



# Paramétrage quasi-optimal de l'intersection de deux quadriques : théorie, algorithme et implantation

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 6 octobre 2004

pour l'obtention du

**Doctorat de l'université Nancy 2**

(spécialité informatique)

par

Laurent Dupont

### Composition du jury

- Président :* Jean-François Mari, Professeur à l'université de Nancy 2
- Rapporteurs :* Bernard Mourrain, Directeur de recherche à l'INRIA Sophia-Antipolis  
Elmar Schöemer, Professeur à l'université de Mainz
- Examineurs :* Bernard Lacolle, Professeur à l'université de Grenoble  
Sylvain Petitjean, Chargé de recherche au CNRS
- Directrice de thèse :* Hazel Everett, Professeur à l'université de Nancy 2

Mis en page avec la classe thloria.

## Résumé

Cette thèse présente un algorithme robuste et efficace du calcul d'une forme paramétrée exacte de la courbe d'intersection de deux quadriques définies par des équations implicites à coefficients rationnels. Pour la première fois, le paramétrage que nous obtenons contient toutes les informations topologiques de la courbe et est assez simple pour être exploité dans des applications géométriques non triviales.

De nombreux progrès, dans différents domaines, ont été nécessaires pour atteindre ce résultat. Nous avons réalisé une étude exhaustive de tous les cas possibles d'intersection, d'abord dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  en nous basant sur les travaux de Segre, puis dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

en exploitant les résultats d'Uhlig sur la réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles. Cette étude systématique nous a permis de maîtriser complètement la géométrie inhérente à l'intersection de deux quadriques. Nous sommes maintenant capables de déterminer toutes les caractéristiques de la courbe d'intersection, à savoir son genre, ses points singuliers, le nombre de ses composantes algébriques et connexes, et les incidences entre ces composantes. Quand il en existe, nous trouvons un paramétrage rationnel des composantes de la courbe d'intersection. En ce sens, notre algorithme est optimal. Nous avons aussi fait des progrès significatifs sur la complexité de l'expression radicale des coefficients du paramétrage obtenu. Notre résultat est quasi-optimal dans le sens où les coefficients du paramétrage de la courbe d'intersection que nous calculons contiennent au plus une racine carrée non nécessaire dans leur expression. De plus, notre résultat est optimal dans le cas le pire, dans le sens où pour chaque type de courbe d'intersection (par exemple une quartique régulière, ou une cubique et une droite, ou deux coniques), il existe des paires de quadriques pour lesquelles le nombre de racines carrées apparaissant dans l'expression des coefficients de notre paramétrage est minimal.

Enfin, nous avons réalisé une implantation complète de notre algorithme en MuPAD qui nous a permis d'afficher des performances inédites, tant en terme de vitesse d'exécution qu'en terme de simplicité du résultat obtenu.

**Mots-clés:** I.1.2 [calcul formel et manipulations algébriques] : Algorithmes. I.3.5 [informatique graphique] : géométrie algorithmique et modélisation géométrique.

(ACM Computing Classification System (1998))



## Abstract

This thesis presents a robust and efficient algorithm for the computation of an exact parameterized form of the intersection curve of two quadric surfaces defined by implicit equations with rational coefficients. For the first time, the parameterization that we obtain contains all the topological informations of the curve and is simple enough to be exploited in non-trivial geometric applications.

Many new improvements, in different domains, were necessary to reach this result. We did a complete study of all possible cases of intersection, first in  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  based on the work of Segre, then in  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  by exploiting the results of Uhlig on the simultaneous reduction of two real quadratic forms. This systematic study allowed us to have a fine understanding the geometry of the intersection of two quadric surfaces. We are now able to determine all characteristics of the intersection curve, that is its genus, its singular points, its algebraic components and connected components, and all the links between these components. When one exists, we find a rational parameterization of the components of the curve. In this sense, our algorithm is optimal. We also made some significant improvements on the complexity of the radical expression of the coefficients of the obtained parameterization. Our algorithm is near-optimal in the sense that the coefficients of the parameterization contain at most one unnecessary square root in their expression. Our algorithm is optimal in the worst case, in the sense that for every type of intersection curve (for example a regular quartic, or a cubic and line, or two conics), there exist pairs of quadrics for which the number of square roots in the expression of the coefficients is minimal.

Finally, we made a complete implementation of our algorithm in MuPAD which allowed us to get previously unheard of performances, in terms of running time and in terms of the simplicity of the result.

**Keywords:** I.1.2 :



## Remerciements

L'entrée en thèse a été pour moi le reflet d'un choix délicat, à savoir poursuivre dans la continuité de son DEA, ou bifurquer vers le monde professionnel. Ce choix je l'ai fait grâce aux encouragements de ma famille, d'Hazel Everett, de Sylvain Lazard et Sylvain Petitjean, sans connaître toutes les difficultés qui ont surgies immanquablement au cours de la thèse, les moments de doute, de remise en cause. Je l'ai fait aussi sans savoir à quel point ce travail allait m'enrichir, m'épanouir. Je suis heureux de l'avoir fait. Un autre aspect qui n'apparaît généralement pas au moment du choix est sans doute l'importance de l'équipe dans laquelle la thèse se fera. En effet, j'estime avoir été particulièrement chanceux à ce propos, puisque j'ai intégré une équipe qui m'a offert des conditions de travail idéales, tant par l'environnement du laboratoire et sa qualité scientifique que par la personnalité des membres de cette équipe. Ces aspects sont essentiels dans le déroulement d'une thèse.

Je voudrais en premier lieu remercier Jean-François Mari d'avoir accepté mon jury de thèse, Bernard Mourrain et Elmar Schöemer de m'avoir fait l'honneur de rédiger chacun un rapport sur mes travaux de thèse, malgré les difficultés linguistiques qui ont pu apparaître durant la lecture du document. Je tiens aussi à remercier Hazel Everett, Sylvain Petitjean et Bernard Lacolle d'avoir participé à ce jury.

Je tiens à remercier Hazel Everett d'avoir accepté de diriger ma thèse. J'ai particulièrement apprécié son souci constant de m'orienter dans les bonnes directions, tant dans ma démarche scientifique que dans les choix qui ont influencé la qualité de mon dossier pour la suite de mon parcours. Je tiens à remercier Hazel Everett, Sylvain Lazard et Sylvain Petitjean pour m'avoir intégré dans leur équipe depuis mon arrivée en DEA. Durant ce DEA et toute ma thèse ils ont fait preuve de beaucoup de bienveillance et m'ont toujours poussé vers le haut. Ils ont créé les meilleures conditions de recherche en manifestant une patience sans limite. Je m'estime d'autant plus chanceux d'avoir été leur étudiant que lors du choix d'un sujet de DEA, la personnalité des chercheurs nous est encore inconnue, et que j'aurais pu intégrer une équipe moins attentive au bien-être de ses étudiants. Merci à Xavier Goac et Marc Glisse qui ont eux aussi répondu à mes questions et se sont toujours montrés disponibles pour m'aider.

Merci à Daniel Lazard sans qui les résultats apparaissant dans cette ne seraient pas ce qu'ils sont aujourd'hui. Je tiens encore à remercier Elmar Schöemer de m'avoir accueilli cinq mois à Sarrebruck et m'avoir ainsi donné l'opportunité de prolonger mes recherches. Merci à Michael Hemmer pour tout le temps qu'il m'a consacré, et qu'il me consacre encore dans ces recherches.

Merci à Jean-Claude Paul de m'avoir accueilli dans l'équipe ISA. Merci à Isabelle pour sa disponibilité.

Merci à Fabrice Rouillier et Bruno Pinçon de leur soutien durant l'année de maîtrise. Leurs encouragements m'ont incité à persévérer et je ne serais sans doute pas là sans eux.

Merci à tous ceux de mon entourage qui m'ont soutenu durant les différentes épreuves que traverse tout thésard. Merci à mes parents de leur soutien constant durant toutes ces années de doutes. Merci à ma soeur et à mon frère de leurs encouragements.

Enfin, merci à celle qui partage ma vie, qui me soutient, m'encourage et me suit dans tout ce que je fais, avec qui je construis ma vie, merci Brigitte.





*pour mes parents,  
pour Brigitte.*



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| Table des figures  | xiii      |
| Liste des tableaux   | xv        |
| <b>Notations</b>   | <b>1</b>  |
| <b>Chapitre 1 Introduction</b>   | <b>3</b>  |
| 1 Historique du problème . . . . .   | 3         |
| 2 Contributions . . . . .  | 5         |
| 3 Organisation du document . . . . .   | 7         |
| <b>Chapitre 2 État de l’art</b>  | <b>9</b>  |
| 1 Intersection de deux quadriques . . . . .                                      | 9         |
| 2 Applications . . . . .   | 11        |
| <b>Chapitre 3 Quadriques : définitions et généralités</b>                        | <b>13</b> |
| 1 Quadriques . . . . .   | 13        |
| 2 Faisceau de deux quadriques . . . . .  | 18        |
| <b>Chapitre 4 Calcul de l’intersection : méthode naïve</b>                       | <b>21</b> |
| 1 Description de l’algorithme . . . . .  | 21        |
| 2 Analyse de la méthode . . . . .  | 25        |
| <b>Chapitre 5 Méthode de Levin</b>   | <b>29</b> |
| 1 Résultats . . . . .  | 29        |
| 2 Description de l’algorithme . . . . .  | 31        |
| 3 Analyse de la méthode . . . . .  | 31        |
| 4 Perspectives . . . . .   | 33        |
| <b>Chapitre 6 Intersection de quadriques et espace projectif : préliminaires</b> | <b>35</b> |
| 1 Les espaces projectifs . . . . .   | 35        |

|   |   |            |
|---|---|------------|
| 2   | Quadriques dans l'espace projectif . . . . .                            | 36         |
| 3   | Définitions liées aux courbes d'intersection . . . . .                  | 39         |
| <b>Chapitre 7 Caractérisation du faisceau de deux quadriques</b>          |   | <b>45</b>  |
| 1   | Équation déterminantielle et invariants associés . . . . .              | 45         |
| 2   | Caractérisation des faisceaux dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . . . . . | 48         |
| 3   | Faisceaux dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . . . . .                     | 53         |
| 4   | Vers l'élaboration d'un algorithme . . . . .                            | 59         |
| <b>Chapitre 8 Résultats liés à la complexité algébrique</b>               |   | <b>61</b>  |
| 1   | Intersection et complexité algébrique . . . . .                         | 61         |
| 2   | Méthode de Gauss, transformations congruentes . . . . .                 | 62         |
| 3   | Paramétrages et équation aux paramètres . . . . .                       | 65         |
| 4   | Conclusion . . . . .  | 73         |
| <b>Chapitre 9 Algorithme associé aux faisceaux réguliers, cas général</b> |   | <b>75</b>  |
| 1   | Compléments sur les propriétés de la courbe de base . . . . .           | 75         |
| 2   | Choix de la quadrique à paramétrer . . . . .                            | 83         |
| 3   | Algorithme associé aux faisceaux réguliers . . . . .                    | 86         |
| 4   | Algorithme général . . . . .  | 86         |
| <b>Chapitre 10 Étude des courbes singulières</b>                          |   | <b>91</b>  |
| 1   | Singularités convexes ou concaves de la courbe de base . . . . .        | 91         |
| 2   | Résultats . . . . .   | 92         |
| 3   | Application du théorème d'Uhlig . . . . .                               | 97         |
| 4   | Résultats détaillés . . . . .   | 106        |
| <b>Chapitre 11 Algorithmes associés aux différents cas</b>                |   | <b>119</b> |
| 1   | Pourquoi de nouveaux algorithmes . . . . .                              | 119        |
| 2   | Séparation des cas . . . . .  | 123        |
| 3   | Calcul de la forme paramétrée . . . . .                                 | 125        |
| <b>Chapitre 12 Implantation</b>   |   | <b>145</b> |
| 1   | Choix du langage . . . . .  | 145        |
| 2   | Organisation des algorithmes . . . . .                                  | 145        |
| 3   | Validité des résultats et jeux de tests . . . . .                       | 146        |
| 4   | Résultats d'exécution . . . . .   | 148        |
| 5   | Interprétation . . . . .  | 151        |

|  |            |
|--|------------|
| <b>Chapitre 13 Conclusions, applications et perspectives</b> | <b>153</b> |
| 1 Analyse de nos résultats . . . . .                         | 153        |
| 2 Applications . . . . .                                     | 153        |
| 3 Perspectives . . . . .                                     | 155        |

---

---

## Annexes

---

---

|  |            |
|--|------------|
| <b>Annexe A Validité des paramétrages projectifs</b> | <b>159</b> |
| <b>Annexe B Rappels algébriques</b>                  | <b>163</b> |
| B.1 Extensions et théorie de Galois . . . . .        | 163        |
| B.2 Résolution de polynôme . . . . .                 | 165        |
| <b>Bibliographie</b>                                 | <b>169</b> |



# Table des figures

|      |   |     |
|------|---|-----|
| 3.1  | Différentes quadriques : (de gauche à droite et de haut en bas) ellipsoïde, cylindre elliptique, cône, hyperboloïde à 1 nappe, hyperboloïde à 2 nappes, parabolôïde hyperbolique. . . . . | 14  |
| 5.1  | Arbre de décision permettant de déterminer le type affine d'une quadrique $Q_Q$ . . .   | 30  |
| 6.1  | Singularités possibles de la courbe d'intersection . . . . .  | 42  |
| 9.1  | Intersections possibles pour les faisceaux réguliers . . . . .  | 77  |
| 9.2  | Faisceaux ne contenant pas de quadriques d'inertie $(2, 2)$ . . . . .   | 87  |
| 10.1 | Singularités convexes et concaves . . . . .   | 92  |
| 10.2 | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a une racine quadruple réelle . . . . .  | 94  |
| 10.3 | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a une racine triple et une simple . . . . .  | 95  |
| 10.4 | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a une racine double et deux simples . . . . .  | 96  |
| 10.5 | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a deux racines doubles . . . . .   | 98  |
| 10.6 | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ est identiquement nulle . . . . .  | 100 |
| 12.1 | Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une quartique régulière  | 148 |
| 12.2 | Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une quartique singulière   | 149 |
| 12.3 | Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une cubique et une droite . . . . .  | 150 |
| 12.4 | Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit deux coniques . . .  | 150 |
| 12.5 | Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une conique et deux droites . . . . .  | 151 |
| 12.6 | Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit quatre droites concourantes . . . . .  | 151 |
| 13.1 | Illustration des différents cas possibles dans le retour à l'espace affine . . . . .  | 154 |





# Liste des tableaux

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 3.a  | Équations canoniques des quadriques de $\mathbb{R}^3$ et types affines associés ( $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ). . . . .  | 18  |
| 3.b  | Équations canoniques des quadriques, nom des types affines associés, paramètres correspondants, avec $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ , $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . . . . .  | 19  |
| 4.a  | Types affines du tableau 3.b correspondant aux équations canoniques susceptibles d'être obtenues en fonction du nombre de valeurs propres non nulles de $\mathcal{P}_\varphi$ . $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^*$ , $i = 1, 2, 3$ , $b_1, b_2, c'' \in \mathbb{R}$ . . . . .  | 24  |
| 6.a  | Types projectifs des quadriques . . . . .  | 38  |
| 7.a  | Classification par facteurs invariants dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . . . . .   | 51  |
| 7.b  | Classification des courbes de base d'un faisceau de quadriques par facteurs invariants dans $\mathbb{P}^3\mathbb{C}$ pour les faisceaux dégénérés. . . . .   | 52  |
| 8.a  | Paramétrages optimaux des quadriques projectives dont l'inertie est différente de $(3, 1)$ . . . . .   | 66  |
| 9.a  | Intersections possibles pour les faisceaux réguliers . . . . .   | 76  |
| 10.a | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a une racine quadruple réelle . . . . .   | 93  |
| 10.b | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a une racine triple et une simple . . . . .   | 94  |
| 10.c | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a une racine double et deux simples . . . . .   | 95  |
| 10.d | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ a deux racines doubles . . . . .  | 97  |
| 10.e | Intersections possibles quand $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ est identiquement nulle . . . . .   | 99  |
| 10.f | Blocs de Jordan et racine quadruple . . . . .  | 101 |
| 10.g | Une racine quadruple dont la matrice de la quadrique associée est de rang 2 . . . . .  | 106 |
| 11.a | Corps de définition, dans le pire cas, du paramétrage de chaque composante algébrique de la courbe de base et optimalité théorique, pour les cas où la partie réelle de l'intersection est de dimension 0 ou 1. Si le résultat théorique n'est pas optimal, la nature du test nécessaire à la vérification de l'optimalité en pratique est donnée. . . . . | 143 |



# Notations

Ensembles :

|                             |  |
|-----------------------------|--|
| $\mathbb{R}^n$              | espace affine réel de dimension $n$          |
| $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$    | espace projectif réel de dimension $n$       |
| $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$    | espace projectif complexe de dimension $n$   |
| $\mathbb{P}\mathbb{R}^{*n}$ | espace quasi-projectif réel de dimension $n$ |

Quadriques :

|   |  |
|---|--|
| $Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}}, Q_{\mathcal{R}}$ | quadriques   |
| $\mathcal{P}$                                       | matrice associée à la quadrique $Q_{\mathcal{P}}$  |
| $\mathcal{P}_u$                                     | sous-matrice $3 \times 3$ supérieure gauche de $\mathcal{P}$   |
| $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$     | faisceau engendré par $Q_{\mathcal{P}}$ et $Q_{\mathcal{Q}}$   |
| $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$            | équation déterminantielle définie par $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$   |
| $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$                 | équation aux paramètres obtenue en insérant un paramétrage de $Q_{\mathcal{P}}$ dans l'équation implicite de $Q_{\mathcal{Q}}$ |

Matrices de transformations :

|     |   |
|-----|---|
| $T$ | matrice carrée d'une application linéaire |
|-----|---|

Points de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  :

Les points de  $\mathbb{R}^3$  seront notés  ${}^t(x_1, x_2, x_3)$  ou  ${}^t(x_1, x_2, x_3, 1)$  selon qu'ils aient ou non une coordonnée homogène. Le même symbole  $X$  désignera indifféremment  ${}^t(x_1, x_2, x_3)$  ou  ${}^t(x_1, x_2, x_3, 1)$ , la distinction se faisant selon qu'il est associé à l'équation implicite d'une quadrique ou qu'il apparaît dans une expression matricielle. De plus, quand il n'y aura pas de confusion possible, nous omettrons le symbole «  ${}^t$  » de transposition dans le corps du texte.



# Chapitre 1

## Introduction

### 1 Historique du problème

La conception assistée par ordinateur a toujours été une branche importante de l'informatique, permettant de concevoir et simuler l'usage de produits industriels comme des voitures, des avions, et de manière plus générale des pièces mécaniques. Cette étape est essentielle dans les processus industriels avant la réalisation effective de prototypes car elle permet de réduire considérablement les coûts de conception de nouveaux produits. Très tôt, les grandes firmes automobiles et aéronautiques ont perçu l'intérêt de logiciels d'infographie. Le constructeur de voiture General Motors ou l'entreprise Dassault ont eux-mêmes réalisé leur logiciel de CAO, GMSOLID pour le premier, et Catia pour la deuxième. L'étendue des applications de ces logiciels s'est élargie à d'autres domaines comme l'architecture, l'animation, ou le cinéma. D'autres programmes sont apparus, spécialisés dans telle ou telle application comme Maya [May], Povray [Pov], Blender [Ble], etc... Ils ont en commun de manipuler des représentations virtuelles d'objets tridimensionnels, chacun les exploitant ensuite dans des traitements propres à son domaine d'application. Il existe de nombreuses façons de représenter ces objets, et ces représentations ont une incidence non négligeable sur les traitements ultérieurs comme le rendu réaliste, les calculs de propriétés physiques des objets (comme la pénétration dans l'air d'une aile d'avion,...), ou l'animation d'une scène.

Une manière naturelle de construire des objets est d'appliquer une combinaison d'unions, d'intersections et de différences à des volumes simples. Cette construction induit une représentation volumique appelée modèle CSG, pour *Constructive Solid Geometry*, et est très souvent utilisée dans la phase de conception des scènes. Une autre approche consiste à définir les objets d'une scène par des modèles surfaciques, appelés modèles BRep, pour *Boundary Representation*. Ces modèles sont définis par leurs différentes faces extérieures, c'est-à-dire pour chacune d'entre elles, la description de la surface définissant la face, et les courbes délimitant la face. Cette conception moins naturelle offre cependant de nombreux avantages dans la manipulation des objets; elle est même indispensable pour réaliser certains traitements comme le calcul de radiosité pour la détermination de l'illumination d'une scène.

Dans ces deux représentations des objets, il faut encore déterminer la manière dont sont définis soit les volumes élémentaires pour le premier, soit les faces pour le deuxième. Historiquement, les premières descriptions des faces des modèles BRep ont été faites au moyen de maillages polygonaux (polygones qui sont le plus souvent des triangles). Le plan contenant un polygone (ou triangle) représente la surface qui contient la face, l'ensemble de ses arêtes décrivent le bord de la face. Ils offrent une grande souplesse d'utilisation par le faible degré des équations en jeu lors

de leur manipulation (des équations de degré 1 correspondant à l'intersection de segments, de plans). En contrepartie, ils nécessitent un nombre important de polygones pour décrire chaque objet et en offrir un aspect acceptable, ce qui allonge considérablement les temps de calcul. Il n'est pas rare de devoir traiter pour une seule scène un million de triangles, de leur appliquer des transformations géométriques, de plaquer sur leur surface des textures, le tout pour obtenir un rendu en temps réel (la limite théorique des cartes graphiques actuellement utilisées étant de 150 millions de triangles, la limite pratique se situe entre 300 000 et 1 million de triangles pour des scènes réalistes). Il existe une littérature très importante sur les maillages, tant dans le domaine de leur détermination en tant qu'approximation de surface que dans le domaine de leur représentation en mémoire, leur manipulation ou leur rendu. Leur étude constitue toujours un domaine actif de l'infographie.

Il est possible de généraliser les maillages en n'utilisant plus seulement des plans pour contenir les faces, mais aussi des surfaces algébriques de degré supérieur. La frontière entre les différentes faces n'est plus uniquement constituée de segments de droites mais aussi de courbes de degré plus élevé, et les équations entrant en jeu dans les calculs sont beaucoup plus compliquées. Leur usage se limite actuellement à des surfaces algébriques particulières comme les quadriques naturelles (sphères, cône droit, cylindre à base circulaire) et tores. Notons que la description des surfaces algébriques peut se faire de deux façons, par équation implicite ou par paramétrage. Si cette remarque n'a que peu de conséquences pour les maillages définis par des faces planes, elle est en revanche essentielle pour des maillages dont les faces sont contenues dans des surfaces algébriques de degré plus élevé, le passage d'une représentation à l'autre étant déjà en soi un problème ardu. Les maillages ne sont cependant pas, loin s'en faut, la seule représentation possible des surfaces. Citons par exemple les représentations à base de surfaces de Bézier ou de NURBS qui possèdent la propriété commune avec les maillages à base de polygones (ou triangles) de pouvoir être déformés facilement grâce à des points de contrôle (les sommets des triangles dans le cas des maillages).

Pour les modèles CSG, les volumes élémentaires peuvent être décrits théoriquement par les mêmes objets géométriques, maillages, NURBS, surfaces de Bézier, surface algébriques, mais en les considérant comme des volumes. Par exemple, dans le dernier cas, l'appartenance au volume peut se faire par l'évaluation négative, positive ou nulle de l'équation implicite en un point, ce qui indique si ce point est à l'intérieur, à l'extérieur ou sur le bord de l'objet. En pratique, les volumes élémentaires sont des cubes, des pavés, des pyramides, pouvant être décrits par des plans, des quadriques naturelles, ou encore des tores. Seules quelques expériences de modèles CSG à base de NURBS ont été réalisées par S. Krishnan et D. Manocha [?]. Notre choix s'est porté sur une représentation des volumes élémentaires par les équations implicites des surfaces qui les bornent.

Les modèles CSG et BRep ont chacun des avantages et des inconvénients qui leur sont propres. Il est souvent nécessaire dans un système graphique de maintenir à jour simultanément ces deux modèles; il faut donc pouvoir faire des conversions entre les deux. La difficulté de cette conversion vient de la façon dont les primitives géométriques de base du modèle CSG sont définies. La caractéristique critique dans notre cas est le degré des équations implicites des surfaces algébriques servant à décrire les volumes élémentaires du modèle CSG. Maîtriser le cas non-linéaire dans sa généralité et non plus pour telle ou telle équation aux propriétés particulières constitue l'un des grands défis actuels de la géométrie algorithmique. Dans notre cas, le premier pas en avant se traduit par l'apparition d'une nouvelle génération de modeleurs, comme Sgdl Studio [Sgd] où les objets sont définis par des modèles CSG dont les primitives de base sont bornées par des surfaces algébriques de degré au plus 4, c'est-à-dire les plans, les quadriques, les cubiques et les quartiques. Dans le cadre d'un projet de réalisation de la conversion d'un

modèle CSG défini par des volumes bornés par ces quadriques, en un modèle BRep, nous nous attachons, dans ce document, à décrire le calcul d'une forme paramétrée exacte de la courbe d'intersection de deux quadriques. Ce calcul constitue la première étape dans la conversion, les courbes paramétrées servant à définir les arêtes des différentes faces du modèle BRep.

Si nous nous sommes intéressés à cet algorithme de calcul d'une forme paramétrée de la courbe d'intersection de deux quadriques dans le cadre de l'infographie, il faut noter que son intérêt va au-delà et qu'il peut apparaître dans de nombreux problèmes. En géométrie algorithmique, par exemple, ce calcul peut en effet servir de base dans les algorithmes de détermination d'arrangements de quadriques [GHS01a], calcul de l'enveloppe convexe de carreaux de quadriques [HI95, GHS01b], ou dans le calcul de diagrammes de Voronoï de segments de l'espace  $\mathbb{R}^3$  dont les régions sont délimitées par des quadriques. Ce dernier exemple n'a encore jamais été réellement étudié. Enfin, comme nous l'avons déjà signalé, la manipulation des quadriques constitue le premier pas dans le monde non linéaire. Les quadriques sont les objets courbes les plus simples, le calcul du paramétrage exact de leur intersection est un problème qui devient fondamental au même titre que le calcul d'un paramétrage exact de l'intersection de deux plans.

## 2 Contributions

Les progrès que nous apportons avec notre méthode relèvent de deux aspects différents ; nous avons d'une part recherché toutes les informations que nous pouvions obtenir sur la géométrie de la courbe d'intersection afin d'en trouver la forme paramétrée la plus simple possible, et nous avons d'autre part mis en œuvre des techniques d'algèbre classique ou des techniques plus directement liées à notre problème pour réduire la complexité des coefficients numériques que nous manipulons. Il faut toujours garder en tête ces deux aspects du problème pour comprendre tout l'intérêt de notre méthode. L'algorithme que nous avons construit n'est aussi robuste et efficace, son résultat si simple à utiliser que par les progrès conjoints que nous avons pu réaliser sur ces deux aspects.

Nous avons maintenant une vision complète de la géométrie de l'intersection de deux quadriques, nous maîtrisons entièrement les difficultés de l'algorithme, et nous avons réussi à l'implanter efficacement, avec une arithmétique exacte. Pour la première fois, nous avons une description topologique complète de la courbe d'intersection ; notre résultat constitue une base solide qui peut être exploitée dans des applications géométriques non triviales. Dans tous les cas, nous sommes maintenant capables de décrire complètement les composantes algébriques de la courbe d'intersection, leurs positions les unes par rapport aux autres, le nombre et la nature des points singuliers de cette courbe ; en ce sens, notre algorithme est optimal. Quand il en existe, nous obtenons un paramétrage rationnel de chacune des composantes de la courbe d'intersection, c'est-à-dire un paramétrage dont les coordonnées sont définies par des fonctions rationnelles (le rapport de deux polynômes) ; notre algorithme est aussi optimal en ce sens.

Nous avons su contrôler l'apparition de nombres algébriques au cours des différentes étapes de notre algorithme. Cela constitue un progrès crucial pour ce problème, sans lequel il n'est pas possible de manipuler le résultat de notre algorithme. Nous avons pu ainsi obtenir des résultats d'optimalité concernant la complexité des coefficients apparaissant dans le paramétrage de la courbe d'intersection que nous ressortons. Notre algorithme est optimal dans certains cas, quasi-optimal dans d'autres. Cela signifie qu'il existe des paires de quadriques pour lesquelles l'expression exacte des coefficients de la forme paramétrée de la courbe d'intersection que nous exhibons est la plus simple possible, et que dans d'autres cas, il est possible que notre algorithme introduise une racine carrée non nécessaire dans l'expression finale des coefficients de la forme

paramétrée de leur courbe d'intersection.

Nous pouvons analyser plus finement les progrès que nous venons de présenter. Ils sont le fruit de résultats intermédiaires, certains étant particuliers à notre problème, d'autres relevant de domaines plus généraux. Nous avons commencé par nous placer dans l'espace projectif qui est l'espace le plus adapté à l'étude des surfaces et de leur intersection. Dans cet espace, nous avons déterminé de nouveaux paramétrages des quadriques réglées, paramétrages ayant la propriété d'être linéaires en un de leurs paramètres ; c'est-à-dire pour toutes les quadriques sauf les ellipsoïdes, les hyperboloïdes à deux nappes et les paraboloides elliptiques, quadriques pour lesquelles cette propriété de linéarité par rapport à un paramètre ne peut pas être vérifiée. Ces paramétrages répondent d'autre part à un autre souci (lié au deuxième aspect de notre problème), ils contiennent le moins possible de racines carrés dans leurs coefficients. Nous dirons qu'ils sont optimaux en terme de complexité algébrique de leurs coefficients, pour la classe des paramétrages linéaires en au moins un paramètre.

Un apport important de notre méthode est la description complète et systématique dans l'espace projectif réel des différents cas possibles d'intersection de deux quadriques. Cela nous permet de résoudre le problème quelles que soient les quadriques de départ, sans renvoyer l'utilisateur à d'autres méthodes pour tel ou tel cas dégénéré. Pour distinguer tous les cas possibles nous utilisons les invariants du faisceau de deux quadriques, la nature, réelle ou complexe, et la multiplicité des racines d'un polynôme (dépendant d'un paramètre) associé au faisceau de deux quadriques, l'équation déterminantielle. Ainsi, par exemple, avec le critère simple de savoir si ce polynôme n'a que des racines simples ou pas, nous pouvons affirmer si la courbe possède ou non des points singuliers. Cette propriété est importante car, dans le premier cas, la courbe d'intersection est une quartique régulière ne pouvant être paramétrée rationnellement, dans le deuxième cas, des résultats non triviaux de géométrie algébrique nous assurent que la courbe (ou plus exactement chacune de ses composantes) peut être paramétrée rationnellement. Étudions les progrès que nous avons réalisés dans chacun de ces deux cas.

Si la courbe d'intersection est une quartique régulière, la méthode de J. Levin [Lev76] sur laquelle nous nous sommes appuyés permet d'obtenir une forme exacte d'un de ses paramétrages, optimale dans le sens où la racine carrée de polynôme présente dans son expression est nécessaire. Nous obtenons ainsi la meilleure forme exacte possible du paramétrage de la courbe d'intersection. Le deuxième point important est la complexité des coefficients numériques apparaissant dans l'expression du paramétrage que nous obtenons. Pour améliorer cette complexité, nous avons travaillé à plusieurs niveaux. Nous avons d'abord progressé en ne déterminant que des transformations (des changements de repère) à coefficients rationnels comme, par exemple, l'utilisation de la décomposition en carrés des formes quadratiques, de Gauss, plutôt qu'un calcul de vecteurs et valeurs propres de la matrice associée aux quadriques. Grâce à notre meilleure compréhension de la géométrie du faisceau de deux quadriques, nous avons pu choisir la quadrique utilisée dans nos calculs dans un ensemble plus grand de quadriques que celui utilisé auparavant. Là où J. Levin choisissait une quadrique parmi trois, nous la choisissons dans un ensemble contenant une infinité de quadriques.

Quand la courbe d'intersection contient un ou plusieurs points singuliers, nous sommes obligés de faire une étude exhaustive de 47 cas possibles d'intersection. La distinction entre ces cas se fait en deux temps. Nous commençons par exploiter les résultats de T. Bromwich [Bro06] qui expose les différents types d'intersection dans l'espace projectif complexe (hormis une certaine classe d'intersections dégénérées que nous avons intégrée à notre étude). La deuxième étape de cette étude consiste à se ramener au cas réel. Pour cela, nous utilisons les résultats de F. Uhlig [Uhl76] sur la diagonalisation simultanée des formes quadratiques réelles. Grâce à cette étude, nous pouvons dans chaque cas déterminer le nombre de points singuliers de la courbe d'intersec-



tion, le nombre de ses composantes algébriques, leurs positions les unes par rapport aux autres. Par voie de conséquence, nous obtenons aussi le nombre de composantes connexes de la courbe. Ces résultats ont significativement influencé notre algorithme puisque nous pouvons rapidement déterminer dans quel cas nous nous trouvons, sans réellement commencer le calcul de la courbe d'intersection elle-même. Nous pouvons ainsi exploiter les propriétés de chaque cas dès le début du calcul. Cela nous permet entre autres, de déterminer, quand il en existe un, un paramétrage rationnel de la courbe, puisque nous savons qu'il en existe. Nous y arrivons en utilisant les quadriques singulières du faisceau. En utilisant leurs propriétés, leurs points singuliers, nous pouvons aussi améliorer la complexité algébrique des coefficients numériques de notre solution, avec les résultats d'optimalité que nous avons déjà énoncés. Enfin notons que notre méthode a l'avantage d'exploiter les propriétés intrinsèques du problème, ce qui permet d'éviter d'employer des méthodes plus générales comme la factorisation de polynômes multivariés ou le calcul de résultants comme cela était souvent fait auparavant.

Nous avons réalisé une implantation robuste et efficace de notre algorithme, dans un premier temps avec le logiciel MuPAD [MuP], puis en C++ pour obtenir des performances inédites. Ce travail nous permet de confirmer la robustesse et l'efficacité de notre algorithme. Les résultats peuvent être aisément manipulés dans d'autres applications.

### 3 Organisation du document

Ce document débute avec un état de l'art général au chapitre 2. Nous introduisons ensuite les quadriques dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  et les concepts qui s'y rattachent au chapitre 3. Dans les deux chapitres suivants nous présentons des méthodes déjà connues de calcul d'une forme paramétrée de l'intersection de deux quadriques. Dans le chapitre 4, nous exposons une méthode naïve, et dans le chapitre 5 la méthode décrite par J. Levin [Lev76], méthode classique qui nous a servi de point de départ pour notre travail. Nous analysons les points forts et les points faibles de ces deux méthodes afin de distinguer ce qu'il faut conserver de ce qu'il faut reprendre pour l'élaboration d'un algorithme répondant à nos exigences.

La première étape pour construire notre algorithme est de se placer dans l'espace projectif que nous introduisons au chapitre 6. Nous développons dans ce chapitre toutes les définitions et propriétés relatives aux quadriques dans l'espace projectif. Nous présentons également quelques propriétés des courbes algébriques, d'un point de vue général, ce qui nous sera très utile dans les chapitres suivants. Le chapitre 7 est consacré à l'étude du faisceau de deux quadriques dans l'espace projectif. Après avoir donné quelques propriétés et définitions de base, nous abordons le vif du sujet en présentant la caractéristique de Segre [Seg83] d'un faisceau de deux quadriques dans l'espace projectif complexe de dimension  $n$ ,  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Nous présentons ensuite le théorème de réduction simultanée de deux formes quadratiques dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  qui permet d'appliquer la caractéristique de Segre dans un espace réel et d'y traiter les sous-cas qui y apparaissent par rapport au cas complexe. Le chapitre 8 introduit les outils nécessaires à la résolution des problèmes de complexité algébrique de notre résultat. Nous rappelons les principes de la réduction en carré d'une forme quadratique de Gauss, méthode permettant de déterminer une forme canonique d'une quadrique en n'utilisant que des transformations linéaires à coefficients rationnels. Nous présentons de nouveaux paramétrages des quadriques, paramétrages qui permettent de minimiser le nombre de racines carrées dans les coefficients.

Le chapitre 9 décrit l'algorithme le plus général que nous ayons implanté. Nous commençons par présenter quelques propriétés de la courbe d'intersection dans le cas où elle est la plus générale possible, c'est-à-dire dans le cas où c'est une quartique régulière ne pouvant être paramétrée

rationnellement. Nous donnons ensuite une méthode permettant de trouver la quadrique répondant le mieux (ou presque) à nos critères pour faire les calculs, puis présentons l'algorithme général lui-même. Le chapitre 10 présente les différentes courbes d'intersection possibles si le faisceau étudié n'est pas complètement général. Dans le chapitre 11 nous présentons les algorithmes associés aux cas étudiés au chapitre 10, en mettant l'accent sur les méthodes employées pour résoudre les problèmes de complexité algébrique.

Enfin nous concluons ce document au chapitre 13 en présentant des applications de notre travail et en donnant quelques perspectives sur une généralisation éventuelle de notre travail, soit à des dimensions supérieures, soit à des surfaces de degré plus élevé.

# Chapitre 2

## État de l'art

Nous nous sommes intéressés aux surfaces de degré 2 car ce sont les surfaces courbes de plus petit degré, c'est-à-dire les plus simples à manipuler. La complexité des calculs qu'elles induisent reste raisonnable. De plus, leur importance est considérable en modélisation de pièce mécaniques puisque les quadriques naturelles (plans, cônes, cylindres) représentent 95% des surfaces utilisées pour modéliser les objets [RV82].

Le calcul de l'intersection de deux quadriques est donc sujet qui a déjà été abordé dans de nombreux articles. Il constitue un élément fondamental de nombreuses applications, comme la conversion CSG-BRep pour les modèles définis à base de quadriques, l'arrangement de quadriques, ou encore le calcul de diagramme de Voronoï de segments dans  $\mathbb{R}^3$ .

### 1 Intersection de deux quadriques

Le calcul d'une forme paramétrée de l'intersection de deux quadriques est un sujet qui a déjà fait l'objet de nombreux articles. Il est indéniable que celui de J. Levin [Lev76] fait office de référence depuis près de trente ans (tous les articles que nous citons dans cette section s'en inspirent directement ou indirectement). Dans cet article, J. Levin décrit une méthode originale de calcul de l'intersection de deux quadriques se basant sur les quadriques singulières du faisceau des deux quadriques initiales. Une étude détaillée de son algorithme est donnée au chapitre 5.

Nous ne connaissons aucune implantation robuste et complète de son algorithme. Pour contourner les problèmes numériques, durant les années qui ont suivi la parution des articles de J. Levin [Lev76, Lev79, Lev80], deux voies ont été explorées. L'une consiste à restreindre le calcul à l'intersection de surfaces appartenant à un sous-ensemble des quadriques, les quadriques naturelles, c'est-à-dire les cônes, les cylindres, les sphères [Sar83, Mil87, GM91, SJ91, SJ92, SJ94b], principalement pour des applications de conception assistée par ordinateur. Ainsi les propriétés spécifiques à chacune de ces surfaces sont utilisées pour simplifier le calcul de l'intersection. L'autre voie consiste en l'étude de certains types d'intersections, par exemple uniquement les intersections qui ne sont pas contenues dans des plans [WM93], ou l'étude des intersections dont il existe une forme paramétrée rationnelle [FNO89]; dans les deux cas, aucune condition n'est imposée aux deux quadriques de départ, seule compte la forme de la courbe.

En ce qui concerne la première voie, dès 1983 R.F. Sarraga [Sar83] calcule l'intersection de plans, de cylindres circulaires, de cônes droits, et de sphères. Il étudie les points singuliers de la courbe d'intersection pour des traitements ultérieurs en établissant un lien entre ces points et les points singuliers des quadriques initiales. Il montre comment retrouver les sections coniques

de la courbe d'intersection. Il s'intéresse aussi aux problèmes de robustesse liés à cet algorithme et étudie diverses méthodes numériques pour y remédier. En 1987, J. Miller [Mil87] étudie lui aussi l'intersection de quadriques naturelles. Il tire parti d'une approche algébrique et d'une approche géométrique du problème, étudie les intersections au cas par cas en fonction des deux quadriques de départ (cylindre-cylindre, cylindre-cône...). Par rapport à J. Levin, il parvient à ne devoir résoudre que des équations de degré deux, ce qui lui permet d'utiliser une arithmétique exacte (cela vient aussi du fait qu'il ne considère pas toutes les quadriques!). En collaboration avec R. Goldman il s'intéressera ensuite au calcul des sections coniques dans l'intersection de deux quadriques naturelles [GM91, MG95]. C.-K Shene et J. Johnstone étudient aussi l'intersection de quadriques naturelles [SJ94a] après l'avoir étudiée dans des cas plus particuliers encore comme l'intersection d'un plan et d'une quadrique [SJ92], d'un plan et d'une quadrique de révolution [SJ94b], ou en recherchant les sections coniques dans l'intersection de deux quadriques naturelles [SJ91]. Ces approches sont intéressantes mais restent malheureusement cantonnées à certaines classes de quadriques. Il est possible d'y puiser de l'inspiration sur tel ou tel point mais elles ne peuvent constituer l'ossature d'une méthode performante comme peut s'en prévaloir la méthode de J. Levin.

La deuxième voie qui consiste à considérer n'importe quelle quadrique au départ est représentée principalement par cinq articles. En 1989, R. Farouki, C. Neff et M. O'Connor [FNO89] font une étude systématique dans les cas où l'intersection n'est pas une quartique régulière. Ils donnent un critère simple pour savoir si l'on est ou pas dans ce cas. Ils utilisent pour la première fois la caractérisation de Segre [Seg83] dont une description complète a été faite par T. Bromwich [Bro06] et qui classe les intersections de deux quadriques dans l'espace projectif complexe. Ce dernier article est celui celui auquel nous nous référerons le plus souvent. Pour que leur algorithme aboutisse, ils mettent en œuvre la factorisation d'un polynôme de degré quatre en trois variables (le résultant de deux polynômes de degré deux en quatre variables); notons cependant qu'il n'est pas fait mention d'éventuels problèmes de robustesse, et que certains cas dégénérés ne sont pas traités. En 1993, I. Wilf et Y. Manor [WM93] étudient la forme de la courbe d'intersection de deux quadriques en fonction de la factorisation de l'équation aux paramètres (polynôme en deux variables). Ils limitent leur étude aux cas des intersections dites « non planaires » et utilisent une caractérisation de Segre incomplète. Les problèmes de robustesse ne sont pas abordés.

Plus récemment, les problèmes liés au calcul de l'intersection sont revenus au goût du jour. C. Tu, W. Wang et J. Wang [TWW02] ont étudié les différents cas possibles où l'intersection de deux quadriques n'a pas de points singuliers, c'est-à-dire quand la courbe est une quartique régulière. Ils donnent un critère simple de détection de ces cas et étudient les topologies possibles pour cette quartique. Ils montrent qu'il existe trois configurations, l'une où la courbe est constituée d'une composante connexe affinement finie, l'autre où elle est constituée de deux composantes connexes affinement infinies, et enfin la dernière où la courbe est constituée de deux composantes connexes affinement finies.

W. Wang, B. Joe et R. Goldman [WJG02] ont amélioré une autre approche du calcul du paramétrage de la courbe d'intersection de deux quadriques reposant sur la projection de la courbe d'intersection sur un plan. En général cette courbe plane est une quartique et tout l'intérêt de leur méthode est de choisir la projection de sorte que cette courbe soit une cubique (plane). La détermination de cette projection passe par le calcul d'un point de la courbe d'intersection des deux quadriques. Ils utilisent la méthode de J. Levin pour déterminer ce point. En se basant sur la classification des cubiques planes, ils peuvent classer les courbes d'intersection possibles entre deux quadriques. Quand la courbe d'intersection est une quartique singulière, c'est-à-dire contenant un point singulier, ils en déterminent la nature (point double, cuspidal, isolé). En

revanche, ils ne font aucune allusion au sujet de la complexité des coefficients numériques et utilisent une arithmétique flottante. La forme du paramétrage qu'ils obtiennent est exacte dans le sens où ce paramétrage correspond à un paramétrage exact de la courbe d'intersection (pas nécessairement le plus simple), dont les coefficients auraient été approchés par des nombres flottants.

Enfin, dernièrement, W. Wang, R. Goldman et C. Tu [WGT03] ont montré comment améliorer la méthode de J. Levin. Ce travail est encore basé sur les résultats de T. Bromwich [Bro06], mais aussi sur ceux de F. Uhlig [Uhl76] qui permettent d'étudier plus facilement dans l'espace projectif réel les résultats obtenus dans l'espace projectif complexe par T. Bromwich. Ces résultats montrent comment les racines d'un polynôme de degré 4 dépendant des deux quadriques peuvent être utilisées pour retrouver la topologie de la courbe d'intersection. Ils donnent une preuve plus simple du principal résultat de J. Levin [Lev76] sur l'existence d'une quadrique « simple » dans le faisceau de deux quadriques. Quand un paramétrage rationnel de la courbe d'intersection existe, ils en déterminent un. Ils utilisent comme précédemment une projection de la courbe sur une cubique plane. De plus, ils semblent toujours utiliser une arithmétique flottante, ce qui peut avoir des conséquences sur la robustesse de l'algorithme.

Notons que dans les articles précédents, l'équation donnant le critère permettant de savoir si la courbe d'intersection est une quartique générique, ou, dans l'article de J. Levin, l'équation permettant de rechercher une quadrique réglée ne sont pas étudiées si elles sont identiquement nulles. De ce fait, un certain nombre de cas dégénérés ne sont pas pris en compte. Généralement les auteurs renvoient à des méthodes de calcul de l'intersection d'un plan et d'une quadrique.

Une autre référence importante dans le calcul de l'intersection de deux surfaces, est l'article de H-S. Heo, M-S. Kim et G. Elber [Heo99] concernant l'intersection de surfaces réglées. Il est malheureusement inutilisable ici car il nous pose deux problèmes. D'une part il ne permet pas de calculer l'intersection de deux surfaces dont l'une est une sphère, puisque ce n'est pas une surface réglée, ce qui est particulièrement gênant pour nous. En effet l'intérêt de travailler avec des quadriques dans les modèles CSG est de pouvoir inclure les sphères, et en plus, les surfaces/volumes définis par des équations de même degré. D'autre part, les surfaces réglées qu'ils considèrent sont données sous forme paramétrée. Les auteurs rejettent alors l'idée d'insérer le paramétrage de l'une des surfaces dans l'équation implicite de l'autre, du fait de la complexité de l'algorithme d'implicitisation d'une forme paramétrée. Dans notre cas, ce problème n'a pas lieu d'être puisque les quadriques que nous étudions sont données par leurs équations implicites.

## 2 Applications

L'idée de projeter la courbe d'intersection de deux quadriques sur un plan apparaît aussi dans les articles de N. Geismann, M. Hemmer et E. Schoemer [GHS01a, GHS01b]. Ces articles sont plus consacrés à des problèmes d'arrangements de quadriques et se servent du calcul de l'intersection de deux quadriques comme brique de base. Dans un modèle composé de plusieurs quadriques, ils projettent sur un plan toutes les courbes d'intersection entre paires de quadriques de leur modèle et étudient les interactions qui existent entre ces courbes. La courbe projetée, dans ces articles, peut, contrairement à celle calculée par W. Wang, R. Goldman et C. Tu, être de degré 4. Ceci est lié au fait qu'ils projettent plusieurs courbes d'intersection de plusieurs paires de quadriques de leur modèle sur le même plan. Ils ne peuvent donc pas se permettre de choisir aussi aisément le plan de projection.

Le calcul de l'intersection de quadriques est aussi utilisé dans la détection de collision entre ellipsoïdes en mouvement [WWK01, CWK03, WCC<sup>+</sup>03]. Dans [WWK01], les auteurs se basent

sur la forme particulière des ellipsoïdes pour en trouver une diagonalisation simultanée. Ils commencent, par rotation, homothétie et translation par transformer un des deux ellipsoïdes en la sphère unité, puis par rotation, font coïncider les axes du repère avec ceux du deuxième ellipsoïde. Ils exploitent parfaitement des propriétés particulières des ellipsoïdes.

La méthode de conversion CSG-BRep consistant à calculer une forme paramétrée de toutes les courbes d'intersections des paires de quadriques du modèle puis à calculer les parties de ces courbes formant les arêtes des faces visibles du modèle BRep n'est pas la seule voie possible. J. Keyser, S. Krishnan et D. Manosha [?, KKM97, KFC<sup>+</sup>01] ont construit une autre méthode destinée à convertir des modèles CSG définis par des surfaces de faible degré en modèles BRep. Elle consiste à convertir chaque volume définissant le modèle CSG en son équivalent BRep, puis à réévaluer une à une chaque opération booléenne définissant le modèle. Les courbes limitant chaque face sont définies par courbes algébriques et leurs sommets sont définis par des coordonnées algébriques. Leur algorithme est plus général que ce que nous recherchons puisqu'il peut s'appliquer à des surfaces de degré supérieur à 2, mais il est nécessaire que ces objets soient en position générale. Le fait de ne considérer que des surfaces de degré au plus 2 nous permet, contrairement à eux, de ne pas à savoir gérer des racines de polynômes de degré supérieur à quatre, possiblement non exprimable sous forme de radicaux.

# Chapitre 3

## Quadriques : définitions et généralités

Le but de ce chapitre est de poser les premières définitions nécessaires à l'étude des quadriques. Lors de la création de scènes, en infographie, l'utilisateur se place dans l'espace affine réel de dimension 3 et y définit ses objets. Il y a dans l'expression espace affine réel deux notions, la structure affine de l'espace où nous nous plaçons, et le corps sur lequel est définie cette structure. Il est naturel de considérer le corps des réels car les objets modélisés appartiennent à l'espace dans lequel nous vivons. Il est tout aussi naturel de vouloir se placer dans l'espace affine car c'est l'espace le plus proche de la réalité telle que nous la percevons. Ce n'est cependant pas le seul espace où peuvent être définies les quadriques comme l'ensemble des points dont les coordonnées satisfont une équation implicite qui est un polynôme de degré 2. Si nous écartons tout de suite les espaces des géométries dites non-euclidiennes (comme la géométrie hyperbolique), nous verrons, au chapitre 6, après avoir exposé les méthodes sur lesquelles nous nous sommes appuyés, qu'il existe un espace plus adapté à la résolution de notre problème, l'espace projectif<sup>1</sup> réel de dimension 3. Il nous arrivera de définir cet espace projectif sur le corps des complexes plutôt que sur celui des réels quand le besoin s'en fera sentir. C'est pourquoi nous aurons tendance à toujours préciser le corps sur lequel nous travaillons. En tout état de cause, jusqu'au chapitre 6, tous les espaces sont définis sur les réels.

Nous définissons dans ce chapitre les quadriques dans l'espace affine  $\mathbb{R}^3$ , leurs propriétés les plus immédiates, la façon dont nous les classons, les reconnaissons, comment nous les paramétrons. À la fin de ce chapitre, nous introduisons la notion essentielle de faisceau des deux quadriques dont nous cherchons à calculer un paramétrage de la courbe d'intersection. Enfin, notons que toutes les définitions et tous les théorèmes sont donnés pour la dimension 3 mais se généralisent à n'importe quelle dimension finie.

### 1 Quadriques

Usuellement les quadriques de  $\mathbb{R}^3$  sont les surfaces de degré 2, c'est-à-dire les ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloides, cylindres, cônes et paires de plans. Nous définissons les quadriques

---

<sup>1</sup>La géométrie projective n'est pas euclidienne par définition, mais il est courant de ne pas y faire allusion lorsque l'on parle de géométrie non-euclidienne. Cet abus de langage est acceptable car la géométrie projective est définie à partir de la géométrie affine (euclidienne) et la prolonge, alors que les géométries non-euclidiennes comme la géométrie hyperbolique se définissent parallèlement à la géométrie affine en changeant certains axiomes de départ.

comme les ensembles de points dont les coordonnées vérifient une équation de degré au plus 2.

**Définition 3.1 (Quadrique)** Une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{R}^3$  est l'ensemble des points dont les coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  vérifient l'équation :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 a_{ij} x_i x_j + \sum_{j=1}^3 b_j x_j + c = 0, \quad (1)$$

où les  $a_{ij}, b_i$ , et  $c$  sont réels. Cette équation peut s'écrire :

$$\forall X \in \mathbb{R}^3 \quad \varphi(X) + L(X) + c = 0, \quad (2)$$

où  $\varphi$  est une forme quadratique de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $L$  une forme linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $c \in \mathbb{R}$ .

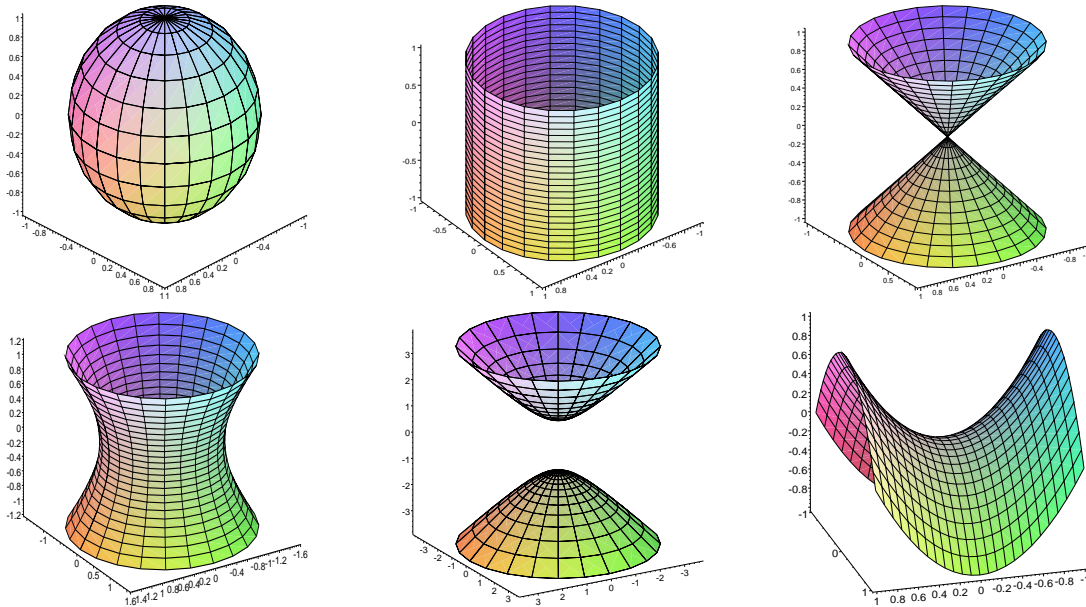


FIG. 3.1 – Différentes quadriques : (de gauche à droite et de haut en bas) ellipsoïde, cylindre elliptique, cône, hyperboloïde à 1 nappe, hyperboloïde à 2 nappes, parabolôïde hyperbolique.

Habituellement les quadriques sont définies avec la condition plus contraignante que les coefficients  $a_{ij}$  soient non tous nuls, ce qui garantit d'avoir une équation de degré exactement 2. Nous avons une définition plus large puisque nos quadriques sont définies non seulement par des équations de degré 2, mais aussi de degré 1 ou 0, et même des équations identiquement nulles. Nous avons fait ce choix car pour rechercher l'intersection de deux quadriques, nous allons étudier des combinaisons linéaires des équations de ces quadriques, et nous voulons pouvoir considérer que l'équation qui en résulte définit elle-aussi une quadrique. Par exemple si  $Q_{\mathcal{P}}$  est définie par (1) :  $ax_1^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + c = 0$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est définie par (2) :  $ax_1^2 + b'_1x_1 + b'_2x_2 + b'_3x_3 + c' = 0$ , alors (1)-(2) est une équation de degré 1 qui définit un plan. Pour la même raison l'équation dont tous les coefficients sont nuls, (1)-(1), doit aussi définir une quadrique. Dans ce cas, tous les points de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant l'équation, nous considérons que l'espace  $\mathbb{R}^3$  tout entier est une quadrique. Enfin, ces problèmes disparaîtront d'eux-mêmes quand nous nous placerons dans l'espace projectif puisque



dans cet espace, hormis l'équation identiquement nulle, toutes les équations seront de degré exactement 2.

Introduisons maintenant la matrice associée à une quadrique, notion qui provient de la matrice associée à une forme quadratique  $\varphi$ , et à une « homogénéisation » des coordonnées pour tenir compte du terme linéaire  $L$  et du terme constant  $c$ .

**Définition 3.2 (Matrice associée à une quadrique)** *La matrice  $\mathcal{P}$  associée à une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  d'équation  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=i}^3 a_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^3 b_j x_j + c = 0$  est :*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}b_1 \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \frac{1}{2}b_2 \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} & \frac{1}{2}b_3 \\ \frac{1}{2}b_1 & \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{2}b_3 & c \end{pmatrix}.$$

Pour retrouver l'équation implicite, il faut rajouter une coordonnée « constante » aux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  qui s'écrivent alors  $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, 1)$  :

$$Q_{\mathcal{P}} : {}^tX \cdot \mathcal{P} \cdot X = 0. \quad (3)$$

L'étape suivante dans l'étude des quadriques consiste à établir une classification des différents types d'équations possibles. La démarche la plus naturelle est de ramener l'équation d'une quadrique dans un repère où elle est la plus « simple » possible. Nous montrons dans la prochaine section quelles transformations nous nous autorisons, puis, dans la section suivante, présentons les différentes équations « simples », appelées équations canoniques, que nous pouvons trouver. À partir de ces équations canoniques, nous présentons des paramétrages possibles des quadriques correspondantes à la section 3.1.4.

### 1.1 Transformations appliquées aux quadriques

Pour trouver le type d'une quadrique, il est fréquent d'effectuer un changement de repère et obtenir la forme « simple » dans un sens que nous expliciterons dans les sections suivantes, forme qui nous permettra de caractériser le type d'une quadrique. Par changement de repère, nous entendons rotations, translations, homothéties (de rapport positif) et, éventuellement, échanges des axes du repère. Intuitivement, nous voulons faire coïncider les axes du repère et les « axes » de la quadrique, l'origine du repère et ce qui pourrait être nommé « le centre » de la quadrique (même s'il ne s'agit là que d'une notion intuitive n'ayant pas toujours de réalité mathématique). Ces différentes transformations peuvent être composées entre elles, et donner une seule transformation  $T$  de la forme :

$$T : X \longrightarrow A \cdot X + t,$$

où  $A$  est la matrice d'une application linéaire, qui peut être vue comme composée de rotations, homothéties, et symétries, et  $t$  un vecteur de translation. Sous forme matricielle, la transformation s'écrit :

$$T = \left( \begin{array}{ccc|c} \boxed{A} & & & \boxed{t} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

et la matrice associée à la nouvelle quadrique est :

$${}^tT \cdot \mathcal{Q} \cdot T.$$

## 1.2 Équations canoniques

Nous ne donnons ici aucune démonstration du théorème suivant, d'une part car le lecteur pourra se reporter à [Dup02], d'autre part parce que nous présenterons dans le chapitre suivant une transformation qui permet de passer du repère initial au repère où cette équation est dite sous forme « canonique ». La détermination de cette transformation constituera en elle-même une preuve constructive de ce que nous avançons.

**Théorème 3.3** *Pour toute quadrique affine de  $\mathbb{R}^3$ , il existe un repère où cette quadrique a pour équation l'une des formes suivantes :*

$$(I_s^r) \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 = 1,$$

$$(II_s^r) \quad \sum_{i=1}^3 \alpha_i x_i^2 = 0, \text{ ou}$$

$$(III_s^r) \quad \sum_{i=1}^2 \alpha_i x_i^2 = x_3,$$

avec  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, 3\}$  et  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ .  $r$  est le nombre de  $\alpha_i$  strictement positifs et  $s$  le nombre de  $\alpha_i$  strictement négatifs.

**Remarque 3.4** *Notons que nous avons l'inégalité  $r + s \leq 3$  pour les groupes<sup>2</sup> de classes (I) et (II), et l'inégalité  $r + s \leq 2$  pour le groupe de classes (III). D'autre part, pour être totalement exact, précisons que dans les groupes (II) et (III), quitte à multiplier l'équation de la quadrique par  $-1$  et effectuer éventuellement le changement de repère  $x'_3 = -x_3$ , nous pouvons supposer que  $r \geq s$ .*

Matriciellement, cette mise sous forme canonique correspond à une diagonalisation (partielle) de la matrice associée à la quadrique. Les groupes de classes de formes canoniques se présentent de la manière suivante :

$$(I) : \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (II) : \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (III) : \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

avec les  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  pour  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

Dans  $\mathbb{R}^3$ , nous avons donc 20 classes d'équations différentes possibles selon le signe ou la nullité des coefficients  $\alpha_{i,i=1\dots 3}$  et le groupe (I), (II) ou (III) auquel elles appartiennent. Dans le théorème que nous venons d'énoncer, il est important de noter que la forme obtenue est unique, c'est-à-dire qu'aucun autre changement de repère ne peut amener une quadrique dans un repère où son équation serait d'une des autres formes de la classification. Ceci peut se traduire par le théorème suivant :

**Théorème 3.5 (Unicité de la forme canonique)** *Une quadrique est associée à une et une seule classe du théorème précédent.*

Une démonstration de ce théorème est donnée dans [Dup02] et [Lev76]. Au niveau matriciel, il suffit de constater que les transformations utilisées conservent le rang, le signe ou la nullité

<sup>2</sup>Ce terme n'a rien à voir avec la notion mathématique de groupe mais permet juste de distinguer les trois ensembles (I), (II) et (III) d'équations canoniques.

des valeurs propres des matrices. Il n'est donc pas possible de passer d'une forme à l'autre à l'intérieur d'un même groupe (I), (II) ou (III). Enfin, pour passer d'une forme du groupe à une forme d'un autre groupe, soit la remarque précédente suffit, soit il faut constater que la matrice de passage nécessaire à l'opération ne correspond pas à une composée de translation, rotation et changement d'échelle. Par exemple, il existe une matrice (invertible) qui permet de passer d'une matrice associée à  $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0$  à une matrice associée à  $x_1^2 + x_2^2 - 2x_3 = 0$ , mais ce n'est pas une transformation autorisée (dans ce cas, c'est un problème affine qui disparaîtra avec l'emploi de la géométrie projective).

### 1.3 Classification affine des quadriques

Les théorèmes 3.3 et 3.5 nous permettent d'associer à chaque classe d'équation canonique un type de quadrique.

**Définition 3.6 (Type affine d'une quadrique)** *Le type affine d'une quadrique est la classe qui peut lui être associée par le théorème 3.3.*

Il existe 20 types de quadriques que nous avons regroupés dans le tableau 3.a, repris de [Dup02] (avec le type supplémentaire  $\mathbb{R}^3$ ). En tenant compte de l'ensemble de points ainsi défini pour chaque forme canonique, nous pouvons regrouper les classes  $(I_3^0)$ ,  $(I_2^0)$ ,  $(I_1^0)$  et  $(I_0^0)$  puisqu'elles définissent toutes l'ensemble vide et il y a donc 17 types distincts de quadriques dans  $\mathbb{R}^3$ . Comme nous l'avons fait précédemment remarquer, nous considérons que  $\mathbb{R}^3$  tout entier est une quadrique. Il en va de même pour l'ensemble vide puisque l'équation  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$  vérifie les conditions de notre définition 3.1. Nous pouvons aussi remarquer que les équations que nous considérons comme définissant des quadriques ne définissent pas toujours des surfaces. Par exemple, la quadrique  $(II_0^2)$  définit une droite. Si nous avons défini les quadriques dans l'espace affine complexe, cette quadrique eût été une paire de plans dont la seule partie réelle est la droite d'intersection des deux plans. Les équations de degré 2 définissent donc bien toujours des surfaces de degré 2 dans l'espace affine complexe (ce n'est que parce que notre espace affine est défini sur le corps des réels que toutes les quadriques ne sont pas des surfaces). Ceci explique pourquoi nous acceptons comme quadriques des ensembles de points tels que les droites. Enfin, le plan simple est aussi une quadrique, qui reste un plan simple dans l'espace affine complexe.

### 1.4 Paramétrages des quadriques

Puisque nous voulons paramétrer la courbe d'intersection de deux quadriques, il est naturel de vouloir déjà paramétrer les quadriques elles-mêmes. Comme nous avons établi dans la section précédente qu'à chaque quadrique correspond une classe d'équations canoniques, nous présentons un paramétrage classique pour chaque équation apparaissant dans le tableau 3.a (hormis bien évidemment l'ensemble vide et  $\mathbb{R}^3$  tout entier). Nous présentons ces paramétrages dans le tableau 3.b. Ce ne sont pas les seuls paramétrages possibles, il existe une infinité de paramétrages pour chaque équation. En effet, à partir d'un paramétrage  $X(u, v)$ , il est possible de construire d'autres paramétrages, par exemple en effectuant le changement de paramètres  $(u, v) \mapsto (\alpha u, \beta v)$  où  $\alpha, \beta \neq 0$ . Des changements de variables plus complexes sont autorisés et il est même possible de trouver des paramétrages non rationnels (c'est-à-dire dont les coordonnées ne sont pas toutes définies par le rapport de deux polynômes). L'intérêt de ces paramétrages réside dans le fait qu'ils ne font intervenir des polynômes que de degré au plus 2 en chacune des variables.

| classe d'équation canonique | équation canonique              | nom associé                |
|-----------------------------|---------------------------------|----------------------------|
| $(I_0^3)$                   | $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 1$  | ellipsoïde                 |
| $(I_3^0)$                   | $-ax_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2 = 1$ | $\emptyset$                |
| $(I_1^2)$                   | $ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2 = 1$  | hyperboloïde à une nappe   |
| $(I_2^1)$                   | $ax_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2 = 1$  | hyperboloïde à deux nappes |
| $(I_6^2)$                   | $ax_1^2 + bx_2^2 = 1$           | cylindre elliptique        |
| $(I_2^0)$                   | $-ax_1^2 - bx_2^2 = 1$          | $\emptyset$                |
| $(I_1^1)$                   | $ax_1^2 - bx_2^2 = 1$           | cylindre hyperbolique      |
| $(I_0^1)$                   | $ax_1^2 = 1$                    | deux plans parallèles      |
| $(I_1^0)$                   | $-ax_1^2 = 1$                   | $\emptyset$                |
| $(I_0^0)$                   | $0 = 1$                         | $\emptyset$                |
| $(II_0^3)$                  | $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 0$  | point                      |
| $(II_1^2)$                  | $ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2 = 0$  | cône                       |
| $(II_0^2)$                  | $ax_1^2 + bx_2^2 = 0$           | droite                     |
| $(II_1^1)$                  | $ax_1^2 - bx_2^2 = 0$           | deux plans sécants         |
| $(II_0^1)$                  | $ax_1^2 = 0$                    | un plan double             |
| $(II_0^0)$                  | $0 = 0$                         | $\mathbb{R}^3$             |
| $(III_0^2)$                 | $ax_1^2 + bx_2^2 = x_3$         | paraboloïde elliptique     |
| $(III_1^1)$                 | $ax_1^2 - bx_2^2 = x_3$         | paraboloïde hyperbolique   |
| $(III_0^1)$                 | $ax_1^2 = z$                    | cylindre parabolique       |
| $(III_0^0)$                 | $0 = z$                         | un plan simple             |

TAB. 3.a – Équations canoniques des quadriques de  $\mathbb{R}^3$  et types affines associés ( $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ).

## 2 Faisceau de deux quadriques

Pour clore ce chapitre d'introduction à l'étude des quadriques, présentons le faisceau engendré par deux quadriques, notion classique essentielle à l'étude de leur intersection.

**Définition 3.7 (Faisceau)** Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques distinctes. Le faisceau  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$  est l'ensemble des quadriques

$$\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}}) = \{Q_{\mathcal{R}(\lambda)} : \mathcal{R}(\lambda) = \lambda\mathcal{P} + \mathcal{Q} \mid \lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}, \quad (4)$$

avec la convention que  $Q_{\mathcal{R}(\infty)} = Q_{\mathcal{P}}$ .

Un faisceau est donc l'ensemble des combinaisons linéaires de deux quadriques données. Il nous permet d'introduire la notion de courbe de base d'un faisceau.

**Définition 3.8 (Courbe de base)** La courbe d'intersection de deux quadriques est appelée courbe de base du faisceau de ces deux quadriques, ou encore courbe engendrée par le faisceau de ces deux quadriques.

Cette définition a un sens comme le montre le théorème classique suivant.

