



HAL
open science

Etude du pseudo-spectre d'opérateurs non auto-adjoints

Karel Pravda-Starov

► **To cite this version:**

| Karel Pravda-Starov. Etude du pseudo-spectre d'opérateurs non auto-adjoints. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2006. Français. NNT: . tel-00109895

HAL Id: tel-00109895

<https://theses.hal.science/tel-00109895>

Submitted on 25 Oct 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ORDRE : 3366

THÈSE

présentée

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

pour obtenir

le grade de : DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES I

Mention : Mathématiques et Applications

PAR

Karel PRAVDA-STAROV

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

***Etude du pseudo-spectre d'opérateurs
non auto-adjoints***

Soutenue le 12 juin 2006 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M.	B. Helffer	Examineur
M.	N. Lerner	Directeur de thèse
M.	F. Nier	Examineur
M.	D. Robert	Examineur
M.	J. Sjöstrand	Rapporteur

Remerciements

J'aimerais commencer ces quelques lignes en témoignant ma plus profonde gratitude à Nicolas Lerner. Je ne sais pas comment le remercier de la confiance qu'il m'a témoignée et de tout le temps qu'il m'a consacré durant ces années. Sa rencontre en tant qu'enseignant lors de mes premières années à l'Université m'avait déjà profondément influencé, celle en tant que directeur de thèse l'a fait encore davantage. Je dois beaucoup à ces dernières années et ce sur un plan qui ne se limite pas seulement à ma formation mathématique. Je l'en remercie vivement.

Je suis très reconnaissant à Nils Dencker et Johannes Sjöstrand d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse et de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je les en remercie chaleureusement. Je voudrais également remercier Bernard Helffer, Francis Nier et Didier Robert qui me font l'honneur d'être membres du jury de soutenance.

J'ai eu la chance durant ces trois années de travailler dans des conditions très agréables au sein de l'IRMAR et de l'Antenne de Bretagne de l'ENS Cachan. Je tiens à remercier collectivement tout le personnel de ces deux établissements et en particulier, Elise et Yassine, avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon bureau au quotidien pendant les deux premières années. La dernière année a été difficile sans vous.

Mes pensées vont également en ce jour à tous mes amis. Merci tout d'abord à Fanny et Sylvain pour tous ces agréables moments passés en votre compagnie. Vos encouragements m'ont été précieux. À Valéry (le plus libanais de tous les bretons!), merci pour ton amitié et ton soutien aux heures les plus sombres de la rédaction de ce manuscrit. Cela a été tellement moins difficile de travailler en ta compagnie certains soirs et week-ends. Je suis désolé d'avoir presque toujours quitté le bureau le premier lors de ces grosses soirées de travail et de t'avoir laissé le soin d'éteindre seul les lumières à la Tour de maths. J'ai manifestement besoin de plus d'heures de sommeil que toi! Je pense aussi en ce moment à tous mes amis de l'époque ker lannaise qui me sont chers : Cyril, Florence, Gab, Jérôme, Vincent, Matthieu et Stef mes deux correspondants KFP préférés, ainsi qu'aux amis rencontrés durant ces années de thèse : Diala, Pierre et Stefania. Je les remercie tous pour leurs soutiens. Un remerciement particulier à Jean pour sa si belle et franche amitié. Sans toi, je crois que ma lutte contre les *overflow* et autres obscurs *flushleft* aurait tourné à la déroute ...

Enfin, je tiens à exprimer ma profonde affection à mes parents, à mes grands-parents, à Vêrane et Tommi, à mon futur neveu ou ma future nièce (?), sans oublier bien sûr mon complice de toujours, mon petit frère Boris.

Table des matières

1	Introduction.	6
1.1	Pseudo-spectre et instabilités spectrales.	6
1.2	Quelques exemples.	9
1.3	Quasi-modes et instabilités spectrales.	13
1.4	Quelques questions à l'origine de cette thèse.	15
1.5	Pseudo-spectres semi-classiques.	16
1.6	Enoncé des résultats.	19
2	Etude de la stabilité spectrale des opérateurs différentiels quadra- tiques elliptiques.	33
2.1	Quelques préliminaires.	33
2.2	Cas de la dimension 1.	44
2.3	Cas de la dimension $n \geq 2$	61
2.4	Quelques exemples.	114
3	Quelques résultats d'existence de quasi-modes semi-classiques.	125
3.1	Un résultat d'existence pour les opérateurs de Schrödinger.	126
3.2	Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.	133
4	Etude du pseudo-spectre de l'oscillateur harmonique non auto- adjoint unidimensionnel.	238
	Appendice : précis de calcul symbolique.	259
	Conclusion et perspectives.	263
	Quelques notations.	264

Chapitre 1

Introduction.

1.1 Pseudo-spectre et instabilités spectrales.

Depuis une dizaine d'années, il y a eu dans le domaine des mathématiques numériques un vif intérêt porté à l'étude de la notion de pseudo-spectre. Le développement de cette notion s'explique par le fait que dans un certain nombre de problèmes d'ingénierie mathématique où interviennent naturellement des opérateurs non auto-adjoints, on note de sensibles différences entre d'un côté les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale de ces opérateurs, et d'un autre côté les résultats obtenus par simulation numérique. Ce constat originel laisse penser que dans certains cas, la connaissance seule du spectre d'un opérateur ne permet pas de comprendre suffisamment son action. C'est ainsi que pour suppléer à cet apparent manque d'information contenu dans le spectre, de nouveaux sous-ensembles du plan complexe appelés pseudo-spectres ont été introduits. L'idée sous-jacente à la définition de ces nouveaux objets, est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante d'un opérateur n'est pas définie i.e. son spectre, mais également là où elle est en norme de taille significative i.e. les ensembles pseudo-spectraux qui sont définis précisément de la manière suivante : le ε -pseudo-spectre $\sigma_\varepsilon(A)$ d'une matrice ou d'un opérateur A est défini pour une valeur strictement positive du paramètre ε comme le sous-ensemble du plan complexe,

$$\sigma_\varepsilon(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

On convient d'écrire dans l'expression ci-dessus que $\|(zI - A)^{-1}\| = +\infty$ si le point z appartient au spectre de l'opérateur A . On constate que les ε -pseudo-spectres d'un opérateur sont des ensembles croissants au sens de l'inclusion par rapport au paramètre strictement positif ε et qu'ils contiennent tous le spectre de l'opérateur.

Mentionnons avant de continuer qu'il y a sur la notion de pseudo-spectre une littérature très abondante. Nous nous référons ici pour les définitions et les quelques résultats généraux que nous allons rappeler à l'article [27] de L.N.Trefethen. Indiquons également comme référence le livre paru plus récemment [28] de L.N.Trefethen et M.Embree. Cet ouvrage de synthèse dresse un large panorama de ce sujet et en donne de très nombreuses illustrations.

L'étude des ensembles ε -pseudo-spectraux d'un opérateur se réduit donc d'après la définition précédente à l'étude des lignes de niveau de la norme de sa résolvante. Il est intéressant de noter que cette étude des lignes de niveau de la norme de la résolvante d'un opérateur permet d'apprécier sa stabilité spectrale par rapport à des perturbations. En effet, on peut donner une autre description des ensembles ε -pseudo-spectraux d'un opérateur en terme du spectre de perturbations de cet opérateur puisque pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a l'identité,

$$\sigma_\varepsilon(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{il existe une matrice } \Delta A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifiant } \|\Delta A\| \leq \varepsilon \right. \\ \left. \text{telle que } z \in \sigma(A + \Delta A) \right\},$$

si on note ci-dessus $\sigma(A + \Delta A)$ pour désigner le spectre de la matrice $A + \Delta A$. Plus généralement, si A désigne un opérateur linéaire non borné, fermé, à domaine dense sur un espace de Hilbert complexe H , le résultat de Roch-Silbermann (voir [23]) montre que,

$$\sigma_\varepsilon(A) = \bigcup_{\Delta A \in \mathcal{L}(H), \|\Delta A\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \varepsilon} \sigma(A + \Delta A),$$

si $\mathcal{L}(H)$ désigne ici l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur H . Cette deuxième description montre qu'un nombre complexe z appartient au ε -pseudo-spectre d'une matrice A si et seulement s'il appartient au spectre d'une perturbation $A + \Delta A$ de taille $\|\Delta A\| \leq \varepsilon$ de cette matrice. On comprend avec ce nouveau point de vue l'intérêt d'étudier de tels sous-ensembles lorsque l'on cherche par exemple à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. Pour mener à bien un tel calcul, on commence par effectuer une discrétisation de cet opérateur. Cette discrétisation et les inévitables erreurs d'arrondis qui se produisent lors des calculs numériques vont générer des perturbations de l'opérateur initial ce qui induit en fin de compte que les algorithmes pour le calcul des valeurs propres vont déterminer des valeurs propres d'une perturbation de l'opérateur initial i.e. une valeur d'un ε -pseudo-spectre mais pas nécessairement une valeur spectrale.

L'étude des ensembles pseudo-spectraux est intéressante et non triviale a priori seulement lorsque les opérateurs étudiés sont non auto-adjoints ou plutôt non normaux. En effet, dans le cas d'un opérateur linéaire non borné, fermé, à domaine dense, auto-adjoint ou plus généralement normal sur un espace de Hilbert complexe noté A , on a l'estimation suivante de la norme de la résolvante (voir par exemple l'estimation (V.3.31) dans [15]),

$$\forall z \notin \sigma(A), \|(zI - A)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(A))}, \quad (1.1.1)$$

où $d(z, \sigma(A))$ désigne la distance séparant le point z et le spectre $\sigma(A)$ de l'opérateur A . Cette estimation assure la stabilité spectrale de cet opérateur sous de petites perturbations. Le ε -pseudo-spectre $\sigma_\varepsilon(A)$ est alors exactement d'après (1.1.1) le ε -voisinage du spectre $\sigma(A)$,

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(A)) \leq \varepsilon\}.$$

Par contre, l'estimation (1.1.1) et cette propriété de stabilité spectrale ne sont plus du tout vérifiées si la propriété d'auto-adjonction de l'opérateur est violée. La résolvante de l'opérateur peut alors être très grande en norme dans des régions de l'ensemble résolvant lointaines du spectre ce qui induit une très forte instabilité de son spectre sous de petites perturbations. Ce fait connu depuis longtemps constitue une des difficultés majeures qui intervient dans l'étude spectrale des opérateurs non auto-adjoints.

L'exemple suivant étudié par J.Sjöstrand et M.Zworski dans [25] et [30] illustre parfaitement le point précédent. Considérons pour $n \geq 1$, le bloc de Jordan nilpotent d'indice n ,

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

La matrice J_n n'est pas auto-adjointe (elle n'est pas non plus normale). Son spectre se réduit au singleton $\{0\}$ et pour $z \neq 0$, la résolvante est donnée par l'expression,

$$(zI - J_n)^{-1} = \frac{I}{z} + \frac{J_n}{z^2} + \dots + \frac{J_n^{n-1}}{z^n}.$$

Les estimations (voir (1.3) dans [25]),

$$\forall z \neq 0, \|(zI - J_n)^{-1}\| \geq \frac{1}{|z|^n} \text{ et } \forall |z| > 1, \|(zI - J_n)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| - 1},$$

valides pour la norme $\|\cdot\|$ induite par la norme euclidienne, induisent les inclusions suivantes,

$$\forall 0 < \varepsilon < 1, \overline{B(0, \varepsilon^{1/n})} \subset \sigma_\varepsilon(J_n) \subset \overline{B(0, 1 + \varepsilon)}, \quad (1.1.2)$$

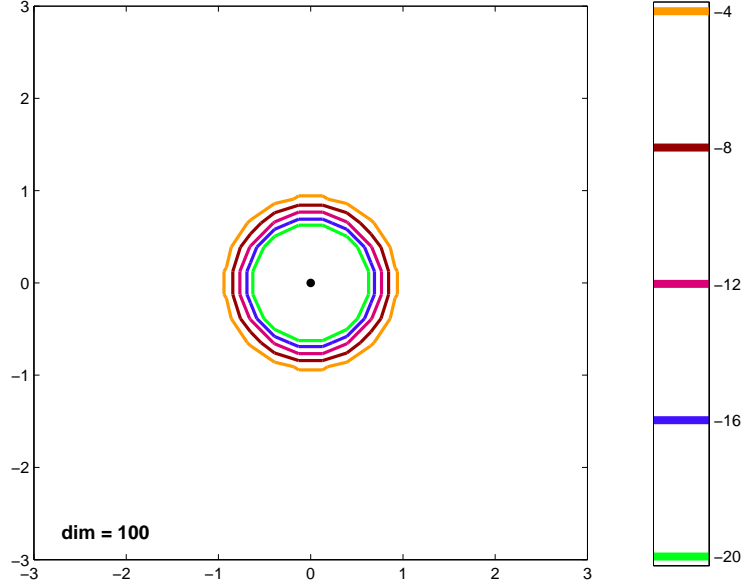
où $B(z, r)$ désigne la boule ouverte centrée en z et de rayon r . Si le paramètre strictement positif ε est suffisamment petit et que la taille n de la matrice J_n est elle suffisamment grande pour que $\varepsilon^{1/n} \simeq 1$, on constate alors dans ce cas que le ε -pseudo-spectre de J_n tend à remplir tout le disque unité fermé. La simulation de la figure 1.1 qui représente quelques lignes de niveau de la norme de la résolvante de la matrice J_{100} pour différentes valeurs strictement positives du paramètre ε , illustre numériquement les inclusions (1.1.2). On constate ainsi que le spectre des grandes matrices J_n est très instable sous de petites perturbations.

Notons enfin que le recours à une étude pseudo-spectrale a permis dans certains problèmes d'évolution relatifs à des opérateurs non auto-adjoints (voir certains exemples étudiés dans [27]),

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t, x) = Au(t, x) \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases}$$

1.2. Quelques exemples.

FIG. 1.1 – Calcul des lignes de niveau $\{z \in \mathbb{C} : \|(zI - J_{100})^{-1}\| = \varepsilon^{-1}\}$. La colonne de droite donne les valeurs correspondantes de $\log_{10} \varepsilon$.



dont l'abscisse spectrale,

$$\alpha(A) := \sup_{z \in \sigma(A)} \operatorname{Re} z,$$

est strictement négative mais pour lesquels il existe des abscisses ε -pseudo-spectrales,

$$\alpha_\varepsilon(A) := \sup_{z \in \sigma_\varepsilon(A)} \operatorname{Re} z,$$

strictement positives pour des petites valeurs strictement positives du paramètre ε , de donner une explication aux instabilités expérimentales observées lors de leurs études numériques.

1.2 Quelques exemples.

On s'intéresse dans cette thèse à l'étude de la stabilité ou de l'instabilité spectrale de certaines classes d'opérateurs différentiels ou pseudo-différentiels. L'exemple qui a pour une large part influencé notre sujet d'étude et nos directions de recherche, est celui de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel,

$$D_x^2 + e^{i\theta} x^2,$$

où $0 < \theta < \pi$ et $D_x = -i\partial_x$. Cet opérateur différentiel quadratique a suscité depuis quelques années beaucoup d'intérêt et d'études comme celle de E.B.Davies dans [5], L.S.Boulton dans [2] ou encore M.Zworski dans [30]. On possède pour cet opérateur une description complète de son spectre qui comme dans le cas auto-adjoint (cas $\theta = 0$) est composé uniquement d'un nombre dénombrable de valeurs propres de multiplicité un, régulièrement espacées le long d'une demi-droite. Cependant, contrairement à ce cas auto-adjoint, les travaux précédents

1.2. Quelques exemples.

ont montré que lorsque le paramètre θ appartient à l'intervalle ouvert $]0, \pi[$, il se développe de très fortes instabilités spectrales sous de petites perturbations pour les hautes énergies de cet opérateur. Nous allons maintenant détailler plus précisément ce comportement remarquable en rappelant les résultats connus sur cet opérateur.

Soulignons tout d'abord que l'on considère l'opérateur unidimensionnel,

$$H_\theta = -\frac{d^2}{dx^2} + e^{i\theta} x^2,$$

avec $0 < \theta < \pi$, comme un opérateur sur $L^2(\mathbb{R})$ avec des conditions de Dirichlet aux bords. Plus précisément, l'opérateur H_θ est défini comme la fermeture de l'opérateur m -sectoriel associé à la forme quadratique m -sectorielle Q_θ via le théorème de représentation de Friedrichs (voir par exemple [15]),

$$Q_\theta(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\overline{g'(x)}dx + e^{i\theta} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\overline{g(x)}dx,$$

si f et g appartiennent à l'espace,

$$W^{1,2}(\mathbb{R}) \cap \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

On peut démontrer que le spectre de l'opérateur H_θ ainsi défini est composé uniquement d'un nombre dénombrable de valeurs propres de multiplicité un qui sont régulièrement disposées le long de la demi-droite $e^{i\frac{\theta}{2}}\mathbb{R}_+$ (voir [5]),

$$\sigma(H_\theta) = \{ \lambda_n = e^{i\frac{\theta}{2}}(2n+1) : n \in \mathbb{N} \}.$$

L.S.Boulton a tout d'abord démontré dans [2] (Théorème 3.3) que la norme de la résolvante de l'opérateur H_θ explose le long de toutes les courbes de la forme,

$$\eta \mapsto b\eta + e^{i\theta}\eta^p,$$

si b et p désignent des constantes satisfaisant aux inégalités $b > 0$ et $1/3 < p < 3$,

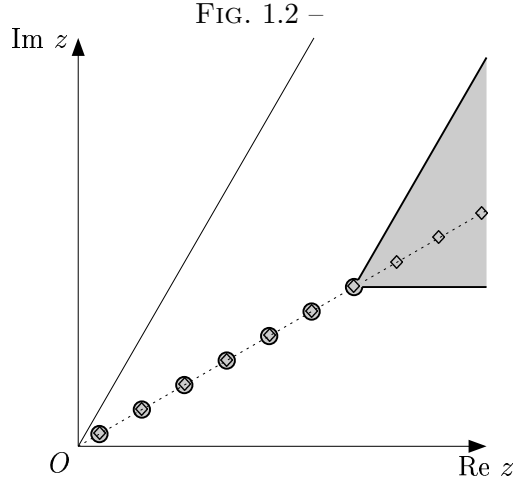
$$\| (H_\theta - (b\eta + e^{i\theta}\eta^p))^{-1} \| \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \eta \rightarrow +\infty. \quad (1.2.1)$$

A contrario, L.S.Boulton a prouvé dans ce même article (Théorème 5.1) que la résolvante $(H_\theta - z)^{-1}$ reste bornée en norme lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ le long de demi-bandes parallèles aux demi-droites \mathbb{R}_+ ou $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ au sens où il existe des constantes strictement positives d et M_d telles que l'on ait,

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq b \leq d} \| (H_\theta - (\eta + ib))^{-1} \| \leq M_d \text{ et}$$

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq b \leq d} \| (H_\theta - e^{i\theta}(\eta - ib))^{-1} \| \leq M_d.$$

Les bornes précédentes permettent de donner des informations concernant la forme des ε -pseudo-spectres de l'opérateur H_θ . D'après ces résultats, L.S.Boulton a démontré que pour toute valeur strictement positive suffisamment petite du



paramètre ε , le ε -pseudo-spectre de l'opérateur H_θ est contenu dans l'ensemble grisé de la figure 1.2 où les valeurs propres de cet opérateur ont été indiquées par les symboles \diamond .

Plus précisément, il a démontré que pour tout $0 < \delta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante strictement positive ε_0 telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\} \cup [\lambda_{m+1} - \delta e^{i\frac{\theta}{2}} + S(0, \theta)],$$

où,

$$S(0, \theta) := \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \theta\} \cup \{0\},$$

si $\arg z$ désigne l'argument du nombre complexe non nul z . Au regard de certaines simulations numériques réalisées par E.B.Davies dans [5], L.S.Boulton a conjecturé que la valeur numérique $1/3$ pour le paramètre p était l'indice critique au sens suivant. Soient $0 < p < 1/3$, $0 < \delta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$; si $b_{m,p}$ et E sont des constantes strictement positives vérifiant,

$$b_{m,p}E + e^{i\theta}E^p = \lambda_m \text{ et } \forall \eta > E, \arg z_\eta < \theta/2,$$

si $z_\eta = b_{m,p}\eta + e^{i\theta}\eta^p$, on pose,

$$\Omega_{m,p} := \{z_\eta | e^{i\beta} \in \mathbb{C} : \eta \geq E \text{ et } \arg z_\eta \leq \beta \leq \arg(\overline{z_\eta} e^{i\theta})\}.$$

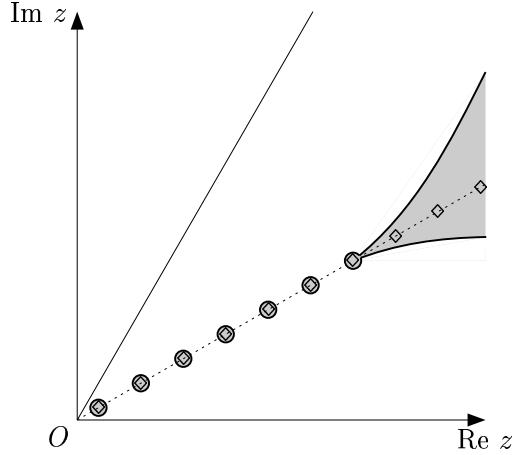
La conjecture de Boulton s'énonce alors comme suit.

Conjecture de Boulton. Il existe une constante $\varepsilon_0 > 0$ telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sigma_\varepsilon(H_\theta) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\} \cup \Omega_{m,p}.$$

Cette dernière inclusion, sous réserve de donner une démonstration de ce résultat, permet de préciser la forme des ensembles ε -pseudo-spectraux.

FIG. 1.3 – Forme des ensembles ε -pseudo-spectraux d’après la conjecture de Boulton.



D’après l’estimation (1.2.1), cette description est optimale. Nous reviendrons dans le chapitre 4 de cette thèse sur cette conjecture dont nous proposerons une démonstration relativement simple. Pour l’instant, on se contente juste de constater au regard de l’estimation (1.2.1) que les hautes énergies du spectre de l’oscillateur harmonique non auto-adjoint sont très instables et que la résolvante de cet opérateur explose en norme dans des régions lointaines de son spectre. Remarquons aussi que la conjecture de Boulton et les simulations numériques de E.B.Davies dans [5] laissent supposer l’existence d’une géométrie particulière qui sépare les zones pour lesquelles la résolvante explose en norme de celles où l’on garde un contrôle sur sa taille.

On peut vérifier numériquement le point précédent. Pour ce faire, on peut essayer de calculer le spectre d’une discrétisation de l’opérateur H_θ donnée par la matrice,

$$A_\theta = ((H_\theta \Psi_i, \Psi_j)_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq i, j \leq N},$$

où la famille $(\Psi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ désigne la base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formée par les fonctions de Hermite. La figure 1.4 donne le résultat obtenu pour les valeurs de paramètres $\theta = \pi/4$ et $N = 100$. Les valeurs spectrales calculées sont indiquées par les points noirs. Le résultat de cette simulation corrobore les résultats théoriques évoqués plus haut. En effet, les valeurs propres de basses énergies calculées numériquement sont proches des valeurs théoriques alors que ce n’est plus du tout le cas à partir d’un certain seuil puisque l’on constate que les valeurs propres numériques d’énergies élevées s’éloignent très fortement de la demi-droite $e^{i\frac{\pi}{8}} \mathbb{R}_+$ contenant toutes les valeurs propres théoriques.

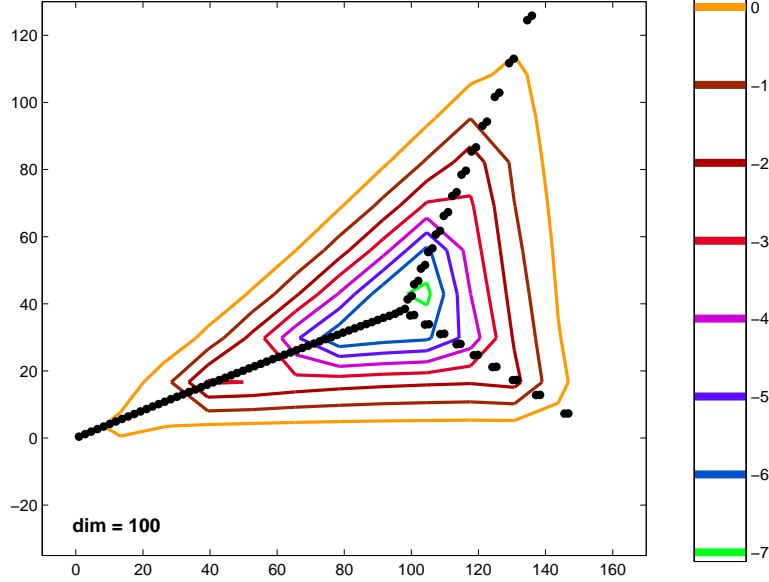
Considérons maintenant l’exemple de l’opérateur différentiel bidimensionnel sur $L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$P = -\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4ix_2\partial_{x_2} + 2x_1^2 + (4+i)x_2^2 + 4x_1x_2 + 2i,$$

défini sur le domaine,

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^2) : x^\alpha D_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^2) \text{ si } |\alpha + \beta| \leq 2\}.$$

FIG. 1.4 – Calcul de quelques lignes de niveau $\{z \in \mathbb{C} : \|(zI - A_{\pi/4})^{-1}\| = \varepsilon^{-1}\}$. La colonne de droite donne les valeurs correspondantes de $\log_{10} \varepsilon$.



L'étude générale des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques que nous allons mener au chapitre suivant va montrer par exemple que pour cet opérateur différentiel aussi la résolvante explose en norme dans des régions lointaines de son spectre, ce qui induit cette fois encore, une très forte instabilité des hautes énergies de cet opérateur. Plus précisément, nous verrons que la norme de la résolvante de l'opérateur P explose le long de toutes les demi-droites $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ si $0 < \theta < \pi/2$ à un vitesse sur-polynomiale au sens où,

$$\forall 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \|(P - e^{i\theta}\eta)^{-1}\| \geq C\eta^N,$$

et ce, même si bien sûr, la demi-droite $e^{i\theta}\mathbb{R}_+$ n'intersecte pas le spectre de l'opérateur P qui possède dans le cas présent la structure suivante,

$$\sigma(P) = \{(2k_1 + 1)z_1 + (2k_2 + 1)z_2 : (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2\},$$

où,

$$z_1, z_2 \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z > 0 \text{ et } \operatorname{Im}z > 0\}.$$

1.3 Quasi-modes et instabilités spectrales.

Pour mettre en évidence la sensibilité du spectre d'un opérateur sous de petites perturbations, on cherche à construire dans certaines zones du plan complexe des quasi-modes qui, en un sens, peuvent s'interpréter comme des familles de fonctions propres approchées. L'existence de ces quasi-modes permet alors de montrer que la résolvante prend en norme des valeurs de taille significative dans des régions du plan complexe qui peuvent pourtant être éloignées du spectre. Nous allons maintenant rappeler quel est l'état de l'art en matière de résultat

d'existence de quasi-modes concernant les opérateurs pseudo-différentiels. Les deux énoncés des résultats d'existence qui vont suivre seront donnés dans un cadre semi-classique, i.e. dans l'asymptotique $h \rightarrow 0^+$, dans lequel nous nous placerons par la suite puisqu'il se révèle particulièrement adapté à l'étude des phénomènes qui nous intéressent.

Le premier résultat est dû à E.B.Davies et concerne des opérateurs de Schrödinger semi-classiques. Il est rappelé dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Soit H_h l'opérateur non borné semi-classique sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par,*

$$H_h u(x) = -h^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + V(x)u(x),$$

où $h > 0$ et V désigne un potentiel C^∞ sur \mathbb{R} à valeurs complexes. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel qu'il existe $\eta \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\text{Im}V'(a) \neq 0$ et $z = \eta^2 + V(a)$ alors il existe $\delta > 0$ tel que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists c_n > 0, \forall 0 < h < \delta, \exists u_{h,n} \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \|u_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \\ \|H_h u_{h,n} - z u_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c_n h^n.$$

Ce résultat est démontré dans le théorème 1 de [6]. Cette démonstration repose sur la construction (complètement explicite) d'un quasi-mode par une méthode WKB complexe. Nous verrons une extension de ce résultat qui utilise les mêmes arguments dans l'article [21] dont le contenu sera repris dans la première partie du chapitre 3 de cette thèse. Le second résultat d'existence de quasi-modes est celui établi par M.Zworski dans [29] et [30]. Ce résultat généralise le théorème précédent aux opérateurs pseudo-différentiels en donnant un résultat d'existence sous une condition portant sur le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire du symbole principal de ces opérateurs. Nous donnons ici son énoncé dans la quantification de Weyl. Précisons au préalable quelques notations. On désigne dans cette thèse par,

$$S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\langle (x, \xi) \rangle := (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$, $N \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{R}$, la classe des symboles semi-classiques $p(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ pour tout $0 < h \leq 1$ vérifiant,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, 0 < h \leq 1} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x, \xi, h)| \langle (x, \xi) \rangle^{-m} h^{-N} < +\infty, \quad (1.3.1)$$

et,

$$S(h^\infty \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2).$$

On désigne par $p(x, h\xi, h)^w$ l'opérateur pseudo-différentiel défini en quantification de Weyl semi-classique par le symbole $p(x, \xi, h)$,

$$p(x, h\xi, h)^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} p\left(\frac{x+y}{2}, h\xi, h\right) u(y) dy d\xi, \quad (1.3.2)$$

1.4. Quelques questions à l'origine de cette thèse.

et on note par,

$$\text{Op}_h^w(S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)), \quad (1.3.3)$$

où $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, la classe des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques définis en quantification de Weyl semi-classique par un symbole appartenant à la classe $S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$. Mentionnons également que certains résultats de calcul symbolique concernant cette classe de symboles semi-classiques sont rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit.

Théorème 1.3.2. *Considérons deux symboles $p_0(x, \xi)$ et $p_1(x, \xi, h)$ de la classe $S(\langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ où $m \in \mathbb{R}$, dont le premier est supposé indépendant du paramètre semi-classique et vérifie,*

$$p_0(x_0, \xi_0) = 0 \text{ et } \{\text{Rep}_0, \text{Imp}_0\}(x_0, \xi_0) < 0,$$

en un point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ où $\{\text{Rep}_0, \text{Imp}_0\}$ désigne le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire du symbole p_0 . Si on note,

$$P_h = p_0(x, h\xi)^w + hp_1(x, h\xi, h)^w,$$

il existe une famille u_h de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que,

$$\|P_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+ \text{ et } \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1.$$

1.4 Quelques questions à l'origine de cette thèse.

Au regard des résultats sur l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel que nous venons d'évoquer à la section 1.2, on peut se demander si ces phénomènes singuliers que nous avons décrits, sont représentatifs de ceux qui se produisent plus généralement pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension quelconque. On appelle ici, opérateur différentiel quadratique elliptique, tout opérateur pseudo-différentiel $q(x, \xi)^w$ défini en quantification de Weyl classique,

$$q(x, \xi)^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi, \quad (1.4.1)$$

par une forme quadratique $q(x, \xi)$, où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, à valeurs complexes et elliptique au sens suivant,

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = (0, 0). \quad (1.4.2)$$

L'oscillateur harmonique non auto-adjoint appartient à cette classe puisque l'on a l'identité,

$$D_x^2 + e^{i\theta} x^2 = (\xi^2 + e^{i\theta} x^2)^w.$$

On veut dans cette thèse proposer une compréhension approfondie des phénomènes de stabilité ou d'instabilité spectrale qui se développent sous de petites perturbations pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en toute dimension

en répondant aux quelques questions suivantes. Se produit-il toujours de fortes instabilités spectrales pour les hautes énergies de ces opérateurs? Dans le cas où tel ne serait pas le cas, est-il possible de dégager une condition nécessaire et suffisante simple sur les symboles quadratiques de ces opérateurs permettant d'assurer leurs stabilités spectrales? On peut ensuite dans l'éventualité où l'on observe effectivement ces instabilités spectrales, se demander si on peut donner une description précise des ensembles ε -pseudo-spectraux associés comme celle que propose la conjecture de Boulton. Sait-on expliquer par des propriétés intrinsèques du symbole la valeur numérique critique $1/3$ qui apparaît dans cette même conjecture? Enfin plus généralement, peut-on à partir de propriétés relatives seulement au symbole de ces opérateurs expliquer et décrire la stabilité ou l'instabilité de leurs spectres par rapport à de petites perturbations?

Une telle compréhension de ces phénomènes passe par une étude détaillée des aspects microlocaux qui les régissent. M.Zworski a le premier dans [29] et [30] souligné le lien étroit entre ces questions d'instabilités spectrales et des résultats d'analyse microlocale concernant la résolubilité d'opérateurs pseudo-différentiels. Pour répondre à ces quelques questions et mener à bien notre étude, nous devrons user de nombreux résultats et techniques d'analyse microlocale concernant des opérateurs pseudo-différentiels généraux (et non plus simplement quadratiques) qui tournent autour des questions de la sous-ellipticité et de la résolubilité de ces opérateurs. On peut déjà mentionner par exemple que la condition $(\bar{\Psi})$ (voir la définition 26.4.6 dans [12]) sera au centre de toutes nos attentions dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

1.5 Pseudo-spectres semi-classiques.

Pour étudier la géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$, nous allons passer par une étude semi-classique des opérateurs semi-classiques $(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}$ associés. On introduit dans ce cadre semi-classique deux nouvelles familles de sous-ensembles du plan complexe, les pseudo-spectres semi-classiques et les pseudo-spectres d'injectivité semi-classiques qui se veulent être dans ce nouveau cadre, des notions proches de celle des ε -pseudo-spectres dans le cadre classique $h = 1$.

Définition 1.5.1. Soit $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ une famille semi-classique d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définis sur un domaine D . Pour tout $\mu \geq 0$, l'ensemble,

$$\Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) = \{z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \|(P_h - z)^{-1}\| \geq Ch^{-\mu}\},$$

est appelé pseudo-spectre semi-classique d'indice μ de la famille $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ (on écrit par convention $\|(P_h - z)^{-1}\| = +\infty$ si z appartient au spectre de l'opérateur P_h). Le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini est défini par,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(P_h) = \bigcap_{\mu \geq 0} \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h).$$

Avec cette définition, les points du complémentaire de l'ensemble $\Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h)$ sont les points du plan complexe où l'on a le contrôle suivant pour h assez petit de la

norme de la résolvante,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \|(P_h - z)^{-1}\| < Ch^{-\mu}.$$

Il est également intéressant d'introduire une notion légèrement différente qui est celle de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique.

Définition 1.5.2. Soit $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ une famille semi-classique d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définis sur un domaine D . Pour tout $\mu \geq 0$, l'ensemble,

$$\lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) = \{z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \\ \exists u \in D, \|u\|_{L^2} = 1, \|(P_h - z)u\|_{L^2} \leq Ch^\mu\},$$

est appelé pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ de la famille $(P_h)_{0 < h \leq 1}$. Le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini est défini par,

$$\lambda_\infty^{\text{sc}}(P_h) = \bigcap_{\mu \geq 0} \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h).$$

Le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ est ainsi par définition l'ensemble des points du plan complexe qui sont des « presque valeurs propres » avec une décroissance en $O(h^\mu)$ dans la limite semi-classique. On peut constater que ces deux notions d'ensembles pseudo-spectraux semi-classiques sont décroissants au sens de l'inclusion par rapport à l'indice. L'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique en un point est caractérisée par l'existence d'une estimation a priori pour l'opérateur. En effet, il n'y a pas de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ en un point z si et seulement si,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in D, \|(P_h - z)u\|_{L^2} \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2}. \quad (1.5.1)$$

On dira qu'il n'y a pas de perte de puissance de h , respectivement une perte d'au plus h^μ pour les points de l'ensemble complémentaire du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice 0, respectivement d'indice μ si $\mu > 0$. On a toujours les inclusions suivantes entre ces deux notions de pseudo-spectres semi-classiques,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) \subset \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h),$$

mais pour obtenir l'égalité, on a besoin d'une propriété supplémentaire de surjectivité des opérateurs qui est par exemple remplie si on considère des opérateurs de Fredholm d'indice 0. On peut aussi remarquer que si $P_h - z$ est un opérateur fermé, à domaine dense et que $\bar{z} \notin \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h^*)$, l'estimation (1.5.1) pour l'opérateur $P_h^* - \bar{z}$ implique la surjectivité de l'opérateur $P_h - z$ si h est assez petit (voir le théorème II.19 dans [3]). Sous les hypothèses précédentes, il s'ensuit que $z \in \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h)$ implique que $z \in \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h)$. En fait, si on suppose que $P_h - z$ est un opérateur fermé, l'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique en z pour l'opérateur P_h donne un contrôle de la norme de l'inverse à gauche,

$$(P_h - z)^{-1} : \text{Im}(P_h - z) \rightarrow D,$$

puisque l'estimation (1.5.1) montre que l'image $\text{Im}(P_h - z)$ de l'opérateur $P_h - z$ est fermée dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ et son injectivité.

Notons tout d'abord que les définitions des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques que nous adoptons ici, différent de celle donnée dans [7] pour les opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques. Nous préférons pour notre part donner une définition qui ne dépende que des propriétés des opérateurs semi-classiques et non des propriétés des symboles qui les quantifient puisque nous souhaitons étudier ici les conditions géométriques naturelles relatives à ces symboles qui justement assurent la validité de ces propriétés. Ces définitions sont inspirées par la remarque faite à la fin de la page 388 dans [7].

Les notions d'ensembles pseudo-spectraux semi-classiques précédentes présentent tout d'abord l'intérêt de donner des équivalents dans le cadre semi-classique des ensembles ε -pseudo-spectraux et se révèlent également particulièrement adaptées à l'étude de la géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques classiques $q(x, \xi)^w$. En effet, compte tenu du caractère quadratique des symboles q , on obtient en effectuant le changement de variables $y = h^{1/2}x$ avec $h > 0$, l'identité,

$$q(x, \xi)^w - \frac{z}{h} = \frac{1}{h}(q(y, h\eta)^w - z), \quad (1.5.2)$$

si $z \in \mathbb{C}$. Cette identité permet à partir des descriptions des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques de l'opérateur $(q(y, h\eta)^w)_{0 < h \leq 1}$ d'obtenir des informations sur la résolvante,

$$(q(x, \xi)^w - z)^{-1},$$

de l'opérateur classique $q(x, \xi)^w$ pour des valeurs du point z de module élevé. Précisons par exemple que si le point non nul z appartient au pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'opérateur $(q(y, h\eta)^w)_{0 < h \leq 1}$, l'identité (1.5.2) montre d'après la définition précédente que la résolvante de l'opérateur classique $q(x, \xi)^w$ explose en norme le long de la demi-droite $z\mathbb{R}_+$ de la manière suivante,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \|(q(x, \xi)^w - z\eta)^{-1}\| \geq C\eta^N,$$

et ce, même si cette demi-droite ne rencontre pas le spectre de l'opérateur $q(x, \xi)^w$. Dans le cas où $z \notin \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(y, h\eta)^w)$, $z \neq 0$ et $0 \leq \mu \leq 1$, l'identité (1.5.2) montre que l'on peut trouver des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que la résolvante de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ reste bornée en norme sur des régions de l'ensemble résolvant de la forme,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1 \text{ et } d(\Delta, u) \leq C_2 |\text{proj}_\Delta u|^{1-\mu}\} \cap \sigma(q(x, \xi)^w)^c,$$

si on note $\Delta = z\mathbb{R}_+$, si $\text{proj}_\Delta u$ désigne la projection orthogonale de u sur la demi-droite Δ et $\sigma(q(x, \xi)^w)^c$ l'ensemble complémentaire du spectre $\sigma(q(x, \xi)^w)$ de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ i.e. son ensemble résolvant. En effet, en utilisant l'estimation semi-classique pour la résolvante qui caractérise l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice μ au point non nul z et l'identité (1.5.2) pour revenir à un cadre classique, on obtient l'estimation de résolvante suivante,

$$\exists C > 0, \exists \eta_0 \geq 1, \forall \eta \geq \eta_0, \|(q(x, \xi)^w - \eta e^{i \arg z})^{-1}\| < C\eta^{\mu-1},$$

1.6. Enoncé des résultats.

qui induit que pour tout $v \in D(q(x, \xi)^w)$ et $\eta \geq \eta_0$,

$$\|(q(x, \xi)^w - \eta e^{i \operatorname{arg} z})v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C^{-1} \eta^{1-\mu} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

si $D(q(x, \xi)^w)$ désigne le domaine de l'opérateur $q(x, \xi)^w$. On peut alors trouver une constante $\tilde{\eta}_0 \geq 1$ telle que si,

$$\tilde{z} \in \{u \in \mathbb{C} : |u| \geq \tilde{\eta}_0 \text{ et } d(e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+, u) \leq 2^{-1} C^{-1} |\operatorname{proj}_{e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+} u|^{1-\mu}\} \\ \cap \sigma(q(x, \xi)^w)^c,$$

on ait,

$$|\operatorname{proj}_{e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+} \tilde{z}| \geq \eta_0.$$

Ceci implique en utilisant les estimations précédentes et l'inégalité triangulaire que si,

$$\tilde{z} \in \{u \in \mathbb{C} : |u| \geq \tilde{\eta}_0 \text{ et } d(e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+, u) \leq 2^{-1} C^{-1} |\operatorname{proj}_{e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+} u|^{1-\mu}\} \\ \cap \sigma(q(x, \xi)^w)^c,$$

on a pour tout $v \in D(q(x, \xi)^w)$,

$$\begin{aligned} \|(q(x, \xi)^w - \tilde{z})v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\geq \|(q(x, \xi)^w - \operatorname{proj}_{e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+} \tilde{z})v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad - d(e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+, \tilde{z}) \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq 2^{-1} C^{-1} |\operatorname{proj}_{e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+} \tilde{z}|^{1-\mu} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\geq 2^{-1} C^{-1} \eta_0^{1-\mu} \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

car $\mu \leq 1$. Cette dernière estimation montre que la résolvante de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ est bornée en norme par la valeur $2C\eta_0^{\mu-1}$ sur l'ensemble,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq \tilde{\eta}_0 \text{ et } d(e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+, u) \leq 2^{-1} C^{-1} |\operatorname{proj}_{e^{i \operatorname{arg} z} \mathbb{R}_+} u|^{1-\mu}\} \\ \cap \sigma(q(x, \xi)^w)^c.$$

Dans le cas où l'indice μ vérifie $0 \leq \mu < 1$, cette absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice μ permet d'obtenir un contrôle de la norme de la résolvante sur de vastes sous-ensembles de l'ensemble résolvant. On s'attachera donc dans ce qui suit, à préciser attentivement la perte de puissance de h qui apparaît dans les estimations semi-classiques caractéristiques de l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini.

1.6 Enoncé des résultats.

Nous allons maintenant passer en revue, chapitre par chapitre, les différents résultats contenus dans cette thèse.

1.6.a Enoncé des résultats du chapitre 2.

Le chapitre 2 de ce manuscrit rassemble l'étude générale des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$ en toute dimension $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que celle des pseudo-spectres semi-classiques et des pseudo-spectres d'injectivité semi-classiques des opérateurs semi-classiques $(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}$ associés.

Commençons par fixer quelques notations et par rappeler quelques résultats connus sur les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. On considère dans les énoncés des résultats qui suivent, q une forme quadratique,

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n &\rightarrow \mathbb{C}, & \text{où } n \in \mathbb{N}^*, \\ (x, \xi) &\mapsto q(x, \xi) \end{aligned}$$

à **valeurs complexes** et *elliptique* au sens suivant,

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, \quad q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = (0, 0).$$

On note $\Sigma(q)$ l'*image numérique* du symbole q qui est le sous-ensemble du plan complexe défini par,

$$\Sigma(q) = q(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n),$$

et F l'*application hamiltonienne* associée à la forme quadratique q dont la définition est rappelée au chapitre suivant (Définition 2.1.2),

$$q(x, \xi) = \sigma((x, \xi), F(x, \xi)).$$

Les résultats de L.Hörmander et J.Sjöstrand contenus dans [11] et [24] dont nous rappellerons quelques éléments au prochain chapitre, montrent que l'opérateur $q(x, \xi)^w + z$ défini en quantification de Weyl à partir du symbole $q(x, \xi) + z$,

$$q(x, \xi)^w + z : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est un opérateur de Fredholm si $z \in \mathbb{C}$ et si B désigne l'espace de Hilbert,

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ si } |\alpha + \beta| \leq 2\}, \quad (1.6.1)$$

muni de la norme,

$$\|u\|_B^2 = \sum_{|\alpha + \beta| \leq 2} \|x^\alpha D_x^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

De plus, l'indice de Fredholm de ces opérateurs ne dépend pas du point z ,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{ind}(q(x, \xi)^w + z) = \text{ind}(q(x, \xi)^w).$$

Notre premier résultat établit une estimation de la norme de la résolvante sur l'ensemble complémentaire de l'image numérique.

Proposition 1.6.1. *Soit q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$, on a alors l'estimation suivante,*

$$\forall z \in \Sigma(q)^c, \quad \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q))}.$$

La propriété de normalité des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$ se lit simplement sur le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de leurs symboles.

Proposition 1.6.2. *Considérons q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$. Sous ces hypothèses, l'opérateur,*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est un opérateur normal si et seulement si la forme quadratique $\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi)$ est identiquement nulle.

Commençons par énoncer les résultats propres à la dimension $n = 1$ qui comme nous allons le constater présente certaines singularités par rapport aux autres dimensions.

1.6.a.1 Opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension 1.

Il y a trois types d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension 1 :

- Les opérateurs $q(x, \xi)^w$ que nous qualifierons de *type 1*, sont les opérateurs pour lesquels l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à leurs symboles est un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture strictement plus petite que π . Ces opérateurs sont des opérateurs de Fredholm d'indice 0 dont le spectre est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités finies,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \{(2k\lambda + 1)(-i\lambda) : k_\lambda \in \mathbb{N}\},$$

si λ désigne l'unique valeur propre de l'application hamiltonienne F associée à la forme quadratique q vérifiant $-i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}$.

Dans ce cas, on a l'identité entre les deux notions d'ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w),$$

et les résultats suivants qui sont résumés dans le théorème 1.6.3.

Théorème 1.6.3. *Soit $q(x, \xi)$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ définissant $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique de type 1. Il existe alors pour tout $h > 0$ un opérateur unitaire (plus précisément métaplectique) U_h sur $L^2(\mathbb{R})$, un nombre complexe non nul z et $\theta \in [0, \pi[$ tels que,*

$$\forall h > 0, q(x, h\xi)^w = zU_h((hD_x)^2 + e^{i\theta}x^2)U_h^{-1}.$$

- Dans le cas où le paramètre θ est nul, les résultats suivants sont vérifiés :
(i) L'image numérique $\Sigma(q)$ est une demi-droite fermée de sommet 0.

1.6. Enoncé des résultats.

- (ii) Pour $h > 0$, l'opérateur $q(x, h\xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur normal.
(iii) On a la description suivante des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Sigma(q) \setminus \{0\}, \quad \Sigma(q)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c \text{ et} \\ 0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

(iv)

$$\forall z \notin \sigma(q(x, \xi)^w), \quad \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(q(x, \xi)^w))}, \quad (1.6.2)$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sigma_\varepsilon(q(x, \xi)^w) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(q(x, \xi)^w)) \leq \varepsilon\}.$$

• Dans le cas où le paramètre θ vérifie $0 < \theta < \pi$, les résultats suivants sont vérifiés :

- (i) L'image numérique $\Sigma(q)$ est un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture θ .
(ii) Pour $h > 0$, l'opérateur $q(x, h\xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ n'est pas un opérateur normal.
(iii) On a la description suivante des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Sigma(\overset{\circ}{q}), \quad \Sigma(q)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c, \\ 0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c \text{ et } \partial\Sigma(q) \setminus \{0\} \subset (\Lambda_{2/3}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c, \quad (1.6.3)$$

où $\Sigma(\overset{\circ}{q})$ désigne l'intérieur de l'image numérique $\Sigma(q)$ et $\partial\Sigma(q)$ sa frontière.

Le résultat du théorème précédent montre que les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques de type 1 se réduisent à une similitude près et à une conjugaison près par un opérateur métaplectique, soit à l'oscillateur harmonique auto-adjoint, soit à l'oscillateur harmonique non auto-adjoint selon qu'ils sont, ou non, des opérateurs normaux. Comme l'on s'y attend, le spectre des opérateurs normaux (cas $\theta = 0$) est au regard de l'identité (1.6.2) stable sous de petites perturbations. Le ε -pseudo-spectre de ces opérateurs est alors simplement dans ce cas le ε -voisinage de leurs spectres. A contrario, les hautes énergies du spectre des opérateurs de type 1 non normaux (cas $0 < \theta < \pi$) sont très instables sous de petites perturbations puisque le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini remplit tout l'intérieur de l'image numérique qui est un secteur angulaire ouvert de sommet 0 et d'ouverture θ . Plus précisément, les ε -pseudo-spectres de ces opérateurs classiques $q(x, \xi)^w$ sont à une similitude près ceux de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint pour lesquels on possède une première description au regard des résultats de L.S.Boulton que l'on a rappelés précédemment. En fait, comme nous le détaillerons au chapitre 4 de cette thèse, le résultat d'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 2/3 sur la frontière de l'image numérique privée de l'origine $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$ que l'on peut exprimer d'une manière équivalente via l'estimation a priori,

$$\exists C_z > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in D, \\ \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C_z h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

1.6. *Enoncé des résultats.*

si $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, permet de démontrer la conjecture de Boulton. La description des ensembles ε -pseudo-spectraux énoncée par la conjecture de Boulton est donc à une similitude près vérifiée pour tous les opérateurs de type 1 non normaux. De plus, on a aussi pour ces opérateurs un analogue à une similitude près de la propriété (1.2.1).

- Les opérateurs $q(x, \xi)^w$ que nous qualifierons de *type 2*, sont les opérateurs pour lesquels l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à leurs symboles remplit tout le plan complexe,

$$\Sigma(q) = \mathbb{C},$$

et dont les symboles vérifient,

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, (x, \xi) \neq (0, 0), \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi) > 0.$$

Ces opérateurs sont des opérateurs de Fredholm d'indice -2 ayant un spectre remplissant tout le plan complexe qui ne contient aucune valeur propre,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Théorème 1.6.4. *Soit q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ définissant $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique de type 2. On a la description suivante des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,*

$$\forall \mu \in [0, \infty], \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \mathbb{C}, \quad \mathbb{C}^* \subset (\lambda_{1/2}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c \text{ et} \\ 0 \in (\lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

- Les opérateurs $q(x, \xi)^w$ que nous qualifierons de *type 3*, sont les opérateurs pour lesquels l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à leurs symboles remplit tout le plan complexe,

$$\Sigma(q) = \mathbb{C},$$

et dont les symboles vérifient,

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, (x, \xi) \neq (0, 0), \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi) < 0.$$

Ces opérateurs sont des opérateurs de Fredholm d'indice 2 ayant un spectre remplissant tout le plan complexe qui est composé uniquement de valeurs propres dont les vecteurs propres associés appartiennent tous à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Théorème 1.6.5. *Soit q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ définissant $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique*

1.6. Enoncé des résultats.

de type 3. On a la description suivante des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Ces trois types d'opérateurs recouvrent tous les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension 1. Les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques de type 2 et de type 3 sont des opérateurs un peu à part dans la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension quelconque. Ils sont uniquement spécifiques à la dimension 1.

1.6.a.2 Opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension $n \geq 2$.

Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes en dimension $n \geq 2$. L'image numérique $\Sigma(q)$ associée à cette forme quadratique q est alors un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture strictement plus petite que π . L'opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ associé est un opérateur de Fredholm d'indice 0 dont le spectre est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités finies,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \left\{ \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(F), \\ -i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}}} (r_\lambda + 2k_\lambda)(-i\lambda) : k_\lambda \in \mathbb{N} \right\},$$

si r_λ désigne la dimension du sous-espace vectoriel caractéristique complexe associé à la valeur propre λ de l'application hamiltonienne F .

Dans ce cas, on a encore l'identité entre les deux notions d'ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w),$$

et les résultats suivants qui sont résumés dans le théorème 1.6.6.

Théorème 1.6.6. *Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes en dimension $n \geq 2$ et $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur différentiel quadratique elliptique associé.*

• *Si l'opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est normal i.e. si la forme quadratique $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x, \xi)$ est identiquement nulle, on a alors les identités caractéristiques,*

$$\forall z \notin \sigma(q(x, \xi)^w), \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(q(x, \xi)^w))},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \sigma_\varepsilon(q(x, \xi)^w) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(q(x, \xi)^w)) \leq \varepsilon\}.$$

• *Si l'opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ n'est pas normal i.e. si la forme quadratique $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x, \xi)$ n'est pas identiquement nulle alors l'image numérique $\Sigma(q)$*

1.6. Enoncé des résultats.

est un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement positive et strictement plus petite que π . On a les résultats suivants sur les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Sigma(q), \quad \Sigma(q)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c \text{ et } 0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

Le théorème suivant étudie ce qui se passe sur la frontière de l'image numérique privée du point 0, $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$.

Théorème 1.6.7. *Sous les hypothèses du théorème 1.6.6, on suppose que l'opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur non normal. La frontière de l'image numérique privée du point 0, $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, est alors la réunion disjointe de deux demi-droites ouvertes distinctes $\Delta_1 = z_1\mathbb{R}_+^*$ et $\Delta_2 = z_2\mathbb{R}_+^*$ où z_1 et z_2 sont des nombres complexes appartenant à l'ensemble $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$,*

$$\partial\Sigma(q) \setminus \{0\} = \Delta_1 \sqcup \Delta_2.$$

On note F l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q .

- Si le symbole q est d'ordre fini k_j , $j \in \{1, 2\}$, sur la demi-droite Δ_j au sens défini à la section 2.3.b.3 du chapitre 2, alors cet ordre k_j est nécessairement pair et,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_{k_j/(k_j+1)}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

- Si le symbole q est d'ordre infini sur la demi-droite Δ_j , $j \in \{1, 2\}$, considérons les deux hypothèses supplémentaires suivantes :

(H1) On suppose que $(\text{Im}(\overline{z_j}F))^2 \neq 0$.

