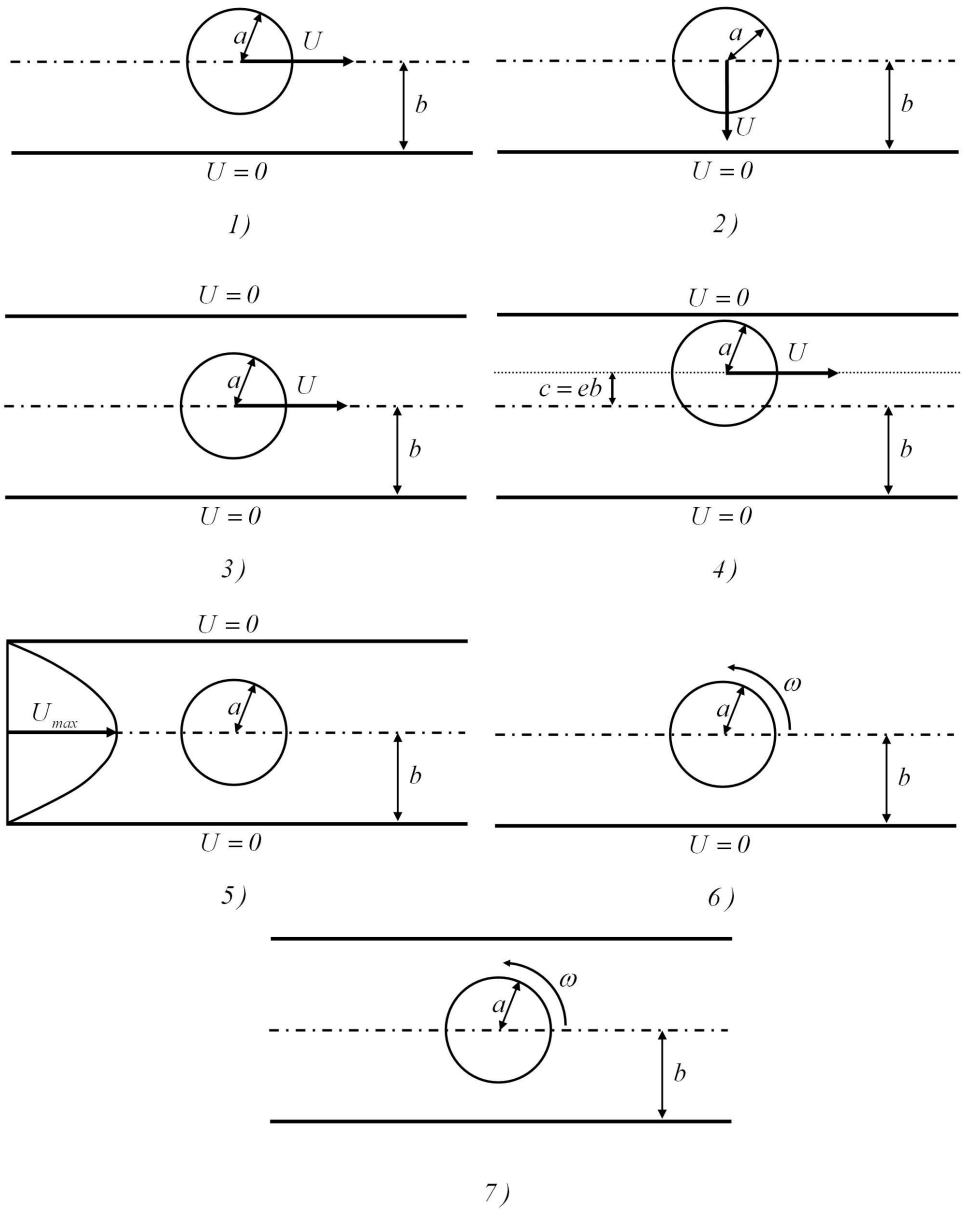

FIG. 1.5 – *Différents types de confinements d'un cylindre dans les études analytiques*

Auteur	**Equation résolue**	**Type de mouvement/écoulement**
Wannier [44]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 1 plan
Jeffrey *et al.* [45]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 1 plan
De Mestre [46]*	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 1 plan
Katz *et al.* [47]*	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 1 plan
Takaisi [48]	Oseen	Transl. unif. parallèlement à 1 plan
Katz *et al.* [47]*	Stokes	Transl. unif. perpendiculairement à 1 plan
Brenner [49]*	Stokes	Transl. unif. perpendiculairement à 1 plan
De Mestre *et al.* [50]*	Stokes	Transl. unif. perpendiculairement à 1 plan
Jeffrey *et al.* [45]	Stokes	Transl. unif. perpendiculairement à 1 plan
Faxén [51]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Takaisi [52]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
De Mestre [46]*	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Katz *et al.* [47]*	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Tachibana *et al.* [53]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Bézine *et al.* [54]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Bouard *et al.* [55]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Dvinsky *et al.* [56]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Bourot *et al.* [57]	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Harper *et al.* [58]†	Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Takaisi [59]	Oseen	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Ristow [60]	Navier-Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Hu [61]	Navier-Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Feng *et al.* [62]	Navier-Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Ben Richou *et al.* [63]	Navier-Stokes	Transl. unif. parallèlement à 2 plans
Bairstow *et al.* [64]	Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Faxén [51]	Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Takaisi [65]	Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Harrison [15]	Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Bézine *et al.* [54]	Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Dvinsky *et al.* [66]	Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Ben Richou *et al.* [67]	Navier-Stokes	Poiseuille entre 2 plans
Jeffery [68]	Stokes	Rot. unif. près d'1 plan
Wannier [44]	Stokes	Rot. unif. près d'1 plan
Jeffrey *et al.* [45]	Stokes	Rot. unif. près d'1 plan
Ranger [69]	Stokes	Rot. unif. près d'1 plan
Howland *et al.* [70]	Stokes	Rot. unif. entre 2 plans
Hellou [71, 72]	Stokes	Rot. unif. entre 2 plans
Hellou *et al.* [73]	Stokes	Rot. unif. entre 2 plans

* cylindre de longueur finie (les autres références correspondent à des cylindres de longueur infinie)
† cylindre excentré (les autres références pour 1 cylindre entre 2 plans concernent des cylindre centrés)

TAB. 1.1 – *Caractéristiques des différentes études*

De Mestre [46] a exploité la «*théorie des corps élancés*» développée par Batchelor [30] dans le cas d'un cylindre de longueur finie l. Il a obtenu pour la traînée l'expression complexe suivante :

$$F = 4\pi\mu U l\varepsilon\{1 + \frac{\varepsilon}{2}[W - 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} ln(1-x^2)dx] + \varepsilon^2 Q\} \tag{1.25}$$

avec $\varepsilon = [ln(l/a)]^{-1}$, $W = 2sinh^{-1}(l/2b) - \sqrt{1+(2b/l)^2} + 2b/l$ et

$$Q = \frac{1}{2}\int_0^1 [ln(1-x^2) + 1 + sinh^{-1}\frac{l(1+x)}{4b} - sinh^{-1}\frac{l(1-x)}{4b} - \frac{1+x}{2\sqrt{(1+x)^2+(4b/l)^2}} - \frac{1-x}{2\sqrt{(1-x)^2+(4b/l)^2}}]dx$$

Katz *et al.* [47] ont aussi exploité la «*théorie des corps élancés*» et ont proposé comme expression de la force de traînée :

$$F = \frac{4\pi\mu U l}{ln(2/k)} \tag{1.26}$$

On retrouve la formule 1.22 obtenue par Takaisi [48] en prenant cette force par unité de longueur.

1.2.1.2 Cylindre se déplaçant à vitesse constante perpendiculairement à un seul plan (figure 1.5-2)

Katz *et al.* [47] se sont ensuite intéressés au cas où un cylindre de longueur finie translate à vitesse constante perpendiculairement à un plan. Lorsque le cylindre est proche du plan mais en dehors de la région où s'applique la théorie de lubrification, ils obtiennent pour la force résistante l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U l}{ln(2/k) - 1} \tag{1.27}$$

De Mestre *et al.* [50] ont utilisé cette même théorie et ont obtenu pour la force de traînée la formule suivante[8], valable pour $a/l << 1$ et $b/l << 1$:

$$F = 4\pi\mu U l\varepsilon\{1 + \frac{\varepsilon}{2}[W_1 - 1.386]\} \tag{1.28}$$

avec $\varepsilon = [ln(l/a)]^{-1}$ et $W_1 = 2sinh^{-1}(l/2b) + 1/\sqrt{1+(2b/l)^2}$. Dans la limite $b/l \to 0$ avec $l >> b >> a$, la formule 1.28 se simplifie en la formule 1.27 de Katz *et al.* [47], expression également donnée par Lightill [75]. Dans la même lignée, citons encore le travail de Brenner [49] qui donne la traînée sous la forme :

8. Trahan *et al.* [74] indiquent dans leur travail que la constante numérique doit être égale à 0.386 plutôt que 1.386 dans l'expression 1.28 de De Mestre *et al.* [50]

$$F = \frac{4\pi\mu U l}{1/F_\infty - 0.75 l/b} \tag{1.29}$$

où $F_\infty = \varepsilon - 0.193\varepsilon^2 + 0.215\varepsilon^3 + 0.97\varepsilon^4$. Cette expression est valable pour $a << l << b$. Par une toute autre technique, Jeffrey *et al.* [45] ont traité le même problème mais pour un cylindre de longueur infinie. Dans ce cas, ils obtiennent pour la traînée la formule :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{ln[(1+\sqrt{1-k^2})/k] - \sqrt{1-k^2}} \tag{1.30}$$

Dans le cas $k << 1$, la formule 1.30 se réduit à l'équation 1.27 en prenant $l = 1$ dans cette dernière ce qui montre que les approximations utilisées par Katz *et al.* [47] en appliquant la «*théorie des corps élancés*» à un cylindre de longueur finie reviennent à supposer que le cylindre est de longueur infinie lorsque $k << 1$. En d'autres termes, lorsque la distance entre le cylindre et le plan est plus petite que le rayon a du cylindre, les effets de bords sont négligeables et le cylindre se comporte comme un corps de longueur infinie, même si le rapport l/a est inférieur à 1. Ceci justifie que les résultats de l'étude d'un cylindre de longueur finie en situation de confinement (comme dans le cas d'une fibre cylindrique par exemple) sont équivalents à ceux d'un cylindre de taille infinie en situation de confinement (comme dans notre étude).

1.2.1.3 Cylindre se déplaçant à vitesse constante symétriquement entre deux plans parallèles (figure 1.5-3)

Faxén [51] a résolu ce problème dans l'approximation de Stokes et a donné pour la force de traînée l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-0.9156892732 + 1.72433844k^2 - 1.730194k^4 + 2.405644k^6 - 4.59131k^8 - lnk} \tag{1.31}$$

Takaisi [59] s'est attaqué également à ce problème tout d'abord dans l'approximation d'Oseen où il a obtenu la force de traînée :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-0.9156 - lnk} \tag{1.32}$$

puis en résolvant l'équation de Stokes pour aboutir au résultat plus précis suivant [52] :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-0.9156 + 1.7243k^2 - lnk} \tag{1.33}$$

Harper *et al.* [58] ont résolu le problème plus général d'un cylindre entre deux plans en situation excentrée par l'utilisation d'une méthode de raccordement asymptotique valable pour les faibles valeurs de k. Dans le cas particulier où le cylindre se trouve exactement entre les deux plans, ils proposent une expression de la traînée très proche de la formule 1.32 donnée par Takaisi [59] :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-0.92 - lnk} \tag{1.34}$$

De Mestre [46] a également traité ce problème de façon analytique mais pour un cylindre de longueur finie l en utilisant la «*théorie des corps élancés*» couplée à une méthode analogue à celle que Faxén [76] avait utilisé pour traiter le cas d'une sphère se déplaçant à mi-chemin entre deux plans parallèles. L'expression de la force de traînée peut s'écrire :

$$F = 4\pi\mu U l\varepsilon\{1 + \frac{\varepsilon}{2}[2.677\frac{l}{2b} - 1 - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} ln(1-x^2)dx]\} \tag{1.35}$$

avec $\varepsilon = [ln(l/a)]^{-1}$. Katz *et al.* [47] ont également obtenu par l'utilisation de cette même technique l'expression de la traînée :

$$F = \frac{4\pi\mu U l}{ln(2/k) - 1.609} \tag{1.36}$$

Cette expression est très proche des formules 1.32 de Takaisi [59] et 1.34 de Harper *et al.* [58] puisque $ln2 - 1.609 \approx -0.91585$. Grâce à l'essor constant de la puissance des ordinateurs et au développement parallèle de nouvelles techniques depuis une trentaine d'années, l'approche numérique s'est naturellement penché sur ce type de problème. En utilisant une méthode de collocation, Tachibana *et al.* [53] ont trouvé une solution semi-analytique de l'équation de Stokes dans le cas bidimensionnel. Ils ont donné comme expression de la force de traînée :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-0.91527 + 1.70673k^2 - 1.523k^4 + 1.22664k^6 - 0.558339k^8 - lnk} \tag{1.37}$$

La résolution numérique de l'équation de Stokes par une méthode d'équation intégrale a été proposée par Bézine *et al.* [54]. Ils ne donnent malheureusement pas d'expression générale de la force de traînée mais un résultat numérique pour le cas particulier où $k = 0.5$:

$$F(k = 0.5) = 98.8\mu U \tag{1.38}$$

Bouard *et al.* [55] ont cherché pour la fonction de courant ψ une solution satisfaisant à l'équation de Stokes $\nabla^4\psi = 0$. Une telle solution respectant les symétries du problème et la condition d'adhérence à la paroi du cylindre se présente sous la forme d'une somme de produits de Laplace contenant des puissances positives de la coordonnée radiale r, soulevant ainsi la difficulté d'un raccordement à l'infini. Pour faire face à cette divergence, les auteurs introduisent une longueur de coupure à l'amont et à l'aval du cylindre, distance à laquelle ils raccordent par une méthode des moindres carrés leur solution avec le champ de vitesse uniforme (ils se placent dans un repère lié au cylindre). Ils ont calculé la force de traînée pour $0.001 < k < 0.9$ sous la forme :

$$F = 4\pi\mu U f(k) \tag{1.39}$$

avec les valeurs de $f(k)$ données dans le tableau 1.2.

k	0.001	0.01	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9
$f(k)$	0.1669	0.2711	0.7126	1.749	7.914	68.50	861.1

TAB. 1.2 – *Valeurs de la fonction $f(k)$ de l'expression 1.39*

En 1997, Ristow [60] a étudié numériquement par la méthode des différences finies la sédimentation d'un cylindre confiné entre deux plans verticaux[9]. Il a cherché l'expression de la vitesse limite de chute en milieu confiné U sous la forme :

$$\frac{U}{U_\infty} = f(k) \tag{1.40}$$

où U_∞ est la vitesse terminale de sédimentation en milieu infini. Il obtient cette vitesse en extrapolant, lorsque $k \to 0$, les valeurs des vitesses U calculées pour différentes valeurs de k. Il propose pour $f(k)$ l'expression :

$$f(k) \approx 1 - 1.14k$$

Les récents travaux de Ben Richou *et al.* [63] traitent également de ce problème par une méthode numérique basée sur une transformation en coordonnées curvilignes orthogonales des équations de Navier-Stokes et de continuité en formulation *fonction de courant-vorticité*.

Pour finir ce paragraphe, mentionnons le travail analytique et numérique de Bourot *et al.* [57] qui se sont moins intéressés à la détermination de la force de traînée qu'à celle de la structure de l'écoulement dans cette configuration. Ils ont en particulier montré l'existence de cellules de recirculation comme on peut le voir sur la figure 1.6, structures analogues à celles que l'on trouve dans le cas d'un cylindre en rotation (voir le paragraphe 1.2.2.2).

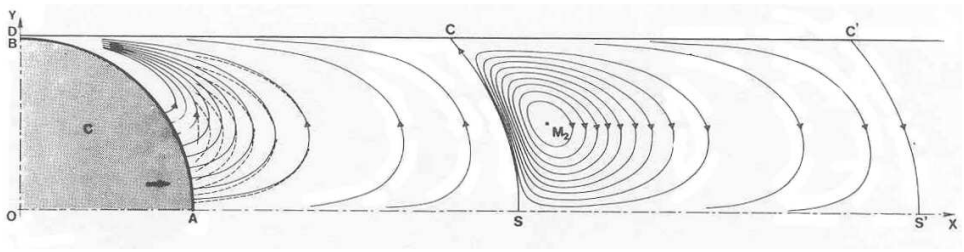

FIG. 1.6 – *Lignes de courant autour d'un cylindre en translation uniforme entre deux plans parallèles en situation centrée avec $k = 0.99$. Source : Bourot* et al. *[57]*

9. Notons que les nombres de Reynolds de cette étude ne respectent pas forcément la condition $Re << 1$. Nous verrons un peu plus loin que cela n'est pas nécessairement incompatible avec les «*solutions de type Stokes*». En effet, plus le cylindre est confiné, plus la transition entre le régime linéaire et le régime inertiel est décalée vers les grands nombres de Reynolds

1.2.1.4 Cylindre se déplaçant à vitesse constante de façon asymétrique entre deux plans parallèles (figure 1.5-4)

A notre connaissance, la seule étude théorique qui traite de ce problème est celle de Harper *et al.* [58] déjà citée. La force de traînée s'écrit sous la forme :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-K(e) - lnk} \tag{1.41}$$

où $K(e) = 1/2 + g(e)$ et $g(e)$ est une fonction de l'excentrement e représentée sur la figure 1.7 et définie par l'intégrale :

$$g(e) = \int_0^\infty \{ \frac{\xi^2(sC - ecS)[(1+e)e^{-e\xi} + (1-e)e^{e\xi}]}{\xi z}$$

$$+ \frac{[s(C + \xi eS) - \xi cC][1 - \xi(1+e)]e^{-e\xi + [1-\xi(1-e)]e^{e\xi}}}{\xi z}$$

$$- \frac{\xi^2(cS - esC)[(1+e)e^{-e\xi} - (1-e)e^{e\xi}]}{\xi(z + 4\xi)}$$

$$+ \frac{[c(S + \xi eC) - \xi sS][1 - \xi(1+e)]e^{-e\xi} - [1 - \xi(1-e)e^{e\xi}]}{\xi(z + 4\xi)} - \frac{1}{\xi} \} e^{-\xi} d\xi \tag{1.42}$$

avec $s = sinh(\xi)$, $S = sinh(e\xi)$, $c = cosh(\xi)$, $C = cosh(e\xi)$ et $z = sinh(2\xi) - 2\xi$.

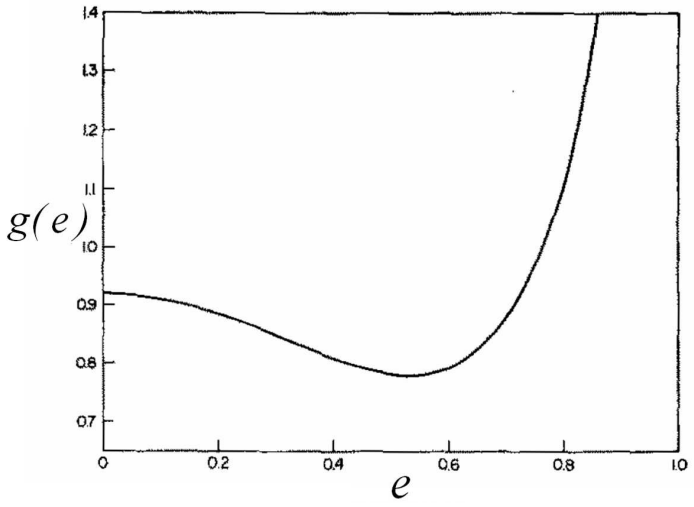

FIG. 1.7 – $g(e)$ *en fonction de* e. *Source : Harper* et al. *[58]*

On remarque que la variation de $g(e)$ n'est pas monotone ce qui signifie que la force de traînée est minimale en dehors du plan de symétrie. Leur travail prédit qu'elle le sera pour $e \approx 0.55$. Cette technique ne peut en aucun cas donner de résultats précis pour $k > 0.01$ et ne s'applique donc qu'aux très faibles confinements.

En ce qui concerne les études numériques consacrées à ce problème, on peut par exemple citer les travaux de Dvinsky *et al.* [56], de Hu [61], de Feng *et al.* [62] ou encore ceux de Ben Richou *et al.* [63]. Toutes ces études confirment la présence du minimum de traînée en dehors du plan de symétrie.

1.2.1.5 Cylindre fixe placé symétriquement entre deux plans dans un écoulement de Poiseuille plan (figure 1.5-5)

Bairstow *et al.* [64] ont étudié les problèmes régis par l'équation différentielle $\nabla^4\psi = 0$ (où ψ est la fonction de courant), c'est-à-dire par l'équation de Stokes. Ils ont illustré leur analyse en traitant l'écoulement à faible nombre de Reynolds autour d'un cylindre circulaire confiné symétriquement entre deux plans. En combinant traitement analytique et numérique, ils ont obtenu l'expression de la traînée sur le cylindre sous forme numérique dans le cas particulier où $k = 0.2$:

$$F = 2.26\pi\mu U_{max} \tag{1.43}$$

Faxén [51] s'est basé encore sur la résolution de l'équation de Stokes pour obtenir l'expression de la force :

$$F = \frac{4\pi\mu U_{max}}{A_0 - (1 + 0.5k^2 + A_4k^4 + A_6k^6 + A_8k^8)lnk + B_2k^2 + B_4k^4 + B_6k^6 + B_8k^8} \tag{1.44}$$

avec les coefficients numériques donnés dans le tableau 1.3.

$A_0 = -0.9156892732$	$B_2 = 1.26653975$
$A_4 = 0.05464866$	$B_4 = -0.9180433$
$A_6 = -0.26462967$	$B_6 = 1.877101$
$A_8 = 0.792986$	$B_8 = -4.66549$

TAB. 1.3 – *Coefficients de l'expression 1.44*

Takaisi [65] a résolu l'équation de Stokes par une méthode des images analogue à celle qu'avait utilisée Faxén [76] pour résoudre le cas de la sphère. Il a obtenu l'expression de la force de traînée :

$$F = \frac{\pi\mu U_{max}(4k^2 - 8)}{1.8312 - 3.4486k^2 + 2lnk} \tag{1.45}$$

Harrison [15] a résolu encore l'équation de Stokes pour trouver l'expression de la force de traînée suivante :

$$F = \frac{\pi\mu U_{max}(4k^2 - 8)}{1.9362 - 3.7520k^2 + 2lnk} \tag{1.46}$$

Bézine *et al.* [54] ont également cherché une solution à ce problème (méthode identique à celle décrite plus haut). Dans le cas où $k = 0.2$, ils ont obtenu pour la traînée :

$$F(k = 0.2) = 16.1\mu U_{max} \tag{1.47}$$

Pour les études numériques, citons par exemple les travaux de Ben Richou *et al.* [67] dont la méthode a été évoquée plus haut. Dans le tableau 1.4, nous comparons les valeurs de la force de traînée données par certaines des expressions citées ci-dessus. On constate que la formule 1.33 de Takaisi [52] n'est déjà plus valide pour $k = 0.5$ puisque la valeur qu'elle donne est très différente des autres. Concernant l'écoulement de Poiseuille, les résultats sont globalement en bon accord.

	Faxén [51]	Takaisi [52, 65]	Ben Richou [63, 67]	Bézine [54]	Tachibana [53]	Harrison [15]
$F(k = 0.5)/\mu U$	104.668	60.252	99.6141	98.8	99.5	/
$F(k = 0.2/\mu U_{max}$	16.2072	16.1533	16.3585	16.1	/	17.1989

TAB. 1.4 – *Comparaison de quelques résultats analytiques et numériques. La première ligne correspond à un écoulement uniforme pour $k = 0.5$ et la seconde à un écoulement de Poiseuille pour $k = 0.2$*

A noter que la valeur $2.26\pi \approx 7$ de la formule 1.43 donnée par Bairstow *et al.* [64] est très éloignée des autres valeurs qui sont de l'ordre de 16.

A notre connaissance, il n'existe aucun travail traitant analytiquement, même en régime asymptotique, d'un cylindre excentré en écoulement de Poiseuille plan. Il existe cependant l'étude numérique de Dvinsky *et al.* [66] qui traite d'un cylindre centré mais aussi excentré en résolvant l'équation de Stokes en formulation $\psi - \omega$ sur un maillage obtenu par une transformation numérique des coordonnées du plan.

1.2.1.6 Cylindre en rotation uniforme à proximité d'un seul plan (figure 1.5-6)

Dans l'ordre chronologique, l'équation de Stokes pour ce problème a été résolue par Jeffery [68] en 1922, Wannier [44] en 1950, Jeffrey *et al.* [45] et Ranger [69] en 1980. Tous ces auteurs ont obtenu pour le moment des forces visqueuses l'expression :

$$M = \frac{4\pi\mu\omega a^2}{\sqrt{1 - k^2}} \tag{1.48}$$

Lorsque le cylindre s'éloigne du plan ($k \to 0$), on retrouve l'expression du moment en milieu infini. Toutes ces études montrent également que le cylindre en rotation ne subit aucune force en régime de Stokes.

1.2.1.7 Cylindre en rotation uniforme placé symétriquement entre deux plans (figure 1.5-7)

Howland *et al.* [70] ont résolu l'équation de Stokes pour ce problème et ont obtenu le moment sur le cylindre sous la forme :

$$M = 4\pi\mu\omega a^2 f(k) \tag{1.49}$$

où $f(k)$ est une fonction du rapport de confinement à calculer numériquement. Les auteurs donnent en particulier les valeurs $f(0.3) = 1.076$, $f(0.4) = 1.145$ et $f(0.5) = 1.25$. Par ailleurs, la structure de l'écoulement est assez intéressante dans cette configuration. Dean *et al.* [77] ont été les pionniers dans l'étude théorique de l'écoulement plan de Stokes dans un dièdre. Ils ont en particulier esquissé la structure cellulaire d'un tel écoulement et ont montré que la solution de l'équation de Stokes est complexe si l'angle au sommet du dièdre est inférieur à 146.3°. Un peu plus tard, Moffat [78] a interprété ce résultat comme prouvant l'existence d'une suite indéfinie de cellules, appelées *cellules de Stokes*, dont l'intensité décroît exponentiellement lorsqu'on s'approche du coin de ce dièdre. Ces cellules sont visibles sur la figure 1.8 tirée de l'ouvrage de Van Dyke [7]. Il a déterminé qualitativement la forme de ces cellules, en a calculé la longueur d'onde et le coefficient d'amortissement entre autres dans le cas limite qui nous intéresse d'un canal aux parois parallèles. O'Neill [79], Hancock [80] puis Bourot [81] ont analysé plus précisément le problème des écoulements cellulaires dans un canal aux parois parallèles. Dans sa thèse, Hellou [71] a étudié de façon exhaustive les propriétés des écoulements cellulaires engendrés par la rotation d'un cylindre centré entre deux plans. Pour cela, il a utilisé une méthode des moindres carrés permettant de raccorder les solutions de l'équation de Stokes développées respectivement dans le voisinage du cylindre (région polaire) et dans la région éloignée du cylindre (région cartésienne). Une approche similaire est adoptée dans différents articles du même auteur (Hellou [72] et Hellou *et al.* [73]).

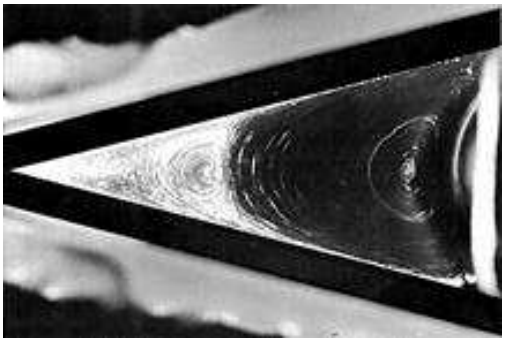

FIG. 1.8 – *Lignes de courant dans un dièdre d'angle* 28.5° *engendrées par la rotation d'un cylindre. Source : Van Dyke [7]*

Quant au problème du cylindre en rotation confiné et excentré, il n'a apparemment pas encore été étudié.

1.2.2 Etudes expérimentales

1.2.2.1 Cylindre en translation

Du point de vue expérimental et à l'instar du cylindre en milieu infini, on trouve relativement peu d'études comparativement aux écoulements à grands nombres de Reynolds. White [82] s'est intéressé à la chute de fils cylindriques de section circulaire de diamètre d, dans un réservoir de forme cylindrique de diamètre D pour des nombres de Reynolds dans la gamme $10^{-5} - 100$. Il s'est en particulier penché sur l'influence du rapport du diamètre du fil cylindrique à celui du réservoir, paramètre de forme qui apparaîtra de façon récurrente tout au long de ce mémoire. Son étude est assez imprécise dans le sens que la vitesse de sédimentation U des cylindres est fortement influencée par leur excentrement par rapport à l'axe de la cuve cylindrique, paramètre qu'il ne contrôle pas. Son étude à néanmoins le mérite de mettre en évidence l'existence de «*solutions de type Stokes*» . Il a interpolé ses résultats par la formule empirique suivante :

$$F = \frac{6.3\mu U}{log_{10}(0.8D/d)} \tag{1.50}$$

Les expériences de Jones *et al.* [83] qui se situent dans la gamme $0.1 < Re < 1$, sont très proches de celles de White [82]. Une autre expérience intéressante a été effectuée par Taneda [84] pour étudier les forces de traînée et de portance ainsi que le moment subis par un cylindre en situation centrée et excentrée entre deux plans pour $10^{-5} < Re < 10^{-1}$. Dans son montage, le cylindre, placé sur un pivot, est immobile et une cuve rectangulaire remplie d'un liquide visqueux est mise en mouvement autour de lui. Le cylindre est alors dévié et un dispositif optique permet de repérer son inclinaison par rapport à la verticale. Un simple bilan des forces et des moments à l'équilibre permet de déterminer les différents efforts sur le cylindre. Lorsqu'il trace le coefficient de traînée C_D en fonction du nombre de Reynolds, il trouve en représentation logarithmique des droites de pente -1 caractéristiques des «*solutions de type Stokes*» comme on peut s'en rendre compte sur la figure 1.9. Taneda [84] retrouve également le minimum de traînée en dehors du plan de symétrie comme cela a été prédit plus tôt de façon théorique par Harper *et al.* [58]. Dans le travail de Bouard *et al.* [55], un cylindre placé à mi-distance des parois latérales d'une cuve rectangulaire est mis en translation par l'intermédiaire d'un chariot. En faisant varier le diamètre du cylindre, ils ont pu obtenir des résultats pour des rapports de confinement compris entre 0.06 et 0.9. Dans un travail postérieur de Bouard [85] reprenant un montage identique au précédent, l'influence du confinement du cylindre est clairement mise en évidence bien que le traitement de ses résultats rende difficilement visibles les «*solutions de type Stokes*» . Il donne quelques résultats dans la gamme $0.02 < Re < 0.1$ pour un rapport de confinement $k = 0.5$ mais la majorité de ses mesures a été effectuée entre $Re = 1$ et $Re = 50$. Curtis *et al.* [86] ont quant à eux utilisé la technique de l'analogie électrique pour étudier l'écoulement d'un cylindre centré entre deux plans. Le travail de Ben Richou *et al.* [67] n'est pas uniquement numérique mais également expérimental. Leur montage est analogue à celui de Taneda [84] à ceci près que c'est le cylindre qui se déplace dans un réservoir fixe et non l'inverse et que la force est mesurée à l'aide d'une balance. Bien que cela ne soit pas l'objet principal de

leur travail, l'importance des conditions aux limites apparaît également très clairement dans les expériences de Jayaweera *et al.* [37] ou de Huner *et al.* [38]. Elles ont pour but de mesurer les vitesses de sédimentation de fibres cylindriques. Dans l'article de Huner *et al.* [38] par exemple, les fibres de longueur l et de diamètre $2a$ sédimentent dans une cuve parallélépipédique contenant des huiles silicones. S'intéressant à la traînée en milieu infini et désirant s'affranchir des effets de paroi, ils observent que l'influence la plus marquée est celle des parois verticales distantes de $2b$ et parallèles à l'axe de la fibre. Ils proposent alors pour la vitesse de chute en milieu infini U_∞ la correction suivante :

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 + \frac{3.60k^3}{Re}\sqrt{\frac{l}{2a}}$$

avec U la vitesse de sédimentation en milieu confiné mesurée expérimentalement, $Re = U2a/\nu$ le nombre de Reynolds basé sur le diamètre du cylindre et $k = a/b$. Jayaweera *et al.* [37] proposent quant à eux la correction :

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 - \frac{2\alpha/3}{1/2 - \gamma + ln(8/Re_\infty)}\frac{l}{D}$$

avec $Re_\infty = U_\infty 2a/\nu$, α un coefficient numérique valant 2.1 et γ la constante d'Euler. Cette correction est tirée du travail de Brenner [49] dans lequel des particules sphériques sédimentent dans des réservoirs cylindriques de diamètre D. On peut s'interroger sur le bien-fondé de l'utilisation de cette expression alors que dans leurs expériences, les cylindres sédimentent dans un réservoir parallélépipédique. Un travail analogue est celui de Stalnaker *et al.* [87]. Ils ont proposé pour la force de traînée l'expression :

$$F = \frac{4\pi\mu U}{-0.9157 - lnk + \phi_c} \tag{1.51}$$

où $\phi_c = 1.298a^{0.20}b^{0.13}l^{-0.33}$ est un facteur correctif tenant compte de la longueur finie l du cylindre [10]. L'équation 1.51 est simplement une adaptation de l'équation 1.32 page 19 obtenue analytiquement par Takaisi [59]. On trouve dans l'article de Dhahir *et al.* [88] des visualisations et des mesures de traînée pour un cylindre confiné entre deux plans avec un rapport de confinement $k = 0.6$ pour des nombres de Reynolds très inférieurs à l'unité. L'écoulement est un écoulement de Poiseuille et l'étude est menée en faisant varier l'excentrement du cylindre. Cet article est par contre majoritairement dédié aux fluides non-newtoniens et peu de résultats y sont disponibles pour les fluides newtoniens. L'écoulement s'effectue de plus dans un canal de section carrée si bien que le profil de Poiseuille plan n'est pas réalisé.

Récemment, le problème du cylindre entre deux plans a trouvé un intérêt particulier dans le cadre du moulage des semi-conducteurs. Dans certains processus d'encapsulation, une résine epoxy est injectée dans un moule sur un circuit électronique dont les fils

10. Dans cette expression, les longueurs a, b et l doivent être exprimées en centimètres. La présence de ces grandeurs dimensionnelles montre le manque de généralité et de consistence de la formule 1.51

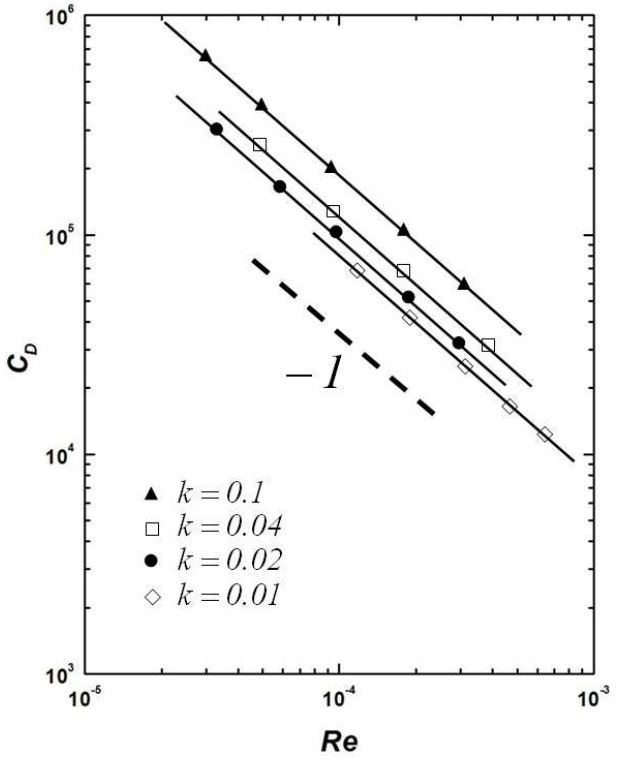

FIG. 1.9 – *Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. Source : Taneda [84]*

de connection sont susceptibles de subir des déformations dues à l'écoulement de cette résine comme on peut le constater sur la figure 1.10. Cet effet, appelé "*wire-sweep*", peut avoir des conséquences sur la qualité finale du composant car une déformation de ces fils peut en modifier l'inductance mutuelle ou dans les cas les plus critiques, provoquer des court-circuits. Des approches expérimentales très variées ont été menées pour étudier cet effet. Lo *et al.* [89,90] ont par exemple utilisé des fibres optiques pour étudier la déformation des fils cylindriques soumis à un écoulement de Poiseuille. Le principe de fonctionnement de ces capteurs (Fig. 1.11) est le suivant : les fibres possèdent en leur centre une petite cavité cylindrique (typiquement de longueur comprise entre 30 et 400μm) remplie d'air. La lumière arrivant par la gauche de la fibre est partiellement réfléchie sur la première interface fibre/air. La lumière transmise dans la cavité remplie d'air est à nouveau partiellement réfléchie à la seconde interface air/fibre. Une partie de cette onde retourne alors vers la première interface où elle est partiellement transmise. Les deux ondes réfléchies interfèrent avec un déphasage proportionnel à la longueur de la cavité. La déformation de la fibre dans un écoulement se traduisant par un allongement de la cavité, il est alors possible de déterminer la force subie par la fibre (il faut de plus coupler cette étude avec une étude de résistance de matériaux pour connaître la relation entre la déformation de la fibre et les efforts qui lui sont appliqués).

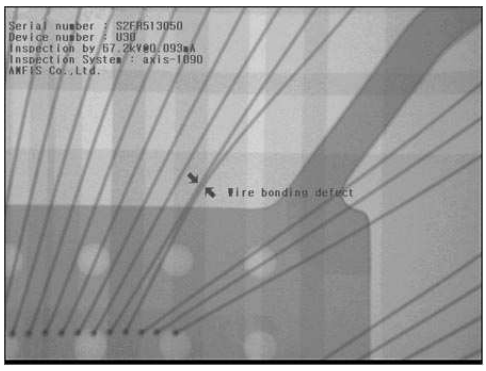

FIG. 1.10 – *Inspection aux rayons X d'un composé électronique. Déformation des fils de connections (wire-sweep). Source : AMFIS*

L'approche de Wang [91] est un peu plus classique dans le sens où la déformation du fil cylindrique n'est plus mesurée au moyen d'un capteur optique : différents poids morts sont appliqués sur le fil et la déformation correspondante est mesurée. On obtient ainsi une courbe étalon entre la flèche au centre du fil est la force appliquée. La déformation du fil soumis à un écoulement est finalement mesurée par une caméra et l'analyse des images permet de déterminer la force à laquelle le fil est soumis.

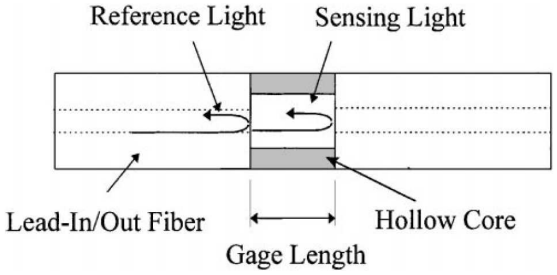

FIG. 1.11 – *Principe du capteur optique ILFE. Source : Y. Lo et al. [89, 90]*

Terminons la revue des travaux expérimentaux par ceux consacrés à la chute d'un cylindre perpendiculairement à un plan. On peut par exemple citer l'article de Trahan *et al.* [74] qui estiment que les mesures expérimentales de la force de traînée peuvent être représentées par l'équation :

$$F = \frac{4\pi\mu U l}{0.112 + ln(l/a) - 1.01 sinh^{-1}(0.75 l/b)} \tag{1.52}$$

pour $l/a > 38$ et $0.5 < l/b < 8$ ce qui correspond à un cylindre «très long» dans une région «éloignée» de la paroi. Dans une région proche de la paroi, ils notent que les effets de bord (la longueur finie du cylindre) n'ont plus d'influence et que la force ne dépend plus que de $k = a/b$. Leurs mesures sont alors correctement représentées par

l'expression 1.30 page 19 de Jeffrey *et al.* [45] pour un cylindre de longueur infinie. Chen *et al.* [92] se sont principalement intéressés à la cinétique de la chute d'un cylindre vers un plan. Lorsque le cylindre est très loin du plan vers lequel il tombe, ils mesurent une vitesse constante U_∞ (notons que cette vitesse dépend de la longueur finie du cylindre et de la présence des parois latérales du récipient contenant le fluide). Lorsqu'il se rapproche du plan inférieur, la vitesse U du cylindre est affectée. Ils distinguent alors 3 régimes :

- $0 < U/U_\infty < 0.6$ correspondant à la région proche du plan. Ils donnent alors l'expression :
$$\frac{U}{U_\infty} = 0.494(\frac{U_\infty 4a^2}{l\nu})^{0.1}(\frac{1}{2k})^{0.5}$$
- $0.001 < \Delta U/U_\infty < 0.4$ avec $\Delta U = U_\infty - U$. Dans cette région intermédiaire, ils proposent :
$$\frac{\Delta U}{U_\infty} = 0.60(\phi/b)^2$$
avec la fonction $\phi = \nu^{0.4}(2a)^{0.325}l^{0.275}U^{-0.4}$ où les longueurs sont exprimées en cm, la vitesse en cm/s et la viscosité en cm^2/s.

- $\Delta U/U_\infty < 0.004$ qui est la région éloignée du plan inférieur. Ils donnent pour la traînée l'expression :
$$\frac{F}{F_0} - 1 = 0.12\alpha^{3/4}$$
où $\alpha = (Ul/\nu)(2a/l)^{1/4}$ et F_0 est l'expression 1.20 page 10 déjà rencontrée obtenue par Batchelor [30], Russel *et al.* [93] ou Keller *et al.* [31].

Stalnaker *et al.* [87] ont proposé une expression légèrement différente pour la dernière expression de Chen *et al.* [92] dans la région éloignée du plan :

$$\frac{F}{F_\infty} = 1 - 0.886(\frac{l}{2b})\frac{F_\infty}{4\pi\mu U_\infty}$$

où F_∞ est la force de traînée qu'ils déterminent en extrapolant leurs mesures à $b \to \infty$.

1.2.2.2 Cylindre en rotation

En ce qui concerne les expériences relatives à la rotation du cylindre, elles se sont principalement attachées à décrire la structure des cellules autour du cylindre confiné entre deux plans. On peut citer les travaux de Hellou [71, 72], Hellou *et al.* [73], Hajjam [94] ou de Coutanceau *et al.* [95]. La figure 1.12 montre par exemple les structures cellulaires autour d'un cylindre entre deux plans avec un rapport de confinement $k = 0.5$ et un nombre de Reynolds $Re = 2\rho\omega a^2/\mu = 10^{-3}$. Sur la photographie du haut, on observe dans le voisinage proche du cylindre la première série de cellules qui tournent dans le sens opposé au cylindre. Celle du bas montre clairement l'existence de la deuxième série

de cellules tournant dans le même sens que le cylindre mais avec une vitesse plus faible en moyenne que pour la première série de tourbillons.

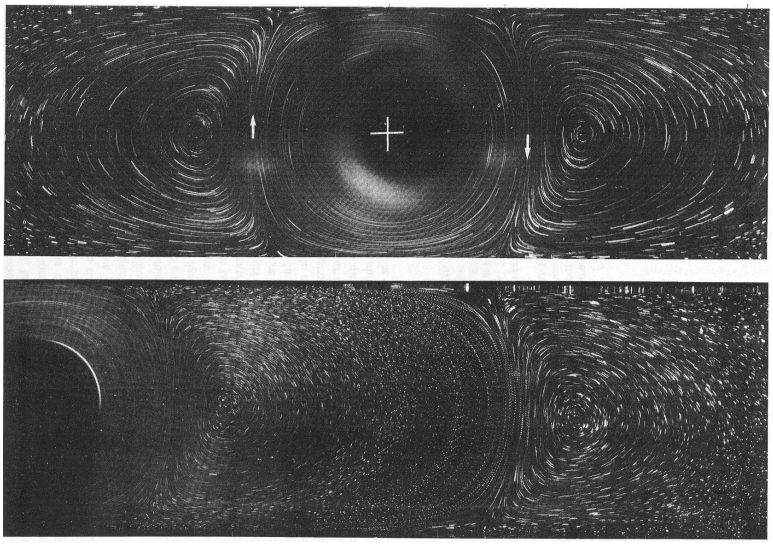

FIG. 1.12 – *Visualisation de l'écoulement engendré par la rotation d'un cylindre entre 2 plans. Source : Coutanceau et al. [95]*

1.3 Conclusion

De part sa simplicité apparente, le cylindre a donc été très tôt un thème de recherche comme nous avons pu le constater dans cette revue bibliographique si riche et qui pourtant est loin d'être exhaustive. Le fait remarquable concernant les écoulements aux faibles nombres de Reynolds autour d'un cylindre est l'apparition du *paradoxe de Stokes* dans le cas où le milieu fluide est illimité et la disparition de ce paradoxe en présence d'un confinement. Dans toutes les études analytiques concernant le problème d'un cylindre entre deux plans parallèles, les auteurs, à l'exception d'un seul, ont traité le cas d'un cylindre confiné de façon symétrique, c'est-à-dire se déplaçant où situé à mi-distance des plans parallèles. Cette configuration géométrique sera traitée en détails dans le chapitre 3. La seule étude théorique traitant d'un cylindre excentré est celle de Harper *et al.* [58]. Très peu de résultats expérimentaux ou numériques sont également disponibles pour ce problème. Ils proviennent respectivement de l'article de Taneda [84] et de la récente thèse d'Etat de Ben Richou [96]. Ces résultats montrent en particulier que la force de traînée sur le cylindre n'évolue pas de façon monotone en fonction de l'excentrement et que cette force passe par un minimum en dehors du plan de symétrie. Ce résultat est *a priori* surprenant puisqu'il est caractéristique d'une dégénérescence de symétrie. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre 4. Les seuls cas où l'on dispose d'une solution exacte sont donc ceux d'un cylindre en présence d'un plan unique. Les autres situations avec deux plans n'ont que des solutions asymptotiques. Ceci provient du fait qu'il est actuellement impossible de raccorder mathématiquement

les géométries cylindriques et cartésiennes en présence de 2 plans (ce qui est faisable avec un seul plan par le passage en coordonnées bipolaires). Devant les obstacles théoriques que soulèvent ces problèmes, nous avons choisi dans ce travail d'adopter une approche numérique dont nous exposons les grands traits dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Méthode numérique

Mes premiers pas dans le monde du calcul numérique ont été effectués lors de mon stage de DEA pendant lequel nous avons mis au point un code de calcul utilisant la technique des volumes finis avec l'algorithme bien connu SIMPLE. Dans les premiers temps de ce travail de thèse, nous avons également implémenté un nouveau programme numérique basé sur une méthode de projection avec encore une fois la technique des volumes finis. Cette technique, particulièrement adaptée aux calculs en mécanique des fluides, est aussi utilisée dans les codes de calculs commerciaux comme Fluent ou Star-CD. Nous allons donc présenter brièvement cette technique puis nous montrerons par une étude comparative, que le code « maison » et le code Fluent donnent, dans le cadre particulier de notre étude tout du moins, des résultats identiques ce qui nous a poussé à migrer vers ce dernier.

2.1 Le principe de la technique des volumes finis

Toutes les équations de transport peuvent se mettre sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + div(\rho\phi\overrightarrow{u}) = div(\Gamma_\phi \overrightarrow{grad}\phi) + S$$

où S est un terme source, Γ_ϕ un coefficient de diffusion et ϕ une variable générale qui est transportée. Elle peut être par exemple une composante du vecteur vitesse, la température ou encore la concentration. Le principe de base de la méthode des volumes finis, mise au point par Patankar [97], consiste en l'intégration de cette équation de transport sur un volume de contrôle noté VC, de surface de contrôle notée SC, ce qui conduit à :

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dV + \int_{SC} \rho\phi\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}dS = \int_{SC} \Gamma_\phi \overrightarrow{grad}\phi.\overrightarrow{n}dS + \int_{VC} SdV$$

Si le problème est dépendant du temps, il faut évidemment aussi intégrer cette équation par rapport à celui-ci sur un intervalle de temps Δt ce qui donne la forme la plus générale de l'équation de transport :

$$\int_{\Delta t}\int_{VC}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi)dVdt+\int_{\Delta t}\int_{SC}\rho\phi\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}dSdt=$$
$$\int_{\Delta t}\int_{SC}\Gamma_{\phi}\overrightarrow{grad\phi}.\overrightarrow{n}dSdt+\int_{\Delta t}\int_{VC}SdVdt$$

Dans le cas d'un maillage cartésien bidimensionnel, le volume de contrôle se réduit à une cellule rectangulaire de volume $\Delta x\Delta y$ ($\Delta z = 1$). Par convention, on repère cet élément par un point P et les volumes de contrôles adjacents par les lettres majuscules E, W, N et S qui signifient respectivement East, West, North et South. Les faces de ce volume de contrôle sont quant à elles désignées par les lettres minuscules e, w, n et s (voir la figure 2.1).

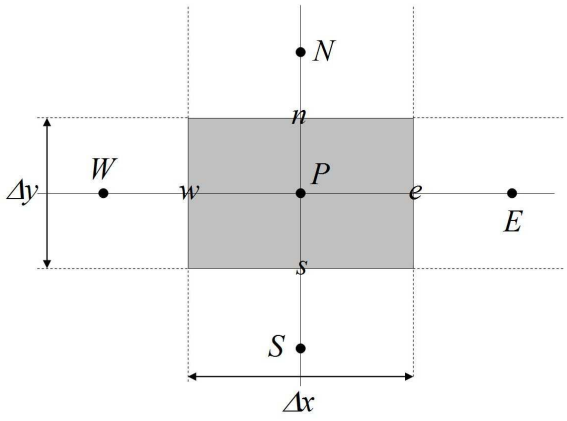

FIG. 2.1 – *Volume de contrôle*

Illustrons la technique par la résolution de l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$. La formulation volumes finis s'écrit donc :

$$\int(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2})dxdy=0$$

L'intégration sur le volume de contrôle conduit à :

$$\Delta y[(\frac{\partial\phi}{\partial x})_e-(\frac{\partial\phi}{\partial x})_w]+\Delta x[(\frac{\partial\phi}{\partial y})_n-(\frac{\partial\phi}{\partial y})_s]=0 \tag{2.1}$$

L'étape suivante, appelée discrétisation, consiste à remplacer les opérateurs de dérivation par leur approximation à un ordre donné. La technique la plus courante utilise le développement en séries de Taylor :

$$\phi(x\pm\Delta x,y)=\phi(x,y)\pm\Delta x\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{1}{2}(\Delta x)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\cdots$$

$$\phi(x,y\pm\Delta y)=\phi(x,y)\pm\Delta y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{1}{2}(\Delta y)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\cdots$$

En combinant linéairement ces expressions, on en tire par exemple :

$$(\frac{\partial\phi}{\partial x})_e = \frac{\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) = \frac{\phi_E-\phi_P}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$(\frac{\partial\phi}{\partial x})_w = \frac{\phi(x,y)-\phi(x-\Delta x,y)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x) = \frac{\phi_P-\phi_W}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)$$

$$(\frac{\partial\phi}{\partial y})_n = \frac{\phi(x,y+\Delta y)-\phi(x,y)}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y) = \frac{\phi_N-\phi_P}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)$$

$$(\frac{\partial\phi}{\partial y})_s = \frac{\phi(x,y)-\phi(x,y-\Delta y)}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y) = \frac{\phi_P-\phi_S}{\Delta y} + \mathcal{O}(\Delta y)$$

En insérant ces expressions dans 2.1, on obtient :

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S \tag{2.2}$$

avec

$$a_N = a_S = \frac{\Delta x}{\Delta y}, \quad a_W = a_E = \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad a_P = a_N + a_S + a_W + a_E$$

Il faut finalement résoudre cette équation pour chaque volume de contrôle du problème. Pour cela, il faut également se munir de conditions aux limites et éventuellement de conditions initiales si le problème dépend du temps. Divers algorithmes permettent de résoudre ce système d'équations algébriques. On pourra par exemple se référer aux livres de Nougier [98,99]. La résolution de l'équation de Navier-Stokes est beaucoup plus complexe que l'équation de Laplace. En plus de sa non linéarité, l'une des difficultés majeures à surmonter est le calcul de la pression. Dans le cas d'un fluide incompressible, l'équation d'état du fluide se réduit à $\rho = Cste$. Il est alors difficile de faire le couplage entre la vitesse et la pression. Patankar [97] a ainsi développé l'algorithme SIMPLE (*Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations*) qui consiste en des procédures d'estimation et de correction des champs hydrodynamiques sur des maillages décalés[1]. D'autres variantes plus complexes (SIMPLER, SIMPLEC) ont été développées par la suite. Pour plus d'informations, on peut encore se réferrer à l'ouvrage de Versteeg et Malalasekera [100].

2.2 Le code Fluent

Le logiciel commercial Fluent est leader sur le marché des codes de calculs de CFD. C'est un logiciel convivial et très généraliste. Ses principales caractéristiques sont :

– Technique des volumes finis avec discrétisation spatiale et temporelle au second ordre

1. La pression et les vitesses sont calculés sur des maillages décalés pour éviter d'éventuelles oscillations des champs

- Algorithmes SIMPLE, SIMPLEC et PISO
- Maillage structuré ou non-structuré
- Maillage dynamique, déformable et auto-adaptatif (voir plus loin)
- Nombreuses conditions aux limites pour les écoulements internes ou externes
- Parallélisation

Il permet d'effectuer des modélisations pour :

- Les écoulements stationnaires ou transitoires en $2D$, $2D$ axisymétrique et $3D$
- Les régimes laminaires et turbulents
- Les transferts de chaleur couplés par conduction, convection et rayonnement
- Les fluides incompressibles et compressibles
- Les mélanges d'espèces avec ou sans réactions chimiques
- Les écoulements diphasiques dispersés ou non
- Les fluides non-newtoniens
- Les écoulements avec surface libre
- Les écoulements avec "résistances" (grilles, filtres, milieux poreux...)
- ...

Les maillages sont réalisés grâce au logiciel Gambit. Il permet, sous une interface unique, de modéliser la géométrie du problème et de générer son maillage. L'importation de géométries issues des logiciels de CAO (formats Parasolid, ACIS, STEP ou IGES) est également possible.

Apportons enfin quelques précisions sur les techniques de maillage dynamique disponibles dans Fluent depuis sa version 6.0. Le code dispose de 3 modèles pour gérer la déformation du maillage : *dynamic layering*, *spring smoothing* et *local remeshing*. Dans notre travail, nous avons eu recourt au premier modèle qui est adapté aux problèmes où des objets ont des mouvements linéaires[2]. Dans ce modèle, le maillage au niveau des frontières mobiles est modifié soit par scission, soit par coalescence des mailles qui le composent. On doit donc spécifier des critères de remaillage que sont les tailles limites des cellules (taille minimale en-dessous de laquelle 2 mailles adjacentes doivent coalescer et taille maximale au-dessus de de laquelle une maille doit être scinder en 2). Fluent détecte si ces critères sont respectés et re-maille automatiquement le domaine de calcul.

2.3 La méthode de projection

Les méthodes de projection sont des techniques de pas fractionnaires qui découplent les mécanismes de convection-diffusion et l'incompressibilité. Elles ont été développées

2. Le déplacement de ces objet nécessite l'écriture d'une *UDF* (User Defined Function). Une *UDF* est un sous-programme écrit en langage C que l'on compile en interne dans Fluent. Ces fonctions ont pour but de donner un peu de *liberté* à l'utilisateur dans la définition de certains problèmes

par Chorin [101], Temam [102] et Fortin *et al.* [103]. Il en existe de nombreuses variantes. Dans celle que nous avons utilisée, inspirée par l'article de Ye *et al.* [104], nous sommes amenés à résoudre l'équation de Navier-Stokes instationnaire pour un fluide incompressible et newtonien. Cette équation est discrétisée sur un maillage cartésien non-décalé en terme des variables primitives ($\overrightarrow{u}$, p). Sous forme intégrale, les équations de conservation adimensionnelles s'écrivent alors :

$$\int_{SC} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}\, dS = 0 \tag{2.3}$$

$$\int_{VC} \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial t}\, dV + Re \int_{SC} \overrightarrow{u}(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{n}) dS = -\int_{VC} \overrightarrow{\nabla} p\, dV + \int_{VC} \Delta \overrightarrow{u}\, dV \tag{2.4}$$

$$\text{avec} \quad Re = \frac{\rho U_0 L}{\mu}$$

La vitesse est normalisée par une vitesse caractéristique U_0, les variables d'espace par une longueur caractéristique L, la pression par la contrainte visqueuse $\mu U_0/L$ et le temps par le temps de diffusion de la quantité de mouvement L^2/ν. Le choix de cette normalisation repose sur le type d'écoulements que nous étudions ($Re << 1$). $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unité normal à la surface de contrôle. La méthode consiste à fractionner l'équation de Navier-Stokes pour avancer du pas de temps n au pas de temps $n+1$ en passant par une étape intermédiaire où elle est résolue sans le terme de pression. Pour cela, en plus des vitesses $\overrightarrow{u}(u,v)$ au centre des volumes de contrôle, on introduit les vitesses $\overrightarrow{U}(U,V)$ au centre des facettes de ces cellules (Fig. 2.2). Le terme convectif est discrétisé en utilisant un schéma de type Adams-Bashforth utilisant les vitesses $\overrightarrow{U}(U,V)$ sur les facettes des volumes de contrôle et les termes diffusifs sont discrétisés par le schéma implicite de Crank-Nicholson.

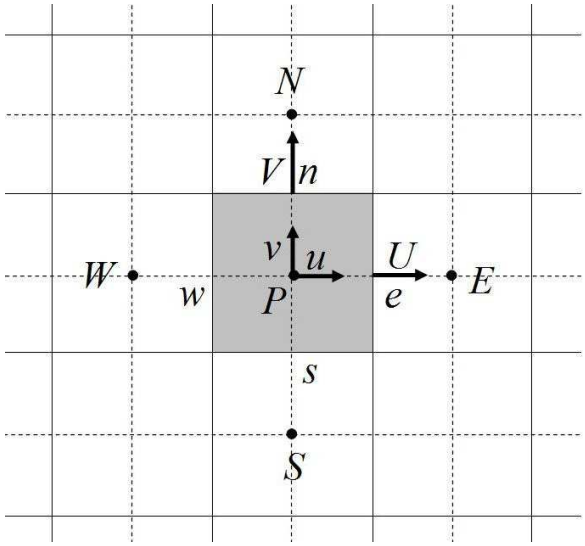

FIG. 2.2 – *Volume de contrôle*

A cette première étape, connaissant les vitesses $\overrightarrow{u}(u,v)$ et $\overrightarrow{U}(U,V)$ aux pas de temps antérieurs n et $n-1$, on calcule une vitesse intermédiaire $\overrightarrow{u}^*(u^*,v^*)$ aux centres des volumes de contrôle grâce à la résolution de l'équation :

$$\int_{VC} \frac{\overrightarrow{u}^* - \overrightarrow{u}^n}{\Delta t}\, dV = -\frac{Re}{2} \int_{SC} [3\overrightarrow{u}^n(\overrightarrow{U}^n.\overrightarrow{n}) - \overrightarrow{u}^{n-1}(\overrightarrow{U}^{n-1}.\overrightarrow{n})]\, dS + \frac{1}{2}\int_{VC} (\nabla^2\overrightarrow{u}^* + \nabla^2\overrightarrow{u}^n)\, dV$$

Sur les frontières du domaine, on prend comme condition aux limites $\overrightarrow{u}^* = \overrightarrow{u}^{n+1}$ pour la vitesse intermédiaire. Les vitesses intermédiaires $\overrightarrow{U}^*(U^*,V^*)$ aux centres des facettes sont calculées par interpolation linéaire des vitesses $\overrightarrow{u}^*(u^*,v^*)$ précédemment obtenues. La seconde étape consiste en la résolution de l'équation de correction de la pression :

$$\int_{VC} \frac{\overrightarrow{u}^{n+1} - \overrightarrow{u}^*}{\Delta t}\, dV = -\int_{VC} \overrightarrow{\nabla} p^{n+1}\, dV$$

En prenant la divergence de cette expression, en appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky et sachant que la vitesse $\overrightarrow{u}^{n+1}$ doit satisfaire à l'équation de conservation de la masse :

$$\int_{SC} (\overrightarrow{u}^{n+1}.\overrightarrow{n}) dS = 0$$

on aboutit alors pour l'équation de la pression à l'expression :

$$\int_{VC} \nabla^2 p^{n+1} dV = \frac{1}{\Delta t}\int_{SC} (\overrightarrow{U}^*.\overrightarrow{n}) dS$$

La condition aux limites pour la pression s'écrit $\overrightarrow{\nabla} p^{n+1}.\overrightarrow{n} = 0$. Lorsque la pression p^{n+1} est déterminée, il reste à calculer les vitesses aux centres des volumes de contrôle et de leurs facettes :

$$\overrightarrow{u}^{n+1} = \overrightarrow{u}^* - \Delta t(\overrightarrow{\nabla} p^{n+1})_c \quad \text{et} \quad \overrightarrow{U}^{n+1} = \overrightarrow{U}^* - \Delta t(\overrightarrow{\nabla} p^{n+1})_f$$

où les indices c et f correspondent aux centres des volumes de contrôle et aux centres des facettes de ces volumes de contrôle. On aura par exemple pour le gradient de pression dans la direction x au centre P d'un volume de contrôle :

$$(\frac{\partial p}{\partial x})_P = \frac{p_E - p_W}{2\Delta x}$$

et pour le gradient de pression dans le direction y au centre n de la face nord :

$$(\frac{\partial p}{\partial y})_n = \frac{p_N - p_P}{\Delta y}$$

L'introduction des vitesse $\overrightarrow{U}(U,V)$ aux centres des faces des volumes de contrôle présente deux avantages principaux : elle permet d'éviter l'utilisation d'un maillage décalé qui alourdirait sensiblement le solveur et elle évite les problèmes relatifs aux méthodes de collocation conventionnelles (oscillations en pression ou non-respect de la condition d'incompressibilité). On pourra se référer à l'ouvrage de Ferziger *et al.* [105] pour plus de détails.

2.4 Comparaisons des différents codes de calcul

Nous nous sommes intéressés au problème bidimensionnel qui servira de base à une grande part du travail présenté dans cette partie du mémoire. Sa géométrie, présentée sur la figure 2.3, se compose d'un cylindre circulaire de rayon a confiné entre deux plans séparés de la distance $2b$. Le centre du cylindre se trouve de plus exactement à mi-distance entre ces plans parallèles. On définit le paramètre sans dimension $k = a/b$ que nous dénommons rapport de confinement. Le cylindre se déplace dans un fluide newtonien et incompressible de viscosité dynamique μ, de masse volumique ρ à la vitesse uniforme U dans la direction parallèle aux plans. Le nombre de Reynolds $Re = \rho U 2a/\mu$ est choisi égal à 2.10^{-3}. Etant donné la symétrie de l'écoulement autour du cylindre dans ce régime et celle de la géométrie du problème, le cylindre n'est soumis qu'à une force de traînée $F(k)$. Nous avons résolu ce problème numériquement avec le code Fluent puis avec un programme basé sur la méthode de projection décrite dans le paragraphe 2.3. Ces résultats sont enfin comparés avec ceux issus d'une toute autre technique basée sur la résolution des équations de conservation en formulation $\psi - \omega$ que Ben Richou *et al.* [63] ont mise au point.

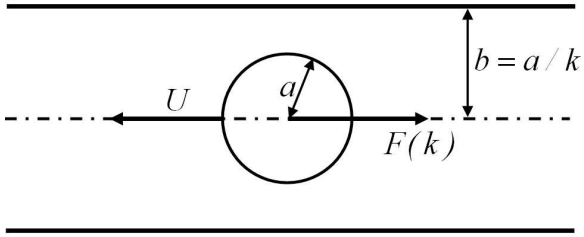

FIG. 2.3 – *Schéma du problème utilisé pour comparer les différents codes numériques*

2.4.1 Utilisation du code Fluent

Il est trivial de mentionner que toute résolution numérique des équations de conservation est tributaire du maillage sur lequel ces équations sont discrétisées. Le mailleur attitré de Fluent se nomme Gambit. Il permet la création de la géométrie et de son maillage. En ce qui concerne ce maillage, nous avons choisi une topologie de type «HOH» permettant de raccorder la géométrie du cylindre à la géométrie des plans et des limites du domaine de calcul. L'obtention d'un maillage correct dépend de plusieurs paramètres dont les plus importants sont la densité de volumes de contrôle et la longueur du domaine de calcul à l'amont et à l'aval du cylindre. Nos maillages sont tous construits suivant le protocole suivant : pour une valeur k donnée, nous construisons autour du cylindre de diamètre $2a$ un domaine carré de côté $2b$. Cette partie est commune à tous les maillages. On construit ensuite, à l'amont et à l'avant de cette partie deux autres domaines identiques et rectangulaires de côtés $2b$ et L. La figure 2.4 montre de façon schématique la structure typique du quart d'un tel maillage. Le nombre de nœuds de maillage sur les segments AH, HG, BC, CF et DE est identique (il a été pris égal à 45 ce qui correspond à 360 nœuds sur la circonférence totale du cylindre).

Le nombre de nœuds sur les segments AB, CH et FG est identique. Le maillage sur ces segments est plus serré du côté du cylindre, la taille des mailles évoluant suivant une progression géométrique de raison de l'ordre de 1.02. Le segment CH étant plus grand que les segments AB et FG, la raison géométrique pour les nœuds de ce segment est légèrement supérieure de façon à conserver la taille des premières mailles en contact avec le cylindre[3]. Le nombre de nœuds sur ces segments varient entre 250 pour le rapport de confinement le plus faible et 90 dans le cas opposé. Enfin, les segments CD et EF sont maillés de telle sorte que la taille des mailles soit égale à la taille de la dernière maille des segments BC et FG. Les pas de maillages y sont constants voire en légère progression géométrique et le nombre de cellules dépend de la longueur L de cette partie du domaine. Pour obtenir cette dimension qui dépend du rapport de confinement k, nous avons progressivement étendu la taille du domaine de calcul (en conservant la densité du maillage constante) jusqu'à ce que le calcul de la force de traînée cesse d'y être sensible. Un exemple de maillage est montré dans la figure 2.5. En ce qui concerne le solveur, nous avons utilisé la version stationnaire, bidimensionnelle et en double précision de Fluent. L'algorithme choisi est le SIMPLE classique. Les termes de convection sont traités avec un schéma de type « Upwind » à l'ordre 2. Nous arrêtons le calcul lorsque tous les résidus (pression, vitesse et continuité) ont atteint la précision machine. Quant aux conditions aux limites, plutôt que de faire se déplacer le cylindre à la vitesse U ce qui implique l'utilisation d'un maillage dynamique, nous avons opté pour la situation équivalente où le cylindre est immobile alors que les plans parallèles se déplacent à la vitesse $-U$. Les sections d'entrée et de sortie du domaine de calcul ont également comme condition aux limites la vitesse $-U$ (condition appelée « velocity-inlet » dans le logiciel).

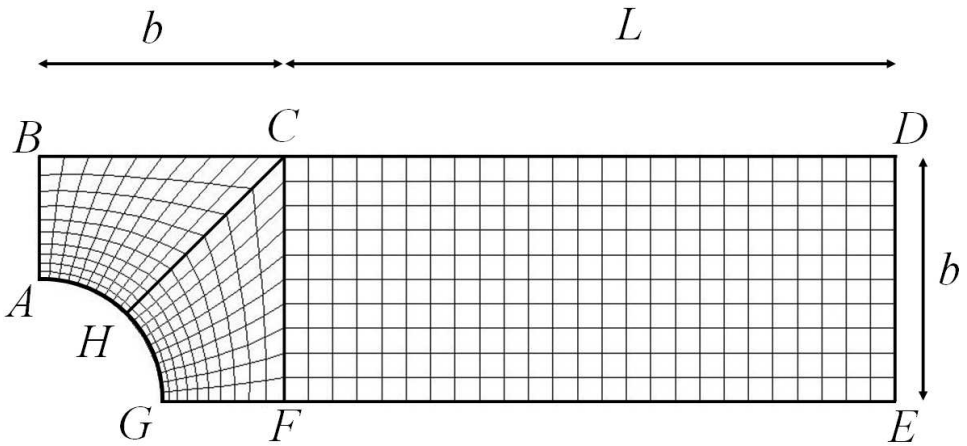

FIG. 2.4 – *Structure du maillage généré avec Gambit*

3. Si on appelle N le nombre de nœuds sur les segments AB, CH et FG, q_1 la raison de la progression géométrique sur les segments AB et FG, on peut montrer que la raison q_2 donnant la distribution géométrique des nœuds sur le segment CH doit satisfaire à l'équation $\frac{1-q_1}{1-q_1^N}\frac{1-k}{\sqrt{2}-k} = \frac{1-q_2}{1-q_2^N}$

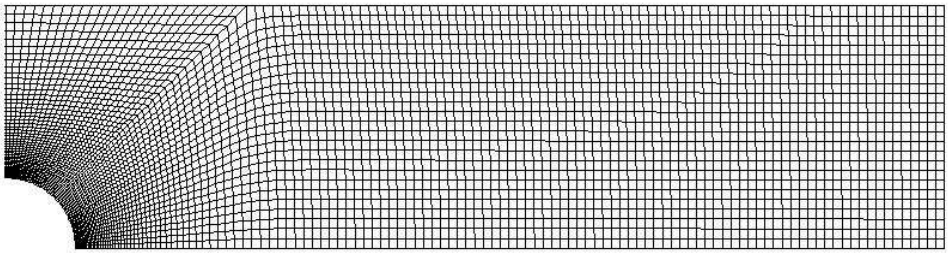

FIG. 2.5 – « *Maillage type* » *obtenu avec Gambit pour* $k = 0.29$

2.4.2 Utilisation du code « maison »

Le maillage sur lequel on applique la méthode de projection est différent du précédent. Il s'agit d'un maillage purement cartésien avec des volumes de contrôles parallélépipédiques. La circonférence du cylindre est donc découpée en « marches d'escalier » comme on peut s'en rendre compte sur la figure 2.6 sur laquelle le quart de cercle est discrétisé en 40 marches (dans le maillage généré avec Gambit, ce nombre était de 90 ; il a fallu ici adopter un compromis entre la précision et le temps des calculs). Les dimensions du domaine de calcul sont estimées en utilisant des critères identiques à ceux évoqués dans le paragraphe précédent. La résolution numérique des différents systèmes d'équations algébriques linéaires a été effectuée avec la méthode itérative S.O.R. classique (Successive Over Relaxed) avec des coefficients de relaxation de l'ordre de 0.3. Un autre point essentiel dans l'utilisation de cette méthode est lié au fait qu'il s'agit d'un code instationnaire. Il est vite apparu que la valeur du pas de temps Δt avait une importance énorme. Evidemment, plus le pas de temps est petit et plus le calcul met longtemps à converger. Ce qui est plus critique, c'est que la valeur de Δt a également une influence sur la qualité des résultats finaux. Pour prendre en compte cela, nous avons donc dû procéder de la manière suivante : nous avons effectué un premier calcul avec un pas de temps Δt_1 qui a abouti après convergence à une solution S_1 donnant une force de traînée F_1. Nous avons effectué ensuite un nouveau calcul en repartant de la solution S_1 avec un pas de temps $\Delta t_2 < \Delta t_1$ qui a donné une nouvelle solution S_2 et une nouvelle traînée F_2. Si $\| (F_2 - F_1)/F_2 \| < 1\%$, nous en concluions que le pas de temps Δt_2 est adapté. Dans le cas contraire, nous poursuivions le processus avec des pas de temps de plus en plus petits. Par exemple pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 10^{-3}, les résultats cessent d'être sensibles au pas de temps lorsqu'il est de l'ordre de $\Delta t = 10^{-4}$ (pas de temps adimensionnel).

2.4.3 Résultats

Sur la figure 2.7, nous avons tracé les résultats issus des deux logiciels décrits ci-dessus. Ce graphe montre l'évolution de la force de traînée normalisée par la force visqueuse μU (par unité de longueur de cylindre) en fonction du rapport de confinement k lorsque le cylindre est en situation centrée. Sur cette figure sont également présentés les résultats tirés de l'article de Ben Richou *et al.* [63] utilisant une toute autre technique

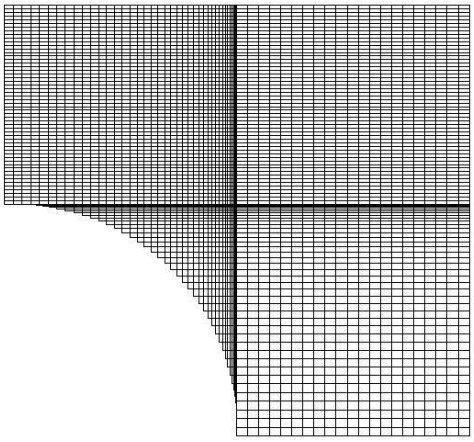

FIG. 2.6 – « *Maillage type* » *obtenu avec le code* « *maison* »

numérique (formulation $\psi - \omega$, méthode des singularités). Le tableau 2.1 donnent les valeurs numériques de la traînée et les erreurs relatives de ces calculs. Ces dernières sont toutes inférieures à 4 %. Les résultats de ces trois logiciels sont visiblement en très bon accord ce qui est confirmé sur la figure 2.8 où nous avons tracé la répartition de la vorticité sur la circonférence d'un cylindre confiné avec un rapport de confinement $k = 0.9$ donnée par le logiciel Fluent et le logiciel basé sur la méthode de projection développé par nos soins.

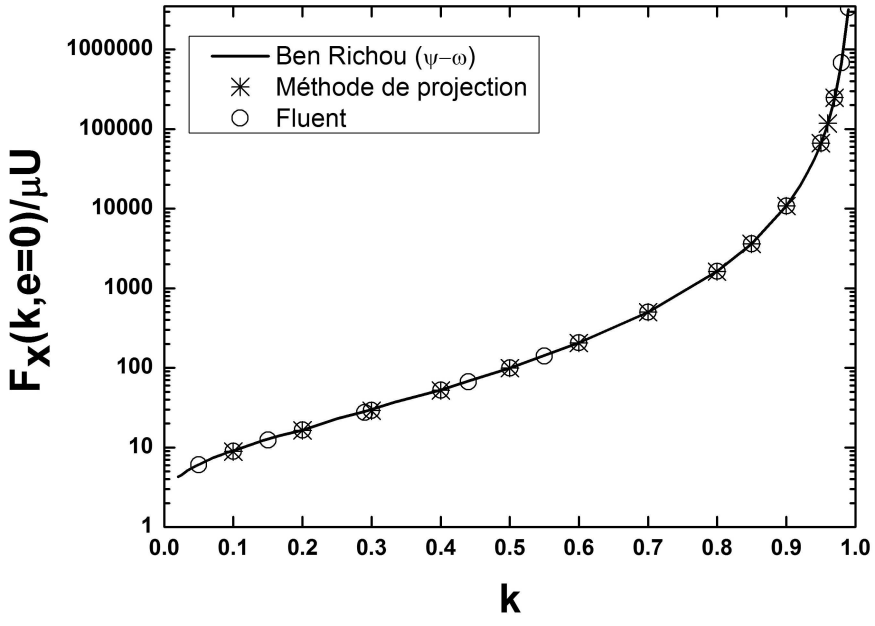

FIG. 2.7 – *Comparaison entre différentes approches - Force de traînée normalisée en fonction de* $k = a/b$

k	(1) Projection	(2) Ben Richou	(3) Fluent	Err. 1-2	Err. 1-3	Err. 2-3
0.1	8.879	9.096	8.955	2.45	0.86	1.55
0.2	16.421	16.501	16.534	0.49	0.69	0.20
0.4	52.284	53.025	52.377	1.41	0.18	1.22
0.5	99.353	99.611	99.322	0.26	0.03	0.29
0.6	205.79	206.61	206.59	0.40	0.39	0.01
0.7	500.03	502.2	501.7	0.44	0.34	0.1
0.8	1625	1630	1628	0.33	0.21	0.12
0.85	3618	3614	3620	0.1	0.06	0.16
0.9	10793	10786	10799	0.06	0.05	0.11
0.95	66410	64873	66373	2.31	0.05	2.21
0.97	246490	238517	244357	3.23	0.87	2.45

TAB. 2.1 – *Comparaison entre les différentes approches - Valeurs numériques de la traînée et erreurs relatives exprimées en %*

Sur les figures 2.9, 2.10 et 2.11, nous montrons des visualisations correspondant au cas $k = 0.29$ et $Re = 2.10^{-3}$ permettant également de comparer les deux méthodes. Les figures de gauche ont été obtenues avec le logiciel Fluent et celles de droite par la méthode de projection. On peut encore constater l'équivalence entre les deux approches.