**Théorème 3.9** L'intersection de deux quadriques distinctes d'un même faisceau est indépendante du choix de ces deux quadriques dans le faisceau.

| équation canonique             | nom associé                | paramétrage   |
|--------------------------------|----------------------------|---|
| $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 1$ | ellipsoïde                 | ${}^t\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2}, \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2}, \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{2v}{1+v^2}\right)$ |
| $ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2 = 1$ | hyperboloïde à une nappe   | ${}^t\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2}, \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2} \cdot \frac{2v}{1+v^2}, \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{2u}{1-u^2}\right)$ |
| $ax_1^2 - bx_2^2 - cx_3^2 = 1$ | hyperboloïde à deux nappes | ${}^t\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1+u^2}{1-u^2}, \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{2u}{1-u^2} \cdot \frac{2v}{1+v^2}, \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{2u}{1-u^2} \cdot \frac{1-v^2}{1+v^2}\right)$    |
| $ax_1^2 + bx_2^2 = 1$          | cylindre elliptique        | ${}^t\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{2u^2}{1+u^2}, v\right)$   |
| $ax_1^2 - bx_2^2 = 1$          | cylindre hyperbolique      | ${}^t\left(\frac{u+1/u}{2\sqrt{a}}, \frac{u-1/u}{2\sqrt{b}}, v\right)$  |
| $ax_1^2 = 1$                   | deux plans parallèles      | ${}^t\left(\pm \frac{1}{\sqrt{a}}, u, v\right)$   |
| $ax_1^2 + bx_2^2 + x_3^2 = 0$  | point                      | ${}^t(0, 0, 0)$   |
| $ax_1^2 + bx_2^2 - x_3^2 = 0$  | cône                       | ${}^t\left(\frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1-u^2}{1+u^2} \cdot \frac{1+v^2}{1-v^2}, \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{2u}{1+u^2} \cdot \frac{1+v^2}{1-v^2}, \frac{2v}{1-v^2}\right)$                          |
| $ax_1^2 + x_2^2 = 0$           | droite                     | ${}^t(0, 0, u)$   |
| $ax_1^2 - x_2^2 = 0$           | deux plans sécants         | ${}^t\left(\frac{u}{2\sqrt{a}}, \pm u, v\right)$  |
| $x^2 = 0$                      | un plan double             | ${}^t(0, u, v)$   |
| $ax_1^2 + bx_2^2 = z$          | paraboloïde elliptique     | ${}^t\left(\frac{u+v}{2\sqrt{a}}, \frac{u-v}{2\sqrt{b}}, u^2 + v^2\right)$  |
| $ax_1^2 - bx_2^2 = z$          | paraboloïde hyperbolique   | ${}^t\left(\frac{u+v}{2\sqrt{a}}, \frac{u-v}{2\sqrt{b}}, uv\right)$   |
| $ax_1^2 = z$                   | cylindre parabolique       | ${}^t\left(\frac{u}{\sqrt{a}}, v, u^2\right)$   |
| $0 = z$                        | un plan simple             | ${}^t(u, v, 0)$   |

TAB. 3.b – Équations canoniques des quadriques, nom des types affines associés, paramétrages correspondants, avec  $a, b, c \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

**Démonstration :** Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques distinctes. Les matrices des quadriques du faisceau engendré par  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  sont de la forme  $\lambda\mathcal{P} + \mathcal{Q}$ , avec  $\lambda \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux paramètres définissant deux quadriques distinctes du faisceau  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_1)}$  et  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_2)}$ , c'est-à-dire avec  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Les points  $X$  appartenant à l'intersection des quadriques  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_1)}$  et  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_2)}$  doivent vérifier les équations :

$${}^tX \cdot (\lambda_1\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \cdot X = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad {}^tX \cdot (\lambda_2\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \cdot X = 0 \quad (2).$$

Supposons que les deux coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  soient finis.  $\lambda_2(1) - \lambda_1(2)$  implique  ${}^tX \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)\mathcal{Q} \cdot X = 0$ , et donc le point en question appartient bien à  $\mathcal{Q}$ . De même (1) – (2) implique que le point appartient à  $\mathcal{P}$ . Nous avons donc montré qu'un point de l'intersection de  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_1)}$  et  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_2)}$  appartient bien à l'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$ . La réciproque est immédiate, il suffit de trouver les coefficients  $\lambda_3, \lambda_4$  définissant  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  en fonction de  $\mathcal{R}(\lambda_1)$  et  $\mathcal{R}(\lambda_2)$ , et de réappliquer notre démonstration.

Si  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  est infini, nous supposons que c'est  $\lambda_1$ , la première équation est de la forme  ${}^tX \cdot \mathcal{P} \cdot X = 0$  et  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_1)} = Q_{\mathcal{P}}$ . Reste à montrer que tout point de l'intersection des  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_1)}$  et  $Q_{\mathcal{R}(\lambda_2)}$  appartient à  $Q_{\mathcal{Q}}$ . Cela vient naturellement observant l'équation (2) –  $\lambda_2(1)$ . Comme dans le premier cas, la réciproque est immédiate.

Nous avons donc bien montré que l'intersection de deux paires de quadriques distinctes quelconques du faisceau coïncidait avec celle de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$ .  $\square$

Ce théorème montre que pour calculer un paramétrage de l'intersection de deux quadriques, il est possible d'utiliser non pas seulement ces deux quadriques, mais n'importe quelle autre quadrique du faisceau qu'elles engendrent. Nous n'utiliserons cependant pas ce théorème dans

le chapitre suivant consacré à la méthode naïve de calcul du paramétrage de l'intersection de deux quadriques. Il sera le point de départ de la méthode proposée par J. Levin [Lev76] que nous exposerons au chapitre 5.

# Chapitre 4

## Calcul de l'intersection : méthode naïve

Dans ce chapitre, pour présenter le point de départ de notre travail, nous décrivons la méthode naïve de calcul d'un paramétrage de la courbe d'intersection de deux quadriques. Si, comme nous allons le voir, cette méthode est inapplicable en pratique, elle a le mérite de donner une réponse au problème. L'apparition d'irrationnels en trop grand nombre fait exploser la complexité des coefficients intervenant dans les diverses expressions manipulées. Il devient impossible de déterminer le signe ou la nullité de tel ou tel coefficient, et soit l'algorithme s'arrête prématurément sans renvoyer de résultat, soit la réponse qu'il renvoie est trop grande pour pouvoir être utilisée dans d'autres traitements. D'autre part, si cet algorithme renvoie bien un paramétrage exact de la courbe d'intersection, il ne donne pas d'information sur les éléments caractéristiques de cette courbe comme le nombre de composantes, leur degré, leur position. De plus, nous ne pouvons déterminer la « qualité » de ce paramétrage, à savoir, par exemple, s'il a la forme la plus simple possible.

### 1 Description de l'algorithme

Considérons  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques. Pour calculer leur intersection, la méthode naïve consiste à déterminer un paramétrage  $X(u, v)$  d'une des deux quadriques et à l'insérer dans l'équation implicite de l'autre quadrique pour obtenir une équation en les variables  $u$  et  $v$ . D'après les paramétrages du tableau 3.b, le degré de cette équation est au plus 8 (pour l'ordre du degré total), et de degré au plus 4 en chacune des variables.

Si, par exemple, nous utilisons le paramétrage d'un ellipsoïde dont l'équation est  $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 1$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  réels strictement positifs), et que nous l'insérons dans l'équation d'une quadrique quelconque ( $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2dx_1x_2 + 2ex_2x_3 + 2fx_3x_1 + 2gx_1 + 2hx_2 + 2jx_3 + k = 0$ ), nous obtenons le polynôme :

$$\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(u, v) : k(u^2 + 1)^2 (v^2 + 1)^2 + 4v^2 (u^2 + 1)^2 + \frac{a}{\alpha_1} - \frac{2au^2}{\alpha_1} - \dots - \frac{4du^3v^4}{\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2}} = 0.$$

Cette équation implicite, un polynôme de degré 4 en  $v$ , est résoluble par radicaux. Il est donc possible d'obtenir l'expression exacte de  $v$ , par exemple, en fonction de  $u$ ; la courbe d'intersection

des deux quadriques est alors définie par  $X(u, v(u))$ , avec  $u$  compris dans un certain domaine de définition.

Cet algorithme peut donc se résumer en deux étapes principales, la recherche d'un paramétrage, et la résolution d'une équation bivariable.

**entrée :**  $Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}}$  : quadriques.

**sortie :** Courbe d'intersection des deux quadriques.

1. Calcul du paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}} : X(u, v)$ .  
Calcul de l'équation  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(u, v) : {}^tX(u, v) \cdot \mathcal{Q} \cdot X(u, v) = 0$ .
2. Résolution de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(u, v)$  en la variable  $v$  et détermination du domaine de définition  $\mathcal{D}_u$  de  $u$ . **Retourner** courbe d'intersection  $X(u, v(u))$  pour  $u \in \mathcal{D}_u$ .

**Algorithme 4.1:** Algorithme naïf

Expliquons plus précisément chacune des deux étapes.

### 1.1 Recherche d'un paramétrage d'une des deux quadriques

La première étape consiste à trouver le paramétrage de l'une des deux quadriques, par exemple  $Q_{\mathcal{P}}$ . Nous avons déjà affirmé, au chapitre précédent, qu'il existe pour toute quadrique, un repère dans lequel son équation est canonique. La construction de cette transformation nous permet de démontrer le théorème 3.3 comme nous l'avions annoncé au chapitre précédent. Il nous faut donc trouver une transformation (un changement de repère)  $T$  telle que  ${}^tT \cdot \mathcal{P} \cdot T$  soit de l'une des formes déjà citées. Dans ce repère, les paramétrages du tableau 3.b définissent un vecteur paramétré  $X(u, v)$ , augmenté d'un coefficient 1 (pour homogénéiser ce vecteur), et tel que

$${}^tX(u, v) \cdot ({}^tT \cdot \mathcal{P} \cdot T) \cdot X(u, v) = 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Il est immédiat de déterminer le paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$  dans le repère où se trouvent initialement les quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$ , en effet,

$${}^tX(u, v) \cdot ({}^tT \cdot \mathcal{P} \cdot T) \cdot X(u, v) = {}^t(T \cdot X(u, v)) \cdot \mathcal{P} \cdot (T \cdot X(u, v))$$

et donc, dans le repère initial,  $Q_{\mathcal{P}}$  a pour paramétrage  $T \cdot X(u, v)$ .

Montrons comment trouver cette transformation  $T$  de manière naturelle. Avec les définitions du chapitre précédent, la matrice de la quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  peut s'écrire :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{2}b_1 \\ & \mathcal{P}_{\varphi} & & \frac{1}{2}b_2 \\ & & & \frac{1}{2}b_3 \\ \frac{1}{2}b_1 & \frac{1}{2}b_2 & \frac{1}{2}b_3 & c \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \mathcal{P}_{\varphi} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{P}_{\varphi}$  représente la partie quadratique de la quadrique. La première étape consiste donc à diagonaliser cette sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche  $\mathcal{P}_{\varphi}$ . Nous recherchons donc une transformation  $T_{\varphi}$  telle que  ${}^tT_{\varphi} \cdot \mathcal{P}_{\varphi} \cdot T_{\varphi}$  soit diagonale. Une manière naturelle de procéder est de calculer la matrice  $M_{\lambda}$  des vecteurs propres de  $\mathcal{P}_{\varphi}$  puisque, dans un premier temps, nous obtenons que  $M_{\lambda}^{-1} \cdot \mathcal{P}_{\varphi} \cdot M_{\lambda}$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , sont les valeurs propres de  $\mathcal{P}_{\varphi}$ . Pour que nous puissions utiliser cette transformation comme un changement de repère, il faut normaliser les vecteurs propres de la matrice de passage, ce qui rend  $M_{\lambda}$  orthonormale. Nous



pouvons alors appliquer le résultat classique d'algèbre linéaire sur les endomorphismes symétriques qui nous assure que  $M_\lambda^{-1} = {}^tM_\lambda$ . La détermination de la matrice de passage  $M_\lambda$  se fait donc par calcul élémentaire d'algèbre linéaire, en déterminant les valeurs propres et vecteurs propres normalisés de la matrice  $\mathcal{P}_\varphi$ . Nous pouvons donc poser  $T_\varphi = M_\lambda$  et nous obtenons

$${}^tT_\varphi \cdot \mathcal{P}_\varphi \cdot T_\varphi = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}.$$

Posons  $\mu_i = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ ,  $\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign}(\lambda_i) & \text{si } \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , pour  $i = 1 \dots 3$ .

Par un changement d'échelle sur chacun des axes du repère, nous obtenons alors

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \cdot {}^tT_\varphi \cdot \mathcal{P}_\varphi \cdot T_\varphi \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$T_{quad} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & T_\varphi & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En revenant à l'expression sous forme de matrice  $4 \times 4$ , nous pouvons écrire

$${}^tT_{quad} \cdot \mathcal{P} \cdot T_{quad} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b'_1 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & \frac{1}{2}b'_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & \frac{1}{2}b'_3 \\ \frac{1}{2}b'_1 & \frac{1}{2}b'_2 & \frac{1}{2}b'_3 & c' \end{pmatrix},$$

où  $b'_1, b'_2, b'_3$  et  $c'$  sont les coefficients résultant du produit matriciel.

Il y a alors quatre cas possibles selon le nombre de valeurs propres non nulles (zéro, une, deux ou trois) de  $\mathcal{P}_\varphi$ . Décrivons les transformations à utiliser dans un des cas. S'il y a trois valeurs propres non nulles, il est possible de trouver une transformation  $T_{lin}$  :

$$T_{lin} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-b'_1}{2\varepsilon_1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-b'_2}{2\varepsilon_2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-b'_3}{2\varepsilon_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{telle que } ({}^tT_{lin} \cdot {}^tT_{quad}) \cdot \mathcal{P} \cdot (T_{quad} \cdot T_{lin}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c'' \end{pmatrix},$$

où  $c''$  est le coefficient constant dans l'équation implicite, résultant du produit matriciel. La quadrique  $\mathcal{P}$  est donc soit un ellipsoïde, un hyperboloïde à une ou deux nappes, un cône, un point ou l'ensemble vide, selon que les coefficients  $\varepsilon_{i,i=1,\dots,3}$  correspondent à une, deux ou trois valeurs propres positives, et selon que  $c''$  soit inférieur, égal, ou supérieur à zéro ; tous ces cas étant associés aux types  $(I_0^3)$ ,  $(I_3^0)$ ,  $(I_1^2)$ ,  $(I_2^1)$ ,  $(II_0^3)$ , ou  $(II_1^2)$  du tableau 3.a.

Dans les autres cas,  $Q_{\mathcal{P}}$  peut être envoyée par une transformation similaire à  $T_{lin}$  dans un repère où son équation est sous l'une des formes citées dans le tableau 4.a. La correspondance entre les valeurs possibles des coefficients  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  et  $c''$  et les types de quadriques associés est claire. Dans le cas où la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche  $\mathcal{P}_\varphi$  a exactement deux valeurs propres non nulles, il faut travailler un peu pour obtenir cette correspondance. Avec les notations

du tableau 4.a, si  $b'_3 = 0$  et  $c'' \neq 0$  les types possibles sont  $(I_0^2)$ ,  $(I_2^0)$  ou  $(I_1^1)$ , c'est-à-dire un cylindre elliptique, l'ensemble vide ou un cylindre hyperbolique. Si  $b'_3 = 0$  et  $c'' = 0$ , les types possibles sont  $(II_0^2)$  ou  $(II_1^1)$ , c'est-à-dire une droite ou une paire de plans sécants. Si  $b'_3 \neq 0$  et  $c'' = 0$ , les types possibles sont  $(III_0^2)$  ou  $(III_1^1)$ , c'est-à-dire un parabolôïde elliptique ou un parabolôïde hyperbolique. Enfin, si  $b'_3 \neq 0$  et  $c'' \neq 0$ , nous pouvons nous ramener au cas précédent en posant  $z' = z - \frac{c''}{b'_3}$ . La mise en correspondance entre équation de la deuxième colonne du tableau 4.a et type affine associé se fait de la même manière dans les cas où  $\mathcal{P}_\varphi$  a une ou zéro valeur propre non nulle.

| Nombre de valeurs propres non nulles | équations obtenues  | types affines correspondants possibles   |
|--------------------------------------|---|--|
| 3                                    | $\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 - c'' = 0$ | $(I_0^3)$ , $(I_3^0)$ , $(I_1^2)$ , $(I_2^1)$ , $(II_0^3)$ , ou $(II_1^2)$                 |
| 2                                    | $\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2b'_3 z - c'' = 0$           | $(I_0^2)$ , $(I_2^0)$ , $(I_1^1)$ , $(II_0^2)$ , $(II_1^1)$ , $(III_0^2)$ , ou $(III_1^1)$ |
| 1                                    | $\varepsilon_1 x^2 + b'_2 y - c'' = 0$                                | $(III_0^1)$ , $(II_0^1)$ ou $(I_0^1)$  |
| 0                                    | $b'_1 x - c'' = 0$  | $(III_0^0)$ , $(II_0^0)$ ou $(I_0^0)$  |

TAB. 4.a – Types affines du tableau 3.b correspondant aux équations canoniques susceptibles d'être obtenues en fonction du nombre de valeurs propres non nulles de  $\mathcal{P}_\varphi$ .  $\varepsilon_i \in \mathbb{R}^*$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $b_1, b_2, c'' \in \mathbb{R}$ .

Une fois établie l'équation canonique de la quadrique, nous pouvons utiliser le paramétrage correspondant  $X_{can}(u, v)$  du tableau 3.b. En utilisant la propriété énoncée au début de la section, nous obtenons le paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$  dans le repère initial :

$$X(u, v) = T_{quad} \cdot T_{lin} \cdot X_{can}(u, v).$$

Dans les cas où  $\mathcal{P}_\varphi$  n'a pas trois valeurs propres non nulles, il faut bien évidemment rajouter la dernière éventuelle transformation nécessaire pour se retrouver avec une équation canonique de la quadrique.

Une fois établi ce paramétrage  $X(u, v)$  de la quadrique  $\mathcal{P}$ , il ne reste plus qu'à l'insérer dans l'équation implicite de  $\mathcal{Q}$  pour obtenir ce que nous appelons l'équation aux paramètres.

**Définition 4.1 (Équation aux paramètres)** *L'équation obtenue en insérant le paramétrage (issu du tableau 3.b) d'une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  dans l'équation implicite d'une autre quadrique  $Q_{\mathcal{Q}}$  est appelée équation aux paramètres et notée  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ .*

Cette équation n'est bien évidemment pas unique puisqu'elle dépend du paramétrage utilisé, et, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, de la quadrique choisie pour être paramétrée. Avec les paramétrages que nous avons présentés, c'est une équation en deux variables  $u$  et  $v$ , de degré au plus 4 en chaque variable :

$$a(u)v^4 + b(u)v^3 + c(u)v^2 + d(u)v + e(u) = 0,$$

où  $a, b, c, d, e$  sont des polynômes de degré au plus 4 en  $u$ .

## 1.2 Résolution de l'équation aux paramètres

Nous résolvons ici l'équation aux paramètres selon l'une des variables  $u$  et  $v$  (celle pour laquelle le polynôme univarié correspondant est de plus faible degré, par exemple  $v$ ). C'est un polynôme en  $v$  de degré au plus 4 dépendant d'un paramètre  $u$ , et donc résoluble par radicaux.

Cette propriété nous assure de pouvoir trouver une expression exacte de chacune des racines formelles de ce polynôme.

L'expression exacte de chaque racine est constituée d'une imbrication de racines carrées ou cubiques de combinaisons rationnelles des coefficients du polynôme qui eux-mêmes sont des polynômes de degré au plus 4 en  $u$ .

Si l'équation aux paramètres est un polynôme de degré 2  $a(u)v^2 + b(u)v + c(u) = 0$ , ses racines sont  $\left(-b(u) \pm \sqrt{b^2(u) - 4a(u)c(u)}\right) / 2a(u)$ .

Pour un polynôme de degré 3,  $a(u)v^3 + b(u)v^2 + c(u)v + d(u) = 0$ , la racine ayant l'expression exacte la plus simple est de la forme :

$$v(u) = \frac{b(u)}{3a(u)} + \sqrt[3]{-\frac{d(u)}{2a(u)} + \frac{b(u)c(u)}{6a^2(u)} - \frac{b^3(u)}{27a^3(u)} + \sqrt{-\frac{b(u)c(u)d(u)}{6a^3(u)} + \frac{d^2(u)}{4a^2(u)} + \frac{c^3(u)}{27a^3(u)} + \frac{b^3(u)d(u)}{27a^4(u)} - \frac{b^2(u)c^2(u)}{108a^4(u)}} + \sqrt[3]{-\frac{d(u)}{2a(u)} + \frac{b(u)c(u)}{6a^2(u)} - \frac{b^3(u)}{27a^3(u)} - \sqrt{-\frac{b(u)c(u)d(u)}{6a^3(u)} + \frac{d^2(u)}{4a^2(u)} + \frac{c^3(u)}{27a^3(u)} + \frac{b(u)^3d(u)}{27a^4(u)} - \frac{b^2(u)c^2(u)}{108a^4(u)}}$$

L'expression des deux autres racines d'un polynôme de degré 3 dépend de quantités complexes, même si la valeur de la racine ne l'est pas. Sa détermination nécessite donc de faire ses calculs dans  $\mathbb{C}$  et non dans  $\mathbb{R}$ .

Pour un polynôme de degré 4, l'expression se complique encore et nécessite l'emploi de méthodes comme celle de Ferrari pour être déterminée.

À chacune des racines  $v_i(u)$  de l'équation aux paramètres correspond une partie  $\mathcal{C}_i$  de la courbe d'intersection. Le domaine de définition  $\mathcal{D}_i(u)$  de  $\mathcal{C}_i$  est l'ensemble des valeurs de  $u$  pour lesquelles  $v_i(u)$  existe. À chaque racine carrée apparaissant dans l'expression de  $v_i(u)$  nous associons un domaine de définition  $\mathcal{D}_{j,v_i}(u)$  pour lequel la quantité se trouvant en-dessous de la racine carrée (une expression radicale fonction de  $u$ ) est positive ou nulle. Nous avons alors  $\mathcal{D}_i(u) = \bigcap_j \mathcal{D}_{j,v_i}(u)$ .

Ce paramétrage a une forme exacte. Nous répondons donc bien à la question posée initialement. Seules les bornes des différents domaines de définition du paramètre  $u$  doivent être encadrées dans des intervalles d'isolation, ce sont des racines de polynômes de degré supérieur à 4 (dans le cas de l'équation aux paramètres de degré 3 en  $v$ , ce sont des polynômes de degré 16).

## 2 Analyse de la méthode

Nous analysons ici les divers problèmes liés à cette méthode et montrons pourquoi il n'est pas possible de l'utiliser dans la pratique. Il existe trois problèmes liés à cette méthode : la complexité de l'expression de la forme paramétrée finale, la détermination du domaine de définition du paramètre, et la complexité des coefficients apparaissant dans le résultat.

### 2.1 Complexité de l'expression de la forme paramétrée finale

En général, le degré de l'équation aux paramètres est trop élevé pour que la solution qui en résulte soit exploitable. En effet, cette équation est un polynôme de degré 2, 3 ou 4 en chacune des variables. Nous avons vu dans la section 4.1.2 que si l'équation aux paramètres est un polynôme de degré 3 en  $v$  (et de degré 3 ou 4 en  $u$ ), l'expression de ses racines était difficilement exploitable. Le phénomène est encore plus accentué si l'équation aux paramètres est un polynôme de degré

4 en chacune des variables. La méthode de Ferrari permet, après un certain nombre de calculs préliminaires d'obtenir une expression radicale de ces racines, particulièrement compliquée.

Il nous faut alors conclure que si l'équation aux paramètres est de degré supérieur à 2 en chacune des variables  $u$  et  $v$ , alors en pratique, il n'est pas possible de manipuler le résultat. La détermination de son signe ou de la nullité d'une de ces racines est un problème difficile qui rend la solution inexploitable pour un traitement ultérieur.

## 2.2 Détermination du domaine de définition du paramètre

Malheureusement, ce n'est pas le seul problème. En effet la détermination du domaine de définition du deuxième paramètre peut aussi s'avérer critique.

Dans le cas du polynôme de degré 2, l'équation aux paramètres se présente sous la forme :  $a(u)v^2 + b(u)v + c(u) = 0$ , où  $a, b, c$  sont des polynômes en  $u$  de degré au plus 4. Le discriminant  $\Delta(u)$  de ce polynôme est de la forme  $b^2(u) - 4a(u)c(u)$ , c'est un polynôme de degré 8. Les solutions réelles  $v(u) = (-b(u) \pm \sqrt{\Delta(u)})/(2a(u))$  correspondant aux parties réelles de la courbe d'intersection sont définies par l'inégalité  $\Delta(u) \geq 0$ . Le calcul des racines de  $\Delta(u)$  ne peut être fait par radical [RZ04], et il est nécessaire d'en déterminer uniquement des intervalles d'isolation<sup>3</sup>. Heureusement, dans ce cas, l'expression des racines ne contient qu'une racine carrée. Le domaine de définition se détermine encore facilement.

Par contre si l'équation aux paramètres est de degré au moins 3 en chacune des racines, l'expression de la racine la plus simple contient la racine carrée  $\sqrt{\frac{p_2(u)}{108a^4(u)}}$ , où  $p_2(u)$  est un polynôme de degré 16. Les expressions des deux autres racines d'un polynôme de degré 3 contiennent d'autres racines carrées, il faut alors pouvoir déterminer l'intersection des différents domaines de définition  $\mathcal{D}_{j,v_i}(u)$ . Cela revient à ordonner les racines de deux polynômes et donc à séparer les intervalles d'isolation de deux polynômes. C'est un problème non trivial qui se résout en réduisant la taille de ces intervalles pour chaque polynôme tant que cela est nécessaire, et en sachant détecter les racines communes (cas pour lesquels la réduction des intervalles d'isolation peut se prolonger indéfiniment). Ce problème a été résolu efficacement [RZ04] pour des polynômes à coefficients rationnels. Cependant, les polynômes que nous manipulons sont loin d'être dans ce cas. Leurs coefficients sont irrationnels, algébriques sur  $\mathbb{Q}$ , comme nous allons le voir dans la section suivante. Il devient alors beaucoup plus délicat d'implanter les méthodes évoquées ci-dessus.

## 2.3 Complexité des coefficients

Nous avons vu que le processus de recherche d'un paramétrage d'une des deux quadriques nécessitait la recherche d'une matrice de vecteurs propres, la manipulation de la matrice diagonale des valeurs propres. Cela introduit dans l'expression des coefficients du paramétrage final les racines du polynôme caractéristique de la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche de la matrice. Ce sont les racines d'un polynôme de degré 3 dont l'expression radicale contient deux niveaux de racines (une racine carrée et une racine cubique). La normalisation des vecteurs propres introduit un nouveau niveau de racine carrée. À cela s'ajoute le paramétrage de la quadrique elle-même, ce qui amène encore une ou deux carrées. Les coefficients de l'équation aux paramètres sont donc définis dans une extension algébrique<sup>4</sup> de  $\mathbb{Q}$  de degré 48, ou pour être plus explicite, chaque

<sup>3</sup>Les intervalles d'isolation des racines d'un polynôme sont des intervalles qui chacun contiennent exactement une racine du polynôme.

<sup>4</sup>La notion d'extension est rappelée en annexe B.

coefficient de l'équation aux paramètres est une expression radicale contenant quatre niveaux de racines, trois racines carrées et une cubique.

## 2.4 Conclusion

La conjonction de ces trois problèmes, la complexité de la forme paramétrée, la difficulté de détermination du domaine de définition du paramètre et la complexité des coefficients, fait qu'il n'est pas envisageable d'implanter cette méthode. Quelle que soit l'arithmétique utilisée, le programme généré ne pourra être satisfaisant. Si nous utilisons une arithmétique exacte, la complexité des coefficients et des expressions polynomiales bloque l'algorithme avant qu'il ne termine. L'utilisation d'une arithmétique flottante, ou par intervalle, ou affine, rend très délicate la détermination du signe ou de la nullité d'un coefficient ou de telle ou telle expression polynomiale, ce qui induit des erreurs dans le résultat. La méthode de Levin [Lev76] apporte une première réponse à ce problème. J. Levin a exploité le théorème 3.9 et a montré qu'en choisissant judicieusement la quadrique qui sera paramétrée, il est possible de contrôler le degré de l'équation aux paramètres. Nous exposons cette méthode dans le chapitre suivant.



# Chapitre 5

## Méthode de Levin

J. Levin est le premier à avoir exposé un algorithme général de calcul d'une forme paramétrée de l'intersection de deux quadriques susceptible d'être implanté. Sa méthode a été exploitée pour la réalisation de logiciels de CAO, pour visualiser la courbe d'intersection de deux quadriques. Le principal résultat de J. Levin est qu'en choisissant correctement la quadrique utilisée pour définir l'équation aux paramètres, il n'a que des polynômes de faible degré à résoudre pour déterminer la forme paramétrée de la courbe de base du faisceau. L'expression de cette forme paramétrée ne dépend plus alors que de racines d'un polynôme de degré 2.

Les problèmes cités à la fin du chapitre précédent, s'ils ne sont pas tous et pas complètement résolus par cette méthode, sont suffisamment simplifiés pour ne plus être systématiquement des obstacles à l'implantation de l'algorithme. Le fait d'avoir à résoudre une équation aux paramètres qui n'est que de degré 2 en l'une des variables assure d'avoir une expression de chaque racine ( $v(u)$  avec les notations du chapitre précédent) qui s'écrit de manière simple en fonction des coefficients de l'équation aux paramètres (ces coefficients sont des polynômes en l'autre variable de l'équation qui eux n'ont pas une expression triviale).

Nous exposons dans les deux premières sections de ce chapitre les résultats de J. Levin [Lev76] et l'algorithme qu'il a présenté. La fin du chapitre est consacrée à l'étude des problèmes qui subsistent. Nous montrons ainsi pourquoi il a fallu de nouveau travailler pour obtenir un algorithme général, certifié et efficace.

### 1 Résultats

La méthode de J. Levin est basée sur le théorème suivant :

**Théorème 5.1 (Levin [Lev76])** *Il existe, dans le faisceau de deux quadriques quelconques, au moins une quadrique dite « réglée simple » d'un des types suivants : un plan, une paire de plans, un cylindre hyperbolique ou parabolique, ou un parabolôïde hyperbolique.*

La démonstration de ce théorème repose sur l'utilisation de l'arbre de décision présenté sur la figure 5.1, et qui permet de déterminer le type d'une quadrique. Par la détermination du signe ou de la nullité des différentes expressions algébriques apparaissant dans l'arbre, il est possible de connaître le type affine réel d'une quadrique. L'intérêt est qu'il n'est pas nécessaire de trouver une transformation envoyant la quadrique dans un des repères où son équation a une forme canonique pour en déterminer le type affine. Dans la recherche des quadriques réglées simples, cette simplification est essentielle et réduit le nombre de calculs. Pour démontrer le théorème 5.1,

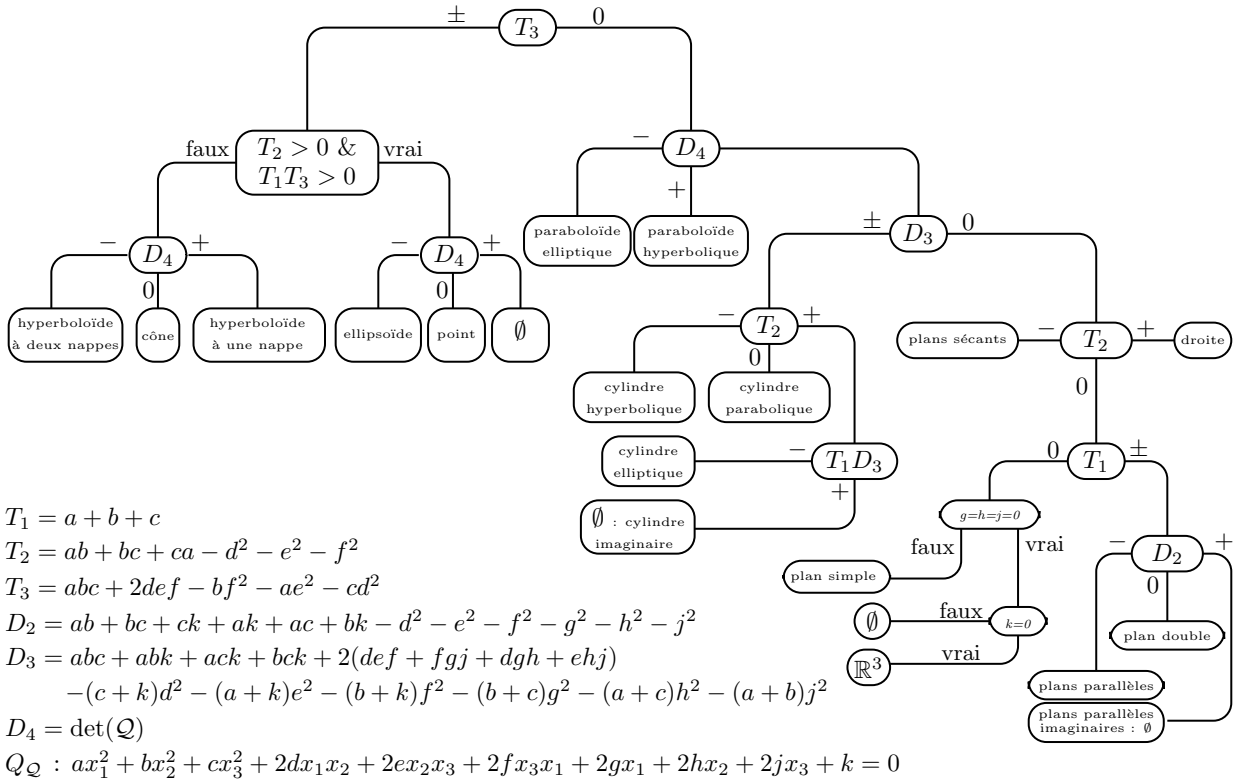


FIG. 5.1 – Arbre de décision permettant de déterminer le type affine d’une quadrique  $Q_Q$ .

J. Levin calcule l’expression  $T_3(\mathcal{R}(\lambda))$  où  $Q_{\mathcal{R}(\lambda)}$  est une quadrique du faisceau engendré par les quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_Q$  dont il recherche l’intersection, et  $T_3$  l’expression que nous avons définie dans l’arbre de décision, associée à l’équation de  $Q_{\mathcal{R}(\lambda)}$ . Cette expression algébrique  $T_3(\mathcal{R}(\lambda))$  est un polynôme de degré 3 en  $\lambda$ , il a donc au moins une racine réelle. Enfin, en étudiant les valeurs des différents autres coefficients de l’arbre de décision, J. Levin montre qu’au moins une des quadriques associées à la ou aux racines de  $T_3(\mathcal{R}(\lambda))$  est une quadrique réglée simple.

Ce théorème est capital car il a la conséquence suivante :

**Corollaire 5.2** *L’équation aux paramètres résultant de l’insertion du paramétrage d’une quadrique « réglée simple » dans l’équation implicite d’une quadrique quelconque du faisceau est de degré au plus 2 en l’un des paramètres, et de degré au plus 4 en l’autre paramètre.*

**Démonstration :** Il suffit d’insérer les paramétrages du tableau 3.b correspondant aux quadriques « réglées simples » dans l’équation générale d’une quadrique, et de s’apercevoir que ces paramétrages (hormis celui du cylindre hyperbolique) sont polynomiaux, linéaires en l’un de leurs paramètres, disons  $v$ , et quadratique en l’autre, disons  $u$ . L’équation aux paramètres alors obtenue est de degré au plus 2 en  $v$ , et de degré au plus 4 en  $u$ . Dans le cas du cylindre hyperbolique, le paramétrage du tableau 3.b est linéaire en  $v$ , mais pas polynomial en  $u$ . Cela n’a cependant pas d’incidence sur le résultat de notre corollaire puisque l’équation aux paramètres obtenue est équivalente (à la multiplication par  $u^2$  près) à un polynôme de degré au plus 2 en  $v$  et de degré au plus 4 en  $u$ . □



Ce résultat induit un progrès considérable par rapport à la méthode naïve puisque l'équation aux paramètres que nous résolvons est maintenant toujours de degré au plus 2 en l'une de ses variables, ce qui permet d'assurer d'avoir une expression radicale relativement simple de ses racines. Il faut cependant pouvoir déterminer la ou les quadriques « réglées simples » du faisceau. J. Levin ne se contente pas de prouver leur existence, il donne un algorithme simple de calcul de ces quadriques si particulières.

## 2 Description de l'algorithme

**entrée :**  $Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}}$  : quadriques à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

**sortie :** courbe d'intersection des deux quadriques.

1. Recherche d'une quadrique réglée simple  $Q_{\mathcal{R}}$ .
2. Calcul du paramétrage de  $Q_{\mathcal{R}} : X(u, v)$ .  
Calcul de l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(u, v) : {}^t X(u, v) \cdot \mathcal{P} \cdot X(u, v) = 0$ .
3. Résolution de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(u, v)$  en la variable  $v$   
**Retourner** courbe d'intersection  $X(u, v(u))$  pour  $u \in \mathcal{D}_u$ .

### Algorithme 5.1: Algorithme de Levin

Nous présentons l'algorithme 5.1 de J. Levin qui comprend, par rapport à l'algorithme 4.1, une étape initiale en plus, celle de la recherche d'une quadrique particulière dans le faisceau. Détaillons cette nouvelle étape. J. Levin utilise l'arbre de décision 5.1. Il calcule les racines  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  du polynôme  $T_3(\mathcal{R}(\lambda))$ , le polynôme caractéristique de la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche de la matrice de  $Q_{\mathcal{R}(\lambda)}$ , polynôme qui est de degré 3. Il a donc au moins une racine réelle. Pour chaque quadrique correspondant à ces racines réelles, J. Levin évalue les expressions algébriques de l'arbre de décision 5.1. L'une au moins, appelons-la  $Q_{\mathcal{R}}$  est une quadrique réglée simple, il peut donc l'utiliser pour la suite de l'algorithme. Les deux étapes suivantes se déroulent de la même façon que dans l'algorithme du chapitre précédent. Le gain est alors clair puisque l'équation aux paramètres est de degré au plus 2 en l'un des paramètres, mais il faut aussi remarquer que la quadrique dont nous utilisons le paramétrage a ses coefficients qui sont fonctions d'une racine du polynôme  $T_3(\mathcal{R}(\lambda))$  qui est de degré 3.

## 3 Analyse de la méthode

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le gain considérable de la méthode de J. Levin est d'obtenir une équation aux paramètres de degré au plus 2 en l'une des variables, et de degré au plus 4 en l'autre. La forme du paramétrage obtenue est beaucoup plus simple que dans la méthode naïve exposée au chapitre 4. Il suffit pour s'en convaincre de comparer l'expression d'une racine d'un polynôme de degré 2 à celle d'un polynôme de degré 4. Dans l'application qui occupe J. Levin, la visualisation de la courbe d'intersection des deux quadriques, sans traitements ultérieurs, cela suffit largement. Malheureusement, si nous voulons exploiter le résultat dans une application plus complexe, de graves problèmes apparaissent. Ces problèmes sont dus à la taille des coefficients apparaissant dans l'expression du paramétrage. Nous mesurons dans la section suivante la complexité de ces coefficients, la comparons avec celle obtenue en utilisant la méthode naïve, et expliquons ainsi pourquoi tant de travaux ont suivi ceux de J. Levin.

Comparons ici la complexité algébrique des coefficients de l'équation aux paramètres pour les deux méthodes que nous venons d'exposer. Dans les deux cas, nous supposons que nos quadriques de départ sont à coefficients rationnels.

L'algorithme naïf étudié au chapitre précédent introduit quatre niveaux de racines (dont une cubique) dans l'expression des coefficients de l'équation aux paramètres. Dans la méthode de J. Levin, nous commençons par choisir une quadrique dans le faisceau, dont l'expression algébrique  $T_3$  de l'arbre de décision 5.1 est nulle. Le paramètre  $\lambda$  définissant cette quadrique  $Q_{\mathcal{R}(\lambda)}$  dans le faisceau est donc la racine d'un polynôme de degré 3, ce qui introduit deux niveaux de racines dans l'expression des coefficients de la quadrique  $Q_{\mathcal{R}(\lambda)}$ . Vient ensuite la mise sous forme canonique de  $Q_{\mathcal{R}(\lambda)}$ . Ici, comme  $T_3(\mathcal{R}(\lambda))$  est nul, dans la diagonalisation de la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche de  $\mathcal{R}(\lambda)$ , nous n'introduisons qu'une racine carrée (une des valeurs propres au moins est nulle). Enfin le paramétrage de la quadrique ne nécessite quant à lui que deux racines carrées puisque  $\mathcal{R}(\lambda)$  est une quadrique réglée simple. Ceci nous amène à quatre niveaux de racines (dont une cubique) dans l'expression des coefficients de l'équation aux paramètres.

La complexité algébrique des coefficients dans le pire cas de la méthode naïve est donc la même que celle dans le pire cas de la méthode de J. Levin (ce qui ne signifie pas que les pires cas dans chacune des deux méthodes soient les mêmes). Il est ici clair que si J. Levin a beaucoup gagné sur la forme du paramétrage de la courbe d'intersection, il n'a pas progressé sur la complexité des coefficients numériques de l'expression de ce paramétrage. C'est le principal frein à une implantation exacte de son algorithme, la raison des nombreux travaux qui ont suivi la publication de son article.

Pour mesurer les problèmes liés à complexité des coefficients, nous pouvons utiliser la notion de degré de l'extension algébrique de  $\mathbb{Q}$  dans laquelle sont définis les coefficients numériques du paramétrage final. Un rappel des notions liées aux extensions algébriques est donné en annexe B. Dans le cas qui nous occupe, ce degré est 48 ( $3 \cdot 2^4$ ). Cela signifie que chaque nombre s'exprime dans un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$  de dimension 48 comme un point à 48 coordonnées  $\eta_1 = \sum_{i=1}^{48} \xi_{1i} v_i$  où  $v_{i,i=1,\dots,48}$  représentent les vecteurs de base (des nombres algébriques permettant de décrire les éléments de l'extension) de l'espace vectoriel (pour l'extension algébrique de degré 2 présentée plus haut, les vecteurs de base sont 1 et  $\sqrt{\Delta}$ ). La multiplication de deux coefficients  $\eta_1$  et  $\eta_2$  nécessite alors de multiplier chaque coordonnée de  $\eta_1$  par chaque coordonnée de  $\eta_2$

$$\eta_1 \eta_2 = \sum_{i=1}^{48} \sum_{j=1}^{48} \xi_{1i} \xi_{2j} v_i v_j.$$

Le calcul est alors déjà d'une complexité importante, mais un autre problème de taille vient s'ajouter à cela. En effet, le produit de deux vecteurs de base  $v_i v_j$  (qui sont des nombres algébriques sur  $\mathbb{Q}$ ) est une combinaison linéaire d'autres vecteurs de la base. Or nous ne connaissons pas *a priori* le résultat pour chaque couple de vecteurs de base de  $K$ . Il nous faut donc soit déterminer les « formules » de multiplication entre vecteurs de base de  $K$ , soit faire nos calculs sans pouvoir factoriser les expressions que nous obtenons. Dans le premier cas, cela nécessite un calcul complexe chaque fois qu'apparaît une nouvelle extension, ce qui ralentit considérablement l'algorithme. Dans le deuxième cas, la taille des expressions algébriques que nous manipulons explose littéralement et il devient rapidement impossible d'effectuer le moindre calcul.

Nous avons déroulé l'algorithme de J. Levin sur un exemple simple, sans rechercher les vecteurs de base de l'extension sur laquelle sont définis les coefficients du paramétrage final. Soient  $\mathcal{H}$  un hyperboloïde à deux nappes et  $\mathcal{E}$  un ellipsoïde d'équations :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} : 2x^2 + y^2 + 20z^2 - 4yz + 4y - 20z - 20 &= 0, \\ \mathcal{E} : x^2 - y^2 + z^2 - xy - y + 1 &= 0.\end{aligned}$$

La taille du vecteur paramétré de la courbe d'intersection de  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ , stocké dans un fichier en mode « texte » est de 20 méga-octets. Cela illustre parfaitement les problèmes liés à la présence de coefficients contenus dans une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré 48. En convertissant chaque coefficient en nombre flottant nous obtenons les coordonnées suivantes :

$$\frac{-0.44u^3 - 0.43u^2 - 1.4u - 0.15 \pm (-2.9 \cdot 10^{-6} + 2.3 \cdot 10^{-7}u) \sqrt{-0.16u^4 - 1.0u^3 - 16.0u^2 - 0.6u - 1.2}}{1.2u^2 + 0.17u + 0.05}$$

Il est évident qu'une implantation exacte n'est pas envisageable dans ces conditions. Nous montrons dans la section suivante que si d'autres choix s'offrent à nous pour une implantation, aucun n'est satisfaisant en l'état.

Nous venons de voir qu'il n'est pas possible d'implanter cet algorithme avec une arithmétique exacte, il est donc naturel d'envisager une implantation avec une autre arithmétique. Si nous utilisons une arithmétique flottante, l'algorithme souffre de graves carences. En effet, l'implantation de l'algorithme soit se bloque en cours d'exécution, soit renvoie une réponse fautive inacceptable pour des traitements ultérieurs non triviaux. Ces blocages sont le fait d'une impossibilité, à un moment donné du déroulement de l'algorithme, de renvoyer une réponse certifiée quant au signe ou à la nullité d'une valeur. Le deuxième problème a les mêmes causes, la mauvaise évaluation du signe ou de la nullité d'une expression algébrique entraîne le programme sur une mauvaise voie.

## 4 Perspectives

Il ressort de ce chapitre que l'algorithmique n'est pas exploitable en l'état pour nos applications. De nombreux articles ont été écrits au cours des deux dernières décennies pour utiliser les résultats de J. Levin dans des cas particuliers : l'intersection d'une quadrique et d'un plan, de deux quadriques de révolution, de deux quadriques naturelles. Ces différentes approches ont toutes pour but de réduire la complexité algébrique des coefficients apparaissant dans l'équation aux paramètres, même si cela n'est pas toujours clairement exprimé.

Certains articles soulignent que l'algorithme de Levin ne retourne aucune information sur la nature topologique de l'intersection. Est-ce une quartique irréductible, une courbe de plus faible degré ? Combien y a-t-il de composantes connexes ? S'il y en a, les différentes composantes connexes se coupent-elles ? Le paramétrage que nous obtenons est-il le meilleur paramétrage (dans un sens à définir) que nous puissions trouver ?



## Chapitre 6

# Intersection de quadriques et espace projectif : préliminaires

La méthode de J. Levin que nous avons décrite dans le chapitre précédent constitue une référence dans le domaine du calcul de l'intersection de quadriques. Nous avons mis en évidence, comme d'autres avant nous, les problèmes qu'engendrait cette méthode. La conséquence en est que l'exploitation de ses résultats pour des applications autres qu'une visualisation directe de l'intersection s'avère délicate. Beaucoup de tentatives ultérieures d'amélioration de l'algorithme se sont concentrées sur tel ou tel aspect du problème, comme l'étude des cas dégénérés, le calcul de l'intersection réduit au cas des quadriques naturelles, ou encore la recherche des caractéristiques topologiques de la courbe d'intersection. Pour pouvoir avoir une vision claire et juste du problème et pouvoir le traiter complètement, il nous a été nécessaire de nous placer dans l'espace qui constitue un cadre plus adapté que l'espace affine, l'espace projectif réel.

L'objet de ce chapitre est de rappeler ce qu'est l'espace projectif  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , d'y redéfinir les quadriques et leurs propriétés. Dans la dernière section du chapitre, nous introduisons des notions liées aux propriétés des courbes et surfaces, comme le concept de point singulier d'une courbe ou surface, de degré d'une courbe, de genre d'une courbe ; ces définitions nécessitent une incursion dans l'espace projectif complexe, espace qui se définit de la même façon que l'espace projectif réel, mais sur les complexes. Ces notions sont importantes car elles constituent des invariants des courbes et surfaces que nous étudions et nous permettent de caractériser complètement les courbes d'intersection de deux quadriques, de savoir si elles admettent des paramétrages rationnels ou pas, de déterminer leur topologie, c'est-à-dire déterminer le nombre de leurs composantes connexes, de leurs composantes algébriques, le nombre de points d'intersection entre ces composantes algébriques, leurs positions relatives. Enfin, toujours à propos des courbes d'intersection, nous redéfinissons, pour mieux les distinguer les notions de courbe rationnelle et de courbe à coefficients rationnels qui caractérisent deux propriétés différentes, l'une portant sur la forme des fonctions définissant les courbes, l'autre portant sur la forme des coefficients numériques apparaissant dans l'expression des fonctions que nous venons de citer.

### 1 Les espaces projectifs

L'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est souvent défini comme l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Nous utiliserons la définition équivalente suivante.

**Définition 6.1 (Espace projectif)** L'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est le quotient de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence  $\sim$  :

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (y_1, \dots, y_{n+1}) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tel que } (x_1, \dots, x_{n+1}) = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_{n+1}).$$

Nous dirons que les deux n-uplets  $(x_1, \dots, x_{n+1})$  et  $(y_1, \dots, y_{n+1})$  de la définition sont deux représentants d'un même point de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ .

Si nous avons défini l'espace projectif  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  à partir de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1}$ , ce sont ses liens avec l'espace affine  $\mathbb{R}^n$  qui nous intéressent. Tous les points de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  de la forme  $(x_1, \dots, x_n, 1)$  peuvent être mis en bijection avec ceux de l'espace affine  $\mathbb{R}^n$ . Reste dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  les points de la forme  $(x_1, \dots, x_n, 0)$  qui représentent un hyperplan projectif et ne peuvent être associés à des points de l'espace affine  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , par exemple, est l'espace affine  $\mathbb{R}^3$  auquel nous avons ajouté un plan dit « plan à l'infini ».

## 2 Quadriques dans l'espace projectif

Les quadriques projectives se définissent de la même manière que leurs homologues affines, par une équation de second degré en les coordonnées des points qui leur appartiennent. La différence tient dans la forme de l'équation. Dans le cas affine, le polynôme définissant l'équation possédait une partie quadratique, une partie linéaire et un terme constant. Du fait du passage dans l'espace projectif, ce polynôme devient homogène, il ne contient qu'une partie quadratique. Nous donnons ici la définition dans le cas de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , mais elle est aisément transposable à toute autre dimension.

**Définition 6.2 (Quadrique)** Une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des points  $X = (x_1, \dots, x_{n+1})$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  satisfaisant l'équation :

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n+1} a_{ij} x_i x_j = 0,$$

pour  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq j \leq n+1$ , appartenant à  $\mathbb{R}$ . La matrice associée à  $Q_{\mathcal{P}}$  est, dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{1}{2}a_{12} & \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{14} \\ \frac{1}{2}a_{12} & a_{22} & \frac{1}{2}a_{23} & \frac{1}{2}a_{24} \\ \frac{1}{2}a_{13} & \frac{1}{2}a_{23} & a_{33} & \frac{1}{2}a_{34} \\ \frac{1}{2}a_{14} & \frac{1}{2}a_{24} & \frac{1}{2}a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Les points appartenant à  $Q_{\mathcal{P}}$  vérifient l'équation :

$${}^t X \cdot \mathcal{P} \cdot X = 0.$$

La matrice est donc exactement la même que dans le cas affine. Comme dans l'espace affine, nous voulons pouvoir appliquer à nos quadriques des transformations telles que des translations, des rotations ou des changements d'échelle. La classe de transformations que nous pouvons utiliser est constituée de ce qui est communément appelé transformations congruentes ou congruences.

**Définition 6.3 (Transformation congruente)** Une transformation congruente de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  dans lui-même est une application linéaire à coefficients réels telle que la matrice qui lui est associée soit non singulière (c'est-à-dire de déterminant non nul).

Nous dirons alors que deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  sont congruentes, ou qu'elles sont projectivement équivalentes s'il existe une transformation congruente  $T$  telle que  ${}^tT \cdot \mathcal{P} \cdot T = \mathcal{Q}$ . La classe de transformation que nous nous autorisons est donc plus grande que celle dans le cas affine puisque la matrice qui lui est associée a juste la contrainte d'être de déterminant non nul, alors que dans le cas affine non seulement cette matrice devait être de déterminant non nul, mais qui plus est, sa dernière ligne devait être de la forme  $(0, \dots, 0, 1)$ . Comme dans le cas affine, nous allons pouvoir amener les quadriques dans un repère où l'équation qui les définit est la plus simple possible. Nous retrouvons la notion d'équation canonique.

## 2.1 Équation canonique

**Théorème 6.4 (Équation canonique)** *Toute quadrique de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  peut être envoyée par transformation congruente dans un repère où son équation est de la forme :*

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^2 = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n+1. \quad (1)$$

avec  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n+1}$  des coefficients réels. Une telle équation est appelée équation canonique de la quadrique.

Comme dans le cas affine, il y a unicité de l'équation canonique, à multiplication près de chaque coefficient  $a_i$  par une constante positive. La démonstration de ce théorème est basée sur la loi d'inertie de Sylvester [Syl52] qui nous assure que le nombre de  $a_i$  nuls dans la définition est un invariant de la quadrique quelle que soit la transformation congruente utilisée, ainsi que le « couple » constitué du nombre de coefficients  $a_i$  strictement positifs et du nombre de coefficients  $a_i$  strictement négatifs (en effet, en multipliant l'équation de la quadrique par  $-1$  ces deux nombres s'échangent). Nous voyons ici que le nombre de cas possibles a considérablement réduit par rapport au cas affine. Dans la section suivante, nous présentons la définition du type d'une quadrique selon le nombre de coefficients  $a_i$  positifs, nuls, et négatifs.

## 2.2 Type projectif d'une quadrique

Rappelons la définition de l'inertie d'une matrice (ici associée à une forme quadratique).

**Définition 6.5 (Inertie d'une matrice)** *L'inertie d'une matrice est le triplet  $(\sigma^+, \sigma^-, \sigma^0)$  où  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  et  $\sigma^0$  représentent respectivement le nombre de valeurs propres positives, négatives et nulles de la matrice.*

À partir de cette définition, en réduisant le triplet à un doublon puisqu'il n'y a pas d'ambiguïtés, nous pouvons définir le type d'une quadrique.

**Définition 6.6 (Type projectif d'une quadrique)** *Le type d'une quadrique projective est défini par le couple  $(\xi_{max}, \xi_{min})$  où  $\xi_{max} = \max(\sigma^+, \sigma^-)$  et  $\xi_{min} = \min(\sigma^+, \sigma^-)$ .*

Par abus de langage, nous parlerons d'inertie d'une quadrique en pensant au type de cette quadrique. Nous donnons dans le tableau 6.a les inerties et équations canoniques possibles, ainsi que les types des quadriques affines possiblement correspondantes avec l'inertie de la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche dans l'espace affine.

Le nombre de types différents de quadriques a considérablement diminué dans l'espace projectif par rapport à l'espace affine en passant de 17 à 9. Nous pouvons ici remarquer que les

quadriques d'inertie  $(3, 0)$  sont toujours des points dans l'espace projectif, alors qu'elles peuvent se réduire à l'ensemble vide dans l'espace affine. Cela vient du fait que dans ce cas, l'équation de la quadrique définit toujours un point projectif, mais qui se situe dans le plan à l'infini. De même, les quadriques d'inertie  $(2, 0)$  sont toujours des droites dans l'espace projectif, et les quadriques d'inertie  $(1, 0)$  toujours des plans doubles. Pour résumer, dans tous les cas, les différences qu'il peut y avoir entre un groupe de types affines et le type projectif correspondant viennent de l'ensemble de points de la quadrique projective qui sont dans le plan à l'infini de l'espace affine. Un autre exemple significatif de ce phénomène apparaît pour les quadriques d'inertie  $(3, 1)$ . Dans l'espace projectif, ce sont toutes des ellipsoïdes. Dans l'espace affine, leur type varie selon la nature de l'intersection qu'elles ont avec le plan à l'infini. Si cette intersection est vide, la quadrique affine est aussi un ellipsoïde, si cette intersection est une ellipse, la quadrique affine est un hyperboloïde à deux nappes, et si le plan à l'infini est tangent à la quadrique en un point, la quadrique affine est un parabolôïde elliptique.

| type projectif | équation canonique                      | quadriques affines correspondantes et inertie du bloc $3 \times 3$ supérieur gauche        |
|----------------|---|--|
| $(4, 0)$       | $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_4^2 = 0$ | $(3, 0)$ $\emptyset$   |
| $(3, 1)$       | $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 - dx_4^2 = 0$ | $(3, 0)$ ellipsoïde<br>$(2, 1)$ hyperboloïde à 2 nappes<br>$(2, 0)$ parabolôïde elliptique |
| $(2, 2)$       | $ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2 - dx_4^2 = 0$ | $(2, 1)$ hyperboloïde à 1 nappe<br>$(2, 0)$ parabolôïde hyperbolique                       |
| $(3, 0)$       | $ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 = 0$          | $(3, 0)$ point<br>$(2, 0)$ $\emptyset$   |
| $(2, 1)$       | $ax_1^2 + bx_2^2 - cx_3^2 = 0$          | $(2, 1)$ cône<br>$(2, 0)$ cylindre elliptique<br>$(1, 1)$ cylindre parabolique             |
| $(2, 0)$       | $ax_1^2 + bx_2^2 = 0$                   | $(2, 0)$ droite<br>$(1, 0)$ $\emptyset$  |
| $(1, 1)$       | $ax_1^2 - bx_2^2 = 0$                   | $(1, 0)$ plans parallèles<br>$(1, 1)$ plans sécants<br>$(0, 0)$ plan simple                |
| $(1, 0)$       | $ax_1^2 = 0$                            | $(1, 0)$ plan double<br>$(0, 0)$ $\emptyset$   |
| $(0, 0)$       | $0 = 0$                                 | $(0, 0)$ $\mathbb{R}^3$  |

TAB. 6.a – Types projectifs des quadriques, types affines possiblement correspondant  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$

Toujours dans le même souci que dans le cas affine, nous considérons que l'espace projectif tout entier est une quadrique.

Dans la suite de ce document, dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , nous utiliserons toujours le terme de *cône* pour désigner les quadriques d'inertie  $(2, 1)$ . Cet abus de langage est cohérent et se justifie. En effet, si nous considérons par exemple un cylindre elliptique dans l'espace affine, toutes les droites engendrant ce cylindre sont parallèles dans l'espace affine et sont concourantes en un point du plan à l'infini dans l'espace projectif. Ce point est un équivalent projectif du sommet d'un cône



réel. Il n'y a donc aucune contradiction à parler de cône pour les quadriques d'inertie (2,1). De même, nous parlerons de paires de plans pour les quadriques d'inertie (1,1).

**Remarque 6.7 (Quadriques non réglées)** *Dans l'espace  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , les quadriques d'inertie (3,1) sont projectivement équivalentes à des sphères, elles ne sont donc pas réglées. Les quadriques d'inertie (2,2) sont projectivement équivalentes à des hyperboloïdes à une nappe et sont réglées. Les surfaces quadriques de rang inférieur sont évidemment toutes réglées.*

Comme dans le cas affine, nous ne désirons pas paramétrer les quadriques qui ne sont pas réglées. Avec la remarque précédente le critère permettant de distinguer les quadriques réglées de celles qui ne le sont pas est beaucoup plus simple que dans le cas affine où nous devons parcourir l'arbre de décision décrit par J. Levin avant de pouvoir décider si une quadrique était réglée ou pas.

### 3 Définitions liées aux courbes d'intersection

Il s'avère ici nécessaire de rappeler certaines définitions de base dans l'étude des courbes et surfaces. En effet, dans la suite de ce document, nous nous attacherons entre autres à décrire les caractéristiques des courbes d'intersection que nous déterminerons. Nous commençons donc par introduire le concept de courbe rationnelle et le distinguons d'un autre concept qui nous intéresse, le concept de paramétrage à coefficient rationnel. Nous rappelons ensuite quelques définitions générales comme le degré d'une courbe, son irréductibilité, son genre. Le genre est une notion abstraite assez difficile à appréhender. Nous ne l'utilisons ici que dans un cas particulier, pour justifier de la rationalité d'une courbe. Enfin, nous terminons le chapitre en présentant la notion de finitude affine d'un ensemble de points.

#### 3.1 Rationalité d'une courbe ou des coefficients d'un de ses paramétrages

Il existe une infinité de paramétrages d'une même courbe. Par exemple, dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , la courbe définie par le vecteur de paramétrage  $X = (uv, u^2 + v^2)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , peut aussi être paramétrée par  $X = (\lambda^2 uv, \lambda^2(u^2 + v^2))$  quel que soit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Nous pouvons aussi obtenir le paramétrage  $X = (u'^2 - v'^2, 2(u'^2 + v'^2))$  en posant  $u = u' + v'$  et  $v = u' - v'$ .

Il est même possible de changer encore plus radicalement la forme du paramétrage d'une courbe. Ainsi, si nous étudions dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  la courbe de base du faisceau engendré par les quadriques  $x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 = 0$  et  $x_1 x_2 + x_4^2 = 0$ , selon la manière dont nous déterminons cette courbe, nous pouvons obtenir chacun des deux paramétrages suivants :

$$X = \begin{pmatrix} -2(u^4 + v^4 + 2u^2v^2) \\ 2u^2v^2 \\ uv(u^2 - v^2) \\ uv(u^2 + v^2) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Le deuxième paramétrage est défini par les deux branches :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2u^3 - 6uv^2 - 2v\sqrt{\Delta(u, v)} \\ 2u^3 \\ 3u^2v + u\sqrt{\Delta(u, v)} - vt \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (3u^2v + u\sqrt{\Delta(u, v)} + vu^2) \end{pmatrix}, \quad \text{et } X_2 = \begin{pmatrix} 2u^3 - 6uv^2 + 2v\sqrt{\Delta(u, v)} \\ 2u^3 \\ 3u^2v - u\sqrt{\Delta(u, v)} - vt \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (3u^2v - u\sqrt{\Delta(u, v)} + vu^2) \end{pmatrix},$$

Avec  $\Delta(u, v) = \frac{17}{2}u^2v^2 - 8u^4$ , le domaine de définition du paramétrage est l'ensemble des  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tels que  $\Delta(u, v) \geq 0$ .

Cet exemple permet de mesurer les différences qu'il peut y avoir entre deux calculs d'une même courbe, et les conséquences qui en résultent pour des traitements ultérieurs. Nous avons ici d'une part un paramétrage défini par des fonctions rationnelles<sup>5</sup>, avec un domaine de définition du paramètre simple, et d'autre part un paramétrage défini par deux vecteurs dont les coordonnées contiennent la racine carrée d'un polynôme, et ayant un domaine de définition défini par les racines d'un polynôme de degré 4. Ceci nous amène à rappeler la définition de courbe rationnelle.

**Définition 6.8 (Courbe rationnelle)** *Une courbe rationnelle est une courbe pour laquelle il existe un paramétrage défini par des fonctions rationnelles.*

Dans l'espace projectif, cette propriété est équivalente au fait que la courbe admette un paramétrage dont les coordonnées sont définies par des polynômes puisque le vecteur de paramétrage peut être multiplié par le ppcm des quotients de chaque coordonnée et représenter la même courbe. L'exemple typique est celui que nous venons de présenter. Nous introduisons maintenant la notion de courbe à coefficients rationnels, notion que nous distinguons de celle de courbes rationnelles que nous venons de définir.

**Notation 6.9 (Courbe à coefficients rationnels)** *Une courbe à coefficients rationnels est une courbe qui possède un paramétrage ne nécessitant que des nombres rationnels dans son expression. Si l'expression de ce paramétrage contient des nombres appartenant à une extension algébrique non triviale de  $\mathbb{Q}$ , de degré<sup>6</sup>  $k$  sur  $\mathbb{Q}$ , alors cette courbe est appelée courbe à coefficients dans une extension de degré  $k$ .*

Remarquons que comme dans la définition des courbes rationnelles, cette dernière propriété porte sur les paramétrages possibles de la courbe. En effet, une façon de définir une courbe algébrique est de donner les équations implicites des surfaces dont elle constitue l'intersection. Ces équations implicites sont dans notre cas celles des quadriques de départ qui sont toujours à coefficients rationnels. Il est cependant possible, et c'est même comme nous le verrons assez fréquent, que tout paramétrage de cette courbe soit une expression dont les coefficients numériques ne sont pas tous des rationnels. C'est en quelque sorte une nouvelle mesure de complexité de notre résultat. Nous aimerions d'une part savoir quel est le degré minimum de l'extension de  $\mathbb{Q}$  dans laquelle peuvent être définis les coefficients d'un paramétrage de la courbe, et d'autre part, savoir si le résultat que nous obtenons s'en rapproche ou pas. Dans notre algorithme, nous trouvons souvent des courbes à coefficients irrationnels, mais dont l'expression ne nécessite qu'une ou deux racines carrées, possiblement imbriquées (sauf dans quelques cas particuliers). Il y a des cas où nous sommes sûrs d'obtenir le meilleur résultat possible, et d'autres où nous savons qu'il est possible que notre paramétrage contienne une racine carrée non nécessaire dans l'expression de ses coefficients. Pour exprimer la complexité des coefficients du paramétrage obtenu, nous nous baserons sur le degré de l'extension algébrique de  $\mathbb{Q}$  sur laquelle sont définis les coefficients de notre paramétrage.

<sup>5</sup>Une fonction rationnelle est une fonction définie par le quotient de deux polynômes.

<sup>6</sup>Le degré d'une extension algébrique d'un corps  $K$  contenant un autre corps  $L$ , en l'occurrence  $\mathbb{Q}$ , est la dimension (finie) de  $K$  en tant qu'espace vectoriel sur  $L$ .

### 3.2 Degré d'une courbe, irréductibilité

Maintenant que nous avons introduit la notion de courbe rationnelle, nous allons montrer comment vérifier si une courbe est rationnelle ou pas. Pour cela, nous devons de rappeler certaines définitions élémentaires de géométrie algébrique.

Les surfaces algébriques sont définies par des équations implicites polynomiales à coefficients réels. Le degré de ces équations se confond souvent avec le degré de la surface. Nous rappelons ici une définition du degré d'une surface qui peut aussi s'appliquer au cas des courbes.

**Définition 6.10 (Degré d'une courbe et d'une surface)** *Le degré d'une courbe (respectivement d'une surface) algébrique est la somme des degrés de ses composantes algébriques, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection, comptés avec multiplicité, de la courbe (respectivement la surface) avec tout plan (respectivement toute droite) de l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ .*

Cette définition justifie à nouveau le fait de se placer dans l'espace projectif complexe. En effet, dans l'espace projectif réel, le nombre de points d'intersection entre la courbe (respectivement la surface) et le plan (respectivement la droite) varie selon la position du plan (respectivement de la droite), car il s'agit, après quelques opérations, de résoudre un polynôme (univarié) dans  $\mathbb{R}$ , qui n'a pas toujours de solution réelle. Ce problème n'apparaît pas dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  puisque le polynôme a toujours le même nombre de solutions dans  $\mathbb{C}$  quelle que soit la position du plan (respectivement de la droite).

Nous présentons donc une définition générale du genre d'une courbe ou d'une surface basée sur la définition d'ensembles topologiques irréductibles.

**Définition 6.11** *Soit  $\mathcal{C}$  une courbe (respectivement une surface) algébrique. Si quelles que soient les courbes (respectivement les surfaces) algébriques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ , nous avons la relation suivante :*

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \text{ ou } \mathcal{C} = \mathcal{C}_2,$$

*alors  $\mathcal{C}$  est irréductible. Elle est dite décomposable sinon.*

Pour les surfaces, la paire de plans, qui comme nous l'avons déjà vu est une quadrique, est bien la réunion de deux plans ; ce n'est donc pas une surface irréductible.

La courbe d'intersection de deux quadriques, par exemple, peut être la réunion de deux coniques, d'une cubique et d'une droite, ou de quatre droites. Pour définir le genre d'une courbe, il nous reste à définir les points singuliers d'une courbe.

### 3.3 Points singuliers d'une courbe d'intersection

**Définition 6.12** *Plaçons-nous dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Soient deux équations implicites  $p(x, y, z, w) = 0$  et  $q(x, y, z, w) = 0$  définissant deux surfaces algébriques  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ . Soit  $\mathcal{C}$  la courbe algébrique définie par l'intersection de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ . Un point  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$  est dit singulier s'il appartient à la courbe  $\mathcal{C}$ , et si sa matrice jacobienne :*

$$\begin{pmatrix} \partial p / \partial x & \partial p / \partial y & \partial p / \partial z & \partial p / \partial w \\ \partial q / \partial x & \partial q / \partial y & \partial q / \partial z & \partial q / \partial w \end{pmatrix},$$

*évaluée au point  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$ , est de rang inférieur à 2.*

Cette définition est générale et pourrait suffire dans notre cas. Nous donnons une autre définition pour exprimer clairement les propriétés qui nous intéressent quant à ces points singuliers.

En effet, il peut arriver qu'une composante algébrique entière soit double. Cela est dû au fait qu'elle est contenu dans un plan double. Or nous n'utilisons pas les points de cette composante double au titre de cette seule propriété de la surface qui les porte. Nous utilisons des points singuliers dans nos algorithmes quand ils nous sont utiles pour déterminer la courbe d'intersection. Il se trouve que la propriété utile est ici d'être un point singulier de la courbe d'intersection vue comme une courbe simple. Autrement dit, un point sera considéré comme singulier pour notre courbe d'intersection s'il est un point cuspidal ou un point nodal (par exemple l'intersection de deux composantes, qu'elles soient simples ou doubles).