(H2) On suppose que $(\text{Im}(\overline{z_j}F))^2 = 0$. Sous cette hypothèse, on a l'inégalité suivante,

$$1 \leq \text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j}F)) \leq \min\left(n - \sum_{\lambda \in \sigma(F) \cap i\Delta_j} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda), n - 1\right),$$

où $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda)$ désigne la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(F - \lambda)$ de \mathbb{C}^{2n} en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. On suppose de plus dans ce cas que,

$$\text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j}F)) \geq n - \sum_{\lambda \in \sigma(F) \cap i\Delta_j} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda) - 1.$$

Si l'une des deux hypothèses (H1) **ou** (H2) est satisfaite alors il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur Δ_j . Plus précisément, pour tout $\eta > 0$ il existe une constante C strictement positive telle que,

$$\forall h > 0, \forall u \in B, \|q(x, h\xi)^w u - \eta z_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui induit l'inclusion,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

Comme en dimension 1 dans le cas des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques de type 1, le théorème 1.6.6 montre que le spectre d'un opérateur différentiel quadratique elliptique en dimension $n \geq 2$ est stable sous de petites perturbations si et seulement si cet opérateur est normal. Le fait qu'il y ait stabilité du spectre sous l'hypothèse de normalité n'est pas vraiment surprenante au regard des résultats classiques que nous avons rappelés précédemment. Par contre, il est remarquable de noter que si cette hypothèse de normalité est violée, il se produit effectivement dans cette classe particulière d'opérateurs de fortes instabilités spectrales pour les hautes énergies puisque le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de ces opérateurs remplit tout l'intérieur de leurs images numériques. On constate aussi que la géométrie des régions de l'ensemble résolvant où l'on contrôle la taille de la norme de la résolvante, dépend de l'ordre sur la frontière de leurs images numériques privée du point 0 des symboles qui définissent ces opérateurs. Par exemple, lorsque les demi-droites ouvertes Δ_1 et Δ_2 qui composent l'ensemble précédent sont d'ordre fini, on a une description des ensembles ε -pseudo-spectraux du type de celle donnée par la conjecture de Boulton avec des indices critiques p différents. La valeur de ces indices dépend directement de l'ordre des deux demi-droites Δ_1 et Δ_2 . Si l'image numérique du symbole q est par exemple de la forme de celle de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint décrit à la section 1.2, l'indice $1/3$ doit être remplacé par l'indice $1/(k_j + 1)$ si k_j désigne l'ordre de la demi-droite \mathbb{R}_+^* qui compose dans ce cas une partie de la frontière de l'image numérique. On renvoie ici le lecteur à la section 2.4 du prochain chapitre pour trouver davantage de précisions sur ce point à travers les quelques exemples types que nous détaillons et qui rendent compte des diverses situations qui peuvent apparaître dans le bestiaire des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

Notons malheureusement que le théorème 1.6.7 laisse ouverte dans quelques cas particuliers d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques, la question de l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur des demi-droites ouvertes d'ordre infini de la frontière de leurs images numériques. A l'heure où nous écrivons ces lignes, nous ne savons pas si le résultat,

$$\partial\Sigma(q) \setminus \{0\} \subset (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c,$$

est toujours vérifié même si nous sommes fortement enclins à le penser. Notons cependant que le théorème 1.6.7 permet tout de même de traiter tous les cas d'ordre infini qui se produisent en dimension 2 ainsi qu'un grand nombre de cas apparaissant en dimension 3 puisque seuls les cas où,

$$(\text{Im}(\overline{z_j}F))^2 = 0 \text{ et } \text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j}F)) = 1,$$

échappent au résultat précédent.

Pour démontrer les résultats que nous venons d'énoncer, il y a essentiellement trois types d'arguments à utiliser.

- Le premier type d'argument est de nature géométrique. Nous allons bien sûr tout d'abord utiliser la propriété fondamentale d'invariance symplectique propre à la quantification de Weyl. Cette propriété nous permettra quand cela est possible de ramener notre étude de certains symboles via une réduction symplectique

à celle de certaines formes normales. Nous userons également de la géométrie liée au caractère quadratique des symboles de la classe d'opérateurs que l'on étudie. Ce cadre quadratique impose une certaine rigidité que nous utiliserons fortement de manière non triviale.

- Concernant les résultats d'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini, nous utiliserons un résultat d'existence de quasi-modes sous une condition de violation de la condition géométrique $(\bar{\Psi})$ qui sera démontré dans la deuxième partie du chapitre 3 de cette thèse. Ce dernier résultat généralise les critères d'existence précédents rappelés en section 1.3. Notons toutefois que l'on proposera une démonstration alternative qui utilise le résultat de M.Zworski rappelé au théorème 1.3.2. Cette deuxième démonstration permettra de démontrer l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique à l'exception d'un nombre fini de demi-droites particulières.
- La démonstration des résultats d'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur la frontière de l'image numérique s'appuie sur l'utilisation d'estimations a priori sous-elliptiques. Pour les cas des demi-droites d'ordre fini, nous utiliserons le résultat de N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski, Théorème 1.4 dans [7]. Pour établir les résultats dans les cas des demi-droites d'ordre infini, nous étudierons la décroissance en temps de la norme du semi-groupe à contraction $e^{tzq(x,\xi)^w}$ pour des valeurs particulières du nombre complexe non nul z . Ceci se fera en établissant des estimations fines sur le symbole de Weyl du semi-groupe dont une expression est donnée par la formule de Mehler que démontre L.Hörmander dans [13].

1.6.b Enoncé des résultats du chapitre 3.

On s'intéresse dans ce troisième chapitre à des résultats d'existence de quasi-modes induisant la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini.

1.6.b.1 Un critère d'existence de quasi-modes pour des opérateurs de Schrödinger.

Le résultat qui suit, est extrait de l'article [21], *A general result about pseudo-spectrum for Schrödinger operators*, publié dans les PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY. Il s'agit d'une généralisation du résultat de E.B.Davies contenu dans [6] (Théorème 1) que nous avons rappelé dans une version simplifiée au théorème 1.3.1.

Considérons H_h l'opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par,

$$H_h f(x) := -h^2 \frac{d^2 f}{dx^2}(x) + V_h(x) f(x),$$

où V_h désigne un potentiel C^∞ à *valeurs complexes* dépendant continûment ainsi que toutes ses dérivées du paramètre semi-classique $h \geq 0$. On suppose que H_h est une extension fermée de l'opérateur initialement défini sur l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Théorème 1.6.8. *Si $\eta \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ vérifie,*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall j \leq 2p, j \neq 0, \operatorname{Im} V_0^{(j)}(a) = 0, \operatorname{Im} V_0^{(2p+1)}(a) \neq 0,$$

1.6. Énoncé des résultats.

et si on pose $z_h = \eta^2 + V_h(a)$, il existe alors une constante strictement positive δ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $c_n > 0$ indépendante de h et une fonction $\tilde{f}_{h,n} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ non identiquement nulle dépendant de h et de n telles que,

$$\forall 0 < h < \delta, \frac{\|H_h \tilde{f}_{h,n} - z_h \tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}} \leq c_n h^n.$$

Corollaire 1.6.9. *Sous les hypothèses précédentes, on suppose maintenant que le potentiel V est indépendant du paramètre semi-classique h . Si la partie imaginaire du potentiel $\text{Im}V$ est une fonction réelle-analytique et que la fonction $x \mapsto \text{Im}V(x) - \text{Im}V(a)$ change de signe au point a alors,*

$$z = \eta^2 + V(a) \in \lambda_\infty^{\text{sc}}(H_h) \subset \Lambda_\infty^{\text{sc}}(H_h)$$

si $\eta \in \mathbb{R}^*$.

La démonstration de ce résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques passe par la même construction WKB complexe que celle utilisée par E.B.Davies dans [6]. Même si ce résultat concerne un exemple d'opérateur différentiel très particulier, il est intéressant de noter qu'il permet d'esquisser une condition géométrique suffisante portant sur le symbole de l'opérateur qui induit l'existence de quasi-modes caractéristiques de la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini. C'est un premier pas vers le résultat d'existence suivant.

1.6.b.2 Autour de la condition $(\overline{\Psi})$.

Le résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques pour les opérateurs pseudo-différentiels qui suit, généralise en dimension $n \geq 2$ le résultat de M.Zworski qui figure dans [29] et [30] (ce résultat est rappelé dans le théorème 1.3.2 de ce chapitre) et permet de mieux comprendre la condition géométrique qui apparaît dans le résultat d'existence de quasi-modes pour les opérateurs de Schrödinger énoncé à la section 1.6.b.1. Ce résultat donne pour un opérateur pseudo-différentiel une condition géométrique sur son symbole principal semi-classique, la violation de la condition $(\overline{\Psi})$, qui est suffisante pour générer du pseudo-spectre semi-classique d'indice infini. Compte tenu du fait que la condition géométrique $(\overline{\Psi})$ se trouve au cœur des résultats concernant la résolubilité des opérateurs pseudo-différentiels adjoints associés, notre résultat permet de préciser le lien entre les questions d'existence de quasi-modes semi-classiques caractéristiques de la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini et des questions de résolubilité que M.Zworski a le premier évoqué dans [30].

Dans l'énoncé du résultat suivant, on utilise la notion usuelle de front d'onde semi-classique $\text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0})$ d'une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ dont on peut trouver une définition par exemple dans [19] (Définition 2.9.1) et qui sera rappelée au début de la deuxième partie du chapitre 3.

On suppose dans cette section 1.6.b.2 que la dimension n est supérieure ou égale à 2 et on considère les deux hypothèses suivantes.

1.6. *Enoncé des résultats.*

(H1) Soit $P(x, \xi, h)$ un symbole de la classe,

$$S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

définie en (1.3.1), où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{R}_+$, qui admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$P(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(x, \xi) h^j,$$

où les fonctions $p_j(x, \xi)$ désignent des symboles de la classe,

$$S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

qui sont supposés indépendants du paramètre semi-classique h .

(H2) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une fonction $q_0(x, \xi) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, indépendante du paramètre semi-classique h (la notation $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ désigne ici l'espace des fonctions C^∞ qui sont bornées sur \mathbb{R}^{2n} ainsi que toutes leurs dérivées) et une *courbe bicaractéristique* $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ du symbole $\text{Re}(q_0(p_0 - z))$ où $a < b$ telle que,

$$\begin{aligned} \forall t \in [a, b], \quad q_0(\gamma(t)) \neq 0 \text{ et} \\ \text{Im}[q_0(\gamma(a))(p_0(\gamma(a)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(b))(p_0(\gamma(b)) - z)], \end{aligned}$$

où les notations Re et Im désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction à valeurs complexes p . Considérons la quantité,

$$\begin{aligned} L_0 := \inf \{ t - s : s, t \in [a, b], a \leq s < t \leq b, \\ \text{Im}[q_0(\gamma(s))(p_0(\gamma(s)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] \} \geq 0. \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, cette quantité vérifie l'estimation $0 \leq L_0 \leq b - a$ et on peut trouver un couple $(a_0, b_0) \in]a, b]^2$ tel que,

$$a_0 \leq b_0 \text{ et } L_0 = b_0 - a_0.$$

Dans le cas où $L_0 > 0$, on peut choisir ce couple (a_0, b_0) , $a_0 < b_0$ tel que,

$$\begin{aligned} V_{a_0} \cap]-\infty, a_0[\cap \{ t \in [a, b] : \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] > 0 \} \neq \emptyset, \\ V_{b_0} \cap]b_0, +\infty[\cap \{ t \in [a, b] : \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] < 0 \} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

et,

$$\forall t \in [a_0, b_0], \quad \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] = 0,$$

pour tout voisinage ouvert V_{a_0} de a_0 et V_{b_0} de b_0 dans \mathbb{R} . Dans le cas où,

$$L_0 = b_0 - a_0 = 0,$$

on peut choisir ce point $a_0 = b_0 \in]a, b[$ tel que,

$$\text{Im}[q_0(\gamma(a_0))(p_0(\gamma(a_0)) - z)] = 0,$$

1.6. *Enoncé des résultats.*

et tel que pour tout voisinage ouvert V_{a_0} du point a_0 dans \mathbb{R} , il existe un couple (a_1, b_1) de \mathbb{R}^2 tel que,

$$a_1, b_1 \in V_{a_0}, \quad a_1 < b_1 \text{ et} \\ \operatorname{Im}[q_0(\gamma(a_1))(p_0(\gamma(a_1)) - z)] > 0 > \operatorname{Im}[q_0(\gamma(b_1))(p_0(\gamma(b_1)) - z)].$$

Remarque. Dans le cas où la fonction $\operatorname{Im}(q_0(p_0 - z))$ change de signe à un *ordre fini* en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives le long de la courbe,

$$t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n},$$

on peut choisir le couple $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ précédent tel que,

$$a_0 = b_0.$$

Théorème 1.6.10. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et les notations précédentes, on peut pour tout voisinage ouvert V de l'ensemble compact $\gamma([a_0, b_0])$ dans \mathbb{R}^{2n} et pour tout $N \in \mathbb{N}$ trouver une constante h_0 strictement positive et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que,*

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \\ \operatorname{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \subset \overline{V} \text{ et} \\ \|P(x, h\xi, h)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (1.6.4)$$

En particulier, le point z appartient au pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini de l'opérateur pseudo-différentiel semi-classique,

$$(P(x, h\xi, h)^w)_{0 < h \leq 1}.$$

Ce théorème montre que l'on peut construire un quasi-mode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ vérifiant l'estimation (1.6.4) avec un front d'onde semi-classique pouvant être concentré dans un voisinage ouvert arbitraire de l'arc compact de la bicaractéristique $\gamma([a_0, b_0])$ sur lequel se produit le changement de signe donné par l'hypothèse (H2). Dans le cas où ce changement de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives s'effectue à un ordre fini, on constate d'après la remarque précédant le théorème 1.6.10 que ce front d'onde semi-classique peut alors être concentré dans un voisinage ouvert arbitraire d'un point de l'espace des phases. On peut reformuler l'hypothèse précédente (H2) en terme de violation de la condition $(\overline{\Psi})$. Si $z \in \mathbb{C}$ et P désigne un symbole de la classe,

$$S((x, \xi))^m, dx^2 + d\xi^2,$$

vérifiant l'hypothèse (H1), le résultat du théorème 1.6.10 induit que sous une violation de la condition $(\overline{\Psi})$ par le symbole principal semi-classique $p_0 - z$ du symbole $P - z$, on peut pour tout $N \in \mathbb{N}$ trouver un quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$

1.6. Enoncé des résultats.

de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ où $h_0 > 0$ dont le front d'onde semi-classique se concentre dans un compact de l'espace des phases et qui vérifie,

$$\|P(x, h\xi, h)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+.$$

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuyons très fortement sur la preuve de la nécessité de la condition (Ψ) pour garantir la résolubilité d'un opérateur pseudo-différentiel que propose L.Hörmander dans le chapitre 26 de son livre [12]. Il s'agit plus précisément d'une adaptation dans un cadre semi-classique de la démonstration du théorème 26.4.7 de [12]. Ce résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques était, nous devons le dire, un peu attendu. Il ne surprendra donc pas les personnes familières des problèmes de résolubilité et des mathématiques qui gravitent autour de la condition (Ψ) . L'existence possible d'un tel résultat est évoquée par N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski dans [7] qui mentionnent une remarque de N.Lerner à ce sujet. Nous avons voulu ici nous assurer de la pertinence de cette remarque en proposant une preuve complète d'un tel résultat d'existence dans un cadre semi-classique. L'adaptation dans ce cadre semi-classique de certaines parties de la démonstration du théorème 26.4.7 de [12] exige des vérifications et des modifications même si on peut essentiellement considérer que le cadre semi-classique est plus simple à explorer que celui des singularités C^∞ . Nous allons donc reprendre en détail cette démonstration longue et difficile du théorème 26.4.7 de [12] en réutilisant sans modification certaines parties de cette preuve lorsque cela est possible. Nous utiliserons par exemple directement la construction remarquable de la fonction de phase due à R.D.Moyer et L.Hörmander (Lemme 26.4.14 dans [12]). Par contre, nous serons amenés à réécrire certaines parties qui demandent des modifications puisque par exemple il n'y a plus d'hypothèse d'homogénéité concernant les symboles des opérateurs pseudo-différentiels que nous considérons. Il faudra donc adapter un certain nombre de lemmes à ce cadre inhomogène comme par exemple le lemme 26.4.16 de [12]. Nous apporterons également une attention supplémentaire à l'étude du front d'onde semi-classique du quasi-mode construit. Notons enfin que le résultat que nous énonçons ici s'applique en dimension $n \geq 2$. Il est clair qu'il est également vérifié en dimension 1. Il suffit pour cela d'apporter quelques modifications ponctuelles et simples à la démonstration proposée en dimension supérieure ce que nous avons omis ici pour des raisons de place.

1.6.c Enoncé des résultats du chapitre 4.

Le chapitre 4 de ce manuscript reprend le contenu de l'article [22], *A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator*, accepté pour publication dans le JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY. Cet article recouvre une étude complète des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques et des ensembles ε -pseudo-spectraux classiques de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel que nous utilisons dans le chapitre 2 pour démontrer la description des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques annoncée dans le théorème 1.6.3 pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques de type 1 non normaux. Le résultat principal de cette partie est la

démonstration du fait que,

$$\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\theta} \mathbb{R}_+^* \subset (\Lambda_{2/3}^{\text{sc}}((hD_x)^2 + e^{i\theta}x^2))^c, \quad (1.6.5)$$

dont on déduit une démonstration de la conjecture de Boulton énoncée dans les lignes précédentes. Notons que l'on peut démontrer cette inclusion (1.6.5) en invoquant le résultat très général pour les opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques de N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski, Théorème 1.4 dans [7]. Nous donnons ici pour cet exemple particulier d'opérateur différentiel unidimensionnel une preuve beaucoup plus élémentaire qui n'utilise pas de techniques difficiles d'analyse microlocale. Cette démonstration recourt seulement à un découpage judicieux dans l'espace des fréquences.

Chapitre 2

Etude de la stabilité spectrale des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

2.1 Quelques préliminaires sur les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

L'objet de cette première section est de rappeler un certain nombre de résultats classiques concernant les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques qui seront constamment utilisés dans la suite de ce chapitre.

2.1.a Forme quadratique elliptique et image numérique.

On dit qu'une forme quadratique à valeurs complexes $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, est *elliptique* si elle vérifie la propriété suivante,

$$(x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n, q(x, \xi) = 0 \Rightarrow (x, \xi) = (0, 0).$$

A toute forme quadratique q , on associe le sous-ensemble du plan complexe $\Sigma(q)$ défini par,

$$\Sigma(q) := q(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n),$$

qui est appelé *image numérique* de la forme quadratique q . Dans le cas où la condition d'ellipticité est vérifiée, l'image numérique d'une forme quadratique ne peut prendre que des formes bien particulières. C'est ce que montre le résultat suivant qui est dû à J.Sjöstrand (Lemme 3.1 dans [24]).

Lemme 2.1.1. *Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes. Si la dimension n est supérieure ou égal à 2, il existe alors un nombre complexe non nul z tel que la forme quadratique $\operatorname{Re}(zq)$ soit définie positive. Dans le cas où la dimension $n = 1$, le même résultat est vérifié si on suppose de plus que l'image numérique $\Sigma(q)$ est distincte du plan complexe \mathbb{C} .*

L'image numérique d'une forme quadratique elliptique peut donc prendre uniquement deux types de forme. La première possibilité est qu'elle coïncide exactement

2.1. Quelques préliminaires.

avec le plan complexe \mathbb{C} . C'est un cas un peu particulier qui ne peut se produire qu'en dimension 1. L'autre possibilité est que l'image numérique $\Sigma(q)$ se réduise à un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement plus petite que π .

Preuve. Dans le cas où l'image numérique est distincte du plan complexe, on peut après une éventuelle similitude centrée en 0 qui correspond à la multiplication du symbole q par le nombre complexe non nul z donné par le lemme précédent, supposer que la forme quadratique $\text{Re}q$ est définie positive. On remarque ensuite que l'image numérique $\Sigma(q)$ a une structure de semi-cône puisque si $z = q(x_0, \xi_0) \in \Sigma(q)$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$tz = q(\sqrt{t}x_0, \sqrt{t}\xi_0) \in \Sigma(q),$$

en raison de l'homogénéité de degré 2 de la forme quadratique q . On en déduit alors que $\Sigma(q) = \mathbb{R}_+I$ si on note I le segment compact défini par,

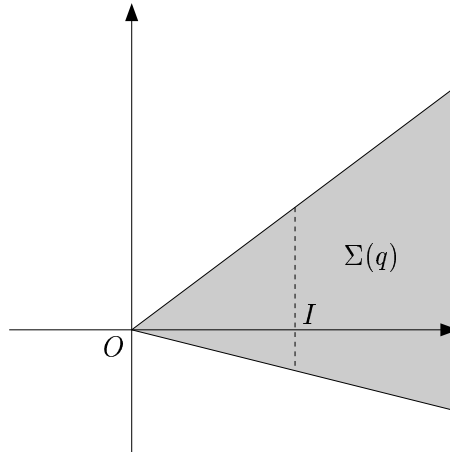
$$I = 1 + i \text{Im}q(K) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0\},$$

et K le sous-ensemble compact de \mathbb{R}^{2n} ,

$$K := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : \text{Re}q(x, \xi) = 1\}.$$

La propriété de compacité de K est une conséquence immédiate de la définie positivité de la forme quadratique $\text{Re}q$. Ceci montre que l'image numérique $\Sigma(q)$ est dans ce cas un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture strictement plus petite que π . \square

FIG. 2.1 –



On rappelle ensuite la notion d'*application hamiltonienne* associée à une forme quadratique qui est définie comme suit (voir la définition 21.5.1 dans [12]).

Définition 2.1.2. On associe à toute forme quadratique à valeurs complexes,

$$q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C},$$

2.1. Quelques préliminaires.

où $n \in \mathbb{N}^*$, un endomorphisme F de \mathbb{C}^{2n} appelé **application hamiltonienne** de q qui est *uniquement déterminé* par l'équation,

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \forall (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}, q((x, \xi); (y, \eta)) = \sigma((x, \xi), F(y, \eta)),$$

si on note $q(\cdot; \cdot)$ la forme polaire associée à la forme quadratique q et σ la forme symplectique canonique sur \mathbb{R}^{2n} .

Cette application hamiltonienne F possède une propriété d'antisymétrie par rapport à la forme symplectique qui découle des propriétés d'antisymétrie de cette forme symplectique et de symétrie de la forme polaire associée à la forme quadratique q ,

$$\forall X, Y \in \mathbb{R}^{2n}, \sigma(X, FY) = q(X; Y) = q(Y; X) = \sigma(Y, FX) = -\sigma(FX, Y).$$

2.1.b Opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

On appelle *opérateur différentiel quadratique elliptique* tout opérateur pseudo-différentiel $q(x, \xi)^w$ défini en quantification de Weyl,

$$q(x, \xi)^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi,$$

à partir d'un symbole q qui est une forme quadratique elliptique à **valeurs complexes**. Ces opérateurs pseudo-différentiels $q(x, \xi)^w$ sont en fait seulement des opérateurs différentiels d'ordre 2 puisque la quantification de Weyl associe au symbole $x_k x_l$ l'opérateur de multiplication par $x_k x_l$, au symbole $\xi_k \xi_l$ l'opérateur $D_{x_k} D_{x_l}$, au symbole $x_k \xi_l$ l'opérateur $x_k D_{x_l}$ si $k \neq l$ et au symbole $x_k \xi_k$ l'opérateur,

$$\frac{x_k \cdot D_{x_k} + D_{x_k} \cdot x_k}{2},$$

si on adopte la notation $D_{x_k} := i^{-1} \partial_{x_k}$. La quantification de Weyl possède des propriétés géométriques remarquables dont la principale est sa propriété d'invariance symplectique que nous rappellerons au paragraphe suivant. Nous allons utiliser cette propriété d'invariance symplectique pour réduire quand cela est possible les symboles des opérateurs pseudo-différentiels étudiés à certaines formes normales auxquelles il suffira de porter notre attention. Nous utiliserons également par la suite le fait que les symboles à valeurs réelles définissent dans la quantification de Weyl des opérateurs formellement auto-adjoints.

Les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques possèdent certaines propriétés intéressantes qui ont été démontrées par V.V.Grušin. Elles sont rappelées dans la proposition suivante dont on peut trouver une démonstration dans le lemme 3.1 de [11] ou le théorème 3.5 de [24].

Proposition 2.1.3. *Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, une forme quadratique elliptique à valeurs complexes et $z \in \mathbb{C}$. L'opérateur,*

$$q(x, \xi)^w + z : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

2.1. Quelques préliminaires.

où B désigne l'espace de Hilbert,

$$\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : x^\alpha D_x^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ si } |\alpha + \beta| \leq 2\},$$

muni de la norme,

$$\|u\|_B^2 = \sum_{|\alpha+\beta|\leq 2} \|x^\alpha D_x^\beta u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

est alors un opérateur de Fredholm. L'indice de Fredholm de cet opérateur,

$$q(x, \xi)^w + z,$$

est indépendant du nombre complexe z et, est égal à 0 si la dimension n est supérieure ou égale à 2. Dans le cas où la dimension $n = 1$, cet indice peut prendre les valeurs -2 , 0 ou 2 . Plus précisément, si l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à la forme quadratique q est distincte du plan complexe \mathbb{C} , l'indice de Fredholm de l'opérateur $q(x, \xi)^w + z$ est nul.

Comme annoncé au chapitre précédent, la propriété de normalité des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$ se lit simplement sur le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de leurs symboles.

Proposition 2.1.4. *Considérons q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Sous ces hypothèses, l'opérateur,*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est un opérateur normal si et seulement si la forme quadratique $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x, \xi)$ est identiquement nulle.

Preuve. Comme les symboles $\text{Re}q$ et $\text{Im}q$ sont des formes quadratiques, la formule de composition en calcul de Weyl donnée par le théorème 18.5.4 de [12] montre que le symbole de Weyl du commutateur $[\text{Re}q(x, \xi)^w, \text{Im}q(x, \xi)^w]$ est exactement égal à la forme quadratique,

$$\text{Re}q\sharp\text{Im}q - \text{Im}q\sharp\text{Re}q = \frac{1}{i}\{\text{Re}q, \text{Im}q\},$$

où $\text{Re}q\sharp\text{Im}q$ désigne le symbole de Weyl de l'opérateur obtenu par composition $\text{Re}q(x, \xi)^w \text{Im}q(x, \xi)^w$ des deux opérateurs pseudo-différentiels $\text{Re}q(x, \xi)^w$ et $\text{Im}q(x, \xi)^w$, ce qui induit qu'un opérateur différentiel quadratique elliptique est normal si et seulement si le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de son symbole est la forme quadratique identiquement nulle. \square

Lorsque l'image numérique $\Sigma(q)$ est distincte du plan complexe, on possède une description complète du spectre de l'opérateur de Fredholm d'indice 0,

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

qui est rappelé dans le théorème suivant. Ce résultat a été démontré par J.Sjöstrand dans [24] (Théorème 3.5).

2.1. Quelques préliminaires.

Théorème 2.1.5. *Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, une forme quadratique elliptique à valeurs complexes dont l'image numérique $\Sigma(q)$ est distincte du plan complexe. Il existe alors un élément $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la forme quadratique $\text{Re}(z_0 q)$ soit définie positive. Le spectre de l'opérateur de Fredholm d'indice 0,*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est dans ce cas composé uniquement de valeurs propres de multiplicités finies et possède la description suivante,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \left\{ \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(F), \\ \text{Im}(z_0 \lambda) > 0}} (r_\lambda + 2k_\lambda)(-i\lambda) : k_\lambda \in \mathbb{N} \right\}, \quad (2.1.1)$$

si on note F l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q et r_λ la dimension du sous-espace vectoriel caractéristique complexe associé à la valeur propre λ de F .

Remarquons tout d'abord que sous les hypothèses du théorème précédent, le spectre de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ est contenu dans l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à son symbole puisque comme le montre le lemme 3.2 et le théorème 3.3 de [11], on pourrait remplacer la sommation sur l'ensemble,

$$\lambda \in \sigma(F), \text{Im}(z_0 \lambda) > 0,$$

de (2.1.1) par une sommation sur l'ensemble,

$$\lambda \in \sigma(F), -i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}.$$

Les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$ dont les images numériques $\Sigma(q)$ remplissent tout le plan complexe, ne rentrent pas dans le cadre du théorème précédent. Ce sont des cas un peu particuliers dans la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques qui sont propres à la dimension 1. Nous verrons à la section suivante que leurs spectres sont égaux au plan complexe tout entier et que selon l'indice de Fredholm de ces opérateurs, ces spectres sont soit composés uniquement de valeurs propres, soit ils n'en possèdent aucune.

Notons aussi dès à présent que lorsque l'image numérique $\Sigma(q)$ est distincte de \mathbb{C} , on a d'après la remarque qui fait suite à la définition 1.5.2 l'identité entre les deux notions de pseudo-spectres semi-classiques et de pseudo-spectres d'injectivité semi-classiques des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques semi-classiques associés,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w),$$

puisque d'après la proposition 2.1.3 les opérateurs $q(x, \xi)^w + z$ sont des opérateurs de Fredholm d'indice 0 pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2.1.c Invariance symplectique et formes normales.

On commence ce paragraphe en rappelant la propriété fondamentale d'invariance symplectique de la quantification de Weyl dont on peut trouver un énoncé dans [12] (Lemme 18.5.9) que nous reproduisons dans le théorème suivant.

Théorème 2.1.6. *Pour toute transformation symplectique affine χ de \mathbb{R}^{2n} , il existe une transformation unitaire U de $L^2(\mathbb{R}^n)$ uniquement déterminée à un facteur complexe de module 1 près telle que U soit respectivement un automorphisme des espaces $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, B et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ où B est l'espace de Hilbert défini à la proposition 2.1.3 et telle que,*

$$(a \circ \chi)(x, \xi)^w = U^{-1}a(x, \xi)^wU, \quad (2.1.2)$$

pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$. On dit que U est un opérateur métaplectique associé à la transformation symplectique affine χ .

La propriété d'invariance symplectique de la quantification de Weyl induit cette même propriété pour les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques et les ensembles pseudo-spectraux d'injectivité semi-classiques des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques dans le sens où si $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ désigne une forme quadratique elliptique à valeurs complexes et χ est une transformation symplectique *linéaire* de \mathbb{R}^{2n} , on a pour tout $\mu \in [0, \infty]$ les identités,

$$\begin{aligned} \lambda_\mu^{\text{sc}}((q \circ \chi)(x, h\xi)^w) &= \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w), \\ \Lambda_\mu^{\text{sc}}((q \circ \chi)(x, h\xi)^w) &= \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w). \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

En effet, commençons par remarquer que le théorème 2.1.6 induit que pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ et $h > 0$,

$$U_h^{-1}a(x, \xi)^wU_h = a(h^{-1/2}x, h^{1/2}\xi)^w,$$

si on note U_h l'opérateur,

$$U_h f(x) := h^{n/4}f(h^{1/2}x),$$

puisque d'après la démonstration du théorème 18.5.9 dans [12] l'opérateur U_h est un opérateur métaplectique associé à la transformation symplectique linéaire $(x, \xi) \mapsto (h^{-1/2}x, h^{1/2}\xi)$. Considérons maintenant le cas où le symbole,

$$a : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C},$$

est une forme quadratique. D'après l'homogénéité particulière de ce symbole a , on a alors,

$$\forall h > 0, a(h^{-1/2}x, h^{1/2}\xi) = \frac{1}{h}a(x, h\xi),$$

ce qui induit l'identité,

$$\forall h > 0, U_h^{-1}a(x, \xi)^wU_h = \frac{1}{h}a(x, h\xi)^w.$$

2.1. Quelques préliminaires.

Considérons ensuite $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes et χ une transformation symplectique linéaire de \mathbb{R}^{2n} . Constatons que l'opérateur $(q \circ \chi)(x, h\xi)^w$ est bien un opérateur différentiel quadratique elliptique pour $h > 0$ puisque sous nos hypothèses le symbole $q \circ \chi$ est une forme quadratique elliptique. Si $z \notin \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w)$ pour $0 \leq \mu < +\infty$, on peut trouver des constantes C et h_0 strictement positives telles que pour tout $u \in B$ et $0 < h < h_0$,

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Si on note U un opérateur métaplectique associé à la transformation symplectique linéaire χ , on obtient en utilisant le caractère unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ des opérateurs U et U_h , l'estimation précédente et le fait que les opérateurs U et U_h soient des automorphismes de l'espace B que pour tout $u \in B$ et $0 < h < h_0$,

$$\begin{aligned} \|U_h^{-1}U^{-1}U_h q(x, h\xi)^w U_h^{-1}UU_h u - zU_h^{-1}U^{-1}U_h U_h^{-1}UU_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ \geq Ch^\mu \|U_h^{-1}UU_h u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned}$$

i.e. que pour tout $u \in B$ et $0 < h < h_0$,

$$\|(q \circ \chi)(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

puisque d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} U_h^{-1}U^{-1}U_h q(x, h\xi)^w U_h^{-1}UU_h &= U_h^{-1}U^{-1}h q(x, \xi)^w UU_h \\ &= hU_h^{-1}(q \circ \chi)(x, \xi)^w U_h = (q \circ \chi)(x, h\xi)^w. \end{aligned}$$

Cette estimation montre que $z \notin \lambda_\mu^{\text{sc}}((q \circ \chi)(x, h\xi)^w)$ et induit l'inclusion,

$$\lambda_\mu^{\text{sc}}((q \circ \chi)(x, h\xi)^w) \subset \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w).$$

Pour obtenir l'implication réciproque, il suffit d'utiliser l'inclusion précédente pour la forme quadratique elliptique $q \circ \chi$ et la transformation symplectique linéaire χ^{-1} . Ceci démontre la première identité de (2.1.3) si $0 \leq \mu < +\infty$. Le cas où $\mu = +\infty$ s'en déduit immédiatement d'après la définition 1.5.2. Remarquons maintenant que l'identité précédente impose que pour tout $h > 0$,

$$\sigma(q(x, h\xi)^w) = \sigma((q \circ \chi)(x, h\xi)^w),$$

et que si $z \notin \sigma(q(x, h\xi)^w)$,

$$((q \circ \chi)(x, h\xi)^w - z)^{-1} = U_h^{-1}U^{-1}U_h (q(x, h\xi)^w - z)^{-1}U_h^{-1}UU_h,$$

ce qui comme l'opérateur $U_h^{-1}U^{-1}U_h$ est une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R}^n)$ induit que,

$$\|((q \circ \chi)(x, h\xi)^w - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \|(q(x, h\xi)^w - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))},$$

et démontre la seconde identité de (2.1.3). Cette propriété d'*invariance symplectique* des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques et des ensembles pseudo-spectraux d'injectivité semi-classiques va nous permettre de réduire l'étude de certaines sous-classes des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques à celle de quelques opérateurs modèles.

2.1.c.1 Formes normales pour les formes quadratiques positives.

Les deux résultats suivants sont extraits du livre de L.Hörmander [12] (Lemme 18.6.4 et Théorème 21.5.3).

Proposition 2.1.7. *Soit q_0 une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^{2n} où $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors une transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^{2n} telle que,*

$$q_0(\chi(x, \xi)) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (x_j^2 + \xi_j^2),$$

avec $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

Dans le cas où la forme quadratique q_0 est seulement supposée positive, on a le résultat suivant.

Proposition 2.1.8. *Soit q_0 une forme quadratique définie sur \mathbb{R}^{2n} où $n \in \mathbb{N}^*$. Si q_0 est une forme quadratique positive, on peut trouver une transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^{2n} telle que,*

$$q_0(\chi(x, \xi)) = \sum_{j=1}^k \lambda_j (x_j^2 + \xi_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2,$$

avec $k, l \in \mathbb{N}$ et $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$.

Cette dernière proposition va nous permettre de donner une première localisation des régions où peuvent se développer les instabilités spectrales d'un opérateur différentiel quadratique elliptique. La proposition suivante montre que ces régions où la résolvante d'un opérateur différentiel quadratique elliptique peut prendre en norme une taille significative, sont nécessairement contenues dans l'image numérique $\Sigma(q)$ de son symbole. En effet en dehors de l'image numérique $\Sigma(q)$, on a l'excellent contrôle de la norme de la résolvante annoncé à la proposition 1.6.1 du chapitre précédent.

Proposition 2.1.9. *Considérons q une forme quadratique elliptique à valeurs complexes définie sur \mathbb{R}^{2n} où $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout z appartenant à l'ensemble complémentaire de l'image numérique $\Sigma(q)$, on a l'estimation suivante de la norme de la résolvante,*

$$\|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q))}. \quad (2.1.4)$$

Preuve. Si $\Sigma(q) = \mathbb{C}$, il n'y a rien à démontrer. On suppose donc que l'image numérique est distincte du plan complexe. D'après la description donnée précédemment des formes que peuvent prendre les images numériques des formes quadratiques elliptiques, l'image numérique $\Sigma(q)$ est donc nécessairement un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture angulaire strictement plus petite que π . Considérons $z \notin \Sigma(q)$ et notons z_0 sa projection sur le convexe

2.1. Quelques préliminaires.

fermé non vide $\Sigma(q)$. Ce point z_0 appartient à la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q)$ et on peut choisir $z_1 \in \mathbb{C}^*$, $|z_1| = 1$ tel que,

$$z_1 z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < 0\}, \quad \Sigma(z_1 q) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\} \text{ et} \\ d(z, \Sigma(q)) = d(z_1 z, i\mathbb{R}). \quad (2.1.5)$$

Un calcul direct montre ensuite que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi)^w u - z_1 z u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = d(z_1 z, i\mathbb{R}) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ + ([\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.1.6)$$

puisque les opérateurs $[\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w$ et $i[\operatorname{Im}(z_1 q(x, \xi))]^w$ sont respectivement formellement auto-adjoint et anti-auto-adjoint. On utilise ensuite que le deuxième terme du membre de droite de l'expression précédente est positif. En effet, comme d'après (2.1.5) la forme quadratique $\operatorname{Re}(z_1 q)$ est positive, le théorème 2.1.6 et la proposition 2.1.8 permettent de trouver un opérateur métaplectique U vérifiant,

$$[\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w = U^{-1} \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j (D_{x_j}^2 + x_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2 \right) U,$$

où $k, l \in \mathbb{N}$ et $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$. On obtient ainsi en utilisant le caractère unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ de l'opérateur U que,

$$([\operatorname{Re}(z_1 q(x, \xi))]^w u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^k \lambda_j (\|D_{x_j} U u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|x_j U u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \\ + \sum_{j=k+1}^{k+l} \|x_j U u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq 0.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.1.5) permettent ensuite d'obtenir à partir de l'identité (2.1.6) que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$d(z, \Sigma(q)) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq |z_1| \|q(x, \xi)^w u - z u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.1.7)$$

En utilisant finalement la densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace B , le fait que $|z_1| = 1$ et que d'après le théorème 2.1.5 et la remarque qui lui fait immédiatement suite,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) \subset \Sigma(q),$$

on déduit de l'estimation (2.1.7) l'estimation (2.1.4) sur la norme de la résolvante de l'opérateur $q(x, \xi)^w$. \square

2.1.c.2 Formes normales pour les formes quadratiques elliptiques en dimension 1.

La proposition suivante montre qu'à une réduction symplectique linéaire réelle près, il y a seulement trois types de symboles quadratiques elliptiques en dimension $n = 1$.

2.1. Quelques préliminaires.

Proposition 2.1.10. *Considérons $q : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes en dimension 1. Il existe alors une transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^2 telle que le symbole $q \circ \chi$ soit de l'un des trois types suivants :*

- (i) $\alpha(\xi^2 + e^{i\theta}x^2)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $0 \leq \theta < \pi$.
- (ii) $\alpha(\xi + ix)(\xi + \eta x)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\eta \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}\eta > 0$.
- (iii) $\alpha(\xi - ix)(\xi + \eta x)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\eta \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Im}\eta < 0$.

De plus, si le symbole $q \circ \chi$ est du type (ii) ou (iii) alors l'image numérique de la forme quadratique q est égale au plan complexe, $\Sigma(q) = \mathbb{C}$.

Preuve. Considérons $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes. Etudions tout d'abord le cas où l'image numérique $\Sigma(q)$ est distincte du plan complexe. Le lemme 2.1.1 montre que quitte à multiplier la forme quadratique q par un nombre complexe non nul, on peut supposer que la forme quadratique $\text{Re}q$ est définie positive. On peut ensuite réduire via une transformation symplectique linéaire donnée par la proposition 2.1.7 la forme quadratique $\text{Re}q$ à la forme normale,

$$\text{Re}q(x, \xi) = \lambda(\xi^2 + x^2),$$

avec $\lambda > 0$. On en déduit alors que l'on peut trouver des réels a, b et c tels que,

$$q(x, \xi) = \lambda(x^2 + \xi^2 + i(ax^2 + 2bx\xi + c\xi^2)).$$

On choisit ensuite une matrice orthogonale $P \in O(2, \mathbb{R})$ diagonalisant la matrice symétrique réelle associée à la forme quadratique $ax^2 + 2bx\xi + c\xi^2$,

$$P^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dans le cas où $P \in O(2, \mathbb{R}) \setminus SO(2, \mathbb{R})$, on a

$$\tilde{P}^{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

si σ_0 désigne la matrice de déterminant -1 ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

et $\tilde{P} = P\sigma_0$. On en déduit que l'on peut toujours diagonaliser la matrice symétrique réelle associée à la forme quadratique $\lambda^{-1}\text{Im}q$ par une conjugaison par un élément de $SO(2, \mathbb{R})$. Comme en dimension 1, le groupe linéaire symplectique coïncide avec le groupe $SL(2, \mathbb{R})$, on peut donc supposer après une transformation symplectique linéaire de \mathbb{R}^2 que l'on a,

$$q(x, \xi) = \lambda(x^2 + \xi^2 + i(\gamma_1 x^2 + \gamma_2 \xi^2)) = \alpha(\xi^2 + r e^{i\theta} x^2),$$

avec $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi[$. En effet, l'ellipticité de la forme quadratique q impose que $\theta \not\equiv \pi[2\pi]$. Enfin en utilisant pour terminer cette

2.1. Quelques préliminaires.

réduction la transformation symplectique linéaire $(x, \xi) \mapsto (r^{-1/4}x, r^{1/4}\xi)$, on obtient le symbole du type (i),

$$\alpha r^{1/2}(\xi^2 + e^{i\theta}x^2),$$

si $0 \leq \theta < \pi$. Dans le cas où $-\pi < \theta < 0$, il suffit d'effectuer en plus la transformation symplectique linéaire réelle $(x, \xi) \mapsto (\xi, -x)$ pour obtenir un symbole de type (i),

$$\alpha r^{\frac{1}{2}} e^{i\theta}(\xi^2 + e^{-i\theta}x^2).$$

Supposons maintenant que l'image numérique $\Sigma(q)$ soit égale au plan complexe \mathbb{C} . Comme nous sommes en dimension 1, on peut factoriser le symbole q sur \mathbb{C} si on considère ce symbole comme un polynôme de degré 2 en la variable ξ . Il existe donc vu la dépendance en la variable x des coefficients de ce polynôme des nombres complexes λ_1, λ_2 et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que,

$$q(x, \xi) = \alpha(\xi - \lambda_1 x)(\xi - \lambda_2 x).$$

L'hypothèse d'ellipticité de la forme quadratique q impose les conditions,

$$\text{Im}\lambda_j \neq 0,$$

pour $j = 1, 2$. Quitte à effectuer la transformation symplectique linéaire,

$$(x, \xi) \mapsto (x, \xi + \text{Re}\lambda_1 x),$$

on peut supposer que,

$$q(x, \xi) = \alpha(\xi - irx)(\xi + bx), \quad (2.1.8)$$

avec $r \in \mathbb{R}^*$ et $\text{Im}b \neq 0$. Nous allons maintenant vérifier que la condition $\Sigma(q) = \mathbb{C}$ impose que $r\text{Im}b < 0$. Comme

$$(\xi - irx)(\xi + bx) = \xi^2 + (b - ir)x\xi - irbx^2,$$

la condition $\Sigma(q) = \mathbb{C}$ impose que pour tout $(v, w) \in \mathbb{R}^2$, il existe une solution $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2$ du système suivant,

$$\begin{cases} \xi^2 + \text{Re}b x\xi + r\text{Im}b x^2 = v \\ x\xi(\text{Im}b - r) - r\text{Re}b x^2 = w. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Constatons tout d'abord d'après la seconde équation de (2.1.9) que ceci n'est pas possible si $\text{Im}b = r$. On en déduit donc que $\text{Im}b \neq r$. Supposons maintenant que w soit non nul, on déduit de la seconde équation de (2.1.9) que nécessairement $x_0 \neq 0$ et,

$$\xi_0 = \frac{w + r\text{Re}b x_0^2}{(\text{Im}b - r)x_0}. \quad (2.1.10)$$

Considérons le cas où $v = 0$. En utilisant (2.1.10) et la première équation de (2.1.9), on obtient que,

$$(w + r\text{Re}b x_0^2)^2 + \text{Re}b(\text{Im}b - r)x_0^2(w + r\text{Re}b x_0^2) + r\text{Im}b(\text{Im}b - r)^2 x_0^4 = 0.$$

2.2. Cas de la dimension 1.

On peut réécrire cette équation sous la forme $f_w(X_0) = 0$ si on pose $X_0 = x_0^2$ et,

$$f_w(X) = r\text{Im}b((\text{Re}b)^2 + (\text{Im}b - r)^2)X^2 + w\text{Re}b(\text{Im}b + r)X + w^2. \quad (2.1.11)$$

La condition $\Sigma(q) = \mathbb{C}$ impose donc que pour tout $w \neq 0$, il existe une solution positive X_0 de l'équation $f_w(X_0) = 0$. La quantité $r\text{Im}b$ est non nulle par hypothèse. Supposons que $r\text{Im}b > 0$. Dans ce cas, comme

$$f'_w(X) = 2r\text{Im}b((\text{Re}b)^2 + (\text{Im}b - r)^2)X + w\text{Re}b(\text{Im}b + r), \quad (2.1.12)$$

et,

$$2r\text{Im}b((\text{Re}b)^2 + (\text{Im}b - r)^2) > 0,$$

puisque $\text{Im}b \neq r$, on a

$$\forall X \in \mathbb{R}_+, f_w(X) \geq f_w(0) = w^2 > 0, \quad (2.1.13)$$

si $w \neq 0$ et,

$$-\frac{w\text{Re}b(\text{Im}b + r)}{2r\text{Im}b((\text{Re}b)^2 + (\text{Im}b - r)^2)} \leq 0.$$

L'estimation (2.1.13) montre donc que si $r\text{Im}b > 0$ l'équation $f_w(X) = 0$ ne possède pas de solution positive pour toute valeur du paramètre $w \neq 0$. Ceci démontre que la condition $\Sigma(q) = \mathbb{C}$ induit la condition $r\text{Im}b < 0$. Enfin, en utilisant la transformation symplectique linéaire $(x, \xi) \mapsto (|r|^{-1/2}x, |r|^{1/2}\xi)$, on obtient les modèles (ii) et (iii),

$$\alpha|r|(\xi + ix)(\xi + \eta x) \text{ avec } \text{Im}\eta > 0 \text{ et } \alpha|r|(\xi - ix)(\xi + \eta x) \text{ avec } \text{Im}\eta < 0.$$

si on note $\eta = |r|^{-1}b$. Il est facile de vérifier que l'image numérique des modèles (ii) et (iii) est égale au plan complexe \mathbb{C} . Ce fait est une conséquence du résultat plus précis que propose la proposition 2.2.3 de la section suivante et dont la démonstration est indépendante de ce qui suit. \square

2.2 Etude de la stabilité spectrale des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension 1.

On étudie dans cette deuxième section les ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels $q(x, \xi)^w$ ainsi que les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques et pseudo-spectraux d'injectivité semi-classiques des opérateurs semi-classiques $(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}$ associés. La dimension 1 présente certaines singularités par rapport aux autres dimensions. En effet, on a déjà constaté au lemme 2.1.1 et à la proposition 2.1.10 qu'en dimension 1, l'image numérique des formes quadratiques elliptiques pouvait être égale au plan complexe ce qui est exclu en dimension supérieure. La proposition 2.1.3 montre également que l'indice de Fredholm de ces opérateurs différentiels quadratiques elliptiques n'est pas toujours nul. Nous allons voir que l'on peut distinguer en dimension 1 exactement trois classes d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques aux propriétés spectrales distinctes et que cette classification se caractérise aisément à partir de propriétés simples, relatives aux symboles de Weyl de ces opérateurs.

2.2.a Classification des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels.

Considérons $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique unidimensionnel défini en quantification de Weyl par $q : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes.

Définition 2.2.1. *Sous ces hypothèses, on dit que l'opérateur $q(x, \xi)^w$ est un opérateur :*

- de **type 1** si l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à son symbole q , est un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture strictement plus petite que π .
- de **type 2** si l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à son symbole q , est égale au plan complexe \mathbb{C} et que le symbole $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}$ défini par le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de son symbole q , est une forme quadratique définie positive.
- de **type 3** si l'image numérique $\Sigma(q)$ associée à son symbole q , est égale au plan complexe \mathbb{C} et que le symbole $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}$ défini par le crochet de Poisson de la partie réelle et de la partie imaginaire de son symbole q , est une forme quadratique définie négative.

La définition précédente permet de distinguer trois types distincts d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques qui recouvrent toute la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels. En effet, en utilisant l'invariance symplectique de l'image numérique et du crochet de Poisson i.e. que pour toute transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^2 , on a

$$\Sigma(q \circ \chi) = \Sigma(q) \text{ et } \{\text{Re}(q \circ \chi), \text{Im}(q \circ \chi)\} = \{\text{Re}q, \text{Im}q\} \circ \chi,$$

on peut au regard de la proposition 2.1.10 réduire le symbole q via une transformation symplectique linéaire réelle à l'une des trois formes normales (i), (ii) ou (iii) définies dans la proposition 2.1.10. Il s'ensuit que les opérateurs dont les symboles se réduisent à la forme normale (i) sont de type 1 et que ceux dont les symboles se réduisent à la forme normale (ii), respectivement à la forme normale (iii) sont de type 2, respectivement de type 3. En effet, si on considère les symboles,

$$q_1(x, \xi) = \alpha_1(\xi + ix)(\xi + \eta_1 x) \text{ et } q_2(x, \xi) = \alpha_2(\xi - ix)(\xi + \eta_2 x),$$

avec $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}^*$, $\eta_1 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\eta_1 > 0$ et $\eta_2 \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\eta_2 < 0$, un calcul explicite des crochets de Poisson montre que,

$$\begin{aligned} & \{\text{Re}q_1(x, \xi), \text{Im}q_1(x, \xi)\} \\ &= 2|\alpha_1|^2(\text{Im}\eta_1 \xi^2 + (\xi + \text{Re}\eta_1 x)^2 + \text{Im}\eta_1(1 + \text{Im}\eta_1)x^2) \geq 0, \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} & \{\text{Re}q_2(x, \xi), \text{Im}q_2(x, \xi)\} \\ &= 2|\alpha_2|^2(\text{Im}\eta_2 \xi^2 - (\xi + \text{Re}\eta_2 x)^2 + \text{Im}\eta_2(1 - \text{Im}\eta_2)x^2) \leq 0. \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2. *Considérons $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique unidimensionnel. Sous ces hypothèses, l'opérateur,*

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

est un opérateur de Fredholm d'indice respectivement 0, -2 ou 2 s'il est respectivement de type 1, 2 ou 3.

Preuve. Remarquons tout d'abord que la valeur de l'indice de l'opérateur de Fredholm $q(x, \xi)^w$ est invariant par une réduction symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^2 i.e.,

$$\text{ind}((q \circ \chi)(x, \xi)^w) = \text{ind}(q(x, \xi)^w).$$

En effet, ceci est une simple conséquence de la propriété d'invariance symplectique de la quantification de Weyl rappelée au théorème 2.1.6 et du fait que les opérateurs métaplectiques sont des automorphismes des espaces B et $L^2(\mathbb{R})$. Il suffit donc pour démontrer cette proposition de calculer l'indice des trois opérateurs modèles définis en quantification de Weyl par les trois formes normales (i), (ii) et (iii) de la proposition 2.1.10. En utilisant maintenant, comme le fait L.Hörmander à la suite du lemme 3.1 de [11], l'invariance de l'indice de Fredholm des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques par déformation continue de leurs symboles préservant leurs ellipticités, on obtient que l'indice de Fredholm des opérateurs de type 1, 2 et 3, est respectivement égal à l'indice des opérateurs,

$$x^2 - \frac{d^2}{dx^2}, \left(x - \frac{d}{dx}\right)^2 \text{ et } \left(x + \frac{d}{dx}\right)^2.$$

Le calcul des indices des trois opérateurs précédents réalisé dans [11] à la suite du lemme 3.1 donne alors le résultat annoncé par la proposition 2.2.2. \square

Résumons ces premiers résultats dans la proposition suivante.

Proposition 2.2.3. *Considérons $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique défini en quantification de Weyl par la forme quadratique elliptique à valeurs complexes $q : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$.*

• *Si $q(x, \xi)^w$ est un opérateur de **type 1**, il existe alors $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\theta \in [0, \pi[$, χ une transformation symplectique linéaire de \mathbb{R}^2 et pour tout $h > 0$, U_h un opérateur métaplectique associé à cette transformation symplectique tels que,*

$$(q \circ \chi)(x, \xi) = \alpha(\xi^2 + e^{i\theta} x^2) \text{ et } \forall h > 0, q(x, h\xi)^w = \alpha U_h((hD_x)^2 + e^{i\theta} x^2) U_h^{-1}.$$

• *Si $q(x, \xi)^w$ est un opérateur de **type 2** alors l'image numérique $\Sigma(q)$ est égale au plan complexe \mathbb{C} et,*

$$\forall z \in \mathbb{C}^*, \exists (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \\ \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : q(x, \xi) = z\} = \{(x_0, \xi_0), (-x_0, -\xi_0)\}. \quad (2.2.1)$$

De plus, on peut trouver une transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^2 , $\alpha \in \mathbb{C}^$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\eta > 0$ tels que $(q \circ \chi)(x, \xi) = \alpha(\xi + ix)(\xi + \eta x)$.*

• *Si $q(x, \xi)^w$ est un opérateur de **type 3** alors l'image numérique $\Sigma(q)$ est égale*

2.2. Cas de la dimension 1.

au plan complexe \mathbb{C} et l'identité (2.2.1) est vérifiée. De plus, on peut trouver une transformation symplectique linéaire χ de \mathbb{R}^2 , $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\eta < 0$ tels que $(q \circ \chi)(x, \xi) = \alpha(\xi - ix)(\xi + \eta x)$.