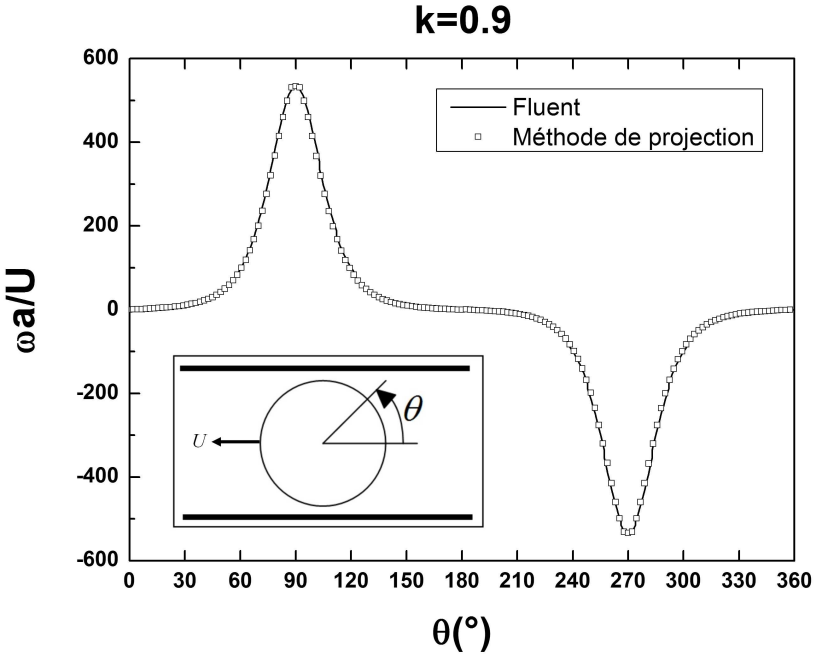

FIG. 2.8 – *Comparaison entre différentes approches - Distribution angulaire de la vorticité sur le cylindre pour $k = 0.9$*

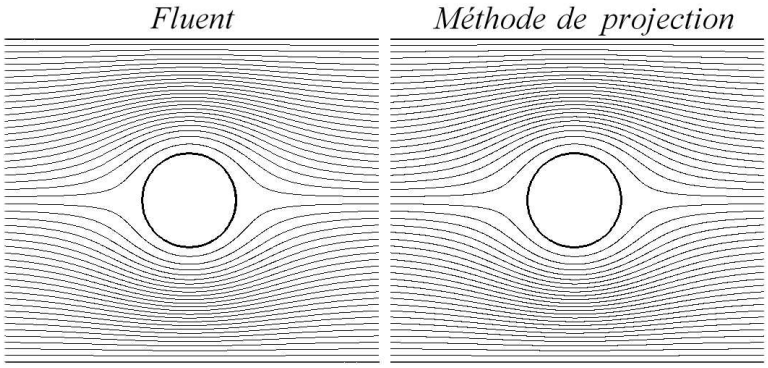

FIG. 2.9 – *Lignes de courant*

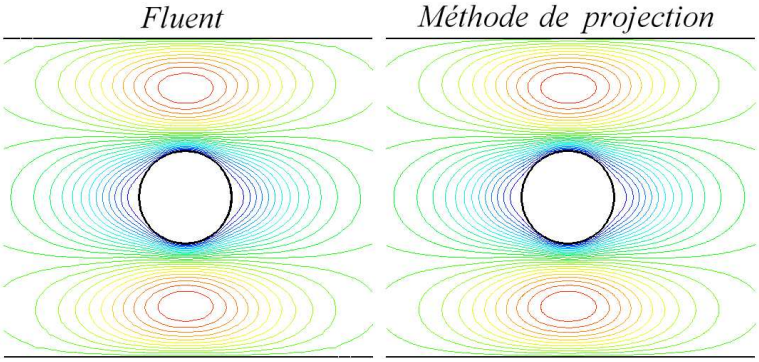

FIG. 2.10 – *Contours de la composante de la vitesse parallèle aux plans*

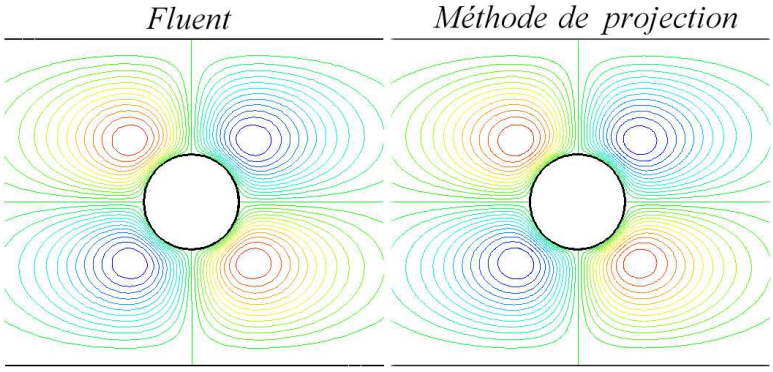

FIG. 2.11 – *Contours de la composante de la vitesse perpendiculaire aux plans*

2.5 Conclusion

La bonne concordance des résultats donnés par le code Fluent et le code basé sur la méthode de projection, résultats confirmés par un autre code de calcul totalement indépendant (formulation $\psi - \omega$, méthode des singularités), nous a permis de confirmer que le logiciel Fluent était capable de traiter ce type de problème. Il a en outre l'avantage non négligeable d'être plus facile d'utilisation mais surtout d'être beaucoup plus rapide à converger que notre propre programme qui exigerait encore une certaine optimisation. Etant donné les bons résultats donnés par Fluent et les avantages qu'il apporte, nous avons fait le choix de l'utiliser en priorité dans ce travail. Le problème test qui nous a servi à comparer les différentes approches numériques va à présent être développé plus en détails.

Chapitre 3

Cylindre confiné en situation centrée

Dans ce chapitre, nous allons approfondir l'étude d'un cylindre centré entre deux plans parallèles. Dans un premier temps, nous allons reprendre et développer le cas test du paragraphe précédent correspondant à un cylindre se déplaçant à vitesse uniforme puis nous aborderons le cas où le cylindre est fixe dans un écoulement de Poiseuille. Nous verrons enfin ce qui se passe lorsque le cylindre est mis en rotation à vitesse uniforme.

3.1 Cylindre en translation uniforme

La géométrie du problème est rappelée sur la figure 3.1. Elle consiste en un cylindre de rayon a se déplaçant symétriquement entre deux plans parallèles distants de $2b$. En choisissant un repère orthonormé d'origine le centre du cylindre avec l'axe des x parallèle aux plans, le cylindre se meut à la vitesse $\overrightarrow{U}_x$ dans un fluide newtonien incompressible (viscosité dynamique μ, masse volumique ρ). On définit comme précédemment le rapport de confinement $k = a/b$ et le nombre de Reynolds $Re = \rho U_x 2a/\mu$.

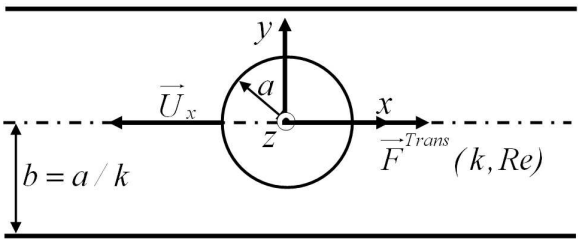

FIG. 3.1 – *Schéma du problème du cylindre en translation*

Tant que l'écoulement reste stationnaire, ses symétries imposent qu'il n'existe ni force

transversale ni couple sur le cylindre [1]. Il n'est alors soumis qu'à la seule force de traînée $F^{Trans}(k,Re)$ orientée dans la direction de son mouvement et de sens opposé. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la variation de cette force en fonction du nombre de Reynolds. Nous nous sommes ensuite penchés sur les «*solutions de type Stokes*» qui surviennent aux faibles nombres de Reynolds.

3.1.1 Influence du nombre de Reynolds

Sur la figure 3.2 nous avons représenté la force de traînée normalisée en fonction du nombre de Reynolds $Re = \rho U_x 2a/\mu$ dans la gamme $[10^{-5};30]$ et pour des valeurs de $k = a/b$ variant entre 10^{-3} et 0.9. La traînée normalisée est définie par l'expression :

$$\Lambda^{Trans}(k,Re) = \frac{F^{Trans}(k,Re)}{\mu U_x}$$

Sur cette même figure, nous avons également tracé la formule 1.16 page 9 de Kida *et al.* [20] correspondant au cylindre en milieu infini [2], c'est-à-dire correspondant à $k = 0$. De cette figure, on peut tirer les remarques suivantes :

- pour un rapport de confinement k donné, la force de traînée normalisée présente deux comportements distincts. Tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à une valeur critique Re_c qui est une fonction de k, $\Lambda^{Trans}(k,Re)$ est indépendante de Re. Cela se traduit par la présence d'un plateau. Dans ce régime, la force de traînée est donc de la forme $F^{Trans} \propto \mu U_x$, la constante de proportionnalité ne dépendant que du paramètre k. Par analogie avec la formule de Stokes pour la sphère en milieu infini $F_S = 6\pi\mu U_\infty$, nous dénommons ces solutions «*solutions de type Stokes*» et nous les noterons par la suite $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$. Pour $Re > Re_c$, les solutions de type Stokes disparaissent et $\Lambda^{Trans}(k,Re)$ est une fonction croissante de Re.
- la solution de Kida *et al.* [20] correspondant au cas du cylindre en milieu illimité, tout comme toutes les autres solutions analytiques mentionnées dans l'étude bibliographique, ne présente pas ce double régime. Ce type de solutions est caractérisé par la présence de termes logarithmiques singuliers qui excluent l'existence d'un « régime plateau ».
- plus le rapport de confinement k est grand et plus Re_c est grand. Les «*solutions de type Stokes*» existant dans l'intervalle $]0;Re_c[$, cela signifie que plus le cylindre est confiné et plus le domaine d'existence de ces solutions est grand.

1. Comme nous l'avons vu dans la bibliographie, l'instationnarité survenant avec l'apparition des tourbillons de Bénard-Von Kármán a lieu pour un nombre de Reynolds de l'ordre de 47 en milieu infini. En milieu confiné par contre, cette instabilité se déclenche pour un nombre de Reynolds supérieur et ceci d'autant plus que le confinement est important (voir par exemple la thèse de Guerouache [106])

2. Au vue de l'étude bibliographique réalisée précédemment, cette formule ressort comme étant la meilleure de toutes dans la gamme de nombres de Reynolds abordée ici comme le montre la figure 1.4 page 12

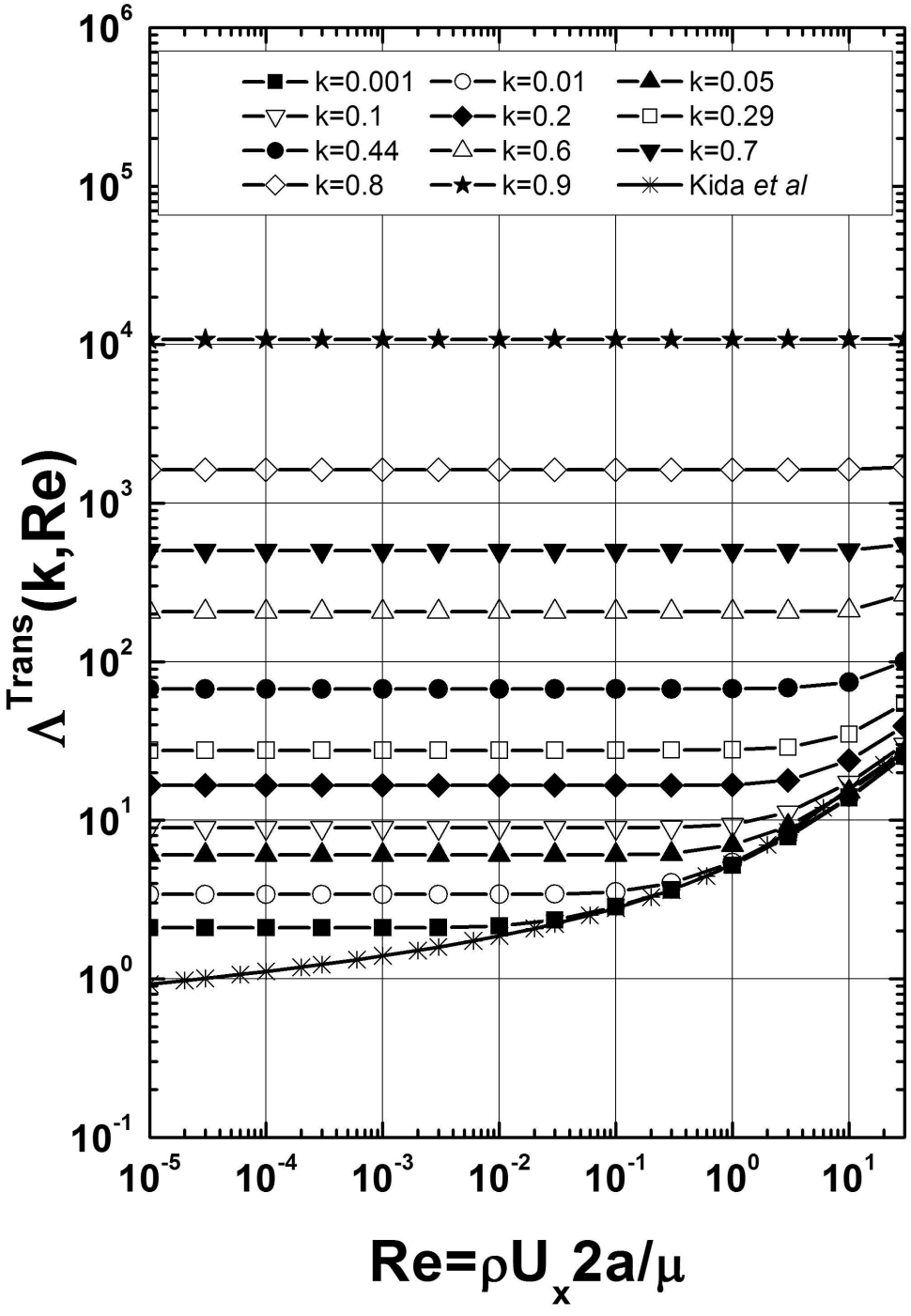

FIG. 3.2 – $\Lambda^{Trans}(k,Re)$ *en fonction de Re*

Le confinement diminue donc l'influence de l'inertie[3] en retardant ses effets. On peut s'en convaincre grâce à la figure 3.3 où est tracée, en fonction du nombre de Reynolds, la quantité :

$$\frac{\Lambda^{Trans}(k,Re) - \Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)}{\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)}$$

Pour compléter cette étude, nous avons représenté sur la figure 3.4 les lignes de courant autour du cylindre pour $k = 0.5$ et des nombres de Reynolds allant de 0.1 à 20. On observe clairement que pour $Re < 1$, la structure de l'écoulement est invariante avec des symétries «haut-bas» et «amont-aval». Pour $Re = 10$, l'écoulement perd sa symétrie «amont-aval» et pour $Re = 20$, il y a apparition des tourbillons de recirculation en aval du cylindre. On peut donc en conclure que pour ce confinement $k = 0.5$, l'inertie, qui se manifeste par une disymétrisation «amont-aval» des lignes de courant, commence a être effective pour un nombre de Reynolds critique compris entre 1 et 10. A titre de comparaison, cette figure montre également sur sa partie droite les lignes de courant obtenues expérimentalement pour un cylindre en «milieu infini» tirées de l'ouvrage de Van Dyke [7] pour des nombres de Reynolds approchant les nôtres. La réduction de l'inertie par le confinement y est nettement observable. On voit par exemple que pour $Re = 1.54$, les lignes de courant en milieu infini ne sont déjà plus symétriques entre l'amont et l'aval du cylindre. Pour $Re = 9.6$ encore, le décollement et les tourbillons de recirculation sont déjà visibles ce qui n'est pas le cas en milieu confiné.

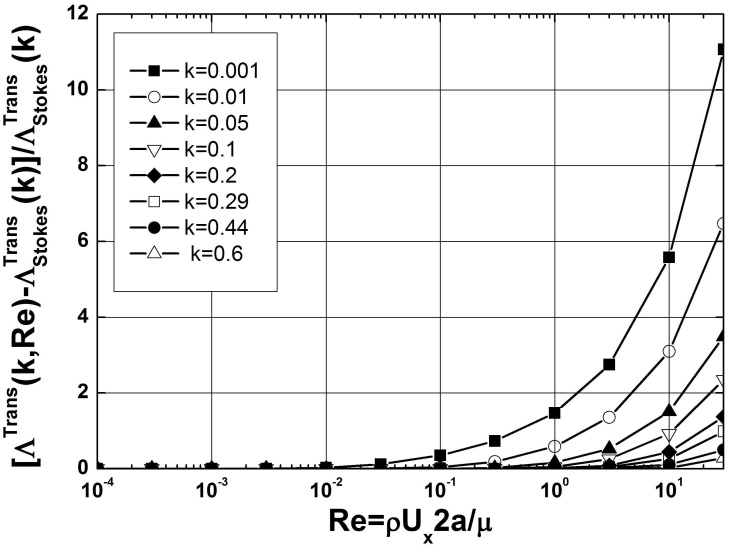

FIG. 3.3 – $[\Lambda^{Trans}(k,Re) - \Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)]/\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ *en fonction de Re*

3. Dans sa thèse de doctorat, Coutanceau [107] a fait la même observation dans le cas d'une sphère chutant dans l'axe d'un tube cylindrique

– d'après les remarques faites ci-dessus, on peut s'attendre, lorsque $k \to 0$, à ce que $Re_c \to 0$. Ceci est tout à fait compatible avec les solutions du type Kida *et al.* [20] ou Lamb [12] qui ne présentent pas de «régime plateau» et qui dépendent toujours de Re. On pourrait dire de ces solutions qu'elles sont «inertielles» dès $Re = 0$.

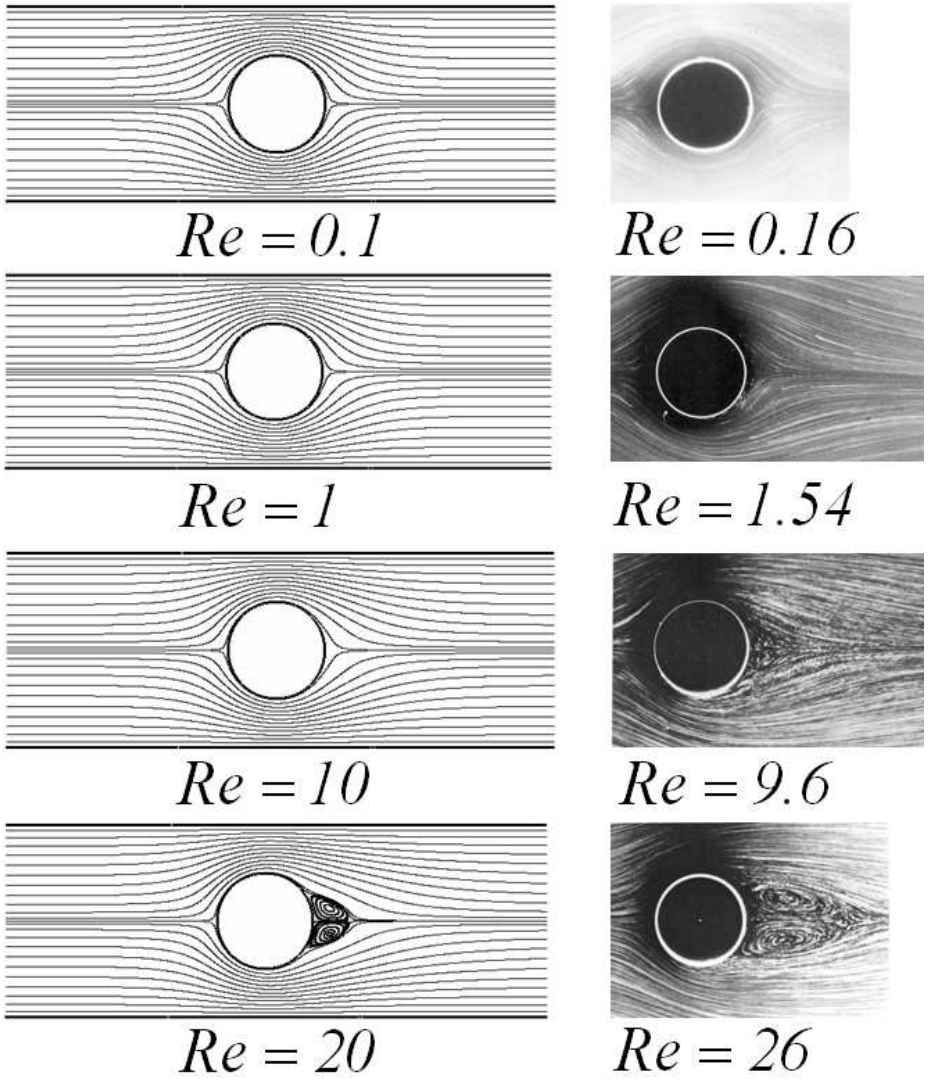

FIG. 3.4 – *Lignes de courant. A gauche : autour d'un cylindre centré de confinement* $k = 0.5$ *pour* $0.1 < Re < 20$. *A droite : autour d'un cylindre en milieu infini pour* $0.16 < Re < 26$. *Source : Van Dyke [7]*

3.1.2 Solutions de type Stokes

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence l'existence de «*solutions de type Stokes*» dont la principale caractéristique réside dans leur indépendance du nombre de Reynolds. On peut les définir par la relation :

$$\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k) = \lim_{Re \to Re_c(k)} \Lambda^{Trans}(k,Re)$$

Nous avons tracé ces solutions en fonction du rapport de confinement k sur la figure 3.5. On constate que la force de traînée est une fonction croissante monotone du rapport de confinement k. Elle doit être théoriquement nulle lorsque $k = 0$. Plus le cylindre est confiné, plus la résistance qu'il subit est grande et elle diverge lorsque $k \to 1$ comme le confirmera plus loin le calcul de lubrification. Lorsque k augmente, la force varie d'abord de manière relativement lente puis croît de plus en plus vite lorsque $k \to 1$. Cela explique pourquoi sur la figure 3.2, les courbes $\Lambda(k,Re)$ ont l'air regroupées pour les faibles valeurs de k alors qu'elles sont clairement distinctes pour les valeurs supérieures du confinement.
Sur cette même figure, nous avons également représenté certains résultats analytiques, numériques et expérimentaux tirés de la littérature et mentionnés dans l'étude bibliographique. Concernant les travaux analytiques, on peut faire les remarques suivantes :

- la formule 1.33 page 19 de Takaisi [52] cesse d'être valide pour k compris entre $[0.2 - 0.3]$
- la formule 1.31 page 19 de Faxén [51] cesse d'être valable pour k compris entre $[0.4 - 0.5]$
- la formule 1.37 page 20 de Tachibana *et al.* [53] cesse d'être valable pour k compris entre $[0.6 - 0.7]$
- les valeurs de Bouard *et al.* [55] données par la formule 1.39 page 20 sont en excellent accord avec nos résultats jusqu'à $k = 0.9$
- il en est de même avec les valeurs numériques calculées par Ben Richou *et al.* [63] jusqu'à $k = 0.99$

En ce qui concerne les résultats expérimentaux, on peut dire que :

- Taneda [84] a effectué des mesures pour k variant entre 0.01 et 0.1. Les mesures qu'il a obtenues sont du même ordre de grandeurs que les nôtres comme on peut le voir dans le tableau 3.1. Le confinement étant très faible, les valeurs à mesurer expérimentalement le sont également ce qui peut justifier les différences
- les travaux de Curtis *et al.* [86] ne sont valides qu'aux très faibles valeurs de k et s'écartent des valeurs numériques dès $k \approx 0.2$ (Tab. 3.2)
- ceux de Ben Richou *et al.* [63] sont meilleurs et semblent valides jusqu'à $k \approx 0.3$ (Tab. 3.3)

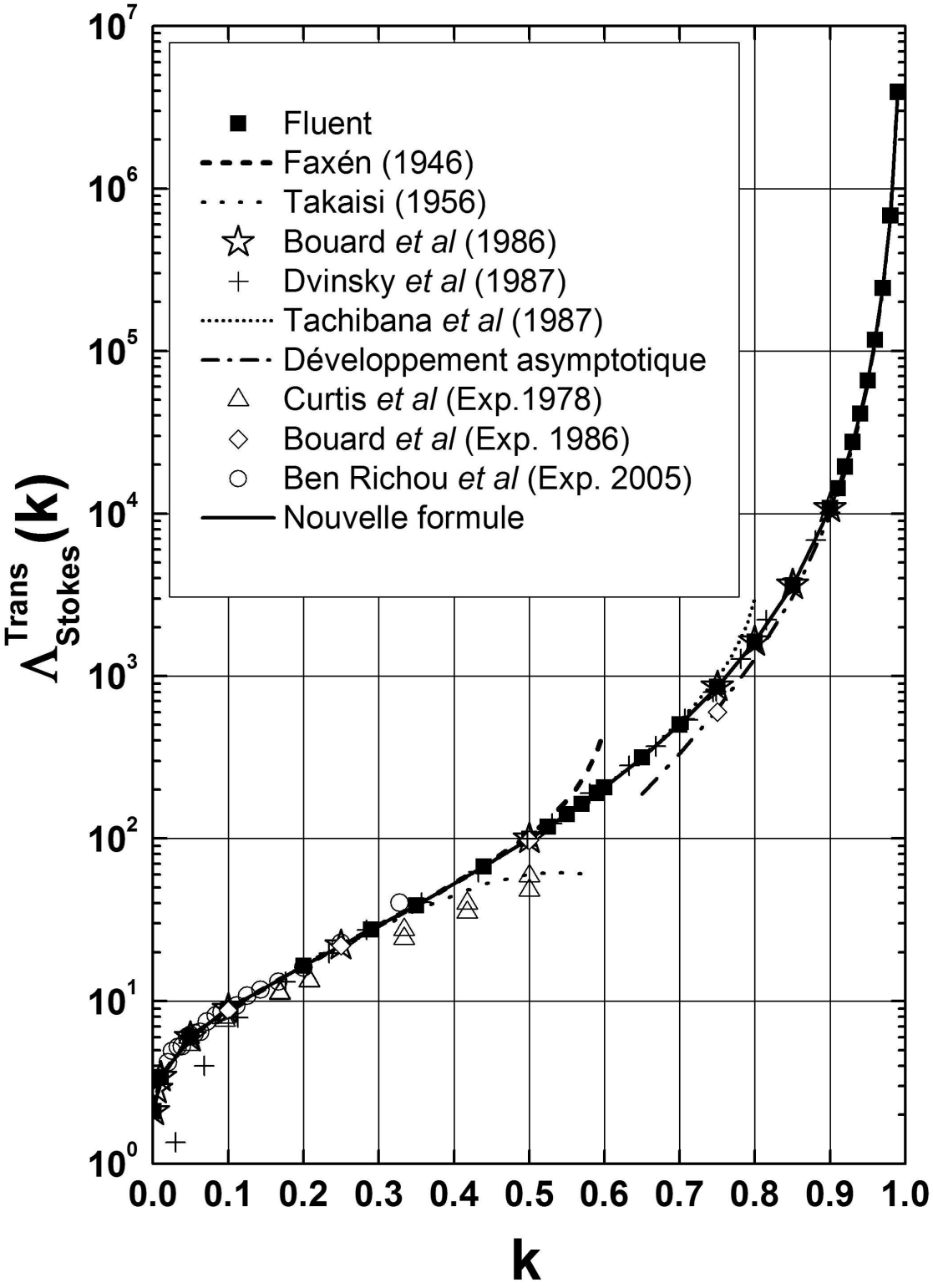

FIG. 3.5 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ *en fonction de* k

– ceux tirés des expériences de Bouard *et al.* [55] sont en bon accord avec nos résultats numériques (Tab.3.4) sauf pour $k = 0.75$ où la différence est de l'ordre de 30%. Les auteurs ont relevé l'anomalie de cette valeur et l'ont attribuée à des effets d'extrémités [4] du cylindre qui augmentent avec le rapport confinement k.

	Fluent	Taneda
$k = 0.01$	3.41	3.03
$k = 0.02$	4.20	4.44
$k = 0.04$	5.46	3.57
$k = 0.1$	8.96	6.80

TAB. 3.1 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ - *Comparaison entre les valeurs expérimentales de Taneda [84] et Fluent*

	Fluent	Curtis [a]	Curtis [b]
$k = 0.048$	5.92	5.4	6.0
$k = 0.096$	8.72	7.6	7.9
$k = 0.169$	13.83	11.1	11.3
$k = 0.208$	17.33	13.2	13.4
$k = 0.334$	35.51	24.2	27.4
$k = 0.418$	58.6	35	40
$k = 0.500$	99.32	48	59

TAB. 3.2 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ - *Comparaison entre les valeurs expérimentales de Curtis* et al. *[86] et Fluent*

[a] Mesures par détermination de la vitesse limite de chute de fils cylindriques
[b] Mesures par la technique de l'analogie électrique

	Fluent	Ben Richou
$k = 0.02$	4.20	4.20
$k = 0.05$	6.03	6.21
$k = 0.1$	8.96	8.93
$k = 0.125$	10.57	10.80
$k = 0.25$	22	22.89
$k = 0.32787$	34.28	40.24

TAB. 3.3 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ - *Comparaison entre les valeurs expérimentales de Ben Richou* et al. *[63] et Fluent*

4. Cette explication est en contradiction avec la remarque faite dans l'article de Trahan *et al.* [74] selon laquelle ces effets d'extrémités cessent de jouer aux forts confinements. L'anomalie est probablement due à la difficulté de contrôler un bon parallélisme entre le cylindre et les parois pour de tels confinements

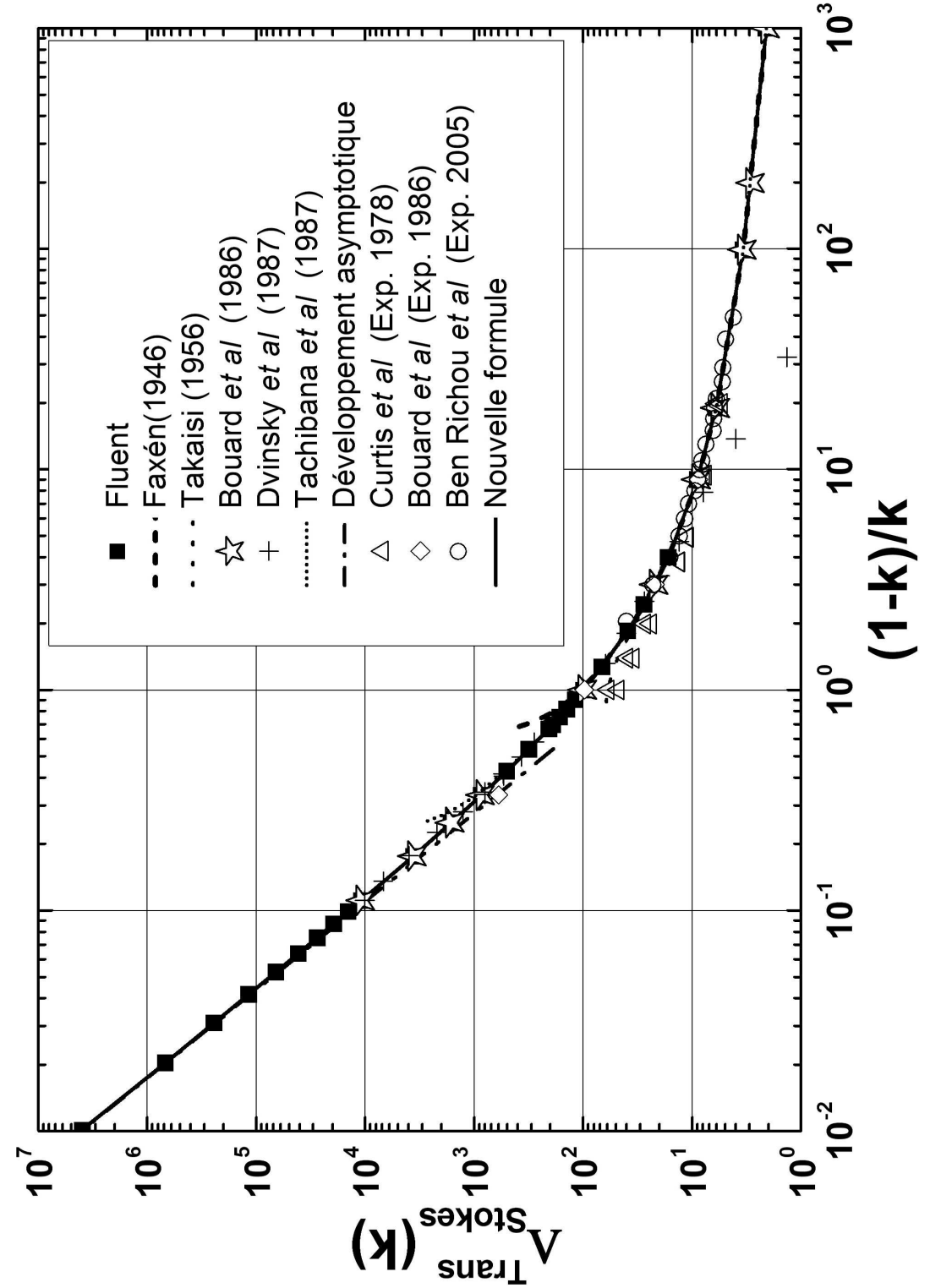

FIG. 3.6 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ *en fonction de* $(1-k)/k$

	Fluent	Bouard
$k = 0.1$	8.96	8.8
$k = 0.25$	21.99	22
$k = 0.5$	99.32	98
$k = 0.75$	859.64	600

TAB. 3.4 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ - *Comparaison entre les valeurs expérimentales de Bouard* et al. *[55] et Fluent*

Nous comparons finalement nos résultats avec ceux issus des études numériques de Hu [61] [5] et de Dvinsky *et al.* [56] [6] dans le tableau 3.5. La concordance est très bonne entre nos résultats et ceux de Hu [61]. Les résultats de Dvinsky *et al.* [56] manquent de précision pour $k < 0.3$.

	Fluent	Hu [61]	Dvinsky *et al.* [56]
$k = 0.05$	6.03	5.91	3.95
$k = 0.1$	8.96	8.86	6.6
$k = 0.125$	10.57	10.45	9.2
$k = 0.25$	21.99	21.78	23
$k = 0.5$	99.32	100	100

TAB. 3.5 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ - *Comparaison entre les valeurs numériques de Hu [61] et Fluent*

Une autre représentation de tous ces résultats est visible sur la figure 3.6 où $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ est donnée en fonction de $(1-k)/k$ en échelles logarithmiques. Elle nous permet entre autre de vérifier nos résultats par leur comparaison à la formule asymptotique qui va être discutée ci-après. Nous avons effectivement déterminé la forme asymptotique de $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ lorsque $k \to 1$. Dans ce cas, les contraintes sont localisées principalement dans une zone de faible étendue située entre les plans et la paroi du cylindre. On peut s'en persuader en observant la figure 3.7 où nous avons tracé la répartition angulaire du module de la vorticité [7] sur la paroi du cylindre pour k variant entre 0.9 et 0.99. On constate clairement lorsque $k \to 1$ que la vorticité sur le cylindre est de plus en plus confinée autour du point situé à $\theta = 90^{\circ}$. On trouverait la même chose autour du point situé à l'angle $\theta = 270^{\circ}$. On peut alors utiliser l'hypothèse de lubrification pour développer les solutions dans ces 2 zones d'étendue réduite d'ouverture 2α centrées autour de $\theta = 90^{\circ}$ et $\theta = 270^{\circ}$. On trouve que les «*solutions de type Stokes*» s'écrivent sous la forme [8] :

5. Résultats déterminés graphiquement à partir la figure 4 page 447 de cet article

6. Résultats déterminés graphiquement à partir la figure 2 page 395 de cet article

7. A la paroi du cylindre, la vorticité et la contrainte visqueuse sont proportionnelles

8. Les constantes A, B et C qui apparaissent dans cette expression proviennent du fait que l'intégration des contraintes sur le cylindre s'effectue sur des zones d'ouverture 2α où la valeur exacte de α est *a priori* inconnue

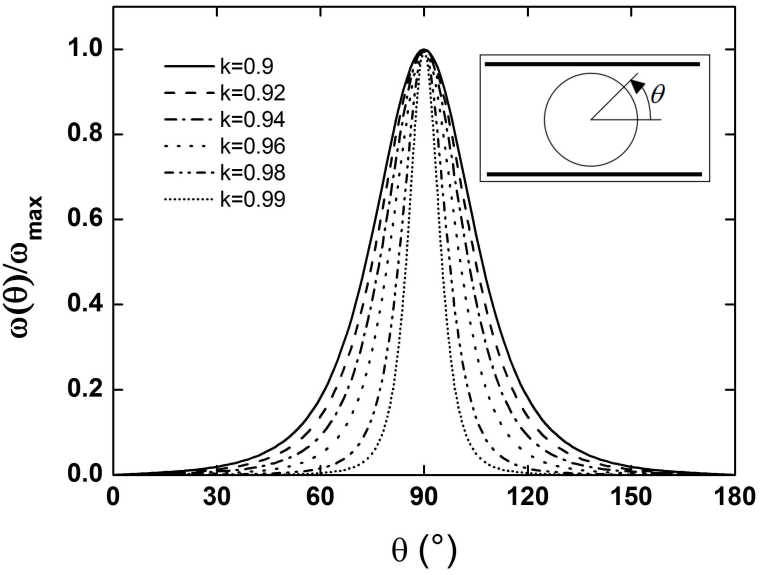

FIG. 3.7 – *Distribution angulaire du module de la vorticité sur le cylindre*

$$\lim_{k\to 1} \Lambda_{Stokes}^{Trans}(k) = 9\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-5/2} + 24A(\frac{1-k}{k})^{-2} + 6\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-3/2}$$
$$+(24B+12C)(\frac{1-k}{k})^{-1} + 2\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-1/2} + \dots \quad (3.1)$$

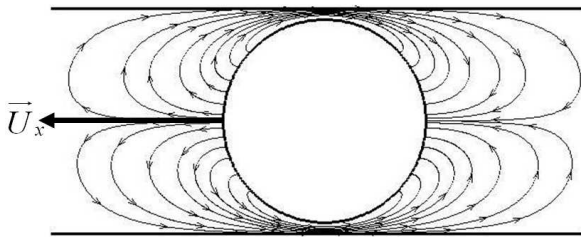

FIG. 3.8 – *Lignes de courant autour du cylindre pour* $k = 0.9$ *et* $Re = 10^{-2}$

Les 4 premiers termes de cette expression sont liés au contre-écoulement de fluide, conséquence du confinement du cylindre. Ce contre-écoulement ou «*backflow*» en anglais est clairement visible sur la figure 3.8 où sont tracées les lignes de courant autour du cylindre pour $k = 0.9$. Du fait de l'encombrement géométrique créé par les plans, le fluide poussé par la cylindre en mouvement doit être évacué à travers les étranglements situés entre les plans et le cylindre. Par comparaison, la figure 3.9 montre les lignes de courant autour du cylindre en milieu infini sans contre-écoulement. Le terme en puissance $-1/2$ de l'expression 3.1 provient quant à lui de l'écoulement de cisaillement

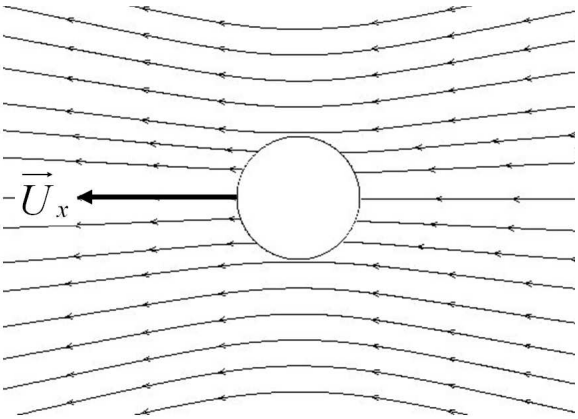

FIG. 3.9 – *Lignes de courant autour du cylindre en milieu infini pour* $Re = 10^{-2}$

entre le cylindre et les plans. Sur la figure 3.10, nous avons tracé la distribution de la pression sur la surface du cylindre pour différentes valeurs de k variant entre 0.3 et 0.7. Les angles $\theta = 90°$ et $\theta = 270°$ correspondent aux points les plus proches des plans.

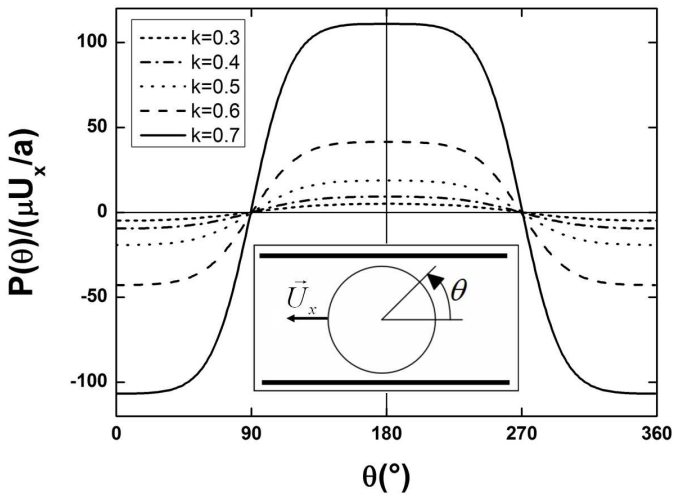

FIG. 3.10 – *Répartition angulaire de la pression sur le cylindre*

On observe aussi sur cette figure que la pression est maximale en valeur absolue aux points $\theta = 0°$ et $\theta = 180°$ qui correspondent respectivement au bord de fuite et d'attaque mais aussi aux points d'arrêt aval et amont. Plus on confine le cylindre, plus la pression augmente au point d'arrêt amont et diminue dans la même proportion au point d'arrêt aval. En ce dernier point, on peut s'attendre à l'apparition de la cavitation si la pression chute en-dessous de la pression de vapeur saturante (ceci n'a pas encore été observé à notre connaissance).

Par ailleurs, le calcul de lubrification se décompose en la contribution de la force de

pression qui s'écrit :

$$\Lambda_p = 9\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-5/2} + 24B(\frac{1-k}{k})^{-1} + \dots \tag{3.2}$$

et en la contribution de la force de viscosité qui est :

$$\Lambda_v = 6\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-3/2} + 12C(\frac{1-k}{k})^{-1/2} + \dots \tag{3.3}$$

Aux grands confinements, c'est donc la force de pression qui prédomine et l'on pourra écrire le développement 3.1 lorsque $k \to 1$ sous la forme :

$$\lim_{k\to 1} \Lambda^{Trans}_{Stokes}(k) \approx 9\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-5/2} \tag{3.4}$$

Cette expression est en très bon accord avec nos résultats numériques pour $k > 0.9$ (voir la figure 3.6 page 55). On possède donc une solution valide pour $k < 0.7$ grâce à la formule 1.37 de Tachibana *et al.* [53], des valeurs numériques discrètes données par Bouard *et al.* [55] valables jusqu'à $k = 0.9$ et une solution valide pour $k > 0.9$ (expression 3.4). Il nous a semblé intéressant d'obtenir une expression unique valable quelle que soit la valeur de k. En remarquant que toutes les expressions analytiques ont la même forme (voir les formules 1.31 à 1.37 pages 19), il nous est apparu judicieux d'interpoler nos résultats numériques par une expression du même type, à savoir :

$$\Lambda^{Trans}_{Stoke}(k) = \frac{1}{\sum_n A_{2n}k^{2n} + Blnk} \tag{3.5}$$

En appliquant la méthode des moindres carrés à nos résultats numériques à l'aide du logiciel Mathematica, nous avons alors déterminé les coefficients A_{2n} et B (Tab. 3.6) de l'expression 3.5.

$A_0 = -0.0728436$	$A_{16} = 1656.05$
$A_2 = 0.136319$	$A_{18} = -2524.9$
$A_4 = -0.10011$	$A_{20} = 2728.73$
$A_6 = -0.56907$	$A_{22} = -2044.47$
$A_8 = 8.14218$	$A_{24} = 1010.47$
$A_{10} = -56.894$	$A_{26} = -296.412$
$A_{12} = 253.902$	$A_{28} = 39.0968$
$A_{14} = -773.113$	$B = -0.0795135$

TAB. 3.6 – *Coefficients numériques de l'expression 3.5*

La série au dénominateur de la formule 3.5 contient 15 termes. Ce nombre a été arrêté de sorte qu'on obtienne une interpolation des résultats numériques donnant une erreur relative par rapport à ces résultats toujours inférieure à 1% sauf pour $k = 0.99$ où l'on atteint une erreur relative de 1.5%. Sur les figures 3.5 et 3.6, nous avons tracé cette fonction et l'on constate qu'elle est bien valide dans la gamme $10^{-3} < k < 0.99$.

On peut encore vérifier la validité de cette formule en comparant le résultat qu'elle donne avec un résultat issu de article de Feng *et al.* [62]. Bien que ce travail consiste en une étude numérique (méthode *DNS*) de l'écoulement autour d'un cylindre confiné entre deux plans parallèles dans un fluide viscoélastique, il donne néanmoins quelques courbes et valeurs correspondant au fluide newtonien. On y trouve par exemple pour $k = 0.25$ la valeur 21.75 de la traînée normalisée[9]. La formule 3.5 donne quant à elle la valeur 21.99 soit une erreur relative de l'ordre de 1%.

Le mouvement du cylindre engendre enfin une perte de charge $\Delta P^{Trans}(k)$ dont nous avons tracé la forme normalisée $\Delta P^{Trans}(k)2b/(\mu U_x)$ sur la figure 3.11 en fonction de $(1-k)/k$. Plus le rapport de confinement k est grand, plus la différence de pressions est forte et l'on observe une divergence lorsque $k \to 1$. Sur la même figure, nous avons tracé également la forme asymptotique 3.4 de la force de pression sur le cylindre obtenue précédemment.

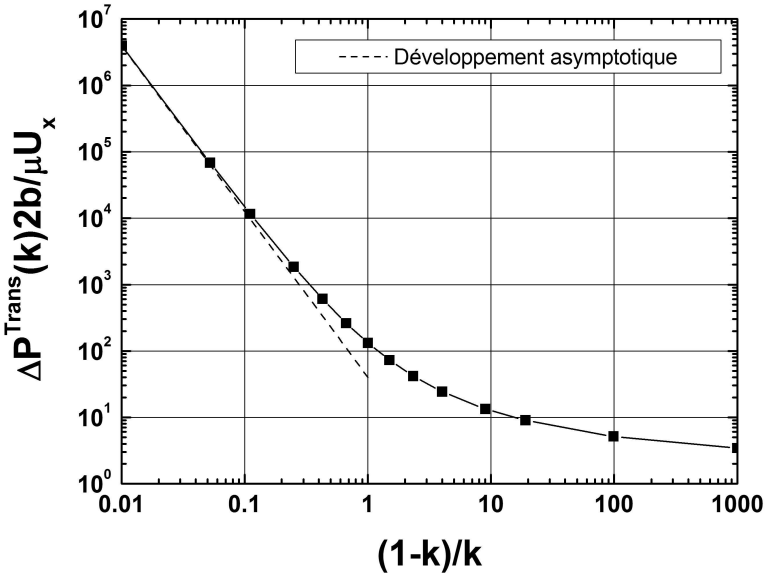

FIG. 3.11 – *Perte de charge en fonction de* $(1-k)/k$

3.2 Cylindre fixe dans un écoulement de Poiseuille

On s'intéresse à présent au cas où le cylindre est immobile dans un écoulement de Poiseuille défini par le profil :

$$u_x(y) = U_{max}[1 - (\frac{y}{b})^2]$$

9. Cette valeur a été déduite de la figure 5 page 70 de cet article

avec U_{max} la vitesse maximale de l'écoulement (Fig. 3.12). Le nombre de Reynolds s'écrit maintenant [10] :

$$Re = \frac{\rho U_{max} 2a}{\mu}$$

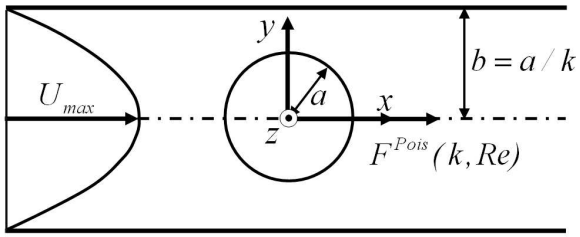

FIG. 3.12 – *Schéma du problème du cylindre en écoulement de Poiseuille*

Comme dans le cas précédent, tant que l'écoulement reste stationnaire, le cylindre n'est soumis qu'à une force de traînée $F^{Pois}(k,Re)$ fonction du rapport de confinement et du nombre de Reynolds. Dans un premier temps, nous avons étudié l'influence du nombre de Reynolds sur les solutions avant de nous intéresser aux «*solutions de type Stokes*» .

3.2.1 Influence du nombre de Reynolds

Sur la figure 3.13, nous avons tracé la force de traînée normalisée en fonction de Re pour différentes valeurs du rapport de confinement k. Elle est définie par l'expression :

$$\Lambda^{Pois}(k,Re) = \frac{F^{Pois}(k,Re)}{\mu U_{max}}$$

Les observations faites dans le paragraphe 3.1.1 peuvent être renouvelées ici à l'identique. Nous en rappelons donc brièvement les grandes lignes :

– pour chaque valeur de k, il y a deux régimes d'écoulement dont la transition s'effectue pour un nombre de Reynolds Re_c. Pour $Re < Re_c$, on a un régime «plateau» correspondant aux «*solutions de type Stokes*» où $\Lambda^{Pois}(k,Re)$ est indépendant de Re. On appellera $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ de telles solutions. Pour $Re > Re_c$, $\Lambda^{Pois}(k,Re)$ est une fonction croissante de Re.

10. On aurait également pu choisir comme vitesse de référence la vitesse moyenne $\overline{U} = 2U_{max}/3$. Notre choix a été orienté par le fait que lorsque $k \to 0$, le cylindre «voit» un écoulement uniforme à la vitesse U_{max} ce qui rend la comparaison avec le cas du cylindre en déplacement uniforme plus aisée

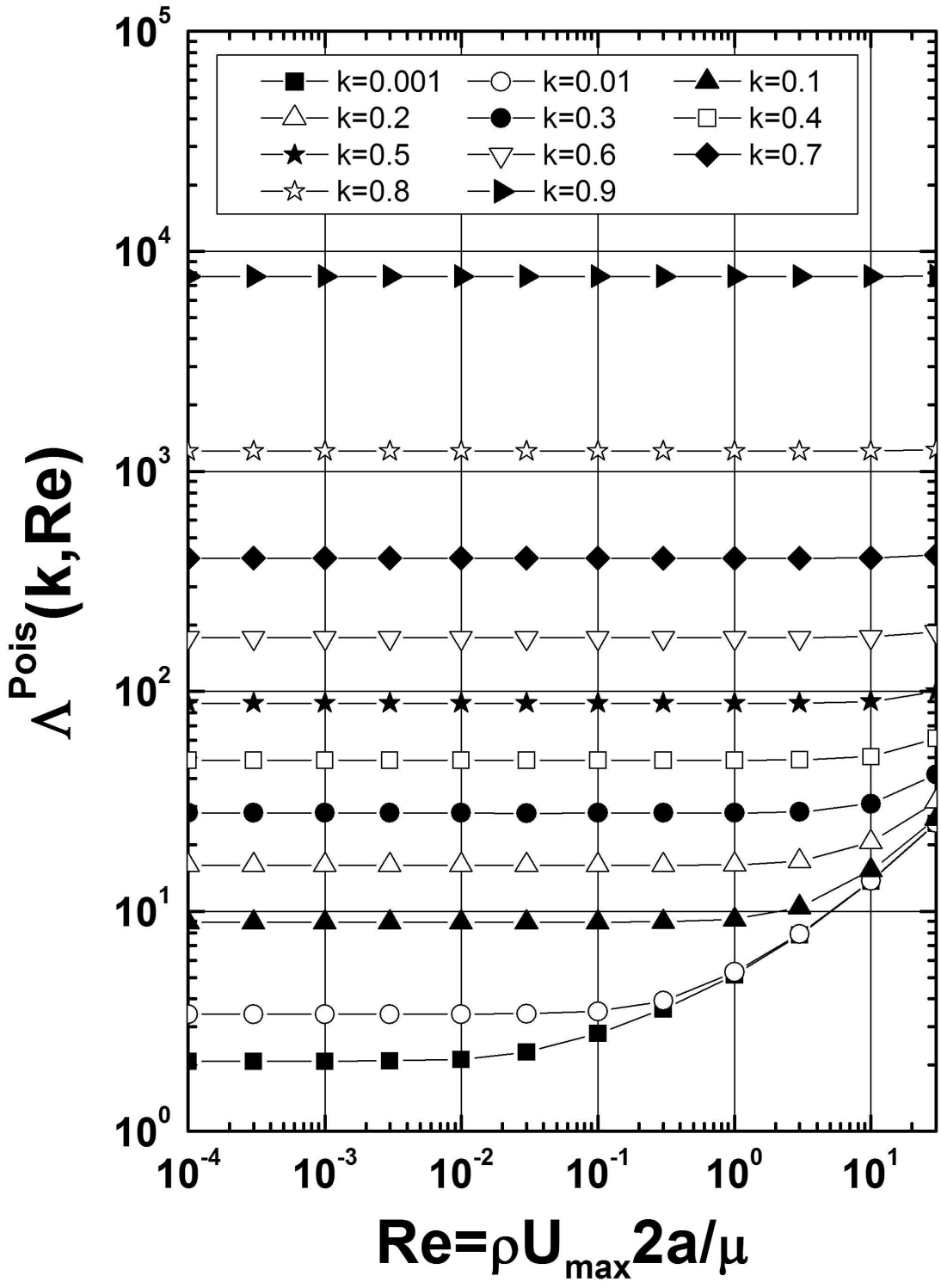

FIG. 3.13 – $\Lambda^{Pois}(k,Re)$ *en fonction de Re*

– plus k est petit, plus Re_c est petit. Le confinement réduit l'influence des forces d'inertie.

3.2.2 Solutions de type Stokes

On peut définir les «*solutions de type Stokes*» par la relation :

$$\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k) = \lim_{Re \to Re_c(k)} \Lambda^{Pois}(k,Re)$$

Nous les avons représentées en fonction de k sur la figure 3.14. Comme dans le cas du cylindre se déplaçant à vitesse constante, on retrouve encore une fois une croissance monotone de $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$. Les solutions analytiques appellent aux remarques suivantes :

– la formule 1.45 page 23 de Takaisi [65] n'est valide que pour $k < 0.1$
– L'expression 1.46 page 24 de Harrison [15] est correcte tant que $k < 0.4$
– la formule 1.44 page 23 de Faxén [51] est valable pour $k < 0.5$

Les seuls résultats expérimentaux que nous avons trouvés sont ceux issus de l'article de Dhahir *et al.* [88]. On ne peut malheureusement pas comparer nos résultats aux leurs car l'écoulement de Poiseuille n'est pas plan dans leurs expériences. On trouve par contre quelques résultats issus de calculs numériques comme ceux de Ben Richou *et al.* [67] ou de Dvinsky *et al.* [66]. Nous comparons nos valeurs avec celles de ces articles dans le tableau 3.7.

	Fluent	Ben Richou *et al.*	Dvinsky *et al.*
$k = 0.05$	6.02755	5.99999	8.45
$k = 0.1$	8.91633	9.1630	11.43
$k = 0.2$	16.2315	16.3585	19.14
$k = 0.3$	27.9529	28.4828	30.91
$k = 0.4$	48.6038	48.8511	53.15
$k = 0.5$	88.3908	88.8184	97.41
$k = 0.6$	175.189	177.8771	182.32
$k = 0.7$	403.184	405.41181	396.62
$k = 0.8$	1233.08	1256.1650	1165.33
$k = 0.9$	7687.97	7631.3287	6537.29

TAB. 3.7 – $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ - *Comparaison entre les valeurs numériques de Ben Richou* et al. *[67], Dvinsky* et al. *[66] et Fluent*

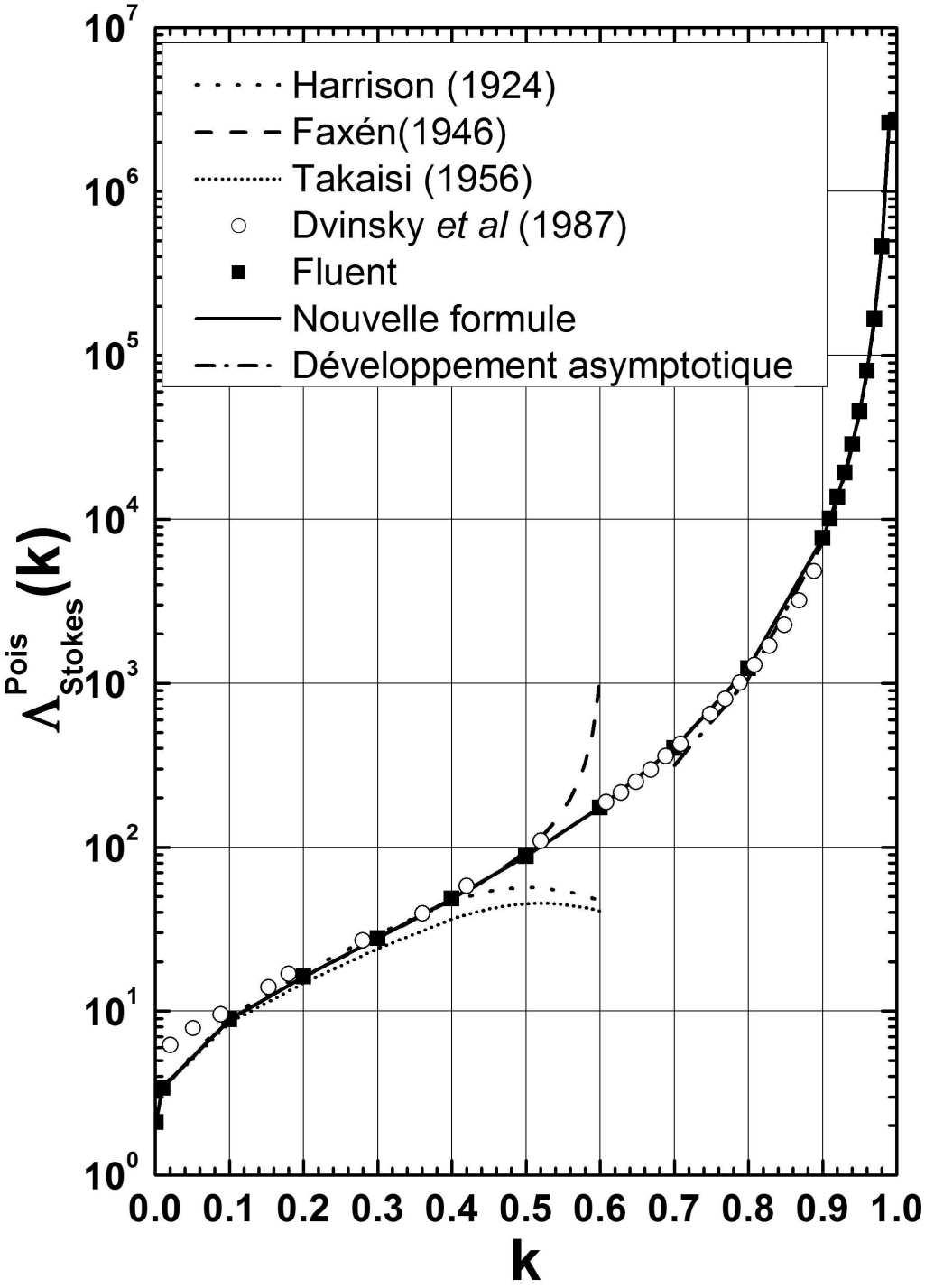

FIG. 3.14 – $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ *en fonction de* k

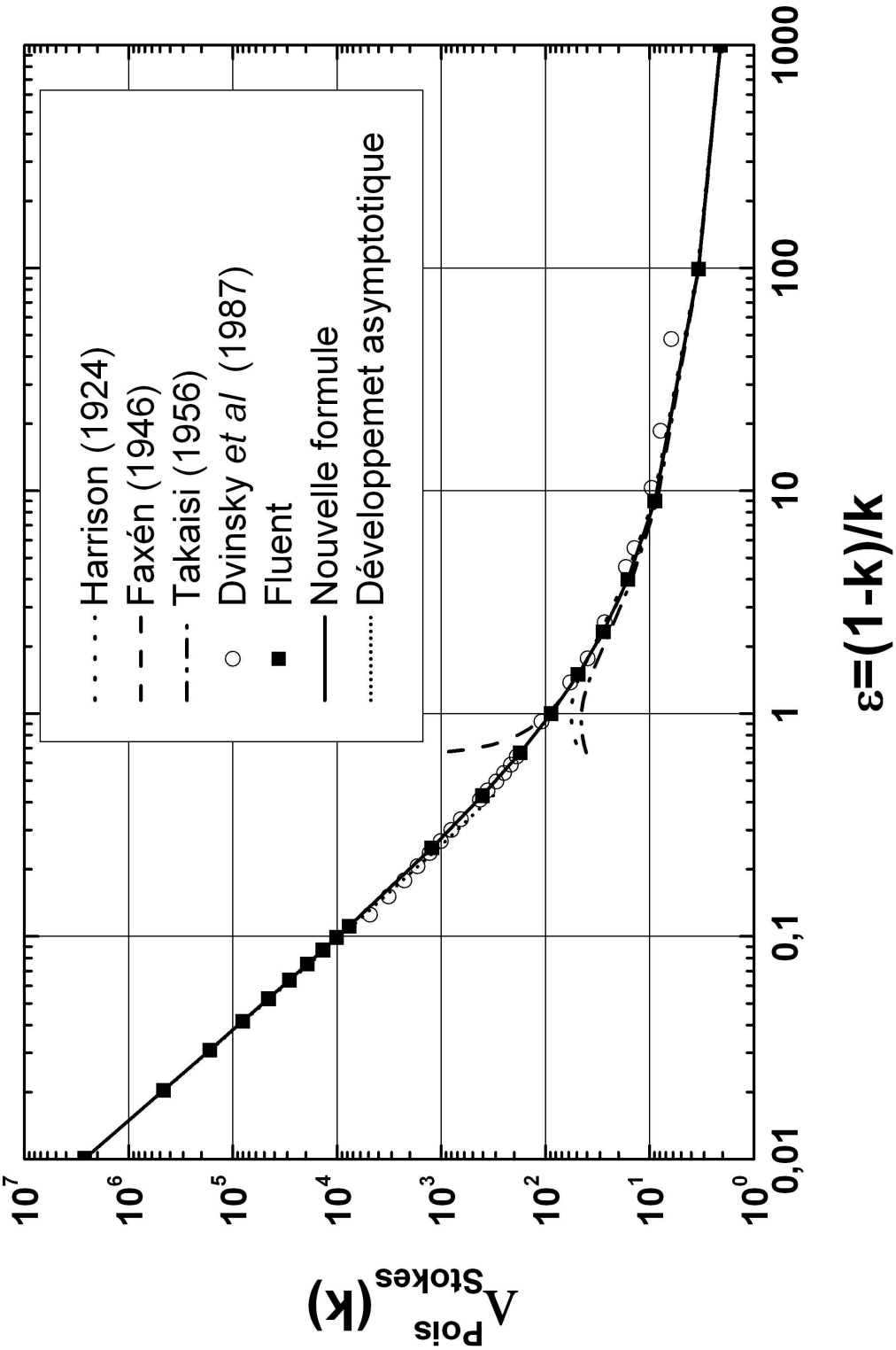

FIG. 3.15 – $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ *en fonction de* $(1-k)/k$

On constate l'excellent accord entre les résultats de Ben Richou *et al.* [67] et les nôtres. La comparaison avec les valeurs numériques issues de l'article de Dvinsky *et al.* [66] sont plus problématiques : en effet, bien que les auteurs assurent que leurs résultats coïncident avec ceux de Faxén [51], Harrison [15] ou Takaisi [65] pour les faibles valeurs de k, l'exploitation de leurs courbes [11] donnent des valeurs différentes de celles des auteurs cités et des nôtres. Ceci est clairement visible dans le tableau 3.7 et sur la figure 3.14 où les points de Dvinsky *et al.* [66] pour $k < 0.2$ sont largement au-dessus de tous les autres. Au-delà, pour k plus petit que 0.9 (limite haute de leur étude), l'accord est bien meilleur entre les différentes approches.

Tout comme dans le cas du déplacement uniforme du cylindre, on utilise la représentation «log-log» dans la figure 3.15 dans laquelle on peut comparer les différents résultats avec le développement asymptotique en lubrification suivant :

$$\lim_{k\to 1} \Lambda_{Stokes}^{Pois}(k) = \frac{6\pi\sqrt{2}}{k}(\frac{1-k}{k})^{-5/2} + \frac{16A}{k}(\frac{1-k}{k})^{-2} + \frac{4\pi\sqrt{2}}{k}(\frac{1-k}{k})^{-3/2}$$

$$+\frac{(16B+8C)}{k}(\frac{1-k}{k})^{-1} + \dots$$

où les constantes A, B et C dépendent des bornes d'intégration définissant le domaine sur lequel l'on considère qu'à lieu le transfert de quantité de mouvement [12]. La contribution de la force de pression s'écrit :

$$\Lambda_p^{Pois} = \frac{6\pi\sqrt{2}}{k}(\frac{1-k}{k})^{-5/2} + \frac{16A}{k}(\frac{1-k}{k})^{-2} + \frac{16B}{k}(\frac{1-k}{k})^{-1} + \dots$$

et celle due à la force visqueuse :

$$\Lambda_v^{Pois} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{k}(\frac{1-k}{k})^{-3/2} + \frac{8C}{k}(\frac{1-k}{k})^{-1} + \dots$$

Lorsque k est très proche de 1, c'est toujours la force de pression qui est prépondérante et on peut écrire :

$$\lim_{k\to 1} \Lambda_{Stokes}^{Pois}(k) \approx \frac{6\pi\sqrt{2}}{k}(\frac{1-k}{k})^{-5/2} \tag{3.6}$$

On dispose donc de solutions analytiques valides pour $k < 0.5$ et d'une solution asymptotique valide pour $k > 0.9$. L'intervalle entre ces deux bornes est encore plus large à combler que dans le cas précédent. Plutôt que d'extrapoler une fois encore à nos valeurs numériques, nous avons cherché la relation entre $\Lambda_{Stokes}^{Trans}(k)$ et $\Lambda_{Stokes}^{Pois}(k)$. Sur la figure 3.16, nous avons tracé le rapport de ces deux quantités. Elles sont exactement dans un rapport égal à $1 + k^2/2$. On peut alors écrire pour $\Lambda_{Stokes}^{Pois}(k)$ la formule suivante :

11. Nous avons utilisé 2 logiciels différents (ImageJ et Curve Unscan) pour être sûrs des valeurs déduites des figures (Fig.2 page 407 notamment) de l'article de Dvinsky *et al.* [66]

12. Voir la remarque 8 au bas de la page 56

$$\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k) = \frac{\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)}{1 + k^2/2} \tag{3.7}$$

où $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ est donnée par la formule 3.5 page 59. Une fois encore, on peut tester cette formule en comparant le résultat qu'elle donne avec un résultat issu de article de Feng *et al.* [62]. Pour $k = 7/12 \approx 0.583$, l'article donne la valeur 152 de la traînée normalisée en écoulement de Poiseuille[13]. La formule 3.7 donne quant à elle la valeur 155 soit une erreur relative de l'ordre de 2%.

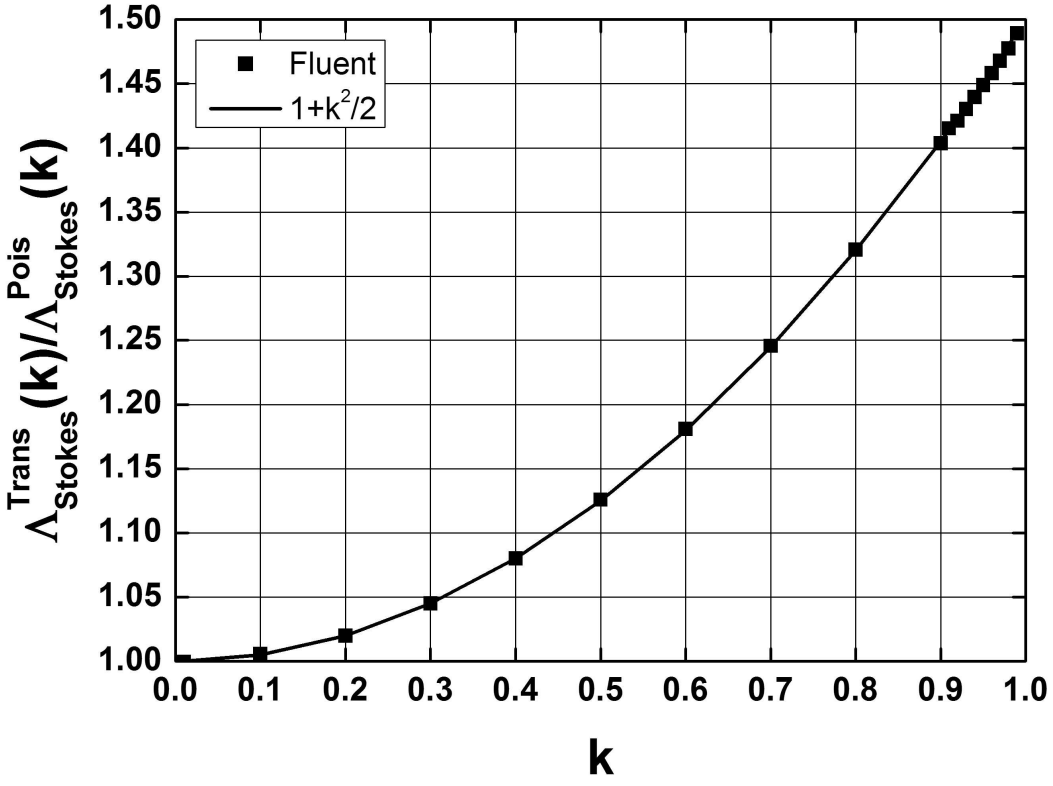

FIG. 3.16 – $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)/\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ *en fonction de* k

La figure 3.17 montre enfin la perte de charge normalisée $\Delta P^{Pois}(k)2b/(\mu U_{max})$ en fonction de $(1-k)/k$ ainsi que le développement asymptotique donné par la formule 3.6. Comme dans le cas de la translation uniforme, cette perte de charge diverge lorsque $k \to 1$ avec la même rapidité (exposant $-5/2$ pour les deux problèmes). On confirme ici que c'est la force de pression qui est prédominante lorsque $k \to 1$ puisqu'alors la force totale $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ se confond avec $\Delta P^{Pois}(k)2b/(\mu U_{max})$.

13. Détermination graphique issue de la figure 2.*a* page 67 de cet article

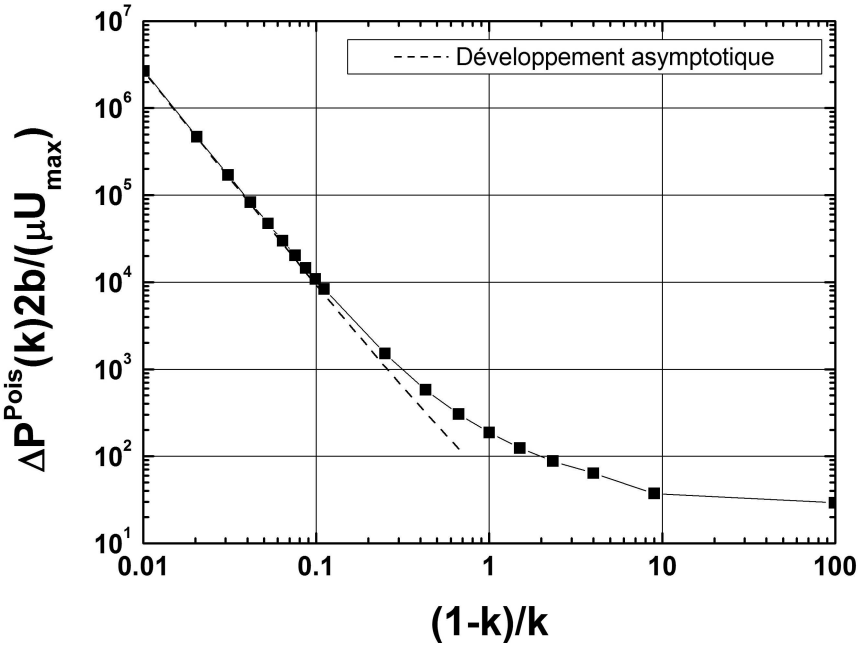

FIG. 3.17 – *Perte de charge en fonction de* $(1-k)/k$

3.3 Cylindre en rotation uniforme

Le problème est maintenant celui du cylindre centré en rotation uniforme à la vitesse Ω_z (Fig. 3.18). On définit le nombre de Reynolds basé sur le diamètre $2a$ du cylindre et sa vitesse périphérique $\Omega_z a$:

$$Re = \frac{2\rho\Omega_z a^2}{\mu}$$

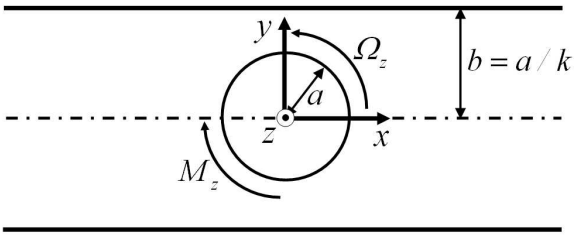

FIG. 3.18 – *Schéma du problème du cylindre en rotation*

En écoulement stationnaire, le cylindre n'est soumis qu'au moment $M_z(k,Re)$ des forces visqueuses sur le cylindre qui s'oppose à sa rotation. On définit le moment adimensionnel $\Gamma(k,Re)$ par l'expression :

$$\Gamma(k,Re) = \frac{M_z(k,Re)}{\mu\Omega_z a^2}$$

Comme dans les deux sections précédentes, nous allons préciser l'influence du nombre de Reynolds sur $\Gamma(k,Re)$ puis celle du rapport de confinement k.

3.3.1 Influence du nombre de Reynolds

Dans la gamme des nombres de Reynolds considérés dans cette étude ($Re < 30$), ceux-ci n'ont aucune influence sur la valeur de Γ (Fig. 3.19). Nous n'observons que des «*solutions de type Stokes*» que nous baptisons $\Gamma_{Stokes}(k)$. Il n'y a aucune transition entre des «régimes plateau» et d'éventuels régimes inertiels. D'après les expériences de Hellou [71], les effets d'inertie deviennent pourtant significatifs à partir d'un nombre de Reynolds de l'ordre de 5. Au-delà de cette valeur, il a observé expérimentalement que l'écoulement devient tridimensionnel avec l'apparition de trajectoires hélicoïdales dans l'écoulement principal (celui directement engendré par la rotation du cylindre). Des structures cellulaires verticales se développent pour un nombre de Reynolds compris entre 25 et 30 dans la zone de la première cellule. Au-delà, l'écoulement ne semble pas être affecté. Il reste plan et la deuxième série de cellules est identique à celle observée en régime de type Stokes. Nous n'observons donc aucun régime inertiel car nous n'avons résolu numériquement que le problème bidimensionnel. Dans ces conditions, l'écoulement dans le voisinage du cylindre est toujours, en première approximation, un écoulement par cercles concentriques. La vitesse y est orthoradiale et le gradient de vitesse radial. Les termes d'inertie sont alors nuls pour des raisons purement géométriques. Cela est encore renforcé par l'effet des parois : plus le cylindre est confiné, plus les «*solutions de type Stokes*» vont exister jusqu'à des nombres de Reynolds importants comme on a pu s'en rendre compte dans les paragraphes 3.1 et 3.2 précédents.

3.3.2 Solution de type Stokes

Sur la figure 3.20, nous avons représenté le moment adimensionnel $\Gamma_{Stokes}(k)$ en régime de Stokes pour $Re = 10^{-3}$. Lorsque $k \to 0$, le moment tend vers la valeur théorique[14] qui vaut 4π. Cette asymptote horizontale est la conséquence de l'absence de paradoxe dans ce problème en milieu infini. La présence des parois ne semble pas avoir autant d'effet que dans les cas de la translation et de l'écoulement de Poiseuille. Pour $k = 0.3$, la différence entre la valeur de Γ_{Stokes} et la valeur en milieu infini n'est de de 8%. Pour $k = 0.4$, cette différence atteint 15% et pour $k = 0.5$, c'est-à-dire lorsque le cylindre occupe la moitié de la largeur du canal, elle est de 25%. La comparaison des résultats de nos calculs avec les valeurs théoriques de Howland *et al.* [70] et ceux issus du mémoire de thèse de Hellou [71] sont en excellent accord comme on peut le voir dans le tableau 3.8.