**Définition 6.13** *Les points singuliers de la courbe d'intersection de deux quadriques vérifient la définition 6.12 et l'une des deux conditions suivantes :*

- soit appartient à une composante algébrique simple,
- soit est commun à au moins deux composantes algébriques différentes.

Dans la suite nous utiliserons cette définition des points singuliers. Pour être plus formels nous aurions pu définir ces points (dans la deuxième condition) comme étant ceux dont la multiplicité est plus grande que celle de chacune des composantes algébriques qui le contiennent ; le but étant de ne pas considérer comme singuliers les points d'une composante algébrique double (sauf si en ce point la composante algébrique coupe une autre composante algébrique). Nous pouvons remarquer, dans tous les cas, que les points singuliers que nous considérons sont tous des points singulier d'une quadrique du faisceau qui les définit.



FIG. 6.1 – Les trois types de courbes singulières que nous pourrions rencontrer, à gauche une courbe ayant une singularité cuspidale, au centre une courbe ayant un nœud simple, et à droite une courbe ayant un point isolé.

Nous présentons sur la figure 6.1 les trois cas pouvant apparaître (point cuspidal, nodal, ou isolé) que nous rencontrerons. La figure a été réalisée pour des courbes d'intersection irréductibles, des quartiques singulières. Dans le cas des courbes décomposables, les points singuliers qui pourront apparaître seront l'intersection de deux composantes algébriques différentes (comme l'intersection d'une cubique et d'un droite) conformément à la dernière définition.

### 3.4 Paramétrages rationnels, genre

Ayant rappelé ces notions de degré d'une courbe, d'irréductibilité d'une courbe et de point singulier d'une courbe, nous pouvons présenter la notion de *genre*. Intuitivement, pour toute surface algébrique de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , nous pouvons dire qu'il existe un homéomorphisme qui envoie cette surface sur un tore à  $g$  trous, et que  $g$  représente le genre de la surface. Le cas des courbes planes est un peu plus compliqué. Il faut considérer la courbe comme la projection sur un plan complexe d'une surface. Le genre de la courbe est celui de la surface dont elle est la projection.

Cette notion de genre peut se prolonger aux courbes algébriques non planes de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Nous ne souhaitons pas introduire toutes les notions nécessaires à l'introduction de la notion de genre car seul nous intéresse le résultat de la proposition suivante.

**Proposition 6.14 (Paramétrage rationnel [Per95])** *Une courbe ou une surface possède un paramétrage défini par des fonctions rationnelles si et seulement si son genre est nul.*

Ainsi, par exemple, les droites et les coniques sont de genre 0, puisqu'elles peuvent toujours être paramétrées à l'aide de fonctions rationnelles. Hormis dans le cas des faisceaux les plus généraux possibles, les résultats que nous obtenons (des courbes rationnelles) montrent d'eux-mêmes que le genre de la courbe est nul. Dans le cas général, la courbe du faisceau est une quartique régulière qui, comme nous le verrons est courbe elliptique. Cela signifie qu'elle ne peut pas être paramétrée uniquement par des polynômes. Ainsi, le paramétrage obtenu par J. Levin contient la racine carrée d'un polynôme. Pour nous assurer qu'il s'agit du meilleur résultat possible, nous allons utiliser la notion de genre associé à une courbe algébrique irréductible qui est d'usage classique. Nous présentons une formule de calcul de cet invariant.

**Proposition 6.15 (Genre d'une courbe algébrique irréductible [Nam84])** *Soit  $\mathcal{C}$  la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  de degrés  $a$  et  $b$ . Alors si la courbe est irréductible, le genre  $g$  de  $\mathcal{C}$  est :*

$$g = \frac{1}{2}ab(a + b - 4) + 1 - \sum_{i=1}^d \frac{q_i(q_i - 1)}{2},$$

où  $d$  est le nombre de points singuliers,  $q_{i,i=1,\dots,d}$  la multiplicité de chacun d'entre eux.

Là encore nous voyons que la notion d'irréductibilité est importante. Si la courbe d'intersection de deux quadriques est irréductible de degré 4, une quartique, son genre est soit 0, soit 1. Si la courbe est décomposable, la somme des degrés de chaque composante irréductible est 4 (le produit des degrés des surfaces). Pour chaque composante irréductible, les degrés que nous pouvons rencontrer sont 1, 2 ou 3. Si une composante est de degré 1, c'est une droite, elle est rationnelle et donc de genre 0. Si c'est une conique, nous pouvons de même la paramétrer rationnellement, c'est aussi une courbe de genre 0. Seul le cas d'une cubique nécessite un travail supplémentaire. Dans ce cas, la courbe d'intersection est nécessairement constituée d'une cubique et d'une droite (exactement deux composantes irréductibles) puisque la somme des degrés des composantes doit être égale à 4. Nous utilisons alors le résultat suivant :

**Proposition 6.16 (Genre des composantes d'une courbe [Per95])** *Soient deux surfaces algébriques de degrés  $s$  et  $t$  dont l'intersection est la réunion de deux courbes algébriques irréductibles. Si  $d$  et  $d'$  sont les degrés de ces composantes,  $g$  et  $g'$  leurs genres, alors nous avons les formules :*

$$d + d' = st, \text{ et } g' - g = \left( \frac{1}{2}(s + t) - 2 \right) (d' - d).$$

Dans le cas qui nous occupe  $\frac{1}{2}(s + t) - 2 = 0$ , et donc le genre de la cubique est le même que celui de la droite, c'est-à-dire 0. Introduisons le théorème qui résulte de la dernière proposition.

**Théorème 6.17** *Si la courbe de base d'un faisceau de quadrique contient des composantes algébriques de degré inférieur à 4, elles sont toutes rationnelles. Si la courbe de base d'un faisceau de deux quadriques est une quartique, alors cette quartique est rationnelle si et seulement si elle contient un point singulier.*

L'intérêt pratique est évident. Si la courbe d'intersection de deux quadriques est de genre 0, c'est-à-dire rationnelle, il est possible d'éviter le terme  $\sqrt{\Delta(u)}$  dans l'expression de son paramétrage.

### 3.5 Composantes affinement finies ou infinies

La notion de finitude affine permet de savoir si un ensemble de points est contenu ou pas dans un volume fini (dans l'espace projectif).

**Définition 6.18 (Ensemble affinement fini ou infini)** Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble de points de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . S'il existe un plan de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  qui ait une intersection réduite à l'ensemble vide avec  $\mathcal{S}$ , alors  $\mathcal{S}$  est dit affinement fini ; sinon,  $\mathcal{S}$  est dit affinement infini.

Nous avons par exemple le résultat suivant :

**Proposition 6.19 (Quadriques et finitude affine)** Les quadriques d'inertie  $(3, 1)$  sont affinement finies.

**Démonstration :** Soit une quadrique d'inertie  $(3, 1)$ . Alors il existe un repère dans lequel son équation est  $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$  et le plan  $x = 2w$  ne coupe pas la quadrique. Elle est donc affinement finie.  $\square$

**Remarque 6.20** Dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , toute droite est un ensemble affinement infini.

**Corollaire 6.21 (Quadriques réglées)** Dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , toute quadrique réglée est affinement infinie.

La démonstration découle trivialement de la remarque 6.20. Nous avons maintenant que les quadriques d'inertie  $(2, 2)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$  et  $(1, 0)$  sont des ensembles affinement infinis.

Munis de ces nouveaux outils, nous pouvons envisager une nouvelle étude du calcul de l'intersection de deux quadriques. Dans le chapitre suivant, nous montrerons certaines propriétés générales du faisceau de deux quadriques, ce qui nous permettra de construire de nouveaux algorithmes.

# Chapitre 7

## Caractérisation du faisceau de deux quadriques

L'objectif de ce chapitre est de donner les outils nécessaires à l'étude de la courbe de base du faisceau de deux quadriques. Nous commençons par rappeler brièvement la notion de faisceau pour présenter l'équation principale qui lui est associée, l'équation déterminantielle. Cette équation n'est pas en elle-même un invariant du faisceau dans le sens où sa forme change en fonction du choix des deux quadriques du faisceau utilisées pour la définir. Par contre, nous montrons que la nature réelle ou complexe et la multiplicité de ses racines constituent eux un invariant du faisceau dans le sens où ils ne changent pas quelles que soient les quadriques du faisceau utilisées pour la définir et quel que soit le repère dans lequel ces quadriques sont considérées. Cela n'est cependant pas suffisant pour séparer les différents cas possibles d'intersection, un travail plus fin est nécessaire. Suivant la démarche historique et naturelle nous présentons une étude du faisceau dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , puis nous nous plaçons dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Nous commençons notre étude en présentant les résultats de T.J. Bromwich [Bro06] sur la caractérisation de Segre [Seg83] dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , résultats généraux expliquant comment obtenir la topologie de la courbe de base du faisceau. Nous présentons les résultats détaillés dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ . Nous exposons ensuite les résultats de F. Uhlig [Uhl73] qui permettent d'affiner cette étude en effectuant une diagonalisation simultanée des matrices de deux quadriques du faisceau dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Nous montrons alors comment appliquer cette méthode pour retrouver la partie réelle de la courbe de base du faisceau.

Dans ce chapitre, nous ne nous intéressons pas aux problèmes algébriques liés à une éventuelle implantation. Il s'agit ici de montrer comment étudier le faisceau de deux quadriques pour déterminer les caractéristiques de sa courbe de base. C'est une étape essentielle de notre démarche.

### 1 Équation déterminantielle et invariants associés

#### 1.1 Faisceau de deux quadriques

La définition du faisceau de deux quadriques reste la même que dans le cas affine (3.7), nous la redonnons sous une forme légèrement différente.

**Définition 7.1 (Faisceau de deux quadriques)** *Le faisceau  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$  engendré par deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est l'ensemble des quadriques  $Q_{\mathcal{R}(\lambda, \mu)}$  dont les matrices sont de la forme :*

$$\{\mathcal{R}(\lambda, \mu) = \lambda\mathcal{P} + \mu\mathcal{Q} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})\}.$$

Le fait de prendre le paramètre dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  nous évite de considérer le cas d'un paramètre (affine) ayant une valeur infinie. Il correspond mieux à la réalité du faisceau.

## 1.2 Équation déterminantielle

Pour trouver une quadrique réglée dans le faisceau, J. Levin recherche les racines de l'équation définie par le déterminant des sous-matrices  $3 \times 3$  supérieures gauches de deux quadriques du faisceau :

$$\det(x\mathcal{P}_u - \mathcal{Q}_u) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Il étudie l'équation liée aux formes quadratiques associées aux quadriques du faisceau, avant d'étudier les parties linéaires et constantes de cette équation. En nous plaçant dans l'espace projectif, les polynômes que nous étudions sont homogènes et les quadriques sont définies uniquement comme des formes quadratiques, sans forme linéaire ou constante supplémentaire. Nous pouvons alors introduire une équation similaire, qui prendra une place centrale dans l'étude de l'intersection de deux quadriques.

**Définition 7.2 (Équation déterminantielle)** Soit  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques. L'équation déterminantielle  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  du faisceau  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$ , associée à  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  est :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} : \quad \det(x \cdot \mathcal{P} + y \cdot \mathcal{Q}) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}). \quad (1)$$

$\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  est un polynôme homogène de degré 4 en la variable projective  $(x, y)$ . Les coefficients apparaissant dans cette équation dépendent directement des quadriques utilisées pour la définir (et par là même, des matrices représentant ces quadriques). En effet, si nous utilisons deux autres quadriques du faisceau,  $Q_{\mathcal{R}_1} = \lambda_1 Q_{\mathcal{P}} + \mu_1 Q_{\mathcal{Q}}$  et  $Q_{\mathcal{R}_2} = \lambda_2 Q_{\mathcal{P}} + \mu_2 Q_{\mathcal{Q}}$ , l'équation déterminantielle devient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mathcal{R}_1,\mathcal{R}_2} &= \det(x(\lambda_1 \mathcal{P} + \mu_1 \mathcal{Q}) + y(\lambda_2 \mathcal{P} + \mu_2 \mathcal{Q})) \\ &= \det((x\lambda_1 + y\lambda_2) \mathcal{P} + (x\mu_1 + y\mu_2) \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Il s'agit d'un changement de variable linéaire de la variable projective de l'équation (qui tient compte du cas où seule la matrice d'une des deux quadriques est multipliée par une constante non nulle). Nous constatons que selon les quadriques utilisées pour définir l'équation déterminantielle, les valeurs de ses différentes racines vont changer. Nous montrons dans la section suivante quels sont les invariants de cette équation, c'est-à-dire un ensemble de propriétés liées à cette équation qui ne sont pas influencés par un changement de repère ou par le choix des quadriques (et de leur matrices) utilisées pour la définir.

## 1.3 Invariants associés à l'équation déterminantielle

Nous présentons ici deux théorèmes et leurs démonstrations car nous n'avons pas trouvé de références s'y rapportant. Ils montrent quels invariants sont définis par l'équation déterminantielle du faisceau.

**Théorème 7.3** *La nature réelle ou complexe et la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle sont indépendantes du choix des deux quadriques du faisceau servant à définir cette équation.*



**Démonstration :** Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Soit  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  l'équation déterminantielle qu'elles définissent. Soient  $Q_{\mathcal{R}_1}$  et  $Q_{\mathcal{R}_2}$  deux autres quadriques distinctes du faisceau engendré par  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$ ; il existe donc  $(\lambda_1, \mu_1)$  et  $(\lambda_2, \mu_2)$  appartenant à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tels que  $Q_{\mathcal{R}_1} = \lambda_1 \mathcal{P} + \mu_1 \mathcal{Q}$  et  $Q_{\mathcal{R}_2} = \lambda_2 \mathcal{P} + \mu_2 \mathcal{Q}$ . L'équation déterminantielle  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}$  définie par  $Q_{\mathcal{R}_1}$  et  $Q_{\mathcal{R}_2}$  est alors :

$$\begin{aligned} \det(x' \mathcal{R}_1 + y' \mathcal{R}_2) &= 0, \\ \Leftrightarrow \det((x' \lambda_1 + y' \lambda_2) \mathcal{P} + (x' \mu_1 + y' \mu_2) \mathcal{Q}) &= 0. \end{aligned}$$

Soit  $\Phi$  l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1 &\longmapsto \mathbb{P}^1 \\ (x, y) &\longmapsto (x', y') = (-\mu_2 x + \lambda_2 y, \mu_1 x - \lambda_1 y). \end{aligned}$$

Comme  $Q_{\mathcal{R}_1}$  et  $Q_{\mathcal{R}_2}$  sont distinctes, l'application est inversible (sinon la matrice associée serait de déterminant nul et alors  $(\lambda_1, \mu_1)$  et  $(\lambda_2, \mu_2)$  seraient égaux dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ). En remplaçant par  $(x', y')$  par sa valeur  $\Phi(x, y)$  en fonction de  $x$  et  $y$  dans  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \det(x' \mathcal{R}_1 + y' \mathcal{R}_2) &= 0, \\ \Leftrightarrow \det((x' \lambda_1 + y' \lambda_2) \mathcal{P} + (x' \mu_1 + y' \mu_2) \mathcal{Q}) &= 0, \\ \Leftrightarrow \det((-\mu_2 \lambda_1 + \mu_1 \lambda_2) x \mathcal{P} + (\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2) y \mathcal{Q}) &= 0, \\ \Leftrightarrow (\lambda_2 \mu_1 - \lambda_1 \mu_2)^{n+1} \det(x \mathcal{P} + y \mathcal{Q}) &= 0. \end{aligned}$$

Les deux équations  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  et  $\mathcal{E}_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2}$  ont donc des racines de même nature et de même multiplicité puisque le passage de l'une à l'autre se fait par un changement de variables linéaire.  $\square$

Pour ce qui est de l'influence d'un changement de repère (une transformation congruente réelle) le résultat suivant est un peu plus fort puisque ce sont les racines elles-mêmes qui sont invariantes.

**Théorème 7.4** *Les valeurs des racines de l'équation déterminantielle sont indépendantes du repère dans lequel cette équation est calculée.*

**Démonstration :** Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques distinctes. L'équation déterminantielle qui leur est associée est :

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \det(x \cdot \mathcal{P} + y \cdot \mathcal{Q}).$$

Appliquons une transformation congruente quelconque  $T$  aux deux quadriques. L'équation déterminantielle devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} &= \det(x \cdot {}^t T \cdot \mathcal{P} \cdot T + y \cdot {}^t T \cdot \mathcal{Q} \cdot T) \\ &= \det(T)^2 \cdot \det(x \cdot \mathcal{P} + y \cdot \mathcal{Q}). \end{aligned}$$

Ce qui montre que les racines de l'équation déterminantielle restent les mêmes et finit de prouver la propriété énoncée.  $\square$

La nature et la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle constituent donc un invariant du faisceau, et donc de la courbe de base du faisceau. L'objectif du reste de ce chapitre est de montrer que si la nature réelle ou complexe et la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle ne permettent pas de séparer tous les cas possibles de courbe de base d'un faisceau, il existe d'autres outils permettant de les distinguer.

## 1.4 Classes de faisceaux

Comme nous avons déterminé des invariants de cette équation déterminantielle, nous pouvons définir de manière naturelle trois classes d'équations déterminantielles et donc trois classes de faisceaux.

**Définition 7.5** *Si l'équation déterminantielle associée à un faisceau n'a que des racines simples (réelles ou complexes) nous dirons que le faisceau est régulier. Si cette équation a une ou des racines multiples, nous dirons que le faisceau est singulier. Si cette équation est identiquement nulle, nous dirons que le faisceau est dégénéré.*

## 2 Caractérisation des faisceaux dans $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

Au XIX<sup>e</sup> siècle, de nombreux chercheurs se sont penchés sur l'étude des faisceaux de formes quadratiques. Avec l'essor de la géométrie algébrique est apparue la nécessité de considérer les objets étudiés, en l'occurrence des formes quadratiques, dans l'espace projectif complexe. Dans l'espace projectif parce qu'alors le degré des équations ne varie pas si une racine « part » à l'infini, dans l'espace complexe pour que les polynômes considérés aient toujours des racines. Le retour dans l'espace projectif réel nécessite de séparer les cas obtenus selon que telle ou telle courbe ou surface ait des parties réelles ou complexes.

### 2.1 Caractéristique de Segre

Nous présentons ici la caractéristique de Segre. Cet invariant est difficile à appréhender de prime abord. La démonstration de ses propriétés repose sur la diagonalisation simultanée des matrices de deux formes quadratiques du faisceau, que nous exposerons dans le cas réel à la section 7.3.1. La caractéristique de Segre est définie à partir des racines de l'équation déterminantielle et de leur multiplicité dans les différents mineurs de la matrice d'une quadrique quelconque du faisceau. Outre qu'elle représente historiquement la première classification des faisceaux de quadriques, l'intérêt de la caractéristique de Segre réside dans son expression qui permet non seulement de distinguer les différents cas possibles dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , mais aussi contient les informations nécessaires à l'exploitation de chacun de ces cas. Nous donnons ici la définition sans redémontrer toutes les propriétés utilisées aux différentes étapes de la présentation de la caractéristique de Segre [Seg83, Bro06].

Soit un faisceau non dégénéré de quadriques,  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$  de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  l'équation déterminantielle définie par  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Soient  $(x_1, y_1), \dots, (x_p, y_p)$ ,  $p \leq n$  les racines de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ ,  $m_1, \dots, m_p$  leur multiplicité. Alors

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(x, y) = c \prod_{i=1}^p (xy_i - yx_i)^{m_i}, \text{ avec } c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Notons  $m_i^j$  la multiplicité de  $(x_i, y_i)$  dans le pgcd de tous les mineurs<sup>7</sup>  $(n-j)$  de  $\mathcal{R}(x, y)$  (la matrice  $x \cdot \mathcal{P} + y \cdot \mathcal{Q}$  de déterminant  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}(x, y)$ ), en considérant la multiplicité  $m_i^j$  égale à 0 si  $(x_i, y_i)$  n'est pas une racine de ce pgcd. Soit  $t_i \geq 1$  le plus petit entier tel que  $m_i^{t_i} = 0$ .

<sup>7</sup>Par abus de langage, nous définissons les mineurs  $n-j$  d'une matrice carrée  $M$  de taille  $n \times n$  comme les déterminants des sous-matrices principales de  $M$  (c'est-à-dire ayant leur diagonale principale contenue dans celle de  $M$ ) de taille  $(n-j) \times (n-j)$ .

Définissons la séquence d'indices  $e_i^j$  de la manière suivante :

$$e_i^j = m_i^{j-1} - m_i^j, \quad j = 1, \dots, t_i,$$

avec  $m_i^0 = m_i$ .

**Définition 7.6 (Caractéristique de Segre)** *Les facteurs  $(xy_i - yx_i)^{e_i^j}$  sont appelés les diviseurs élémentaires de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(x, y)$ . Les exposants  $e_i^j$  sont appelés les nombres caractéristiques associés à la racine  $(x_i, y_i)$ .*

*Pour chaque racine de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(x, y)$ , nous constituons une chaîne des  $e_i^j$ . Si cette chaîne contient plus d'un élément, nous ajoutons des parenthèses autour de cette chaîne. La caractéristique de Segre est la juxtaposition des chaînes correspondant à chacune des racines de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(x, y)$ , le tout étant entouré de crochets.*

$$[(e_1^1, \dots, e_1^{t_1}), (e_2^1, \dots, e_2^{m_1}), \dots, (e_p^1, \dots, e_p^{t_p})].$$

Montrons que la caractéristique de Segre est un invariant du faisceau au même titre que la nature et la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle, et même, dans le cas complexe, un invariant plus fin puisqu'il sépare tous les cas possibles. Le théorème suivant, essentiellement dû à Weierstrass [Wei68], montre que le faisceau est entièrement caractérisé par sa caractéristique de Segre.

**Théorème 7.7 (Faisceaux équivalents)** *Soient deux faisceaux non dégénérés  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$  et  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{R}}, Q_{\mathcal{S}})$ . Soient  $(\lambda_{1,i}, \mu_{1,i})$  et  $(\lambda_{2,i}, \mu_{2,i})$  leurs racines respectives, pour  $i = 1, \dots, p$ . Alors les deux faisceaux sont projectivement équivalents (c'est-à-dire qu'ils sont congruents par une transformation congruente complexe) si et seulement si ils ont la même caractéristique de Segre et s'il existe un homomorphisme de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  dans lui-même qui envoie les racines  $(\lambda_{1,i}, \mu_{1,i})$  sur les racines  $(\lambda_{2,i}, \mu_{2,i})$ .*

**Démonstration :** Pour démontrer ce théorème, il suffit de constater qu'il réunit dans une version complexe les théorèmes 7.4 et 7.3. En effet la condition portant sur la transformation congruente signifie qu'il existe un repère dans lequel les deux faisceaux  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$  et  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{R}}, Q_{\mathcal{S}})$  coïncident, et la condition sur l'homomorphisme existant entre les  $(\lambda_{1,i}, \mu_{1,i})$  et les  $(\lambda_{2,i}, \mu_{2,i})$  signifie que dans ce repère, les couples  $(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$  et  $(Q_{\mathcal{R}}, Q_{\mathcal{S}})$  engendrent le même faisceau. Sa démonstration se déduit aisément de celles des deux autres théorèmes.  $\square$

Notons que cette démonstration peut aussi se faire en diagonalisant simultanément deux quadriques quelconques du faisceau, avec la seule condition que l'une des deux au moins doit être de rang maximum. La condition n'est pas restrictive car s'il n'y a pas de quadriques de rang maximum dans le faisceau, cela signifie que l'équation déterminantielle est identiquement nulle. Il y a dans ce cas deux possibilités qui peuvent s'interpréter matriciellement de la façon suivante : soit il existe un repère dans lequel les matrices de deux quadriques quelconques du faisceau ont la même ligne et la même colonne nulles, soit ce n'est pas le cas. Nous montrerons avec le théorème 7.14 que cette propriété est équivalente au fait que toutes les quadriques du faisceau aient ou pas au moins un point singulier en commun.

**Remarque 7.8** *Le rang des quadriques singulières du faisceau est égal à  $n - t_i$ .*

Cette remarque signifie en premier lieu que la connaissance du rang (en plus de la multiplicité des racines) n'est pas suffisante pour séparer tous les cas. Ainsi, dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , les deux

caractéristiques de Segre suivantes : [(31)] et [(22)] ont toutes les deux une chaîne de longueur 2 correspondant à une racine quadruple de l'équation déterminantielle mais d'exposants caractéristiques différents. Les rangs des quadriques singulières sont les mêmes et pourtant, nous avons deux caractéristiques de Segre différentes. L'autre intérêt de cette remarque sur la valeur du rang des quadriques associées aux racines de l'équation déterminantielle apparaît si nous nous plaçons dans l'optique de construire un algorithme. Nous pouvons énoncer le théorème suivant qui prédit en fonction de la multiplicité d'une racine de l'équation déterminantielle le rang de la matrice de la quadrique qui lui est associée.

**Proposition 7.9** *Pour une racine  $(x_i, y_i)$ , la matrice  $x_i\mathcal{P} + y_i\mathcal{Q}$  est de rang  $r$  avec l'inégalité suivante :*

$$n - 1 \geq r \geq n - m_i.$$

Redonnons maintenant les résultats qui concernent directement notre problème, ceux en dimension 3.

## 2.2 Faisceaux de $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

Les cas étudiés explicitement par T. Bromwich [Bro06] sont énumérés dans le tableau 7.a. Pour déterminer la forme de la courbe d'intersection dans chacun des cas, il « suffit » d'exhiber deux quadriques des faisceaux dans un repère où leur équation a une expression simple, et de déterminer les caractéristiques géométriques de la courbe de base correspondante.

La dernière ligne du tableau 7.a, issu de l'ouvrage de T. Bromwich [Bro06], présente un cas de faisceau dégénéré où les quadriques de ce faisceau n'ont pas de point singulier commun. Ce cas ne vérifie donc pas strictement les hypothèses faites plus haut. Nous l'avons laissé, en le désignant par [1{3}] dans le tableau 7.a, pour respecter les résultats tels que T. Bromwich les a explicitement présentés. La démonstration en sera faite dans le théorème 7.17.

## 2.3 Extension aux autres cas

Le tableau 7.a ne contient pas les cas où le faisceau est dégénéré et où les quadriques du faisceau ont au moins un point singulier en commun. Le théorème suivant va nous aider à comprendre la situation.

**Théorème 7.10** *Soit un faisceau dont les quadriques ont au moins un point singulier commun. Alors il existe un repère où toutes les matrices des quadriques du faisceau sont de la forme :*

$$\begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Démonstration :** La démonstration est immédiate, il suffit d'effectuer la translation qui envoie un point singulier commun à toutes les quadriques au point  $(0, 0, 0, 1)$ . En effet, dans ce repère, les équations de tous les cônes sont de la forme  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$  puisqu'ils ont pour point singulier  $(0, 0, 0, 1)$  (leur matrice jacobienne en ce point doit être égale à zéro).  $\square$

Une fois trouvé un repère vérifiant le théorème, il est clair que nous pouvons nous ramener au calcul de l'intersection de deux coniques dans le plan. Du coup, les résultats pour ces faisceaux se déduisent aisément de ceux de T. Bromwich concernant l'intersection de coniques dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ .

| Caractéristique de Segre | Détection sur la ou les quadriques associées aux racines multiples de $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\lambda, \mu)$ | Intersection dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  |
|--------------------------|---|---|
| [[1111]]                 | une racine quadruple, rang 0  | l'unique quadrique de rang 4 définie par le faisceau<br>quartique régulière<br>quartique nodale<br>quartique cuspidale<br>cubique et droite sécante<br>cubique et droite tangente<br>deux coniques sécantes<br>deux coniques tangentes<br>une conique double<br>une conique et deux droites sécantes entre elles,<br>la conique ne coupant pas les droites<br>une conique et deux droites la coupant au même point<br>quatre droites<br>deux droites et une droite double<br>deux droites doubles<br>une conique et une droite double |
| [1111]                   | quatre racines simples  |   |
| [112]                    | une racine double, rang 3   |   |
| [13]                     | une racine triple, rang 3   |   |
| [22]                     | deux racines doubles, rangs 3   |   |
| [4]                      | une racine quadruple, rang 3  |   |
| [11(11)]                 | une racine double, rang 2   |   |
| [1(21)]                  | une racine triple, rang 2   |   |
| [1(111)]                 | une racine triple, rang 1   |   |
| [2(11)]                  | deux racines doubles, rangs 3 et 2  |   |
| [(31)]                   | une racine quadruple, rang 2  |   |
| [(11)(11)]               | deux racines doubles, rangs 2   |   |
| [(22)]                   | une racine quadruple, rang 2  |   |
| [(211)]                  | une racine quadruple, rang 1  |   |
| [1{3}]                   | pas de point singulier commun   |   |

TAB. 7.a – Classification par facteurs invariants dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  [Bro06]. Sur la dernière ligne, il n'y a pas de racines pour l'équation déterminantielle qui est identiquement nulle, la condition porte sur le fait que les quadriques du faisceau n'ont pas de point commun. Les rang affichés sont ceux des matrices des quadriques singulières associées à la ou aux racines multiples

Ceci nous amène à employer la caractéristique de Segre de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  pour distinguer chacun des cas. Nous récapitulons l'ensemble des cas restants dans le tableau 7.b. Précisons l'introduction d'une notation particulière  $[\{3\}]$  pour le cas où le faisceau ne contient que des quadriques de rang 2 n'ayant qu'un point singulier en commun dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire, pour le calcul dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ , le cas où l'équation déterminantielle est identiquement nulle et où les coniques considérées n'ont pas de point singulier en commun (nous retrouvons alors dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  un résultat similaire à celui de la dernière ligne du tableau 7.a). Les quatre dernières lignes correspondent quant à elles aux cas où le calcul de l'intersection peut se ramener à un calcul dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  (avec la dernière ligne correspondant à une équation déterminantielle identiquement nulle dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ , et nécessitant une dernière notation [1] pour la caractéristique de Segre).

## 2.4 Vers un calcul sur le corps des réels

Le premier point délicat dans le passage de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  à  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  provient de la nature des racines de l'équation déterminantielle. Si elle a des racines complexes, qui vont par paires conjuguées, les quadriques correspondant à ces racines sont imaginaires et elles n'appartiennent pas au faisceau réel (elles sont à coefficients complexes). Cela signifie qu'une composante algébrique de la courbe peut être entièrement contenue dans la partie imaginaire de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , et donc que les composantes algébriques complexes de la courbe de base n'apparaissent pas toutes dans l'espace réel  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

La deuxième difficulté vient du fait que dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , seul le rang d'une matrice a un sens, pas son inertie. En passant à  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  ce nouvel invariant réel a des conséquences sur la courbe de base du faisceau. Présentons deux exemples de ce phénomène. Étudions tout d'abord le cas d'un faisceau dont l'équation déterminantielle a une racine triple et dont la quadrique qui est associée à cette racine est de rang 3. Avec ces informations nous pouvons affirmer que la caractéristique de Segre de ce faisceau est [13], que le rang de la quadrique associée à la racine simple est 3 et

| Caractéristique de Segre | Détection sur $\mathcal{D}(\lambda), R(\lambda)$ | Intersection dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ |
|--------------------------|--|--|
| [111]                    | trois racines simples                            | quatre droites concourantes                  |
| [12]                     | une racine double, rang 2                        | deux droites simples et une droite double    |
| [1(11)]                  | une racine double, rang 1                        | deux droites doubles                         |
| [3]                      | une racine triple, rang 2                        | une droite simple et une droite triple       |
| [(21)]                   | une racine triple, rang 1                        | une droite quadruple                         |
| [(111)]                  | une racine triple, rang 0                        | l'unique cône du faisceau                    |
| [{3}]                    | pas de point singulier commun                    | une droite et un plan sécants en un point    |
| [11]                     | deux racines simples                             | une droite quadruple                         |
| [2]                      | une racine double, rang 1                        | un plan                                      |
| [(11)]                   | une racine double, rang 0                        | l'unique paire de plans du faisceau          |
| [1]                      | une racine simple                                | un plan double                               |

TAB. 7.b – Classification par facteurs invariants dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  pour les faisceaux dégénérés. Les notations correspondent à une caractéristique de Segre dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  (6 premières lignes), à un cas particulier de faisceau dégénéré de coniques n'ayant aucun point singulier en commun (septième ligne) et à une caractéristique de Segre dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  (quatre dernières lignes).

que la courbe de base du faisceau est une quartique cuspidale. Dans l'espace réel, le résultat est essentiellement le même car comme nous l'expliquons dans la section suivantes, les quadriques singulières ne peuvent pas être de signature  $(3, 0)$  et sont d'inertie  $(2, 1)$ . Par contre, la situation est différente si nous étudions le cas d'un faisceau dont l'équation déterminantielle a une racine triple et dont la matrice de la quadrique qui lui est associée est de rang 2. Avec ces informations nous pouvons affirmer que la caractéristique de Segre de ce faisceau est  $[1(21)]$ , que le rang de la quadrique associée à la racine simple est 3 et que la courbe de base du faisceau est constituée de deux coniques tangentes. Dans l'espace réel, le résultat dépend de l'inertie de la quadrique associée à la racine triple. Si cette quadrique est d'inertie  $(2, 0)$ , l'intersection est réduite à un point double, sinon, cette quadrique est d'inertie  $(1, 1)$  et l'intersection est constituée de deux coniques complètement contenues dans l'espace réel, tangentes en un point. Le sens de ces exemples est de montrer que pour retrouver la partie réelle de la courbe il faut connaître la partie réelle des quadriques singulières du faisceau et ainsi savoir si les cônes sont chacun réduits ou pas à un point, ou, dans d'autres cas, si les paires de plans sont chacune réduites ou pas à une droite. En ce qui concerne les quadriques régulières du faisceau contenues ou pas dans la partie imaginaire de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , le théorème suivant nous permet de conclure plus rapidement encore.

**Théorème 7.11 (P. Finsler [Fin37])** *La courbe de base d'un faisceau est réduite à l'ensemble vide dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 2$ , si et seulement si il existe au moins une quadrique d'inertie  $(n + 1, 0)$  dans ce faisceau.*

Remarquons alors le critère suivant, dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  :

**Théorème 7.12 (Condition nécessaire pour que la courbe de base soit vide)** *Si la courbe de base d'un faisceau est réduite à l'ensemble vide, alors son équation déterminantielle n'a que des racines réelles.*

**Démonstration :** Soit  $Q_Q$  une quadrique du faisceau d'inertie  $(n + 1, 0)$ . Quitte à considérer  $-Q$  au lieu de  $Q$ , supposons que  $Q$  ait  $n + 1$  valeurs propres strictement positives. Le fait que

cette matrice n'ait que des racines strictement positives implique qu'il existe une matrice  $Q'$  telle que  $Q'^2 = Q$  (il suffit de prendre dans la base des vecteurs propres, la matrice diagonale ayant pour coefficients les racines carrées des valeurs propres de  $Q$ ). En calculant l'équation déterminantielle du faisceau, nous obtenons, pour  $\mathcal{P}$  une autre quadrique du faisceau :

$$\det(\lambda Q - \mu \mathcal{P}) = \det(\lambda Q'^2 - \mu \mathcal{P}) = \det(Q'^2) \det(\lambda I_4 - Q'^{-1} \mathcal{P} Q'^{-1}).$$

Le dernier déterminant est le polynôme caractéristique de la matrice  $Q'^{-1} \mathcal{P} Q'^{-1}$ . En se plaçant dans le repère où  $Q$ , et donc  $Q'$ , est diagonale, le lecteur se persuadera que  $Q'^{-1} \mathcal{P} Q'^{-1}$  est symétrique puisque  $Q'$  peut être vue comme un changement d'échelle appliqué à  $\mathcal{P}$ , et dont le résultat reste symétrique. Ce polynôme caractéristique, et donc l'équation déterminantielle, n'a que des racines réelles. Enfin la nature des racines de l'équation déterminantielle est indépendante des quadriques du faisceau utilisées pour définir l'équation (théorème 7.3), ce qui finit la démonstration.  $\square$

### 3 Faisceaux dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$

#### 3.1 Réduction simultanée des formes quadratiques

Nous avons déjà diagonalisé, de manière naturelle, les matrices des quadriques pour en déterminer le type. Nous introduisons ici la notion de diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques réelles. L'ensemble des résultats que nous donnons ici sont dus à F. Uhlig [Uhl73, Uhl76, Uhl79]. L'idée est qu'en se donnant deux matrices symétriques réelles, il est possible de trouver un repère dans lequel ces matrices ont la forme la plus simple possible. Si une diagonalisation complète n'est pas toujours envisageable, une diagonalisation par blocs de Jordan sera notre objectif.

**Définition 7.13 (Blocs de Jordan)** Un bloc de Jordan réel *associé* à  $\lambda_i \in \mathbb{R}$  est une matrice carrée de taille  $k$  de la forme :

$$J_i^1 = (\lambda_i) \text{ si } k = 1, \quad J_i^k = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ si } k > 1.$$

Un bloc de Jordan complexe *associé* à  $\alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  est, pour  $k \geq 2$  pair, de la forme :

$$J_i^2 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ si } k = 2, \quad J_i^k = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 1 & 0 & & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & \alpha & -\beta \\ 0 & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ si } k > 2.$$

Ces blocs de Jordan vont nous permettre de caractériser les formes simplifiées qu'il est possible d'obtenir en réduisant simultanément les matrices de deux quadriques.

**Théorème 7.14 (Réduction simultanée de deux formes quadratiques)** Soient  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  deux matrices symétriques réelles de taille  $n$ , avec  $\mathcal{P}$  de rang maximal.

1. Le polynôme caractéristique de  $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}$  et l'équation déterminantielle  $\det(\lambda\mathcal{P} - \mathcal{Q})$  ont les mêmes racines  $\lambda_j$  avec les mêmes multiplicités  $m_j$ .
2. La matrice  $\mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q}$ , a priori non symétrique, peut être mise sous forme normale de Jordan :

$$\text{Diag}(J_1, \dots, J_r, J_{r+1}, \dots, J_m),$$

$$\text{avec } \begin{cases} J_1, \dots, J_r & : \text{ blocs réels} & - & \text{valeurs propres } \lambda_j \in \mathbb{R} \text{ de } \mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q} \\ J_{r+1}, \dots, J_m & : \text{ blocs complexes} & - & \text{valeurs propres } \{\lambda_j, \bar{\lambda}_j\} = \{\alpha_j \pm i\beta_j\} \notin \mathbb{R} \text{ de } \mathcal{P}^{-1}\mathcal{Q} \end{cases}$$

3. Il existe un repère dans lequel les deux quadriques  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &\equiv \text{Diag}(\varepsilon_1 E_1, \dots, \varepsilon_r E_r, E_{r+1}, \dots, E_m) \\ \mathcal{Q} &\equiv \text{Diag}(\varepsilon_1 E_1 J_1, \dots, \varepsilon_r E_r J_r, E_{r+1} J_{r+1}, \dots, E_m J_m) \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_i = \pm 1$

$$E_i^k = (1) \text{ si } k = 1, \quad E_i^k = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ & \dots & & \\ & & \dots & \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \text{ si } k > 1,$$

de même taille que  $J_i$  pour  $i = 1, \dots, m$ . Les signes  $\varepsilon_i$  sont uniques (à permutation près) pour chaque ensemble d'indices  $i$  qui sont associés à un ensemble de blocs de Jordan réels identiques  $J_i$ .

4. La somme des tailles des blocs de Jordan associés à une même racine réelle  $\lambda_i$  est égale à la multiplicité de la racine  $\lambda_i$  dans l'équation déterminantielle. Pour les racines complexes, chaque bloc complexe correspondant à deux racines conjuguées, la somme des tailles des blocs de Jordan associés aux deux racines conjuguées est égale à deux fois la multiplicité de chacune de ces racines.

La démonstration de ce théorème fait l'objet d'un article complet [Uhl76] que le lecteur pourra consulter pour de plus amples détails. La présence nécessaire d'une quadrique non singulière dans le faisceau s'explique par le fait que, avec les notations du théorème 7.14, la matrice  $\mathcal{P}$  est de rang maximum, tandis que la matrice  $\mathcal{Q}$  peut être de rang inférieur si une racine de l'équation déterminantielle est nulle.

Tous les résultats qu'il est possible d'obtenir par l'application de ce théorème définissent toutes les classes réelles de faisceaux de deux quadriques. L'étude détaillée de chacune de ces classes sera faite dans les chapitres 9 et 10. Le théorème nous assure donc que pour tout faisceau de quadriques, quelle que soit la paire de quadriques de ce faisceau, si l'une au moins de ces quadriques est de rang maximum alors il existe une transformation congruente qui envoie les deux quadriques dans un repère où leurs matrices sont d'une des formes que le théorème prédit, et que cette forme est unique quelle que soit la paire de quadriques choisie dans le faisceau.

La distinction entre les différents cas possibles pour des équations déterminantielles ayant des racines de même multiplicité et même nature se fait selon la taille des blocs de Jordan associés aux racines multiples. Ainsi, si l'équation déterminantielle a une racine triple  $\lambda_1$  et une simple  $\lambda_2$ , les blocs de Jordan associés à la racine triple des matrices  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  peuvent être simultanément mis sous l'une des trois formes suivantes (avec les différents  $\varepsilon_i$  fixés à 1) :

$$\mathcal{P} \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathcal{Q} \equiv \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 \\ \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{array} \right),$$



$$\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ \boxed{\lambda_1} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Nous avons supposé que les différents  $\varepsilon_i$  étaient égaux à 1, mais cela ne change en rien les conclusions que nous donnons ci-après. Dans le cas où l'équation déterminantielle a une racine triple, la connaissance du rang de la matrice associée à la quadrique correspondante suffit à distinguer les trois cas possibles. Par des considérations algébriques simples, il est immédiat de constater que cette racine triple est rationnelle et donc que le calcul du rang de la matrice de la quadrique associée à cette racine ne pose pas de problème. Il n'est cependant pas possible de généraliser.

La remarque 7.8 s'illustre parfaitement en appliquant notre théorème. Si à la racine quadruple correspondent deux blocs de Jordan réels  $2 \times 2$  (caractéristique de Segre [(22)]), la réduction simultanée donne les deux quadriques de la forme suivante :

$$\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{\lambda} & 0 & 0 \\ \boxed{\lambda} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & \boxed{\lambda} \\ 0 & 0 & \boxed{\lambda} & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

La matrice de la quadrique singulière du faisceau, de rang 2, est, dans ce repère :

$$\mathcal{Q} - \lambda\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si à la racine quadruple correspond un bloc de Jordan réel  $3 \times 3$  et un autre  $1 \times 1$  (caractéristique de Segre [(31)]), la réduction simultanée donne les deux quadriques de la forme suivante :

$$\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} \equiv \begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{\lambda} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{\lambda} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{\lambda} & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\lambda} \end{pmatrix}$$

La matrice de la quadrique singulière du faisceau, de rang 2, est, dans ce repère :

$$\mathcal{Q} - \lambda\mathcal{P} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme nous l'avons déjà vu dans la section 7.2, les deux réductions simultanées que nous venons d'exposer ne correspondent ni aux mêmes faisceaux, ni aux mêmes courbes de base. La forme des blocs de Jordan constitue l'invariant permettant de distinguer les différents cas possibles d'intersection. Cela reste cependant un invariant difficile à déterminer, comme nous pouvons le voir en appliquant les résultats de la section suivante.

### 3.2 Lien entre la caractéristique de Segre et le théorème d'Uhlig

Nous pouvons tout d'abord remarquer que la réduction simultanée de deux formes quadratiques peut tout à fait se construire dans l'espace complexe. L'emploi de transformations congruentes complexes permet alors de séparer les racines complexes conjuguées et ne plus avoir de blocs de Jordan complexes (et à coefficients réels) qui apparaissent dans la réduction sur le corps des réels. Les seuls blocs de Jordan apparaissant dans la réduction sur le corps des complexes ont la même forme que les blocs de Jordan réels introduits précédemment, mais avec les  $\lambda_i$  pouvant appartenir à  $\mathbb{C}$ .

Quand une racine  $\lambda_i$  est réelle les blocs de Jordan qui lui sont associés dans la réduction complexe et dans la réduction réelle sont les mêmes.

Quand une racine  $\lambda_i$  est complexe, son étude se confond avec celle de sa conjuguée  $\bar{\lambda}_i$  qui est aussi une racine de l'équation déterminantielle. Dans la réduction simultanée dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , il est clair que le coefficient invariant  $t_i$  associé à  $\lambda_i$  est égal à celui associé à  $\bar{\lambda}_i$  et que les blocs de Jordan qui sont associés à  $\lambda_i$  et  $\bar{\lambda}_i$  sont de même taille. Le passage à  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  se fait alors en combinant les racines complexes conjuguées et leurs blocs de Jordan pour obtenir les blocs de Jordan complexes définis dans la réduction réelle. Ces blocs sont de taille  $2e_i^k$ . Le nombre de ces blocs est  $t_i$  mais la somme de leurs tailles est  $2m_i$ .

### 3.3 Illustration de l'application du théorème 7.14

Montrons un exemple simple de cette diagonalisation simultanée. Soient les deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  d'équation  $-7x^2 + 21y^2 - 2z^2 + 42yw + 21w^2 = 0$ , un hyperboloïde à une nappe, et  $Q_{\mathcal{Q}}$  d'équation  $3x^2 - 13y^2 - 2z^2 - 34yw - 17w^2 = 0$ , un cône. L'équation déterminantielle est :  $51\lambda^4 - 131\lambda^3 - 35\lambda^2 + 147\lambda$ . Ses racines sont  $\lambda \in \{-1, 0, 21/17, 7/3\}$ . Il y a donc 4 racines réelles simples. Le théorème 7.14 nous prédit qu'en prenant dans le faisceau deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  dont les matrices sont de rang 4, il est possible de déterminer un repère dans lequel les matrices de ces deux quadriques sont de la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\lambda_4 \end{pmatrix}$$

où  $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, 4$ , et les  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  sont les racines « affines » de l'équation déterminantielle. Après calculs, la transformation :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$

envoie les deux quadriques dans un repère où leurs matrices sont de la forme :

$${}^tT \cdot \mathcal{P} \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad {}^tT \cdot \mathcal{Q} \cdot T = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{21}{17} \end{pmatrix}.$$

La suite du calcul de l'intersection s'avère alors beaucoup plus simple et il est aisé de déterminer les caractéristiques géométriques de la courbe de base du faisceau.

L'étude détaillée de la courbe de base du faisceau dans chacun des cas en utilisant le théorème 7.14 sera faite au chapitre 9 pour les faisceaux réguliers, au chapitre 10 pour les autres faisceaux.

### 3.4 Faisceaux dégénérés

Étudions maintenant le cas des faisceaux dégénérés pour lequel nous ne pouvons appliquer directement le théorème 7.14. Revenons au problème des faisceaux dégénérés. Il est clair que la méthode proposée précédemment ne peut s'appliquer dans ce cas. En effet, la matrice  $\mathcal{P}$  (du théorème 7.14) est nécessairement une quadrique de rang 4. Or, nous avons déjà montré que les faisceaux dégénérés ne contenaient pas de quadriques dont les matrices étaient de rang maximum. Nous considérons deux cas, soit les quadriques de départ n'ont pas de points singuliers en commun, soit elles en ont.

#### 3.4.1 Faisceaux dont les quadriques ont au moins un point singulier commun

Ce cas est relativement facile à étudier, puisque nous pouvons nous ramener au cas de l'intersection de deux coniques dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  comme nous le montre le théorème 7.10.

Commençons par envoyer, sous l'effet d'une translation, le point singulier commun à toutes les quadriques dans un repère où ses coordonnées sont  $(0, 0, 0, 1)$ . Dans ce repère, les équations des quadriques du faisceau dépendent uniquement de  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et pas de  $w$ . Il ne reste alors qu'à calculer une forme paramétrée de l'intersection des coniques de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  définies par les sous-matrices supérieures gauches des matrices associées aux quadriques de notre faisceau. Il suffit d'appliquer le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques dans la dimension immédiatement inférieure. Cette intersection est généralement constituée d'un ensemble d'au plus quatre points (et dans quelques cas d'intersections dégénérées entre coniques). Chacun de ces points, associé au sommet commun à tous les cônes du faisceau, engendre chacune des droites constituant la courbe de base du faisceau de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  (dans le cas où l'intersection de deux coniques de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  contient une droite, en associant cette droite au point singulier commun aux quadriques du faisceau et ayant permis de se ramener à un calcul dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , nous définissons un plan qui est contenu dans l'intersection des deux quadriques). L'étude détaillée de ces faisceaux dégénérés sera faite au chapitre 10.

#### 3.4.2 Aucun point singulier commun aux quadriques du faisceau

Quelques résultats intermédiaires sont nécessaires pour conclure. Étant donné que la détermination de la courbe de base ne peut pas se faire en appliquant les résultats déjà énoncés, nous devons montrer qu'il n'existe qu'une classe de faisceau correspondant à ce cas. Commençons par nous assurer de la présence de cônes dans le faisceau.

**Lemme 7.15 (Existence de quadriques de rang 3)** *Soit un faisceau dégénéré dont les quadriques n'ont pas de point singulier en commun. Alors le faisceau contient des quadriques de rang 3.*

**Démonstration :** Supposons que le faisceau ne contienne que des quadriques dont les matrices soient de rang 1. Soit deux quadriques engendrant le faisceau, alors il existe un repère où les deux matrices des quadriques sont diagonales. En effet, nous pouvons en réduire une de telle sorte que son équation implicite soit  $x^2 = 0$ . À ce moment, nous pouvons réaliser une réduction de Gauss sur l'autre quadrique, en commençant la réduction par les autres variables  $y$ ,  $z$  et  $w$ .

Nous pouvons alors supposer que l'équation de l'autre quadrique est  $x^2 = 0$  ou  $y^2 = 0$ . Dans les deux cas les quadriques ont des points singuliers communs, ce qui contredit l'hypothèse.

Nous pouvons faire de même si le faisceau ne contient que des quadriques dont les matrices sont de rang inférieur à trois. Soit  $Q_{\mathcal{P}}$  une quadrique du faisceau dont la matrice est de rang 2. L'équation de  $Q_{\mathcal{P}}$  peut s'écrire dans un certain repère  $ax^2 + by^2 = 0$ . Reste à réduire une autre quadrique  $Q_{\mathcal{Q}}$  du faisceau en commençant la réduction par les variables  $z$  et  $w$ . Alors, après réduction, soit l'équation de  $Q_{\mathcal{Q}}$  dépend des variables  $z$  et  $w$ , soit uniquement de la variable  $z$  mais pas  $w$ , et éventuellement  $x$  et  $y$ . Dans le premier cas,  $\mathcal{P} + \mathcal{Q}$  est une matrice de rang 4, ce qui contredit l'hypothèse de faisceau dégénéré (l'équation déterminantielle ne serait pas identiquement nulle). Dans le deuxième cas, le point  $(0, 0, 0, 1)$  est un point singulier pour les deux quadriques, ce qui contredit l'hypothèse du lemme.

Le faisceau contient donc au moins une quadrique dont la matrice est de rang 3. En jouant sur les paramètres des quadriques dans le faisceau, il est alors évident qu'il existe une infinité de quadriques de rang 3 dans le faisceau.  $\square$

Montrons maintenant que les points singuliers des cônes du faisceau appartiennent à toutes les quadriques du faisceau (ce qui ne signifie pas qu'ils soient des points singuliers pour toutes les quadriques du faisceau).

**Lemme 7.16** *Soit un faisceau dégénéré dont les quadriques n'ont pas de point singulier en commun. Alors le point singulier de toute quadrique de rang 3 du faisceau appartient à la courbe d'intersection définie par le faisceau.*

**Démonstration :** Soit une quadrique de rang 3 du faisceau. Si nous réduisons l'équation de cette quadrique pour qu'elle soit de la forme  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$  alors, dans ce repère, le coefficient associé à  $w^2$  est égal à zéro pour toutes les autres quadriques du faisceau, sinon il y aurait des quadriques de rang 4 dans le faisceau. Nous pouvons alors conclure que le point  $(0, 0, 0, 1)$  appartient à toutes les quadriques du faisceau. Il se trouve que c'est aussi le point singulier de notre quadrique de rang 3, ce qui termine la démonstration.  $\square$

**Théorème 7.17** *Soit un faisceau dégénéré dont les quadriques n'ont pas de point singulier en commun. Alors il existe un changement de repère rationnel tel que, dans le nouveau repère, le faisceau est engendré par les quadriques d'équations  $xw$  et  $xz - y^2$ .*

**Démonstration :** Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques de rang 3 du faisceau (lemme 7.15). Soit  $p_1$  un point singulier de  $Q_{\mathcal{P}}$  appartenant à  $Q_{\mathcal{Q}}$ ,  $p_2$  un point singulier de  $Q_{\mathcal{Q}}$  appartenant à  $Q_{\mathcal{P}}$ .  $p_1$  et  $p_2$  existent en vertu du lemme 7.16. Comme  $p_1$  est le point singulier de  $Q_{\mathcal{P}}$ , la droite  $p_1p_2$  est entièrement contenue dans  $Q_{\mathcal{P}}$ . De même elle est entièrement contenue dans  $Q_{\mathcal{Q}}$ . Elle est donc contenue dans leur intersection.

Soit  $Q_{\mathcal{R}}$  la quadrique dont la matrice est  $\mathcal{R} = \mathcal{P} + \mathcal{Q}$ .  $Q_{\mathcal{R}}$  passe par les points  $p_1$  et  $p_2$ . Elle n'est pas singulière en ces points (dans le cas contraire, toutes les quadriques du faisceau seraient singulières en ce point), le plan tangent à  $Q_{\mathcal{P}}$  en  $p_2$  est le même que le plan tangent à  $Q_{\mathcal{Q}}$  en  $p_1$ . Si nous nous plaçons dans un repère où  $p_1$  et  $p_2$  ont pour coordonnées  $(0, 0, 0, 1)$  et  $(0, 0, 1, 0)$ , dans ce repère,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont de la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Si nous ramenons le plan tangent  $P$  dans le repère où il a pour équation  $x = 0$ , alors dans ce repère, les équations de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deviennent  $xz + q_1(x, y)$  et  $xw + q_2(x, y)$  (avec  $q_1$  et  $q_2$  des formes quadratiques bivariées) car  $Q_{\mathcal{P}}$  a  $P$  pour plan tangent en  $p_2$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  a  $P$  pour plan tangent en  $p_1$ . Par un nouveau changement de repère, nous pouvons incorporer le terme en  $x$  dans les termes en  $z$  et  $w$  (comme avec une réduction de Gauss). Nous obtenons alors les équations de la forme  $xz + ay^2$  et  $xw + by^2$  pour  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$ . En considérant la quadrique  $xz + xw = 0$  combinaison linéaire des deux précédentes, et si nous changeons  $w + z$  en  $w$ , et quitte ensuite à changer  $z$  en  $-z$ , nous obtenons les deux quadriques suivantes :

$$\begin{cases} xw = 0, \\ xz - y^2 = 0 \end{cases}$$

□

Il suffit ensuite de déterminer la courbe d'intersection de ces deux quadriques. Elle est constituée de la droite double  $x = y^2 = 0$  et de la conique définie par  $w = xz + y^2 = 0$ . La droite et la conique se coupent au point  $(0, 0, 1, 0)$ .

## 4 Vers l'élaboration d'un algorithme

En l'état de nos connaissances, nous pourrions envisager un premier algorithme. Il consisterait à calculer les racines de l'équation déterminantielle, puis à déterminer la caractéristique de Segre du faisceau. Cette étape pourrait se faire en calculant pour chaque racine multiple, le pgcd des mineurs de la matrice d'une quadrique quelconque du faisceau (c'est-à-dire dépendant d'un paramètre). Ensuite nous pourrions prédire la forme des blocs de Jordan dans la réduction simultanée de deux formes quadratiques du faisceau. Il resterait alors à trouver une transformation congruente qui envoie deux quadriques du faisceau dans un repère où leur matrice aurait la forme requise. Cependant il n'est pas envisageable de construire notre algorithme en se basant sur ces propriétés car la recherche du pgcd des mineurs est trop longue et la transformation congruente que nous calculerions dépendrait des racines de l'équation déterminantielle qui elle-même aurait des coefficients fonction de plusieurs nombres irrationnels. De plus la détermination de cette transformation se ferait par la résolution d'un système de 20 équations à 16 inconnues, chaque équation étant de degré 2, ce qu'il n'est pas envisageable d'implanter dans le cadre de notre algorithme. Le travail n'est donc pas terminé (en dehors des problèmes liés au paramétrage des quadriques dans l'espace projectif), et outre de devoir étudier plus précisément chacun des 47 cas possibles, nous devons nous pencher sur les problèmes de complexité algébrique liés à notre algorithme.

Nous allons séparer notre travail en trois parties. La première, présentée dans le prochain chapitre, consiste à étudier les méthodes mises en place pour améliorer la complexité algébrique. La deuxième partie sera consacrée à l'étude des faisceaux réguliers et à l'élaboration de l'algorithme correspondant, elle se fera dans le chapitre 9. La troisième partie contient l'étude des 46 cas associés aux faisceaux singuliers et dégénérés, et à l'élaboration des algorithmes correspondants. Elle se fera dans les chapitres 10 et 11. Cette séparation peut paraître arbitraire et un peu disproportionnée. La principale raison en est que l'algorithme associé aux faisceaux réguliers peut servir de maquette aux autres cas. En effet, hormis quelques cas où il ne peut être facilement adapté, le premier algorithme peut s'appliquer directement et renvoyer une réponse correcte, seule la complexité algébrique qui en résulte n'est pas satisfaisante.



# Chapitre 8

## Résultats liés à la complexité algébrique

Nous avons étudié dans le chapitre précédent la géométrie du faisceau de deux quadriques. En l'état de nos connaissances, en décrivant la réduction simultanée de deux formes quadratiques, il ne nous reste plus qu'à étudier au coup par coup chaque cas particulier pour conclure. Le lecteur aura pu remarquer que dans le chapitre précédent, aucune mention n'a été faite des problèmes calculatoires ou d'implantation qui pourraient survenir. Nous nous sommes attachés à décrire les critères de distinction entre les différentes classes de faisceaux, mais, par exemple, nous n'avons jamais mentionné quels paramétrages pourraient être utilisés pour faire les calculs. Nous n'avons encore pas pris en compte les critiques que nous avons formulé à l'encontre de la méthode de J. Levin. L'objet du présent chapitre est d'introduire les progrès algorithmiques que nous avons réalisés pour réduire la complexité algébrique de notre algorithme et pouvoir l'implanter efficacement. Nous commençons par introduire les hypothèses de départ de notre algorithme et la manière dont nous allons mesurer nos progrès. La section suivante est consacrée à la présentation de l'algorithme de décomposition en carrés de Gauss permettant de trouver une équation canonique d'une quadrique en n'utilisant que des transformations congruentes à coefficients rationnels. Nous présentons ensuite de nouveaux paramétrages des quadriques projectives (régliées) ayant la propriété d'être linéaires en un de leurs paramètres et contenant le moins possible de racines carrées dans leur expression, dans le cas le pire.

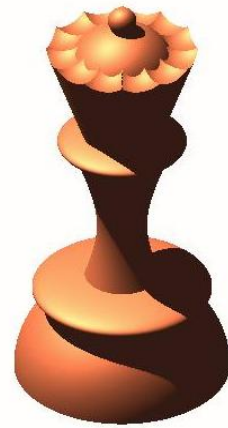
### 1 Intersection et complexité algébrique

Nous abordons dans cette section les problèmes liés à une implantation efficace en nous tournant vers la complexité algébrique de notre algorithme. Pour les faisceaux réguliers l'expression du paramétrage obtenu par J. Levin contient la racine carrée d'un polynôme. La courbe de base du faisceau est de genre 1 (c'est-à-dire elliptique) et ne peut être paramétrée rationnellement. Le degré des polynômes apparaissant dans cette expression est satisfaisant dans le sens où il ne dépasse jamais le degré de la courbe. Nous dirons que la forme du paramétrage obtenue par J. Levin est optimale. Nous pouvons travailler à simplifier l'expression du vecteur paramétré de la courbe de base en effectuant des changements linéaires du paramètre projectif  $(u, v)$  pour éliminer un des deux termes  $u$  ou  $v$  dans l'expression de tel ou tel polynôme, mais fondamentalement, cela ne modifiera pas la forme elle-même, la racine carrée d'un polynôme sera toujours présente, le degré des polynômes toujours le même. En paramétrant un cône du faisceau pour

définir l'équation aux paramètres, nous pouvons réduire le degré des polynômes apparaissant dans l'expression du paramétrage. Malheureusement les coefficients de ces cônes dépendent des racines de l'équation déterminantielle, un polynôme de degré 4. Il n'est donc avantageux d'utiliser ces cônes que si nous sommes sûrs que la racine de l'équation déterminantielle qui leur est associée est rationnelle. L'apparition récurrentes de nombres algébriques dans les coefficients que nous manipulons est un problème que nous avons déjà mis en avant au chapitre 5 lors de l'analyse de l'algorithme de J. Levin. Pour éviter d'introduire trop de nombres algébriques au cours de notre algorithme nous devons faire des choix comme celui que nous venons d'exposer et employer d'autres techniques que celles utilisées par J. Levin.

Commençons par redonner les hypothèses de départ de notre algorithme. Nous supposons que les quadriques que nous recevons en entrée nous sont données sous forme d'équations implicites à coefficients entiers. Cette hypothèse est raisonnable dans le sens où, généralement, soit les objets que nous manipulons proviennent d'une modélisation réalisée à l'aide d'un logiciel de CAO, logiciel dans lequel les nombres manipulés sont généralement des nombres flottants à précision finie ou des rationnels ; soit les objets que nous manipulons sont issus de l'approximation d'une surface réelle, approximation pour laquelle nous sommes en droit de n'autoriser encore une fois que les nombres rationnels ou flottants à précision finie.

Ainsi, par exemple, nous disposons d'un jeu d'échec virtuel que nous exploitons lorsque nous voulons mettre à l'épreuve notre implantation sur des données réelles. Ce jeu comporte entre autres une reine dont le modèle CSG contient un ensemble de sphères qui sont disposées sur le haut de la pièce de manière régulière selon un angle de  $\pi/6$  radians. Les coefficients des équations implicites de ces sphères ne sont donc pas rationnels mais algébriques puisqu'ils dépendent du sinus et du cosinus de cet angle. Nous considérons que le modèle approché que nous traitons est exact même si la topologie du modèle a changé. Par contre, comme notre algorithme ne fait que du calcul exact, nous retournons la topologie exacte du modèle que traitons, sans la modifier.



L'intérêt d'utiliser des coefficients entiers est que l'équation déterminantielle est à coefficients entiers, et donc que la détection des faisceaux réguliers, singuliers ou dégénérés se fait de manière exacte. Si nous utilisons des nombres flottants en précision finie ou une arithmétique par intervalles, il serait beaucoup plus difficile de savoir à quel type de faisceau singulier ou dégénéré nous avons à faire.

Pour mesurer les progrès que nous avons réalisés, nous allons utiliser le degré de l'extension dans laquelle sont définis les coefficients apparaissant dans les expressions que nous manipulons aux différentes étapes de l'algorithme. Nous étions arrivés à la conclusion, dans le chapitre 5 consacré à la méthode de J. Levin, que, dans le cas le pire, le degré de cette extension était 48. Nous allons montrer dans la suite de ce document, que nous pouvons limiter ce degré à 4 et prouver que ce résultat est optimal.

## 2 Méthode de Gauss, transformations congruentes

Nous ne donnons pas ici un nouveau résultat, mais présentons la méthode de Gauss qui est significative de la démarche à adopter dans l'élaboration d'algorithmes géométriques. Pour diagonaliser la matrice d'une quadrique afin d'en déterminer en déterminer sa signature, ou pouvoir



en exhiber un paramétrage, nous avons utilisé les vecteurs et valeurs propres de cette matrice. En faisant cela, nous n'avons retenu que le caractère matriciel de la quadrique en oubliant ses propriétés géométriques. Nous avons été obligés de normaliser les vecteurs propres, pour que la matrice de passage (ou de transformation) soit unitaire (ou orthogonale  $\Leftrightarrow M^{-1} = {}^tM$ ). Cette opération nous assure d'obtenir une matrice de changement de repère. En considérant les pivots de la matrice, nous pouvons directement rechercher un changement de repère à coefficients rationnels permettant d'obtenir une équation canonique de la quadrique. La méthode de Gauss permet de décomposer en carrés à coefficients rationnels une forme quadratique, c'est-à-dire l'écrire sous forme d'une somme et d'une différence de carrés.

Soit  $Q$  une forme quadratique telle que

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \prod_{j=1, j \neq i}^n \alpha_{ij} x_i x_j.$$

La construction de la forme décomposée se fait par récurrence sur la dimension de l'espace projectif dans lequel est définie la quadrique.

Au rang 1, toute forme quadratique à coefficient rationnel en une variable  $Q(x) = \alpha x^2$  est sous forme de carré, donc la propriété est vérifiée au rang 1.

Supposons que toute forme quadratique à coefficients rationnels en  $n-1$  variables est décomposable en sommes de carrés de formes linéaires indépendantes. Soit  $Q$  une forme quadratique à coefficients rationnels en  $n$  variables. Il y a alors deux cas possibles :

Si  $Q$  est de la forme  $\alpha_1 x_1^2 + 2x_1 f(x_2, \dots, x_n) + R(x_2, \dots, x_n)$ , où  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $f$  une forme linéaire et  $R$  une forme quadratique ;  $Q$  peut alors s'écrire :

$$Q = \alpha_1 \left( x_1 + \frac{f}{\alpha_1} \right)^2 - \frac{f^2}{\alpha_1} + R = \alpha_1 \left( x_1 + \frac{f}{\alpha_1} \right)^2 + S,$$

où  $S$  est une forme quadratique des variables  $x_2, \dots, x_n$ . Par hypothèse de récurrence,  $S$  est décomposable en carrés,  $x_1$  étant indépendant des  $x_2, \dots, x_n$ ,  $Q$  est aussi décomposable en carrés à coefficients rationnels.

Si  $Q$  ne contient pas de terme  $x_1^2$ , ni de terme en  $x_2^2$  (sinon il suffit d'échanger  $x_1$  et  $x_2$ ), alors si  $Q$  contient un terme  $\alpha x_1 x_2$ , avec  $\alpha \neq 0$ ,  $Q$  peut s'écrire :

$$Q = \alpha x_1 x_2 + x_1 f(x_3, \dots, x_n) + x_2 g(x_3, \dots, x_n) + h(x_3, \dots, x_n),$$

où  $f$  et  $g$  sont des formes linéaires, et  $h$  une forme quadratique.  $Q$  peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} Q &= \alpha \left[ \left( x_1 + \frac{g}{\alpha} \right) \left( x_2 + \frac{f}{\alpha} \right) - \frac{fg}{\alpha^2} \right] + h \\ &= \frac{\alpha}{4} \left[ \left( x_1 + x_2 + \frac{f+g}{\alpha} \right)^2 - \left( x_1 - x_2 + \frac{f-g}{\alpha} \right)^2 \right] + h - \frac{fg}{\alpha}. \end{aligned}$$

$h - \frac{fg}{\alpha}$  est une forme quadratique des variables  $x_3, \dots, x_n$ , donc décomposable en carrés, ce qui finit la récurrence.

Pour pouvoir assurer que le nombre de carrés ne varie pas selon l'ordre dans lequel sont faits les calculs, nous utilisons la loi de Sylvester.

**Théorème 8.1 (Sylvester [Syl152])** *Quand une forme quadratique  $Q$  est réduite par une transformation linéaire non singulière en somme de carrés, le nombre  $p^+$  (respectivement  $p^-$ ) de carrés ayant un coefficient positif (respectivement négatif) apparaissant dans la réduction est un invariant de  $Q$ , et ne dépend pas de la méthode de réduction.*

Nous avons donc un algorithme qui produit une matrice de transformation à coefficients rationnels. L'adaptation de cet algorithme pour qu'il produise une transformation à coefficients entiers est assez simple. L'algorithme 8.1 montre comment opérer si la matrice de départ est à coefficients entiers.