Preuve. Les résultats de cette proposition ont été démontrés dans les lignes précédentes. Rappelons que nous avons établi lors de la démonstration de (2.1.3) que si $q : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ désigne une forme quadratique elliptique à valeurs complexes et χ une transformation symplectique linéaire de \mathbb{R}^2 , il existe pour tout $h > 0$ un opérateur métaplectique U_h tel que,

$$\forall h > 0, (q \circ \chi)(x, h\xi)^w = U_h^{-1}q(x, h\xi)^w U_h.$$

Il suffit seulement de vérifier en plus que si la forme quadratique q est égale à la forme normale (ii) ou à la forme normale (iii) de la proposition 2.1.10 l'image numérique $\Sigma(q)$ est égale au plan complexe \mathbb{C} et que l'identité (2.2.1) est vérifiée. Remarquons tout d'abord que l'on a toujours, $0 = q(0, 0) \in \Sigma(q)$. Considérons maintenant le symbole,

$$q(x, \xi) = (\xi + i\varepsilon x)(\xi + \varepsilon\eta x),$$

avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, $\eta \in \mathbb{C}$, $\text{Im}\eta > 0$ et vérifions que l'identité (2.2.1) est bien vérifiée pour ce symbole. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'équation $q(x, \xi) = z$ si $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$ est équivalente au système,

$$\begin{cases} \xi^2 + \varepsilon \text{Re}\eta x\xi - \text{Im}\eta x^2 = \text{Re}z \\ \varepsilon(1 + \text{Im}\eta)x\xi + \text{Re}\eta x^2 = \text{Im}z. \end{cases}$$

On distingue deux cas.

Cas 1. On suppose que $\text{Im}z \neq 0$. Dans ce cas, le système précédent est équivalent au système,

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ \xi = (\text{Im}z - \text{Re}\eta x^2)[\varepsilon(1 + \text{Im}\eta)x]^{-1} \\ -\text{Im}\eta((\text{Re}\eta)^2 + (1 + \text{Im}\eta)^2)x^4 + (\text{Im}z \text{Re}\eta(\text{Im}\eta - 1) - \text{Re}z(1 + \text{Im}\eta)^2)x^2 \\ + (\text{Im}z)^2 = 0. \end{cases}$$

Comme la fonction,

$$f(X) = -\text{Im}\eta((\text{Re}\eta)^2 + (1 + \text{Im}\eta)^2)X^2 + (\text{Im}z \text{Re}\eta(\text{Im}\eta - 1) - \text{Re}z(1 + \text{Im}\eta)^2)X + (\text{Im}z)^2,$$

prend une valeur strictement positive en 0, $f(0) = (\text{Im}z)^2 > 0$ et que le coefficient de son terme de plus haut degré est par hypothèse strictement négatif, il s'ensuit qu'il existe une unique solution X_0 positive de l'équation $f(X) = 0$ qui est de plus nécessairement strictement positive. On en déduit alors que,

$$q(x, \xi) = z \iff (x, \xi) \in \{(x_0, \xi_0), (-x_0, -\xi_0)\},$$

si on note,

$$x_0 = X_0^{1/2} > 0 \text{ et } \xi_0 = (\text{Im}z - \text{Re}\eta X_0)[\varepsilon(1 + \text{Im}\eta)X_0^{1/2}]^{-1}.$$

2.2. Cas de la dimension 1.

Cas 2. On suppose maintenant que $\text{Im}z = 0$ ce qui impose que $\text{Re}z \neq 0$ car $z \in \mathbb{C}^*$. Il est alors facile de vérifier dans ce cas que,

$$q(x, \xi) = z \iff (x, \xi) \in \{(x_0, \xi_0), (-x_0, -\xi_0)\},$$

où,

$$x_0 = 0 \text{ et } \xi_0 = (\text{Re}z)^{1/2} > 0 \text{ si } \text{Re}z > 0,$$

et où,

$$\begin{aligned} x_0 &= \left(-\text{Re}z(1 + \text{Im}\eta)^2 [\text{Im}\eta((\text{Re}\eta)^2 + (1 + \text{Im}\eta)^2)]^{-1} \right)^{1/2} > 0 \text{ et} \\ \xi_0 &= -\text{Re}\eta x_0 [\varepsilon(1 + \text{Im}\eta)]^{-1} \text{ si } \text{Re}z < 0. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la proposition 2.2.3. \square

2.2.b Etude de la stabilité spectrale des opérateurs de type 1.

Nous allons dans ce paragraphe donner une preuve du théorème 1.6.3 énoncé au chapitre précédent. On sait déjà au regard de ce qui précède (Proposition 2.2.2) que les opérateurs de type 1 (voir la définition 2.2.1) qui sont les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$ en dimension 1 dont l'image numérique $\Sigma(q)$ est un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture strictement plus petite que π , sont des opérateurs de Fredholm d'indice 0. Cette propriété induit d'après notre remarque qui fait suite aux définitions des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques à la section 1.5 du chapitre précédent et d'après le résultat de la proposition 2.1.3 que les deux notions de pseudo-spectres semi-classiques et de pseudo-spectres d'injectivité semi-classiques coïncident pour les opérateurs de type 1 semi-classiques associés,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w).$$

On sait également d'après le paragraphe précédent que le spectre de ces opérateurs $q(x, \xi)^w$ de type 1 est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités finies et qu'il possède la structure suivante,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \{(2k + 1)(-i\lambda) : k \in \mathbb{N}\},$$

si on désigne par λ l'unique valeur propre de l'application hamiltonienne F associée à la forme quadratique q qui vérifie $-i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}$. Ce résultat est une conséquence tout d'abord du théorème 2.1.5 et, ensuite du lemme 21.5.2 et du théorème 21.5.4 de [12] qui montrent que si λ est une valeur propre de F alors $-\lambda$ est également une valeur propre de F et que soit $i\lambda \in \Sigma(q)$, soit $-i\lambda \in \Sigma(q)$. L'hypothèse d'ellipticité de la forme quadratique q impose que l'application hamiltonienne F ne possède pas de valeur propre nulle car d'après le théorème 21.5.4 de [12] le noyau complexe $\text{Ker}F$ est engendré par ses éléments réels et que si $X_0 \in \mathbb{R}^2$, $X_0 \neq 0$ vérifie $FX_0 = 0$, on a

$$q(X_0) = \sigma(X_0, FX_0) = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse d'ellipticité. Le fait supplémentaire que F soit ici un endomorphisme sur un espace de dimension complexe 2 assure alors qu'il

2.2. Cas de la dimension 1.

existe bien une unique valeur propre λ de F vérifiant $-i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}$ et dont le sous-espace vectoriel caractéristique complexe associé est de dimension 1.

Considérons maintenant $q(x, \xi)^w$ un opérateur de type 1. La proposition 2.2.3 montre que l'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{C}^*$, $\theta \in [0, \pi[$, χ une transformation symplectique linéaire de \mathbb{R}^2 et pour tout $h > 0$, U_h un opérateur métaplectique associé à cette transformation symplectique tels que,

$$(q \circ \chi)(x, \xi) = \alpha(\xi^2 + e^{i\theta}x^2), \quad (2.2.2)$$

et,

$$\forall h > 0, q(x, h\xi)^w = \alpha U_h((hD_x)^2 + e^{i\theta}x^2)U_h^{-1}. \quad (2.2.3)$$

Etudions tout d'abord le cas où le paramètre θ est nul. Dans ce cas, l'image numérique $\Sigma(q)$ est d'après (2.2.2) une demi-droite fermée de sommet 0. On constate aussi au regard de la proposition 2.1.4 que pour $h > 0$ l'opérateur,

$$q(x, h\xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

est un opérateur normal puisque d'après la propriété d'invariance symplectique du crochet de Poisson, on a

$$\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\} = \{\operatorname{Re}(\alpha(\xi^2 + x^2)), \operatorname{Im}(\alpha(\xi^2 + x^2))\} \circ \chi^{-1},$$

et que,

$$\{\operatorname{Re}(\alpha(\xi^2 + x^2)), \operatorname{Im}(\alpha(\xi^2 + x^2))\} = |\alpha|^2 \{\operatorname{Re}(\xi^2 + x^2), \operatorname{Im}(\xi^2 + x^2)\} = 0.$$

On peut alors utiliser l'identité classique (1.1.1) du chapitre précédent qui donne une expression de la norme de la résolvante des opérateurs normaux pour obtenir que,

$$\forall z \notin \sigma(q(x, \xi)^w), \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(q(x, \xi)^w))}.$$

Cette identité caractérise la stabilité du spectre de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ sous de petites perturbations et induit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\sigma_\varepsilon(q(x, \xi)^w) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(q(x, \xi)^w)) \leq \varepsilon\}. \quad (2.2.4)$$

Il est aussi assez facile de donner une description des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques même si dans ce cas particulier une étude semi-classique ne livre pas d'informations plus précises que (2.2.4). D'après l'invariance symplectique (2.1.3) de ces ensembles, il suffit de considérer le cas où $q(x, \xi) = \alpha(\xi^2 + x^2)$. L'opérateur $q(x, h\xi)^w$ est alors à une similitude près simplement l'oscillateur harmonique auto-adjoint. Le fait qu'il n'y ait pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 0 sur l'ensemble complémentaire de l'image numérique,

$$\Sigma(q)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c,$$

est une conséquence immédiate de l'estimation (2.1.4) de la proposition 2.1.9. Comme le spectre de l'opérateur $q(x, h\xi)^w$ est composé de valeurs propres de multiplicité un,

$$\{\alpha h(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\},$$

2.2. Cas de la dimension 1.

il y a du pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'ensemble $\Sigma(q) \setminus \{0\}$. En effet pour tout $z \in \Sigma(q) \setminus \{0\} = \alpha\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une fonction propre $\varphi_n \in B$ telle que,

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \text{ et } q(x, h_n\xi)^w \varphi_n - z\varphi_n = 0 \text{ si } h_n = \frac{z}{\alpha(2n+1)} > 0,$$

ce qui démontre la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini et de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur l'ensemble,

$$\Sigma(q) \setminus \{0\}.$$

Il reste pour finir à démontrer qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 en 0. Ceci induira alors que le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de cet opérateur est exactement l'image numérique privée de l'origine $\Sigma(q) \setminus \{0\}$ et permettra de terminer la preuve du théorème 1.6.3 dans le cas où le paramètre θ est nul. Ce résultat d'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 en 0 est une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui montre tout d'abord que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |\alpha| \|\alpha((hD_x)^2 + x^2)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ \geq (\alpha((hD_x)^2 + x^2)u, \alpha u)_{L^2(\mathbb{R})} = |\alpha|^2 (\|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2), \end{aligned}$$

puis toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, comme

$$\begin{aligned} \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\geq 2\|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq 2\operatorname{Re}(hD_x u, i x u)_{L^2(\mathbb{R})} = ([hD_x, i x]u, u)_{L^2(\mathbb{R})} = h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

si on note $[hD_x, i x]$ le commutateur des opérateurs hD_x et $i x$, on en déduit l'estimation,

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|\alpha((hD_x)^2 + x^2)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq |\alpha|h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

qui s'étend par densité à l'espace B et démontre que,

$$0 \in (\lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c = (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

Passons maintenant au second cas où $\theta \in]0, \pi[$ qui est le cas le plus intéressant. L'image numérique $\Sigma(q)$ est alors cette fois d'après (2.2.2) un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture θ . On peut vérifier que si $h > 0$ l'opérateur,

$$q(x, h\xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}),$$

n'est pas normal. En effet, c'est une conséquence de la proposition 2.1.4 puisque la forme quadratique,

$$\begin{aligned} \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\} &= \{\operatorname{Re}(\alpha(\xi^2 + e^{i\theta}x^2)), \operatorname{Im}(\alpha(\xi^2 + e^{i\theta}x^2))\} \circ \chi^{-1} \\ &= |\alpha|^2 \{\xi^2 + \cos\theta x^2, \sin\theta x^2\} \circ \chi^{-1} = 4\sin\theta |\alpha|^2 (\xi x) \circ \chi^{-1}, \end{aligned}$$

n'est pas identiquement nulle. En invoquant une nouvelle fois l'invariance symplectique (2.1.3) des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques, on peut pour terminer la démonstration du théorème 1.6.3 supposer que,

$$q(x, \xi) = \alpha(\xi^2 + e^{i\theta} x^2).$$

Enfin après une similitude, on peut réduire notre étude au cas de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint,

$$q(x, \xi)^w = D_x^2 + e^{i\theta} x^2.$$

L'étude complète des ensembles pseudo-spectraux de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique a été réalisée dans l'article [22] dont le contenu sera repris dans le chapitre 4 de cette thèse. On renvoie donc le lecteur à ce quatrième chapitre pour trouver une démonstration des résultats suivants,

$$\begin{aligned} \Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \dot{\Sigma}(q), \quad \Sigma(q)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c, \quad 0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c, \\ \partial\Sigma(q) \setminus \{0\} \subset (\Lambda_{2/3}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c, \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

ce qui termine notre démonstration du théorème 1.6.3. Nous verrons dans ce chapitre 4 que la dernière inclusion de (2.2.5) permet de donner une démonstration de la conjecture de Boulton et d'expliquer les indices particuliers qui y apparaissent. Mentionnons que l'on peut aussi démontrer cette dernière inclusion de (2.2.5) en invoquant le résultat très général pour les opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques de N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski contenu dans le théorème 1.4 de [7]. Ce théorème 1.6.3 montre tout d'abord comme dans le cas de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint que les hautes énergies du spectre des opérateurs de type 1 *non normaux* sont très instables sous de petites perturbations puisque le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de ces opérateurs remplit tout l'intérieur de leurs images numériques. Il montre également que la forme des ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs de type 1 classiques $q(x, \xi)^w$ *non normaux* est décrite à une similitude près par le résultat énoncé dans la conjecture de Boulton. Ce résultat est toujours comme dans le cas de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint optimal au sens où une propriété analogue à une similitude près de la propriété (1.2.1) est d'après (2.2.3) vérifiée. On peut donc résumer les résultats de cette première partie de notre étude en affirmant que dans la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels de type 1 la propriété de stabilité spectrale est exactement équivalente à la propriété de normalité, et que si cette propriété de normalité est violée, il se développe de très fortes instabilités spectrales sous de petites perturbations pour les hautes énergies de ces opérateurs. De plus, la géométrie des zones de l'ensemble résolvant où se développent de telles instabilités est à une similitude près exactement celle décrite par la conjecture de Boulton dans le cas de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Rappelons encore une fois que nous démontrerons cette conjecture au chapitre 4 de ce manuscrit. Nous allons voir un peu plus tard dans ce chapitre que la condition nécessaire et suffisante de stabilité spectrale que nous venons de dégager pour les opérateurs de type 1 se généralise à l'ensemble des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en

dimension supérieure ou égale à 2. Dans l'immédiat, nous allons terminer l'étude des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels en prêtant notre attention aux deux classes un peu singulières que sont celles des opérateurs de type 2 et des opérateurs de type 3.

2.2.c Etude du pseudo-spectre des opérateurs de type 2.

Nous allons dans ce paragraphe étudier les opérateurs de type 2 en donnant une preuve du théorème 1.6.4 du chapitre précédent. Ces opérateurs de type 2 qui sont les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels $q(x, \xi)^w$ dont les images numériques $\Sigma(q)$ sont égales au plan complexe \mathbb{C} et dont les formes quadratiques $\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}$ associées à leurs symboles q sont définies positives, forment une sous-classe singulière de la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Commençons par remarquer que d'après la proposition 2.2.2, l'indice de Fredholm d'un opérateur de type 2, $q(x, \xi)^w$ est égal à -2. Comme de plus d'après la proposition 2.1.3, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ind}(q(x, \xi)^w + z) = \operatorname{ind}(q(x, \xi)^w) = -2,$$

on en déduit que le spectre d'un opérateur $q(x, h\xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ de type 2 est égal au plan complexe \mathbb{C} ,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Ceci induit immédiatement que les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques des opérateurs semi-classiques $q(x, h\xi)^w$ de type 2 sont tous égaux au plan complexe \mathbb{C} ,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \Lambda_\mu^{\operatorname{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Nous allons voir par contre que le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini des opérateurs $(q(x, h\xi))_{0 < h \leq 1}$ de type 2 se réduit à l'ensemble vide. On s'attachera en démontrant ce résultat à préciser les pertes de puissances de h qui caractérisent aux différents points du plan complexe l'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini. Au regard de la proposition 2.2.3 et de l'invariance symplectique (2.1.3) des ensembles pseudo-spectraux d'injectivité semi-classiques, l'étude des opérateurs de type 2 se réduit à celle de l'opérateur défini en quantification de Weyl par le symbole quadratique elliptique,

$$q(x, \xi) = \alpha(\xi + ix)(\xi + \eta x),$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\eta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\eta > 0$. Commençons par démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.2.4. *Considérons $q(x, \xi) = \alpha(\xi + ix)(\xi + \eta x)$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\eta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\eta > 0$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq 2^{\frac{1}{2}} h |\alpha| (\operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Preuve. Considérons $z \in \mathbb{C}$ et notons p le symbole suivant,

$$p(x, \xi) := q(x, \xi) - z.$$

2.2. Cas de la dimension 1.

On obtient en développant le carré de la norme $L^2(\mathbb{R})$ de la quantité suivante que,

$$\|p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq 2\operatorname{Re}(\operatorname{Rep}(x, h\xi)^w u, i\operatorname{Imp}(x, h\xi)^w u)_{L^2(\mathbb{R})},$$

puis en utilisant que les opérateurs $\operatorname{Rep}(x, h\xi)^w$ et $i\operatorname{Imp}(x, h\xi)^w$ sont respectivement formellement auto-adjoint et formellement anti-auto-adjoint, on obtient que,

$$\begin{aligned} \|p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \|\operatorname{Rep}(x, h\xi)^w u + i\operatorname{Imp}(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\geq ([\operatorname{Rep}(x, h\xi)^w, i\operatorname{Imp}(x, h\xi)^w]u, u)_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Comme les symboles Req et Imq sont des formes quadratiques, on a déjà vu lors de la démonstration de la proposition 2.1.4 que la formule de composition en calcul de Weyl donnée par le théorème 18.5.4 de [12] assure que,

$$\begin{aligned} [\operatorname{Rep}(x, h\xi)^w, i\operatorname{Imp}(x, h\xi)^w] &= [\operatorname{Req}(x, h\xi)^w, i\operatorname{Imq}(x, h\xi)^w] = \\ &= \frac{1}{i} \{\operatorname{Req}(x, h\xi), i\operatorname{Imq}(x, h\xi)\}^w = \{\operatorname{Req}(x, h\xi), \operatorname{Imq}(x, h\xi)\}^w. \end{aligned}$$

Un calcul explicite du crochet de Poisson précédent montre que,

$$\begin{aligned} \{\operatorname{Req}(x, h\xi), \operatorname{Imq}(x, h\xi)\} &= 2h|\alpha|^2 (\operatorname{Im}\eta(h\xi)^2 + \operatorname{Im}\eta(1 + \operatorname{Im}\eta)x^2 \\ &\quad + (h\xi + \operatorname{Re}\eta x)^2). \end{aligned}$$

On en déduit alors que,

$$\begin{aligned} ([\operatorname{Rep}(x, h\xi)^w, i\operatorname{Imp}(x, h\xi)^w]u, u)_{L^2(\mathbb{R})} &= 2h|\alpha|^2 (\operatorname{Im}\eta \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \\ &\quad \operatorname{Im}\eta(1 + \operatorname{Im}\eta) \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|hD_x u + \operatorname{Re}\eta xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2), \end{aligned}$$

puisque d'après le théorème 18.5.4 de [12], on a l'identité,

$$[(h\xi + \operatorname{Re}\eta x)^2]^w = (h\xi + \operatorname{Re}\eta x)^w (h\xi + \operatorname{Re}\eta x)^w,$$

et que l'opérateur $(h\xi + \operatorname{Re}\eta x)^w$ défini en quantification de Weyl par un symbole à valeurs réelles est formellement auto-adjoint. On obtient ainsi que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq 2\operatorname{Im}\eta |\alpha|^2 h (\|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + (1 + \operatorname{Im}\eta) \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2). \quad (2.2.6)$$

De plus, comme d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + (1 + \operatorname{Im}\eta) \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\geq 2\|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|i(1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} xu\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq 2\operatorname{Re}(hD_x u, i(1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} xu)_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et que,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(hD_x u, i(1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} xu)_{L^2(\mathbb{R})} &= ([hD_x, i(1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} x]u, u)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= h(1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

2.2. Cas de la dimension 1.

on obtient en reprenant (2.2.6) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq 2^{\frac{1}{2}} h |\alpha| (\operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui termine la preuve de la proposition 2.2.4. \square

La proposition précédente montre en raison de la densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace $(B, \|\cdot\|_B)$ qu'il n'y a pas de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en tout point du plan complexe et que plus précisément, on a

$$(\lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c = \mathbb{C},$$

si $q(x, \xi)^w$ désigne un opérateur de type 2. Cette proposition montre également qu'il n'y a aucune valeur propre dans le spectre de ces opérateurs. En fait, on peut en tout point $z \in \mathbb{C}^*$ améliorer l'estimation a priori de la proposition 2.2.4.

Proposition 2.2.5. *Considérons,*

$$q(x, \xi) = \alpha(\xi + ix)(\xi + \eta x),$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\eta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\eta > 0$. On peut alors pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ trouver des constantes strictement positives C et h_0 telles que pour tout $0 < h < h_0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq Ch^{1/2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Preuve. Considérons $z \in \mathbb{C}^*$ et posons comme précédemment,

$$p(x, \xi) := q(x, \xi) - z.$$

On sépare deux cas.

Cas 1. Dans ce premier cas, on suppose que $\alpha^{-1}z \notin \mathbb{R}_+^*$. Sous ces hypothèses, on constate en relisant la démonstration de la proposition 2.2.3 que l'on peut trouver un couple (x_0, ξ_0) de \mathbb{R}^2 tel que $x_0 \neq 0$ et,

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : q(x, \xi) = z\} = \{(x_0, \xi_0), (-x_0, -\xi_0)\}.$$

On choisit ensuite une partition de l'unité C^∞ de \mathbb{R} , $\varphi_0(x) + \varphi_\infty(x) = 1$, avec des fonctions $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varphi_\infty \in C^\infty(\mathbb{R})$ positives telles que la fonction φ_0 vérifie, $\varphi_0 = 1$ sur un voisinage ouvert des points x_0 et $-x_0$, et qu'il existe une constante strictement positive c_1 telle que le support de la fonction φ_0 vérifie,

$$\operatorname{supp}\varphi_0 \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq c_1\}.$$

Ceci est bien possible puisque $x_0 \neq 0$. En reprenant l'estimation (2.2.6), on obtient que pour tout $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} & \|q(x, h\xi)^w \varphi_0(x)u - z\varphi_0(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ & \geq 2^{\frac{1}{2}} (\operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} |\alpha| h^{\frac{1}{2}} \|x\varphi_0(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ & \geq 2^{\frac{1}{2}} c_1 (\operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} (1 + \operatorname{Im}\eta)^{\frac{1}{2}} |\alpha| h^{\frac{1}{2}} \|\varphi_0(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

2.2. Cas de la dimension 1.

On considère maintenant $p_\infty(x, \xi)$ un symbole indépendant du paramètre semi-classique h dans la classe $S(\langle(x, \xi)\rangle^2, dx^2 + d\xi^2)$ (précisons que cette classe de symboles est définie en (1.3.1) au chapitre 1 et que certains résultats de calcul symbolique concernant cette classe de symboles sont rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit) vérifiant $p_\infty = p$ sur $\text{supp}\varphi_\infty \times \mathbb{R}$, $p_\infty - p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et tel qu'il existe une constante strictement positive c_2 telle que pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$,

$$|p_\infty(x, \xi)| \geq c_2(1 + x^2 + \xi^2).$$

Ceci est possible car d'une part le symbole p s'annule uniquement aux points (x_0, ξ_0) et $(-x_0, -\xi_0)$, et que d'autre part, on peut trouver une constante c_3 strictement positive telle que pour tout (x, ξ) appartenant au complémentaire d'un compact contenant $(0, 0)$, on ait

$$|(\xi + ix)(\xi + \eta x)|^2 = (\xi^2 + x^2)((\xi + \text{Re}\eta x)^2 + (\text{Im}\eta)^2 x^2) \geq c_3(\xi^2 + x^2)^2.$$

Ce symbole p_∞ est donc elliptique dans la classe de symboles,

$$S(\langle(x, \xi)\rangle^2, dx^2 + d\xi^2).$$

Cette propriété d'ellipticité nous permet de trouver des symboles,

$$q_\infty \in S(\langle(x, \xi)\rangle^{-2}, dx^2 + d\xi^2) \text{ et } r_\infty \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2),$$

(se référer par exemple à la proposition 2.6.1 dans [19]) tels que,

$$q_\infty(x, h\xi, h)^w p_\infty(x, h\xi)^w = I + r_\infty(x, h\xi, h)^w. \quad (2.2.8)$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et le théorème de Calderón-Vaillancourt, on déduit alors de (2.2.8) qu'il existe une constante c_4 strictement positive telle que,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|q_\infty(x, h\xi, h)^w p_\infty(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|r_\infty(x, h\xi, h)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq c_4 \|p_\infty(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} + O(h^\infty) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

ce qui induit que l'on peut trouver des constantes strictement positives c_5 et h_0 telles que pour tout $0 < h < h_0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|p_\infty(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq c_5 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.9)$$

Considérons ensuite la fonction $r(x, \xi) = p(x, \xi) - p_\infty(x, \xi)$. Cette fonction r appartient par construction à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et vérifie $r = 0$ sur l'ensemble $\text{supp}\varphi_\infty \times \mathbb{R}$. Comme

$$\text{supp}r \cap (\text{supp}\varphi_\infty \times \mathbb{R}) = \emptyset,$$

les résultats classiques de calcul symbolique montrent alors que l'opérateur,

$$r(x, h\xi, h)^w \varphi_\infty(x),$$

appartient à la classe $\text{Op}_h^w(S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2))$ des opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl semi-classique par un symbole de la classe

2.2. Cas de la dimension 1.

$S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2)$. Il s'ensuit d'après (2.2.9), le théorème de Calderón-Vaillancourt et l'inégalité triangulaire que,

$$\begin{aligned} c_5 \|\varphi_\infty(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \|p_\infty(x, h\xi)^w \varphi_\infty(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|p(x, h\xi)^w \varphi_\infty(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} + O(h^\infty)\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

On peut alors déduire de (2.2.7), (2.2.10) et du théorème de Calderón-Vaillancourt qu'il existe des constantes c_6 et c_7 strictement positives telles que pour tout $0 < h < h_0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} h^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq h^{\frac{1}{2}}(\|\varphi_0(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|\varphi_\infty(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq c_6(\|p(x, h\xi)^w \varphi_0(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} + h^{\frac{1}{2}}\|p(x, h\xi)^w \varphi_\infty(x)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq c_6(\|\varphi_0(x)p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} + h^{\frac{1}{2}}\|\varphi_\infty(x)p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|[p(x, h\xi)^w, \varphi_0(x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})} + h^{\frac{1}{2}}\|[p(x, h\xi)^w, \varphi_\infty(x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq c_7(\|p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|[p(x, h\xi)^w, \varphi_0(x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \|[p(x, h\xi)^w, \varphi_\infty(x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})} + h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}), \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

puisque par construction φ_0 et $\varphi_\infty \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$. Il suffit enfin pour terminer la démonstration dans ce premier cas de la proposition 2.2.5 de démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.2.6. *Pour $j \in \{0, \infty\}$, on peut trouver une constante strictement positive C_j telle que pour tout $0 < h \leq 1$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,*

$$\|[p(x, h\xi)^w, \varphi_j(x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_j(h^{\frac{1}{2}}\|p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} + h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}).$$

Preuve. Comme q est un symbole quadratique, la formule de composition en calcul de Weyl du théorème 18.5.4 de [12] montre qu'il existe deux fonctions a_1 et a_2 de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$ telles que,

$$\begin{aligned} [p(x, h\xi)^w, \varphi_j(x)] &= [q(x, h\xi)^w, \varphi_j(x)] = \frac{1}{i}\{q(x, h\xi), \varphi_j(x)\}^w = \\ &= \frac{h}{i}\left(\frac{\partial q}{\partial \xi}(x, h\xi)\varphi_j'(x)\right)^w = h(a_1(x)h\xi + a_2(x))^w, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

puisque $\varphi_j' \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ si $j = 0$ ou $j = \infty$. Enfin, comme d'après le théorème 18.5.4 de [12],

$$h(a_1(x)h\xi + a_2(x))^w = ha_1(x)(hD_x) + ha_2(x) + \frac{h^2}{2i}a_1'(x), \quad (2.2.13)$$

on déduit de (2.2.6), (2.2.12), (2.2.13), de l'inégalité triangulaire et du théorème de Calderón-Vaillancourt qu'il existe des constantes $c_{8,j}$ et $c_{9,j}$ strictement positives telles que pour tout $0 < h \leq 1$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|[p(x, h\xi)^w, \varphi_j(x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq c_{8,j}h(\|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}) \\ &\leq c_{9,j}(h^{\frac{1}{2}}\|p(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R})} + h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}), \end{aligned}$$

2.2. Cas de la dimension 1.

ce qui termine la preuve du lemme 2.2.6. \square

Cas 2. On suppose maintenant que $\alpha^{-1}z \in \mathbb{R}_+^*$. En relisant la démonstration de la proposition 2.2.3, on constate cette fois qu'il existe un couple (x_0, ξ_0) de \mathbb{R}^2 vérifiant $\xi_0 \neq 0$ et,

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : q(x, \xi) = z\} = \{(x_0, \xi_0), (-x_0, -\xi_0)\}. \quad (2.2.14)$$

Considérons la transformation linéaire symplectique $\chi(x, \xi) = (\xi, -x)$ et la forme quadratique

$$\tilde{q}(x, \xi) = (q \circ \chi)(x, \xi) = \alpha(-x + i\xi)(-x + \eta\xi) = i\alpha\eta(\xi + ix)(\xi - \eta^{-1}x). \quad (2.2.15)$$

Comme d'après (2.2.14) et (2.2.15),

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{q}(x, \xi) = z\} = \{(-\xi_0, x_0), (\xi_0, -x_0)\},$$

et que

$$\text{Im}(-\eta^{-1}) = |\eta|^{-2}\text{Im}\eta > 0,$$

on peut appliquer le résultat établi dans le premier cas étudié pour obtenir l'existence de constantes strictement positives C et h_0 telles que,

$$\forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|\tilde{q}(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq Ch^{1/2}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.16)$$

Cette estimation a priori montre d'après la densité de l'espace de Schwartz dans l'espace $(B, \|\cdot\|_B)$ que,

$$z \notin \lambda_{1/2}^{\text{sc}}(\tilde{q}(x, h\xi)^w). \quad (2.2.17)$$

On peut alors déduire de (2.1.3), (2.2.15) et (2.2.17) que,

$$z \notin \lambda_{1/2}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w),$$

ce qui nous permet d'obtenir l'estimation a priori de la proposition 2.2.5 dans ce second cas et termine la démonstration de cette proposition. \square

En utilisant une nouvelle fois la densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace $(B, \|\cdot\|_B)$, la proposition 2.2.5 précise la perte de puissance de h caractéristique de l'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en tout point de l'ensemble \mathbb{C}^* et montre l'inclusion,

$$\mathbb{C}^* \subset (\lambda_{1/2}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c,$$

si $q(x, h\xi)^w$ désigne un opérateur de type 2. Ce dernier résultat joint à ceux qui l'ont précédé dans ce paragraphe démontrent le théorème 1.6.4 énoncé au chapitre précédent.

2.2.d Etude du pseudo-spectre des opérateurs de type 3.

On étudie dans le dernier paragraphe de cette deuxième section la seconde sous-classe un peu singulière des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques formée par les opérateurs de type 3. On rappelle que ces opérateurs de type 3 sont par définition (Définition 2.2.1) les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels $q(x, \xi)^w$ dont les images numériques $\Sigma(q)$ sont égales au plan complexe \mathbb{C} et dont les formes quadratiques $\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}$ associées à leurs symboles q sont définies négatives. Ces opérateurs sont d'après la proposition 2.2.2 des opérateurs de Fredholm d'indice 2. Comme d'après la proposition 2.1.3, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{ind}(q(x, \xi)^w + z) = \operatorname{ind}(q(x, \xi)^w) = 2,$$

on en déduit comme dans le cas d'un opérateur de type 2 que le spectre d'un opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ de type 3 est égal au plan complexe \mathbb{C} ,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Ceci induit immédiatement comme dans le cas des opérateurs de type 2 que les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques des opérateurs $q(x, \xi)^w$ de type 3 sont tous égaux au plan complexe \mathbb{C} ,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \Lambda_\mu^{\operatorname{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Par contre, nous allons vérifier cette fois que contrairement au cas des opérateurs de type 2, le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini des opérateurs de type 3 est aussi égal au plan complexe \mathbb{C} . Au regard de la proposition 2.2.3 et de l'invariance symplectique (2.1.3) des ensembles pseudo-spectraux d'injectivité semi-classique, l'étude des opérateurs de type 3 se réduit à celle de l'opérateur défini en quantification de Weyl par le symbole quadratique elliptique,

$$q(x, \xi) = \alpha(\xi - ix)(\xi + \eta x), \quad (2.2.18)$$

avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\eta \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\eta < 0$. On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.2.7. *Considérons $r : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes et $z \in \mathbb{C}$. Dans ce cas le sous-espace vectoriel de $L^2(\mathbb{R})$,*

$$D(r(x, \xi)^w) := \{u \in L^2(\mathbb{R}) : r(x, \xi)^w u \in L^2(\mathbb{R})\},$$

est égal à l'espace B (défini à la proposition 2.1.3). De plus, l'opérateur non borné $(r(x, \xi)^w + z, B)$ sur $L^2(\mathbb{R})$ est un opérateur fermé à domaine dense dont l'adjoint est l'opérateur non borné $(\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z}, B)$.

Preuve. Comme le symbole r est une forme quadratique, la première inclusion,

$$B \subset D(r(x, \xi)^w),$$

est évidente. Pour l'autre inclusion, remarquons tout d'abord que d'après l'ellipticité de la forme quadratique r ,

$$c := \inf_{|(x, \xi)|=1} |r(x, \xi)| > 0,$$

2.2. Cas de la dimension 1.

ce qui induit par homogénéité que,

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2, \quad |r(x, \xi)| \geq c(x^2 + \xi^2).$$

Le symbole r est donc elliptique à l'infini dans la classe de symboles S^2 ce qui nous permet de trouver des symboles $b(x, \xi)$ et $\tilde{r}(x, \xi)$ dans la classe S^{-2} tels que,

$$b(x, \xi)^w r(x, \xi)^w = I + \tilde{r}(x, \xi)^w,$$

si on note S^m , $m \in \mathbb{R}$, la classe de symboles $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ vérifiant,

$$\forall \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n, \quad \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} |\partial_x^\beta \partial_\xi^\gamma a(x, \xi)| \langle (x, \xi) \rangle^{-m+|\beta|+|\gamma|} < +\infty,$$

où $\langle (x, \xi) \rangle := (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$. Mentionnons qu'une démonstration précise de ce point est donnée dans la preuve du lemme 3.1 de [11] et que certains résultats de calcul symbolique concernant cette classe de symboles sont rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit. On en déduit que si $u \in D(r(x, \xi)^w)$ alors,

$$u = b(x, \xi)^w (r(x, \xi)^w u) - \tilde{r}(x, \xi)^w u \in B,$$

puisque l'inclusion suivante est vérifiée,

$$\text{Op}^w(S^{-2})(L^2(\mathbb{R})) \subset B,$$

si on note $\text{Op}^w(S^{-2})$ les opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl (classique) à partir d'un symbole de la classe S^{-2} . Ceci démontre l'identité $B = D(r(x, \xi)^w)$. Vérifions maintenant que l'opérateur non borné sur $L^2(\mathbb{R})$ à domaine dense $(r(x, \xi)^w + z, B)$ est bien un opérateur fermé. Pour cela, considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de l'espace B , u et f deux éléments de l'espace $L^2(\mathbb{R})$ tels que,

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } L^2(\mathbb{R}) \text{ et } (r(x, \xi)^w + z)u_n \rightarrow f \text{ dans } L^2(\mathbb{R}),$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ceci implique que,

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}) \text{ et } (r(x, \xi)^w + z)u_n \rightarrow f \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Comme d'autre part on a la convergence,

$$(r(x, \xi)^w + z)u_n \rightarrow (r(x, \xi)^w + z)u \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$ puisque l'opérateur $r(x, \xi)^w$ est simplement un opérateur différentiel d'ordre 2, on en déduit que $f = (r(x, \xi)^w + z)u$, ce qui montre bien que,

$$u \in D(r(x, \xi)^w) = B,$$

et que l'opérateur non borné $A = (r(x, \xi)^w + z, B)$ est bien fermé. Nous allons maintenant vérifier que l'opérateur adjoint A^* est l'opérateur non borné,

$$(\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z}, B).$$

2.2. Cas de la dimension 1.

Par définition, le domaine de l'opérateur adjoint $D(A^*)$ est défini par,

$$D(A^*) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}) : \exists f \in L^2(\mathbb{R}), \forall u \in B, \right. \\ \left. (v, r(x, \xi)^w u + zu)_{L^2(\mathbb{R})} = (f, u)_{L^2(\mathbb{R})} \right\}.$$

Soit $v \in D(A^*)$, on a pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} (v, r(x, \xi)^w u + zu)_{L^2(\mathbb{R})} &= (v, (a\xi^2 + bx\xi + cx^2 + z)^w u)_{L^2(\mathbb{R})} \\ &= \langle v, (\bar{a}\xi^2 - \bar{b}x\xi + \bar{c}x^2 + \bar{z})^w \bar{u} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} \\ &= \langle (\bar{a}\xi^2 + \bar{b}x\xi + \bar{c}x^2 + \bar{z})^w v, \bar{u} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})} \\ &= ((\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z})v, u)_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

si $r(x, \xi) = a\xi^2 + bx\xi + cx^2$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et si $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}), \mathcal{D}(\mathbb{R})}$ désigne le crochet de dualité entre l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et l'espace des fonctions tests $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = C_0^\infty(\mathbb{R})$. On en déduit que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$((\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z})v, u)_{L^2(\mathbb{R})} = (f, u)_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui induit que $(\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z})v = f \in L^2(\mathbb{R})$. Ceci démontre l'inclusion,

$$D(A^*) \subset D(\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z}) = B.$$

Réciproquement si $v \in B$, on obtient en reprenant le calcul précédent que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$((\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z})v, u)_{L^2(\mathbb{R})} = (v, (r(x, \xi)^w + z)u)_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On peut étendre cette identité en utilisant la densité de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$ dans B ,

$$\forall u \in B, ((\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z})v, u)_{L^2(\mathbb{R})} = (v, (r(x, \xi)^w + z)u)_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui montre que $v \in D(A^*)$ et que $A^* = (\bar{r}(x, \xi)^w + \bar{z}, B)$. \square

Reprenons la forme quadratique q définie en (2.2.18). Le lemme précédent montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $h > 0$, l'adjoint de l'opérateur non borné,

$$(q(x, h\xi)^w + z, B),$$

est l'opérateur non borné $(\bar{\alpha}[(h\xi + ix)(h\xi + \bar{\eta}x)]^w + \bar{z}, B)$. Cet opérateur,

$$\bar{\alpha}[(h\xi + ix)(h\xi + \bar{\eta}x)]^w,$$

est un opérateur de type 2 puisque sous nos hypothèses, $\text{Im}\bar{\eta} > 0$. La proposition 2.2.4 du paragraphe précédent montre que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|\bar{\alpha}[(h\xi + ix)(h\xi + \bar{\eta}x)]^w u + \bar{z}u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq 2^{\frac{1}{2}} h |\alpha| |\text{Im}\eta|^{\frac{1}{2}} (1 + |\text{Im}\eta|)^{\frac{1}{4}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Cette estimation peut s'étendre par densité à l'espace B . Le théorème II.19 de [3] montre alors que l'opérateur non borné $(q(x, h\xi)^w + z, B)$ est surjectif. Comme

on sait que l'indice de Fredholm de l'opérateur $q(x, h\xi)^w + z$ est égal à 2, on en déduit que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $h > 0$,

$$\dim \text{Ker}(q(x, h\xi)^w + z) = 2.$$

Ceci montre que tout point z du plan complexe est une valeur propre de l'opérateur $q(x, h\xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ si h est une constante strictement positive. Il s'ensuit naturellement qu'il y a du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en tout point du plan complexe,

$$\lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \mathbb{C}.$$

Enfin, on peut vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $h > 0$,

$$\text{Ker}(q(x, h\xi)^w + z) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

En effet, en reprenant les arguments avancés au début de la démonstration du lemme 2.2.7, on en déduit que le symbole $q(x, \xi) + z$ est elliptique à l'infini dans la classe de symboles S^2 (la classe de symboles S^m , $m \in \mathbb{R}$, est définie dans la démonstration du lemme 2.2.7). Cette propriété nous permet de trouver pour tout $N \in \mathbb{N}$, des symboles $b_N \in S^{-2}$ et,

$$r_N \in S^{-N}, \tag{2.2.19}$$

vérifiant,

$$b_N(x, \xi)^w (q(x, h\xi)^w + z) = I + r_N(x, \xi)^w.$$

Comme d'après (2.2.19), $x^\alpha D_x^\beta (r_N(x, \xi)^w u) \in L^2(\mathbb{R})$ si $|\alpha + \beta| \leq N$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$, on en déduit que $u_0 = -r_N(x, \xi)^w u_0$ si u_0 vérifie,

$$(q(x, h\xi)^w + z)u_0 = 0.$$

On obtient alors que pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x^\alpha D_x^\beta u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ si $|\alpha + \beta| \leq N$, i.e. $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. En rassemblant les quelques résultats de ce paragraphe, on obtient le théorème 1.6.5 énoncé du chapitre précédent.

2.3 Etude de la stabilité spectrale des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension $n \geq 2$.

On cherche à décrire dans cette troisième section les ensembles ε -pseudo-spectraux des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques $q(x, \xi)^w$ en dimension $n \geq 2$ ainsi que les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques et pseudo-spectraux d'injectivité semi-classiques des opérateurs semi-classiques $q(x, h\xi)^w$ associés. L'étude en dimension 1 de la section précédente a distingué trois classes d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques unidimensionnels aux propriétés spectrales bien distinctes que nous avons désigné par les qualificatifs d'opérateurs de type 1, de type 2 et de type 3. Les deux dernières classes que nous venons de citer sont vraiment spécifiques de la dimension 1. En effet, rappelons que les

images numériques de ces opérateurs remplissent tout le plan complexe ce qui d'après le lemme 2.1.1 ne peut pas se produire dans les autres dimensions. S'il existe quelque espoir que notre compréhension des phénomènes de stabilité ou d'instabilité spectrale en dimension 1 ne soit pas vaine pour appréhender ceux qui se produisent dans les dimensions supérieures, on peut espérer pouvoir généraliser pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques multidimensionnels, la condition nécessaire et suffisante de stabilité spectrale que nous avons établie en dimension 1 pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques de type 1. Les lignes qui vont suivre, vont montrer que c'est effectivement le cas i.e. qu'en dimension $n \geq 2$, le spectre d'un opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ est *stable* si et seulement si cet opérateur est *normal*, condition que l'on peut encore exprimer au regard de la proposition 2.1.4 par le fait que la forme quadratique $\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi)$ soit identiquement nulle. Soulignons à nouveau que la propriété de stabilité du spectre de ces opérateurs sous de petites perturbations et sous l'hypothèse de normalité n'est pas du tout surprenante d'après l'identité (1.1.1) du chapitre 1. Ce qui est remarquable dans le résultat précédent, c'est que si cette hypothèse de normalité est violée il se produit effectivement de fortes instabilités spectrales pour les hautes énergies de ces opérateurs dont nous allons donner une description presque complète. Mentionnons aussi avant d'entreprendre cette étude qu'il y a un réel saut de complexité entre la dimension 1 et les dimensions supérieures. L'étude en dimension 1 des opérateurs de type 1 non normaux se réduisait en effet uniquement à celle de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Une telle réduction symplectique n'est plus vérifiée en dimension supérieure. Ceci est en autre une conséquence de l'accroissement de la complexité de la géométrie symplectique lorsque la dimension de l'espace augmente et en particulier du fait que si la dimension n est supérieure ou égal à 2, le groupe symplectique ne se confond plus contrairement à la dimension 1 avec le groupe spécial linéaire.

Considérons $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique en dimension $n \geq 2$ défini en quantification de Weyl par $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes. Commençons par donner quelques exemples de tels opérateurs en dimension 2 dont une étude détaillée sera proposée à la section 2.4 de ce chapitre pour illustrer les résultats que nous allons établir dans cette section,

$$q_1(x, \xi)^w = -(1+i)\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(-1+i)x_2\partial_{x_1} + 6ix_2\partial_{x_2} \\ + 2ix_1\partial_{x_2} + (6+5i)x_1^2 + (11+i)x_2^2 + (10+4i)x_1x_2 - 2 + 5i,$$

$$q_2(x, \xi)^w = -\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4ix_2\partial_{x_2} + 2x_1^2 + (4+i)x_2^2 + 4x_1x_2 + 2i,$$

et,

$$q_3(x, \xi)^w = -(1+i)\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(1-i)x_2\partial_{x_1} - 4ix_1\partial_{x_2} \\ + (9+4i)x_1^2 + (2+i)x_2^2 - 4(1+i)x_1x_2 - 2 + 2i.$$

Maintenant que nous avons à l'esprit quelques exemples de tels opérateurs, on peut considérer à nouveau $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes arbitraire. L'image numérique $\Sigma(q)$ associée à cette forme

quadratique q est alors d'après la démonstration du lemme 2.1.1 un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement plus petite que π . On sait également d'après la proposition 2.1.3 et le théorème 2.1.5 que l'opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 dont le spectre est composé uniquement de valeurs propres de multiplicités finies,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \left\{ \sum_{\substack{\lambda \in \sigma(F), \\ -i\lambda \in \Sigma(q) \setminus \{0\}}} (r_\lambda + 2k_\lambda)(-i\lambda) : k_\lambda \in \mathbb{N} \right\},$$

si r_λ désigne dans l'expression ci-dessus la dimension du sous-espace vectoriel caractéristique complexe associé à la valeur propre λ de l'application hamiltonnienne F associée à la forme quadratique q . Le fait que,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{ind}(q(x, \xi)^w + z) = \operatorname{ind}(q(x, \xi)^w) = 0,$$

qui découle de la proposition 2.1.3 implique d'après notre discussion faisant suite à la définition 1.5.2 du chapitre 1 qu'il y a identité entre les deux notions de pseudo-spectres semi-classiques et de pseudo-spectres d'injectivité semi-classiques,

$$\forall \mu \in [0, \infty], \lambda_\mu^{\operatorname{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_\mu^{\operatorname{sc}}(q(x, h\xi)^w). \quad (2.3.1)$$

Nous allons maintenant donner une démonstration des théorèmes 1.6.6 et 1.6.7 énoncés au chapitre précédent. Commençons par remarquer que la proposition 2.1.9 montre que,

$$\forall z \in \Sigma(q)^c, \forall h > 0, \|(q(x, h\xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q))}.$$

Cette estimation de la norme de la résolvante sur le complémentaire de l'image numérique $\Sigma(q)^c$ montre qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 0 en tout point de cet ensemble,

$$\Sigma(q)^c \subset (\Lambda_0^{\operatorname{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c. \quad (2.3.2)$$

D'après la proposition 2.1.4, on sait aussi que l'opérateur,

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est un opérateur *normal* si et seulement si la forme quadratique,

$$\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi),$$

est identiquement nulle. On commence par étudier le cas des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *normaux* en dimension $n \geq 2$.

2.3.a Opérateurs quadratiques elliptiques normaux en dimension $n \geq 2$.

Considérons $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ un opérateur différentiel quadratique elliptique *normal* en dimension $n \geq 2$. L'identité classique (1.1.1) (voir par exemple l'estimation (V.3.31) dans [15]) rappelée au chapitre précédent montre que,

$$\forall z \notin \sigma(q(x, \xi)^w), \|(q(x, \xi)^w - z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(q(x, \xi)^w))}. \quad (2.3.3)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Cette identité assure la stabilité du spectre sous de petites perturbations de l'opérateur *normal* $q(x, \xi)^w$ et induit au niveau des ensembles ε -pseudo-spectraux classiques l'identité suivante,

$$\forall \varepsilon > 0, \sigma_\varepsilon(q(x, \xi)^w) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(q(x, \xi)^w)) \leq \varepsilon\}. \quad (2.3.4)$$

Compte tenu de cette description (2.3.4), il est inutile pour ces opérateurs *normaux* de recourir à une étude semi-classique des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques des opérateurs semi-classiques associés. Cette étude semi-classique n'apporte pas d'informations plus précises concernant la stabilité spectrale de ces opérateurs que la description donnée par (2.3.4). Terminons ce paragraphe en donnant quelques exemples explicites de tels opérateurs.

Exemple 1. Considérons la forme quadratique elliptique définie sur \mathbb{R}^4 ,

$$q(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^2 + \xi_2^2 + x_2^2 + i(\xi_2^2 + x_2^2).$$

L'opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ est un opérateur normal car,

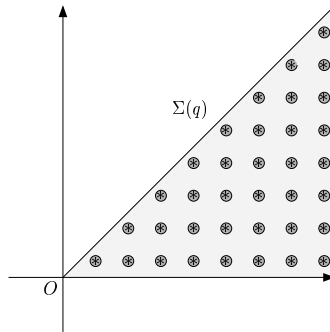
$$\{\xi_1^2 + x_1^2 + \xi_2^2 + x_2^2, \xi_2^2 + x_2^2\} = 0,$$

dont le spectre est composé d'après le théorème 2.1.5 des valeurs propres suivantes,

$$\sigma(q(x, \xi)^w) = \{(2m_1 + 1) + (1 + i)(2m_2 + 1) : m_1, m_2 \in \mathbb{N}\}.$$

On a représenté en gris clair sur la figure 2.2 l'image numérique $\Sigma(q)$ de cet opérateur $q(x, \xi)^w$, par des étoiles ses valeurs spectrales et en gris foncé l'un de ces ensembles ε -pseudo-spectraux.

FIG. 2.2 – Exemple 1.



Exemple 2. Considérons maintenant $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, une forme quadratique elliptique à valeurs complexes dont l'image numérique se réduit à un secteur angulaire fermé de sommet 0 et d'ouverture nulle i.e. une demi-droite fermée de sommet 0. On peut alors trouver $z \in \mathbb{C}^*$ tel que la forme quadratique $\text{Im}(z^{-1}q)$ soit identiquement nulle et que la forme quadratique $\text{Re}(z^{-1}q)$ soit positive. L'opérateur différentiel quadratique elliptique,

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est alors un opérateur normal puisque,

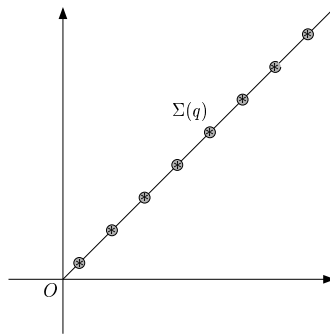
$$\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi) = |z|^2 \{\operatorname{Re}(z^{-1}q), \operatorname{Im}(z^{-1}q)\}(x, \xi) = 0.$$

En fait, on constate sous ces hypothèses et compte tenu de l'hypothèse d'ellipticité de la forme quadratique q que $\operatorname{Re}(z^{-1}q)$ est nécessairement une forme quadratique définie positive. On déduit alors du théorème 2.1.6 et de la proposition 2.1.7 que l'opérateur $q(x, \xi)^w$ est à une similitude z près et à une conjugaison près par un opérateur métaplectique un oscillateur harmonique auto-adjoint de dimension n ,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (D_{x_j}^2 + x_j^2),$$

avec $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$.

FIG. 2.3 – Exemple 2.



Mentionnons enfin pour terminer ce paragraphe que les espaces propres associés aux valeurs propres d'un opérateur différentiel quadratique elliptique $q(x, \xi)^w$ en dimension $n \geq 1$ sont contenus dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ceci est une conséquence du théorème 2.1 dans [9] ou encore de la relecture des quelques lignes de démonstration proposées en (2.2.19) à la fin de la section 2.2.d de ce chapitre, qui se généralisent en dimension quelconque. Il est maintenant tant de prêter toute notre attention au cas des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* en dimension $n \geq 2$.

2.3.b Opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux en dimension $n \geq 2$.

Dans l'étude générale des propriétés de stabilité ou d'instabilité spectrale des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques, l'étude de la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* est la plus intéressante mais également la plus difficile. L'étude des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* en dimension $n \geq 2$ qui va suivre se scinde en deux parties. Dans une première partie, nous allons établir l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique de ces opérateurs. Puis dans un second temps, nous étudierons l'éventuelle existence de pseudo-spectre

semi-classique d'indice infini à la frontière de l'image numérique de ces opérateurs ce qui complétera notre étude puisque nous avons déjà signalé en (2.3.2) l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 0 en tout point de l'ensemble complémentaire de l'image numérique.

2.3.b.1 Existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini à l'intérieur de l'image numérique $\Sigma(q)$.

Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes en dimension $n \geq 2$ définissant un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* $q(x, \xi)^w$ et notons comme précédemment $\Sigma(q)$ son image numérique. Nous allons dans ce paragraphe démontrer l'inclusion suivante,

$$\Sigma(q) \subset \Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w). \quad (2.3.5)$$

Pour démontrer ce résultat dans toute sa généralité, nous allons user de quelques considérations géométriques propres au cadre quadratique des symboles que nous considérons, ainsi que du résultat d'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini énoncé au théorème 1.6.10 du chapitre 1 dont une démonstration sera donnée au chapitre 3 de ce manuscrit. Mentionnons que nous donnerons également une autre démonstration utilisant seulement le critère d'existence de M.Zworski (rappelé au théorème 1.3.2 du chapitre 1) qui établira l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique à l'exception des points contenus sur un nombre fini de demi-droites singulières.

D'après le lemme 2.1.1, on peut tout d'abord quitte à effectuer une similitude i.e. multiplier le symbole q par un nombre complexe non nul z , supposer que la forme quadratique $\text{Re}q$ est une forme quadratique définie positive. Ensuite compte tenu de l'invariance symplectique des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques (2.1.3) et de la réduction symplectique donnée par la proposition 2.1.7, on peut réduire notre étude au cas où,

$$\text{Re}q(x, \xi) = \sum_{j=1}^n \lambda_j (\xi_j^2 + x_j^2), \quad (2.3.6)$$

avec $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$. On considère ensuite l'union disjointe,

$$\Sigma(q) = \tilde{A} \sqcup \tilde{B}, \quad (2.3.7)$$

de l'image numérique $\Sigma(q)$ définie de la manière suivante,

$$\tilde{A} = \{z \in \Sigma(q) : \exists (x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}, z = q(x_0, \xi_0) \text{ et } \{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0) \neq 0\}, \quad (2.3.8)$$

et,

$$\tilde{B} = \{z \in \Sigma(q) : z = q(x_0, \xi_0) \Rightarrow \{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0) = 0\}. \quad (2.3.9)$$

Nous allons dans un premier temps établir l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'ensemble \tilde{A} puis identifier géométriquement ces ensembles \tilde{A} et \tilde{B} en démontrant que,

$$\tilde{A} = \Sigma(q) \text{ et } \tilde{B} = \partial\Sigma(q).$$

2.3.b.1.1 Existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'ensemble \tilde{A} .

Considérons $z \in \tilde{A}$. On distingue deux cas.

Cas 1. Supposons tout d'abord que l'on puisse trouver un couple $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant,

$$z = q(x_0, \xi_0) \text{ et } \{\operatorname{Re}(q - z), \operatorname{Im}(q - z)\}(x_0, \xi_0) = \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x_0, \xi_0) < 0. \quad (2.3.10)$$

On peut dans ce cas appliquer directement le critère d'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de M.Zworski rappelé au théorème 1.3.2 du chapitre 1, pour démontrer l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini au point z pour l'opérateur semi-classique $(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}$,

$$z \in \Lambda_\infty^{\operatorname{sc}}(q(x, h\xi)^w).$$

Cas 2. Supposons maintenant que l'on ne puisse pas trouver $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant (2.3.10). Comme $z \in \tilde{A}$, on peut alors au regard de la définition (2.3.8) trouver un couple $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que,

$$z = q(x_0, \xi_0) \text{ et } \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x_0, \xi_0) > 0. \quad (2.3.11)$$

On considère ensuite $Y(t)$ la solution du problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} Y'(t) = H_{\operatorname{Re}q}(Y(t)) \\ Y(0) = (x_0, \xi_0), \end{cases} \quad (2.3.12)$$

et f la fonction définie par,

$$f(t) := \operatorname{Im}q(Y(t)) - \operatorname{Im}q(x_0, \xi_0), \quad (2.3.13)$$

si on désigne ci-dessus par $H_{\operatorname{Re}q}$ le champ de vecteurs hamiltonien associé au symbole $\operatorname{Re}q$,

$$H_{\operatorname{Re}q} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \operatorname{Re}q}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial \operatorname{Re}q}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \right).$$

Compte tenu du caractère quadratique du symbole $\operatorname{Re}q$, (2.3.12) est un problème de Cauchy pour un système linéaire d'équations différentielles ordinaires. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire donne l'existence d'une solution globale Y de (2.3.12) définie sur \mathbb{R} . La fonction f appartient donc à l'espace $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et un calcul direct à partir de (2.3.12) et (2.3.13) montre que,

$$\forall t \in \mathbb{R}, f'(t) = \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(Y(t)).$$

Comme d'après (2.3.11) et (2.3.12), $f'(0) = \{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x_0, \xi_0) > 0$, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que,

$$\forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon], f'(t) > 0,$$

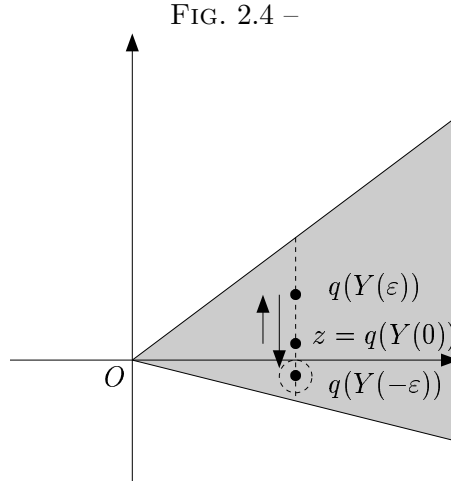
2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

ce qui induit comme d'après (2.3.12) et (2.3.13), $f(0) = 0$ que,

$$f(\varepsilon) > 0 \text{ et } f(-\varepsilon) < 0. \quad (2.3.14)$$

Le lemme suivant montre ensuite que l'on peut pour tout $\delta > 0$ trouver un temps $t_0(\delta) > \varepsilon$ tel que,

$$|Y(t_0(\delta)) - Y(-\varepsilon)| < \delta. \quad (2.3.15)$$



Lemme 2.3.1. *Considérons $Y(t) = (x(t), \xi(t))$ une fonction $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n})$ solution du système linéaire d'équations différentielles ordinaires,*

$$Y'(t) = H_{\text{Req}}(Y(t)),$$

où Req est le symbole défini en (2.3.6). On a alors le résultat suivant,

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \forall M > 0, \exists T_1 > M, \exists T_2 > M,$$

$$|Y(t_0) - Y(t_0 + T_1)| < \varepsilon \text{ et } |Y(t_0) - Y(t_0 - T_2)| < \varepsilon.$$

Preuve. Notons $Y(t_0) = (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. D'après l'expression (2.3.6) définissant le symbole Req , la fonction $Y(t) = (x(t), \xi(t))$ est solution du problème de Cauchy,

$$\forall j = 1, \dots, n, \quad \begin{cases} x_j'(t) = 2\lambda_j \xi_j(t) \\ \xi_j'(t) = -2\lambda_j x_j(t) \\ x_j(t_0) = a_j \\ \xi_j(t_0) = b_j, \end{cases}$$

dont la solution est donnée pour tout $j = 1, \dots, n, t \in \mathbb{R}$ par,

$$\begin{cases} x_j(t) = b_j \sin(2(t - t_0)\lambda_j) + a_j \cos(2(t - t_0)\lambda_j) \\ \xi_j(t) = b_j \cos(2(t - t_0)\lambda_j) - a_j \sin(2(t - t_0)\lambda_j). \end{cases} \quad (2.3.16)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

On note $\beta_j = \lambda_j/\pi$ pour tout $j = 1, \dots, n$. Il faut distinguer deux cas.

Cas 1. $\forall j \in \{1, \dots, n\}, \beta_j \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la fonction Y est périodique et le résultat du lemme est alors évident.

Cas 2. $(\beta_1, \dots, \beta_n) \notin \mathbb{Q}^n$. On utilise alors le résultat classique d'approximation rationnelle suivant,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n, \exists p_1, \dots, p_n \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}^* \text{ tels que}$$

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} \left| \theta_j - \frac{p_j}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q},$$

dont on peut trouver une démonstration par exemple dans [26], Théorème 5.2, chapitre 33. Considérons $0 < \varepsilon_1 < 1/2$, il existe par le résultat précédent des entiers $p_{1,1}, \dots, p_{1,n} \in \mathbb{Z}$ et $q_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}^*$ tels que,

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_1} \beta_j - p_{1,j}| < \varepsilon_1.$$

Posons ensuite,

$$\varepsilon_2 := \frac{1}{2} \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_1} \beta_j - p_{1,j}| > 0,$$

il existe par une nouvelle utilisation du résultat d'approximation rationnelle des entiers $p_{2,1}, \dots, p_{2,n} \in \mathbb{Z}$ et $q_{\varepsilon_2} \in \mathbb{N}^*$ tels que,

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_2} \beta_j - p_{2,j}| < \varepsilon_2.$$

En itérant ce procédé, on construit des suites $(p_{m,j})_{m \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{Z} pour $j = 1, \dots, n$, $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{R}_+^* et $(q_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ de \mathbb{N}^* telles que pour tout $m \geq 2$,

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_m} \beta_j - p_{m,j}| < \varepsilon_m = \frac{1}{2} \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_{m-1}} \beta_j - p_{m-1,j}| \text{ et}$$

$$0 < \varepsilon_m < \frac{1}{2^{m-1}} \varepsilon_1. \quad (2.3.17)$$

La construction précédente impose aux éléments de la suite $(q_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'être deux à deux distincts. En effet, si on avait $q_{\varepsilon_k} = q_{\varepsilon_l}$ pour $k < l$, ceci impliquerait d'après (2.3.17) que,

$$\forall j = 1, \dots, n, |p_{k,j} - p_{l,j}| \leq |q_{\varepsilon_k} \beta_j - p_{k,j}| + |q_{\varepsilon_l} \beta_j - p_{l,j}| < \varepsilon_k + \varepsilon_l < 1,$$

car $0 < \varepsilon_1 < 1/2$, et induirait que $\forall j = 1, \dots, n, p_{k,j} = p_{l,j}$ puisque $p_{k,j}$ et $p_{l,j}$ sont des entiers. Or, notre construction (2.3.17) impose que,

$$0 < \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_l} \beta_j - p_{l,j}| < \varepsilon_l \leq \frac{1}{2} \sup_{j=1, \dots, n} |q_{\varepsilon_k} \beta_j - p_{k,j}|,$$

ce qui induit une contradiction. La suite $(q_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite d'entiers deux à deux distincts. On peut donc quitte à extraire une sous-suite supposer

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

que $q_{\varepsilon_m} \rightarrow +\infty$ quand $m \rightarrow +\infty$. On en déduit alors en utilisant (2.3.16) et (2.3.17) que,

$$Y(t_0 + q_{\varepsilon_m}) \rightarrow Y(t_0) \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

En considérant ensuite la famille $(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n) = (-\beta_1, \dots, -\beta_n)$, on construit de la même manière une suite $(\tilde{q}_{\varepsilon_m})_{m \in \mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels telle que $\tilde{q}_{\varepsilon_m} \rightarrow +\infty$ et,

$$Y(t_0 - \tilde{q}_{\varepsilon_m}) \rightarrow Y(t_0) \text{ lorsque } m \rightarrow +\infty.$$

Ceci termine la preuve du lemme 2.3.1. \square

On peut alors déduire la propriété (2.3.15) d'une application directe du lemme 2.3.1. Comme d'après (2.3.14), $f(-\varepsilon) < 0$, on déduit de (2.3.13) et (2.3.15) que l'on peut trouver un temps $t_0 > \varepsilon$ tel que $f(t_0)$ soit aussi proche de $f(-\varepsilon)$ que l'on veut et donc en particulier, on peut trouver $t_0 > \varepsilon$ tel que $f(t_0) < 0$. Comme d'après (2.3.14), $f(\varepsilon) > 0$ et $f(t_0) < 0$, on en déduit d'après (2.3.11) et (2.3.13) que la fonction $t \mapsto \text{Im}(q - z)(Y(t))$ change de signe du $+$ vers le $-$ sur l'intervalle $[\varepsilon, t_0]$. De plus, comme le flot $Y(t)$ associé au champ hamiltonien $\text{Re}q$ est aussi le flot associé au champ hamiltonien $\text{Re}(q - z)$, on obtient ainsi un changement de signe du $+$ vers le $-$ de la fonction $\text{Im}(q - z)$ le long d'une bicaractéristique orientée positivement du symbole $\text{Re}(q - z)$ qui induit une violation de la condition $(\bar{\Psi})$. On peut alors appliquer le théorème 1.6.10 énoncé au chapitre 1 pour obtenir l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini au point z pour l'opérateur semi-classique $(q(x, h\xi)^w)_{0 < h \leq 1}$,

$$z \in \Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w).$$

Ceci démontre l'inclusion annoncée précédemment,

$$\tilde{A} \subset \Lambda_\infty^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w). \quad (2.3.18)$$

Il s'agit maintenant d'identifier géométriquement cet ensemble \tilde{A} .

2.3.b.1.2 Description géométrique des ensembles \tilde{A} et \tilde{B} .

On va maintenant s'attacher à décrire précisément quels sont les ensembles \tilde{A} et \tilde{B} qui apparaissent dans l'union disjointe (2.3.7) de l'image numérique $\Sigma(q)$. Nous allons démontrer les identités,

$$\tilde{A} = \overset{\circ}{\Sigma}(q) \text{ et } \tilde{B} = \partial\Sigma(q), \quad (2.3.19)$$

ce qui d'après l'inclusion (2.3.18) démontrera l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$.

Rappelons que nous travaillons toujours sous l'hypothèse assurant que la forme quadratique $\text{Re}q$ vérifie (2.3.6). Dans ce cas, l'image numérique $\Sigma(q)$ est d'après la démonstration du lemme 2.1.1 un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement plus petite que π . Notons aussi que notre hypothèse de *non normalité* de l'opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ induit d'après l'étude de l'exemple 2 de la section 2.3.a que l'ouverture de ce secteur angulaire est *strictement positive*. Ceci implique en particulier que,

$$\overset{\circ}{\Sigma}(q) \neq \emptyset.$$

Commençons par démontrer la première inclusion,

$$\partial\Sigma(q) \subset \tilde{B}. \quad (2.3.20)$$

Pour ce faire, considérons $z \in \partial\Sigma(q)$ et $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que $z = q(x_0, \xi_0)$. Ceci est licite puisque l'image numérique des formes quadratiques elliptiques est toujours un ensemble fermé. Si $z = 0$, la condition d'ellipticité impose que $(x_0, \xi_0) = (0, 0)$ et,

$$\{\text{Req}, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0) = 0,$$

puisque le symbole $\{\text{Req}, \text{Im}q\}(x, \xi)$ est une forme quadratique. Il s'ensuit d'après la définition (2.3.9) que $z \in \tilde{B}$. Si $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, on considère $Y(t)$ la solution globale du problème de Cauchy linéaire,

$$\begin{cases} Y'(t) = H_{\text{Req}}(Y(t)) \\ Y(0) = (x_0, \xi_0). \end{cases} \quad (2.3.21)$$

Etudions la fonction $f(t) := \text{Im}q(Y(t))$. Comme précédemment, un calcul direct montre que,

$$f'(0) = \{\text{Req}, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0).$$

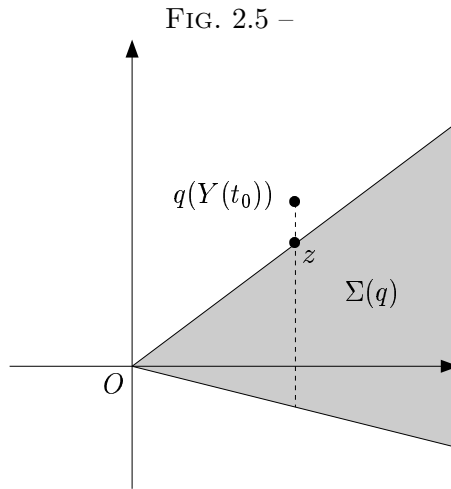
Si $f'(0) \neq 0$, on pourrait trouver $t_0 \neq 0$ tel que,

$$|f(t_0)| > |f(0)| = |\text{Im}z|.$$

Comme $Y(t)$ est le flot associé au champ hamiltonien Req , il préserve la forme quadratique Req . Il s'ensuit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\text{Req}(Y(t)) = \text{Req}(Y(0)) = \text{Re}z.$$

Or, ceci est absurde car comme $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, cela impliquerait au regard de la forme de l'image numérique $\Sigma(q)$ (cf. figure 2.5) que $q(Y(t_0)) \notin \Sigma(q)$. On en



déduit que $\{\text{Req}, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0) = 0$ ce qui montre que z appartient à l'ensemble

\tilde{B} et prouve l'inclusion (2.3.20). Supposons maintenant que l'inclusion (2.3.20) soit *stricte*. Dans ce cas de figure, on pourrait alors considérer un élément,

$$z \in \tilde{B} \setminus \partial\Sigma(q).$$

Notons tout d'abord que le nombre complexe z est non nul puisque $0 \in \partial\Sigma(q)$. Sa partie réelle $\operatorname{Re}z$ est strictement positive puisque d'après (2.3.6),

$$\Sigma(q) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C}^* : \operatorname{Re}z > 0\}.$$

Le fait que z appartienne à l'ensemble \tilde{B} se traduit par l'implication suivante,

$$\begin{cases} \operatorname{Req}(x, \xi) = \operatorname{Re}z \\ \operatorname{Imq}(x, \xi) = \operatorname{Im}z \end{cases} \implies \{\operatorname{Req}, \operatorname{Imq}\}(x, \xi) = 0. \quad (2.3.22)$$

On sait aussi qu'il existe au moins une solution au système apparaissant dans le membre de gauche de l'implication (2.3.22). La définie positivité de la forme quadratique Req donnée par l'expression (2.3.6) permet via une réduction simultanée des formes quadratiques Req et Imq de trouver un isomorphisme P de \mathbb{R}^{2n} tel que dans les nouvelles coordonnées $y = P^{-1}(x, \xi)$, on ait

$$\operatorname{Req}(Py) = \sum_{j=1}^{2n} y_j^2 \text{ et } \operatorname{Imq}(Py) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j y_j^2 \text{ avec } \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n. \quad (2.3.23)$$

Considérons ensuite p la forme quadratique définie par,

$$p(y) := \{\operatorname{Req}, \operatorname{Imq}\}(Py). \quad (2.3.24)$$

On obtient dans ce nouveau système de coordonnées à partir de (2.3.22) et (2.3.23) que,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{2n} y_j^2 = \operatorname{Re}z \\ \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j y_j^2 = \operatorname{Im}z \end{cases} \implies p(y) = 0. \quad (2.3.25)$$

Soulignons que l'isomorphisme P que nous venons d'exhiber n'a aucune raison d'être une transformation symplectique et qu'il ne conserve donc pas a priori le crochet de Poisson $\{\operatorname{Req}, \operatorname{Imq}\}$. Il semble ainsi peut être aventureux d'effectuer une telle transformation *non* symplectique lors de l'identification d'un ensemble dont la définition (2.3.9) est symplectiquement invariante comme l'est l'ensemble \tilde{B} . Nous allons voir cependant que la rigidité du cadre quadratique dans lequel nous travaillons va nous permettre de lever cette difficulté.

Considérons pour ce faire les deux ensembles suivants,

$$E_1 := \{y \in \mathbb{R}^{2n} : r(y) = 0\}, \quad (2.3.26)$$

avec,

$$r(y) := \sum_{j=1}^{2n} \left(\alpha_j - \frac{\operatorname{Im}z}{\operatorname{Re}z} \right) y_j^2, \quad (2.3.27)$$

et,

$$E_2 := \{y \in \mathbb{R}^{2n} : p(y) = 0\}. \quad (2.3.28)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Le lemme suivant donne une première inclusion entre les ensembles E_1 et E_2 .

Lemme 2.3.2. *On a l'inclusion,*

$$E_1 \subset E_2. \quad (2.3.29)$$

Preuve. Soit $y \in E_1$. Si $y = 0$ alors y appartient également à l'ensemble E_2 puisque d'après (2.3.24), p est une forme quadratique en la variable y . Si $y \neq 0$, on pose,

$$t = \sum_{j=1}^{2n} y_j^2 > 0 \text{ et } \forall j = 1, \dots, 2n, \tilde{y}_j = \sqrt{\frac{\operatorname{Re} z}{t}} y_j.$$

Rappelons que l'on a déjà signalé dans les lignes précédant (2.3.22) que l'hypothèse $z \in \tilde{B} \setminus \partial\Sigma(q)$ imposait que $\operatorname{Re} z > 0$. Comme d'une part,

$$\sum_{j=1}^{2n} \tilde{y}_j^2 = \operatorname{Re} z,$$

et que d'autre part puisque $y \in E_1$, on obtient à partir de (2.3.26) et (2.3.27) que,

$$\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \tilde{y}_j^2 = \frac{\operatorname{Re} z}{t} \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j y_j^2 = \frac{\operatorname{Re} z}{t} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} y_j^2 = \operatorname{Im} z,$$

on déduit de l'implication (2.3.25) et de l'homogénéité d'ordre 2 de la forme quadratique p que $p(\tilde{y}) = \operatorname{Re} z t^{-1} p(y) = 0$. Ceci prouve au regard de (2.3.28) que $y \in E_2$ et termine la preuve du lemme 2.3.2. \square

On remarque ensuite d'après l'expression (2.3.23) que la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q)$ est égale à,

$$(1 + i\alpha_1)\mathbb{R}_+ \cup (1 + i\alpha_n)\mathbb{R}_+. \quad (2.3.30)$$

Comme l'image numérique $\Sigma(q)$ est un ensemble fermé, l'hypothèse,

$$z \in \tilde{B} \setminus \partial\Sigma(q) \subset \Sigma(q) \setminus \partial\Sigma(q) = \Sigma^\circ(q),$$

implique d'après (2.3.30) que,

$$\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} \in]\alpha_1, \alpha_n[,$$

ce qui induit que la signature de la forme quadratique r définie en (2.3.27) désignée par le couple d'entiers (r_1, s_1) vérifie,

$$(r_1, s_1) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ et } r_1 + s_1 \leq 2n. \quad (2.3.31)$$

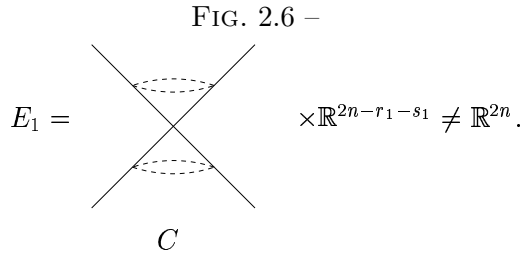
On peut donc supposer après une éventuelle réindexation des variables que,

$$r(y) = a_1 y_1^2 + \dots + a_{r_1} y_{r_1}^2 - a_{r_1+1} y_{r_1+1}^2 - \dots - a_{r_1+s_1} y_{r_1+s_1}^2, \quad (2.3.32)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

avec $a_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, r_1 + s_1$. Il découle alors de (2.3.26) et (2.3.32) que l'ensemble E_1 est dans ces coordonnées le produit direct d'un cône propre C de $\mathbb{R}^{r_1+s_1}$ et de $\mathbb{R}^{2n-r_1-s_1}$,

$$E_1 = C \times \mathbb{R}^{2n-r_1-s_1}. \quad (2.3.33)$$



Nous allons démontrer dans ce qui suit qu'il y a identité entre les deux ensembles E_1 et E_2 ,

$$E_1 = E_2. \quad (2.3.34)$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que tel ne soit pas le cas. On pourrait alors d'après le lemme 2.3.2 trouver,

$$y_0 \in E_2 \setminus E_1, \quad y_0 = (y'_0, y''_0) \text{ avec } y'_0 \in \mathbb{R}^{r_1+s_1}, \quad y''_0 \in \mathbb{R}^{2n-r_1-s_1}.$$

On déduit alors de (2.3.33) que $y'_0 \notin C$. Rappelons maintenant un résultat géométrique élémentaire dont nous allons user à plusieurs reprises : l'intersection d'une droite réelle et d'une quadrique réelle est soit réduite à 0, 1 ou 2 points, soit la droite est entièrement contenue dans la quadrique. Commençons par démontrer que,

$$\mathbb{R}^{r_1+s_1} \times \{y'' = y''_0\} \subset E_2. \quad (2.3.35)$$

En effet, plaçons-nous dans le sous-espace affine,

$$F = \{y \in \mathbb{R}^{2n} : y'' = y''_0\}.$$

On identifie pour simplifier notre propos l'espace F à l'espace $\mathbb{R}^{r_1+s_1}$. On conviendra pour simplifier les explications qui vont suivre (et ce, de manière quelque peu abusive) de dire que le point x'_0 de $\mathbb{R}^{r_1+s_1}$ appartient à l'ensemble E_2 pour signifier que le point (x'_0, y''_0) appartient à l'ensemble E_2 . Avec cette convention, il suffit pour démontrer l'inclusion (2.3.35) de considérer des droites particulières passant par le point y'_0 de $\mathbb{R}^{r_1+s_1}$ et qui coupent le cône C en au moins deux autres points distincts u'_0, v'_0 , comme celles figurant sur la figure 2.7. Ces droites D sont alors nécessairement contenues dans la quadrique E_2 car comme d'après le lemme 2.3.2, $E_1 \subset E_2$, il y a alors par construction au moins trois points distincts d'intersection entre ces droites et la quadrique E_2 ,

$$(u'_0, y''_0) \in C \times \mathbb{R}^{2n-r_1-s_1} = E_1 \subset E_2, \quad (v'_0, y''_0) \in C \times \mathbb{R}^{2n-r_1-s_1} = E_1 \subset E_2 \\ \text{et } (y'_0, y''_0) \in E_2.$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

On montre ainsi par exemple que le disque grisé apparaissant sur la figure 2.8 est entièrement contenu dans l'ensemble E_2 . En utilisant ensuite la structure de cône de l'ensemble E_2 , on en déduit que tout l'intérieur du cône C (cf. figure 2.9) est contenu dans E_2 . Puis en utilisant encore d'autres intersections particulières avec des droites comme sur la figure 2.10, on en déduit d'après notre identification de l'espace F avec $\mathbb{R}^{r_1+s_1}$ que l'inclusion (2.3.35) est vérifiée.

FIG. 2.7 -

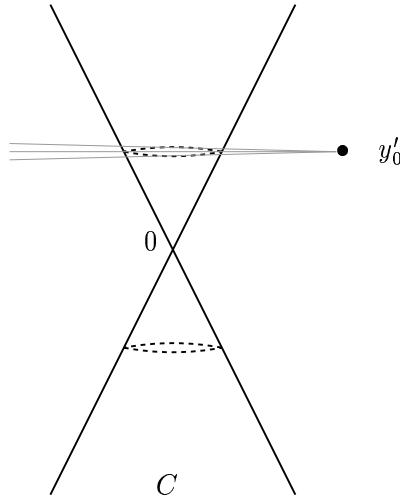
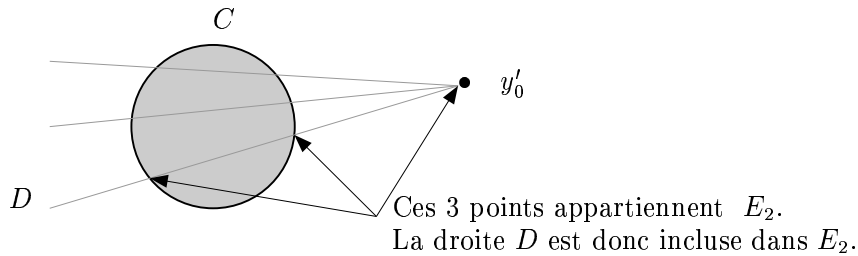


FIG. 2.8 -



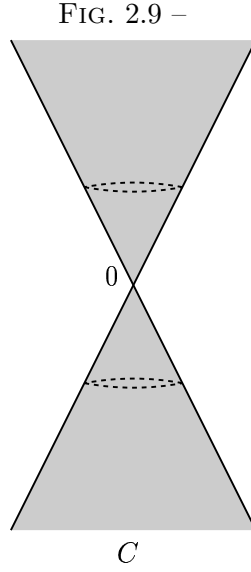
Nous allons maintenant démontrer que dans ces conditions, on a l'identité,

$$E_2 = \mathbb{R}^{2n}. \quad (2.3.36)$$

En effet, considérons $(\tilde{y}'_0, \tilde{y}''_0) \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{r_1+s_1} \times \mathbb{R}^{2n-r_1-s_1}$. Si $\tilde{y}'_0 \in C$ alors,

$$(\tilde{y}'_0, \tilde{y}''_0) \in E_2,$$

car d'après (2.3.29) et (2.3.33), $(\tilde{y}'_0, \tilde{y}''_0) \in E_1$ et $E_1 \subset E_2$. Si par contre $\tilde{y}'_0 \notin C$, on peut choisir $u \in \mathbb{R}^{r_1+s_1}$ distinct du point \tilde{y}'_0 tel que $u \notin C$ et tel que la droite joignant \tilde{y}'_0 à u dans $\mathbb{R}^{r_1+s_1}$ intersecte C en au moins deux points distincts notés v et w (cf. figure 2.11). On peut ainsi trouver des réels distincts $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$



tels que,

$$v = (1 - t_1)\tilde{y}'_0 + t_1u \in C \text{ et } w = (1 - t_2)\tilde{y}'_0 + t_2u \in C.$$

Considérons maintenant la droite D de \mathbb{R}^{2n} admettant la paramétrisation suivante,

$$D := \{(1 - t)(\tilde{y}'_0, \tilde{y}''_0) + t(u, y''_0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Cette droite réelle contient alors par construction au moins trois points distincts de E_2 :

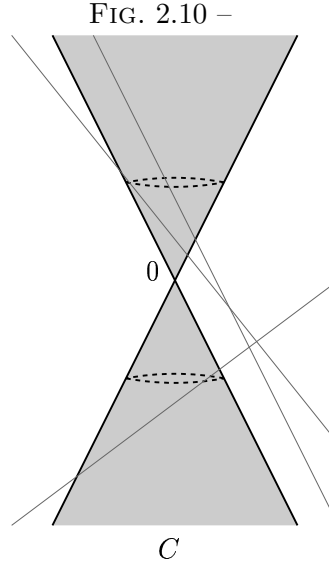
$$(v, (1 - t_1)\tilde{y}''_0 + t_1y''_0), (w, (1 - t_2)\tilde{y}''_0 + t_2y''_0) \text{ et } (u, y''_0).$$

En effet, c'est une conséquence du fait que v et w appartiennent à C et des identités (2.3.29), (2.3.33) et (2.3.35). La droite D est donc incluse dans la quadrique E_2 ce qui induit que dans ce cas aussi $(\tilde{y}'_0, \tilde{y}''_0) \in D \subset E_2$. On vient ainsi de démontrer que si les deux ensembles E_1 et E_2 étaient distincts alors l'ensemble E_2 est égal à l'espace \mathbb{R}^{2n} . Ce fait induit alors au regard de (2.3.28) que la forme quadratique p est identiquement nulle. Il s'ensuit en revenant au système de coordonnées initiales $(x, \xi) = Py$ que d'après (2.3.24), la forme quadratique $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x, \xi)$ est alors également identiquement nulle. Or, ceci ne peut pas être le cas d'après la proposition 2.1.4 puisque nous étudions ici un opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ qui est supposé *non normal*. Ceci termine notre raisonnement par l'absurde pour démontrer l'identité (2.3.34),

$$E_1 = E_2.$$

Ce fait étant acquis, reprenons notre discussion et le premier raisonnement par l'absurde qui supposait l'existence d'un élément $z \in \tilde{B} \setminus \partial\Sigma(q)$ dans les lignes précédant (2.3.22). Considérons maintenant $y_0 \notin E_1 = E_2$. Ceci est possible puisque nous venons de voir que la *non normalité* de l'opérateur $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ imposait que la forme quadratique p définie en (2.3.24) soit non identiquement nulle ce qui induit au regard de (2.3.28) que,

$$E_1 = E_2 \neq \mathbb{R}^{2n}.$$



Les quantités $r(y_0)$ et $p(y_0)$ sont donc non nulles d'après (2.3.26) et (2.3.28). Soit λ un élément de \mathbb{R}^* tel que $p(y_0) = \lambda r(y_0)$ et considérons la forme quadratique,

$$\tilde{r}(y) := p(y) - \lambda r(y). \quad (2.3.37)$$

Il découle de (2.3.26), (2.3.28), (2.3.34) et (2.3.37) que,

$$E_1 \subset \{y \in \mathbb{R}^{2n} : \tilde{r}(y) = 0\}. \quad (2.3.38)$$

Cette inclusion (2.3.38) est stricte puisque par construction $\tilde{r}(y_0) = 0$ et que $y_0 \notin E_1$. En reprenant exactement le même raisonnement géométrique décrit dans les lignes précédentes pour démontrer (2.3.34) qui utilise des considérations d'intersections entre des droites et une quadrique, on démontre que la forme quadratique \tilde{r} est dans ces conditions nécessairement identiquement nulle. Il s'ensuit d'après (2.3.37) que,

$$p = \lambda r. \quad (2.3.39)$$

Enfin en revenant au système de coordonnées initiales $(x, \xi) = Py$, on obtient en utilisant (2.3.23), (2.3.24), (2.3.27) et (2.3.39) que,

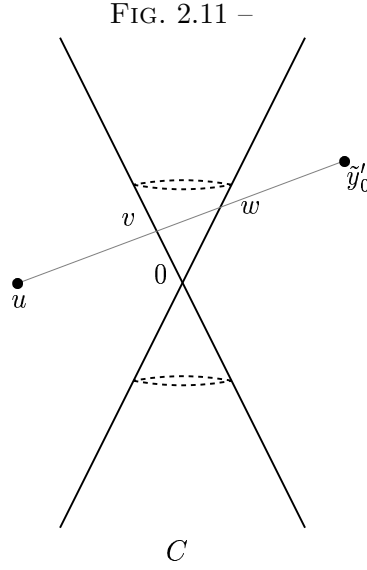
$$\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x, \xi) = \lambda \left(\text{Im}q(x, \xi) - \frac{\text{Im}z}{\text{Re}z} \text{Re}q(x, \xi) \right). \quad (2.3.40)$$

Si on considère maintenant $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $q(x_0, \xi_0) \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$ ce qui est possible puisque l'image numérique $\Sigma(q)$ est dans le cas que nous étudions un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement positive et strictement plus petite que π , on déduit de (2.3.9) et (2.3.20) que nécessairement,

$$\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0) = 0.$$

Ceci induit d'après (2.3.40) que,

$$\text{Im}q(x_0, \xi_0) = \frac{\text{Im}z}{\text{Re}z} \text{Re}q(x_0, \xi_0), \quad (2.3.41)$$



car $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme d'après (2.3.23) et la structure de l'image numérique $\Sigma(q)$,

$$q(x_0, \xi_0) \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\} \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\},$$

l'identité (2.3.41) montre que le point z appartient aussi à l'ensemble $\partial\Sigma(q)$. Mais ceci est contraire à notre hypothèse initiale,

$$z \in \tilde{B} \setminus \partial\Sigma(q).$$

Finalement, ceci termine notre raisonnement par l'absurde et nous permet d'obtenir l'identité,

$$\tilde{B} = \partial\Sigma(q), \quad (2.3.42)$$

que nous voulions démontrer. Il découle ensuite de l'union disjointe (2.3.7) la seconde identité,

$$\tilde{A} = \overset{\circ}{\Sigma}(q), \quad (2.3.43)$$

annoncée au début du paragraphe 2.3.b.1.2.

Nous avons ainsi démontré dans cette section que pour tout opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* $q(x, \xi)^w$ en dimension $n \geq 2$, il y a présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$ qui est un sous-ensemble du plan complexe possédant la structure d'un secteur angulaire ouvert de sommet 0 avec une ouverture strictement positive et strictement plus petite que π . Ce résultat montre que les hautes énergies des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* $q(x, \xi)^w$ en dimension $n \geq 2$ sont très instables sous de petites perturbations. En effet, l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique $\overset{\circ}{\Sigma}(q)$ montre en délaissant le cadre semi-classique qui était le nôtre jusqu'à présent pour revenir à un cadre classique ($h = 1$) via le changement de variables précisé en (1.5.2) au chapitre 1 que pour tout $z \in \overset{\circ}{\Sigma}(q)$, la résolvante de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ explose en norme le long de

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

la demi-droite $z\mathbb{R}_+$ de la manière suivante,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \left\| (q(x, \xi)^w - z\eta)^{-1} \right\| \geq C\eta^N, \quad (2.3.44)$$

et ce, même si cette demi-droite ne rencontre pas le spectre de l'opérateur $q(x, \xi)^w$.

2.3.b.2 Une autre démonstration de l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini.

Considérons $q(x, \xi)^w$ un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* en dimension $n \geq 2$. Nous allons dans les lignes qui suivent donner une autre démonstration de l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini pour tous les points de l'intérieur de l'image numérique $\Sigma(q)$ qui n'appartiennent pas à certaines demi-droites singulières. Comme précédemment, on peut supposer après une similitude et une réduction symplectique que la forme quadratique Req vérifie (2.3.6). En utilisant cette définie positivité de la forme quadratique Req induite par (2.3.6), on peut via une réduction simultanée des formes quadratiques Req et $\text{Im}q$ trouver un isomorphisme P de \mathbb{R}^{2n} tel que dans les nouvelles coordonnées $y = P^{-1}(x, \xi)$, on ait,

$$\begin{aligned} r_1(y) = \text{Req}(Py) &= \sum_{j=1}^{2n} y_j^2 \text{ et} \\ r_2(y) = \text{Im}q(Py) &= \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j y_j^2 \text{ avec } \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_n. \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

Etudions le cas où les formes différentielles $dr_1(y)$ et $dr_2(y)$ forment un système lié sur \mathbb{R} i.e. il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que,

$$\lambda dr_1(y) + \mu dr_2(y) = 0. \quad (2.3.46)$$

Il découle de (2.3.45) et (2.3.46) que pour tout $j = 1, \dots, 2n$,

$$(\lambda + \mu\alpha_j)y_j = 0. \quad (2.3.47)$$

Si $y \neq 0$, il existe alors $j_0 \in \{1, \dots, 2n\}$ tel que $y_{j_0} \neq 0$, ce qui implique,

$$\lambda + \mu\alpha_{j_0} = 0. \quad (2.3.48)$$

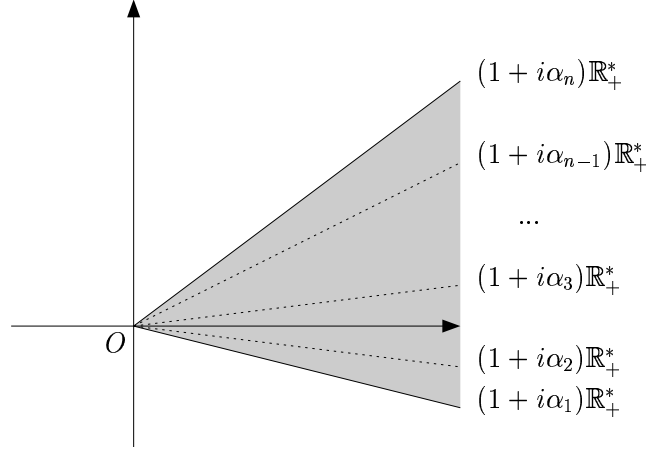
On déduit alors de (2.3.47) et (2.3.48) que $y_j = 0$ si $\alpha_j \neq \alpha_{j_0}$. Ce dernier résultat induit que si,

$$z \in \Sigma(q) \setminus ((1 + i\alpha_1)\mathbb{R}_+^* \cup \dots \cup (1 + i\alpha_n)\mathbb{R}_+^*),$$

alors les différentielles $d\text{Req}$ et $d\text{Im}q$ sont indépendantes sur \mathbb{R} en tout point de l'ensemble $q^{-1}(z)$. Considérons donc,

$$z \in \Sigma(q) \setminus ((1 + i\alpha_1)\mathbb{R}_+^* \cup \dots \cup (1 + i\alpha_n)\mathbb{R}_+^*).$$

FIG. 2.12 –



Comme on travaille dans l'espace \mathbb{R}^{2n} avec $n \geq 2$, on peut appliquer le lemme 3.1 de [7] (voir aussi le lemme 8.1 de [20]). Il s'ensuit que pour toute partie connexe et compact Γ de l'ensemble $q^{-1}(z)$, on a

$$\int_{\Gamma} \{\text{Re}q, \text{Im}q\}(\rho) \lambda_{q,z}(d\rho) = 0, \quad (2.3.49)$$

si $\lambda_{q,z}$ désigne ci-dessus la mesure de Liouville qui satisfait à l'identité,

$$\lambda_{q,z} \wedge d\text{Re}q \wedge d\text{Im}q = \frac{\sigma^n}{n!}.$$

Les faits que les différentielles $d\text{Re}q$ et $d\text{Im}q$ soient indépendantes sur l'ensemble $q^{-1}(z)$ et que $z \in \Sigma(q)$ impliquent que l'ensemble $q^{-1}(z)$ est une sous-variété non vide de codimension 2 de \mathbb{R}^{2n} . De plus en utilisant que $z \in \Sigma(q)$, on déduit de (2.3.8) et (2.3.43) qu'il existe un couple $(x_0, \xi_0) \in q^{-1}(z)$ tel que,

$$\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x_0, \xi_0) \neq 0. \quad (2.3.50)$$

L'identité (2.3.49) valable pour toute partie connexe et compact Γ de l'ensemble $q^{-1}(z)$ entraîne au regard de (2.3.50) l'existence d'un couple $(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) \in q^{-1}(z)$ tel que,

$$\{\text{Re}q, \text{Im}q\}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) < 0.$$

Comme

$$\{\text{Re}(q - z), \text{Im}(q - z)\}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) = \{\text{Re}q, \text{Im}q\}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}_0) < 0,$$

on peut alors appliquer le critère d'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de M.Zworski rappelé au théorème 1.3.2 du chapitre 1. Ceci démontre l'inclusion,

$$\mathring{\Sigma}(q) \setminus ((1 + i\alpha_1)\mathbb{R}_+^* \cup \dots \cup (1 + i\alpha_n)\mathbb{R}_+^*) \subset \Lambda_{\infty}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w),$$

qui démontre l'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tous les points de l'intérieur de l'image numérique privée d'un nombre fini de demi-droites singulières $(1 + i\alpha_1)\mathbb{R}_+^*, \dots, (1 + i\alpha_n)\mathbb{R}_+^*$.

2.3.b.3 Etude pseudo-spectrale sur la frontière de l'image numérique.

Les résultats du paragraphe précédent ont montré que les hautes énergies de tout opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* $q(x, \xi)^w$ en dimension $n \geq 2$, étaient très instables sous de petites perturbations. En effet, ces résultats ont mis en évidence la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique de ces opérateurs. Cette présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini induit pour ces opérateurs l'existence de régions du plan complexe pouvant être lointaines de leurs spectres sur lesquelles leurs résolvantes explosent en norme. Nous voulons dans ce paragraphe essayer de préciser la géométrie de ces régions en donnant une description fine des ensembles ε -pseudo-spectraux de ces opérateurs analogue à celle donnée par la conjecture de Boulton pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Pour ce faire, nous allons étudier l'éventuelle existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q)$. Nous prêterons une attention particulière à préciser quelle est la perte de puissance de h qui apparaît dans le cas d'une absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini. En effet, comme nous l'avons déjà mentionné et comme nous le verrons explicitement au chapitre 4 de cette thèse, c'est le résultat d'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$ sur la frontière de l'image numérique privée de l'origine de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint qui permet de démontrer la conjecture de Boulton.

Commençons par poser notre cadre d'étude et fixer certaines terminologies. On considère dans ce paragraphe $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal*. On a déjà précisé à la section 2.3.b que l'image numérique $\Sigma(q)$ était dans ce cas un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement positive et strictement plus petite que π . La frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q)$ possède donc la structure suivante,

$$\partial\Sigma(q) = \{0\} \sqcup \Delta_1 \sqcup \Delta_2, \quad (2.3.51)$$

où Δ_1 et Δ_2 désignent deux demi-droites ouvertes de sommet 0. Pour $j \in \{1, 2\}$ et $z \in \Delta_j$, on dira dans ce qui suit et ce, conformément aux définitions du chapitre 27 de [12] que le symbole $p(x, \xi) := q(x, \xi) - z$ est d'ordre $k(x_0, \xi_0)$ au point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ si $k(x_0, \xi_0)$ désigne l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par,

$$k(x_0, \xi_0) = \sup \{j \in \mathbb{Z} : p_I(x_0, \xi_0) = 0, \forall 1 \leq |I| \leq j\},$$

si $I = (i_1, i_2, \dots, i_k) \in \{1, 2\}^k$, $|I| = k$ et si le symbole p_I est défini par les crochets de Poisson itérés (cf. chapitre 27, section 27.2 dans [12]),

$$p_I = H_{p_{i_1}} H_{p_{i_2}} \dots H_{p_{i_{k-1}}} p_{i_k},$$

où $p = p_1 + ip_2$ et $p_j \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, $j \in \{1, 2\}$. L'ordre du symbole q au point z est ensuite défini comme le maximum des ordres du symbole $p = q - z$ en tout point $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant $p(x_0, \xi_0) = q(x_0, \xi_0) - z = 0$. Comme le symbole q est une forme quadratique et que pour tout I , $|I| > 1$, les crochets de Poisson itérés p_I sont encore des formes quadratiques en les variables (x, ξ) , ces crochets de Poisson itérés possèdent tous une propriété d'homogénéité de degré 2 induisant

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

le fait que l'ordre de q en tout point de la demi-droite ouverte Δ_j est le même. On désignera dans ce qui suit par $k_j \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ cet ordre commun et on dira plus simplement lors de notre étude de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ que k_j est l'ordre de la demi-droite ouverte Δ_j de $\partial\Sigma(q)$. Les deux exemples suivants montrent que l'ordre d'une telle demi-droite ouverte peut prendre des valeurs finies ou infinies.

Exemple 1. Considérons tout d'abord la forme quadratique elliptique définie sur \mathbb{R}^{2n} ,

$$q_1(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^2 + \dots + \xi_n^2 + x_n^2 + ix_1^2.$$

Comme pour tout $(x, \xi) \neq (0, 0)$,

$$x_1^2(\xi_1^2 + x_1^2 + \dots + \xi_n^2 + x_n^2)^{-1} \leq 1, \quad (2.3.52)$$

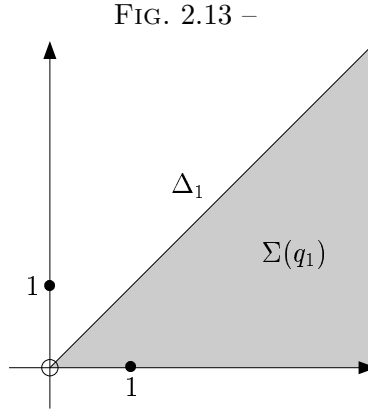
on en déduit que l'image numérique $\Sigma(q_1)$ est donnée par,

$$\{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \pi/4\} \cup \{0\}.$$

Si on note $\Delta_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité (2.3.52) induit que,

$$\begin{aligned} & \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : q_1(x, \xi) \in \Delta_1\} \\ &= \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : x_1 \neq 0; \forall j > 1, x_j = 0; \forall j = 1, \dots, n, \xi_j = 0\}. \end{aligned}$$

Considérons $z_1 = 1 + i \in \Delta_1$. On a



$$\begin{aligned} & \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : q_1(x, \xi) = z_1\} \\ &= \{x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1; \forall j > 1, x_j = 0; \forall j = 1, \dots, n, \xi_j = 0\}, \quad (2.3.53) \end{aligned}$$

et un calcul direct montre que,

$$\{\text{Re}q_1, \text{Im}q_1\}(x, \xi) = 4x_1\xi_1 \text{ et } H_{\text{Re}q_1}^2 \text{Im}q_1 = 8\xi_1^2 - 8x_1^2. \quad (2.3.54)$$

Il s'ensuit au regard de la proposition 2.1.4 que l'opérateur,

$$q_1(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

n'est pas un opérateur normal et que l'ordre du symbole q_1 sur la demi-droite Δ_1 est d'après (2.3.53) et (2.3.54), fini et égal à 2.

Exemple 2. Considérons la forme quadratique elliptique définie sur \mathbb{R}^{2n} ,

$$q_2(x, \xi) = \xi_1^2 + x_1^2 + \dots + \xi_n^2 + x_n^2 + i(2\xi_1^2 + 2x_1^2 + \xi_2^2).$$

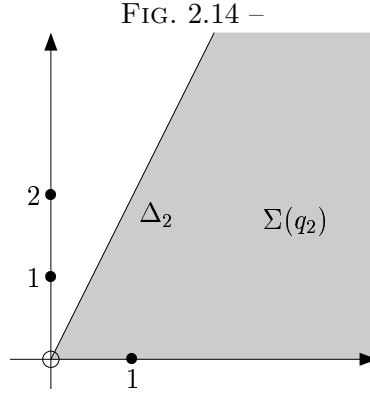
Comme pour tout $(x, \xi) \neq (0, 0)$,

$$(2\xi_1^2 + 2x_1^2 + \xi_2^2)(\xi_1^2 + x_1^2 + \dots + \xi_n^2 + x_n^2)^{-1} \leq 2,$$

on en déduit que l'image numérique $\Sigma(q_2)$ est donnée par,

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im}z \leq 2\text{Re}z\}.$$

Si on note maintenant $\Delta_2 = (1 + 2i)\mathbb{R}_+^*$, on a



$$\begin{aligned} \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : q_2(x, \xi) = 1 + 2i\} = \\ \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : x_1^2 + \xi_1^2 = 1; \forall j > 1, x_j = \xi_j = 0\}, \end{aligned} \quad (2.3.55)$$

et un calcul direct donne que,

$$\{\text{Re}q_2, \text{Im}q_2\}(x, \xi) = -4x_2\xi_2. \quad (2.3.56)$$

L'identité (2.3.56) montre que l'opérateur $q_2(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ n'est pas un opérateur normal. En utilisant cette identité (2.3.56), il est facile de vérifier en conservant les notations précédentes et ce, par récurrence que les formes quadratiques $(q_2)_I$ pour $|I| \geq 2$ sont de la forme,

$$(q_2)_I(x, \xi) = ax_2^2 + bx_2\xi_2 + c\xi_2^2, \quad (2.3.57)$$

avec a, b et c des nombres réels. Si on pose ensuite $p = q_2 - (1 + 2i)$, on obtient d'après (2.3.55) et (2.3.57) que,

$$q_2(x_0, \xi_0) = 1 + 2i \Rightarrow \forall |I| \geq 1, p_I(x_0, \xi_0) = 0.$$

Ceci montre que l'ordre du symbole q_2 sur la demi-droite Δ_2 est infini. Profitons de cet exemple pour constater que dans un tel cas d'ordre infini, on ne peut pas

espérer contrôler la norme de la résolvante de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$ sur une zone de l'image numérique proche de la demi-droite Δ_2 plus vaste qu'une région de la forme,

$$\{z \in \Sigma(q_2) : d(z, \Delta_2) \leq C\}, \quad (2.3.58)$$

où C désigne une constante strictement positive. En effet, on peut vérifier dans le cas présent grâce au théorème 2.1.5 que l'opérateur,

$$q_2(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

possède une suite de valeurs propres régulièrement espacées sur une demi-droite parallèle à Δ_2 . Ce fait constitue une obstruction à un contrôle de la norme de la résolvante sur une zone proche de la demi-droite Δ_2 plus étendue de l'image numérique qu'une région de la forme (2.3.58).

Dans cette section 2.3.b.3, nous allons démontrer qu'il n'y a jamais de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en 0 et plus précisément qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 en 0,

$$0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

D'après (2.3.1), ce résultat sera une conséquence de l'estimation a priori suivante,

$$\exists C > 0, \forall h > 0, \forall u \in B, \|q(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

que nous allons établir dans les lignes à venir. Comme d'après la proposition 2.1.3 l'opérateur $q(x, h\xi)^w + z$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 pour tout $h > 0$ et $z \in \mathbb{C}$, cette estimation a priori permet seulement en revenant au cadre classique ($h = 1$) de borner la norme de la résolvante de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ sur certains disques centrés en 0. Ce résultat n'apporte donc pas d'information sur la géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux. Par contre, l'étude de la présence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur les demi-droites ouvertes Δ_1 et Δ_2 de (2.3.51) est beaucoup plus intéressante pour préciser selon l'ordre de ces demi-droites la géométrie de ces ensembles.

Dans le cas où l'ordre k_j de la demi-droite ouverte Δ_j , $j \in \{1, 2\}$ est *fini*, nous allons démontrer que cet ordre k_j est nécessairement *pair* et qu'en tout point de cette demi-droite ouverte Δ_j , il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice $k_j/(k_j + 1)$,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_{k_j/(k_j+1)}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

Comme d'après la proposition 2.1.3, l'opérateur $q(x, \xi)^w + z$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 pour tout $z \in \mathbb{C}$, l'inclusion précédente induit au regard de notre discussion de la section 1.5 du chapitre 1 qu'il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que la résolvante de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ reste bornée en norme sur la région suivante de l'ensemble résolvant,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1 \text{ et } d(\Delta_j, u) \leq C_2 |\text{proj}_{\Delta_j} u|^{\frac{1}{k_j+1}}\},$$

où $\text{proj}_{\Delta_j} u$ désigne la projection orthogonale de u sur la demi-droite fermée $\overline{\Delta_j}$.

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Dans le cas où l'ordre k_j de la demi-droite ouverte Δ_j , $j \in \{1, 2\}$ est *infini*, l'exemple 2 de la section 2.3.b.3 montre d'après cette même discussion de la section 1.5 que l'on ne peut pas espérer démontrer un résultat meilleur que l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1. Nous allons démontrer que ce résultat,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c,$$

est vérifié pour une très large classe d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* en dimension $n \geq 2$. Cela sera par exemple le cas de tous ces opérateurs en dimension $n = 2$. Malheureusement, comme nous l'évoquions lors de notre introduction, nous ne savons toujours pas actuellement si ce résultat est vérifié en toute généralité même si on peut le penser.