14. Rappelons qu'en milieu infini, le moment par unité de longueur subi par un cylindre de rayon a en rotation à la vitesse Ω_z dans un fluide de viscosité μ vaut $4\pi\mu\Omega_z a^2$

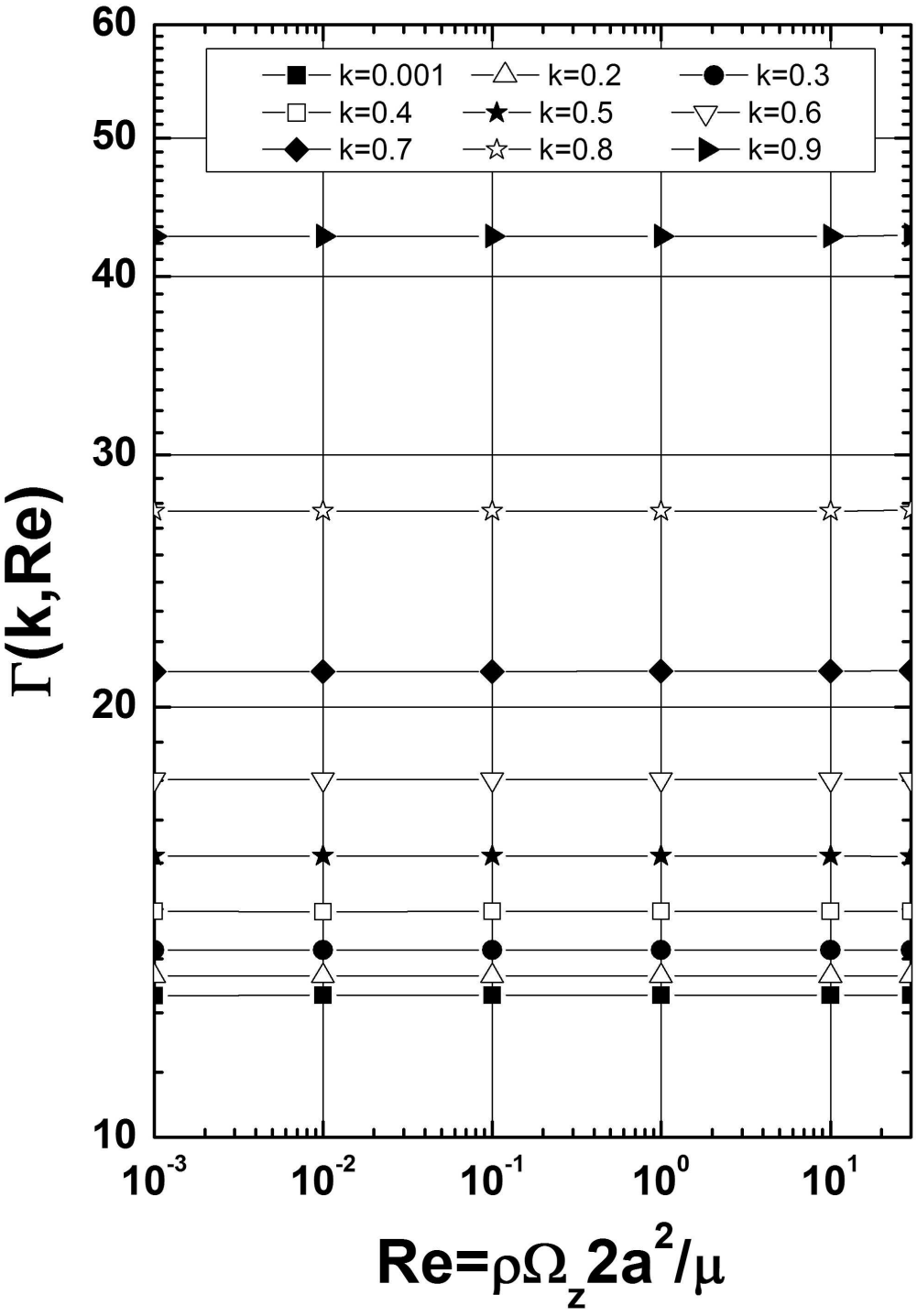

FIG. 3.19 – $\Gamma(k,Re)$ *en fonction de* Re

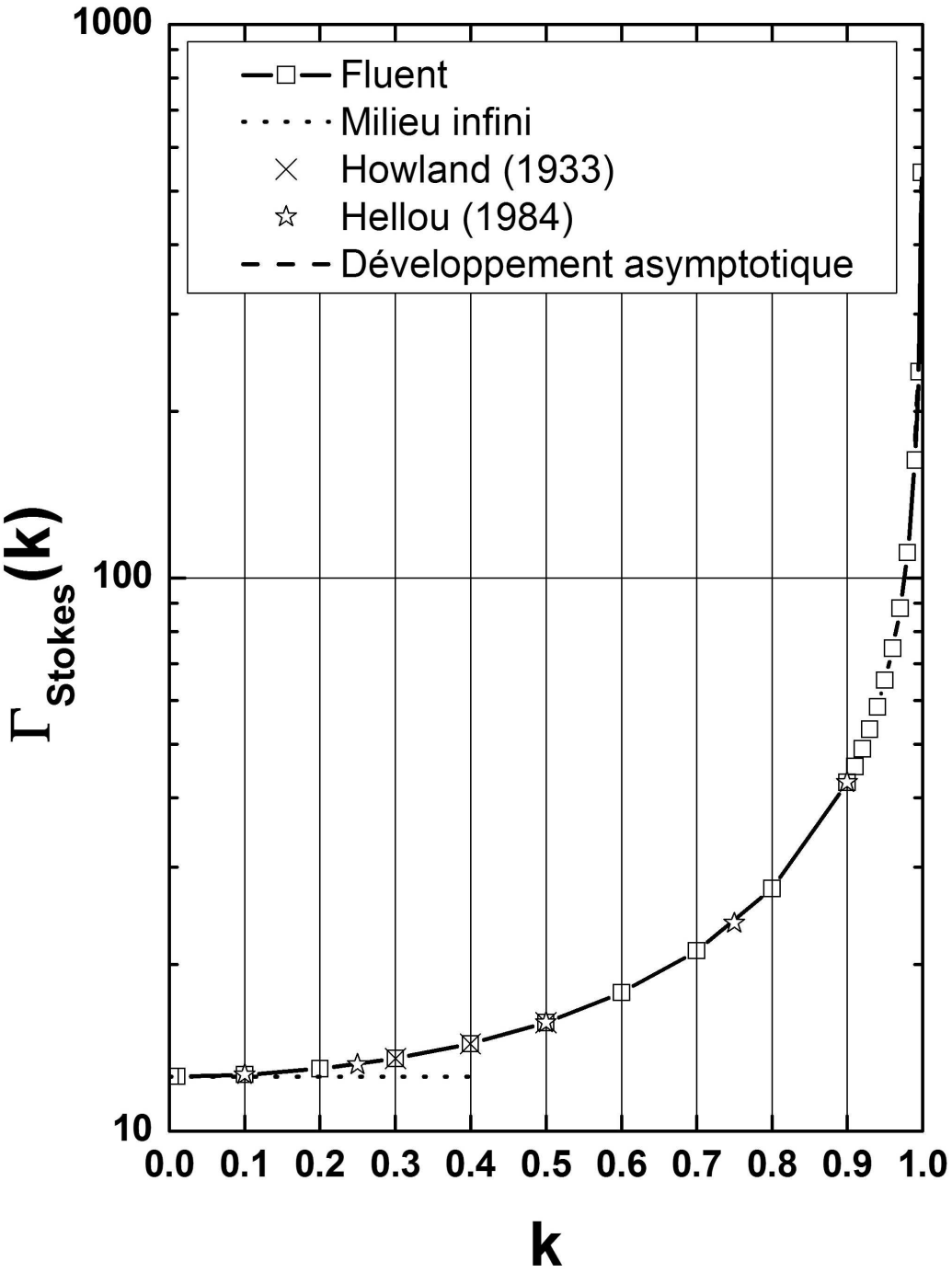

FIG. 3.20 – $\Gamma_{Stokes}(k)$ *en fonction de* k

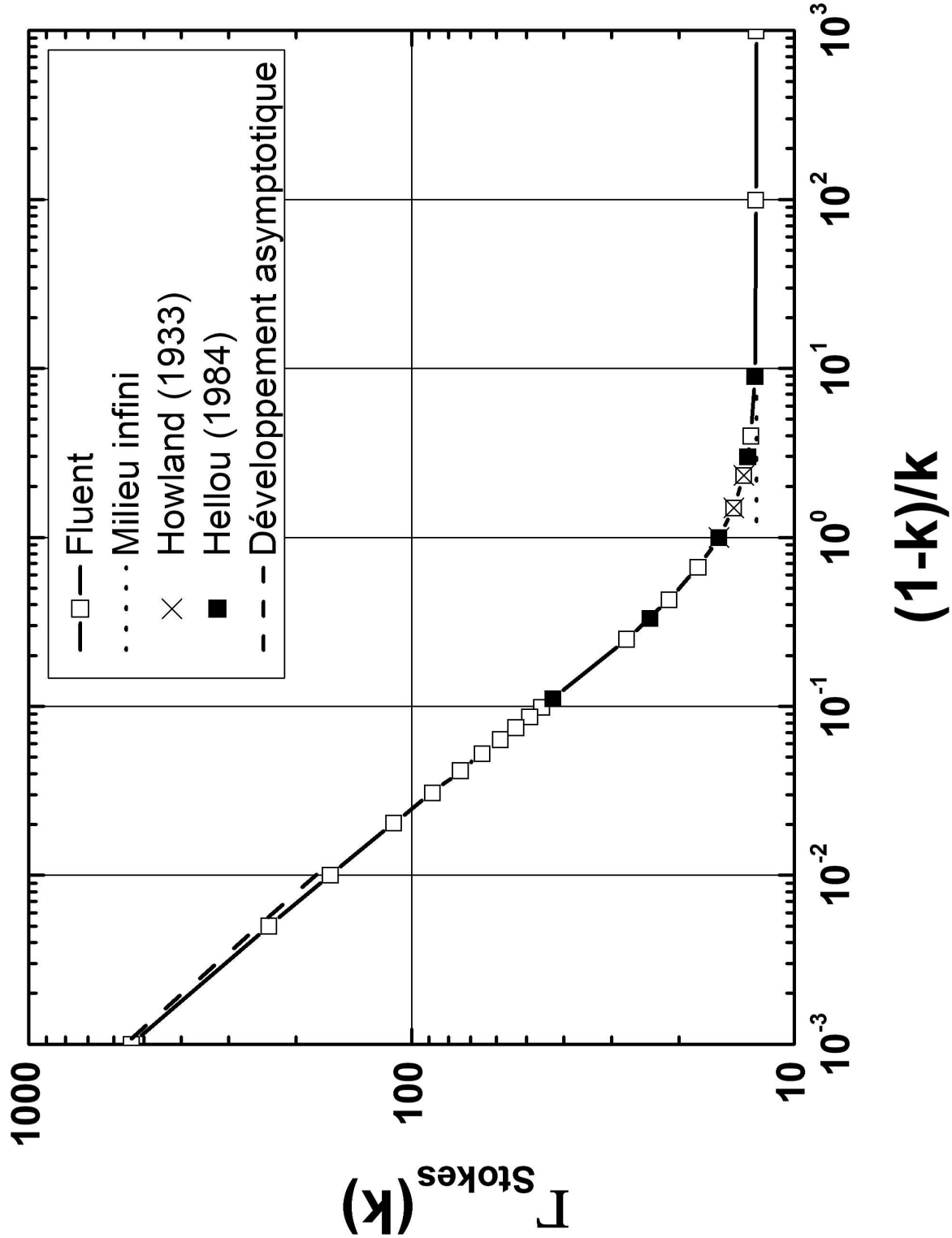

FIG. 3.21 – $\Gamma_{Stokes}(k)$ *en fonction de* $(1-k)/k$

	$k = 0.1$	$k = 0.3$	$k = 0.4$	$k = 0.5$	$k = 0.9$
Fluent	12.666	13.521	14.393	15.726	42.691
Hellou	12.664	/	/	15.721	42.672
Howland *et al.*	/	13.521	14.388	15.708	/

TAB. 3.8 – *Comparaison des valeurs de* $\Gamma_{Stokes}(k)$ *données par Fluent, Hellou [71] et Howland* et al. *[70]*

Lorsque $k \to 1$, le moment diverge à l'infini. Un calcul de lubrification montre que le comportement dans cette région est du type :

$$\lim_{k \to 1} \Gamma_{Stokes}(k) \approx 4\pi\sqrt{2}(\frac{1-k}{k})^{-1/2} \tag{3.8}$$

Ce comportement asymptotique est visible sur la figure 3.21 où l'on a tracé $\Gamma_{Stokes}(k)$ en fonction de $(1-k)/k$. On remarque que le moment diverge moins vite que les forces de traînée en écoulement de Poiseuille et en translation uniforme qui ont un exposant égal à $-5/2$ (expressions 3.4 et 3.6). Cette «faible» divergence a également pour conséquence qu'il faut confiner beaucoup le cylindre avant d'être en régime de lubrification. Pour $k = 0.99$, la différence entre la valeur calculée numériquement et celle déterminée à partir de la formule 3.8 est de l'ordre de 8%. Pour le même confinement, dans les cas du cylindre en translation et en écoulement de Poiseuille, cette différence est de l'ordre de 2% et 1% respectivement. Pour $k = 0.999$, la différence s'est réduite mais est encore de l'ordre de 4% dans le cas de la rotation.

Contrairement aux deux précédents problèmes, tant que le cylindre reste dans le plan de symétrie, il n'y a aucune différence de pressions ΔP^{Rot} entre deux sections droites arbitrairement éloignées du cylindre puisque la rotation du cylindre «envoie» autant de fluide vers l'amont que vers l'aval. Il existe néanmoins une répartition intéressante de la pression autour du cylindre en rotation. On voit sur la figure 3.22 que la pression est extrémale sur les plans avec une surpression du côté où le fluide pénètre dans l'espace entre le cylindre tournant et les plans et une dépression là où le fluide en ressort. Remarquons sur cette figure encore la présence de 2 points-selle pour la pression qui se manifestent par le passage de celle-ci par un extremum entre le plan et le cylindre. La figure 3.23 montre comment varie le coefficient de pression sur le plan inférieur, ce coefficient étant défini par :

$$C_p(k,x/a) = \frac{P(k,x/a)}{\mu\Omega_z}$$

où $P(k,x/a)$ est la pression à une abscisse x, normalisée par le rayon du cylindre a, sur le plan inférieur. On constate que la valeur des extrema de pression augmente fortement avec le confinement. Appelons $P_{max}(k)$ la valeur extrémale de la pression sur le plan et $C_{p,max}(k)$ la valeur du coefficient correspondant. Les zones du cylindre en face des endroits où ces extrema se produisent sont aussi des lieux où la pression augmente et diminue fortement mais légèrement moins en valeur absolue qu'au niveau des plans. Là

où la pression chute, on peut s'attendre à l'apparition de bulles de cavitation. Cette baisse de pression est d'autant plus importante que le cylindre est confiné comme on peut s'en rendre compte sur le graphique 3.24 où l'on a tracé le coefficient de pression $C_{p,max}(k)$ en fonction de $(1-k)/k$.

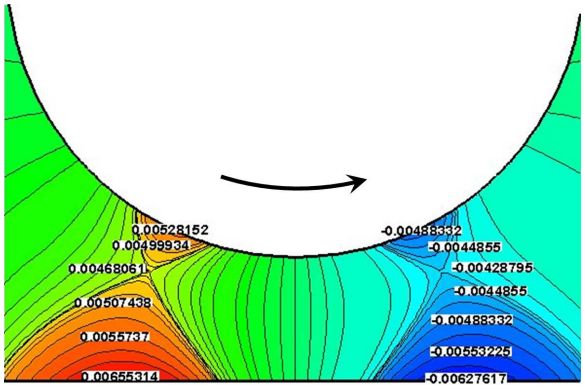

FIG. 3.22 – *Isovaleurs de la pression autour d'un cylindre en rotation pour* $k = 0.7$

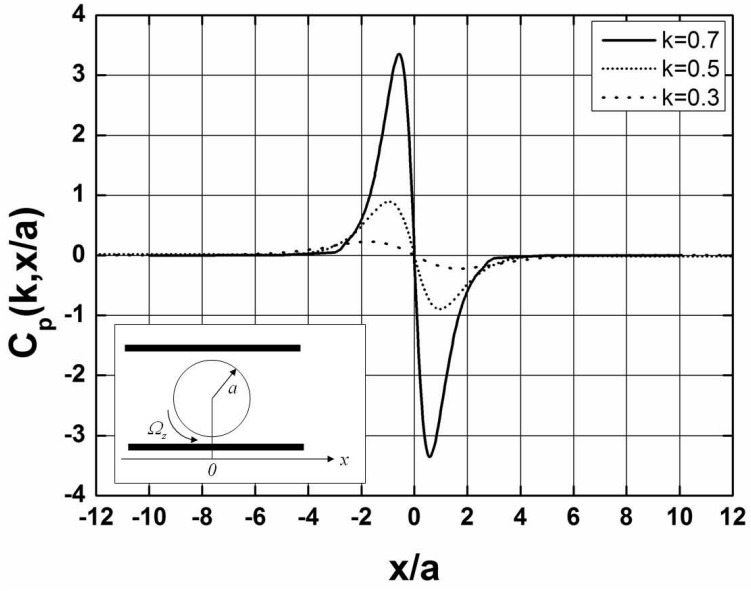

FIG. 3.23 – *Coefficient de pression sur le plan inférieur près d'un cylindre en rotation pour différents confinements k*

Remarquons enfin sur la figure 3.25 que les points de stagnation et les extrema en pression ne coïncident pas.

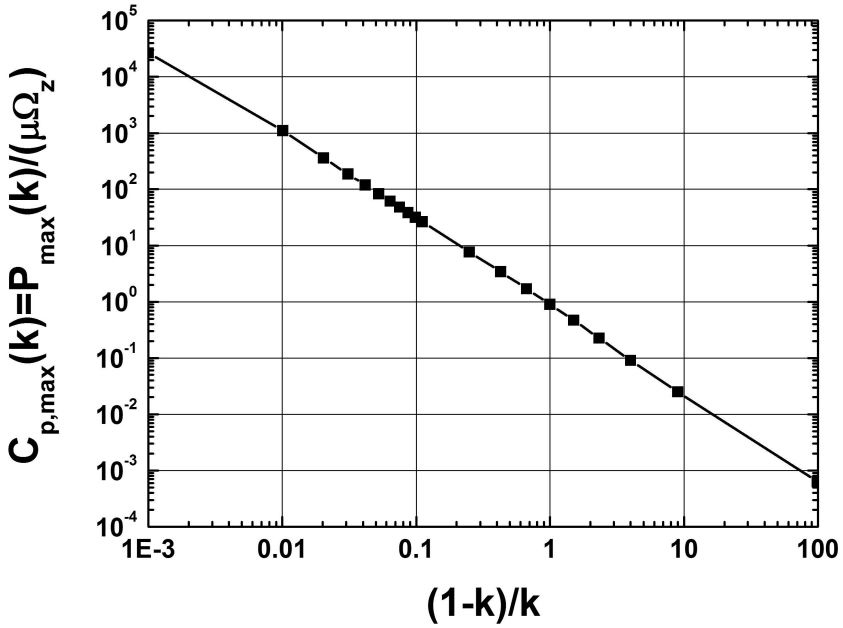

FIG. 3.24 – *Coefficient de pression maximal sur les plans en fonction de* $(1-k)/k$

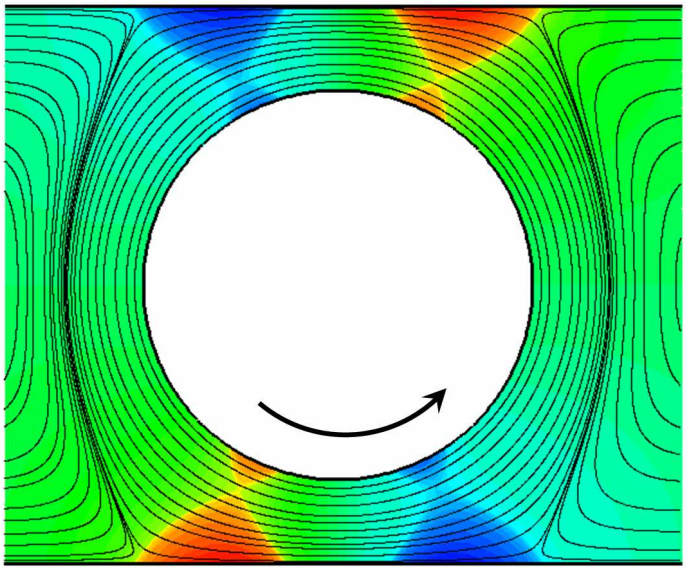

FIG. 3.25 – *Isovaleurs de la pression et lignes de courant autour d'un cylindre en rotation pour* $k = 0.7$

Disons enfin quelques mots sur la structure des cellules qui apparaissent dans le fluide. Elles sont clairement visibles sur la figure 3.26 où sont tracées les lignes de courant données par notre calcul numérique superposées à une photographie tirée du travail de Coutanceau *et al.* [95]. Les premières séries de cellules (dont on ne voit qu'une moitié) sont qualitativement en bon accord avec les visualisations. On observe par contre une différence pour les deuxièmes séries de cellules. Alors que Fluent donne des cellules parfaitement antisymétriques [15], le cliché de Coutanceau *et al.* [95] montre une légère dissymétrie des lignes de courant. Dans le tableau 3.9, nous avons regroupé quelques caractéristiques [16] de ces cellules (longueurs $L_1, \ldots, L_5$ définies sur la figure 3.27) tirées des travaux de Hellou [71] (analytique/numérique), Hellou [73] et Hellou *et al.* [72] (expérimental), de Coutanceau *et al.* [95] (expérimental) et de notre calcul numérique.

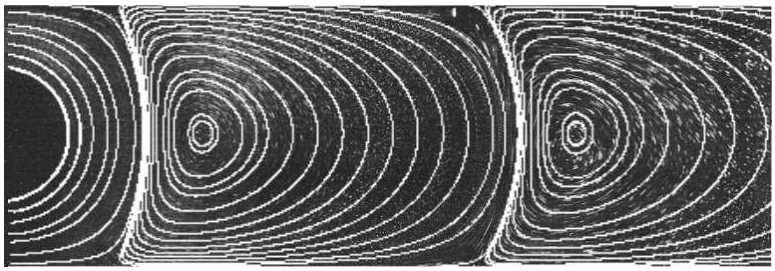

FIG. 3.26 – *Lignes de courant pour* $k = 0.5$*,* $Re = 10^{-3}$ *- Superposition avec un cliché tiré de l'article de Coutanceau* et al. *[95]*

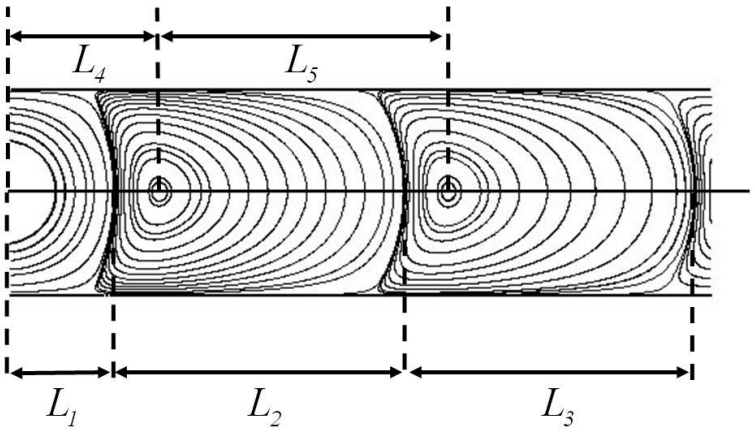

FIG. 3.27 – *Caractéristiques des cellules de recirculation engendrées par la rotation d'un cylindre entre deux plans*

15. Rappelons que l'antisymétrie des cellules se traduit par $\psi(x,y) = \psi(x,-y)$ si l'on choisit un repère d'origine le centre du cylindre et d'axes x et y respectivement parallèle et orthogonal aux plans

16. Ces longueurs sont normalisées par la demi distance b entre les plans parallèles

	L_1/b	L_2/b	L_3/b	L_4/b	L_5/b
Fluent	1.04	2.78	2.75	1.47	2.77
Hellou [71]	1.06967	2.79771	2.79163	1.50659	2.79685
Hellou *et al.* [72]	1.1	2.78	/	1.5	/
Hellou *et al.* [73]	1.07	2.798	2.792	1.51	2.795
Coutanceau *et al.* [95]	1.09	2.77	/	1.56	2.81

TAB. 3.9 – *Comparaison des caractéristiques des cellules issues de différentes sources*

On constate que les valeurs sont globalement en bon accord entre elles. Les écarts minimes entre les différentes approches s'expliquent par le fait que les rapports longueur/largeur du canal sont différents pour certaines études. Notre calcul numérique a été effectué pour un canal dont le rapport valait 8.5 alors que dans les expériences de Coutanceau *et al.* [95], de Hellou [72] et de Hellou *et al.* [73], ce rapport est de 7 au maximum. Quand aux résultats issus du mémoire de thèse de Hellou [71], ils correspondent à un canal de longueur indéfinie. Remarquons enfin que le calcul numérique permet de visualiser la troisième série de tourbillons (dont on ne voit qu'une petite partie à droite de la figure 3.27) ce qui est très difficile à obtenir expérimentalement. L'intensité des écoulements cellulaires successifs décroît en effet de manière exponentielle si bien que les temps d'observation deviennent très longs[17] et que l'écoulement peut être sujet à des courants perturbateurs surtout d'origine thermique.

3.4 Conclusion

Les problèmes des écoulements engendrés par la translation uniforme d'un cylindre et celui d'un cylindre fixe dans un écoulement de Poiseuille montrent en situation centrée des caractéristiques communes. De façon générale, plus le cylindre est confiné, plus la résistance qu'il subit est grande. Pour un confinement donné, il existe, en dessous d'une valeur critique du nombre de Reynolds, des «*solutions de type Stokes*» pour lesquelles la force sur le cylindre est proportionnelle à la vitesse. Ce type de solution linéaire n'existe pas en milieu infini. En s'inspirant des expressions théoriques, on peut trouver des fonctions d'interpolation permettant d'exprimer ces solutions caractéristiques en fonction du confinement. Les forces de traînée dans le cas uniforme et de Poiseuille sont liées entre elles par une relation quadratique en k très simple. Concernant le problème du cylindre centré en rotation, on constate l'omniprésence des «*solutions de type Stokes*» dans la gamme des Re explorée. Ce problème admet une solution de type Stokes même en milieu infini contrairement au cas du cylindre en translation où l'on est confronté au paradoxe de Stokes et aux expressions du «type Lamb» qui présentent un caractère inertiel permanent. Le moment subi par le cylindre est une fonction croissante du confinement. L'écoulement autour du cylindre est caractérisée par une série de cellules de recirculation qui s'amortissent rapidement en s'éloignant du

17. Hellou [71] a par exemple estimé qu'il fallait, à $Re \approx 10^{-3}$, un temps de l'ordre de 4 jours pour que la deuxième série de cellules soit entièrement formée

cylindre. Pour les trois problèmes, les forces de traînée et le moment divergent lorsque k tend vers 1. La configuration du cylindre centré n'étant qu'un cas particulier, il semble intéressant de voir comment vont évoluer les propriétés des écoulements lorsque le cylindre se trouve en dehors du plan de symétrie. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le prochain paragraphe.

Chapitre 4

Cylindre confiné en situation excentrée

Comme on l'a évoqué dans la partie dédiée à la bibliographie, il n'existe, à notre connaissance, qu'une seule d'étude analytique traitant du problème d'un cylindre évoluant entre deux plans parallèles en dehors de leur plan de symétrie (celle de Harper *et al.* [58]). Les autres travaux qui abordent ce sujet sont d'origine soit numérique, soit expérimentale. La rareté des informations relatives à ce problème en justifie donc une étude détaillée. Comme nous l'avons fait dans le chapitre précédent, nous allons voir, dans l'ordre, le problème du cylindre se déplaçant à vitesse uniforme parallèlement aux plans, celui du cylindre fixe en écoulement de Poiseuille et finalement celui du cylindre en rotation. La géométrie de tous ces problèmes est représentée sur la figure 4.1.

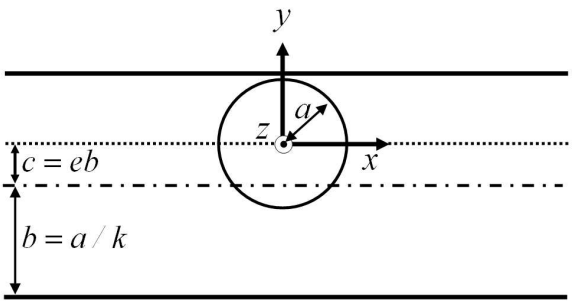

FIG. 4.1 – *Schéma du problème du cylindre excentré*

Le paramètre de confinement k est toujours égal au rapport du rayon a du cylindre à la demi-distance b entre les plans parallèles. L'excentrement du cylindre est caractérisé par le paramètre sans dimension $e = c/b$ où c est la distance entre l'axe du cylindre et le plan médian aux plans parallèles. Ce paramètre varie entre 0 lorsque le cylindre est centré et la valeur $e_{max} = 1 - k$ lorsque le cylindre est tangent à l'un des plans. La plupart des résultats donnés ci-après concernent un seul rapport de confinement, $k = 0.29$, exception faite de l'étude de la traînée dans le cas où le cylindre se déplace

à vitesse constante (section 4.1.3) où plusieurs rapports de confinement seront utilisés. De même, nous nous sommes restreints aux régimes de «type Stokes» pour lesquels les efforts normalisés sont indépendants du nombre de Reynolds. Ce dernier paramètre a ainsi été fixé à la valeur $Re = 0.1$ dans toutes ces études.

4.1 Cylindre en translation uniforme

On définit tout d'abord un repère d'origine le centre du cylindre. On suppose que le cylindre se translate à la vitesse $\overrightarrow{U}_x$ parallèlement aux plans (Fig. 4.2). Puisque le cylindre est en dehors du plan de symétrie, la force $\overrightarrow{F}^{Trans}$ qu'il va subir n'est plus colinéaire à la vitesse. Elle se décompose donc en une force de traînée $\overrightarrow{F}_x^{Trans}$ et une force de portance $\overrightarrow{F}_y^{Trans}$. Le cylindre va également subir un moment $\overrightarrow{M}_z^{Trans}$ dirigé suivant l'axe des z. Le déplacement du cylindre engendre enfin une différence de pressions $\Delta P^{Trans} = P_{aval}^{Trans} - P_{amont}^{Trans}$. Le nombre de Reynolds a comme expression $Re = \rho U_x 2a/\mu$.

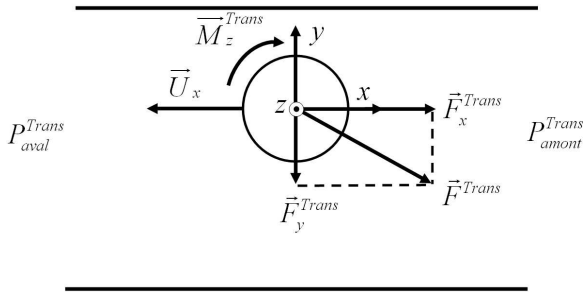

FIG. 4.2 – *Définition des forces, du moment et des pressions pour le cylindre excentré en translation uniforme*

Par convention, on suppose que le cylindre se déplace dans le plan xy vers les $x < 0$ et que lorsque e/e_{max} augmente, le cylindre se rapproche du plan supérieur. Le moment $\overrightarrow{M}_z^{Trans}$ subi par le cylindre sera pris positif dans le sens horaire. Pour k et Re constants, les efforts sur le cylindre ne dépendent que de l'excentrement. Dans un souci de clarté, on utilisera par la suite l'excentrement réduit $e/e_{max} = e/(1-k)$ qui varie entre 0 et 1 plutôt que e qui varie entre 0 et $1-k$. Nous allons à présent étudier quelques propriétés de cet écoulement.

4.1.1 Répartition des débits de fluide

Lorsque le cylindre avance à la vitesse U_x, il déplace une quantité de fluide dont une partie est évacuée par la section de passage la plus large $h^+ = b(e_{max} + e)$ avec un débit Q^+ et dont une autre partie passe par la section de passage la plus étroite $h^- = b(e_{max} - e)$ avec un débit Q^-. La somme $Q = Q^+ + Q^-$ de ces débits est égale à $Q = 2aU_x$ (Fig. 4.3).

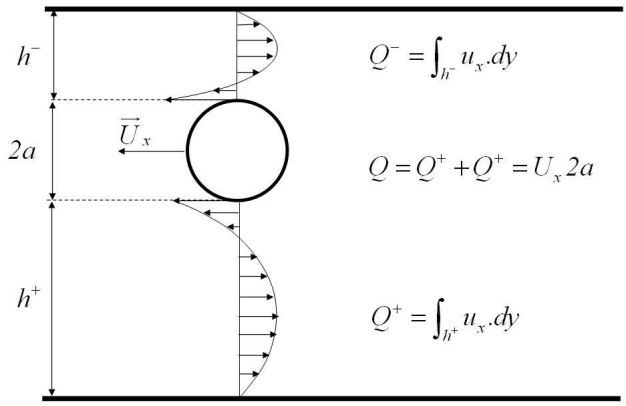

FIG. 4.3 – *Profil de vitesse dans une section passant par le centre du cylindre et normale aux plans*

Nous avons tracé l'évolution de ces débits, normalisés par le débit total Q, en fonction de l'excentrement réduit e/e_{max} sur la figure 4.4. Ces débits ont été calculés à partir des champs de vitesse obtenus numériquement.

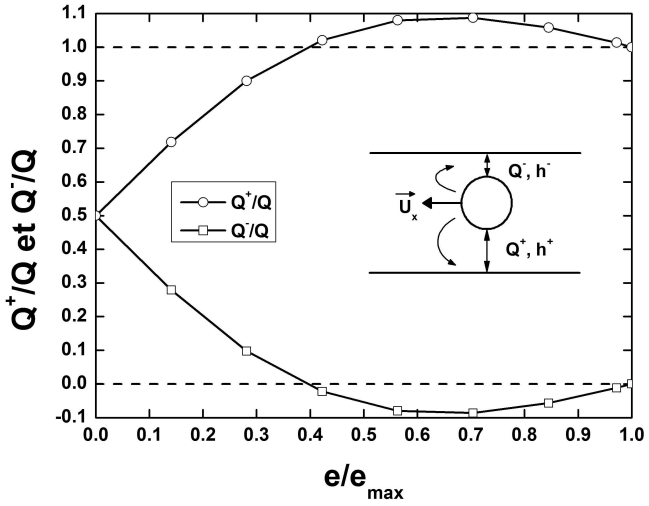

FIG. 4.4 – *Répartition des débits en fonction de l'excentrement en écoulement uniforme*

Dans chaque section de passage h^+ et h^-, chaque débit Q^+ et Q^- se décompose en un débit d'entraînement dû au cisaillement à la paroi du cylindre (cette partie donnant une contribution négative dans le calcul de chaque débit) et en un débit dû au contre-écoulement (contribution positive dans le calcul de chaque débit) comme cela est schématisé dans la figure 4.3. Lorsque e/e_{max} augmente, le débit Q^+ dans la section de passage la plus large h^+ commence par augmenter, dépasse Q pour une valeur

$e/e_{max} \approx 0.4$, passe par un maximum pour $e/e_{max} \approx 0.7$ puis décroît pour tendre vers le débit total Q. L'évolution du débit Q^- est la symétrique par rapport à la valeur 0.5. On note donc que le débit Q^- s'annule pour $e/e_{max} \approx 0.4$ ce qui signifie que le débit d'entraînement par cisaillement est exactement compensé par le débit de contre-écoulement. Au-delà de cet excentrement, le débit du contre-écoulement est plus faible que le débit de cisaillement ce qui donne globalement un débit Q^- négatif. Lorsque $e/e_{max} = 1$, Q^- est nul puisqu'aucun fluide ne peut plus passer par cette section ($h^- = 0$).

4.1.2 Points d'arrêt et extrema de pression

La figure 4.5 montre les lignes de courant autour du cylindre dans un repère où celui-ci est immobile pour différents excentrements. On constate que les points de stagnation sur le cylindre, diamétralement opposés pour $e/e_{max} = 0$, se rapprochent l'un de l'autre et se déplacent vers le plan le plus proche quand l'excentrement augmente. Sur la figure 4.6, nous avons tracé l'évolution de la position angulaire θ (angle défini dans la vignette incluse dans la figure) du point de stagnation amont (le cylindre se déplace vers la gauche) en fonction de l'excentrement [1]. La détermination de la position de ce point a été réalisée «graphiquement» par mesure de l'angle θ avec le logiciel d'analyse et de traitement d'images ImageJ.

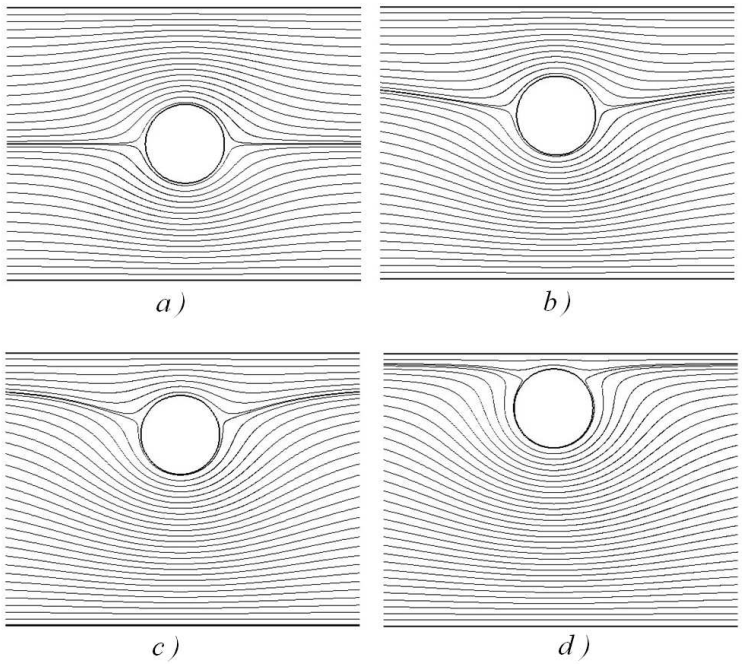

FIG. 4.5 – *Lignes de courant autour d'un cylindre en translation uniforme (repère lié au cylindre) pour* $e/e_{max} =$ *: a)* 0 - *b)* 0.281 - *c)* 0.563 - *d)* = 0.845

1. La position de l'autre point de stagnation est simplement égale à $\pi - \theta$

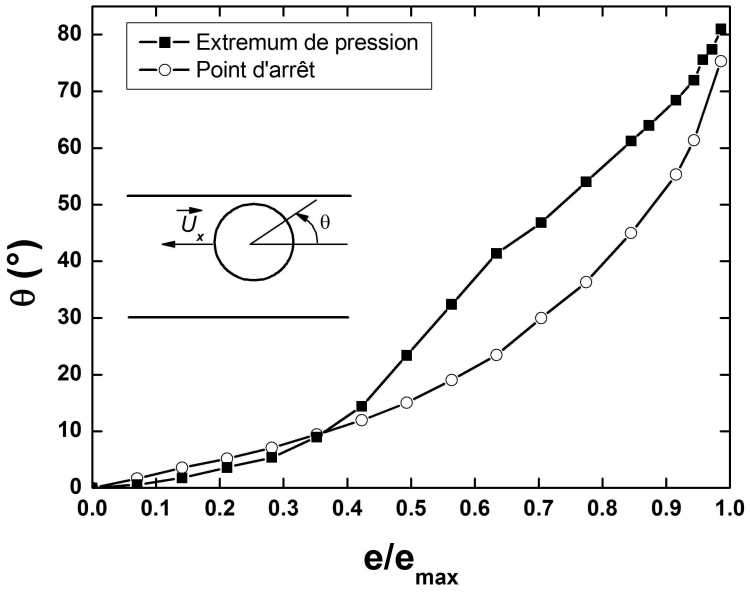

FIG. 4.6 – *Localisation des points d'arrêts et des extrema de la pression pour un cylindre excentré en translation uniforme en fonction de l'excentrement*

Sur ce même graphique, nous avons également tracé l'évolution de la localisation d'un des deux extrema de pression sur la paroi du cylindre. On constate qu'aux faibles excentrements, les points de stagnation et les extrema en pression sont quasiment confondus mais pour un excentrement supérieur à $e/e_{max} \approx 0.35$, l'extremum de pression se situe à un angle supérieur à celui du point de stagnation (Fig. 4.7).

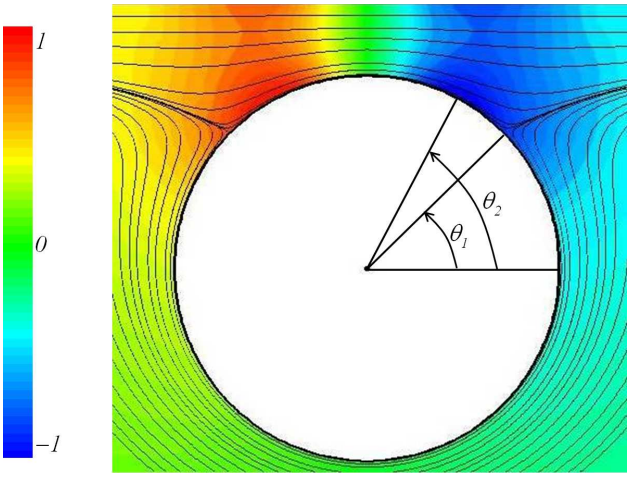

FIG. 4.7 – *Lignes de courant et champ de pression autour d'un cylindre en translation uniforme pour* $e/e_{max} \approx 0.85$. *La pression est normalisée par sa valeur maximale. A l'amont, le point d'arrêt se situe à* $\theta_1 \approx 45°$ *et l'extremum de pression à* $\theta_2 \approx 61°$

La pression n'est alors pas à un extremum aux points de stagnation. Sur la figure 4.8, nous avons tracé la répartition angulaire de la pression sur le cylindre pour des excentrements variant entre $e/e_{max} = 0.141$ et 0.915, cette pression étant représentée sous la forme sans dimension du coefficient de pression $C_p = P/(\mu U_x/a)$. Comme nous l'avons déjà évoqué, la chute de pression à l'aval du cylindre peut être le siège d'une cavitation pour les forts excentrements, ceci étant renforcé lorsque le rapport de confinement k augmente.

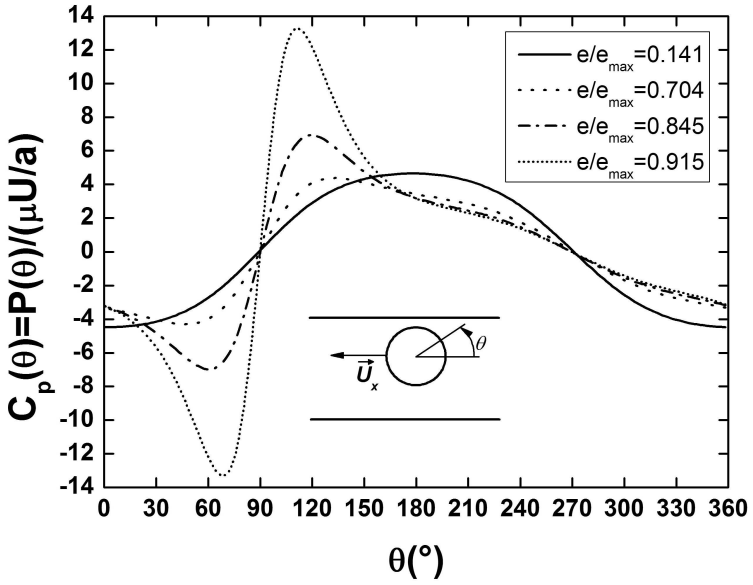

FIG. 4.8 – *Répartition de la pression autour du cylindre en translation uniforme à différents excentrements pour* $k = 0.29$

4.1.3 Force de traînée

On définit la force de traînée sans dimension (par unité de longueur de cylindre) par :

$$\Lambda^{Trans}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{F_x^{Trans}(k,Re,e/e_{max})}{\mu U_x}$$

La figure 4.9 montre l'évolution de cette grandeur ramenée à sa valeur dans l'axe, en fonction de l'excentrement pour $k = 0.1$, 0.29, 0.44 et 0.6. On constate le caractère assez surprenant de cette évolution : pour chacune des valeurs de k, la force commence par décroître, passe par un minimum, augmente fortement puis diverge lorsque $e/e_{max} \to 1$. En d'autres termes, la position centrale du cylindre n'est pas celle qui lui confère le minimum de résistance. Cela a déjà été mentionné dans l'article théorique de Harper *et al.* [58] dans le cas des confinements très faibles ($k < 0.01$), dans le travail expérimental de Taneda [84] et dans les travaux numériques de Hu [61] ou dans ceux de Ben Richou [96] (thèse d'état).

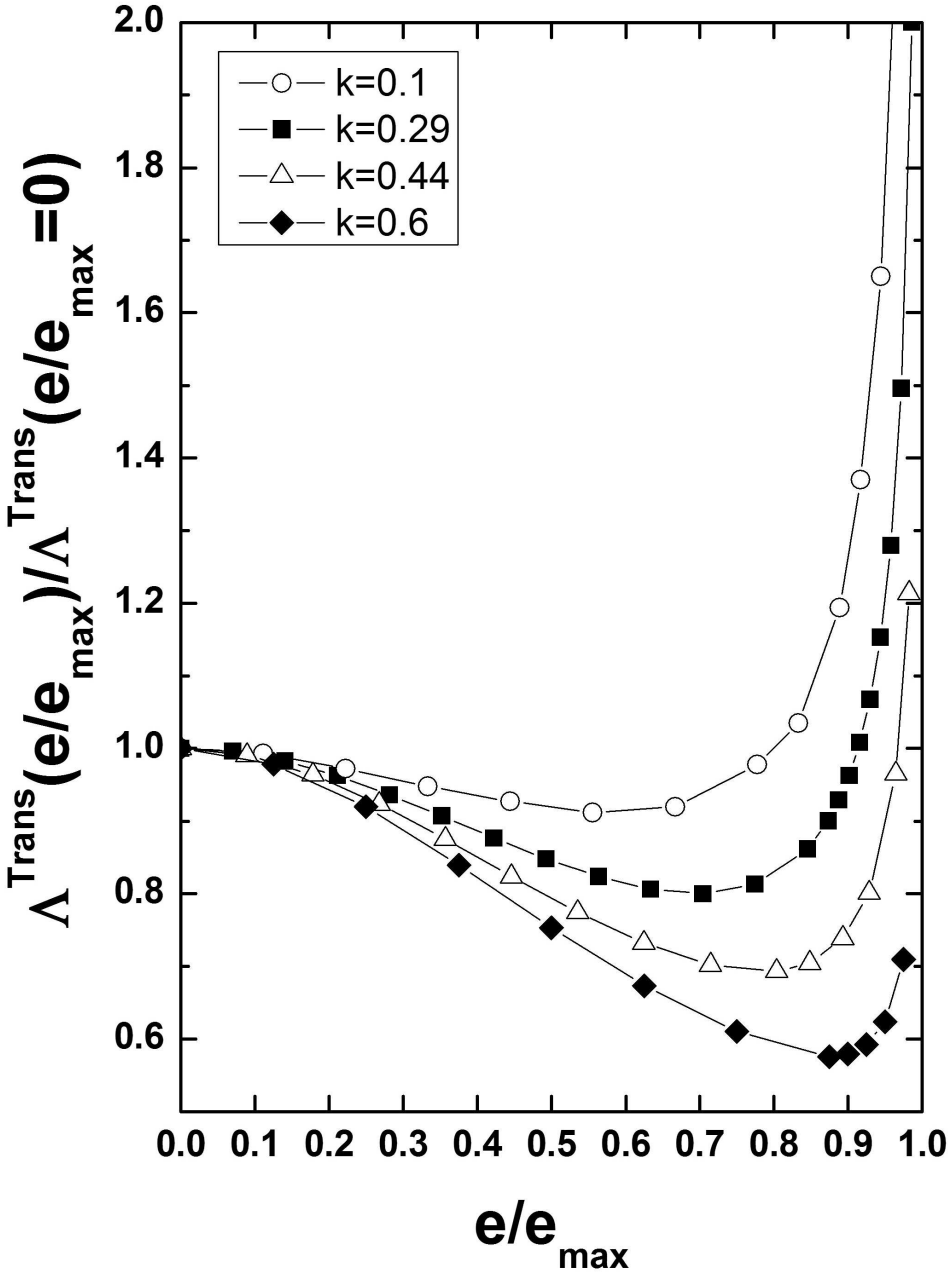

FIG. 4.9 – $\Lambda^{Trans}(e/e_{max})/\Lambda^{Trans}(e/e_{max}=0)$ *en fonction de* e/e_{max}

Les résultats de Taneda [84] sont difficilement exploitables car le rapport de confinement k n'est pas mentionné dans ses expériences. On peut néanmoins tenter de l'estimer, par exemple à partir de la valeur de la force lorsque le cylindre est en situation centrée. Taneda [84] donne la valeur $\Lambda^{Trans}(k,e/e_{max}=0) \approx 7$. En se servant de la formule 3.5 page 59 déterminée dans le chapitre précèdent consacré au problème du cylindre centré, on peut alors estimer que k est compris entre 0.06 et 0.07 [2]. Ce rapport est bien trop éloigné des nôtres pour espérer une comparaison quantitative. Les courbes 4.9 et 4.10 ont néanmoins une allure qualitativement identique.

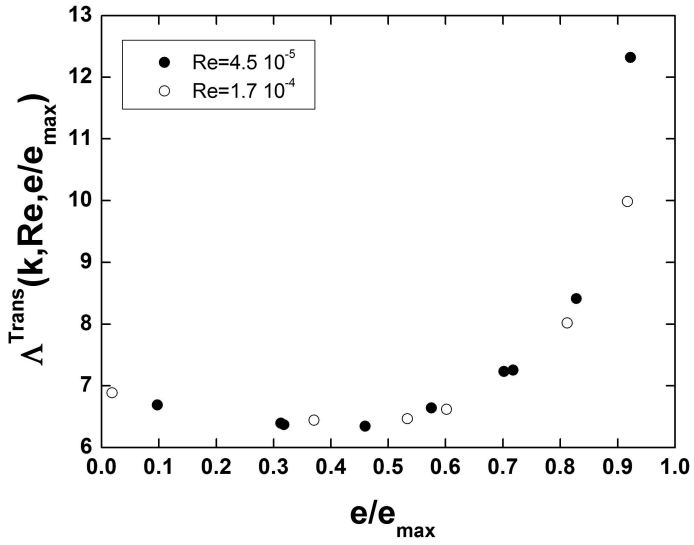

FIG. 4.10 – Λ^{Trans} *en fonction de* e/e_{max} *dans les expériences de Taneda [84]*

Hu [61] a effectué un calcul de lubrification et a obtenu la forme asymptotique suivante pour la force de traînée :

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Lambda^{Trans} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\epsilon^{1/2}} \tag{4.1}$$

où

$$\epsilon = \frac{h^-}{a} = (\frac{1-k}{k})(1-e/e_{max})$$

est la distance, normalisée par le rayon a, entre le cylindre et le plan le plus proche. Jeffrey *et al.* [45] ont également proposé l'expression suivante :

$$\Lambda^{Trans} = \frac{4\pi}{ln[1+\epsilon+\sqrt{(1+\epsilon)^2-1}]} \tag{4.2}$$

dont le développement asymptotique, que nous avons effectué avec Mathematica, donne :

2. Nous avons arbitrairement choisi la valeur $k = 0.065$ pour tracer les résultats de Taneda [84] dans la figure 4.10 pour calculer la valeur de $e_{max} = 1 - k$

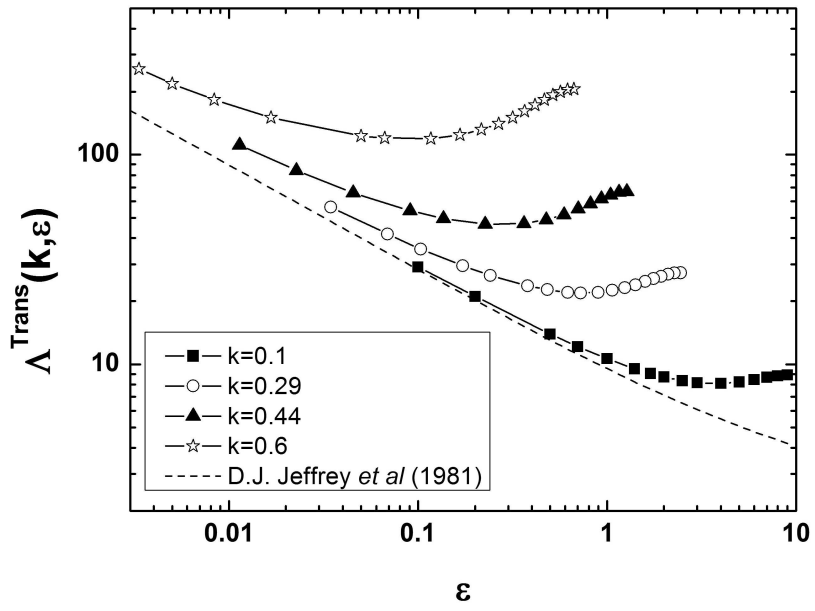

FIG. 4.11 – $\Lambda^{Trans}(e/e_{max})$ *en fonction de* h^-/a

$$\lim_{\epsilon\to 0}\Lambda^{Trans} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\epsilon^{1/2}} + \frac{\pi}{3\sqrt{2}}\,\epsilon^{1/2} - \frac{17\pi}{360\sqrt{2}}\,\epsilon^{3/2} + \frac{367\pi}{30240\sqrt{2}}\,\epsilon^{5/2} + \mathcal{O}[\epsilon^{7/2}] \qquad (4.3)$$

Dans les expressions 4.1 et 4.2, la force est principalement due à la contribution des forces de pression comme dans le cas du cylindre centré. On constate par contre que la force diverge moins rapidement dans ce cas (exposant $-1/2$ ici contre $-5/2$ dans la formule 3.1 page 57 correspondant au cas du cylindre centré). La différence provient du fait que dans le cas centré, le cylindre se rapproche des deux plans à la fois ce qui oblige le contre-écoulement à passer à travers les deux interstices situés entre le cylindre et les plans. Ce n'est plus le cas pour un cylindre excentré où le contre-écoulement a tout loisir de s'écouler entre le cylindre et le fluide libre. Dans la figure 4.11, nous avons tracé $\Lambda^{Trans}(k,\epsilon)$ en fonction de ϵ pour les rapports de confinement $k = 0.1$, $k = 0.29$, $k = 0.44$ et $k = 0.6$. On remarque que la formule 4.2 de Jeffrey *et al.* [45] et nos calculs sont en bon accord pour $k = 0.1$ et que pour les rapports de confinement supérieurs, la formule 4.2 et nos résultats ne s'accordent plus. Ceci est certainement dû à l'influence du plan le plus éloigné que Jeffrey *et al.* [45] ne prennent pas en compte dans leur calcul et dont l'influence va croissante lorsque k augmente.

Nous allons à présent étudier deux propriétés des courbes représentant la force de traînée : la position de leur minimum et la valeur relative de ce minimum par rapport à la valeur de la force au centre.

4.1.3.1 Localisation du minimum de traînée

On cherche à quantifier la valeur de e/e_{max} pour laquelle la force de traînée atteint sa valeur minimale. Nous appelons $(e/e_{max})_{min}$ cette abscisse particulière. Les résultats sont regroupés dans le tableau 4.1.

k	0.1	0.29	0.44	0.6
$(e/e_{max})_{min}$	0.6	0.7	0.8	0.875

TAB. 4.1 – *Position du minimum de la force en fonction de k*

On constate que la valeur de $(e/e_{max})_{min}$ est fonction croissante de k, au moins tant que $k < 0.6$ comme on peut s'en rendre compte sur la figure 4.12.

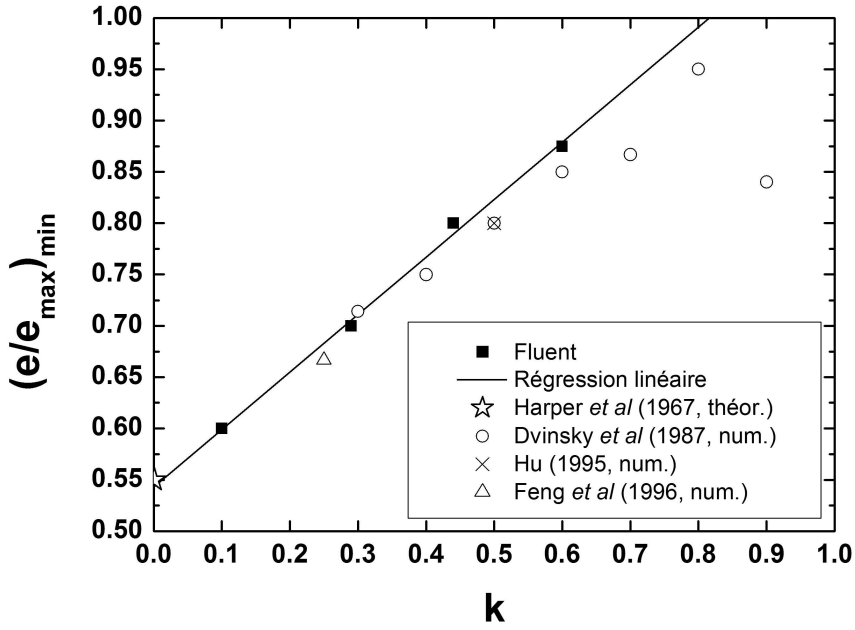

FIG. 4.12 – $(e/e_{max})_{min}$ *en fonction de k*

La régression linéaire de ces points donne l'équation :

$$(e/e_{max})_{min} = 0.543 + 0.560k \tag{4.4}$$

L'ordonnée à l'origine 0.543 de cette expression est à comparer avec le résultat issu de l'article théorique de Harper *et al.* [58] : pour $k < 0.01$, ils estiment que le minimum de traînée se situe autour de $e/e_{max} \approx 0.55$ ce qui est en bon accord avec notre valeur. Si l'on tente par contre une comparaison avec les résultats de Taneda [84], le résultat est moins bon. On peut en effet évaluer le minimum autour de $e/e_{max} \approx 0.5$ pour un rapport de confinement estimé à $k \approx 0.065$. A ce rapport de confinement devrait correspondre d'après l'expression 4.4 la valeur $(e/e_{max})_{min} = 0.579$. La valeur expérimentale 0.5 est

donc sûrement peu précise, d'autant qu'elle est inférieure à la valeur théorique 0.55 donnée par Harper *et al.* [58]. Dans son travail numérique, Hu [61] estime que pour $k = 0.5$, le minimum de traînée se trouve en $(e/e_{max})_{min} \approx 0.8$. L'expression 4.4 donne pour ce rapport de confinement la valeur 0.823 soit une différence relative de l'ordre de 3%. On peut encore tester cette formule grâce à un résultat trouvé dans le travail numérique de Feng *et al.* [62] : pour $k = 0.25$, il obtiennent la valeur $(e/e_{max})_{min} \approx 0.667$ alors que l'expression 4.4 prédit la valeur 0.683 soit une différence de l'ordre de 2%. Dans le travail numérique de Dvinsky *et al.* [56], on trouve les valeurs rassemblées dans le tableau 4.2. Leurs valeurs sont en bon accord avec les nôtres et avec la formule 4.4 jusqu'à un confinement $k = 0.6$. Au-delà, on observe une divergence entre les résultats. Les résultats de Dvinsky *et al.* [56] cessent sûrement d'être corrects puisqu'ils donnent même une décroissance de $(e/e_{max})_{min}$ entre $k = 0.8$ et $k = 0.9$.

k	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$(e/e_{max})_{min}$	0.71429	0.75	0.8	0.85	0.86667	0.95	0.84

TAB. 4.2 – *Valeurs de* $(e/e_{max})_{min}$ *dans l'article de Dvinsky* et al. *[56]*

4.1.3.2 Valeur du minimum de la force de traînée

Sur la figure 4.13, nous avons représenté la valeur de la traînée normalisée minimale, rapportée à sa valeur au centre, en fonction de l'excentrement. On constate que plus k augmente, plus le minimum de la force est prononcé. Le confinement accentue donc l'importance du minimum. Comme précédemment, on peut faire une régression linéaire de ces points en forçant l'ordonnée à l'origine à la valeur 1 qui est celle attendue naturellement (absence de minimum en milieu infini). On obtient une droite d'équation :

$$\frac{\Lambda^{Trans}((e/e_{max})_{min})}{\Lambda^{Trans}(e/e_{max} = 0)} = 1 - 0.72163k \tag{4.5}$$

Dans leur article, Harper *et al.* [58] trouvent pour $k = 0.01$ que le minimum de la traînée ne diffère que de 2% de la force au centre. Ce résultat est en accord avec la relation 4.5. La relation 4.5 est aussi très proche de celle donnée par Ben Richou [96] dans sa thèse d'état où il a donné l'équation :

$$\frac{\Lambda^{Trans}((e/e_{max})_{min})}{\Lambda^{Trans}(e/e_{max} = 0)} = 0.9937 - 0.6828k$$

On trouve dans l'article de Feng *et al.* [62], pour $k = 0.25$, la valeur 0.826 pour le rapport de la force minimale et de la force au centre. L'expression 4.5 prévoit quant à elle la valeur 0.820 ce qui donne une différence inférieure à 1%.

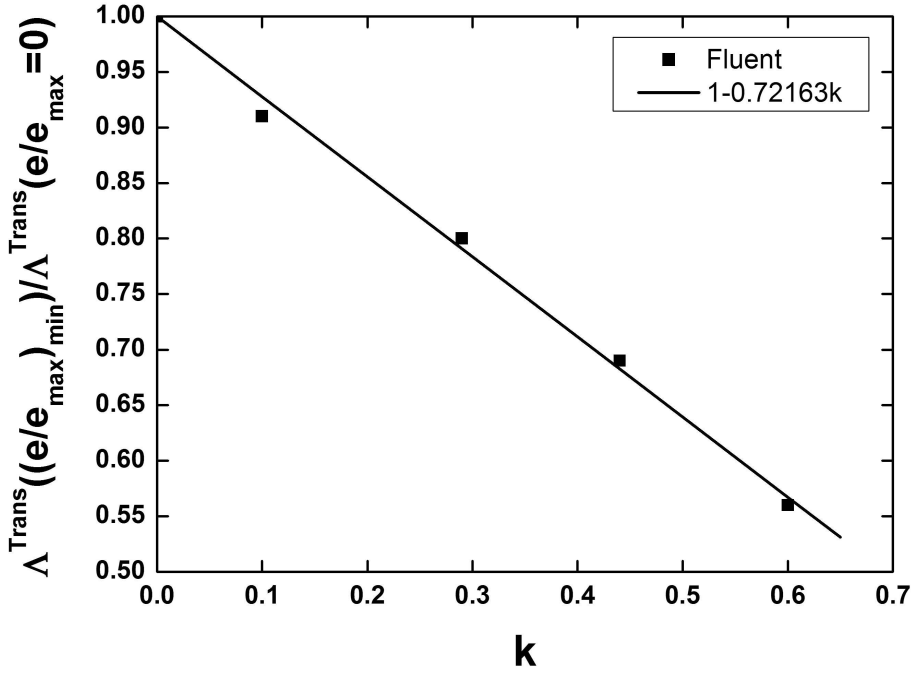

FIG. 4.13 – $\Lambda^{Trans}((e/e_{max})_{min})/\Lambda^{Trans}(0)$ *en fonction de* k

4.1.4 Moment

On définit le moment sans dimension (par unité de longueur de cylindre) par l'expression :

$$\Gamma^{Trans}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{M_z^{Trans}(k,Re,e/e_{max})}{\mu U_x a}$$

La figure 4.14 montre l'évolution du moment en fonction de l'excentrement pour un cylindre de confinement $k = 0.29$. Il est nul au centre pour des raisons de symétrie. Il commence par diminuer, passe par un minimum puis augmente légèrement au voisinage de la paroi lorsque $e/e_{max} \to 1$. L'existence de ce moment est «paradoxale». En effet, Jeffrey *et al.* [45] puis Wannier [44] ont calculé ce moment à partir du champ de vitesse déterminé dans l'approximation de Stokes dans le cas d'un cylindre se translatant parallèlement à un seul plan. Les deux analyses conduisent alors à la nullité de ce moment. Bien que personne n'ait effectué le calcul, il n'y a aucune raison de penser que la situation à deux plans devrait donner une conclusion différente. L'existence de ce moment devrait donc être liée à l'inertie comme c'est le cas pour la force de portance. Nos calculs contredisent pourtant cette hypothèse puisqu'ils sont effectués en régime de type Stokes et que les efforts sont indépendants du nombre de Reynolds. De plus, l'existence de ce moment est confirmée dans l'article de Hu [61] qui traite d'un cylindre excentré entre deux plans.

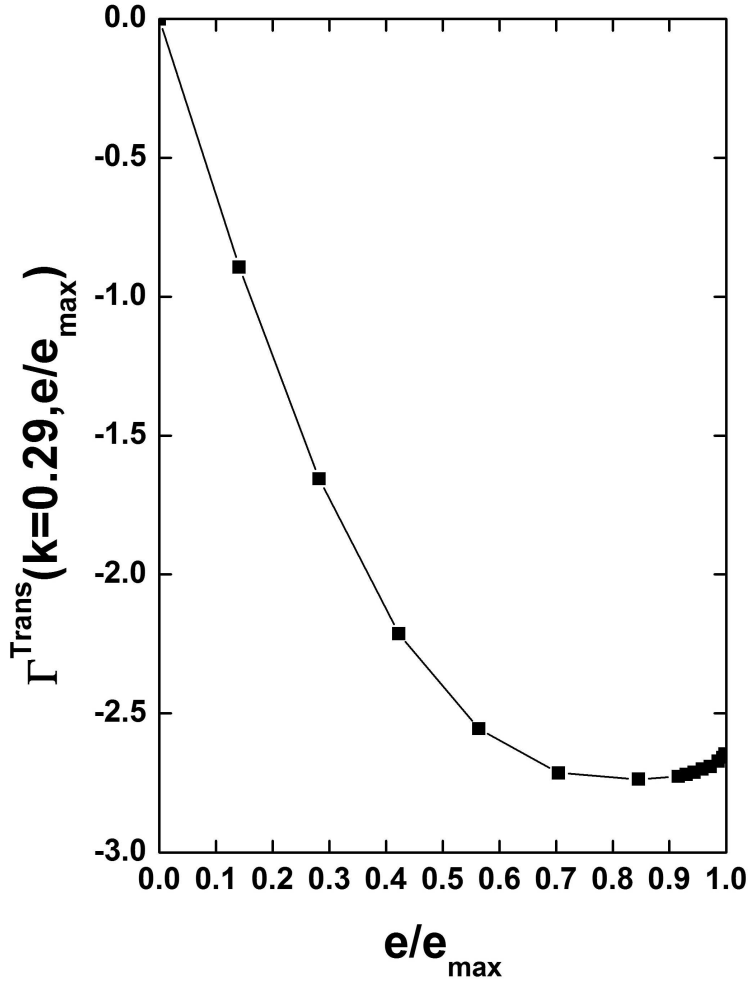

FIG. 4.14 – $\Gamma^{Trans}(k = 0.29, e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

Celui-ci a effectué un calcul de lubrification (en négligeant donc l'inertie) et a obtenu, dans la limite des faibles distances entre le cylindre et la paroi, une expression du moment de la forme :

$$\lim_{e/e_{max} \to 1} \Gamma^{Trans} = C \tag{4.6}$$

où C est une constante positive non nulle. Le point remarquable de ce calcul est que le moment apparaît indépendant de la distance au plan. Ceci semble être plus en accord avec nos résultats puisque les calculs de Hu [61] confirment la non nullité de ce moment. Nous reviendrons à la section 5.5 du chapitre 5 sur ce problème et montreront que les calculs de Jeffrey *et al.* [45] et de Wannier [44] sont tout à fait justes et que l'existence de ce moment est liée au contre-écoulement et à la présence du second plan.

4.1.5 Perte de charge

Lors de son déplacement, le cylindre induit également une différence de pressions $\Delta P^{Trans} = (P_{aval} - P_{amont})^{Trans}$ comme cela est schématisé sur la figure 4.2. Dans le graphique 4.15, nous avons tracé la différence de pressions normalisée Π^{Trans} définie par l'expression :

$$\Pi^{Trans}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{\Delta P^{Trans}(k,Re,e/e_{max})2b}{\mu U_x}$$

On constate que la perte de charge est maximale dans le plan de symétrie ($e/e_{max} = 0$) et décroît de manière monotone lorsque l'excentrement augmente.

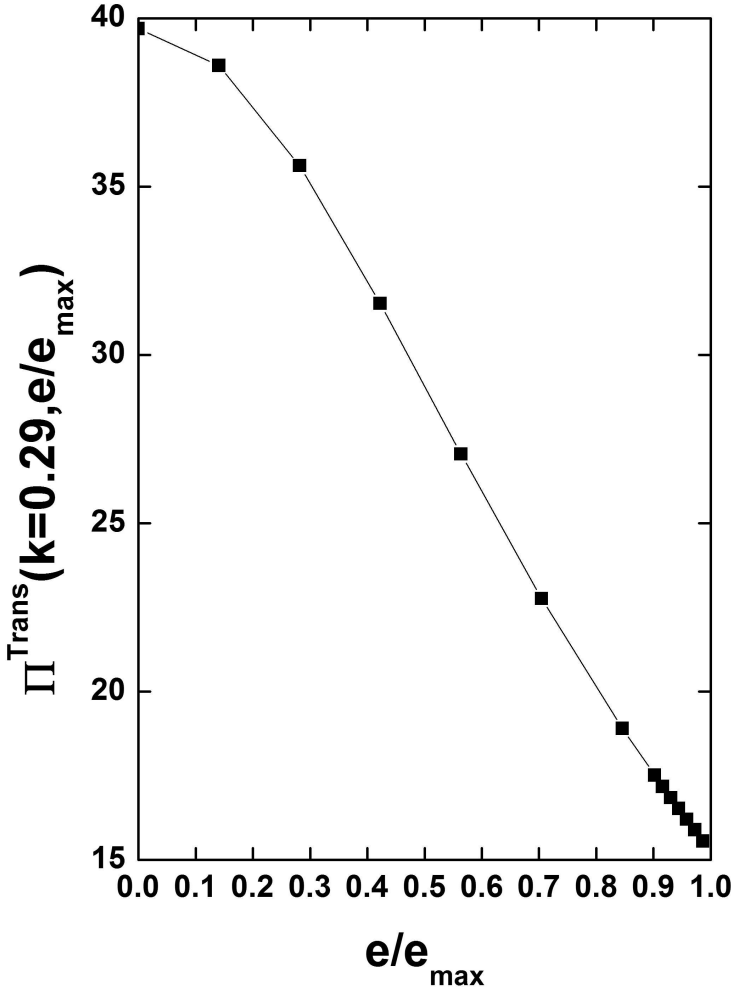

FIG. 4.15 – $\Pi^{Trans}(k = 0.29,e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

4.1.6 Remarques concernant la structure de l'écoulement

La figure 4.16 montre les lignes de courant autour du cylindre dans un repère fixe pour divers excentrements. On remarque plusieurs points intéressants sur cette figure : on voit tout d'abord l'étendue des cellules de recirculation, c'est-à-dire du contre-écoulement généré par le mouvement du cylindre confiné par les plans. Les deux cellules accolées au cylindre ont déjà été observées (voir par exemple la figure 3.8 page 57 dans le cas d'un cylindre centré). La structure des cellules secondaires engendrées par les premières cellules liées au cylindre a par contre été rarement décrite. Le seul travail qui lui est consacré est, à notre connaissance, une note de Bourot *et al.* [57] et uniquement dans le cas d'un cylindre centré.

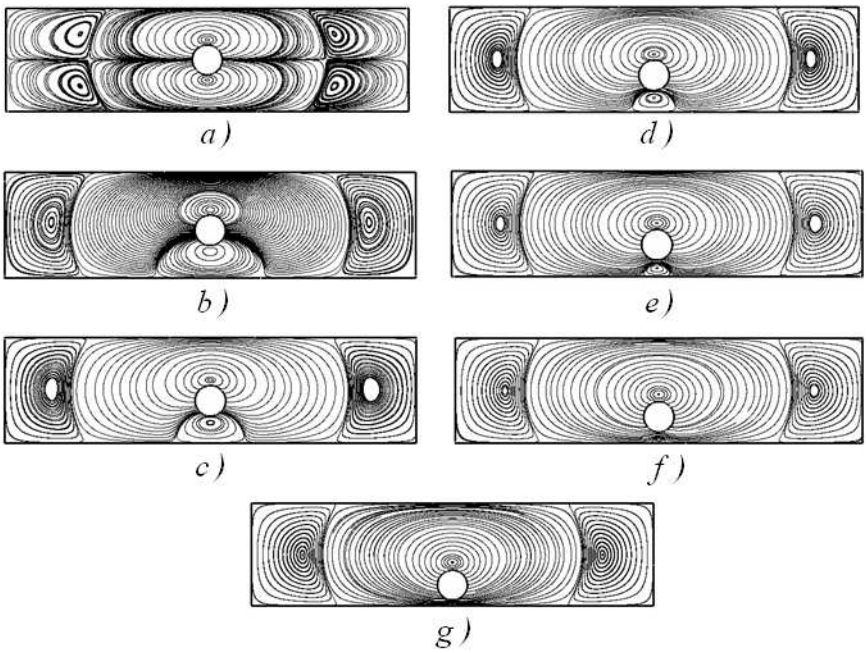

FIG. 4.16 – *Lignes de courant autour du cylindre en translation uniforme dans un repère fixe pour* $k = 0.29$ *et* $Re = 0.1$ *avec* $e/e_{max} =$ *: a)* 0 - *b)* 0.141 - *c)* 0.282 - *d)* 0.423 - *e)* 0.563 - *f)* 0.704 - *g)* 0.845

A titre indicatif, nous montrons dans la figure 4.17 les lignes de courant pour $k = 0.5$ et $e/e_{max} = 0$ tirées de cet article. Dans le cas centré seulement, on peut observer un écoulement à cellules symétriques par rapport au plan médian (vignette a) de la figure 4.16, figure 4.17 et figure 4.18 en haut). Dès que le $e/e_{max} \neq 0$, cette organisation n'existe plus. Ces cellules sont donc de même nature que les cellules de Stokes observées dans le cas du cylindre en rotation et l'on devrait avoir théoriquement une famille de cellules s'étendant indéfiniment dans le canal. Pour le vérifier, nous avons utilisé un domaine de calcul beaucoup plus étendu que celui correspondant aux images de la figure 4.16. Nous avons en effet fait passer les longueurs amont et avale de 10 à 60 rayons de cylindre et obtenu les lignes de courant visibles dans la figure 4.18.

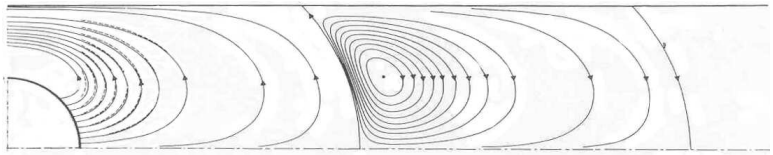

FIG. 4.17 – *Lignes de courant autour du cylindre en translation uniforme dans un repère fixe pour* $k = 0.5$*,* $e/e_{max} = 0$ *et* $Re << 1$*. Source : Bourot* et al. *[57]*

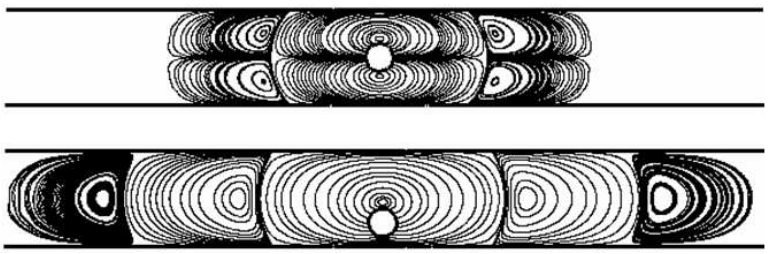

FIG. 4.18 – *Lignes de courant autour du cylindre en translation uniforme dans un repère fixe pour* $k = 0.29$ *et* $Re = 0.1$*. En-haut :* $e/e_{max} = 0$ *- En-bas :* $e/e_{max} = 0.704$

En ce qui concerne le cas centré (vignette du haut dans la figure 4.18), on remarque la même structure que celle de la vignette a) de la figure 4.16 avec des longueurs de cellules plus grandes dans le cas d'un domaine plus étendu. Le cas excentré est plus intéressant : les excentrements dans la vignette du bas de la figure 4.18 et celui de la vignette f) de la figure 4.16 sont identiques. Comme dans le cas précédent, le fait d'allonger le domaine de calcul augmente la longueur des cellules mais on remarque également l'existence d'une troisième série de cellules qui n'apparaissait pas, faute d'espace, dans le petit domaine de calcul. Comme dans le cas d'un écoulement engendré par un cylindre en rotation, l'amortissement de ces cellules est exponentiel mais avec une décroissance beaucoup plus importante[3] dans le cas du cylindre en translation. Il est par conséquence pratiquement impossible d'observer les cellules d'ordre supérieur. Remarquons pour conclure que dans le cas $e/e_{max} \neq 0$, la deuxième et troisième famille de cellules s'apparentent à des cellules antisymétriques[4]. Cela n'est pas rigoureusement exact comme cela est visible dans la vignette b) de la figure 4.16 mais l'écoulement dans ces cellules semble tendre vers cette organisation pour $e/e_{max} \to 1$ (vignettes c) à g) de la figure 4.16 et image du bas de la figure 4.18). Cela s'explique facilement lorsqu'on observe la structure de la première famille de cellules (celle contiguë au cylindre) qui est analogue à la cellule principale engendrée par un cylindre en rotation (voir par exemple la figure 1.12 page 31 ou 3.27 page 76), et ce d'autant plus que l'excentrement est important et que la cellule située entre le cylindre et le plan le plus voisin est petite.