**entrée :**  $M$  une matrice carrée en  $n$  variables représentant la forme quadratique.  
**sortie :**  $M'$  la matrice carrée diagonalisée,  $[s_+, s_-]$  la signature,  $T$  la matrice de transformation telle que  $M' = {}^tT \cdot M \cdot T$

$M' = M : i = 1 :$   
**tant que**  $i < n$  **faire**  
  **si**  $M'[i, i] \neq 0$  **alors**  
     $gcd = pgcd(M'[i, j], j = i, \dots, n) : U = \frac{M'[i, i]}{gcd} \cdot I_n :$   
    **pour**  $j$  de  $i + 1$  à  $n$  **faire**  
       $U[i, j] = -M'[i, j]/gcd :$   
    **fin pour**  
     $T = T \cdot U : M' = \frac{gcd}{M'[i, i]} \cdot {}^tU \cdot M' \cdot U : i = i + 1 :$   
  **sinon**  
     $j = i :$   
    **tant que**  $j < n$  et  $op = 0$  **faire**  
       $j = j + 1 :$   
      **si**  $M'[j, j] \neq 0$  **alors**  
         $op = 1 :$   
        **sinon si**  $M'[i, j] \neq 0$  **alors**  
           $op = 2 :$   
        **fin si**  
      **fin tant que**  
      **si**  $op = 1$  **alors**  
        on échange les 2 axes  $i$  et  $j$   
      **sinon si**  $op = 2$  **alors**  
         $U = I_n : U[i, i] = 1 : U[i, j] = 1 : U[j, i] = -1 : U[j, j] = 1 :$   
         $M' = {}^tU \cdot M' \cdot U : T = T \cdot U :$   
      **sinon**  
         $i = i + 1 :$   
      **fin si**  
    **fin si**  
  **fin tant que**  
**renvoyer**  $M'$  et  $T$

**Algorithme 8.1:** Algorithme de Gauss pour des matrices à coefficients entiers

Il faut noter que si la quadrique que nous considérons est d'inertie  $(2, 2)$ , et que nous avons cette information avant de calculer par la méthode de Gauss une transformation congruente l'envoyant dans un repère où sa matrice est diagonale, il nous est possible de pré-calculer la transformation. Pour les quadriques dont la matrice est de rang inférieur, la situation est plus délicate du fait de l'apparition de zéros sur la diagonale, ce qui nécessite de tester une ou plusieurs conditions, et donc ne permet pas une formule toute faite de calcul.

## 2.1 Progrès réalisés

Le fait d'utiliser l'algorithme de Gauss pour trouver une équation canonique de la quadrique nous permet de diviser par quatre le degré de l'extension de  $\mathbb{Q}$  à laquelle appartient les coefficients que nous manipulons dans les étapes suivantes de l'algorithme. En effet, dans l'algorithme de J. Levin nous utilisons les vecteurs et valeurs propres de la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche de la matrice de la quadrique singulière sélectionnée. Les valeurs propres de cette sous-matrice sont des racines d'un polynôme de degré 2 (une des valeurs propres est nulle puisque la quadrique est singulière). La normalisation des vecteurs propres induit l'introduction d'un autre niveau de racine carrée. Par la simple application d'une transformation rationnelle nous passons d'une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré 48 à une extension de degré 12.

## 3 Paramétrages et équation aux paramètres

En nous plaçant dans l'espace projectif, notre première exigence a été d'utiliser des paramétrages ayant les mêmes propriétés que ceux que nous utilisons dans le cas affine, c'est-à-dire qui soient linéaires en l'un des paramètres. Nous n'avons pas trouvé de tels paramétrages dans la littérature. Par exemple, les paramétrages proposés par C. Hoffmann [Hof89] sont de la forme (le paramétrage des cônes ne tient pas compte des points dans le plan à l'infini) :

| signature | équation                    | paramétrage  |
|-----------|-----------------------------|--|
| (3, 1)    | $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0$ | $(r^2 - s^2 - t^2, 2rs, 2rt, r^2 + s^2 + t^2), (r, s, t) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$     |
| (2, 2)    | $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$ | $(r^2 - s^2 + t^2, 2rs, 2rt, r^2 + s^2 - t^2), (r, s, t) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$     |
| (2, 1)    | $x^2 + y^2 - z^2 = 0$       | $(r^2 - s^2 + t^2 - 2rt, 2rt - r^2 - s^2 - t^2, 2sr - 2st, 1), (r, s, t) \in \mathbb{R}^3$ |

De même, les paramétrages proposés par W. Wang, B. Joe et R. Goldman [WJG97] sont toujours de degré 2 en chaque paramètre puisqu'ils recherchent un paramétrage rationnel quadratique des quadriques. Dans les articles de W. Wang, B. Joe et C. Tu [WGT03] et de W. Wang, B. Joe et R. Goldman [WJG02] les paramétrages utilisés ont la même particularité que nous ne voulons pas voir apparaître dans notre méthode. Cette propriété de linéarité par rapport à un paramètre est essentielle si nous voulons que l'équation aux paramètres soit de degré 2 en l'une de ses variables, ce qui explique notre volonté de déterminer de nouveaux paramétrages pour les quadriques projectives.

Nous présentons nos paramétrages dans la section 3.2. Pour résoudre certains problèmes que nous ne justifierons qu'après avoir présenté nos paramétrages, nous devons introduire un nouvel espace « presque » projectif.

### 3.1 Espace quasi-projectif

La définition 6.1 de l'espace projectif que nous avons donnée est basée sur la notion de relation d'équivalence. En changeant cette relation d'équivalence, nous conservons les propriétés des espaces projectifs et pouvons mieux définir nos paramétrages.

**Définition 8.2 (Espace quasi-projectif)** L'espace quasi-projectif  $\mathbb{P}^{*n}(\mathbb{R})$  est le quotient de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  par la relation d'équivalence  $\sim_R$  telle que  $\forall X = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall Y = (y_1, \dots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  :

$$X \sim_R Y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tel que } (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n, \lambda^2 y_{n+1}).$$

Ici, ce ne sont plus les droites vectorielles de  $\mathbb{R}^{n+1}$  qui sont représentées, mais les « paraboles vectorielles » (avec dans  $\mathbb{R}^2$  deux paraboles particulières, l'axe des abscisses et celui des ordonnées). L'intérêt théorique de cette définition est assez limité, mais elle nous permettra de définir correctement les paramétrages des cônes projectifs.

### 3.2 Nouveaux paramétrages

Nous donnons dans le tableau 8.a des paramétrages des quadriques réglées de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  que nous avons déterminés.

| signature | équation canonique ( $a, b, c, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) | paramétrage $X = (x, y, z, w)$  |
|-----------|--|---|
| (4, 0)    | $ax^2 + by^2 + cz^2 + dw^2 = 0$                                    | $\emptyset$   |
| (2, 2)    | $ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0$                                    | $X = \left( \frac{ut+avs}{a}, \frac{us-bvt}{b}, \frac{ut-avs}{\sqrt{ac}}, \frac{us+bvt}{\sqrt{bd}} \right),$<br>$(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ |
| (3, 0)    | $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$   | $X = (0, 0, 0, 1)$  |
| (2, 1)    | $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$   | $X = \left( uv, \frac{u^2-abv^2}{2b}, \frac{u^2+abv^2}{2\sqrt{bc}}, s \right),$<br>$(u, v, s) \in \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$                                |
| (2, 0)    | $ax^2 + by^2 = 0$  | $X = (0, 0, u, v), (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$   |
| (1, 1)    | $ax^2 - by^2 = 0$  | $X_1 = \left( u, \frac{\sqrt{ab}}{b}u, v, s \right), X_2 = \left( u, -\frac{\sqrt{ab}}{b}u, v, s \right),$<br>$(u, v, s) \in \mathbb{P}^2$                    |
| (1, 0)    | $ax^2 = 0$   | $X = (0, u, v, s), (u, v, s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  |

TAB. 8.a – Paramétrages optimaux des quadriques projectives dont l'inertie est différente de (3, 1).

Justifions maintenant l'emploi de l'espace quasi-projectif pour le paramètre des cônes. Il n'aurait pas lieu d'être si le cône ne possédait pas de point singulier. Si nous utilisons  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  comme ensemble de définition pour nos paramètres, nous aurions le problème suivant : dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , le point  $(u, v, s)$  peut aussi être représenté par le triplet  $(-u, -v, -s)$ , mais avec notre paramétrage (qui n'est pas homogène), ces deux représentations d'un même point de  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  définiraient deux points différents de la surface :

$$(u, v, s) \mapsto \left( uv, \frac{u^2 - abv^2}{2b}, \frac{u^2 + abv^2}{2\sqrt{bc}}, s \right) \text{ et } (-u, -v, -s) \mapsto \left( uv, \frac{u^2 - abv^2}{2b}, \frac{u^2 + abv^2}{2\sqrt{bc}}, -s \right).$$

Le paramétrage que nous définirions n'aurait pas de sens. Si au contraire nous définissions notre paramétrage par la relation

$$(u, v, s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \mapsto \left( uv, \frac{u^2 - abv^2}{2b}, \frac{u^2 + abv^2}{2\sqrt{bc}}, s^2 \right),$$

le paramétrage serait homogène, mais nous n'aurions plus le résultat de J. Levin puisque ce paramétrage ne serait plus linéaire en l'un des paramètres et définirait une équation aux paramètres de degré 4 en chacune des variables.

Ce problème vient du fait que nous ne pouvons paramétrer deux fois le sommet du cône. Considérons le paramétrage usuel d'une surface réglée utilisant ses droites, appliqué au cas du cône. En utilisant un paramètre affine, nous obtenons  $X(u, v) = b(u) + cv$ , où  $b(u)$  est un vecteur de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  paramétré par  $u$ ,  $c$  un vecteur de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , et le paramètre  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ . Nous pouvons

homogénéiser la partie  $b(u)$  qui correspond au paramétrage d'une conique, mais il n'est alors plus possible d'homogénéiser la partie  $cv$  du paramétrage sans que le degré de l'équation aux paramètres qui ne résultera ne passe de 2 à 4.

Nous devons aussi nous assurer que ces paramétrages ont un sens et définissent bien les surfaces correspondantes (ni plus ni moins). Il nous faut montrer que ce sont des paramétrages propres, c'est-à-dire qu'il existe une correspondance bijective entre le domaine de définition des paramètres et les points de la quadrique. Une définition plus formelle de la notion de paramétrage propre, tenant compte du cas des quadriques  $(1, 1)$  (il y a deux vecteurs paramétrés qui définissent la surface), ainsi que la démonstration que tous les paramétrages que nous définissons sont propres est donnée en annexe A. Dans le cas des quadriques d'inertie  $(1, 1)$ , il faut que la correspondance bijective soit vérifiée pour chacune des composantes algébriques de la surface, ce qui signifie que nous paramétrons séparément chacun des deux plans et que donc la droite singulière de la paire de plans est paramétrée deux fois.

Ces paramétrages répondent à deux conditions : ils sont linéaires en au moins un de leurs paramètres, comme nous l'avons déjà indiqué, et de plus ils contiennent le moins possible de racines carrées de coefficients entiers. Ce souci apparaît peu souvent dans la littérature [Hof89, WJG02, WGT03] puisque, généralement, les paramétrages sont donnés en fonction de la signature de la quadrique, avec une équation où tous les coefficients sont 1, 0 ou  $-1$ . Cela cache le fait que pour se placer dans un repère où la quadrique est de cette forme, il est nécessaire d'utiliser une transformation à coefficients non rationnels. Le problème du nombre de racines carrées apparaissant dans l'expression du paramétrage n'est que déplacé, il n'est pas résolu.

### 3.3 Optimalité des paramétrages

Nous montrons dans cette section, que nos paramétrages sont optimaux dans le cas le pire, en terme du degré de l'extension à laquelle appartiennent les coefficients du paramétrage ; nous donnons aussi les conditions nécessaires dans les autres cas pour obtenir un paramétrage contenant moins de racines carrées. Les résultats présentés ici sont dûs à Daniel Lazard. Ces résultats nous ont permis d'avancer significativement dans la résolution de notre problème, il convient donc de remercier Daniel Lazard encore une fois ici.

**Théorème 8.3 (Optimalité)** *Dans l'ensemble des paramétrages linéaires en un des paramètres, les paramétrages du tableau 8.a sont optimaux, dans le cas le pire, en le degré de l'extension de  $\mathbb{Q}$  sur laquelle ils sont définis.*

Le cas des quadriques d'inertie  $(3, 0)$ ,  $(2, 0)$  et  $(1, 0)$  ne nécessite pas de démonstration puisque leurs paramétrages ne contiennent que des coefficients rationnels, le degré de l'extension de  $\mathbb{Q}$  à laquelle ils appartiennent est trivialement égal à 1. Étudions l'optimalité de chacun des paramétrages du tableau 8.a. Commençons par le cas des quadriques d'inertie  $(1, 1)$ . La preuve d'optimalité nécessite le lemme suivant.

**Lemme 8.4 (Point rationnel d'une paire de plans)** *Soit une quadrique de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $ax^2 - by^2 = 0$  ( $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ). Cette quadrique contient un point rationnel en dehors de sa droite singulière  $x = y = 0$  si et seulement si  $ab$  est un carré dans  $\mathbb{N}$ .*

**Démonstration :** Supposons que  $ab$  soit un carré dans  $\mathbb{N}$ , alors le point  $(1, \sqrt{ab}/b, 1, 1)$  appartient à la quadrique, est bien à coefficients rationnels et n'appartient pas à la droite d'équation  $x = y = 0$ . Réciproquement supposons que  $(x_0, y_0, z_0, w_0)$  soit un point rationnel appartenant à la quadrique et n'appartenant pas à la droite d'équation  $x = y = 0$ , montrons que  $ab$  est un carré

dans  $\mathbb{N}$ . Si  $y_0 = 0$ , en considérant l'équation de la quadrique, il vient immédiatement que  $x_0 = 0$  et donc que le point appartient à la droite  $x = y = 0$ , ce qui contredit notre hypothèse. Nous pouvons supposer que  $y_0 \neq 0$ . Alors, comme  $ax_0^2 - by_0^2 = 0$ , nous avons que  $\sqrt{ab}/a = |x_0/y_0|$  est rationnel et donc  $ab$  est un carré dans  $\mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposition 8.5 (Quadriques d'inertie (1, 1))** *Une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $ax^2 - by^2 = 0$  ( $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ) admet un paramétrage linéaire en un de ses paramètres dont les coefficients sont rationnels si et seulement si elle contient un point rationnel en dehors de sa droite singulière. Dans ce cas, il existe une transformation congruente à coefficients rationnels qui envoie  $Q_{\mathcal{P}}$  dans un repère où son équation est  $x^2 - y^2 = 0$  et le paramétrage du tableau 8.a est à coefficients rationnels.*

**Démonstration :** En utilisant le résultat du lemme 8.4 il nous suffit de montrer que  $Q_{\mathcal{P}}$  admet un paramétrage linéaire en un de ses paramètres dont les coefficients sont rationnels si et seulement si  $ab$  est un carré dans  $\mathbb{Q}$ . Supposons que nous ayons un paramétrage linéaire en un paramètre de notre quadrique :

$$X = \begin{pmatrix} \alpha u f_1(v, s) + f_2(v, s) \\ \beta u g_1(v, s) + g_2(v, s) \\ \gamma u h_1(v, s) + h_2(v, s) \\ \delta u j_1(v, s) + j_2(v, s) \end{pmatrix},$$

avec  $\alpha, \beta, \gamma$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  et  $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2, j_1$  et  $j_2$  des polynômes en  $(v, s)$ . Comme c'est un paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$ , l'équation suivante doit être vérifiée :

$$a(\alpha u f_1(v, s) + f_2(v, s))^2 - b(\beta u g_1(v, s) + g_2(v, s))^2 = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$(a\alpha^2 f_1^2(v, s) - b\beta^2 g_1^2(v, s)) u^2 + 2(b\beta g_1(v, s)g_2(v, s) - a\alpha f_1(v, s)f_2(v, s)) u + af_2^2(v, s) + bg_2^2(v, s) = 0.$$

Nous voulons que cette égalité ait lieu pour tout  $u$ . Les trois équations suivantes doivent être vérifiées simultanément :

$$\begin{cases} a\alpha^2 f_1^2(v, s) - b\beta^2 g_1^2(v, s) = 0, \\ b\beta g_1(v, s)g_2(v, s) - a\alpha f_1(v, s)f_2(v, s) = 0, \\ af_2^2(v, s) + bg_2^2(v, s) = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(v, s) = \pm g_2(v, s) \sqrt{\frac{b}{a}} \\ f_1(v, s) = \pm g_1(v, s) \frac{\beta}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \end{cases}$$

$\sqrt{b/a}$  apparaît donc nécessairement dans l'expression du paramétrage de la quadrique. Or  $\sqrt{ab}$  est rationnel si et seulement si  $ab$  est un carré dans  $\mathbb{Q}$ , ce qui finit la démonstration de notre propriété.

Reste à montrer qu'il existe un changement de repère qui envoie l'équation  $ax^2 - by^2 = 0$  sur  $x^2 - y^2 = 0$ . Il suffit pour cela de diviser l'équation par  $a$  et d'effectuer le changement d'échelle (rationnel)  $y' = y\sqrt{b/a}$ . Réciproquement, supposons que la quadrique contient un point rationnel. Alors  $ab$  est un carré dans  $\mathbb{Q}$ , et le paramétrage présenté dans le tableau 8.a est linéaire en un de ses paramètres, à coefficients rationnels.  $\square$

Cette proposition se traduit entre autre par le fait que la quadrique d'équation  $x^2 - 3y^2 = 0$  ne peut être paramétrée rationnellement, que son paramétrage nécessite une racine carrée. Comme

le paramétrage que nous présentons dans le tableau 8.a contient une seule racine carrée, nous sommes assurés de son optimalité dans le cas le pire en terme de degré de l'extension à laquelle appartiennent ses coefficients.

Considérons maintenant le paramétrage des cônes. Nous allons montrer qu'il existe des cas pour lesquels la racine carrée apparaissant dans le paramétrage du tableau 8.a disparaît. Nous allons montrer comment reconnaître ces cas-là. Ensuite, nous montrerons que notre paramétrage est optimal dans le cas le pire en présentant une quadrique pour laquelle la racine carrée ne peut être supprimée.

**Proposition 8.6 (Paramétrage des cônes)** *Une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 = 0$  ( $a, b, c > 0$ ) admet un paramétrage à coefficients rationnels, linéaire en un de ses paramètres si et seulement si elle contient un point rationnel autre que son sommet. S'il existe un tel point, alors il existe une transformation congruente à coefficients rationnels qui envoie  $Q_{\mathcal{P}}$  dans un repère dans lequel son équation est  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Le paramétrage correspondant du tableau 8.a est à coefficients rationnels.*

**Démonstration :** Si  $Q_{\mathcal{P}}$  contient un point rationnel autre que  $(0, 0, 0, 1)$ , son sommet, toute droite passant par ce point et n'étant pas entièrement contenue dans  $Q_{\mathcal{P}}$  coupe  $Q_{\mathcal{P}}$  en un autre point rationnel. Il existe une transformation  $T_1$  congruente à coefficients rationnels (il en existe en fait une infinité) qui envoie ces deux points sur les points  $(1, 1, 0, 0)$  et  $(-1, 1, 0, 0)$ . Dans ce repère, l'équation de  $Q_{\mathcal{P}}$  est  $x^2 - y^2 + r = 0$ , avec  $r$  un polynôme ne contenant pas de termes  $x^2$ ,  $y^2$  et  $xy$ . Alors la décomposition en carrés des formes quadratiques de Gauss (voir section 8.2) envoie la quadrique dans un repère où son équation est  $x^2 - y^2 + dz^2 = 0$ ,  $d \in \mathbb{Q}$ . Soit  $T_2$  la transformation congruente ayant pour matrice

$$T_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+d}{2} & \frac{1-d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ \frac{1-d}{2} & \frac{1+d}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$T_2$  envoie  $Q_{\mathcal{P}}$  dans un repère où son équation est  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Le paramétrage présenté dans le tableau 8.a est alors clairement à coefficients rationnels. La réciproque est immédiate. En effet, si nous reprenons la démonstration en sens inverse il est clair que la transformation  $T_1$  ne peut être à coefficients rationnels puisque les points utilisés pour la définir ne sont pas rationnels (ils appartiennent à une quadrique ne contenant pas de points rationnels), alors que leurs images  $(1, 1, 0, 0)$  et  $(-1, 1, 0, 0)$  sont rationnelles.  $\square$

Notons ici que si cette proposition nous permet de supprimer la racine carrée du paramétrage, elle nécessite de trouver un point rationnel sur le cône. C'est un problème difficile que nous n'essaierons pas de résoudre directement. En pratique, dans certains cas, nous pourrions nous appuyer sur les points singuliers rationnels d'autres quadriques du faisceau, si ces points appartiennent à la courbe de base du faisceau. En effet, ils appartiennent alors au cône que nous considérons sans en être le sommet et répondent aux hypothèses de la proposition 8.6.

Montrons qu'il existe des cônes pour lesquelles la racine carrée présente dans le paramétrage que nous présentons dans le tableau 8.a est nécessaire. Nous utiliserons la propriété classique en algèbre que si une combinaison linéaire de nombre entiers est égale à zéro dans  $\mathbb{Z}$ , elle l'est dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  quel que soit  $p \in \mathbb{N}$ . La contraposée de cette propriété nous permettra, en transposant nos équations dans  $\mathbb{Z}$ , de montrer que certaines équations ne peuvent avoir de solutions dans  $\mathbb{Z}$ , et donc dans  $\mathbb{Q}$ , et par là même, que certaines quadriques ne peuvent contenir de points rationnels.

**Proposition 8.7** *La quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$  n'admet pas de paramétrage, linéaire en un de ses paramètres, à coefficients rationnels.*

**Démonstration :** Il nous faut montrer que cette quadrique ne contient pas de point rationnel en dehors de son sommet. Supposons qu'elle en ait un  $(x, y, z, w)$ , différent de  $(0, 0, 0, 1)$ . Alors, en multipliant  $x, y$  et  $z$  par leur dénominateur commun et en divisant par le pgcd de leurs numérateurs, les coordonnées  $x, y$  et  $z$  de ce point sont entières et ne sont pas toutes paires. Notons que  $x^2$  est égal, modulo 4, à 0 si  $x$  est paire et est égal à 1 sinon. Alors  $x^2 + y^2 - 3z^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2[4]$  est égal au nombre d'entiers impairs parmi  $x, y$  et  $z$ , c'est-à-dire 1, 2, ou 3. Cela implique que  $x^2 + y^2 + z^2 \not\equiv 0[4]$  et contredit l'hypothèse selon laquelle le point rationnel  $(x, y, z, w)$  appartient au cône.  $\square$

La partie du théorème 8.3 concernant les cônes découle directement de cette proposition. En effet, le paramétrage que nous proposons dans le tableau 8.a contient une racine carrée. Les coefficients de ce paramétrage appartiennent donc à une extension de degré 2 de  $\mathbb{Q}$ , ce qui constitue le meilleur résultat non trivial possible. Notre paramétrage est donc bien optimal dans le pire cas.

Intéressons-nous maintenant aux cas des quadriques d'inertie  $(2, 2)$  pour lesquelles les deux racines carrées présentes dans le paramétrage du tableau 8.a ne sont pas nécessaires. Nous allons procéder de la manière suivante, nous allons d'abord montrer les conditions nécessaires pour qu'il existe un paramétrage d'une quadrique de signature  $(2, 2)$  contenant moins de deux racines carrées, puis nous montrerons qu'il existe des quadriques dont tout paramétrage linéaire en un de ses paramètres contient au moins deux racines carrées.

**Proposition 8.8** *Soit une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0$  ( $a, b, c, d > 0$ ). Tout corps  $\mathbb{K}$  admettant un paramétrage rationnel de  $Q_{\mathcal{P}}$  contient  $\sqrt{abcd}$ .*

**Démonstration :** Soit  $\mathbb{K}$  un corps sur lequel  $Q_{\mathcal{P}}$  admet un paramétrage à coefficients rationnels de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , linéaire en un de ses paramètres  $(u, v)$ . En fixant une valeur de l'autre paramètre  $(s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , nous définissons une droite  $L$  rationnelle (dans  $\mathbb{K}$ ) contenue dans  $Q_{\mathcal{P}}$ . Tout plan coupe  $L$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  (voir remarque 6.20), en particulier le plan d'équation  $z = 0$ . Comme  $L$  est contenue dans  $Q_{\mathcal{P}}$ ,  $L$  coupe la conique d'équation  $ax^2 + by^2 - dw^2 = z = 0$  au point  $p = (x_0, y_0, 0, 1)$ . De plus,  $p$  est rationnel sur  $\mathbb{K}$  car il est l'intersection d'une droite rationnelle et du plan  $z=0$ .

Le plan tangent à  $Q_{\mathcal{P}}$  en  $p$  a pour équation  $ax_0x + by_0y - dw = 0$ . Calculons l'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  avec ce plan. Comme  $ax_0^2 + by_0^2 = d$  ( $a, b, d > 0$ ),  $x_0$  ou  $y_0$  est non nul. Supposons que  $x_0 \neq 0$ . En élevant au carré l'équation du plan tangent nous obtenons l'équation  $(ax_0x)^2 = (by_0y - dw)^2$ . En éliminant  $x^2$  entre cette équation et celle de  $Q_{\mathcal{P}}$  nous obtenons

$$\begin{aligned} (by_0y - dw)^2 + ax_0^2(by^2 - cz^2 - dw^2) &= 0, \\ \Leftrightarrow dw^2(d - ax_0^2) + by^2(ax_0^2 + by_0^2) - 2bdy_0yw - acx_0^2z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $ax_0^2 + by_0^2 = d$  nous avons que  $bd(y - y_0w)^2 - acx_0^2z^2 = 0$ , ce qui peut s'écrire

$$b^2d^2(y - y_0w)^2 - abcdx_0^2z^2 = 0 \Leftrightarrow |x_0z| \sqrt{abcd} = |bd(y - y_0w)|.$$

L'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et de son plan tangent en  $p$  contient la droite  $L$  qui est rationnelle sur  $\mathbb{K}$ . Cette dernière équation est donc à coefficients rationnels sur  $\mathbb{K}$ , ce qui montre que nécessairement  $\sqrt{abcd}$  appartient à  $\mathbb{K}$ .  $\square$

Il faut noter que cette démonstration peut s'étendre au cas des quadriques de rang inférieur ( $abcd = 0$ ), et ne concerne pas uniquement les quadriques d'inertie  $(2, 2)$ .



**Lemme 8.9** Soit une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0$  ( $a, b, c, d > 0$ ). Si  $Q_{\mathcal{P}}$  contient un point rationnel de  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ , alors  $Q_{\mathcal{P}}$  contient des points rationnels (de  $\mathbb{Q}$ ).

**Démonstration :** Soit  $p_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$  un point rationnel sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$  appartenant à  $Q_{\mathcal{P}}$ . Nous pouvons supposer que  $x_0 = 1$ , quitte à permuter les variables pour que  $x_0 \neq 0$ , et en divisant par  $x_0$ . Le point conjugué  $p_1 = (1, \bar{y}_0, \bar{z}_0, \bar{w}_0)$  sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$  de  $p_0$  appartient aussi à  $Q_{\mathcal{P}}$ . La droite passant par ces deux points contient les points  $p_0 + p_1$  et  $p_0 - p_1$  qui sont rationnels sur  $\mathbb{Q}$ . Considérons une transformation rationnelle qui envoie cette droite dans un repère où son équation est  $z = w = 0$  et où le point  $p_0 + p_1$  a pour coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$ . Dans ce repère,  $p_0$  et  $p_1$  ont pour coordonnées  $(1, \pm e\sqrt{abcd}, 0, 0)$  ( $e \in \mathbb{Q}$ ) et l'équation de  $Q_{\mathcal{P}}$  est  $abcde^2x^2 - y^2 + r = 0$ , où  $r$  est un polynôme ne contenant pas de terme  $x^2$ ,  $y^2$  et  $xy$  puisque les deux points  $p_0$  et  $p_1$  vérifient l'équation. En appliquant la réduction de Gauss, nous obtenons une équation de la forme  $abcde^2x^2 - y^2 + fz^2 - gw^2 = 0$ , ( $g, f > 0$ ). L'invariance du déterminant à un carré près nous assure que  $fg$  est le carré d'un nombre rationnel  $h$ . Alors le point  $(0, 0, g, h)$  est un point de  $Q_{\mathcal{P}}$  dans ce dernier repère, rationnel (sur  $\mathbb{Q}$ ).  $\square$

**Proposition 8.10** Soit une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $ax^2 + by^2 - cz^2 - dw^2 = 0$  ( $a, b, c, d > 0$ ).  $Q_{\mathcal{P}}$  admet un paramétrage à coefficients rationnels dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$  si et seulement si elle contient un point rationnel. Si c'est le cas, alors il existe une transformation à coefficients rationnels qui envoie  $Q_{\mathcal{P}}$  dans un repère où son équation est  $x^2 + y^2 - z^2 - abcdw^2 = 0$ . Le paramétrage correspondant du tableau 8.a est à coefficients rationnels sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ .

**Démonstration :** Si la quadrique admet un paramétrage à coefficients rationnels dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ , alors, par le lemme 8.9, la quadrique contient un point rationnel. Réciproquement, si la quadrique contient un point rationnel, montrons par la construction de la transformation de la proposition qu'elle admet un paramétrage rationnel sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ . Construisons cette transformation congruente à coefficients rationnels qui envoie  $Q_{\mathcal{P}}$  dans un repère où son équation est  $x^2 + y^2 - z^2 - abcdw^2 = 0$ . Nous savons que  $Q_{\mathcal{P}}$  contient des points rationnels. Choisissons-en un,  $p_0$ . Toute droite passant par  $p_0$  et n'étant pas contenue dans  $Q_{\mathcal{P}}$  coupe la quadrique en un autre point, rationnel,  $p_1$ . Choisissons un repère dans lequel les deux points sont de la forme  $(1, \pm 1, 0, 0)$ . Dans ce repère, l'équation de  $Q_{\mathcal{P}}$  est de la forme  $x^2 - y^2 - r = 0$ , avec  $r$  polynôme de degré au plus 1 en  $x$  et  $y$ . Une réduction de Gauss envoie la quadrique dans un repère où son équation est de la forme  $x^2 - y^2 + ez^2 - fw^2 = 0$ , avec  $e, f \in \mathbb{Q}, e, f > 0$ . La transformation congruente ayant pour matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1+e}{2} & \frac{1-e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & 0 \\ \frac{1-e}{2} & \frac{1+e}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

envoie  $Q_{\mathcal{P}}$  dans un repère où son équation est  $x^2 + y^2 - z^2 - efw^2$ . Par invariance du déterminant,  $ef = g^2abcd$  pour  $g \in \mathbb{Q}$ . En posant  $w' = gw$ , nous obtenons l'équation  $x^2 + y^2 - z^2 - abcdw'^2 = 0$ . Par les résultats du tableau 8.a, nous obtenons que la quadrique admet un paramétrage rationnel sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ .  $\square$

Pour compléter cette proposition, montrons qu'il existe des quadriques d'inertie  $(2, 2)$  n'admettant aucun paramétrage à coefficients rationnels sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{abcd})$ .

**Proposition 8.11** Tout paramétrage linéaire en un de ses paramètres de la quadrique de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  d'équation  $x^2 + y^2 - 3z^2 - 11w^2 = 0$  contient deux racines carrées irréductibles.

**Démonstration :** Considérons la quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - 3z^2 - 11w^2 = 0$ . Nous allons procéder comme dans le cas des quadriques d'inertie  $(2, 1)$ , en montrant que cette quadrique ne contient pas de points rationnels. Supposons qu'elle contienne un point rationnel  $p_0 = (x_0, y_0, z_0, w_0)$ . Nous pouvons supposer que  $x_0, y_0, z_0$  et  $w_0$  sont des entiers, et qu'ils ne sont pas tous pairs. Considérons maintenant l'équation de la quadrique modulo 4,  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ , cette quantité est égale au nombre de coefficients impairs parmi  $x_0, y_0, z_0$  et  $w_0$ . Ils sont donc tous impairs. Rappelons ici que le carré d'un nombre impair est égal à 1 modulo 8. Alors  $x^2 + y^2 + 5z^2 + 5w^2 \equiv 1 + 1 + 5 + 5[8] = 4$ , ce qui contredit l'hypothèse  $x^2 + y^2 - 3z^2 - 11w^2 = 0$ . Cette quadrique ne possède donc pas de points rationnels et donc, par la proposition 8.8 n'est pas rationnelle sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{33})$ . Son paramétrage contient donc au moins deux racines carrées.  $\square$

Notons enfin que si une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  a un déterminant qui est un carré dans  $\mathbb{Q}$ , il est toujours nécessaire de trouver un point rationnel lui appartenant pour obtenir un paramétrage sans racine carrée. La présence de points rationnels sur une telle quadrique n'est pas évidente, comme le montre la proposition suivante.

**Proposition 8.12** *La quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - 3z^2 - 3w^2 = 0$  ne contient pas de point rationnel.*

La démonstration est identique à celle de la proposition précédente. La recherche d'un point rationnel sur une quadrique étant un problème difficile, il n'est pas envisageable de choisir une quadrique dont le déterminant est un carré (problème déjà difficile), puis de rechercher un point rationnel lui appartenant. Notre démarche consistera plutôt à chercher un point rationnel, vérifier que la quadrique du faisceau à laquelle il appartient est bien une quadrique d'inertie  $(2, 2)$ , et ne pas s'occuper du fait que la quadrique ait ou pas un déterminant qui est un carré dans  $\mathbb{Q}$ .

### 3.4 Équation aux paramètres

Nous allons utiliser les quadriques projectives réglées, et les paramétrages donnés dans le tableau 8.a, pour déterminer l'équation aux paramètres. La propriété que nous énonçons maintenant étend le principal résultat de J. Levin en augmentant le nombre de types de quadriques pour lesquelles ce résultat s'applique.

**Proposition 8.13 (Équation aux paramètres projective de degré 2)** *L'équation aux paramètres obtenue en insérant le paramétrage projectif d'une quadrique d'inertie autre que  $(3, 1)$  dans l'équation d'une autre quadrique est une équation polynomiale de degré au plus 2 en l'une au moins de ses variables.*

**Démonstration :** Il suffit juste de déterminer l'équation pour chacun des paramétrages. Pour les cas  $(2, 2)$ ,  $(4, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(2, 0)$  et  $(1, 0)$  chaque coordonnée du paramétrage est linéaire en chacune des variables  $(u, v)$  et  $(s, t)$ , l'équation aux paramètres est donc de degré exactement 2 en  $(u, v)$ , et en  $(s, t)$

$$as^2 + b(u, v)st + c(u, v)t^2 = 0, \quad (1)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des polynômes de degré 2 en  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

Pour le cas  $(1, 1)$ , si ce n'est le fait qu'il y ait deux vecteurs de paramétrage, le principe est le même, chacune des coordonnées des deux vecteurs est linéaire en chacun des paramètres.

Pour le cas  $(2, 1)$ , l'équation aux paramètres est de degré 2 en  $s$ , et de degré 4 en  $u$  et  $v$ . Comme la variable de paramétrage appartient à  $\mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$ , il faut considérer le degré en  $u$ , en  $v$ , et en  $s$ . L'équation obtenue est alors de la forme :

$$as^2 + b(u, v)s + c(u, v) = 0, \quad (2)$$

où  $a$  est une constante,  $b$  un polynôme homogène de degré 2 en  $(u, v)$ , et  $c$  un polynôme homogène de degré 4 en  $(u, v)$ .  $\square$

## 4 Conclusion

Analysons les résultats de ce chapitre. Par rapport à la méthode de J. Levin, l'ensemble de quadriques que nous utilisons en vue de les paramétrer pour déterminer l'équation aux paramètres est beaucoup plus important. Là où J. Levin n'utilisait que les quadriques dont le paramètre dans le faisceau était la racine d'un polynôme de degré 3, nous nous autorisons toutes les quadriques dont la matrice a un déterminant positif ou nul. Hormis dans quelques cas très particuliers, nous sommes sûrs de pouvoir choisir cette quadrique parmi une infinité, et même de pouvoir la choisir à coefficients rationnels. L'usage d'une transformation à coefficients rationnels nous assure d'obtenir une équation canonique à coefficients rationnels. Les paramétrages que nous avons déterminés permettent de limiter l'apparition de racines carrées dans l'équation aux paramètres, au plus deux racines dans le cas des quadriques de signature  $(2, 2)$ , une dans le cas des quadriques d'inertie  $(2, 1)$  ou  $(1, 1)$ , et aucune pour les autres cas. De plus, pour les quadriques d'inertie  $(2, 2)$  ou  $(2, 1)$ , si nous connaissons un point rationnel leur appartenant (autre que son sommet pour les quadriques d'inertie  $(2, 1)$ ), nous pouvons réduire de un ce nombre de racines carrées. Ces résultats permettent d'assurer qu'une implantation avec une arithmétique exacte est possible, qu'elle sera efficace et que le résultat de l'algorithme sera aisément manipulable pour des traitements ultérieurs.



## Chapitre 9

# Algorithme associé aux faisceaux réguliers, cas général

Nous étudions dans ce chapitre la courbe de base d'un faisceau régulier. Un tel faisceau est caractérisé par le fait que son équation déterminantielle n'a que des racines simples, qu'elles soient réelles ou complexes. Après avoir rappelé quelques propriétés topologiques des faisceaux réguliers, nous séparons les différents cas possibles et nous montrons comment, quand cela est possible, obtenir un domaine de définition du paramètre de la courbe de base le plus simple possible. Dans la section suivante, nous expliquons comment choisir la quadrique que nous paramétrons pour déterminer l'équation aux paramètres. Quand c'est une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  (ce qui arrivera le plus souvent), nous montrons qu'il est possible de lui appliquer un algorithme qui assure d'en trouver un paramétrage ne contenant au plus qu'une racine carrée. Après cela, dans une troisième section, nous présentons notre algorithme de calcul de l'intersection de deux quadriques dans le cas des faisceaux réguliers. Nous concluons le chapitre en montrant qu'à quelques adaptations près, cet algorithme peut être repris dans le cas général. S'il ne constitue pas alors un algorithme optimal, il n'en est pas moins intéressant en vue d'une première implantation.

### 1 Compléments sur les propriétés de la courbe de base

Les faisceaux réguliers ne correspondent qu'à un cas de la caractéristique de Segre, noté [1111], cas où l'équation déterminantielle a quatre racines distinctes dans  $\mathbb{C}$ . En appliquant le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques réelles, nous pouvons obtenir trois cas différents selon que l'équation déterminantielle a quatre, deux ou zéros racines réelles.

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \varepsilon_4 w^2 = 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_2 y^2 + \varepsilon_3 \lambda_3 z^2 + \varepsilon_4 \lambda_4 w^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, 4, \\ \lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4, \text{ distincts } 2 \text{ à } 2. \end{array}$$
$$(2) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2zw = 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_2 y^2 + \beta(z^2 - w^2) + 2\alpha zw = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, 2, \\ \lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \text{ distincts}, \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \beta \neq 0. \end{array}$$
$$(3) \quad \begin{cases} xy + zw = 0 \\ \beta_1(x^2 - y^2) + 2\alpha_1 xy + \beta_2(z^2 - w^2) + 2\alpha_2 zw = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 + i\beta_1 \in \mathbb{C}, \beta_1 \neq 0, \\ \alpha_2 + i\beta_2 \in \mathbb{C}, \beta_2 \neq 0, \\ \alpha_1 + i\beta_1 \neq \alpha_2 + i\beta_2. \end{array}$$

Pour ces trois types réels de faisceaux, le calcul de la courbe de base se fait de manière similaire, en utilisant principalement les méthodes décrites au chapitre précédent. En sachant choisir une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  dans le faisceau, il n'est pas réellement nécessaire de savoir lequel des trois cas nous étudions. Il est cependant très intéressant de connaître, pour des applications ultérieures, le nombre de composantes connexes, et pour chacune de ces composantes, si elle est affinement finie ou infinie. Comme C. Tu, J. Wang et W. Wang [TWW02] nous déterminons les différentes topologies possibles de la courbe de base du faisceau, ce qui s'inscrit dans la continuité du chapitre 7. Nous allons exploiter les paramétrages que nous venons de présenter au chapitre 8 car ils sont les plus simples à manipuler. En effet, nous pourrions, théoriquement, utiliser n'importe quel paramétrage pour démontrer des propriétés topologiques des courbes de base, mais il s'avère en pratique que d'autres paramétrages des mêmes quadriques nous conduisent rapidement dans des calculs inextricables.

Ces propriétés ont aussi un intérêt pratique. Remarquons dans un premier temps que si la quadrique  $x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0$  peut être paramétrée par  $(ut + vs, us - vt, ut - vs, us + vt)$ , elle peut l'être tout aussi bien, et avec les mêmes propriétés de linéarité par rapport à chacun de ses paramètres par  $(ut + vs, us - vt, us + vt, ut - vs)$ . Choisir l'un ou l'autre de ces deux paramétrages n'a *a priori* pas de conséquences sur la suite de la résolution de notre problème. Nous montrons que la connaissance des propriétés topologiques de la courbe de base peut nous aider à choisir le bon paramétrage de la quadrique servant à définir l'équation aux paramètres de sorte d'avoir pour domaine de définition du paramètre de la courbe de base  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tout entier, quand cela est possible, et non la réunion de deux intervalles.

## 1.1 Propriétés topologiques

### 1.1.1 Séparation des cas

| nature des racines             | équations de faisceaux correspondants  | courbe de base                          |
|--------------------------------|--|---|
| 4 racines réelles              | $\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 4w^2 = 0 \end{cases}$ | 2 composantes affinement finies réelles |
| 4 racines réelles              | $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0, \\ -x^2 + y^2 - 2z^2 - 3w^2 = 0 \end{cases}$ | courbe de base réduite à $\emptyset$    |
| 2 racines réelles, 2 complexes | $\begin{cases} x^2 - y^2 + zw = 0, \\ -x^2 - y^2 + z^2 - w^2 + 2zw = 0 \end{cases}$    | 1 composante affinement finie           |
| 4 racines complexes            | $\begin{cases} xy + zw = 0, \\ x^2 - y^2 + 2xy - z^2 + w^2 - 2zw = 0 \end{cases}$      | 2 composantes affinement infinies       |

TAB. 9.a – L'équation déterminantielle n'a que des racines simples.

Nous présentons ici l'ensemble des résultats que nous démontrons dans les sous-sections suivantes, par une méthode autre que celle utilisée dans [TWW02] (notamment car nous travaillons dans l'espace projectif).

**Théorème 9.1 (classification des intersections régulières)** *Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques engendrant un faisceau régulier  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$ .*

- Si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a quatre racines réelles, alors soit la courbe d'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est réduite à l'ensemble vide, soit elle est constituée de deux composantes affinement finies.
- Si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a deux racines réelles et deux complexes, alors la courbe d'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est constituée d'une composante affinement finie.

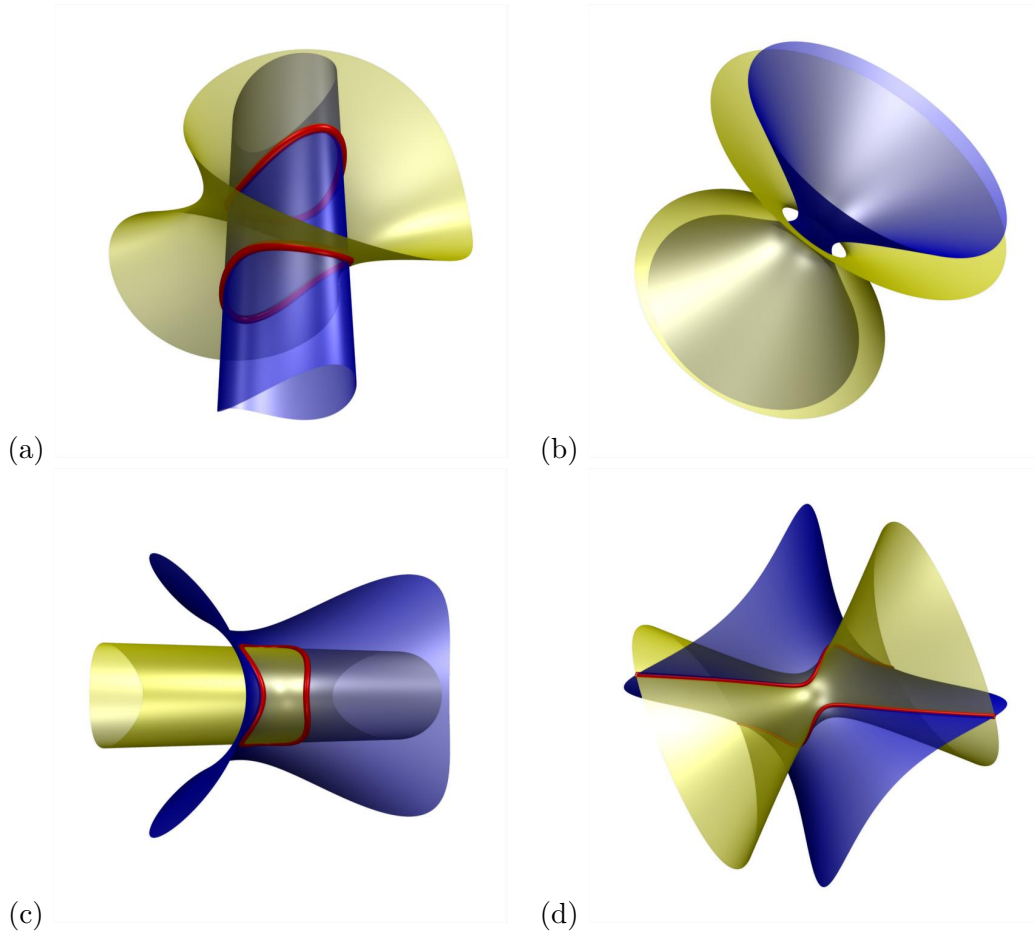


FIG. 9.1 – Intersections pour lesquelles l'équation déterminantielle n'a que des racines simples  
 - (a) quartique constituée de deux composantes affinement finies - (b) intersection réduite à  $\emptyset$   
 - (c) une quartique constituée d'une composante affinement finie - (d) une quartique constituée de deux composantes affinement infinies.

- Si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a quatre racines complexes, alors la courbe d'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est constituée de deux composantes affinement infinies.

Nous présentons dans le tableau 9.a les résultats du théorème 9.1, et les illustrons sur la figure 9.1.

### 1.1.2 Deux composantes affinement finies

**Proposition 9.2** Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques engendrant un faisceau régulier. Si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a quatre racines réelles, alors la courbe d'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est soit réduite à l'ensemble vide, soit constituée de deux composantes affinement finies.

**Démonstration :** Tout d'abord, montrons la finitude affine de la courbe de base du faisceau, l'argument étant immédiat. Comme l'équation déterminantielle a au moins une racine réelle, le faisceau contient des quadriques d'inertie (3,1). Ces quadriques sont des ensembles affinement finis qui contiennent la courbe de base du faisceau. Chaque composante connexe est donc

affinement finie.

Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques de ce faisceau régulier, dont l'une au moins est de rang maximum, par exemple  $Q_{\mathcal{P}}$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et  $\lambda_4$  les quatre racines réelles (distinctes) de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ . Nous pouvons, par application du théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques, trouver un repère dans lequel les équations des deux quadriques sont de la forme :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \varepsilon_4 w^2 = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_2 y^2 + \varepsilon_3 \lambda_3 z^2 + \varepsilon_4 \lambda_4 w^2 = 0, \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, 4$ . L'inertie des quadriques d'un faisceau sur un intervalle où l'équation déterminantielle est de signe constant ne varie pas. S'il existe un intervalle sur lequel les quadriques sont d'inertie  $(4, 0)$ , la courbe de base du faisceau est réduite à l'ensemble vide du fait des résultats du théorème 7.11, et une des deux propriétés du théorème est prouvée. S'il n'existe pas un tel intervalle, il n'y a pas de quadrique d'inertie  $(4, 0)$  dans le faisceau et nous pouvons supposer que  $Q_{\mathcal{P}}$  est d'inertie  $(2, 2)$ . Nous pouvons supposer de même que  $Q_{\mathcal{Q}}$  est d'inertie  $(2, 2)$  si aucune des racines de l'équation déterminantielle n'est nulle (aucun des  $\lambda_i, i = 1, \dots, 4$  ne s'annule). Nous pouvons encore supposer que les paramètres de chacune des deux quadriques dans l'équation déterminantielle du faisceau appartiennent à deux intervalles différents où cette équation est positive. D'après toutes ces hypothèses, nous pouvons alors supposer  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = -\varepsilon_4 = 1$  et  $\lambda_1, \lambda_3 > 0, \lambda_2, \lambda_4 < 0$ . Les deux équations de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  sont donc de la forme :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : x^2 + y^2 - z^2 - w^2 = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \lambda_3 z^2 - \lambda_4 w^2 = 0. \end{cases}$$

Un paramétrage de  $\mathcal{P}$  est  $X = (ut + vs, us - vt, ut - vs, us + vt)$ . En l'insérant dans l'équation de  $Q_{\mathcal{Q}}$  nous obtenons l'équation aux paramètres :

$$\begin{aligned} \Omega_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} : & ((\lambda_2 - \lambda_4)u^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)v^2) s^2 + 2(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)uvst \\ & + ((\lambda_1 - \lambda_3)u^2 + (\lambda_2 - \lambda_4)v^2) t^2 = 0. \end{aligned}$$

Son discriminant<sup>8</sup> selon la variable  $(s, t)$  est :

$$\Delta_{s,t}(u, v) = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_2)(u^4 + v^4) + 2((\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2))u^2 v^2.$$

Nous recherchons les intervalles sur lesquels  $\Delta_{s,t}(u, v)$  est positif. Son discriminant est :

$$\Delta_{u,v}(\Delta_{s,t}) = (\lambda_2 - \lambda_1)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2 (\lambda_3 - \lambda_2)^2 (\lambda_4 - \lambda_1)^2 (\lambda_4 - \lambda_2)^2 (\lambda_4 - \lambda_3)^2.$$

Ce discriminant étant positif,  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a zéro ou quatre racines réelles. Si l'équation  $\Delta_{s,t}(u, v)$  n'a pas de racines réelles,  $\Delta_{s,t}(u, v) > 0$  quel que soit  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  puisque la courbe de base du faisceau est une quartique régulière non réduite à l'ensemble vide. Les solutions de l'équation aux paramètres sont nécessairement définies sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  car  $\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} \in \mathbb{R}$  pour tout  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . À chacune des solutions de l'équation aux paramètres correspond un arc de courbe. Les deux arcs ne peuvent se couper sinon la courbe de base du faisceau contiendrait un point singulier, ce qui, au vu des considérations de genre que nous avons déjà exposées, ne peut se produire. Ces arcs ne peuvent être non plus confondus du fait de la forme des racines de  $\Delta_{s,t}(u, v)$ . Cette courbe a donc bien deux composantes connexes.

<sup>8</sup>Les discriminants sont donnés à une constante positive près.



Si l'équation  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a quatre racines réelles, il existe deux intervalles<sup>9</sup> de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  sur lesquels  $\Delta_{s,t}(u, v)$  est positif.

Plaçons-nous sur un de ces intervalles. Les solutions de l'équation aux paramètres définissent deux arcs de courbes. Ces arcs de courbes ne peuvent être confondus car  $\Delta_{s,t}(u, v) \neq 0$ . De plus, ils sont continus et coïncident à leurs extrémités du fait de l'annulation de  $\Delta_{s,t}(u, v)$  aux mêmes valeurs du paramètre. La réunion de ces deux arcs forme donc une courbe fermée (notons qu'ils ne peuvent avoir d'autres points communs que leurs extrémités sinon la courbe de base posséderait des points singuliers). Nous avons ainsi défini deux courbes fermées correspondant chacune à un intervalle sur lequel  $\Delta_{s,t}(u, v)$  est positif. Elles ne peuvent coïncider du fait de l'expression du vecteur paramétré. Pour que le vecteur  $X = (ut(u, v) + vs(u, v), \dots, us(u, v) + vt(u, v))$  ait exactement les mêmes valeurs sur deux intervalles différents, il faudrait, entre autres, que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  soit un carré, ce que nous avons exclu. De plus, elles ne peuvent avoir de point commun car sinon la courbe de base contiendrait des points singuliers, ce qui montre que si l'équation déterminantielle a quatre racines réelles distinctes, alors la courbe de base est constituée de deux composantes connexes.  $\square$

### 1.1.3 Une composante affinement finie

**Proposition 9.3** *Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques engendrant un faisceau régulier. Si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a deux racines réelles et deux complexes, alors la courbe d'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est constituée d'une composante affinement finie.*

**Démonstration :** La finitude affine se démontre exactement de la même façon que dans la démonstration précédente, du fait de la présence de quadriques d'inertie (3, 1) dans le faisceau.

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux racines complexes de l'équation déterminantielle,  $\alpha \pm i\beta$  les deux racines complexes conjuguées. Nous pouvons supposer que  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = 1$  (quitte à changer les quadriques définissant l'équation déterminantielle du faisceau). Choisissons deux quadriques dans le faisceau dont l'une,  $Q_{\mathcal{P}}$ , est de rang maximal. Nous pouvons même la choisir d'inertie (2, 2) puisque le faisceau contient des quadriques de déterminant positif et qu'il ne peut contenir de quadriques d'inertie (4, 0) (il faudrait que toutes les racines de l'équation déterminantielle soient réelles). D'après le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques, il existe un repère dans lequel les équations de deux quadriques sont de la forme :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2zw = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : \varepsilon_2 y^2 + \beta(z^2 - w^2) + 2\alpha zw = 0, \end{cases}$$

avec  $\varepsilon_{i,i=1,2} = \pm 1$ . Nous pouvons supposer que  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$  puisque  $Q_{\mathcal{P}}$  est d'inertie (2, 2). Nous pouvons utiliser le paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$  pour définir l'équation aux paramètres. Un de ses paramétrages est  $X((u, v), (s, t)) = (ut + vs, ut - vs, us\sqrt{2}, vt\sqrt{2})$ . En l'insérant dans l'équation de  $Q_{\mathcal{Q}}$ , nous obtenons l'équation :

$$\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} : (2\beta u^2 - v^2)s^2 + 2(1 + 2\alpha)uvst + (u^2 - 2\beta v^2)t^2 = 0.$$

Le discriminant de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  selon la variable  $(s, t)$  est :

$$\Delta_{s,t}(u, v) = (u^4 - v^4 + 2(\alpha^2 - \alpha + \beta^2)u^2v^2).$$

Le discriminant de  $\Delta_{s,t}(u, v)$  est :

<sup>9</sup>Un intervalle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est un ensemble de points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tel qu'il existe une carte affine (par exemple  $(x/y, 1)$ ) dans laquelle la projection de ces points définit un intervalle dans  $\mathbb{R}$ .

$$\Delta_{u,v}(\Delta_{s,t}) = -\beta^2(\alpha^2 + \beta^2)^2((\alpha - 1)^2 + \beta^2)^2.$$

Ce discriminant est négatif, donc  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a deux solutions réelles. Comme nous considérons une variable projective, quitte à effectuer un changement de variables linéaire, nous pouvons supposer que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  est positif entre ses racines. Cet intervalle est le domaine de définition du paramètre  $(u, v)$  des deux racines de l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ . À chaque racine de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  correspond une partie de la courbe de base du faisceau, que nous désignerons comme un des deux arcs de la courbe. Chacune des extrémités d'un des deux arcs coïncide avec une des extrémités de l'autre arc, du fait de l'annulation de  $\Delta_{s,t}(u, v)$  aux mêmes valeurs. La réunion des deux arcs forme donc une seule courbe fermée. Nous avons bien montré que la courbe de base était constituée d'exactly une composante connexe dans le cas où l'équation déterminantielle a deux racines réelles distinctes et deux racines complexes.  $\square$

#### 1.1.4 Deux composantes affinement infinies

**Proposition 9.4** *Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques engendrant un faisceau régulier. Si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a quatre racines complexes, alors la courbe d'intersection de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  est constituée de deux composantes affinement infinies.*

**Démonstration :** Commençons par montrer que la courbe de base du faisceau est constituée de deux composantes connexes. Le faisceau contient au moins une quadrique réglée (théorème 5.1), qui est d'inertie  $(2, 2)$  puisque le faisceau ne contient pas de quadriques singulières (l'équation déterminantielle n'a pas de solutions réelles). En conséquence de quoi, toutes les quadriques du faisceau sont d'inertie  $(2, 2)$  (le signe de l'équation déterminantielle ne varie pas). Soient  $\alpha_1 \pm i\beta_1$  et  $\alpha_2 \pm i\beta_2$  les quatre racines complexes distinctes ( $\beta_1 \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 0$ ). En appliquant le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques nous obtenons les équations suivantes pour deux des quadriques du faisceau :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : & xy + zw = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : & \beta_1(x^2 - y^2) + 2\alpha_1xy + \beta_2(z^2 - w^2) + 2\alpha_2zw = 0. \end{cases}$$

Un paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$  est  $X = (ut, vs, -us, vt)$ . L'équation aux paramètres définie par ces quadriques est :

$$\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} : (\beta_2u^2 - \beta_1v^2)s^2 + 2(\alpha_1 - \alpha_2)uvst + (\beta_1u^2 - \beta_2v^2)t^2 = 0.$$

Son discriminant est :

$$\Delta_{s,t}(u, v) = -\beta_1\beta_2(u^4 + v^4) + ((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)u^2v^2.$$

Et le discriminant de cette équation est :

$$\Delta_{u,v}(\Delta_{s,t}) = \beta_1^2\beta_2^2((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2)((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2)^2.$$

$\Delta_{u,v}(\Delta_{s,t}) > 0$  donc l'équation  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a zéro ou quatre racines réelles. La suite de la démonstration est alors exactement la même que dans le cas précédent où l'équation déterminantielle avait quatre racines réelles. Nous avons de nouveau montré que la courbe de base est constituée de deux composantes connexes, ce qui finit la démonstration de la proposition.

Montrons maintenant que chacune de ces composantes est affinement infinie. Chaque composante a un ou trois points d'intersection avec chacun des plans principaux du repère (si  $\beta_1\beta_2 < 0$

il y a un seul point pour chaque plan, si  $\beta_1\beta_2 > 0$  il y a en trois pour chaque plan). En effet, les deux composantes de la courbe de base ont pour vecteur paramétré :

$$X = \begin{pmatrix} \beta_2 u^3 - \beta_1 u v^2 \\ (\alpha_2 - \alpha_1) u v^2 \pm v \sqrt{\Delta_{s,t}(u,v)} \\ (\alpha_2 - \alpha_1) u^2 v \mp u \sqrt{\Delta_{s,t}(u,v)} \\ \beta_2 u^2 v - \beta_1 v^3 \end{pmatrix}.$$

Chacune des composantes a un point d'intersection avec le plan  $x = 0$  pour le paramètre  $(u, v) = (0, 1)$ , et si  $\beta_1\beta_2 > 0$ , deux autres points correspondant aux paramètres  $(u, v) = (\sqrt{|\beta_1|}, \sqrt{|\beta_2|})$  et  $(u, v) = (\sqrt{|\beta_1|}, -\sqrt{|\beta_2|})$ . De même chacune des composantes a un ou trois points d'intersection avec le plan  $w = 0$  pour les paramètres  $(1, 0)$ , et si  $\beta_1\beta_2 > 0$ , pour les paramètres  $(\sqrt{|\beta_1|}, \sqrt{|\beta_2|})$  et  $(\sqrt{|\beta_1|}, -\sqrt{|\beta_2|})$ . Pour les plans d'équation  $y = 0$  et  $z = 0$ , chacun a une intersection avec chacune des composantes soit pour le paramètre  $(1, 0)$  soit pour le paramètre  $(0, 1)$ . L'équation  $(\alpha_2 - \alpha_1)uv = \pm \sqrt{\Delta_{s,t}(u,v)}$  a zéro ( $\beta_1\beta_2 < 0$ ) ou deux racines réelles. Du fait que ce nombre d'intersection entre chacune des composantes et chacun des plans principaux est impair, et que chaque composante est une courbe continue, nous pouvons conclure que tout plan a une intersection non vide avec chacune des composantes. Chaque composante est donc un ensemble affinement infini.  $\square$

Nous ne développons pas plus la présentation des propriétés des différents discriminants que nous avons calculé ici mais il est intéressant de noter, entre autre, que si le discriminant de l'équation déterminantielle n'est pas nul (et donc que le faisceau est régulier et que la courbe de base est une quartique régulière), celui de  $\Delta_{s,t}(u, v)$  non plus. Intuitivement, cela signifie que l'équation aux paramètres n'est pas factorisable, et que la courbe de base est irréductible.

## 1.2 Conséquences pour le domaine de définition du paramétrage

Dans l'algorithme 5.1 de J. Levin, la résolution de l'équation aux paramètres donne deux solutions, définies sur l'ensemble des  $(u, v)$  tels que  $\Delta(u, v) \geq 0$ .

**Théorème 9.5 (Domaine de définition)** *Soit un faisceau régulier de quadriques de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Si les quatre racines de l'équation déterminantielle sont soit toutes complexes, soit toutes réelles, alors il existe un paramétrage de la courbe de base de ce faisceau dont le domaine de définition du paramètre est  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .*

**Démonstration :** Reprenons la démonstration de la proposition 9.4. Dans le cas où l'équation déterminantielle a quatre racines complexes, il existe dans le faisceau deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  dont les matrices, par le théorème 7.14, peuvent être mises sous la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

En prenant pour paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$ ,  $X = (ut, vs, vt, -us)$ , l'équation aux paramètres est :

$$\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} = s^2(-u^2\beta_2 - v^2\beta_1) + 2uvst(\alpha_1 - \alpha_2) + t^2(u^2\beta_1 + v^2\beta_2).$$

Le discriminant  $\Delta_{s,t}(u, v)$  de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  en tant que polynôme de degré 2 en  $(s, t)$  est :

$$\Delta_{s,t} = u^4\beta_1\beta_2 + v^4\beta_1\beta_2 + u^2v^2(\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Nous savons déjà que ce polynôme a 0 ou 4 racines réelles. Pour savoir s'il n'a que des racines réelles il suffit de calculer un des deux invariants  $T$  ou  $\Delta_2$  présentés en annexe B, section B.2.3. Comme nous allons le voir  $\Delta_2$  suffit.

$$\Delta_2 = -\beta_2\beta_1((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Le signe de  $\Delta_2$  est l'opposé de celui de  $\beta_1\beta_2$ . Il est alors intéressant de constater que si nous refaisons ce calcul en prenant pour  $Q_{\mathcal{P}}$  le paramétrage  $X = (ut, vs, -us, vt)$ , le même invariant  $\Delta'_2$  devient :

$$\Delta'_2 = \beta_2\beta_1((\alpha_1 - \alpha_2)^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2).$$

Il est alors clair que  $\text{sign}(\Delta_2) = -\text{sign}(\Delta'_2)$ . Nous pouvons donc conclure que pour un des deux paramétrages que nous utilisons,  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a quatre racines réelles, et que pour l'autre paramétrage,  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a quatre racines complexes. En prenant ce dernier paramétrage, nous sommes assurés que le domaine de définition du paramétrage de la courbe de base du faisceau sera  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , et que chaque racine de l'équation aux paramètres représentera une des deux composantes de cette courbe.

Plaçons-nous dans le cas où toutes les racines de l'équation déterminantielle sont réelles. Nous avons déjà montré que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  était de la forme :

$$\Delta_{s,t}(u, v) = \alpha u^4 + \beta u^2 v^2 + \gamma v^4,$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha = \gamma &= (\lambda_4 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1), \\ \beta &= 2((\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) + (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_4)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2. \end{aligned}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} \beta + 2\alpha &= (\lambda_2 - \lambda_4 + \lambda_1 - \lambda_3)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4)^2, \\ &= 4(\lambda_1^2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_3) < 0. \end{aligned}$$

Le discriminant  $\Delta_{u,v} = \beta^2 - 4\alpha^2 = (\beta - 2\alpha)(\beta + 2\alpha)$  est toujours positif (voir démonstration de la proposition 9.2), nous pouvons affirmer que  $\beta - 2\alpha < 0$ , et donc que  $\beta < 0$ . Cela signifie que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a exactement quatre racines réelles si et seulement si  $\alpha > 0$ .

Si  $\alpha < 0$ ,  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a exactement quatre racines complexes, et la démonstration est finie.

Si  $\alpha > 0$ , supposons que  $\lambda_i \neq 0$  (quitte à utiliser deux autres quadriques pour définir l'équation déterminantielle), et appliquons la transformation suivante aux variables de l'équation :

$$X = x\sqrt{\lambda_1}, Y = w\sqrt{-\lambda_4}, Z = z\sqrt{\lambda_3}, W = y\sqrt{-\lambda_2}.$$

Dans ce nouveau repère, les deux quadriques ont pour équations :

$$\begin{aligned} Q'_{\mathcal{Q}} &: X^2 + Y^2 - Z^2 - W^2 = 0, \\ Q'_{\mathcal{P}} &: \frac{X^2}{\lambda_1} + \frac{Y^2}{\lambda_4} - \frac{Z^2}{\lambda_3} - \frac{W^2}{\lambda_2} = 0. \end{aligned}$$

Nous nous retrouvons dans le même cas que précédemment, si ce n'est que nous allons paramétrer  $Q'_Q$  pour définir l'équation aux paramètres.  $\Delta'_{s,t}(u, v)$  se calcule de la même façon que précédemment. Nous avons alors que

$$\alpha' = \left( \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_4} \right) \left( \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_1} \right) = \frac{-\alpha}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} < 0.$$

Ce nouveau discriminant  $\Delta'_{s,t}(u, v)$  n'a donc pas de racines réelles. Comme ses valeurs positives ou nulles définissent le domaine de définition du paramétrage de la courbe de base du faisceau (qui n'est pas réduite à l'ensemble vide), nous pouvons en conclure que  $\Delta'_{s,t}(u, v)$  est strictement positif pour tout  $(u, v)$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , ce qui finit la démonstration.  $\square$

Dans le cas où le faisceau régulier ne contient qu'une composante connexe affinement finie, le domaine de définition du paramétrage de la courbe de base ne peut pas être  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Le discriminant  $\Delta_{s,t}(u, v)$  a toujours deux racines réelles et deux complexes. Il est toujours possible de faire en sorte que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  soit positif entre ces racines, et donc que le domaine de définition de la courbe de base soit un intervalle de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

Nous maîtrisons maintenant complètement la géométrie de l'intersection de deux quadriques dans le cas des faisceaux réguliers. Il s'agit pour nous de déterminer l'algorithme le plus efficace, dont le résultat peut être manipulé facilement pour des traitements ultérieurs.

## 2 Choix de la quadrique à paramétrer

### 2.1 Choix possibles

Dans un faisceau régulier, nous pouvons choisir de paramétrer soit une quadrique d'inertie (2, 2), soit une quadrique singulière (qui est d'inertie (2, 1)). Si nous utilisons une quadrique singulière, nous résolvons une équation de degré 2 en  $s$  (pour le paramétrage présenté dans le tableau 8.a), et obtenons un paramétrage en  $(u, v)$  de la courbe de base du faisceau. Nous savons que nous ne pouvons pas faire mieux, et ce qui nous intéresse maintenant, c'est de connaître le degré des polynômes apparaissant dans l'expression finale. Chaque coordonnée du vecteur de paramétrage est de la forme

$$\chi(u, v) + \Phi(u, v) \sqrt{\Delta(u, v)}.$$

$\chi$ ,  $\Phi$  et  $\Delta$  sont des polynômes de degré 2, 0 et 4. Si nous utilisons une quadrique d'inertie (2, 2), les degrés de ces polynômes sont 3, 1 et 4. Le choix paraît alors aller en faveur des cônes, mais en fait, il n'en est rien. En effet, il n'y a que quatre cônes dans le faisceau dont les paramètres dans le faisceau sont les racines de l'équation déterminantielle, un polynôme de degré 4.

Il n'est donc possible d'utiliser un cône du faisceau que si nous sommes sûrs qu'il est à coefficients rationnels. Ce cas peut apparaître de manière naturelle, et sans que nous ayons trop de calculs à faire pour le vérifier, quand une des deux quadriques de départ est un cône. En général, nous utiliserons une quadrique d'inertie (2, 2) car nous sommes assurés qu'elle est à coefficients rationnels. Dans le cas le pire, la théorie nous prédit que son paramétrage contient deux racines carrées. Nous allons montrer dans la section suivante que, dans le cadre de notre problème, il est possible d'en trouver une dans le faisceau dont les coefficients sont rationnels et dont le paramétrage ne contient au plus qu'une racine carrée.

### 2.2 Quadrique (2,2) et paramétrage avec une racine carrée

Nous avons déjà expliqué que si nous connaissons un point rationnel appartenant à une quadrique d'inertie (2, 2) à coefficients rationnels, nous étions capables de paramétrer cette

quadrique avec au plus une seule racine carrée (proposition 8.10). Nous avons de même signalé que la recherche d'un point rationnel sur une quadrique était un problème difficile que nous ne souhaitions pas résoudre dans le cadre de notre algorithme. La solution vient en prenant le problème en sens inverse. Nous allons chercher des points rationnels, puis retrouver parmi ces points lesquels appartiennent à une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  du faisceau, à coefficients rationnels. Explicitons cette méthode.

Assurons nous qu'il existe une infinité de quadriques d'inertie  $(2, 2)$  dans un faisceau régulier.

**Lemme 9.6** *Si un faisceau contient une quadrique d'inertie  $(2, 2)$ , alors il en contient une infinité.*

**Démonstration :** Il suffit de constater que l'inertie des quadriques correspondant aux paramètres de l'équation déterminantielle appartenant un intervalle sur lequel cette équation déterminantielle est de signe constant, reste constante.  $\square$

**Proposition 9.7** *Un faisceau régulier contient une infinité de quadriques d'inertie  $(2, 2)$ .*

La démonstration est immédiate en observant les formes réduites de deux quadriques du faisceau (c'est-à-dire après application du théorème de réduction simultanée).