Concernant les ingrédients nécessaires aux démonstrations qui vont suivre, nous allons utiliser le résultat de N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski, Théorème 1.4 dans [7] pour démontrer l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $k_j/(k_j + 1)$ sur les demi-droites Δ_j d'ordre *fini*. Pour établir les résultats du théorème 1.6.7 dans le cas de demi-droites Δ_j d'ordre *infini*, nous aurons cette fois recours à l'étude de la décroissance en temps de la norme du semi-groupe à contractions $e^{tzq(x, \xi)^w}$ pour des valeurs particulières du nombre complexe non nul z . Nous devons pour ce faire établir des estimations fines sur le symbole de Weyl de ce semi-groupe à partir de la formule de Mehler démontrée par L.Hörmander dans [13].

2.3.b.3.1 Absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 en 0.

Comme précédemment, on peut supposer après une similitude et une réduction symplectique linéaire réelle que la forme quadratique $\text{Re}q$ vérifie (2.3.6). Il s'ensuit que pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} & 2\text{Re}(q(x, h\xi)^w u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j (\|hD_{x_j} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|x_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) + ([I, i\text{Im}q(x, h\xi)^w] u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j (\|hD_{x_j} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|x_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \\ &\geq \sum_{j=1}^n \lambda_j \|hD_{x_j} u + ix_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq h \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned} \quad (2.3.59)$$

puisque pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} & \|hD_{x_j} u + ix_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \|hD_{x_j} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + 2\text{Re}(hD_{x_j} u, ix_j u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|x_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \|hD_{x_j} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + ([hD_{x_j}, ix_j] u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|x_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\geq ([hD_{x_j}, ix_j] u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = h \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2. \end{aligned} \quad (2.3.60)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

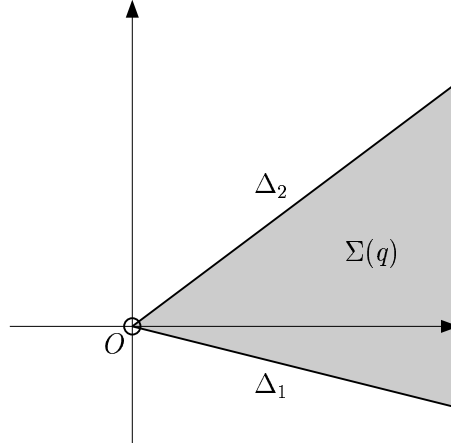
On déduit de (2.3.59) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz l'estimation,

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall h > 0, \|q(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{h}{2} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

qui peut être étendue à l'espace B par densité. Cette estimation a priori montre qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'injectivité d'indice 1 en 0. Comme d'après (2.3.1), les deux notions de pseudo-spectre semi-classique coïncident, on en déduit que pour tout opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* $q(x, \xi)^w$ en dimension $n \geq 2$, il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 en 0,

$$0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

FIG. 2.15 –



2.3.b.3.2 Cas où l'ordre de la demi-droite Δ_j est fini.

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que si Δ_j est une demi-droite ouverte de $\partial\Sigma(q)$ d'ordre *fini* k_j pour le symbole q , alors cet ordre est nécessairement *pair* et il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice $k_j/(k_j+1)$ sur cette demi-droite ouverte Δ_j ,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_{k_j/(k_j+1)}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

Après avoir effectué les mêmes réductions que lors de l'étude en 0 du paragraphe 2.3.b.3.1, on peut supposer que la forme quadratique $\text{Re}q$ vérifie (2.3.6). Ensuite, compte tenu de la densité de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace B et comme d'après (2.3.1),

$$\lambda_{k_j/(k_j+1)}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w) = \Lambda_{k_j/(k_j+1)}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w),$$

il suffit pour démontrer ces résultats de démontrer le théorème suivant.

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Théorème 2.3.3. *Si la demi-droite ouverte Δ_j est d'ordre fini k_j pour le symbole q alors cet ordre est nécessairement pair et on a l'estimation a priori,*

$$\forall z \in \Delta_j, \exists h_0 > 0, \exists C > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.61)$$

Preuve. Considérons le symbole r appartenant à l'espace $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ désignant l'espace des fonctions C^∞ qui sont bornées sur \mathbb{R}^{2n} ainsi que toutes leurs dérivées,

$$r(x, \xi) := \frac{q(x, \xi) - z}{1 + x^2 + \xi^2}, \quad (2.3.62)$$

pour $z \in \Delta_j$. Remarquons premièrement que le fait que $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$ induit que $0 \in \partial\tilde{\Sigma}(r)$ si on note,

$$\tilde{\Sigma}(r) = \overline{r(\mathbb{R}^{2n})}.$$

Constatons aussi que ce symbole r vérifie la condition de *type principal* en 0. En effet s'il existait un couple (x_0, ξ_0) de \mathbb{R}^{2n} vérifiant $r(x_0, \xi_0) = 0$ et $dr(x_0, \xi_0) = 0$, on obtiendrait à partir de (2.3.62) que,

$$dq(x_0, \xi_0) = 0. \quad (2.3.63)$$

Comme après nos diverses réductions la forme quadratique Req vérifie (2.3.6), on obtiendrait ensuite à partir de (2.3.63) que,

$$d\text{Req}(x_0, \xi_0) = 2 \sum_{j=1}^n \lambda_j ((x_0)_j dx_j + (\xi_0)_j d\xi_j) = 0,$$

ce qui induirait comme $\lambda_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, n$ que $(x_0, \xi_0) = (0, 0)$ et $q(x_0, \xi_0) = 0$ puisque q est une forme quadratique. Or, ceci est impossible puisque comme $r(x_0, \xi_0) = 0$, on doit avoir d'après (2.3.62), $q(x_0, \xi_0) = z \neq 0$ car,

$$z \in \Delta_j \subset \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}.$$

Notons aussi au regard de l'expression (2.3.62) que le fait que le point z soit d'ordre fini k_j pour le symbole q induit que le point 0 soit également d'ordre fini k_j pour le symbole r et que les identités (2.3.6) et (2.3.62) imposent que l'ensemble,

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : r(x, \xi) = 0\} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : q(x, \xi) = z\},$$

soit un ensemble compact. On peut donc appliquer le théorème 1.4 de [7] qui assure la *parité* de l'entier k_j , $k_j \geq 1$ et l'existence de constantes $h_0 > 0$ et $C_1 > 0$ telles que,

$$\forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|r(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_1 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.64)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Remarque. On n'a pas vérifié que la condition dynamique (1.7) du théorème 1.4 de [7] était remplie car cette hypothèse est superflue pour la démonstration du théorème 1.4. La démonstration de ce théorème n'utilise en effet qu'une partie de la preuve du lemme 4.1 de [7] (une partie du second paragraphe de cette preuve) où n'intervient pas cette condition (1.7).

Remarquons que d'après le résultat de calcul symbolique donné par le théorème 18.5.4 dans [12] et (2.3.62), on peut écrire que,

$$r(x, h\xi)^w(1 + x^2 + h^2\xi^2)^w = q(x, h\xi)^w - z + hr_1(x, h\xi)^w + h^2r_2(x, h\xi)^w, \quad (2.3.65)$$

si on note,

$$r_1(x, \xi) := -ix \frac{\partial r}{\partial \xi}(x, \xi) + i\xi \frac{\partial r}{\partial x}(x, \xi), \quad (2.3.66)$$

et,

$$r_2(x, \xi) := -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(x, \xi) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2}(x, \xi). \quad (2.3.67)$$

Il est facile de vérifier directement d'après l'expression (2.3.62) que ces fonctions r_1 et r_2 appartiennent à l'espace $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ ce qui induit en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt l'existence d'une constante C_2 strictement positive telle que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq 1$,

$$\|r_1(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.68)$$

et,

$$\|r_2(x, h\xi)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.69)$$

On déduit alors de (2.3.64), (2.3.65), (2.3.68), (2.3.69) et de l'inégalité triangulaire que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h < h_0$,

$$\begin{aligned} & C_1 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|(1 + x^2 + h^2\xi^2)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|r(x, h\xi)^w(1 + x^2 + h^2\xi^2)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_2 h(1 + h) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

Comme d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h \leq 1$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 & \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|xu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|hD_x u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ & = \|(1 + x^2 + h^2\xi^2)^w u, u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|(1 + x^2 + h^2\xi^2)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

on obtient d'après (2.3.70) que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $0 < h < h_0$,

$$C_1 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + C_2 h(1 + h) \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.3.72)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Comme l'entier k_j est supérieur ou égal à 1, on déduit de (2.3.72) qu'il existe des constantes $h'_0 > 0$ et $C_3 > 0$ telles que,

$$\forall 0 < h < h'_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_3 h^{\frac{k_j}{k_j+1}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Ceci termine la preuve du théorème 2.3.3. \square

Remarquons à la lecture de la démonstration précédente qu'elle s'applique sans modification en dimension 1 pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques de type 1. Ce théorème permet ainsi de retrouver l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$ pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint,

$$D_x^2 + e^{i\theta} x^2,$$

lorsque $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta \not\equiv 0[\pi]$. En effet, il suffit pour cela de vérifier que les ordres des demi-droites ouvertes $\Delta_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta_2 = e^{i\theta} \mathbb{R}_+^*$ sont tous les deux égaux à deux. Notons $q(x, \xi) = \xi^2 + e^{i\theta} x^2$. Un calcul direct donne que,

$$\begin{aligned} \{\text{Re}q, \text{Im}q\}(x, \xi) &= 4 \sin \theta x \xi, \quad H_{\text{Re}q}^2 \text{Im}q(x, \xi) = 8 \sin \theta (\xi^2 - \cos \theta x^2) \text{ et} \\ H_{\text{Im}q}^2 \text{Re}q(x, \xi) &= 8 \sin^2 \theta x^2. \end{aligned}$$

Si $z = q(x_0, \xi_0) \in \Delta_1$, il s'ensuit que $x_0 = 0$ et $\xi_0 \neq 0$. Ceci induit que,

$$\begin{aligned} q(x_0, \xi_0) - z &= 0, \quad \{\text{Re}(q - z), \text{Im}(q - z)\}(x_0, \xi_0) = 0 \text{ et} \\ H_{\text{Re}(q-z)}^2 \text{Im}(q - z)(x_0, \xi_0) &= 8 \sin \theta \xi_0^2 \neq 0. \end{aligned}$$

L'ordre de la demi-droite ouverte Δ_1 est donc égal à 2. Si maintenant,

$$z = q(x_0, \xi_0) \in \Delta_2,$$

il s'ensuit que $\xi_0 = 0$, $x_0 \neq 0$ et,

$$\begin{aligned} q(x_0, \xi_0) - z &= 0, \quad \{\text{Re}(q - z), \text{Im}(q - z)\}(x_0, \xi_0) = 0, \\ H_{\text{Im}(q-z)}^2 \text{Re}(q - z)(x_0, \xi_0) &= 8 \sin \theta x_0^2 \neq 0. \end{aligned}$$

L'ordre de la demi-droite ouverte Δ_2 est donc aussi égal à 2. Le théorème précédent permet alors de retrouver l'estimation a priori du théorème 1.6.3 caractéristique de l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$,

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R}_+^* \cup e^{i\theta} \mathbb{R}_+^*, \exists C_z > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \\ \|h^2 D_x^2 u + e^{i\theta} x^2 u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq C_z h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

2.3.b.3.3 Cas où l'ordre de la demi-droite Δ_j est infini.

On suppose dans ce paragraphe que l'ordre k_j du symbole q sur la demi-droite ouverte Δ_j est *infini*. Commençons par mentionner que comme nous l'avons remarqué lors de l'étude de l'exemple 2 de la section 2.3.b.3, la meilleure estimation

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

a priori que l'on peut espérer démontrer pour caractériser l'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en un point z de la demi-droite ouverte Δ_j est une estimation a priori de la forme,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in B, \\ \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.73)$$

i.e. qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 en z ,

$$z \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c,$$

puisque d'après (2.3.1), les deux notions de pseudo-spectre semi-classique et de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique coïncident dans le cas que nous étudions. Malheureusement, nous ne savons pas à l'heure où nous écrivons ces lignes si l'estimation (2.3.73) est vérifiée en général. Néanmoins comme nous allons le voir dans la suite, on sait établir ce résultat pour une large classe d'opérateurs.

Remarque. Dans l'estimation (2.3.73), c'est le caractère *global* de cette estimation qui la rend difficile à obtenir. En effet, on sait établir une version microlocalisée de (2.3.73) au voisinage de tout point (x, ξ) de l'espace des phases vérifiant,

$$q(x, \xi) = z,$$

(les autres points ne posent pas de difficultés). En effet si $z \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, le symbole $q - z$ vérifie la condition (P) et la condition de type principal ce qui permet d'utiliser des résultats de sous-ellipticité comme celui donné par la proposition 26.10.3 dans [12]. Malheureusement, il n'y a aucun gain et aucune marge dans ces estimations qui permettraient de pouvoir les recoller pour en déduire une version globale.

Considérons $z \in \Delta_j$. On rappelle que dans ce qui suit,

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

désigne un opérateur différentiel quadratique elliptique *non normal* en dimension $n \geq 2$ pour lequel on veut établir l'estimation (2.3.73). Notons que quitte à effectuer une rotation i.e. à multiplier le symbole $q - z$ par un nombre complexe $w \in \mathbb{C}$, $|w| = 1$, on peut supposer que,

$$z \in \mathbb{R}_+^*,$$

et que la forme quadratique $\text{Im}q$ est soit positive, soit négative (cf. les figures 2.16 et 2.17).

Considérons le cas où la forme quadratique $\text{Im}q$ est positive. Compte tenu de l'invariance symplectique des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques (2.1.3), on peut d'après la proposition 2.1.8 supposer que,

$$\text{Im}q(x, \xi) = \sum_{j=1}^k \mu_j (\xi_j^2 + x_j^2) + \sum_{j=k+1}^{k+l} x_j^2, \quad (2.3.74)$$

FIG. 2.16 –

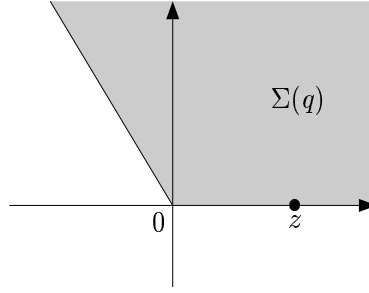
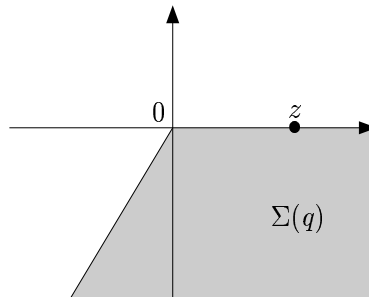


FIG. 2.17 –



avec $k, l \in \mathbb{N}$ et $\mu_j > 0$ pour tout $j = 1, \dots, k$. Soulignons compte tenu de l'invariance symplectique du crochet de Poisson et de la proposition 2.1.4 que les réductions précédentes conservent naturellement la propriété de *non normalité* de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ et l'ordre du symbole q en z . Rappelons aussi que cette propriété de *non normalité* induit comme nous l'avons déjà remarqué lors de l'étude de l'exemple 2 de la section 2.3.a que l'image numérique $\Sigma(q)$ est un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement positive. Ceci implique au regard de (2.3.74) que,

$$k + l \geq 1. \quad (2.3.75)$$

Le cas le plus facile à traiter est celui où $k \geq 1$.

2.3.b.3.3.a Cas où $k \geq 1$.

Dans ce cas, on obtient d'après (2.3.74) que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $h > 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(q(x, h\xi)^w u - zu, iu)_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \sum_{j=1}^k \mu_j (\|hD_{x_j} u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|x_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{k+l} \|x_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2, \quad (2.3.76) \end{aligned}$$

puisque $z \in \mathbb{R}_+^*$ et que l'opérateur $(\operatorname{Re}q)^w$ est formellement auto-adjoint. Puis, il vient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.3.76) que pour tout $h > 0$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \frac{\mu_1}{2} \|hD_{x_1}u + ix_1u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq \mu_1 (\|hD_{x_1}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|x_1u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2) \\ &\leq \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (2.3.77)$$

On déduit alors de (2.3.60) et (2.3.77) l'estimation a priori,

$$\forall h > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{\mu_1}{2} h \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

qui peut être étendue à l'espace B par densité. Ceci démontre l'estimation (2.3.73) dans le cas où $k \geq 1$.

2.3.b.3.3.b Cas où $k = 0$.

On se place maintenant dans le cas où $k = 0$. Il s'ensuit alors d'après (2.3.74) et (2.3.75) que $l \geq 1$ et,

$$\text{Im}q(x, \xi) = \sum_{j=1}^l x_j^2. \quad (2.3.78)$$

Nous ne traiterons pas ce cas dans toute sa généralité. On peut néanmoins démontrer l'estimation (2.3.73) dans certains cas.

• **Cas où $l = n$.** Dans le cas où $l = n$, on a en fait une meilleure estimation que l'estimation a priori (2.3.73). En effet, l'ordre du symbole q en z est alors *fini* et vaut 2. Pour s'en convaincre, écrivons,

$$\text{Re}q(x, \xi) = \sum_{r,s=1}^n a_{r,s} x_r x_s + \sum_{r,s=1}^n b_{r,s} \xi_r \xi_s + \sum_{r,s=1}^n c_{r,s} x_r \xi_s, \quad (2.3.79)$$

avec $a_{r,s} = a_{s,r} \in \mathbb{R}$, $b_{r,s} = b_{s,r} \in \mathbb{R}$, $c_{r,s} \in \mathbb{R}$ pour tout $r, s = 1, \dots, n$ et considérons P une transformation orthogonale de \mathbb{R}^n vérifiant,

$$P^T B P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour tout $j = 1, \dots, n$ et $B = (b_{r,s})_{1 \leq r, s \leq n}$. Compte tenu de l'invariance symplectique de l'objet de notre étude, on peut en utilisant la transformation symplectique linéaire réelle $(x, \xi) \mapsto (Px, P\xi)$ se ramener au cas où,

$$b_{r,r} = \lambda_r \text{ et } b_{r,s} = 0 \text{ si } r \neq s \text{ et } r, s = 1, \dots, n, \quad (2.3.80)$$

tout en gardant l'identité,

$$\text{Im}q(x, \xi) = \sum_{j=1}^n x_j^2, \quad (2.3.81)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

puisque P est une transformation orthogonale de \mathbb{R}^n . La condition d'ellipticité de q et la forme de l'image numérique $\Sigma(q)$ que l'on considère (cf. figure 2.16) imposent au regard de (2.3.79), (2.3.80) et (2.3.81) que,

$$\lambda_r > 0,$$

pour tout $r = 1, \dots, n$. Un calcul direct montre ensuite que,

$$\{\operatorname{Re}q, \operatorname{Im}q\}(x, \xi) = \sum_{r=1}^n 2x_r \left(2\lambda_r \xi_r + \sum_{s=1}^n c_{s,r} x_s \right), \quad (2.3.82)$$

$$\begin{aligned} H_{\operatorname{Re}q}^2 \operatorname{Im}q(x, \xi) &= \sum_{r=1}^n \left(2\lambda_r \xi_r + \sum_{s=1}^n c_{s,r} x_s \right) \left(4\lambda_r \xi_r + 2 \sum_{s=1}^n (c_{s,r} + c_{r,s}) x_s \right) \\ &\quad - \sum_{r=1}^n 4\lambda_r x_r \left(\sum_{s=1}^n (a_{s,r} + a_{r,s}) x_s + \sum_{s=1}^n c_{r,s} \xi_s \right). \end{aligned} \quad (2.3.83)$$

Si $z = q(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_+^*$, on déduit de (2.3.81) que $x_0 = 0$ et $\xi_0 \neq 0$ ce qui permet d'obtenir d'après (2.3.82) et (2.3.83),

$$q(x_0, \xi_0) - z = 0, \quad \{\operatorname{Re}(q - z), \operatorname{Im}(q - z)\}(x_0, \xi_0) = 0 \text{ et}$$

$$H_{\operatorname{Re}(q-z)}^2 \operatorname{Im}(q - z)(x_0, \xi_0) = 8 \sum_{r=1}^n \lambda_r^2 (\xi_0)_r^2 \neq 0.$$

L'ordre de la demi-droite ouverte \mathbb{R}_+^* est donc fini et vaut 2. Le résultat précédent concernant les cas d'ordre fini (Théorème 2.3.3) montre que dans le cas où $k = 0$ et $l = n$, l'estimation a priori suivante,

$$\forall \tilde{z} \in \mathbb{R}_+^*, \exists C_{\tilde{z}} > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\|q(x, h\xi)^w u - \tilde{z}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_{\tilde{z}} h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

qui peut être étendue à l'espace B par densité, est vérifiée. D'après (2.3.1), il n'y donc pas dans ce cas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 2/3 en tout point de la demi-droite ouverte \mathbb{R}_+^* .

• Jusqu'à présent, nous avons toujours utilisé de techniques de multiplicateurs pour obtenir les estimations d'énergie caractérisant l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini. Une autre approche que nous allons maintenant adopter consiste à étudier le semi-groupe d'évolution,

$$e^{itq(x,\xi)^w}, \quad t \geq 0,$$

associé à l'opérateur $iq(x, \xi)^w$. Cette approche est possible compte tenu du caractère simplement quadratique des opérateurs $q(x, \xi)^w$ que nous étudions. Pour ce faire, nous allons utiliser la formule de Mehler démontrée par L.Hörmander dans [13] qui donne une expression exacte du symbole de Weyl du semi-groupe,

$$e^{itq(x,\xi)^w}.$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Cette formule complètement explicite va nous permettre d'obtenir des estimations assez fines sur ce symbole.

Pour ce faire, commençons par remarquer que comme d'après (2.3.78),

$$\operatorname{Re}(iq) = -\operatorname{Im}q \leq 0,$$

l'opérateur $iq(x, \xi)^w$ génère un semi-groupe à contractions e^{itq^w} , $t \geq 0$,

$$\forall t \geq 0, \|e^{itq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq 1.$$

Le lecteur pourra se référer pour plus de détails sur ce point à la discussion de [13] précédant le théorème 4.2. Constatons maintenant que pour démontrer l'estimation (2.3.73), il suffit de démontrer une estimation de la forme suivante sur la norme du semi-groupe d'évolution,

$$\exists M > 0, \exists a > 0, \forall t \geq 0, \|e^{itq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq Me^{-at}. \quad (2.3.84)$$

En effet, supposons que l'estimation (2.3.84) soit vérifiée. On peut alors d'après le théorème 2.8 de [4] utiliser pour tout $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ la formule intégrale,

$$\begin{aligned} (q(x, \xi)^w - \tilde{z})^{-1} &= i^{-1}(i\tilde{z} - iq(x, \xi)^w)^{-1} \\ &= i^{-1} \int_0^{+\infty} e^{-is\tilde{z}} e^{isq(x, \xi)^w} ds, \end{aligned} \quad (2.3.85)$$

qui jointe à l'estimation (2.3.84) permet d'obtenir pour tout $\tilde{z} \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|(q(x, \xi)^w - \tilde{z})^{-1}\| &\leq \int_0^{+\infty} \|e^{isq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} ds \leq \int_0^{+\infty} Me^{-as} ds \\ &= \frac{M}{a} < +\infty. \end{aligned} \quad (2.3.86)$$

L'utilisation du théorème 2.8 de [4] est bien licite. En effet, la droite $i\mathbb{R}$ est incluse dans l'ensemble résolvant de l'opérateur $iq(x, \xi)^w$ puisque si ce n'était pas le cas, il existerait d'après le théorème 2.1.5, $u_0 \in B \setminus \{0\}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tels que,

$$q(x, \xi)^w u_0 = \lambda_0 u_0.$$

Ceci induirait d'après (2.3.78) que,

$$0 = \operatorname{Im}(q(x, \xi)^w u_0, u_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = (\operatorname{Im}q(x, \xi)^w u_0, u_0)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \sum_{j=1}^l \|x_j u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2,$$

et donc que $u_0 = 0$ puisque $l \geq 1$. Le théorème 2.1.5 montre donc qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que,

$$\sigma(iq(x, \xi)^w) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z \leq \varepsilon_0\},$$

ce qui permet d'appliquer le théorème 2.8 de [4] pour tout $\tilde{z} \in \mathbb{R}$. On déduit de l'estimation a priori (2.3.86) que,

$$\forall \tilde{z} \in \mathbb{R}, \forall u \in B, \|q(x, \xi)^w u - \tilde{z}u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{a}{M} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Cette estimation a priori peut être reformulée dans un cadre semi-classique via le changement de variables (1.5.2) du chapitre 1, $y = h^{1/2}x$ où $h > 0$ pour obtenir que,

$$\forall h > 0, \forall u \in B, \|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{a}{M} h \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.87)$$

ce qui démontre l'estimation a priori (2.3.73).

Nous allons donc dans ce qui suit étudier les cas où l'on sait établir l'estimation (2.3.84). Soulignons avant d'entrer plus en détail qu'il est licite d'user de réductions symplectiques linéaires réelles dans la suite de notre étude car la quantité $\|e^{itq(x,\xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}$ qui nous intéresse est invariante par ces réductions. En effet si χ est une transformation linéaire symplectique réelle, le théorème 2.1.6 montre que,

$$(q \circ \chi)(x, \xi)^w = U^{-1} q(x, \xi)^w U,$$

si U désigne un opérateur métaplectique associé à la transformation χ . Ceci implique au niveau des semi-groupes d'évolution que,

$$\forall t \geq 0, e^{it(q \circ \chi)^w} = U^{-1} e^{itq^w} U,$$

et induit l'invariance annoncée,

$$\forall t \geq 0, \|e^{itq(x,\xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \|e^{itq^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))}.$$

On pourra donc dans ce qui suit se laisser toute liberté concernant le choix des coordonnées symplectiques (x, ξ) dans lesquelles nous étudierons la forme quadratique q .

• **Quelques cas où l'on sait établir l'estimation (2.3.84).** On note F l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q . Sa partie imaginaire $\text{Im}F$ est alors l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique $\text{Im}q$ qui vérifie suite à notre réduction (2.3.78),

$$\text{Im}q(x, \xi) = \sum_{j=1}^l x_j^2,$$

avec $l \geq 1$ et sa partie réelle $\text{Re}F$ est l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique $\text{Re}q$. On peut en utilisant (2.3.78) vérifier que dans le système de coordonnées symplectiques $(x_1, \xi_1, \dots, x_n, \xi_n)$ choisi, on a

$$\text{Im}F = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & J_l & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.88)$$

où,

$$J_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

pour tout $j = 1, \dots, l$. L'expression précédente montre que l'application hamiltonienne $\text{Im}F$ est *nilpotente d'indice 2*. On va effectuer dans ce qui suit un certain nombre de réductions. Pour ce faire, on procède en plusieurs étapes.

Etape 1. Supposons que l'on puisse trouver une décomposition de l'espace des phases $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ en une somme directe de sous-espaces vectoriels symplectiques S_j , $1 \leq j \leq N$ de $T^*\mathbb{R}^n$ symplectiquement orthogonaux et stables par les applications $\text{Re}F$ et $\text{Im}F$ i.e.,

$$T^*\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^N \sigma^\perp S_j, \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{Re}F)S_j \subset S_j \text{ et } (\text{Im}F)S_j \subset S_j. \quad (2.3.89)$$

Considérons maintenant une base symplectique $(e_{1,j}, \varepsilon_{1,j}, \dots, e_{N_j,j}, \varepsilon_{N_j,j})$ de l'espace symplectique S_j . On obtient en réunissant les systèmes de vecteurs précédents une base symplectique de $T^*\mathbb{R}^n$. Les propriétés de stabilité et d'orthogonalité symplectique des espaces S_j permettent alors d'obtenir la décomposition suivante,

$$\begin{aligned} & q(x, \xi) \\ &= \sigma \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ 1 \leq k \leq N_j}} (x_{k,j} e_{k,j} + \xi_{k,j} \varepsilon_{k,j}), F \left(\sum_{\substack{1 \leq j \leq N, \\ 1 \leq k \leq N_j}} (x_{k,j} e_{k,j} + \xi_{k,j} \varepsilon_{k,j}) \right) \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} \sigma \left(\sum_{1 \leq k \leq N_j} (x_{k,j} e_{k,j} + \xi_{k,j} \varepsilon_{k,j}), F \left(\sum_{1 \leq k \leq N_j} (x_{k,j} e_{k,j} + \xi_{k,j} \varepsilon_{k,j}) \right) \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq N} q_j(x_{1,j}, \dots, x_{N_j,j}, \xi_{1,j}, \dots, \xi_{N_j,j}), \end{aligned} \quad (2.3.90)$$

si on pose pour tout $1 \leq j \leq N$,

$$\begin{aligned} q_j(x_{1,j}, \dots, x_{N_j,j}, \xi_{1,j}, \dots, \xi_{N_j,j}) &= \\ & q(0, \dots, 0, x_{1,j}, \dots, x_{N_j,j}, 0, \dots, 0, \xi_{1,j}, \dots, \xi_{N_j,j}, 0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (2.3.91)$$

Notons F_j l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q_j . On déduit de (2.3.89) et (2.3.91) la relation suivante,

$$F_j = \text{Re}F|_{S_j} + i\text{Im}F|_{S_j}.$$

On peut ensuite choisir par la proposition 2.1.8 des bases symplectiques des sous-espaces S_j de sorte que dans les coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{N_j,j}, \xi_{1,j}, \dots, \xi_{N_j,j})$ associées, on ait

$$\text{Im}q_j(x_{1,j}, \dots, x_{N_j,j}, \xi_{1,j}, \dots, \xi_{N_j,j}) = \sum_{k=1}^{l_j} x_{k,j}^2 \text{ avec } 0 \leq l_j \leq N_j. \quad (2.3.92)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Ceci est bien licite car la forme quadratique $\text{Im}q_j$ est positive d'après (2.3.78), (2.3.91) et que l'application hamiltonienne associée $\text{Im}F_j$ est *nilpotente d'indice 2* puisque,

$$\text{Im}F_j = (\text{Im}F)|_{S_j} \text{ et } (\text{Im}F)^2 = 0.$$

Cette propriété de nilpotence d'indice 2 interdit la présence de termes de la forme,

$$\lambda_{k,j}(\xi_{k,j}^2 + x_{k,j}^2),$$

avec $\lambda_{k,j} > 0$ dans la somme (2.3.92). Cette tensorisation (2.3.90) des variables induit l'identité suivante sur les semi-groupes,

$$e^{itq(x,\xi)^w} = \prod_{j=1}^N e^{itq_j(x_{1,j}, \dots, x_{N_j,j}, \xi_{1,j}, \dots, \xi_{N_j,j})^w}, \quad t \geq 0.$$

Comme pour tout $1 \leq j \leq N$, les semi-groupes $e^{itq_j^w}$ sont des semi-groupes à contractions car d'après (2.3.92), $\text{Re}(iq_j) = -\text{Im}q_j \leq 0$, il suffit donc pour établir l'estimation (2.3.84) de trouver un entier $1 \leq j_0 \leq N$ tel que,

$$\exists M_0 > 0, \exists a_0 > 0, \forall t \geq 0, \|e^{itq_{j_0}^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{N_{j_0}}))} \leq M_0 e^{-a_0 t}.$$

Cette remarque va nous permettre de réduire notre étude au cas où l'application hamiltonienne F associée à la forme quadratique q ne possède pas de valeurs propres imaginaires pures. C'est l'objet de l'étape suivante.

Etape 2. Commençons par démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.3.4. *Soit λ une valeur propre imaginaire pure de l'application hamiltonienne F alors cette valeur propre λ est nécessairement non nulle,*

$$\lambda \neq 0,$$

et le sous-espace vectoriel complexe $\text{Ker}(F + \lambda)$ est le sous-espace vectoriel complexe conjugué du sous-espace propre $\text{Ker}(F - \lambda)$. Si on considère ensuite,

$$S_\lambda := (\text{Ker}(F - \lambda) \oplus \text{Ker}(F + \lambda)) \cap T^*\mathbb{R}^n,$$

alors l'espace vectoriel $\text{Ker}(F - \lambda) \oplus \text{Ker}(F + \lambda)$ est une complexification de l'espace S_λ . De plus, S_λ possède une structure d'espace vectoriel symplectique, S_λ est stable par l'application hamiltonienne $\text{Re}F$ et vérifie,

$$\text{Im}F S_\lambda = \{0\}.$$

De plus, si μ est une autre valeur propre imaginaire pure de F distincte de λ et $-\lambda$, alors on a la somme directe symplectiquement orthogonale,

$$S_\lambda \oplus^{\sigma^\perp} S_\mu \subset T^*\mathbb{R}^n,$$

si l'on note,

$$S_\mu := (\text{Ker}(F - \mu) \oplus \text{Ker}(F + \mu)) \cap T^*\mathbb{R}^n.$$

Preuve. Soit λ une valeur propre imaginaire pure de F . La proposition 4.4 de [13] appliquée à la forme quadratique iq définie en (2.3.78) montre que le sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^{2n} ,

$$\text{Ker}(iF + i\lambda) = \text{Ker}(F + \lambda),$$

est le sous-espace vectoriel complexe conjugué de $\text{Ker}(iF - i\lambda) = \text{Ker}(F - \lambda)$. On sait de plus que,

$$\text{Im}F \text{Ker}(F \pm \lambda) = \{0\},$$

et que les espaces vectoriels $\text{Ker}(F - \lambda) \oplus \text{Ker}(F + \lambda)$, si $\lambda \neq 0$ et $\text{Ker} F$ sont les complexifications de leurs intersections avec $T^*\mathbb{R}^n$. Si $\lambda = 0$, on pourrait alors trouver $X_0 = X_1 + iX_2 \neq 0$ tel que $X_1, X_2 \in T^*\mathbb{R}^n$ et $X_0, X_1, X_2 \in \text{Ker}F$. Considérons $j \in \{1, 2\}$ tel que $X_j \neq 0$. On obtiendrait ainsi que,

$$q(X_j) = \sigma(X_j, FX_j) = 0,$$

ce qui serait contraire à l'hypothèse d'ellipticité de la forme quadratique q . Il s'ensuit que $\lambda \neq 0$. Le fait que,

$$\text{Im}F \text{Ker}(F \pm \lambda) = \{0\}, \quad (2.3.93)$$

entraîne que,

$$\text{Im}F S_\lambda = \{0\}.$$

De plus, comme l'espace $\text{Ker}(F - \lambda) \oplus \text{Ker}(F + \lambda)$ est stable par F , il est également stable par $\text{Re}F$ vu l'identité (2.3.93). La stabilité du sous-espace S_λ par la matrice $\text{Re}F$ découle alors simplement du fait que $\text{Re}F \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Considérons maintenant $X_0 \in S_\lambda$ tel que,

$$\forall Y \in S_\lambda, \sigma(X_0, Y) = 0.$$

Il s'ensuit que,

$$\forall Y, Z \in S_\lambda, \sigma(X_0, Y + iZ) = 0,$$

d'où d'après ce qui précède,

$$\forall X \in \text{Ker}(F - \lambda) \oplus \text{Ker}(F + \lambda), \sigma(X_0, X) = 0.$$

Or, comme $X_0 \in S_\lambda$, on a $FX_0 \in \text{Ker}(F - \lambda) \oplus \text{Ker}(F + \lambda)$. Ceci implique que,

$$q(X_0) = \sigma(X_0, FX_0) = 0.$$

On déduit alors de l'ellipticité de q que $X_0 = 0$. L'espace S_λ possède donc une structure d'espace vectoriel symplectique. Supposons maintenant qu'il existe μ une valeur propre imaginaire pure de F distincte de λ et $-\lambda$. Cette valeur propre μ est non nulle d'après ce qui précède. Soient,

$$X \in \text{Ker}(F - \varepsilon_1\lambda) \text{ et } Y \in \text{Ker}(F - \varepsilon_2\mu),$$

avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, 1\}$, on a

$$\sigma(X, Y) = \sigma(X, \varepsilon_2^{-1}\mu^{-1}FY) = -\frac{1}{\varepsilon_2\mu}\sigma(FX, Y) = -\frac{\varepsilon_1\lambda}{\varepsilon_2\mu}\sigma(X, Y),$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

par antisymétrie de l'application hamiltonienne F par rapport à σ . Comme

$$\left| \frac{\varepsilon_1 \lambda}{\varepsilon_2 \mu} \right| \neq 1,$$

puisque λ et μ sont des nombres complexes imaginaires purs et que $\mu \notin \{\lambda, -\lambda\}$, on en déduit que,

$$\sigma(X, Y) = 0.$$

Il s'ensuit que les sous-espaces vectoriels S_λ et S_μ sont en somme directe symplectiquement orthogonale. \square

Considérons les valeurs propres imaginaires pures de l'application hamiltonienne F . On peut au regard du lemme précédent écrire les éléments deux à deux distincts de cet ensemble, $\lambda_1, \dots, \lambda_r, -\lambda_1, \dots, -\lambda_r$. Considérons en gardant les notations du lemme précédent, l'espace suivant,

$$S = S_{\lambda_1} \oplus^{\sigma^\perp} \dots \oplus^{\sigma^\perp} S_{\lambda_r} \subset T^*\mathbb{R}^n. \quad (2.3.94)$$

Le caractère direct de la somme précédente résulte de la structure symplectique des sous-espaces vectoriels S_{λ_j} et de leurs propriétés d'orthogonalité symplectique lorsqu'on les considère deux à deux. Le lemme précédent montre que S est un espace vectoriel symplectique qui est stable par les applications hamiltoniennes $\operatorname{Re}F$ et $\operatorname{Im}F$. Notons S^{σ^\perp} l'espace vectoriel orthogonal de S dans $T^*\mathbb{R}^n$ pour l'orthogonalité symplectique. L'espace S^{σ^\perp} est alors un espace vectoriel symplectique qui est stable par les applications $\operatorname{Re}F$ et $\operatorname{Im}F$. En effet, considérons $X \in S^{\sigma^\perp} \subset T^*\mathbb{R}^n$. Comme pour tout $Y \in S \subset T^*\mathbb{R}^n$, on obtient en utilisant la propriété d'antisymétrie par rapport à la forme symplectique des applications hamiltoniennes,

$$\sigma(Y, \operatorname{Re}FX) + i\sigma(Y, \operatorname{Im}FX) = -\sigma(\operatorname{Re}FY, X) - i\sigma(\operatorname{Im}FY, X) = 0,$$

car $\operatorname{Re}FY \in S$ et $\operatorname{Im}FY \in S$. Il s'ensuit que,

$$\forall Y \in S, \quad \sigma(Y, \operatorname{Re}FX) = \sigma(Y, \operatorname{Im}FX) = 0,$$

ce qui démontre que $\operatorname{Re}FX \in S^{\sigma^\perp}$ et $\operatorname{Im}FX \in S^{\sigma^\perp}$. D'après la construction précédente et le lemme 2.3.4, l'application $\operatorname{Re}F|_{S^{\sigma^\perp}} + i\operatorname{Im}F|_{S^{\sigma^\perp}}$ ne possède plus de valeurs propres imaginaires pures. Si on considère maintenant des coordonnées symplectiques (x, ξ) telles que,

$$x := (x', x'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''} \text{ et } \xi := (\xi', \xi'') \in \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}^{n''},$$

où (x', ξ') et (x'', ξ'') sont respectivement des coordonnées symplectiques sur l'espace S et sur l'espace S^{σ^\perp} , on déduit de l'orthogonalité symplectique de ces espaces S et S^{σ^\perp} , de leurs stabilités par les applications hamiltoniennes $\operatorname{Re}F$, $\operatorname{Im}F$ et des résultats de l'étape précédente que,

$$q(x, \xi) = q_1(x', \xi') + q_2(x'', \xi''),$$

et,

$$\forall t \geq 0, \quad e^{itq(x, \xi)^w} = e^{itq_1(x', \xi')^w} e^{itq_2(x'', \xi'')^w}, \quad (2.3.95)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

si on note,

$$q_1(x', \xi') = \sigma_{n'}((x', \xi'), (\operatorname{Re}F|_S + i\operatorname{Im}F|_S)(x', \xi')),$$

et,

$$q_2(x'', \xi'') = \sigma_{n''}((x'', \xi''), (\operatorname{Re}F|_{S^{\sigma\perp}} + i\operatorname{Im}F|_{S^{\sigma\perp}})(x'', \xi'')),$$

où $\sigma_{n'}$ et $\sigma_{n''}$ désignent respectivement les formes symplectiques canoniques sur $\mathbb{R}^{2n'}$ et $\mathbb{R}^{2n''}$. Ces formes quadratiques q_1 et q_2 sont elliptiques et on a l'inclusion,

$$\Sigma(q_1) \cup \Sigma(q_2) \subset \Sigma(q).$$

Comme d'après (2.3.94) et le lemme 2.3.4,

$$\operatorname{Im}F|_S = 0,$$

la forme quadratique q_1 est donc à valeurs réelles. Le théorème 5.12 de [13] et la discussion qui le suit, montrent alors que pour tout $t \geq 0$ l'opérateur,

$$e^{itq_1(x', \xi')^w},$$

est un opérateur métaplectique. On en déduit en utilisant (2.3.95) que pour tout $t \geq 0$,

$$\|e^{itq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \|e^{itq_2(x'', \xi'')^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} = \|e^{itq_2(x'', \xi'')^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{n'')})}.$$

Ces deux premières étapes montrent que l'on peut toujours tensoriser un certain nombre de variables et se ramener au cas où l'application hamiltonienne ne possède pas de valeurs propres imaginaires pures.

Etape 3. Dans cette troisième étape, on se place dans le cas où,

$$\Sigma(q) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}z \geq 0\} \setminus \mathbb{R}_-^* \text{ et } \operatorname{Im}q(x, \xi) = \sum_{j=1}^l x_j^2, \quad (x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^n, \quad (2.3.96)$$

avec $l \geq 1$ et dans le cas où l'application hamiltonienne F associée à la forme quadratique q ne possède pas de valeurs propres imaginaires pures. On a vu en (2.3.88) que dans ces conditions l'application hamiltonienne $\operatorname{Im}F$ associée à la forme quadratique $\operatorname{Im}q$ était *nilpotente d'indice 2*. Remarquons que le rang et la propriété de nilpotence d'indice 2 de la partie imaginaire de l'application hamiltonienne F sont invariants par transformation linéaire symplectique réelle puisqu'une telle transformation revient à effectuer au niveau de l'application hamiltonienne une conjugaison par une matrice réelle symplectique inversible. L'indice l qui apparaît ci-dessus correspond donc d'après l'écriture matricielle (2.3.88) au rang de l'application hamiltonienne $\operatorname{Im}F$. Nous allons montrer dans cette étape que l'estimation (2.3.84) est satisfaite si $l = n - 1$ ou $l = n$.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ les valeurs propres de l'application hamiltonienne F . Comme d'après (2.3.96), $\operatorname{Im}q \geq 0$, on peut pour étudier le semi-groupe d'évolution,

$$e^{itq(x, \xi)^w},$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

utiliser la formule de Mehler établie par L.Hörmander dans [13], Théorème 4.2, qui montre que le symbole de Weyl de ce semi-groupe d'évolution est donné par,

$$p_t(X) := \frac{e^{\sigma(X, \tan(itF)X)}}{\sqrt{\det(\cos(itF))}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n}), \quad t \geq 0,$$

à condition que pour tout $j = 1, \dots, m$, on ait

$$it\lambda_j - \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z}.$$

Cette condition est bien satisfaite puisque l'on s'est placé dans le cas où l'application hamiltonienne F ne possédait pas de valeurs propres imaginaires pures. Considérons maintenant la forme quadratique dépendante de $t \geq 0$,

$$A_t(X) := -\operatorname{Re}(\sigma(X, \tan(itF)X)). \quad (2.3.97)$$

On va démontrer la proposition suivante,

Proposition 2.3.5. *Dans le cadre d'étude qui est celui énoncé dans cette étape 3, si on suppose que $l \geq 1$ et que $l = n - 1$ ou $l = n$, alors il existe un réel $t_0 > 0$ tel que la forme quadratique A_{t_0} soit définie positive.*

Preuve. Considérons la forme quadratique suivante,

$$\forall X \in T^*\mathbb{R}^n, \quad r(X) := \operatorname{Im}q(X) + \operatorname{Im}q(\operatorname{Re}FX) + \operatorname{Im}q((\operatorname{Re}F)^2X) + \operatorname{Im}q((\operatorname{Re}F)^3X). \quad (2.3.98)$$

C'est une forme quadratique positive puisque d'après (2.3.96), $\operatorname{Im}q$ est une forme quadratique positive. En fait sous les hypothèses de la proposition 2.3.5, le lemme suivant montre que cette forme quadratique r est en fait une forme quadratique définie positive.

Lemme 2.3.6. *Sous les hypothèses de la proposition 2.3.5, la forme quadratique r définie en (2.3.98) est une forme quadratique définie positive.*

Preuve du lemme 2.3.6. Supposons qu'il existe $X_0 \in T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $X_0 \neq 0$ tel que,

$$r(X_0) = 0.$$

Ceci implique par positivité de la forme quadratique $\operatorname{Im}q$ que,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}q(X_0) &= \operatorname{Im}q(\operatorname{Re}FX_0) = \operatorname{Im}q((\operatorname{Re}F)^2X_0) \\ &= \operatorname{Im}q((\operatorname{Re}F)^3X_0) = 0. \end{aligned} \quad (2.3.99)$$

Notons $\operatorname{Im}q(X; Y)$ la forme polaire associée à la forme quadratique $\operatorname{Im}q$. En invoquant une nouvelle fois la positivité de la forme quadratique $\operatorname{Im}q$, on peut user de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la définition d'une application hamiltonienne et (2.3.99) pour trouver que,

$$\begin{aligned} \forall j = 0, \dots, 3, \forall Y \in \mathbb{R}^{2n}, \quad |\operatorname{Im}q(Y; (\operatorname{Re}F)^j X_0)|^2 &= |\sigma(Y, \operatorname{Im}F(\operatorname{Re}F)^j X_0)|^2 \\ &\leq \operatorname{Im}q(Y)\operatorname{Im}q((\operatorname{Re}F)^j X_0) = 0. \end{aligned}$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Il s'ensuit que,

$$\forall j = 0, \dots, 3, \forall Y \in \mathbb{R}^{2n}, \sigma(Y, \text{Im}F(\text{Re}F)^j X_0) = 0,$$

puis en utilisant la non-dégénérescence de la forme symplectique, on obtient que,

$$\forall j = 0, \dots, 3, \text{Im}F(\text{Re}F)^j X_0 = 0. \quad (2.3.100)$$

Posons,

$$\begin{cases} e_1 := X_0 \\ \varepsilon_1 := -\frac{1}{\text{Req}(X_0)} \text{Re}F X_0. \end{cases} \quad (2.3.101)$$

Ceci est licite puisque comme d'après (2.3.99), $\text{Im}q(X_0) = 0$, l'hypothèse d'ellipticité de q impose que $\text{Req}(X_0) \neq 0$. Il s'ensuit en utilisant l'antisymétrie de l'application hamiltonienne $\text{Re}F$ et sa définition que,

$$\sigma(\varepsilon_1, e_1) = \sigma(-(\text{Req}(X_0))^{-1} \text{Re}F X_0, X_0) = (\text{Req}(X_0))^{-1} \sigma(X_0, \text{Re}F X_0) = 1.$$

Le système (e_1, ε_1) est donc un système symplectique que l'on peut compléter par la proposition 21.1.3 de [12] en une base symplectique $(e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de \mathbb{R}^{2n} . Nous allons vérifier que le plan vectoriel engendré par les vecteurs e_1 et ε_1 noté $S = \text{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$ n'est *pas stable* par l'application hamiltonienne $\text{Re}F$. Si le plan S était stable par $\text{Re}F$, on pourrait alors écrire dans les coordonnées associées à la base symplectique choisie la décomposition suivante,

$$\begin{aligned} q(x, \xi) &= q(0, x_2, \dots, x_n, 0, \xi_2, \dots, \xi_n) + q(x_1, 0', \xi_1, 0') \\ &\quad + 2q((x_1, 0', \xi_1, 0'); (0, x_2, \dots, x_n, 0, \xi_2, \dots, \xi_n)) \\ &= q(0, x_2, \dots, x_n, 0, \xi_2, \dots, \xi_n) + \text{Req}(x_1, 0', \xi_1, 0'). \end{aligned} \quad (2.3.102)$$

En effet, on a d'une part que,

$$\begin{aligned} q(x_1, 0', \xi_1, 0') &= \sigma(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1, F(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1)) = \\ &= \sigma(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1, \text{Re}F(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1)) = \text{Req}(x_1, 0', \xi_1, 0'), \end{aligned}$$

puisque d'après (2.3.100) et (2.3.101), on a

$$\text{Im}F e_1 = \text{Im}F X_0 = 0 \text{ et } \text{Im}F \varepsilon_1 = -(\text{Req}(X_0))^{-1} \text{Im}F \text{Re}F X_0 = 0; \quad (2.3.103)$$

et que d'autre part,

$$\begin{aligned} & q((x_1, 0', \xi_1, 0'); (0, x_2, \dots, x_n, 0, \xi_2, \dots, \xi_n)) \\ &= \sigma(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1, F(x_2 e_2 + \dots + x_n e_n + \xi_2 \varepsilon_2 + \dots + \xi_n \varepsilon_n)) \\ &= -\sigma(F(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1), x_2 e_2 + \dots + x_n e_n + \xi_2 \varepsilon_2 + \dots + \xi_n \varepsilon_n) \\ &= -\sigma(\text{Re}F(x_1 e_1 + \xi_1 \varepsilon_1), x_2 e_2 + \dots + x_n e_n + \xi_2 \varepsilon_2 + \dots + \xi_n \varepsilon_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a utilisé successivement pour obtenir l'identité précédente l'antisymétrie de l'application hamiltonienne par rapport à la forme symplectique, (2.3.103) et la stabilité du plan S par l'application $\text{Re}F$. En utilisant la localisation de

l'image numérique donnée par la première identité de (2.3.96) et en invoquant une nouvelle fois l'ellipticité de cette même forme quadratique, on en déduit d'après (2.3.102) que la forme quadratique,

$$(x_1, \xi_1) \mapsto \text{Req}(x_1, 0', \xi_1, 0'),$$

est définie positive. On peut donc par la proposition 2.1.7 de ce chapitre trouver une nouvelle base symplectique du plan S notée $(\tilde{e}_1, \tilde{\varepsilon}_1)$ telle que dans ces coordonnées, on ait d'après (2.3.102),

$$q(x, \xi) = \lambda(x_1^2 + \xi_1^2) + q(0, x_2, \dots, x_n, 0, \xi_2, \dots, \xi_n), \quad (2.3.104)$$

avec $\lambda > 0$. Il est alors facile de vérifier que dans ces conditions l'application hamiltonienne F admet des valeurs propres imaginaires pures, ce qui exclu par hypothèse. En effet, on peut en déterminant matriciellement l'application hamiltonienne F comme en (2.3.88) à partir de (2.3.104) vérifier les identités suivantes,

$$FX_1 = i\lambda X_1 \text{ et } FX_2 = -i\lambda X_2,$$

si $X_1 = \tilde{e}_1 + i\tilde{\varepsilon}_1$ et $X_2 = \tilde{e}_1 - i\tilde{\varepsilon}_1$. On en déduit ainsi que le plan S n'est *pas stable* par l'application hamiltonienne $\text{Re}F$. Reprenons maintenant le système de coordonnées symplectiques associé à la base symplectique $(e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ définie précédemment. Comme ce plan S n'est pas stable par $\text{Re}F$, il existe donc en utilisant la somme directe symplectiquement orthogonale suivante,

$$\mathbb{R}^{2n} = S \oplus^{\sigma^\perp} S^{\sigma^\perp},$$

et (2.3.101), un élément $X_3 \in S^{\sigma^\perp}$, $X_3 \neq 0$ et des réels $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que,

$$(\text{Re}F)^2 X_0 = X_3 + \lambda e_1 + \mu \varepsilon_1. \quad (2.3.105)$$

Les identités (2.3.100), (2.3.101) et (2.3.105) induisent que,

$$\text{Im}FX_3 = \text{Im}F\text{Re}FX_3 = 0. \quad (2.3.106)$$

On peut ensuite considérer les nouveaux vecteurs,

$$\begin{cases} e_2 := X_3 \\ \varepsilon_2 := -\frac{1}{\text{Req}(X_3)} \text{Re}FX_3. \end{cases} \quad (2.3.107)$$

Ceci est licite compte tenu de l'ellipticité de la forme quadratique q et du fait que d'après (2.3.106),

$$\text{Im}q(X_3) = \sigma(X_3, \text{Im}FX_3) = 0.$$

On obtient alors par construction puisque $e_1, \varepsilon_1 \in S$ et $e_2 \in S^{\sigma^\perp}$,

$$\sigma(\varepsilon_1, e_1) = \sigma(\varepsilon_2, e_2) = 1, \quad \sigma(e_1, e_2) = \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0. \quad (2.3.108)$$

De plus, comme d'après (2.3.101), (2.3.107) et (2.3.108),

$$\begin{aligned} \sigma(\varepsilon_2, e_1) &= -(\text{Req}(X_3))^{-1} \sigma(\text{Re}FX_3, X_0) = (\text{Req}(X_3))^{-1} \sigma(X_3, \text{Re}FX_0) \\ &= -(\text{Req}(X_3))^{-1} \text{Req}(X_0) \sigma(e_2, \varepsilon_1) = 0, \end{aligned}$$

et que d'après (2.3.101), (2.3.105), (2.3.107) et (2.3.108),

$$\begin{aligned}
 \sigma(\varepsilon_1, \varepsilon_2) &= (\text{Req}(X_0)\text{Req}(X_3))^{-1} \sigma(\text{Re}F X_0, \text{Re}F X_3) \\
 &= -(\text{Req}(X_0)\text{Req}(X_3))^{-1} \sigma((\text{Re}F)^2 X_0, X_3) \\
 &= -(\text{Req}(X_0)\text{Req}(X_3))^{-1} \sigma(e_2 + \lambda e_1 + \mu \varepsilon_1, e_2) \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

le système $(e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est donc un système symplectique que l'on peut compléter comme précédemment en une base symplectique de \mathbb{R}^{2n} et que l'on note encore $(e_1, \dots, e_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. On déduit de (2.3.100), (2.3.101), (2.3.106) et (2.3.107), les identités,

$$\text{Im}F e_1 = \text{Im}F e_2 = \text{Im}F \varepsilon_1 = \text{Im}F \varepsilon_2 = 0.$$