3. A titre d'exemple, pour la première famille de cellules, le coefficient d'amortissement est de l'ordre de 360 dans le cas antisymétrique (cylindre centré en rotation) et de l'ordre de 5000 dans le cas symétrique (cylindre centré en translation)

4. Rappelons qu'une cellule est symétrique si $\psi(x,y) = -\psi(x,-y)$ et antisymétrique si $\psi(x,y) = \psi(x,-y)$

4.2 Cylindre fixe dans un écoulement de Poiseuille

Le cylindre est à présent fixe dans un écoulement de Poiseuille plan (Fig. 4.19) avec un profil de vitesse d'équation, lorsque l'origine du repère est dans le plan médian :

$$u_x(y) = U_{max}[1 - (\frac{y}{b})^2]$$

Le nombre de Reynolds de l'écoulement s'écrit $Re = \rho U_{max} 2a/\mu$.

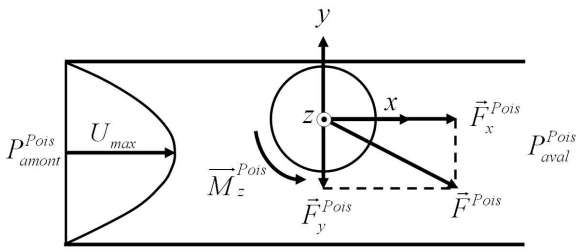

FIG. 4.19 – *Définition des forces et du moment sur le cylindre excentré en écoulement de Poiseuille plan*

4.2.1 Répartition des débits de fluide

Comme dans la partie précédente, on s'intéresse ici à la répartition du débit total Q (Fig. 4.20) entre le débit Q^+ sur la section de passage la plus large $h^+ = b(e_{max} + e)$ et le débit Q^- sur la section de passage la plus étroite $h^- = b(e_{max} - e)$ avec :

$$Q = \int_{-b}^{b} u_x(y)dy = \frac{4bU_{max}}{3}$$

Contrairement au cas du cylindre en translation uniforme, il n'y a plus ici de contre-écoulement de fluide. Dans les sections h^+ et h^-, les profils de vitesse sont toujours dirigés dans le même sens que le profil de Poiseuille.

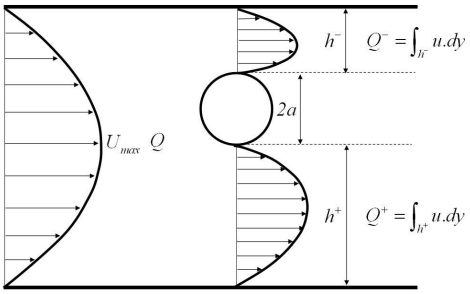

FIG. 4.20 – *Profils de vitesse dans une section passant par le centre du cylindre et normale aux plans*

L'évolution des débits avec l'excentrement est représentée sur la figure 4.21. En l'absence de contre-écoulement, le débit Q^+ ne peut dépasser le débit total Q et le débit Q^- ne peut pas être négatif. Dans les sections h^+ et h^-, le profil de vitesse n'est pas un profil de Poiseuille parfait à cause de la courbure de la paroi du cylindre. La vitesse maximale des profils dans chacune de ces sections est alors plus près du cylindre que des plans.

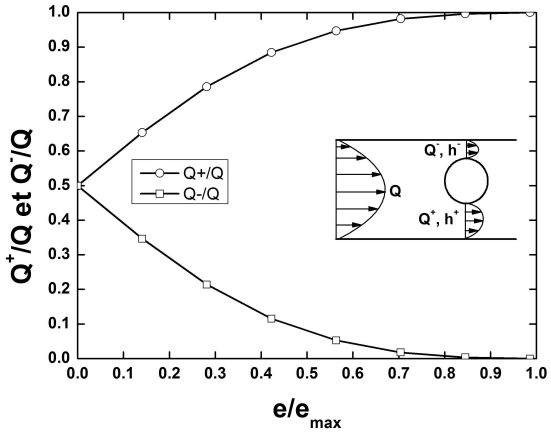

FIG. 4.21 – *Répartition des débits en fonction de l'excentrement en écoulement de Poiseuille*

4.2.2 Points d'arrêt et extrema de pression

Sur la figure 4.22, nous avons tracé les lignes de courant autour du cylindre pour $e/e_{max} = 0$, $e/e_{max} = 0.704$, $e/e_{max} = 0.845$ et $e/e_{max} = 0.986$. Comme dans le cas où le cylindre se déplace à vitesse constante, les points d'arrêt se rapprochent symétriquement l'un de l'autre et tendent vers le plan le plus proche lorsque l'excentrement augmente. Par contre, pour un excentrement supérieur à $e/e_{max} \approx 0.887$, il naît au niveau du plan le plus proche et de chaque côté du cylindre, deux zones de recirculation[5] visibles sur les vignettes c) et d) de la figure 4.22. On peut comparer ces deux zones de recirculation à celles prévues par Davis *et al.* [108] qui ont calculé l'écoulement de Stokes entre un cylindre et un seul plan dans un écoulement de cisaillement pur et avec celles visualisées expérimentalement par Taneda [109] dans des conditions similaires à celle de Davis *et al.* [108]. La figure 4.23 montre l'allure des lignes de courant obtenues par ces auteurs et celles calculées par nous. Bien que les conditions aux limites soient différentes entre notre problème et celui de Davis *et al.* [108] et de Taneda [109], on retrouve dans les trois cas ces zones tourbillonnaires localisées dans les coins formés par le cylindre et le plan. Comme le suggère Davis *et al.* [108], l'existence de ces tourbillons est liée au cisaillement. Ils ont également calculé que ces tourbillons apparaissent lorsque la distance entre le centre du cylindre et le plan était inférieure à $1.685a$ où a est le rayon du cylindre.

5. A noter que ces tourbillons n'ont pas été observés dans le cas où le cylindre est en situation centrée

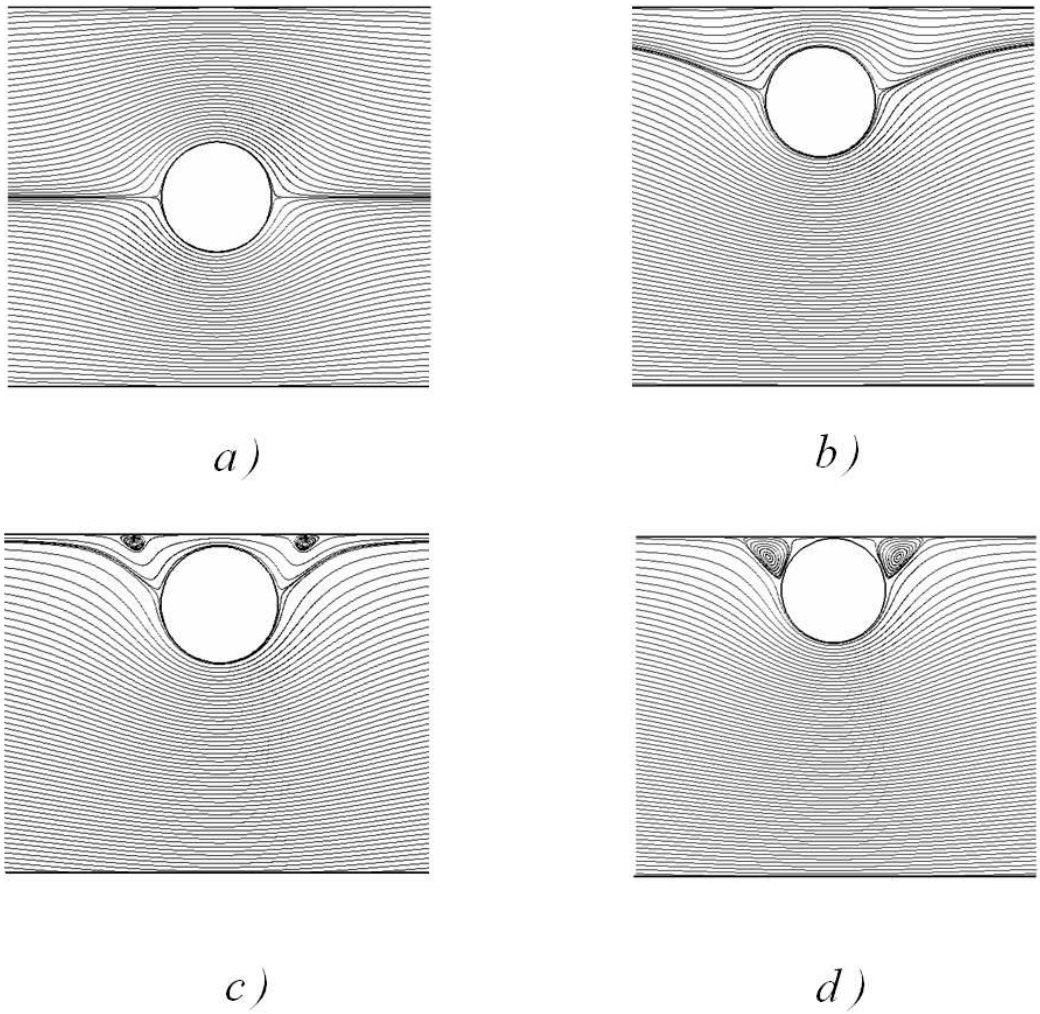

FIG. 4.22 – *Lignes de courant autour d'un cylindre dans un écoulement de Poiseuille - a)* $e/e_{max} = 0$ *- b)* $e/e_{max} = 0.704$ *- c)* $e/e_{max} = 0.845$ *- d)* $e/e_{max} = 0.986$

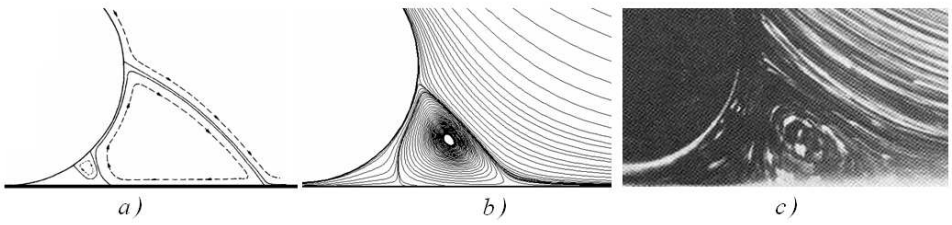

FIG. 4.23 – *Lignes de courant : a) dans le travail de Davis et al. [108] - b) pour un cylindre en écoulement de Poiseuille à* $e/e_{max} = 0.704$ *- c) dans le travail de Taneda [109]*

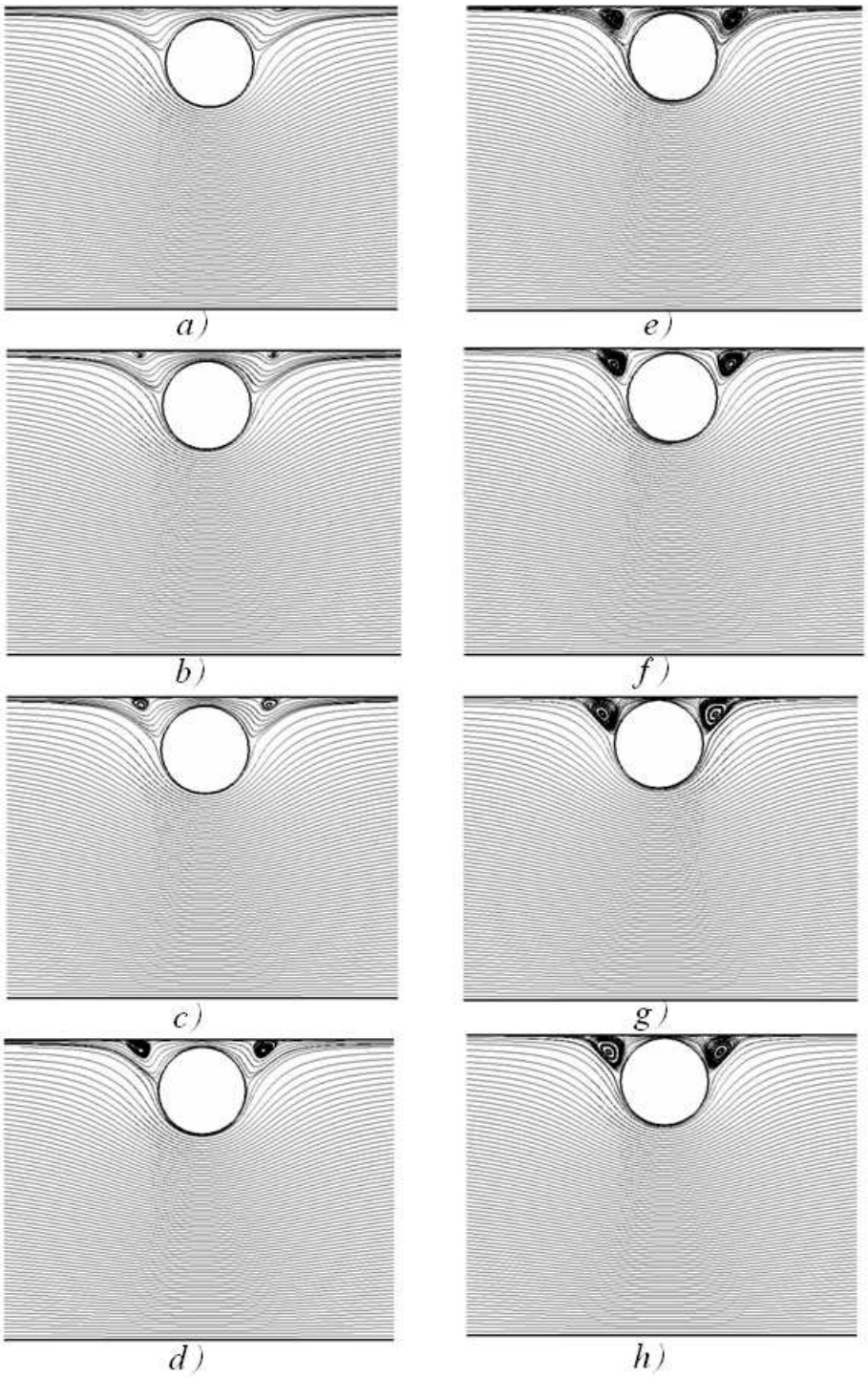

FIG. 4.24 – *Lignes de courant pour* $e/e_{max} =$ *: a)* 0.887 - *b)* 0.901 - *c)* 0.915 - *d)* 0.930 *e)* 0.944 - *f)* 0.960 - *g)* 0.972 - *h)* 0.986

Dans notre travail, ils naissent pour un excentrement supérieur à $e/e_{max} \approx 0.887$ ce qui correspond à la distance $1.275a$. L'écart peut s'expliquer en partie par la différence des conditions aux limites : chez Davis *et al.* [108], le cisaillement est constant ($\partial_y u_x = \kappa$) alors qu'il varie linéairement avec la distance au plan dans notre cas ($\partial_y u_x = \kappa y$). Il existe également un second plan dans notre étude, second plan absent du travail de Davis *et al.* [108]. Ces derniers prévoient également l'existence de tourbillons secondaires, tertiaires... que nos calculs numériques ne donnent pas. Lorsque l'excentrement augmente, ces tourbillons grossissent et se rapprochent l'un de l'autre comme on peut le voir sur la figure 4.24. La genèse de ces tourbillons trouve son origine dans le rapprochement vers le plan le plus proche de la ligne de courant passant par les points d'arrêt. Cette ligne de courant, le plan le plus proche et le cylindre constituent un tube de courant dans lequel l'écoulement est décéléré puis accéléré ce qui conduit à l'apparition de ces recirculations dès que ce changement de signe s'effectue sur une distance suffisamment courte.

Pour en revenir aux points de stagnation, la croissance de ces tourbillons contrarie leur rapprochement lorsque le cylindre se dirige vers le plan le plus proche. Pour $e/e_{max} > 0.901$, on observe même un «recul» de ces points.

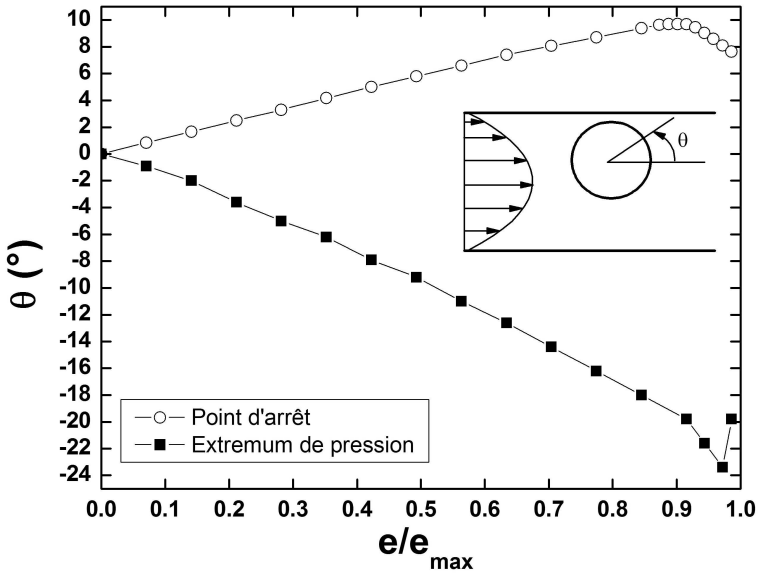

FIG. 4.25 – *Localisation des points d'arrêt et des extrema de pression pour un cylindre excentré dans un écoulement de Poiseuille en fonction de l'excentrement*

Sur la figure 4.25, nous avons tracé l'évolution de la position angulaire de l'un des points de stagnation. Les points d'arrêt évoluent donc dans un domaine assez restreint avec une amplitude de l'ordre de 10°. Dans le cas où le cylindre est en translation uniforme, ces points se déplacent beaucoup plus avec une amplitude de l'ordre de 80° (Fig. 4.6 page 83). Les points où la pression atteint un extremum sont représentés également sur

la figure 4.25. Contrairement à ce qui se passait dans le cas précédent (voir la figure 4.6 page 83), ces points évoluent dans le sens contraire des points de stagnation : lorsque l'excentrement augmente, le maximum et le minimum de pression ont tendance à se rapprocher en se déplaçant vers le plan le plus éloigné (Fig. 4.26). La figure 4.27 montre la distribution de la pression autour du cylindre, cette pression étant représentée sous la forme sans dimension $C_p(\theta) = P(\theta)/(\mu U_{max}/a)$.

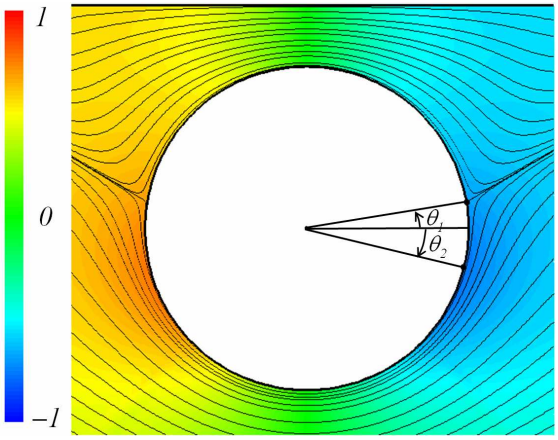

FIG. 4.26 – *Lignes de courant et champ de pression autour d'un cylindre en écoulement de Poiseuille pour* $e/e_{max} \approx 0.85$. *La pression est normalisée par sa valeur maximale. A l'aval, le point d'arrêt se situe à* $\theta_1 \approx 9°$ *et l'extremum de pression à* $\theta_2 \approx -18°$

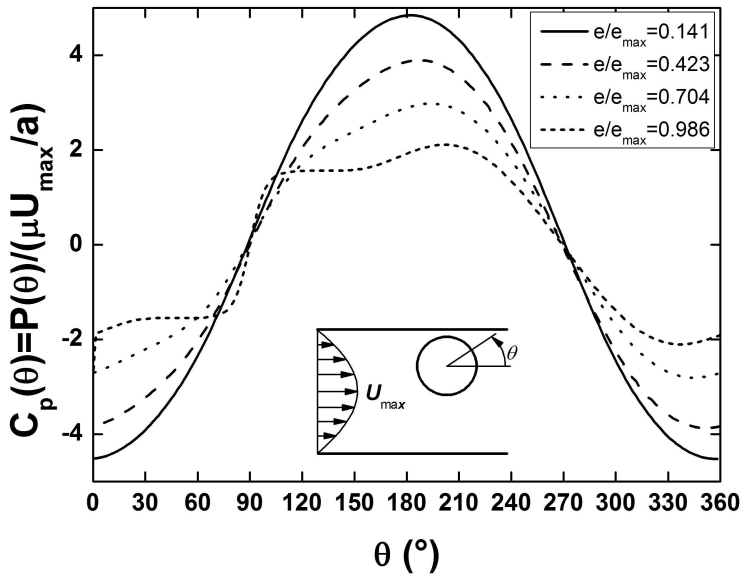

FIG. 4.27 – *Répartition de la pression autour du cylindre dans un écoulement de Poiseuille à différents excentrements pour* $k = 0.29$

On constate que C_p varie avec une amplitude moins grande que dans le cas du cylindre en déplacement uniforme (Fig. 4.8 page 84). On en conclut que la cavitation aura plus de mal à apparaître par rapport au cylindre en translation uniforme et que si elle apparaît, ce sera toujours à l'aval du cylindre mais du côté du plan le plus éloigné.

4.2.3 Force de traînée

Intéressons-nous à présent à la force de traînée F_x^{Pois} subie par le cylindre fixe dont la forme sans dimension s'écrit :

$$\Lambda^{Pois}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{F_x^{Pois}(k,Re,e/e_{max})}{\mu U_{max}}$$

Cette force est représentée sur la figure 4.28. Elle est maximale dans le plan de symétrie en $e/e_{max} = 0$ et décroît continûment lorsque l'excentrement augmente. Contrairement à ce qui se passait dans le cas du cylindre se déplaçant à vitesse constante, il n'y a pas de minimum de force et donc pas de brisure de symétrie. Ceci est dû à l'absence de contre-écoulement dans cette configuration. Il n'y a de même plus de divergence de la traînée lorsque $e/e_{max} \to 1$ puisque dans ce cas, la vitesse du fluide tend vers 0 vers les parois. Qualitativement, cette allure a été également trouvée expérimentalement par Dhahir *et al.* [88] dans le cas d'un écoulement de Poiseuille dans une section carrée. Cette condition aux limites ne permet pas par contre de comparer quantitativement nos résultats aux leurs. La figure 4.31 montre néanmoins une bonne similitude entre les visualisations expérimentales de Dhahir *et al.* [88] et celles obtenues par nous-même montrant en particulier le rapprochement des points d'arrêt vers le plan le plus proche.

4.2.4 Moment

Le cylindre subit également un moment M_z^{Pois} dû aux forces de viscosité dont la forme adimensionnelle est :

$$\Gamma_z^{Pois}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{M_z^{Pois}(k,Re,e/e_{max})}{\mu a U_{max}}$$

La figure 4.29 représente son évolution avec l'excentrement. Le moment est nul en situation centrée à cause de la symétrie de l'écoulement. Lorsque l'excentrement augmente, le moment qui est positif augmente de façon monotone. Le signe positif indique que le cylindre tournerait, s'il était libre, dans le sens trigonométrique[6], c'est-à-dire dans le sens du roulement sur le plan, en bonne adéquation avec le sens de la vorticité induite par l'écoulement de Poiseuille.

4.2.5 Perte de charge

La condition aux limites à l'entrée du domaine est un profil de Poiseuille. On travaille donc à débit imposé. Il en résulte que la différence de pressions $\Delta P^{Pois} = (P_{aval} -$

6. Ceci est valable pour un cylindre dans le demi-plan supérieur. Dans le demi-plan inférieur, on observerait le sens opposé

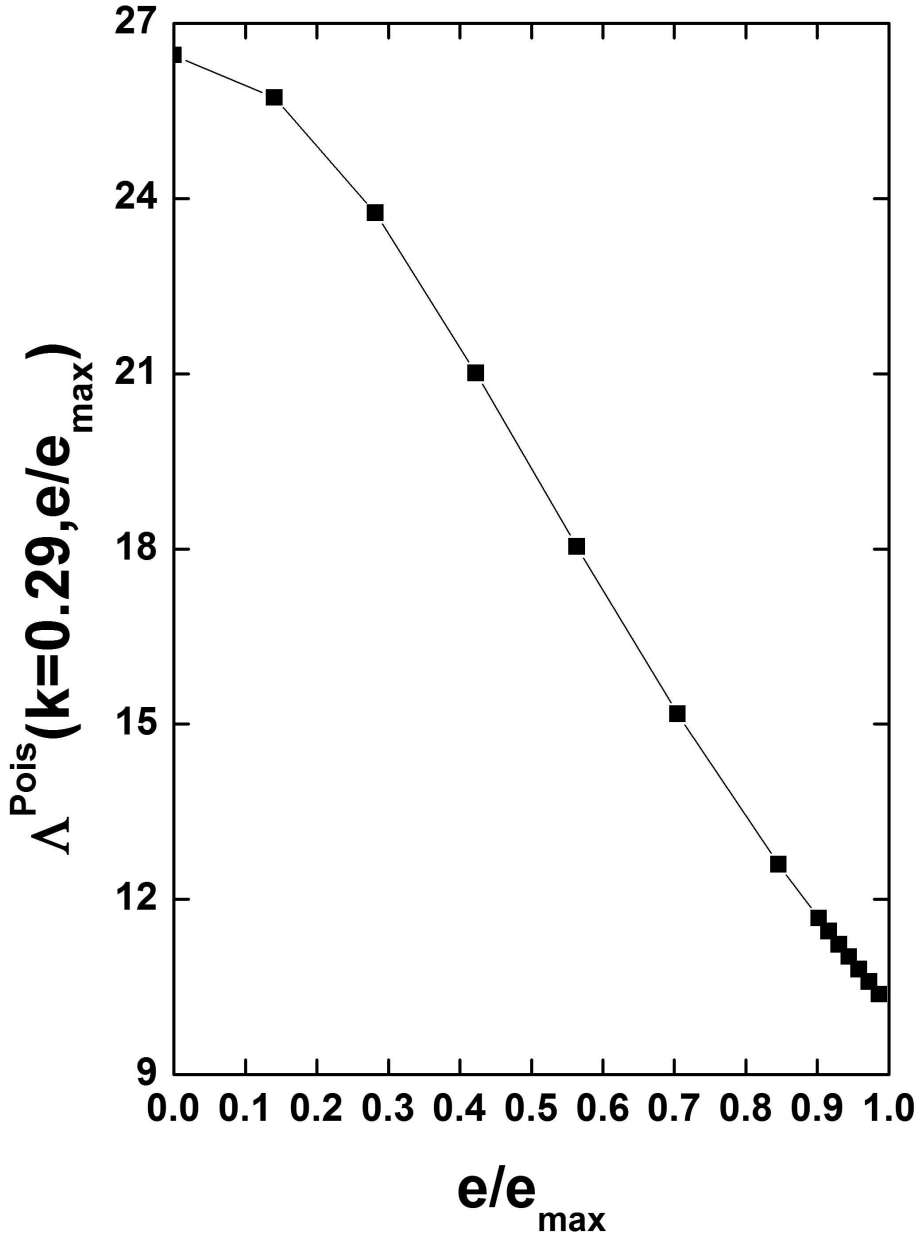

FIG. 4.28 – $\Lambda^{Pois}(k = 0.29,e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

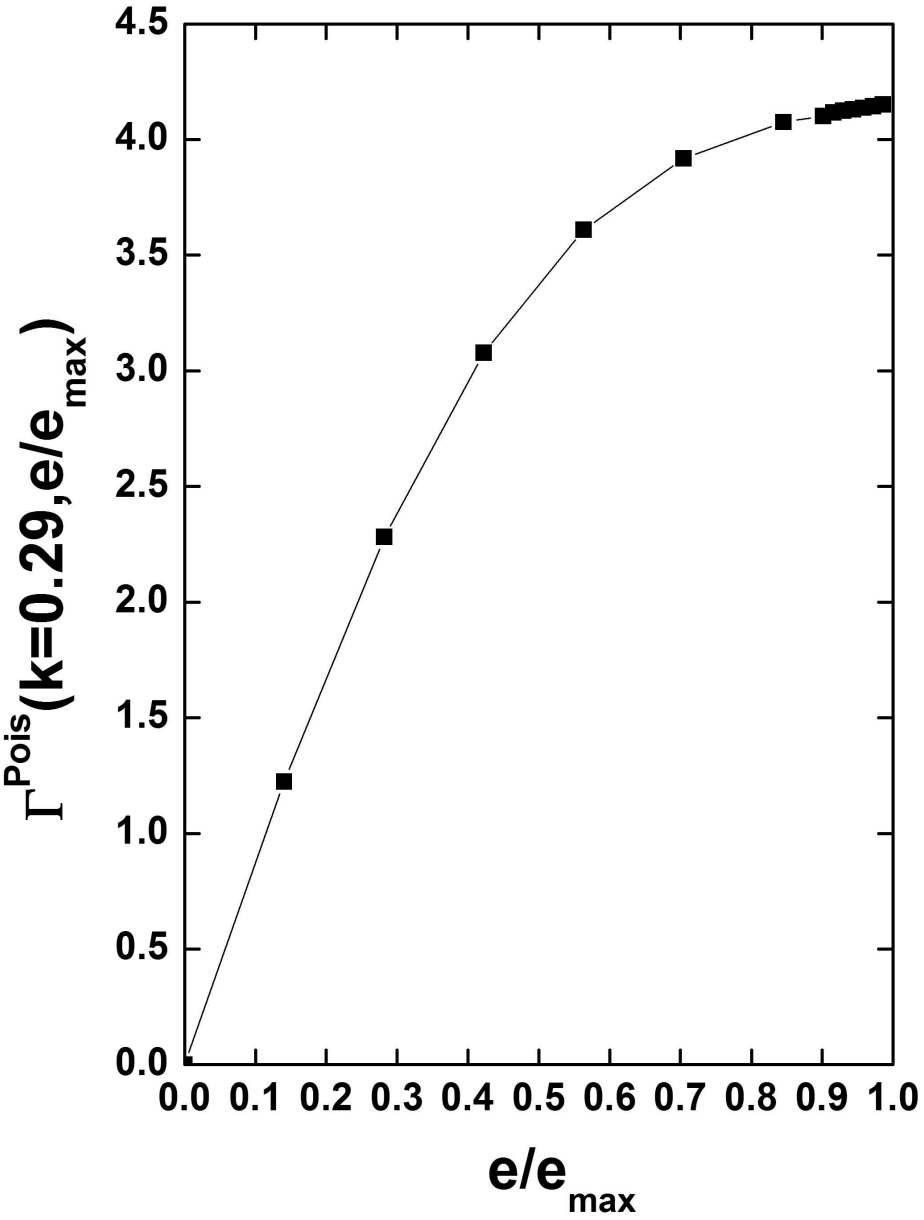

FIG. 4.29 – $\Gamma^{Pois}(k = 0.29,e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

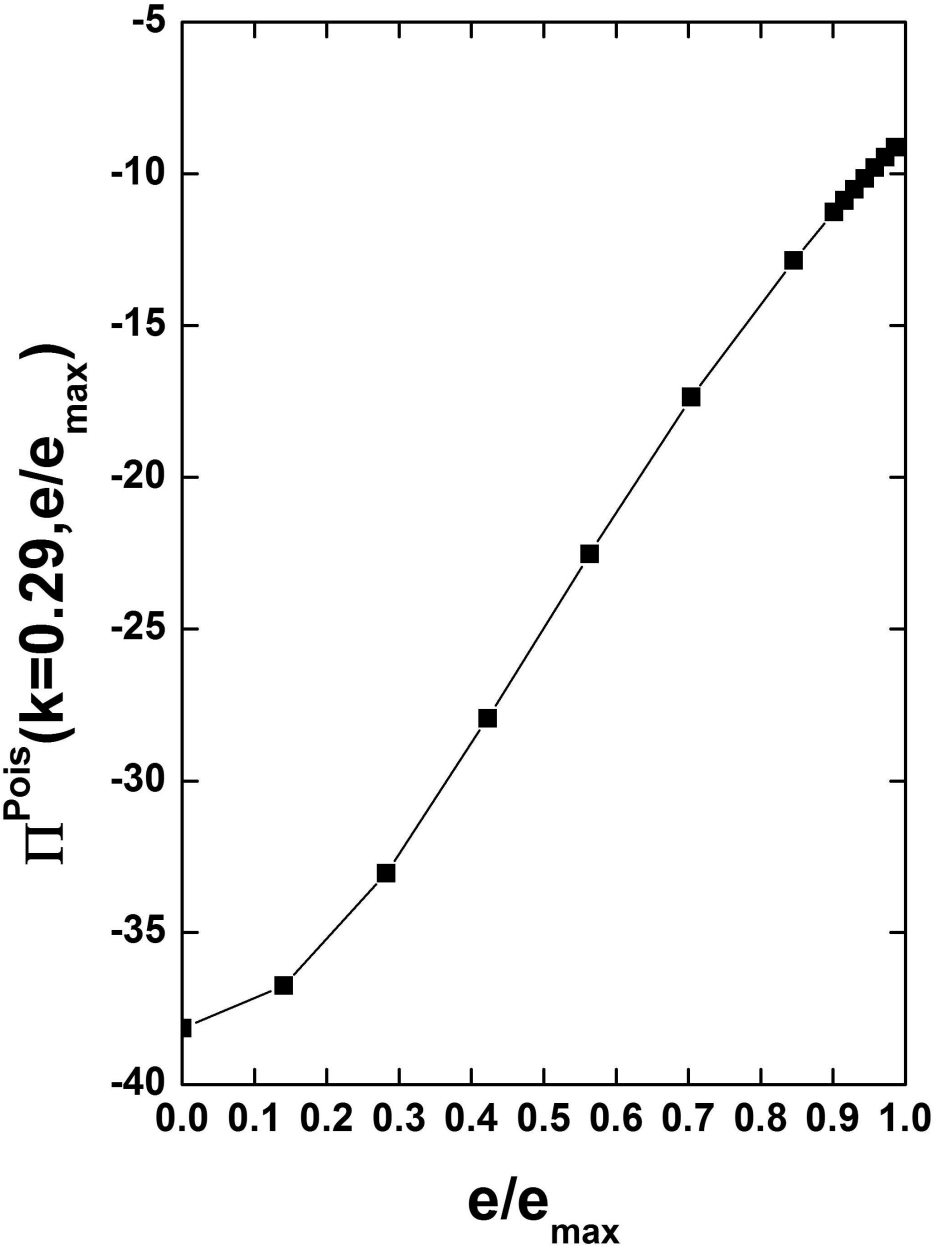

FIG. 4.30 – $\Pi^{Pois}(k = 0.29, e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

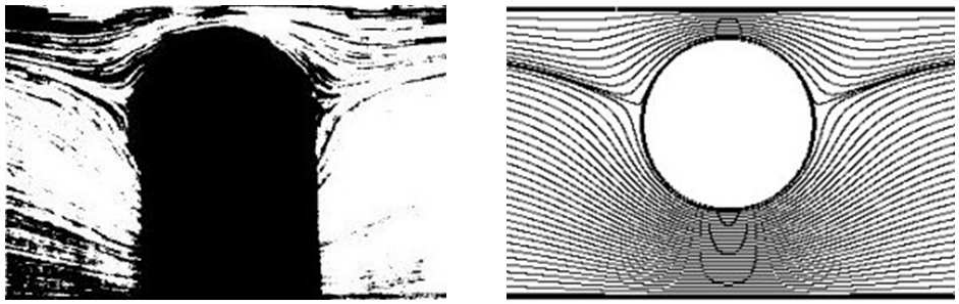

FIG. 4.31 – *Lignes de courant autour d'un cylindre en écoulement de Poiseuille pour* $k = 0.6$, $e/e_{max} = 0.5$ *et* $Re << 1$. *A gauche : dans le travail de Dhahir* et al. *[88] - A droite : dans nos calculs numériques*

$P_{amont})^{Pois}$ entre les sections d'entrée et de sortie varie avec l'excentrement. Cette différence de pressions est celle engendrée par la présence du cylindre, c'est-à-dire la différence de pressions entre deux sections arbitraires autour du cylindre distantes d'une longueur L à laquelle on retire la différence de pressions due à l'écoulement non perturbé de Poiseuille $\Delta P = 2\mu U_{max} L/b^2$. On définit la différence de pressions normalisée Π^{Pois} par l'expression :

$$\Pi^{Pois}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{\Delta P^{Pois}(k,Re,e/e_{max})2b}{\mu U_{max}}$$

Cette fonction est tracée dans la figure 4.30 où l'on constate que la position centrée est celle qui engendre le maximum de perte de charge. La différence de pressions est en effet presque deux fois plus importante pour $e/e_{max} = 0$ que pour $e/e_{max} \to 1$. Cela provient simplement du fait que l'écoulement de Poiseuille est maximal en $e/e_{max} = 0$ et décroît rapidement en intensité près des plans. Le fait de placer un obstacle à l'endroit où l'écoulement est le plus important va logiquement générer la perte de charge maximale.

4.3 Cylindre en rotation uniforme

Le cylindre est à présent en mouvement de rotation uniforme autour de son axe à la vitesse angulaire Ω_z (Fig. 4.32). Le nombre de Reynolds est $Re = 2\rho\Omega_z a^2/\mu$.

4.3.1 Structure des lignes de courant

Comme nous l'avons déjà vu dans la partie dédiée à la bibliographie, l'écoulement autour d'un cylindre confiné en rotation est caractérisé par la présence de cellules qu'on nomme généralement cellules de Stokes, qui se développent indéfiniment en séries autour du cylindre. Sur la figure 4.33, nous avons représenté l'évolution de ces cellules en fonction de l'excentrement[7]. Il est particulièrement intéressant d'observer l'évolution

7. Les vignettes de cette figure ne montrent que la structure de l'écoulement au voisinage du cylindre. Il existe évidemment au-delà d'autres structures

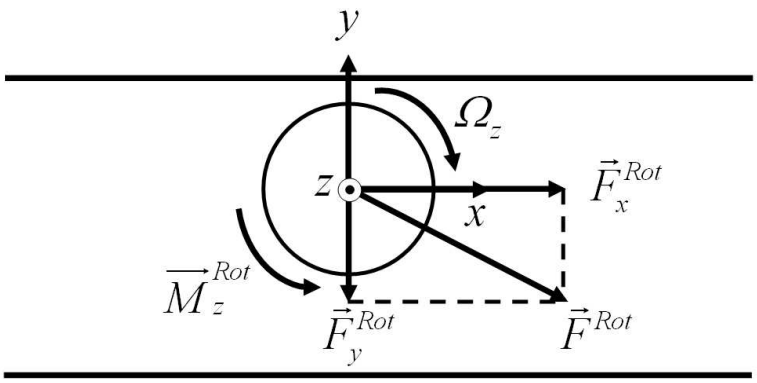

FIG. 4.32 – *Définition des forces et du moment sur le cylindre excentré en rotation uniforme*

de la cellule principale en contact direct avec le cylindre : on constate que lorsque l'excentrement augmente, la taille de cette zone a tendance à diminuer. Si pour $e/e_{max} = 0$ elle occupe toute la largeur du canal, elle a quasiment disparu pour $e/e_{max} = 0.986$. La dimension radiale de cette zone est de l'ordre de la distance au plan le plus proche $h^- = b(e_{max} - e)$. Sur le plan le plus proche du cylindre, cette cellule a une étendue L^+ et sur le plan le plus éloigné, elle occupe la longueur L^-. La figure 4.34 montre l'évolution de ces longueurs avec l'excentrement. Si la distance L^+ ne devient nulle que lorsque $e/e_{max} \to 1$, la distance L^- tend rapidement vers 0 pour un excentrement de l'ordre de $e/e_{max} \approx 0.4$. Au-delà de cet excentrement, les deux cellules tourbillonnaires en contact avec la cellule principale se rapprochent et commencent à fusionner. La distance $2L$ entre le centre de ces cellules diminue lorsque l'excentrement augmente ce qui est clairement visible sur la figure 4.35 où nous avons tracé cette distance normalisée par b. Au-delà de $e/e_{max} \approx 0.3$, L semble diminuer linéairement avec l'excentrement. La position verticale de ces centres varie par contre très peu, ceux-ci restant à mi-distance des plans parallèles sauf pour les excentrements proches de 1 pour lesquels on observe un léger décalage vertical dans la même direction que le déplacement du cylindre. Ainsi, pour $e/e_{max} = 0.986$, ce décalage vaut seulement $0.04b$. La figure 4.36 montre les lignes de courant et le champ de pression autour d'un cylindre excentré en rotation pour $e/e_{max} \approx 0.85$. La pression est extrémale sur le plan le plus proche du cylindre avec une surpression du côté où le fluide pénètre dans l'interstice entre le plan et le cylindre tournant et un dépression à la sortie de cette zone. La pression est par contre quasiment constante du côté du plan le plus éloigné. Comme dans le cas du cylindre centré, on remarque la présence de 2 points-selle pour la pression dans le figure 4.36. La figure 4.37 montre comment est répartie la pression autour du cylindre. Le pression est donnée sous la forme adimensionnelle $C_p(\theta) = P(\theta)/(\mu\Omega_z)$. On constate que la dépression à l'aval du cylindre est d'autant plus importante que l'excentrement est important. Si cavitation il y a, elle apparaîtra donc d'autant plus facilement que e/e_{max} mais aussi évidemment que k sont grands.

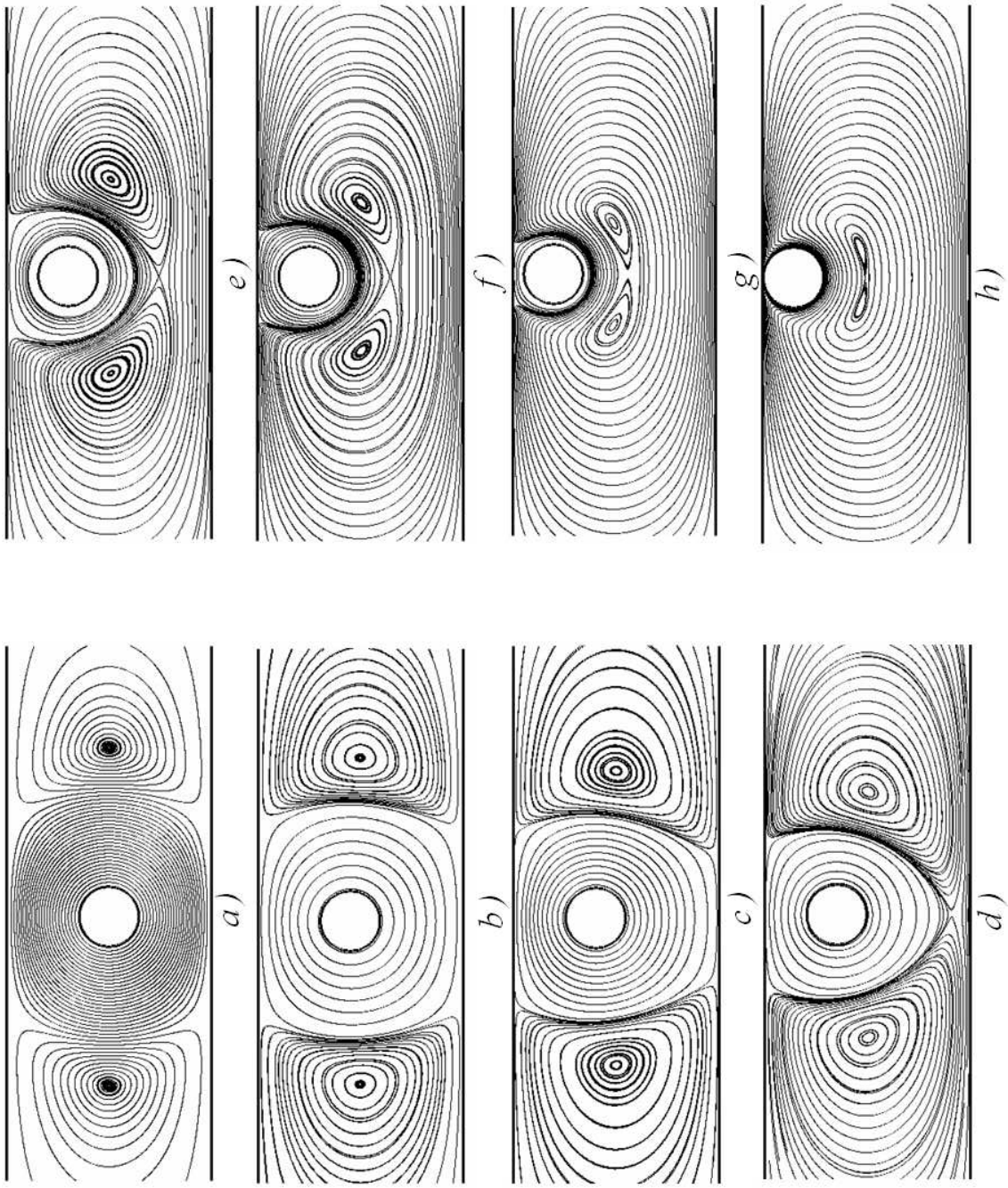

FIG. 4.33 – *Lignes de courant autour d'un cylindre excentré en rotation pour* $e/e_{max} =$ *: a)* 0 - *b)* 0.141 - *c)* 0.282 - *d)* 0.423 - *e)* 0.563 - *f)* 0.704 - *g)* 0.845 - *h)* 0.986

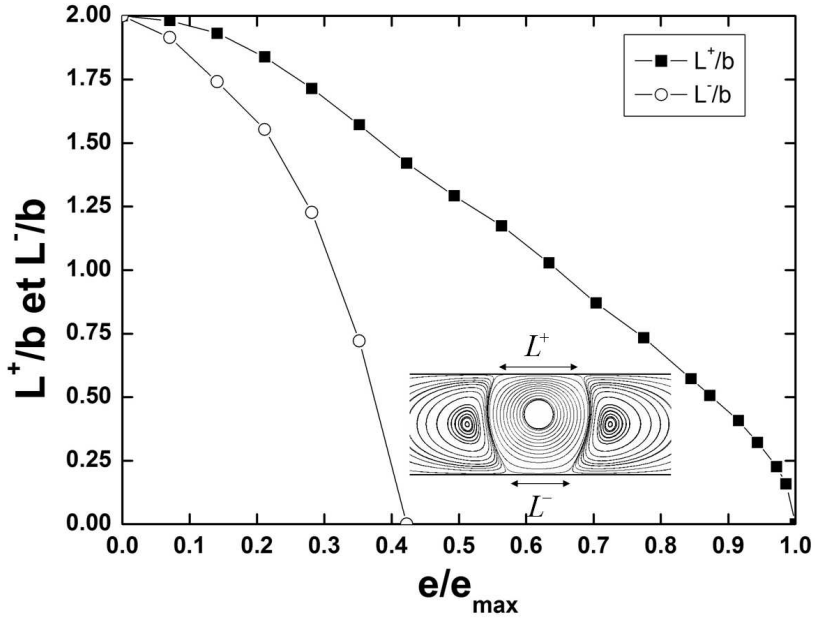

FIG. 4.34 – *Longueurs L^+ et L^- de la cellule principale en contact avec les plans, normalisées par la distance b*

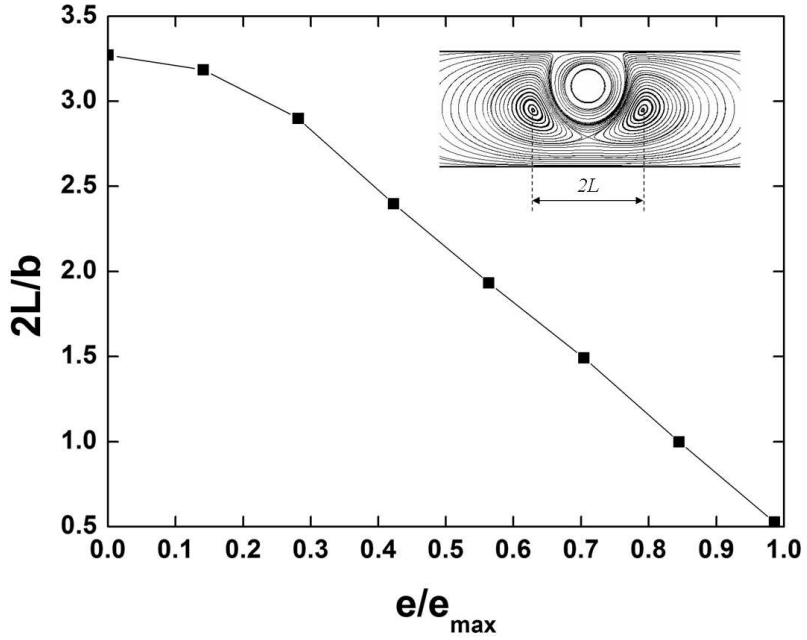

FIG. 4.35 – *Distance $2L$ entre les centres des premières cellules, normalisée par la distance b*

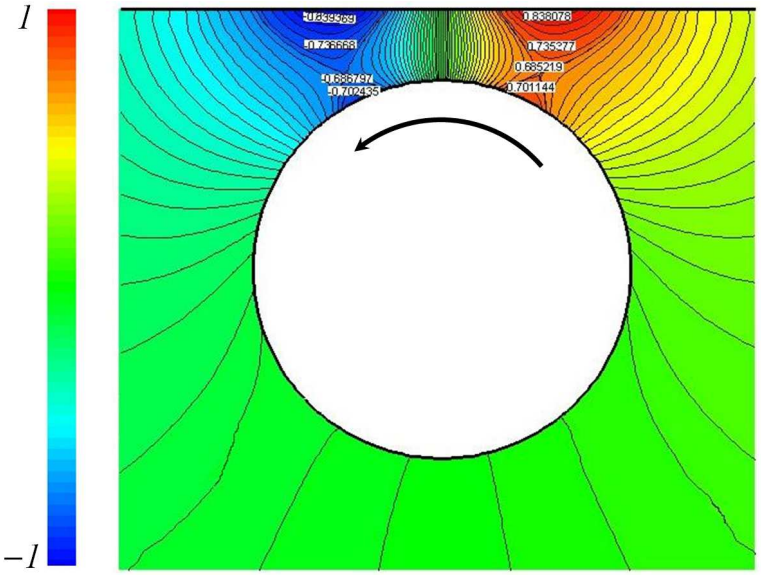

FIG. 4.36 – *Isovaleurs de la pression autour d'un cylindre en rotation pour* $e/e_{max} \approx 0.85$. *La pression est normalisée par sa valeur maximale*

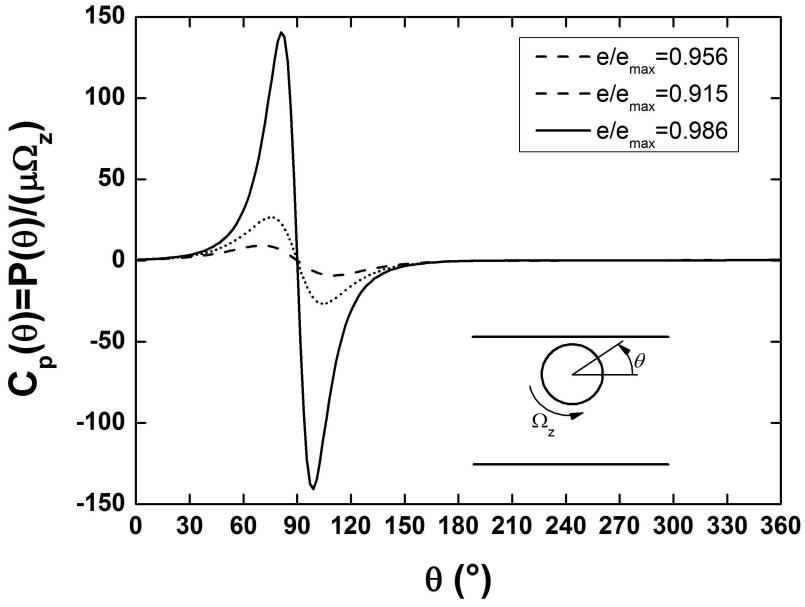

FIG. 4.37 – *Répartition de la pression autour du cylindre en rotation pour différents excentrements*

4.3.2 Force de traînée

Le cylindre excentré en rotation va subir en dehors du plan de symétrie une force de traînée F_x^{Rot} dont nous avons tracé sur la figure 4.38 pour $k = 0.29$ la forme normalisée définie par :

$$\Lambda^{Rot}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{F_x^{Rot}(k,Re,e/e_{max})}{\mu\Omega_z a}$$

On peut observer l'évolution singulière de cette force : nulle au centre pour des raisons de symétrie, elle commence par décroître, passe par un minimum puis finit par augmenter près du plan.

4.3.3 Moment

De la même façon, le cylindre va subir un moment M_z^{Rot} que nous étudions sous la forme sans dimension :

$$\Gamma^{Rot}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{M_z^{Rot}(k,Re,e/e_{max})}{\mu\Omega_z a^2}$$

Il est représenté sur la figure 4.39. Son évolution est monotone décroissante avec une divergence à proximité du plan à l'excentrement maximal. Cette divergence du moment subi par le cylindre en rotation uniforme pour $e/e_{max} \to 1$ est l'analogue de la divergence de la force de traînée subie par le cylindre en translation uniforme quand $e/e_{max} \to 1$ (voir la figure 4.9 page 85). On trouve dans l'article de Jeffrey *et al.* [45] l'expression du moment subi par un cylindre en rotation à proximité d'un plan unique. Ils ont obtenu l'expression asymptotique suivante :

$$\Gamma^{Rot} = \frac{4\pi}{\sqrt{1 - 1/(1+\epsilon^2)}} \approx \frac{4\pi}{\epsilon} \tag{4.7}$$

dans la limite où $\epsilon = h^-/a \to 0$ est le rapport de la distance minimale $h^- = b(e_{max} - e)$ séparant le cylindre du plan le plus proche et du rayon du a cylindre. Nos résultats et l'expression 4.7 sont représentés sur la figure 4.41. Dans la limite où $\epsilon \to 0$, les deux approches coïncident à quelques pourcent près. Rappelons que dans leurs calculs, Jeffrey *et al.* [45] ne se sont préoccupés que d'un seul plan alors que nous en avons deux dans notre étude.

4.3.4 Perte de charge

Il reste finalement à étudier l'évolution de la différence de pressions $\Delta P^{Rot} = (P_{aval} - P_{amont})^{Rot}$ que nous traitons sous la forme normalisée :

$$\Pi^{Rot}(k,Re,e/e_{max}) = \frac{\Delta P^{Rot}(k,Re,e/e_{max})2b}{\mu\Omega_z a}$$

La figure 4.40 la représente. Elle évolue de façon monotone d'une valeur nulle dans le plan de symétrie à une valeur constante positive lorsque $e/e_{max} \to 1$.

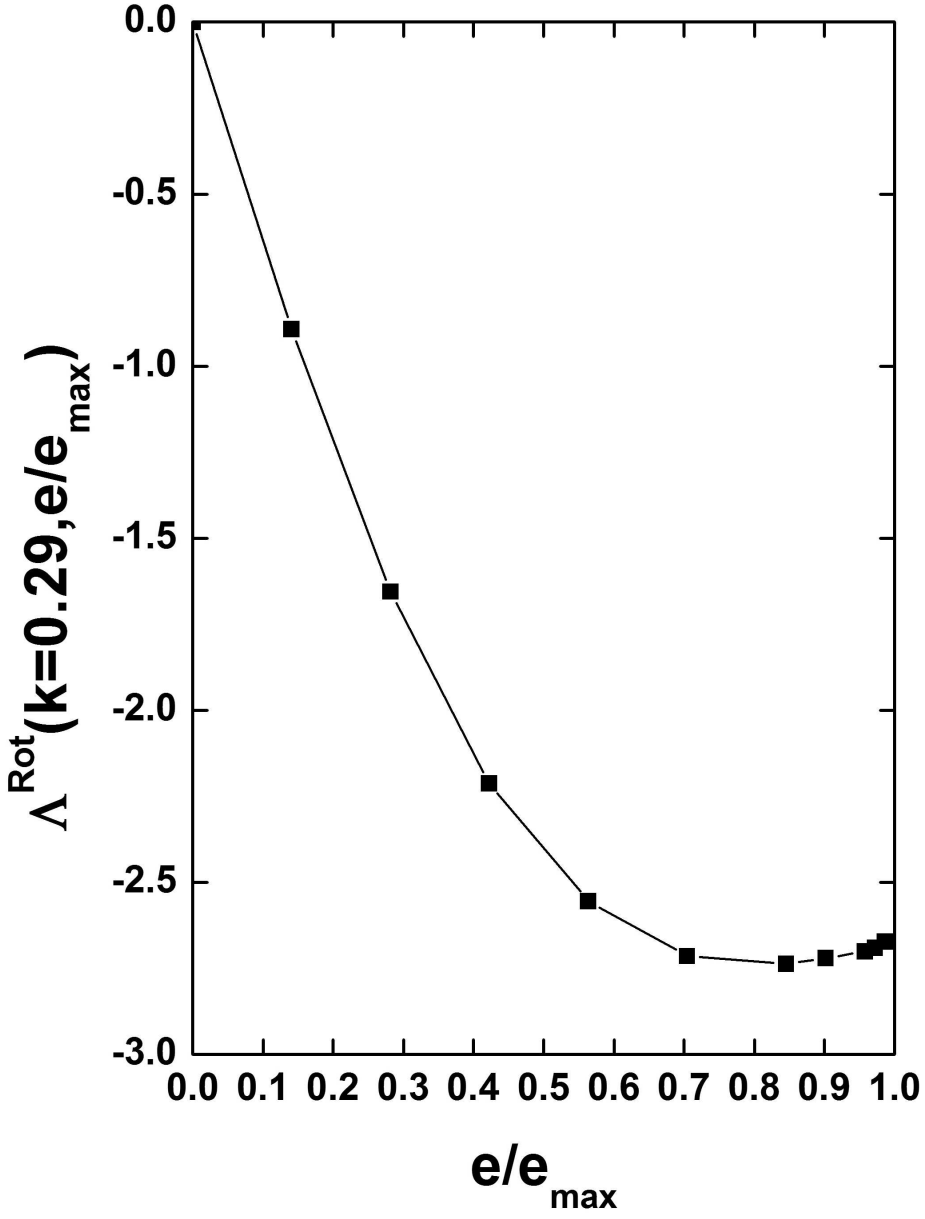

FIG. 4.38 – $\Lambda^{Rot}(k = 0.29,e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

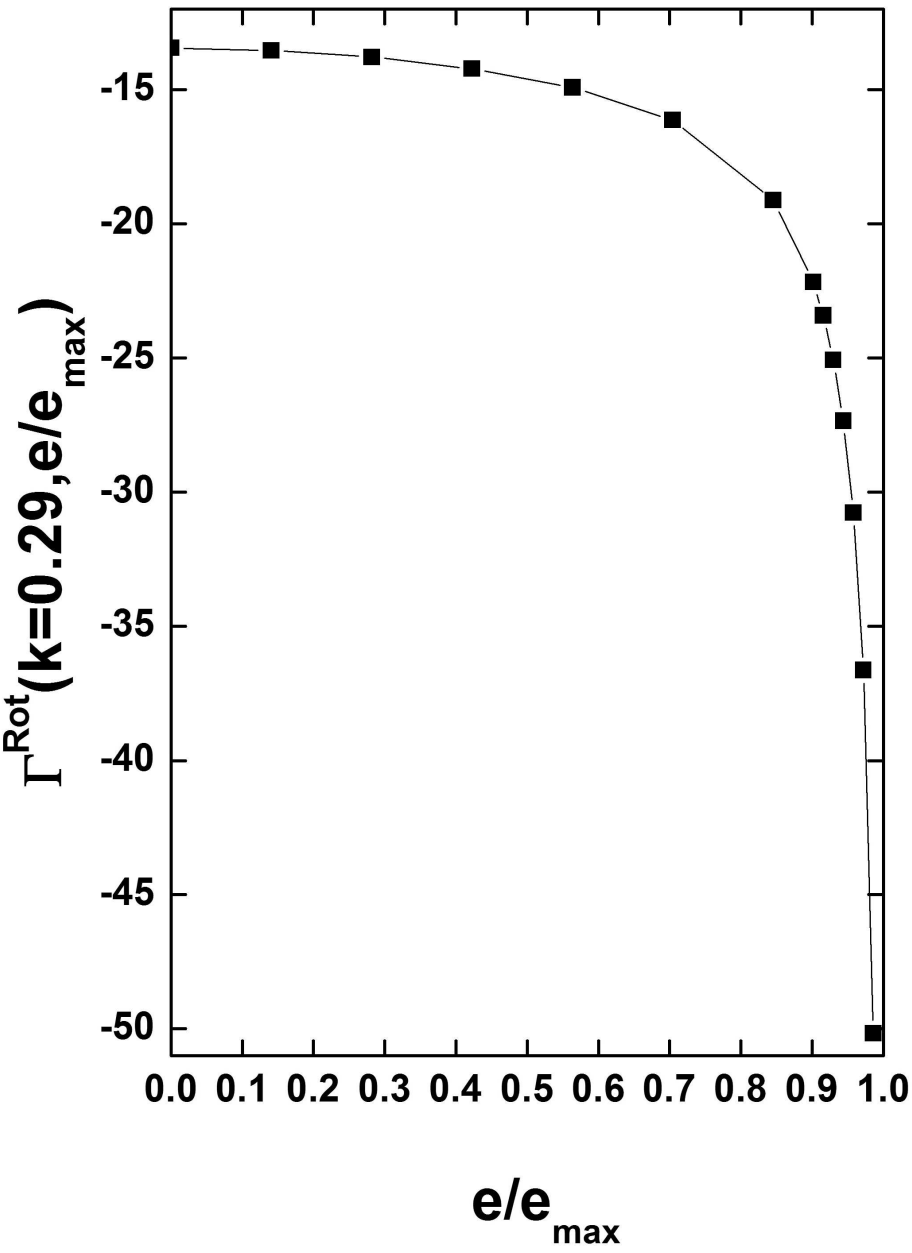

FIG. 4.39 – $\Gamma^{Rot}(k = 0.29,e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

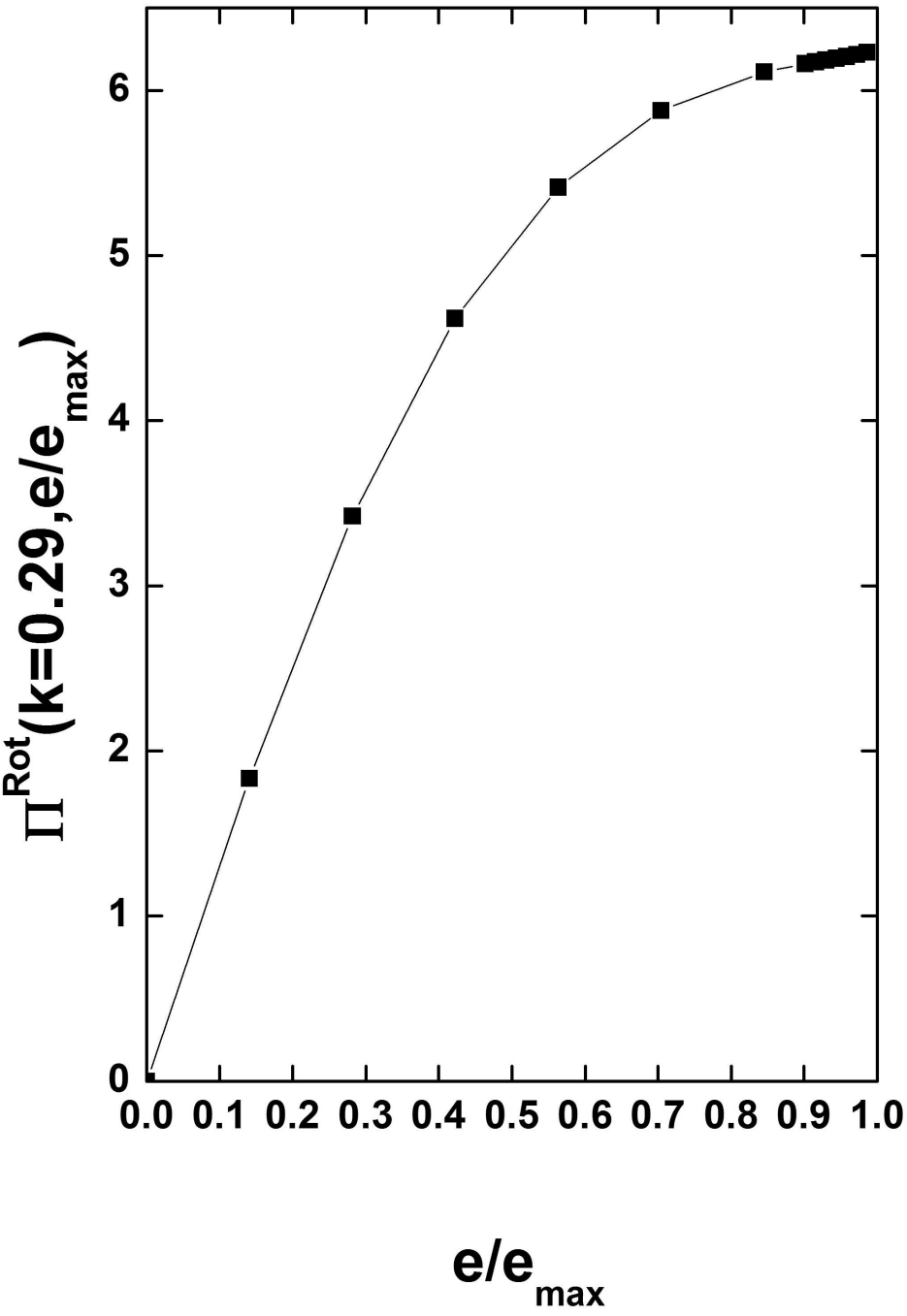

FIG. 4.40 – $\Pi^{Rot}(k = 0.29,e/e_{max})$ *en fonction de* e/e_{max} *à* $Re = 0.1$

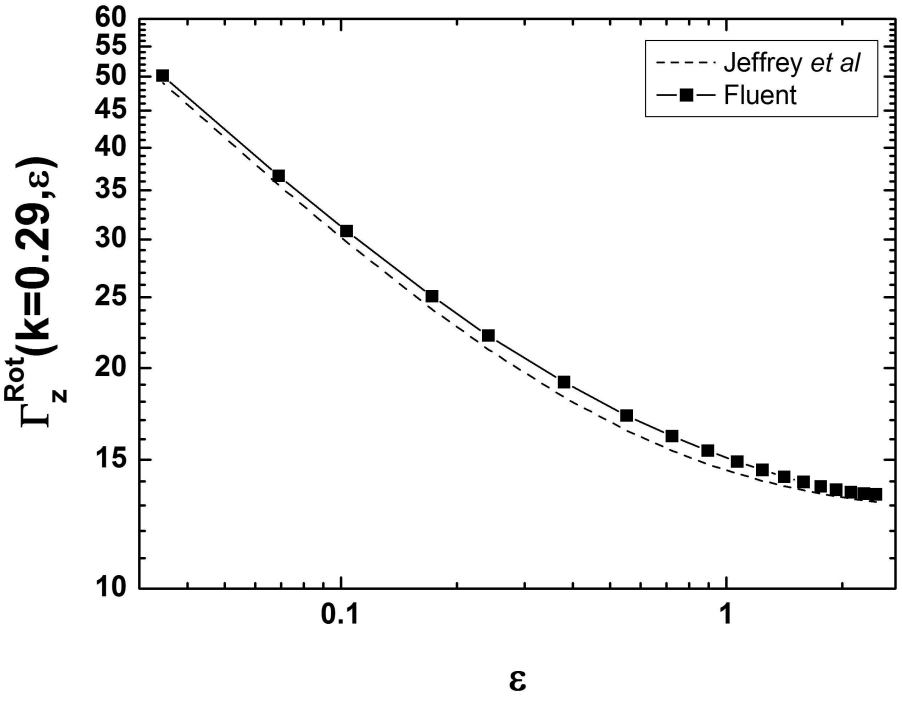

FIG. 4.41 – Γ^{Rot} *en fonction de* $\epsilon = h^-/a$ *à* $Re = 0.1$

4.4 Conclusion

La physique de l'écoulement autour d'un cylindre excentré entre deux plans parallèles est donc beaucoup plus riche que celle concernant le cylindre centré. La force de traînée sur le cylindre dans le cas de la translation uniforme montre une évolution non-intuitive avec passage par un minimum. Ce comportement peut être associé au contre-écoulement de fluide. En effet, en l'absence de «backflow» comme dans l'écoulement de Poiseuille, ce minimum n'apparaît plus. Dans le cas de la rotation, l'excentrement a comme conséquence la déformation importante des cellules tourbillonnaires avec en particulier la quasi disparition de la cellule principale autour du cylindre et la fusion des cellules secondaires aux grands excentrements. Dans chacune des trois études que nous venons de mener, nous avons quantifié la force de traînée sur le cylindre, le moment qu'il subit et la perte de charge qu'il engendre. Nous allons à présent utiliser ces résultats pour caractériser le mouvement d'un cylindre libre en exploitant la technique de la matrice de résistance.

Chapitre 5

La matrice de résistance

5.1 Généralités

L'une des conséquences de la linéarité de l'équation de Stokes est qu'il existe une simple relation de proportionnalité entre les forces et les couples sur les parois solides et les vitesses caractéristiques du fluide [3, 4, 56, 66]. Nous avons vu que le problème du cylindre dans l'approximation de Stokes en milieu infini aux faibles nombres de Reynolds conduit au paradoxe de Stokes et que la solution de Lamb issue de l'approximation d'Oseen a un comportement logarithmique singulier. La linéarité en vitesse de la force de traînée n'est donc pas assurée. Heureusement, nous avons également vu que le confinement du cylindre permettait de retrouver la linéarité entre les efforts et les vitesses tant que le nombre de Reynolds est suffisamment faible. Les «*solutions de type Stokes*» sont donc parfaitement adaptées à la technique de la matrice de résistance que nous rappelons ici.

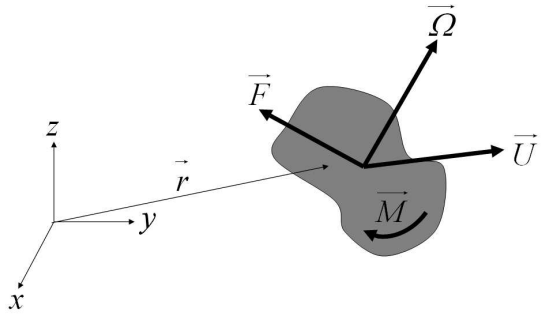

FIG. 5.1 – *Force et couple s'exerçant sur un objet se déplaçant et tournant dans un fluide visqueux*

Soit un solide, de dimension caractéristique L, se déplaçant dans un fluide de viscosité dynamique μ. D'une manière générale, son mouvement est la combinaison d'une translation de vitesse $\overrightarrow{U}$ et d'une rotation de vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ (Fig. 5.1). Si l'on appelle F_i et M_i

les composantes de la force et du couple exercés sur le solide, on peut montrer qu'elles satisfont aux relations :

$$F_i = \mu(A_{ij}U_j + B_{ij}\Omega_j L) \tag{5.1}$$

$$M_i/L = \mu(C_{ij}U_j + D_{ij}\Omega_j L) \tag{5.2}$$

Les coefficients sans dimension A_{ij} et D_{ij} relient respectivement les forces aux vitesses de translation et les couples aux vitesses de rotation. Les coefficients sans dimension B_{ij} et C_{ij} représentent respectivement les forces induites par les rotations et les couples induits par les translations. Les tenseurs A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} et D_{ij} ont en outre des propriétés de symétrie très générales indépendantes de la forme du solide se traduisant pas les relations :

$$A_{ij} = A_{ji}, \quad D_{ij} = D_{ji} \quad \text{et} \quad B_{ij} = C_{ij} \tag{5.3}$$

Si en plus le solide possède des éléments de symétrie, il existera d'autres relations entre ces coefficients. En regroupant les expressions 5.1 et 5.2, on obtient :

$$\begin{bmatrix} F_i \\ M_i/L \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ C_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ \Omega_i L \end{bmatrix}$$

où la matrice des tenseurs A_{ij}, B_{ij}, ... est appelée *matrice de résistance*. Nous allons appliquer ce formalisme au problème du cylindre confiné.

5.2 La matrice de résistance dans le cas du cylindre confiné

Nous prenons comme longueur caractéristique le rayon a du cylindre et choisissons un repère d'origine le centre du cylindre orienté comme sur la figure 5.2.

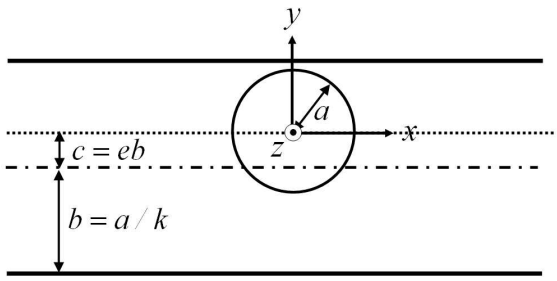

FIG. 5.2 – *Schéma du système*

Le cylindre est susceptible de se déplacer en translation dans le plan xy aux vitesses U_x et U_y et de tourner autour de l'axe des z à la vitesse Ω_z induisant les forces F_x, F_y et le couple M_z. En plus de ces forces et de ce couple, les mouvements du cylindre induiront également une différence de pressions $\Delta P = P_{aval} - P_{amont}$ (autre que

l'éventuelle différence de pressions hydrostatique) entre deux sections arbitrairement éloignées du cylindre. Cette différence de pressions doit également être liée aux vitesses caractéristiques. Dans le cas où le cylindre est fixe dans un écoulement de Poiseuille, on peut par exemple relier ΔP à la vitesse débitante $\overline{U} = 2U_{max}/3$ de l'écoulement [1]. Avec toutes ces considérations, la matrice de résistance prend la forme généralisée suivante, en ne retenant qu'une écriture unique A_{ij} pour les différents coefficients :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z/a \\ \Delta P 2b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ \Omega_z a \\ \overline{U} \end{bmatrix}$$

La force de portance F_y est une force d'origine inertielle. L'approximation de Stokes sous laquelle nous développons le formalisme de la matrice de résistance conduit en effet à la nullité de cette force. Nous allons donc, dans un premier temps, considérer comme nuls les coefficients A_{i2} et A_{2j}. Notre système se réduit alors à :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ M_z/a \\ \Delta P 2b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ \Omega_z a \\ \overline{U} \end{bmatrix}$$

Grâce aux différentes études menées dans les paragraphes précédents, il nous est très simple de définir les coefficients A_{ij} de cette matrice. L'étude du cylindre en translation va permettre de remplir la première colonne de la matrice, soit les coefficients A_{i1}. On a en effet dans ce cas $\Omega_z = \overline{U} = 0$ si bien que l'on trouve :

$$A_{11} = \frac{F_x^{Trans}}{\mu U_x} = \Lambda^{Trans}$$

$$A_{31} = \frac{M_z^{Trans}}{\mu a U_x} = \Gamma^{Trans}$$

$$A_{41} = \frac{\Delta P^{Trans} 2b}{\mu U_x} = \Pi^{Trans}$$

Le problème du cylindre en rotation donne les coefficients A_{i3} de la deuxième colonne puisqu'en posant $U_x = \overline{U} = 0$, on aboutit à :

$$A_{13} = \frac{F_x^{Rot}}{\mu \Omega_z a} = \Lambda^{Rot}$$

$$A_{33} = \frac{M_z^{Rot}}{\mu \Omega_z a^2} = \Gamma^{Rot}$$

1. Cette différence de pressions est celle induite par la présence du cylindre, elle ne prend pas en compte la perte de charge due à l'écoulement de Poiseuille $\Delta P = 3\mu\overline{U}L/b^2$ où L est la distance entre les sections de mesure des pressions

$$A_{43} = \frac{\Delta P^{Rot} 2b}{\mu \Omega_z a} = \Pi^{Rot}$$

Enfin, l'étude du cylindre fixe en écoulement de Poiseuille va compléter la troisième colonne A_{i4} puisqu'en posant $U_x = \Omega_z = 0$, on obtient :

$$A_{14} = \frac{F_x^{Pois}}{\mu \overline{U}} = \frac{3}{2} \Lambda^{Pois}$$

$$A_{34} = \frac{M_z^{Pois}}{\mu a \overline{U}} = \frac{3}{2} \Gamma^{Pois}$$

$$A_{44} = \frac{\Delta P^{Pois} 2b}{\mu \overline{U}} = \frac{3}{2} \Pi^{Pois}$$

La figure 5.3 montre l'évolution des 9 coefficients de la matrice de résistance généralisée simplifiée (sans force ou vitesse suivant l'axe des y). On y remarque en particulier que les symétries sont respectées puisqu'on retrouve bien $A_{13} = A_{31}$, $A_{14} = A_{41}$ et $A_{34} = A_{43}$. Notons enfin que les signes des coefficients A_{i3} et A_{3j} dépendent de la localisation du cylindre par rapport au plan médian : pour un cylindre évoluant dans le demi-plan supérieur, on obtient pour ces coefficients les signes de la figure 5.3 alors que pour une évolution dans le demi-plan inférieur, ces coefficients seront de signe contraire.

5.3 Exploitation de la matrice

Nous allons utiliser cette matrice pour résoudre deux problèmes classiques mais dont il n'existe pas de solutions analytiques. Dans un premier temps, nous allons déterminer l'écoulement engendré par la sédimentation de la particule cylindrique puis nous verrons comment cette particule est convectée dans un écoulement de Poiseuille plan.