Nous sommes assurés qu'il existe toujours des quadriques d'inertie  $(2, 2)$  dans un faisceau régulier, et qu'il y en a une infinité. Nous allons utiliser le lemme suivant pour notre méthode.

**Lemme 9.8** *Soit un faisceau de quadriques de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Soit  $p \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Alors soit  $p$  appartient à la courbe de base du faisceau, soit  $p$  appartient à exactement une quadrique du faisceau.*

**Démonstration :** Soit  $p$  un point. Soient  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques engendrant un faisceau non dégénéré. Si  $p$  appartient à la courbe de base de ce faisceau, alors il appartient à toutes les quadriques du faisceau. Supposons maintenant que  $p$  n'appartient pas à cette courbe. Alors l'équation  ${}^t p \cdot (\lambda \mathcal{P} + \mu \mathcal{Q}) \cdot p = 0$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est une équation de degré 1 en  $(\lambda, \mu)$  qui a une et une seule solution qui correspond à l'unique quadrique du faisceau contenant ce point  $p$ .  $\square$

À partir de ces résultats, il devient possible de trouver une quadrique  $(2, 2)$  dont le paramétrage ne nécessite qu'une racine carrée.

**Théorème 9.9** *Si un faisceau contient une quadrique  $(2, 2)$ , alors il est possible de trouver un point rationnel et une quadrique du faisceau, d'inertie  $(2, 2)$ , le contenant.*

L'algorithme 9.1 que nous présentons maintenant permet de construire ce point et cette quadrique. La détermination d'un point (réel) appartenant à la quadrique n'est pas un problème en soi. En effet une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  est un ensemble affinement infini et il suffit de prendre un point de la courbe d'intersection de la quadrique et de n'importe quel plan pour avoir un point réel sur cette quadrique. Pour cela, il suffit d'insérer le paramétrage  $X(u, v, s)$ ,  $(u, v, s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , d'un plan quelconque dans l'équation de la quadrique pour obtenir une équation de degré 2 en  $(u, v, s)$ . En choisissant arbitrairement  $u$  et  $v$ , reste à résoudre un polynôme de degré 2 en  $s$  pour trouver les coordonnées d'un point réel appartenant à la quadrique. Enfin, notons qu'au cours de l'algorithme 9.1 il se peut que les points rationnels  $p_r$  (ou éventuellement  $p$ ) calculés appartiennent à la courbe de base du faisceau. Qu'à cela ne tienne, ils appartiennent donc à toutes les quadriques du faisceau, il suffit donc d'en choisir une d'inertie  $(2, 2)$  pour obtenir le résultat.

**entrée :**  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux quadriques engendrant le faisceau,  
 $\mathcal{Q}_{22}$  une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  appartenant au faisceau  
**sortie :**  $p_r$  un point rationnel,  
 $\mathcal{Q}'_{22}$  une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  appartenant au faisceau, contenant  $p_r$ .

détermination d'un point réel  $p$  sur la quadrique  
**si**  $p$  est rationnel **alors**  
  **retourner**  $\mathcal{Q}_{22}$  et  $p$   
**fin si**  
 $p_r =$  approximation rationnelle de  $p$  à  $10^0$  près  
 $\mathcal{Q}'_{22} =$  quadrique du faisceau passant par  $p_r$   
 $i = 1$   
**tant que**  $\det(\mathcal{Q}'_{22}) \leq 0$  **faire**  
   $p_r =$  approximation rationnelle de  $p$  à  $10^{-i}$  près  
   $i = i + 1$   
   $\mathcal{Q}'_{22} =$  quadrique du faisceau passant par  $p_r$   
**fin tant que**  
**retourner**  $\mathcal{Q}'_{22}$  et  $p_r$

**Algorithme 9.1:** Recherche d'une quadrique  $(2, 2)$  contenant un point rationnel

**Démonstration du théorème 9.9 :** La preuve vient du fait qu'une petite perturbation des coefficients du point entraîne une petite perturbation du paramètre de la quadrique correspondante dans le faisceau car les fonctions liant les coordonnées du point et le paramètre dans le faisceau sont continues. Ainsi pour une assez petite perturbation des coordonnées du point, nous sommes assurés d'avoir une quadrique de même inertie qui le contient. Il suffit alors de trouver un rationnel assez proche du premier point réel calculé.  $\square$

Cette technique permet des résultats intéressants mais peut nécessiter de rechercher une approximation rationnelle très proche du point réel initial. La taille des coefficients entiers apparaissant dans l'expression rationnelle peut alors devenir importante. Il n'y a pas de moyen direct d'éviter ce phénomène. Le mieux que nous puissions faire est d'adopter une heuristique permettant la recherche de plusieurs points réels et plusieurs approximations d'un même point réel. Ainsi, par exemple, nous pouvons commencer par utiliser les six axes principaux du repère de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . La recherche sur le premier axe (d'équation  $x = y = 0$ ), à la première étape, c'est-à-dire pour une approximation à  $10^0$  près des coordonnées du point réel est soit le point  $(0, 0, 0, 1)$ , soit  $(0, 0, 1, 1)$ , soit  $(0, 0, 1, 0)$ . En effet supposons que  $p_r = (0, 0, r, 1)$  soit le point réel (avec  $r \in \mathbb{R}$ ). Si  $r = 0$ , l'algorithme s'arrête. Si  $|r| < 1$  son approximation à la première étape est soit  $(0, 0, 0, 1)$ , soit  $(0, 0, 1, 1)$ . Si  $|r| > 1$ , alors  $(0, 0, 1, 1/r)$  représente le même point et son approximation à la première étape est soit  $(0, 0, 1, 0)$ , soit  $(0, 0, 1, 1)$ .

Nous avons maintenant en main les principaux outils permettant de construire un algorithme efficace, dont le résultat peut être manipulé aisément. Dans la section suivante, nous présentons l'algorithme que nous utilisons quand le faisceau que nous étudions est régulier. Il est particulièrement efficace pour ce type de faisceaux, mais nous montrons qu'il peut être utilisé tel quel, sauf dans quelques cas, pour traiter les faisceaux singuliers, et qu'une légère adaptation permet de l'utiliser dans les cas restants et ceux où le faisceau est dégénéré.

### 3 Algorithme associé aux faisceaux réguliers

Compte tenu de ce que nous avons déjà présenté, l'algorithme associé aux faisceaux réguliers est assez simple. Il reprend les principes de l'algorithme de J. Levin tout en se concentrant sur les problèmes de complexité algébrique. Nous évitons dans la mesure du possible l'apparition de racines carrées dans nos coefficients.

**entrée :**  $Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}}$  : quadriques à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  engendrant un faisceau régulier

**sortie :** courbe d'intersection des deux quadriques

1. Première étape : recherche de l'équation aux paramètres :

- (a) **Si**  $Q_{\mathcal{P}}$  ou  $Q_{\mathcal{Q}}$  d'inertie  $(2, 1)$  (supposons que c'est  $Q_{\mathcal{P}}$ ) **alors** calculer l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  et passer à l'étape 2.
- (b) Calculer  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  et des intervalles d'isolation de ses racines réelles.
- (c) **Si**  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  n'a pas de racines réelles **alors** choisir  $p = (0, 0, 0, 1)$  et la quadrique  $Q_{\mathcal{R}}$  du faisceau qui passe par  $p$  (si toutes les quadriques du faisceau passent par  $p$ , poser  $Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathcal{P}}$ ). Calculer l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{R}, \mathcal{Q}}$  en vérifiant que le polynôme  $\Delta_{s,t}(u, v)$  qui en résulte n'a pas de racines réelles, et passer à l'étape 2.
- (d) **Si**  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a deux racines réelles, choisir une quadrique  $Q_{\mathcal{S}}$  d'inertie  $(2, 2)$  dans l'intervalle où  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  est strictement positive. Passer à l'étape 1.(f).
- (e) **Si**  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a quatre racines réelles, vérifier que le faisceau ne contient pas de quadrique d'inertie  $(4, 0)$  (en calculant l'inertie d'une quadrique dans chacun des intervalles où l'équation déterminantielle est positive). **Si** il existe une quadrique d'inertie  $(4, 0)$ , **alors renvoyer** « intersection vide », sinon choisir une quadrique  $Q_{\mathcal{S}}$  d'inertie  $(2, 2)$  dans un des deux intervalles (par exemple le plus grand).
- (f) Appliquer à  $Q_{\mathcal{S}}$  l'algorithme 9.1 qui renvoie une quadrique  $Q_{\mathcal{R}}$  et un point  $p$  rationnel appartenant à  $Q_{\mathcal{R}}$ . Si  $Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathcal{Q}}$  poser  $Q_{\mathcal{Q}} = Q_{\mathcal{P}}$ . Calculer l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{R}, \mathcal{Q}}$  et passer à l'étape 2.

2. Deuxième étape : résolution de l'équation aux paramètres de degré 2

**Algorithme 9.2:** Algorithme générique.

L'algorithme que nous venons de présenter est optimal car il renvoie une forme exacte du paramétrage de la courbe de base du faisceau, la plus simple possible dans le sens où la racine carrée d'un polynôme présente dans son expression est nécessaire. De plus, cet algorithme est quasi-optimal dans le sens où l'expression du paramétrage obtenu peut contenir au plus une racine carrée (d'un nombre rationnel) possiblement non nécessaire. Cette possible racine carrée non nécessaire est présente si nous utilisons, pour déterminer l'équation aux paramètres, une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  dont le paramétrage contient une racine carrée et que dans le faisceau il en existe dont le paramétrage ne nécessite pas de racine carrée. Comme nous l'avons déjà vu, la recherche de telles quadriques n'est pas envisageable car trop coûteuse. Nous ne faisons pas cette recherche puisqu'en plus nous ne sommes pas assurés d'obtenir une réponse favorable.

### 4 Algorithme général

L'algorithme associé aux faisceaux réguliers peut être utilisé tel quel pour tous les cas où le faisceau contient des quadriques d'inertie  $(2, 2)$ .



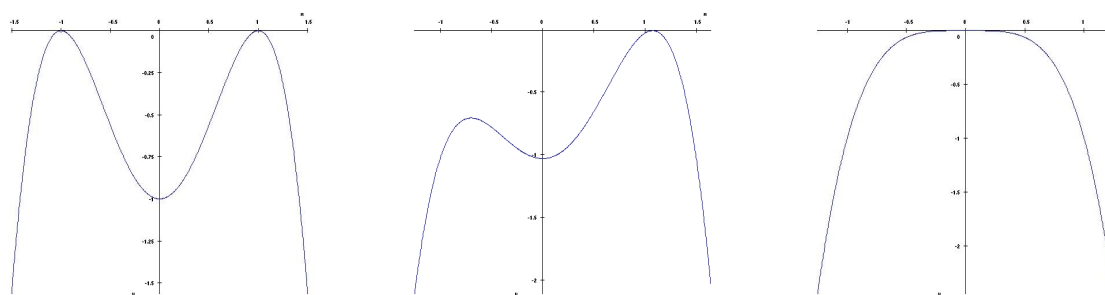


FIG. 9.2 – Courbes associées aux équations déterminantielles non identiquement nulles des faisceaux ne contenant pas de quadriques d’inertie  $(2, 2)$ . À gauche, l’équation déterminantielle a deux racines doubles réelles, au centre une racine double et deux racines complexes, et à droite une racine quadruple.

Si l’équation déterminantielle du faisceau est identiquement nulle, le déterminant de toutes les quadriques du faisceau est nul, ces quadriques sont donc toutes singulières. Il suffit alors de choisir une quadrique d’inertie  $(2, 1)$  dans le faisceau à la place d’une quadrique d’inertie  $(2, 2)$  s’il en existe. Dans ce cas, l’algorithme que nous avons construit pour choisir dans le faisceau une quadrique d’inertie  $(2, 2)$  contenant un point rationnel (connu) peut être transposé au cas des quadriques d’inertie  $(2, 1)$ .

Reste un cas plus complexe à étudier, celui où l’équation déterminantielle n’est pas identiquement nulle et où le faisceau ne contient pas de quadriques d’inertie  $(2, 2)$ . Ce cas survient quand l’équation déterminantielle du faisceau est toujours négative ou nulle (l’équation déterminantielle ne peut pas être toujours négative car sinon le faisceau ne contiendrait pas de quadriques réglées!). La figure 9.2 illustre les trois cas possibles. Il suffit alors de déterminer la ou les quadriques singulières du faisceau et de l’utiliser pour définir l’équation aux paramètres. Quand l’équation déterminantielle a une racine double réelle (et deux racines simples complexes) ou une racine quadruple, cette racine est rationnelle. La quadrique que nous utilisons est alors à coefficients rationnels. Par contre, dans le cas où l’équation déterminantielle a deux racines doubles réelles non rationnelles, elles appartiennent à une extension de degré 2 de  $\mathbb{Q}$ . Les quadriques singulières correspondant à ces racines ne sont pas à coefficients rationnels.

Pour résoudre ce problème, nous pouvons toujours citer le résultat suivant :

**Théorème 9.10** *Un faisceau dont les quadriques d’inertie autre que  $(3, 1)$  ne sont pas à coefficients rationnels a une courbe de base réduite à au plus deux points.*

**Démonstration :** S’il existe une infinité de quadriques d’inertie autre que  $(3, 1)$ , il est immédiat qu’il en existe à coefficients rationnels. Pour que les hypothèses du théorème soient réalisées, il faut que le faisceau soit constitué de quadriques d’inertie  $(3, 1)$  et d’au plus un nombre fini de quadriques singulières. Les trois courbes associées à de tels faisceaux de la figure 9.2 illustrent les trois cas possibles. Dans le cas d’une racine quadruple ou d’une seule racine double réelle, il est clair que ces racines sont rationnelles. Reste le cas de deux racines doubles réelles pour lequel ces deux racines peuvent appartenir à une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré 2.

Considérons les formes réduites de deux quadriques d’inertie  $(3, 1)$  d’un faisceau dont l’équation déterminantielle a deux racines doubles réelles irrationnelles. Ces racines sont de la forme  $a \pm b\sqrt{c}$ ,  $(a, b, c \in \mathbb{Q})$ . Les deux quadriques correspondantes sont conjuguées sur l’extension de  $\mathbb{Q}$  sur laquelle sont définis leurs coefficients, elles sont donc de même rang. Il y a donc deux

réductions possibles d'après le théorème 7.14 :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Dans les deux réductions,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  représentent les racines de l'équation déterminantielle,  $\varepsilon_i = \pm 1$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Notons de plus que les deux quadriques singulières ne peuvent pas être toutes les deux de rang 3 car sinon il n'y aurait pas de quadrique d'inertie  $(3, 1)$  dans le faisceau. Le cas de la réduction (2) ne peut donc pas se présenter. La seule réduction possible est alors de la forme (1). Les deux quadriques singulières du faisceau sont toutes les deux de rang 2. Les équations des deux quadriques singulières, dans le repère où toutes les équations des quadriques du faisceau sont canoniques, sont :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{S}_1} & \alpha x^2 + \beta y^2 = 0, \\ Q_{\mathcal{S}_2} & \gamma z^2 + \delta w^2 = 0. \end{cases} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{\pm 1\}.$$

Toutes les autres quadriques du faisceau sont d'inertie  $(3, 1)$ , en particulier  $Q_{\mathcal{S}_1} + Q_{\mathcal{S}_2}$ . C'est une quadrique régulière d'inertie  $(3, 1)$ . Nous en déduisons immédiatement que l'une des deux quadriques singulières est d'inertie  $(1, 1)$  et l'autre d'inertie  $(2, 0)$ . Il s'agit donc d'une paire de plans sécants et d'une droite (droite singulière d'une paire de plans complexes). La droite n'est pas contenue dans l'autre paire de plans. Elle coupe chacun des deux autres plans en un point, la courbe de base du faisceau est donc constituée de deux points dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .  $\square$

Étudions, à titre d'exemple, le faisceau défini par les quadriques :

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{P}} &: 2x^2 - xz - 2yw + z^2 + w^2 = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} &: 4x^2 + 2y^2 - 2yw + z^2 - 6xz + 3w^2 = 0. \end{aligned}$$

L'équation déterminantielle définie par ces deux quadriques est :

$$-\lambda^4 + 10\lambda^2\mu^2 - 25\mu^4 = 0.$$

Les deux racines doubles réelles de ce polynôme sont  $(5, \sqrt{5})$  et  $(5, -\sqrt{5})$ . Les quadriques correspondantes sont d'inerties  $(2, 0)$  et  $(1, 1)$ . Les deux points d'intersection constituant la courbe de base du faisceau sont

$$\begin{pmatrix} \pm(1 - \sqrt{5})\sqrt{-2 + \sqrt{5}} \\ -3 + \sqrt{5} \\ \mp 2\sqrt{-2 + \sqrt{5}} \\ 4 - 2\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Hormis ces quelques cas particuliers où soit l'algorithme peut être adapté, soit nous utilisons un résultat auxiliaire, l'algorithme associé aux faisceaux réguliers peut constituer une base

solide pour une première implantation de l'algorithme de calcul d'une forme paramétrée de l'intersection de deux quadriques. Nous pouvons cependant améliorer la complexité algébrique des résultats obtenus en étudiant chaque cas de faisceau singulier ou dégénéré. L'objet du prochain chapitre est de déterminer chacun de ces cas en appliquant le théorème 7.14 à deux quadriques du faisceau. C'est le passage obligé avant de pouvoir décrire les différents algorithmes possibles que nous présentons au chapitre 11.



# Chapitre 10

## Étude des courbes singulières

Nous avons montré au chapitre précédent que l'algorithme associé aux faisceaux réguliers pouvait être utilisé dans tous les cas, à quelques modifications mineures près. Nous montrerons dans le chapitre suivant pourquoi cet algorithme ne nous satisfait pas quand nous ne sommes pas en présence d'un faisceau régulier. L'objectif du présent chapitre est de compléter l'étude géométrique des faisceaux singuliers et dégénérés et de présenter les différentes courbes de base que nous pouvons obtenir dans ces deux cas. Dans une première section, nous définissons la notion de singularité convexe ou concave que nous utiliserons dans la suite de ce chapitre. La deuxième section est consacrée à la présentation et à l'illustration de tous les cas possibles, sans donner de justification à nos résultats. La troisième section montre sur quelques exemples significatifs comment utiliser le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques pour retrouver ces résultats. La dernière section contient une étude détaillée de chaque cas et énumère les propriétés importantes des faisceaux correspondants, permettant ainsi de les distinguer les uns des autres sans utiliser le théorème 7.14, dans l'optique de construire un algorithme efficace.

### 1 Singularités convexes ou concaves de la courbe de base

Nous introduisons maintenant une notion annexe de la singularité d'un point, à savoir si elle est convexe ou concave.

**Proposition 10.1 (Plan tangent)** *Soit un faisceau non dégénéré. Soit  $p$  un point singulier de la courbe de base de ce faisceau. Alors il existe une et une seule quadrique dans le faisceau pour laquelle  $p$  est un point singulier et toutes les autres quadriques du faisceau ont le même plan tangent en  $p$ .*

**Démonstration :** Si deux quadriques du faisceau avaient le même point singulier  $p$ , le faisceau serait dégénéré comme le montre le théorème 7.10. Montrons maintenant que les autres quadriques du faisceau ont le même plan tangent en ce point. Notons  $Q_{\mathcal{P}}$  la quadrique du faisceau ayant  $p$  pour un point singulier. Comme  $p$  est un point singulier de la courbe de base du faisceau, nous pouvons affirmer que la matrice jacobienne définie par l'équation de  $Q_{\mathcal{P}}$  et l'équation d'une autre quadrique  $Q_{\mathcal{Q}}$  du faisceau est de rang 1, et non de rang 0 puisque le faisceau n'est pas dégénéré. Cela signifie qu'il existe un vecteur  $v$  qui soit proportionnels aux vecteurs correspondant à la Jacobienne en ce point de toutes les quadriques du faisceau autres que  $Q_{\mathcal{P}}$ . Nous pouvons alors conclure qu'elles ont toutes le même plan tangent en ce point.  $\square$

La notion de singularité convexe ou concave permet d'illustrer le fait que toutes les portions de la courbe de base du faisceau passant en ce point, traverse ou pas le plan tangent que nous venons de définir. La situation est illustrée par la figure 10.1. Sur cette illustration, dans les deux cas, ce sont deux composantes algébriques différentes qui se croisent au point singulier. Sur l'illustration (a), les courbes ne traversent pas le plan tangent, nous parlons de singularité convexe. Sur l'illustration (b), elles le traversent, nous parlons de singularité concave.

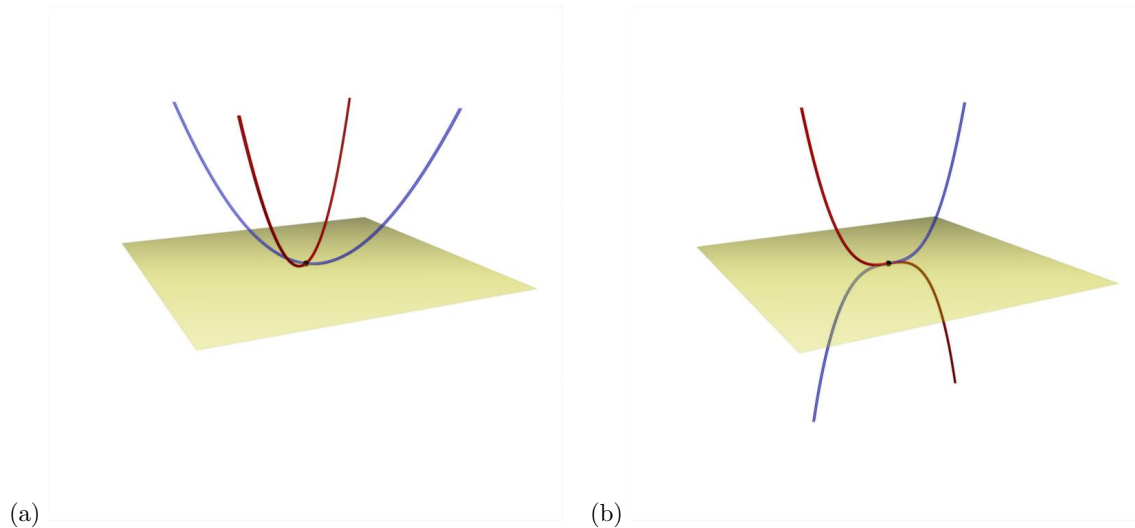


FIG. 10.1 – Singularités convexes et concaves.

**Définition 10.2** *Soit une courbe de base d'un faisceau contenant un nœud simple. La singularité définie par ce point est dite convexe si, localement, toute partie de la courbe passant par ce point reste du même côté du plan tangent défini dans la proposition 10.1, elle dite concave si chaque partie de la courbe passant par ce point traverse le plan tangent.*

## 2 Résultats

Nous obtenons après calculs 47 cas différents d'intersection si le faisceau est singulier ou dégénéré. Devant la multitude de cas distincts nous avons décidé de les exposer sous forme de cinq tableaux, chacun correspondant à la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle (tableaux 10.a à 10.d), ou au fait que le faisceau soit dégénéré (tableau 10.e). Dans une première approximation, nous pouvons dire que nos critères de distinction entre les différents cas sont la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle, la nature réelle ou complexe de ces racines, l'inertie des quadriques correspondant à ces racines, et la forme et la taille des blocs de Jordan apparaissant dans la réduction simultanée des matrices de deux quadriques du faisceau. Si nous voulons être plus précis, il faut noter que dans le cas des faisceaux dégénérés, soit les quadriques du faisceau n'ont aucun point singulier en commun, soit les quadriques du faisceau ont au moins un point singulier en commun. Dans ce dernier cas, nous pouvons nous ramener à une sous-équation déterminantielle en nous plaçant dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  pour étudier les quadriques du faisceau (se reporter à la sous-section 7.3.4.1). En ce qui concerne le critère d'inertie des quadriques associées aux racines de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ , nous devons préciser que si ces racines sont complexes, les matrices des quadriques correspondantes sont à coefficients complexes et cela n'a pas vraiment de sens de parler d'inertie de telles matrices ; nous étudierons alors le rang de ces quadriques et

la forme des blocs de Jordan associés dans la réduction simultanée de deux quadriques de tels faisceaux.

| inertie de $Q_S$ | inertie de $Q_R$ | blocs de Jordan              | équations   | résultat   |
|------------------|------------------|------------------------------|---|--|
| (2,1)            | (2,2)            |                              | $\begin{cases} z^2 + yw = 0 \\ xw + yz = 0 \end{cases}$   | une cubique et une droite, tangentes   |
| (2,0)            | (2,2)            |                              | $\begin{cases} y^2 + w^2 = 0 \\ xy + zw = 0 \end{cases}$  | une droite double  |
| (1,1)            | (3,1)            |                              | $\begin{cases} yz = 0 \\ y^2 + xz + w^2 = 0 \end{cases}$  | une conique  |
| (1,1)            | (2,2)            | $2 \times 2$ et $2 \times 2$ | $\begin{cases} y^2 - w^2 = 0 \\ xy - zw = 0 \end{cases}$  | une droite double et deux droites non sécantes entre elles, coupant chacune la droite double |
| (1,1)            | (2,2)            | $3 \times 3$ et $1 \times 1$ | $\begin{cases} yz = 0 \\ y^2 + xz - w^2 = 0 \end{cases}$  | une conique et deux droites la coupant au même point   |
| (1,0)            | (3,1)            |                              | $\begin{cases} w^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + zw = 0 \end{cases}$ | un point   |
| (1,0)            | (2,2)            |                              | $\begin{cases} w^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + zw = 0 \end{cases}$ | deux droites doubles   |
| (0,0)            |                  |                              |   | n'importe quelle quadrique sauf $Q_S = 0$  |

TAB. 10.a – Intersections possibles quand  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine quadruple réelle -  $Q_S$  est la quadrique associée à cette racine -  $Q_R$  une autre quadrique du faisceau, non singulière. Quand cela est nécessaire, la forme des blocs de Jordan obtenus dans la réduction simultanée de deux quadriques du faisceau est donnée. Les équations de  $Q_S$  et d'une autre quadrique du faisceau sont données.

Le fait d'utiliser le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques permet de distinguer tous les cas possibles. En pratique, dans l'optique de construire un algorithme efficace de séparation des différents cas, nous devons éviter de calculer cette réduction simultanée et utiliser d'autres critères plus simples à déterminer. Cela explique pourquoi la forme des blocs de Jordan n'apparaît qu'épisodiquement dans les tables que nous présentons. Nous utiliserons généralement d'autres critères de distinction comme l'inertie de certaines quadriques du faisceaux, ou encore les propriétés des éléments singuliers des quadriques singulières du faisceau. Cela nous permet d'éviter la recherche effective d'une réduction simultanée, *a priori* coûteuse et non utile pour la suite puisqu'elle est susceptible d'introduire des racines de polynôme non rationnelles.

Le premier tableau (10.a) correspond au cas où l'équation déterminantielle possède une racine quadruple. L'équation n'a donc qu'une racine rationnelle, réelle. Comme nous l'avons annoncé, les cas correspondant aux quatrième et cinquième lignes peuvent être séparés en étudiant la taille des blocs de Jordan dans la réduction simultanée de deux quadriques du faisceau ; mais dans notre algorithme, nous utiliserons un autre critère pour distinguer les deux cas. Ici, la quadrique singulière d'inertie (1,1) contient une droite singulière ; si cette droite singulière est contenue dans les autres quadriques du faisceau (il y a deux blocs de Jordan  $2 \times 2$ ), la courbe de base du faisceau est composée d'une droite double et de deux droites non sécantes entre elles, chacune coupant la droite double. Dans le cas contraire (il y a un bloc de Jordan  $3 \times 3$  et un  $1 \times 1$ ), la courbe de base du faisceau est constituée d'une conique non singulière et de deux droites simples.

Le deuxième tableau (10.b) correspond aux cas où l'équation déterminantielle possède une racine triple et une racine simple. Les deux racines sont forcément réelles et rationnelles. La connaissance des inerties des quadriques correspondant aux racines de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  suffit à distinguer les différents cas possibles.

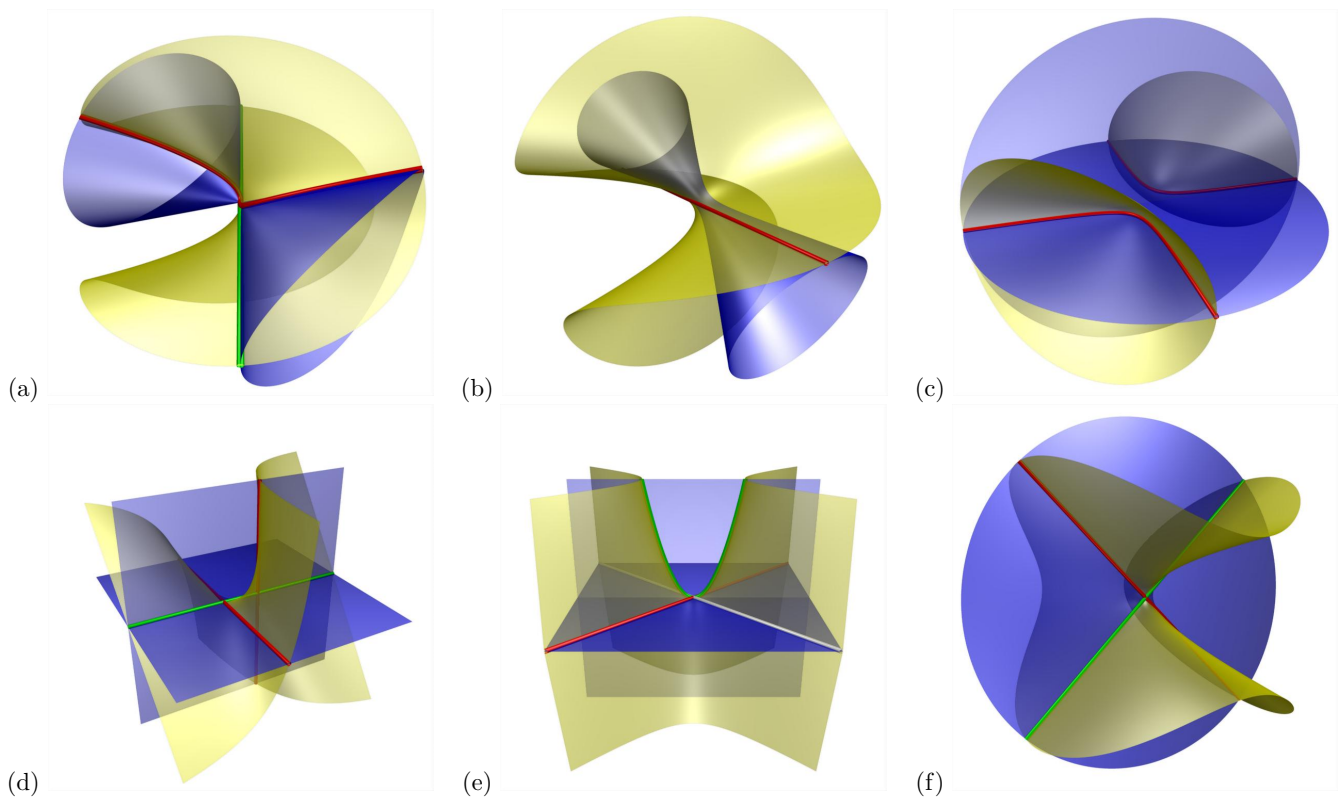


FIG. 10.2 – Intersections pour lesquelles l'équation déterminantielle a une racine quadruple - (a) une cubique et une droite sécante - (b) une droite double - (c) une conique - (d) une droite double (verte) et deux droites simples - (e) une conique et deux droites - (f) deux droites doubles

| inertie de $Q_{S_1}$ | inertie de $Q_{S_2}$ | équations de $Q_{S_1}$ et $Q_{S_2}$                        | résultat                                |
|----------------------|----------------------|--|---|
| (2,1)                | (2,1)                | $\begin{cases} w^2 + yz = 0 \\ y^2 + xz = 0 \end{cases}$   | quartique cuspidale                     |
| (2,0)                | (2,1)                | $\begin{cases} x^2 + w^2 = 0 \\ xy + z^2 = 0 \end{cases}$  | un point double                         |
| (1,1)                | (2,1)                | $\begin{cases} x^2 + w^2 = 0 \\ xy + z^2 = 0 \end{cases}$  | 2 coniques tangentes en un point double |
| (1,0)                | (3,0)                | $\begin{cases} w^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ | $\emptyset$                             |
| (1,0)                | (2,1)                | $\begin{cases} w^2 = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ | une conique double                      |

TAB. 10.b – L'équation déterminantielle a une racine triple et une racine simple -  $Q_{S_1}$  est la quadrique correspondant à la racine triple,  $Q_{S_2}$  à la racine simple.

Le troisième tableau (10.c) correspond aux cas où l'équation déterminantielle possède une racine double et deux racines simples (distinctes). Ce tableau est significatif de la multiplication des cas dans l'espace projectif réel par rapport à l'étude dans l'espace projectif complexe. Non seulement la nature réelle ou complexe des racines joue un rôle discriminant, mais en plus la nature réelle ou imaginaire des cônes et des paires de plans joue un rôle important. Quand ils sont imaginaires, ils sont réduits, dans l'espace réel à un point pour le cône, à une droite pour



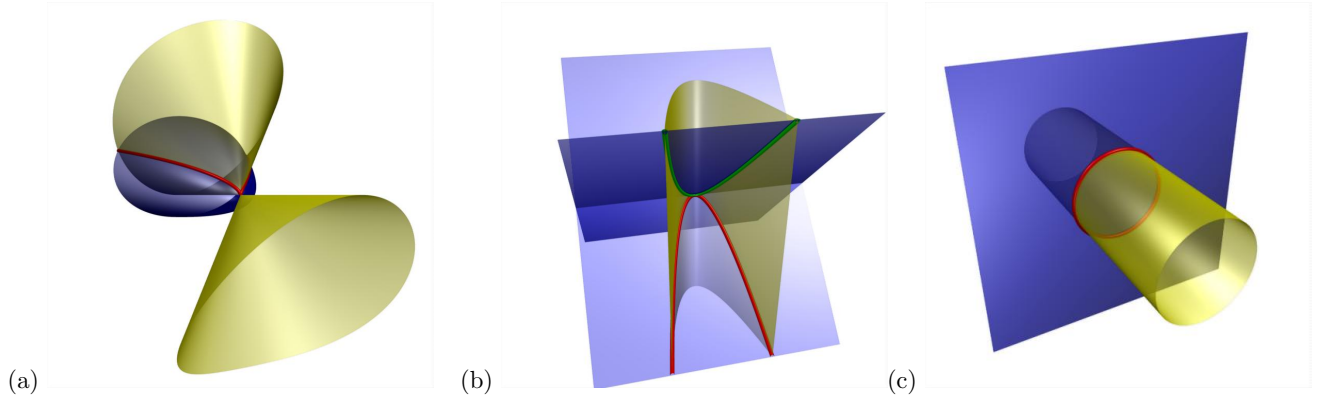


FIG. 10.3 – Intersections pour lesquelles l'équation déterminantielle a une racine triple - (a) quartique cuspidale - (b) deux coniques tangentes en un point - (c) une conique double.

| inertie de $Q_{S_1}$ | nature des racines simples | inertie de $Q_{S_2}$ et $Q_{S_3}$ | inertie de $\mathcal{R}$ | équations   | résultat  |
|----------------------|----------------------------|-----------------------------------|--------------------------|---|---|
| (3,0)                | réelles                    |                                   |                          | $\begin{cases} y^2 + z^2 + w^2 = 0 \\ xy + w^2 = 0 \end{cases}$   | un point double réel  |
| (2,1)                | réelles                    | (2,1) et (2,1)                    | (3,1)                    | $\begin{cases} y^2 - z^2 - w^2 = 0, \\ xy - w^2 = 0 \end{cases}$  | quartique nodale avec point isolé                           |
| (2,1)                | réelles                    | (2,1) et (2,1)                    | (2,2)                    | $\begin{cases} y^2 + z^2 - w^2 = 0, \\ xy + w^2 = 0 \end{cases}$  | quartique nodale sans point isolé                           |
| (2,1)                | complexes                  |                                   | (2,2)                    | $\begin{cases} y^2 + zw = 0 \\ xy + z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$    | quartique nodale sans point isolé                           |
| (2,0)                | réelles                    | (3,0) et (2,1)                    |                          | $\begin{cases} z^2 + w^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$  | $\emptyset$   |
| (2,0)                | réelles                    | (2,1) et (2,1)                    |                          | $\begin{cases} z^2 + w^2 = 0, \\ x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ | deux points   |
| (1,1)                | réelles                    | (3,0) et (3,0)                    |                          | $\begin{cases} z^2 - w^2 = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$ | $\emptyset$   |
| (1,1)                | réelles                    | (2,1) et (2,1)                    | (3,1)                    | $\begin{cases} z^2 - w^2 = 0 \\ -x^2 - y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ | deux coniques distinctes                                    |
| (1,1)                | réelles                    | (2,1) et (2,1)                    | (2,2)                    | $\begin{cases} z^2 - w^2 = 0 \\ -x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{cases}$ | deux coniques sécantes en deux points (singularité convexe) |
| (1,1)                | complexes                  |                                   | (2,2)                    | $\begin{cases} zw = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$   | deux coniques sécantes en deux points (singularité concave) |
| (1,1)                | complexes                  |                                   | (3,1)                    | $\begin{cases} zw = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$   | une conique simple  |

TAB. 10.c –  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a une racine double et deux racines simples - la quadrique  $Q_{S_1}$  est associée à la racine double,  $Q_{S_2}$  et  $Q_{S_3}$  aux racines simples -  $Q_{\mathcal{R}}$  est une quadrique non singulière dont le paramètre dans le faisceau est voisin de celui de  $Q_{S_1}$ .

le plan. La partie réelle de la courbe d'intersection s'en trouve alors réduite à l'ensemble vide (cône imaginaire pour l'une des racines simples, cinquième ligne dans le tableau), à un point (cône imaginaire, première ligne du tableau), ou deux points (plans imaginaires, sixième ligne du tableau).

Le quatrième tableau (10.d) correspond au cas où l'équation déterminantielle possède deux racines doubles distinctes. C'est le cas le plus particulier. En effet, il se peut, si les deux racines

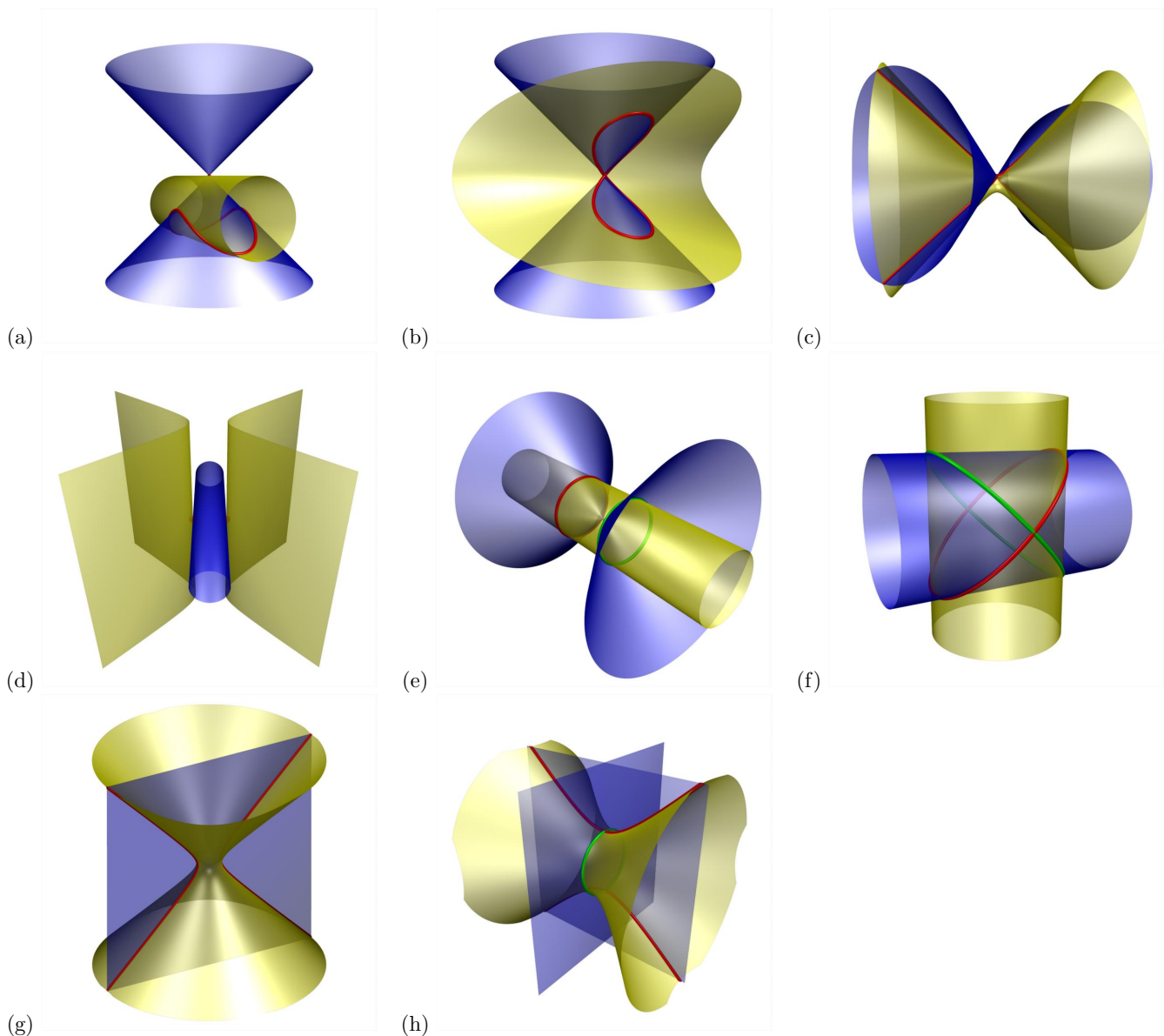


FIG. 10.4 – Illustrations des courbes d'intersection dans le cas où l'équation déterminantielle a une racine double et deux racines simples (a) quartique nodale avec point isolé (b-c) quartique nodale sans point isolé (d) 2 points (e) 2 coniques distinctes (f) 2 coniques sécantes en 2 points (g) 1 conique (h) 2 coniques sécantes en 2 points.

doubles sont complexes (et donc conjuguées), que le faisceau ne contient aucune quadrique singulière réelle ; toutes les quadriques sont d'inertie  $(2, 2)$ , car sinon elles seraient toutes d'inertie  $(3, 1)$  et il n'y aurait pas de quadrique réglée dans le faisceau. Cette situation regroupe deux cas de figures énoncés dans les deux dernières lignes du tableau. Ils peuvent se distinguer l'un de l'autre soit par la taille des blocs de Jordan apparaissant dans la réduction simultanée de deux quadriques du faisceau, soit par le rang des quadriques complexes correspondant aux racines de l'équation déterminantielle (cela n'a alors pas de sens de parler d'inertie d'une matrice).

Le dernier tableau (10.e) correspond au cas des faisceaux dégénérés. Il existe alors deux cas

| nature    | inertie de $Q_{S_1}$ et $Q_{S_2}$ | inertie de $Q_{\mathcal{R}}$ | équations  | résultat   |
|-----------|-----------------------------------|------------------------------|--|--|
| réelles   | (1,1) et (3,0)                    |                              | $\begin{cases} xy = 0 \\ y^2 + z^2 + w^2 = 0 \end{cases}$            | un point   |
| réelles   | (1,1) et (2,1)                    | (2,2)                        | $\begin{cases} xy = 0 \\ y^2 + z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$            | une conique et deux droites sécantes, chaque droite coupe la conique en un point |
| réelles   | (1,1) et (2,1)                    | (3,1)                        | $\begin{cases} xy = 0 \\ y^2 - z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$            | une conique et un point isolé  |
| réelles   | (2,1) et (2,1)                    |                              | $\begin{cases} y^2 + zw = 0 \\ xy + w^2 = 0 \end{cases}$             | une cubique et une droite se coupant en deux points distincts                    |
| réelles   | (2,0) et (2,0)                    |                              | $\begin{cases} z^2 + w^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$           | $\emptyset$  |
| réelles   | (1,1) et (2,0)                    |                              | $\begin{cases} z^2 - w^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$           | deux points  |
| réelles   | (1,1) et (1,1)                    |                              | $\begin{cases} z^2 - w^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$           | quatre droites formant un quadrilatère gauche                                    |
| nature    | rang de $Q_{D_1}$ et $Q_{D_2}$    |                              | équations  | résultat   |
| complexes | 2 et 2                            |                              | $\begin{cases} xy + wz = 0 \\ x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 0 \end{cases}$ | deux droites simples   |
| complexes | 3 et 3                            |                              | $\begin{cases} xw + yz = 0 \\ xz - yw = 0 \end{cases}$               | une cubique et une droite ne se coupant pas                                      |

TAB. 10.d – L'équation déterminantielle a deux racines doubles -  $Q_{S_1}$  et  $Q_{S_2}$  les quadriques qui leur sont associées -  $Q_{\mathcal{R}}$  une autre quadrique du faisceau, non singulière. Pour les deux dernières lignes, les quadriques singulières sont à coefficients complexes, les deux cas se distinguent selon le rang des matrices à coefficients complexes associées.

de figures. Soit les quadriques du faisceau ont en commun au moins un point singulier, soit elle n'en ont pas. Le deuxième cas se résume à un seul cas que nous avons intégré au tableau sur sa première ligne. Si les quadriques ont au moins un point singulier commun, la situation est plus compliquée. Il existe un repère dans lequel toutes les matrices des quadriques ont leur dernière ligne et leur dernière colonne nulles (théorème 7.10). Nous nous ramenons donc à l'intersection de deux quadriques (donc des coniques) dans l'espace  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Nous parlons alors de sous-équation déterminantielle pour exprimer le fait que nous considérons la partie  $3 \times 3$  supérieure gauche des matrices. L'étude est alors similaire et beaucoup plus simple que dans le cas de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , les points d'intersections dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  servant de générateurs aux droites d'intersection correspondantes dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Dans cette optique, les coniques d'inertie (2, 1) deviennent les coniques régulières, et les coniques dont les matrices sont de rang inférieur à 3 sont dites « singulières ». Parmi les différents faisceaux de ce type, nous pouvons considérer que ceux pour lesquels la sous-équation déterminantielle est identiquement nulle et nous séparons alors le cas des coniques n'ayant aucun point singulier commun de celles en ayant au moins un en commun. Dans le deuxième cas nous pouvons encore baisser la dimension de l'espace de travail et étudier l'intersection de « bipoints » de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

### 3 Application du théorème d'Uhlig

Le but de cette section est de montrer comment utiliser le théorème 7.14. Notre premier critère discriminant est la multiplicité et la nature des racines de l'équation déterminantielle, car ce sont les invariants du faisceau qui se calculent le plus rapidement. À partir de cette information, nous pouvons, grâce au théorème 7.14, déterminer les réductions possibles de deux formes quadratiques du faisceau. Nous commençons par présenter les différents cas pouvant

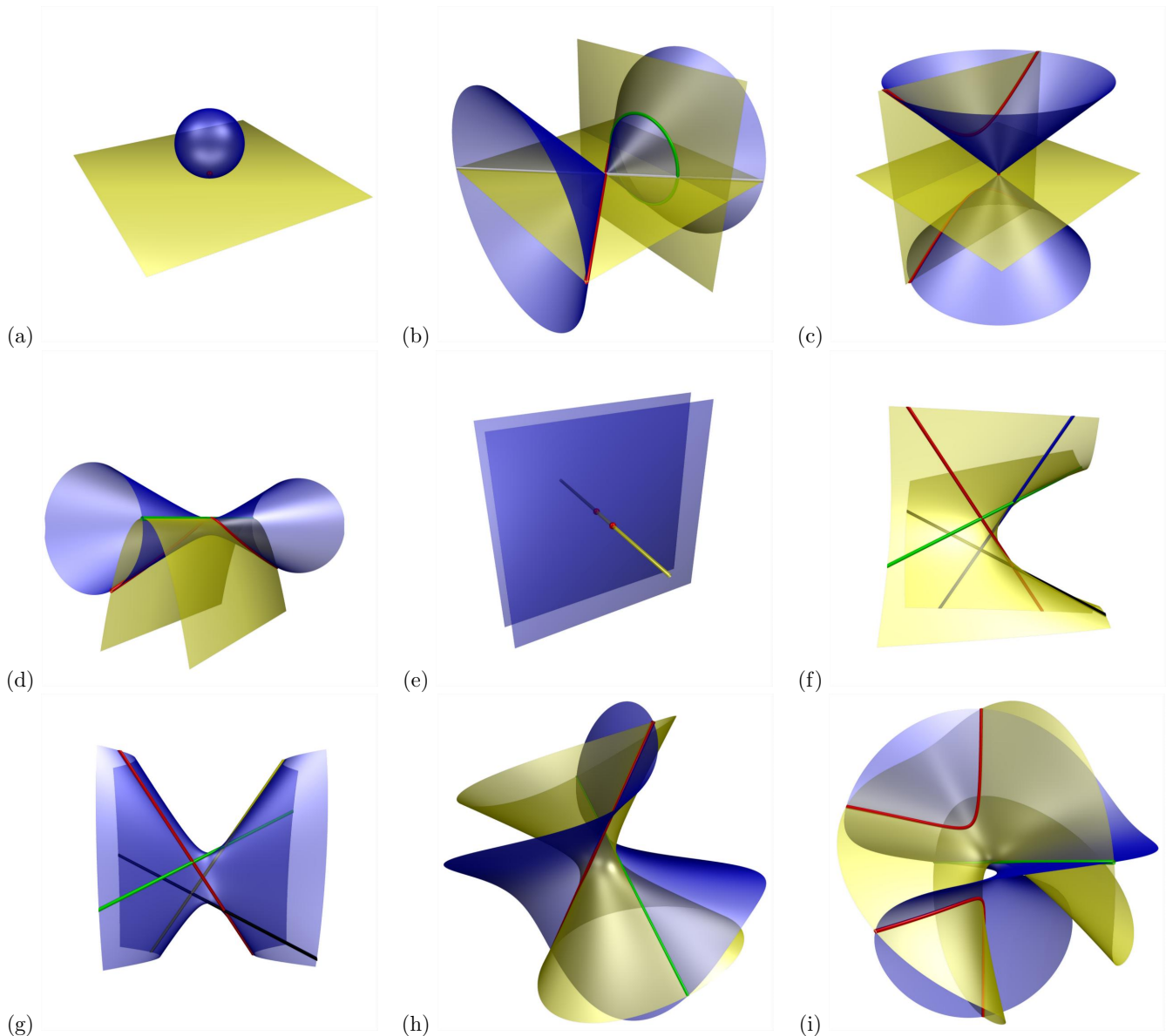


FIG. 10.5 – Intersections pour lesquelles l'équation déterminantielle a deux racines doubles - (a) un point - (b) une conique et deux droites - (c) une conique et un point - (d) une cubique et une droite sécantes en deux points (ici un des deux points est à l'infini) - (e) deux points - (f-g) quadrilatère gauche - (h) deux droites simples non sécantes - (i) une droite et une cubique, non sécantes.

survenir si l'équation déterminantielle a une racine quadruple et comment les séparer. Nous montrons ensuite un exemple simple où l'étude dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  se confond avec celle dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , le cas d'un faisceau dont l'équation déterminantielle a une racine quadruple et pour lequel la matrice de la quadrique correspondant à cette racine est de rang 3. Le deuxième exemple est celui d'un faisceau dont l'équation déterminantielle a une racine double et deux simples et dont la matrice de la quadrique associée à la racine double est de rang 2. Ce dernier exemple illustre la multiplication des cas apparaissant lors du passage de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  à  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Ainsi, par exemple, l'intersection de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  et d'une conique de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  peut être soit la conique toute entière, soit

| multiplicité des racines          | inerties          | nature                | équations  | résultat  |
|-----------------------------------|-------------------|-----------------------|--|---|
| → pas de point singulier commun → |                   |                       | $\begin{cases} xw = 0 \\ xz + y^2 = 0 \end{cases}$         | une conique et une droite double se coupant en un point                             |
| 1-1-1                             | (1,1) (1,1) (1,1) | 3 réelles             | $\begin{cases} z^2 - y^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ | quatre droites concourantes   |
| 1-1-1                             | (2,0) (2,0) (1,1) | 3 réelles             | $\begin{cases} z^2 - x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ | un point  |
| 1-1-1                             | (2,0)             | 1 réelle, 2 complexes | $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ yz = 0 \end{cases}$  | deux droites réelles  |
| 2-1                               | (2,0) (1,1)       | réelles               | $\begin{cases} x^2 + y^2 = 0 \\ xz = 0 \end{cases}$        | une droite double   |
| 2-1                               | (1,1) (1,1)       | réelles               | $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xz = 0 \end{cases}$        | une droite double et deux droites simples toutes les trois concourantes en un point |
| 2-1                               | (1,0) (1,1)       | réelles               | $\begin{cases} z^2 = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$       | deux droites doubles sécantes   |
| 2-1                               | (1,0) (2,0)       | réelles               | $\begin{cases} z^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$       | un point  |
| 3                                 | (1,1)             | réelles               | $\begin{cases} xy = 0 \\ xz + y^2 = 0 \end{cases}$         | une droite triple et une simple sécantes  |
| 3                                 | (1,0)             | réelle                | $\begin{cases} y^2 = 0 \\ xy + z^2 = 0 \end{cases}$        | une droite quadruple  |
| 3                                 | (0,0)             |                       | $\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$            | un cône   |
| → pas de point singulier commun → |                   |                       | $\begin{cases} xy = 0 \\ xz = 0 \end{cases}$               | un plan et une droite se coupant en un point  |
| 1-1                               |                   | réelles ou complexes  | $\begin{cases} y^2 = 0 \\ x^2 = 0 \end{cases}$             | une droite quadruple  |
| 2                                 |                   | réelle                | $\begin{cases} xy = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$              | un plan et une droite contenue dans le plan   |
| 1                                 |                   | réelle                | $\begin{cases} xy = 0 \end{cases}$                         | un plan double  |

TAB. 10.e – L'équation déterminantielle est identiquement nulle - les quadriques du faisceau ont un point singulier en commun et sont de rang au plus 3, les calculs se font dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  - quand la sous-équation déterminantielle a une racine multiple, l'inertie de la quadrique qui lui est associée est placée en premier dans la colonne correspondante. Pour les trois derniers cas, le faisceau ne contient que des quadriques de rang au plus 2, les calculs se font dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

deux points, soit un, soit l'ensemble vide.

Dans chaque étude de cas, nous indiquons comment, pendant le déroulement de l'algorithme nous pouvons distinguer ce cas sans utiliser le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques.

### 3.1 Forme des blocs de Jordan

Supposons que le faisceau que nous étudions soit engendré par les quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  et que son équation déterminantielle ait une racine quadruple. Il y a *a priori* cinq réductions simultanées possibles des matrices  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$ , réductions qui se distinguent les unes des autres par la forme des blocs de Jordan apparaissant dans le résultat (voir tableau 10.f). Le but est donc de savoir déterminer à quel type de faisceau celui que nous étudions appartient.

Les résultats affichés dans le tableau 10.f confirment que si la connaissance de la multiplicité de la (ou des) racine(s) de l'équation déterminantielle et celle du rang de la quadrique singu-

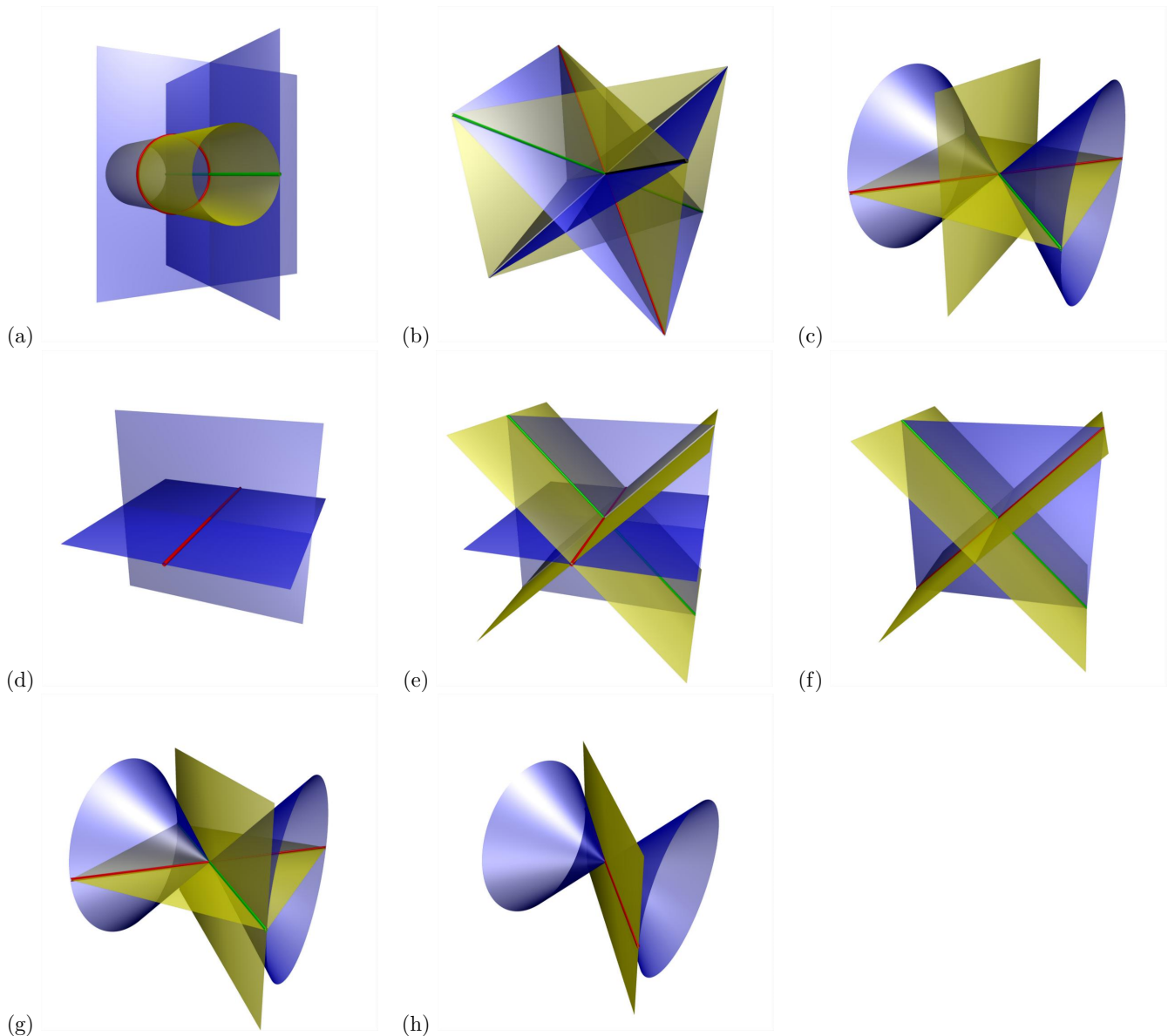


FIG. 10.6 – Intersections pour lesquelles l'équation déterminantielle est identiquement nulle - (a) une conique et une droite double, sécantes en un point - (b) quatre droites concourantes - (c) deux droites sécantes - (d) une droite double - (e) une droite double et deux simples, toutes concourantes en un point - (f) deux droites doubles sécantes - (g) une droite triple et une simple, sécantes - (h) une droite quadruple.

lière du faisceau constituent un bon critère de séparation des cas, elles ne sont cependant pas suffisantes pour conclure quand ce rang est égal à 2. Nous constatons ainsi que l'expression de la caractéristique de Segre contient la forme des blocs de Jordan associés à chaque racine de l'équation déterminantielle.

| réduction de deux matrices $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$   | rang de la matrice associée à $\lambda_1\mathcal{P} - \mathcal{Q}$ | caractéristique de Segre |
|---|--|--------------------------|
| $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\lambda_1 \end{pmatrix}$                                     | 0  | [(1111)]                 |
| $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\lambda_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\lambda_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$                         | 1  | [(211)]                  |
| $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$             | 2  | [(22)]                   |
| $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\lambda_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2\lambda_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$             | 2  | [(31)]                   |
| $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\lambda_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\lambda_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_1\lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1\lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | 3  | [4]                      |

TAB. 10.f – Blocs de Jordan associés à un faisceau dont l'équation déterminantielle a une racine quadruple.

### 3.2 Racine quadruple - matrice associée de rang 3

Avec ce cas, nous commençons par un exemple très simple d'application du théorème 7.14 et de recherche de la courbe de base correspondante (ici il y a une seule solution possible dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ). En reprenant les résultats du tableau 10.f, nous pouvons constater qu'une fois réduites, les deux équations de deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  du faisceau se présentent sous la forme :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : 2\varepsilon_1(xw + yz) = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : \varepsilon_1(\lambda_1(2xw + 2yz) + z^2 + 2yw) = 0. \end{cases}$$

La quadrique singulière du faisceau,  $Q_{\mathcal{S}} = \lambda_1 Q_{\mathcal{P}} - Q_{\mathcal{Q}}$  a pour équation  $-\varepsilon_1(z^2 + 2yw) = 0$ . En posant le changement de variables  $y' = 2y$  et  $x' = 2x$  nous obtenons (en divisant tous les coefficients de  $Q_{\mathcal{P}}$  par  $\varepsilon_1$  et ceux de  $Q_{\mathcal{Q}}$  par  $-\varepsilon_1$ ) les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{S}} : z^2 + y'w = 0, \\ Q_{\mathcal{P}} : x'w + y'z = 0. \end{cases}$$

Il nous suffit alors de paramétrer  $Q_{\mathcal{S}}$  par  $X = (s, -v^2, uv, u^2)$ , avec  $(u, v, s) \in \mathbb{P}^{2*}(\mathbb{R})$ , pour obtenir l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{S},\mathcal{P}} = {}^t X \cdot \mathcal{P} \cdot X$  :

$$\Omega_{\mathcal{S},\mathcal{P}} : u(v^3 - su) = 0.$$

Les deux solutions de cette équation sont  $u = 0$  et  $s = v^3/u$ . Nous retrouvons la courbe d'intersection du cas correspondant dans la caractérisation de Segre, c'est-à-dire une courbe composée d'une cubique et d'une droite. En remplaçant la solution de chaque sous-équation dans le vecteur de paramétrage, nous obtenons :

$$\begin{cases} X = (v^3, -v^2u, vu^2, u^3), & (u, v) \in \mathbb{P}^1 \text{ pour la cubique,} \\ X = (u, v, 0, 0), & (u, v) \in \mathbb{P}^1 \text{ pour la droite.} \end{cases}$$

La droite et la cubique sont tangentes au point de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$ . Cette situation est représentée sur la figure 10.2 par l'illustration (a).

Signalons enfin que le rang de la quadrique singulière du faisceau et la multiplicité de la racine de l'équation déterminantielle suffisent à distinguer ce cas de tous les autres.

### 3.3 Une racine double - matrice associée de rang 2

Ce cas est particulièrement intéressant car il illustre parfaitement la façon dont, en général, nous manipulons les équations de quadriques du faisceau, obtenues grâce au théorème 7.14, pour retrouver toutes les courbes de base possibles. Nous opérons par changements de variables et, entre deux changements, par multiplication de telle ou telle équation par un certain coefficient. Cet ensemble de transformations permet d'obtenir les équations les plus simples possibles pour les quadriques caractéristiques du faisceau, indépendamment de la valeur effective des différentes racines de l'équation déterminantielle. Nous reconnaissons alors facilement les courbes de base possibles pour de tels faisceaux. Cette démarche montre aussi parfaitement pourquoi nous n'allons pas utiliser la réduction simultanée de deux formes quadratiques pour construire notre algorithme. En effet, durant notre calcul, nous allons introduire plusieurs racines carrées, ce que, même si cela nous permet de conclure quant à la nature de la courbe de base, nous voulons éviter dans le déroulement pratique d'un algorithme.

Cet exemple est de plus caractéristique de la difficulté à passer de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  à  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Pour une même caractéristique de Segre [11(11)], il faut considérer deux cas, selon que les racines simples sont toutes les deux réelles ou complexes conjuguées. De même, quand par exemple les deux racines simples sont réelles, la nature réelle (cône complètement défini dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ) ou complexe (cône réduit à un point dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ) des quadriques associées aux racines simples de l'équation déterminantielle donne lieu à une multiplication des cas possibles de courbe de base du faisceau.

Enfin, cet exemple nous permet de présenter un autre invariant de l'équation déterminantielle du faisceau, très utile dans la séparation des cas. Cet invariant est le signe du quotient de l'équation déterminantielle  $\prod_i (x - \lambda_i)^{m_i}$  divisée par  $(x - \lambda_{i_0})^{m_{i_0}}$ , où  $\lambda_{i_0}$  est une racine multiple de l'équation déterminantielle et  $m_{i_0}$  sa multiplicité (paire), évalué en  $\lambda_{i_0}$ . Cet invariant permet de savoir le signe du déterminant des matrices des quadriques voisines de celle associée à  $\lambda_{i_0}$ .

#### 3.3.1 Une racine double de rang 2 - deux racines simples réelles - [11(11)]

Nous noterons  $Q_{S_1}$  la quadrique associée à la racine double de l'équation déterminantielle,  $Q_{S_2}$  et  $Q_{S_3}$  les deux quadriques associées aux racines simples de la même équation. La réduction simultanée de deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \varepsilon_4 w^2 = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_1 y^2 + \varepsilon_3 \lambda_2 z^2 + \varepsilon_4 \lambda_3 w^2 = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, 4.$$



$\lambda_1$  est la racine double<sup>10</sup> de l'équation déterminantielle, réelle rationnelle, et  $\lambda_2, \lambda_3$  sont les racines réelles simples de l'équation déterminantielle, les  $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ , sont distincts deux à deux. Nous avons  $Q_{S_1} = \lambda_1 Q_P - Q_Q$ ,  $Q_{S_2} = \lambda_2 Q_P - Q_Q$  et  $Q_{S_3} = \lambda_3 Q_P - Q_Q$ . Nous commençons par diviser l'équation de  $Q_{S_1}$  par  $\varepsilon_3(\lambda_1 - \lambda_2)$  :

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_{S_1} : z^2 + \frac{\varepsilon_4(\lambda_1 - \lambda_3)}{\varepsilon_3(\lambda_1 - \lambda_2)} w^2 = 0, \\ Q_{S_2} : \varepsilon_1(\lambda_1 - \lambda_2)x^2 + \varepsilon_2(\lambda_1 - \lambda_2)y^2 + \varepsilon_4(\lambda_3 - \lambda_2)w^2 = 0, \\ Q_{S_3} : \varepsilon_1(\lambda_1 - \lambda_3)x^2 + \varepsilon_2(\lambda_1 - \lambda_3)y^2 + \varepsilon_3(\lambda_2 - \lambda_3)z^2 = 0. \end{cases}$$

En posant le premier changement de variables

$$w' = w \sqrt{a\varepsilon_3\varepsilon_4 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1}}, \quad \left( \text{avec } a = \text{sign} \left( \varepsilon_3\varepsilon_4 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_1} \right) \right),$$

et, après transformation, en multipliant l'équation de  $Q_{S_2}$  par  $a\varepsilon_3 \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)}$ , nous obtenons les équations :

$$\begin{cases} Q_{S_1} : z^2 + aw^2 = 0, \\ Q_{S_2} : a\varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} x^2 + a\varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} y^2 + w^2 = 0, \\ Q_{S_3} : \varepsilon_1(\lambda_1 - \lambda_3)x^2 + \varepsilon_2(\lambda_1 - \lambda_3)y^2 + \varepsilon_3(\lambda_2 - \lambda_3)z^2 = 0. \end{cases}$$

Posons

$$c = \text{sign} \left( a\varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \right), \quad \text{et } b = \text{sign} \left( ac\varepsilon_2\varepsilon_3 \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} \right).$$

Appliquons enfin le changement de variables

$$x' = x \sqrt{\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3} ac\varepsilon_3\varepsilon_1} \quad \text{et} \quad y' = y \sqrt{abc\varepsilon_1\varepsilon_3 \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}}.$$

Enfin si nous multiplions l'équation de  $Q_{S_3}$  par  $-c \frac{\varepsilon_3}{\lambda_2 - \lambda_3}$ , nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{S_1} : z^2 + aw^2 = 0, \\ Q_{S_2} : x^2 + by^2 + cw^2 = 0, \\ Q_{S_3} : ax^2 + aby^2 - cz^2 = 0, \end{cases} \quad a, b, c \in \{-1, 1\}.$$

Dans l'espace projectif complexe, l'intersection est constituée de deux coniques sécantes. Dans le cas réel, l'intersection est constituée des parties réelles de ces deux coniques. Nous dénombrons cinq cas possibles :

- $a = \pm 1, b = 1, c = 1$  :  $Q_{S_2}$  est réduite à son sommet dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Ce point n'est pas contenu dans la paire de plans définie par  $Q_{S_1}$ . L'intersection est vide.
- $a = 1, b = 1, c = -1$  :  $Q_{S_1}$  est réduite à la droite d'équation  $x = w = 0$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ,  $Q_{S_3}$  est réduite à son sommet, et  $Q_{S_2}$  est un cône dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Le sommet (réel) de  $Q_{S_2}$  n'appartient pas à la droite  $z = w = 0$ , l'intersection est vide.
- $a = 1, b = -1, c = \pm 1$  :  $Q_{S_1}$  est réduite à la droite d'équation  $x = y = 0$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .  $Q_{S_2}$  et  $Q_{S_3}$  sont réels. La droite  $z = w = 0$  coupe les cônes en deux points de coordonnées  $(1, 1, 0, 0)$  et  $(-1, 1, 0, 0)$  (figure 10.4, illustration (d)).