Il s'ensuit que dans les coordonnées (x, ξ) définies par la base symplectique précédente, on a d'après (2.3.96),

$$\begin{aligned}
 \text{Im}q(x, \xi) &= \sigma(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + \xi_1 \varepsilon_1 + \dots + \xi_n \varepsilon_n, \\
 &\quad \text{Im}F(x_3 e_3 + \dots + x_n e_n + \xi_3 \varepsilon_3 + \dots + \xi_n \varepsilon_n)) \\
 &= -\sigma(\text{Im}F(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + \xi_1 \varepsilon_1 + \dots + \xi_n \varepsilon_n), \\
 &\quad x_3 e_3 + \dots + x_n e_n + \xi_3 \varepsilon_3 + \dots + \xi_n \varepsilon_n) \\
 &= -\sigma(\text{Im}F(x_3 e_3 + \dots + x_n e_n + \xi_3 \varepsilon_3 + \dots + \xi_n \varepsilon_n), \\
 &\quad x_3 e_3 + \dots + x_n e_n + \xi_3 \varepsilon_3 + \dots + \xi_n \varepsilon_n) \\
 &= \text{Im}q(0'', x_3, \dots, x_n, 0'', \xi_3, \dots, \xi_n) \geq 0.
 \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la proposition 2.1.8, on peut choisir les vecteurs,

$$(e_3, \dots, e_n, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n),$$

de la base précédente de sorte que dans les nouvelles coordonnées, on ait

$$\text{Im}q(x, \xi) = \text{Im}q(0'', x_3, \dots, x_n, 0'', \xi_3, \dots, \xi_n) = \sum_{j \in J} x_j^2, \quad (2.3.109)$$

avec $J \subset \{3, \dots, n\}$. Le fait qu'il n'apparaisse pas de termes de la forme $\lambda_j(\xi_j^2 + x_j^2)$ avec $\lambda_j > 0$ dans la décomposition précédente vient du fait que le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_3, \dots, e_n, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n$ soit stable par l'application $\text{Im}F$ (ce fait est par exemple une conséquence du calcul explicite précédent de $\text{Im}q(x, \xi)$) et de la propriété de *nilpotence d'indice 2* de l'application $\text{Im}F$. Comme $J \subset \{3, \dots, n\}$ dans (2.3.109), on en déduit en ayant recours à une écriture matricielle de type (2.3.88) que le rang de $\text{Im}F$ est inférieur ou égal à $n - 2$. Ceci est contraire aux hypothèses de la proposition 2.3.5 car l'indice l qui apparaît dans (2.3.96) correspond au rang de la partie imaginaire de l'application hamiltonienne F . On a ainsi démontré que la forme quadratique r est bien une forme quadratique définie positive, ce qui termine la preuve du lemme 2.3.6. \square

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Retour à la preuve de la proposition 2.3.5. Des calculs directs utilisant la nilpotence d'indice 2 de $\text{Im}F$ montrent que,

$$F^3 = ((\text{Re}F)^3 - \text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F) + i(\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F + \text{Im}F(\text{Re}F)^2 + (\text{Re}F)^2\text{Im}F), \quad (2.3.110)$$

$$\begin{aligned} F^5 = & ((\text{Re}F)^5 - (\text{Re}F)^2\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F - \text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F \\ & - \text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F - \text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F\text{Re}F - \text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^2 \\ & - \text{Im}F(\text{Re}F)^3\text{Im}F) + i((\text{Re}F)^3\text{Im}F\text{Re}F + (\text{Re}F)^2\text{Im}F(\text{Re}F)^2 \\ & + (\text{Re}F)^4\text{Im}F + \text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^3 + \text{Im}F(\text{Re}F)^4 \\ & - \text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F), \end{aligned} \quad (2.3.111)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(F^7) = & (\text{Re}F)^6\text{Im}F + (\text{Re}F)^5\text{Im}F\text{Re}F + (\text{Re}F)^4\text{Im}F(\text{Re}F)^2 \\ & + (\text{Re}F)^3\text{Im}F(\text{Re}F)^3 + (\text{Re}F)^2\text{Im}F(\text{Re}F)^4 + \text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^5 \\ & + \text{Im}F(\text{Re}F)^6 - (\text{Re}F)^2\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F \\ & - \text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F - \text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F \\ & - \text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F - \text{Im}F(\text{Re}F)^3\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F \\ & - \text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F - \text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F \\ & - \text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^2\text{Im}F\text{Re}F - \text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^2 \\ & - \text{Im}F\text{Re}F\text{Im}F(\text{Re}F)^3\text{Im}F. \end{aligned} \quad (2.3.112)$$

On en déduit en utilisant (2.3.97) et un développement limité en 0 à l'ordre 7 pour la variable t de la fonction $\tan(itF)$ que pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n}$,

$$\begin{aligned} A_t(X) = & c_0 t \sigma(X, \text{Im}FX) - c_1 t^3 \sigma(X, \text{Im}(F^3)X) + c_2 t^5 \sigma(X, \text{Im}(F^5)X) \\ & - c_3 t^7 \sigma(X, \text{Im}(F^7)X) + o(t^7)|X|^2, \end{aligned} \quad (2.3.113)$$

où,

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \frac{1}{3}, \quad c_2 = \frac{2}{15} \quad \text{et} \quad c_3 = \frac{17}{315}. \quad (2.3.114)$$

En utilisant ensuite les expressions explicites de $\text{Im}(F^3)$, $\text{Im}(F^5)$ et $\text{Im}(F^7)$ données en (2.3.110), (2.3.111) et (2.3.112), l'antisymétrie des applications hamiltoniennes $\text{Re}F$ et $\text{Im}F$ par rapport à la forme symplectique, leurs définitions et la symétrie des formes polaires, on peut alors réécrire (2.3.113) sous la forme suivante,

$$\begin{aligned}
A_t(X) &= c_0 t \operatorname{Im} q(X) + c_1 t^3 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X) - 2c_1 t^3 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X; X) \\
&+ c_2 t^5 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X) - 2c_2 t^5 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X; \operatorname{Re} F X) \\
&+ 2c_2 t^5 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^4 X; X) \\
&- c_2 t^5 \operatorname{Im} q(X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X) - 2c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^6 X; X) \\
&+ 2c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^5 X; \operatorname{Re} F X) - 2c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^4 X; (\operatorname{Re} F)^2 X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X) \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X; (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X) \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F X) \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X; (\operatorname{Re} F)^3 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X; (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X; (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X; \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^3 \operatorname{Im} F X) + o(t^7) |X^2|.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient à partir de l'identité précé-

dente que pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
A_t(X) &\geq c_0 t \operatorname{Im} q(X) + c_1 t^3 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X) + c_2 t^5 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X) - 2c_1 t^3 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- 2c_2 t^5 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X)^{\frac{1}{2}} - 2c_2 t^5 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^4 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_2 t^5 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} - 2c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^6 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- 2c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^5 X)^{\frac{1}{2}} - 2c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^4 X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F \operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^2 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- c_3 t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F \operatorname{Im} F (\operatorname{Re} F)^3 \operatorname{Im} F X)^{\frac{1}{2}} + o(t^7) |X|^2. \tag{2.3.115}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'on peut trouver une constante β strictement positive indépendante des variables t et X telle que pour tout X dans \mathbb{R}^{2n} et $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned}
A_t(X) &\geq c_0 t \operatorname{Im} q(X) + c_1 t^3 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X) + c_2 t^5 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X) \\
&+ c_3 t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X) - 2c_1 t^3 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X)^{\frac{1}{2}} \\
&- 2c_2 t^5 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X)^{\frac{1}{2}} - 2\beta t^5 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} |X| \\
&- 2\beta t^7 \operatorname{Im} q(X)^{\frac{1}{2}} |X| - 2\beta t^7 \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X)^{\frac{1}{2}} |X| \\
&- 2\beta t^7 \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X)^{\frac{1}{2}} |X| + o(t^7) |X|^2. \tag{2.3.116}
\end{aligned}$$

Considérons trois constantes δ_1 , δ_2 et δ_3 strictement positives. En utilisant que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$-2xy \geq -x^2 - y^2,$$

on déduit de l'estimation (2.3.116) que,

$$\begin{aligned}
A_t(X) &\geq (c_0 t - c_1 \delta_1^{-1} t - \beta t^2 - \beta t^4 - \delta_3 t^7) \operatorname{Im} q(X) \\
&+ (c_1 t^3 - c_2 \delta_2^{-1} t^3 - \beta t^5 - \delta_3 t^7) \operatorname{Im} q(\operatorname{Re} F X) \\
&+ (c_2 t^5 - c_1 \delta_1 t^5 - \beta t^6 - \delta_3 t^7) \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^2 X) \\
&+ (c_3 t^7 - c_2 \delta_2 t^7 - \delta_3 t^7) \operatorname{Im} q((\operatorname{Re} F)^3 X) \\
&+ \delta_3 t^7 r(X) + \tilde{r}_t(X), \tag{2.3.117}
\end{aligned}$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

où r est la forme quadratique définie en (2.3.98) et où \tilde{r}_t une forme quadratique vérifiant,

$$\tilde{r}_t(X) = o(t^7)|X|^2. \quad (2.3.118)$$

Le lemme 2.3.6 montre qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que,

$$\forall X \in \mathbb{R}^{2n}, r(X) \geq \alpha|X|^2. \quad (2.3.119)$$

On choisit ensuite les constantes δ_1 et δ_2 de sorte que,

$$0 < \frac{c_1}{c_0} < \delta_1 < \frac{c_2}{c_1} < \delta_2 < \frac{c_3}{c_2}, \quad (2.3.120)$$

ce qui est possible puisque,

$$\frac{c_1}{c_0} = \frac{1}{3} < \frac{c_2}{c_1} = \frac{2}{5} < \frac{c_3}{c_2} = \frac{17}{42}.$$

Puis, on choisit la constante δ_3 strictement positive telle que,

$$c_3 - c_2\delta_2 - \delta_3 > 0, \quad (2.3.121)$$

ce qui est possible d'après (2.3.120). On considère enfin $t_0 > 0$ assez petit pour que,

$$\begin{aligned} (c_0 - c_1\delta_1^{-1})t_0 - \beta t_0^2 - \beta t_0^4 - \delta_3 t_0^7 &> 0, \\ (c_1 - c_2\delta_2^{-1})t_0^3 - \beta t_0^5 - \delta_3 t_0^7 &> 0, \\ (c_2 - c_1\delta_1)t_0^5 - \beta t_0^6 - \delta_3 t_0^7 &> 0, \end{aligned} \quad (2.3.122)$$

et,

$$\forall X \in \mathbb{R}^{2n}, \delta_3 \alpha t_0^7 |X|^2 + \tilde{r}_{t_0}(X) \geq \frac{\delta_3 \alpha t_0^7}{2} |X|^2. \quad (2.3.123)$$

Ceci est possible d'après (2.3.118) et (2.3.120). On déduit alors de (2.3.96), (2.3.117), (2.3.119), (2.3.121), (2.3.122) et (2.3.123) que la forme quadratique A_{t_0} est définie positive, ce qui termine la démonstration de la proposition 2.3.5. \square

Plaçons nous maintenant dans le cadre d'étude qui est celui décrit au début de cette étape 3 et supposons que le rang l de $\text{Im}F$ soit supérieur ou égal à 1 et que $l = n - 1$ ou $l = n$. Dans ces conditions, la proposition 2.3.5 montre qu'il existe un temps $t_0 > 0$ tel que le symbole de Weyl de l'opérateur $e^{it_0 q(x, \xi)^w}$,

$$p_{t_0}(X) = \frac{e^{\sigma(X, \tan(it_0 F)X)}}{\sqrt{\det(\cos(it_0 F))}},$$

appartienne à l'espace $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. Il s'ensuit que l'opérateur $e^{it_0 q(x, \xi)^w}$ est alors un opérateur de Hilbert-Schmidt. On peut alors appliquer le théorème 2.20 de [4] pour obtenir que le spectre du semi-groupe $e^{itq(x, \xi)^w}$ vérifie,

$$\forall t > 0, \sigma(e^{itq(x, \xi)^w}) = \{0\} \cup \{e^{i\mu t} : \mu \in \sigma(q(x, \xi)^w)\}. \quad (2.3.124)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

On en déduit en utilisant la description du spectre de l'opérateur $q(x, \xi)^w$ donnée par le théorème 2.1.5 que le rayon spectral de l'opérateur $e^{itq(x, \xi)^w}$ est donné par,

$$\text{rad}(e^{itq(x, \xi)^w}) = \max \{ |\mu| : \mu \in \sigma(e^{itq(x, \xi)^w}) \} = e^{-at}, \quad (2.3.125)$$

où,

$$a = \inf \left\{ - \sum_{\substack{\mu \in \sigma(F), \\ -i\mu \in \Sigma(q) \setminus \{0\}}} (r_\mu + 2k_\mu) \text{Re} \mu : k_\mu \in \mathbb{N} \right\}. \quad (2.3.126)$$

Les notations utilisées ci-dessus sont celles du théorème 2.1.5. De plus, comme dans notre cas,

$$\Sigma(q) \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z \geq 0\},$$

il s'ensuit que si $\mu \in \sigma(F)$ et $-i\mu \in \Sigma(q) \setminus \{0\}$, on a $-\text{Re} \mu \geq 0$. Notons que si un tel μ vérifiait $\text{Re} \mu = 0$, cela induirait que l'application hamiltonienne F possède des valeurs propres imaginaires pures, ce qui est exclu par les hypothèses de cette étape 3. On en déduit tout d'abord que si $\mu \in \sigma(F)$ et $-i\mu \in \Sigma(q) \setminus \{0\}$ alors,

$$-\text{Re} \mu > 0,$$

puis que le membre de droite de (2.3.126) est bien défini et que a est une constante strictement positive. Le théorème 1.22 de [4] montre d'après (2.3.125) que,

$$-a = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log \|e^{itq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))},$$

ce qui induit qu'il existe une constante $M > 0$ telle que,

$$\forall t \geq 0, \|e^{itq(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq M e^{-\frac{a}{2}t}.$$

L'estimation (2.3.84) est donc bien vérifiée dans ce cas.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.3.7. *Considérons $q : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \rightarrow \mathbb{C}$ une forme quadratique elliptique à valeurs complexes en dimension $n \geq 2$, F l'application hamiltonienne associée à cette forme quadratique q et $q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ l'opérateur différentiel quadratique elliptique associé. On suppose que cet opérateur est non normal et que l'ordre du symbole q sur la demi-droite ouverte $\Delta_j = z_j \mathbb{R}_+^*$, $j \in \{1, 2\}$ de (2.3.51) est infini. Énonçons les deux hypothèses supplémentaires suivantes :*

(H1) *On suppose que $(\text{Im}(\overline{z_j} F))^2 \neq 0$.*

(H2) *On suppose que $(\text{Im}(\overline{z_j} F))^2 = 0$. Sous cette hypothèse, on a l'inégalité suivante,*

$$1 \leq \text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j} F)) \leq \min \left(n - \sum_{\lambda \in \sigma(F) \cap i\Delta_j} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda), n - 1 \right), \quad (2.3.127)$$

où $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda)$ désigne la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(F - \lambda)$ de \mathbb{C}^{2n} en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel. On suppose de plus dans ce cas que,

$$\text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j} F)) \geq n - \sum_{\lambda \in \sigma(F) \cap i\Delta_j} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda) - 1. \quad (2.3.128)$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Si l'une des deux hypothèses (H1) **ou** (H2) est satisfaite alors il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur la demi-droite ouverte Δ_j . Plus précisément, pour tout $\eta > 0$ il existe une constante C strictement positive telle que,

$$\forall h > 0, \forall u \in B, \|q(x, h\xi)^w u - \eta z_j u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.129)$$

ce qui induit d'après (2.3.1) l'inclusion,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_1^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

Avant de procéder à la démonstration de ce théorème, remarquons que si q désigne une forme quadratique elliptique à valeurs complexes telle que la forme quadratique $\{\text{Re}q, \text{Im}q\}$ ne soit pas identiquement nulle i.e. que l'opérateur $q(x, \xi)^w$ soit un opérateur *non normal* (cf. Proposition 2.1.4), le résultat précédent permet de démontrer l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini pour tout point z non nul de la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$ d'ordre *infini* lorsque la dimension n est égale à 2. En effet en considérant les notations du théorème 2.3.7 et $z \in \Delta_j = z_j \mathbb{R}_+^*$, si les conditions,

$$(\text{Im}(\overline{z_j} F))^2 = 0 \text{ et } n = 2,$$

sont vérifiées, l'estimation (2.3.127) induit l'estimation (2.3.128). Ce critère permet également de décider un grand nombre de cas d'ordre *infini* lorsque la dimension n est égale à 3 puisque seuls des cas où,

$$(\text{Im}(\overline{z_j} F))^2 = 0 \text{ et } \text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j} F)) = 1,$$

ne sont pas couverts par le résultat précédent.

Remarque. Nous allons voir dans la démonstration du théorème 2.3.7 que si,

$$q(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

est un opérateur différentiel quadratique *non normal* en dimension $n \geq 2$ et que,

$$(\text{Im}(\overline{z_j} F))^2 = 0 \text{ et } \text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j} F)) = n,$$

où F désigne l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q et $z_j \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, alors le symbole q est d'ordre *fini* et est égal à 2 sur la demi-droite $\Delta_j = z_j \mathbb{R}_+^*$ de la frontière de l'image numérique $\Sigma(q)$. On peut dans ce cas appliquer le résultat du théorème 2.3.3 pour obtenir l'estimation a priori,

$$\forall z \in \Delta_j, \exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall 0 < h < h_0,$$

$$\|q(x, h\xi)^w u - zu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

qui d'après la densité de l'espace de Schwartz dans l'espace B et (2.3.1) induit que,

$$\Delta_j \subset (\Lambda_{2/3}^{\text{sc}}(q(x, h\xi)^w))^c.$$

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

Preuve du théorème 2.3.7. Comme nous l'avons déjà souligné dans les lignes précédant (2.3.51) les hypothèses du théorème 2.3.7 induisent que l'image numérique $\Sigma(q)$ du symbole q est un secteur angulaire fermé de sommet 0 avec une ouverture strictement positive et strictement plus petite que π . Cette remarque et le fait que d'après (2.3.51), $z_j \in \partial\Sigma(q) \setminus \{0\}$, induisent que la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est *non identiquement nulle* et qu'elle est soit positive, soit négative. On en déduit également l'inclusion suivante,

$$\Sigma(\overline{z_j}q) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-^*.$$

Ceci nous permet de ramener notre étude au cadre développé précédemment et de réduire via une transformation symplectique linéaire réelle donnée par la proposition 2.1.8 la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ à la forme normale,

$$\text{Im}(\overline{z_j}q)(x, \xi) = \sum_{p=1}^k \mu_p (\xi_p^2 + x_p^2) + \sum_{p=k+1}^{k+l} x_p^2, \quad (2.3.130)$$

si la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est positive ou,

$$\text{Im}(\overline{z_j}q)(x, \xi) = - \sum_{p=1}^k \mu_p (\xi_p^2 + x_p^2) - \sum_{p=k+1}^{k+l} x_p^2, \quad (2.3.131)$$

si la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est négative, où $k, l \in \mathbb{N}$, $k + l \geq 1$ et $\mu_p > 0$ pour tout $p = 1, \dots, k$. Le fait que $k + l \geq 1$ est une conséquence du fait que la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ soit non identiquement nulle. Un calcul explicite comme en (2.3.88) de l'application hamiltonienne associée selon le cas à la forme normale (2.3.130) ou (2.3.131) montre que le cas où l'hypothèse (H1) est satisfaite correspond exactement au cas où l'entier $k \geq 1$. Dans le cas où la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est égale à la forme normale (2.3.130) avec $k \geq 1$, on a établi dans la section 2.3.b.3.3.a l'estimation a priori,

$$\forall \eta > 0, \exists C > 0, \forall h > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n),$$

$$\|\overline{z_j}q(x, h\xi)^w u - \eta |z_j|^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

qui entraîne l'estimation (2.3.129) par densité de l'espace de Schwartz dans l'espace B . Dans le cas où la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est égale à la forme normale (2.3.131) avec $k \geq 1$, on obtient la même estimation a priori si on utilise le multiplicateur $-iu$ à la place du multiplicateur iu dans (2.3.76). Supposons maintenant que l'hypothèse (H2) soit satisfaite. Ceci correspond exactement d'après ce qui précède, au cas où $k = 0$ et $l \geq 1$. Constatons que sous les hypothèses du théorème 2.3.7 le cas où $k = 0$ et $l = n$ ne peut pas se produire d'après l'étude de la section 2.3.b.3.3.b. En effet, nous avons vu dans cette section que le symbole $\overline{z_j}q$ est dans ce cas d'ordre fini, égal à 2 sur la demi-droite ouverte \mathbb{R}_+^* . En toute rigueur, signalons que nous avons vérifié ce fait que pour la forme normale (2.3.130). L'étude du cas de la forme normale (2.3.131) lorsque $k = 0$ et $l = n$ s'en déduit trivialement. Ceci induit que dans ce cas le symbole q est d'ordre fini, égal à 2 sur la demi-droite ouverte Δ_j ce qui est contraire aux hypothèses

2.3. Cas de la dimension $n \geq 2$.

du théorème 2.3.7 et justifie la remarque qui fait suite à l'énoncé de ce théorème. En utilisant un calcul explicite comme en (2.3.88) de l'application hamiltonienne associée selon le cas à la forme normale (2.3.130) ou (2.3.131), on remarque que dans le cas où $k = 0$ et $l \geq 1$ cet indice l correspond au rang de l'application hamiltonienne $\text{Im}(\overline{z_j}F)$. Ceci démontre que sous les hypothèses du théorème 2.3.7 et si l'hypothèse (H2) est vérifiée, on a

$$1 \leq \text{rang}(\text{Im}(\overline{z_j}F)) \leq n - 1. \quad (2.3.132)$$

Dans le cas où l'identité (2.3.130) est vérifiée, on a vu en (2.3.87) qu'il suffisait pour obtenir l'estimation,

$$\forall \eta > 0, \exists C > 0, \forall h > 0, \forall u \in B, \\ \|\overline{z_j}q(x, h\xi)^w u - \eta|z_j|^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq Ch\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3.133)$$

qui induit l'estimation (2.3.129) de démontrer l'estimation sur le semi-groupe d'évolution,

$$\exists M > 0, \exists a > 0, \forall t \geq 0, \|e^{it\overline{z_j}q(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq Me^{-at}. \quad (2.3.134)$$

Un raisonnement identique à celui proposé pour la démonstration de (2.3.86) et (2.3.87) montre que dans le cas où la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est négative i.e. vérifie (2.3.131), il suffit pour obtenir (2.3.133) de démontrer l'estimation,

$$\exists M > 0, \exists a > 0, \forall t \geq 0, \|e^{-it\overline{z_j}q(x, \xi)^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq Me^{-at}. \quad (2.3.135)$$

Considérons tout d'abord le cas où la forme quadratique $\text{Im}(\overline{z_j}q)$ est positive i.e. vérifie (2.3.130) avec $k = 0$ et $l \geq 1$. Si on reprend les étapes 1 et 2 détaillées dans la section 2.3.b.3.3.b, on constate que l'on peut tensoriser un certain nombre de variables dont le nombre est fonction du nombre de valeurs propres imaginaires pures de l'application hamiltonienne $\overline{z_j}F$. En effet d'après le lemme 2.3.4, l'ensemble (éventuellement vide) des valeurs propres imaginaires pures deux à deux distinctes de l'application hamiltonienne $\overline{z_j}F$ possède la structure suivante,

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r, -\lambda_1, \dots, -\lambda_r\},$$

où $r \in \mathbb{N}$. On sait d'après ce lemme 2.3.4 que $\forall j = 1, \dots, r, \lambda_j \neq 0$. En gardant les notations introduites dans ce lemme, on note S le sous-espace vectoriel symplectique de \mathbb{R}^{2n} ,

$$S = S_{\lambda_1} \oplus^{\sigma^\perp} \dots \oplus^{\sigma^\perp} S_{\lambda_r}.$$

D'après le lemme 2.3.4, ce sous-espace vectoriel S de \mathbb{R}^{2n} a pour dimension,

$$2 \sum_{\mu \in \sigma(\overline{z_j}F) \cap i\mathbb{R}_+^*} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(\overline{z_j}F - \mu) = 2 \sum_{\lambda \in \sigma(F) \cap i\Delta_j} \dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}(F - \lambda), \quad (2.3.136)$$

puisque $\Delta_j = z_j \mathbb{R}_+^*$. D'après l'étape 2 de la section 2.3.b.3.3.b, il suffit alors pour établir l'estimation (2.3.134) et terminer dans ce cas la démonstration du théorème 2.3.7 d'établir l'estimation,

$$\exists M > 0, \exists a > 0, \forall t \geq 0, \|e^{it\overline{q}^w}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^{\tilde{n}}))} \leq Me^{-at}, \quad (2.3.137)$$

pour la forme quadratique elliptique,

$$\forall X \in \tilde{S}, \tilde{q}(X) := \sigma(X, (\operatorname{Re}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}} + i\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}})X), \quad (2.3.138)$$

définie sur le sous-espace vectoriel symplectique \tilde{S} défini comme l'orthogonal symplectique du sous-espace vectoriel symplectique S dans \mathbb{R}^{2n} qui est stable par les applications hamiltoniennes $\operatorname{Re}(\overline{z_j}F)$ et $\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)$. La dimension de ce sous-espace vectoriel \tilde{S} est alors d'après (2.3.136) égale à $2\tilde{n}$ si on note,

$$\tilde{n} = n - \sum_{\lambda \in \sigma(F) \cap i\Delta_j} \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}(F - \lambda). \quad (2.3.139)$$

Comme d'après cette même étape 2 de la section 2.3.b.3.3.b, on peut écrire la décomposition,

$$\forall X = X' + X'' \in S \oplus \tilde{S}, \overline{z_j}q(X) = Q(X') + \tilde{q}(X''), \quad (2.3.140)$$

où Q désigne la forme quadratique à valeurs réelles,

$$\forall X' \in S, Q(X') := \sigma(X', \operatorname{Re}(\overline{z_j}F)|_S X').$$

Il s'ensuit que,

$$\operatorname{Im}(\overline{z_j}q)(X) = \operatorname{Im}\tilde{q}(X''). \quad (2.3.141)$$

La forme quadratique $\operatorname{Im}\tilde{q}$ est donc positive d'après (2.3.130). En utilisant la proposition 2.1.8, on peut alors après un nouveau changement linéaire symplectique de variables supposer que,

$$\operatorname{Im}\tilde{q} = \sum_{j=1}^{\tilde{l}} x_j^2, \quad (2.3.142)$$

avec $1 \leq \tilde{l} \leq \tilde{n}$. En effet, ce résultat est une conséquence des faits suivants. Tout d'abord d'après (2.3.141), la forme quadratique $\operatorname{Im}\tilde{q}$ est positive et non identiquement nulle car c'est le cas de la forme quadratique $\operatorname{Im}(\overline{z_j}q)$ d'après (2.3.130) puisque nous étudions le cas où $k = 0$ et $l \geq 1$. Ensuite, comme l'hypothèse (H2) est satisfaite et que le sous-espace \tilde{S} est stable par $\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)$, on en déduit d'après (2.3.138) que l'application hamiltonienne $\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}}$ de la forme quadratique $\operatorname{Im}\tilde{q}$ est nilpotente d'indice 2. Cette propriété de nilpotence d'indice 2 interdit la présence de termes de la forme $\lambda_j(\xi_j^2 + x_j^2)$ avec $\lambda_j > 0$ dans la somme (2.3.142). En utilisant un calcul explicite comme en (2.3.88) de cette application hamiltonienne $\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}}$ associée à la forme normale (2.3.142) et le lemme 2.3.4, on obtient que,

$$\operatorname{rang}(\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)) = \operatorname{rang}(\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}}) = \tilde{l}, \quad (2.3.143)$$

puisque les sous-espaces symplectiques S et \tilde{S} sont stables par l'application hamiltonienne $\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)$ et que le lemme 2.3.4 impose que,

$$\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)|_S = 0.$$

2.4. Quelques exemples.

En utilisant maintenant que $1 \leq \tilde{l} \leq \tilde{n}$, (2.3.132), (2.3.139) et (2.3.143), on obtient l'estimation (2.3.127). Comme de plus cette application hamiltonienne,

$$\operatorname{Re}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}} + i\operatorname{Im}(\overline{z_j}F)|_{\tilde{S}},$$

ne possède pas par construction du sous-espace vectoriel \tilde{S} de valeurs propres imaginaires pures, on peut alors d'après (H2), (2.3.139) et (2.3.143) appliquer les résultats de l'étape 3 qui établissent successivement les estimations (2.3.137), (2.3.134), (2.3.133) et (2.3.129) puisque d'après (2.3.130) et (2.3.140),

$$\Sigma(\tilde{q}) \subset \Sigma(\overline{z_j}q) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}z \geq 0\} \setminus \mathbb{R}_-^*.$$

Dans le cas où la forme quadratique $\operatorname{Im}(\overline{z_j}q)$ vérifie (2.3.131), il suffit d'appliquer ce qui précède à la forme quadratique $-\overline{z_j}q$ pour obtenir (2.3.135). Ceci termine la démonstration du théorème 2.3.7. \square

Si on collecte toutes les informations détaillées au fil de cette longue section 2.3, on obtient les résultats annoncés par les théorèmes 1.6.6. et 1.6.7 du chapitre 1.

2.4 Etude de quelques exemples d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

On se propose dans cette dernière section de décrire les phénomènes de stabilité ou d'instabilité spectrale qui se développent sous l'effet de petites perturbations pour les hautes énergies de trois exemples particuliers d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques sur \mathbb{R}^2 ,

$$\begin{aligned} q_1(x, \xi)^w &= -(1+i)\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(-1+i)x_2\partial_{x_1} + 6ix_2\partial_{x_2} \\ &\quad + 2ix_1\partial_{x_2} + (6+5i)x_1^2 + (11+i)x_2^2 + (10+4i)x_1x_2 - 2 + 5i, \end{aligned}$$

$$q_2(x, \xi)^w = -\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4ix_2\partial_{x_2} + 2x_1^2 + (4+i)x_2^2 + 4x_1x_2 + 2i,$$

et,

$$\begin{aligned} q_3(x, \xi)^w &= -(1+i)\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(1-i)x_2\partial_{x_1} - 4ix_1\partial_{x_2} \\ &\quad + (9+4i)x_1^2 + (2+i)x_2^2 - 4(1+i)x_1x_2 - 2 + 2i. \end{aligned}$$

Ces trois exemples permettent d'esquisser la diversité des phénomènes de stabilité ou d'instabilité spectrale qui se produisent dans la classe des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques. Nous avons choisi de considérer des exemples d'opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension 2 puisque l'étude menée dans ce chapitre dont les résultats sont résumés dans les théorèmes 1.6.6 et 1.6.7, a montré que la dimension 2 est prototypique de ce qui se passe en dimension finie différente de 1. Nous devons également reconnaître pour expliquer ce choix que la dimension 2 présente aussi l'avantage d'être le seul cas multidimensionnel pour lequel nous possédons une démonstration générale de l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur toutes les demi-droites ouvertes d'ordre infini composant la frontière des images numériques des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques.

2.4.a Etude de l'opérateur $q_1(x, \xi)^w$.

L'opérateur,

$$q_1(x, \xi)^w = -(1+i)\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(-1+i)x_2\partial_{x_1} + 6ix_2\partial_{x_2} \\ + 2ix_1\partial_{x_2} + (6+5i)x_1^2 + (11+i)x_2^2 + (10+4i)x_1x_2 - 2 + 5i,$$

est l'opérateur différentiel quadratique elliptique défini en quantification de Weyl par la forme quadratique elliptique,

$$q_1(x, \xi) = \xi_1^2 + 6x_1^2 + \xi_2^2 + 11x_2^2 - 4x_1\xi_1 - 2x_2\xi_1 + 10x_1x_2 - 2x_1\xi_2 - 6x_2\xi_2 \\ + i(\xi_1^2 + 5x_1^2 + x_2^2 - 4x_1\xi_1 - 2x_2\xi_1 + 4x_1x_2) \\ = (\xi_1 - 2x_1 - x_2)^2 + x_1^2 + (\xi_2 - x_1 - 3x_2)^2 + x_2^2 + i((\xi_1 - 2x_1 - x_2)^2 + x_1^2).$$

Considérons la transformation symplectique linéaire réelle,

$$\chi(x, \xi) = (x, \xi - Ax) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}^2),$$

et,

$$\tilde{q}_1(x, \xi) := \xi_1^2 + x_1^2 + \xi_2^2 + x_2^2 + i(x_1^2 + \xi_1^2). \quad (2.4.1)$$

L'identité $\tilde{q}_1 \circ \chi = q_1$ montre que l'image numérique $\Sigma(q_1)$ est égale à l'image numérique $\Sigma(\tilde{q}_1)$ qui d'après (2.4.1) est égale à l'ensemble,

$$\{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \pi/4\} \cup \{0\}.$$

Comme pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^4$, on obtient en utilisant le caractère symplectique de la transformation χ que,

$$q_1(x, \xi) = \sigma((x, \xi), F_1(x, \xi)) = (\tilde{q}_1 \circ \chi)(x, \xi) = \sigma(\chi(x, \xi), \tilde{F}_1\chi(x, \xi)) \\ = \sigma((x, \xi), \chi^{-1}\tilde{F}_1\chi(x, \xi)),$$

si F_1 et \tilde{F}_1 désignent respectivement les applications hamiltoniennes des formes quadratiques q_1 et \tilde{q}_1 . On en déduit l'identité,

$$F_1 = \chi^{-1}\tilde{F}_1\chi, \quad (2.4.2)$$

et un calcul explicite montre que si on note \mathcal{B} la base canonique de l'espace $\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2} \times \mathbb{R}_{\xi_1} \times \mathbb{R}_{\xi_2}$, on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{F}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\ \det(\tilde{F}_1 - X) = (X^2 + 1)(X^2 + 2i). \quad (2.4.3)$$

On en déduit d'après (2.4.2) et (2.4.3) que l'ensemble des valeurs propres de l'application hamiltonienne F_1 est donné par,

$$\{\pm i, \pm\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\}.$$

2.4. Quelques exemples.

Les résultats rappelés à la proposition 2.1.3 et au théorème 2.1.5 de ce chapitre montrent que le spectre de l'opérateur de Fredholm d'indice 0,

$$q_1(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est composé des valeurs propres,

$$\sigma(q_1(x, \xi)^w) = \{(2k_1 + 1) + (2k_2 + 1)\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} : (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2\}.$$

L'invariance symplectique du crochet de Poisson induit l'identité,

$$\{\operatorname{Re}q_1, \operatorname{Im}q_1\} = \{(\operatorname{Re}\tilde{q}_1) \circ \chi, (\operatorname{Im}\tilde{q}_1) \circ \chi\} = \{\operatorname{Re}\tilde{q}_1, \operatorname{Im}\tilde{q}_1\} \circ \chi = 0, \quad (2.4.4)$$

car,

$$\{\operatorname{Re}\tilde{q}_1, \operatorname{Im}\tilde{q}_1\} = \{\xi_1^2 + x_1^2 + \xi_2^2 + x_2^2, x_1^2 + \xi_1^2\} = 0.$$

Cette identité (2.4.4) montre d'après la proposition 2.1.4 que l'opérateur,

$$q_1(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est un opérateur *normal*. On déduit du théorème 1.6.6 l'identité caractéristique donnant une expression de la norme de la résolvante de tels opérateurs,

$$\forall z \notin \sigma(q_1(x, \xi)^w), \quad \|(q_1(x, \xi)^w - z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z, \sigma(q_1(x, \xi)^w))},$$

et la description suivante des ensembles ε -pseudo-spectraux,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sigma_\varepsilon(q_1(x, \xi)^w) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(q_1(x, \xi)^w)) \leq \varepsilon\},$$

qui assure la stabilité du spectre de cet opérateur et ce, même pour les hautes énergies de son spectre. Cette propriété de stabilité spectrale de l'opérateur $q_1(x, \xi)^w$ par rapport à d'éventuelles perturbations est représentative de la stabilité spectrale de tous les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *normaux*.

2.4.b Etude de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$.

L'opérateur,

$$q_2(x, \xi)^w = -\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4ix_2\partial_{x_2} + 2x_1^2 + (4+i)x_2^2 + 4x_1x_2 + 2i,$$

est l'opérateur différentiel quadratique elliptique défini en quantification de Weyl par la forme quadratique elliptique,

$$\begin{aligned} q_2(x, \xi) &= \xi_1^2 + 2x_1^2 + 2\xi_2^2 + 4x_2^2 - 4x_2\xi_2 + 4x_1x_2 + ix_2^2 \\ &= \xi_1^2 + (x_1 + 2x_2 - \xi_2)^2 + (x_1 + \xi_2)^2 + ix_2^2. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

On déduit de l'expression (2.4.5) que l'image numérique $\Sigma(q_2)$ est donnée dans ce cas par l'ensemble,

$$\Sigma(q_2) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}z \geq 0 \text{ et } \operatorname{Im}z \geq 0\},$$

2.4. Quelques exemples.

et,

$$\partial\Sigma(q_2) = \{0\} \sqcup \mathbb{R}_+^* \sqcup i\mathbb{R}_+^*.$$

Un calcul explicite montre que si on note comme précédemment \mathcal{B} la base canonique de l'espace $\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2} \times \mathbb{R}_{\xi_1} \times \mathbb{R}_{\xi_2}$ et F_2 l'application hamiltonienne associée à la forme quadratique q_2 , on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(F_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 - i & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$\det(F_2 - X) = X^4 + 2(3 + i)X^2 + 4i. \quad (2.4.6)$$

On déduit de (2.4.6) que l'ensemble des valeurs propres de l'application hamiltonienne F_2 est donné par,

$$\{\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2\},$$

si λ_1 et λ_2 désignent les nombres complexes qui sont les uniques solutions des équations,

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= -\left(\sqrt{\sqrt{17} + 4} + 3\right) - \left(\sqrt{\sqrt{17} - 4} + 1\right)i, \\ \lambda_2^2 &= \left(\sqrt{\sqrt{17} + 4} - 3\right) + \left(\sqrt{\sqrt{17} - 4} - 1\right)i, \end{aligned}$$

vérifiant,

$$-i\lambda_1, -i\lambda_2 \in \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0 \text{ et } \text{Im}z > 0\}.$$

Les résultats de la proposition 2.1.3 et du théorème 2.1.5 montrent que le spectre de l'opérateur de Fredholm d'indice 0,

$$q_2(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est composé des valeurs propres,

$$\sigma(q_2(x, \xi)^w) = \{(2k_1 + 1)(-i\lambda_1) + (2k_2 + 1)(-i\lambda_2) : (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2\}. \quad (2.4.7)$$

Le calcul suivant,

$$\{\text{Re}q_2, \text{Im}q_2\}(x, \xi) = 8x_2(\xi_2 - x_2), \quad (2.4.8)$$

montre d'après la proposition 2.1.4 que cet opérateur,

$$q_2(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est un opérateur *non normal*. D'autres calculs explicites donnent les expressions suivantes des crochets de Poisson itérés non trivialement nuls des symboles $\text{Re}q_2$ et $\text{Im}q_2$ avec trois ou quatre termes,

$$\begin{aligned} H_{\text{Re}q_2}^2 \text{Im}q_2(x, \xi) &= 32(\xi_2^2 - 2\xi_2x_2 - x_1x_2), \\ H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Re}q_2(x, \xi) &= 16x_2^2, \\ H_{\text{Re}q_2}^3 \text{Im}q_2(x, \xi) &= 64(6x_1x_2 - 6x_1\xi_2 + 8x_2^2 - x_2\xi_1 - 8x_2\xi_2), \\ H_{\text{Im}q_2} H_{\text{Re}q_2}^2 \text{Im}q_2(x, \xi) &= -16\{\text{Re}q_2, \text{Im}q_2\}(x, \xi), \\ H_{\text{Re}q_2} H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Re}q_2(x, \xi) &= 16\{\text{Re}q_2, \text{Im}q_2\}(x, \xi), \\ H_{\text{Im}q_2}^3 \text{Re}q_2(x, \xi) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

2.4. Quelques exemples.

Le calcul explicite des crochets de Poisson itérés non trivialement nuls des symboles Req_2 et $\text{Im}q_2$ avec exactement cinq termes montre ensuite que,

$$\begin{aligned}
H_{\text{Req}_2}^4 \text{Im}q_2(x, \xi) &= 256(6x_1^2 + 15x_1x_2 + x_2^2 + 4x_2\xi_1 \\
&\quad + 16x_2\xi_2 - 4\xi_1\xi_2 - 8\xi_2^2), \\
H_{\text{Im}q_2} H_{\text{Req}_2}^3 \text{Im}q_2(x, \xi) &= 256(3x_1 + 4x_2)x_2, \\
H_{\text{Req}_2} H_{\text{Im}q_2} H_{\text{Req}_2}^2 \text{Im}q_2(x, \xi) &= -16H_{\text{Req}_2}^2 \text{Im}q_2(x, \xi), \\
H_{\text{Im}q_2}^2 H_{\text{Req}_2}^2 \text{Im}q_2(x, \xi) &= 16H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Req}_2(x, \xi), \\
H_{\text{Req}_2}^2 H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Req}_2(x, \xi) &= 16H_{\text{Req}_2}^2 \text{Im}q_2(x, \xi), \\
H_{\text{Im}q_2} H_{\text{Req}_2} H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Req}_2(x, \xi) &= -16H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Req}_2(x, \xi), \\
H_{\text{Req}_2} H_{\text{Im}q_2}^3 \text{Req}_2(x, \xi) &= H_{\text{Im}q_2}^4 \text{Req}_2(x, \xi) = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

On déduit de (2.4.5) l'identité,

$$\{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^4 : q_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = i\} = \{(-1, 1, 0, 1); (1, -1, 0, -1)\},$$

et on constate d'après (2.4.8) et (2.4.9) que sur cet ensemble,

$$\{\text{Req}_2, \text{Im}q_2\} = 0 \text{ et } H_{\text{Im}q_2}^2 \text{Req}_2 \neq 0.$$

Il s'ensuit que l'ordre du symbole q_2 sur la demi-droite $i\mathbb{R}_+^*$ est *fini* et que cet ordre est égal à 2. Nous allons maintenant déterminer l'ordre du symbole q_2 sur l'autre demi-droite ouverte qui compose la frontière de l'image numérique i.e. la demi-droite ouverte \mathbb{R}_+^* . Constatons tout d'abord d'après (2.4.5) que,

$$q_2(0, 0, 1, 0) = 1,$$

et en usant des expressions (2.4.8), (2.4.9) et (2.4.10) que tous les crochets de Poisson itérés des symboles Req_2 et $\text{Im}q_2$ avec plus de deux termes et au plus cinq termes s'annulent au point $(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = (0, 0, 1, 0)$. Ceci montre que l'ordre du symbole q_2 sur la demi-droite \mathbb{R}_+^* est supérieur ou égal à 5. On sait d'après le théorème 2.3.3 de ce chapitre que si cet ordre est *fini* alors il est nécessairement *pair*. Il s'ensuit que si l'ordre de q_2 sur la demi-droite \mathbb{R}_+^* est fini alors cet ordre est supérieur ou égal à 6. Nous allons montrer que cet ordre est exactement égal à 6. Des calculs supplémentaires montrent que,

$$\begin{aligned}
H_{\text{Req}_2}^6 \text{Im}q_2(x, \xi) &= 2048(-90x_1^2 - 189x_1x_2 - 23x_2^2 - 58x_2\xi_1 - 152x_2\xi_2 + 10\xi_1^2 \\
&\quad + 58\xi_1\xi_2 + 76\xi_2^2).
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Si l'ordre de q_2 sur la demi-droite \mathbb{R}_+^* était strictement supérieur à 6, il existerait un élément (x_1, x_2, ξ_1, ξ_2) de \mathbb{R}^4 vérifiant,

$$\begin{aligned}
q_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) &= 1, \quad H_{\text{Req}_2}^2 \text{Im}q_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = H_{\text{Req}_2}^4 \text{Im}q_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \\
&= H_{\text{Req}_2}^6 \text{Im}q_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = 0.
\end{aligned}$$

L'équation $q_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = 1$ induirait d'après (2.4.5) que $x_2 = 0$. Ensuite en utilisant que,

$$H_{\text{Req}_2}^2 \text{Im}q_2(x_1, 0, \xi_1, \xi_2) = 0,$$

2.4. Quelques exemples.

et (2.4.9), on obtiendrait que nécessairement $\xi_2 = 0$. Puis comme,

$$H_{\text{Re}q_2}^4 \text{Im}q_2(x_1, 0, \xi_1, 0) = 0,$$

on trouverait en reprenant (2.4.10) que $x_1 = 0$. Enfin si,

$$H_{\text{Re}q_2}^6 \text{Im}q_2(0, 0, \xi_1, 0) = 0,$$

on obtiendrait en utilisant (2.4.11) que $\xi_1 = 0$, ce qui contredirait le fait qu'en ce point (x_1, x_2, ξ_1, ξ_2) , on ait $q_2 = 1$. On a ainsi démontré que l'ordre de q_2 sur la demi-droite ouverte \mathbb{R}_+^* est *fini* et que cet ordre est exactement égal à 6. Les résultats des théorèmes 1.6.6 et 1.6.7 montrent que le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini est exactement égal à l'intérieur de l'image numérique,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(q_2(x, h\xi)^w) = \Sigma(q_2) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}z > 0 \text{ et } \text{Im}z > 0\},$$

et qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q_2)$. Plus précisément, on a les résultats suivants sur la frontière de l'image numérique $\partial\Sigma(q_2) = \{0\} \sqcup \mathbb{R}_+^* \sqcup i\mathbb{R}_+^*$,

$$0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q_2(x, h\xi)^w))^c, \quad \mathbb{R}_+^* \subset (\Lambda_{6/7}^{\text{sc}}(q_2(x, h\xi)^w))^c \text{ et} \\ i\mathbb{R}_+^* \subset (\Lambda_{2/3}^{\text{sc}}(q_2(x, h\xi)^w))^c. \quad (2.4.12)$$

Ces inclusions (2.4.12) se traduisent de la manière suivante en terme d'estimations de résolvante,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \quad \|(q_2(x, h\xi)^w)^{-1}\| < Ch^{-1}, \\ \|(q_2(x, h\xi)^w - 1)^{-1}\| < Ch^{-\frac{6}{7}}, \quad \|(q_2(x, h\xi)^w - i)^{-1}\| < Ch^{-\frac{2}{3}}. \quad (2.4.13)$$

Rappelons aussi qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 0 sur l'ensemble complémentaire de l'image numérique,

$$\Sigma(q_2)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q_2(x, h\xi)^w))^c.$$

Ce fait découle de la proposition 2.1.9 qui montre que,

$$\forall h > 0, \forall z \in \Sigma(q_2)^c, \quad \|(q_2(x, h\xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q_2))}. \quad (2.4.14)$$

Cette description précise des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques nous montre en délaissant le cadre semi-classique pour revenir au cadre classique (i.e. $h = 1$) que le spectre de l'opérateur,

$$q_2(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est très instable sous de petites perturbations. En effet en utilisant le changement de variables $y = h^{1/2}x$ avec $h > 0$ déjà mentionné en (1.5.2) au chapitre 1, on obtient l'identité,

$$q_2(x, \xi)^w - \frac{z}{h} = \frac{1}{h}(q_2(y, h\xi)^w - z). \quad (2.4.15)$$

2.4. Quelques exemples.

L'existence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en tout point de l'intérieur de l'image numérique,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(q_2(x, h\xi)^w) = \Sigma(q_2),$$

induit d'après notre discussion suivant (1.5.2) à la section 1.5 du chapitre 1 que la norme de la résolvante de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$ explose très rapidement le long de toutes les demi-droites $e^{i\theta}\mathbb{R}_+^*$ si $0 < \theta < \pi/2$,

$$\forall 0 < \theta < \pi/2, \forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \\ \|(q_2(x, \xi)^w - \eta e^{i\theta})^{-1}\| \geq C\eta^N,$$

et ce, même si la demi-droite $e^{i\theta}\mathbb{R}_+^*$ ne rencontre pas le spectre de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$. La norme de la résolvante de cet opérateur différentiel quadratique elliptique explose donc dans des régions éloignées de son spectre, ce qui induit que ses hautes énergies sont très instables sous l'effet de petites perturbations. Les estimations de résolvantes (2.4.13) et (2.4.14) permettent de délimiter les régions où se produisent ces instabilités spectrales. En effet, en utilisant l'identité (2.4.15), la description (2.4.7) du spectre de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$, les estimations (2.4.13) et (2.4.14), on obtient en reprenant la discussion de la section 1.5 du chapitre 1 que l'on peut trouver des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que la norme de la résolvante de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$ reste bornée sur les ensembles,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1 \text{ et } d(u, \mathbb{R}_+^*) \leq C_2 |\text{proj}_{\mathbb{R}_+^*} u|^{1/7}\}, \quad (2.4.16)$$

et,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1 \text{ et } d(u, i\mathbb{R}_+^*) \leq C_2 |\text{proj}_{i\mathbb{R}_+^*} u|^{1/3}\}, \quad (2.4.17)$$

si on note $\text{proj}_\Delta u$ la projection orthogonale du point u sur la demi-droite fermée $\bar{\Delta}$. Ceci nous permet de décrire la forme des ε -pseudo-spectres de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$ lorsque ε est assez petit. En effet, considérons des constantes $\delta > 0$, $r \geq C_1$ et l'ensemble,

$$\Gamma_{\delta, r} := \bigcup_{\lambda \in \sigma(q_2(x, \xi)^w) \cap B(0, r)} B(\lambda, \delta) \\ \cup \left[\Sigma(q_2) \cap \overline{B(0, r)^c} \cap \{u \in \mathbb{C} : d(u, \mathbb{R}_+^*) \geq C_2 |\text{proj}_{\mathbb{R}_+^*} u|^{1/7} \text{ et } \right. \\ \left. d(u, i\mathbb{R}_+^*) \geq C_2 |\text{proj}_{i\mathbb{R}_+^*} u|^{1/3} \right],$$

si on note ci-dessus $B(x, r)$ la boule euclidienne fermée du plan complexe centrée en x et de rayon r . En utilisant l'estimation (2.4.14) pour $h = 1$, le fait que la norme de la résolvante reste bornée sur les compacts inclus dans l'ensemble résolvant ainsi que sur les ensembles (2.4.16) et (2.4.17), on en déduit que pour tout $\delta > 0$ et $r \geq C_1$, il existe une constante ε_0 strictement positive telle que tous les ensembles ε -pseudo-spectraux pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ soient contenus dans l'ensemble $\Gamma_{\delta, r}$,

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \sigma_\varepsilon(q_2(x, \xi)^w) \subset \Gamma_{\delta, r}. \quad (2.4.18)$$

Ces inclusions (2.4.18) permettent de donner une localisation du type de celle donnée par la conjecture de Boulton des régions de l'image numérique où se

développent sous l'effet de petites perturbations les instabilités spectrales de l'opérateur $q_2(x, \xi)^w$. Ce type d'instabilités spectrales est représentatif des instabilités spectrales qui se développent pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* en dimension $n \geq 2$ lorsque les deux demi-droites ouvertes qui composent la frontière de leurs images numériques sont d'ordre *fini*.

2.4.c Etude de l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$.