5.3.1 Sédimentation du cylindre

Supposons que le cylindre de masse volumique ρ_s sédimente dans un fluide de masse volumique $\rho_f = \rho_s - \Delta\rho$ ($\Delta\rho > 0$) entre deux plans verticaux (l'accélération de la pesanteur étant dirigée suivant l'axe des x). A l'équilibre, le poids apparent de la particule $\Delta\rho g \pi a^2$ compense la force de traînée et le système à résoudre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} -\Delta\rho g \pi a^2 \\ 0 \\ \Delta P 2b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ \Omega_z a \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'inversion de ce système permet de déterminer la vitesse de sédimentation :

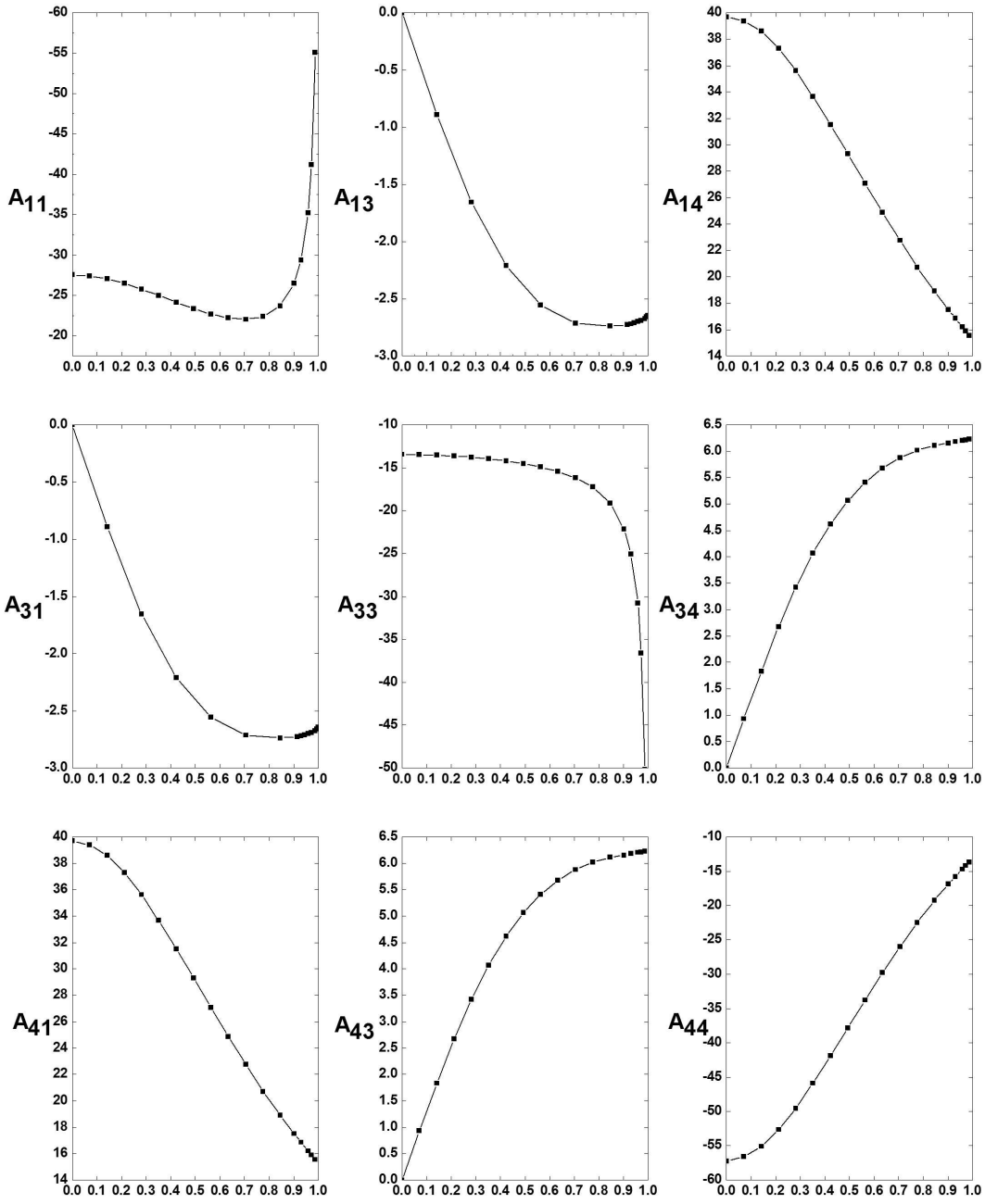

FIG. 5.3 – *Coefficients A_{ij} de la matrice de résistance en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$*

$$U_x = \left(\frac{-A_{33}}{A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}}\right) U^\star \tag{5.4}$$

La vitesse de rotation du cylindre en sédimentation s'écrit :

$$\Omega_z = \left(\frac{A_{31}}{A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}}\right) \frac{U^\star}{a} \tag{5.5}$$

Enfin, la différence de pressions a pour expression :

$$\Delta P = \left(\frac{A_{43}A_{31} - A_{41}A_{33}}{A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}}\right) \frac{\mu U^\star}{2b} \tag{5.6}$$

où l'on a posé $U^\star = \Delta\rho g \pi a^2/\mu$ qui est une vitesse caractéristique de sédimentation du cylindre[2]. La figure 5.4 montre comment varie la vitesse de rotation Ω_z du cylindre libre avec l'excentrement. Elle est évidemment nulle au centre, passe par un extremum pour un excentrement de l'ordre de $e/e_{max} \approx 0.65$ avant de s'annuler à nouveau à proximité d'un plan. Le signe négatif de cette vitesse nous indique que le cylindre qui avance vers les $x > 0$ doit tourner dans le sens horaire lorsqu'il se rapproche du plan supérieur, c'est-à-dire dans le sens inverse de celui qu'il aurait s'il roulait sur le plan. A remarquer que dans le cas d'une sphère sédimentant dans un tube cylindrique, celle-ci finit par changer de sens de rotation au voisinage de la paroi solide.

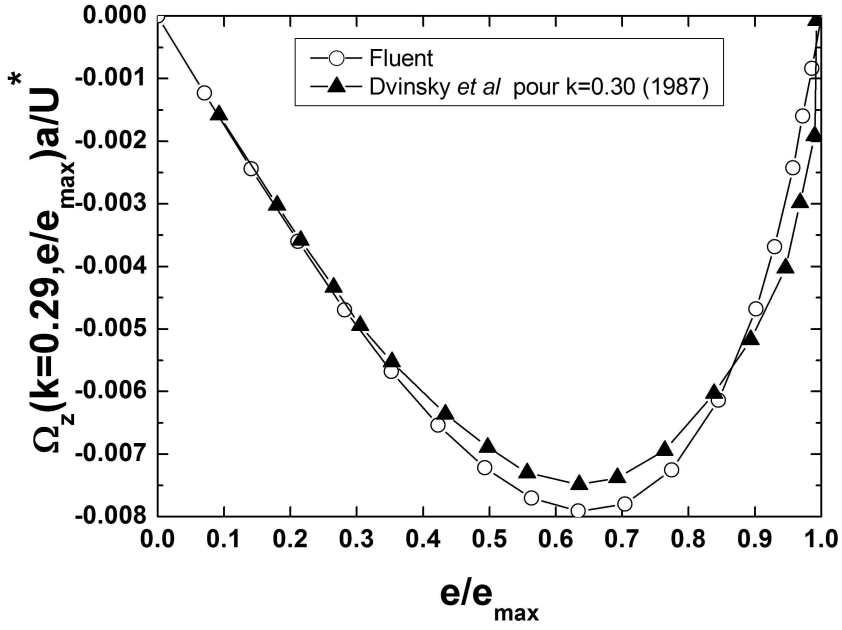

FIG. 5.4 – *Evolution de la vitesse de rotation du cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

2. Cette vitesse est à rapprocher de celle de la sphère sédimentant en milieu infini $U^\star = 2\Delta\rho g a^2/9\mu$

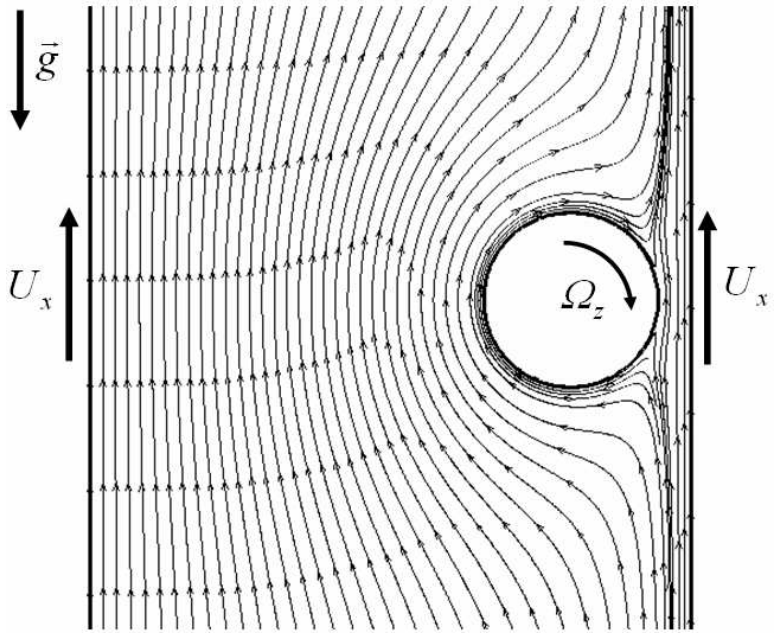

FIG. 5.5 – *Lignes de courant autour d'un cylindre libre en sédimentation pour* $k = 0.29$ *et* $e/e_{max} = 0.845$

On trouve parfois dans la littérature scientifique [61, 110, 111] le terme de «*anomalous rolling*» concernant cette rotation contraire à l'intuition. La figure 5.5 montre les lignes de courant autour du cylindre dans un référentiel qui lui est lié. On y constate que l'écoulement entre le cylindre et le plan le plus proche est pratiquement bloqué si bien que la majorité du fluide s'écoule dans la section la plus grande, entraînant le cylindre dans son mouvement. On comprend alors mieux le sens de rotation apparemment «anormal» du cylindre. La figure 5.4 montre aussi la vitesse de rotation obtenue à partir de l'article de Dvinsky *et al.* [56] pour le rapport de confinement $k = 0.30$. Les deux approches sont en accord satisfaisant.

La figure 5.6 montre comment varie la vitesse de sédimentation U_x du cylindre avec l'excentrement. On constate que la position centrée ne donne pas la vitesse de sédimentation maximale. Celle-ci est atteinte pour un excentrement de l'ordre de $e/e_{max} \approx 0.7$. Enfin la vitesse de chute décroît très rapidement lorsqu'on se rapproche d'une paroi. Cette évolution est à rapprocher de celle obtenue pour la force de traînée dans le problème de la translation du cylindre. Sur ce même graphique, nous avons également tracé l'évolution de cette vitesse dans le cas où l'on bloquerait la rotation du cylindre ($\Omega_z = 0$) déterminée ci-dessus. On constate que cylindre va sédimenter moins vite lorsqu'on le prive de sa rotation quel que soit son excentrement (sauf au centre où $\Omega_z = 0$ par symétrie). Cette diminution est évidemment d'autant plus grande que Ω_z est important, c'est-à-dire autour de l'excentrement $e/e_{max} \approx 0.65$ mais cette correction reste néanmoins peu significative puisqu'elle n'est au maximum que de 2%. On peut com-

prendre l'influence de la rotation en se rappelant qu'un cylindre tournant dans le sens horaire (Fig. 5.5) va engendrer une dépression à son amont créant une force hydrodynamique dirigée dans le sens de son déplacement, réduisant donc sa traînée et en définitif augmentant sa vitesse de sédimentation.

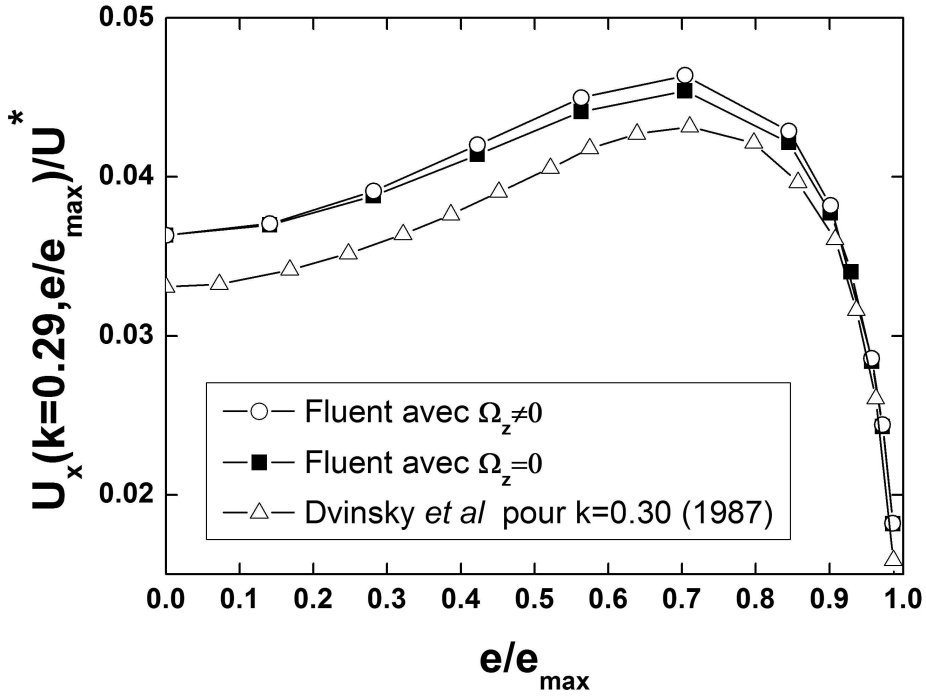

FIG. 5.6 – *Evolution de la vitesse de translation du cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

Sur le graphique 5.6, nous avons également tracé l'évolution de la vitesse de sédimentation que nous avons déterminée en exploitant une courbe de l'article de Dvinsky *et al.* [56] [3]. Bien que les allures soient identiques, on note cependant une différence entre nos calculs et ceux de Dvinsky *et al.* [56] avec un écart relatif maximum de 10% en $e/e_{max} = 0$. Une partie de cet écart peut être mis au crédit de la différence des rapports de confinement k. En effet, pour $e/e_{max} = 0$ par exemple, l'écart relatif entre les vitesses de sédimentation pour $k = 0.30$ et $k = 0.29$, calculées à partir des résultats précédemment établis et confirmés, n'est que de 6%. Si l'on se souvient en outre que les résultats de Dvinsky *et al.* [56] ne sont pas corrects pour $k < 0.3$ dans le cas centré (voir par exemple la figure 3.5 page 53 ou le tableau 3.5 page 56), on peut alors comprendre le reste de l'écart.

Sur la figure 5.7, nous avons tracé le rapport de la vitesse $|\Omega_z a|$ et de la vitesse U_x en fonction de e/e_{max}. La périphérie du cylindre a une vitesse toujours inférieure à sa

3. Cette courbe correspond à un rapport de confinement légèrement supérieur au nôtre (0.30 au lieu de 0.29)

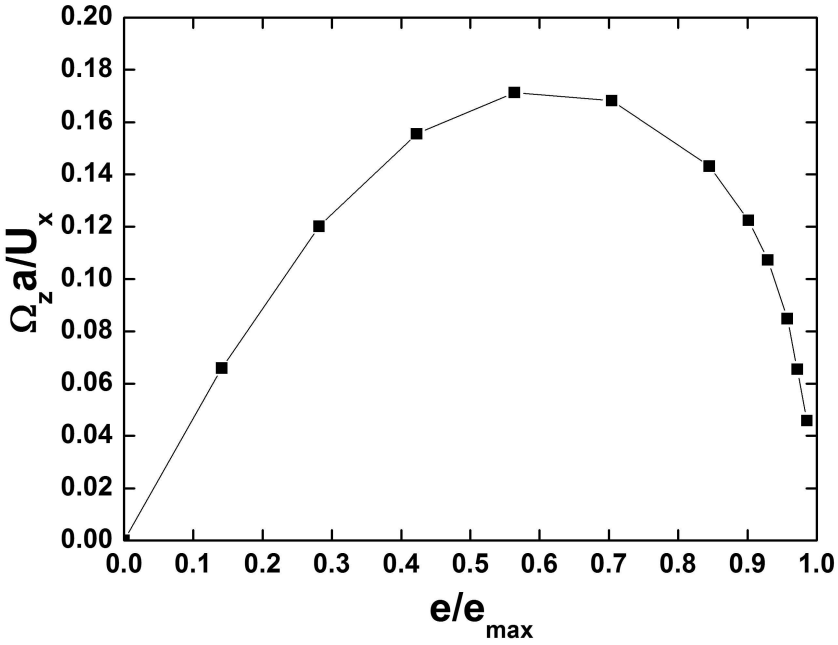

FIG. 5.7 – *Rapport des vitesses de rotation et de translation pour le cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

vitesse de translation. On peut ainsi comparer les vitesses de glissement et de roulement dans la limite où le cylindre toucherait le plan. Apparemment le rapport de ces vitesses semble tendre vers 0 ce qui indique que le cylindre serait immobile à la paroi. A noter que cette limite est sujette à caution dans la mesure où l'on n'a pas tenu compte ni d'éventuelles rugosités empêchant le cylindre de toucher le plan, ni des forces de Van der Waals qui interviennent à très courtes distances, ni finalement d'une possible cavitation naissant à cause de la chute de pression déjà évoquée.

La figure 5.8 représente enfin l'évolution de la perte de charge induite par le déplacement du cylindre en sédimentation en fonction de son excentrement. Elle est maximale au centre et décroît continûment lorsque le cylindre se rapproche d'un plan. La mesure de cette perte de charge permettrait d'introduire une méthode originale pour déterminer la vitesse de sédimentation puisqu'en faisant le rapport des expressions 5.4 et 5.6, on obtient la relation :

$$U_x = \frac{2b}{\mu}\left(\frac{-A_{33}}{A_{43}A_{31} - A_{41}A_{33}}\right)\Delta P$$

De la même façon, on peut relier la perte de charge et la vitesse de rotation en faisant le rapport des expressions 5.5 et 5.6. On obtient alors :

$$\Omega_z = \frac{2b}{\mu a}\left(\frac{A_{31}}{A_{43}A_{31} - A_{41}A_{33}}\right)\Delta P$$

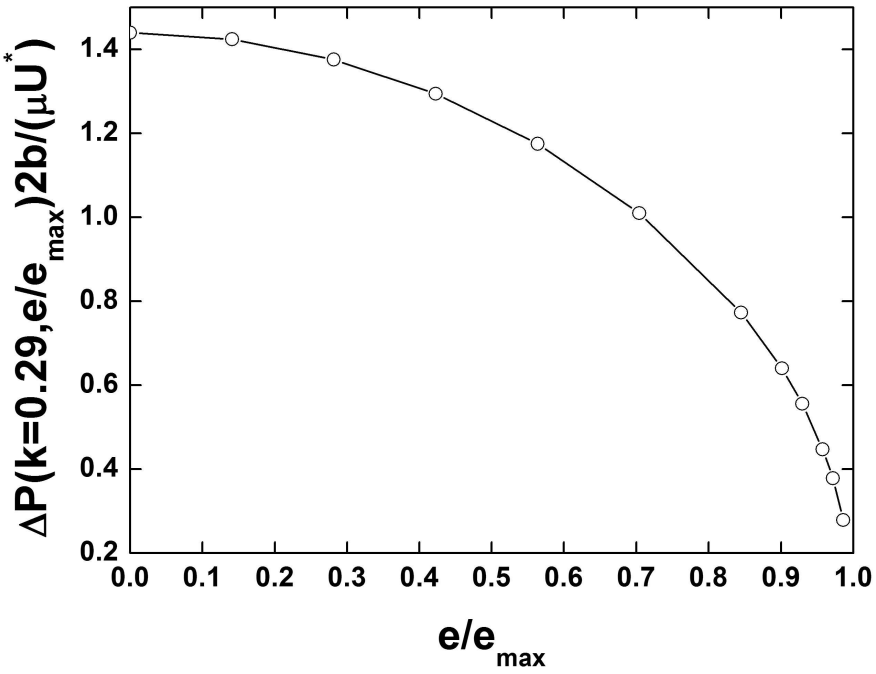

FIG. 5.8 – *Evolution de la perte de charge induite par le cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

Les figures 5.9 et 5.10 montrent comment évoluent les rapports normalisés $\mu U_x/(2b\Delta P)$ et $\mu\Omega_z a/(2b\Delta P)$ avec l'excentrement. On pourrait imaginer ensuite que la connaissance de U_x ou de Ω_z permette de remonter à la position de la particule puisque ces grandeurs sont des fonctions de l'excentrement du cylindre.

Un cas particulier est celui concernant le cylindre en situation centrée. On a alors $A_{31} = A_{13} = A_{43} = A_{34} = 0$. La vitesse de sédimentation dans le plan de symétrie se simplifie alors pour donner l'expression :

$$U_x(k,e/e_{max} = 0) = -\frac{U^\star}{A_{11}} = -\frac{U^\star}{\Lambda^{Trans}}$$

L'étude de la variation avec k de $\Lambda^{Trans}(k,e/e_{max} = 0)$ a été effectuée dans le chapitre consacré au cylindre centré. Nous avions alors trouvé pour ce coefficient l'expression [4] :

$$\Lambda^{Trans}(k,e/e_{max} = 0) = \frac{-1}{\sum_n A_{2n}k^{2n} + Blnk} \tag{5.7}$$

dont les coefficients sont rappelés dans le tableau 5.1.

4. Dans l'expression 3.5 page 59, le signe négatif de ce coefficient n'apparaît pas explicitement

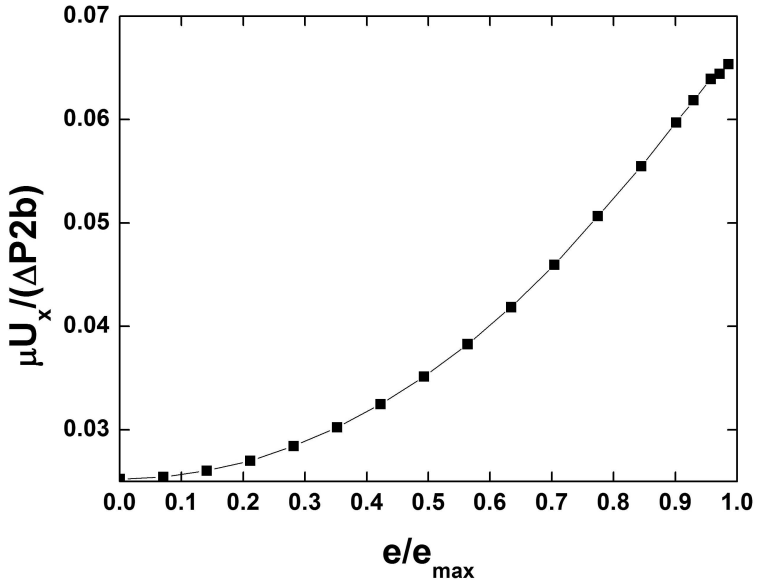

FIG. 5.9 – *Evolution du rapport de la vitesse chute du cylindre en sédimentation et de la perte de charge en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

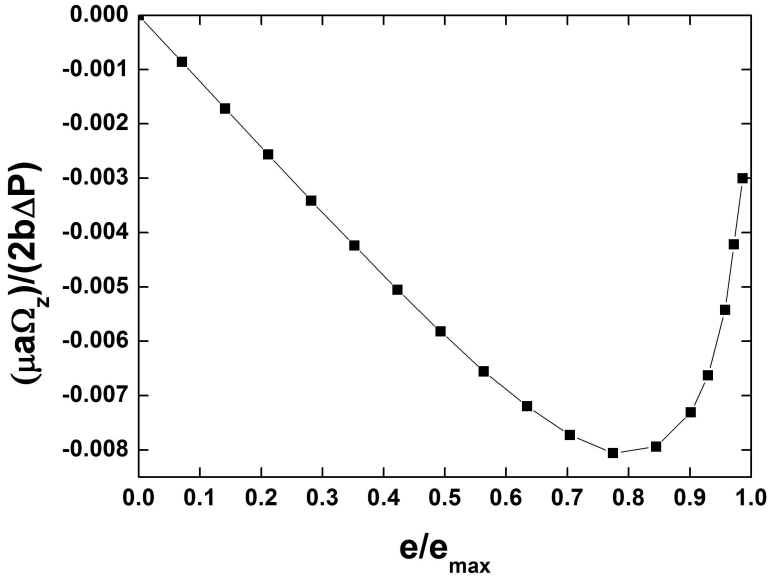

FIG. 5.10 – *Evolution du rapport de la vitesse rotation du cylindre en sédimentation et de la perte de charge en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

$A_0 = -0.0728436$	$A_{16} = 1656.05$
$A_2 = 0.136319$	$A_{18} = -2524.9$
$A_4 = -0.10011$	$A_{20} = 2728.73$
$A_6 = -0.56907$	$A_{22} = -2044.47$
$A_8 = 8.14218$	$A_{24} = 1010.47$
$A_{10} = -56.894$	$A_{26} = -296.412$
$A_{12} = 253.902$	$A_{28} = 39.0968$
$A_{14} = -773.113$	$B = -0.0795135$

TAB. 5.1 – *Coefficients numériques des expressions 5.7 et 5.8*

La vitesse de sédimentation dans le plan de symétrie s'écrit donc :

$$U_x(k,e/e_{max}=0) = (\sum_n A_{2n}k^{2n} + Blnk)U^\star \tag{5.8}$$

Elle est tracée dans la figure 5.11. On y constate logiquement que plus k est grand, plus la vitesse de sédimentation diminue. Elle tend vers 0 pour $k \to 1$ lorsque le cylindre est bloqué par les plans et vers l'infini lorsque $k \to 0$. Dans cette figure, nous avons également tracé la vitesse de sédimentation dans le plan de symétrie issue de l'article de Dvinsky *et al.* [56]. Les deux approches sont en bon accord sauf pour les rapports de confinements les plus faibles comme nous l'avons déjà soulignés.

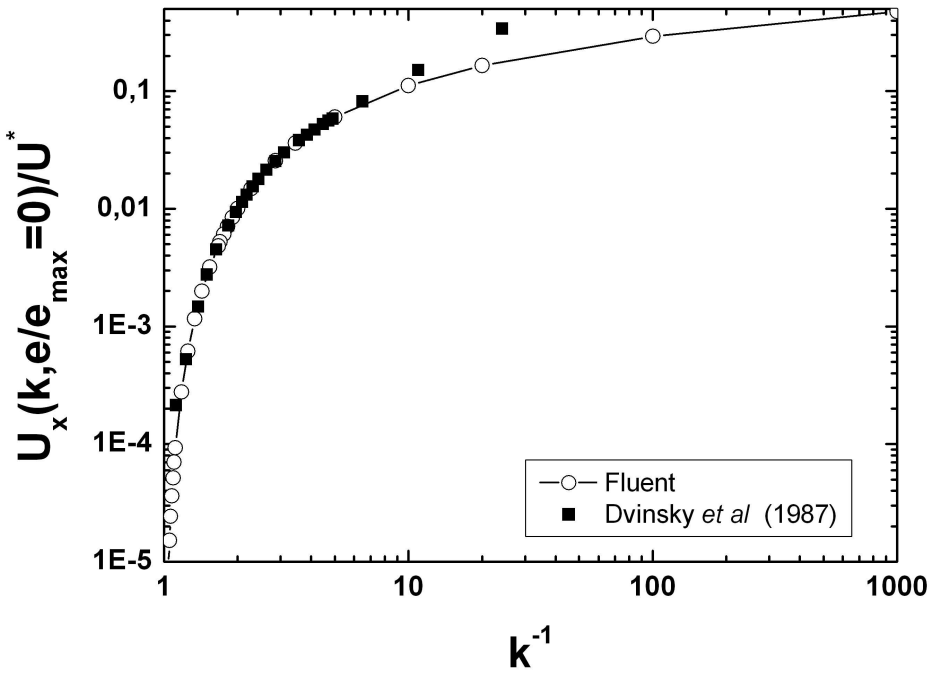

FIG. 5.11 – *Evolution de la vitesse de sédimentation du cylindre en fonction de k pour* $e/e_{max} = 0$

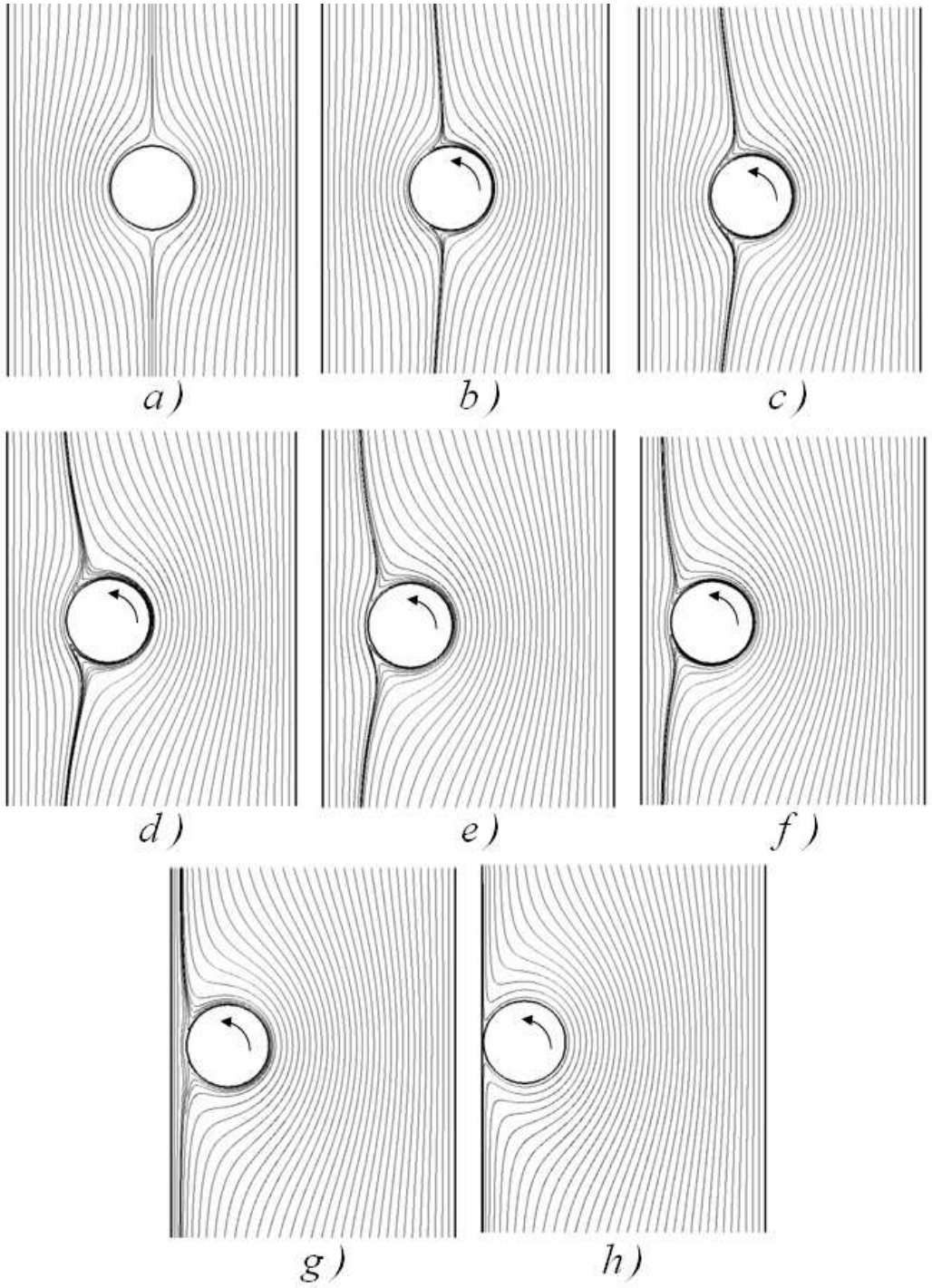

FIG. 5.12 – *Lignes de courant autour d'un cylindre libre en sédimentation pour* $k = 0.29$ *dans un référentiel lié au cylindre pour* $e/e_{max} =$ *: a)* 0 - *b)* 0.141 - *c)* 0.282 - *d)* 0.423 - *e)* 0.563 - *f)* 0.704 - *g)* 0.845 - *h)* 0.986. *L'accélération de la pesanteur est verticale descendante et le cylindre se déplace vers le bas*

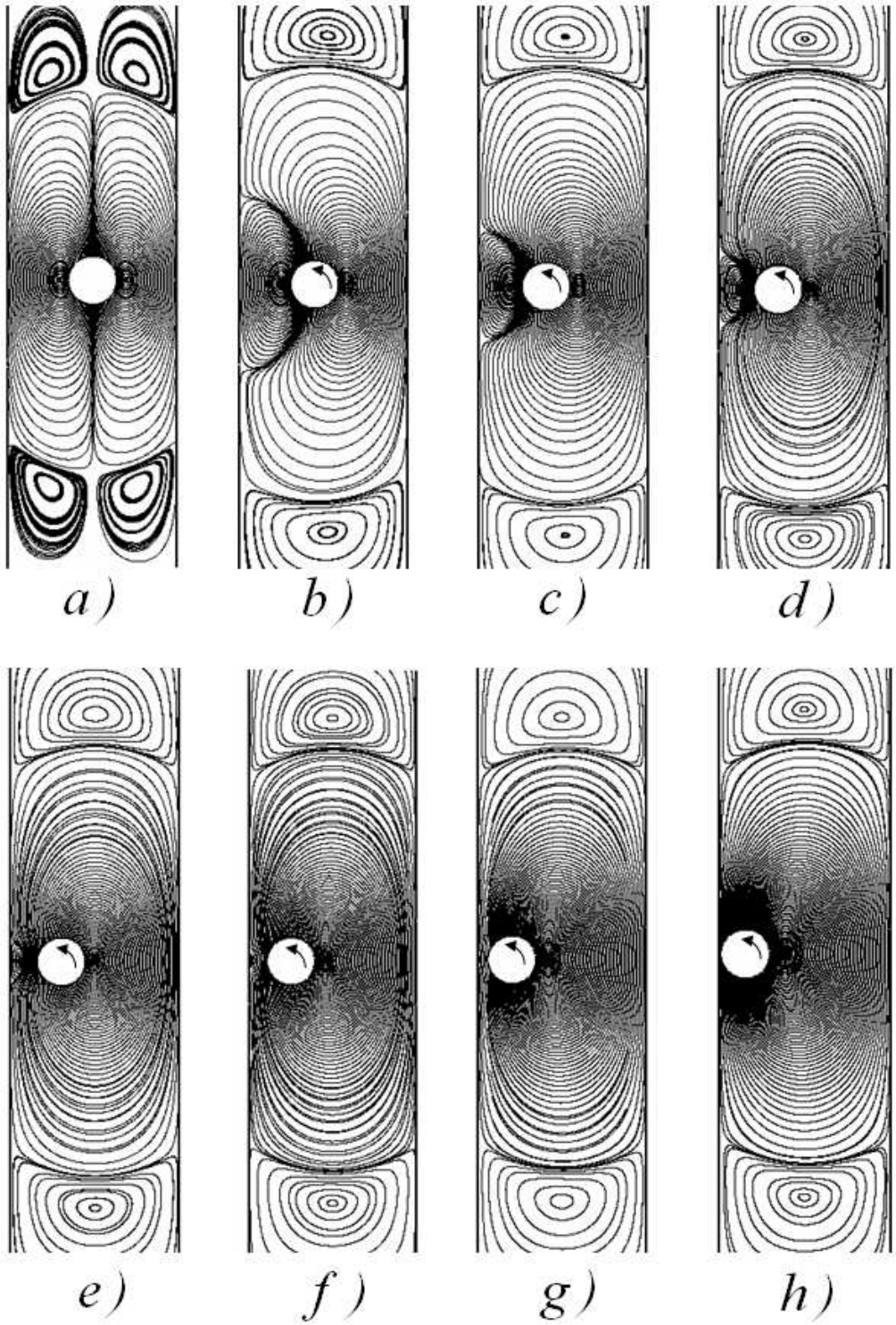

FIG. 5.13 – *Lignes de courant autour d'un cylindre libre en sédimentation pour* $k = 0.29$ *dans un référentiel lié aux plans pour* $e/e_{max} =$ *: a)* 0 - *b)* 0.141 - *c)* 0.282 - *d)* 0.423 - *e)* 0.563 - *f)* 0.704 - *g)* 0.845 - *h)* 0.986. *L'accélération de la pesanteur est verticale descendante et le cylindre se déplace vers le bas*

Pour $k \to 0$, l'obtention de la vitesse de sédimentation pour un cylindre en milieu illimité n'est pas si immédiate que dans le cas de la sphère. On peut considérer le problème en 3 dimensions d'un cylindre de rayon a et de longueur $l >> a$. Il faut donc égaler le poids apparent $\Delta\rho g\pi a^2 l$ avec la force de traînée. Cette dernière peut être obtenue en résolvant l'équation de Stokes, par exemple par la «*théorie des corps élancés*». En utilisant la formule de la traînée 1.20 page 10 de Batchelor [30] :

$$F = 4\pi\mu U_x \varepsilon l(1 - 0.193\varepsilon + 0.215\epsilon^2 + 0.97\varepsilon^3)$$

on obtient pour la vitesse de sédimentation l'expression :

$$U_x = \frac{U^\star}{4\pi\varepsilon(1 - 0.913\varepsilon + 0.215\varepsilon^2 + 0.97\varepsilon^3)}$$

avec $\varepsilon = [ln(l/a)]^{-1}$. Lorsque $l/a \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ et l'on retrouve bien que $U_x \to \infty$ comme nous l'avons déterminé numériquement.

A titre d'exemple, nous avons tracé dans la figure 5.12 les lignes de courant de l'écoulement lorsqu'on se place dans un référentiel lié au cylindre pour les paramètres physiques suivants : $\rho_f = 1000kg.m^{-3}$, $\Delta\rho = 0.1kg.m^{-3}$, $\mu = 1Pa.s$, $a = 1cm$ et $g = 10m.s^{-2}$ donnant la vitesse caractéristique $U^\star = 3.14\,.10^{-4}m.s^{-1}$. Avec ces valeurs, on obtient une vitesse de sédimentation de l'ordre de $U_x \approx 10^{-5}m.s^{-1}$ et une vitesse de rotation $\Omega_z \approx 10^{-4}rad.s^{-1}$ correspondant bien à des nombres de Reynolds très faibles $\rho_f U_x a/\mu \approx 10^{-4}$ et $\rho_f \Omega_z a^2/\mu \approx 10^{-5}$. L'accélération de la pesanteur est dirigée vers le bas. La structure de l'écoulement est semblable à celle obtenue dans le cas d'un cylindre en translation uniforme (voir par exemple la figure 4.5 page 82) car la rotation du cylindre ne modifie l'écoulement que dans une zone de très faible étendue dans l'immédiat voisinage du cylindre. On constate en particulier que les points d'arrêt sur le cylindre, diamétralement opposés dans le plan de symétrie pour $e/e_{max} = 0$, se rapprochent l'un de l'autre du côté du plan le plus proche lorsque l'excentrement augmente. La figure 5.13 représente la même chose mais dans un référentiel lié aux plans parallèles. On y voit clairement le contre-écoulement et les cellules de Stokes de part et d'autre du cylindre.

e/e_{max}	$Err(\%)$	$M_z(N.m)$
0	$3.8\,10^{-3}$	$6.5\,10^{-12}$
0.141	$4.6\,10^{-3}$	$1.4\,10^{-10}$
0.282	$6.8\,10^{-3}$	$1.7\,10^{-10}$
0.423	$5.5\,10^{-2}$	$2.5\,10^{-10}$
0.563	$6.8\,10^{-3}$	$1.8\,10^{-10}$
0.704	$1.4\,10^{-2}$	$7.5\,10^{-10}$
0.845	$4.4\,10^{-2}$	$1.2\,10^{-9}$
0.986	$2.0\,10^{-2}$	$1.9\,10^{-8}$

TAB. 5.2 – *Efforts sur le cylindre libre en sédimentation*

Pour vérifier la justesse ce ces calculs, nous avons déterminé *a posteriori* les efforts subis par le cylindre. Ils sont regroupés dans le tableau 5.2 où la première colonne contient l'excentrement, la deuxième l'erreur relative entre le poids apparent et la force de traînée (cette force doit compenser le poids apparent du cylindre $\Delta\rho g\pi a^2$) et la dernière colonne la valeur du moment M_z. La faiblesse de ces valeurs confirme bien que le cylindre est à l'équilibre et que nos résultats sont cohérents.

5.3.2 Transport du cylindre dans un écoulement de Poiseuille

Ce problème présente un intérêt autant pratique que fondamental. Il concerne en effet tout ce qui a attrait au transport de particules en milieu confiné. Dans une série d'expériences, Segré *et al.* [112–114] ont découvert que lorsqu'on introduit une suspension diluée de particules sphériques de flottabilité neutre dans une canalisation cylindrique de rayon R siège d'un écoulement de Poiseuille, les particules proches de l'axe du tube et celles situées à proximité de sa paroi migraient vers une position d'équilibre, formant un anneau de forte concentration en particules centré sur l'axe du tube et de rayon approximatif $0.6R$. De nombreuses études ont tenté d'expliquer cet effet mais aucune théorie définitive n'existe encore vraiment. Seules de coûteuses études numériques comme celle de Joseph *et al.* [115] qui ont utilisé une méthode *DNS* (Direct Numerical Simulation) peuvent à l'heure actuelle s'attaquer à ce challenge mais avec encore un nombre limité de particules. Sans résoudre complètement ce problème très complexe, la technique de la matrice de résistance permet néanmoins d'obtenir relativement simplement certains des résultats obtenus par ces lourdes méthodes numériques, en particulier les vitesses de glissement. En effet, imaginons qu'une particule cylindrique, de flottabilité neutre, soit libérée dans un écoulement de Poiseuille plan de vitesse moyenne $\overline{U}$. A l'équilibre, cette particule qui ne subit ni force ni couple, aura une vitesse de translation U_x et une vitesse de rotation Ω_z. Dans le formalisme de la matrice de résistance, le système se ramène alors à :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta P 2b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{14} \\ A_{31} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ \Omega_z a \\ \overline{U} \end{bmatrix}$$

L'inversion de ce système conduit alors pour la vitesse de translation à l'expression :

$$U_x = \left(\frac{A_{13}A_{34} - A_{14}A_{33}}{A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}}\right) \overline{U} \tag{5.9}$$

La vitesse de rotation du cylindre s'écrit quant à elle :

$$\Omega_z = \left(\frac{A_{31}A_{14} - A_{11}A_{34}}{A_{11}A_{33} - A_{31}A_{13}}\right) \frac{\overline{U}}{a} \tag{5.10}$$

Enfin, la différence de pressions[5] a pour expression :

5. Rappelons que ΔP est ici la perte de charge due uniquement à la présence de la particule cylindrique. La perte de charge totale pour une vitesse $\overline{U}$ donnée est obtenue en ajoutant à ce ΔP la chute de pressions classique d'un écoulement plan de Poiseuille

$$\Delta P = \{\frac{A_{41}(A_{13}A_{34} - A_{14}A_{33}) + A_{43}(A_{31}A_{14} - A_{11}A_{34}) + A_{44}(A_{11}A_{33} - A_{31}A_{13})}{A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31}}\}\frac{\mu\overline{U}}{2b} \tag{5.11}$$

La figure 5.14 représente la vitesse de déplacement U_x donnée par la formule 5.9 en fonction de l'excentrement. Sur cette même figure, nous avons également représenté le profil de Poiseuille plan. On constate que le cylindre se déplace toujours moins vite que la vitesse du fluide non-perturbé et ce d'autant plus que le cylindre est proche de la paroi. Le lieu où le cylindre sera transporté le plus rapidement est donc le plan de symétrie. Une étude pour $e/e_{max} = 0$ montre de plus que le cylindre sera d'autant plus rapide que le rapport de confinement est faible. Ceci est clairement visible sur la figure 5.15 où l'on a tracé l'évolution de U_x en fonction de k^{-1} pour le cylindre se déplaçant dans le plan de symétrie. Lorsque $k^{-1} \to \infty$ ce qui veut dire que le cylindre est de moins en moins confiné, sa vitesse de transport U_x tend vers la vitesse U_{max}, c'est-à-dire la vitesse locale du fluide non-perturbé. Dans la limite opposée $k^{-1} \to 1$ ce qui signifie que le cylindre occupe tout l'espace entre les plans, sa vitesse de translation tend vers $2U_{max}/3 = \overline{U}$ car il se comporte comme un bouchon qui avance à la vitesse moyenne de l'écoulement. L'étude du cylindre centré effectuée dans la partie précédente nous permet au passage de donner une expression à la vitesse de transport dans le plan de symétrie. Dans ce cas en effet, les coefficients A_{13}, A_{31}, A_{34} et A_{43} sont tous nuls si bien que la vitesse dans le plan de symétrie se réduit à :

$$U_x(k,e/e_{max} = 0) = -\frac{A_{14}}{A_{11}}\overline{U} = -\frac{\frac{3}{2}\Lambda^{Pois}_{Stokes}}{\Lambda^{Trans}_{Stokes}}\overline{U} \tag{5.12}$$

En utilisant l'expression 3.7 page 67, on trouve finalement :

$$U_x(k,e/e_{max} = 0) = \frac{3\,\overline{U}}{2 + k^2} = \frac{U_{max}}{1 + k^2/2} \tag{5.13}$$

On peut comparer ce résultat à celui obtenu à partir du travail analytique de Faxén [51]. S'il n'a pas directement résolu ce problème, celui-ci a en effet calculé les expressions des forces de traînée pour un cylindre dans l'axe lorsqu'il est fixe dans un écoulement de Poiseuille (formule 1.44 page 23) et se déplaçant à vitesse uniforme (formule 1.31 page 19). A partir ce ces expressions, on obtient alors l'expression de la vitesse de transport en écoulement de Poiseuille suivante[6] :

$$U_x(k,e/e_{max} = 0) = \{\frac{-0.9156 + 1.7243k^2 - 1.7301k^4 + 2.4056k^6 - 4.5913k^5 - lnk}{A_0 - (1 + 0.5k^2 + A_4k^4 + \ldots + A_8k^8)lnk + B_2k^2 + \ldots + B_8k^8}\}U_{max} \tag{5.14}$$

où les coefficients A_n et B_n sont donnés dans le tableau 1.3 page 23. On ne peut pas attendre de l'expression 5.14 qu'elle soit valable au-delà de $k = 0.4$ puisque chacune

6. Pour un problème de mise en page, les coefficients numériques au numérateur de cette expression ont été tronqués. On se référera à l'expression 1.31 page 19 pour plus de précision

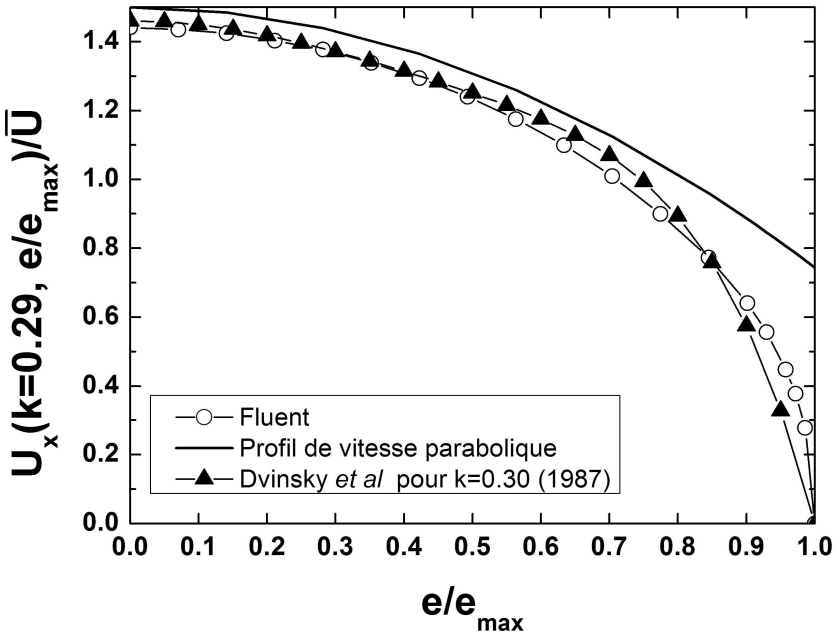

FIG. 5.14 – *Evolution de la vitesse de translation du cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

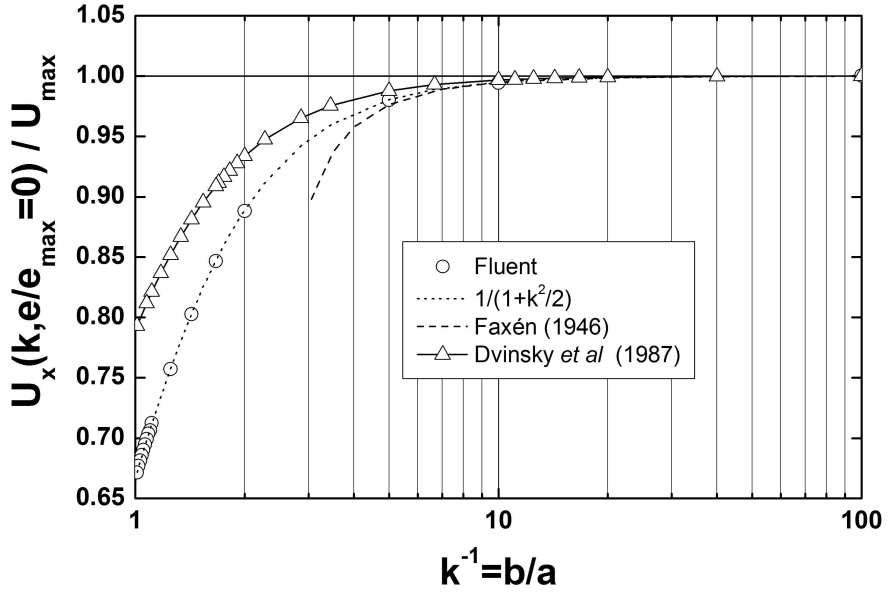

FIG. 5.15 – *Evolution de la vitesse de translation du cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de* k *pour* $e/e_{max} = 0$

des expressions qui la composent cesse d'être correcte pour k supérieur à cette limite. Ceci est confirmée dans la figure 5.15 où nos calculs et ceux de Faxén [51] divergent même plus tôt pour $k^{-1} < 5$ c'est-à-dire pour $k > 0.2$. On peut enfin comparer nos résultats avec ceux obtenus numériquement par Dvinsky *et al.* [66]. Ils ont proposé pour la vitesse de transport l'expression suivante, obtenue par une régression non-linéaire de leurs résultats :

$$U_x(k,e/e_{max}=0) = \frac{U_{max}}{1+(k/2)^{1.91}} \tag{5.15}$$

Comparée à l'expression 5.13, la formule 5.15 présente des différences comme cela est visible dans la figure 5.15. Si Dvinsky *et al.* [66] trouvent un exposant proche du nôtre (1.91 contre 2) et si les deux expressions ont la même limite lorsque $k \to 0$ elles diffèrent par contre sensiblement lorsque $k \to 1$. L'expression 5.15 donne alors la limite $0.793U_{max}$ qui ne correspond à aucune valeur particulière et l'expression 5.13 tend vers $0.667U_{max} = 2U_{max}/3 = \overline{U}$ qui semble plus correcte physiquement. De plus, les développements limités lorsque $k \to 0$ des expressions 5.14 de Faxén [51] et 5.13 déduite de nos calculs donnent la même forme $1 - k^2/2$ pour U_x/U_{max} alors que l'expression 5.15 de Dvinsky *et al.* [66] conduit à $1 - (k/2)^{1.91}$. Dvinsky *et al.* [66] ont également proposé une expression pour la vitesse de transport en dehors de l'axe sous la forme :

$$\frac{U_x(k,e/e_{max})}{U_x(k,e/e_{max}=0)} = 1 - \sum_n a_n(k)(e/e_{max})^{2n}$$

S'ils ne donnent pas la valeur des coefficients a_n pour $k = 0.29$, ils la donnent pour le rapport $k = 0.30$ très voisin. En utilisant leur expression 5.15 pour la vitesse dans le plan de symétrie, on obtient après réduction l'expression :

$$\frac{U_x(k=0.30,e/e_{max})}{\overline{U}} = 1.461[1 - 0.7712(e/e_{max})^2 + 1.121(e/e_{max})^4 - 1.35(e/e_{max})^6] \tag{5.16}$$

Cette expression a été tracée dans la figure 5.14 où l'on constate une bonne concordance pour $e/e_{max} < 0.5$ et une légère différence lorsque $e/e_{max} \to 1$, le profil de Dvinsky *et al.* [66] tendant plus rapidement que le nôtre vers 0 lorsque $e/e_{max} \to 1$. La figure 5.16 représente l'évolution de la vitesse de rotation du cylindre avec l'excentrement calculée à partir de la formule 5.10. Elle est nulle au centre puis augmente, passe pas un maximum pour $e/e_{max} \approx 0.8$ et chute finalement au voisinage du plan. Etant positive, cela signifie que le cylindre, lorsqu'il se rapproche du plan supérieur, tourne dans le sens qu'il aurait s'il roulait sur le plan en allant de la gauche vers la droite, c'est-à-dire dans le sens trigonométrique. Contrairement au problème précédent de la sédimentation, il n'y a pas de rotation «anormale» dans cette situation. Sur cette même figure, nous avons tracé l'évolution de la vorticité d'une particule fluide dans un profil de Poiseuille :

$$\omega = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{u}|$$

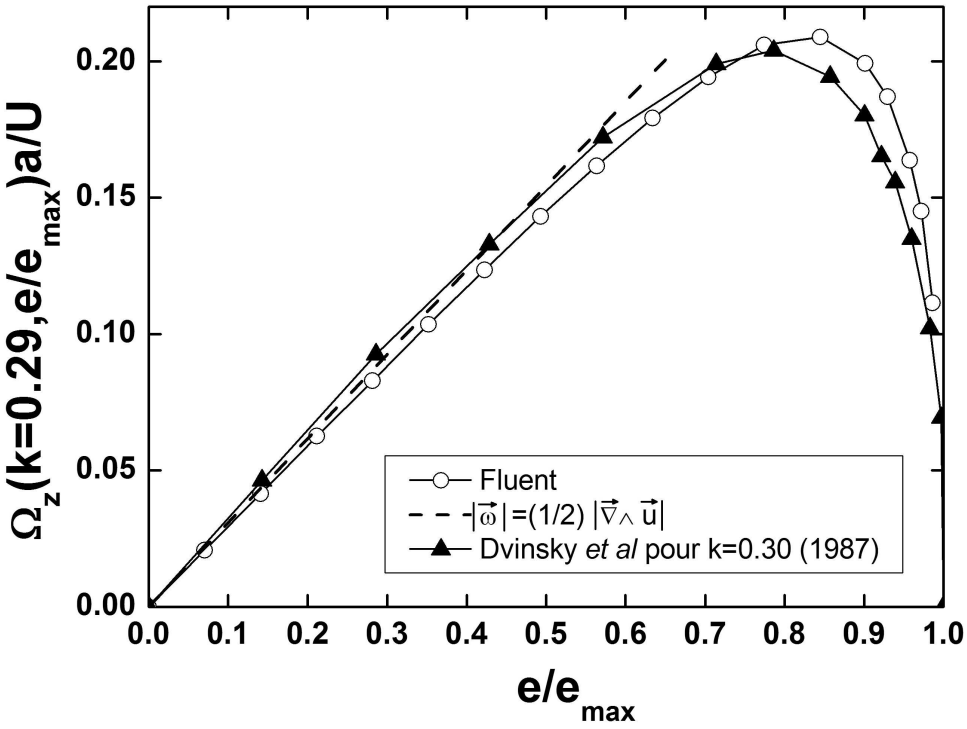

FIG. 5.16 – *Evolution de la vitesse de rotation du cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

avec $u_x(y) = U_{max}[1 - (y/b)^2]$. On calcule alors aisément :

$$\frac{\omega a}{\overline{U}} = \frac{3}{2}(1-k)k(e/e_{max})$$

On constate que la vitesse de rotation et la vorticité d'une particule de fluide coïncident bien aux faibles excentrements et s'écartent énormément à proximité de la paroi. Dvinsky *et al.* [66] ont également déterminé la vitesse de rotation pour un rapport de confinement très proche du nôtre ($k = 0.30$). Nous l'avons tracé dans la figure 5.16 où l'on constate que les deux approches sont qualitativement en bon accord.

La figure 5.17 montre les lignes de courant autour du cylindre libre convecté dans un écoulement de Poiseuille à divers excentrements dans un référentiel lié au cylindre. On remarque en particulier sur cette figure la présence de zones de recirculation qui proviennent des mouvements du cylindre en translation (vitesse U_x) et en rotation (vitesse Ω_z).

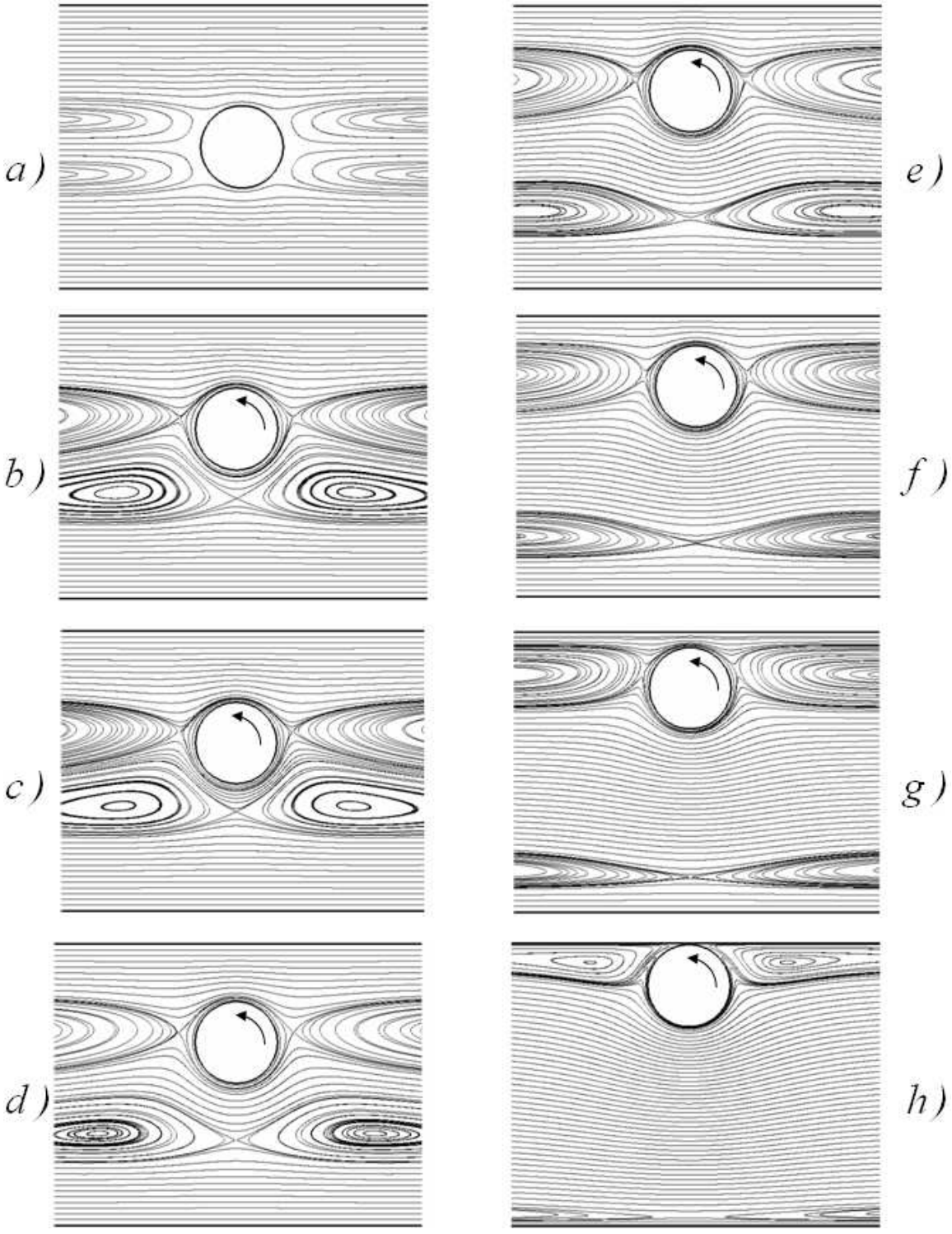

FIG. 5.17 – *Lignes de courant autour d'un cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan pour* $k = 0.29$ *dans un référentiel lié au cylindre pour* $e/e_{max} =$ *a)* 0 - *b)* 0.141 - *c)* 0.282 - *d)* 0.423 - *e)* 0.563 - *f)* 0.704 - *g)* 0.845 - *h)* 0.986. *Le fluide se déplace de la gauche vers la droite*

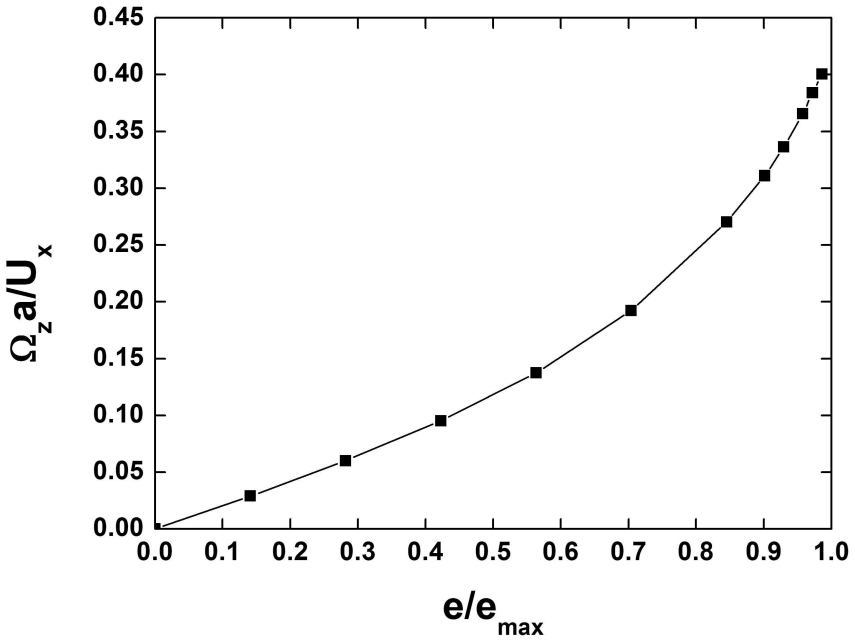

FIG. 5.18 – *Rapport des vitesses de rotation et de translation pour un cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan pour* $k = 0.29$

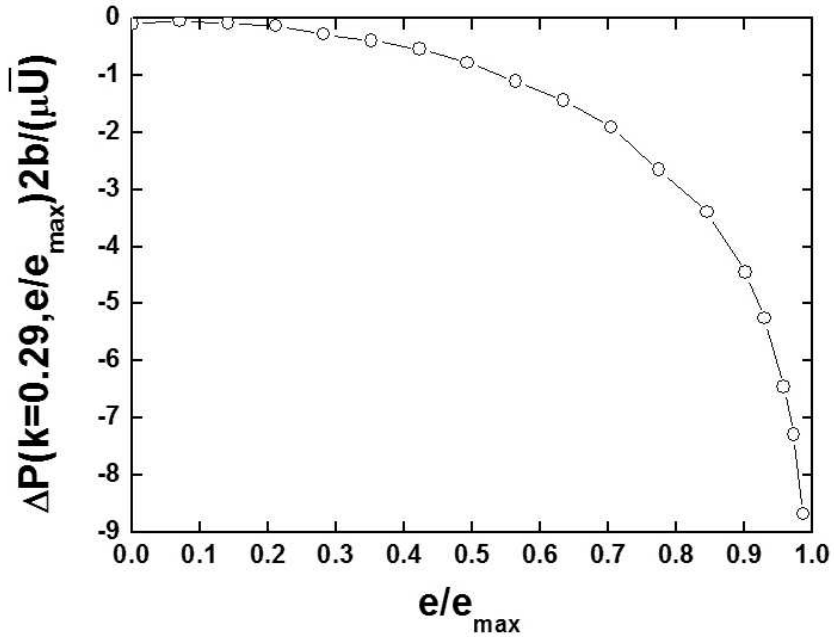

FIG. 5.19 – *Evolution de la perte de charge engendrée par un cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de l'excentrement pour* $k = 0.29$

Si l'on calcule les efforts sur le cylindre induits par ces écoulements, on trouve que la force de traînée $F_x^{Pois}/(\mu\overline{U})$ et que le moment $M_z^{Pois}/(\mu\overline{U}a)$ sont de l'ordre de 10^{-3}. Si l'on compare ces valeurs à celle d'un cylindre fixe en écoulement de Poiseuille (voir les coefficients A_{14} et A_{34} de la figure 5.3 page 119 par exemple), on trouve entre elles une différence de l'ordre de 10^3 à 10^4. On peut donc légitimement considérer qu'on a $F_x \approx 0$ et $M_z \approx 0$ sur le cylindre et que nos calculs sont par conséquent valides. La figure 5.18 montre le rapport de la vitesse $\Omega_z a$ du cylindre et de sa vitesse translation U_x en fonction de l'excentrement. Lorsque le cylindre se rapproche du plan, on constate que le rapport des vitesses tend vers une valeur de l'ordre de 0.4. Cela signifie que le cylindre doit avoir lorsque $e/e_{max} \to 1$ un mouvement de roulement avec glissement puisque la vitesse $\Omega_z a$ est différente de la vitesse de translation U_x.

Pour conclure ce problème, nous montrons dans la figure 5.19 comment varie la perte de charge ΔP (perte de charge sans celle induite par l'écoulement de Poiseuille) donnée par l'expression 5.11 induite par la présence du cylindre en fonction de l'excentrement. Tout comme les vitesses de translation et de rotation, elle est minimale, en valeur absolue, dans le plan de symétrie puis augmente, toujours en valeur absolue, lorsque le cylindre se déplace à proximité d'un plan.

5.4 Prise en compte de la force de portance

Dans la section précédente, nous avons négligé la portance F_y. Cette force est en effet d'origine purement inertielle puisque la linéarité de l'équation de Stokes conduit à sa nullité. Le traitement que nous avons effectué jusqu'à présent est par conséquent la première approximation d'une solution plus générale prenant en compte l'inertie du problème. On peut en effet écrire le développent suivant :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z/a \\ \Delta P 2b \end{bmatrix} = \mu\{[M_0] + Re\,[M_1] + Re^2\,[M_2] + \ldots\} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ \Omega_z a \\ \bar{U} \end{bmatrix}$$

où Re est le nombre de Reynolds. M_0 est la matrice de résistance construite à partir de celle que nous venons de caractériser dans la section précédente et dont la symétrie est la signature de la linéarité (donc de l'absence d'inertie) du problème. Les matrices M_1, M_2, ... qui vont permettre de prendre en considération l'inertie ne sont quant à elles pas nécessairement symétriques. En nous limitant à une situation faiblement inertielle, nous n'allons conserver que les deux premiers termes de ce développement. Nous allons tout d'abord expliciter les matrices M_0 et M_1 puis utiliser ce nouveau développement pour compléter le problème de la particule cylindrique en situation de sédimentation et celui de la particule convectée dans un écoulement de Poiseuille.

5.4.1 Ecriture des matrices M_0 et M_1

La matrice M_0 est basée sur celle que nous venons d'étudier dans la section 5.2. On a écrit en effet :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z/a \\ \Delta P2b \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ \Omega_z a \\ \overline{U} \end{bmatrix}$$

Pour des raisons de symétrie, on doit annuler tous les coefficients A_{i2} et A_{2j} excepté le coefficient diagonal A_{22}. La matrice M_0 a donc la forme suivante :

$$M_0 = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}$$

Le coefficient A_{22} est quant à lui obtenu en faisant se déplacer le cylindre perpendiculairement aux parois parallèles. Les autres coefficients sont ceux déjà obtenus et qu'on peut voir dans la figure 5.3 page 119.

La matrice M_1 s'écrit dans le cas le plus général :

$$M_1 = \begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} & A'_{14} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} & A'_{24} \\ A'_{31} & A'_{32} & A'_{33} & A'_{34} \\ A'_{41} & A'_{42} & A'_{43} & A'_{44} \end{bmatrix}$$

En se limitant à une faible inertie ($Re \approx 1$), les seuls coefficients non nuls sont :

- A'_{21} qui correspond à une force de portance F_y engendrée par une translation U_x du cylindre parallèlement aux plans
- A'_{23} qui correspond à une force de portance F_y induite par une rotation du cylindre à la vitesse Ω_z
- A'_{24} qui correspond à une force de portance F_y subie par le cylindre dans un écoulement de Poiseuille

Les autres coefficients sont nuls encore une fois pour des raisons de symétrie. Les coefficients A'_{2i} doivent en outre être indépendants du nombre de Reynolds comme nous le vérifierons par la suite. Dans cette deuxième approximation, on obtient donc le système :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z/a \\ \Delta P2b \end{bmatrix} = \mu \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}}_{M_0} + Re \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A'_{21} & 0 & A'_{23} & A'_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_1} \right\} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ \Omega_z a \\ \overline{U} \end{bmatrix}$$

En notant $A_{21} = ReA'_{21}$, $A_{23} = ReA'_{23}$ et $A_{24} = ReA'_{24}$, il faut donc résoudre :

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z/a \\ \Delta P 2b \end{bmatrix} = \mu \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & 0 & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} U_x \\ U_y \\ \Omega_z a \\ \overline{U} \end{bmatrix}$$

dont il reste les 4 coefficients A_{21}, A_{22}, A_{23} et A_{24} à déterminer. Ils ont pour expression :

$$A_{21} = \frac{F_y^{Trans}}{\mu U_x}$$

$$A_{22} = \frac{F_y^{Trans}}{\mu U_y}$$

$$A_{23} = \frac{F_y^{Rot}}{\mu \Omega_z a}$$

$$A_{24} = \frac{F_y^{Pois}}{\mu \overline{U}}$$

Hormis A_{22}, ces coefficients peuvent être déterminés grâce aux simulations que nous avons effectuées précédemment. La figure 5.20 montre comment varie le coefficient A_{21} en fonction de e/e_{max}. On constate que la force de portance est toujours négative, ce qui signifie que lorsque le cylindre s'approche d'un plan, il ressent une force répulsive c'est-à-dire dirigée vers le plan de symétrie[7]. Ce résultat est cohérent avec les observations de Feng *et al.* [62, 111]. Sur la figure 5.21, nous avons représenté la force de portance que subit le cylindre lorsqu'il est en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse Ω_z. L'évolution est assez surprenante puisque la portance change de signe lorsque le cylindre se rapproche d'un plan. Près de l'axe, il ressent une force attractive qui s'annule pour $e/e_{max} \approx 0.65$. Au-delà, la portance est répulsive. La figure 5.22 montre enfin comment varie le coefficient A_{24} avec l'excentrement. On constate encore cette fois que la force est répulsive et toujours dirigée vers le plan de symétrie. Ces trois coefficients sont évidemment identiquement nuls pour $e/e_{max} = 0$ pour des raisons de symétrie. Nous avons également vérifié que les coefficients $A'_{2i} = A_{2i}/Re$ ne dépendent pas du nombre de Reynolds. Cela est clairement montré par exemple dans la figure 5.23 où l'on a tracé A'_{24} pour $Re = 0.1$ et $Re = 0.01$ et où l'on observe la complète superposition des résultats. Une remarque analogue peut être faite pour les coefficients A'_{21} et A'_{23}. Ceci justifie parfaitement la validité de notre développement au moins tant que $Re \leq 0.1$.