<sup>10</sup>Nous reprenons ici les notations du théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques, les racines sont notées « affinement »  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ , au lieu de  $(\lambda_i, 1) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

- $a = -1, b = 1, c = -1$  : dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ,  $Q_{S_1}$  est une paire de plans,  $Q_{S_2}$  et  $Q_{S_3}$  sont cônes. La droite  $z = w = 0$  ne coupe pas les coniques de l'intersection, la courbe de base est constituée de deux coniques distinctes (figure 10.4, illustration (e)). Les deux coniques peuvent être paramétrées par :

$$\begin{aligned} X_{C_1} &= (-u^2 + v^2, 2uv, u^2 + v^2, u^2 + v^2), \\ X_{C_2} &= (-u^2 + v^2, 2uv, -u^2 - v^2, u^2 + v^2), \end{aligned} \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

- $a = -1, b = -1, c = \pm 1$  : les plans et les cônes sont réels. La droite  $z = w = 0$  coupe les coniques. L'intersection est constituée de deux coniques qui se coupent en deux points de coordonnées  $p^\pm = (\pm 1, 1, 0, 0)$ . Les deux points  $p^\pm$  définissent deux singularités convexes (figure 10.4, illustration (f)). Les deux coniques peuvent être paramétrées par :

$$\begin{aligned} X_{C_1} &= (-u^2 - v^2, u^2 - v^2, -2uv, 2uv), \\ X_{C_2} &= (-u^2 - v^2, u^2 - v^2, -2uv, -2uv), \end{aligned} \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Dans la pratique, pour distinguer ces différents cas, nous commençons par déterminer l'inertie de  $Q_{S_1}$  dont la matrice est à coefficients rationnels puisque la racine double de l'équation déterminantielle est nécessairement rationnelle. Nous ne souhaitons pas calculer l'inertie de  $Q_{S_2}$  et  $Q_{S_3}$  car ces deux quadriques dépendent des racines simples de l'équation déterminantielle qui peuvent être irrationnelles (solutions d'un polynôme de degré 2). Nous pouvons remarquer que dans le repère dans lequel nous avons travaillé, l'équation déterminantielle est égale à  $b\mu^2\lambda(a\mu + c\lambda)$ . Nous utiliserons le lemme suivant.

**Lemme 10.3** *Supposons que l'équation déterminantielle du faisceau soit :*

$$\mathcal{E}_{S_1, S_2} = \det(\lambda S_1 + \mu S_2) = b\mu^2\lambda(a\lambda + c\mu).$$

*Le signe de  $ab$  est invariant quelles que soient les quadriques du faisceau utilisées pour définir l'équation déterminantielle, quel que soit le repère dans lequel est définie son équation déterminantielle.*

**Démonstration :** Nous supposons ici que l'équation déterminantielle est égale à  $\det(\lambda S_1 + \mu S_2) = b\mu^2\lambda(a\lambda + c\mu)$ , et donc que  $(\lambda, \mu) = (1, 0)$  est sa racine double. Nous allons successivement changer les quadriques dans le faisceau qui définissent cette équation, puis le repère dans lequel est défini cette équation, afin de montrer l'invariance du signe de  $ab$ . Le fait de changer de générateurs dans le faisceau pour définir l'équation déterminantielle revient à faire un changement de variables linéaire de  $(\lambda, \mu)$ . Nous pouvons alors poser

$$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \text{ avec } a_{i,i=1,\dots,4} \in \mathbb{R}, \text{ et } a_1a_4 - a_2a_3 \neq 0.$$

Notons que la racine double de cette nouvelle équation est  $(a_1, a_3)$ . Si de plus nous utilisons la transformation congruente  $T$  pour nous placer dans un repère quelconque, l'équation déterminantielle du faisceau peut alors être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{S_1, S_2}(\lambda', \mu') &= \det({}^tT \cdot (\lambda' S_1 + \mu' S_2) \cdot T), \\ &= \det(T)^2 \cdot \det(\lambda' S_1 + \mu' S_2). \end{aligned}$$

La racine double de cette équation reste  $(a_1, a_3)$ . Si nous nous intéressons à déterminer le signe du polynôme  $\mathcal{E}'_{S_1, S_2}(\lambda', \mu') = \mathcal{E}_{S_1, S_2}(\lambda', \mu') / (a_3\lambda' - a_1\mu')^2$  évalué en  $(a_1, a_3)$ , nous obtenons :

$$ab(a_1a_4 - a_2a_3)^2 \det(T)^2.$$

Ceci montre que le signe de  $ab$  est un invariant du faisceau.  $\square$

L'intérêt pratique de ce lemme réside dans le fait que l'évaluation du signe de la dernière quantité  $\mathcal{E}'_{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2}(\lambda', \mu')$  est un critère facile à déterminer permettant (avec le calcul conjoint de l'inertie de la quadrique associée à la racine double) de distinguer presque tous les cas puisque nous connaissons l'inertie de la quadrique associée à la racine double, la nature réelle des deux autres racines et le signe de  $ab$ . Il reste seulement à séparer les cas correspondants aux septièmes et huitièmes lignes du tableau 10.c, c'est-à-dire aux cas où les deux quadriques correspondant aux racines simples sont soit toutes les deux d'inertie  $(3, 0)$ , soit toutes les deux d'inertie  $(2, 1)$ . Pour les distinguer, il suffit de rechercher les quadriques d'inertie  $(4, 0)$  dont la présence dans le faisceau est équivalente au fait que la courbe de base soit réduite à l'ensemble vide (le premier des deux cas). Cette recherche est préférable au calcul des racines simples car les deux racines sont possiblement irrationnelles alors qu'il est toujours possible de déterminer des quadriques dont la matrice est à coefficients rationnels et de déterminant positif.

### 3.3.2 Une racine double de rang 2, deux racines complexes conjuguées - [11(11)]

La réduction simultanée de deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  du faisceau nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{P}} : \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2zw = 0, \\ Q_{\mathcal{Q}} : \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_1 y^2 + \beta z^2 - \beta w^2 + 2\alpha zw = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0.$$

Nous pouvons alors exhiber la quadrique singulière du faisceau,  $Q_{\mathcal{S}}$  associée à la racine double de l'équation déterminantielle et une autre quadrique du faisceau,  $Q_{\mathcal{R}}$ , nécessairement de rang maximum, en procédant comme dans l'exemple précédent. Nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{cases} Q_{\mathcal{S}} : zw = 0, \\ Q_{\mathcal{R}} : x^2 + ay^2 + z^2 - w^2 = 0, \end{cases} \quad a = \pm 1.$$

Dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ , l'intersection est constituée de deux coniques sécantes entre elles en deux points. Selon que le faisceau contient des quadriques non singulières d'inertie  $(2, 2)$  ou  $(3, 1)$ , nous avons les résultats

- $a = 1$  : une des deux coniques est réelle (la première), l'autre imaginaire (la deuxième) (figure 10.4, illustration (g)). La conique peut être paramétrée par :

$$X_{\mathcal{C}} = (-u^2 + v^2, 2uv, 0, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

- $a = -1$  : les deux coniques sont réelles. Elles se coupent aux points de coordonnées  $p^{\pm} = (1, \pm 1, 0, 0)$ . Hormis la quadrique associée à la racine double, toutes les quadriques ont en chacun des deux points le même plan tangent en commun. Les deux coniques sont tangentes à chacun des plans en un des points  $p^{\pm}$  et situent l'une et l'autre sur les faces opposées d'un même plan (figure 10.4, illustration (h)). Les deux coniques peuvent être paramétrées par :

$$X_{\mathcal{C}_1} = (-u^2 - v^2, u^2 - v^2, 0, 2uv) \text{ et } X_{\mathcal{C}_2} = (u^2 - v^2, -u^2 - v^2, 2uv, 0), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Ici l'équation déterminantielle est égale à  $-a\mu^2(\mu^2 + \lambda^2/4)$ , et le signe  $a$  peut donc être facilement déterminé comme précédemment en utilisant la partie de l'équation déterminantielle correspondant aux racines simples, évaluée en la racine double.

## 4 Résultats détaillés

Le but de cette section est de présenter en détails tous les cas possibles en appliquant le théorème 7.14 de réduction simultanée de deux formes quadratiques, et ensuite d'expliquer comment séparer tous les cas sans avoir à calculer cette réduction simultanée.

### 4.1 Une racine quadruple

Rappelons que le cas d'une racine quadruple dont la quadrique qui lui est associée dans le faisceau est de rang 3 a déjà été traité.

#### 4.1.1 Une racine quadruple - quadrique associée de rang 2

Il y a deux situations possibles dans l'application du théorème de réduction simultanée de deux quadriques : soit la quadrique non singulière se décompose (dans le bon repère) en deux blocs de taille  $2 \times 2$ , soit elle se décompose en un bloc de taille  $3 \times 3$  et en un bloc de taille  $1 \times 1$ .

|  |  |
|--|--|
| deux blocs de taille $2 \times 2$  | un bloc de taille $3 \times 3$ et en un bloc de taille $1 \times 1$  |
| $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$ |

TAB. 10.g – Une racine quadruple dont la matrice de la quadrique associée est de rang 2

Nous devons faire ici une double étude. Dans un premier temps, nous présentons les quatre cas pouvant survenir, et dans un deuxième temps, nous montrons comment un algorithme permet de les distinguer les uns des autres.

#### Deux blocs de Jordan $2 \times 2$ :

Le faisceau ne contient que des quadriques d'inertie  $(2, 2)$ , sauf celle correspondant à la racine quadruple. Il y a deux sous-cas possibles selon que, dans le tableau 10.g,  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont de même signe ou pas, c'est-à-dire selon que la quadrique associée à la racine quadruple est d'inertie  $(2, 0)$  ou  $(1, 1)$ . Les deux situations peuvent se résumer de la façon suivante, le faisceau est, dans ce repère engendré par les deux quadriques :

$$\begin{cases} y^2 + aw^2 = 0, \\ xy + azw = 0, \end{cases} \quad a = \pm 1.$$

- $a = 1$  : la quadrique singulière est d'inertie  $(2, 0)$ , l'intersection est réduite à une droite double (la quadrique singulière) d'équation  $y = w = 0$  (figure 10.2, illustration (b)). Notons ce cas (4.2.a).
- $a = -1$  : la quadrique singulière est d'inertie  $(1, 1)$ , une paire de plans réels. L'intersection est constituée de la droite double  $y = w = 0$  et des deux droites simples d'équations  $y \pm w = x \pm z$  qui coupent toutes les deux la droite double au point  $(\mp 1, 0, 1, 0)$  (figure 10.2, illustration (d)). Notons ce cas (4.2.b).

**Un bloc de Jordan  $3 \times 3$ , un  $1 \times 1$  :**

Hormis la quadrique singulière du faisceau qui est nécessairement de inertie  $(1, 1)$ , le faisceau contient soit uniquement des quadriques d'inertie  $(2, 2)$ , soit uniquement des quadriques de inertie  $(3, 1)$ . Le faisceau est, dans ce repère engendré par les deux quadriques :

$$\begin{cases} yz = 0, \\ y^2 + xz + aw^2 = 0, \end{cases} \quad a = \pm 1.$$

- $a = 1$  : le faisceau contient des quadriques de inertie  $(3, 1)$  (et pas de quadrique d'inertie  $(2, 2)$ ). L'intersection est constituée d'une conique (figure 10.2, illustration (c)). Notons ce cas (4.2.c). La conique peut être paramétrée par :

$$X_C = (-u^2, 0, v^2, uv), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

- $a = -1$  : le faisceau contient des quadriques de inertie  $(2, 2)$  (et pas de quadrique d'inertie  $(3, 1)$ ). L'intersection est constituée d'une conique et de deux droites coupant toutes les deux la conique au point  $(1, 0, 0, 0)$  (figure 10.2, illustration (e)). Notons ce cas (4.2.d). La conique et les droites peuvent être paramétrées par :

$$X_C = (u^2, 0, v^2, uv), \quad X_{\mathcal{L}_1} = (u, v, 0, v) \text{ et } X_{\mathcal{L}_2} = (u, -v, 0, v), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

**Séparation des cas :**

Commençons par calculer l'inertie de la quadrique singulière qui est à coefficients rationnels. Si cette inertie est  $(2, 0)$ , nous sommes en présence du cas (4.2.a). Dans le cas contraire, nous pouvons calculer l'inertie d'une autre quadrique du faisceau (nous en avons nécessairement une autre à notre disposition). Si son inertie est  $(3, 1)$ , nous sommes en présence du cas (4.2.c). Sinon, elle est d'inertie  $(2, 2)$  et il nous reste à distinguer deux cas. Pour cela, il faut vérifier si la droite singulière de la paire de plan est contenue ou pas dans les autres quadriques du faisceau. Si c'est le cas, nous sommes en présence du cas (4.2.b), et sinon du cas (4.2.d).

**4.1.2 Une racine quadruple - quadrique associée de rang 1**

La caractéristique de Segre nous indique que l'intersection est constituée de deux droites doubles, dans  $\mathbb{C}$ . D'après le théorème 7.14, il existe dans le faisceau deux quadriques (dont une est associée à la racine quadruple de l'équation déterminantielle) qui peuvent être mises simultanément sous la forme :

$$\begin{cases} w^2 = 0, \\ \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2\varepsilon_3 zw = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} w^2 = 0, \\ x^2 + ay^2 + zw = 0, \end{cases} \quad a \in \{-1, 1\}.$$

L'intersection est constituée des deux droites doubles d'équations  $w^2 = x^2 + ay^2 = 0$ . Il y a donc deux cas selon le signe de  $a$ , chacun correspondant à l'une des deux inerties possibles pour les quadriques non singulières du faisceau :

- $a = 1$  : les deux droites doubles sont imaginaires, toutes les quadriques du faisceau (non singulières) sont d'inertie  $(3, 1)$ . L'intersection est réduite à un point.
- $a = -1$  : les deux droites sont réelles, toutes les quadriques (non singulières) du faisceau sont d'inertie  $(2, 2)$ . L'intersection est constituée des deux droites doubles qui se coupent au point de coordonnées  $(0, 0, 1, 0)$  (figure 10.2, illustration (f)).

Ici le simple calcul de l'inertie d'une quadrique non singulière du faisceau suffit à séparer les deux cas.

### 4.1.3 Une racine quadruple - quadrique associée de rang 0

Il s'agit là d'un faisceau ne contenant que deux quadriques, la quadrique permettant d'engendrer le faisceau (de rang au moins égal à 1), et la quadrique d'équation implicite identiquement nulle.

## 4.2 Une racine triple et une racine simple

### 4.2.1 Quadrique associée à la racine triple de rang 3

Soit  $\lambda_1$  la racine triple,  $\lambda_2$  la racine simple. La réduction simultanée de deux quadriques, dont une au moins est non singulière, nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 y^2 + 2\varepsilon_1 xz + \varepsilon_2 w^2 = 0, \\ \varepsilon_1 \lambda_1 y^2 + 2\varepsilon_1 \lambda_1 xz + 2\varepsilon_1 yz + \varepsilon_2 \lambda_2 w^2 = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1.$$

La quadrique  $Q_{S_1}$  correspondant à la racine triple est un cône;  $Q_{S_2}$ , celle correspondant à la racine simple aussi. Elles peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} Q_{S_1} : -2\varepsilon_1 yz + \varepsilon_2 (\lambda_1 - \lambda_2) w^2 = 0, \\ Q_{S_2} : (\lambda_2 - \lambda_1) y^2 + 2(\lambda_2 - \lambda_1) xz - 2yz = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{S_1} : w^2 + yz = 0, \\ Q_{S_2} : y^2 + xz = 0. \end{cases}$$

La courbe d'intersection peut alors être paramétrée par

$$X = (v^4, u^2 v^2, -u^4, -u^3 v), (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Cette quartique a un point singulier de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  (le sommet du premier cône), qui correspond aux paramètres  $(u, v) = (0, 1)$ . La singularité est cuspidale (figure 10.3, illustration (a)).

La simple connaissance de la multiplicité des racines et du rang de la quadrique associée à la racine triple suffit à distinguer ce cas des autres.

### 4.2.2 Quadrique associée à la racine triple de rang 2

Soit  $\lambda_1$  la racine triple,  $\lambda_2$  la racine simple. La réduction simultanée de deux quadriques nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1 xy + \varepsilon_2 z^2 + \varepsilon_3 w^2 = 0, \\ 2\varepsilon_1 \lambda_1 xy + \varepsilon_1 y^2 + \varepsilon_2 \lambda_1 z^2 + \varepsilon_3 \lambda_2 w^2 = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \varepsilon_3 = \pm 1.$$

La quadrique  $Q_{S_1}$ , qui correspond à la racine triple est une paire de plans, et  $Q_{S_2}$  celle correspondant à la racine simple, est un cône. Elles peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} Q_{S_1} : -\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_3 w^2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0, \\ Q_{S_2} : -\varepsilon_1 x^2 + 2\varepsilon_1 xy - (\lambda_2 - \lambda_1) + \varepsilon_2 z^2 (\lambda_2 - \lambda_1) = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Q_{S_1} : x^2 + aw^2 = 0, \\ Q_{S_2} : xy + z^2 = 0, \end{cases} \quad a \in \{-1, 1\}.$$

La paire de plans est réelle si l'inertie de la quadrique associée à la racine triple de l'équation déterminantielle est  $(1,1)$ , c'est-à-dire si  $a = -1$ . Le cône qui correspond à l'autre racine de l'équation déterminantielle est toujours réel. Il y a donc deux cas selon la nature de la paire de plans :

- $a = 1$  : les plans sont imaginaires. Leur partie réelle est la droite d'équation  $x = w = 0$ , qui coupe le cône au point double de coordonnées  $(0, 1, 0, 0)$ . L'intersection est donc réduite à ce point.
- $a = -1$  : les plans sont réels. L'intersection est constituée de deux coniques se coupant au point double  $(0, 1, 0, 0)$  (figure 10.2, illustration (b)). Les deux coniques peuvent être paramétrées par :

$$X_{C_1} = (-v^2, u^2, -uv, -v^2) \text{ et } X_{C_2} = (-v^2, u^2, -uv, v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

La simple connaissance de la multiplicité des racines et de l'inertie de la quadrique associée à la racine triple suffit à distinguer ces deux cas entre eux, mais aussi par rapport à tous les autres.

### 4.2.3 Quadrique associée à la racine triple de rang 1

Soit  $\lambda_1$  la racine triple,  $\lambda_2$  la racine simple. La réduction simultanée de deux quadriques nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \varepsilon_4 w^2 = 0, \\ \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_1 y^2 + \varepsilon_3 \lambda_1 z^2 + \varepsilon_4 \lambda_2 w^2 = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1, \varepsilon_3 = \pm 1.$$

La quadrique  $Q_{S_1}$ , qui correspond à la racine triple est un plan double, et  $Q_{S_2}$  celle correspondant à la racine simple, est un cône. Elles peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} Q_{S_1} : w^2 = 0, \\ Q_{S_2} : \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{S_1} : w^2 = 0, \\ Q_{S_2} : x^2 + y^2 + az^2 = 0, \end{cases} \quad a = \pm 1.$$

Le cône est réel si son inertie est  $(2, 1)$ , c'est-à-dire si  $a = -1$ . Nous avons alors deux cas :

- $a = 1$  : le cône est imaginaire. Son sommet (réel) n'appartient pas au plan  $w = 0$ , l'intersection est vide.
- $a = -1$  : le cône est réel. L'intersection est constituée de la conique double contenue dans le plan  $w = 0$  (figure 10.2, illustration (c)). Elle peut être paramétrée par :

$$X_C = (-u^2 + v^2, 2uv, u^2 + v^2, 0), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

La simple connaissance de la multiplicité des racines et de l'inertie de la quadrique associée à la racine triple suffit à distinguer ces deux cas entre eux, mais aussi par rapport à tous les autres.

## 4.3 Une racine double et deux racines simples

Le cas où la quadrique du faisceau associée à la racine double est de rang 2 a déjà été traité.

### 4.3.1 Quadrique associée à la racine double de rang 3 - [112]

Nous pouvons encore séparer ce cas en deux sous-cas, selon la nature des racines simples de l'équation déterminantielle qui peuvent être soit toutes les deux réelles, soit toutes les deux complexes.

**Les deux racines simples sont réelles**

La réduction simultanée de deux quadriques du faisceau nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_1xy + \varepsilon_2z^2 + \varepsilon_3w^2 = 0, \\ 2\varepsilon_1\lambda_1xy + \varepsilon_1y^2 + \varepsilon_2\lambda_2z^2 + \varepsilon_3\lambda_3w^2 = 0, \end{cases} \quad \varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \dots, 3.$$

Soit  $Q_{S_1}$  la quadrique du faisceau correspondant à  $\lambda_1$  la racine double de l'équation déterminantielle, qui est réelle rationnelle. Soient  $Q_{S_2}$  et  $Q_{S_3}$  les deux quadriques correspondant à  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  les racines réelles simples de l'équation déterminantielle. Ces trois quadriques peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} Q_{S_1} & -\varepsilon_1y^2 + \varepsilon_2z^2 - \varepsilon_3w^2 = 0, \\ Q_{S_2} & \varepsilon_1xy - \varepsilon_1y^2 - 2\varepsilon_3w^2 = 0, \\ Q_{S_3} & -\varepsilon_1xy - \varepsilon_1y^2 + 2\varepsilon_2z^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_{S_1} & y^2 + az^2 + bw^2 = 0, \\ Q_{S_2} & xy + az^2 = 0, \\ Q_{S_3} & xy + bw^2 = 0, \end{cases} \quad a, b, c \in \{-1, 1\}.$$

Il y a trois cas possibles :

- $a = b = 1$ .  $Q_{S_1}$  est un cône imaginaire, l'intersection est réduite à un point double réel,  $(1, 0, 0, 0)$ , le sommet de  $Q_{S_1}$ .
- $a = 1, b = -1$  ou  $a = -1, b = 1$ . La courbe de base est une quartique nodale qui est paramétrée par

$$X = ((u^2 + v^2)^2, -4u^2v^2, 2uv(u^2 - v^2), 2uv(u^2 + v^2)), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

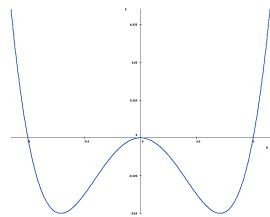
Le point singulier est  $(1, 0, 0, 0)$  et correspond aux paramètres  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ . En ce point, hormis  $Q_{S_1}$ , toutes les quadriques du faisceau ont le même plan tangent  $P$ . Les deux branches de la quartique sont du même côté de  $P$ , la singularité de la quartique est dite convexe (figure 10.4, illustration (b)).

- $a = b = -1$  : la courbe de base est une quartique nodale qui est paramétrée par

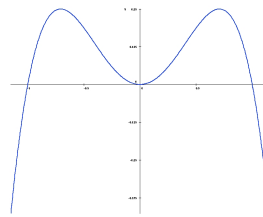
$$X = (-(u^2 - v^2)^2, (u^2 + v^2)^2, 2uv(u^2 + v^2), (u^2 + v^2)(u^2 - v^2)), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Le point singulier de la quartique a pour coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  et correspond aux paramètres  $(1, i)$  et  $(i, 1)$ . Les tangentes à la quartique en ce point sont complexes. L'intersection est constituée d'une quartique avec un point isolé (singulier) (figure 10.4, illustration (a)).

Le premier des trois cas se distingue des deux autres par l'inertie de la quadrique associée à la racine triple. Pour séparer les deux derniers cas, il faut travailler un peu plus. Remarquons que les quadriques correspondant aux racines simples sont toujours des quadriques d'inertie  $(2,1)$ . La distinction entre les deux derniers cas ne peut donc se faire avec ces quadriques. En observant la forme de l'équation déterminantielle, la distinction se fait aisément, en fonction de l'inertie des quadriques non singulières voisines de la quadrique associée à la racine double.



(3,1)



(2,2)



Les quadriques non singulières voisines de la quadrique associée à la racine double sont d'inertie  $(2,2)$  dans le deuxième cas, d'inertie  $(3,1)$  dans le dernier cas. Comme nous l'avons déjà fait, nous allons évaluer le signe du quotient de l'équation déterminantielle par le polynôme de degré 2 ayant la même racine double, c'est un polynôme de degré 2 ayant  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  pour racines, au point  $\lambda_1$ . Si ce signe est positif, les quadriques voisines de celle associée à la racine double sont de inertie  $(2, 2)$ , sinon elles sont d'inertie  $(3, 1)$ .

### Les deux racines simples sont complexes

La réduction simultanée de deux formes quadratiques nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon xy + zw = 0, \\ \varepsilon \lambda xy + \varepsilon \frac{1}{2} y^2 + \frac{\beta}{2} z^2 - \frac{\beta}{2} w^2 + \alpha zw = 0, \end{cases}$$

$\varepsilon = \pm 1$ ,  $\lambda_1$  est la racine réelle double de l'équation déterminantielle,  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  les racines complexes conjuguées. Il suffit alors d'exprimer les équations de la quadrique  $Q_{S_1}$  associée à la racine double et celle d'une autre quadrique  $Q_{\mathcal{R}}$  du faisceau dans un repère approprié :

$$\begin{cases} Q_{S_1} : y^2 + zw = 0, \\ Q_{\mathcal{R}} : xy + z^2 - w^2 = 0. \end{cases}$$

L'intersection est alors une quartique nodale dont un paramétrage est donné par :

$$X = ((u^2 - v^2)(u^2 + v^2), u^2 v^2, -uv^3, u^3 v), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

Le point singulier de cette quartique a pour coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  et correspond aux paramètres  $(u, v) = (1, 0)$  et  $(0, 1)$ . Le plan tangent à la seconde quadrique (et à toutes les quadriques du faisceau hormis celle correspondant à la racine double) en ce point est le plan d'équation  $y = 0$ . Dans le voisinage de ce point singulier, sur la quartique,  $y$  est du même signe que  $u^2 - v^2$  quand  $x > 0$ , ce qui signifie que la quartique traverse le plan tangent au point singulier. La singularité de la quartique est dite concave (figure 10.4, illustration (c)).

## 4.4 Deux racines doubles

Le premier critère de distinction est la nature réelle ou complexe des deux racines doubles. Le deuxième critère est le rang des quadriques associées aux racines doubles. Si les racines sont toutes les deux réelles irrationnelles ou toutes les deux complexes, elles ont le même rang.

### 4.4.1 Deux racines doubles réelles - quadriques associées de rang 2 et 2

La réduction simultanée de deux quadriques nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \varepsilon_4 w^2 = 0, \\ \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_1 y^2 + \varepsilon_3 \lambda_2 z^2 + \varepsilon_4 \lambda_2 w^2 = 0. \end{cases}$$

Les quadriques singulières  $Q_{S_1}$  et  $Q_{S_2}$  sont des paires de plans et peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} z^2 + bw^2 = 0, \\ x^2 + ay^2 = 0, \end{cases} \quad a, b \in \{-1, 1\}.$$

Il y a alors trois cas :

- $a = b = 1$  : les deux paires de plans sont imaginaires, les quatre droites sont imaginaires et l'intersection est vide.
- $a = -b$  : une paire de plans est réelle, l'autre est imaginaire. Si  $a = 1$ , l'intersection est constituée des points d'intersection de la droite  $z = w = 0$  avec la paire de plans  $x^2 - y^2 = 0$ , c'est-à-dire les points de coordonnées  $(0, 0, \pm 1, 1)$  (figure 10.5, illustration (e)).

- $a = b = -1$  : Les quatre droites sont réelles. L'intersection est un quadrilatère gauche (figure 10.4, illustrations (f) et (g)). Les quatre droites peuvent être paramétrées par :

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{L}_1} &= (v, v, u, u), & X_{\mathcal{L}_2} &= (-v, v, u, u), \\ X_{\mathcal{L}_3} &= (v, v, -u, u), & X_{\mathcal{L}_4} &= (-v, v, -u, u), \end{aligned} \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

La connaissance des inerties des deux quadriques singulières  $Q_{\mathcal{S}_1}$  et  $Q_{\mathcal{S}_2}$  permet de séparer les trois cas. Notons toutefois que ces deux quadriques peuvent être à coefficients dans une extension de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ .

#### 4.4.2 Deux racines doubles réelles - quadriques associées de rang 3 et 3

La réduction simultanée de deux quadriques nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 xy + \varepsilon_2 zw = 0, \\ 2\varepsilon_1 \lambda_1 xy + \varepsilon_1 y^2 + 2\varepsilon_2 \lambda_2 zw + \varepsilon_2 w^2 = 0. \end{cases}$$

Les deux quadriques singulières  $Q_{\mathcal{S}_1}$  et  $Q_{\mathcal{S}_2}$  associées aux racines de l'équation déterminantelle  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont de la forme :

$$\begin{cases} y^2 + zw = 0, \\ xy + w^2 = 0. \end{cases}$$

L'intersection est alors constituée de la droite  $y = w = 0$  et de la cubique paramétrée par :

$$X = (u^3, -uv^2, -v^3, u^2v), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

La droite coupe la cubique aux points de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  et  $(0, 0, 1, 0)$ , correspondant aux paramètres  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$  (figure 10.5, illustration (d)). La connaissance du rang des deux quadriques singulières  $Q_{\mathcal{D}_1}$  et  $Q_{\mathcal{D}_2}$  permet de séparer ce cas de tous les autres.

#### 4.4.3 Deux racines doubles - quadriques associées de rang 2 et 3

La réduction simultanée de deux quadriques nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + 2\varepsilon_3 zw = 0, \\ \varepsilon_1 \lambda_1 x^2 + \varepsilon_2 \lambda_1 y^2 + 2\varepsilon_3 \lambda_2 zw + \varepsilon_3 = 0. \end{cases}$$

Les deux quadriques singulières du faisceau sont alors de la forme :

$$\begin{cases} y^2 + az^2 + bw^2 = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \quad a, b \in \{-1, 1\}.$$

La courbe de base du faisceau dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  est constituée de deux droites et d'une conique. Les droites se coupent au point de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$ , point qui n'appartient pas à la conique. Elles coupent la conique aux points de coordonnées  $(0, 0, \pm\sqrt{ab}, 1)$ . La paire de plans définie par l'équation  $xy = 0$  est réelle. Le cône est réel si son inertie est  $(2, 1)$ , c'est-à-dire quand  $a = -1$  ou  $b = -1$ . Les deux droites sont réelles si  $a = -b$ . Nous avons donc les trois cas suivants :

- $a = b = 1$  : les deux droites et le cône sont imaginaires. L'intersection est réduite au point réel d'intersection des deux droites, de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  (figure 10.5, illustration (a)).

- $a = -b$  : les droites et la conique sont réelles. L'intersection est constituée de deux droites coupant une conique en deux points de coordonnées  $(0, 0, 1, 1)$  et  $(0, 0, -1, 1)$ . Les deux droites se coupent entre elles au point de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  (figure 10.5, illustration (b)). Les droites et la conique peuvent être paramétrées par :

$$X_{\mathcal{L}_1} = (u, 0, v, v), \quad X_{\mathcal{L}_2} = (u, 0, -v, v), \quad X_{\mathcal{C}} = (0, 2uv, v^2 - u^2, -v^2 - u^2), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

- $a = b = -1$  : les droites sont imaginaires, le cône est réel. L'intersection est constituée d'une conique et d'un point de coordonnées  $(1, 0, 0, 0)$  n'appartenant pas à cette conique (figure 10.5, illustration (c)). La conique peut être paramétrée par :

$$X_{\mathcal{C}} = (0, -u^2 - v^2, -2uv, -u^2 + v^2), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

La connaissance des inerties des deux quadriques singulières permet de séparer le premier cas des deux autres. En utilisant un argument similaire à celui du lemme 10.3, et en remarquant que l'équation déterminantielle est de la forme  $-ab\lambda^2\mu^2/4$ , il est possible de séparer les deux derniers cas.

#### 4.4.4 Deux racines doubles complexes - quadriques associées de rang 2 et 2

La réduction simultanée de deux quadriques  $Q_{\mathcal{S}_1}$  et  $Q_{\mathcal{S}_2}$  nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} xy + zw = 0, \\ \beta x^2 - \beta y^2 + 2\alpha xy + \beta z^2 - \beta w^2 + 2\alpha zw = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + zw = 0, \\ x^2 - y^2 + z^2 - w^2 = 0. \end{cases}$$

Les deux racines complexes de l'équation déterminantielle sont  $\beta \pm i\alpha$ . Toutes les quadriques du faisceau sont non singulières, leur inertie est donc toujours  $(2, 2)$  (puisque le faisceau réel contient au moins une quadrique réglée). L'intersection est donc constituée des deux droites  $x + \varepsilon w = y - \varepsilon z = 0$  ( $\varepsilon = \pm 1$ ), qui sont réelles, et des deux droites  $x + \varepsilon iz = y - \varepsilon iw = 0$ , qui sont imaginaires. L'intersection réelle est donc constituée de deux droites simples non sécantes.

La connaissance des rangs des deux quadriques singulières  $Q_{\mathcal{D}_1}$  et  $Q_{\mathcal{D}_2}$  permet de distinguer ce cas de tous les autres.

#### 4.4.5 Deux racines doubles complexes - quadriques associées de rang 3 et 3

La réduction simultanée de deux quadriques  $Q_{\mathcal{S}_1}$  et  $Q_{\mathcal{S}_2}$  nous permet d'obtenir les équations suivantes :

$$\begin{cases} xw + yz = 0, \\ xy - 2\beta xz + 2\alpha xw + 2\alpha yz + 2\beta zw = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xw + yz = 0, \\ xz - yw + zw = 0. \end{cases}$$

L'intersection est constituée de la droite  $z = w = 0$ . En éliminant  $w$  entre les deux équations, et en divisant par  $z$ , nous obtenons  $x^2 + y^2 - yz = 0$  qui coupe la droite en  $x \pm iy = 0$ . La cubique ne coupe donc pas la droite. La droite et la cubique peuvent être paramétrées par :

$$X_{\mathcal{C}} = (-u^2v, -uv^2, -u^3 - uv^2, u^2v + v^3) \text{ et } X_{\mathcal{L}} = (-v, u, 0, 0), \quad (u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

La connaissance des rangs des deux quadriques singulières  $Q_{\mathcal{S}_1}$  et  $Q_{\mathcal{S}_2}$  permet de distinguer ce cas de tous les autres.

## 4.5 Faisceaux dégénérés

Le premier cas de faisceau dégénéré, celui pour lequel les sommets des cônes du faisceau sont distincts deux à deux (les quadriques n'ont pas de point singulier en commun) a été traité à la section 7.3.4.2. Pour distinguer ce cas des autres cas de faisceaux dégénérés il suffit de calculer le lieu singulier commun de deux quadriques quelconques du faisceau. Si ce lieu est réduit à l'ensemble vide, nous pouvons tout de suite conclure que la courbe de base est constituée d'une droite double et d'une conique se coupant en un point. En se plaçant dans le repère où deux des quadriques du faisceau ont pour équation  $xw = 0$  et  $xz - y^2 = 0$ , la droite double est définie par  $x = y^2 = 0$  et la conique définie par  $w = xz + y^2 = 0$ . Leur point d'intersection a pour coordonnées  $(0, 0, 1, 0)$ .

La suite de la section est consacrée aux cas des faisceaux dégénérés pour lesquels les quadriques ont au moins un point singulier en commun. Dans ce cas, le théorème 7.10 nous assure qu'il existe un repère dans lequel les coefficients de la dernière ligne et dernière colonne des matrices de toutes les quadriques du faisceau sont tous nuls. Nous nous ramenons alors à une étude de l'intersection dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Nous pouvons définir une sous-équation déterminantielle de degré 3 et de nouveau utiliser la caractérisation de Segre et la réduction simultanée de deux formes quadratiques.

### 4.5.1 Sous-équation déterminantielle n'ayant que des racines simples

L'équation déterminantielle a trois racines simples  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Au moins une des racines est réelle, nous pouvons donc supposer que c'est  $\lambda_1$ .

Supposons que  $\lambda_2$  soit réelle, ce qui implique alors que  $\lambda_3$  l'est aussi. Le théorème de réduction simultanée des formes quadratiques nous permet d'affirmer qu'il existe dans le faisceau deux quadriques qui peuvent être mises sous la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons supposer que  $\varepsilon_3 = 1$ , quitte à multiplier les deux équations par  $-1$ . Les quadriques singulières associées aux deux premières racines de la sous-équation déterminantielle sont alors de la forme :

$$\begin{cases} ay^2 + z^2 = 0, \\ bx^2 + z^2 = 0, \end{cases} \quad \text{avec } a, b \in \{-1, 1\}.$$

Il y a trois cas possibles :

- $a = b = -1$  : l'intersection est constituée de quatre droites concourantes (figure 10.6 - illustration (b)).
- $a = -b$  : l'intersection est réduite à un point, une des deux paires de plans est imaginaire,
- $a = b = 1$  : l'intersection est réduite à un point, les deux paires de plans sont imaginaires,

Le calcul des inertiess des quadriques de rang 2 du faisceau suffit à séparer chacun des cas.

Supposons maintenant qu'il y ait deux racines complexes conjuguées. Le théorème de réduction simultanée des formes quadratiques nous permet d'affirmer qu'il existe dans le faisceau deux quadriques qui peuvent être mises sous la forme :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les quadriques du faisceau  $\lambda_1 Q_{\mathcal{P}} - Q_{\mathcal{Q}}$  et  $-\alpha Q_{\mathcal{P}} + Q_{\mathcal{Q}}$  peuvent alors être mises sous la forme :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0, \\ yz = 0. \end{cases}$$

L'intersection est alors constituée de deux droites réelles (figure 10.6 - illustration (c)) définies par  $y = x^2 - z^2 = 0$ , sécantes au point  $(0, 0, 0, 1)$  (et de deux droites complexes aussi sécantes en ce point).

#### 4.5.2 Sous-équation déterminantielle ayant une racine double

##### Une racine double, bloc $2 \times 2$ - [12]

La sous-équation déterminantielle a une racine double  $\lambda_1$  qui est réelle et rationnelle. Le bloc de Jordan qui lui est associé dans la réduction est un bloc  $2 \times 2$  :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les quadriques associées à chacune des racines de la sous-équation déterminantielle peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} y^2 + az^2 = 0, \\ xy = 0, \end{cases} \quad a \in \{-1, 1\}.$$

Il y a alors deux cas possibles :

- $a = -1$  : l'intersection est constituée de la droite double  $y = z^2 = 0$  et des deux droites simples  $x = y - z = 0$  et  $x = y + z = 0$  (figure 10.6 - illustration (e)). Les trois droites sont concourantes au point  $(0, 0, 0, 1)$ .
- $a = 1$  : les deux droites simples sont imaginaires. Leur point commun est sur la droite double. L'intersection est constituée de la droite double  $y = z^2 = 0$  (figure 10.6 - illustration (d)).

##### Une racine double, deux blocs $1 \times 1$ - [1(11)]

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les quadriques associées aux racines de la sous-équation déterminantielle peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} z^2 = 0, \\ x^2 + ay^2 = 0, \end{cases} \quad a \in \{-1, 1\}.$$

Il y a alors deux cas possibles :

- $a = 1$  : L'intersection est réduite au point  $(0, 0, 0, 1)$ ,
- $a = -1$  : l'intersection est constituée des deux droites doubles d'équations  $x - y = z^2 = 0$  et  $x + y = z^2 = 0$  (figure 10.6 - illustration (f)). Les deux droites sont sécantes en  $(0, 0, 0, 1)$ .

La connaissance des inerties des quadriques associées aux deux racines (simple et double) permet de séparer les quatre cas correspondant aux faisceaux dégénérés dont la sous-équation déterminantielle a une racine double.

#### 4.5.3 Sous-équation déterminantielle ayant une racine triple

##### Une racine triple, bloc $3 \times 3$ - [3]

La sous-équation déterminantielle a une racine triple et, dans la réduction simultanée de deux formes quadratiques du faisceau, le bloc de Jordan qui apparaît dans le résultat est de taille  $3 \times 3$ . La réduction simultanée de deux formes quadratiques du faisceau nous permet d'obtenir les équations :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La quadrique associée à cette racine triple et une autre quadrique peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} xz + y^2 = 0, \\ yz = 0. \end{cases}$$

L'intersection est alors constituée de la droite triple  $z = y^2 = 0$  et de la droite simple  $x = y = 0$  (voir figure 10.6, illustration (g)). Les deux droites sont sécantes au point  $(0, 0, 0, 1)$ .

##### Une racine triple, bloc $2 \times 2$ et $1 \times 1$ - [(21)]

La sous-équation déterminantielle a une racine triple et, dans la réduction de deux quadriques du faisceau, les blocs de Jordan apparaissant dans le résultat sont de taille  $2 \times 2$  et un bloc  $1 \times 1$ . La réduction simultanée de deux formes quadratiques nous permet d'obtenir les équations :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La quadrique associée à cette racine triple et une autre quadrique peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{cases} y^2 = 0, \\ z^2 + xy = 0. \end{cases}$$

L'intersection est constituée de la droite quadruple  $y^2 = z^2 = 0$  (figure 10.6 - illustration (h)).

La connaissance de l'inertie de la quadrique associée à la racine triple permet de séparer les deux cas que nous venons de présenter.

**Une racine triple, trois blocs  $1 \times 1$  - [(111)]**

La sous-équation déterminantielle a une racine triple et, dans la réduction de deux quadriques du faisceau, les blocs de Jordan apparaissant dans le résultat sont de taille  $2 \times 2$  et un bloc  $1 \times 1$ . La réduction simultanée de deux formes quadratiques nous permet d'obtenir les équations :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de la quadrique associée à la racine triple est de rang 0. Les autres matrices correspondant aux autres paramètres dans le faisceau représentent une seule et même quadrique. L'intersection est alors cette quadrique toute entière.

**4.5.4 Sous-équation déterminantielle identiquement nulle****Sous-équation déterminantielle identiquement nulle - [1{2}]**

Dans ce cas, la sous-équation déterminantielle associée aux sous-matrices  $3 \times 3$  supérieure gauche est elle aussi identiquement nulle. Nous pourrions alors réitérer le processus dans la dimension inférieure. Le nombre restreint de cas nous permet de les traiter directement. Pour les mêmes raisons que précédemment, il n'y a pas de quadrique de rang 3 dans le faisceau.

Si les quadriques n'ont pas de droite singulière commune (ou, en les considérant dans  $\mathbb{P}^2$ , si les paires de droites n'ont pas de points singuliers en commun), il est possible de mettre deux quadriques du faisceau sous la forme :

$$\begin{cases} xy = 0, \\ xz = 0. \end{cases}$$

L'intersection est constituée du plan d'équation  $x = 0$  et de la droite d'équation  $y = z = 0$ , qui coupe le plan au point  $(0, 0, 0, 1)$  (figure 10.6 - illustration (i)).

Si les quadriques ont une droite singulière commune (ou, en les considérant dans  $\mathbb{P}^2$  si les paires de droites ont un point singulier en commun), nous pouvons supposer que c'est le point de coordonnées  $(0, 0, 1, 0)$  (dans  $\mathbb{P}^3$ ). Toutes les équations des quadriques du faisceau dépendent uniquement des variables  $x$  et  $y$ , et il est possible de séparer les cas suivants :

- il existe deux quadriques d'équations  $x^2 = 0$  et  $y^2 = 0$  dans le faisceau. L'intersection est alors constituée de la droite quadruple  $x^2 = y^2 = 0$  (figure 10.6 - illustration (j)).
- il existe dans le faisceau deux quadriques d'équations  $xy = 0$  et  $x^2 - y^2 = 0$ . L'intersection est constituée de la droite quadruple  $x^2 = y^2 = 0$  (figure 10.6 - illustration (k)).
- il existe dans le faisceau deux quadriques d'équations  $xy = 0$  et  $y^2 = 0$ . L'intersection est constituée du plan  $y = 0$  (figure 10.6 - illustration (l)).
- le faisceau ne contient qu'une quadrique, un plan double.

La séparation des cas se fait en définissant une sous-sous-équation déterminantielle dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  qui peut avoir deux racines simples, une double, ne pas avoir de racine réelle ou être identiquement nulle.

Nous avons maintenant une vision complète de l'intersection de deux quadriques. Le chapitre suivant est consacré à l'étude de la mise en place d'algorithmes relatifs à ce que nous venons d'exposer.



# Chapitre 11

## Algorithmes associés aux différents cas

Ce chapitre est consacré à la construction des algorithmes liés aux faisceaux singuliers et dégénérés. Après une première section justifiant ce nouveau travail, nous présentons un algorithme permettant de séparer tous les cas que nous avons exposés au chapitre précédent. La dernière section du chapitre contient quelques compléments sur les propriétés des faisceaux singuliers et dégénérés et la présentation des algorithmes de détermination d'un paramétrage de la courbe de base, paramétrage rationnel de complexité algébrique optimale dans la grande majorité des cas.

### 1 Pourquoi de nouveaux algorithmes

L'algorithme général que nous avons présenté au chapitre 9 peut être utilisé en première approximation, mais nous allons montrer dans cette section qu'il est nécessaire de construire de nouveaux algorithmes pour les faisceaux singuliers et dégénérés. Dans la première partie de cette section, nous montrons que si la courbe de base du faisceau est une quartique singulière, l'emploi de l'algorithme général ne permet d'obtenir qu'une forme paramétrée non optimale de la courbe de base du faisceau, puisque le résultat obtenu contient la racine d'un polynôme, alors que nous savons que cette courbe est rationnelle. Nous montrons ensuite que dans les autres cas de faisceaux singuliers, c'est-à-dire ceux pour lesquels la courbe de base peut être séparée en plusieurs composantes algébriques (dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ ), en utilisant l'algorithme général, la résolution de l'équation aux paramètres nécessite la factorisation (non triviale) de cette équation (polynôme bivarié de degré 2 en chaque variable) ou de son discriminant (polynôme univarié de degré 4). Enfin, nous rappelons que l'algorithme général ne peut être appliqué pour des faisceaux dégénérés et expliquons comment traiter les cas correspondants. Nous concluons cette section en présentant la suite de notre démarche.

#### 1.1 Quartiques singulières

Soient les deux quadriques  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  d'équations  $y^2 + z^2 - xy - 2w^2 = 0$  et  $y^2 + z^2 - w^2 = 0$ . Déterminons une équation aux paramètres du faisceau engendré par  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  à partir du paramétrage d'une quadrique d'inertie (2, 2) du faisceau, par exemple  $Q_{\mathcal{P}}$ . Un paramétrage de  $Q_{\mathcal{P}}$  est  $X = (2ut - 2vs, 2ut, us - vt, \frac{1}{2}(us + vt)\sqrt{2})$ ; en l'insérant dans l'équation de  $Q_{\mathcal{Q}}$ , nous

obtenons alors l'équation aux paramètres :

$$\frac{1}{2}u^2s^2 - 3stuv + 4t^2u^2 + \frac{1}{4}t^2v^2 = 0.$$

Ce polynôme de degré 2 en  $(s, t)$  a pour discriminant :

$$\Delta_{s,t}(u, v) = \frac{17}{2}u^2v^2 - 8u^4.$$

Notons que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  n'est pas un carré. Lorsque cette quantité est positive ou nulle, les racines de l'équation aux paramètres sont :  $(s, t) = \left(3uv \pm \sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)}, u^2\right)$ . Enfin les deux vecteurs paramétrés définissant la courbe d'intersection sont :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2u^3 - 6uv^2 - 2v\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} \\ 2u^3 \\ 3u^2v + u\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} - vt \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(3u^2v + u\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} + vu^2\right) \end{pmatrix}, \text{ et } X_2 = \begin{pmatrix} 2u^3 - 6uv^2 + 2v\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} \\ 2u^3 \\ 3u^2v - u\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} - vt \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(3u^2v - u\sqrt{\Delta_{s,t}(u, v)} + vu^2\right) \end{pmatrix}.$$

La racine carrée de  $\Delta_{s,t}(u, v)$  ne peut être supprimée, le paramétrage obtenu n'est donc pas rationnel. La forme du résultat n'est pas optimale puisque la courbe est une quadrique singulière qui possède un paramétrage rationnel.

Par contre si nous utilisons une quadrique du faisceau de rang inférieur, par exemple  $Q_Q$  qui est d'inertie  $(2, 1)$  comme quadrique à paramétrer, nous obtenons en insérant un de ses paramétrages,  $X = (s, uv, (u^2 - v^2)/2, (u^2 + v^2)/2)$ , dans l'équation de  $Q_P$  l'équation aux paramètres suivante :

$$4suv + u^4 + v^4 + 2u^2v^2 = 0,$$

qui est une équation de degré 1 en  $s$ . Son unique solution est  $s = -(u^2 + v^2)^2/2uv$ , pour  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Le vecteur paramétré définissant la courbe d'intersection est :

$$X = \begin{pmatrix} -2(u^2 + v^2)^2 \\ 2u^2v^2 \\ uv(u^2 - v^2) \\ uv(u^2 + v^2) \end{pmatrix}.$$

Il est ici évident que l'emploi de la quadrique singulière du faisceau permet d'obtenir un paramétrage rationnel. Nous verrons à la section 11.3 que cela permet aussi d'améliorer la complexité algébrique du résultat.

## 1.2 Courbes de base décomposables

Pour les courbes décomposables, nous voulons séparer les différentes composantes algébriques de la courbe de base du faisceau. Il s'avère qu'en résolvant l'équation aux paramètres comme dans l'algorithme général, c'est-à-dire en la considérant comme un polynôme du second degré en une variable, le polynôme  $\Delta_{s,t}(u, v)$  que nous avons déjà mis en avant est soit le carré d'un autre polynôme, soit un coefficient indépendant de  $(u, v)$ . La conséquence en est que si nous savons reconnaître ce carré, nous pouvons obtenir un paramétrage rationnel des différentes composantes algébriques de la courbe de base. Nous pouvons de même montrer que l'équation déterminantielle, si elle est déterminée à partir du paramétrage d'une quadrique d'inertie  $(2, 2)$ , n'est pas irréductible. Une solution peut donc être de factoriser ce polynôme en deux variables projectives,

de degré 2 en chaque variable. Nous parlerons alors de bidegré<sup>11</sup> 2, 2 (terme qu'il ne faut évidemment pas confondre avec l'inertie d'une quadrique). Nous allons montrer ces deux propriétés, puis nous montrerons pourquoi l'une et l'autre de ces façons de procéder ne nous satisfont pas.

### 1.2.1 Factorisation de l'équation aux paramètres

L'algorithme général présenté au chapitre 8 peut être repris si le faisceau contient des quadriques d'inertie (2, 2). Ce faisant, il est nécessaire de préciser comment résoudre l'équation aux paramètres. Deux choix s'offrent à nous, soit nous essayons de factoriser cette équation, et nous voyons apparaître des équations de degré inférieur correspondant chacune à une des composantes algébriques de la courbe de base du faisceau, soit nous résolvons de manière formelle l'équation du second degré en une des deux variables projectives  $(s, t)$ , puis nous vérifions que  $\Delta_{s,t}(u, v)$  est bien un carré. Factorisons dans un premier temps l'équation aux paramètres. Nous avons le résultat suivant.

**Proposition 11.1** *Soit un faisceau singulier de deux quadriques dont la courbe de base n'est pas une quartique. Soit une équation aux paramètres définie avec le paramétrage d'une quadrique d'inertie (2, 2) du faisceau. Cette équation est de bi-degré 2, 2. De plus, nous avons les factorisations suivantes :*

- *Si la courbe de base du faisceau contient quatre droites, alors l'équation aux paramètres admet une factorisation pour laquelle les polynômes apparaissant dans le résultat sont de bidegrés 2, 0 et 0, 2.*
- *Si la courbe de base du faisceau contient une conique et deux droites, alors l'équation aux paramètres admet une factorisation pour laquelle les polynômes apparaissant dans le résultat sont de bidegrés 1, 0, 1, 1 et 0, 1.*
- *Si la courbe de base du faisceau contient deux coniques, alors l'équation aux paramètres admet une factorisation pour laquelle les polynômes apparaissant dans le résultat sont de bidegrés 1, 1 et 1, 1.*
- *Si la courbe de base du faisceau contient une cubique et une droite, alors l'équation aux paramètres admet une factorisation pour laquelle les polynômes apparaissant dans le résultat sont de bidegrés 2, 1 et 0, 1.*

La démonstration est immédiate. Nous nous sommes bien évidemment placés momentanément dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  pour éviter d'avoir à redonner tous les sous-cas possibles réels correspondant à chacun des cas complexes que nous citons.

### 1.2.2 Étude de $\Delta_{s,t}(u, v)$

L'autre idée possible est de calculer les racines formelles de l'équation de degré 2 en  $(s, t)$ , puis de factoriser le discriminant qui apparaît dans la solution et qui est un carré comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 11.2** *Soit un faisceau singulier dont la courbe de base n'est pas une quartique. Soit une équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  de ce faisceau définie par le paramétrage d'une quadrique  $Q_{\mathcal{P}}$  d'inertie (2, 2) de ce même faisceau. Alors le polynôme  $\Delta_{s,t}(u, v)$  discriminant de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  considéré comme un polynôme de degré 2 en  $(s, t)$ , est un carré.*

<sup>11</sup>Le bidegré d'un polynôme en deux variables (projectives) est le couple formé par les degrés en chacune des variables de ce polynôme.

**Démonstration :** Il est clair que si nous paramétrons une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  pour définir l'équation aux paramètres  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$ , cette équation est de degré 2 en chaque variable projective  $(u, v)$  et  $(s, t)$ . C'est un polynôme qui peut être factorisé. Du fait de son degré en chaque variable, les polynômes constituant cette factorisation sont soit tous les deux de degré 1 en une des variables (factorisation  $[2, 1][0, 1]$ ,  $[1, 1][1, 1]$ ,  $[1, 0][1, 1][0, 1]$ ), soit des polynômes univariés (factorisation  $[2, 0][0, 2]$ ). Dans le premier cas, le polynôme, en une des deux variables, est le produit de deux polynômes de degrés 1, son discriminant est donc forcément le carré d'un polynôme en l'autre variable. Dans le deuxième cas, chaque polynôme de degré 2 en une variable a un discriminant qui n'est pas un polynôme, mais une constante. Dans les deux cas, les racines de l'équation aux paramètres que nous utilisons pour définir le vecteur de paramétrage de la courbe de base sont des polynômes et ne contiennent pas de racine carrée de polynôme, ce qui finit de prouver la proposition.  $\square$

Si nous adaptons l'algorithme général aux faisceaux singuliers, la recherche des différentes composantes algébriques passe par une phase de factorisation, soit de l'équation aux paramètres elle-même, soit du discriminant  $\Delta_{s,t}(u, v)$  qui est alors le carré d'un polynôme, ou une constante.

### 1.3 Cas des faisceaux dégénérés

Les faisceaux dégénérés ne contiennent que des quadriques de rang inférieur à quatre. L'algorithme général ne peut donc pas être appliqué directement. Hormis dans un cas (celui où les quadriques du faisceau n'ont pas de point singulier commun), l'étude se ramène à l'intersection de coniques dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Nous pouvons alors considérer que nous allons appliquer de nouveau l'algorithme général, mais dans la dimension inférieure. Seule la forme de l'algorithme reste, il faut le réécrire pour  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Les quadriques d'inertie  $(2, 1)$  jouent alors le rôle que jouent les quadriques d'inertie  $(2, 2)$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . L'algorithme permettant de trouver une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  dans le faisceau peut être réécrit pour les quadriques d'inertie  $(2, 1)$ .

### 1.4 Vers de nouveaux algorithmes

Nous avons clairement établi que l'usage de l'algorithme général a trois défauts. Dans le cas où la courbe de base du faisceau est une quartique singulière, la forme du paramétrage obtenu n'est pas optimale puisque le résultat n'est pas rationnel. Dans le cas où la courbe de base est constituée de plusieurs composantes algébriques, la séparation de ces composante nécessite une factorisation (d'un polynôme en deux variable de bi-degré  $[2, 2]$  ou d'un polynôme univarié de degré 4) et introduit éventuellement des racines carrées inutiles. Cette étape est d'autant plus frustrante que d'après les résultats du chapitre 10, il est aisé de déterminer dans quel cas nous nous trouvons avant de factoriser l'équation aux paramètres ou  $\Delta_{s,t}(u, v)$ . Ce sera la première modification de notre algorithme, nous allons commencer par déterminer dans quel cas (réel) nous sommes exactement. Dans le cas d'un faisceau dégénéré, l'algorithme doit être réécrit pour la dimension inférieure, sans oublier le cas particulier de faisceaux dégénérés pour lequel les quadriques n'ont pas de point singulier commun.

Reste un écueil que nous n'avons encore pas évoqué, la complexité algébrique du résultat. Le paramétrage d'une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  introduit une racine carrée. La résolution de l'équation aux paramètres introduit aussi des nombres algébriques. Si nous factorisons l'équation aux paramètres, par exemple dans le cas où cette factorisation est de la forme  $[1, 1][1, 1]$ , nous pouvons introduire un autre niveau de racine carrée. Si nous factorisons le polynôme  $\Delta_{s,t}(u, v)$ , le problème est le même. Si nous observons l'exemple de la quartique singulière, nous nous apercevons qu'en utilisant un cône (à coefficients rationnels) du faisceau, non seulement nous

avons obtenu un paramétrage rationnel, mais en plus, les coefficients apparaissant dans le résultat sont tous rationnels. Les progrès que nous réalisons reposent sur l'exploitation des propriétés géométriques des quadriques singulières du faisceau.

Nous allons donc dans la suite commencer par expliquer comment séparer les cas de manière efficace, puis dans chaque cas expliquer comment déterminer la courbe de base en tirant profit au maximum des propriétés géométriques des quadriques du faisceau (notamment les quadriques singulières).

## 2 Séparation des cas

**entrée :**  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques à coefficients rationnels  
**sortie :** courbe de base du faisceau  $\mathcal{F}(Q_{\mathcal{P}}, Q_{\mathcal{Q}})$

```

 $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} = \det(x\mathcal{P} + y\mathcal{Q})$ 
si  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} \equiv 0$  alors {faisceau dégénéré}
    algorithme 11.6
fin si
 $pgcd = \gcd(\partial\mathcal{S}/\partial x, \partial\mathcal{S}/\partial y)$ 
si  $\text{degré}(pgcd) = 0$  alors {faisceau régulier}
    algorithme 9.2
sinon si  $\text{degré}(pgcd) = 1$  alors {une racine double et deux simples}
    algorithme 11.2
sinon si  $\text{degré}(pgcd) = 2$  alors
    si  $\text{discriminant}(pgcd)=0$  alors {une racine triple}
        algorithme 11.3
    sinon {deux racines doubles}
        algorithme 11.5
    fin si
sinon {une racine quadruple}
    algorithme 11.4
fin si

```

**Algorithme 11.1:** Séparation des cas en fonction de la multiplicité des racines de l'équation déterminantielle.

La factorisation de l'équation aux paramètres, ou de son discriminant pourrait se faire sans connaissance *a priori*, mais avec les informations contenues dans les différents tableaux 9.a, 10.a, 10.b, 10.c, 10.d et 10.e, nous pouvons commencer par déterminer la classe de faisceau à laquelle appartient celui que nous étudions. Nous commençons, avec l'algorithme 11.1 par une première séparation en fonction des propriétés de l'équation déterminantielle, à savoir si elle a des racines simples ou multiples (et alors la multiplicité de ces racines), ou si elle est identiquement nulle.

**Remarque 11.3** *Les racines multiples réelles de l'équation déterminantielle sont toujours rationnelles sauf éventuellement dans le cas où l'équation déterminantielle a deux racines doubles; elles appartiennent alors à une extension algébrique de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ .*

Cette remarque est particulièrement importante. En effet, comme ces quadriques sont à coefficients rationnels, il est naturel d'utiliser leur paramétrage pour déterminer l'équation aux paramètres. Dans le pire des cas, une seule racine carrée est introduite dans les coefficients de cette équation, ce qui évite d'avoir recours à l'algorithme 9.1 pour trouver une quadrique

d'inertie (2, 2) contenant un point rationnel (et donc dont le paramétrage contient au plus une racine carrée).

## 2.1 Une racine multiple

Dans le cas où l'équation déterminantielle n'a qu'une racine multiple, nous sommes assurés que cette racine est rationnelle et donc que la quadrique qui lui est associée est à coefficients rationnels. La suite de l'algorithme de séparation des cas ne nécessite alors que des calculs algébriques simples puisqu'il s'agit de déterminer la multiplicité de la racine, la valeur de la racine, le rang et l'inertie de la quadrique correspondante. Le calcul de l'inertie peut se faire en appliquant la méthode de Descartes au polynôme caractéristique de la matrice associée à la quadrique singulière, et le rang se déduit de ce calcul trivialement. Reste dans le cas d'une racine double, le calcul du polynôme  $\mathcal{E}_{\lambda_0, \mu_0}(\lambda, \mu) = \mathcal{E}(\lambda, \mu) / (\mu_0\lambda - \lambda_0\mu)^2$  qui est nécessaire pour séparer les cas réels possibles, mais sa détermination ne pose aucun problème, il s'agit juste de la division de deux polynômes à coefficients rationnels. La séparation des cas découle directement des propriétés que nous avons mises en avant dans les tableaux 10.a, 10.b et 10.c du chapitre 10.

## 2.2 Deux racines multiples

Si l'équation déterminantielle a deux racines multiples, elles sont toutes deux de multiplicité 2, et peuvent ne pas être rationnelles, elles peuvent aussi ne pas être réelles. Nous avons trois cas distincts, celui où les racines sont réelles rationnelles, celui où elles sont réelles irrationnelles, et celui où elles sont complexes. Ces trois cas constituent notre premier critère de distinction. Nous créons une nouvelle séparation des cas entre racines réelles rationnelles et racines réelles irrationnelles car les quadriques singulières du faisceau sont alors à coefficients rationnels ou irrationnels selon le cas, ce qui a une influence non négligeable dans les calculs de rang, d'inertie ou de paramétrage de la quadrique correspondante puisque l'arithmétique utilisée n'est plus la même. De plus, si les racines sont irrationnelles, les rangs des matrices des quadriques qui leur sont associées sont nécessairement les mêmes. Cela est dû au fait que les coefficients de l'une et l'autre des quadriques sont conjugués sur l'extension de  $\mathbb{Q}$  dans laquelle ils sont définis (extension de degré 2). Hormis cette nouvelle considération, la séparation des cas se fait selon les critères établis dans le tableau 10.d du chapitre 10.

## 2.3 Faisceaux dégénérés

Le cas des faisceaux dégénérés revient principalement à réécrire l'algorithme général dans la dimension inférieure, hormis pour le cas particulier où les quadriques du faisceau n'ont pas de point singulier commun. Pour séparer ce cas, nous déterminons le lieu singulier commun à toutes les quadriques du faisceau, en calculant l'intersection des lieux communs des deux quadriques engendrant le faisceau. Si la dimension de ce lieu est -1, les quadriques du faisceau n'ont pas de point singulier commun. Une fois ce cas écarté, nous pouvons nous ramener au calcul de l'intersection de deux coniques dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  en choisissant un point du lieu singulier commun à toutes les quadriques du faisceau, en l'envoyant sur le point  $(0, 0, 0, 1)$ . Dans ce repère, les équations des quadriques du faisceau ne dépendent que des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Il suffit de continuer le calcul dans le plan projectif  $w = 0$ . La séparation des cas se fait comme dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  par calcul d'une sous-équation déterminantielle et recherche de ses racines multiples, comme indiqué dans le tableau 10.e.

**entrée :**  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  deux quadriques engendrant un faisceau dont l'équation déterminantielle  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine double (réelle) et deux simples.

```

 $(\lambda_0, \mu_0)$  la racine double de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ 
 $r_0$  et  $I_0$  le rang et l'inertie de  $\lambda_0 Q_{\mathcal{P}} + \mu_0 Q_{\mathcal{Q}}$ 
 $\mathcal{E}_{\lambda_0, \mu_0}(\lambda, \mu) = \mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} / (\mu_0 \lambda - \lambda_0 \mu)^2$ 
 $s = \mathcal{E}_{\lambda_0, \mu_0}(\lambda_0, \mu_0)$ ,  $\delta = \text{sign}(\text{discriminant}(\mathcal{E}_{\lambda_0, \mu_0}(\lambda, \mu)))$ 
si  $r_0 = 3$  alors {quartique nodale}
  si  $\delta = -1$  alors {deux racines simples complexes}
    renvoyer quartique nodale à singularité concave
  sinon {deux racines simples réelles}
    si  $s = +1$  alors
      renvoyer quartique nodale à singularité convexe
    sinon si  $I_0 = (2, 1)$  alors {le cône associé à  $(\lambda_0, \mu_0)$  est d'inertie réel}
      renvoyer quartique nodale à point isolé
    sinon {le cône associé à  $(\lambda_0, \mu_0)$  est d'inertie  $(3, 0)$ }
      renvoyer un point
    fin si
  fin si
sinon { $r_0 = 2$ , deux coniques sécantes}
  si  $\delta = -1$  alors {deux racines simples complexes}
    si  $s = +1$  alors
      renvoyer deux coniques sécantes, singularité concave
    sinon
      renvoyer une conique
    fin si
  sinon {deux racines simples réelles}
    si  $I_0 = (1, 1)$  alors {la paire de plans associée à  $(\lambda_0, \mu_0)$  est réelle}
      si  $s = +1$  alors
        renvoyer deux coniques sécantes, singularité convexe
      sinon
        si le faisceau contient une quadrique d'inertie  $(4, 0)$  alors
          renvoyer  $\emptyset$ 
        sinon
          renvoyer deux coniques distinctes
        fin si
      fin si
    sinon {la paire de plans associée à  $(\lambda_0, \mu_0)$  est réduite à une droite dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ }
      si  $s = +1$  alors
        renvoyer  $\emptyset$ 
      sinon
        renvoyer deux points
      fin si
    fin si
  fin si
fin si

```

**Algorithme 11.2:** Séparation des cas pour les faisceaux singuliers dont l'équation déterminantielle a une racine double et deux simples.

### 3 Calcul de la forme paramétrée

Nous savons maintenant dans quel cas nous nous situons, il nous reste à calculer la forme paramétrée de la courbe de base du faisceau. Comme au chapitre 10, le premier critère de

**entrée :**  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux quadriques telles que  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine triple et une simple

$(\lambda_0, \mu_0)$  la racine triple de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$

$\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}$  la quadrique qui lui est associée,  $r_0$  et  $I_0$  son rang et son inertie

**si**  $r_0 = 3$  **alors** {quartique cuspidale}

renvoyer **quartique cuspidale**

**sinon si**  $r_0 = 2$  **alors** {deux coniques tangentes}

**si**  $I_0 = (1, 1)$  **alors** {la paire de plans est réelle}

renvoyer **deux coniques tangentes**

**sinon** {la paire de plans est réduite à une droite}

renvoyer  $\emptyset$

**fin si**

**sinon**  $\{r_0 = 1 : \text{conique double}\}$

$I_1$  l'inertie  $\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}$ , où  $(\lambda_1, \mu_1)$  est la seconde racine de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  ( $r_1$  le rang est égal à 3)

**si**  $I_1 = (2, 1)$  **alors** {le cône  $R(\lambda_1, \mu_1)$  est réel}

renvoyer **conique double**

**sinon** {le cône  $R(\lambda_1, \mu_1)$  est réduit à un point}

renvoyer  $\emptyset$

**fin si**

**fin si**

**Algorithme 11.3:** Séparation des cas pour les faisceaux singuliers dont l'équation déterminantielle a une racine triple.

distinction utilisé pour séparer les différents cas est la caractéristique de Segre qui leur est associée. Ce critère correspond au découpage des sous-sections suivantes. Nous présentons dans chacune d'entre elles la méthode utilisée pour traiter les sous-cas apparaissant dans l'espace réel, les problèmes liés à la complexité algébrique de chacun de ces cas et les solutions retenues pour les résoudre. Avant de commencer cette étude, remarquons quelques propriétés des faisceaux que nous étudions.

Tout d'abord, dans le cas des faisceaux singuliers, les racines de l'équation déterminantielle sont nécessairement rationnelles sauf si ce sont des racines simples d'une équation déterminantielle possédant une racine double et deux simples, ou si ce sont les deux racines doubles de l'équation déterminantielle. Dans ces deux cas, les racines non-rationnelles peuvent appartenir à une extension de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$  et sont conjuguées sur  $\mathbb{Q}$ . Elles sont de la forme  $a + b\sqrt{c}$  ou  $a + ib\sqrt{c}$  ( $a, b, c \in \mathbb{Q}$ ). Dans tous les autres cas les racines de l'équation déterminantielle sont rationnelles ainsi que les quadriques qui leurs sont associées. Ainsi, nous sommes assurés, en utilisant la réduction de Gauss, d'obtenir une équation canonique à coefficients rationnels de ces quadriques singulières, et donc un paramétrage contenant au plus une racine carrée (cela correspond aux cas où la quadrique singulière est d'inertie  $(2, 1)$  ou  $(1, 1)$ ).