L'opérateur,

$$q_3(x, \xi)^w = -(1+i)\partial_{x_1}^2 - 2\partial_{x_2}^2 + 4(-1+i)x_1\partial_{x_1} + 2(1-i)x_2\partial_{x_1} - 4ix_1\partial_{x_2} \\ + (9+4i)x_1^2 + (2+i)x_2^2 - 4(1+i)x_1x_2 - 2 + 2i,$$

est l'opérateur différentiel quadratique elliptique défini en quantification de Weyl par la forme quadratique elliptique,

$$q_3(x, \xi) = \xi_1^2 + 9x_1^2 + 2x_2^2 + 2\xi_2^2 - 4x_1\xi_1 - 4x_1x_2 + 2\xi_1x_2 + 4x_1\xi_2 \\ + i(\xi_1^2 + 4x_1^2 + x_2^2 - 4x_1\xi_1 + 2\xi_1x_2 - 4x_1x_2) \\ = (\xi_1 - 2x_1 + x_2)^2 + 3x_1^2 + 2(\xi_2 + x_1)^2 + x_2^2 + i(\xi_1 - 2x_1 + x_2)^2.$$

Considérons la transformation symplectique linéaire réelle,

$$\chi(x, \xi) = (x, \xi - Ax) \text{ où } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R}^2),$$

et,

$$\tilde{q}_3(x, \xi) := \xi_1^2 + 3x_1^2 + 2\xi_2^2 + x_2^2 + i\xi_1^2. \quad (2.4.19)$$

L'identité $\tilde{q}_3 \circ \chi = q_3$ montre que l'image numérique $\Sigma(q_3)$ est égale à l'image numérique $\Sigma(\tilde{q}_3)$ qui d'après (2.4.19) est égale à l'ensemble,

$$\{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \pi/4\} \cup \{0\}.$$

Notons respectivement F_3 et \tilde{F}_3 les applications hamiltoniennes des formes quadratiques q_3 et \tilde{q}_3 . Un raisonnement identique à celui menant à (2.4.2) montre que,

$$F_3 = \chi^{-1}\tilde{F}_3\chi. \quad (2.4.20)$$

Un calcul explicite donne que si \mathcal{B} désigne la base canonique de l'espace,

$$\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2} \times \mathbb{R}_{\xi_1} \times \mathbb{R}_{\xi_2},$$

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(\tilde{F}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et} \\ \det(\tilde{F}_3 - X) = (X^2 + 2)(X^2 + 3 + 3i). \quad (2.4.21)$$

2.4. Quelques exemples.

On déduit de (2.4.20) et (2.4.21) que l'ensemble des valeurs propres de l'application hamiltonienne F_3 est donné par,

$$\{ \pm i\sqrt{2}, \pm 3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} e^{-i\frac{3\pi}{8}} \}.$$

La proposition 2.1.3 et le théorème 2.1.5 montrent que le spectre de l'opérateur de Fredholm d'indice 0,

$$q_3(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est composé des valeurs propres,

$$\sigma(q_3(x, \xi)^w) = \{(2k_1 + 1)\sqrt{2} + (2k_2 + 1)3^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8}} : (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2\},$$

et un calcul explicite donne que,

$$\{\operatorname{Re}\tilde{q}_3, \operatorname{Im}\tilde{q}_3\}(x, \xi) = -12x_1\xi_1. \quad (2.4.22)$$

Comme l'invariance symplectique du crochet de Poisson assure que,

$$\{\operatorname{Re}q_3, \operatorname{Im}q_3\} = \{\operatorname{Re}\tilde{q}_3, \operatorname{Im}\tilde{q}_3\} \circ \chi,$$

on déduit de la proposition 2.1.4 que l'opérateur $q_3(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$ est un opérateur *non normal*. Une récurrence triviale montre en utilisant (2.4.19) et (2.4.22) que tous les crochets de Poisson itérés des symboles $\operatorname{Re}\tilde{q}_3$ et $\operatorname{Im}\tilde{q}_3$ avec plus de deux termes sont des polynômes homogènes de degré 2 en les variables (x_1, ξ_1) . Le fait que $\tilde{q}_3 = 1$ en $(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = (0, 1, 0, 0)$ induit d'après le constat précédent que l'ordre du symbole \tilde{q}_3 sur la demi-droite ouverte \mathbb{R}_+^* est *infini*. C'est également le cas de l'ordre du symbole q_3 sur la demi-droite \mathbb{R}_+^* puisque la transformation symplectique χ conserve les crochets de Poisson. Nous allons maintenant déterminer l'ordre du symbole q_3 sur l'autre demi-droite ouverte qui compose $\partial\Sigma(q_3) \setminus \{0\}$ i.e. la demi-droite ouverte $e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*$. Il est facile de vérifier d'après (2.4.19) et (2.4.22) que,

$$\{(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^4 : \tilde{q}_3(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2) = 1 + i\} = \{(0, 0, \pm 1, 0)\},$$

et qu'en ces points, on a

$$\{\operatorname{Re}\tilde{q}_3, \operatorname{Im}\tilde{q}_3\} = 0 \text{ et } H_{\operatorname{Im}\tilde{q}_3}^2 \operatorname{Re}\tilde{q}_3 \neq 0,$$

car,

$$H_{\operatorname{Im}\tilde{q}_3}^2 \operatorname{Re}\tilde{q}_3(x, \xi) = 24\xi_1^2.$$

Ceci montre que l'ordre du symbole \tilde{q}_3 sur la demi-droite $e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*$ est *fini* et que cet ordre est égal à 2. En utilisant à nouveau le caractère symplectique de la transformation χ , on en déduit que l'ordre du symbole q_3 sur la demi-droite $e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*$ est également égal à 2. On peut alors appliquer les résultats des théorèmes 1.6.6 et 1.6.7 pour obtenir que dans ce cas aussi le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini est exactement égal à l'intérieur de l'image numérique,

$$\Lambda_\infty^{\operatorname{sc}}(q_3(x, h\xi)^w) = \Sigma(\overset{\circ}{q}_3) = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < \arg z < \pi/4\}.$$

2.4. Quelques exemples.

Ceci induit le fait que le spectre de l'opérateur,

$$q_3(x, \xi)^w : B \rightarrow L^2(\mathbb{R}^2),$$

est très instable sous de petites perturbations. En utilisant l'identité (2.4.15) pour repasser dans un cadre classique, on en déduit d'après la discussion de la section 1.5 du chapitre 1 que la norme de la résolvante de l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$ explose le long de toutes les demi-droites concourantes en 0 contenues dans l'intérieur de l'image numérique,

$$\forall 0 < \theta < \pi/4, \forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall \eta_0 \geq 1, \exists \eta \geq \eta_0, \quad \|(q_3(x, \xi)^w - \eta e^{i\theta})^{-1}\| \geq C\eta^N,$$

et ce, même si ces demi-droites ne rencontrent pas le spectre de cet opérateur. A l'extérieur de l'image numérique, la proposition 2.1.9 assure la validité de l'estimation,

$$\forall h > 0, \forall z \in \Sigma(q_3)^c, \|(q_3(x, h\xi)^w - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{d(z, \Sigma(q_3))}, \quad (2.4.23)$$

qui induit l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 0 sur le complémentaire de l'image numérique $\Sigma(q_3)$,

$$\Sigma(q_3)^c \subset (\Lambda_0^{\text{sc}}(q_3(x, h\xi)^w))^c.$$

Concernant l'étude pseudo-spectrale sur la frontière de l'image numérique,

$$\partial\Sigma(q_3),$$

les résultats des théorèmes 1.6.6 et 1.6.7 montrent qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur $\partial\Sigma(q_3)$ et plus précisément que l'on a les inclusions suivantes,

$$0 \in (\Lambda_1^{\text{sc}}(q_3(x, h\xi)^w))^c, \quad \mathbb{R}_+^* \subset (\Lambda_1^{\text{sc}}(q_3(x, h\xi)^w))^c \text{ et} \\ e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^* \subset (\Lambda_{2/3}^{\text{sc}}(q_3(x, h\xi)^w))^c, \quad (2.4.24)$$

puisque comme la dimension est ici égale à 2, le théorème 2.3.7 et la remarque qui lui fait suite, assurent l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur la demi-droite ouverte d'ordre *infini* \mathbb{R}_+^* . Les inclusions (2.4.24) induisent les estimations de résolvantes,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \|(q_3(x, h\xi)^w)^{-1}\| < Ch^{-1}, \\ \|(q_3(x, h\xi)^w - 1)^{-1}\| < Ch^{-1}, \|(q_3(x, h\xi)^w - 1 - i)^{-1}\| < Ch^{-\frac{2}{3}}. \quad (2.4.25)$$

En utilisant à nouveau l'identité (2.4.15) pour l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$ et la description de son spectre que nous avons donné précédemment, on obtient en reprenant la discussion de la section 1.5 du chapitre 1 que l'on peut trouver des constantes C_1 et C_2 strictement positives telles que la norme de la résolvante de l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$ reste bornée sur les ensembles,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1 \text{ et } d(u, \mathbb{R}_+^*) \leq C_2\}, \quad (2.4.26)$$

2.4. Quelques exemples.

et,

$$\{u \in \mathbb{C} : |u| \geq C_1 \text{ et } d(u, e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*) \leq C_2 |\text{proj}_{e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*} u|^{1/3}\}. \quad (2.4.27)$$

Ceci nous permet de donner comme pour l'opérateur précédent une description des ensembles ε -pseudo-spectraux de l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$ lorsque le paramètre ε est suffisamment petit. Considérons des constantes $\delta > 0$, $r \geq C_1$ et l'ensemble,

$$\begin{aligned} \Gamma_{\delta, r} &:= \bigcup_{\lambda \in \sigma(q_3(x, \xi)^w) \cap B(0, r)} B(\lambda, \delta) \\ &\cup \left[\Sigma(q_3) \cap \overline{B(0, r)^c} \cap \left\{ u \in \mathbb{C} : d(u, \mathbb{R}_+^*) \geq C_2 \text{ et} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. d(u, e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*) \geq C_2 |\text{proj}_{e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbb{R}_+^*} u|^{1/3} \right\} \right]. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (2.4.23) pour $h = 1$, le fait que la norme de la résolvante reste bornée sur les compacts inclus dans l'ensemble résolvant ainsi que sur les ensembles (2.4.26) et (2.4.27), on en déduit que pour tout $\delta > 0$ et $r \geq C_1$, il existe une constante ε_0 strictement positive telle que tous les ensembles ε -pseudo-spectraux pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ soient contenus dans l'ensemble $\Gamma_{\delta, r}$,

$$\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \sigma_\varepsilon(q_3(x, \xi)^w) \subset \Gamma_{\delta, r}. \quad (2.4.28)$$

Ces inclusions (2.4.28) permettent de donner une localisation des régions de l'image numérique où se développent sous l'effet de petites perturbations les instabilités spectrales de l'opérateur $q_3(x, \xi)^w$. Ce type d'instabilités spectrales est représentatif des instabilités spectrales qui se développent pour les opérateurs différentiels quadratiques elliptiques *non normaux* en dimension $n \geq 2$ lorsqu'une demi-droite ouverte de la frontière de leurs images numériques est d'ordre *infini*.

Chapitre 3

Quelques résultats d'existence de quasi-modes semi-classiques.

Le contenu de ce troisième chapitre recouvre des résultats d'existence de quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini dont un aperçu a été donné à la section 1.6.b du chapitre 1. Ce chapitre est composé de deux parties qui sont rédigées sous la forme d'articles indépendants du reste du manuscrit de cette thèse. Les numérotations adoptées ici sont de ce fait propres et internes à chacune de ces deux parties.

La première partie de ce chapitre intitulée, *un résultat d'existence de pseudo-spectre pour les opérateurs de Schrödinger*, reprend le contenu de l'article [21], *A general result about pseudo-spectrum for Schrödinger operators*, qui a été publié dans les PROCEEDINGS OF THE ROYAL SOCIETY. Le résultat principal de cet article détermine une condition portant sur le potentiel complexe d'un opérateur de Schrödinger semi-classique qui assure l'existence de quasi-modes caractéristiques de la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique dans certaines régions du plan complexe. Il s'agit d'une généralisation du résultat de E.B.Davies contenu dans [6] (Théorème 1) que nous avons rappelé dans une version simplifiée au théorème 1.3.1 du chapitre 1. La démonstration de ce résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques repose sur la même construction WKB complexe que celle utilisée par E.B.Davies dans [6].

Dans la deuxième partie de ce chapitre intitulée, *un résultat général d'existence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini*, on établit un résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques pour des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques qui généralise en dimension $n \geq 2$, le résultat d'existence que donne M.Zworski dans [29] et [30] (Théorème 1.3.2 du chapitre 1). Ce résultat donne une condition géométrique suffisante sur le symbole principal semi-classique d'un opérateur pseudo-différentiel, la violation de la condition $(\bar{\Psi})$, qui permet la construction de quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini.

3.1 Un résultat d'existence de pseudo-spectre pour les opérateurs de Schrödinger.

Résumé. On exhibe dans cet article une condition géométrique suffisante portant sur le potentiel complexe d'un opérateur de Schrödinger qui permet via une méthode WKB complexe de construire des quasi-modes semi-classiques caractéristiques de la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini pour cet opérateur.

1. Introduction.

Nous allons démontrer dans cet article que l'on peut généraliser le résultat d'existence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini établi par E.B.Davies dans [6] pour des opérateurs de Schrödinger à potentiels complexes. Commençons par donner une définition de la notion de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini.

Pour une famille semi-classique $(H_h)_{0 < h \leq 1}$ d'opérateurs définis sur un domaine D , le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini de cette famille $(H_h)_{0 < h \leq 1}$ est défini comme le sous-ensemble suivant du plan complexe,

$$\lambda_\infty^{\text{sc}}((H_h)_{0 < h \leq 1}) = \{z \in \mathbb{C} : \forall N \in \mathbb{N}, \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \\ \exists u \in D, \|u\| = 1, \|(H_h - zI)u\| \leq Ch^N\}.$$

E.B.Davies a démontré dans [6] que pour un opérateur de Schrödinger semi-classique défini par un potentiel complexe V , le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini de cet opérateur contient toute la région du plan complexe U_1 définie par,

$$U_1 := \{z = \eta^2 + V(a) : \eta \in \mathbb{R}^*, \text{Im}V'(a) \neq 0\}.$$

Nous allons voir dans les lignes suivantes que l'on peut en utilisant la même construction de quasi-modes que celle proposée par E.B.Davies étendre son résultat et démontrer l'existence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en tout point de l'ensemble,

$$U_2 := \{z = \eta^2 + V(a) : \eta \in \mathbb{R}^*, \text{ la fonction } \text{Im}V - \text{Im}V(a) \\ \text{s'annule à un ordre } \textit{impair} \text{ en } a\},$$

i.e.,

$$U_2 := \{z = \eta^2 + V(a) : \eta \in \mathbb{R}^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall j \leq 2p, j \neq 0, \text{Im}V^{(j)}(a) = 0, \\ \text{Im}V^{(2p+1)}(a) \neq 0\},$$

qui contient l'ensemble U_1 . En d'autres termes, le résultat de E.B.Davies établit qu'une annulation au *premier* ordre en a de la fonction $\text{Im}V - \text{Im}V(a)$, induit la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en tout point $z = \eta^2 + V(a)$ si $\eta \in \mathbb{R}^*$. Notre résultat montre que plus généralement une

annulation à un ordre *impair* de cette fonction en a , génère aussi du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini en ces points. Cette généralisation permet d'exhiber le lien étroit existant entre des résultats de présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini et des propriétés de changement de signe de la partie imaginaire du potentiel. En effet, si on suppose en plus que la partie imaginaire du potentiel $\text{Im}V$ est une fonction réelle-analytique, notre résultat d'existence montre qu'une condition suffisante dans ce cas pour que le point $z = \eta^2 + V(a)$ où $\eta \in \mathbb{R}^*$, appartienne au pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini, est de requérir que la fonction $\text{Im}V - \text{Im}V(a)$ change de signe au point a .

2. Construction de quasi-modes semi-classiques.

Considérons l'opérateur H_h sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par,

$$H_h f(x) := -h^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + V_h(x)f(x),$$

où V_h désigne un potentiel dépendant du paramètre semi-classique h qui est régulier pour toute valeur suffisamment petite de ce paramètre $h \geq 0$. On suppose également que ce potentiel ainsi que toutes ces dérivées dépendent continûment du paramètre h et que l'opérateur H_h est une extension fermée de l'opérateur défini par la formule précédente sur l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Le résultat principal de cet article est donné par le théorème suivant.

Théorème 2.1. *Considérons des constantes $\eta \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ telles que,*

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall j \leq 2p, j \neq 0, \text{Im}V_0^{(j)}(a) = 0, \text{Im}V_0^{(2p+1)}(a) \neq 0,$$

et posons $z_h := \eta^2 + V_h(a)$. On peut alors trouver une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $c_n > 0$ indépendante de h et une fonction $\tilde{f}_{h,n} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ non identiquement nulle dépendant de h et n telles que,

$$\forall 0 < h < \delta, \frac{\|H_h \tilde{f}_{h,n} - z_h \tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}} \leq c_n h^n.$$

Ce théorème donne dans le cas où le potentiel est indépendant du paramètre semi-classique, le résultat énoncé lors de l'introduction.

Preuve. Considérons $n \in \mathbb{N}^*$ et $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $0 \leq \xi \leq 1$ et,

$$\begin{cases} \xi(s) = 1, \forall |s| < \delta/2 \\ \xi(s) = 0, \forall |s| > \delta, \end{cases}$$

où δ est une constante strictement positive qui sera déterminée par la suite. Au regard de la construction proposée par E.B.Davies dans [6], on définit de la même manière la fonction,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \tilde{f}_{h,n}(a+s) := \xi(s)f_{h,n}(a+s),$$

3.1. Un résultat d'existence pour les opérateurs de Schrödinger.

où la fonction $f_{h,n}(a+\cdot)$ apparaissant dans l'identité ci-dessus reste à déterminer. Pour ce faire, on cherche cette fonction $f_{h,n}$ sous la forme,

$$f_{h,n} := e^{-\Psi_{h,n}},$$

où,

$$\Psi_{h,n}(a+s) := \sum_{m=-1}^n h^m \psi_{m,h}(s),$$

et où $\psi_{m,h}$, $m = -1, \dots, n$, désignent des fonctions régulières dépendant du paramètre semi-classique h et de l'entier n que nous allons déterminer. Un calcul direct montre que,

$$\begin{aligned} H_h f_{h,n}(a+\cdot) - z_h f_{h,n}(a+\cdot) &= f_{h,n}(a+\cdot) \\ &\times \left[-h^2 \left(\sum_{m=-1}^n h^m \psi'_{m,h} \right)^2 + h^2 \sum_{m=-1}^n h^m \psi''_{m,h} + V_h(a+\cdot) - z_h \right], \end{aligned}$$

identité que l'on peut réécrire de la manière suivante,

$$H_h f_{h,n}(a+\cdot) - z_h f_{h,n}(a+\cdot) = f_{h,n}(a+\cdot) \left[\sum_{m=0}^{2n+2} h^m \phi_{m,h} \right],$$

si on pose,

$$\begin{aligned} \phi_{0,h}(s) &:= -(\psi'_{-1,h}(s))^2 + V_h(a+s) - z_h, \\ \phi_{j+2,h}(s) &:= \psi''_{j,h}(s) - \sum_{\substack{l+k=j \\ -1 \leq l, k \leq n}} \psi'_{l,h}(s) \psi'_{k,h}(s), \quad -1 \leq j \leq n, \\ \phi_{j+2,h}(s) &:= - \sum_{\substack{l+k=j \\ -1 \leq l, k \leq n}} \psi'_{l,h}(s) \psi'_{k,h}(s), \quad n+1 \leq j \leq 2n. \end{aligned}$$

Pour déterminer ces fonctions $\psi_{-1,h}, \dots, \psi_{n,h}$, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 2.2. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on puisse trouver des fonctions $\psi_{-1,h}, \dots, \psi_{n,h}$ qui soient C^∞ sur le segment $[-\delta, \delta]$, dépendent continûment ainsi que leurs dérivées de tous ordres du paramètre semi-classique h lorsque $0 \leq h \leq \delta$ et vérifient les équations,*

$$\begin{cases} -(\psi'_{-1,h})^2 + V_h(a+\cdot) - z_h = 0, \\ \psi''_{j,h} - \sum_{\substack{l+k=j \\ -1 \leq l, k \leq n}} \psi'_{l,h} \psi'_{k,h} = 0, \quad -1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Preuve du lemme. On commence par résoudre l'équation eikonale,

$$(\psi'_{-1,h})^2 = V_h(a+\cdot) - V_h(a) - \eta^2.$$

3.1. Un résultat d'existence pour les opérateurs de Schrödinger.

La régularité de la fonction $V_h(a + \cdot)$ et sa dépendance continue par rapport au paramètre semi-classique h , nous permet de trouver une constante strictement positive δ telle que,

$$\forall 0 \leq h \leq \delta, \forall t \in [-\delta, \delta], \left| \frac{V_h(a+t) - V_h(a)}{\eta^2} \right| < 1.$$

Considérons $\sqrt{z} := e^{\frac{1}{2} \log(z)}$ où,

$$\log(z) = \oint_{[1,z]} \frac{d\xi}{\xi},$$

et définissons la fonction,

$$\psi_{-1,h}(s) = \int_0^s i\eta \sqrt{1 - \frac{V_h(a+t) - V_h(a)}{\eta^2}} dt.$$

Cette fonction $\psi_{-1,h}$ est C^∞ sur le segment $[-\delta, \delta]$ pour tout $0 \leq h \leq \delta$ et résout l'équation eikonale. Constatons également que cette fonction $\psi_{-1,h}$ ainsi que toutes ses dérivées, dépendent continûment du paramètre semi-classique h . Cette fonction $\psi_{-1,h}$ est indépendante de l'entier n et vérifie,

$$\psi'_{-1,h}(0) = i\eta \neq 0.$$

Cette dernière égalité montre que quitte à choisir indépendamment de n une nouvelle constante $\delta > 0$ plus petite, on peut supposer que la fonction,

$$\rho_h := \frac{1}{2\psi'_{-1,h}},$$

est bornée par une constante positive β ,

$$\forall 0 \leq h \leq \delta, \forall s \in [-\delta, \delta], |\rho_h(s)| \leq \beta.$$

On peut alors déterminer successivement les fonctions $\psi_{0,h}, \dots, \psi_{n,h}$ à partir des équations,

$$\phi_{j+2,h} = 0, \quad \forall -1 \leq j \leq n.$$

En effet, supposons que les fonctions $\psi_{j,h}, -1 \leq j \leq k < n$ aient déjà été déterminées. On peut alors écrire que,

$$\begin{aligned} \phi_{k+2,h} = 0 \Rightarrow \psi''_{k,h} &= \sum_{\substack{l+p=k \\ -1 \leq l, p \leq n}} \psi'_{l,h} \psi'_{p,h} \\ &= 2\psi'_{-1,h} \psi'_{k+1,h} + \alpha_h, \end{aligned}$$

où α_h désigne une fonction dépendant des fonctions $\psi_{j,h}, -1 \leq j \leq k$. Il s'ensuit que,

$$\psi'_{k+1,h} = \rho_h(\psi''_{k,h} - \alpha_h).$$

Cette dernière identité montre que l'on peut déterminer d'une manière unique ces fonctions $\psi_{j,h}$ en imposant les conditions $\psi_{j,h}(0) = 0$ pour tout $0 \leq j \leq n$.

3.1. Un résultat d'existence pour les opérateurs de Schrödinger.

Par construction, ces fonctions $\psi_{j,h}$ sont C^∞ sur le segment $[-\delta, \delta]$ pour tout $0 \leq j \leq n$ et $0 \leq h \leq \delta$, et dépendent continûment ainsi que toutes leurs dérivées du paramètre semi-classique h . Ceci termine la preuve du lemme 2.2. \square

Reprenons la preuve du théorème 2.1. En utilisant la continuité par rapport au paramètre semi-classique h des fonctions $\psi_{j,h}$ données par le lemme précédent ainsi que la continuité par rapport à ce même paramètre de toutes leurs dérivées, il est clair que si la constante δ est choisie telle que $0 < \delta < 1$, on peut trouver des constantes strictement positives c_m et d_m telles que,

$$\forall 0 \leq m \leq n, \forall 0 \leq h \leq \delta^{2p+2}, \forall s \in [-\delta, \delta], |\psi_{m,h}(s)| \leq c_m,$$

$$\forall n+3 \leq m \leq 2n+2, \forall 0 \leq h \leq \delta^{2p+2}, \forall s \in [-\delta, \delta], |\phi_{m,h}(s)| \leq d_m.$$

Notre hypothèse,

$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall j \leq 2p, j \neq 0, \operatorname{Im}V_0^{(j)}(a) = 0, \operatorname{Im}V_0^{(2p+1)}(a) \neq 0,$$

nous permet alors d'écrire,

$$\frac{V_h(a+t) - V_h(a)}{\eta^2} = \sum_{k=1}^{2p+1} \frac{\operatorname{Re}V_h^{(k)}(a)}{k! \eta^2} t^k + i \frac{\operatorname{Im}V_h^{(2p+1)}(a)}{(2p+1)! \eta^2} t^{2p+1} + o(t^{2p+1}),$$

ce qui induit que,

$$\sqrt{1 - \left(\frac{V_h(a+t) - V_h(a)}{\eta^2} \right)} = 1 - \frac{i \operatorname{Im}V_h^{(2p+1)}(a)}{2(2p+1)! \eta^2} t^{2p+1} + P(t) + o(t^{2p+1}),$$

où P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\deg(P) \leq 2p+1$. Une intégration permet alors d'obtenir le développement limité suivant,

$$\operatorname{Re}\psi_{-1,h}(s) = \frac{\operatorname{Im}V_h^{(2p+1)}(a)}{2(2p+2)! \eta} s^{2p+2} + O(s^{2p+3}).$$

On peut ensuite choisir le signe de la constante non nulle η dans l'identité,

$$z_h = \eta^2 + V_h(a),$$

pour que,

$$\frac{\operatorname{Im}V_0^{(2p+1)}(a)}{\eta} > 0.$$

Quitte une nouvelle fois à considérer une nouvelle constante $\delta > 0$ plus petite, on peut comme la fonction $\psi_{-1,h}$ est indépendante de l'entier n choisir cette constante $\delta > 0$ indépendamment de n et une contante $\gamma > 0$ vérifiant,

$$\forall 0 \leq h \leq \delta^{2p+2}, \forall s \in [-\delta, \delta], \gamma s^{2p+2} \leq \operatorname{Re}\psi_{-1,h}(s) \leq 3\gamma s^{2p+2}.$$

Il s'agit maintenant d'estimer les termes suivants,

$$|f_{h,n}| = e^{-\operatorname{Re}\Psi_{h,n}}, \operatorname{Re}\Psi_{h,n}(a + \cdot) = \sum_{m=-1}^n h^m \operatorname{Re}(\psi_{m,h}).$$

3.1. Un résultat d'existence pour les opérateurs de Schrödinger.

Dans les calculs qui vont suivre, on désignera par a_i différentes constantes strictement positives indépendantes de h et s . Comme

$$\forall 0 \leq h \leq \delta^{2p+2}, \forall s \in [-\delta, \delta],$$

$$\frac{\gamma s^{2p+2}}{h} - \sum_{m=0}^n c_m \delta^m \leq \operatorname{Re} \Psi_{h,n}(a+s) \leq \frac{3\gamma s^{2p+2}}{h} + \sum_{m=0}^n c_m \delta^m,$$

on en déduit que pour tout $0 < h \leq \delta^{2p+2}$,

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\geq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} |f_{h,n}(a+s)|^2 ds \\ &\geq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} e^{\frac{-6\gamma s^{2p+2}}{h} - a_1} ds \\ &= h^{\frac{1}{2p+2}} \int_{-\frac{\delta h^{\frac{1}{2p+2}}}{2}}^{\frac{\delta h^{\frac{1}{2p+2}}}{2}} e^{-6\gamma u^{2p+2} - a_1} du \\ &\geq h^{\frac{1}{2p+2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-6\gamma u^{2p+2} - a_1} du \\ &= a_2 h^{\frac{1}{2p+2}}. \end{aligned}$$

D'autre part, un calcul direct montre que,

$$\|H_h \tilde{f}_{h,n} - z_h \tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \left\| -h^2 \xi'' f_{h,n}(a+\cdot) - 2h^2 \xi' f'_{h,n}(a+\cdot) + \xi(H_h f_{h,n}(a+\cdot) - z_h f_{h,n}(a+\cdot)) \right\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

ce qui induit l'estimation,

$$\begin{aligned} \|H_h \tilde{f}_{h,n} - z_h \tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq h^2 \|\xi'' f_{h,n}(a+\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} + 2h^2 \|\xi' f'_{h,n}(a+\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\quad + \sum_{m=n+3}^{2n+2} h^m \|\xi \phi_{m,h} f_{h,n}(a+\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

puisque,

$$H_h f_{h,n}(a+\cdot) - z_h f_{h,n}(a+\cdot) = \sum_{m=n+3}^{2n+2} h^m \phi_{m,h} f_{h,n}(a+\cdot).$$

Il s'agit de majorer les termes apparaissant dans le membre de droite de la dernière inégalité.

Estimation de la quantité $\|\xi'' f_{h,n}(a+\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Comme les fonctions ξ' et ξ'' ont leurs supports contenus dans l'ensemble $\{s \in \mathbb{R} : \delta/2 \leq |s| \leq \delta\}$, on en déduit que pour tout $0 < h \leq \delta^{2p+2}$,

$$\|\xi'' f_{h,n}(a+\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq a_3 \int_{\{s \in \mathbb{R} : \delta/2 \leq |s| \leq \delta\}} e^{\frac{-2\gamma s^{2p+2}}{h} + a_1} ds \leq a_4 e^{\frac{-\gamma \delta^{2p+2}}{2^{2p+1}h}}.$$

3.1. Un résultat d'existence pour les opérateurs de Schrödinger.

La quantité $\|\xi'' f_{h,n}(a + \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ décroît donc à une vitesse exponentielle dans la limite semi-classique $h \rightarrow 0^+$.

Estimation de la quantité $\|\xi' f'_{h,n}(a + \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. Comme on peut écrire,

$$f'_{h,n} = -e^{-\Psi_{h,n}} \Psi'_{h,n}, \quad |f'_{h,n}|^2 \leq |f_{h,n}|^2 \left(\sum_{m=0}^n b_m \delta^m + \frac{b_{-1}}{h} \right)^2,$$

où $b_m, -1 \leq m \leq n$, sont des constantes strictement positives indépendantes de h et de s telles que,

$$\forall 0 \leq h \leq \delta^{2p+2}, \forall s \in [-\delta, \delta], \quad |\psi'_{m,h}(s)| \leq b_m,$$

il s'ensuit que pour tout $0 < h \leq \delta^{2p+2}$,

$$\begin{aligned} \|\xi' f'_{h,n}(a + \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq a_5 \int_{\{s \in \mathbb{R}: \delta/2 \leq |s| \leq \delta\}} e^{\frac{-2\gamma s^{2p+2}}{h} + a_1} \left(a_6 + \frac{a_7}{h} \right)^2 ds \\ &\leq a_8 e^{\frac{-\gamma \delta^{2p+2}}{2^{2p+1}h}} \left(a_6 + \frac{a_7}{h} \right)^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre que la quantité $\|\xi' f'_{h,n}(a + \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ décroît également à une vitesse exponentielle dans la limite semi-classique $h \rightarrow 0^+$.

Estimation de la quantité $\|\xi \phi_{m,h} f_{h,n}(a + \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}$. On peut majorer ce terme de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \forall 0 < h \leq \delta^{2p+2}, \quad \|\xi \phi_{m,h} f_{h,n}(a + \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq a_9 \int_{-\delta}^{\delta} |f_{h,n}(a + s)|^2 ds \\ &\leq a_9 \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{-2\gamma s^{2p+2}}{h} + a_1} ds \\ &\leq a_9 h^{\frac{1}{2p+2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\gamma u^{2p+2} + a_1} du. \end{aligned}$$

Finalement, on en déduit tout d'abord que,

$$\begin{aligned} \frac{\|H_h \tilde{f}_{h,n} - z_h \tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}} &\leq \\ \frac{h^2 \|\xi'' f_{h,n}(a + \cdot)\|_2 + 2h^2 \|\xi' f'_{h,n}(a + \cdot)\|_2 + \sum_{m=n+3}^{2n+2} h^m \|\xi \phi_{m,h} f_{h,n}(a + \cdot)\|_2}{\sqrt{a_2} h^{\frac{1}{4p+4}}}, \end{aligned}$$

ce qui induit au regard des estimations précédentes que l'on peut trouver une constante strictement positive σ_n telle que,

$$\forall 0 < h < \delta', \quad \frac{\|H_h \tilde{f}_{h,n} - z_h \tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}}{\|\tilde{f}_{h,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}} \leq \sigma_n h^n,$$

si $\delta' = \delta^{2p+2} > 0$. Ceci démontre le résultat énoncé dans le théorème 2.1. \square

Dans le cas où le potentiel ne dépend pas du paramètre semi-classique h , on obtient facilement à partir du théorème 2.1 le corollaire suivant.

Corollaire 2.3. *Supposons que la fonction $\text{Im}V$ soit réelle-analytique et que la fonction $x \mapsto \text{Im}V(x) - \text{Im}V(a)$ change de signe au point a alors le point,*

$$z = \eta^2 + V(a),$$

appartient au pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini de l'opérateur semi-classique $(H_h)_{0 < h \leq 1}$ si $\eta \in \mathbb{R}^$.*

3.2 Un résultat général d'existence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini.

Nous allons démontrer dans cette deuxième partie du chapitre 3 un résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques pour des opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques. Il généralise en dimension $n \geq 2$ le résultat d'existence établi par M.Zworski dans [29] et [30] que nous avons énoncé au théorème 1.3.2 du chapitre 1. Ce résultat donne une condition géométrique sur le symbole d'un opérateur pseudo-différentiel semi-classique, la violation de la condition $(\bar{\Psi})$, qui permet la construction de quasi-modes semi-classiques induisant la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini pour cet opérateur. Compte tenu du fait que la condition $(\bar{\Psi})$ se trouve au cœur des résultats concernant la résolubilité des opérateurs pseudo-différentiels adjoints associés, notre résultat permet de préciser le lien entre les questions d'existence de quasi-modes semi-classiques caractéristiques de la présence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini et des questions de résolubilité des opérateurs adjoints associés que M.Zworski a le premier évoqué dans [30]. Il permet également de mieux comprendre la condition géométrique suffisante assurant l'existence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini pour les opérateurs de Schrödinger que le dernier corollaire de la première partie de ce chapitre a esquissée. Mentionnons au préalable que toute la deuxième partie de ce chapitre 3 est écrite sous la forme d'un article indépendant du reste de cette thèse et que les numérotations adoptées ici sont donc propres à cette partie du manuscrit.

1. Énoncé du résultat d'existence de quasi-modes.

Commençons par préciser quelques notations. Nous allons étudier dans cet article des opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl semi-classique par des symboles de la classe,

$$S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

où $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$, $\langle (x, \xi) \rangle := (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$, qui désigne l'ensemble des fonctions $a(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ pour tout $0 < h \leq 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \sup_{\substack{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ 0 < h \leq 1}} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| \langle (x, \xi) \rangle^{-m} h^{-N} < +\infty;$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

et par des symboles de la classe $S(h^\infty \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$,

$$S(h^\infty \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2) := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2).$$

Certains résultats de calcul symbolique propres à ces classes de symboles en quantification de Weyl semi-classique sont rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit. La définition suivante rappelle la notion usuelle de front d'onde semi-classique d'une famille semi-classique que l'on peut trouver par exemple dans [19] (Définition 2.9.1).

Définition 1.1. *On appelle front d'onde semi-classique de la famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant,*

$$\forall 0 < h \leq h_0, \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1,$$

le complémentaire dans $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ de l'ensemble des points $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ pour lesquels on peut trouver un symbole $\chi_0(x, \xi, h)$ appartenant à la classe de symboles $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tel que,

$$\chi_0(x_0, \xi_0, h) = 1 \text{ et } \|\chi_0(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty), \quad (1.1)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Cet ensemble est noté $\text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0})$.

Nous allons étudier dans cet article la localisation précise dans l'espace des phases du front d'onde semi-classique des quasi-modes que nous construisons. Pour ce faire, nous allons passer par l'intermédiaire de l'étude d'une autre notion qui est la notion d'ensemble de concentration semi-classique dont la définition est la suivante.

Définition 1.2. *On dit que le sous-ensemble fermé F de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ est **un** ensemble de concentration semi-classique de la famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ appartenant à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si pour tout voisinage ouvert V de F , on a les estimations suivantes,*

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall \psi \in S(1, dx^2 + d\xi^2), \text{supp}_{x, \xi} \psi(x, \xi, h) \subset V^c, \\ \|\psi(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \quad (1.2)$$

où la notation $\|\cdot\|_{H^l}$ désigne la norme de l'espace de Sobolev H^l .

Dans la suite, on utilise la notation,

$$F = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}),$$

pour signifier que le sous-ensemble fermé F de $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n$ est **un** ensemble de concentration semi-classique de la famille,

$$(u_h)_{0 < h \leq h_0}.$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Notons que tout ensemble fermé contenant un ensemble de concentration semi-classique de la famille $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ est également d'après la définition 1.2 un ensemble de concentration semi-classique de cette famille. En adoptant ces notations, on peut vérifier que pour toute famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant,

$$\forall 0 < h \leq h_0, \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1,$$

son front d'onde semi-classique est contenu dans tout ensemble de concentration semi-classique de cette famille,

$$\text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \subset \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}). \quad (1.3)$$

En effet, considérons F un ensemble de concentration semi-classique de la famille,

$$(u_h)_{0 < h \leq h_0},$$

et $(x_0, \xi_0) \in F^c$. Comme la distance $d((x_0, \xi_0), F)$ entre le point (x_0, ξ_0) et l'ensemble F est strictement positive puisque F est un ensemble fermé, on peut trouver un voisinage ouvert V de l'ensemble F et $\chi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ tels que,

$$\text{supp}\chi_0 \subset V^c \text{ et } \chi_0(x_0, \xi_0) = 1,$$

ce qui induit d'après (1.2) que,

$$\|\chi_0(x, h\xi)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \quad (1.4)$$

et démontre l'inclusion (1.3). L'intérêt de passer par l'intermédiaire de l'étude d'un ensemble de concentration semi-classique du quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ que nous construisons pour étudier son front d'onde semi-classique s'explique par une propriété de robustesse microlocale propre au premier ensemble qui fait défaut au second. En effet, si $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ désigne une famille semi-classique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$ et, si p et \tilde{p} sont deux symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels qu'il existe une fonction $\chi(x, \xi) \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ (où la notation $C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ désigne ici l'espace des fonctions C^∞ à valeurs complexes qui sont bornées sur \mathbb{R}^{2n} ainsi que toutes leurs dérivées) vérifiant $\chi = 1$ sur un voisinage ouvert d'un ensemble de concentration semi-classique $\text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0})$ de ce quasi-mode et telle que $p = \tilde{p}$ sur son support, la propriété suivante,

$$\begin{aligned} \|p(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+ \\ \iff \|\tilde{p}(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

est vérifiée, alors qu'elle est en défaut si on substitue le front d'onde semi-classique à l'ensemble de concentration semi-classique $\text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0})$. Le recours à ce type de propriété sera d'un usage répété et justifiera les diverses microlocalisations nécessaires à la démonstration de notre résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques. Mentionnons aussi avant d'énoncer ce résultat que le fait que l'on impose dans la définition d'un ensemble de concentration semi-classique un contrôle de toutes les normes de Sobolev, est lié au choix de la classe $S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ où $m \in \mathbb{R}_+$ à laquelle appartiennent les symboles de Weyl semi-classique des opérateurs pseudo-différentiels que nous étudions.

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

On suppose dans tout ce qui suit que la dimension n est supérieure ou égale à 2 et on considère les deux hypothèses suivantes.

(H1) Soit $P(x, \xi, h)$ un symbole de la classe $S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ où $m \in \mathbb{R}_+$, qui admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$P(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(x, \xi) h^j, \quad (1.5)$$

où les fonctions $p_j(x, \xi)$ désignent des symboles de la classe,

$$S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

qui sont supposés indépendants du paramètre semi-classique h .

(H2) Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe une fonction $q_0 \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ indépendante du paramètre semi-classique h et une *courbe bicaractéristique*,

$$t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n},$$

du symbole $\text{Re}(q_0(p_0 - z))$ où $a < b$, i.e. une courbe vérifiant,

$$\forall t \in [a, b], \gamma'(t) = H_{\text{Re}(q_0(p_0 - z))}(\gamma(t)) \text{ et } \text{Re}(q_0(p_0 - z))(\gamma(t)) = 0,$$

où $H_{\text{Re}(q_0(p_0 - z))}$ désigne le champ hamiltonien associé à la partie réelle du symbole $q_0(p_0 - z)$, telle que,

$$\forall t \in [a, b], q_0(\gamma(t)) \neq 0 \text{ et} \\ \text{Im}[q_0(\gamma(a))(p_0(\gamma(a)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(b))(p_0(\gamma(b)) - z)]. \quad (1.6)$$

On désigne dans tout cet article par Rep et Imp respectivement la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction à valeurs complexes p . Considérons la quantité,

$$L_0 := \inf \{ t - s : s, t \in [a, b], a \leq s < t \leq b, \\ \text{Im}[q_0(\gamma(s))(p_0(\gamma(s)) - z)] > 0 > \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] \} \geq 0, \quad (1.7)$$

qui d'après (1.6) vérifie $0 \leq L_0 \leq b - a$. Remarquons d'après (1.7) que l'on peut trouver un couple $(a_0, b_0) \in]a, b]^2$ tel que,

$$a_0 \leq b_0 \text{ et } L_0 = b_0 - a_0. \quad (1.8)$$

Dans le cas où $L_0 > 0$, on peut choisir ce couple (a_0, b_0) , $a_0 < b_0$, tel que,

$$V_{a_0} \cap] - \infty, a_0[\cap \{ t \in [a, b] : \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] > 0 \} \neq \emptyset, \quad (1.9)$$

$$V_{b_0} \cap] b_0, +\infty[\cap \{ t \in [a, b] : \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] < 0 \} \neq \emptyset, \quad (1.10)$$

et,

$$\forall t \in [a_0, b_0], \text{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] = 0, \quad (1.11)$$

FIG. 3.1 – Un exemple de changement de signe pour lequel $a_0 < b_0$.

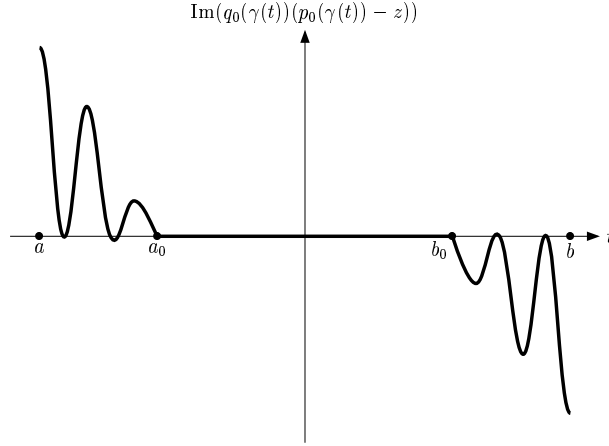
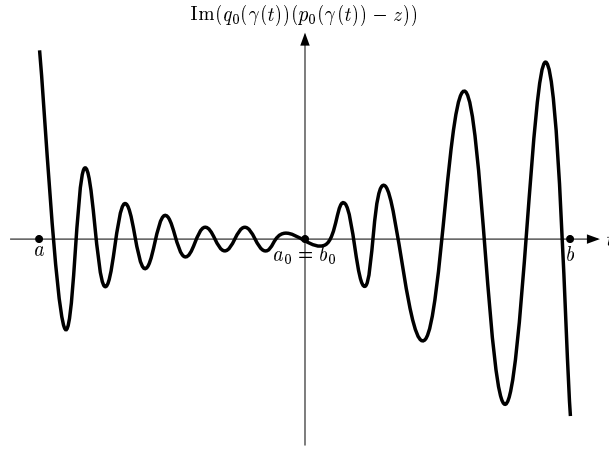


FIG. 3.2 – Un exemple de changement de signe pour lequel $a_0 = b_0$.



pour tout voisinage ouvert V_{a_0} de a_0 et V_{b_0} de b_0 dans \mathbb{R} . Dans le cas où,

$$L_0 = b_0 - a_0 = 0,$$

on peut choisir ce point $a_0 = b_0 \in]a, b[$ tel que,

$$\operatorname{Im}[q_0(\gamma(a_0))(p_0(\gamma(a_0)) - z)] = 0, \quad (1.12)$$

et tel que pour tout voisinage ouvert V_{a_0} du point a_0 dans \mathbb{R} , il existe un couple (a_1, b_1) de \mathbb{R}^2 tel que,

$$a_1, b_1 \in V_{a_0}, \quad a_1 < b_1 \text{ et}$$

$$\operatorname{Im}[q_0(\gamma(a_1))(p_0(\gamma(a_1)) - z)] > 0 > \operatorname{Im}[q_0(\gamma(b_1))(p_0(\gamma(b_1)) - z)]. \quad (1.13)$$

En effet, en utilisant la compacité du segment $[a, b]$ et la définition (1.7) de la quantité L_0 , on peut trouver deux suites convergentes $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ et $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'éléments du segment $[a, b]$,

$$a_0 := \lim_{j \rightarrow +\infty} s_j \text{ et } b_0 := \lim_{j \rightarrow +\infty} t_j, \quad (1.14)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

telles que,

$$\forall j \in \mathbb{N}, a \leq s_j < t_j \leq b, \\ \operatorname{Im}[q_0(\gamma(s_j))(p_0(\gamma(s_j)) - z)] > 0 > \operatorname{Im}[q_0(\gamma(t_j))(p_0(\gamma(t_j)) - z)], \quad (1.15)$$

et,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} t_j - s_j = b_0 - a_0 = L_0. \quad (1.16)$$

Considérons tout d'abord le cas où $L_0 = b_0 - a_0 = 0$. Il découle dans ce cas de (1.14) et (1.15) que les identités (1.12) et (1.13) sont vérifiées. On remarque également que dans ce cas l'identité (1.12) induit au regard de (1.6) que,

$$a_0 = b_0 \in]a, b[.$$

Considérons maintenant le cas où $L_0 > 0$ i.e. le cas où $a_0 < b_0$. D'après (1.14), il existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall j \geq j_0, |a_0 - s_j| < \frac{L_0}{2} \text{ et } |b_0 - t_j| < \frac{L_0}{2}. \quad (1.17)$$

Cette identité (1.17) induit d'après (1.14), (1.15) et la définition (1.7) de la quantité L_0 que pour tout $j \geq j_0$,

$$a_0 - \frac{L_0}{2} \leq s_j \leq a_0 \text{ et } b_0 \leq t_j \leq b_0 + \frac{L_0}{2}, \quad (1.18)$$

puisque dans le cas contraire, on pourrait trouver deux entiers j_1 et j_2 supérieurs ou égaux à l'entier j_0 tels que,

$$0 < t_{j_2} - s_{j_1} < L_0,$$

et,

$$\operatorname{Im}[q_0(\gamma(s_{j_1}))(p_0(\gamma(s_{j_1})) - z)] > 0 > \operatorname{Im}[q_0(\gamma(t_{j_2}))(p_0(\gamma(t_{j_2})) - z)],$$

ce qui contredirait (1.7). Les mêmes arguments induisent ensuite d'après (1.14), (1.15) et (1.18) que nécessairement,

$$\forall t \in]a_0, b_0[, \operatorname{Im}[q_0(\gamma(t))(p_0(\gamma(t)) - z)] = 0,$$

ce qui par continuité démontre (1.11). On déduit de (1.6) et (1.11) que le couple (a_0, b_0) vérifie $(a_0, b_0) \in]a, b[^2$. En utilisant enfin (1.11), (1.14), (1.15) et (1.18), on obtient les identités (1.9) et (1.10).

Remarque. Constatons dans le cas où la fonction $\operatorname{Im}(q_0(p_0 - z))$ change de signe à un *ordre fini* en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives le long de la courbe $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ que l'on peut d'après la définition (1.7) de la quantité L_0 choisir le couple $(a_0, b_0) \in]a, b[^2$ en (1.8) tel que,

$$a_0 = b_0. \quad (1.19)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Théorème 1.3. *Sous les hypothèses (H1), (H2) et les notations précédentes, on peut pour tout voisinage ouvert V de l'ensemble compact $\gamma([a_0, b_0])$ dans \mathbb{R}^{2n} et pour tout $N \in \mathbb{N}$ trouver une constante h_0 strictement positive et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que,*

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \\ \text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0}) &\subset \overline{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et} \\ \|P(x, h\xi, h)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (1.20)$$

En particulier, le point z appartient au pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini de l'opérateur pseudo-différentiel semi-classique,

$$(P(x, h\xi, h)^w)_{0 < h \leq 1}.$$

Ce théorème montre que l'on peut construire un quasi-mode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ vérifiant l'estimation (1.20) avec un front d'onde semi-classique pouvant être concentré dans un voisinage ouvert arbitraire de l'arc compact de la bicaractéristique $\gamma([a_0, b_0])$ sur lequel se produit le changement de signe donné par (1.6). Dans le cas où ce changement de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives s'effectue à un ordre fini, on constate d'après (1.19) et le résultat du théorème 1.3 que ce front d'onde semi-classique peut alors être concentré dans un voisinage ouvert arbitraire d'un point de l'espace des phases. On peut reformuler l'hypothèse (H2) en terme de violation de la condition $(\overline{\Psi})$. Pour ce faire, commençons par rappeler la définition de la condition $(\overline{\Psi})$ (Définition 26.4.6 et Théorème 26.4.12 dans [12]).

Condition $(\overline{\Psi})$. On dit qu'une fonction à valeurs complexes $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ vérifie la condition $(\overline{\Psi})$ s'il n'existe pas de fonctions à valeurs complexes $q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telle que la fonction $\text{Im}(qp)$ change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives le long d'un arc de bicaractéristique orientée du symbole $\text{Re}(qp)$ sur lequel la fonction q ne s'annule pas.

Considérons $z \in \mathbb{C}$ et P un symbole de la classe $S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ vérifiant (1.5). Sous ces hypothèses, le résultat du théorème 1.3 induit que si le symbole principal semi-classique $p_0 - z$ du symbole $P - z$ viole la condition $(\overline{\Psi})$, on peut pour tout $N \in \mathbb{N}$ trouver un quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ où $h_0 > 0$ dont le front d'onde semi-classique se concentre dans un compact de l'espace des phases et qui vérifie,

$$\|P(x, h\xi, h)^w u_h - z u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+.$$

Remarque. Mentionnons dans le cas contraire où la condition $(\overline{\Psi})$ est satisfaite qu'une reformulation dans un cadre semi-classique du résultat de N.Dencker établissant que la condition (Ψ) est suffisante pour assurer la résolubilité d'un opérateur pseudo-différentiel de type principal (Théorème 1.1 dans [8]), montre que pour tout $\varepsilon > 0$ une estimation a priori de la forme,

$$\|P(x, h\xi, h)^w u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq C_\varepsilon h^{\frac{3}{2} + \varepsilon} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

est vérifiée pour toute fonction $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportée dans un voisinage suffisamment petit du point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si P désigne un symbole de la classe,

$$S(1, dx^2 + d\xi^2),$$

admettant un développement asymptotique semi-classique,

$$P(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} p_j(x, \xi) h^j,$$

où les fonctions $p_j(x, \xi)$ désignent des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, indépendants du paramètre semi-classique dont le symbole principal semi-classique p_0 est de type principal et satisfait à la condition $(\bar{\Psi})$ sur un voisinage du point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. N.Lerner a démontré dans [18] que l'estimation a priori précédente était également vérifiée pour une valeur nulle du paramètre ε .

Pour démontrer ce théorème, nous nous appuyons très fortement sur la démonstration de la nécessité de la condition (Ψ) pour garantir la résolubilité d'un opérateur pseudo-différentiel que propose L.Hörmander dans le chapitre 26 de son livre [12]. Il s'agit plus précisément d'une adaptation dans un cadre semi-classique de la démonstration du théorème 26.4.7 de [12]. Ce résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques était, nous devons le dire, un peu attendu. Il ne surprendra donc pas les personnes familières des problèmes de résolubilité et des mathématiques qui gravitent autour de la condition (Ψ) . L'existence possible d'un tel résultat est évoquée par N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski dans [7] qui mentionnent une remarque de N.Lerner à ce sujet. Nous avons voulu ici nous assurer de la pertinence de cette remarque en proposant une preuve complète d'un tel résultat d'existence dans un cadre semi-classique. L'adaptation dans ce cadre semi-classique de certaines parties de la démonstration du théorème 26.4.7 de [12] exige des vérifications et des modifications même si on peut essentiellement considérer que le cadre semi-classique est plus simple à explorer que celui des singularités C^∞ . Nous allons donc reprendre en détail cette démonstration longue et difficile du théorème 26.4.7 de [12] en réutilisant sans modification certaines parties de cette preuve lorsque cela est possible. Nous utiliserons par exemple directement la construction remarquable de la fonction de phase due à R.D.Moyer et L.Hörmander (Lemme 26.4.14 dans [12]). Par contre, nous serons amené à réécrire certaines parties qui demandent des modifications puisque par exemple il n'y a plus d'hypothèses d'homogénéité concernant les symboles des opérateurs pseudo-différentiels que nous considérons. Il faudra donc adapter un certain nombre de lemmes à ce cadre inhomogène comme par exemple le lemme 26.4.16 de [12]. Nous apporterons également une attention supplémentaire à l'étude du front d'onde semi-classique du quasi-mode construit en déterminant un ensemble de concentration semi-classique de ce quasi-mode. Notons enfin que le résultat que nous énonçons ici s'applique en dimension $n \geq 2$. Il est clair qu'il est également vérifié en dimension 1. Il suffit pour cela d'apporter quelques modifications ponctuelles et simples à la démonstration proposée en dimension supérieure ce que nous avons omis ici pour des raisons de place.

2. Quelques résultats préliminaires.

2.a. Etude de l'opérateur modèle $D_1 - ix_1^k D_n$.

On a rassemblé dans cette deuxième section un certain nombre de résultats préliminaires que nous utiliserons lors de la prochaine section dans la démonstration du théorème 1.3. Nous allons étudier dans ce premier paragraphe l'opérateur,

$$P := D_1 - ix_1^k D_n,$$

où k désigne un entier naturel *impair* et n un entier naturel vérifiant $n \geq 2$. Nous allons démontrer dans la proposition suivante que l'on peut trouver une famille semi-classique qui soit solution de l'équation,

$$Pu = 0,$$

et qui se concentre semi-classiquement au sens précisé par la définition 1.2 dans une région particulière de l'espace des phases.