7. Le signe de A_{21} est tributaire de la position du cylindre par rapport au plan de symétrie : la force de portance étant toujours dirigée vers ce plan, elle est négative dans le demi-plan supérieur (ce qui correspond à notre cas) et positive dans le demi-plan inférieur. On peut faire la même remarque en ce qui concerne les coefficients A_{23} et A_{24}. Le signe de A_{2i} avec $i \neq 2$ est par contre indépendant du sens de rotation ou de translation du cylindre. Le coefficient A_{22} est quant à lui toujours négatif

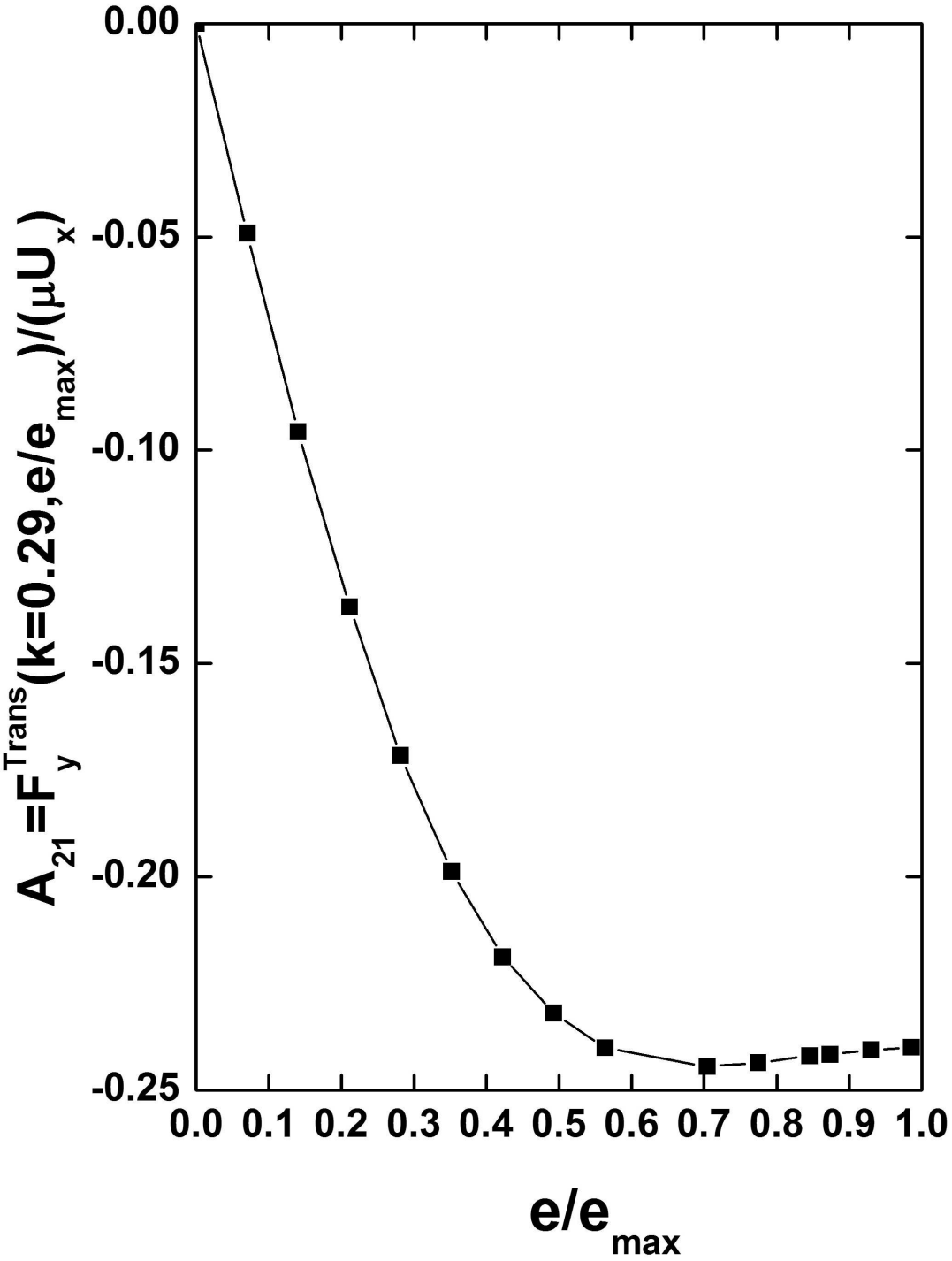

FIG. 5.20 – *Evolution du coefficient* A_{21} *en fonction de* e/e_{max} *pour* $k = 0.29$ *et* $Re = 0.1$

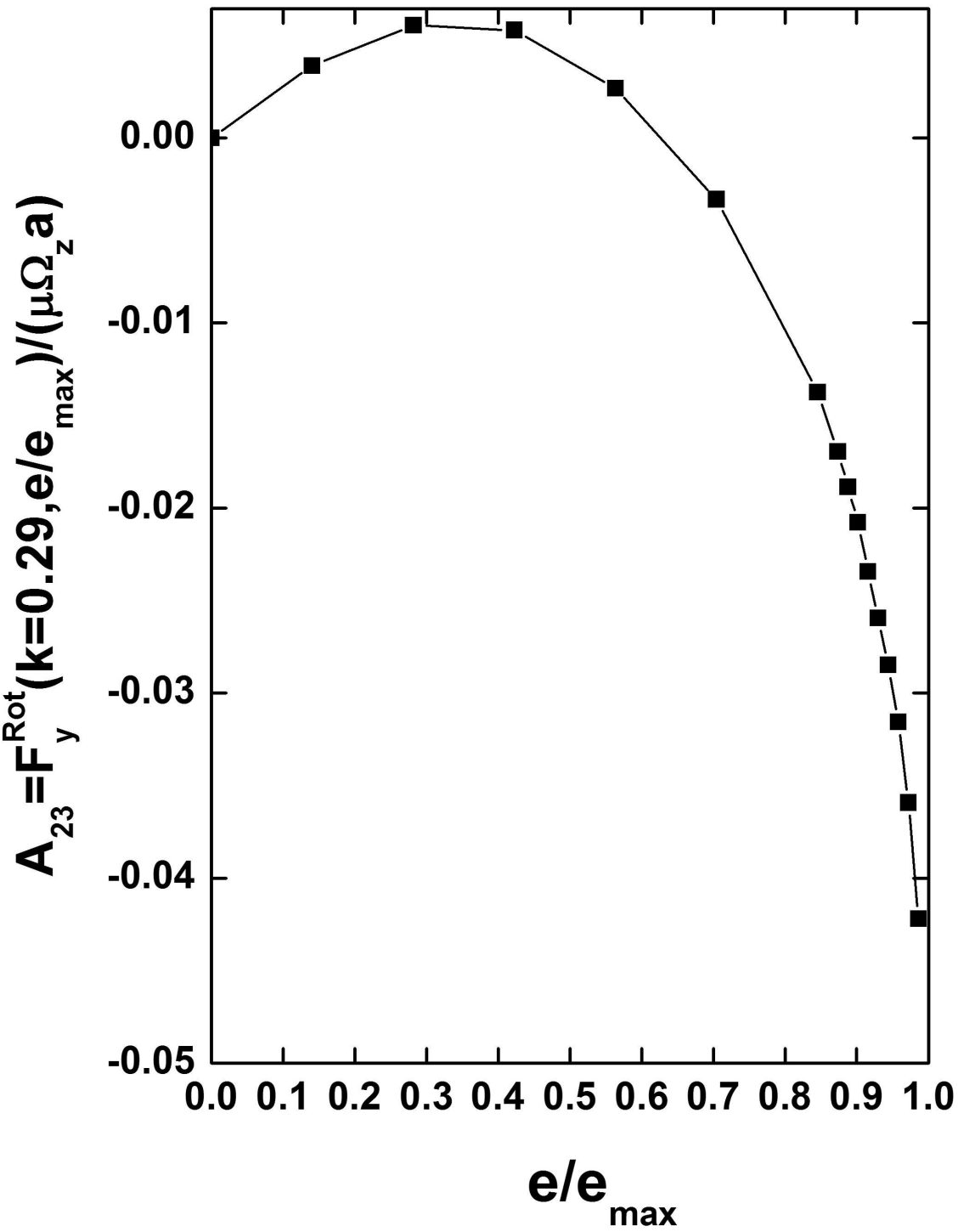

FIG. 5.21 – *Evolution du coefficient A_{23} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$*

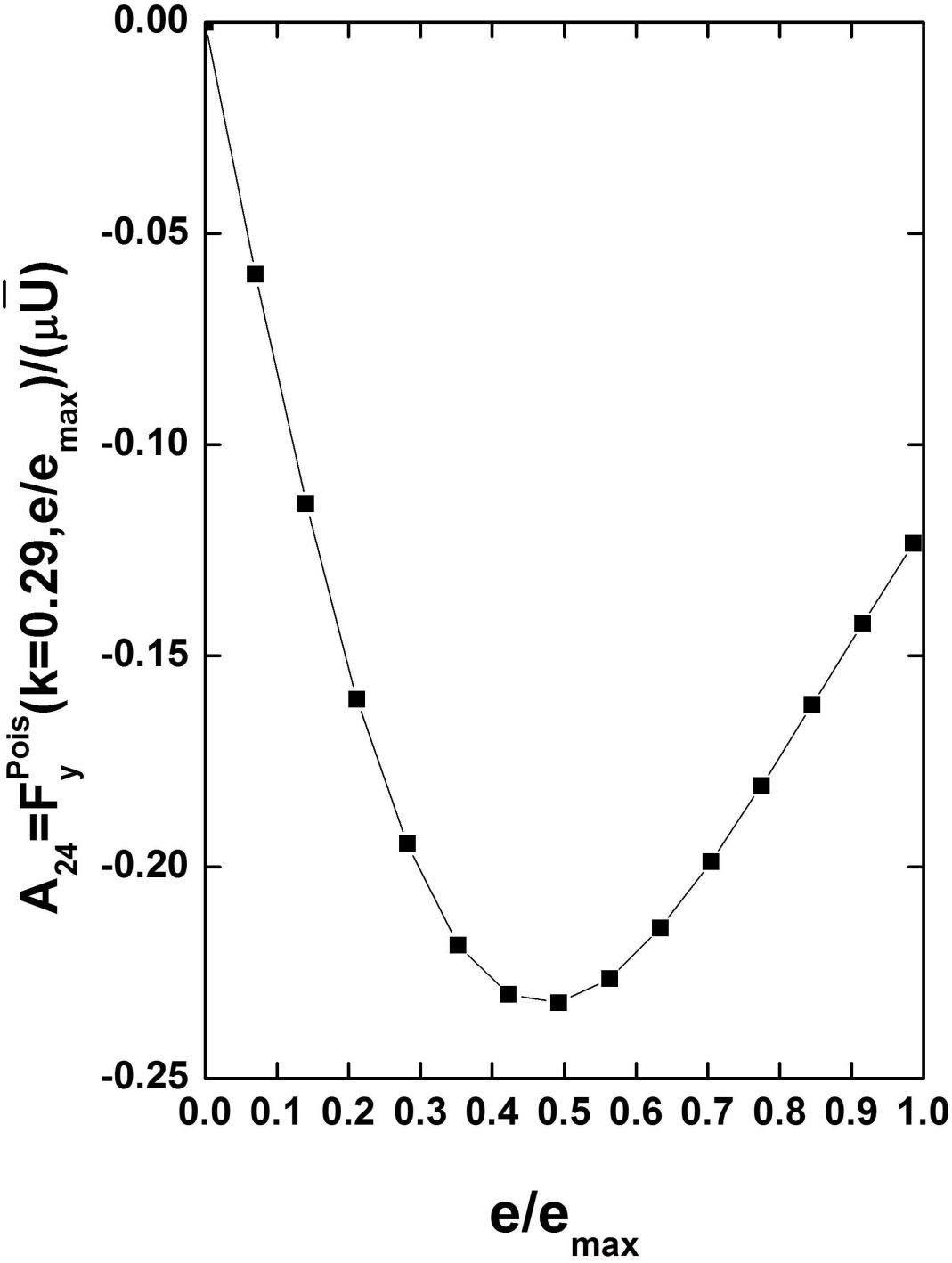

FIG. 5.22 – *Evolution du coefficient A_{24} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$*

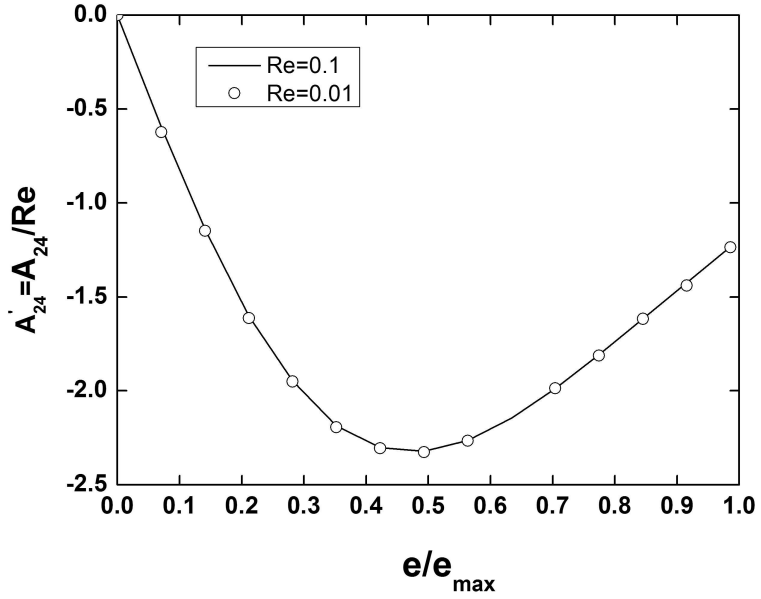

FIG. 5.23 – *Evolution du coefficient A'_{24} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$*

Le coefficient A_{22} demande un traitement spécial puisqu'il s'obtient en faisant se déplacer le cylindre perpendiculairement aux plans. Le problème est donc instationnaire géométriquement. Il a été résolu par Roussel [116] dans le cadre du Master qu'il a effectué dans notre laboratoire. Pour cela, il faut utiliser une technique de maillage déformable implémentée sous Fluent. L'évolution de ce coefficient est montrée sur la figure 5.24. Cette force, lorsque le cylindre se rapproche d'un plan, est toujours répulsive et évolue de façon monotone avec l'excentrement. Elle diverge très rapidement à proximité d'un plan. On peut comparer son comportement dans le voisinage immédiat d'un plan avec un calcul de lubrification effectué par Jeffrey *et al.* [45] dans le cas d'un cylindre progressant à vitesse uniforme perpendiculairement à un seul plan. Ils ont obtenu l'expression :

$$F_y^{Trans}(\epsilon) = \frac{-4\pi\mu U_y}{ln[1+\epsilon+\sqrt{(1+\epsilon)^2-1}] - [(1+\epsilon)^2-1]/(1+\epsilon)} \tag{5.17}$$

où $\epsilon = h^-/a$ est la distance minimale entre le cylindre et le plan le plus proche, normalisée par le rayon du cylindre. Le comportement asymptotique en régime de lubrification calculé par Mathematica de l'expression 5.17 donne :

$$\lim_{\epsilon \to 0} |\frac{F_y^{Trans}(\epsilon)}{\mu U_y}| = \frac{3\pi\sqrt{2}}{\epsilon^{3/2}} \tag{5.18}$$

Dans le graphe 5.25, nous comparons nos résultats avec l'expression 5.18. On constate que les deux approches concordent parfaitement dans la limite $\epsilon < 0.1$. La différence lorsque $\epsilon > 0.1$ est à mettre au crédit de l'influence du plan supérieur (celui duquel s'éloigne le cylindre), plan qui n'existe pas dans le travail de Jeffrey *et al.* [45].

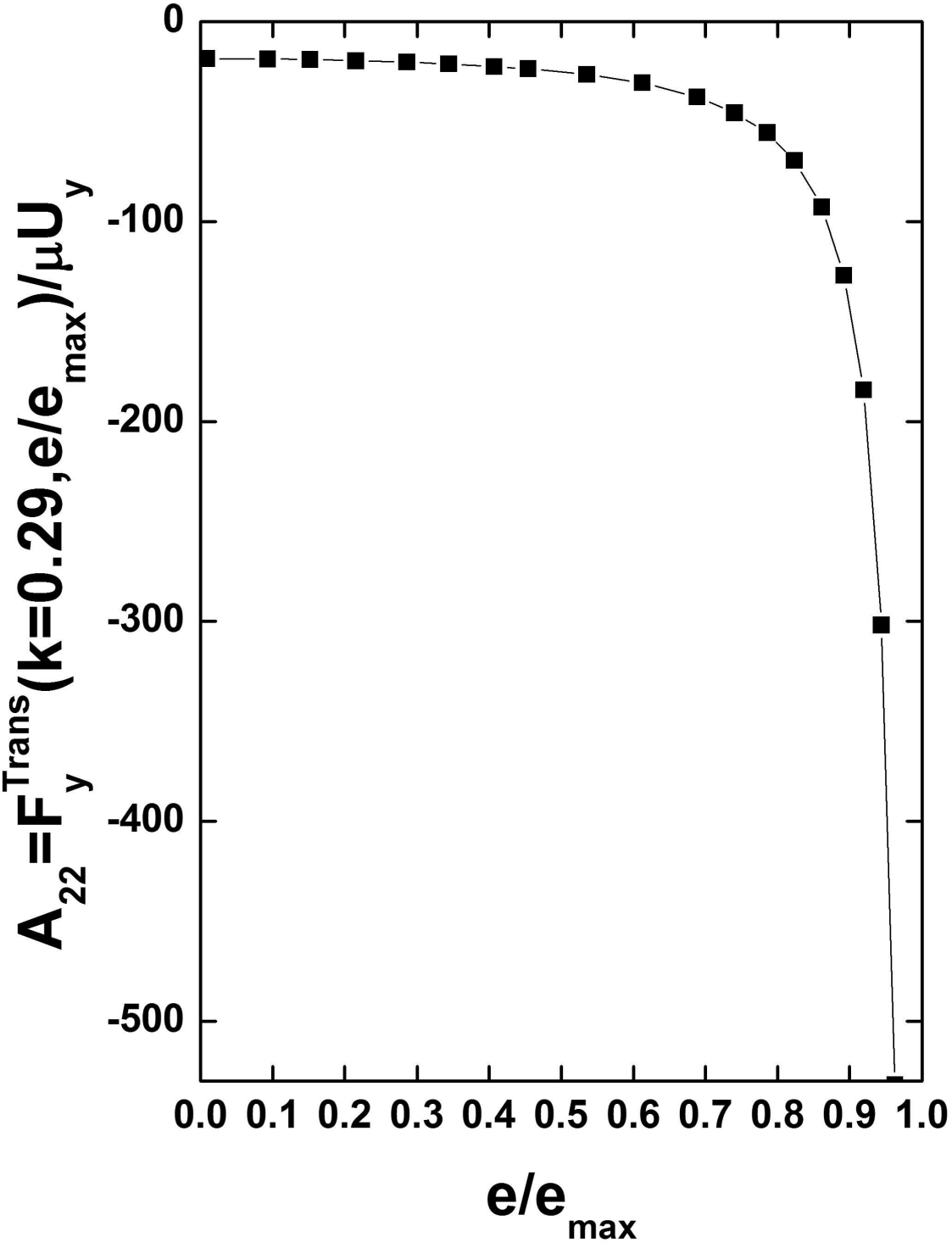

FIG. 5.24 – *Evolution du coefficient A_{22} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$*

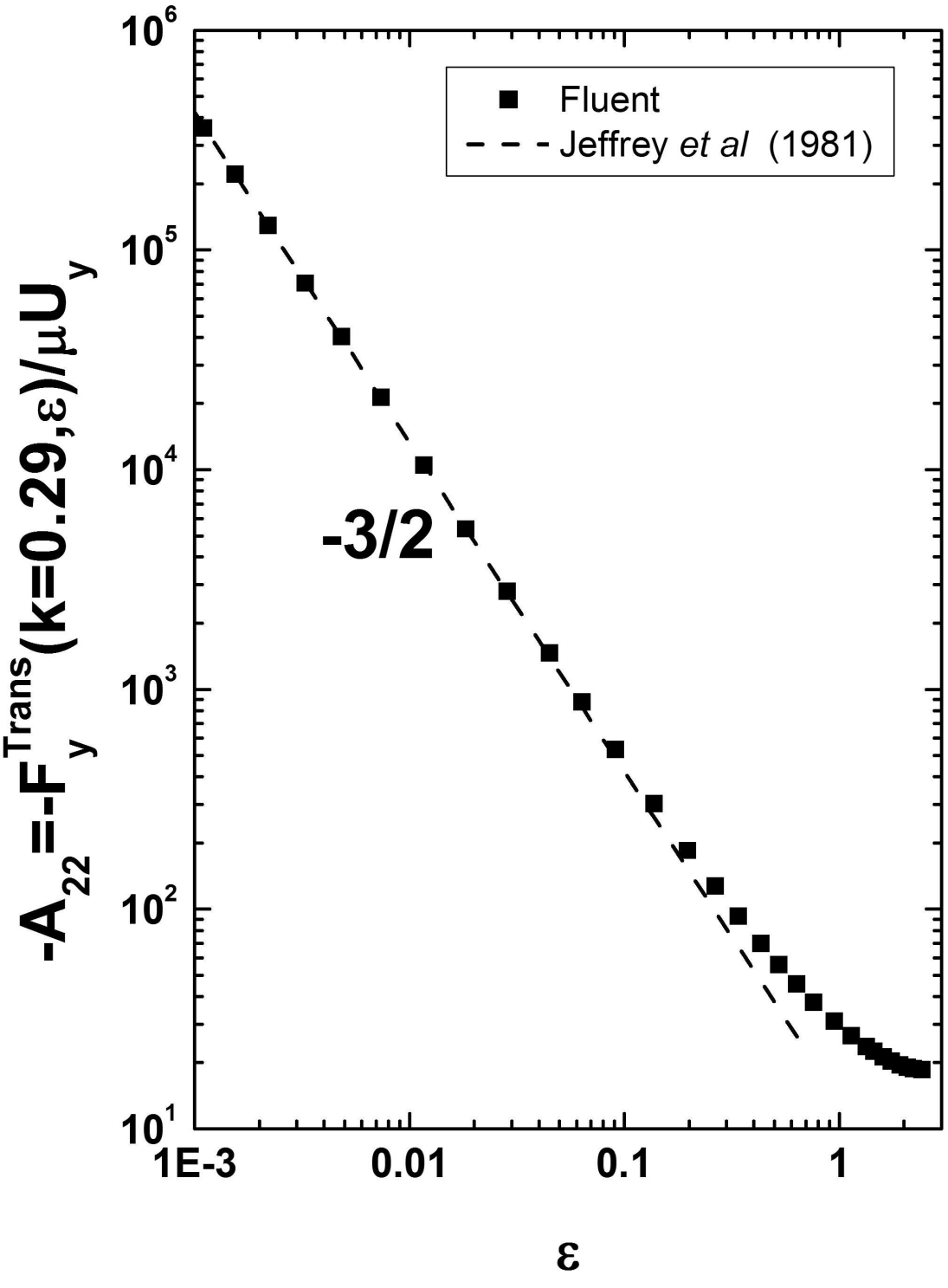

FIG. 5.25 – *Evolution du coefficient A_{22} en fonction de ϵ pour $k = 0.29$*

La figure 5.26 montre comment évolue le coefficient A_{22} pour différentes valeurs du rapport de confinement k. Cette figure met en évidence l'influence du plan supérieur puisque plus k est faible, plus le le comportement de Jeffrey *et al.* [45] donné par l'expression 5.17 est atteint rapidement, c'est-à-dire pour une valeur de ϵ plus grande.

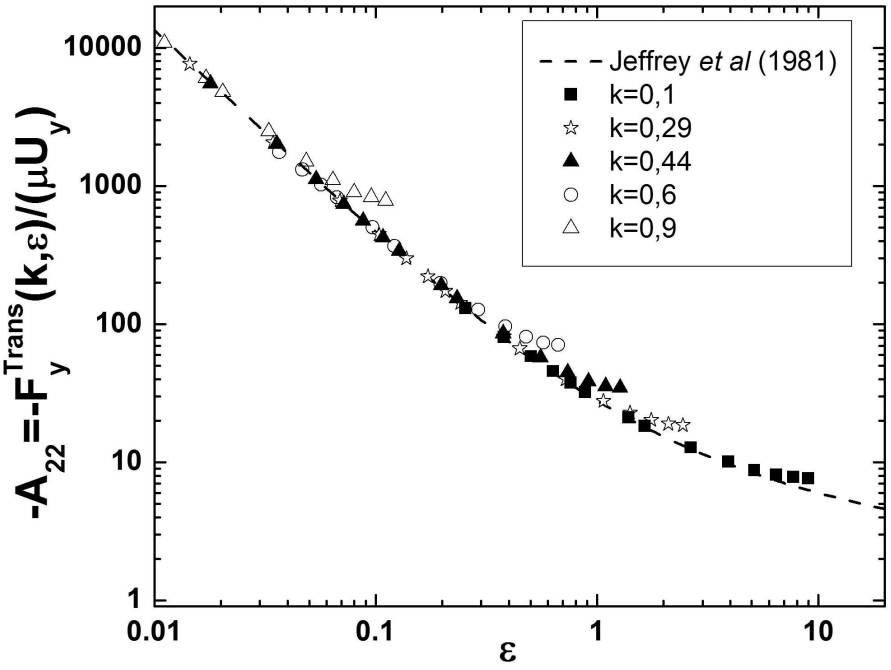

FIG. 5.26 – *Evolution du coefficient A_{22} en fonction de ϵ pour différentes valeurs de k*

5.4.2 Problème de la sédimentation du cylindre

L'inversion de la matrice dans la cas du cylindre en sédimentation permet d'obtenir la vitesse de déplacement transversale U_y :

$$U_y = Re \frac{A'_{21}A_{33} - A'_{23}A_{31}}{A_{22}(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31})} U^\star$$

Les vitesses U_x, Ω_z ainsi que la perte de charge ΔP restent inchangées par rapport au cas précédent où l'on ne tenait pas compte de la force de portance. La figure 5.27 montre comment évolue avec l'excentrement la vitesse transversale U_y normalisée par la vitesse $U^\star = \Delta\rho g\pi a^2/\mu$ pour $Re = 0.1$. Elle est négative donc toujours dirigée vers le plan de symétrie. En module, elle est nulle dans le plan médian, augmente lorsqu'on s'en éloigne, passe par un extremum pour $e/e_{max} \approx 0.5$ puis diminue et tend vers 0 lorsque $e/e_{max} \to 1$. Une particule placée en dehors du plan de symétrie aura donc toujours tendance à y revenir. Ce résultat est cohérent avec les études précédentes qui

montrent qu'un cylindre en sédimentation va toujours migrer vers le plan de symétrie (voir par exemple l'étude numérique de Joseph *et al.* [115]).

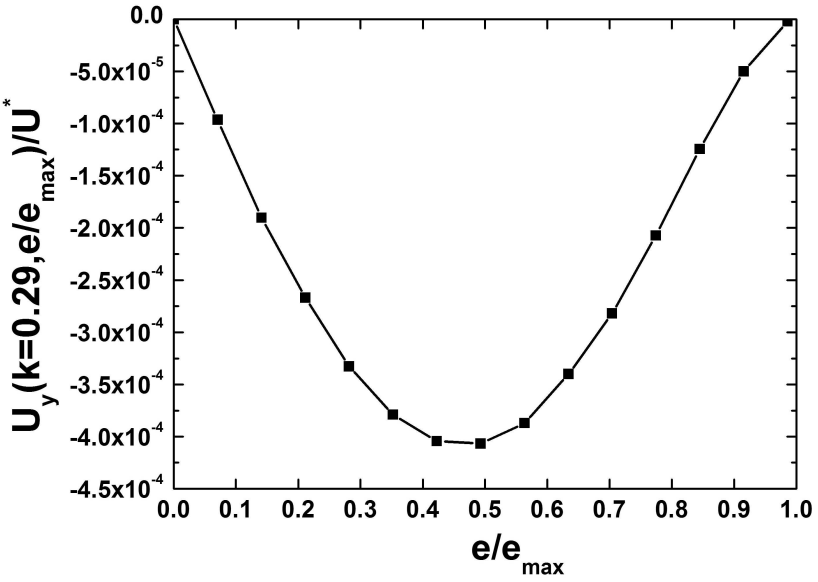

FIG. 5.27 – *Evolution de* $U_y/U^\star$ *en fonction de* e/e_{max} *pour* $k = 0.29$ *pour* $Re = 0.1$*(l'accélération de la pesanteur est parallèle aux plans)*

On peut également s'intéresser au problème de la sédimentation perpendiculairement aux plans. Dans cette configuration, la vitesse de sédimentation n'est pas constante si bien qu'il faudrait, en toute rigueur, tenir compte dans le bilan des forces de la masse ajoutée et du terme héréditaire de Basset. On peut chercher un critère de quasi-stationnarité[8] en comparant le temps de la diffusion visqueuse dans l'interstice $h^- = \epsilon a$ entre le cylindre et le plan le plus proche et le temps de convection sur la même longueur :

$$\frac{(\epsilon a)^2}{\nu} << \frac{\epsilon a}{U} \quad \text{soit} \quad \frac{Ua}{\nu} << \epsilon$$

Il faut donc que le nombre de Reynolds soit faible par rapport à ϵ. On suppose que cette condition est remplie dans la suite si bien que l'on peut négliger les termes de masse ajoutée et de Basset. En prenant le poids apparent du cylindre suivant l'axe des y, on obtient alors aisément la vitesse de sédimentation suivante :

$$U_y = -\frac{U^\star}{A_{22}}$$

Cette vitesse[9] est représentée sur la figure 5.28. Si le cylindre commence sa sédimentation

8. Un critère équivalent a été proposé par Brenner [117] et Ambari *et al.* [118] dans le cas d'une sphère s'approchant d'un plan infini

9. Notons que dans la gamme des nombres de Reynolds considérés ici ($Re < 0.1$), cette vitesse est indépendante du nombre de Reynolds puisque la force de traînée pour un déplacement perpendiculairement aux plans est du type Stokes

lorsqu'il est tangent au plan supérieur, on peut imaginer que dans la moitié supérieure du canal, il va tout d'abord accélérer jusque dans le plan de symétrie (en $e/e_{max} = 0$) où il atteint sa vitesse maximale puis qu'il va décélérer symétriquement dans la moitié inférieure du canal pour tendre vers le plan inférieur avec une vitesse limite nulle.

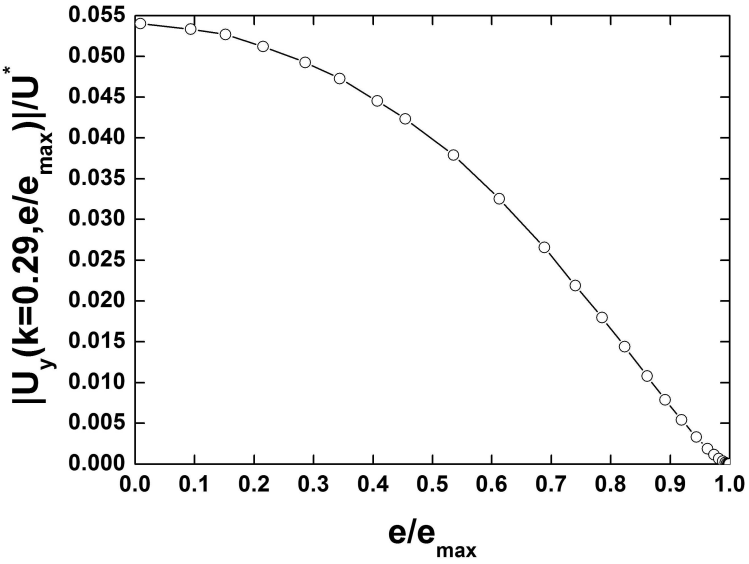

FIG. 5.28 – *Evolution de $U_y/U^\star$ en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ (l'accélération de la pesanteur est perpendiculaire aux plans)*

Si le mouvement est quasi-statique, on peut calculer l'accélération à partir de la vitesse $U_y(y)$ en utilisant la relation :

$$\gamma = \frac{dU_y}{dt} = \frac{dU_y}{dy}\frac{dy}{dt} = U_y\frac{dU_y}{dy}$$

En prenant un référentiel fixe par rapport aux plans parallèles dont l'origine est dans le plan de symétrie, le cylindre va évoluer entre $y_{max} = e_{max}b$ lorsqu'il est tangent au plan supérieur et $-y_{max}$ lorsqu'il vient toucher le plan inférieur. Sur la figure 5.29, nous avons tracé l'accélération γ normalisée par l'accélération caractéristique $\gamma^\star = U^{\star 2}/a$ en fonction de y/y_{max}. On constate que l'accélération est une fonction impaire de y/y_{max}, qu'elle est maximale en $y/y_{max} \approx 0.6$ dans le demi-plan supérieur et nulle dans le plan de symétrie en $y/y_{max} = 0$, c'est-à-dire là où le cylindre atteint sa vitesse maximale (voir la figure 5.28). Dans le demi-plan inférieur, on retrouve l'évolution similaire dans la phase de décélération du cylindre.

5.4.3 Problème du transport du cylindre en écoulement de Poiseuille

Dans le cas du cylindre de flottabilité neutre dans un écoulement de Poiseuille, l'inversion de la matrice de résistance permet d'obtenir pour la vitesse U_y l'expression :

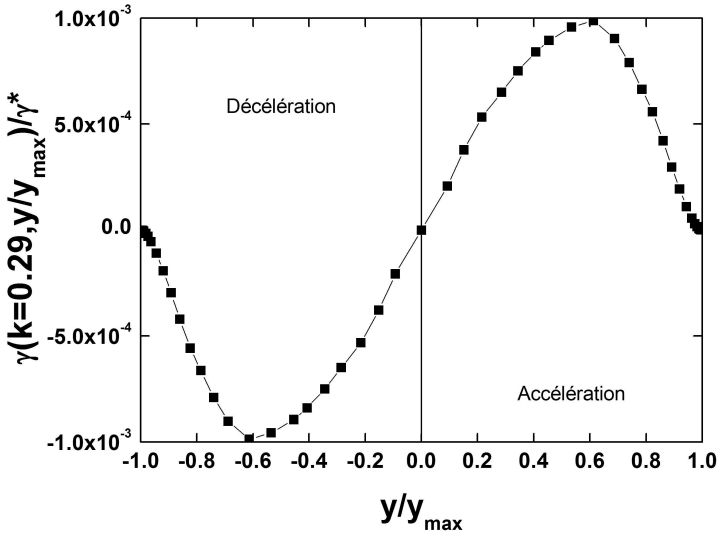

FIG. 5.29 – *Evolution de* $\gamma/\gamma^\star$ *en fonction de* y/y_{max} *pour* $k = 0.29$

$$U_y = Re\frac{A'_{21}(A_{33}A_{14} - A_{13}A_{34}) + A'_{23}(A_{11}A_{34} - A_{31}A_{14}) + A'_{24}(A_{13}A_{31} - A_{11}A_{33})}{A_{22}(A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31})}\,\overline{U}$$

Encore une fois, les vitesses U_x, Ω_z et la perte de charge ΔP gardent la même expression que dans le cas où F_y était négligée. La figure 5.30 montre l'évolution de U_y en fonction de l'excentrement dans le cas où $Re = 0.1$. Comme dans le cas de la sédimentation, cette vitesse est négative donc dirigée vers le plan de symétrie. Elle est nulle dans ce plan en $e/e_{max} = 0$, passe par un extremum pour $e/e_{max} \approx 0.35$ où son module est maximal puis tend vers 0 lorsque le cylindre se rapproche d'un plan. Cette évolution est partiellement satisfaisante car si elle confirme que la position symétrique est une position d'équilibre[10], elle est en désaccord avec l'effet Segré-Silberberg [112–114] qui prédit un changement de signe pour U_y avec une position d'équilibre intermédiaire entre le plan de symétrie et les parois parallèles. Le fait que nous ne trouvions pas ce comportement permet par conséquent d'affirmer catégoriquement que cet effet est d'origine inertielle puisque qu'il ne se manifeste pas avec notre degré d'approximation.

5.5 Remarques sur les travaux de Wannier [44] et de Jeffrey *et al.* [45]

En 1981, Jeffrey *et al.* [45] ont résolu analytiquement l'équation de Stokes par une transformation des coordonnées bipolaires du plan dans le cas d'un cylindre se déplaçant à proximité d'un unique plan. Ils ont étudié trois mouvements du cylindre parmi lesquels

10. Cette position d'équilibre est une position d'équilibre instable

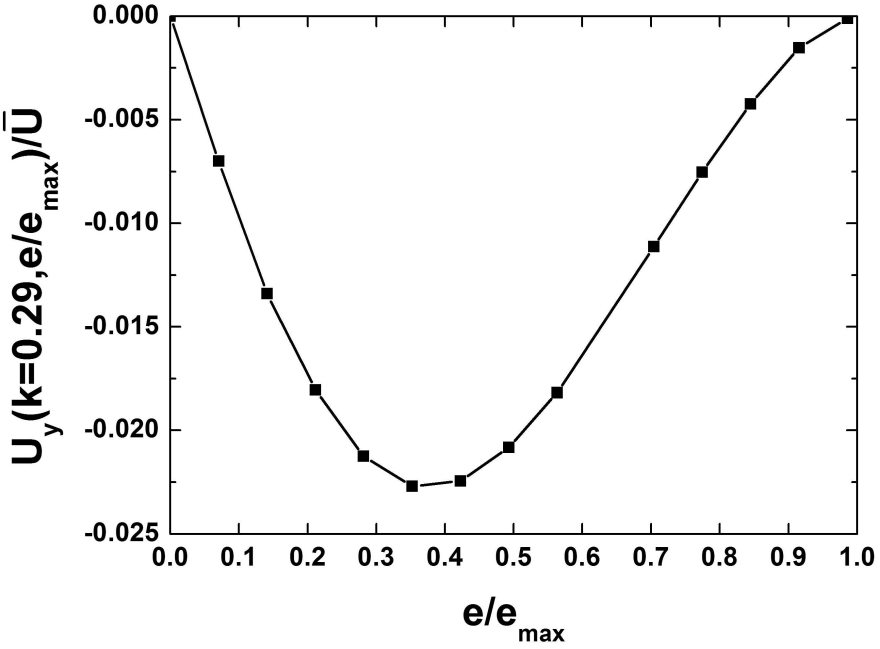

FIG. 5.30 – *Evolution de $U_y/\overline{U}$ en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$*

sa translation uniforme parallèlement au plan et sa rotation uniforme autour de son axe. Ces travaux révèlent deux résultats qui nous ont surpris car en contradiction avec nos propres calculs : Jeffrey *et al.* [45] ont en effet montré qu'un cylindre en translation parallèlement au plan ne subit aucun couple et que corrélativement, un cylindre en rotation ne ressent aucune force de traînée parallèle au plan (figure 5.31).

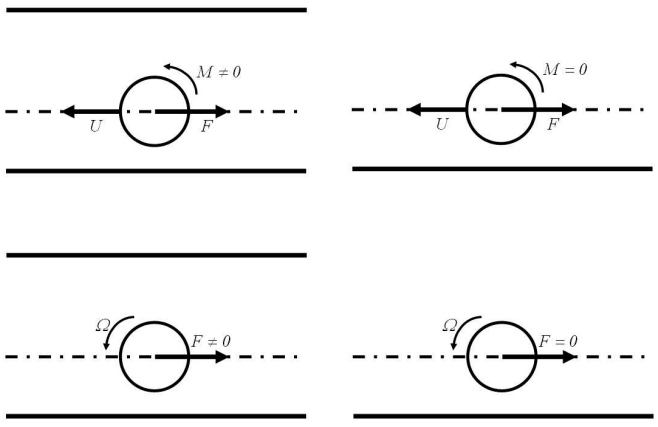

FIG. 5.31 – *En haut : problèmes de la translation du cylindre - En-bas : problèmes de la rotation du cylindre - A gauche : en présence de* 2 *plans (comme dans notre étude) - A droite : en présence d'un seul plan (comme chez Jeffrey* et al. *[45])*

Wannier [44] a confirmé ce dernier point. En présence de deux plans par contre, nos calculs concluaient à l'existence de cette force (coefficient A_{13}) et de ce couple (coefficient A_{31}) et aucun argument ne semblait justifier cette contradiction apparente. Afin de comprendre ce résultat, nous avons effectué l'étude suivante [116] : nous avons maintenu constante la distance du cylindre à un plan, disons le plan supérieur, et nous avons progressivement éloigné l'autre plan (Fig. 5.32). La distance du cylindre au plan fixe normalisée par le rayon du cylindre est égale à $\epsilon = 0.724$. En partant d'une situation centrée, le rapport de confinement $k = a/b$ diminue de la valeur $k_{max} = 1/(1+\epsilon) \approx 0.58$ puisque le rayon du cylindre a étant fixe, la distance $2b$ entre les plans augmente. Quant à l'excentrement, on peut facilement montrer qu'il diminue lorsque le plan s'éloigne et qu'il est lié à k et ϵ par la relation :

$$\frac{e}{e_{max}} = \frac{1-k(1+\epsilon)}{1-k}$$

La figure 5.33 représente l'évolution du coefficient A_{31}, c'est-à-dire du moment subi par le cylindre en translation parallèlement aux plans, en fonction de k. En $k = k_{max}$, le cylindre avance à mi-distance des deux plans et le moment est nul par raison de symétrie. Lorsque le plan inférieur s'éloigne, k diminue et le moment augmente en valeur absolue, passe par un extremum pour $k \approx 0.48$ avant de tendre vers 0 lorsque k tend vers 0. On retrouve donc bien pour cette limite le résultat de Jeffrey *et al.* [45] de la nullité du moment en présence d'un seul plan. En faisant une étude similaire pour le cylindre en rotation, on retrouve la même évolution pour le coefficient A_{13} c'est-à-dire pour la force de traînée subie par le cylindre. On peut donc en conclure que l'existence de ce moment et de cette force en présence du deuxième plan est directement liée au contre-écoulement engendré par le confinement. En présence d'un plan unique, ce «backflow» est repoussé à l'infini loin du cylindre et n'exerce plus d'effort sur celui-ci.

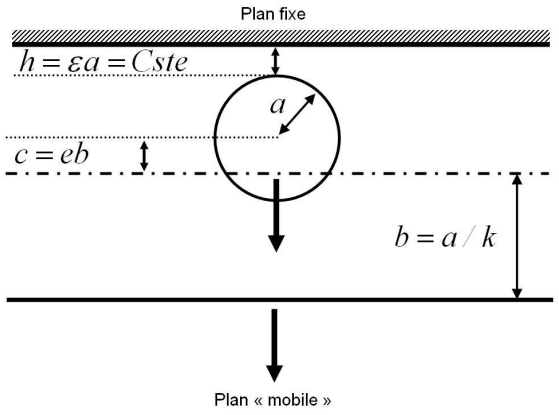

FIG. 5.32 – *Schéma du système étudié*

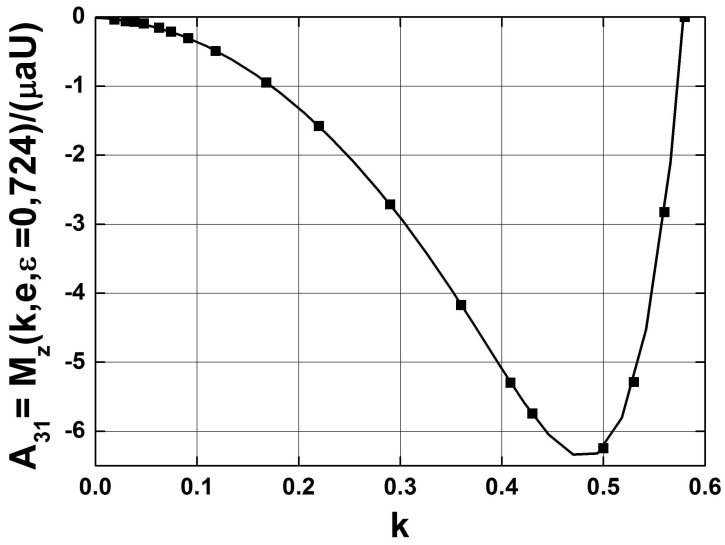

FIG. 5.33 – *Coefficient A_{31} en fonction de k pour $\epsilon = 0.724$*

5.6 Conclusion

Nous avons utilisé le concept de la matrice de résistance pour résoudre les problèmes d'une particule cylindrique circulaire confinée entre deux parois parallèles lorsqu'elle est en sédimentation ou transportée dans un écoulement de Poiseuille. Notre travail a permis de déterminer les caractéristiques des mouvements de la particule et des écoulements du fluide pour ces deux situations dans le cas purement visqueux puis très faiblement inertiel. En ce qui concerne le premier problème, le point important est l'existence d'une position intermédiaire entre le plan de symétrie et les parois parallèles où la vitesse de sédimentation est maximale. Notons également le sens de rotation *non intuitif* du cylindre qui semble «rouler à contre-sens» en comparaison d'une particule qui roulerait sur un plan. Pour le second problème, le fait remarquable est que la particule avance avec une vitesse plus faible que celle du fluide non perturbé[11]. Contrairement au cas de la sédimentation, la vitesse est dans ce cas maximale dans le plan de symétrie. L'approximation «très faible inertie» a permis de répondre à certaines questions et a confirmé notamment que l'effet Segré-Silberberg est d'origine inertielle et ne devrait se manifester qu'à des nombres de Reynolds supérieurs à ceux considérés dans cette étude. Du point de vue de l'analyse, ce type de problèmes se révèle souvent trop complexe à résoudre et l'on ne connaît que des solutions particulières comme en régime de lubrification ou en situation faiblement perturbée par rapport à un problème parfaitement symétrique. L'alternative est alors l'utilisation de calculs numériques utilisant des techniques complexes (méthode DNS notamment) et qui exigent de coûteux

11. On trouve dans la littérature nombre de travaux où cette hypothèse d'égalité des vitesses est posée sans autre précaution. Certains codes de calculs numériques commerciaux font de même

moyens de calculs. La matrice de résistance se présente alors comme une alternative moins exigeante pour résoudre divers problèmes de transport de particule. On peut évidemment l'étendre à des situations tridimensionnelles.

deuxième partie

Transfert de masse ou de chaleur sur un cylindre confiné entre deux plans parallèles

Chapitre 1

Etude bibliographique

La connaissance et la compréhension du transfert de chaleur ou de masse sur la paroi d'un cylindre de section circulaire sont nécessaires dans de nombreuses applications, notamment pour les échangeurs de chaleur, l'anémométrie à fil chaud ou le dimensionnement des conducteurs électriques dans le cas du transfert thermique et pour le problème de filtration de particules microscopiques sur des membranes composées de fibres cylindriques ou pour celui impliquant des procédés électrochimiques en ce qui concerne le transfert massique. Le transfert de chaleur peut se faire selon plusieurs modes : transfert diffusif, convectif ou radiatif. Le transfert convectif se décline encore en convection naturelle lorsque la mise en mouvement du fluide est provoquée par une hétérogénéité de masse volumique et en convection forcée lorsque la mise en mouvement du fluide est provoquée par un moyen extérieur. Lorsque les deux types de transfert cités précédemment interviennent ensemble, on parle de convection mixte (on peut remarquer que sous le terme de transfert par convection naturelle, il ne faut pas oublier d'inclure le transfert par diffusion qui est toujours présent; de même pour la convection forcée, si poussée d'Archimède et diffusion il y a, ces modes de transport se cumulent). Dans cette étude, nous nous limiterons à la convection forcée et au transfert purement diffusif. Rappelons que la dynamique de l'écoulement d'un fluide incompressible newtonien de masse volumique ρ, de viscosité dynamique μ, de vitesse U_∞, autour d'un cylindre de diamètre $2a$ est caractérisée par le nombre de Reynolds $Re = \rho U_\infty 2a/\mu$. L'analyse dimensionnelle [119] montre qu'en plus de Re, le transfert de chaleur en convection forcée est totalement défini par un second nombre sans dimension appelé nombre de Prandtl $Pr = \nu/\alpha_T$ où $\nu = \mu/\rho$ est la viscosité cinématique du fluide et $\alpha_T = \lambda/\rho C_p$ sa diffusivité thermique avec λ sa conductivité thermique et C_p sa chaleur spécifique à pression constante. Le nombre de Prandtl peut s'interpréter comme le rapport du temps $(2a)^2/\alpha_T$ que met la chaleur pour diffuser sur la distance $2a$ et du temps $(2a)^2/\nu$ que met la quantité de mouvement pour diffuser sur la même distance. L'équivalent du nombre de Prandtl pour le transfert de masse est le nombre de Schmidt $Sc = \nu/\alpha_M$ où α_M est la diffusivité moléculaire du fluide. Sc est aussi le rapport du temps $(2a)^2/\alpha_M$ que met la matière pour diffuser sur la distance $2a$ et du temps $(2a)^2/\nu$ déjà défini. Le flux de chaleur est généralement normalisé par un flux de chaleur

de référence pour construire le nombre de Nusselt Nu. Le flux de matière normalisé s'appelle quant à lui le nombre de Sherwood Sh. On appelle $Pe = RePr = U_\infty D/\alpha_T$ le nombre de Péclet thermique et $Pe = ReSc = U_\infty D/\alpha_M$ le nombre de Péclet massique. Le nombre de Nusselt pour un cylindre de rayon a, porté à la température constante T_0, dans un fluide à la température à l'infini T_∞ s'écrit :

$$Nu = \frac{\int_0^{2\pi} \lambda(\partial T/\partial r)_{r=a} a d\theta}{2\pi a[\lambda(T_0 - T_\infty)/2a]}$$

Comme nous l'avons souligné dans la première partie, la majorité des études, tant théoriques qu'expérimentales, est consacrée aux écoulements aux grands nombres de Reynolds. Il en découle naturellement que beaucoup de travaux concernant les transferts de masse ou de chaleur sont dédiés aux régimes des grands nombres de Péclet. On trouve néanmoins quelques études traitant des transferts de masse ou de chaleur faisant intervenir des écoulements aux faibles Re. En 1954, Cole *et al.* [120] ont considéré le problème d'un cylindre isotherme à la température T_0 placé dans un écoulement uniforme U_∞ à la température T_∞. En imitant la démarche de Lamb [12], ils ont utilisé l'approximation d'Oseen [11] appliquée à l'équation de conservation de la chaleur pour approcher la vitesse du fluide par la vitesse loin du cylindre U_∞. Ils ont ainsi déterminé le champ de température sous la forme d'une série infinie de fonctions trigonométriques et de fonctions de Bessel modifiées dont les coefficients sont obtenus grâce à la condition limite à la paroi du cylindre. En calculant le flux de chaleur au travers d'une surface cylindrique concentrique au cylindre et de rayon arbitrairement grand, ils ont obtenu l'expression du flux de chaleur qui, pour les faibles nombres de Péclet, s'écrit :

$$Nu = \frac{2}{ln(8/Pe) - \gamma} \tag{1.1}$$

où $\gamma = 0.5772...$ est la constante d'Euler. Cette expression est en quelque sorte l'équivalent de la formule 1.1 page 6 de Lamb [12]. Illingsworth [121] utilisa la même technique pour obtenir la formule plus générale :

$$Nu = 2[\frac{I_0(Pe/4)}{K_0(Pe/4)} + 2\sum_1^\infty (-1)^m \frac{I_m(Pe/4)}{K_m(Pe/4)}] \tag{1.2}$$

avec I_m et K_m les fonctions de Bessel modifiées. Lorsque Re est petit et que Pr est de l'ordre de 1, cette expression se simplifie en :

$$Nu = \frac{2}{ln(8/Pe) - \gamma} - (\frac{Pe}{8})^2\{8 + \frac{2}{(ln(8/Pe) - \gamma)^2}\} \tag{1.3}$$

Cette expression n'est rien d'autre que la formule 1.1 de Cole *et al.* [120] corrigée d'un terme en Pe^2. L'analyse théorique de King [122], inspiré par un travail antérieur de Boussinesq [123], donne pour le nombre de Nusselt l'expression :

$$Nu = \frac{2}{1 - \gamma + ln(2/Pe)} \qquad (Pe << 0.08) \tag{1.4}$$

et

$$Nu = \frac{1}{\pi} + \sqrt{\frac{2Pe}{\pi}} \qquad (Pe > 0.08) \tag{1.5}$$

La formule 1.5 qu'on appelle la *loi de King*, sert de base aux expressions utilisées en anémométrie à fil chaud. Il faut noter que la condition aux limites sur la paroi du cylindre dans le travail de King [122] est du type «densité de flux constante» alors que les autres travaux correspondent à une condition de type «température constante». Wood [124], en utilisant l'approximation d'Oseen [11] pour obtenir le champ de vitesse, a donné l'expression complexe suivante pour le nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{2I_0(Pe/4)}{K_0(Pe/4)}\{1 - \frac{\lambda(Pr)I_0(Pe/4)}{K_0(Pe/4)[I_0(Re/4)K_0(Re/4) + I_1(Re/4)K_1(Re/4)]} - \frac{\mu(Pr)I_0(Pe/4)}{K_0(Pe/4)[I_0(Re/4)K_0(Re/4) + I_1(Re/4)K_1(Re/4)]^2}\} \tag{1.6}$$

où $\lambda(Pr)$ et $\mu(Pr)$ sont des fonctions intégrales du nombres de Prandtl que l'on doit déterminer numériquement. En particulier dans le cas de l'air ($Pr = 0.72$), Wood [124] a déterminé $\lambda(0.72) = 1.38$ et $\mu(0.72) = 0.40$. Dans la limite où $Re \to 0$, nous avons développé les fonctions de Bessel modifiées et obtenu l'expression :

$$Nu = \frac{2}{ln(8/Pe) - \gamma}\{1 - \frac{\lambda(Pr)}{[ln(8/Pe) - \gamma][ln(8/Re) - \gamma]} - \frac{\mu(Pr) - \frac{1}{2}\lambda(Pr)}{[ln(8/Pe) - \gamma][ln(8/Re) - \gamma]^2}\} \tag{1.7}$$

Cette formule n'est pas valable au-delà de $Re > 10^{-3}$ dans le cas de l'air. En utilisant les champs de vitesse déterminés par Proudman *et al.* [23] et par Kaplun [18], Hieber *et al.* [125] ont développé des solutions pour deux cas limites. Dans le cas où $Re \to 0$, ils proposent l'expression :

$$Nu = \frac{2}{ln(8/Pe) - \gamma}\{1 - \frac{\delta(Pr)}{[ln(8/Pe) - \gamma]^2}\} \tag{1.8}$$

où $\delta(Pr)$ est une fonction du nombre de Prandtl à calculer numériquement [1] (cette expression est une variante de l'expression 1.3 de Illingsworth [121] et est donc très proche de celle de Cole *et al.* [120]). Dans le second cas, ils considèrent la limite $Pr = Re^{-\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) et $Re \to 0$. Pour différents nombres de Reynolds et pour une large gamme de nombres de Prandtl, on peut calculer la valeur du paramètre $\alpha = -ln(Pr)/ln(Re)$ et le nombre de Nusselt a pour expression :

$$Nu = \frac{2}{ln(8/(1-\alpha)Pe) - \gamma}\{1 - \frac{\kappa(\alpha)}{[ln(8/(1-\alpha)Pe) - \gamma]^2}\} \tag{1.9}$$

1. Ils donnent dans leur article $\delta(0.72) \approx 1.38$, $\delta(1) \approx 1.63$ et $\delta(6.82) \approx 3.42$

avec

$$\kappa(\alpha) = (1-2\alpha)ln2 + (1/2-\gamma)(1-\alpha) + ln(1-\alpha) + (1+\gamma-ln2) \tag{1.10}$$

Kassoy [126] a également utilisé la méthode des développements asymptotiques raccordés pour déterminer le champ de température avec une amélioration dans la prise en compte des variations des propriétés physiques du fluide et la possibilité d'une vitesse de glissement à la paroi du cylindre. Pour le cas particulier d'un cylindre isotherme avec adhérence du fluide à la paroi, il donne l'expression du nombre de Nusselt suivante :

$$Nu = \frac{2}{ln(8/Pe)-\gamma}\{1 - \frac{2PrM_2(Pr)}{[ln(8/Re)-\gamma+1/2][ln(8/Pe)-\gamma]}\} \tag{1.11}$$

où

$$M_2(Pr) = \int_0^\infty K_0^2(xPr)[K_0(x)I_0(x) + K_1(x)I_1(x)]xdx$$

et $M_2(Pr = 0.72) = 1.3092$ pour l'air. Nakai *et al.* [127] ont utilisé une méthode analogue à celle de Kassoy [126] et ont donné la formule :

$$Nu = \frac{2}{2/3 + ln8/3 - lnPe} \approx \frac{2}{-0.4319 + ln(8/Pe)} \tag{1.12}$$

Ces deux dernières expressions, comme celles de Illingsworth [121], de Wood [124], et de Hieber *et al.* [125], tendent toutes vers la formule de Cole *et al.* [120] pour $Pe \to 0$.

Les approches numériques de ce problème sont relativement nombreuses. On peut par exemple se référer au travail de Dennis *et al.* [128] qui ont résolu l'équation de Navier-Stokes et celle de l'énergie pour des nombres de Reynolds compris dans l'intervalle $0.01 - 40$ ou plus récemment à Lange *et al.* [35] qui ont déterminé les champs de vitesse et de température autour d'un cylindre circulaire chauffé dans la gamme $10^{-4} \leq Re \leq 200$. Ils ont proposé une loi de corrélation dans l'air par ajustement de leurs données numériques :

$$Nu = 0.082Re^{0.5} + 0.734Re^{\chi} \tag{1.13}$$

avec $\chi = 0.05 + 0.226Re^{0.085}$. Kurdyumov *et al.* [129] ont développé une solution basée sur un calcul de couche limite valide dans le cas $Pr \to \infty$ et l'ont étendu aux nombres de Prandtl de l'ordre de 1. Ils ont proposé l'expression :

$$Nu = 2[W_0(Re)Pr^{1/3} + W_1(Re)] \tag{1.14}$$

où les fonctions du nombre de Reynolds W_0 et W_1 s'écrivent, avec $\zeta = log_{10}(Re/2)$:

$$W_0(Re) = \begin{cases} 0.46271 \exp(1.01633\zeta + 0.05121\zeta^2) & \text{pour} \quad 2.10^{-2} \leq Re \leq 6.28 \\ 0.474[Re/\ln(2/Re)]^{1/3} & \text{pour} \quad Re < 2.10^{-2} \end{cases}$$

$$W_1(Re) = \begin{cases} 0.10666 \exp(0.41285\zeta + 0.43847\zeta^2 \\ \quad +0.19150\zeta^3 + 0.01802\zeta^4 - 0.005225\zeta^5) & \text{pour} \quad 2.10^{-2} \leq Re \leq 6.28 \\ 0.0917 & \text{pour} \quad Re < 2.10^{-2} \end{cases}$$

On dispose de relativement peu de données expérimentales concernant les transferts dans le régime des bas nombres de Reynolds. Les expériences de King [122] dans la gamme $0.1 < Re < 200$ sont réputées être imprécises pour $Re < 1$ et rappelons de plus qu'elles concernent une condition de densité de flux imposée sur le cylindre. Piret *et al.* [130] ont étudié le transfert convectif sur des fils électriques de platine et de nickel dans l'eau pour des nombres de Reynolds compris entre 0.1 et 15. Ils ont interpolé leurs données par la loi :

$$Nu = 0.965 Re^{0.28} Pr^{0.3} \tag{1.15}$$

Van der Hegge Zijnen [131] a proposé la corrélation dans l'air pour la gamme $0.01 < Re < 5.10^5$:

$$Nu = 0.35 + 0.50 Re^{0.5} \tag{1.16}$$

En compilant les données issues de nombreuses études, Van der Hegge Zijnen [132] a également proposé l'expression :

$$Nu = 0.38 Pr^{0.2} + (0.56 Re^{0.5} + 0.001 Re) Pr^{0.33} \tag{1.17}$$

Davis [108] a obtenu des résultats pour les grands nombres de Péclet et pour des nombres de Reynolds compris entre 0.1 et 200. McAdams [133] a cherché une loi de corrélation pour ces valeurs expérimentales et a proposé pour $0.1 < Re < 1000$ l'expression :

$$Nu = 0.32 + 0.43 Re^{0.52} \tag{1.18}$$

Whitaker [134] a proposé dans l'intervalle $1 < Re < 10^5$ et pour $0.67 < Pr < 300$ la formule :

$$Nu = (0.5 Re^{0.5} + 0.07 Re^{2/3}) Pr^{0.4} \tag{1.19}$$

Ulsamer [135] a trouvé quant à lui, en analysant encore une fois les données expérimentales de Davis [108], que pour un nombre de Reynolds compris entre 0.1 et 50, la valeur de l'exposant du nombre de Reynolds était plutôt 0.385 au lieu de 0.52. On peut encore citer les expériences de Hilpert [136] concernant le transfert de chaleur sur des fils

électriques chauffés dans un écoulement d'air. Il a donné le nombre de Nusselt sous la forme :

$$Nu = C[Re(\frac{T_w}{T_\infty})^{\frac{1}{4}}]^n \tag{1.20}$$

où C et n, donnés dans le tableau 1.1, sont des constantes dépendant de la gamme du nombre de Reynolds dans laquelle l'écoulement se situe. T_w et T_∞ sont respectivement la température du fil électrique cylindrique et celle de l'air loin de celui-ci. L'introduction du coefficient T_w/T_∞ a pour but de prendre en compte la dépendance en température des propriétés physiques du fluide[2].

Re	C	n
$1-4$	0.891	0.330
$4-40$	0.821	0.385
$40-4000$	0.615	0.466
$4000-40\ 000$	0.174	0.618
$40\ 000-400\ 000$	0.0239	0.805

TAB. 1.1 – *Coefficients de l'expression (1.20)*

On peut noter que les deux premières discontinuités des pentes dans la formule 1.20 ont lieu pour $Re = 4$ ce qui correspond approximativement à l'apparition des tourbillons de recirculation à l'aval du cylindre et pour $Re = 40$ ce qui correspond grossièrement au largage instationnaire de ces tourbillons. Une approche similaire a été adoptée par Collis *et al.* [137]. Dans ce travail, ils ont proposé la loi :

$$Nu = (\frac{T_m}{T_\infty})^{0.17}(A + BRe^n) \tag{1.21}$$

où $T_m = (T_w + T_\infty)/2$ est la moyenne arithmétique de la température du cylindre et de celle du fluide et où les constantes A, B et n dépendent du nombre de Reynolds (Tab. 1.2). Contrairement à Hilpert [136], ils n'ont distingué que deux régimes d'écoulement dont la transition correspond à l'apparition de l'allée de Bénard-Von Kármán autour de $Re \approx 44$.

	$0.02 < Re < 44$	$44 < Re < 140$
n	0.45	0.51
A	0.24	0
B	0.56	0.48

TAB. 1.2 – *Coefficients de l'expression (1.21)*

Pour $0.02 < Re < 0.5$, ils ont proposé également une loi du type «Cole et Roshko» modifiée (Eq. 1.1) sous la forme :

2. Dans l'anémométrie à fil chaud, le rapport T_w/T_∞ porte le nom de coefficient de surchauffe

$$Nu = (\frac{T_m}{T_\infty})^{0.17} \frac{1}{1.18 - 1.10 log_{10} Re} \tag{1.22}$$

Kramers [138], en réutilisant les données compilées par Ulsamer [135], a proposé dans la gamme $2 < Nu < 20$, la loi suivante :

$$Nu = 0.42 Pr^{0.20} + 0.57 Pr^{0.33} Re^{0.5} \quad \text{pour} \quad 0.71 < Pr < 525 \tag{1.23}$$

En reprenant les données expérimentales de Hilpert [136], King [122] et de Collis *et al.* [137], Fand *et al.* [139] ont suggéré la corrélation suivante :

$$Nu = (\frac{T_m}{T_\infty})^{0.17} (0.184 + 0.324 Re^{0.5} + 0.291 Re^{\chi}) \tag{1.24}$$

avec $\chi = 0.247 + 0.407 Re^{0.168}$. Une formule souvent citée dans les ouvrages d'ingénierie est donnée par Churchill *et al.* [140] valable pour $RePr > 0.2$:

$$Nu = 0.3 + \frac{0.62 Re^{0.5} Pr^{1/3}}{[1 + (0.4/Pr)^{2/3}]^{1/4}} [1 + (\frac{Re}{282000})^{5/8}]^{4/5} \tag{1.25}$$

On retrouve la plupart de ces références dans les articles de Morgan [141] et de Žukauskas [142,143] qui résument la majorité des études relatives au transfert de chaleur sur un cylindre lisse. Nous avons tracé certaines de ces expressions dans la figure 1.1.

Concernant le transfert de masse sur un cylindre, on peut citer le travail de Langmuir [144] qui s'est penché sur le problème de la filtration des aérosols. Il a basé sa théorie sur l'équation d'Oseen en supposant que la diffusion massique se déroulait pendant le temps que le fluide mettait pour passer de $\theta = \pi/6$ jusqu'à $\theta = 5\pi/6$, θ étant l'angle compté à partir du point d'arrêt amont du cylindre. Cette hypothèse assez étrange conduit pour le nombre de Sherwood à l'expression :

$$Sh = \frac{0.335 Pe^{0.4}}{[2 - ln(Re)]^{0.4}} \tag{1.26}$$

pour un nombre de Reynolds dans l'intervalle $0.03 - 0.4$ et un nombre de Schmidt dans la gamme $1000 - 28000$. Friedlander [145] a adopté une autre technique basée sur le concept de couche limite. Bien que cette approche soit généralement pertinente pour les écoulements aux grands nombres de Reynolds, il l'a adaptée aux faibles nombres de Reynolds en se servant de la fonction de courant de l'écoulement laminaire déterminée par Tomotika *et al.* [22]. Il a ainsi obtenu pour le nombre de Sherwood l'expression [3] :

$$Sh = \frac{0.821 Pe^{1/3}}{[2 - ln(Re)]^{1/3}} \tag{1.27}$$

Cette relation est limitée aux écoulements où la couche limite est «mince» c'est-à-dire pour les grands nombres de Péclet et pour des nombres de Reynolds inférieurs à

3. Il semble que le préfacteur 0.568 donné pour cette loi dans l'article de Dobry *et al.* [146] soit erroné.

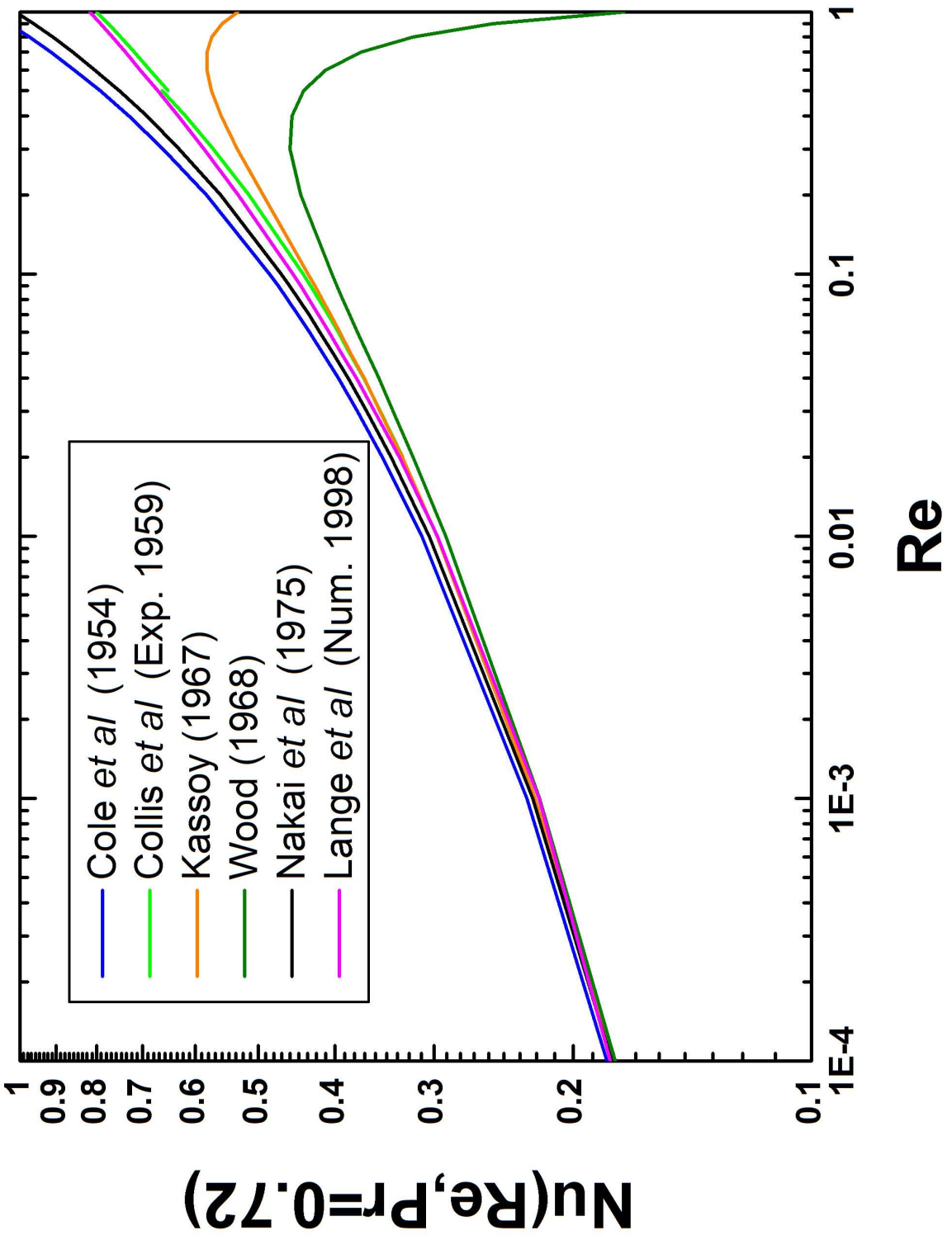

FIG. 1.1 – *Nombre de Nusselt pour un cylindre en milieu infini en fonction du nombre de Reynolds avec de l'air* ($Pr = 0.72$)

10^{-3}. Par un autre calcul numérique cette fois, Friedlander [145] a estimé que pour $Re = 10^{-1}$ et pour des nombres de Schmidt plus grands que 100, le flux de matière normalisé pouvait s'écrire :

$$Sh = 0.557 Pe^{1/3} \tag{1.28}$$

Entre les limites de validité des formules (1.27) et (1.28), il a déterminé le nombre de Sherwood par interpolation de ces expressions. Friedlander [147] s'est également intéressé à la captation des aérosols par des objets de géométrie cylindrique (comme la captation de la pollution par des brins d'herbe) et a proposé l'expression :

$$Sh = 0.683 Sc^{1/3} Re^{0.466} \tag{1.29}$$

qui est supposée valable dans la gamme $40 < Re < 4000$.

Concernant les travaux expérimentaux, on peut citer ceux de Dobry *et al.* [146] qui ont utilisé une méthode électrochimique pour déterminer le transfert massique sur une électrode composée d'un fin fil métallique pour des écoulements correspondant à des nombres de Reynolds compris entre 0.02 et 8. Ambari *et al.* [148] ont également étudié le transfert de masse sur un cylindre par la méthode électrochimique pour des solutions diluées de polymères. Pour leur solvant qui est newtonien, ils obtiennent pour le nombre de Sherwood l'expression :

$$Sh = 0.76 Sc^{1/3} Re^{0.28} \qquad (1.10^{-3} < Re < 7) \tag{1.30}$$

qui est proche de l'expression 1.15 de Piret *et al.* [130] déjà citée. Une approche similaire a été adoptée par Vogtländer *et al.* [149]. Ils ont quant à eux trouvé que le nombre de Sherwood variait comme $Re^{0.5}$ et $Sc^{0.33}$.

On ne dispose pour ainsi dire d'aucun travail traitant des transferts de chaleur ou de masse sur un cylindre lorsqu'il est en situation de confinement. Cette situation se présente pourtant couramment. Le transfert de chaleur sur un fil chaud va par exemple être différent lorsqu'on place la sonde à proximité d'une paroi solide. Les échangeurs de chaleurs sont également toujours confinés par des parois. Les seules études que nous rapportons à ce sujet sont des études numériques traitant du transfert de chaleur à proximité d'une seule paroi. Le travail de Lange *et al.* [150] étudie le transfert de chaleur sur un cylindre à proximité d'une paroi conductrice de la chaleur ou isolante dans le but d'estimer les corrections à apporter à la vitesse dans la technique de l'anémométrie à fil chaud. Les articles de Shi *et al.* [151, 152] sont dans le même esprit.

1.1 Conclusion

En ce qui concerne les transferts en fluides illimités, cette revue bibliographique montre qu'aux faibles nombres de Reynolds, il existe une plus grande dispersion des résultats en comparaison de ceux traitant du problème dynamique. Ceci est clairement

visible sur la figure 1.1. L'expression 1.13 de Lange *et al.* [35], obtenue par une approche numérique, semble être valide pour $Re << 1$ mais aussi jusqu'à $Re \approx 200$ ce qui en fait une expression utile. Ce travail est de plus en bon accord avec les résultats expérimentaux de Collis *et al.* [137]. Ces travaux, qui rejoignent ceux du type Cole *et al.* [120] aux faibles nombres de Péclet, semblent plus vraisemblables que les autres pour des valeurs de $Pe \approx 1$. Il n'existe pas à notre connaissance d'étude analytique ou expérimentale concernant les transferts de chaleur sur un cylindre en milieu confiné pour un écoulement dans le régime de Stokes. Hormis les quelques travaux numériques cités plus haut, nous n'avons aucune information concernant ce sujet. Ceci nous a donc incité a pousser plus loin nos investigations dans ce sens. A partir des champs hydrodynamiques calculés dans la partie I, nous allons maintenant voir comment sont modifiés les transferts lorsque le cylindre est centré (Chap. 2) puis excentré (Chap. 3). Les problèmes thermique et massique étant strictement équivalents dans la mesure où l'on peut négliger la dissipation visqueuse, hypothèse que nous supposons vraie dans la suite, nous ne parlerons plus désormais que des transferts de chaleur.

Chapitre 2

Cylindre en situation centrée

Ce chapitre est consacré au transfert de chaleur sur la paroi du cylindre lorsque celui-ci se trouve exactement à mi-distance des plans parallèles. L'étude de l'influence du rapport de confinement $k = a/b$ est menée tout d'abord dans le cas où les plans sont à une température constante (condition de type Dirichlet) puis dans le cas où ces plans sont adiabatiques (condition de type Neumann). Dans tous les cas, nous supposons que les propriétés physiques du fluide sont indépendantes de la température ce qui permet de découpler les problèmes dynamique et thermique. En conséquence, nous avons choisi d'étudier les transferts sur le cylindre dans des écoulements déjà décrits dans la partie précédente. Nous supposons alors que le cylindre est animé d'un mouvement de translation de vitesse U_x dans un fluide immobile loin de celui-ci où qu'il est immobile et soumis à un champ de vitesse uniforme U_x (voir par exemple la figure 3.1 page 47). Ces conditions aux limites dynamiques ne sont pas rappelées dans les schémas qui suivent.

2.1 Conditions aux limites de type Dirichlet

La figure 2.1 montre les conditions aux limites relatives au transfert de chaleur pour cette étude. Le cylindre est à la température T_0 alors que les plans parallèles et la section d'entrée du domaine sont à la température T_∞. A la section de sortie, la condition aux limites s'exprime par la relation $\partial T/\partial x = 0$ ce qui signifie que les isothermes sont orthogonales à cette section. Nous nous intéressons au flux de chaleur Φ (il s'agit d'un flux par unité de longueur de cylindre) sur le cylindre que l'on traite sous sa forme adimensionnelle du nombre de Nusselt défini par l'expression :

$$Nu = |\frac{\Phi}{\lambda \pi \Delta T}|$$

où λ est la conductivité thermique du fluide et $\Delta T = T_0 - T_\infty$. Les champs de vitesses sont ceux déjà obtenus dans la partie I de ce mémoire dans le cas d'un cylindre en translation uniforme et en régime de type Stokes [1].

1. Remarquons que le régime de Stokes n'implique pas nécessairement que le nombre de Reynolds

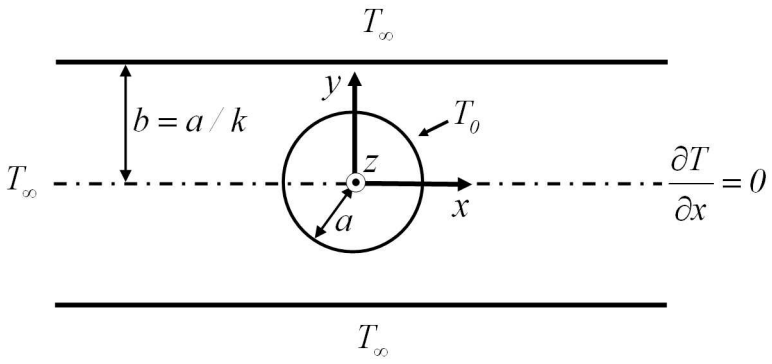

FIG. 2.1 – *Conditions aux limites de type Dirichlet*

Par la suite, une variation du nombre de Péclet sera par conséquent le fait d'une variation du nombre de Prandtl à un nombre de Reynolds constant que nous avons choisi égal à 10^{-3}. Nous rappelons que le nombre de Péclet a pour expression $Pe = U2a/\alpha = RePr$ où α est la diffusivité thermique du fluide et $Pr = \nu/\alpha$ le nombre de Prandtl.

2.1.1 Influence du nombre de Péclet

Dans un premier temps, nous avons étudié l'évolution du flux sur le cylindre en fonction du nombre de Péclet. Cette évolution est représentée pour des rapports de confinement k variant entre 10^{-3} et 0.9 sur la figure 2.2. Plusieurs remarques intéressantes peuvent être faites à la vue de cette figure :

- pour un rapport de confinement k donné, on peut constater tout d'abord l'existence de deux régimes distincts, avec un « régime plateau » purement diffusif pour les plus faibles valeurs de Pe où le nombre de Nusselt ne varie pas avec le nombre de Péclet et un régime convectif pour les valeurs supérieures de Pe où le nombre de Nusselt varie suivant une loi du type $Nu \propto Pe^{1/3}$. Par analogie avec le problème du transfert de quantité de mouvement étudié précédemment, nous appelons $Nu_{Stokes}(k)$ les solutions correspondant aux « régimes plateau » et l'on parlera de «*solutions de type Stokes*» pour le transfert de chaleur,
- pour un nombre de Péclet donné, plus le rapport de confinement k est grand et plus le flux augmente,
- la gamme d'existence d'un « régime plateau » est d'autant plus étendue que le rapport de confinement k est important. Cela signifie aussi que le nombre de Péclet de transition Pe_c entre le régime de type Stokes et le régime de convection forcée est une fonction croissante du rapport de confinement k. On peut s'en rendre mieux compte en observant la figure 2.3 où nous avons représenté l'évolution

soit très petit. Nous avons vu en effet dans la partie dédiée au transfert de quantité de mouvement que le confinement atténue les effets de l'inertie

de la quantité $[Nu(k,Pe) - Nu_{Stokes}(k)]/Nu_{Stokes}(k)$ en fonction du nombre de Péclet.

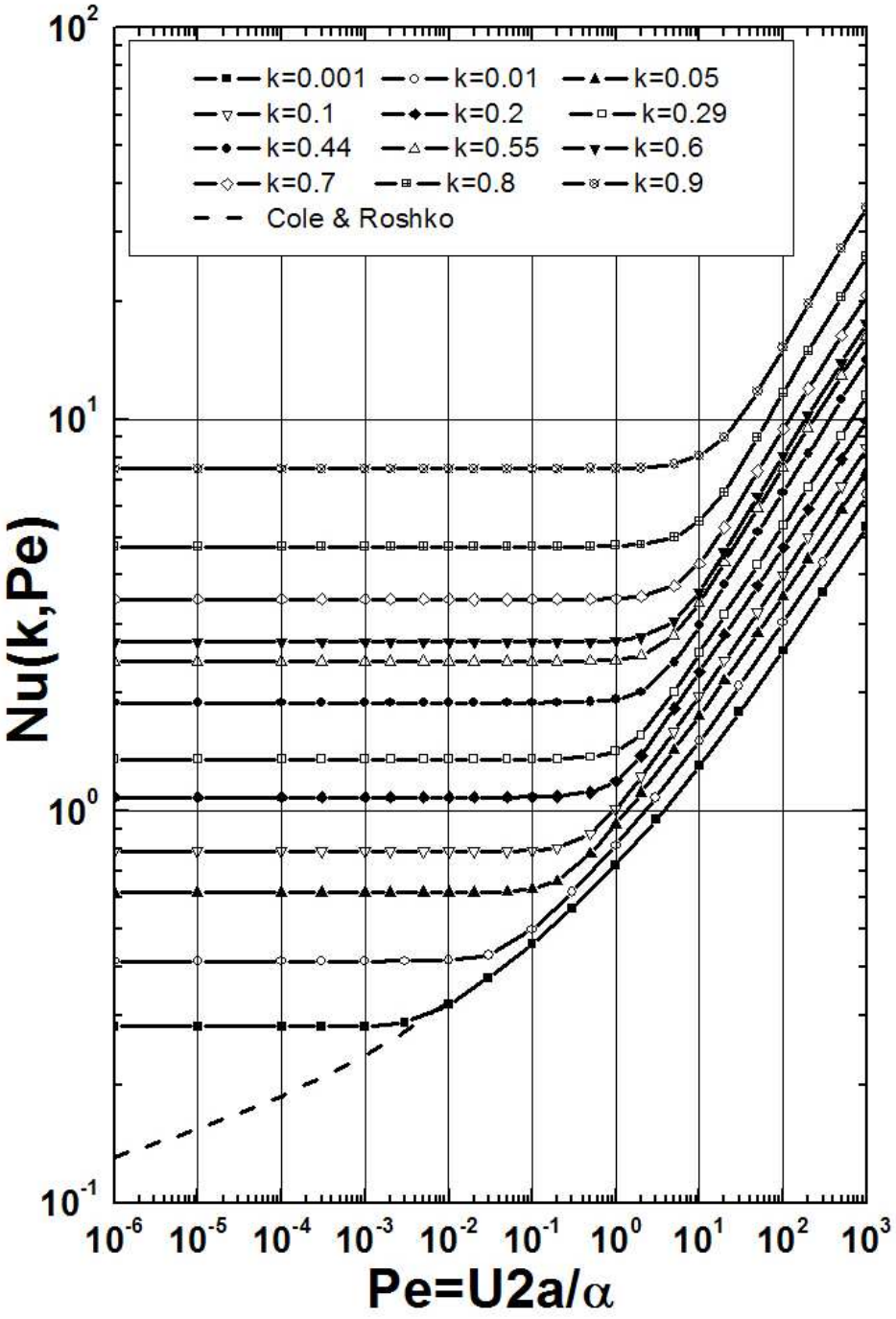

FIG. 2.2 – *Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet (conditions aux limites de type Dirichlet)*

Sur la même figure, nous avons également tracé la courbe que donne la formule 1.1 de Cole *et al.* [120] correspondant au cas d'un cylindre en milieu infini. Comme c'était le cas pour la formule de Lamb (formule 1.1 page 6) ou pour l'une de ses «variantes», la formule de Cole *et al.* [120] (formule 1.1 page 158) tend de manière singulière vers la valeur nulle quand $Pe \to 0$ et ne présente aucun «régime plateau».