Si le faisceau que nous étudions est dégénéré, son équation déterminantielle étant identiquement nulle, il nous faut considérer sa sous-équation déterminantielle qui est un polynôme de degré 3. Si ce polynôme n'a que des racines simples, elles peuvent appartenir à une extension algébrique de degré 3, et les quadriques qui leurs sont associées ont leurs coefficients dans cette extension. Or, dans le cas des faisceaux dégénérés, ce sont les quadriques d'inertie  $(2, 1)$  qui font office de quadriques régulières (ce sont les quadriques/coniques de plus haut rang dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , espace où se fait le calcul). En utilisant la même technique qu'au chapitre 9 pour trouver une quadrique/conique du faisceau contenant un point rationnel (autre que son sommet), nous pouvons obtenir un paramétrage de cette quadrique (issu du tableau 8.a), sans racines carrées. Le problème est alors que l'équation aux paramètres qui en résulte est de degré 4. Si la sous-équation



**entrée :**  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux quadriques telles que  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine quadruple

$(\lambda_0, \mu_0)$  la racine quadruple de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$   
 $\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}$  la quadrique qui lui est associée,  $r_0$  et  $I_0$  son rang et son inertie  
**si**  $r_0 = 3$  **alors** {cubique et droite tangentes}  
renvoyer **cubique et droite tangentes**  
**sinon si**  $r_0 = 2$  **alors** {conique et deux droites sécantes ou deux droites concourantes et une droite double}  
**si**  $I_0 = (2, 0)$  **alors** {la paire de plans est réduite à une droite}  
renvoyer **droite double**  
**sinon** {la paire de plans est réelle}  
 $s$  le signe de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\lambda, \mu)$  pour  $(\lambda, \mu) \neq (\lambda_0, \mu_0)$   
**si**  $s = +1$  **alors**  
 $l_0$  la droite singulière de  $\mathcal{R}_{\lambda_0, \mu_0}$   
**si**  $l_0$  est contenue dans  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  **alors**  
renvoyer **deux droites concourantes et une droite double**  
**sinon**  
renvoyer **une conique et deux droites se coupant sur la conique**  
**fin si**  
**sinon** { $s = -1$ }  
renvoyer **une conique**  
**fin si**  
**fin si**  
**sinon si**  $r_0 = 1$  **alors**  
renvoyer **deux droites doubles**  
**sinon** { $r_0 = 0$ }  
**si**  $\mathcal{P}$  ou  $\mathcal{Q}$  est d'inertie  $(2, 2)$  **alors**  
renvoyer **quadrique régulière**  
**sinon**  
renvoyer  $\emptyset$   
**fin si**  
**fin si**

**Algorithme 11.4:** Séparation des cas pour les faisceaux singuliers dont l'équation déterminantielle a une racine quadruple.

déterminantielle a une racine multiple, alors la ou les quadriques correspondant aux racines de cette sous-équation sont rationnelles. Nous montrons comment traiter ces différents cas dans les sous-sections correspondantes.

L'attitude que nous adoptons consiste dans tous les cas à utiliser les quadriques de rang le plus faible, à coefficients rationnels (sauf exceptionnellement quand l'équation déterminantielle a deux racines doubles). Les raisons de ce choix sont qu'ainsi nous introduisons le moins possible de racines carrées dans l'expression de nos coefficients, sauf dans quelques cas particuliers, où nous introduisons éventuellement une racine carrée non nécessaire par rapport au résultat optimal. Sauf mention explicite, la démarche générale des algorithmes associés à chacun des cas consistera à déterminer exactement dans quel cas réel nous nous trouvons, à déterminer la quadrique à paramétrer pour définir l'équation aux paramètres, puis à calculer le paramétrage associé à chaque composante algébrique de l'intersection. Nous utilisons souvent le fait que les lieux singuliers des quadriques d'un faisceau sont rationnels.

**entrée :**  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  deux quadriques telles que  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  ait deux racines doubles,  $\mathcal{H}$  le pgcd des deux dérivées partielles de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  (calculé dans l'algorithme 11.1)

$(\lambda_0, \mu_0)$  et  $(\lambda_1, \mu_1)$  les racines doubles de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$

$\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}$  et  $\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}$  les matrices des quadriques qui leur sont associées

$\delta = \text{discriminant}(\mathcal{H})$ ,  $s$  le signe de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  en dehors des deux racines

**si**  $\delta$  est un carré **alors** {les racines doubles sont réelles rationnelles}

$r_0$  et  $r_1$  les rang de  $\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}$  et  $\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}$ ,  $I_1$  le rang de  $\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}$

**si**  $r_0 = 3$  and  $r_1 = 3$  **alors** {cubique et droite sécantes}

renvoyer cubique et droite sécantes

**sinon**  $\{r_0 = 2\}$

**si**  $r_1 = 3$  **alors** {conique et deux droites ne se coupant pas sur la conique}

**si**  $I_1 = (3, 0)$  **alors** {le cône  $Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}}$  est réduit à un point}

renvoyer point

**sinon** {le cône  $Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}}$  est réel}

**si**  $s = +1$  **alors**

renvoyer une conique et deux droites

**sinon**

renvoyer une conique et un point

**fin si**

**fin si**

**sinon**  $\{r_1 = 2$ , quatre droites concourantes}

**si**  $s = -1$  **alors**

renvoyer deux points

**sinon si** le faisceau contient une quadrique d'inertie  $(4, 0)$  **alors**

renvoyer  $\emptyset$

**sinon**

renvoyer quatre droites concourantes

**fin si**

**fin si**

**fin si**

**sinon si**  $\delta < 0$  **alors** {les racines doubles sont complexes conjuguées}

**si**  $r_0 = 2$  **alors**  $\{Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}}$  et  $Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}}$  sont des paires de plans}

renvoyer deux droites concourantes

**sinon**  $\{r_0 = 3$ ,  $Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}}$  et  $Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}}$  sont des cônes}

renvoyer cubique et droite non-sécantes

**fin si**

**sinon** {racines réelles irrationnelles}

**si**  $r_0 = 2$  **alors**  $\{Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_0, \mu_0)}}$  et  $Q_{\mathcal{R}_{(\lambda_1, \mu_1)}}$  sont des paires de plans}

**si**  $s = -1$  **alors**

renvoyer deux points

**sinon si** le faisceau contient une quadrique d'inertie  $(4, 0)$  **alors**

renvoyer  $\emptyset$

**sinon**

renvoyer quatre droites concourantes

**fin si**

**sinon**

renvoyer cubique et droite sécantes

**fin si**

**fin si**

**Algorithme 11.5:** Séparation des cas pour les faisceaux singuliers dont l'équation déterminante a deux racines doubles.

### 3.1 [112] : quartique nodale

La lecture de la caractéristique de Segre nous apprend que l'équation déterminantielle du faisceau a une racine double et deux simples (ces dernières sont soit toutes les deux réelles, soit toutes les deux complexes). La quadrique correspondant à la racine double est un cône, réel ou complexe, dont l'équation est à coefficients rationnels. Dans l'espace réel, trois cas peuvent alors apparaître comme nous l'avons déjà présenté au chapitre 10 (tableau 10.c). Soit la quartique est réduite à son point nodal, soit la quartique est réelle et le point nodal isolé, ou soit la quartique est réelle sans point isolé, le point nodal correspond à l'auto-intersection de la courbe.

Dans les trois cas nous avons le résultat :

**Propriété 11.4** *Le point nodal de la quartique est le sommet du cône associé à la racine double de l'équation déterminantielle. C'est un point réel à coordonnées rationnelles.*

Il est immédiat de trouver ce point. Nous avons déjà vu comment distinguer les trois cas. Si la quartique est réduite à son sommet, c'est le point nodal qui constitue entièrement la courbe de base, et nous avons fini.

Dans le cas contraire, nous utilisons le paramétrage du cône associé à la racine double pour définir l'équation aux paramètres. Quand l'équation du cône est sous forme canonique, le paramétrage de ce cône est défini par le vecteur  $X = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v), s)$ , avec  $(u, v, s) \in \mathbb{P}^2$ . Cela signifie que l'équation aux paramètres est de la forme :

$$as^2 + b(u, v)s + c(u, v) = 0.$$

Comme le point nodal correspond au paramètre  $(u, v) = (0, 0)$ , nous pouvons affirmer que  $a = 0$ , et donc que l'équation aux paramètres est de degré 1 en  $s$ . La résolution de cette équation n'introduit pas de racine carrée supplémentaire dans le résultat. La seule racine qui a pu être introduite est celle apparaissant dans le paramétrage du cône.

Les coefficients de la courbe de base du faisceau appartiennent à une extension algébrique de degré au plus 2 sur  $\mathbb{Q}$ . Cette extension est triviale si et seulement si le cône associé à la racine double de l'équation déterminantielle possède un paramétrage à coefficients rationnels, c'est-à-dire s'il contient des points rationnels autre que son sommet. Le résultat que nous obtenons contient peut-être une racine carrée possiblement non nécessaire dans ses coefficients. Pour savoir si ce résultat est optimal, il nous faudrait savoir si le cône contient un point rationnel ou pas.

Enfin nous présentons deux exemples pour lesquels les résultats que nous obtenons sont optimaux.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 3z^2 = 0, \\ xw + z^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 3z^2 = 0, \\ zw + x^2 = 0. \end{cases}$$

### 3.2 [13] : quartique cuspidale

Ce cas est plus simple puisqu'il ne correspond qu'à un cas réel et ne se sépare pas en plusieurs sous-cas. Nous pouvons comme précédemment paramétrer le cône  $Q_S$  associé à la racine triple de l'équation déterminantielle. La particularité de ce cas tient dans la propriété suivante :

**Propriété 11.5** *Le plan tangent, au point cuspidal de la courbe de base du faisceau, à toutes les quadriques du faisceau autres que  $Q_S$  coupe cette dernière quadrique selon une droite double, rationnelle.*

Nous pouvons donc aisément déterminer un point rationnel sur cette droite autre que le point cuspidal de la courbe de base du faisceau, ce n'est donc pas le sommet de  $Q_S$ . À partir de ce point, nous pouvons déterminer un paramétrage à coefficients rationnels de  $Q_S$ . Comme dans le cas où la courbe de base est une quartique nodale, l'équation aux paramètres définie par le paramétrage de  $Q_S$  est de degré 1 en  $s$ . La résolution de cette équation n'introduit pas de racine carrée supplémentaire dans les coefficients, le résultat que nous obtenons est donc à coefficients rationnels, il est optimal en terme de complexité algébrique.

### 3.3 [22] : cubique et droite sécantes

Ce cas apparaît si l'équation déterminantielle a deux racines doubles et que le rang des quadriques associées à ces racines est 3. La première idée est de séparer le cas où les racines doubles sont toutes les deux réelles de celui où elles sont toutes les deux complexes. Cependant, dans le cas où elles sont toutes les deux réelles, elles peuvent ne pas être rationnelles. Si c'est le cas, nous ne souhaitons pas utiliser ces quadriques puisqu'elles ne sont pas à coefficients rationnels. Nous allons séparer notre étude en deux cas, celui où l'équation déterminantielle a deux racines doubles réelles rationnelles, et celui où ces deux racines doubles sont soit complexes, soit réelles irrationnelles. Dans ce dernier cas, elles appartiennent à une extension de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ , et sont conjuguées sur cette extension.

Si les deux racines sont réelles rationnelles, les deux quadriques singulières du faisceau sont des cônes. Le sommet de chaque cône appartient à la droite contenue dans l'intersection, cette droite est donc rationnelle. De plus, nous pouvons déterminer pour chaque cône un paramétrage à coefficients rationnels. L'utilisation d'un de ces deux paramétrages permet d'obtenir une équation de degré 1 en  $s$  :  $b(u, v)s + c(u, v) = 0$ , où  $b$  et  $c$  ont un facteur linéaire commun correspondant à la droite de l'intersection. En divisant l'équation par ce facteur commun, nous obtenons une équation aux paramètres dont la solution en  $s$  correspond à la cubique contenue dans la courbe de base du faisceau. La droite et la cubique se coupent au sommet des deux cônes. Les paramétrages de la cubique et de la droite sont à coefficients rationnels, notre résultat est optimal.

Dans le cas où les racines de l'équation déterminantielle ne sont pas rationnelles, nous allons utiliser l'algorithme général, puisque nous savons que le faisceau contient des quadriques d'inertie (2, 2) (sinon dans le cas de deux racines irrationnelles réelles, la courbe de base du faisceau serait réduite à deux points, voir théorème 9.10). La droite contenue dans l'intersection est nécessairement rationnelle car sinon, sa conjuguée sur  $\mathbb{Q}$  appartiendrait nécessairement à l'intersection. Cette remarque est particulièrement importante car elle nous assure que si nous trouvons une quadrique d'inertie (2, 2) contenant un point rationnel dans le faisceau, le déterminant de la matrice associée à cette quadrique est un carré dans  $\mathbb{Q}$ . Le paramétrage de cette quadrique est donc à coefficients rationnels, ainsi que l'équation aux paramètres qu'il permet de définir. Comme nous l'avons déjà montré, cette équation est de bidegré 2, 2 et peut se factoriser en deux polynômes de bidegrés 1, 0 et 1, 2 (ou 0, 1 et 2, 1). Il s'agit de deux équations de degré 1 en la même variable. Les paramétrages de la droite et de la cubique obtenus sont donc tous les deux à coefficients rationnels. Le résultat que nous obtenons est optimal en terme de complexité algébrique.

### 3.4 [4] : cubique et droite tangentes

Dans ce cas, l'équation déterminantielle a une racine quadruple. La matrice de la quadrique associée à cette racine est de rang 3. Comme précédemment, la droite est rationnelle. Le cône associé à la racine quadruple contient donc une droite rationnelle, ce qui nous permet de dé-

terminer un paramétrage à coefficients rationnels de ce cône. La résolution de l'équation aux paramètres se fait aisément comme nous l'avons déjà expliqué. Les paramétrages de la cubique et de la droite que nous obtenons sont à coefficients rationnels, le résultat est donc optimal en terme de complexité algébrique.

### 3.5 [11(11)] : deux coniques sécantes

L'équation déterminantielle a une racine double, la matrice de la quadrique associée à cette racine est de rang 2. Dans l'espace réel, selon que cette paire de plans est réelle (inertie  $(1, 1)$ ) ou complexe (inertie  $(2, 0)$ ), mais aussi selon que les cônes associés aux racines simples de l'équation déterminantielle sont d'inertie  $(3, 0)$  ou  $(2, 1)$ , la courbe de base du faisceau peut être soit deux points, soit une conique, soit deux coniques, sécantes ou pas.

Si la paire de plans est complexe, c'est-à-dire si sa partie réelle est réduite à une droite, la courbe de base du faisceau est constituée de deux points. Il suffit alors de calculer l'intersection de cette droite avec n'importe quelle autre quadrique du faisceau (à coefficients rationnels). Une racine carrée apparaît dans les coefficients du résultat si et seulement si l'équation dépendant des paramètres de la droite a des racines irrationnelles.

Cette situation se retrouve dans l'exemple suivant :

$$\begin{cases} z^2 + w^2 = 0, \\ x^2 - 2y^2 + w^2 = 0. \end{cases}$$

Les points ont pour coordonnées  $(\pm\sqrt{2}, 1, 0, 0)$ . Il est clair que leur coordonnées ne peuvent être simplifiées. Le résultat est optimal en terme de complexité algébrique.

Si la courbe de base est constituée d'une seule conique, comme nous l'avons déjà vu au chapitre 10, cela signifie que la paire de plans associée à la racine double est réelle, que les deux racines simples de l'équation déterminantielle sont complexes et que le faisceau ne contient pas de quadriques d'inertie  $(2, 2)$ . La conique est contenue dans un des deux plans de la paire de plans. Il faut les séparer pour définir deux équations aux paramètres, ce qui peut introduire un niveau de racine carrée. Une de ces deux équations a une solution qui correspond à la conique. En résolvant cette équation, il apparaît un autre niveau de racine carrée puisque cette équation est de degré 2. L'extension dans laquelle sont contenus les coefficients du paramétrage final est donc de degré 1, 2 ou 4, qui dans ce dernier cas est le produit de deux extensions de degré 2 (il y a deux niveaux de racines carrées imbriquées). Si la paire de plans est irrationnelle, le résultat est optimal. Sinon, la deuxième racine carrée, issue de la résolution de l'équation aux paramètres, est possiblement non nécessaire. Pour savoir si elle est de trop ou pas, il faut vérifier la présence de points rationnels sur la conique définie par la solution de cette équation.

Si la courbe de base est constituée de deux coniques (sécantes ou pas), le faisceau contient des quadriques d'inertie  $(2, 2)$ . L'idée est de trouver une quadrique d'inertie  $(2, 2)$  contenant un point rationnel. En insérant son paramétrage dans l'équation d'une autre quadrique du faisceau, nous obtenons une équation aux paramètres dont les coefficients dépendent d'une racine carrée. Nous séparons alors la paire de plans du faisceau, ce qui nous permet d'obtenir deux équations de plans simples (équations linéaires) dont les coefficients dépendent d'une racine carrée si la paire de plans est irrationnelle. Nous déterminons alors deux équations aux paramètres en insérant le paramétrage de notre quadrique d'inertie  $(2, 2)$  dans l'équation de chacun des plans. Ces deux équations sont linéaires et leurs résolutions n'introduit pas d'autres racines. Si jamais les

deux autres racines simples de l'équation déterminantielle sont rationnelles, il est possible de paramétrer les cônes qui leur sont associés.

En terme de complexité algébrique, la racine carrée introduite par la séparation des plans est inévitable. Par contre, l'autre racine carrée introduite par le paramétrage de la quadrique d'inertie  $(2, 2)$  ou  $(2, 1)$  est possiblement non nécessaire au résultat final. Si nous utilisons l'un des cônes du faisceau, pour vérifier si elle est nécessaire, il faut déterminer si ce cône contient ou pas des points rationnels en dehors de son sommet.

Les exemples suivants illustrent différents cas.

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 33w^2 = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - w^2 = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 3w^2 = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0. \end{array} \right.$$

Le premier exemple montre un cas où l'extension dans laquelle sont contenus les coefficients du paramétrage final est de degré 4. Les deux autres exemples montrent des cas où cette extension est de degré 2, mais pour des « raisons » différentes. Dans le deuxième cas, la paire de plans est rationnelle, mais la conique ne contient pas de points rationnels. Dans le troisième cas, la paire de plan est irrationnelle, chaque plan étant défini sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ , et la conique irrationnelle sur  $\mathbb{Q}$ , mais rationnelle sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ .

### 3.6 [1(21)] : deux coniques tangentes

L'équation déterminantielle a une racine triple et une simple. La quadrique associée à la racine triple est une paire de plans, celle associée à la racine simple un cône. La courbe de base dans l'espace réel est soit réduite à un point, soit constituée de deux coniques tangentes entre elles. Dans le premier cas, la paire de plans est réduite à une droite double que nous paramétrons. En insérant ce paramétrage dans l'équation du cône du faisceau nous obtenons une équation aux paramètres dont la résolution nous permet de déterminer les coordonnées du point de l'intersection. Le point est rationnel car sinon son conjugué dans l'extension dans laquelle il serait défini appartiendrait à la courbe de base, ce qui est impossible.

Dans le deuxième cas, la paire de plans est réelle. Chaque plan coupe le cône selon une des deux coniques constituant l'intersection. Nous utilisons le paramétrage de chacun de ces plans pour définir deux équations aux paramètres dont la solution de chacune d'entre elles définit le paramétrage de chacune des coniques de la courbe de base. Les coniques ont un paramétrage rationnel sur l'extension de  $\mathbb{Q}$  sur laquelle sont définis les coefficients des paramétrages des plans. Le paramétrage obtenu est optimal en terme de complexité algébrique. L'exemple suivant illustre le cas où la paire de plans n'est pas rationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2w^2 = 0, \\ xy + z^2 = 0. \end{array} \right.$$

### 3.7 [1(111)] : une conique double

L'équation déterminantielle a une racine triple et une simple. La quadrique associée à la racine triple est un plan double, celle associée à la racine simple est un cône rationnel (puisque la racine de l'équation déterminantielle qui lui est associée est rationnelle). Nous paramétrons le plan double par le vecteur  $X(u, v, s)$ ,  $(u, v, s) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , et insérons  $X$  dans l'équation du cône pour définir l'équation aux paramètres. C'est l'équation implicite à coefficients rationnels d'une conique dans un plan, il suffit de paramétrer cette conique par  $u(t_1, t_2)$ ,  $v(t_1, t_2)$  et  $s(t_1, t_2)$ . Reste alors à remplacer  $u$ ,  $v$  et  $s$  par les solutions que nous venons de calculer pour obtenir le

paramétrage de la conique constituant la courbe de base du faisceau. Les coefficients du paramétrage final sont rationnels si et seulement si la conique définie par l'équation aux paramètres contient un point rationnel dans l'espace des paramètres  $(u, v, s)$ . Si elle n'en contient pas, le paramétrage final appartient à une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré 2 comme l'illustre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} x^2 = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0. \end{cases}$$

### 3.8 [2(11)] : une conique et deux droites sécantes

L'équation déterminantielle a deux racines doubles. Les matrices des quadriques associées aux deux racines doubles sont de rangs 2 et 3. De ce fait, les deux racines sont nécessairement rationnelles (si l'une ne l'était pas, sa conjuguée sur  $\mathbb{Q}$  serait une solution de l'équation déterminantielle, et les matrices des quadriques associées aux racines conjuguées de mêmes rangs). La paire de plans du faisceau est toujours réelle. Le sommet du cône appartient à cette paire de plan, sans appartenir à sa droite singulière (sinon le faisceau serait dégénéré). Il y a trois cas possibles d'intersection dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , soit la courbe de base du faisceau est réduite à un point, soit elle est constituée d'un point et d'une conique, soit de deux droites et une conique.

La courbe de base est réduite à un point dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  si le cône est réduit à un point, son sommet. Le point est à coefficients rationnels.

Si la courbe de base du faisceau est constituée d'une conique et d'un point dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , le cône et les plans sont réels. Le cône coupe l'un des deux plans en son sommet, et l'autre plan selon une conique. Le calcul du point est immédiat. Pour déterminer le paramétrage de la conique, nous insérons le paramétrage du plan qui la contient dans l'équation du cône. La résolution de l'équation aux paramètres qui en résulte peut possiblement introduire une racine carrée non nécessaire. Pour savoir si cette racine carrée est réellement nécessaire, il faut vérifier si la conique contient ou pas un point rationnel, ce qui n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant.

$$\begin{cases} xw = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0. \end{cases}$$

La démonstration vient du fait que le cône n'a pas de point rationnel autre que son sommet.

Si la courbe de base est constituée d'une conique et de deux droites dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , le cône est réel et coupe l'un des deux plans selon une conique non singulière et l'autre plan selon une conique singulière, en ayant son sommet contenu dans ce plan (voir illustration (b) de la figure 10.5). Nous avons vu au chapitre 10, section 10.4.4.3 que ce cas se distingue du précédent par le signe du coefficient du terme de plus haut degré de l'équation déterminantielle. En terme de complexité algébrique, trois cas peuvent apparaître, soit les droites et la conique sont paramétrées sur  $\mathbb{Q}$ , soit seule la conique peut être paramétrée sur  $\mathbb{Q}$ , ou soit les droites et la conique sont paramétrées sur la même extension algébrique de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ . Les trois exemples suivants illustrent ces trois cas.

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^2 + z^2 - w^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 0, \\ 2y^2 + z^2 - 3w^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 0, \\ y^2 + z^2 - 3w^2 = 0. \end{cases}$$

Sur le premier exemple, toutes les composantes sont rationnelles. Sur le deuxième, les deux droites définies par  $y = z^2 - 3w^2 = 0$  sont irrationnelles, alors que la conique définie par

$x = 2y^2 + z^2 - 3w^2 = 0$  peut être paramétrée rationnellement puisqu'elle contient le point rationnel  $(0, 1, 1, 1)$ . Enfin, sur le dernier exemple les droites et la conique ne peuvent être paramétrées rationnellement.

### 3.9 [(31)] : une conique et deux droites se coupant toutes au même point

L'équation déterminantielle a une racine quadruple associée à une paire de plans réelle. Deux cas peuvent se présenter dans l'espace réel, selon que le faisceau contient, hormis la paire de plans, uniquement des quadriques d'inertie  $(3, 1)$  ou uniquement des quadriques d'inertie  $(2, 2)$ . Dans le premier cas, la courbe de base est une conique. Dans le deuxième, elle est constituée d'une conique et de deux droites toutes « concourantes » en un point.

Le calcul de la courbe de base se fait dans les deux cas en paramétrant chacun des plans et en insérant ces paramétrages dans l'équation d'une autre quadrique du faisceau. Une des deux équations obtenue correspond à la conique, l'autre, éventuellement à la paire de droites. Le paramétrage de la conique est toujours rationnel car chaque plan de la quadrique singulière du faisceau est rationnel (du fait de la dissymétrie des blocs de Jordan dans la réduction simultanée). Le paramétrage des deux droites peut éventuellement contenir une racine carrée. Cela se produit si les droites appartiennent aussi à une paire de plans irrationnels perpendiculaires au plan du faisceau contenant ces droites. Illustrons ce cas de figure sur l'exemple suivant :

$$\begin{cases} yz = 0, \\ y^2 + xz - 2w^2 = 0. \end{cases}$$

La conique définie par  $y = xz - 2w^2 = 0$  contient le point rationnel  $(1, 0, 0, 0)$  et peut donc être paramétrée rationnellement. La paire de droites est définie par  $z = y^2 - 2w^2 = 0$  ne contient pas de points rationnels et est définie sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .

### 3.10 [(11)(11)] : quatre droites formant un quadrilatère gauche

C'est l'un des deux cas les plus compliqués que nous ayons à étudier. Les résultats donnés au chapitre 10, section 10.4.4.1 et 10.4.4.4 permettent de distinguer trois cas différents selon que la courbe de base est constituée de quatre droites, deux droites ou deux points. Cependant, le calcul de ces paramétrages nécessite de reconnaître l'extension de  $\mathbb{Q}$  dans laquelle sont définis les coefficients du paramétrage final. Cette étape induit de nombreux sous-cas, et nécessite l'usage de la théorie de Galois [DF98] dont nous donnons un bref aperçu en annexe B.

#### 3.10.1 Un premier résultat

Le résultat que nous présentons maintenant nous sert principalement à déterminer l'extension de  $\mathbb{Q}$  dans laquelle seront contenus les coefficients des paramétrages des droites. S'il permet effectivement de séparer les trois cas possibles d'intersection, nous savions déjà faire cette distinction.

**Proposition 11.6** *Soit  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}, \mathbb{Q}}(\lambda, \mu)$  l'équation déterminantielle d'un faisceau de quadriques rationnelles ayant deux racines doubles, chacune d'entre elles étant associée à une quadrique de rang 2. Alors il existe un changement de repère rationnel qui envoie le faisceau dans un repère où il est engendré par les quadriques  $Q_S$  et  $Q_T$  d'équations :*

$$\begin{cases} x^2 - cy^2 - 2wz = 0, \\ bx^2 + 2cxy + bcy^2 - z^2 - (b^2 - c)w^2 = 0, \end{cases} \quad \text{avec } b, c \in \mathbb{Q}, \Delta = b^2 - c \neq 0.$$



L'extension  $\mathbb{K}$  de plus faible degré sur  $\mathbb{Q}$  sur laquelle sont paramétrées les quatre droites de la courbe de base du faisceau est engendrée par les racines du polynôme  $t^4 - 2bt + c = 0$ .

Quatre cas apparaissent alors :

- $\Delta > 0$  et  $b > 0$  : l'intersection dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est vide.
- $\Delta > 0$ ,  $c < 0$  et  $b \geq 0$  : l'intersection est constituée de deux points dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .
- $\Delta < 0$  : l'intersection est constituée de deux droites dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .
- $\Delta > 0$ ,  $c < 0$  et  $b \geq 0$  : l'intersection est constituée de quatre droites dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

Le fait que la transformation utilisée soit rationnelle, et que le corps des coefficients des paramétrages des droites de la courbe de base soit engendré par les racines de  $t^4 - 2bt + c = 0$  nécessite la théorie de Galois. La démonstration du théorème est donnée en annexe B.

Quel que soit le repère dans lequel nous nous plaçons, comme l'équation déterminantielle du faisceau a deux racines doubles, elle est de la forme

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\lambda, \mu) = c(\lambda^2 - \Delta\mu^2)^2, \quad c, \Delta \in \mathbb{Q}.$$

Il s'ensuit que les racines de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}(\lambda, \mu)$  sont  $(\lambda_0^\pm, \mu_0^\pm) = (\pm\sqrt{\Delta}, 1)$ . Les discriminants des deux paires de plans sont  $d^\pm = b \pm \sqrt{\Delta}$ . Les paires de plans qui leur sont associées ont pour équations :

$$\lambda_0^\pm Q_{\mathcal{P}} + \mu_0^\pm Q_{\mathcal{Q}} = (b \pm \sqrt{\Delta}) \left( x + (b \mp \sqrt{\Delta})y \right)^2 - (z \pm \sqrt{\Delta}w)^2.$$

Notons de même que  $c$  est le déterminant de  $Q_{\mathcal{P}}$  et que toutes les quadriques d'inertie (2, 2) du faisceau ont, à un facteur carré près, leur déterminant égal à  $c$  ( $c > 0$  si la quadrique est d'inertie (2, 2)). Leur paramétrage est défini sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{c})$ . Dans ce cas,  $Q_{\mathcal{P}}$  peut être paramétrée par :

$$X = (ut + vs, \frac{ut - vs}{\sqrt{c}}, 2vt, us), \quad (u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}).$$

En insérant ce paramétrage dans l'équation de  $Q_{\mathcal{Q}}$ , nous obtenons l'équation aux paramètres :

$$\Omega_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = ((b + \sqrt{c}u^2) - 2v^2) ((b - \sqrt{c})s^2 - 2t^2) = 0.$$

$\Omega_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  se factorise donc en deux polynômes de bidegrés respectifs [2, 0] et [0, 2].

### 3.10.2 Complexité algébrique théorique des résultats possibles

Étudions successivement les trois cas possibles.

**Quatre droites :** nous allons distinguer trois cas selon que  $\Delta$  est un carré, que  $\Delta$  n'est pas un carré mais que  $c\Delta$  l'est, et enfin que ni  $\Delta$  ni  $c\Delta$  ne sont des carrés.

• Si  $\Delta$  est un carré, les deux paires de plans sont rationnelles et  $\sqrt{2(b \pm \sqrt{c})} = \sqrt{d^+} \pm \sqrt{d^-}$ , où  $d^\pm$  sont les déterminants des paires de plans. Dans ce cas,  $\Omega_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  se décompose en quatre facteurs (de bidegrés [1, 0], [1, 0], [0, 1] et [0, 1]), dont les coefficients appartiennent à une extension de degré au plus 4, engendrée par les racines carrées de  $d^+$  et  $d^-$ .

Les valeurs de  $b$  et  $c$  suivantes illustrent les exemples possibles :

- $b = 5$ ,  $c = 9$  :  $\sqrt{\Delta}, \sqrt{d^\pm} \in \mathbb{Q}$ , les droites sont définies sur  $\mathbb{Q}$ .
- $b = 3$ ,  $c = 5$  :  $\sqrt{\Delta}, \sqrt{d^-} \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{d^+} \notin \mathbb{Q}$ , les droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{d^+}) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .
- $b = 19$ ,  $c = 72$  :  $\sqrt{\Delta}, \sqrt{d^+} \in \mathbb{Q}$ ,  $\sqrt{d^-} \notin \mathbb{Q}$ , les droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{d^-}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .
- $b = 5$ ,  $c = 16$  :  $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{d^+}) = \mathbb{Q}(\sqrt{d^-})$  et  $\sqrt{d^+} \notin \mathbb{Q}$ , les droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{d^+}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .

–  $b = 6, c = 20 : \sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}, \sqrt{d^+} \neq \sqrt{d^-}, \sqrt{d^+} \notin \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{d^-} \notin \mathbb{Q}$ . Les droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{d^-}, \sqrt{d^+}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{10})$ .

• Si  $\Delta$  n'est pas un carré, mais que  $c\Delta$  l'est, les racines de l'équation déterminantielle ne sont pas rationnelles. Chacun des facteurs linéaires de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  a ses coefficients dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{2(b \pm \sqrt{c})})$ . Comme  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})}\sqrt{2(b - \sqrt{c})} = 2\sqrt{\Delta}$  et que  $c\Delta$  est un carré, les quatre droites sont définies sur une extension de  $\mathbb{Q}$  engendrée par  $\sqrt{c}$  et  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})}$ . Comme  $c$  n'est pas un carré, cette extension est de degré exactement 4 sur  $\mathbb{Q}$ .

Un exemple illustrant ce cas apparaît si  $b = c = 2$ . Les quatre droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ .

• Si ni  $\Delta$ , ni  $c\Delta$  ne sont des carrés, alors en reprenant le cas précédent, il vient que les quatre droites constituant l'intersection sont définies sur une extension de  $\mathbb{Q}$  engendrée par au plus trois des racines carrées  $\sqrt{c}, \sqrt{\Delta}, \sqrt{2(b + \sqrt{c})}$ . Chaque droite est elle-même définie sur une extension engendrée par au plus deux de ces racines. Deux des droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{c}, \sqrt{2(b + 2\sqrt{c})})$ , les deux autres sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{c}, \sqrt{2(b - 2\sqrt{c})})$ . Plusieurs cas intermédiaires peuvent apparaître selon que  $c$  soit carré, ou que  $c$  et  $2(b + \sqrt{c})$  soient des carrés, que  $c$  et  $2(b - \sqrt{c})$  soient des carrés. Enfin, si  $c, 2(b + \sqrt{c})$  et  $2(b - \sqrt{c})$  sont des carrés,  $\Delta$  l'est aussi, et nous nous retrouvons dans un des cas déjà étudiés plus haut. L'extension dans laquelle sont définis *tous* les coefficients de *toutes* les droites constituant l'intersection est de degré 2, 4 ou 8. Le degré de l'extension sur laquelle est définie chacune des droites est 1, 2 ou 4.

Les valeurs de  $b$  et  $c$  suivantes illustrent les exemples possibles :

- $b = 3, c = 1 : \sqrt{c} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2(b - \sqrt{c})} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2(b + \sqrt{c})} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . Deux des droites sont définies sur  $\mathbb{Q}$ , les deux autres sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ .
- $b = 2, c = 1 : \sqrt{c} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2(b - \sqrt{c})} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \sqrt{2(b + \sqrt{c})} = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ . Deux des droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , les deux autres sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ .
- $b = 3, c = 3 : \sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$  (nécessairement  $\sqrt{2(b - \sqrt{c})} \notin \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})} \in \mathbb{Q}$ ). Deux des droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6 - 2\sqrt{3}})$ , les deux autres sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{6 + 2\sqrt{3}})$ .

**Deux droites :** dans ce cas,  $\Delta < 0$  et le deuxième facteur de  $\Omega_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}}$  (de bidegré  $[0, 2]$ ) n'a pas de solution réelle. Seul l'autre facteur (de bidegré  $[2, 0]$ )  $(b + \sqrt{c})u^2 - v^2 = 0$  a des solutions réelles correspondant aux deux droites qui constituent la courbe de base du faisceau (dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ). Nous nous retrouvons dans le deuxième cas de la première étude, modulo le fait qu'il n'y a que deux droites réelles.  $b - \sqrt{c}$  est négatif, et les coefficients des deux droites appartiennent à une extension de  $\mathbb{Q}$  engendrée par  $\sqrt{c}$  et  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})}$ . Cette extension peut être de degré 1, 2 ou 4.

Les valeurs de  $b$  et  $c$  suivantes illustrent les exemples possibles :

- $b = 3, c = 25 : \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})} \in \mathbb{Q}$ . Les deux droites sont définies sur  $\mathbb{Q}$ .
- $b = 1, c = 4 : \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})} = \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$ . Les deux droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ .
- $b = 1, c = 3 : \sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$  et  $\sqrt{2(b + \sqrt{c})} = \sqrt{\sqrt{3} - 1} \notin \mathbb{Q}$ . Les deux droites sont définies sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{\sqrt{3} - 1})$ .

**Deux points :** dans ce cas, une des deux paires de plans est réelle, l'autre complexe. Les deux points correspondent à l'intersection de la paire de plans réels et de la droite définie par la paire de plans complexes. La droite singulière est définie sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta})$  et les deux points sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{\Delta}, \sqrt{d^+})$ . Les coordonnées des deux points sont donc définies dans une extension de degré 1, 2 ou 4.

Les valeurs de  $b$  et  $c$  suivantes illustrent les exemples possibles :

- $b = 0, c = -1$  :  $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$ ,  $b - \sqrt{\Delta}$  est un carré. Les deux points sont définis sur  $\mathbb{Q}$ .
- $b = 1, c = -3$  :  $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$ ,  $b - \sqrt{\Delta} = 3$  n'est pas un carré. Les deux points sont définis sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ .
- $b = 1, c = -2$  :  $\sqrt{\Delta} = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ,  $b - \sqrt{\Delta}$  n'est pas un carré. Les deux points sont définis sur  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{1 + \sqrt{3}})$ .

### 3.10.3 Construction de l'algorithme

Il n'est pas envisageable de déterminer la transformation qui envoie deux quadriques (qu'il faudrait savoir choisir puisqu'elles sont particulières) dans un repère où elles ont pour équations  $x^2 - cy^2 - 2wz = 0$  et  $bx^2 + 2cxy + bcy^2 - z^2 - (b^2 - c)w^2 = 0$ . Nous ne pouvons pas non plus reprendre l'algorithme générique, la factorisation de l'équation aux paramètres ou de son discriminant pouvant s'avérer délicate si l'extension dans laquelle se trouvent les coefficients des droites de la courbe de base est de degré trop élevé sur  $\mathbb{Q}$ .

Nous commençons par paramétrer chacune des paires de plans  $P^+$  et  $P^-$  associées à chacune des deux racines doubles. L'intersection de la droite singulière de  $P^+$  avec  $P^-$  définit deux points  $p_1^+$  et  $p_2^+$ . L'intersection de la droite singulière de  $P^-$  avec  $P^+$  définit deux points  $p_1^-$  et  $p_2^-$ . Ces quatre points sont les sommets du quadrilatère gauche défini par les quatre droites  $p_1^+p_1^-$ ,  $p_1^+p_2^-$ ,  $p_2^+p_1^-$  et  $p_2^+p_2^-$  de la courbe de base. Chaque paire de point permet de définir le paramétrage d'une des droites de la courbe de base.

### 3.10.4 Complexité algébrique pratique

Notre complexité algébrique pratique est optimale car nous définissons nos droites à partir des points singuliers de la courbe de base, sommets du quadrilatère gauche. Les quantités  $\Delta$ ,  $c$  et  $d^\pm$  se calculent facilement puisqu'elles correspondent respectivement au discriminant du pgcd des deux dérivées partielles de  $\mathcal{E}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}(\lambda, \mu)$ , au déterminant de n'importe quelle quadrique de signature  $(2, 2)$  du faisceau, et aux déterminants des deux paires de plans associées aux deux racines doubles.

Notons que dans la proposition 11.6, nous avons annoncé que les coefficients des paramétrages des droites constituant la courbe de base appartenaient à l'extension engendrée par le polynôme  $t^4 - 2bt + c = 0$ . Le corps engendré par chacune des racines de ce polynôme pourrait être une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré 4, ne contenant pas d'extension de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ , contrairement à toutes les extensions que nous avons présentées. Pour comprendre que ce cas ne peut arriver, nous pouvons remarquer que le fait que nous ayons utilisé l'algorithme général décrit au chapitre 9 nous a permis d'obtenir une équation aux paramètres de degré 2 en  $(s, t)$  et en  $(u, v)$ , à coefficients dans  $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$  (où  $\delta$  est le déterminant de la quadrique d'inertie  $(2, 2)$  utilisée pour déterminer cette équation). La résolution de l'équation aux paramètres introduit alors deux niveaux supplémentaires de racines carrées, ce qui montre l'existence d'extensions « intermédiaires » entre le corps des coefficients et  $\mathbb{Q}$ , « indépendamment » du corps des racines de  $t^4 - 2bt + c = 0$ . Nous verrons à la section 11.3.14 que ce raisonnement ne peut pas être toujours appliqué.

## 3.11 [(22)] : deux droites simples et une double

L'équation déterminantielle a une racine quadruple associée à une paire de plans. La droite singulière de cette paire de plans est contenue dans toutes les quadriques du faisceau, elle est

rationnelle.

Dans l'espace projectif réel l'intersection est soit réduite à cette seule droite double si la paire de plans est complexe, soit est constituée de cette droite double et de deux droites simples si la paire de plans est réelle.

Le paramétrage des deux droites simples contient une racine carrée si les deux plans définis par la paire de plans sont irrationnels, ce qui apparaît dans l'exemple suivant :

$$\begin{cases} y^2 - 2w^2 = 0, \\ xy - zw = 0. \end{cases}$$

### 3.12 [(211)] : deux droites doubles

L'équation déterminantielle a une racine quadruple associée à un plan double. Ce plan double coupe toutes les autres quadriques du faisceau selon deux droites doubles dans l'espace projectif complexe. Dans l'espace projectif réel, ces deux droites peuvent être réduites à un point. Dans l'espace projectif réel, le paramétrage de ces deux droites peut nécessiter une racine carrée, les deux droites pouvant être irrationnelles, comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} w^2 = 0, \\ x^2 - 2y^2 + zw = 0. \end{cases}$$

Les droites  $w = x^2 - 2y^2 = 0$  n'ont pas d'autres points rationnels que  $(0, 0, 1, 0)$ , leur point d'intersection.

### 3.13 [1{3}] : une conique et une droite double sécantes en un point

Le faisceau est dégénéré et les quadriques qu'il contient n'ont pas de point singulier en commun. Le faisceau contient une paire de plans dont l'un est tangent à tous les cônes du faisceau (selon une droite commune à toutes les quadriques du faisceau) et dont l'autre plan coupe tous les cônes du faisceau selon une conique ayant un point commun avec la droite que nous venons de définir. La droite contient les sommets de tous les cônes du faisceau (qui sont des points rationnels), elle est donc rationnelle. L'intersection de cette droite et de la conique est un point rationnel, la conique peut donc être paramétrée rationnellement.

Le calcul se fait en considérant  $Q_{\mathcal{P}}$  la paire de plans du faisceau et  $Q_{\mathcal{Q}}$  un cône du faisceau.  $Q_{\mathcal{R}} = Q_{\mathcal{P}} + Q_{\mathcal{Q}}$  est un autre cône du faisceau. Le sommet (rationnel) de  $Q_{\mathcal{R}}$  nous permet de trouver un paramétrage sans racine carrée de  $Q_{\mathcal{Q}}$ . En insérant ce paramétrage dans l'équation de  $Q_{\mathcal{P}}$ , nous obtenons une équation aux paramètres qui se factorise sous la forme  $(1, 0)(1, 1)$  et qui peut être résolue linéairement (sans introduire de racines carrées).

### 3.14 [111] : quatre droites concourantes

Il s'agit ici du deuxième cas où les coefficients apparaissant dans le paramétrage final peuvent appartenir chacun à une extension de degré 4 sur  $\mathbb{Q}$ . Cependant, ici, ces coefficients peuvent ne pas être exprimés avec la seule imbrication de deux racines carrées.

L'équation déterminantielle est identiquement nulle, les quadriques du faisceau ont un point singulier commun. La sous-équation déterminantielle que nous avons définie au chapitre 7 a trois racines simples. En envoyant grâce à une transformation rationnelle le point singulier commun à toutes les quadriques dans un repère où il a pour coordonnées  $(0, 0, 0, 1)$ , nous obtenons que les équations de toutes les quadriques du faisceau ne dépendent que des inconnues  $x, y$  et  $z$ . Nous pouvons donc calculer l'intersection dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Comme nous l'avons vu au chapitre 10,

les faisceaux dont la caractéristique de Segre est [111] peuvent correspondre à trois cas différents dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . La courbe de base de tels faisceaux peut être soit un point, soit deux droites concourantes, soit quatre droites concourantes.

Dans le cas de quatre droites formant un quadrilatère gauche (section 11.3.10), les coefficients étaient définis sur une extension de degré au plus 8 pour l'ensemble des droites, et de degré au plus 4 pour les coefficients de chacune des droites. Ces coefficients dépendaient de l'imbrication d'au plus deux racines carrées. En terme d'extension de  $\mathbb{Q}$ , cela signifie que les coefficients de chaque droite peuvent certes appartenir à une extension de degré 4, mais cette extension contient alors une extension « intermédiaire » de degré 2. La situation est différente dans le cas présent car les coefficients de chaque droite peuvent appartenir à une extension de degré 4 ne contenant pas d'extension de degré 2 sur  $\mathbb{Q}$ .

Nous pourrions penser qu'en appliquant un algorithme, similaire dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , à celui présenté au chapitre 9 (l'algorithme 9.2) nous pourrions éviter ce problème. C'est oublier que si nous utilisons une conique d'inertie (2, 1), cette conique n'a pas de paramétrage linéaire en un de ses paramètres dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , et donc que l'équation aux paramètres que nous devons résoudre est de degré 4. D'autre part, si nous voulons utiliser l'une des trois coniques possibles de rang 2 du faisceau, elle dépend des racines d'un polynôme de degré 3, et la suite de l'algorithme introduit d'autres radicaux dans la solution. Le passage par un polynôme de degré 3 ou 4 s'avère inévitable.

### 3.14.1 Algorithme

Pour déterminer le paramétrage de ces quatre droites, nous calculons le point singulier commun à toutes les quadriques du faisceau,  $p$ . En nous plaçant dans un repère où ce point n'a qu'une coordonnée non nulle, par exemple  $w$ , les équations de  $Q_{\mathcal{P}}$  et  $Q_{\mathcal{Q}}$  ne dépendent que de  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Nous sommes alors en présence d'un système de deux équations de degré 2 (dont la résolution est équivalente à celle d'un polynôme d'une seule variable de degré 4) ayant quatre racines  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  définissant quatre points  $p_i$ . Les quatre droites sont définies par chacun de ces points  $p_i$  et  $p$ . Il y a quatre, deux ou zéro droites réelles selon que les racines  $q_i$  sont toutes réelles, que deux d'entre elles sont réelles, deux complexes, ou que les quatre sont complexes.

### 3.14.2 Complexité algébrique théorique

**Proposition 11.7** *Pour tout polynôme de degré 4 de  $\mathbb{Q}[X]$ , sans facteur multiple, il existe un faisceau rationnel de quadriques dont la courbe de base est constituée de quatre droites concourantes, chacune d'entre elles étant définie sur le corps engendré par chacune des racines du polynôme.*

**Démonstration :** Soit un polynôme de degré 4 sans facteur multiple,  $t_1, \dots, t_4$  ses racines. Considérons les quatre points  $p_i$  de coordonnées  $(1, t_i, t_i^2, 0)$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Soit 2 points rationnels  $r_j = (a_j, b_j, c_j, 0)$ ,  $j = 1, 2$ . Il existe exactement une conique dans le plan  $w = 0$  qui passe par les quatre points  $p_i$  et un des points  $r_j$ . Nous pouvons donc définir deux coniques passant chacune par les quatre points  $p_i$  et un des deux points  $r_j$ . Chacune de ces coniques a une équation rationnelle car sinon, les coniques conjuguées (sur l'extension de  $\mathbb{Q}$  sur laquelle elles sont définies) passeraient aussi par ces mêmes cinq points. Ces deux coniques et les points  $(0, 0, 0, 1)$  définissent deux cônes qui engendrent un faisceau rationnel de quadriques. Les quatre droites concourantes définies par les points  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$  et  $(0, 0, 0, 1)$  constituent la courbe de base de ce faisceau.  $\square$

Le degré de l'extension dans laquelle sont définis les coefficients de chacune des droites est donc le degré de l'extension à laquelle appartiennent les solutions du polynôme que nous avons choisi au départ. Tous les cas possibles sont envisageables.

### 3.14.3 Complexité algébrique pratique

Le point singulier de toutes les quadriques est à coefficients rationnels. Le plan utilisé pour couper les quadriques et ainsi effectuer le calcul dans  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  est aussi à coefficients rationnels. L'équation de degré 4 que nous avons à résoudre est donc à coefficients rationnels. Les coefficients du paramétrage sont donc rationnels sur le corps des racines du polynôme de degré 4 que nous résolvons. L'algorithme est optimal en terme de complexité algébrique.

### 3.14.4 Exemples

La construction des exemples associés à ce cas repose sur les résultats donnés en annexe B dans l'aperçu que nous donnons de la théorie de Galois. Contrairement aux autres exemples, nous avons engendré les différents cas possibles à partir du polynôme de degré 4 à résoudre. Chaque polynôme défini dans la section B.1.2 détermine un exemple de complexité algébrique.

Rappelons que nous considérons le polynôme  $t^4 + \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$ , et la paire de quadriques suivantes :

$$\begin{cases} xz - y^2 = 0, \\ \delta x^2 + \gamma xy + \beta y^2 + \alpha yz + z^2 = 0. \end{cases}$$

Les différents polynômes que nous présentons maintenant illustrent chacun un cas différent. Commençons par les cas où le polynôme de degré 4 est irréductible. Nous donnons le polynôme, le degré de l'extension des coefficients de chacune des droites, et le degré de l'extension contenant les quatre racines.

- $x^4 - 4x^2 - x + 1$ , chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 4, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 24.
- $x^4 - 7x^2 - 3x + 1$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 4, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 12.
- $x^4 - 5x^2 + 2$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 4, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 8.
- $x^4 - 10x^2 + 4$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 4, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 4.
- $x^4 - 4x^2 + 2$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 4, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 4.

Si le polynôme de degré 4 est le produit d'un polynôme de degré 1 (dont la solution correspond à une droite dont les coefficients sont rationnels) et d'un polynôme de degré 3, nous avons les exemples suivants :

- $x^3 - 4x + 1$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 3, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 6.
- $x^3 - 3x + 1$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 3, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 3.

Si le polynôme de degré 4 est le produit de deux polynômes de degré 2 irréductibles, nous avons :

- $x^4 - 3x^2 + 2$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 2, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 4.
- $x^4 - 5x^2 + 4$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 2, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 2.

Enfin, si le polynôme de degré 4 possède deux racines complexes, la courbe de base est constituée de deux droites sécantes à coefficients *réels*. Ils sont définis par un polynôme de degré 2.

- $x^4 - 3x - 3$  chaque droite a ses coefficients dans une extension de degré 4, l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 24.
- $x^4 - 3$  chaque droite a ses coefficients dans l'extension de degré 4  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{3})$ , l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 8.
- $x^4 + 2x$  une droite a ses coefficients dans l'extension de degré 3  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ , l'autre droite a ses coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 6.
- $x^4 - x^2 - 2$ , chaque droite à ses coefficients dans l'extension de degré 2  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ , l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 4.
- $x^4 - 1$  chaque droite a ses coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , l'extension contenant les racines du polynôme est de degré 2.

### 3.15 [12] : deux droites simples et une droite double

La sous-équation déterminantielle a une racine double et une simple, toutes les deux associées à des paires de plans. Celle correspondant à la racine simple est toujours réelle. Selon que l'autre est réelle ou complexe, la courbe de base dans l'espace projectif réel sera constituée soit d'une droite double et de deux droites simples, soit uniquement d'une droite double.

Dans les deux cas, la droite double est la droite singulière de la paire de plans associée à la racine simple de la sous-équation déterminantielle, elle est donc rationnelle.

Le paramétrage des deux droites simples peut nécessiter l'introduction d'une racine carrée dans ses coefficients si la paire de plans qui contient cette droite n'est pas rationnelle comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} xy = 0, \\ y^2 - 2z^2 = 0. \end{cases}$$

### 3.16 [3] : une droite triple et une simple

La sous-équation déterminantielle a une racine triple associée à une paire de plans réelle. L'intersection est constituée d'une droite triple qui est la droite singulière de la paire de plans (et donc qui est rationnelle), et d'une droite simple. Cette droite simple est nécessairement rationnelle. En effet les autres quadriques du faisceau sont des cônes qui contiennent une droite rationnelle (la droite triple), ils peuvent donc être paramétrés rationnellement pour déterminer une équation aux paramètres dont nous savons déjà que le facteur correspondant à la droite triple est rationnel. La droite simple ne peut donc être que rationnelle.

### 3.17 [1(11)] : deux droites doubles

La sous-équation déterminantielle a une racine double associée à un plan double et une simple associée à une paire de plans. Dans l'espace projectif, deux cas se présentent selon que cette paire de plans est réelle ou complexe. Dans le premier cas l'intersection est constituée de deux droites doubles, dans le deuxième elle est réduite à un point (nécessairement rationnel). Le paramétrage des deux droites peut nécessiter l'introduction d'une racine carrée dans ses coefficients si la paire de plan n'est pas rationnelle comme le montre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} z^2 = 0, \\ x^2 - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

### 3.18 [(21)] : une droite quadruple

La sous-équation déterminantielle a une racine triple associée à un plan double. Il est tangent à tous les cônes du faisceau selon une droite qui constitue la courbe de base du faisceau (c'est une droite quadruple).

### 3.19 [(111)] : l'unique cône du faisceau

Le faisceau est constitué de deux quadriques, ce cône et « l'univers ».

### 3.20 Derniers cas

Il reste quatre cas possibles, dont les caractéristiques de Segre sont  $[\{3\}]$ ,  $[11]$ ,  $[2]$  et  $[1]$ . Les courbes de base correspondantes sont, respectivement, une droite et un plan sécants en un point, une droite quadruple, un plan et un plan double. Les faisceaux correspondants ne contiennent que des quadriques de rang au plus 2. Les droites pouvant apparaître sont toujours des droites singulières de paires de plans, et sont donc rationnelles. Leur détermination est immédiate. Si un plan simple apparaît dans le résultat, il est nécessairement rationnel. En effet, s'il ne l'était pas, son conjugué avec lequel il forme une paire de plans apparaîtrait dans le résultat.

### 3.21 Tableau récapitulatif

Le tableau 11.a résume l'ensemble des résultats de complexité algébrique énoncés dans les sections précédentes. Quand le résultat théorique n'est pas optimal, nous indiquons la nature du test qu'il faudrait effectuer pour vérifier, en pratique, si le résultat obtenu est optimal ou s'il contient une racine carrée non nécessaire. Notons qu'hormis le cas où la caractéristique de Segre est  $[111]$ (et dans ce cas nous obtenons toujours le résultat optimal), les coefficients du paramétrage de la courbe de base dépendent de l'imbrication d'au plus deux racines carrées.



| Caractéristique de Segre | Intersection dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$             | Domaine de définition du paramétrage dans le pire cas  | Optimalité du paramétrage  |
|--------------------------|--|--|--|
| [1111]                   | quartique régulière                                      | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi, \sqrt{\Delta}]$ ,<br>$\Delta \in \mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$<br>de degré 4 | point rationnel sur surface de degré 8                             |
| [112]                    | point  | $\mathbb{Q}$   | optimal  |
|                          | quartique nodale   | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | point rationnel sur une conique                                    |
| [13]                     | quartique cuspidale                                      | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
| [22]                     | cubique et droite (sécantes en deux points)              | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
| [4]                      | cubique et droite tangentes                              | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
| [11(11)]                 | deux points  | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$  | optimal  |
|                          | conique  | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta'})[\xi]$   | optimal si $\sqrt{\delta'} \notin \mathbb{Q}$                      |
|                          |  | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | point rationnel sur une conique si $\sqrt{\delta'} \in \mathbb{Q}$ |
| deux coniques sécantes   | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta'})[\xi]$         | point $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta'})$ -rationnel sur une conique définie sur $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta'})$         |  |
| [1(21)]                  | point  | $\mathbb{Q}$   | optimal  |
|                          | deux coniques tangentes                                  | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | optimal  |
| [1(111)]                 | conique double   | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | point rationnel sur une conique                                    |
| [2(11)]                  | point  | $\mathbb{Q}$   | optimal  |
|                          | conique et point   | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | point rationnel sur une conique                                    |
|                          | conique et deux droites ne se coupant pas sur la conique | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | point rationnel sur une conique                                    |
| [(31)]                   | conique  | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
|                          | conique et deux droites se coupant sur la conique        | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | optimal  |
| [(11)(11)]               | deux points  | $\mathbb{K}[\xi]$ , degré( $\mathbb{K}$ ) = 4  | optimal  |
|                          | deux droites sécantes                                    | $\mathbb{K}[\xi]$ , degré( $\mathbb{K}$ ) = 4  | optimal  |
|                          | quatre droites formant un quadrilatère gauche            | $\mathbb{K}[\xi]$ , degré( $\mathbb{K}$ ) = 4  | optimal  |
| [(22)]                   | droite double  | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
|                          | deux droites sécantes coupant une droite double          | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | optimal  |
| [(211)]                  | point  | $\mathbb{Q}$   | optimal  |
|                          | deux droites doubles concourantes                        | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | optimal  |
| [1{3}]                   | conique et droite double                                 | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
| [111]                    | point  | $\mathbb{Q}$   | optimal  |
|                          | deux droites concourantes                                | $\mathbb{K}[\xi]$ , degré( $\mathbb{K}$ ) = 4  | optimal  |
|                          | quatre droites concourantes                              | $\mathbb{K}[\xi]$ , degré( $\mathbb{K}$ ) = 4  | optimal  |
| [12]                     | droite double  | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
|                          | trois droites concourantes deux simples et une double    | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | optimal  |
| [3]                      | deux droites concourantes une simple et une triple       | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |
| [1(11)]                  | point  | $\mathbb{Q}$   | optimal  |
|                          | deux droites doubles concourantes                        | $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})[\xi]$   | optimal  |
| [(21)]                   | droite quadruple   | $\mathbb{Q}[\xi]$  | optimal  |

TAB. 11.a – Corps de définition, dans le pire cas, du paramétrage de chaque composante algébrique de la courbe de base et optimalité théorique, pour les cas où la partie réelle de l'intersection est de dimension 0 ou 1. Si le résultat théorique n'est pas optimal, la nature du test nécessaire à la vérification de l'optimalité en pratique est donnée.

```

entrée :  $\mathcal{F}_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  un faisceau dégénéré
 $\gamma = \text{sing}(Q_{\mathcal{P}}) \cap \text{sing}(Q_{\mathcal{Q}}) : \kappa = \dim \gamma$ 
si  $\kappa = -1$  alors {pas de point singulier commun}
  renvoyer conique et droite double sécantes en un point
sinon  $\{\kappa \geq 0 : \text{au moins un point singulier } p_0, \text{ commun à toutes les quadriques du faisceau}\}$ 
  envoyer  $p_0$  sur le point  $(0, 0, 0, 1)$ 
  calculer la faisceau  $\mathcal{F}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  restreint à la sous-matrice  $3 \times 3$  supérieure gauche
  calcul de la sous-équation déterminantielle  $\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} = \det \mathcal{R}_{3,(\lambda,\mu)}$ 
si  $\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} \equiv 0$  alors {la sous-équation déterminantielle est identiquement nulle}
  deux cas selon que dans  $\mathbb{P}^1$  il y a ou pas un point commun
  either  $\sigma_3 = \{3\}$  or repeat restriction
sinon  $\{\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} \neq 0\}$ 
   $\mathcal{H}_3 = \text{gcd}(\partial \mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} / \partial \lambda, \partial \mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}} / \partial \mu)$ 
   $d_3 = \text{degree}(\mathcal{H}_3)$ 
si  $d_3 = 0$  alors  $\{\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a trois racines simples : quatre droites concourantes}
  si  $\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une seule racine réelle alors
    renvoyer deux droites concourantes
  sinon si  $\mathcal{F}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  contient une conique d'inertie  $(3, 0)$  alors
    un point
  sinon
    quatre droites concourantes
  fin si
sinon  $\{\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine multiple}
   $(\lambda_0, \mu_0)$  la racine multiple de  $\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$ 
   $r_0$  et  $I_0$  le rang et la signature de la matrice de la quadrique associée à  $(\lambda_0, \mu_0)$   $R(\lambda_0, \mu_0)$ 
si  $d_3 = 1$  alors  $\{\mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine double}
  si  $r_0 = 2$  alors
    si  $I_0 = (1, 1)$  alors {la paire de plans associée à la racine double est réelle}
    renvoyer deux droites concourantes et une droite double
    sinon {la paire de plans associée à la racine double est d'inertie  $(2, 0)$ }
    renvoyer une droite double
  fin si
sinon  $\{r_0 = 1 : \text{deux droites doubles}\}$ 
  si  $I_0 = (1, 1)$  alors {la paire de plans associée à la racine double est réelle}
  renvoyer deux droites doubles
  sinon {la paire de plans associée à la racine double est d'inertie  $(2, 0)$ }
  renvoyer un point
  fin si
fin si
sinon  $\{d_3 = 2 : \mathcal{E}'_{\mathcal{P},\mathcal{Q}}$  a une racine triple}
  si  $r_0 = 2$  alors
    renvoyer une droite simple et une triple
  sinon si  $r_0 = 1$  alors
    renvoyer une droite quadruple
  sinon
    si  $Q_{\mathcal{P}}$  ou  $Q_{\mathcal{Q}}$  est d'inertie  $(2, 1)$  alors
      renvoyer un cône
    sinon
      renvoyer un point
    fin si
  fin si
fin si
fin si
fin si
fin si

```

**Algorithme 11.6:** Séparation des cas pour les faisceaux dégénérés, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'équation déterminantielle est identiquement nulle.

# Chapitre 12

## Implantation

Nous avons maintenant décrit un algorithme complet de calcul d'intersection de deux quadriques. Reste à présenter l'implantation que nous en avons fait. Tout au long du processus de construction de cet algorithme nous avons utilisé le logiciel MuPAD pour implanter les algorithmes que nous avons créés. Nous montrons dans ce chapitre pourquoi nous avons choisi ce logiciel. Nous présentons ensuite l'organisation du code lié au calcul d'intersection. Enfin, nous présentons un jeu de tests permettant de mesurer les temps de calculs et la validité de notre implantation.

### 1 Choix du langage

Nous avons choisi le logiciel MuPAD [MuP] pour implanter nos algorithmes. Nous avons fait ce choix car ce logiciel nous permet, comme Maple [Map], d'utiliser un langage proche des mathématiques pour programmer nos algorithmes. Cela nous évite de prendre en charge la gestion de l'arithmétique, des calculs polynomiaux, et les calculs d'algèbre linéaire. En effet, contrairement au langage C++, ou tout autre langage à objet couramment utilisé, non seulement l'arithmétique multi-précision est parfaitement implantée, mais de plus, il est possible d'utiliser des nombres algébriques de manière tout à fait transparente. La manipulation de matrices est elle aussi déjà intégrée dans le langage, ainsi que les opérations d'algèbre linéaire qui s'y rapportent. Enfin, l'utilisation de polynômes (à coefficients rationnels ou algébriques) est entièrement prise en charge par le langage.

MuPAD est donc un logiciel particulièrement adapté à l'implantation d'une première maquette de nos algorithmes. Nous avons choisi MuPAD plutôt que Maple car quand nous avons commencé à écrire nos programmes, MuPAD possédait des propriétés qui ne sont apparues que plus tard dans Maple, à savoir le typage des arguments d'entrée et de sortie d'une fonction, la possibilité de créer des nouveaux types (ou classes) de variables.

### 2 Organisation des algorithmes

Les chapitres 9 et 11 nous permettent de présenter presque immédiatement notre programme. En effet, après avoir implanté les différentes fonctions de bases associées à toutes nos classes, il ne nous reste plus qu'à réécrire nos algorithmes dans le langage utilisé par MuPAD. Le seul point à éclaircir ici est la séparation initiale des différents cas, algorithmes associés, aux faisceaux réguliers, aux faisceaux singuliers et aux faisceaux dégénérés. Le code, présenté sur le listing 12.1, est alors organisé de la façon suivante : nous calculons l'équation déterminantielle du faisceau

engendré par les deux quadriques que nous recevons en entrée. Par un calcul algébrique simple, nous vérifions si cette équation a une ou des racines multiples (ou si elle est identiquement nulle). Si c'est le cas, nous nous dirigeons vers les algorithmes correspondants, et sinon nous abordons le cas de l'algorithme associé aux faisceaux réguliers.

Listing 12.1 – séparation des cas

```

Intersection:=proc(S:Quadric,T:Quadric,
                  optionRacinesSimples='delta'):Parametrization
local Det,H,d,delta;
begin
  delete(x):delete(y):
  Det:=Quadric::det(x*S+y*T):
  if Det=0 then
    return(IntersectionSinguliere(S,T)):
  end_if:
  H:=gcd(diff(Det,x),diff(Det,y)):
  d:=degree(H):
  if d=1 or d=3 or (d=2 and polylib::discrim(H,x)=0) then
    if d=1 then
      x0:=-coeff(H,y,1):y0:=coeff(H,x,1):
    elif d=2 then
      if coeff(H,x,2)<>0 then
        x0:=-coeff(coeff(H,x,1),y,1):
        y0:=2*coeff(H,x,2):
      else
        x0:=2*coeff(H,y,2):
        y0:=-coeff(coeff(H,x,1),y,1):
      end_if:
    else //d=3
      if coeff(H,x,3)<>0 then
        x0:=-coeff(coeff(H,x,2),y,1):
        y0:=3*coeff(H,x,3):
      else
        x0:=3*coeff(H,y,3):
        y0:=-coeff(coeff(H,x,2),y,1):
      end_if:
    end_if:
    return(IntersectionRacineMultipleSimple(S,T,[x0,y0],d)):
  end_if:
  if d=2 and polylib::discrim(H,x)<>0 then
    return(IntersectionDeuxRacinesDoubles(S,T,Det,H)):
  end_if:
  return(IntersectionRacinesSimples(S,T,Det,optionRacinesSimples)):
end_proc:

```

La suite des différentes implantations correspondent à la traduction des algorithmes que nous avons déjà décrits dans les chapitres 9 et 11.

### 3 Validité des résultats et jeux de tests

Nous voulons valider notre implantation, estimer la rapidité de notre programme en fonction de la taille des coefficients des quadriques choisies initialement. Cependant le choix des quadriques de départ n'est pas aussi aisé qu'il n'y paraît. En effet, en choisissant aléatoirement les

coefficients des quadriques initiales, nous avons certes une équiprobabilité dans le choix de nos quadriques, avec une probabilité de 1 de sélectionner des faisceaux réguliers, et une probabilité de 0 de sélectionner des faisceaux singuliers ou dégénérés. Cette méthode n'est donc pas adaptée à la validation des algorithmes correspondants aux faisceaux singuliers et dégénérés.

### 3.1 À partir des formes canoniques

Une deuxième idée est présentée dans l'algorithme 12.1. Son principe est, pour un type de faisceau donné, de choisir dans un repère quelconque deux quadriques générant ce faisceau. Pour cela nous choisissons deux quadriques que nous connaissons déjà, par exemple celles présentées au chapitre 11. Nous déterminons ensuite deux autres quadriques quelconques du faisceau en choisissant leur paramètre dans le faisceau au hasard, et nous considérons alors ces deux nouvelles quadriques comme nos générateurs du faisceau ; ceci nous assure de ne pas prendre deux quadriques particulières dans le faisceau, qui pourraient éventuellement accélérer artificiellement le déroulement de l'algorithme. Enfin, nous déterminons aléatoirement une matrice de transformation pour nous mettre dans un repères quelconque.

**pour** chaque paire de quadrique  $(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  des 47 cas d'intersection **faire**  
 choisir aléatoirement deux quadriques  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q}'$  dans le faisceau engendré par  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$   
 choisir aléatoirement une matrice  $T$  de transformation congruente  
 appliquer  $T$  à  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q}'$   
 calculer le paramétrage de la courbe d'intersection de  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q}'$   
 vérifier la validité du type de l'intersection  
 vérifier que chacune de ces composantes sont contenues dans les deux quadriques  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q}'$   
**fin pour**

#### Algorithme 12.1: Validation de l'implantation

Par cet algorithme nous sommes sûrs, dans chaque cas que nous avons implanté de pouvoir offrir un panel conséquent d'exemples. Nous pouvons même contrôler la taille des coefficients de départ en contrôlant la taille des paramètres dans le faisceau de  $\mathcal{P}'$  et  $\mathcal{Q}'$  et ceux de la matrice  $T$ .