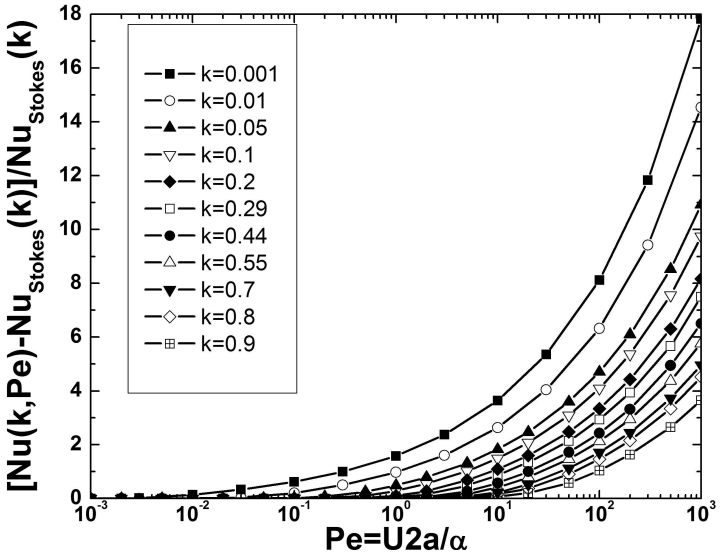

FIG. 2.3 – $[Nu(k,Pe) - Nu_{Stokes}(k)]/Nu_{Stokes}(k)$ *en fonction de* Pe *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

2.1.2 Influence du rapport de confinement k

Sur la figure 2.4, nous avons représenté l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du rapport de confinement k pour des nombres de Péclet valant $Pe = 1000$, 100 et 10^{-2}. On peut faire deux remarques concernant ces courbes :

- les évolutions du flux sont similaires quelle que soit la valeur du nombre de Péclet et l'on observe une croissance monotone du nombre de Nusselt lorsque k augmente
- pour une valeur de k donnée, le flux est d'autant plus important que le nombre de Péclet est grand comme on pouvait s'y attendre

Sur la figure 2.5, nous avons représenté la répartition du flux sur la paroi du cylindre pour $Pe = 1000$. Cette distribution étant symétrique ($\varphi(\theta) = \varphi(-\theta)$) comme on peut le voir sur la figure 2.6, elle n'est représentée que dans l'intervalle [0,180°]. On constate sur la figure 2.5 que le transfert est localisé dans les zones polaires autour de 90° et 270° car l'épaisseur de la couche de transfert est conditionnée par la distance minimale entre les plans et le cylindre. En ordres de grandeur, la densité de flux s'écrit :

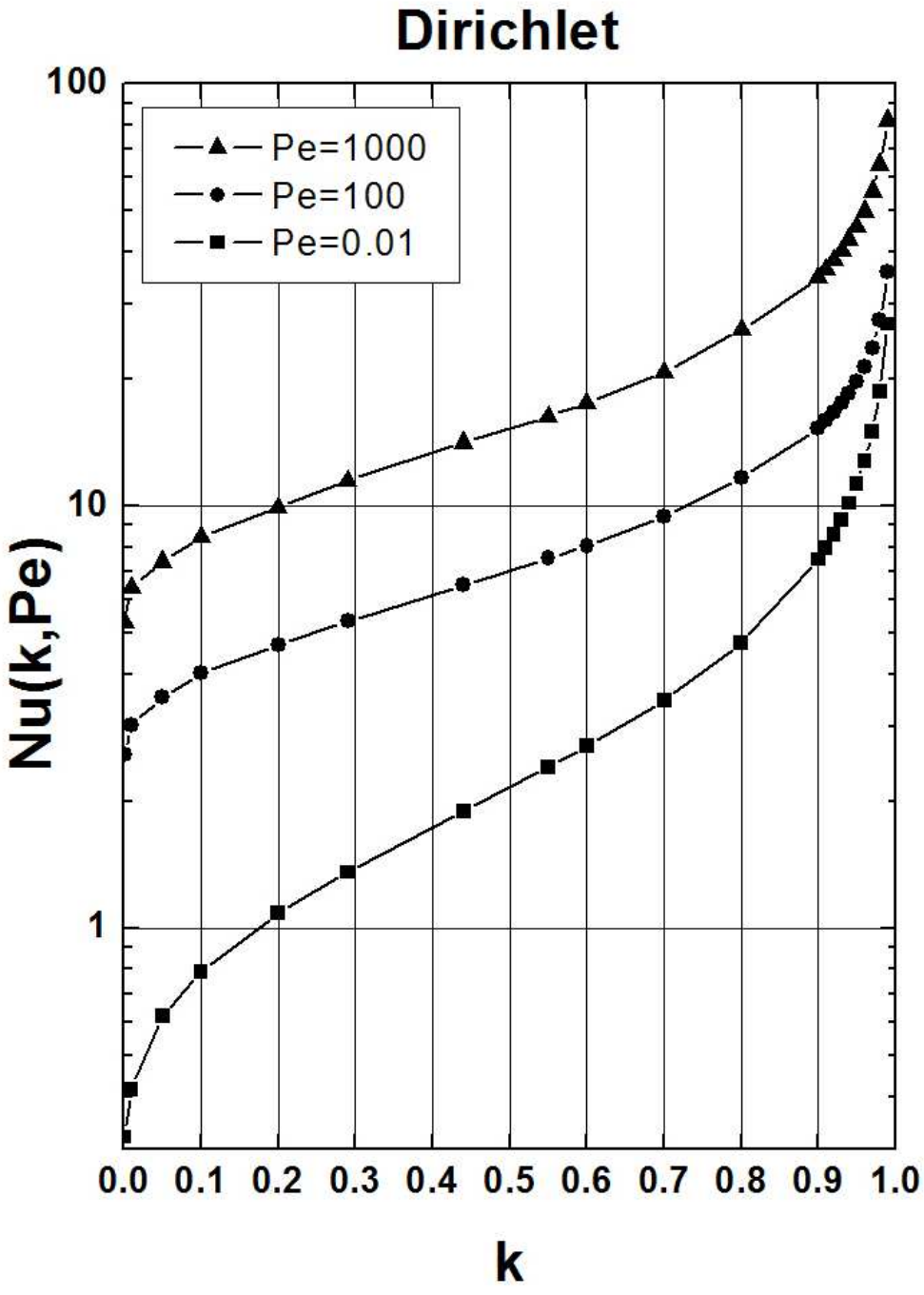

FIG. 2.4 – *Nombre de Nusselt en fonction de k (conditions aux limites de type Dirichlet)*

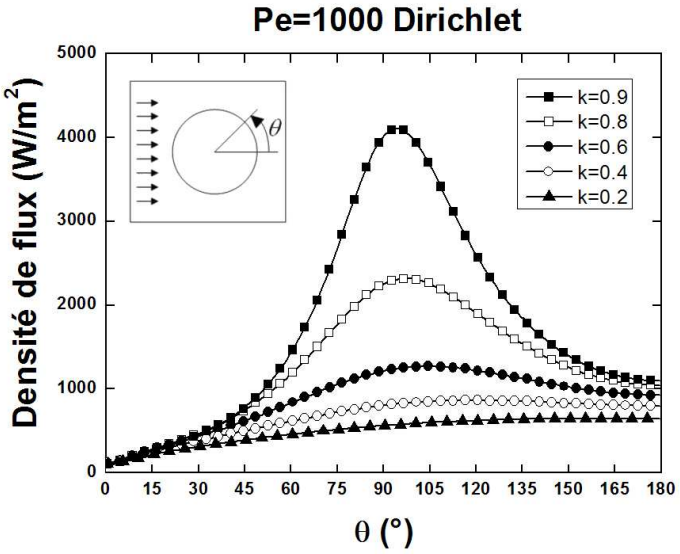

FIG. 2.5 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 1000$ *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

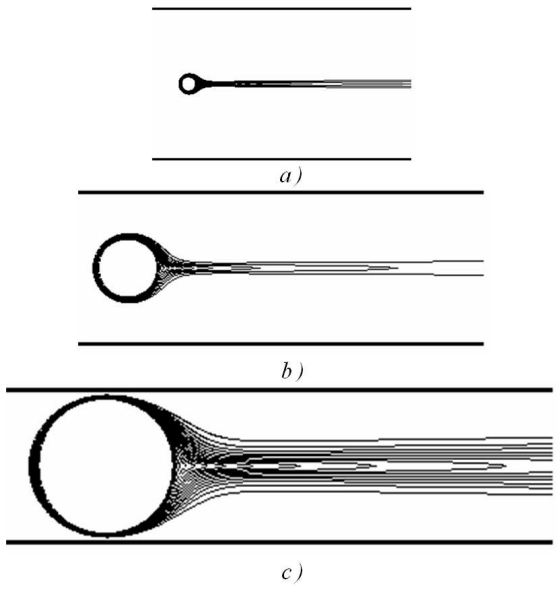

FIG. 2.6 – *Isothermes autour du cylindre pour* $Pe = 1000$ *et* $k =$ *: a*)0.1 - *b*)0.3 - *c*)0.9 *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

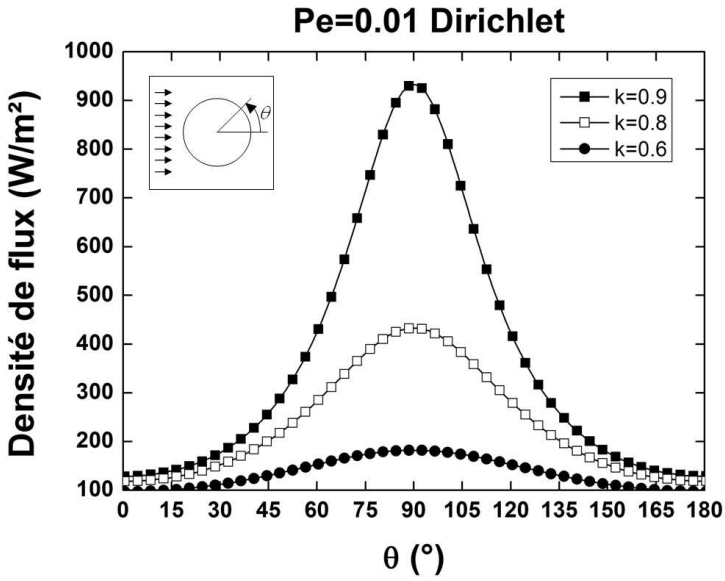

FIG. 2.7 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 0.01$ *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

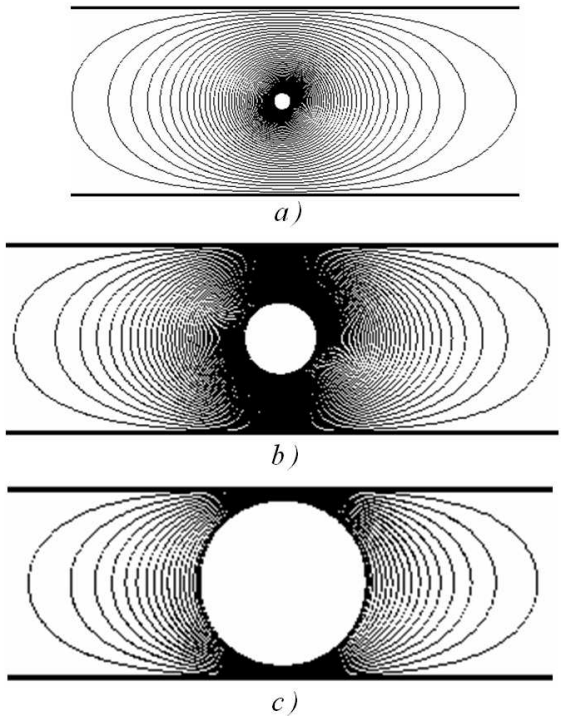

FIG. 2.8 – *Isothermes autour du cylindre pour* $Pe = 0.01$ *et* $k =$ *: a*)0.1 - *b*)0.3 - *c*)0.9 *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

$$\varphi \propto \lambda \frac{T_0 - T_\infty}{b - a} = (\frac{\lambda}{b}) \frac{\Delta T}{1 - k} \tag{2.1}$$

Cette grandeur augmente donc rapidement lorsque $k \to 1$. La même remarque peut être faite dans le cas où $Pe = 0.01$. La distribution du flux est donnée en figure 2.7. Le transfert se fait encore principalement autour des points $\theta = 90°$ et $\theta = 270°$. On observe par ailleurs une double symétrie dans ce cas : en plus de la symétrie $\varphi(\theta) = \varphi(-\theta)$ due au fait que le cylindre est centré, on a la symétrie $\varphi(\theta) = \varphi(\pi - \theta)$ due au fait que le transfert est purement diffusif. La couche limite thermique est symétrique entre l'amont et l'aval du cylindre. Ceci est clairement visible dans le figure 2.8.

2.1.3 Solutions de type Stokes

Sur la figure 2.9, nous avons représenté les «*solutions de type Stokes*» pour le transfert de chaleur en fonction du rapport de confinement k. L'analogie avec l'évolution de $\Lambda_{Stokes}(k)$ est évidente et nous avons donc cherché une fonction d'interpolation du type :

$$Nu_{Stoke}(k) = \frac{1}{\sum_n A_{2n} k^{2n} + Blnk} \tag{2.2}$$

dont les coefficients numériques sont donnés dans le tableau 2.1.

$A_0 = 0.13667$	$A_{12} = 1491.77$
$A_2 = -0.523494$	$A_{14} = -1431.7$
$A_4 = 9.01196$	$A_{16} = 750.647$
$A_6 = -75.5258$	$A_{18} = -165.643$
$A_8 = 334.283$	$B = -0.494384$
$A_{10} = -922.444$	

TAB. 2.1 – *Coefficients numériques de l'expression 2.2*

Comme dans le cas de la force, lorsque $k \to 1$, on peut effectuer un développement asymptotique dans la limite de lubrification pour le transfert de chaleur. Nous avons obtenu dans ce cas l'expression :

$$\lim_{k \to 1} Nu_{Stokes}(k) = 2\sqrt{2} (\frac{1 - k}{k})^{-1/2}$$

Cette expression est tracée dans la figure 2.9. Dans le tableau 2.2, nous comparons les résultats de l'interpolation avec les valeurs numériques. L'erreur relative est toujours inférieure à 0.5% ce qui confirme la validité de l'expression 2.2 dans la gamme $10^{-3} < k < 0.99$. Certains des résultats présentés dans cette partie ont fait l'objet de communications lors de conférences avec actes [153, 154].

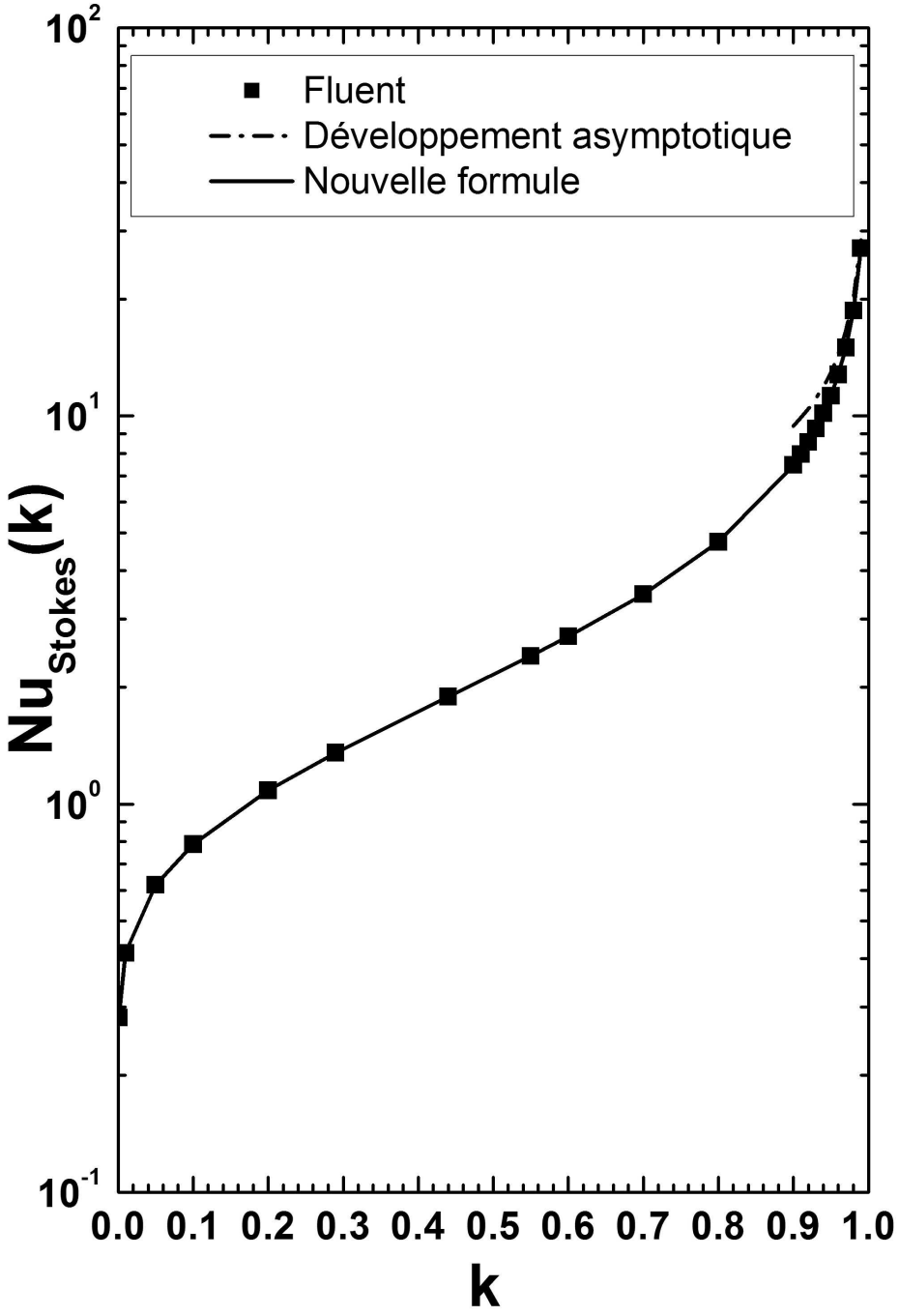

FIG. 2.9 – *Nu_{Stokes} en fonction de k (conditions aux limites de type Dirichlet)*

k	Nu(Fluent)	Nu(Expr. 2.2)	Erreur (%)
10^{-3}	0.2817	0.28155	0.053
10^{-2}	0.4136	0.41436	0.184
0.05	0.61928	0.61864	0.104
0.1	0.788	0.78701	0.125
0.2	1.084	1.08485	0.078
0.29	1.356	1.35636	0.026
0.44	1.892	1.89005	0.103
0.55	2.408	2.41237	0.181
0.6	2.704	2.70122	0.103
0.7	3.474	3.47215	0.053
0.8	4.736	4.74147	0.115
0.9	7.482	7.46156	0.274
0.95	11.27772	11.29094	0.117
0.99	27.035	27.12964	0.349

TAB. 2.2 – *Erreur relative entre les nombres de Nusselt donnés par l'expression 2.2 et par le calcul numérique de Fluent*

2.2 Conditions aux limites de type Neumann

Nous supposons à présent que les plans parallèles sont adiabatiques, les autres conditions aux limites restant par ailleurs inchangées (Fig. 2.10). Comme dans la section précédente, nous allons en premier lieu nous intéresser à l'influence du nombre de Péclet puis aux solutions de type Stokes.

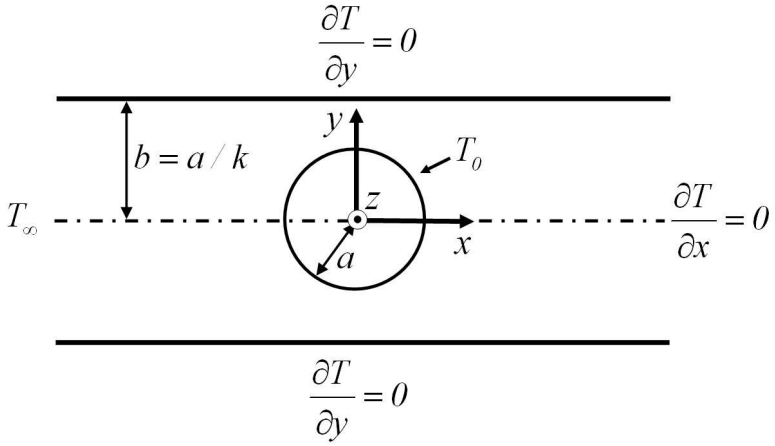

FIG. 2.10 – *Conditions aux limites de type Neumann*

2.2.1 Influence du nombre de Péclet

La figure 2.11 montre comment varie le nombre de Nusselt lorsque le nombre de Péclet augmente pour des rapports de confinement k compris entre 0.1 et 0.9. On note des similitudes mais également des différences avec ce que nous avons obtenu précédemment pour les conditions aux limites de type Dirichlet (Fig. 2.2). Concernant les similitudes, on observe toujours, pour un rapport de confinement k donné, l'existence de deux régimes, le premier pour les faibles nombres de Péclet pour lequel Nu ne dépend pas de Pe, c'est-à-dire des «*solutions de types Stokes*», et un second régime pour les grandes valeurs de Pe où le nombre de Nusselt varie comme $Pe^{1/3}$. Au chapitre des différences, on doit tout d'abord noter que les courbes «se croisent» aux transitions entre les régimes de type Stokes et les régimes convectifs. Ceci n'existe pas avec des conditions de type Dirichlet. Dans ce problème en effet, quelle que soit la valeur de Pe, plus k est important, et plus le flux transféré est grand. Avec les conditions aux limites de type Neumann, cela reste encore vrai pour $Pe >> 1$, mais cela ne vaut plus pour les régimes de type Stokes. En effet, pour $Pe << 1$, Nu est d'autant plus faible que k est grand. On note enfin que les régimes de types Stokes persistent tous jusqu'à un nombre de Péclet critique de l'ordre de 10^{-2} commun à toutes les courbes donc indépendant de la valeur de k alors que pour les conditions de Dirichlet, le nombre de Péclet de transition est une fonction croissante de k.

2.2.2 Influence du rapport de confinement

Pour confirmer certaines des observations faites dans le paragraphe précédent, nous avons tracé dans la figure 2.12 les évolutions du nombre de Nusselt en fonction du rapport de confinement k pour $Pe = 1000$, $Pe = 100$ et pour $Pe = 0.01$. Cette représentation montre clairement la décroissance du transfert pour $Pe = 0.01$ et sa croissance pour $Pe = 100$ et 1000. La comparaison avec les résultats obtenus précédemment avec des conditions aux limites de type Dirichlet est intéressante. Sur les figures 2.13 et 2.14 nous avons tracé les variations du nombre de Nusselt avec le rapport de confinement k pour $Pe = 100$ et $Pe = 1000$ pour les deux types de conditions aux limites. Nous constatons que ces évolutions sont semblables. En y regardant de plus prêt, on ne note effectivement aucune distinction entre les deux problèmes dans le cas $Pe = 1000$ quelle que soit la valeur de k. En ce qui concerne le cas $Pe = 100$, les deux problèmes cessent de donner des résultats identiques lorsque $k \to 1$. Ceci se comprend aisément en sachant que la couche limite thermique est d'autant plus fine que Pe est grand et que le fait d'approcher le cylindre d'une paroi avec une condition d'adiabaticité aura tendance à faire diminuer le transfert : tant que le nombre de Péclet est suffisamment grand, la couche limite thermique, très ténue, n'interagit pas avec la paroi isolante et l'on se retrouve avec le même résultat que celui obtenu dans le cas où les conditions aux limites sont de type Dirichlet. En d'autres termes, le cylindre ne «ressent» pas l'influence des plans.

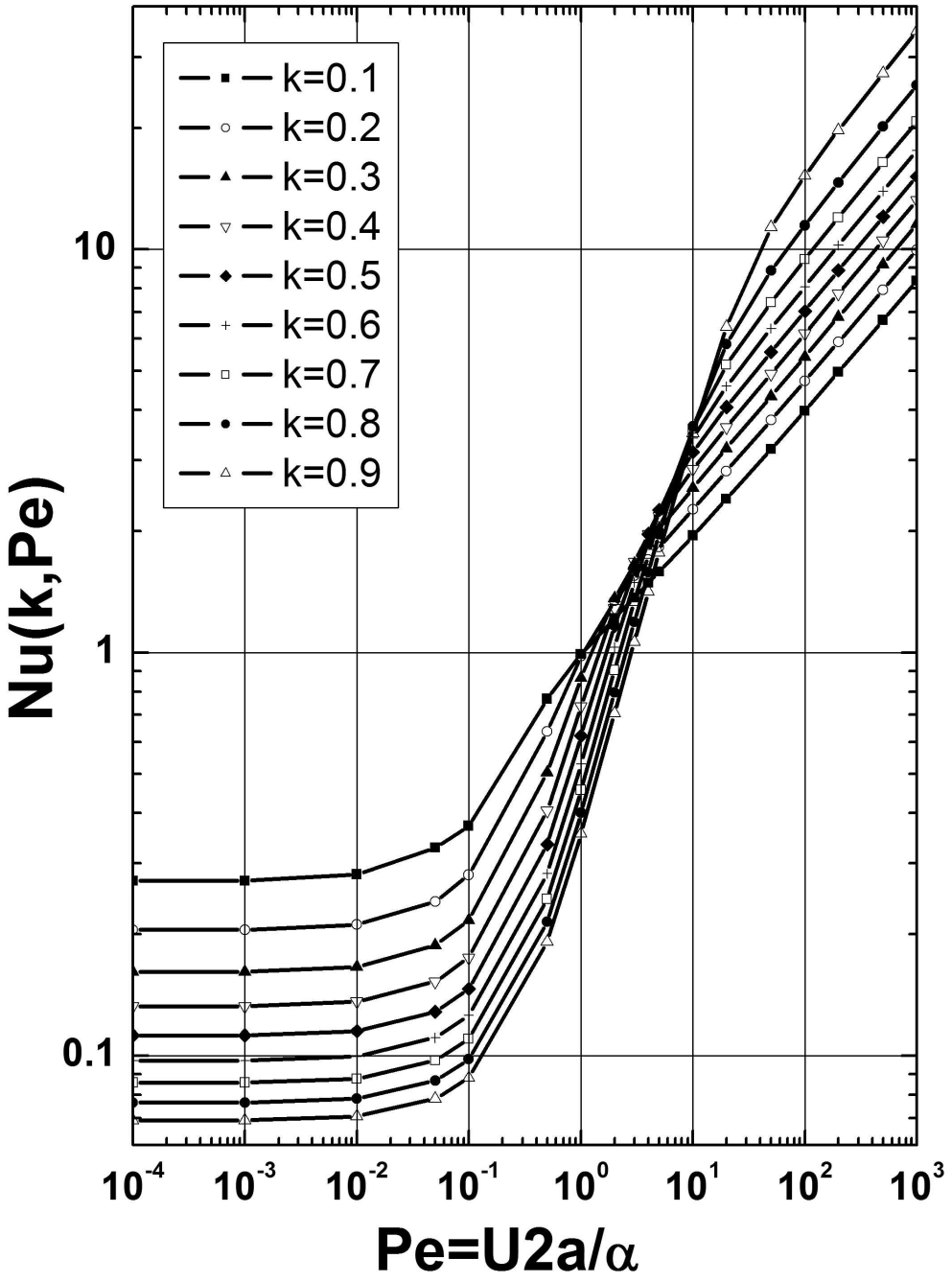

FIG. 2.11 – *Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet (conditions aux limites de type Neumann)*

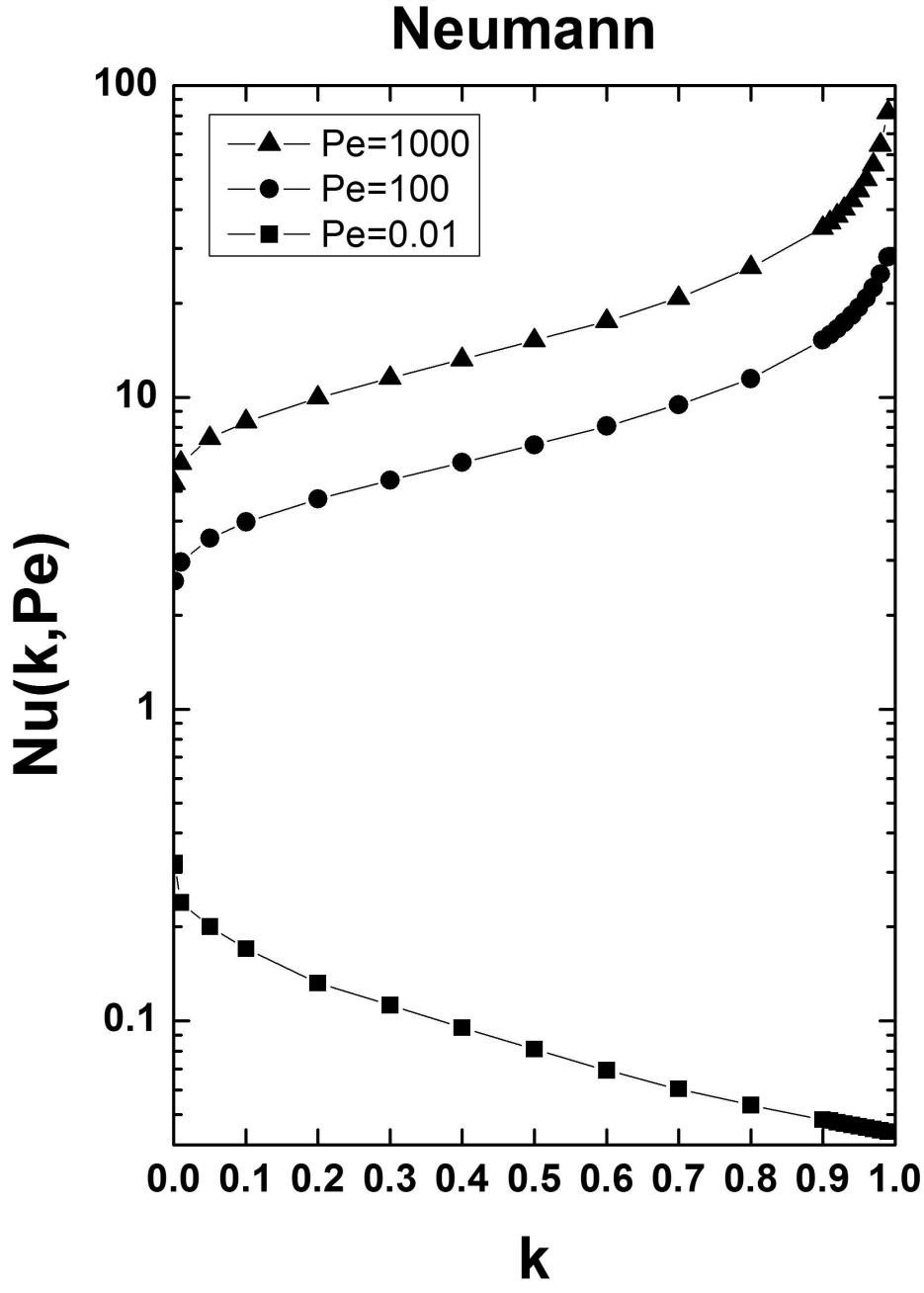

FIG. 2.12 – *Nombre de Nusselt en fonction de k pour* $Pe = 0.01$, 100 *et* 1000 *(conditions aux limites de type Neumann)*

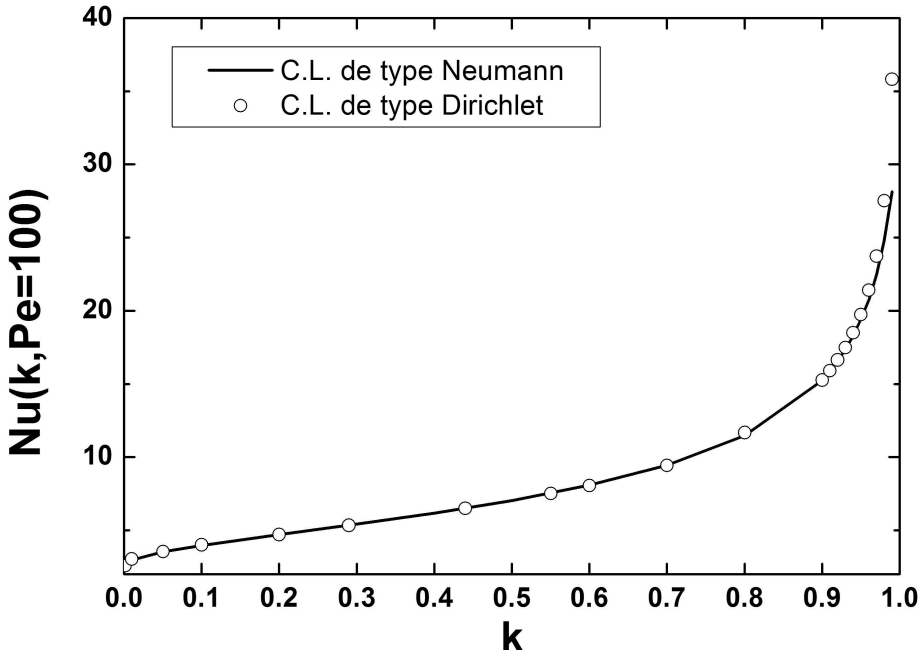

FIG. 2.13 – *Comparaison des nombre de Nusselt obtenus avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann en fonction de k pour* $Pe = 100$

Par contre lorsque le nombre de Péclet diminue, la couche limite thermique s'épaissit et l'influence des conditions d'adiabaticité intervient de plus en plus pour réduire le flux et ce d'autant plus tôt que le rapport de confinement k est grand.

Pour $Pe = 0.01$, la couche limite thermique est limitée par le confinement et l'adiabaticité des plans joue pleinement son rôle : lorsque le confinement augmente, le transfert sur la paroi du cylindre va baisser. La distribution du transfert sur le cylindre, reportée sur la figure 2.15, le confirme. On constate de plus sur cette figure que le transfert se fait principalement autour du point d'arrêt amont ($\theta = 180°$) alors que dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet, le transfert est localisé autour des points $\theta = 90°$ et $\theta = 270°$ (Fig. 2.5). Sur la figure 2.16, nous avons tracé pour $k = 0.6$ l'évolution de la distribution de la densité de flux avec le nombre de Péclet, ces densités étant normalisées par leur valeur maximale. On note bien pour ce confinement le déplacement angulaire du maximum de densité de flux de $\theta = 180°$ pour $Pe << 1$ vers $\theta = 90°$ (et vers son symétrique non représenté $\theta = 270°$) lorsque le nombre de Péclet augmente, ce «basculement» traduisant la perte d'influence des conditions de type Neumann sur le transfert de chaleur due à l'amincissement de la couche limite thermique.

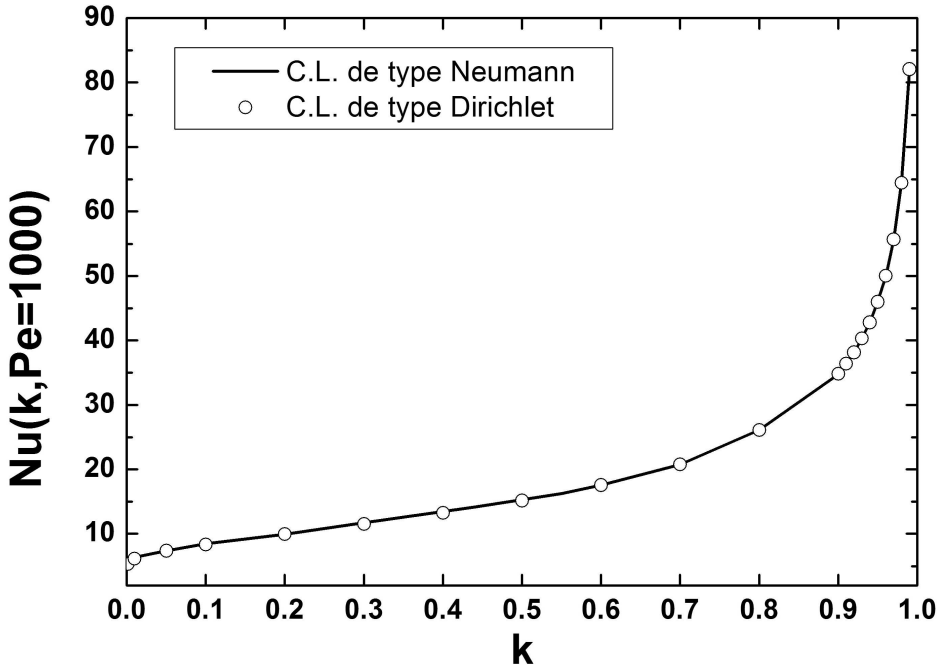

FIG. 2.14 – *Comparaison des nombre de Nusselt obtenus avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann en fonction de k pour* $Pe = 1000$

2.2.3 Solutions de type Stokes

Comme nous venons de le voir (Fig.2.11), dans le cas où les conditions aux limites sont de type Neumann, il existe aussi des «*solutions de type Stokes*» pour $Pe << 1$ pour lesquelles le nombre de Nusselt est indépendant du nombre de Péclet. Contrairement à ce qui se passait avec une condition du type température imposée sur les plans parallèles où les «*solutions de type Stokes*» sont des fonctions croissantes de k, celles-ci sont à présent des fonctions monotones et décroissantes du rapport de confinement k. Nous avons cherché une fonction d'interpolation sous la forme :

$$Nu_{Stokes}(k) = \frac{1}{\sum_n A_n k^n} \tag{2.3}$$

dont les coefficients sont reportés dans le tableau 2.3.

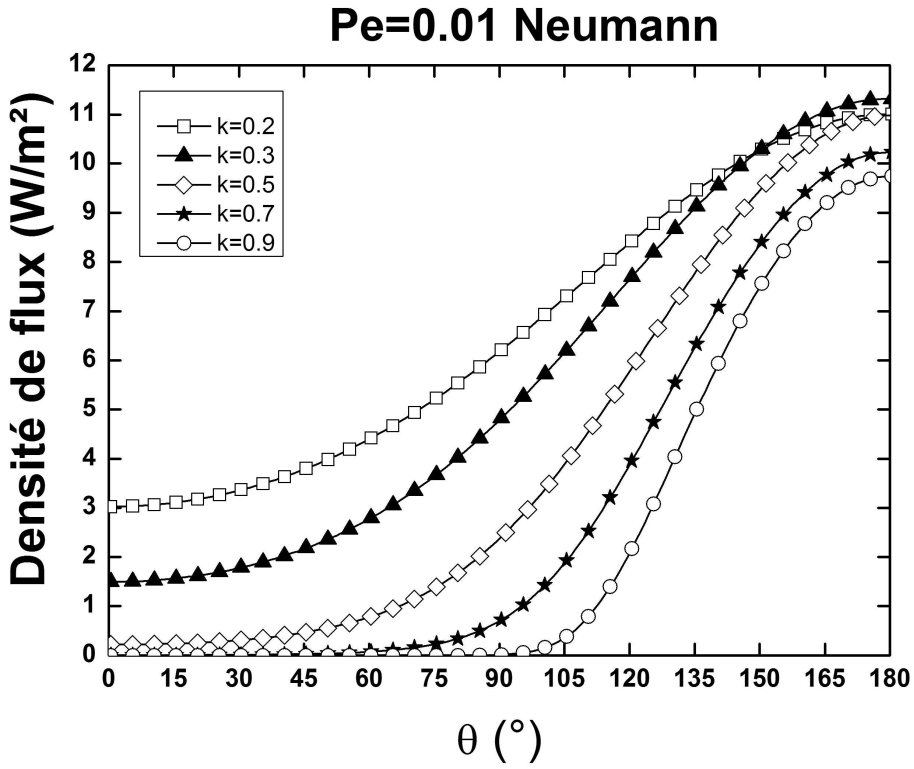

FIG. 2.15 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 0.01$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

$A_0 = 2.990152169063148$	$A_8 = -1.0523843048163891.10^8$
$A_1 = 136.92939884730947$	$A_9 = 1.5344866428444672.10^8$
$A_2 = -4259.732490349418$	$A_{10} = -1.5908331760322857.10^8$
$A_3 = 73139.3520724898$	$A_{11} = 1.145079798747015.10^8$
$A_4 = -713940.7278591124$	$A_{12} = -5.440091814570284.10^7$
$A_5 = 4.383276794792116.10^6$	$A_{13} = 1.5338987357435942.10^7$
$A_6 = -1.8034523540794373.10^7$	$A_{14} = -1.9439267769396305.10^6$
$A_7 = 5.166724229811835.10^7$	

TAB. 2.3 – *Coefficients numériques de l'expression 2.3*

La figure 2.17 compare les valeurs numériques et celles données par l'expression 2.3. L'accord est excellent pour $10^{-3} \leq k \leq 0.99$ avec des erreurs relatives inférieures à 0.2%.

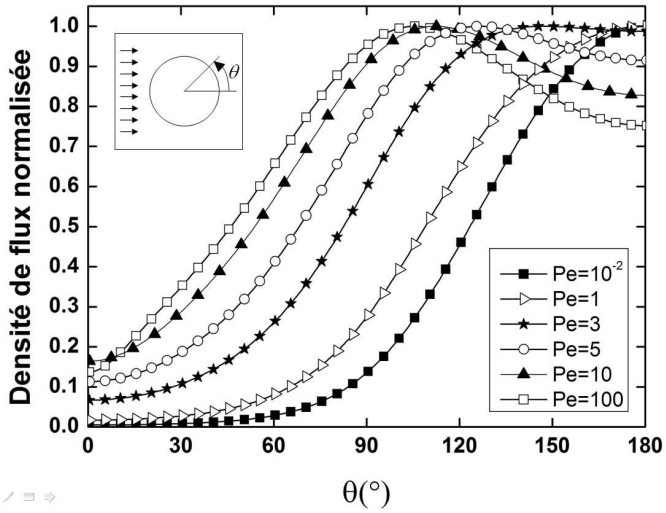

FIG. 2.16 – *Evolution de la densité de flux normalisée sur le cylindre pour* $k = 0.6$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

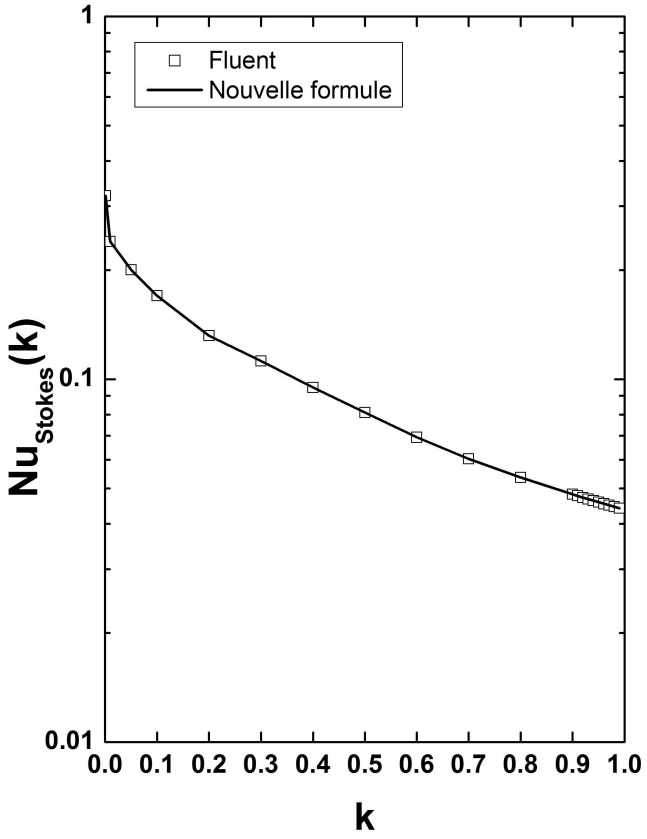

FIG. 2.17 – Nu_{Stokes} *en fonction de* k *à* $Pe = 0.01$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

2.3 Conclusion

Le confinement d'un cylindre en situation centrée entre deux plans parallèles a comme conséquence qu'il existe des «*solutions de type Stokes*» pour le transfert sur sa surface, que les plans soient isothermes (conditions aux limites de type Dirichlet) ou isolants (conditions aux limites de type Neumann), lorsque le nombre de Péclet est très faible. Dans le premier cas, plus le confinement est important, plus le nombre de Nusselt est grand alors que dans le second, c'est l'inverse qui se produit. Lorsque le nombre de Péclet est très grand, les deux problèmes tendent vers la même solution d'un transfert par convection forcée.

Chapitre 3

Cylindre en situation excentrée

Nous étudions à présent le même problème que dans le chapitre précédent mais en faisant maintenant varier l'excentrement e du cylindre. Rappelons que ce paramètre vaut $e = c/b$ où c est la distance entre l'axe du cylindre et le plan médian aux parois parallèles et b la demi-distance entre ces parois (Fig. 3.1). Il varie entre 0 lorsque le cylindre est centré et $e_{max} = 1 - k$ lorsque le cylindre touche une paroi. Nous allons observer comment cette dissymétrie va modifier les transferts sur le cylindre et ceci pour deux types de conditions aux limites. Les résultats présentés ici correspondent au rapport de confinement $k = 0.29$ mais peuvent être étendus aux autres confinements dont les résultats ne sont pas présentés ici.

3.1 Conditions aux limites de type Dirichlet

Dans ce cas, les conditions aux limites sont de type « températures imposées » comme nous le rappelons dans la figure 3.1. Le cylindre a une température T_0, les plans parallèles et l'écoulement à l'amont du cylindre sont à la température T_∞ et sur la section avale, on a $\partial T/\partial x = 0$.

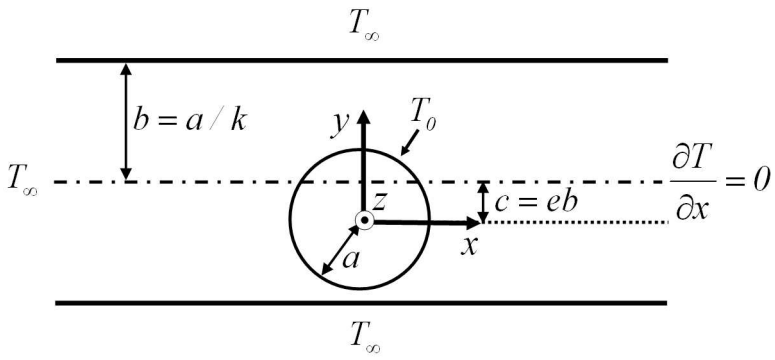

FIG. 3.1 – *Conditions aux limites de type Dirichlet*

Sur la figure 3.2, nous avons tracé le nombre de Nusselt normalisé par sa valeur lorsque

le cylindre est en situation symétrique ($e/e_{max} = 0$) en fonction de e/e_{max} pour $Pe = 2.10^{-3}$, 20 et 1000. Sur cette figure, on peut remarquer que le flux transféré passe par un minimum pour $Pe = 1000$ à une valeur de $e/e_{max} \approx 0.7$. A cet excentrement particulier, le flux a baissé de plus de 8% par rapport à sa valeur au centre. Lorsque le nombre de Péclet diminue, ce minimum s'atténue. Pour $Pe = 20$, la baisse n'est plus que de l'ordre de 6%. La localisation de ce minimum a également tendance à se décaler vers les faibles excentrements puisqu'il se situe à une valeur de l'ordre de $e/e_{max} \approx 0.6$. En revanche, cet extremum a complètement disparu pour $Pe = 2.10^{-3}$. La variation du flux transféré est alors monotone et croissante.

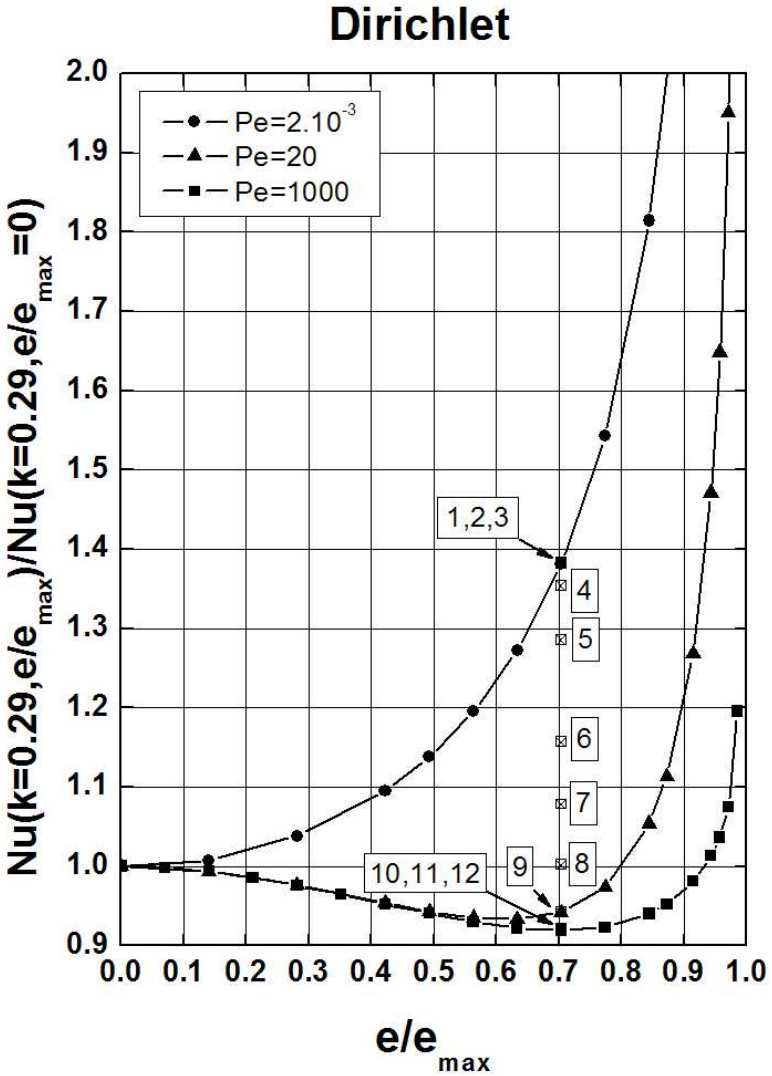

FIG. 3.2 – *Flux normalisé en fonction de e/e_{max} pour différents Pe (conditions aux limites de type Dirichlet). Les points ont les mêmes étiquettes que sur la figure 3.3*

Pour confirmer cette évolution, nous avons calculé pour la valeur $e/e_{max} = 0.704$ la variation du flux normalisé en fonction du nombre de Péclet. Nous avons choisi cette valeur particulière de l'excentrement car elle correspond approximativement au minimum de transfert aux grands nombres de Péclet. Les résultats sont représentés dans la figure 3.3.

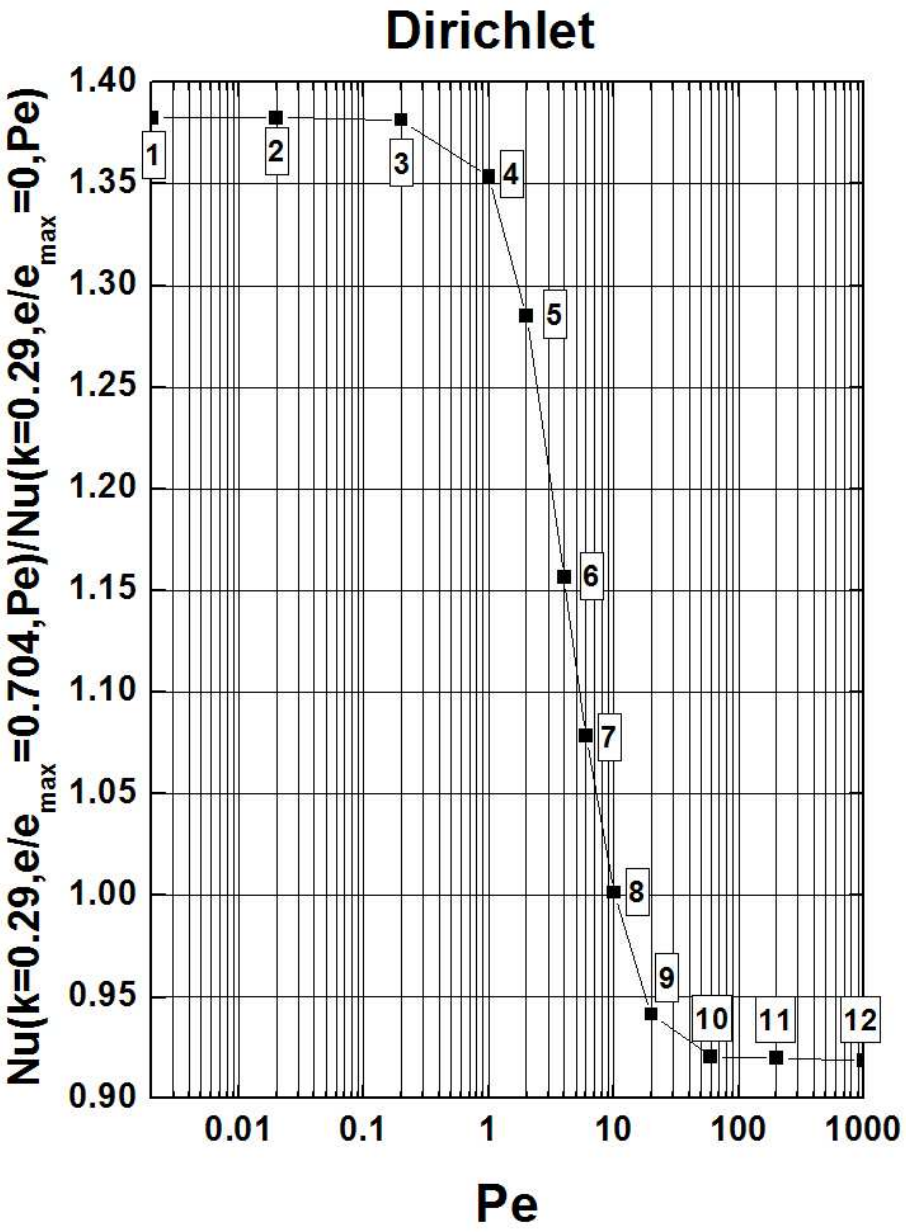

FIG. 3.3 – *Flux normalisé en fonction de Pe pour* $e/e_{max} = 0.704$ *(conditions aux limites de type Dirichlet). Les points ont les mêmes étiquettes que sur la figure 3.2*

Ce graphe permet de distinguer deux « régimes limites » situés aux très faibles nombres de Péclet et aux très grands nombres de Péclet (pour plus de clarté, nous avons numéroté les points de calcul de 1 à 12 dans les figures 3.2 et 3.3) :

- pour $Pe << 1$, les points 1, 2 et 3 correspondant respectivement à $Pe = 2.10^{-3}$, 2.10^{-2} et 0.2 sont sur un palier de valeur supérieure à 1 (absence du minimum de flux)
- pour $Pe >> 1$, les points 10, 11 et 12 correspondant respectivement à $Pe = 60$, 200 et 1000 sont sur un autre palier dont la valeur est cette fois inférieure à 1 (présence du minimum de flux)
- entre ces deux régimes, le flux normalisé diminue de façon monotone. Le point 8 correspondant à $Pe = 10$ donne la valeur 1 du flux normalisé. Cette valeur du nombre de Péclet marque donc la transition entre « les régimes avec minimum » pour $Pe > 10$ et « les régimes sans minimum » pour $Pe < 10$.

Grâce à la figure 3.3, on peut donc estimer qu'il y aura un minimum pour des nombres de Péclet supérieurs à une valeur de l'ordre de 10 (le point numéroté 8 sur les figures 3.2 et 3.3). Il nous a semblé intéressant de voir dans quelles conditions pratiques on pourrait observer ce minimum. Nous nous sommes donc penchés sur les cas de l'eau, de l'air et du glycérol dans des conditions de température et de pression standards. On sait que plus k est grand, plus les «*solutions de type Stokes*» sont présentes aux nombres de Reynolds importants. La transition entre le régime linéaire des «*solutions de type Stokes*» et le régime inertiel a lieu à un nombre de Reynolds Re_c qui est une fonction croissante de k. Ceci a été mis clairement en évidence dans le cas où le cylindre est en situation centrée. En est-il de même lorsque le cylindre est excentré et dans l'affirmative, les transitions entre les deux régimes ont-elles lieu au même nombre de Reynolds critique ? En d'autres termes, cette transition dépend-elle sensiblement de l'excentrement ? Pour tester cette hypothèse, nous avons étudié l'évolution de la force de traînée pour un excentrement $e/e_{max} = 0.704$ en fonction du nombre de Reynolds. Nous avons ainsi calculé :

$$\Lambda^{Trans}(k = 0.29, e/e_{max} = 0.704, Re) = \frac{F^{Trans}(k = 0.29, e/e_{max} = 0.704, Re)}{\mu U}$$

Les résultats sont comparés avec ceux obtenus dans le cas du cylindre centré dans les figures 3.4 et 3.5. On y constate qu'effectivement, les transitions sont indépendantes de e/e_{max} puisqu'elles ont lieu au même nombre de Reynolds $Re_c(k = 0.29) \approx 1$. Ceci nous permet donc d'exploiter la figure 3.2 page 49 correspondant au cas du cylindre centré pour estimer les nombres de Reynolds critiques $Re_c(k)$. Dans le tableau 3.1, les deux premières colonnes rassemblent respectivement le rapport de confinement k et le nombre de Reynolds de transition Re_c approximatif correspondant. Les trois colonnes suivantes donnent les nombres de Péclet de transition séparant les régimes avec minimum de flux de ceux sans minimum pour les trois fluides considérés. En se basant sur la valeur $Pe \approx 10$ issue de la courbes 3.3, on peut en effet estimer [1] les régimes où la présence d'un minimum de flux se manifestera.

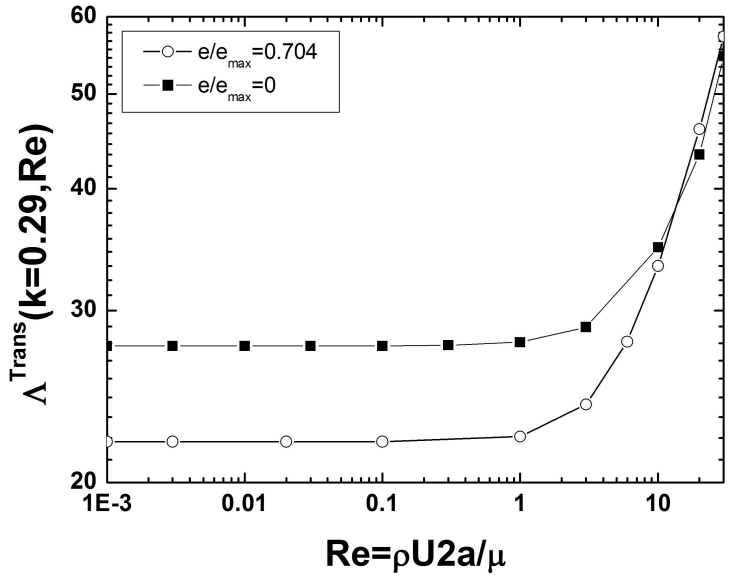

FIG. 3.4 – $\Lambda^{Trans}(k=0.29,Re)$ *en fonction de Re pour* $e/e_{max}=0$ *et* $e/e_{max}=0.704$

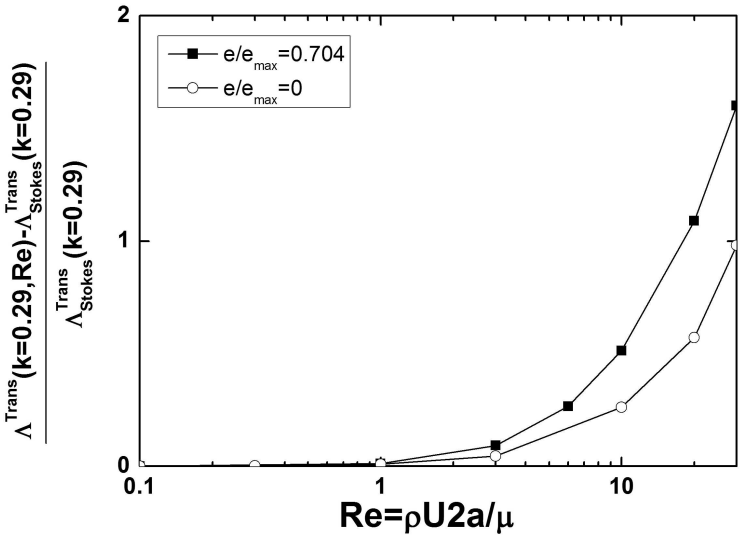

FIG. 3.5 – $[\Lambda^{Trans}(k=0.29,Re)-\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k=0.29)]/\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k=0.29)$ *en fonction de Re pour* $e/e_{max}=0$ *et* $e/e_{max}=0.704$

Ces régimes sont repérés par les valeurs en gras du nombre de Péclet [2]. Dans le cas de l'air, on peut estimer qu'il y aura un minimum si le confinement du cylindre est supérieur à $k = 0.6$. Pour l'eau, le confinement minimal est de l'ordre de $k = 0.1$ alors que pour le glycérol, la condition sur la valeur de k est beaucoup moins restrictive du fait de la grande valeur de son nombre de Prandtl.

		Nombre de Péclet		
k	$Re_c(k)$	Air ($Pr \approx 0.7$)	Eau ($Pr \approx 7$)	Glycérol ($Pr \approx 20\,000$)
0.001	0.01	0.007	0.07	**200**
0.01	0.1	0.07	0.7	**2000**
0.1	1	0.7	**7**	**20 000**
0.44	10	**7**	**70**	**200 000**
0.9	100	**70**	**700**	**2 000 000**

TAB. 3.1 – *En gras, régimes susceptibles de présenter un minimum de transfert pour l'air, l'eau et le glycérol*

Afin d'expliquer la présence de ces deux régimes (régime avec passage par un minimum et régime de croissance monotone), nous avons tracé les répartitions angulaires de la densité de flux sur le cylindre dans les figures 3.6 et 3.7.

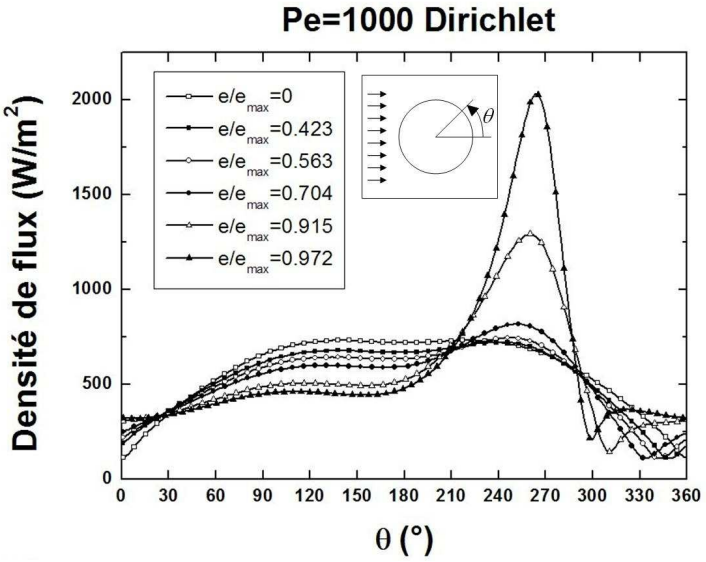

FIG. 3.6 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 1000$ (conditions aux limites de type Dirichlet)*

1. Cette valeur du nombre de Péclet n'est évidemment valable que pour des confinements voisins de $k = 0.29$

2. Si l'on s'intéresse au transfert de masse, il faut remplacer le nombre de Prandtl par le nombre de Schmidt qui est de l'ordre de 1000 pour une solution de molécules «simples»; on se retrouve alors dans une configuration analogue à celle du glycérol

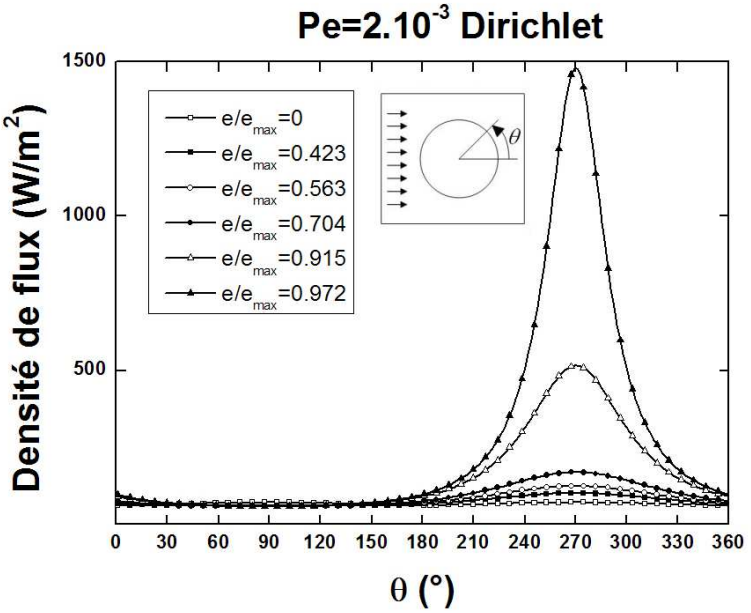

FIG. 3.7 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 2.10^{-3}$ *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

Les isothermes sont représentées dans les figure 3.8 et 3.9 pour $Pe = 1000$ et $Pe = 2.10^{-3}$. Dans ces figures, lorsque e/e_{max} augmente, le point du cylindre correspondant à $\theta = 270°$ se rapproche de l'un des plans. Dans un souci de simplicité, nous désignerons par la suite «zone 1» la région centrée autour de l'angle $\theta = 270°$ et «zone 2» la région correspondant à l'intervalle $0° < \theta < 180°$.

Premier cas : Pe >> 1

En ce qui concerne le régime des grands nombres de Péclet, on observe clairement sur la figure 3.6 que lorsque le cylindre se rapproche d'un plan, le flux transféré augmente fortement dans la zone 1 alors qu'il diminue dans la zone 2. Pour les excentrements les plus faibles ($e/e_{max} < 0.7$), c'est ce deuxième effet qui est prédominant. La baisse du flux sur la partie du cylindre tournée vers le plan le plus éloigné est plus importante que le rehaussement du flux sur la paroi du cylindre tournée vers le plan le plus proche. Le flux va donc globalement diminuer. Pour $e/e_{max} \approx 0.7$, la hausse du flux dans la zone 1 compense sa baisse dans la zone 2 : on se trouve alors au minimum. Pour $e/e_{max} > 0.7$, la hausse du flux dans la zone 1 devient prépondérante sur sa baisse dans la zone 2 et le flux transféré va globalement augmenter. La combinaison de cette diminution pour les excentrements les plus faibles et de la forte augmentation pour les excentrements les plus grands rend donc compte de la présence d'un minimum aux grands nombres de Péclet. Très proche d'un plan, c'est la distance la plus faible $\epsilon = b(e_{max} - e)$ entre le cylindre et le plan qui gouverne la brusque remontée du flux.

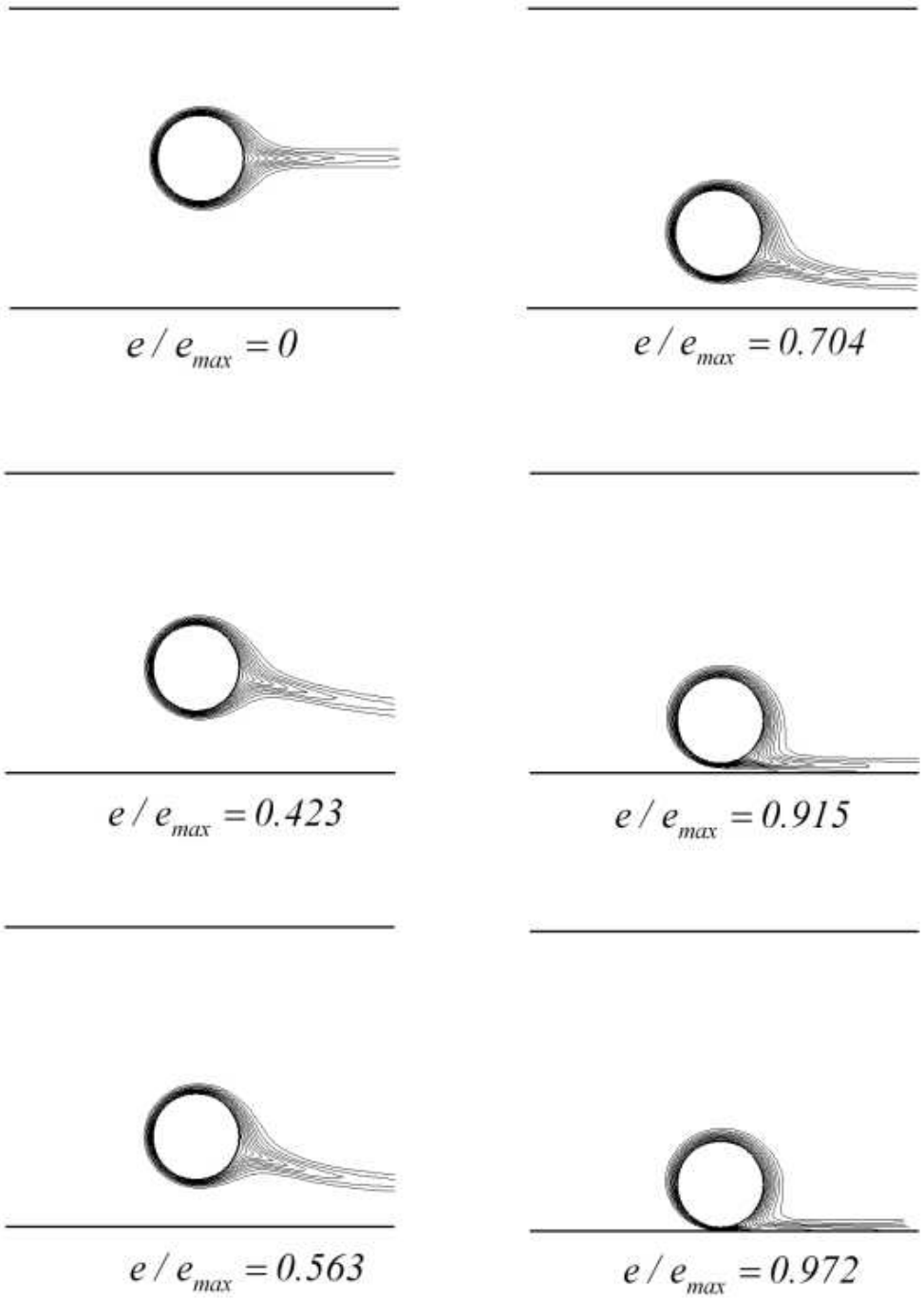

FIG. 3.8 – *Isothermes autour du cylindre pour* $Pe = 1000$ *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

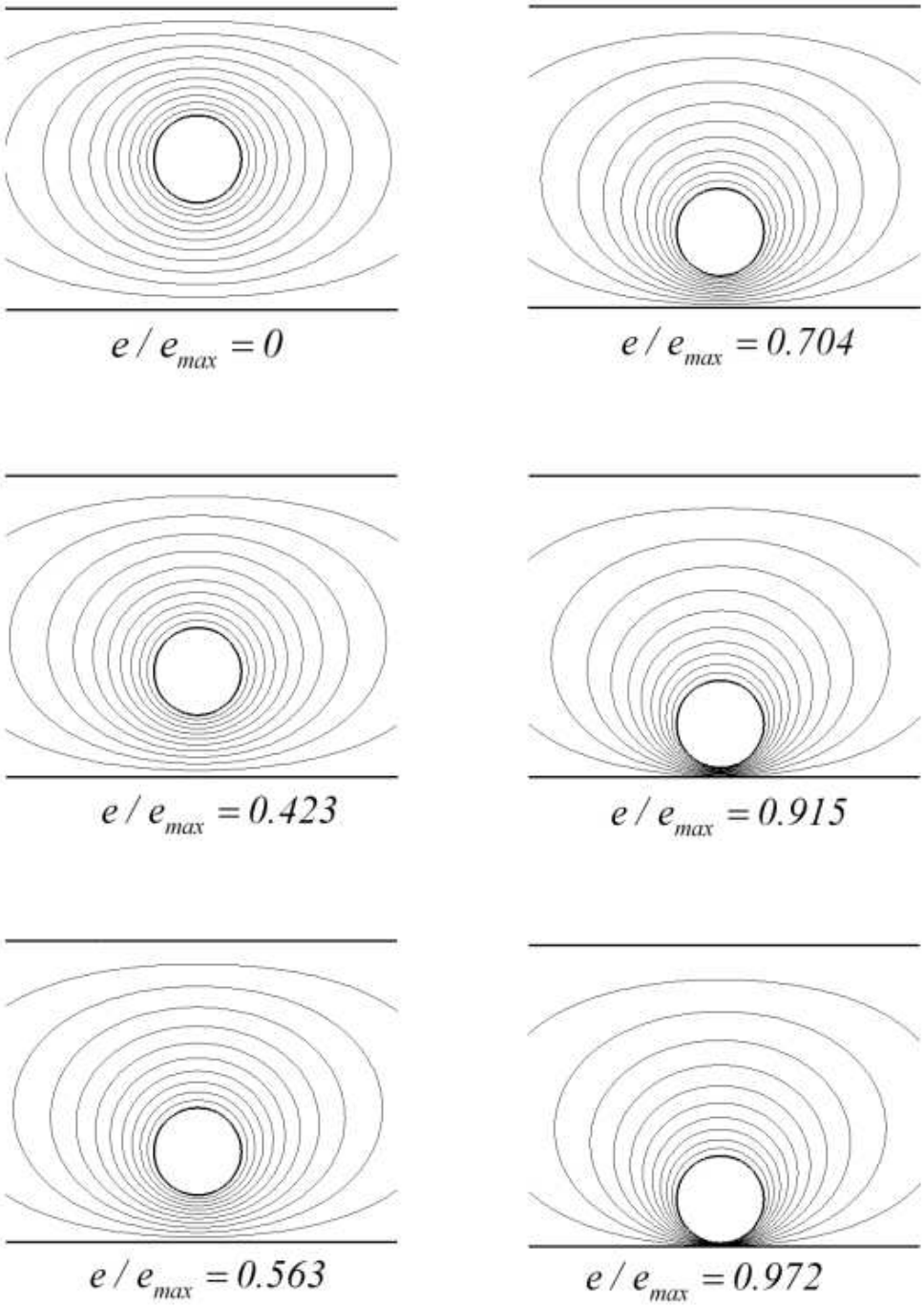

FIG. 3.9 – *Isothermes autour du cylindre pour* $Pe = 2.10^{-3}$ *(conditions aux limites de type Dirichlet)*

En effet, la densité de flux φ dans cette zone est proportionnelle à :

$$\varphi \propto \lambda(\frac{T_0 - T_\infty}{\delta_T})$$

où λ est la conductivité thermique du fluide et δ_T l'épaisseur de couche limite thermique. Lorsqu'on s'approche d'un plan, l'épaisseur de couche limite thermique est bornée par la distance ϵ. Lorsque $e \to e_{max}$, $\epsilon \to 0$ et donc $\delta_T \to 0$: φ va augmenter fortement (comme dans le cas centré, voir la section 2.1.2 page 171). Ceci est également visible sur les différents schémas de la figure 3.8. Aux grands nombres de Péclet, la couche limite thermique autour du cylindre est très mince en comparaison avec la distance entre les plans, sauf à proximité immédiate de ceux-ci où elle est limitée par l'interstice entre le cylindre et la paroi plane. On observe aussi sur ces schémas l'épaississement de la couche limite thermique du côté du cylindre tourné vers le plan le plus éloigné qui est la cause de la baisse du flux dans cette zone.

Second cas : Pe $<<$ 1

Pour $Pe = 2.10^{-3}$, on constate sur la figure 3.7 que la répartition angulaire du flux est sensiblement différente. La différence la plus grande tient au fait que lorsque le cylindre s'approche d'un plan, il n'existe quasiment plus dans ce cas de baisse du flux dans la zone 2. Par contre, la hausse du flux dans la zone 1 est encore présente. En l'absence d'effets antagonistes, le minimum du flux ne peut plus apparaître et l'on se retrouve avec une croissante monotone du flux avec l'excentrement. La forte hausse au voisinage de la paroi ($e \to e_{max}$) s'explique de la même façon que dans le cas $Pe >> 1$. En observant les vignettes de la figure 3.9, on remarque que dans le régime des faibles nombres de Péclet, l'épaisseur de couche limite thermique est très grande et occupe tout l'espace possible. Une variation de la position du cylindre n'a que peu d'influence sur l'espacement des isothermes au voisinage du cylindre ce qui implique une faible variation du gradient de température et donc du flux transféré.

Une partie de ces résultats a été publiée dans les actes du congrès SFT 2006 [155].