Cette méthode n'est cependant pas suffisante pour valider complètement nos algorithmes. En effet, nous n'accédons pas à toutes les paires de quadriques rationnelles existantes car les matrices de transformation que nous utilisons sont à coefficients rationnels. Ainsi, supposons qu'il existe une transformation non-rationnelle qui envoie deux quadriques à coefficients rationnels sur deux autres quadriques à coefficients rationnels. Ce cas n'est pas pris en compte par notre méthode. Or de tels exemples sont faciles à construire. Ainsi nous pouvons appliquer le changement d'échelle sur l'axe des  $x$ , de coefficient  $\sqrt{2}$  à la quadrique d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ . Nous obtenons alors la quadriques d'équation  $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$ , qui est aussi à coefficients rationnels. Nous avons donc bien construit une transformation non-rationnelle qui envoie une quadrique à coefficients rationnels dans un repère où elle a encore une équation à coefficients rationnels. Ces tests constituent cependant une première validation de notre implantation, qui permet d'avoir une idée convaincante de l'efficacité de notre algorithme.

### 3.2 Taille des coefficients

Pour mesurer l'efficacité de nos algorithmes, nous faisons varier la taille des coefficients, ce qui signifie, dans l'algorithme 12.1, que nous faisons varier la taille des coefficients de la matrice de transformation. Comme la taille des coefficients des deux quadriques dont nous calculons l'intersection dépend de la taille des coefficients de cette matrice de transformation,

nous avons bien une mesure de l'efficacité de nos algorithmes en fonction de la taille de « certains coefficients ».

Nous pouvons cependant remarquer que la taille des coefficients des quadriques dont nous calculons l'intersection dépend aussi des paramètres de ces quadriques dans le faisceau considéré.

L'autre remarque qui peut être faite est que si nous contrôlons la taille des coefficients de départ de nos quadriques, nous ne maîtrisons pas réellement la taille des coefficients apparaissant dans les racines carrées. Ce nombre est le déterminant d'une quadrique d'inertie (2,2) du faisceau, et il n'y a *a priori* aucune raison de préjuger de sa taille. En effet la quadrique utilisée dépend d'un point réel défini par les intervalles d'isolation des racines de l'équation déterminantielle, d'une approximation rationnelle de ce point et de la quadrique d'inertie (2,2) du faisceau qui passe par ce point. Ceci expliquera en partie pourquoi les courbes que nous affichons peuvent contenir des pics à certaines valeurs.

Nous sommes cependant satisfait à ce stade de nos tests puisqu'ils nous permettent de vérifier sur une classe importante et significative d'exemples la fiabilité et l'efficacité de nos algorithmes.

## 4 Résultats d'exécution

Nous partons pour chaque exemple des formes données dans les chapitres précédents, mais aussi de formes tenant compte de la complexité algébrique. Nous faisons varier la taille des coefficients, c'est-à-dire leur longueur en base 10, de 1 à 10. Il n'est actuellement pas raisonnable d'augmenter plus avant la taille des coefficients tant que nous utilisons notre implantation en MuPAD. Des tests utilisant des coefficients de taille plus importante seront fait avec une implantation en C++. Nous avons pour chaque cas effectué des tests sur une centaine d'exemples sur un pentium III 700 Mhz, doté de 192 Mo de mémoire vive sur un système linux (noyau 2.4.22) avec la version 2.5.3 du logiciel MuPAD.

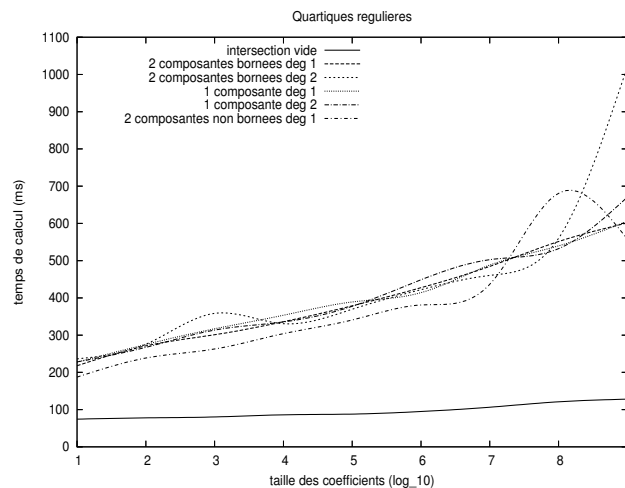


FIG. 12.1 – Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une quartique régulière

Les résultats d'exécution dans le cas où la courbe d'intersection des deux quadriques est une quartique régulière sont donnés sur la figure 12.1. Nous pouvons remarquer la courbe correspondant à une intersection vide. Une fois ce cas détecté, le calcul s'arrête et il n'est pas nécessaire de rechercher une quadrique d'inertie (2,2) contenant un point rationnel. Ceci explique les différences importantes existant entre ce cas et les autres. Dans ces cas, les résultats sont similaires,

la gestion des nombres algébriques jouant ici un rôle mineur.

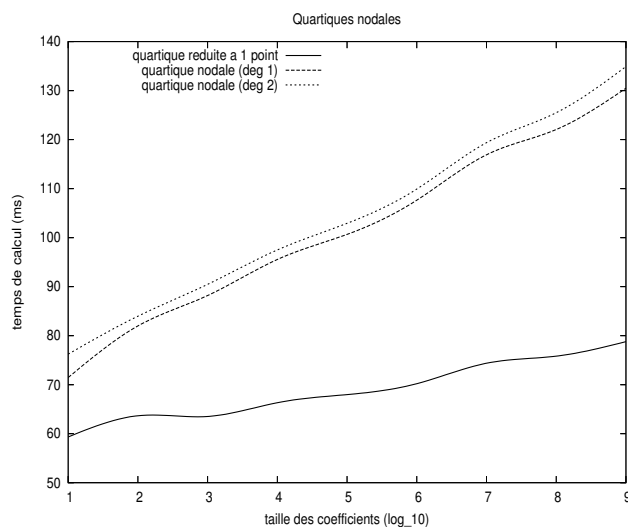


FIG. 12.2 – Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une quartique singulière

Les résultats relatifs à des quartiques singulière sont présentés sur la figure 12.2. Nous nous sommes restreints au cas des quartiques nodales. Notons par rapport au cas des quartiques régulières que les temps de calculs sont moindres. Ceci est dû au fait quand dans le cas des quartiques singulières, il n'est pas nécessaire de rechercher une quadriques d'inertie (2,2) contenant un point rationnel. Cela allège considérablement les calculs puisque cette recherche n'a pas lieu, et car la complexité algébrique résultant de ce calcul n'apparaît pas dans les étapes suivantes. Le cas où l'intersection est réduite se distingue des deux autres cas. En effet, dans ce cas seules les coordonnées (rationnelles, et correspondant au sommet d'un cône du faisceau) sont calculées, et il n'y a pas de polynômes à manipuler dans le paramétrage final. Remarquons encore que la différence entre les deux autres courbes résulte de la différence de complexité algébrique entre les deux courbes (dans un cas les coefficients du paramétrage sont rationnels, dans l'autre ils sont contenus dans une extension de  $\mathbb{Q}$  de degré 2), et que cette différence reste mineure.

Sur la figure 12.3, nous présentons les résultats relatifs au cas où l'intersection contient une cubique et une droite. Dans ce cas, l'intersection entre les deux quadriques n'est jamais vide. Les temps de calculs plus élevés sont dûs au fait que dans les cas présentés, l'équation déterminantielle a deux racines doubles. L'algorithme lié à ce cas passe par la vérification de la rationalité des racines de l'équation déterminantielle. Cela nécessite donc un calcul algébrique supplémentaire dont le coût apparaît ici.

Le cas où la courbe d'intersection des deux quadriques est constituée de deux coniques, présenté sur la figure 12.4, montre bien la problématique de la gestion des nombres algébriques contenus dans une extension de degré 2 ou 4. Ceci est en partie dû au fait que MuPAD gère les expressions algébriques dans leur généralité, sans connaître le degré de l'extension dans laquelle se font les calculs. Aucune base de l'espace vectoriel (sur  $\mathbb{Q}$ ) associé n'est exploitée. Ces problèmes sont atténués dans une implantation (en C++) qui tient compte de l'extension, et de son degré, dans laquelle sont faits les calculs. Les limites d'une maquette dans un langage de haut niveau apparaissent ici.

Sur la figure 12.5 est présenté le cas où la courbe d'intersection est constituée d'une conique

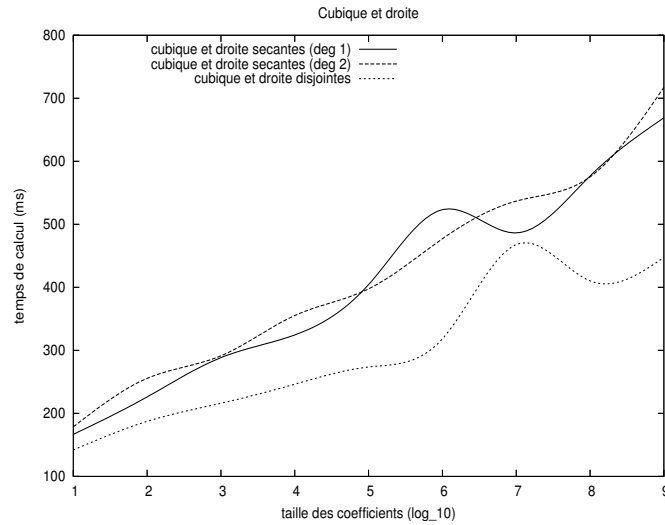


FIG. 12.3 – Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une cubique et une droite

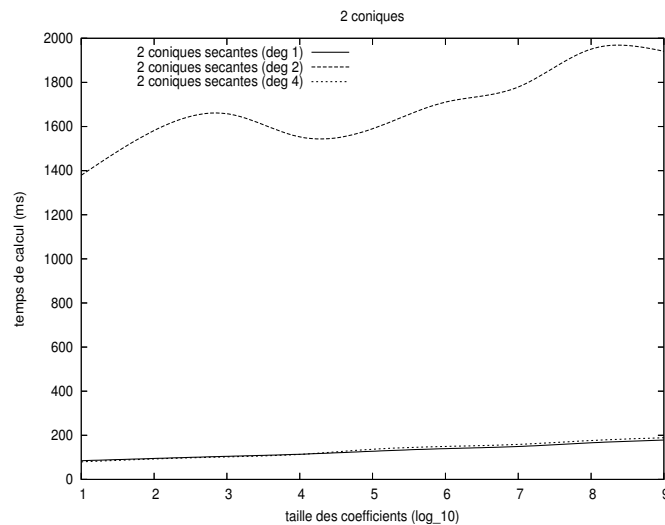


FIG. 12.4 – Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit deux coniques

et de deux droites. La courbe la plus basse correspond au cas où les deux droites sont complexes, et donc pas à calculer. Ceci explique les différences avec la courbe qui est juste au-dessus. La différence entre les deux autres courbes vient encore une fois de la complexité algébrique des coefficients.

Enfin, sur la figure 12.6, nous présentons le cas où la courbe d'intersection est constituée de quatre droites concourantes. Notons que pour ce cas, dans notre implantation en MuPAD, les coefficients du paramétrage de chaque droites sont déterminés par une solution d'un polynôme de degré inférieur ou égal à quatre, à coefficients rationnels. Dans cette implantation ces polynômes sont déterminés de manière exacte, mais les racines de ces polynômes sont données sous forme de nombres flottants, sans précaution particulière. Dans cette maquette, nous ne gérons pas de



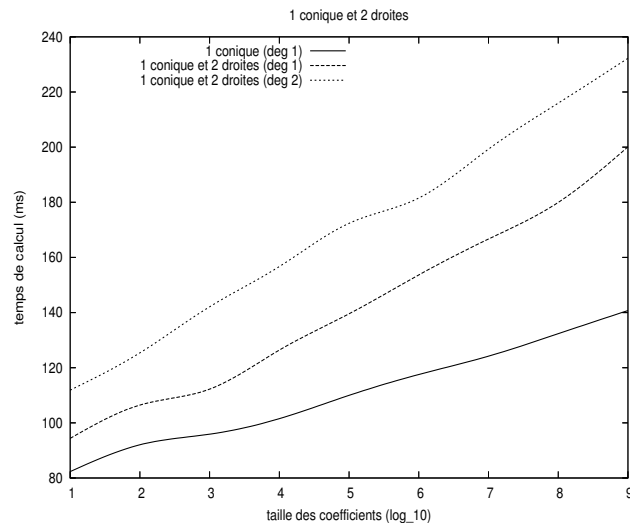


FIG. 12.5 – Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit une conique et deux droites

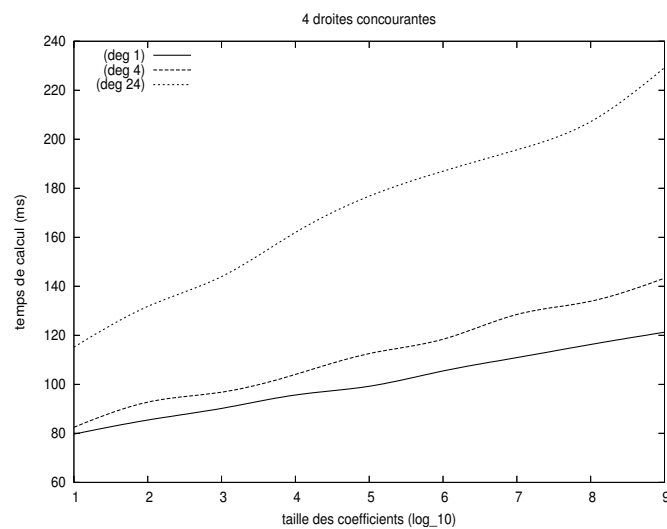


FIG. 12.6 – Mesures de temps de calculs dans le cas où le faisceau définit quatre droites concourantes

manière fine les nombres contenus dans une extension de degré 3 ou 4 (obtenu à partir d'un polynôme de degré 4 irréductible).

## 5 Interprétation

Si ce chapitre montre les résultats d'exécution de notre implantation dans le logiciel MuPAD, il faut se rappeler qu'il s'agit ici d'une maquette. Il est beaucoup plus intéressant de prendre en compte de l'implantation en C++ réalisée par Sylvain Lazard et Sylvain Petitjean (voir [LPP04]).

Ceci est dû au fait que une partie importante de la gestion de l'arithmétique et de l'algèbre nous échappe. Or le logiciel MuPAD est destiné à être utilisé dans un contexte beaucoup plus général n'utilise pas les algorithmes les plus efficaces dans les cas particuliers qui nous occupent. Ces résultats montrent cependant l'intérêt et la justesse de nos algorithmes.

# Chapitre 13

## Conclusions, applications et perspectives

Nous concluons ce document en faisant une synthèse des progrès réalisés, en présentant quelques problèmes exploitant notre algorithme, et en indiquant plusieurs voies à explorer pour développer notre méthode.

### 1 Analyse de nos résultats

Nous avons présenté dans ce document un algorithme permettant de calculer une forme paramétrée de la courbe d'intersection de deux quadriques. Notre algorithme accepte toutes les paires de quadriques possibles, il n'est pas nécessaire que supposer que les quadriques de départ soient en position générale. Nous traitons tous les cas singuliers et dégénérés. Le résultat que nous obtenons est optimal dans sa forme, dans le sens où si la courbe est rationnelle, nous obtenons un paramétrage rationnel. Nous déterminons toutes les propriétés de la courbe de base, le nombre de ses composantes algébriques, les positions des unes par rapport aux autres, le nombre de ses points singuliers. La forme des coefficients apparaissant dans l'expression du paramétrage est la plupart du temps optimale, mais peut contenir au plus une racine carrée non nécessaire. Elle est toujours optimale dans le cas le pire. La conséquence de ces progrès est que pour la première fois, le résultat du calcul d'une forme paramétrée de l'intersection de deux quadriques peut être utilisé pour des applications non triviales. Hormis la présence possible d'une racine carrée éventuellement non nécessaire dans les coefficients du paramétrage de la courbe, notre résultat est optimal.

### 2 Applications

#### 2.1 Visualisation d'intersection de quadriques

C'est l'application la plus naturelle de notre algorithme. Elle n'est cependant pas totalement triviale puisque lors du retour de l'espace projectif réel  $\mathbb{P}^3$  à l'espace affine réel  $\mathbb{R}^3$ , nous pouvons « perdre » des composantes qui sont contenues dans le « plan à l'infini ». Il se peut donc que tel ou tel point singulier, telle ou telle droite, telle ou telle conique, n'apparaisse pas sur la figure. La figure 13.1 illustre différentes situations possibles quand la courbe de base du faisceau est constituée d'une cubique et d'une droite, tangentes entre elles.

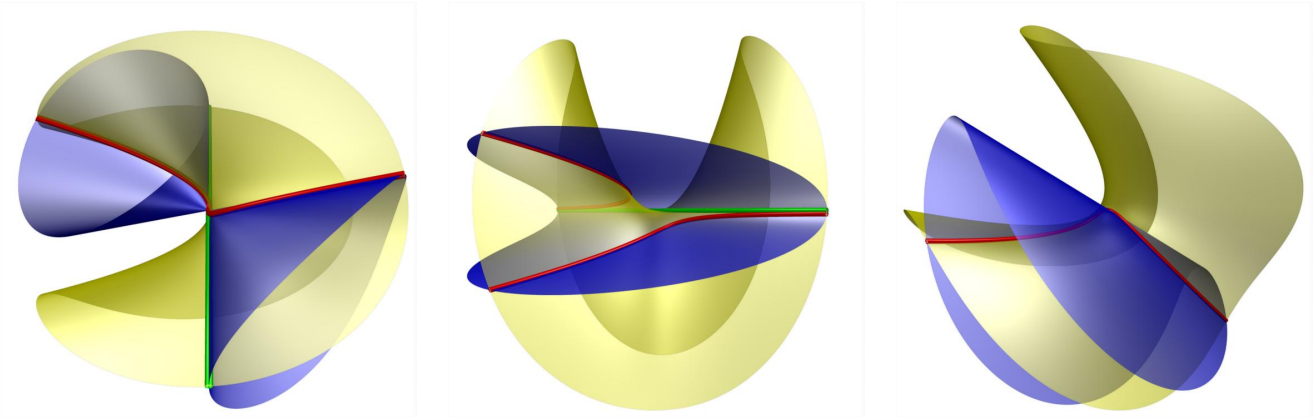


FIG. 13.1 – Illustrations des courbes d’intersection dans le cas où l’équation déterminantielle a une racine quadruple dont la quadrique correspondante est de rang 3. L’intersection est constituée d’une cubique et d’une droite tangentes dans l’espace projectif. Dans l’espace affine trois cas peuvent advenir : à gauche, les deux composantes apparaissent, ainsi que le point où elles se coupent - au milieu, le point de contact n’apparaît pas, il est contenu dans le plan à l’infini - à droite la droite complète est contenu dans le plan à l’infini - la quadrique jaune est toujours un parabolôide hyperbolique - à gauche la quadrique en bleu est un cône, au milieu et à droite, c’est un cylindre hyperbolique

La visualisation de la courbe d’intersection de deux quadriques nécessite cette étape de plus qui consiste à déterminer si chaque composante que notre algorithme retourne est complètement, partiellement ou pas du tout contenue dans l’espace affine.

## 2.2 Arrangement de quadriques

Le calcul de l’arrangement de quadriques peut utiliser notre algorithme comme brique de base. En effet, les arête des faces des cellules que nous devons déterminer sont des arcs de courbes d’intersection de chaque paire de quadriques. Une solution mise en œuvre par N. Wolpert [Wol02] consiste à calculer une projection sur un plan de toutes les courbes d’intersection entre paires de quadriques, à calculer l’arrangement de ces courbes dans le plan, puis à « relever » le résultat dans l’espace à trois dimensions. Avec notre algorithme, il devient possible d’exploiter directement le paramétrage de la courbe d’intersection de deux quadriques (et non plus une projection) et de calculer sans détour l’arrangement dans l’espace de dimension 3.

## 2.3 Conversion CSG-BRep

Le problème pourrait sembler être le même, mais le calcul ne porte pas ici sur tout l’arrangement. En effet nous n’avons pas à déterminer les cellules qui se situent hors du modèle. Une réécriture de l’arbre booléen en une forme conjonctive permet de simplifier considérablement le travail. En effet, tout arbre booléen peut s’écrire comme union d’intersections de quadriques :

$$(Q_{1,1} \cap \dots \cap Q_{1,r_1}) \cup (Q_{2,1} \cap \dots \cap Q_{2,r_2}) \cup \dots \cup (Q_{s,1} \cap \dots \cap Q_{s,r_s}).$$

Nous avons donc ici deux calculs à faire, le calcul du modèle BRep de chacune des formes disjonctives, et celui de l’union de plusieurs formes disjonctives. Dans le premier cas, nous n’avons qu’une partie de l’arrangement de quadriques à calculer, dans l’autre cas, nous devons calculer le résultat de l’union de deux modèles BRep.

## 2.4 Enveloppe convexe de carreaux de quadriques

Le calcul de l'enveloppe convexe de carreaux de quadriques peut être ramené, par passage à un espace dual, au calcul d'une cellule d'un arrangement de quadriques. Ce calcul a déjà été présenté par C.K. Hung et F.J. Ierardi [HI95] dans le cas où la frontière de chaque carreau est constituée d'arcs de coniques, et par N. Geismann, M. Hemmer et E. Schömer [GHS01b] dans le cas où les quadriques sont toutes des ellipsoïdes. Une généralisation de ces résultats à tout type de quadriques et tout type de courbe d'intersection entre ces quadriques pourrait s'appuyer sur notre algorithme.

## 2.5 Diagrammes de Voronoï de segments dans $\mathbb{R}^3$

Le calcul du diagramme de Voronoï de segments de  $\mathbb{R}^3$  n'a encore jamais été traité. La complexité du diagramme dans le pire cas reste un frein important à la construction d'un algorithme. Rappelons que les régions de Voronoï sont ici délimitées par des carreaux de quadriques. Chaque face permettant de définir une région est contenue dans une quadrique (surfacique) et ses arêtes sont des arcs de courbe d'intersection entre quadriques. Notre algorithme peut constituer un premier pas vers la mise en place d'un algorithme.

# 3 Perspectives

Si nos résultats nous satisfontt, nous pouvons tout de même envisager de développer notre travail dans plusieurs directions. Il paraît naturel de se demander dans quelle mesure par exemple, nous pouvons utiliser une autre arithmétique, plus légère, comme l'arithmétique par intervalles ou l'arithmétique flottante, sans pour autant dénaturer les résultats que nous avons obtenus. Si cela s'avère possible, ce serait un moyen d'accélérer notre programme, ce qui peut être primordial pour des applications conséquentes. D'un autre côté, il est légitime de se demander dans quelle mesure notre algorithme peut être adapté si les quadriques de départ ne sont plus à coefficients rationnels, mais à coefficients contenus dans une extension algébrique de  $\mathbb{Q}$ . En effet, le fait d'ajouter un ou deux niveaux de racines carrées dans ces coefficients (en général) reste raisonnable et fait penser qu'une telle implantation n'est pas dénuée de sens. Enfin, il paraît naturel de vouloir étendre nos résultats à des dimensions supérieures d'espaces, en travaillant dans  $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ ,  $\mathbb{P}^5(\mathbb{R})$ , ou plus généralement  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ ; ou à des surfaces de degré supérieur, comme à des cubiques ou des quartiques.

## 3.1 Utilisation d'une arithmétique par intervalle

Supposons que nous voulions calculer l'arrangement de  $n$  quadriques. Il faut *a priori* calculer la courbe de base de tous les faisceaux engendrés par chaque paire de quadriques de notre échantillon. Il faut calculer  $n(n-1)/2$  courbes d'intersection. Il est donc essentiel que notre algorithme soit le plus rapide possible. En travaillant avec la représentation exacte que nous avons utilisée, il ne semble pas possible de faire de réels progrès. Nous pouvons certes sacrifier la recherche d'une quadrique d'inertie (2, 2) contenant un point rationnel, mais cela n'améliorerait que peu nos performances. La principale voie possible est d'utiliser des arithmétiques plus rapides, nous permettant tout de même de garantir notre résultat. Nous pouvons ainsi envisager d'utiliser le principe déjà présent dans la bibliothèque CGAL [CGA] de filtres arithmétiques.

### 3.2 Généralisation en dimension $n$

La caractéristique de Segre et le théorème de diagonalisation simultanée de deux formes quadratiques ont été respectivement démontrées dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  et dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Cette partie de notre méthode peut donc être reprise sans modification. Par contre, une des étapes essentielles de notre méthode est la détermination d'un paramétrage rationnel linéaire en un de ses paramètres d'une quadrique de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Nous savons que pour les coniques, un tel paramétrage n'existe pas (sinon il en existerait un pour les cercles!). Pour les quadriques (de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ), celles d'inertie  $(2, 2)$  possèdent un paramétrage linéaire en un de leur paramètres, celles d'inertie  $(3, 1)$  non. Les quadriques de rang inférieur en possèdent toutes un. Ainsi le succès de notre méthode vient du fait que nous connaissons des paramétrages linéaires en un de leurs paramètres de quadriques dont nous sommes sûrs de la présence dans le faisceau étudié. Notons que toute surface quadrique de rang inférieur à  $n + 1$ , dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , possède un paramétrage linéaire en un de ses paramètres. Malheureusement, comme pour les quadriques de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , il existe des faisceaux ne contenant pas de quadriques singulières. De plus, pour les quadriques de rang maximal, la situation se complique nécessairement en augmentant la dimension de l'espace puisque dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , le choix des inerties possibles se limite à  $(3, 1)$ ,  $(2, 2)$  et  $(4, 0)$ , alors que dans les cas général, le nombre de cas possibles augmente. Nous devons donc nous poser deux questions, pour chaque espace  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ , existe-t-il des quadriques de rang  $n + 1$  admettant un paramétrage linéaire en un de leur paramètres, et si oui, dans le faisceau de deux quadriques, existe-t-il toujours des quadriques ayant cette propriété ?

### 3.3 Vers des surfaces de degré 3

La généralisation de notre algorithme à des surfaces de degré 3 soulève plusieurs questions. Nous pouvons commencer par reprendre les questions du paragraphe précédent, existe-t-il dans le faisceau de deux cubiques des cubiques possédant un paramétrage linéaire en un de leurs paramètres ? Cette question nécessite de savoir établir une classification des surfaces cubiques, et surtout de savoir déterminer, quand cela est possible, un paramétrage rationnel de ces cubiques.

La recherche d'une réduction simultanée de deux cubiques ne peut se faire aisément, mais cela n'est pas essentiel dans l'implantation d'un algorithme, puisque, même si cela nous a grandement facilité les choses, cela nous a surtout permis de distinguer tous les cas possibles. Il y a deux alternatives à ce problème, soit nous trouvons un résultat similaire dans le cas des cubiques, soit nous déterminons au coup par coup le cas dans lequel nous nous trouvons en factorisant l'équation aux paramètres que nous aurons à résoudre. Sans pouvoir le prouver actuellement, il est probable qu'elle ait des propriétés similaires à celles de l'équation aux paramètres calculée au cours de notre algorithme.

Malheureusement, même si nous arrivons à résoudre ces problèmes, il reste qu'en insérant ce paramétrage dans l'équation d'une autre cubique du faisceau, nous n'allons plus obtenir une équation de degré 2, mais une équation de degré 3. Dans le cas d'un faisceau régulier, la courbe de base serait définie par l'expression radicale des racines de cette équation. Si cette expression radicale existe toujours, il paraît compromis de retourner cette solution qui ne peut être manipulée aisément. Dans le cas des faisceaux singuliers, l'équation déterminantielle devrait se factoriser, et nous pourrions alors déterminer une forme exacte d'un paramétrage de la courbe de base du faisceau, modulo les problèmes de complexité algébrique des coefficients apparaissant dans cette expression. L'adaptation de notre algorithme à des cubiques représente donc un problème difficile.

# Annexes





## Annexe A

# Validité des paramétrages projectifs

**Définition A.1 (Paramétrage propre d'une surface algébrique irréductible)** Soit  $\mathcal{S}$  une surface algébrique irréductible de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Soit  $f$  une application d'un ensemble  $\mathcal{D}$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .  $f$  définit un paramétrage propre de la surface  $\mathcal{S}$  si elle est bijective.

**Définition A.2 (paramétrage propre d'une surface algébrique quelconque)** Soit  $\mathcal{S}$  une surface algébrique quelconque de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Si chaque surface irréductible apparaissant dans la décomposition de  $\mathcal{S}$  possède un paramétrage propre, la réunion de ces paramétrages constitue un paramétrage propre de  $\mathcal{S}$ .

**Définition A.3 (Paramétrage propre)** Soient  $m, n$  deux entiers,  $f_1, \dots, f_r$  ( $r \in \mathbb{N}$ ) des fonctions de  $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ . Soit  $\Omega$  une surface de  $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$  définie par une équation implicite  $(\xi)$ . Alors les fonctions  $f_1, \dots, f_r$  définissent un paramétrage propre de la surface  $\Omega$  si pour tout point  $p \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $f_i(p)$  est un point de la surface  $\Omega$ , et réciproquement si tout point  $p' \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$  appartenant à la surface  $\Omega$  (c'est-à-dire tout point dont les coordonnées vérifient l'équation  $(\xi)$ ), il existe un unique  $i \in \{1, \dots, r\}$  et un unique  $p \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$  tels que  $f_i(p) = p'$ .

En général  $r = 1$  et, dans notre cas, il ne sera égal à 2 que dans le cas d'une paire de plans. Ce cas nous oblige à prévoir plusieurs fonctions pour la définition du paramétrage.

**Lemme A.4 (Paramétrage des quadriques (2,2))** Soit la fonction qui à

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longmapsto \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ (u, v), (s, t) &\longmapsto \left( \frac{ut + a_1vs}{a_1}, \frac{us - a_2vt}{a_2}, \frac{ut - a_1vs}{\sqrt{a_1a_3}}, \frac{us + a_2vt}{\sqrt{a_2a_4}} \right) \end{aligned}$$

est un paramétrage propre de la quadrique définie par l'équation implicite  $a_1x^2 + a_2y^2 - a_3z^2 - a_4w^2 = 0$ , où  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des réels positifs.

**Démonstration :** Ce lemme peut-être reformuler de la manière suivante :  $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longmapsto (ut, vs, us, vt) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})(\mathbb{R})$  est un paramétrage propre de la surface

$$\Omega = \{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})(\mathbb{R}) \mid a_1x_1^2 + a_2x_2^2 - a_3x_3^2 - a_4x_4^2 = 0\}$$

, où  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sont des réels positifs. Pour cela il suffit de poser :

$$X = \frac{a_1x_1 + x_3\sqrt{a_1a_3}}{2}, \quad Y = \frac{a_1x_1 - x_3\sqrt{a_1a_3}}{2a_1}, \quad X = \frac{a_2x_2 + x_4\sqrt{a_2a_4}}{2}, \quad X = \frac{-a_2x_2 + x_4\sqrt{a_2a_4}}{2a_2},$$

ou, de manière équivalente :

$$x_1 = \frac{X + a_1Y}{a_1}, \quad x_2 = \frac{X - a_1Y}{\sqrt{a_1a_3}}, \quad x_3 = \frac{Z - a_2W}{a_2}, \quad x_4 = \frac{Z + a_2W}{\sqrt{a_2a_4}},$$

Il s'en suit que

$$\begin{aligned} a_1x_1^2 - a_3x_3^2 &= \frac{(X + a_1Y)^2}{a_1} - \frac{(X - a_1Y)^2}{a_1} = 4XY, \\ a_2x_2^2 - a_4x_4^2 &= \frac{(Z + a_2W)^2}{a_2} - \frac{(Z - a_2W)^2}{a_2} = 4ZW. \end{aligned}$$

De plus,  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left( \frac{ut+a_1vs}{a_1}, \frac{us-a_2vt}{a_2}, \frac{ut-a_1vs}{\sqrt{a_1a_3}}, \frac{us+a_2vt}{\sqrt{a_2a_4}} \right)$  si et seulement si  $(X, Y, Z, W) = (ut, vs, us, vt)$  et  $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \Rightarrow (X, Y, Z, W) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ , ce qui prouve notre reformulation.

Montrons ce lemme. Soit  $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , le point  $(X, Y, Z, W) = (ut, vs, us, vt)$  appartient à  $\Omega$ . En effet, ce point vérifie l'équation  $XY = ZW$  de  $\Omega$  et tout  $(u, v), (s, t) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  définit de manière unique  $(ut, vs, us, vt) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  car  $(ut, vs, us, vt) = (0, 0, 0, 0)$  si  $(u, v) = (0, 0)$  et  $(s, t) = (0, 0)$  (qui ne sont pas des points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ). De plus pour tout  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\lambda(u, v) = (u, v)$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  et  $\mu(s, t) = (s, t)$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  s'envoient sur  $(\lambda\mu ut, \lambda\mu vs, \lambda\mu us, \lambda\mu vt) = \lambda\mu(ut, vs, us, vt) = (ut, vs, us, vt)$ , donc quelque soit les "représentants" de  $(u, v)$  et  $(s, t)$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , ils s'envoient sur le même point dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

Réciproquement, pour tout  $(X, Y, Z, W) \in \Omega$ , montrons qu'il existe  $(u, v)$  et  $(s, t)$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tels que  $(X, Y, Z, W) = (ut, vs, us, vt)$ . Supposons  $X \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Posons  $u = X, t = 1$ . Nous avons alors  $(X, Y, Z, W) = (X, vs, Xs, v)$  et l'équation  $Xvs = Xvs$  est toujours vérifiée. Comme  $X \neq 0$ , posons  $s = Z/X$ , nous avons alors  $(X, vZ/X, Z, v)$ . Posons enfin  $v = W$ , et nous avons bien trouvé  $(u, v) = (X, W)$  et  $(s, t) = (Z/X, 1)$  deux points de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tels que  $(X, Y, Z, W) = (ut, vs, us, vt)$  et  $XY = ZW$ . Supposons maintenant que  $X = 0$ . L'équation  $XY = ZW$  implique que  $Z = 0$  ou  $W = 0$ . Supposons que  $Z = 0$  (le cas  $W = 0$  est identique par la symétrie de l'expression). Nous avons alors  $(ut, vs, us, vt) = (0, Y, 0, W)$ .  $v \neq 0$  car sinon  $(ut, vs, us, vt)$  serait égal à  $(0, 0, 0, 0) \notin \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Nous pouvons donc poser  $v = 1$ . Du coup,  $(ut, s, us, t) = (0, Y, 0, W)$  et alors  $s = Y, t = W$  et  $u = 0$ . Comme  $X$  et  $Z$  sont égaux à zéro,  $Y$  et  $W$  ne peuvent être simultanément égaux à zéro et donc  $(s, t)$  appartient bien à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

Il nous reste à montrer que le point  $((u, v), (s, t))$  que nous venons de définir est unique dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Supposons qu'il existe  $(u, v)$  et  $(u', v')$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ,  $(s, t)$  et  $(s', t')$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  tels que  $((u, v), (s, t)) \neq ((u', v'), (s', t'))$  distincts dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ,  $(ut, vs, us, vt) = (u't', v's', u's', v't')$  égaux dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  et vérifiant l'équation de  $\Omega$ .

Comme  $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ,  $u$  ou  $v$  est non nul. Par la symétrie de l'expression  $(ut, vs, us, vt)$  nous pouvons supposer que  $u \neq 0$  et alors poser  $u = 1$ .  $(u, v)$  s'écrit  $(1, v)$ , et donc  $(ut, vs, us, vt) = (t, vs, s, vt)$ .

Si  $t \neq 0$ , nous pouvons aussi poser  $t = 1$  et nous avons  $(ut, vs, us, vt) = (1, vs, s, v)$ . Nous pouvons donc affirmer qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  tel que  $(1, vs, s, v) = \lambda(u't', v's', u's', v't')$ . Et donc  $u' \neq 0$  et  $t' \neq 0$ . Nous pouvons donc supposer  $u' = 1$  et  $t' = 1$  et donc  $\lambda = 1$ . Ceci implique que  $v' = v$  et  $s' = s$  et donc  $(u, v) = (u', v')$  et  $(s, t) = (s', t')$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Supposons maintenant que  $u = 1$ , mais  $t = 0$ . Alors  $(ut, vs, us, vt) = (0, vs, s, 0)$ . Comme  $t = 0$ , nous pouvons poser  $s = 1$  et nous avons donc  $(0, v, 1, 0) = (u't', v's', u's', v't')$ . Comme  $u's' = 1$ ,  $u' \neq 0$  et  $t' = 0$ , nous pouvons poser  $u' = 1$  et alors  $(, v, 1, 0) = (u't', v's', u's', v't') = (0, v's', u', 0)$ . De même comme  $t' = 0$  nous pouvons poser  $s' = 1$ , d'où  $(u't', v's', u's', v't') =$

$(0, v', 1, 0)$  et donc  $v' = v$ , donc  $(u, v) = (u', v')$  et  $(s, t) = (s', t')$  ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Nous avons donc bien l'unicité dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ , ce qui finit la démonstration.  $\square$

Pour le deuxième lemme, rappelons que dans l'espace  $\mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$  la notion de validité d'un paramétrage est la même que dans les espaces projectifs classiques.

**Lemme A.5 (Paramétrage des quadriques (2,1))** *Soit la fonction qui à*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R}) &\longmapsto \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \\ (u, v, t) &\longmapsto \left( uv, \frac{u^2 - a_1 a_2 v^2}{2a_2}, \frac{u^2 + a_1 a_2 v^2}{2\sqrt{a_2 a_3}}, t \right), \end{aligned}$$

*est un paramétrage propre (véritable propre) de la quadrique définie par l'équation implicite  $a_1 x^2 + a_2 y^2 - a_3 z^2 = 0$ , où  $a_1, a_2, a_3$  sont des réels positifs.*

**Démonstration :** Comme pour le premier lemme, nous pouvons reformuler le problème :  $(u, v, t) \in \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R}) \longmapsto (uv, u^2, v^2, t) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est un paramétrage propre de la surface  $\Omega = \{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid X^2 = YZ\}$ . En effet, posons

$$X = x_1, \quad Y = x_3 \sqrt{a_2 a_3}, \quad Z = \frac{x_3 \sqrt{a_2 a_3} - a_2 x_2}{a_1 a_2}, \quad W = x_4,$$

ou, de manière équivalente

$$x_1 = X, \quad x_2 = \frac{Y - a_1 a_2 Z}{2a_2}, \quad x_3 = \frac{Y + a_1 a_2 Z}{2\sqrt{a_2 a_3}}, \quad x_4 = W.$$

Il s'en suit :

$$\begin{aligned} a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 - a_3 x_3^2 &= a_1 X^2 + \frac{(Y - a_1 a_2 Z)^2}{4a_2} - \frac{(Y + a_1 a_2 Z)^2}{4a_2}, \\ &= a_1 X^2 + \frac{1}{4a_2} (2Y)(-2a_1 a_2 Z), \\ &= a_1 (X^2 - YZ). \end{aligned}$$

De plus  $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) = \left( uv, \frac{u^2 - a_1 a_2 v^2}{2a_2}, \frac{u^2 + a_1 a_2 v^2}{2\sqrt{a_2 a_3}}, t \right)$  si et seulement si  $(X \ Y \ Z \ W) = (uv, u^2, v^2, t)$ , et  $(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  implique que  $(X \ Y \ Z \ W) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ .

Prouvons maintenant ce lemme reformulé. Tout point  $(u, v, t) \in \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$  définit le point  $(uv, u^2, v^2, t) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  car  $(uv, u^2, v^2, t) = (0, 0, 0, 0)$  n'est réalisable que si  $(u, v, t) = (0, 0, 0) \notin \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$ . De plus ce point appartient à la surface  $\Omega$ , puisque ses coordonnées vérifient l'équation  $X^2 = YZ$ .

Réciproquement, pour tout point  $(X, Y, Z, W) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  de la surface  $\Omega$ , vérifiant l'équation  $X^2 = YZ$ , montrons qu'il existe un unique point de  $\mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$   $(u, v, t)$  tel que son image dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ ,  $(uv, u^2, v^2, t)$  soit  $(X, Y, Z, W)$ . Soit  $(X, Y, Z, W)$  ce point de  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Nous pouvons supposer que  $Y$  et  $Z$  sont de même signe, car sinon, le point en question ne pourrait vérifier l'équation  $X^2 = YZ$  ( $X$  aurait un carré négatif). Nous pouvons de même supposer (quitte à multiplier par  $-1$  les coordonnées du point) que  $Y$  et  $Z$  sont de signe positif. Nous pouvons alors poser  $t = W$ ,  $u = \sqrt{Y}$ ,  $v = \sqrt{Z}$ . De plus, nous pouvons supposer que  $Y, Z$  et  $W$  ne sont pas tous

les 3 nuls, sinon le point  $(\sqrt{YZ}, Y, Z, W)$  ne serait pas dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . C'est un point de  $\mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$  car  $(\sqrt{Y}, \sqrt{Z}, W) = (0, 0, 0)$  impliquerait  $Y = Z = W = 0$ .

Reste à montrer que ce point  $(\sqrt{Y}, \sqrt{Z}, W)$  est unique dans  $\mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$ . Supposons qu'il  $(u', v', t') \in \mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$ ,  $(u', v', t') \neq (u, v, t) = (\sqrt{Y}, \sqrt{Z}, W)$  tel que  $(u'v', u'^2, v'^2, t') = (uv, u^2, v^2, t')$  dans  $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ . Quitte à multiplier les trois coordonnées par un facteur non nul, nous pouvons supposer que  $t' = t$ . Nous avons alors  $uv = u'v'$ ,  $u^2 = u'^2$ , et  $v^2 = v'^2$ . Nous pouvons en déduire que  $u' = \varepsilon_1 u$  et  $v' = \varepsilon_2 v$ , avec  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 = 1$ ,  $\varepsilon_1 = \pm 1$  et  $\varepsilon_2 = \pm 1$ . La condition  $u'v' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 uv = uv$  implique  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ . Et donc  $(u', v', t') = (\varepsilon u, \varepsilon v, t)$  qui définit l'égalité dans  $\mathbb{P}^{*2}(\mathbb{R})$ , ce qui contredit l'hypothèse initiale et finit la preuve du lemme. □

**Lemme A.6 (Paramétrage des quadriques de rang inférieur à 3)** Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux nombres réels positifs. Alors :

- $(u, v) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \mapsto (0, 0, u, v) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est un paramétrage propre de la surface :  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0\}$ .
- les deux fonctions

$$\mathbf{X}_1 : (u, v, s) \in \mathbb{P}^2 \mapsto (u, \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{a_2} u, v, s) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}), \text{ et}$$

$$\mathbf{X}_2 : (u, v, s) \in \mathbb{P}^2 \mapsto (u, -\frac{\sqrt{a_1 a_2}}{a_2} u, v, s) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}),$$

définissent un paramétrage propre de la surface  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid a_1 x_1^2 - a_2 x_2^2 = 0\}$ .

- $(u, v, s) \in \mathbb{P}^2 \mapsto (0, u, v, s) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$  est un paramétrage propre de  $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \mid a_1 x_1^2 = 0\}$ .

**Démonstration :** La démonstration se fait de la même façon que pour les lemmes précédents.

□

## Annexe B

# Rappels algébriques

Cette annexe se décompose en deux parties. La première partie, théorique, contient des rappels sur les notions d'extension de corps, de groupe de Galois d'un polynôme, et donne un bref aperçu de la théorie de Galois. Cette partie nous permet de prédire la forme de l'expression radicale des racines d'un polynôme de degré inférieur ou égal à quatre. La deuxième partie est consacrée à la résolution effective des polynômes. Nous exposons l'algorithme d'Uspensky basé sur la méthode de Descartes, algorithme s'appliquant à des polynômes de degré quelconque. De plus, dans le cas des polynômes de degré 4, nous rappelons une série d'invariants dont la détermination permet de connaître la multiplicité et la nature des racines du polynôme.

### B.1 Extensions et théorie de Galois

Le but de cette section est de présenter la notion d'extension de corps, de degré d'une extension engendrée par les racines d'un polynôme. Il n'est pas question de montrer que tel ou tel polynôme est résoluble par radicaux ou non. Nous voulons juste utiliser les concepts élaborés par Galois pour déterminer la complexité de l'expression des racines d'un polynôme de degré 4. En effet ce polynôme peut avoir des racines toutes rationnelles, toutes dépendant d'une seule racine carrée, toutes de deux racines carrées distinctes, ou encore toutes d'expressions radicales plus compliquées. Cette question est importante car dans le cas où les racines d'un polynôme ont une expression radicale contenant au plus l'imbrication de deux racines carrées, nous gardons cette expression telle quelle, alors que dans le cas contraire, nous souhaitons exprimer ces racines autrement, afin de les manipuler plus facilement. Nous voulons ici présenter les différents cas de figures possibles pour les polynômes de degré au plus 4. Pour cela, il est nécessaire d'introduire la notion d'extension de corps sur  $\mathbb{Q}$ , de  $\mathbb{Q}$ -homomorphisme. Les résultats présentés ici sont issus de [DF98] et [Esc97].

#### B.1.1 Extensions algébriques de $\mathbb{Q}$

Nous nous intéressons aux extensions de  $\mathbb{Q}$ , mais dans la plupart des résultats que nous donnons ici, nous pouvons remplacer  $\mathbb{Q}$  par un corps autre corps  $K$ .

**Définition B.1** *Une extension de  $\mathbb{Q}$  est un corps contenant  $\mathbb{Q}$  comme sous-corps.*

Il y a principalement deux façons de définir une extension. Soit nous exhibons un élément  $\alpha$  n'appartenant pas à  $\mathbb{Q}$  et nous définissons l'extension  $\mathbb{Q}(\alpha)$  comme le plus petit corps contenant  $\mathbb{Q}$  et  $\alpha$ , soit nous choisissons un polynôme irréductible  $P \in \mathbb{Q}[x]$  et nous définissons l'extension

$\mathbb{Q}[X]/(P)$  comme étant le plus petit corps contenant  $\mathbb{Q}$  et les racines de  $P$ . Ainsi, par exemple, dans le premier cas, si  $\alpha = \sqrt[4]{2}$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$  est le corps dont les éléments sont de la forme  $a + b\sqrt[4]{2} + c\sqrt{2} + d2^{3/4}$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Dans le deuxième cas, le polynôme  $x^2 - 4$  engendre le corps dont les éléments sont de la forme  $a + b\sqrt[4]{2} + c\sqrt{2} + d2^{3/4} + i(a' + b'\sqrt[4]{2} + c'\sqrt{2} + d'2^{3/4})$ ,  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Q}$ .

Une extension algébrique est une extension dont chaque élément est solution d'un polynôme de  $\mathbb{Q}[X]$ . Ainsi les deux exemples précédents sont des extensions algébriques, mais pas  $\mathbb{Q}(\pi)$ . Une extension peut être vue comme un espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ . Le degré d'une extension est la dimension de l'extension en tant qu'espace vectoriel sur  $\mathbb{Q}$ . Dans nos deux exemples, les degrés des deux extensions sont respectivement 4 et 8.

### B.1.2 Aperçu de la théorie de Galois

Considérons un polynôme  $P \in \mathbb{Q}[X]$ . Nous souhaitons connaître le degré de l'extension engendrée par les racines de  $P$ , et plus précisément le degré de l'extension engendrée par chacune des racines de  $P$ .

**Définition B.2 ( $\mathbb{Q}$ -homomorphisme)** Soient  $L$  et  $L'$  deux extensions de  $\mathbb{Q}$  contenues dans  $\mathbb{C}$ . On appelle  $\mathbb{Q}$ -homomorphisme de  $L$  dans  $L'$  un homomorphisme d'anneaux unitaires de  $L$  dans  $L'$  laissant invariants les éléments de  $\mathbb{Q}$  (c'est-à-dire dont la restriction à  $\mathbb{Q}$  est l'identité).

Nous nous intéressons au cas où  $L$  et  $L'$  sont égaux. Nous parlons alors de  $\mathbb{Q}$ -automorphisme.

**Définition B.3** Le groupe de Galois d'un polynôme  $P \in \mathbb{Q}[X]$ ,  $P$  ayant des racines distinctes, est l'ensemble des  $\mathbb{Q}$ -automorphismes de l'extension engendrée par les racines de  $P$  (cet ensemble a une structure de groupe).

**Propriété B.4** Si l'extension engendrée par les racines de  $P$  est de degré  $n$ , le groupe de Galois de  $P$  peut être identifié à un sous-groupe du groupe des permutations à  $n$  éléments  $S_n$ . Son ordre (le nombre de ses éléments) divise  $n!$ .

Ainsi, par exemple, l'application de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  dans lui-même qui à  $a + b\sqrt{2}$  associe  $a - b\sqrt{2}$  (la conjugaison sur  $\mathbb{Q}$ ) laisse les éléments de  $\mathbb{Q}$  invariants. Avec l'application identité, ce sont les seuls automorphismes de  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  (ils laissent tous les deux invariants les éléments de  $\mathbb{Q}$ ). Le groupe de Galois de  $x^2 - 2$  a donc 2 éléments (comme le groupe des permutations d'un ensemble à deux éléments).

Reprenons l'exemple du polynôme  $x^4 - 2$ . Ses racines sont  $\theta_1 = \sqrt[4]{2}$ ,  $\theta_2 = -\sqrt[4]{2}$ ,  $\theta_3 = i\sqrt[4]{2}$  et  $\theta_4 = -i\sqrt[4]{2}$ . Son groupe de Galois est isomorphe au sous-groupe d'ordre 8 de  $S_4$  (avec la notation classique des permutations) :

$$\{(12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), 1, (1324), (1423)\}.$$

La présence de la permutation (12) signifie que si nous échangeons les racines  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dans toute expression rationnelle des racines ayant une valeur rationnelle, la valeur de cette expression reste rationnelle. Ainsi, nous pouvons appliquer toutes les permutations du groupe de Galois aux racines du polynôme sans changer les valeurs rationnelles des expressions suivantes :

$$\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4 = -2, \quad \theta_1 + \theta_2 = 0, \quad \theta_3 + \theta_4 = 0.$$

L'application de la permutation (13) aurait pour effet de changer la valeur de  $\theta_1 + \theta_2$  et de ne pas laisser fixes les éléments de  $\mathbb{Q}$ .

Considérons le cas des polynômes de degré 4 quelconques. Le groupe de Galois  $G$  d'un polynôme irréductible de degré 4 est un sous-groupe de  $S_4$  d'ordre 24. Illustrons tous les cas possibles, dans un premier temps, quand toutes les racines sont réelles :

- $G = S_4$ , le groupe de toutes les permutations à quatre éléments. Les quatre racines du polynôme appartiennent à des extensions différentes les unes des autres, chacune de degré 4 sur  $\mathbb{Q}$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 4x^2 - x + 1$ .
- $G = A_4$ , le sous-groupe des permutations paires de  $S_4$  (c'est-à-dire les permutations engendrées par un nombre pair de permutations élémentaires), aussi appelé le groupe alterné, d'ordre 12. Les quatre racines du polynôme appartiennent à des extensions différentes les unes des autres, chacune de degré 4. L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 7x^2 - 3x + 1$ .
- $G = D_4$  le groupe diédral, d'ordre 8. Deux des racines du polynôme appartiennent à  $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b+c\sqrt{a}})$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ , les deux autres racines appartiennent à  $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b-c\sqrt{a}})$ ,  $a, b, c \in \mathbb{Q}$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 5x^2 + 2$ .
- $G = V_4$ , le groupe des symétries du rectangle, aussi appelé groupe de Klein, d'ordre 4.  $V_4 = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  (toujours avec la notation cyclique des permutations). Les quatre racines appartiennent à  $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 10x^2 + 4$ .
- $G = C_4$ , le groupe des rotations du carré, aussi appelé groupe cyclique, d'ordre 4. Les quatre racines du polynôme appartiennent à  $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b+c\sqrt{a}})$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 4x^2 + 2$ .

Le polynôme de degré 4 n'est pas nécessairement irréductible. Considérons le cas où il contient un facteur irréductible de degré 3,  $p = (x - \alpha)q$ ,  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Les groupes de Galois possibles d'un polynôme  $q$  de degré 3 sont :

- $G = S_3$ , le groupe des permutations des ensembles à trois éléments, d'ordre 6. Les trois racines de  $q$  appartiennent à des extensions différentes, chacune d'entre elles étant de degré 3 sur  $\mathbb{Q}$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^3 - 4x + 1$ .
- $G = A_3$ , le groupe des permutations paires de  $S_3$ , d'ordre 3. Les trois racines de  $q$  appartiennent à des extensions différentes, chacune de degré 3 sur  $\mathbb{Q}$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^3 - 3x + 1$ .

Considérons le cas où  $p$  est le produit de deux facteurs carrés irréductibles. Le groupe de Galois de  $p$  est alors  $S_2 \times S_2$ , le groupe des symétries du losange. Deux des racines du polynôme appartiennent à  $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ , les deux autres à  $\mathbb{Q}(\sqrt{b})$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 5x^2 + 6$ .

Si  $p$  a un seul facteur carré irréductible, le groupe de Galois de  $p$  est  $S_2$ , d'ordre 2. Deux des racines de  $p$  sont rationnelles, les deux autres appartiennent à  $\mathbb{Q}(\sqrt{a})$ . L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 3x^2 + 2$ . Enfin quand le groupe de Galois est réduit à l'identité,  $p$  a quatre racines rationnelles. L'exemple suivant illustre ce cas :  $x^4 - 5x^2 + 4$ .

Notons que si  $p$  a deux racines réelles et deux complexes, les groupes de Galois possibles sont

- $S_4$  (exemple :  $x^4 - 3x - 3$ ),
- $D_4$  (exemple :  $x^4 - 3$ ),
- $S_3$  (exemple :  $x^4 + 2x$ ),
- $S_2 \times S_2$  (exemple :  $x^4 - x^2 - 2$ ),
- $S_2$  (exemple :  $x^4 - 1$ ).

## B.2 Résolution de polynôme

Il est somme toute assez rare de calculer l'expression radicale des racines d'un polynôme quelconque. En effet, cette expression n'existe pas toujours, et dès que le polynôme est de degré supérieur à deux, cette expression est souvent trop complexe pour être manipulée aisément.

De ce fait de nombreux algorithmes ont été mis en place pour exprimer ces racines (réelles) autrement. Nous présentons ici l'algorithme d'Uspensky qui détermine un intervalle d'isolation de chacune des racines d'un polynôme (c'est-à-dire un intervalle sur lequel il est certain que le polynôme a exactement une racine). Nous commençons par présenter la règle de Descartes sur laquelle est basée cet algorithme, et concluons la section en donnant pour le cas des polynômes de degré 4 une liste d'invariants dont la détermination permet de trouver le nombre et la nature des racines.

### B.2.1 Règle de Descartes

Nous reprenons ici la description faite par F. Rouillier et P. Zimmermann de la règle de Descartes [RZ04]. La méthode de Descartes est une méthode qui permet de calculer une borne supérieure sur le nombre de racines positives d'un polynôme univarié à coefficients réels. Cette méthode est basée sur l'étude du nombre de changements de signes dans la suite des coefficients de ce polynôme.

**Définition B.5** Nous notons par  $\text{sign}(a)$  le signe du nombre réel  $a$ , c'est-à-dire 0 si  $a = 0$ , 1 si  $a > 0$ , et  $-1$  si  $a < 0$ . Nous définissons le nombre de changements de signes  $V(a)$  dans la liste  $a = (a_1, \dots, a_k)$  d'éléments de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par récurrence sur  $k$  :

$$V(a_1) = 0, \quad V(a_1, \dots, a_k) = \begin{cases} V(a_1, \dots, a_{k-1}) + 1 & \text{si } \text{sign}(a_{k-1}a_k) = -1 \\ V(a_1, \dots, a_{k-1}) & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons étendre cette notation à des listes  $a$  d'éléments de  $\mathbb{R}$ , contenant des éléments nuls : si  $b$  est la liste obtenue en supprimant les éléments nuls de la liste  $a$ , alors  $V(a) = V(b)$ .

Rappelons maintenant la règle de Descartes :

**Théorème B.6 (Règle des signes de Descartes)** Soit  $P = \sum_{i=0}^d a_i x^i$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . Si nous notons  $V(P)$  le nombre de changements de signes dans la liste  $(a_0, \dots, a_d)$ , et  $\text{pos}(P)$  le nombre de racines positives de  $P$  comptées avec multiplicité, alors  $\text{pos}(P) \leq V(P)$  et  $V(P) - \text{pos}(P)$  est pair.

### B.2.2 Algorithme d'Uspensky

L'algorithme d'Uspensky B.1 permet de déterminer des intervalles d'isolation des racines réelles positives d'un polynôme. Pour trouver toutes les racines réelles, il suffit d'appliquer l'algorithme au polynôme  $P(-x)$ . La preuve de sa validité découle directement de la règle de Descartes. Il nécessite de considérer des polynômes sans facteurs carrés. Il est donc généralement nécessaire de passer par une première étape consistant à éliminer les éventuels facteurs carrés du polynôme.

### B.2.3 Invariants associés aux polynômes de degré 4

Nous présentons ici les résultats de I. Emiriris [?] pour les polynômes de degré 4. Soit  $p(X) = aX^4 - 4bX^3 + 6cX^2 - 4dX + e = 0$ . Les invariants à déterminer sont :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A^3 - 27B^2, & T &= -9W_1^2 + 27\Delta_2\Delta_3 - 3W_3\Delta_2, \\ \Delta_2 &= b^2 - ac, & R &= aW_1 + 2b\Delta_2 = -2b^3 - a^2d + 3abc. \end{aligned}$$



**entrée :**  $p(x) = \sum_{i=0}^n$  un polynôme sans facteur carré (c'est-à-dire n'ayant que des racines simples) à coefficients rationnels.

**sortie :** liste des intervalles d'isolations contenant les racines réelles de  $p$  supérieures ou égales à 0.

```

1:  $A = (a_0, \dots, a_n)$ 
2: si  $V(A) < 2$  alors
3:   retourner  $[0, +\infty[$ 
4: sinon
5:    $l$  liste vide
6:    $p_1(x) = p(x + 1)$ 
7:    $p_2(x) = (x + 1)^n p(\frac{1}{x+1})$ 
8:    $\bar{p}_1(x) = x^k p_1(x)$  où  $\bar{p}_1(x) \neq 0$ 
9:   si  $k > 0$  alors
10:    1 est une racine multiple de  $p(x)$ , ajouter l'intervalle  $[1, 1]$  à  $l$ 
11:   fin si
12:   si  $v(\bar{p}_1(x)) = 0$  alors
13:     $p(x)$  n'a pas de racines entre 1 et  $+\infty$ 
14:   sinon si  $v(\bar{p}_1(x)) = 1$  alors
15:     $[1, +\infty]$  est ajouté à  $l$ 
16:   sinon
17:     $v(\bar{p}_1(x)) > 1$ 
18:     $l' = \text{Uspensky}(\bar{p}_1(x))$ 
19:    insérer dans  $l$  les intervalles de  $l'$  en ajoutant 1 à toutes les bornes de ces intervalles
20:   fin si
21:   si  $v(p_2(x)) = 0$  alors
22:     $p(x)$  n'a pas de racines entre 0 et 1
23:   sinon si  $v(p_2(x)) = 1$  alors
24:     $[0, 1]$  est ajouté à  $l$ 
25:   sinon
26:     $v(p_2(x)) > 1$ 
27:     $l' = \text{Uspensky}(\bar{p}_2(x))$ 
28:    insérer dans  $l$  les intervalles de  $l'$  en appliquant la fonction  $f(x) = \frac{1}{x+1}$  à toutes les bornes de ces intervalles
29:   fin si
30:   retourner  $l$ 
31: fin si

```

**Algorithme B.1:** Algorithme d'Uspensky

Avec les quantités intermédiaires à calculer :

$$\begin{array}{ll}
W_1 &= ad - bc, & W_2 &= be - cd, \\
W_3 &= ae - bd, & \Delta_3 &= c^2 - bd, \\
\Delta_4 &= d^2 - ce, & B &= -dW_1 - e\Delta_2 - c\Delta_3, \\
A &= W_3 + 3\Delta_3 = ae - 4bd + 3c^2, & &= ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3.
\end{array}$$

Munis de ces invariants nous avons les résultats suivants, dont seules les deux premières lignes nous intéressent vraiment :

1.  $\Delta_1 > 0 \wedge T > 0 \wedge \Delta_2 > 0$  : quatre racines simples réelles,

2.  $\Delta_1 > 0 (\wedge T \leq 0 \vee \Delta_2 \leq 0)$  : quatre racines simples complexes,
3.  $\Delta_1 < 0$  : deux racines simples réelles, deux racines simples complexes,
4.  $\Delta_1 = 0 \wedge T > 0$  : une racine double réelle, deux simples réelles,
5.  $\Delta_1 = 0 \wedge T < 0$  : une racine double réelle, deux racines simples complexes,
6.  $\Delta_1 = 0 \wedge T = 0 \wedge \Delta_2 > 0 \wedge R = 0$  : deux racines doubles réelles,
7.  $\Delta_1 = 0 \wedge T = 0 \wedge \Delta_2 > 0 \wedge R \neq 0$  : une racine triple réelle et une racine simple réelle,
8.  $\Delta_1 = 0 \wedge T = 0 \wedge \Delta_2 < 0$  : deux racines doubles complexes,
9.  $\Delta_1 = 0 \wedge T = 0 \wedge \Delta_2 = 0$  : une racine quadruple.

# Bibliographie

- [Ble] *Blender*, 3D modeling, animation, post-production. <http://www.blender3d.org/>.
- [Bro06] T. Bromwich. *Quadratic Forms and Their Classification by Means of Invariant Factors*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 1906.
- [CGA] *CGAL*. <http://www.cgal.org>.
- [CWK03] Y. Choi, W. Wang, and M.-S. Kim. Exact collision detection of two moving ellipsoids under rational motions. In *Proc. of IEEE Conference on Robotics and Automation*, 2003.
- [DF98] D. Dummit and R. Foote. Galois theory. In *Abstract Algebra*, chapter 14, pages 471–570. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998.
- [Dup02] P. Dupont. *Introduction à la géométrie*. De Boeck Université, 2002.
- [Esc97] J.P. Escofier. *Théorie de Galois*. Masson, 1997.
- [Fin37] P. Finsler. Über das Vorkommen definiten und semidefiniten Formen in Scharen quadratischer Formen. *Comment. Math. Helv.*, 9 :188–192, 1936/1937.
- [FNO89] R. Farouki, C. Neff, and M. O'Connor. Automatic parsing of degenerate quadric-surface intersections. *ACM Transactions on Graphics*, 8(3) :174–203, 1989.
- [GHS01a] N. Geismann, M. Hemmer, and E. Schoemer. Computing a 3-dimensional cell in an arrangement of quadrics : exactly and actually. In *Proc. of ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 264–273, 2001.
- [GHS01b] N. Geismann, M. Hemmer, and E. Schoemer. The convex hull of ellipsoids. In *ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 321–322, 2001.
- [GM91] R. Goldman and J. Miller. Combining algebraic rigor with geometric robustness for the detection and calculation of conic sections in the intersection of two natural quadric surfaces. In *Proc. of ACM Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 221–231, 1991.
- [Heo99] Heo, H.-S. and Kim, M.-S. and Gershon, E. The Intersection of Two Ruled Surfaces. *Computer-Aided Design*, 31(1) :33–50, January 1999.
- [HI95] C.-K. Hung and D. Ierardi. Constructing convex hulls of quadratic surface patches. In *Proc. 7th Canadian Conference of Computational Geometry*, pages 255–260, 1995.
- [Hof89] C. Hoffmann. *Geometric and Solid Modeling : An Introduction*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1989.
- [KFC<sup>+</sup>01] S. Krishnan, M. Foskey, T. Culver, J. Keyser, and D. Manosha. PRECISE : Efficient Multiprecision Evaluation of Algebraic Roots and Predicates for Reliable Geometric Computation. *ACM Symposium on computational Geometry*, 2001.

- [KKM97] John Keyser, Shankar Krishnan, and Dinesh Manocha. Efficient and accurate b-rep generation of low degree sculptured solids using exact arithmetic. In *Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 42–55, 1997.
- [Lev76] J. Levin. A parametric algorithm for drawing pictures of solid objects composed of quadric surfaces. *Communications of the ACM*, 19(10) :555–563, 1976.
- [Lev79] J. Levin. Mathematical models for determining the intersections of quadric surfaces. *Computer Graphics and Image Processing*, 11(1) :73–87, 1979.
- [Lev80] J. Levin. Quadril : A computer language for the description of quadric-surface bodies. In *Proceedings of the 7th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 86–92. ACM Press, 1980.
- [LPP04] S. Lazard, L. M. Pe?aranda, and S. Petitjean. Intersecting quadrics : An efficient and exact implementation. In *Proc. of SoCG (ACM Symposium on Computational Geometry)*, Brooklyn, NY, pages 419–428, 2004.
- [Map] *Maple* . [www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com).
- [May] *Maya*, 3D creation modeler. <http://www.alias.com/eng/products-services/maya/index.shtml>.
- [MG95] J. Miller and R. Goldman. Geometric algorithms for detecting and calculating all conic sections in the intersection of any two natural quadric surfaces. *Graphical Models and Image Processing*, 57(1) :55–66, 1995.
- [Mil87] J. Miller. Geometric approaches to nonplanar quadric surface intersection curves. *ACM Transactions on Graphics*, 6(4) :274–307, 1987.
- [MuP] *MuPAD*, the Open Computer Algebra System. [www.sciface.com](http://www.sciface.com).
- [Nam84] M. Namba. *Geometry of Projective Algebraic Curves*. Marcel Dekker, Inc., 1984.
- [Per95] D. Perrin. *Géométrie algébrique*. 1995.
- [Pov] *povray* : Persistence of Vision Raytracer. <http://www.povray.org>.
- [RV82] A. Requicha and H. Voelcker. Solid modeling : a historical summary and contemporary assessment. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 2(1) :9–24, 1982.
- [RZ04] F. Rouillier and P. Zimmermann. Efficient isolation of a polynomial real roots. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 162(1) :33–50, Jan 2004.
- [Sar83] R. Sarraga. Algebraic methods for intersections of quadric surfaces in GMSOLID. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 22 :222–238, 1983.
- [Seg83] C. Segre. Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. 1883.
- [Sgd] *Sgdl*. <http://www.sgdl.com>.
- [SJ91] C.-K. Shene and J. Johnstone. On the planar intersection of natural quadrics. In *Proceedings of the first ACM symposium on Solid modeling foundations and CAD/-CAM applications*, pages 233–242. ACM Press, 1991.
- [SJ92] C.-K. Shene and J. Johnstone. Computing the intersection of a plane and a natural quadric. *Computer & Graphics*, 12(2) :179–186, 1992.
- [SJ94a] C.-K. Shene and J. Johnstone. Computing the intersection of a plane and a revolute quadric. *Computer & Graphics*, 18(1) :47–59, 1994.
- [SJ94b] C.-K. Shene and J. Johnstone. On the lower degree intersections of two natural quadrics. *ACM Transactions on Graphics*, 13(4) :400–424, 1994.

- [Syl52] J. Sylvester. A demonstration of the theorem that every homogeneous quadratic polynomial is reducible by real orthogonal substitutions to the form of a sum of positive and negative squares. *Philosophical Magazine*, 4 :138–142, 1852.
- [TWW02] C. Tu, W. Wang, and J. Wang. Classifying the Nonsingular Intersection Curve of Two Quadric Surfaces. In *Proceedings of the Geometric Modeling and Processing and Theory and Applications (GMP'02)*, page 23. IEEE Computer Society, 2002.
- [Uhl73] F. Uhlig. Definite and semidefinite matrices in a real symmetric matrix pencil. *Pacific Journal of Mathematics*, 49 :561–568, 1973.
- [Uhl76] F. Uhlig. A canonical form for a pair of real symmetric matrices that generate a nonsingular pencil. *Linear Algebra and Its Applications*, 14 :189–209, 1976.
- [Uhl79] F. Uhlig. A recurring theorem about pairs of quadratic forms and extension : a survey. *Linear Algebra and Its Applications*, 25 :219–237, 1979.
- [WCC<sup>+</sup>03] W. Wang, Y. Choi, B. Chan, M.-S. Kim, and J. Wang. Efficient collision detection for moving ellipsoids based on simple algebraic test and separating planes. 2003. to appear.
- [Wei68] K. Weierstrass. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. *Monatshefte Akademie der Wissenschaften, Berlin*, pages 310–338, 1868.
- [WGT03] W. Wang, R. Goldman, and C. Tu. Enhancing Levin's method for computing quadric-surface intersections. *Comput. Aided Geom. Des.*, 20(7) :401–422, 2003.
- [WJG97] W. Wang, B. Joe, and R. Goldman. Rational quadratic parameterizations of quadrics. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 7(6) :599–619, 1997.
- [WJG02] W. Wang, B. Joe, and R. Goldman. Computing quadric surface intersections based on an analysis of plane cubic curves. *Graph. Models*, 64(6) :335–367, 2002.
- [WM93] I. Wilf and Y. Manor. Quadric-surface intersection curves : shape and structure. *Computer-Aided Design*, 25(10) :633–643, 1993.
- [Wol02] N. Wolpert. *An Exact and Efficient Algorithm for Computing a Cell in an Arrangement of Quadrics*. PhD thesis, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002.
- [WWK01] W. Wang, J. Wang, and M.-S. Kim. An algebraic condition for the separation of two ellipsoids. *Computer Aided Geometric Design*, 18(6) :531–539, 2001.