3.2 Conditions aux limites de type Neumann

Nous supposons à présent que les plans parallèles sont adiabatiques, les autres conditions aux limites restant par ailleurs inchangées (Fig. 3.10)

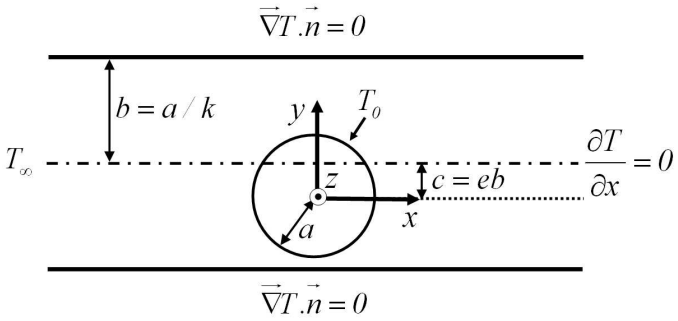

FIG. 3.10 – *Conditions aux limite de type Neumann*

La figure 3.11 montre le nombre de Nusselt normalisé par sa valeur lorsque le cylindre est en situation symétrique ($e/e_{max}=0$) en fonction de e/e_{max} pour $Pe=2.10^{-3}$, 20 et 1000.

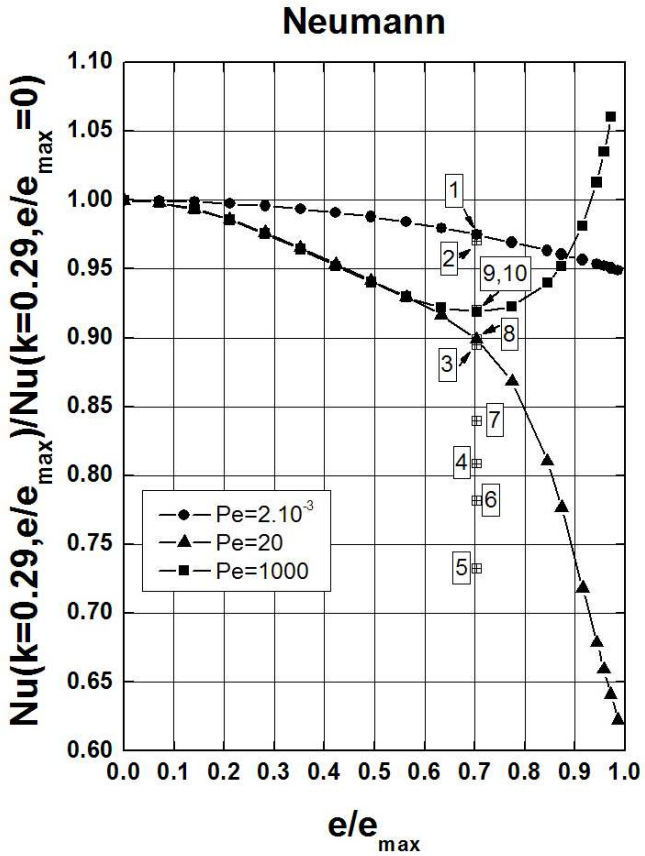

FIG. 3.11 – *Flux normalisé en fonction de e/e_{max} pour différents Pe (conditions aux limites de type Neumann)*

Par comparaison avec la figure 3.2 (conditions aux limites de type Dirichlet), on constate des similitudes mais aussi des différences apportées par les nouvelles conditions aux limites. Pour les grands nombres de Péclet, le flux passe également par un minimum pour $e/e_{max} = 0.704$. Par contre pour les plus faibles valeurs de Pe, on observe non seulement la disparition du minimum (comme dans le cas précédent) mais également une diminution du transfert. Rappelons que la tendance avec les conditions aux limites de type Dirichlet était à une augmentation du flux avec atténuation puis disparition du minimum. On est donc passé pour les faibles Pe d'une situation d'augmentation monotone (Dirichlet) du flux à une situation de diminution monotone (Neumann). Dernière chose remarquable, la courbe relative à $Pe = 2.10^{-3}$ se trouve au-dessus de celle correspondant à $Pe = 20$. Pour mieux comprendre toutes ces évolutions, nous avons tracé pour la valeur $e/e_{max} = 0.704$ la variation du flux normalisé en fonction du nombre de Péclet (Fig. 3.12).

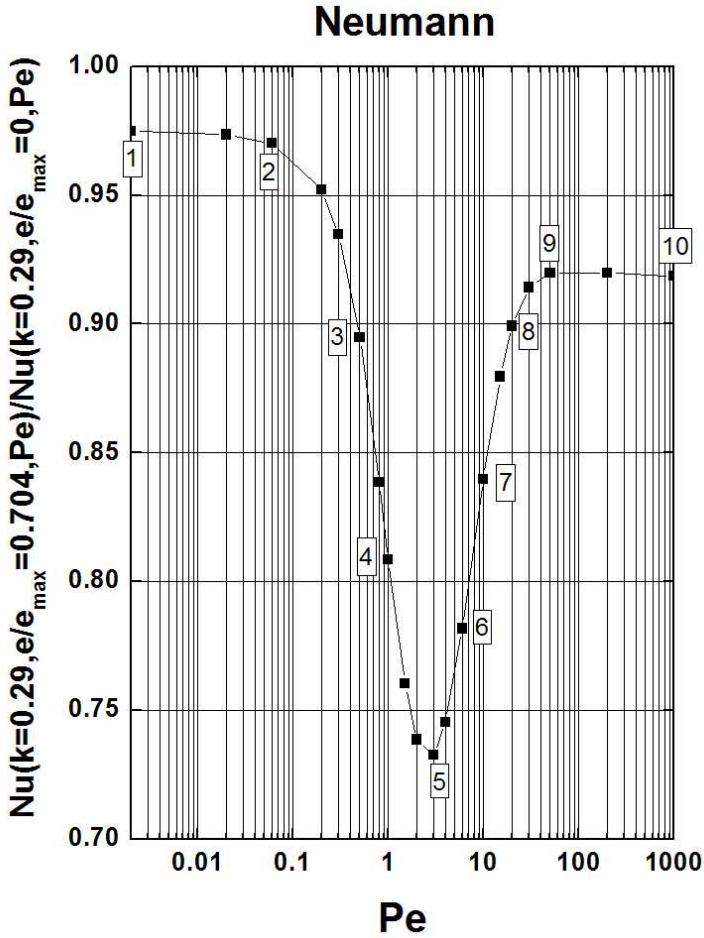

FIG. 3.12 – *Flux normalisé en fonction de Pe pour* $e/e_{max} = 0.704$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

Cette figure rend effectivement bien compte de cette curieuse évolution. On y distingue comme dans le «cas Dirichlet» deux régimes limites situés aux grands nombres et petits nombres de Péclet. L'évolution du flux normalisé entre ces deux régimes limites n'est par contre plus monotone comme c'était le cas pour les conditions aux limites de type Dirichlet. En partant des faibles valeurs du nombre de Péclet et en suivant la numérotation des points de calcul, on a alors :

- pour les points de 1 à 2, on a un palier correspondant au « régime limite » pour les très faibles Pe. Bien que la valeur de ce palier soit inférieure à 1, cela ne caractérise pas la présence d'un extremum car l'évolution du flux est décroissante monotone dans cette gamme de nombres de Péclet. Le flux normalisé décroît lentement avec l'excentrement pour les points sur ce palier.
- pour les points de 2 à 8 ($0.06 < Pe < 20$), le flux normalisé décroît encore de manière monotone sans minimum. Entre les points 2 et 5 compris ($0.06 < Pe < 3$), le flux normalisé décroît de plus en plus vite avec l'excentrement alors que pour les points de 5 à 8, la vitesse de décroissance du flux normalisé avec l'excentrement devient de plus en plus faible sans toutefois retrouver la lente décroissance du premier palier.
- pour les points 9 et au-delà, on observe le second palier correspondant au « régime limite » pour les grands Pe. Cette fois-ci, la valeur de ce palier, de l'ordre de 0.92, est bien une caractéristique de la présence d'un minimum de flux et l'évolution du flux n'est plus monotone.

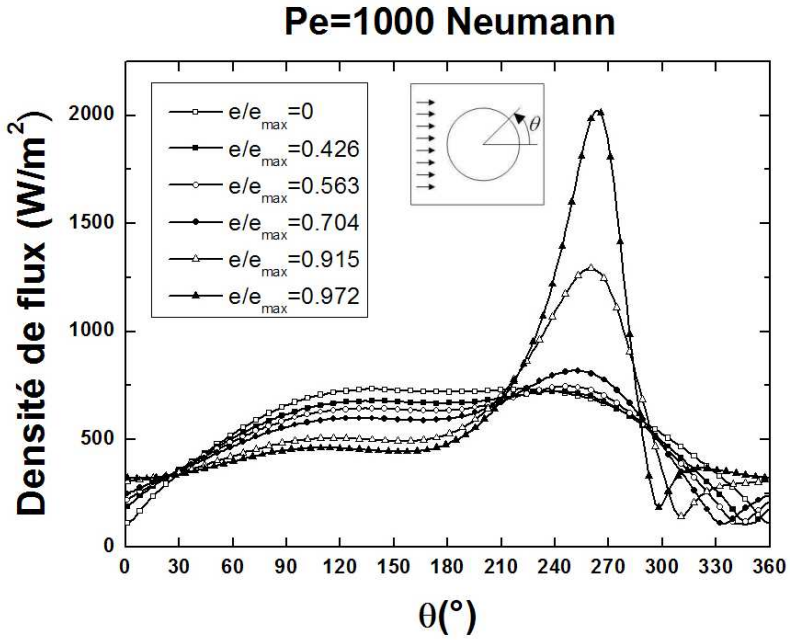

FIG. 3.13 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 1000$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

Sur les figures 3.13, 3.15 et 3.14, nous avons tracé la répartition angulaire du flux sur la paroi du cylindre pour des nombres de Péclet valant respectivement 1000, 20 et 2.10^{-3}. Les figures 3.16, 3.17 et 3.18 représentent les isothermes correspondantes. On peut noter qu'aux grands nombres de Péclet la répartition des densités de flux sont identiques dans les cas Neumann et Dirichlet comme le confirme l'identité des courbes 3.6 et 3.13. Cette analogie s'explique aisément par le fait qu'aux grandes valeurs de Pe, la couche limite thermique est beaucoup plus petite que la distance entre le cylindre et le plan le plus proche. Par conséquent, la condition aux limites sur les plans parallèles ne se fait plus sentir. Dans ces conditions, l'évolution du flux passe aussi par un minimum. Les isothermes de la figure 3.16 page 202 sont en tous points identiques à celles visibles dans la figure 3.8 page 194. Pour $Pe << 1$, comme la couche limite est très grande, le transfert est très sensible à la condition aux limites sur les parois adiabatiques. La figure 3.14 montre que dans le cas centré, le transfert s'effectue principalement à l'amont du cylindre ($\theta = 180°$) de manière symétrique.

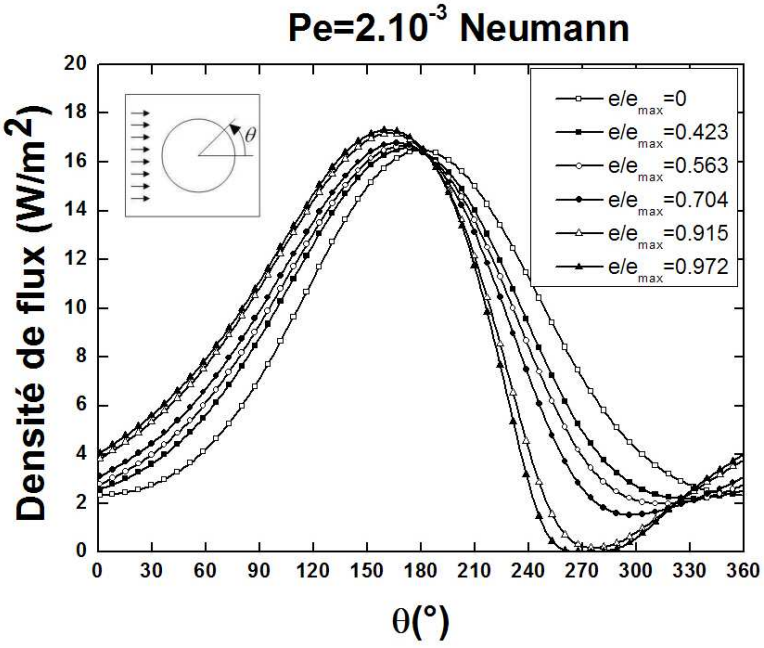

FIG. 3.14 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 2.10^{-3}$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

Cependant, lorsque le cylindre s'excentre, l'éloignement d'un des plans isolants réduit l'influence de la condition d'adiabaticité de ce plan comme le montre la figure 3.18. Dans la zone du cylindre qui fait face à ce plan, on va donc assister à un rehaussement de la densité de flux. Mais le rapprochement de l'autre plan tend par contre à réduire la densité de flux dans la zone interstitielle entre le cylindre et ce plan. Ces deux effets antagonistes conduisent globalement à une diminution du transfert car la diminution

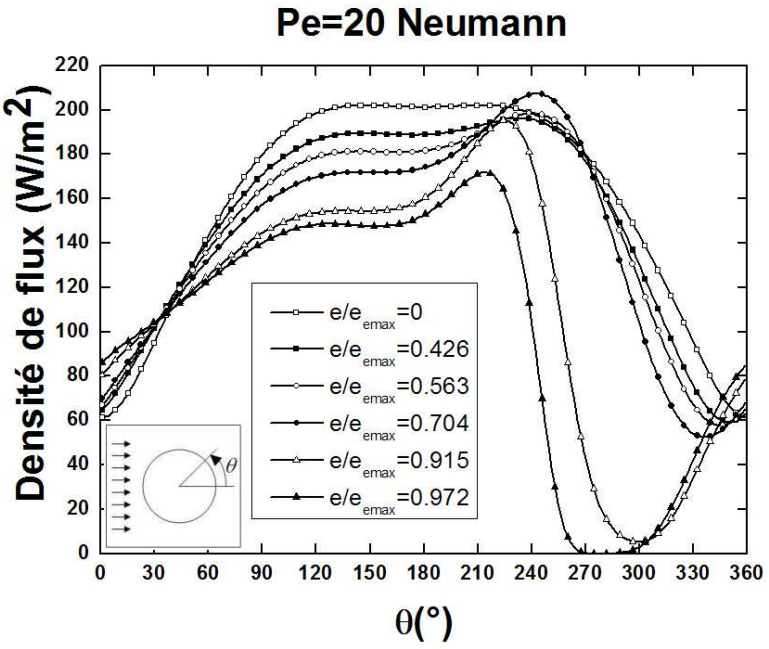

FIG. 3.15 – *Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour* $Pe = 20$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

du flux est drastique (la distance interstitielle tend vers 0) alors que l'augmentation est bornée par le confinement. Entre les deux régimes limites, nous assistons à un régime intermédiaire où la diffusion et la convection jouent des rôles de même intensité. L'évolution est alors non monotone en fonction de Pe. D'une part, ceci est dû aux effets opposés induits par la sensibilité aux conditions adiabatiques des parois parallèles accompagnant le phénomène de diffusion et d'autre part à la prise en main du transfert par la convection à partir du moment où celle-ci devient prédominante pour $Pe \approx 3$ correspondant au minimum de la courbe 3.12. On peut s'en rendre compte sur la figure 3.15 qui montre la répartition angulaire de la densité de flux sur le cylindre pour $Pe = 20$ ainsi que la figure 3.17 représentant les isothermes au même nombre de Péclet.

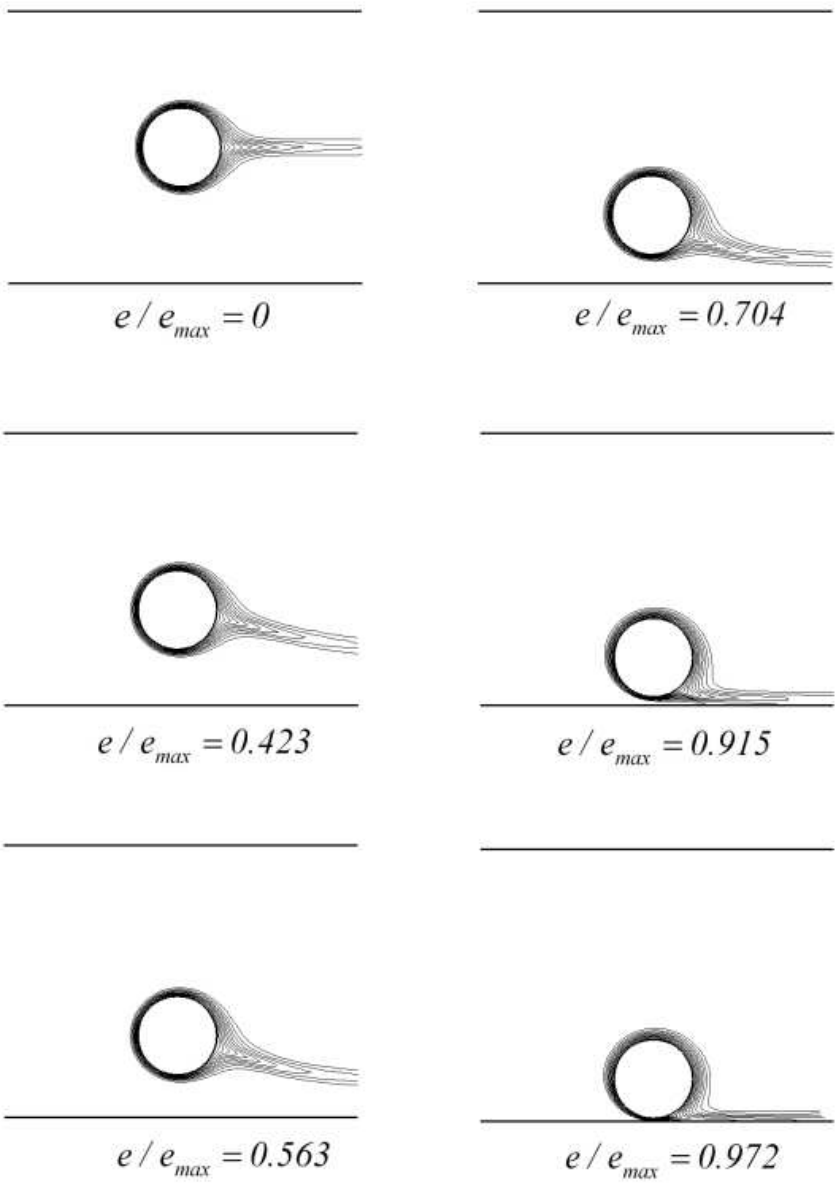

FIG. 3.16 – *Isothermes autour cylindre pour* $Pe = 1000$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

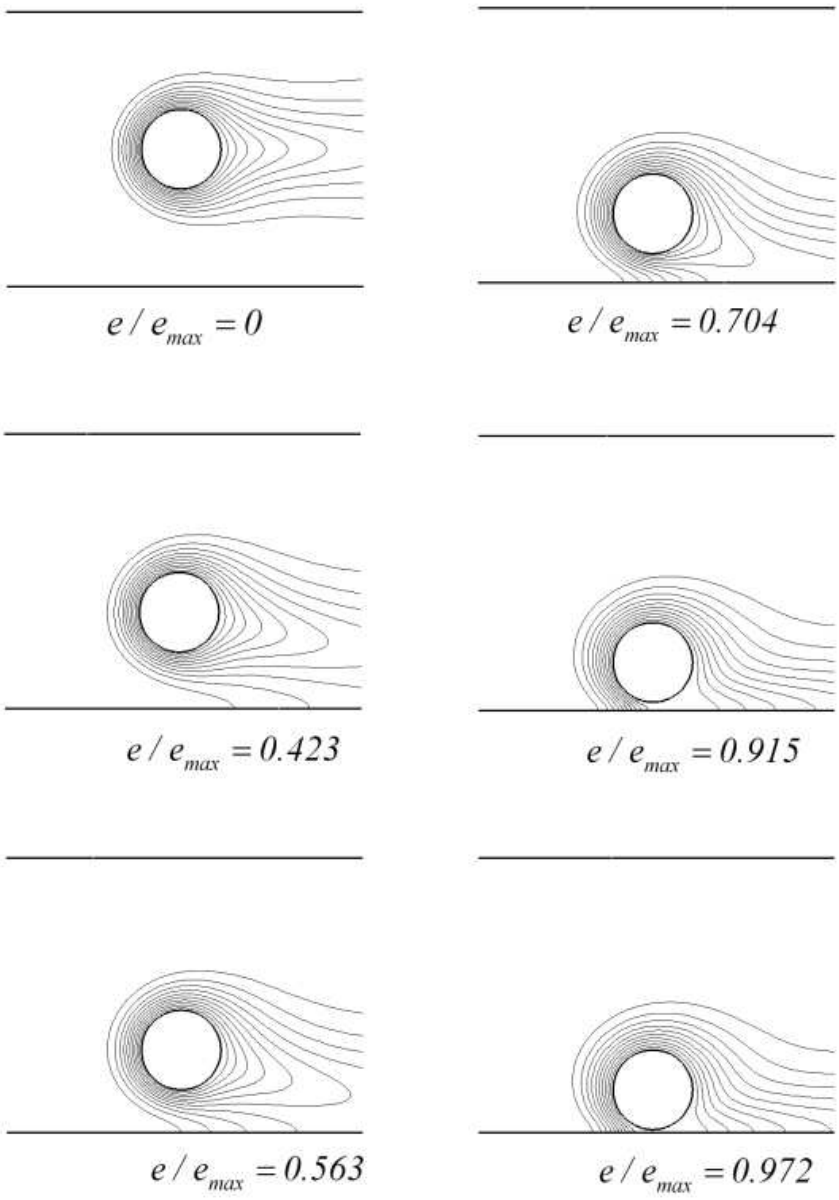

FIG. 3.17 – *Isothermes autour du cylindre pour* $Pe = 20$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

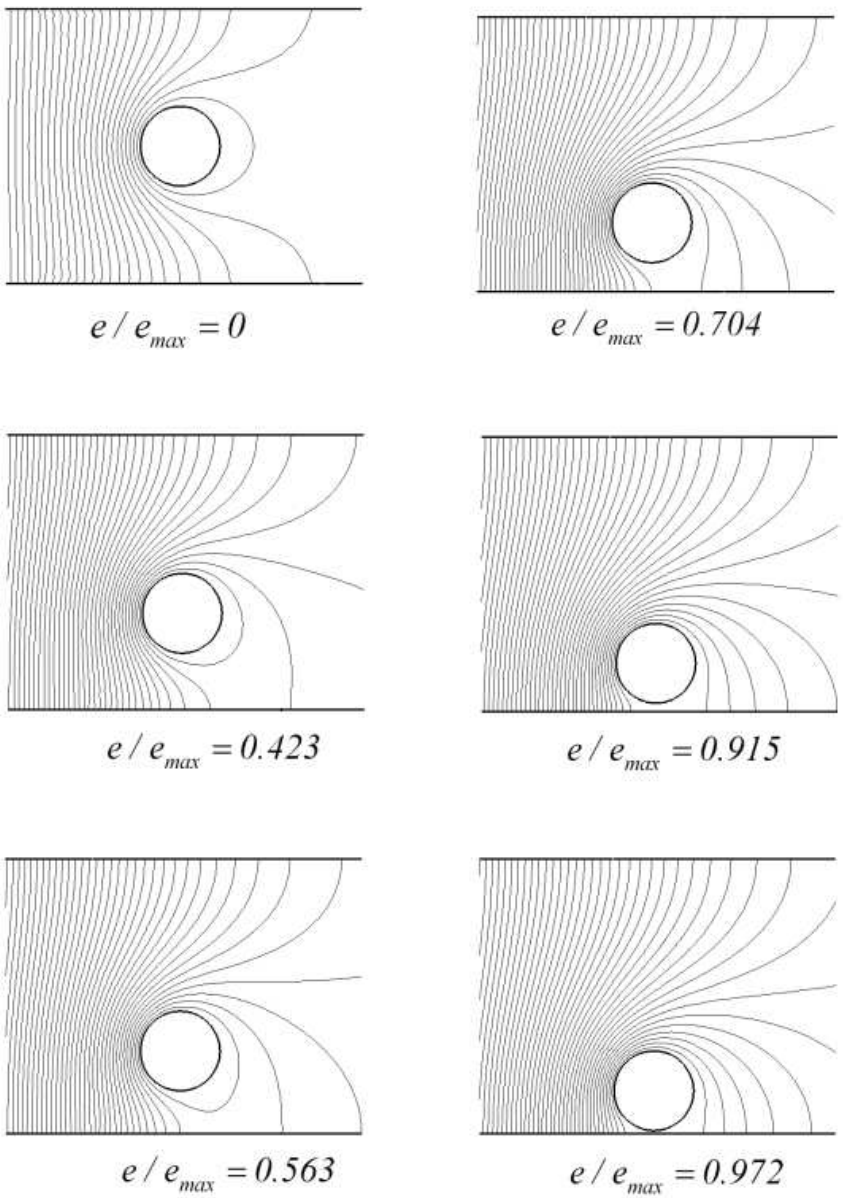

FIG. 3.18 – *Isothermes autour du cylindre pour* $Pe = 2.10^{-3}$ *(conditions aux limites de type Neumann)*

3.3 Conclusion

Après avoir étudié l'effet du confinement sur le transfert, nous avons donné des résultats exhaustifs sur l'effet de dissymétrie sur ce transfert confiné. Comme il est bien établi que les conditions aux limites jouent un rôle important dans ces transferts confinés, nous avons étudié séparément le transfert sur un cylindre maintenu à une température fixe alors que les plans qui le confinent sont soit isothermes soit adiabatiques. Dans les deux cas, nous avons obtenu un résultat non intuitif montrant qu'aux grands nombres de Péclet, l'effet de l'excentrement se traduit par une évolution non monotone du flux à l'identique de l'évolution obtenue pour la traînée dans le cas dynamique. Ce comportement confirme l'existence de la similitude de Reynolds entre les deux problèmes. Aux faibles nombres de Péclet, nous assistons à une augmentation monotone avec l'excentrement dans le cas Dirichlet et une évolution inverse dans le cas Neumann.

troisième partie

Conclusion générale

Dans la première partie de ce mémoire, nous nous sommes efforcés de comprendre et de caractériser les écoulements bidimensionnels aux faibles nombres de Reynolds autour d'une particule cylindrique de section circulaire lorsqu'elle est confinée entre deux plans parallèles. La revue bibliographique a montré que ce problème, comme celui d'un cylindre non confiné, présente de grandes difficultés théoriques. On est par exemple confronté en milieu infini au célèbre paradoxe de Stokes. L'équation d'Oseen, bien que linéaire, admet une solution correspondant à une force de traînée sur le cylindre qui n'est pas linéaire en vitesse. Par chance, ce comportement singulier disparaît en présence d'un confinement comme nous l'avons confirmé dans notre travail. Les études théoriques sur le cylindre confiné sont relativement rares et se contentent généralement de traiter des situations limites comme la lubrification ou des problèmes très faiblement perturbés par rapport à des situations symétriques. Devant la grande complexité théorique de ces systèmes, nous avons naturellement adopté une approche numérique. La technique des volumes finis a été choisie parce qu'elle est particulièrement bien adaptée pour résoudre les équations de Navier-Stokes aux très faibles nombres de Reynolds. Nous avons tout d'abord construit un programme basé sur une méthode de projection puis nous avons comparé ses résultats avec ceux donnés par le code commercial Fluent sur quelques cas tests. Les bons résultats obtenus par ce dernier code nous ont finalement décidé à l'utiliser principalement dans cette étude. Nous avons alors décrit les efforts (forces, couples et pertes de charges) subis et induits par la particule cylindrique lorsqu'elle est en mouvement de translation uniforme, de rotation uniforme puis fixe dans un écoulement de Poiseuille, tout d'abord dans le cas particulier où elle est en situation centrée, puis dans le cas général où elle est en position excentrée. L'ensemble de ces résultats nous a ensuite servi de base de données pour construire une matrice de résistance que nous avons élargie en introduisant le terme de perte de charge. Cette technique est rendue possible grâce à la linéarité des solutions en régime confiné. L'utilisation de cet outil nous a finalement permis de décrire la sédimentation d'une particule libre puis son transport dans un écoulement de Poiseuille plan (particule de flottabilité neutre ou non). Dans le cas de la sédimentation, la non monotonie de la vitesse de chute de la particule en fonction de son excentrement prouve clairement que la viscosité d'une suspension dépend non seulement de la concentration volumique mais encore de la position de chacune des particules ce qui tend à confirmer que cette viscosité est fluctuante. A l'occasion, nous avons expliqué certaines questions restées en suspens jusqu'à présent. Parmi elles, nous avons clairement démontré que l'hypothèse communément admise dans la modélisation du transport des fibres, consistant à supposer qu'elles ont la même cinématique que les particules du fluide non perturbé, ne se justifie pas dans le cas des fortes concentrations comme l'on en rencontre dans les procédés industriels d'injection de matériaux composites. En effet nous avons montré que la particule cylindrique n'est ni convectée à la même vitesse ni ne tourne à la même vitesse que la particule fluide. Cette étude sur la dynamique des écoulements autour d'un cylindre confiné permet en outre de nous éclairer et de compléter nos connaissances sur les interactions hydrodynamiques entre une particule cylindrique et des frontières planes. Disposant désormais des champs de vitesse pour ce système, il nous a semblé intéressant de les utiliser afin de résoudre les problèmes concernant le transfert d'un scalaire passif sur la paroi du cylindre confiné.

Ceci a été l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Le cylindre est supposé être à température constante. Quant aux plans parallèles, ils sont soit à température imposée également (condition de type Dirichlet) soit adiabatiques (condition de type Neumann). Concernant le cylindre centré, nous avons montré qu'il existait des solutions de type Stokes pour le transfert, solutions analogues à celles concernant la force de traînée dans le cas dynamique. Le flux de chaleur augmente avec le confinement aux grands nombres de Péclet quel que soit le type de condition aux limites. Aux faibles nombres de Péclet par contre, l'adiabaticité des plans parallèles fait baisser le transfert lorsque le confinement augmente alors qu'il est toujours rehaussé pour des parois isothermes. Après avoir étudié l'effet du confinement sur le transfert, nous avons donné des résultats exhaustifs sur l'effet de la dissymétrie sur ce transfert confiné lorsque les plans sont soit isothermes, soit isolants. Dans les deux cas, nous avons obtenu un résultat non intuitif montrant qu'aux grands nombres de Péclet, l'effet de l'excentrement se traduit par une évolution non monotone du flux à l'identique de l'évolution obtenue pour la traînée dans le cas dynamique. Ce comportement confirme l'existence de la «similitude de Reynolds» entre les deux problèmes. Aux faibles nombres de Péclet, nous assistons à une augmentation monotone avec l'excentrement dans le cas Dirichlet et une évolution inverse dans le cas Neumann. L'ensemble de ces effets de rehaussement ou de réduction accompagnant cette dissymétrie nous conduit à penser qu'il serait possible d'exploiter ces résultats, soit pour augmenter le transfert(cas des échangeurs souvent placés dans des configurations ordonnés par l'introduction d'un bruit géométrique), soit pour minimiser le transfert (cas des isolants composites alvéolés).

Bibliographie

[1] B.R. Bird. *Transport Phenomema.* John Wiley & Sons, 1960.

[2] G.K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics.* Cambridge University Press, 2000.

[3] J. Happel et H. Brenner. *Low Reynolds Number Flow Hydrodynamics.* Martinus Nijhoff publishers, The Hague, 1983.

[4] E. Guyon, J.P. Hulin et L. Petit. *Hydrodynamique physique.* InterEditions-Editions du CNRS, 1991.

[5] R. Comolet. *Mécanique expérimentale des fluides, Tome 2, 2° édition.* Masson, 1976.

[6] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics.* Oxford University Press, 2° Ed., 1998.

[7] M. Van Dyke. *An Album of Fluid Motion.* The Parabolic Press, 1982.

[8] C.H.K. Williamson. Vortex dynamics in the cylinder wake. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 28 : 477–539, 1996.

[9] G.G. Stokes. On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 9 (Part 2): 8–16, 1851.

[10] A.N. Whitehead. Second approximations to viscous fluid motion. *Q. J. Math.*, 23 : 143–152, 1889.

[11] C.W. Oseen. Uber die Stokes'sche Formel und über eine verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 6 (29): 1–20, 1910.

[12] H. Lamb. On the uniform motion of a sphere through a viscous fluid. *Phil. Mag.*, 6 (21): 112–121, 1911.

[13] L. Bairstow, B.M. Cave et E.D. Lang. The resistance of a cylinder moving in a viscous fluid. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London, Series A, Mathematical and physical sciences*, 223 : 383–432, 1923.

[14] G.N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, 2° Ed., 1966.

[15] W.J. Harrison. On the motion of spheres, circular and elliptic cylinders through viscous liquid. *Trans. Camb. Phil. Soc.*, 23 (71): 10–88, 1924.

[16] H. Faxén. Exakte Lösung des Oseenschen Differentialgleichungen einer zähen Flüssigkeit für den Fall der Translationsbewegung eines Zylinders. *Nov. Ac. Reg. Soc. Sci. Up.*, Volumen extra ordinem editum : 1–56, 1927.

[17] C.N. Davies. Viscous flow transverse to a circular cylinder. *Proc. Phys. Soc., Section B*, 63 : 288–296, 1950.

[18] S. Kaplun. Low Reynolds number flow past a circular cylinder. *J. Math. Mech.*, 6 : 595–603, 1957.

[19] T. Kida et T. Take. Integral approach of asymptotic expansions for low Reynolds number flow past an arbitrary cylinder. *J.S.M.E. Int. J.*, 35 (2): 138–143, 1992.

[20] T. Kida et T. Take. Asymptotic expansions for low Reynolds number flow past a cylindrical body. *J.S.M.E. Int. J.*, 35 (2): 144–150, 1992.

[21] S. Tomotika et T. Aoi. An expansion formula for the drag on a circular cylinder moving through a viscous fluid at small Reynolds number. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 4 : 401–406, 1951.

[22] S. Tomotika et T. Aoi. The steady flow of viscous fluid past a sphere and circular cylinder at small Reynolds numbers. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 3 : 140–159, 1950.

[23] I. Proudman et J.R.A. Pearson. Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 2 : 237–262, 1957.

[24] P.A. Lagerstrom. *Matched Asymptotic Expansions. Ideas and Techniques.* Springer-Verlag, 1988.

[25] M. Van Dyke. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics.* Parabolic Press, Stanford, 1975.

[26] K. Tamada, H. Miura et T. Miyagi. Low-Reynolds-number flow past a cylindrical body. *J. Fluid Mech.*, 132 : 445–455, 1983.

[27] L.A. Skinner. Generalized expansions for slow flow past a cylinder. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 28 : 333–340, 1975.

[28] J.B. Keller et M.J. Ward. Asymptotics beyond all orders for a low Reynolds number flow. *J. Eng. Math.*, 30 : 253–265, 1996.

[29] S.H. Lee et L.G. Leal. Low-Reynolds-number flow past cylindrical bodies of arbitrary cross-sectional shape. *J. Fluid Mech.*, 164 : 401–427, 1986.

[30] G.K. Batchelor. Slender-body theory for particles of arbitrairy cross-section in Stokes flow. *J. Fluid Mech.*, 44 : 419–440, 1970.

[31] J.B. Keller et S.I. Rubinow. Slender-body theory for slow viscous flow. *J. Fluid Mech.*, 75 : 705–714, 1976.

[32] D.N. Allen et R.V. Southwell. Relaxation method applied to determine the motion, in two dimensions, of viscous fluid past a fixed cylinder. *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 8 : 129–145, 1955.

[33] S.C.R. Dennis et M. Shimshoni. The steady flow of a viscous fluid past a circular cylinder. *Aero. Res. Coun., Current Papers N°797*, 1965.

[34] S.C.R. Dennis et Gau-Zu Chang. Numerical solutions for the steady flow past a circular cylinder at Reynolds numbers up to 100. *J. Fluid Mech.*, 45, part 3 : 471–489, 1970.

[35] C.F. Lange, F. Durst et M. Breuer. Momentum and heat tranfer from cylinders in laminar crossflow at $10^{-4} \leq Re \leq 200$. *Int. J. Heat and Mass Transf.*, 41 : 3409–3430, 1998.

[36] D.J. Tritton. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6 : 547–567, 1959.

[37] O.L.F. Jayaweera et B.J. Mason. The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid. *J. Fluid Mech.*, 22, Part 4 : 709–720, 1965.

[38] B. Huner et R.G. Hussey. Cylinder drag at low Reynolds number. *Physics of Fluids*, 20 (8): 1211–1218, 1977.

[39] R.K. Finn. Determination of the drag on a cylinder at low Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.*, 24 : 771–773, 1953.

[40] R.E. Williams et R.G. Hussey. Oscillating cylinders and the Stokes' paradox. *Physics of Fluids*, 15 (12): 2083–2088, 1972.

[41] C. Wieselsberger. Neure Festellungen über die gesetze des Flüssigkeit und Luftwiderstands. *Phys. Z.*, 2 :321–328, 1921.

[42] C. Wieselsberger. Further data on the law of liquid and air drag. *Phys. Z.*, 23 : 219–224, 1922.

[43] E.F. Relf. Discussion of the results of measurements on the resistance of wires with some additional tests on the resistance of wires of small diameter. *Rept. Advisory Committee for Aeronautics (A.R.C.Sc.)*, 102 , 1914.

[44] G.H. Wannier. A contribution to the hydrodynamics of lubrication. *Quart. Appl. Math.*, 8 (1): 1–32, 1950.

[45] D.J. Jeffrey et Y. Onishi. The slow motion of a cylinder next to a plane wall. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 34 (9): 129–137, 1981.

[46] N.J. De Mestre. Low-Reynolds-number fall of slender cylinders near boundaries. *J. Fluid Mech.*, 58, part 4 : 641–656, 1973.

[47] D.F. Katz , J.R. Blake et S.L. Paveri-Fontana. On the movement of slender bodies near plane boundaries at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 72 : 529–540, 1975.

[48] Y. Takaisi. The forces on a circular cylinder moving with low speeds in a semi-infinite viscous liquid bounded by a plane wall. *J. Phys. Soc. Jap.*, 10 (5): 407–415, 1955.

[49] H. Brenner. Effect of finite boundaries on the Stokes resistance of an arbitrary particle. *J. Fluid Mech.*, 12 : 35–48, 1962.

[50] N.J. De Mestre et W.B. Russel. Low-Reynolds-number translation of a slender cylinder near a plane wall. *J. Eng. Math.*, 9 (2): 81–91, 1975.

[51] H. Faxén. Forces exerted on a rigid cylinder in a viscous fluid between two parallel fixed planes. *Proc. Roy. Swed. Acad. Eng. Sc.*, 187 : 1–13, 1946.

[52] Y. Takaisi. Note on the drag on a circular cylinder moving with low speeds in a viscous liquid between two parallel plane walls. *J. Phys. Soc. Jap.*, 11 (9): 1009–1013, 1956.

[53] M. Tachibana et Y. Iemoto. Steady flow around, and drag on a circular cylinder moving at low speeds in a viscous liquid between two parallel planes. *Fluid Dynamics Research*, 2 : 125–137, 1987.

[54] G. Bézine et D. Bonneau. Integral equation method for the study of two dimensional Stokes flow. *Acta Mechanica*, 41 : 197–209, 1981.

[55] R. Bouard et M. Coutanceau. Etude théorique et expérimentale de l'écoulement engendré par un cylindre en translation uniforme dans un fluide visqueux en régime de Stokes. *Z. Angew. Math. Phys.*, 37 :673–684, 1986.

[56] A.S. Dvinsky et A.S. Popel. Motion of a rigid cylinder between parallel plates in Stokes flow. Part 1 : motion in a quiescent fluid and sedimentation. *Computers and Fluids*, 15 (4): 391–404, 1987.

[57] J.M. Bourot et F. Moreau. Sur l'utilisation de la série cellulaire pour le calcul d'écoulements plans de Stokes en canal indéfini : application au cas d'un cylindre circulaire en translation. *Mech. Res. Comm.*, 14(3) : 187–197, 1987.

[58] E.Y. Harper et I.Dee Chang. Drag on a cylinder between parallel walls in Stokes' flow. *Physics of Fluids*, 10 (1): 83–88, 1967.

[59] Y. Takaisi. The drag on a circular cylinder moving with low speeds in a viscous liquid between two parallel walls. *J. Phys. Soc. Jap.*, 10 (8): 685–693, 1955.

[60] H.G. Ristow. Wall correction factor for sinking cylinders in fluids. *Phys. Review E*, 55 (3): 2808–2813, 1997.

[61] H.H. Hu. Motion of a circular cylinder in a viscous liquid between parallel plates. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, 7 : 441–455, 1995.

[62] J. Feng, P.Y. Huang et D.D. Joseph. Dynamics simulation of sedimentation of solid particles in an Oldroyd-B fluid. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 63 : 63–88, 1996.

[63] A. Ben Richou, A. Ambari, M. Lebey et J.K. Naciri. Drag force on a circular cylinder midway between two parallel plates at $Re << 1$. Part 2 : moving uniformly (numerical and experimental). *Chem. Eng. Sci.*, 60 (10): 2535–2543, 2005.

[64] L. Bairstow, B.M. Cave et E.D. Lang. The two-dimensional slow motion of viscous fluids. *Proc. Roy. Soc. of London, Series A*, 100: 394–413, 1922 .

[65] Y. Takaisi. The drag on a circular cylinder placed in a stream of viscous liquid midway between two parallel plane walls. *J. Phys. Soc. Japan*, 11 : 1092–1095, 1956.

[66] A.S. Dvinsky et A.S. Popel. Motion of a rigid cylinder between parallel plates in Stokes flow. Part 2 : Poiseuille and Couette flow. *Computers and Fluids*, 15 (4): 391–404, 1987.

[67] A. Ben Richou, A. Ambari et J.K. Naciri. Drag force on a circular cylinder midway between two parallel plates at very low Reynolds number. Part 1 : Poiseuille flow (numerical). *Chem. Eng. Sci.*, 59 (15): 3215–3222, 2004.

[68] G.B. Jeffery. The rotation of two circular cylinders in a viscous fluid. *Proc. Roy. Soc. of London, Series A*, 101 (709): 169–174, 1922.

[69] K.B. Ranger. Eddies in two dimensional Stokes flow. *Int. J. Engng Sci.*, 18 : 181–190, 1980.

[70] R.C.J. Howland et R.C. Knight. Slow rotation of a circular cylinder in a viscous fluid bounded by parallel walls. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 29 : 277–287, 1932.

[71] M. Hellou. *Etude numérique et expérimentale de l'écoulement à structure cellulaire, engendré par la rotation d'un cylindre dans un canal.* Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, Juillet 1984.

[72] M. Hellou. Sensitivity of cellular Stokes flow to geometry. *Eur. J. Phys.*, 22 : 67–77, 2001.

[73] M. Hellou et M. Coutanceau. Cellular Stokes flow induced by rotation of a cylinder in a closed channel. *J. Fluid Mech.*, 236 : 557–577, 1992.

[74] J.F. Trahan et R.G. Hussey. The Stokes drag on a horizontal cylinder falling toward a horizontal plane. *Phys. Fluids*, 28 (10): 2961–2967, 1985.

[75] M.J. Lightill. *Mathematical Biofluiddynamics.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1975.

[76] H. Faxén. Die Bewegung einer starren Kugel längs der Achse eines mit zäher Flüssigkeit gefüllten Rohres. *Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik*, 17 (27): 1–28, 1923.

[77] W.R. Dean et P.E. Montagnon. On the steady motion of viscous liquid in a corner. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 45 : 389–394, 1949.

[78] H.K. Moffat. Viscous and resistive eddies near a sharp corner. *J. Fluid Mech.*, 18 : 1–18, 1964.

[79] M.E. O' Neill. On angles of separation in Stokes flows. *J. Fluid Mech.*, 133 : 427–442, 1983.

[80] C. Hancock. The angle of separation in Stokes flow near a sharp corner. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, 37 : 113–119, 1984.

[81] J.M. Bourot. Sur la structure cellulaire des écoulements plans de Stokes, à débit moyen nul, en canal indéfini à parois parallèles. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 298, Série II, N°5 : 161–164, 1984.

[82] C.M. White. The drag of cylinders in fluids at slow speeds. *Proc. Roy. Soc. of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 186 (1007): 472–479, 1946.

[83] A.M. Jones et J.G. Knudsen. Drag coefficients at low Reynolds numbers for flow past immersed bodies. *A.I.Ch.E. Journal*, 7 (1): 20–25, 1961.

[84] S. Taneda. Experimental investigation of the wall-effect on a cylindrical obstacle moving in a viscous fluid at low Reynolds numbers. *J. Phys. Soc. Jap.*, 19 (6): 1024–1030, 1964.

[85] R. Bouard. Détermination de la traînée engendrée par un cylindre en translation pour des nombres de Reynolds intermédiaires. *Z. Angew. Math. Phys.*, 48 : 584–596, 1997.

[86] A.R. Curtis et G.R. Marr. The viscous drag on cylinders falling symmetrically between parallel walls. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 11 : 1173–1178, 1978.

[87] J.F. Stalnaker et R.G. Hussey. Wall effects on cylinder drag at low Reynolds number. *Phys. Fluids*, 22 (4): 603–613, 1979.

[88] S.A. Dhahir et K. Walters. On Non-Newtonian flow past a cylinder in a confined flow. *J. Rheol.*, 33 (6): 781–804, 1989.

[89] Y.L. Lo, H.Y. Lai et M.H. Tsai. Mathematical modeling of the wall effect on drag forces in molding flow using optical fiber sensing data. *J. Mat. Proc. Tech.*, 97 : 174–179, 2000.

[90] Y.L. Lo, H.Y. Lai et M.H. Tsai. Study on drag forces of the molding flow in IC packaging using optical fiber sensors. *Opt. Eng.*, 39v(3): 832–837, 2000.

[91] K.K. Wang. A study on wire sweep in encapsulation of semiconductor chips using simulated experiments. *Trans. ASME, J. Electronic Packaging*, 117 : 178–184, 1995.

[92] Y.J. Chen et R.G. Hussey. Effect of a horizontal plane boundary on a falling horizontal cylinder at low Reynolds number. *Phys. Fluids*, 23 (5): 853–857, 1980.

[93] W.B. Russel , E.J. Hinch , L.G. Leal et G. Tieffenbruck. Rods falling near a vertical wall. *J. Fluid Mech.*, 83 : 273–287, 1977.

[94] M. Hajjam. *Contribution à l'étude de différents types d'écoulements en régime de Stokes*. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 1996.

[95] M. Coutanceau, R. Bouard, J.M. Bourot et M. Hellou. Sur la visualisation de la structure cellulaire de l'écoulement plan de Stokes engendré par la rotation d'un cylindre dans un canal. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 298, Série II, N°18 : 767–770, 1984.

[96] A. Ben Richou. *Analyse des transferts pariétaux en régime de perturbations linéaires et non linéaire, études des interactions hydrodynamiques entre particules sphériques ou cylindriques dans le cas du transport des suspensions*. Thèse d'Etat, Université Hassan II Ain Chok, Faculté des Sciences de Casablanca, Novembre 2004.

[97] S.V. Patankar. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Series in Comput. Meth. in Mechanics and Thermal Sciences. McGraw-Hill, 1980.

[98] J.P. Nougier. *Méthode de calcul numérique, volume 1: Système d'équations*. Hermès Sciences, 2001.

[99] J.P. Nougier. *Méthode de calcul numérique, volume 2: Fonctions Equations aux dérivées*. Hermès Sciences, 2001.

[100] H. K. Versteeg et W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Prentice Hall, 1996.

[101] A.J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 22 : 745–762, 1968.

[102] R. Temam. On an approximate solution of the Navier-Stokes equations by the method of fractional steps. Part 1. *Archiv Ration. Mesh. Anal.*, 32 : 135–153, 1969.

[103] M. Fortin , R. Peyret et R. Temam. Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. *J. Mécanique*, 10 : 357–390, 1971.

[104] T. Ye , H.S. Mittal , H.S. Udaykumar et W. Shyy. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flows with complex inmmersed boundaries. *J. Comp. Phys.*, 156 : 209–240, 1999.

[105] J.H. Ferziger et M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1996.

[106] S. Guerouache. *Etude numérique de l'instabilité de Bénard-Kármán derrière un cylindre fixe ou en mouvement périodique. Dynamique de l'écoulement et advection chaotique.* Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique de l'Université de Nantes, Juin 2000.

[107] M. Coutanceau. *Contribution à l'étude théorique et expérimentale de l'écoulement autour d'une sphère qui se déplace dans l'axe d'un cylindre à faible nombre de Reynolds ou en régime irrotationnel.* Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 1971.

[108] A.M.J. Davis et M.E. O'Neill. Separation in slow linear shear flow past a cylinder and a plane. *J. Fluid Mech.*, 81, part 3 : 551–564, 1977.

[109] S. Taneda. Visualization of separating flows. *J. Phys. Soc. Jap.*, 46 : 1935–1942, 1979.

[110] Y.J. Liu , J. Feng et D.D. Joseph. Anomalous rolling of spheres down an inclined plane. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 50 : 305–329, 1993.

[111] J. Feng, H.H. Hu et D.D. Joseph. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a Newtonian fluid, Part 1. Sedimentation. *J. Fluid Mech.*, 261 : 95–134, 1994.

[112] G. Segré et A. Silberberg. Radial particle displacements in Poiseuille flow of suspensions. *Nature*, 189 (4760): 209–210, 1961.

[113] G. Segré et A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 1. Determination of local concentration by statistical analysis of particle passages through crossed light beams. *J. Fluid Mech.*, 14 : 115–135, 1962.

[114] G. Segré et A. Silberberg. Behaviour of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow. Part 2. Experimental results and interpretation. *J. Fluid Mech.*, 14 : 136–157, 1962.

[115] D.D. Joseph et D. Ocando. Slip velocity and lift. *J. Fluid Mech.*, 454 : 263–286, 2002.

[116] N. Roussel. *Actions des interactions hydrodynamiques sur un cylindre confiné et conséquences sur le transport des fibres.* Master of Science, Georgia Tech/ENSAM, Juin 2006.

[117] H. Brenner. The slow motion of a sphere through a fluid towards a plane surface. *Chem. Eng. Sci.*, 16 : 242–251, 1961.

[118] A. Ambari , R. Gauthier-Emmanuel et E. Guyon. Wall effects on a sphere translating at constant velocity. *J. Fluid Mech.*, 149 : 235–253, 1984.

[119] W. Nusselt. Das Grundgesetz des Wärmeüberganges. *Gesundh. Ing.*, 38 : 77–490, 1915.

[120] J. Cole et A. Roshko. Heat transfer from wires at Reynolds numbers in the Oseen range. *Proc. Heat Transfer and Fluid Mech. Inst.*, pages 13–23, 1954.

[121] C.R. Illingworth. *"Flow at small Reynolds number" dans Laminar Boundary Layers, L. Rosenhead (Eds)*, page 193. Oxford Clarenton Press, 1963.

[122] L.V. King. On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid : determination of the convection constants of small platinum wires with appli-

cation to hot-wire anemometry. *Phil. Trans. Roy. Soc. of London, Series A, Mathematical and physical sciences*, 214 : 373–432, 1914.

[123] J. Boussinesq. Mise en équation des phénomènes de convection calorifique et aperçu sur le pouvoir refroidissant des fluides. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 132 : 1382–1387, 1901.

[124] W.W. Wood. Calculations for anemometry with fine hot wires. *J. Fluid Mech.*, 32, Part 1 : 9–19, 1968.

[125] C.A. Hieber et B. Gebhart. Low Reynolds number heat transfer from a circular cylinder. *J. Fluid Mech.*, 32, Part 1 : 21–28, 1963.

[126] D.R. Kassoy. Heat transfer from circular cylinder at low Reynolds numbers. I. Theory for variable property flow. *J. Fluid Mech.*, 10 : 938–946, 1967.

[127] S. Nakai et T. Okazaki. Heat transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Grashof numbers - I : Pure convection. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 18 : 387–396, 1975.

[128] S.C.R. Dennis , J.D. Hudson et N. Smith. Steady laminar forced convection from a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Phys. Fluids*, 11 : 933–940, 1968.

[129] V.N. Kurdyumov et E. Fernández. Heat transfer from a circular cylinder at low Reynolds numbers. *Trans. ASME, J. Heat Tansf.*, 120, Ser.C: 72–75, 1998.

[130] E.L. Piret, W. James et M. Stacy. Heat transmission from fine wires to water. *Ind. Eng. Chem.*, 39 : 1098–1103, 1947.

[131] B.G. Van der Hegge Zijnen. Modified correlation formulae for the heat transfer by forced convection from horizontal cylinders. *Appl. Sci. Res.*, A 6 : 129–140, 1956.

[132] B.G. Van der Hegge Zijnen. Heat transfer from horizontal cylinder to a turbulent air flow. *Appl. Sci. Res.*, A 7 : 205–223, 1958.

[133] W.H. McAdams. *Transmission de la chaleur, Chap. X, page 291.* Dunod, 1964.

[134] S. Whitaker. Forced convection heat transfer correlations for flow in pipes, past flat plates, single cylinders, single spheres and flow in packed beds and tube bundles. *AIChE J., Amer. Inst. Chem. Eng.*, 18, N°2 : 361–371, 1972.

[135] J. Ulsamer. Die Wärmeabgabe eines Drahtes oder Rohres an einen senkrecht zur Achse Strömenden Gas- oder Flüssigkeitsstrom. *Forsch. Gebiete Ingenieurw.*, 3 : 94–98, 1932.

[136] R. Hilpert. Wärmeabgabe von geheizten Drähten und Rohren im Luftstrom. *Forsch. Geb. Ingenieurwes.*, 4, N°5 : 215–224, 1933.

[137] D.C. Collis et M.J. Williams. Two-dimensional convection from heated wires at low Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 6 : 357–384, 1959.

[138] H. Kramers. Heat transfer from spheres to flowing media. *Physica*, 12 : 61–80, 1946.

[139] R.M. Fand et K.K. Keswani. A continuous correlation equation for heat transfer from cylinders to air in crossflow for Reynolds numbers from 10^{-2} to 2×10^5. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 15 : 559–562, 1972.

[140] S.W. Churchill et M. Bernstein. A correlating equation for forced convection from gases and liquids to a circular cylinder in crossflow. *Trans. ASME, J. Heat Transfer*, 99 : 300–306, 1977.

[141] V.T. Morgan. The overall convective heat transfer from smooth circular cylinders, dans J.P. Harnett et T.F. Irvine, Jr. (Eds). *Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York*, 11 : 199–264, 1975.

[142] A. Zukauskas. Heat transfer from tubes in crossflow, dans J.P. Harnett et T.F. Irvine, Jr. (Eds). *Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York*, 8 : 93–160, 1978.

[143] A. Zukauskas. Heat transfer from tubes in crossflow, dans J.P. Harnett et T.F. Irvine, Jr. (Eds). *Advances in Heat Transfer, Academic Press, New York*, 18 : 87–159, 1987.

[144] I. Langmuir. *O.S.R.D. Rept.*, page 865, 1942.

[145] S.K. Friedlander. Mass and heat transfer to single spheres and cylinders at low Reynolds numbers. *A.I.Ch.E. J.*, 3, N°1 : 43–48, 1957.

[146] R. Dobry et R.K. Finn. Mass transfer to a cylinder at low Reynolds numbers. *Ind. Eng. Chem.*, 48 : 1540–1543, 1956.

[147] S.K. Friedlander. *Smoke, Dust and Haze : Fundamentals of aerosol behavior*. John Wiley-Interscience, New York, 1977.

[148] A. Ambari , C. Deslouis et B. Tribollet. Coil-stretch transition of macromolecules in laminar flow around a small cylinder. *Chem. Eng. Commun.*, 29 : 63–78, 1984.

[149] P.H. Vogtländer et C.A.P. Bakker. An experimental study of mass transfer from a liquid flow to wires and gauzes. *Chem. Eng. Sci.*, 18 : 583–589, 1963.

[150] C.F. Lange , F. Durst et M. Breuer. Wall effects on heat losses from hot-wires. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 20 : 34–47, 1999.

[151] J.M. Shi, M. Breuer , F. Durst. Wall effect on heat transfer from a micro-cylinder in near-wall shearflow. *Int. J. Heat and Mass Transf.*, 45 : 1309–1320, 2002.

[152] J.M. Shi, D. Gerlach , M. Breuer , F. Durst et C.F Lange. Analysis of heat transfer from single wires close to walls. *Phys. Fluids*, 15, N°4 : 908–921, 2003.

[153] S. Champmartin et A. Ambari. Drag force and heat transfer corrections for a confined circular cylinder in uniform and Poiseuille flow. *Proc. of HT 2005, 2005 ASME Heat Transfer Conference*, HT2005-72480 :1–4, 2005.

[154] S. Champmartin et A. Ambari. Correction de la force subie et du flux de chaleur transféré par un cylindre en mouvement entre deux plans parallèles en régime de type Stokes. *Congrès Français de Thermique, SFT 2005, Reims*, 13 :281–286, 2005.

[155] S. Champmartin et A. Ambari. Transfert de chaleur ou de masse sur un cylindre situé entre deux plans en fonction de son excentrement. *Congrès Français de Thermique, SFT 2006, Ile de Ré*, 14 :325–330, 2006.

Table des figures

1 Superposition de 4 clichés montrant le mouvement hélicoïdal du flagelle d'un spermatozoïde d'oursin (Lytechinus pictus). Source : H.A. Stone, Harvard University vi
2 La baie de Mahajamba à Madagascar chargée de sédiments suite à la déforestation. Source : NASA ISS EarthCam vii

1.1 Ecoulements à différents nombres de Reynolds autour d'un cylindre. Source : M. Van Dyke, An Album of Fluid motion [7] 4
1.2 Vue satellite d'une allée de Bénard-Von Kármán générée derrière l'île de Guadalupe, à l'ouest de la Basse-Californie, Mexique. Source : GOES-CIMMS 5
1.3 Coefficient de traînée pour un cylindre en milieu infini en fonction du nombre de Reynolds 11
1.4 C_D en fonction de Re 12
1.5 Différents types de confinements d'un cylindre dans les études analytiques 16
1.6 Lignes de courant autour d'un cylindre en translation uniforme entre deux plans parallèles en situation centrée avec $k = 0.99$. Source : Bourot *et al.* [57] 21
1.7 $g(e)$ en fonction de e. Source : Harper *et al.* [58] 22
1.8 Lignes de courant dans un dièdre d'angle 28.5° engendrées par la rotation d'un cylindre. Source : Van Dyke [7] 25
1.9 Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. Source : Taneda [84] 28
1.10 Inspection aux rayons X d'un composé électronique. Déformation des fils de connections (wire-sweep). Source : AMFIS 29
1.11 Principe du capteur optique ILFE. Source : Y. Lo et al. [89, 90] 29
1.12 Visualisation de l'écoulement engendré par la rotation d'un cylindre entre 2 plans. Source : Coutanceau et al. [95] 31

2.1 Volume de contrôle 34
2.2 Volume de contrôle 37
2.3 Schéma du problème utilisé pour comparer les différents codes numériques 39
2.4 Structure du maillage généré avec Gambit 40

2.5 « Maillage type » obtenu avec Gambit pour $k = 0.29$ 41
2.6 « Maillage type » obtenu avec le code « maison » 42
2.7 Comparaison entre différentes approches - Force de traînée normalisée en fonction de $k = a/b$ 42
2.8 Comparaison entre différentes approches - Distribution angulaire de la vorticité sur le cylindre pour $k = 0.9$ 43
2.9 Lignes de courant 44
2.10 Contours de la composante de la vitesse parallèle aux plans 44
2.11 Contours de la composante de la vitesse perpendiculaire aux plans . . . 44

3.1 Schéma du problème du cylindre en translation 47
3.2 $\Lambda^{Trans}(k,Re)$ en fonction de Re 49
3.3 $[\Lambda^{Trans}(k,Re) - \Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)]/\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ en fonction de Re 50
3.4 Lignes de courant. A gauche : autour d'un cylindre centré de confinement $k = 0.5$ pour $0.1 < Re < 20$. A droite : autour d'un cylindre en milieu infini pour $0.16 < Re < 26$. Source : Van Dyke [7] 51
3.5 $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ en fonction de k 53
3.6 $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)$ en fonction de $(1-k)/k$ 55
3.7 Distribution angulaire du module de la vorticité sur le cylindre 57
3.8 Lignes de courant autour du cylindre pour $k = 0.9$ et $Re = 10^{-2}$ 57
3.9 Lignes de courant autour du cylindre en milieu infini pour $Re = 10^{-2}$. 58
3.10 Répartition angulaire de la pression sur le cylindre 58
3.11 Perte de charge en fonction de $(1-k)/k$ 60
3.12 Schéma du problème du cylindre en écoulement de Poiseuille 61
3.13 $\Lambda^{Pois}(k,Re)$ en fonction de Re 62
3.14 $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ en fonction de k 64
3.15 $\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ en fonction de $(1-k)/k$ 65
3.16 $\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k)/\Lambda^{Pois}_{Stokes}(k)$ en fonction de k 67
3.17 Perte de charge en fonction de $(1-k)/k$ 68
3.18 Schéma du problème du cylindre en rotation 68
3.19 $\Gamma(k,Re)$ en fonction de Re 70
3.20 $\Gamma_{Stokes}(k)$ en fonction de k 71
3.21 $\Gamma_{Stokes}(k)$ en fonction de $(1-k)/k$ 72
3.22 Isovaleurs de la pression autour d'un cylindre en rotation pour $k = 0.7$. 74
3.23 Coefficient de pression sur le plan inférieur près d'un cylindre en rotation pour différents confinements k 74
3.24 Coefficient de pression maximal sur les plans en fonction de $(1-k)/k$. 75
3.25 Isovaleurs de la pression et lignes de courant autour d'un cylindre en rotation pour $k = 0.7$ 75
3.26 Lignes de courant pour $k = 0.5$, $Re = 10^{-3}$ - Superposition avec un cliché tiré de l'article de Coutanceau *et al.* [95] 76
3.27 Caractéristiques des cellules de recirculation engendrées par la rotation d'un cylindre entre deux plans 76

4.1 Schéma du problème du cylindre excentré 79
4.2 Définition des forces, du moment et des pressions pour le cylindre excentré en translation uniforme 80
4.3 Profil de vitesse dans une section passant par le centre du cylindre et normale aux plans 81
4.4 Répartition des débits en fonction de l'excentrement en écoulement uniforme 81
4.5 Lignes de courant autour d'un cylindre en translation uniforme (repère lié au cylindre) pour $e/e_{max} =$: a) 0 - b) 0.281 - c) 0.563 - d) $= 0.845$. 82
4.6 Localisation des points d'arrêts et des extrema de la pression pour un cylindre excentré en translation uniforme en fonction de l'excentrement 83
4.7 Lignes de courant et champ de pression autour d'un cylindre en translation uniforme pour $e/e_{max} \approx 0.85$. La pression est normalisée par sa valeur maximale. A l'amont, le point d'arrêt se situe à $\theta_1 \approx 45°$ et l'extremum de pression à $\theta_2 \approx 61°$ 83
4.8 Répartition de la pression autour du cylindre en translation uniforme à différents excentrements pour $k = 0.29$ 84
4.9 $\Lambda^{Trans}(e/e_{max})/\Lambda^{Trans}(e/e_{max} = 0)$ en fonction de e/e_{max} 85
4.10 Λ^{Trans} en fonction de e/e_{max} dans les expériences de Taneda [84] 86
4.11 $\Lambda^{Trans}(e/e_{max})$ en fonction de h^-/a 87
4.12 $(e/e_{max})_{min}$ en fonction de k 88
4.13 $\Lambda^{Trans}((e/e_{max})_{min})/\Lambda^{Trans}(0)$ en fonction de k 90
4.14 $\Gamma^{Trans}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 91
4.15 $\Pi^{Trans}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 92
4.16 Lignes de courant autour du cylindre en translation uniforme dans un repère fixe pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$ avec $e/e_{max} =$: a) 0 - b) 0.141 - c) 0.282 - d) 0.423 - e) 0.563 - f) 0.704 - g) 0.845 93
4.17 Lignes de courant autour du cylindre en translation uniforme dans un repère fixe pour $k = 0.5$, $e/e_{max} = 0$ et $Re << 1$. Source : Bourot *et al.* [57] 94
4.18 Lignes de courant autour du cylindre en translation uniforme dans un repère fixe pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$. En-haut : $e/e_{max} = 0$ - En-bas : $e/e_{max} = 0.704$ 94
4.19 Définition des forces et du moment sur le cylindre excentré en écoulement de Poiseuille plan 95
4.20 Profils de vitesse dans une section passant par le centre du cylindre et normale aux plans 95
4.21 Répartition des débits en fonction de l'excentrement en écoulement de Poiseuille 96
4.22 Lignes de courant autour d'un cylindre dans un écoulement de Poiseuille - a) $e/e_{max} = 0$ - b) $e/e_{max} = 0.704$ - c) $e/e_{max} = 0.845$ - d) $e/e_{max} = 0.986$ 97

4.23 Lignes de courant : a) dans le travail de Davis et al. [108] - b) pour un cylindre en écoulement de Poiseuille à $e/e_{max} = 0.704$ - c) dans le travail de Taneda [109] 97
4.24 Lignes de courant pour $e/e_{max} =$: a) 0.887 - b) 0.901 - c) 0.915 - d) 0.930 e) 0.944 - f) 0.960 - g) 0.972 - h) 0.986 98
4.25 Localisation des points d'arrêt et des extrema de pression pour un cylindre excentré dans un écoulement de Poiseuille en fonction de l'excentrement 99
4.26 Lignes de courant et champ de pression autour d'un cylindre en écoulement de Poiseuille pour $e/e_{max} \approx 0.85$. La pression est normalisée par sa valeur maximale. A l'aval, le point d'arrêt se situe à $\theta_1 \approx 9°$ et l'extremum de pression à $\theta_2 \approx -18°$ 100
4.27 Répartition de la pression autour du cylindre dans un écoulement de Poiseuille à différents excentrements pour $k = 0.29$ 100
4.28 $\Lambda^{Pois}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 102
4.29 $\Gamma^{Pois}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 103
4.30 $\Pi^{Pois}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 104
4.31 Lignes de courant autour d'un cylindre en écoulement de Poiseuille pour $k = 0.6$, $e/e_{max} = 0.5$ et $Re << 1$. A gauche : dans le travail de Dhahir *et al.* [88] - A droite : dans nos calculs numériques 105
4.32 Définition des forces et du moment sur le cylindre excentré en rotation uniforme 106
4.33 Lignes de courant autour d'un cylindre excentré en rotation pour $e/e_{max} =$: a) 0 - b) 0.141 - c) 0.282 - d) 0.423 - e) 0.563 - f) 0.704 - g) 0.845 - h) 0.986 107
4.34 Longueurs L^+ et L^- de la cellule principale en contact avec les plans, normalisées par la distance b 108
4.35 Distance $2L$ entre les centres des premières cellules, normalisée par la distance b 108
4.36 Isovaleurs de la pression autour d'un cylindre en rotation pour $e/e_{max} \approx 0.85$. La pression est normalisée par sa valeur maximale 109
4.37 Répartition de la pression autour du cylindre en rotation pour différents excentrements 109
4.38 $\Lambda^{Rot}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 111
4.39 $\Gamma^{Rot}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 112
4.40 $\Pi^{Rot}(k = 0.29, e/e_{max})$ en fonction de e/e_{max} à $Re = 0.1$ 113
4.41 Γ^{Rot} en fonction de $\epsilon = h^-/a$ à $Re = 0.1$ 114

5.1 Force et couple s'exerçant sur un objet se déplaçant et tournant dans un fluide visqueux 115
5.2 Schéma du système 116
5.3 Coefficients A_{ij} de la matrice de résistance en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ 119

5.4 Evolution de la vitesse de rotation du cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 120
5.5 Lignes de courant autour d'un cylindre libre en sédimentation pour $k = 0.29$ et $e/e_{max} = 0.845$ 121
5.6 Evolution de la vitesse de translation du cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 122
5.7 Rapport des vitesses de rotation et de translation pour le cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 123
5.8 Evolution de la perte de charge induite par le cylindre en sédimentation en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 124
5.9 Evolution du rapport de la vitesse chute du cylindre en sédimentation et de la perte de charge en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 125
5.10 Evolution du rapport de la vitesse rotation du cylindre en sédimentation et de la perte de charge en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ . . 125
5.11 Evolution de la vitesse de sédimentation du cylindre en fonction de k pour $e/e_{max} = 0$ 126
5.12 Lignes de courant autour d'un cylindre libre en sédimentation pour $k = 0.29$ dans un référentiel lié au cylindre pour $e/e_{max} =$: a) 0 - b) 0.141 - c) 0.282 - d) 0.423 - e) 0.563 - f) 0.704 - g) 0.845 - h) 0.986. L'accélération de la pesanteur est verticale descendante et le cylindre se déplace vers le bas 127
5.13 Lignes de courant autour d'un cylindre libre en sédimentation pour $k = 0.29$ dans un référentiel lié aux plans pour $e/e_{max} =$: a) 0 - b) 0.141 - c) 0.282 - d) 0.423 - e) 0.563 - f) 0.704 - g) 0.845 - h) 0.986. L'accélération de la pesanteur est verticale descendante et le cylindre se déplace vers le bas 128
5.14 Evolution de la vitesse de translation du cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 132
5.15 Evolution de la vitesse de translation du cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de k pour $e/e_{max} = 0$ 132
5.16 Evolution de la vitesse de rotation du cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 134
5.17 Lignes de courant autour d'un cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan pour $k = 0.29$ dans un référentiel lié au cylindre pour $e/e_{max} =$ a) 0 - b) 0.141 - c) 0.282 - d) 0.423 - e) 0.563 - f) 0.704 - g) 0.845 - h) 0.986. Le fluide se déplace de la gauche vers la droite 135
5.18 Rapport des vitesses de rotation et de translation pour un cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan pour $k = 0.29$ 136
5.19 Evolution de la perte de charge engendrée par un cylindre libre dans un écoulement de Poiseuille plan en fonction de l'excentrement pour $k = 0.29$ 136
5.20 Evolution du coefficient A_{21} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$ 140
5.21 Evolution du coefficient A_{23} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$ 141

5.22 Evolution du coefficient A_{24} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$ 142
5.23 Evolution du coefficient A'_{24} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ 143
5.24 Evolution du coefficient A_{22} en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ 144
5.25 Evolution du coefficient A_{22} en fonction de ϵ pour $k = 0.29$ 145
5.26 Evolution du coefficient A_{22} en fonction de ϵ pour différentes valeurs de k 146
5.27 Evolution de $U_y/U^\star$ en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ pour $Re = 0.1$(l'accélération de la pesanteur est parallèle aux plans) 147
5.28 Evolution de $U_y/U^\star$ en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ (l'accélération de la pesanteur est perpendiculaire aux plans) 148
5.29 Evolution de $\gamma/\gamma^\star$ en fonction de y/y_{max} pour $k = 0.29$ 149
5.30 Evolution de $U_y/\overline{U}$ en fonction de e/e_{max} pour $k = 0.29$ et $Re = 0.1$ . . 150
5.31 En haut : problèmes de la translation du cylindre - En-bas : problèmes de la rotation du cylindre - A gauche : en présence de 2 plans (comme dans notre étude) - A droite : en présence d'un seul plan (comme chez Jeffrey *et al.* [45]) 150
5.32 Schéma du système étudié 151
5.33 Coefficient A_{31} en fonction de k pour $\epsilon = 0.724$ 152

1.1 Nombre de Nusselt pour un cylindre en milieu infini en fonction du nombre de Reynolds avec de l'air ($Pr = 0.72$) 164

2.1 Conditions aux limites de type Dirichlet 168
2.2 Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet (conditions aux limites de type Dirichlet) 170
2.3 $[Nu(k,Pe) - Nu_{Stokes}(k)]/Nu_{Stokes}(k)$ en fonction de Pe (conditions aux limites de type Dirichlet) 171
2.4 Nombre de Nusselt en fonction de k (conditions aux limites de type Dirichlet) 172
2.5 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 1000$ (conditions aux limites de type Dirichlet) 173
2.6 Isothermes autour du cylindre pour $Pe = 1000$ et $k =$: a)0.1 - b)0.3 - c)0.9 (conditions aux limites de type Dirichlet) 173
2.7 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 0.01$ (conditions aux limites de type Dirichlet) 174
2.8 Isothermes autour du cylindre pour $Pe = 0.01$ et $k =$: a)0.1 - b)0.3 - c)0.9 (conditions aux limites de type Dirichlet) 174
2.9 Nu_{Stokes} en fonction de k (conditions aux limites de type Dirichlet) . . 176
2.10 Conditions aux limites de type Neumann 177
2.11 Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet (conditions aux limites de type Neumann) 179
2.12 Nombre de Nusselt en fonction de k pour $Pe = 0.01$, 100 et 1000 (conditions aux limites de type Neumann) 180

2.13 Comparaison des nombre de Nusselt obtenus avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann en fonction de k pour $Pe = 100$. 181
2.14 Comparaison des nombre de Nusselt obtenus avec des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann en fonction de k pour $Pe = 1000$. 182
2.15 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 0.01$ (conditions aux limites de type Neumann) 183
2.16 Evolution de la densité de flux normalisée sur le cylindre pour $k = 0.6$ (conditions aux limites de type Neumann) 184
2.17 Nu_{Stokes} en fonction de k à $Pe = 0.01$ (conditions aux limites de type Neumann) 184

3.1 Conditions aux limites de type Dirichlet 187
3.2 Flux normalisé en fonction de e/e_{max} pour différents Pe (conditions aux limites de type Dirichlet). Les points ont les mêmes étiquettes que sur la figure 3.3 188
3.3 Flux normalisé en fonction de Pe pour $e/e_{max} = 0.704$ (conditions aux limites de type Dirichlet). Les points ont les mêmes étiquettes que sur la figure 3.2 189
3.4 $\Lambda^{Trans}(k = 0.29,Re)$ en fonction de Re pour $e/e_{max} = 0$ et $e/e_{max} = 0.704$ 191
3.5 $[\Lambda^{Trans}(k = 0.29,Re) - \Lambda^{Trans}_{Stokes}(k = 0.29)]/\Lambda^{Trans}_{Stokes}(k = 0.29)$ en fonction de Re pour $e/e_{max} = 0$ et $e/e_{max} = 0.704$ 191
3.6 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 1000$ (conditions aux limites de type Dirichlet) 192
3.7 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 2.10^{-3}$ (conditions aux limites de type Dirichlet) 193
3.8 Isothermes autour du cylindre pour $Pe = 1000$ (conditions aux limites de type Dirichlet) 194
3.9 Isothermes autour du cylindre pour $Pe = 2.10^{-3}$ (conditions aux limites de type Dirichlet) 195
3.10 Conditions aux limite de type Neumann 197
3.11 Flux normalisé en fonction de e/e_{max} pour différents Pe (conditions aux limites de type Neumann) 197
3.12 Flux normalisé en fonction de Pe pour $e/e_{max} = 0.704$ (conditions aux limites de type Neumann) 198
3.13 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 1000$ (conditions aux limites de type Neumann) 199
3.14 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 2.10^{-3}$ (conditions aux limites de type Neumann) 200
3.15 Répartition angulaire du flux sur le cylindre pour $Pe = 20$ (conditions aux limites de type Neumann) 201
3.16 Isothermes autour cylindre pour $Pe = 1000$ (conditions aux limites de type Neumann) 202
3.17 Isothermes autour du cylindre pour $Pe = 20$ (conditions aux limites de type Neumann) 203

3.18 Isothermes autour du cylindre pour $Pe = 2.10^{-3}$ (conditions aux limites de type Neumann) 204

Résumé : Les interactions hydrodynamiques sont souvent négligées dans le transport de particules à cause de leur complexité. Aux fortes concentrations, ces interactions se manifestent par une différence entre les cinématiques de ces particules et celle du fluide non perturbé contrairement aux hypothèses communément admises. Aujourd'hui, seuls de lourds calculs numériques (DNS) peuvent résoudre ces problèmes. Nous développons ici une méthode alternative, basée sur la matrice de résistance généralisée, appliquée au transport d'une particule cylindrique confinée. Pour la sédimentation, elle chute plus vite en position dissymétrique. En déterminant la cinématique de la particule en écoulement de Poiseuille nous montrons la non validité de l'hypothèse évoquée. Ensuite nous étudions les phénomènes de transferts sur le même cylindre. Selon la condition aux limites, on peut soit réduire, soit augmenter le flux sur le cylindre.

Mots-clés : Interactions hydrodynamiques, régime de type Stokes, particule cylindrique, matrice de résistance, sédimentation, suspension, contre-écoulement, cellules de Stokes, transfert de chaleur/masse

Summary : The hydrodynamic interactions are often neglected in the transport of the particles due to their complex nature. At high concentrations, these interactions induce a discrepancy between the kinematics of the particles and the non perturbed fluid contrary to the commonly admitted assumptions. Nowadays, only extensive numerical computations (DNS) may solve this sort of problems. We have thereby developed another approach based on the generalized resistance matrix and we have applied it to the transport of a confined cylindrical particle. Concerning the sedimentation, it falls faster in an asymmetrical position. The study related to the kinematics of this particle in Poiseuille flow confirms the non validity of the hypothesis as mentioned above. Finally we have studied the transfer phenomena on the cylinder and according to the boundary condition, the flux can either be reduced or increased.

Keywords : hydrodynamic interactions, Stokes type regime, cylindrical particle, resistance matrix, sedimentation, suspension, backflow, Stokes eddies, heat/mass transfer

Discipline : Physique

Laboratoire : LPMI/EMT CER ENSAM d'Angers - 2, bd du Ronceray BP 93525 49035 Angers cedex 01