Proposition 2.1. *Considérons une constante $\varepsilon > 0$, k un entier naturel impair, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et F_ε le sous-ensemble de l'espace des phases défini par,*

$$\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : x = 0, \xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = 0 \text{ et } \xi_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]\}. \quad (2.1)$$

On peut trouver une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad (D_1 - ix_1^k D_n)u_h = 0,$$

telle que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

et telle que cette famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ se concentre semi-classiquement au sens précisé par la définition 1.2 dans l'ensemble compact F_ε , ce que l'on note,

$$F_\varepsilon = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}).$$

Preuve. Considérons un paramètre $\tau \geq 1$, une fonction Ψ appartenant à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\Psi = 1$ dans un voisinage ouvert de 1 et,

$$\text{supp} \Psi \subset [1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2] \cap [1/2, 3/2], \quad (2.2)$$

et la fonction,

$$v_\tau(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta\tau(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n)} \Psi(\theta) d\theta, \quad (2.3)$$

où $x = (x_1, x'', x_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}$. Le théorème de dérivation sous le signe intégral montre que $v_\tau \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et que,

$$(D_1 - ix_1^k D_n)v_\tau = 0. \quad (2.4)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Si on note Φ la fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ définie comme la transformée de Fourier de la fonction $x_1 \mapsto e^{-x_1^{k+1}/(k+1)}$ qui appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ puisque l'entier naturel k est supposé *impair*,

$$\Phi(\xi_1) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x_1^{k+1}}{k+1} - ix_1 \xi_1} dx_1, \quad (2.5)$$

un calcul direct montre d'après (2.2) et (2.3) que la transformée de Fourier partielle de la fonction $v_\tau(x)$ par rapport aux variables x_1 et x'' est donnée par,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[e^{i\theta\tau x_n} \Phi(\xi_1(\theta\tau)^{-\frac{1}{k+1}})(\theta\tau)^{-\frac{1}{k+1}} e^{-\frac{|\xi''|^2}{4\theta\tau}} \left(\frac{\pi}{\theta\tau}\right)^{\frac{n-2}{2}} \Psi(\theta) \right] d\theta,$$

ce qui permet d'obtenir l'expression suivante de la transformée de Fourier de la fonction v_τ ,

$$\widehat{v}_\tau(\xi) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\tau} \Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}}) e^{-\frac{|\xi''|^2}{4\xi_n}} \xi_n^{-\frac{1}{k+1} - \frac{n-2}{2}} \Psi(\tau^{-1}\xi_n). \quad (2.6)$$

On déduit alors de (2.6) que,

$$\begin{aligned} \|v_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= (2\pi)^{-n} \|\widehat{v}_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &= \frac{1}{2^{n-2}\tau^2} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}})|^2 e^{-\frac{|\xi''|^2}{2\xi_n}} |\Psi(\tau^{-1}\xi_n)|^2 |\xi_n|^{-\frac{2}{k+1} - n + 2} d\xi \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \|\Phi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2}{2^{n-2}\tau^2} \int_{\mathbb{R}} |\Psi(\tau^{-1}\xi_n)|^2 |\xi_n|^{-\frac{1}{k+1} - \frac{n-2}{2}} d\xi_n \\ &= c^{-2} \tau^{-\frac{1}{k+1} - \frac{n}{2}}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

où c désigne une constante strictement positive indépendante du paramètre τ . Considérons maintenant la famille $(u_\tau)_{\tau \geq 1}$ de fonctions $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ définie par,

$$u_\tau(x) := c\tau^{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{n}{4}} v_\tau(x). \quad (2.8)$$

On obtient d'après (2.4), (2.7) et (2.8) que pour tout $\tau \geq 1$,

$$\|u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \text{ et } (D_1 - ix_1^k D_n)u_\tau = 0. \quad (2.9)$$

On peut ensuite en utilisant que,

$$-\frac{1}{\tau\left(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n\right)} \partial_\theta \left(e^{-\theta\tau\left(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n\right)} \right) = e^{-\theta\tau\left(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n\right)},$$

réaliser des intégrations par parties pour obtenir d'après (2.3) et (2.8) que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_\tau(x) &= c\tau^{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{n}{4}} \\ &\times \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta\tau\left(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n\right)} \tau^{-p} \left(\frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n\right)^{-p} \Psi^{(p)}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (2.10)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

En utilisant (2.2), (2.10) et l'imparité de l'entier k , on en déduit que,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists C_p > 0, \forall x \neq 0, \forall \tau \geq 1, \\ |u_\tau(x)| \leq C_p \tau^{-p + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{n}{4}} \left| \frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n \right|^{-p}. \quad (2.11)$$

Plus généralement en dérivant l'identité (2.10), on obtient d'après (2.2) que,

$$\forall \delta > 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^n, \forall p \in \mathbb{N}, \exists C_{\delta, \beta, p} > 0, \forall |x| \geq \delta, \forall \tau \geq 1, \\ |D_x^\beta u_\tau(x)| \leq C_{\delta, \beta, p} \tau^{-p + |\beta| + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{n}{4}} \left| \frac{x_1^{k+1}}{k+1} + |x''|^2 - ix_n \right|^{-p + |\beta|}. \quad (2.12)$$

Cette estimation (2.12) induit que cette famille semi-classique $(u_\tau)_{\tau \geq 1}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous allons étudier la dépendance des normes $\|u_\tau\|_{H^l}$ par rapport au paramètre τ et démontrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe un entier $m_l \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\|u_\tau\|_{H^l} = O(\tau^{m_l}) \text{ lorsque } \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.13)$$

Pour ce faire, nous allons établir que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$,

$$\exists m_\beta \in \mathbb{N}, \exists C_\beta > 0, \forall \tau \geq 1, \|D_x^\beta u_\tau\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_\beta \tau^{m_\beta}. \quad (2.14)$$

Pour vérifier cette estimation (2.14), il suffit au regard de (2.3) de constater en dérivant l'expression (2.8) qu'il existe pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ une constante $M_\beta > 0$ telle que,

$$\forall \tau \geq 1, \forall |x| \leq 1, |D_x^\beta u_\tau(x)| \leq M_\beta \tau^{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{n}{4} + |\beta|}, \quad (2.15)$$

et d'utiliser l'estimation (2.12) avec les indices $\delta = 1$, β et $p = n + |\beta| + 1$ si $|x| \geq 1$. Pour continuer notre démonstration, nous allons recourir au lemme suivant.

Lemme 2.2. *Si φ est une fonction appartenant à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vérifiant $\varphi = 1$ sur un voisinage ouvert du point 0 dans \mathbb{R}^n , on a alors,*

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|(1 - \varphi(x))u_\tau(x)\|_{H^l} = O(\tau^{-\infty}) \text{ lorsque } \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$

De plus, si V_1 et V_2 désignent deux voisinages ouverts de l'ensemble,

$$G_\varepsilon := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 = \dots = \xi_{n-1} = 0 \text{ et } \xi_n \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]\}, \quad (2.17)$$

tels que,

$$G_\varepsilon \subset V_1 \subset V_2, \quad (2.18)$$

et si w est une fonction C^∞ et bornée sur \mathbb{R}^n telle que,

$$w = 0 \text{ sur } V_1 \text{ et } w = 1 \text{ sur } V_2^c, \quad (2.19)$$

on a alors,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|w(\tau^{-1}D_x)u_\tau\|_{H^l} = O(\tau^{-\infty}) \text{ lorsque } \tau \rightarrow +\infty. \quad (2.20)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Preuve du lemme 2.2. Constatons tout d'abord que l'estimation (2.16) est une simple conséquence de l'estimation (2.12) si on choisit la constante $\delta > 0$ telle que $\varphi(x) = 1$ pour tout $|x| \leq \delta$. Concernant l'obtention de l'estimation (2.20), commençons par écrire en utilisant les identités (2.6) et (2.8) que,

$$\begin{aligned} (w(\widehat{\tau^{-1}D_x})u_\tau)(\xi) = \\ 2\pi^{\frac{n}{2}} c\tau^{\frac{1}{2(k+1)} + \frac{n}{4} - 1} w(\tau^{-1}\xi) \Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}}) e^{-\frac{|\xi''|^2}{4\xi_n}} \xi_n^{-\frac{1}{k+1} - \frac{n-2}{2}} \Psi(\tau^{-1}\xi_n). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} \|w(\tau^{-1}D_x)u_\tau\|_{H^l}^2 &\leq \frac{c^2}{2^{n-2}} \tau^{\frac{1}{k+1} + \frac{n}{2} - 2} \int_{\mathbb{R}^n} |w(\tau^{-1}\xi)|^2 |\Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}})|^2 \\ &\quad \times e^{-\frac{|\xi''|^2}{2\xi_n}} |\xi_n|^{-\frac{2}{k+1} - n + 2} |\Psi(\tau^{-1}\xi_n)|^2 \langle \xi_1 \rangle^{2l} \langle \xi'' \rangle^{2l} \langle \xi_n \rangle^{2l} d\xi, \end{aligned} \quad (2.21)$$

si on note $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{1/2}$. Après un changement de variables, on déduit de (2.21) qu'il existe des constantes $C_l > 0$ et $\alpha_l > 0$ telles que pour tout $\tau \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|w(\tau^{-1}D_x)u_\tau\|_{H^l}^2 &\leq C_l \tau^{\alpha_l} \int_{\mathbb{R}^n} |w(\xi)|^2 |\Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}} \tau^{\frac{k}{k+1}})|^2 \\ &\quad \times e^{-\tau \frac{|\xi''|^2}{2\xi_n}} |\xi_n|^{-\frac{2}{k+1} - n + 2} |\Psi(\xi_n)|^2 \langle \xi_1 \rangle^{2l} \langle \xi'' \rangle^{2l} \langle \xi_n \rangle^{2l} d\xi. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Remarquons tout d'abord que d'après (2.17) et (2.18), on peut trouver une constante $\delta > 0$ telle que,

$$\{(\xi_1, \xi'') \in \mathbb{R}^{n-1} : |\xi_1| + |\xi''| < \delta\} \times [1 - \varepsilon - \delta, 1 + \varepsilon + \delta] \subset V_1. \quad (2.23)$$

Comme d'après (2.2) et (2.19), $\text{supp} \Psi \subset [1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2]$ et $\text{supp} w \subset V_1^c$, on en déduit que si $\xi = (\xi_1, \xi'', \xi_n) \in \text{supp}(w(\xi)\Psi(\xi_n))$ alors,

$$\xi \in V_1^c \text{ et } \xi_n \in [1 - \varepsilon/2, 1 + \varepsilon/2],$$

ce qui induit d'après (2.23) que $|\xi_1| + |\xi''| \geq \delta$ i.e.,

$$\forall \xi \in \text{supp}(w(\xi)\Psi(\xi_n)), \quad |\xi_1| + |\xi''| \geq \delta > 0. \quad (2.24)$$

En séparant le premier cas où $|\xi''| \geq \delta/2$ et le second cas $|\xi''| < \delta/2$ qui d'après (2.24) impose alors que $|\xi_1| \geq \delta/2$ si $\xi \in \text{supp}(w(\xi)\Psi(\xi_n))$, on en déduit en utilisant que la fonction Φ définie en (2.5), appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et que d'après (2.2), $\xi_n \in [1/2, 3/2]$ si $\xi \in \text{supp}(w(\xi)\Psi(\xi_n))$,

$$\forall N \in \mathbb{N}, \exists C_N > 0, \forall \xi \in \text{supp}(w(\xi)\Psi(\xi_n)), \forall \tau \geq 1,$$

$$|\Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}} \tau^{\frac{k}{k+1}})| e^{-\tau \frac{|\xi''|^2}{4\xi_n}} \leq C_N \tau^{-N}. \quad (2.25)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

On déduit alors de (2.2), (2.22), (2.25) et d'un changement de variables que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe des constantes $C_{1,N}$ et $C_{2,N}$ strictement positives telles que,

$$\begin{aligned}
& \|w(\tau^{-1}D_x)u_\tau\|_{H^l}^2 \\
& \leq C_{1,N}\tau^{\alpha_l-N} \int_{\mathbb{R}^n} |w(\xi)|^2 |\Phi(\xi_1 \xi_n^{-\frac{1}{k+1}} \tau^{\frac{k}{k+1}})| e^{-\tau \frac{|\xi''|^2}{4\xi_n}} \\
& \quad \times |\xi_n|^{-\frac{2}{k+1}-n+2} |\Psi(\xi_n)|^2 \langle \xi_1 \rangle^{2l} \langle \xi'' \rangle^{2l} \langle \xi_n \rangle^{2l} d\xi \\
& \leq C_{1,N}\tau^{\alpha_l-N-\frac{k}{k+1}-\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |w(\xi_1 \xi_n^{\frac{1}{k+1}} \tau^{-\frac{k}{k+1}}, \xi'' \xi_n^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}}, \xi_n)|^2 |\Phi(\xi_1)| e^{-\frac{|\xi''|^2}{4}} \\
& \quad \times |\xi_n|^{-\frac{1}{k+1}-\frac{n-2}{2}} |\Psi(\xi_n)|^2 \langle \xi_1 \xi_n^{\frac{1}{k+1}} \tau^{-\frac{k}{k+1}} \rangle^{2l} \langle \xi'' \xi_n^{\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}} \rangle^{2l} \langle \xi_n \rangle^{2l} d\xi \\
& \leq C_{2,N} \|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}^2 \tau^{\alpha_l-N-\frac{k}{k+1}-\frac{n-2}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(\xi_1)| e^{-\frac{|\xi''|^2}{4}} |\xi_n|^{-\frac{1}{k+1}-\frac{n-2}{2}} |\Psi(\xi_n)|^2 \\
& \quad \times \langle \xi_1 \rangle^{2l} \langle \xi'' \rangle^{2l} \langle \xi_n \rangle^{2l} d\xi,
\end{aligned}$$

ce qui démontre l'estimation (2.20) et termine la démonstration du lemme 2.2.

□

Reprenons maintenant la démonstration de la proposition 2.1. Plaçons nous dans le cadre de l'analyse semi-classique en effectuant le changement de paramètre,

$$h := \tau^{-1} \text{ pour } \tau \geq 1, \quad (2.26)$$

et notons u_h la fonction u_τ définie par le paramètre $\tau = h^{-1}$ si $0 < h \leq 1$. Remarquons tout d'abord que d'après (2.9), (2.13) et (2.26), on a

$$\begin{aligned}
(D_1 - ix_1^k D_n)u_h &= 0, \quad \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1 \text{ et} \\
\forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} &= O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que cette famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se concentre semi-classiquement dans le sens qui est celui précisé à la définition 1.2 dans l'ensemble compact F_ε défini en (2.1). Pour ce faire, considérons V un voisinage ouvert de l'ensemble F_ε , $l \in \mathbb{N}$ et ψ un symbole appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$\text{supp } \psi \subset V^c. \quad (2.28)$$

Considérons ensuite deux fonctions $\varphi(x)$ et $w(\xi)$ telles que $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi = 1$ sur un voisinage ouvert du point 0 dans \mathbb{R}^n et telles que la fonction $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ soit une fonction bornée vérifiant,

$$w = 0 \text{ sur } V_1 \text{ et } w = 1 \text{ sur } V_2^c, \quad (2.29)$$

où V_1 et V_2 sont deux voisinages ouverts bornés de l'ensemble G_ε défini en (2.17) vérifiant (2.18). Comme la distance $d(F_\varepsilon, V^c)$ entre les ensembles F_ε et V^c est strictement positive puisque V^c est un ensemble fermé, F_ε est un ensemble compact et que $F_\varepsilon \cap V^c = \emptyset$, on peut au regard de (2.1) et (2.17) faire ces choix de sorte que,

$$V^c \cap (\text{supp } \varphi \times \text{supp}(1-w)) = \emptyset. \quad (2.30)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Ecrivons ensuite que,

$$\begin{aligned} \psi(x, h\xi, h)^w u_h &= \psi(x, h\xi, h)^w (1 - \varphi(x)) u_h + \psi(x, h\xi, h)^w \varphi(x) w(h\xi)^w u_h \\ &\quad + \psi(x, h\xi, h)^w \varphi(x) (1 - w(h\xi))^w u_h. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Comme $\psi \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$, le théorème de Calderón-Vaillancourt joint aux estimations (2.16) et (2.20) du lemme 2.2 montrent au regard de (2.26) que pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe des constantes C_l et D_l strictement positives telles que,

$$\|\psi(x, h\xi, h)^w (1 - \varphi(x)) u_h\|_{H^l} \leq C_l \|(1 - \varphi(x)) u_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \quad (2.32)$$

et,

$$\|\psi(x, h\xi, h)^w \varphi(x) w(h\xi)^w u_h\|_{H^l} \leq D_l \|w(hD_x) u_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \quad (2.33)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. D'autre part, comme les identités (2.28) et (2.30) induisent d'après les résultats classiques de calcul symbolique que,

$$\psi(x, h\xi, h)^w \varphi(x) (1 - w(h\xi))^w \in \text{Op}_h^w(S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2)),$$

où $\text{Op}_h^w(S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2))$ désigne la classe des opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl semi-classique par un symbole de la classe $S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2)$, on en déduit d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|\psi(x, h\xi, h)^w \varphi(x) (1 - w(h\xi))^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \|u_h\|_{H^l}, \quad (2.34)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. On déduit alors de (2.27), (2.31), (2.32), (2.33), (2.34) et de l'inégalité triangulaire que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|\psi(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui démontre que la famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble compact F_ε ,

$$F_\varepsilon = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}),$$

et termine la démonstration de la proposition 2.1. \square

2.b. Action d'un opérateur pseudo-différentiel sur un ensemble de concentration semi-classique.

Nous allons étudier dans la proposition suivante quelle est l'influence de l'action d'un opérateur pseudo-différentiel sur un ensemble de concentration semi-classique d'une famille semi-classique.

Proposition 2.3. *Considérons $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ une famille semi-classique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant,*

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \quad (2.35)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

qui se concentre semi-classiquement dans un ensemble compact noté,

$$\text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}),$$

et a un symbole appartenant à la classe $S(\langle \xi \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ où $m \in \mathbb{R}_+$ tel qu'il existe un sous-ensemble fermé A de \mathbb{R}^{2n} indépendant du paramètre semi-classique h tel que,

$$a(x, \xi, h) \in S(h^\infty \langle \xi \rangle^m, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble } A^c, \quad (2.36)$$

i.e. que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, il existe une constante $h_{N,\alpha} > 0$ telle que,

$$\sup_{(x,\xi) \in A^c, 0 < h \leq h_{N,\alpha}} |\partial_{x,\xi}^\alpha a(x, \xi, h) \langle \xi \rangle^{-m} h^{-N}| < +\infty. \quad (2.37)$$

Sous ces hypothèses, la famille semi-classique $(a(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq 1}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble compact $A \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1})$, ce que l'on note,

$$A \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}) = \text{FS}_\infty[(a(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq 1}]. \quad (2.38)$$

Notons en particulier que si l'ensemble de concentration semi-classique,

$$A \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}),$$

est vide, les estimations suivantes sont vérifiées,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|a(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (2.39)$$

Preuve. Considérons V un voisinage ouvert de l'ensemble compact,

$$F := A \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}), \quad (2.40)$$

et ψ un symbole de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ vérifiant,

$$\text{supp} \psi \subset V^c. \quad (2.41)$$

Il s'agit de démontrer que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\|\psi(x, h\xi, h)^w a(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (2.42)$$

Comme l'inclusion,

$$F \subset V, \quad (2.43)$$

induit d'après (2.40) que,

$$\mathbb{R}^{2n} = F \cup F^c = V \cup A^c \cup \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1})^c,$$

on peut trouver une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert de \mathbb{R}^{2n} ,

$$\mathbb{R}^{2n} = V \cup A^c \cup \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1})^c,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

i.e. trouver des symboles φ_1 , φ_2 et φ_3 appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui soient indépendants du paramètre semi-classique h et vérifient,

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \varphi_1(x, \xi) + \varphi_2(x, \xi) + \varphi_3(x, \xi) = 1, \quad (2.44)$$

et,

$$\text{supp}\varphi_1 \subset V, \quad \text{supp}\varphi_2 \subset A^c \text{ et } \text{supp}\varphi_3 \subset \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1})^c. \quad (2.45)$$

Remarquons que d'après (2.41) et (2.45), on a

$$\psi = (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)\psi = \varphi_2\psi + \varphi_3\psi. \quad (2.46)$$

Comme l'ensemble de concentration semi-classique $\text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1})$ est supposé compact, il s'ensuit au regard de (2.45) que l'on peut choisir $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ une fonction telle que,

$$\phi = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de l'ensemble } \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}), \quad (2.47)$$

et telle que,

$$\text{supp}\phi \cap \text{supp}\varphi_3 = \emptyset. \quad (2.48)$$

On déduit de (2.47) et de la définition 1.2 que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|(1 - \phi(x, h\xi))^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (2.49)$$

D'après (2.46), on peut écrire,

$$\begin{aligned} & \psi(x, h\xi, h)^w a(x, h\xi, h)^w u_h \\ &= (\varphi_3(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w \phi(x, h\xi)^w u_h \\ & \quad + (\varphi_3(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w (1 - \phi(x, h\xi))^w u_h \\ & \quad + (\varphi_2(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w u_h. \end{aligned} \quad (2.50)$$

En utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt et les résultats classiques de calcul symbolique qui montrent que,

$$(\varphi_3(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w \in \text{Op}_h^w(S(\langle \xi \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)),$$

où $\text{Op}_h^w(S(\langle \xi \rangle^m, dx^2 + d\xi^2))$ désigne la classe des opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl semi-classique par un symbole de la classe,

$$S(\langle \xi \rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

on obtient d'après (2.49) que pour tout $l \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_l > 0$ telle que,

$$\begin{aligned} & \|(\varphi_3(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w (1 - \phi(x, h\xi))^w u_h\|_{H^l} \\ & \leq C_l \|(1 - \phi(x, h\xi))^w u_h\|_{H^{l+m}} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Constatons ensuite que l'identité (2.48) induit d'après les résultats classiques de calcul symbolique rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit que,

$$(\varphi_3(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w \phi(x, h\xi)^w \in \text{Op}_h^w(S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2)), \quad (2.52)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

et que d'après (2.36) et (2.45),

$$(\varphi_2(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w \in \text{Op}_h^w(S(h^\infty\langle\xi\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)). \quad (2.53)$$

Une nouvelle application du théorème de Calderón-Vaillancourt induit d'après (2.35), (2.52) et (2.53) que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \|(\varphi_3(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w \phi(x, h\xi)^w u_h\|_{H^l} \\ & = O(h^\infty)\|u_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \end{aligned} \quad (2.54)$$

et,

$$\|(\varphi_2(x, h\xi)\psi(x, h\xi, h))^w a(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty)\|u_h\|_{H^{l+m}} = O(h^\infty), \quad (2.55)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En réunissant les expressions (2.50), (2.51), (2.54), (2.55) et en utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|\psi(x, h\xi, h)^w a(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, ce qui démontre l'identité,

$$A \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}) = \text{FS}_\infty[(a(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq 1}],$$

et termine la démonstration de la proposition 2.3. \square

3. Démonstration du théorème 1.3.

Commençons cette démonstration du théorème 1.3 en remarquant qu'il suffit, quitte à considérer le symbole $p_0 - z$ à la place du symbole p_0 défini en (1.5) de démontrer ce théorème dans le cas où $z = 0$. On suppose donc dans tout ce qui suit que,

$$z = 0. \quad (3.1)$$

En fait, on peut également se ramener au cas où la fonction q_0 qui apparaît dans l'hypothèse (1.6) est identiquement égale à 1. En effet, supposons que nous sachions démontrer le théorème 1.3 dans ce cas particulier. Si on considère l'opérateur pseudo-différentiel,

$$Q(x, h\xi, h)^w := P(x, h\xi, h)^w q_0(x, h\xi)^w, \quad (3.2)$$

on remarque d'après les résultats classiques de calcul symbolique rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit et (1.5) que son symbole de Weyl semi-classique $Q(x, \xi, h)$ admet dans la classe $S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$Q(x, \xi, h) \sim q_0(x, \xi)p_0(x, \xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} Q_j(x, \xi)h^j, \quad (3.3)$$

où pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $Q_j(x, \xi)$ désignent des symboles de la classe,

$$S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

qui sont indépendants du paramètre semi-classique h . Ce symbole $G(x, \xi, h)$ vérifie pour $z = 0$ les hypothèses (H1) et (H2) de la version faible du théorème 1.3 que l'on suppose démontrée. Si on applique cette version faible du théorème 1.3 à l'opérateur pseudo-différentiel (3.2), on peut alors pour tout voisinage ouvert V de l'ensemble $\gamma([a_0, b_0])$ dans \mathbb{R}^{2n} où (a_0, b_0) est le couple défini en (1.8) et pour tout $N \in \mathbb{N}$ trouver une constante h_0 strictement positive et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que,

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \\ \text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0}) &\subset \bar{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et} \\ \|P(x, h\xi, h)^w q_0(x, h\xi)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si on choisit pour V un voisinage ouvert borné du compact $\gamma([a_0, b_0])$ dans \mathbb{R}^{2n} suffisamment petit, on peut au regard de (1.6) supposer que,

$$\forall (x, \xi) \in \bar{V}, \quad q_0(x, \xi) \neq 0, \quad (3.5)$$

ce qui induit une propriété d'ellipticité pour le symbole q_0 sur l'ensemble compact \bar{V} dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$. On peut donc trouver des symboles $\tilde{q}_0(x, \xi, h)$ et $r_0(x, \xi, h)$ dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$\tilde{q}_0(x, h\xi, h)^w q_0(x, h\xi)^w = I + r_0(x, h\xi, h)^w, \quad (3.6)$$

et tels que,

$$r_0 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur un voisinage ouvert } \omega \text{ du compact } \bar{V}, \quad (3.7)$$

i.e. que pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{2n}$, il existe une constante $h_{M, \alpha} > 0$ telle que,

$$\sup_{(x, \xi) \in \omega, 0 < h \leq h_{M, \alpha}} |\partial_{x, \xi}^\alpha r_0(x, \xi, h) h^{-M}| < +\infty.$$

Comme d'après (3.4) et (3.7), $\omega^c \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) = \emptyset$, la proposition 2.3 de la section précédente montre que la famille semi-classique,

$$(r_0(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq h_0},$$

se concentre semi-classiquement dans l'ensemble vide ce qui induit d'après (2.39) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|r_0(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.8)$$

Remarquons ensuite que le théorème de Calderón-Vaillancourt montre en utilisant l'inégalité triangulaire, (3.4), (3.6) et (3.8) que,

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\tilde{q}_0(x, h\xi, h)^w q_0(x, h\xi)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|r_0(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(\|q_0(x, h\xi)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + h^\infty), \end{aligned} \quad (3.9)$$

et que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|q_0(x, h\xi)^w u_h\|_{H^l} = O(\|u_h\|_{H^l}) = O(h^{-m_l}), \quad (3.10)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

lorsque $h \rightarrow 0^+$ avec $m_0 = 0$. On déduit de (3.9) et (3.10) qu'il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $0 < \tilde{h}_0 \leq h_0$ telles que,

$$\forall 0 < h \leq \tilde{h}_0, \quad c_1 \leq \|q_0(x, h\xi)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_2. \quad (3.11)$$

Si on considère maintenant la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}$ définie par,

$$v_h(x) := \frac{q_0(x, h\xi)^w u_h(x)}{\|q_0(x, h\xi)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}, \quad (3.12)$$

on constate que cette famille semi-classique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifie d'après (3.4), (3.10), (3.11) et (3.12),

$$\|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|v_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.13)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ et,

$$\|P(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.14)$$

Comme de plus, la proposition 2.3 montre au regard de (3.4), (3.11) et (3.12) que,

$$\bar{V} = \text{FS}_\infty((v_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}),$$

on déduit de (1.3), (3.13) et (3.14) que la version faible du théorème 1.3 que l'on a supposé démontrée, induit le résultat du théorème 1.3 dans toute sa généralité. Nous allons donc supposer à partir de maintenant que la fonction q_0 apparaissant dans les hypothèses (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13), est identiquement égale à 1,

$$q_0 = 1. \quad (3.15)$$

Pour la suite de notre démonstration, nous allons distinguer deux cas.

Premier cas. Le premier cas que nous allons étudier, est celui où en utilisant les notations introduites en (1.8), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12), (1.13) et (1.19), la fonction $t \in [a, b] \mapsto \text{Imp}_0(\gamma(t))$ change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à un *ordre fini* k_0 au point,

$$t_0 = a_0 = b_0. \quad (3.16)$$

Nous qualifions dans la suite ce cas, de cas d'une *annulation à un ordre fini*.

Deuxième cas. Le second cas qui peut se produire, est le cas où la fonction,

$$t \in [a, b] \mapsto \text{Imp}_0(\gamma(t)),$$

ne possède en aucun point $t_0 \in [a, b]$ de changement de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à un ordre qui soit fini. Nous sommes donc d'après (1.6) en présence d'un changement de signe qui s'effectue à un *ordre infini*. Contrairement au cas précédent, il peut alors se produire que le couple (a_0, b_0) défini en (1.8) vérifie $a_0 < b_0$. Nous qualifions dans la suite ce cas, de cas d'une *annulation à un ordre infini*.

Commençons par étudier le cas d'une annulation à un ordre fini.

3.a. Etude du cas d'une annulation à un ordre fini.

Considérons V_0 un voisinage ouvert du point $\gamma(t_0)$ dans \mathbb{R}^{2n} où t_0 est le point défini en (3.16). Compte tenu de la propriété de dépendance régulière par rapport aux conditions initiales qui est celle du problème de Cauchy associé au système différentiel,

$$y'(t) = H_{\text{Rep}_0}(y(t)),$$

et du fait que dans ce premier cas que nous étudions, nous supposons que la fonction Imp_0 change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives au point t_0 sur la courbe bicaractéristique $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ du symbole Rep_0 définie en (1.6), on peut trouver un voisinage ouvert V_1 du point $\gamma(t_0)$ dans \mathbb{R}^{2n} ,

$$\gamma(t_0) \in V_1 \subset V_0, \quad (3.17)$$

tel que sur toute bicaractéristique orientée du symbole Rep_0 passant par un point de cet ouvert V_1 , la fonction Imp_0 change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives dans l'ouvert V_0 . Comme la propriété de dépendance régulière par rapport aux conditions initiales évoquée précédemment induit que l'ordre de tels changements de signe ne peut que diminuer localement, nous supposons que les ordres de tous ces changements de signe sont inférieurs ou égaux à k_0 et nous noterons k l'ordre fini *minimal* auquel s'effectue ces changements de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives de la fonction Imp_0 le long des bicaractéristiques orientées du symbole Rep_0 passant par un point de l'ouvert V_1 . Considérons ensuite $t \mapsto \Gamma(t)$ une bicaractéristique orientée du symbole Rep_0 passant par un point de l'ouvert V_1 telle que la fonction $t \mapsto \text{Imp}_0(\Gamma(t))$ change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à l'ordre exactement k en $t = 0$. Cette propriété de minimalité caractéristique de l'ordre k et la propriété de dépendance régulière par rapport aux conditions initiales évoquée précédemment nous permettent de trouver un voisinage ouvert borné V_2 du point $(x_0, \xi_0) := \Gamma(0)$ dans \mathbb{R}^{2n} ,

$$V_2 \subset V_0, \quad (3.18)$$

tel que la fonction Imp_0 s'annule une unique fois dans l'ouvert V_2 le long de toute bicaractéristique orientée du symbole Rep_0 passant par un point d'un voisinage ouvert suffisamment petit du point (x_0, ξ_0) et tel que la fonction Imp_0 change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à l'ordre exactement k en ces annulations le long de ces bicaractéristiques orientées du symbole Rep_0 . Notons que ces hypothèses de changement de signe impose tout d'abord que,

$$p_0(x_0, \xi_0) = 0, \quad (3.19)$$

et l'*impairité* de l'entier k . Nous allons également vérifier que l'on a nécessairement,

$$H_{\text{Rep}_0}(x_0, \xi_0) \neq 0. \quad (3.20)$$

En effet, si $H_{\text{Rep}_0}(x_0, \xi_0) = 0$, l'unicité au problème de Cauchy,

$$\begin{cases} y'(t) = H_{\text{Rep}_0}(y(t)) \\ y(0) = (x_0, \xi_0), \end{cases}$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

dont les applications $t \mapsto \Gamma(t)$ et $t \mapsto (x_0, \xi_0)$ sont solutions, induirait que l'application $t \mapsto \Gamma(t)$ soit constante au voisinage de 0. Ceci serait contraire à la propriété de changement de signe de la fonction $t \mapsto \text{Imp}_0(\Gamma(t))$ en $t = 0$ supposée par la construction précédente et démontre l'identité (3.20). Dans le cas où l'ordre k est strictement supérieur à 1, on peut d'après (3.19) et (3.20) appliquer le théorème 5.2 de la cinquième section de cet article pour trouver une fonction $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ et une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} où $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ sur un voisinage ouvert du point (x_0, ξ_0) dans \mathbb{R}^{2n} telles que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = (x_0, \xi_0), \quad A(x_0, \xi_0) \neq 0 \text{ et } \chi^*(Ap_0) = \xi_1 - ix_1^k \xi_n, \quad (3.21)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Dans le cas où $k = 1$, le fait que la fonction $t \mapsto \text{Imp}_0(\Gamma(t))$ change de signe à l'ordre 1 en 0 en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives et que la courbe $t \mapsto \Gamma(t)$ soit une bicaractéristique du symbole Rep_0 induisent que,

$$\left. \frac{d}{dt} (\text{Imp}_0(\Gamma(t))) \right|_{t=0} = \{\text{Rep}_0, \text{Imp}_0\}(x_0, \xi_0) < 0. \quad (3.22)$$

On peut dans ce cas d'après (3.19) et (3.22) appliquer le théorème 5.5 de la cinquième section de cet article pour trouver une fonction $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ et une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point (x_0, ξ_0) dans \mathbb{R}^{2n} telles que les identités (3.21) soient vérifiées pour l'entier $k = 1$. On peut également supposer quitte à réduire le voisinage ouvert V_2 choisi en (3.18) que la dernière identité de (3.21) soit vérifiée sur le voisinage ouvert $\chi^{-1}(V_2)$ du point $(0, \varepsilon_n)$ et que,

$$\forall (x, \xi) \in V_2, \quad A(x, \xi) \neq 0. \quad (3.23)$$

Considérons maintenant l'opérateur pseudo-différentiel,

$$q(x, h\xi, h)^w := A(x, h\xi)^w P(x, h\xi, h)^w. \quad (3.24)$$

Comme la fonction A appartient à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, les résultats classiques de calcul symbolique et (1.5) montrent que le symbole de Weyl semi-classique,

$$q(x, \xi, h),$$

définissant l'opérateur (3.24) appartient à la classe de symboles $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$q(x, \xi, h) \sim A(x, \xi)p_0(x, \xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} q_j(x, \xi)h^j, \quad (3.25)$$

où les fonctions $q_j(x, \xi)$ désignent des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique. On peut d'après (3.21) choisir une fonction $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$ vérifiant,

$$\text{supp } g \subset V_2 \text{ et } g = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de l'ensemble } \chi(W_1), \quad (3.26)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où V_2 est le voisinage ouvert borné du point (x_0, ξ_0) défini en (3.18) et où W_1 désigne un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ contenu dans $\chi^{-1}(V_2)$,

$$W_1 \subset \chi^{-1}(V_2). \quad (3.27)$$

On considère ensuite \tilde{A}_h , \tilde{B}_h et \tilde{C}_h trois opérateurs de Fourier intégraux semi-classiques d'ordre 0, proprement supportés et elliptiques. On suppose que l'opérateur de Fourier intégral \tilde{A}_h est associé à la sous-variété lagrangienne de \mathbb{R}^{4n} définie localement par le graphe de la transformation symplectique réelle χ^{-1} et que les opérateurs \tilde{B}_h et \tilde{C}_h sont eux associés à la sous-variété lagrangienne de \mathbb{R}^{4n} définie localement par le graphe de la transformation symplectique réelle χ . On peut d'après une version semi-classique du théorème d'Egorov (voir section 1.2.2 dans [14]) et (3.26) choisir ces trois opérateurs de Fourier intégraux pour que les trois points suivants soient vérifiés.

(i)

$$\forall l \in \mathbb{N}, \sup_{0 < h \leq 1} \{ \|\tilde{A}_h\|_{\mathcal{L}(H^l)}, \|\tilde{B}_h\|_{\mathcal{L}(H^l)}, \|\tilde{C}_h\|_{\mathcal{L}(H^l)} \} < +\infty, \quad (3.28)$$

où $\mathcal{L}(H^l)$ désigne l'espace vectoriel normé des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Sobolev H^l .

(ii) Le symbole de Weyl semi-classique $s(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$s(x, h\xi, h)^w := \tilde{A}_h g(x, hD_x) \tilde{B}_h, \quad (3.29)$$

où la notation $g(x, hD_x)$ désigne la quantification semi-classique standard du symbole $g(x, \xi)$, admet un développement asymptotique semi-classique dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ de la forme,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} s_j(x, \xi) h^j, \quad (3.30)$$

où les fonctions s_j sont des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique, à support compact tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\text{supp } s_j \subset \chi^{-1}(V_2), \quad (3.31)$$

et tels que,

$$s_0 = 1 \text{ et } s_j = 0 \text{ pour tout } j \geq 1 \text{ sur l'ensemble ouvert } W_1. \quad (3.32)$$

On rappelle que les ensembles V_2 et W_1 sont respectivement définis en (3.18) et (3.27).

(iii) Il existe un symbole $r_1(x, \xi, h)$ appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tel que,

$$r_1 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur un voisinage ouvert } V_3 \text{ du compact } \overline{V_2}, \quad (3.33)$$

(voir (3.7)) et,

$$\tilde{C}_h \tilde{A}_h = I + r_1(x, h\xi, h)^w. \quad (3.34)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Sous ces hypothèses, le théorème d'Egorov montre que l'opérateur pseudo-différentiel semi-classique,

$$\tilde{q}(x, h\xi, h)^w := \tilde{A}_h q(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h, \quad (3.35)$$

est défini en quantification de Weyl semi-classique à partir d'un symbole $\tilde{q}(x, \xi, h)$ appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui d'après (3.21), (3.25) et (3.32) admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$\tilde{q}(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{q}_j(x, \xi) h^j, \quad (3.36)$$

où les fonctions \tilde{q}_j désignent des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique tels que,

$$\tilde{q}_0(x, \xi) = \xi_1 - ix_1^k \xi_n \text{ sur le voisinage ouvert } W_1 \text{ du point } (0, \varepsilon_n), \quad (3.37)$$

car d'après (3.27) et la remarque précédant (3.23), la dernière identité de (3.21) est vérifiée sur l'ensemble $W_1 \subset \chi^{-1}(V_2)$.

On scinde la démonstration du théorème 1.3 dans ce cas d'une *annulation à un ordre fini* en plusieurs étapes.

Etape 1. Nous allons démontrer dans cette première étape que l'on peut trouver deux opérateurs pseudo-différentiels $c(x, h\xi, h)^w$ et $d(x, h\xi, h)^w$ définis en quantification de Weyl semi-classique par des symboles $c(x, \xi, h)$ et $d(x, \xi, h)$ appartenant à la classe de symboles $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui soient elliptiques sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ tels que le symbole de Weyl semi-classique $r(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$r(x, h\xi, h)^w := \tilde{q}(x, h\xi, h)^w c(x, h\xi, h)^w - d(x, h\xi, h)^w \tilde{q}_0(x, h\xi)^w, \quad (3.38)$$

vérifie $r(x, \xi, h) \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et tels que pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe \tilde{W}_M un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} tel que,

$$r \in S(h^M, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } \tilde{W}_M. \quad (3.39)$$

Pour ce faire, nous allons chercher ces symboles $c(x, \xi, h)$ et $d(x, \xi, h)$ parmi les symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui admettent dans cette classe un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$c(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} c_j(x, \xi) h^j \text{ et } d(x, \xi, h) \sim \sum_{l=0}^{+\infty} d_l(x, \xi) h^l, \quad (3.40)$$

où les fonctions c_j et d_l sont des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique h . La construction de ces opérateurs pseudo-différentiels $c(x, h\xi, h)^w$ et $d(x, h\xi, h)^w$ est analogue à celle donnée lors de la démonstration que propose L.Hörmander pour obtenir l'identité (26.3.1) dans la preuve de la proposition 26.3.1 de [12]. Constatons tout d'abord que si les

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

symboles c et d vérifient (3.40), les résultats classiques de calcul symbolique et (3.36) montrent que le symbole de Weyl semi-classique $r(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel (3.38) admet un développement asymptotique semi-classique dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ dont le terme principal est égal à,

$$\tilde{q}_0(x, \xi)(c_0(x, \xi) - d_0(x, \xi)). \quad (3.41)$$

Pour annuler ce terme, il suffit de choisir les symboles c_0 et d_0 tels que,

$$c_0 = d_0. \quad (3.42)$$

Notons ensuite que si l'identité (3.42) est vérifiée, le terme d'ordre h dans développement asymptotique semi-classique du symbole $r(x, \xi, h)$ s'annule si,

$$\tilde{q}_0(c_1 - d_1) - i\{\tilde{q}_0, c_0\} + \tilde{q}_1 c_0 = 0. \quad (3.43)$$

En utilisant l'identité (3.37), on peut écrire cette équation (3.43) sous la forme,

$$\begin{aligned} -i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1^k \frac{\partial}{\partial x_n} + ikx_1^{k-1} \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) c_0 + \tilde{q}_1 c_0 \\ + (\xi_1 - ix_1^k \xi_n)(c_1 - d_1) = 0, \end{aligned} \quad (3.44)$$

sur le voisinage ouvert W_1 du point $(0, \varepsilon_n)$. Il est important de souligner qu'il n'y a pas de dépendance de l'équation (3.44) par rapport au paramètre semi-classique puisque les symboles c_0 , c_1 , d_1 et \tilde{q}_1 sont supposés indépendants de ce paramètre. Nous allons choisir maintenant un symbole c_0 vérifiant,

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \frac{\partial^j}{\partial x_1^j} \left(-i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1^k \frac{\partial}{\partial x_n} + ikx_1^{k-1} \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) c_0 + \tilde{q}_1 c_0 \right) = 0, \quad (3.45)$$

si $x_1 = 0$ et si $(x'; \xi)$ appartient à un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n-1} où $x' = (x_2, \dots, x_n)$ et $x = (x_1, x')$. Il s'agit de trouver une fonction c_0 résolvant les équations suivantes,

$$\forall j = 1, \dots, k-1, \quad -i \frac{\partial^j c_0}{\partial x_1^j}(0, x'; \xi) + \frac{\partial^{j-1}}{\partial x_1^{j-1}}(\tilde{q}_1 c_0)(0, x'; \xi) = 0, \quad (3.46)$$

$$-i \frac{\partial^k c_0}{\partial x_1^k}(0, x'; \xi) + k! \xi_n \frac{\partial c_0}{\partial \xi_1}(0, x'; \xi) + \frac{\partial^{k-1}}{\partial x_1^{k-1}}(\tilde{q}_1 c_0)(0, x'; \xi) = 0, \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \forall j \geq k, \quad -i \frac{\partial^{j+1} c_0}{\partial x_1^{j+1}}(0, x'; \xi) - k! \frac{\partial^{j-k+1} c_0}{\partial x_1^{j-k} \partial x_n}(0, x'; \xi) \\ + k! \xi_n \frac{\partial^{j-k+2} c_0}{\partial x_1^{j-k+1} \partial \xi_1}(0, x'; \xi) + \frac{\partial^j}{\partial x_1^j}(\tilde{q}_1 c_0)(0, x'; \xi) = 0, \end{aligned} \quad (3.48)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$. Si on impose à la fonction c_0 de vérifier,

$$c_0(0, x'; \xi) = 1, \quad (3.49)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert de $(0'; \varepsilon_n)$, ceci induit que le système d'équations (3.46), (3.47) et (3.48) détermine entièrement au regard de (3.49) les quantités,

$$\frac{\partial^j c_0}{\partial x_1^j}(0, x'; \xi), \quad (3.50)$$

pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $(x'; \xi)$ appartenant à un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$ puisque le symbole \tilde{q}_1 est une donnée définie en (3.36). On peut alors utiliser le théorème de Borel (Théorème 1.2.6 dans [12]) pour exhiber $c_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ une fonction vérifiant,

$$c_0(0, x'; \xi) = 1 \text{ sur un voisinage ouvert du point } (0'; \varepsilon_n), \quad (3.51)$$

et ayant pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ des dérivées partielles d'ordre j par rapport à la variable x_1 en $x_1 = 0$ égales aux quantités prescrites par (3.50) sur un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$. Cette fonction c_0 est alors solution des équations (3.46), (3.47) et (3.48) sur un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$, et donc aussi des équations (3.45) sur un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$. En utilisant que ces équations (3.45) sont satisfaites, on en déduit que le quotient \tilde{R}_1 de la fonction,

$$-i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1^k \frac{\partial}{\partial x_n} + ikx_1^{k-1} \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) c_0 + \tilde{q}_1 c_0,$$

par la fonction,

$$\xi_1 - ix_1^k \xi_n,$$

se prolonge en une fonction C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. En reprenant le développement asymptotique semi-classique du symbole $r(x, \xi, h)$, on écrit ensuite l'équation relative à l'annulation du terme d'ordre h^2 en utilisant d'après (3.44) l'identité,

$$d_1 - c_1 = \tilde{R}_1,$$

vérifiée sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ pour éliminer le symbole inconnu d_1 de cette équation d'annulation du terme d'ordre h^2 qui devient ainsi une équation inhomogène de la forme (3.43) pour le symbole inconnu c_1 ,

$$\tilde{q}_0(c_2 - d_2) - i\{\tilde{q}_0, c_1\} + \tilde{q}_1 c_1 = \Xi_1, \quad (3.52)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, où Ξ_1 désigne une fonction entièrement déterminée par les symboles déjà connus c_0 , d_0 , \tilde{q}_0 , \tilde{q}_1 , \tilde{q}_2 et \tilde{R}_1 . En utilisant l'identité (3.37), on peut écrire cette équation (3.52) sous la forme,

$$\begin{aligned} -i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1^k \frac{\partial}{\partial x_n} + ikx_1^{k-1} \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) c_1 + \tilde{q}_1 c_1 - \Xi_1 \\ + (\xi_1 - ix_1^k \xi_n)(c_2 - d_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. On peut alors de la même manière que précédemment choisir une fonction $c_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ vérifiant $c_1(0, x'; \xi) = 1$ sur un voisinage ouvert du point $(0'; \varepsilon_n)$ telle que le quotient \tilde{R}_2 de la fonction,

$$-i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1^k \frac{\partial}{\partial x_n} + ikx_1^{k-1} \xi_n \frac{\partial}{\partial \xi_1} \right) c_1 + \tilde{q}_1 c_1 - \Xi_1,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

par la fonction,

$$\xi_1 - ix_1^k \xi_n,$$

se prolonge en une fonction C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Considérons ensuite l'équation suivante,

$$d_2 - c_2 = \tilde{R}_2, \quad (3.54)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Cette équation (3.54) permet si on écrit maintenant l'équation relative à l'annulation du terme d'ordre h^3 dans le développement asymptotique semi-classique du symbole $r(x, \xi, h)$ d'éliminer de cette équation le symbole inconnu d_2 qui devient à nouveau une équation inhomogène de la forme (3.52) pour le symbole inconnu c_2 dont le second membre Ξ_2 est une fonction entièrement déterminée par les fonctions déjà connues $\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3, c_0, d_0, c_1, d_1, \tilde{R}_1$ et \tilde{R}_2 ,

$$\tilde{q}_0(c_3 - d_3) - i\{\tilde{q}_0, c_2\} + \tilde{q}_1 c_2 = \Xi_2.$$

On peut alors résoudre de la même manière que précédemment cette équation et itérer cette construction à tout ordre. On en déduit que l'on peut pour tout $j \in \mathbb{N}$ trouver des fonctions c_j et d_j appartenant à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, indépendantes du paramètre semi-classique telles que d'après (3.42) et (3.51),

$$c_0(0, x'; \xi) = d_0(0, x'; \xi) = 1, \quad (3.55)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0', \varepsilon_n)$ et telles que si on considère deux symboles $c(x, \xi, h)$ et $d(x, \xi, h)$ qui sont des resommations dans la classe,

$$S(1, dx^2 + d\xi^2),$$

des développements asymptotiques (3.40) alors le symbole de Weyl semi-classique $r(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel (3.38) appartient à la classe,

$$S(1, dx^2 + d\xi^2),$$

et vérifie (3.39). On déduit de (3.40) et (3.55) qu'il existe un voisinage ouvert W_2 du point $(0, \varepsilon_n)$ tel que les symboles,

$$\begin{aligned} c(x, \xi, h) \text{ et } d(x, \xi, h) \text{ soient elliptiques dans la classe } S(1, dx^2 + d\xi^2) \\ \text{sur l'ensemble ouvert } W_2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Etape 2. Considérons maintenant un entier,

$$M \in \mathbb{N}, \quad (3.57)$$

et un paramètre $\varepsilon > 0$ tel que l'ensemble F_ε défini en (2.1) à la proposition 2.1 soit contenu dans le voisinage ouvert $W_1 \cap \tilde{W}_M$ du point $(0, \varepsilon_n)$,

$$F_\varepsilon \subset W_1 \cap \tilde{W}_M, \quad (3.58)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où W_1 et \tilde{W}_M sont les voisinages ouverts du point $(0, \varepsilon_n)$ choisis respectivement en (3.26) et (3.39). On choisit également ψ une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telle que,

$$\text{supp}\psi \subset W_1 \cap \tilde{W}_M \text{ et } \psi = 1, \quad (3.59)$$

sur un voisinage ouvert du compact F_ε . Considérons ensuite $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ la famille semi-classique de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.60)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$,

$$(D_1 - ix_1^k D_n)u_h = 0 \text{ et } F_\varepsilon = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}), \quad (3.61)$$

construite à la proposition 2.1. Si nous écrivons la décomposition suivante,

$$\begin{aligned} r(x, h\xi, h)^w u_h &= (\psi(x, h\xi)r(x, h\xi, h))^w u_h \\ &\quad + ((1 - \psi(x, h\xi))r(x, h\xi, h))^w u_h, \end{aligned} \quad (3.62)$$

on remarque tout d'abord que d'après (3.59), (3.61) et la définition 1.2, on a

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|((1 - \psi(x, h\xi))r(x, h\xi, h))^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \quad (3.63)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Constatons ensuite que d'après (3.39) et (3.59),

$$\psi(x, \xi)r(x, \xi, h) \in S(h^M, dx^2 + d\xi^2),$$

ce qui induit en vertu du théorème de Calderón-Vaillancourt et (3.60) que,

$$\|(\psi(x, h\xi)r(x, h\xi, h))^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M), \quad (3.64)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. On déduit alors de (3.62), (3.63), (3.64) et de l'inégalité triangulaire que,

$$\|r(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.65)$$

Nous allons maintenant démontrer que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|\tilde{q}_0(x, h\xi)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.66)$$

Pour ce faire, on peut en utilisant (3.37) et (3.59) commencer par écrire que,

$$\begin{aligned} &\tilde{q}_0(x, h\xi)^w \\ &= [\psi(x, h\xi)\tilde{q}_0(x, h\xi)]^w + [(1 - \psi(x, h\xi))\tilde{q}_0(x, h\xi)]^w \\ &= [\psi(x, h\xi)(h\xi_1 - ix_1^k h\xi_n)]^w + [(1 - \psi(x, h\xi))\tilde{q}_0(x, h\xi)]^w, \end{aligned} \quad (3.67)$$

et remarquer que les identités (3.59) et (3.61) induisent que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|[(1 - \psi(x, h\xi))\tilde{q}_0(x, h\xi)]^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.68)$$

En utilisant ensuite les résultats classiques de calcul symbolique qui donnent le développement asymptotique semi-classique du symbole de Weyl semi-classique

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

d'un opérateur pseudo-différentiel obtenu comme composition de deux opérateurs pseudo-différentiels, on peut d'après (3.59) trouver pour tout $N \in \mathbb{N}$ des symboles $r_N(x, \xi, h)$ et $\tilde{r}_N(x, \xi, h)$ appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$\begin{aligned} [\psi(x, h\xi)(h\xi_1 - ix_1^k h\xi_n)]^w &= \psi(x, h\xi)^w (h\xi_1 - ix_1^k h\xi_n)^w + r_N(x, h\xi, h)^w \\ &\quad + h^N \tilde{r}_N(x, h\xi, h)^w, \end{aligned} \quad (3.69)$$

et tels que comme $\psi = 1$ sur un voisinage ouvert du compact F_ε , on ait

$$r_N(x, \xi, h) = 0, \quad (3.70)$$

sur un voisinage ouvert de l'ensemble compact F_ε , indépendant du paramètre semi-classique. On déduit des identités (3.61) et (3.70) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|r_N(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.71)$$

En utilisant maintenant le théorème de Calderón-Vaillancourt et (3.60), on obtient que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\|\tilde{r}_N(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(\|u_h\|_{H^l}) = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui induit en utilisant l'inégalité triangulaire, (3.61), (3.69) et (3.71) que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}$,

$$\|[\psi(x, h\xi)(h\xi_1 - ix_1^k h\xi_n)]^w u_h\|_{H^l} = O(h^{N-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \quad (3.72)$$

car $(h\xi_1 - ix_1^k h\xi_n)^w = (hD_1 - ix_1^k hD_n)$. En utilisant l'inégalité triangulaire et (3.67), on obtient d'après (3.68) et (3.72), l'estimation (3.66). Comme le symbole $d(x, \xi, h)$ construit à l'étape précédente appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, cette estimation (3.66) induit d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|d(x, h\xi, h)^w \tilde{q}_0(x, h\xi)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \quad (3.73)$$

ce qui en utilisant (3.38), (3.65) et l'inégalité triangulaire montre que,

$$\|\tilde{q}(x, h\xi, h)^w c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.74)$$

Nous venons de démontrer dans cette seconde étape le résultat suivant.

Lemme 3.1. *Pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe une constante $\varepsilon_M > 0$ telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_M$, on puisse trouver une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que,*

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \\ F_\varepsilon &= \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq 1}), \end{aligned} \quad (3.75)$$

et,

$$\|\tilde{q}(x, h\xi, h)^w c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M), \quad (3.76)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ où F_ε est l'ensemble défini en (2.1) à la proposition 2.1, où $\tilde{q}(x, h\xi, h)^w$ est l'opérateur pseudo-différentiel défini en (3.35) et où $c(x, h\xi, h)^w$ est l'opérateur pseudo-différentiel construit à l'étape 1.

Etape 3. Nous allons dans cette troisième étape démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.2. *Pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe une constante $\varepsilon_M > 0$ telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_M$, on puisse trouver une constante $h_0 > 0$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportées dans un même compact K telles que,*

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.77)$$

$$\chi(F_\varepsilon) = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et } \|q(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M), \quad (3.78)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ où F_ε est l'ensemble défini en (2.1) à la proposition 2.1, χ est la transformation symplectique réelle définie en (3.21) et $q(x, h\xi, h)^w$ est l'opérateur pseudo-différentiel défini en (3.24).

Preuve du lemme 3.2. Commençons par utiliser la propriété d'ellipticité dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ du symbole $c(x, \xi, h)$ sur le voisinage ouvert W_2 du point $(0, \varepsilon_n)$ donnée par (3.56). Cette propriété d'ellipticité nous permet de trouver deux symboles \tilde{c} et R_1 dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$\tilde{c}(x, h\xi, h)^w c(x, h\xi, h)^w = I + R_1(x, h\xi, h)^w, \quad (3.79)$$

et,

$$R_1 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } W_2. \quad (3.80)$$

Considérons un entier $M \in \mathbb{N}$. Le lemme 3.1 nous permet de trouver une constante $\varepsilon_M > 0$ telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_M$, l'ensemble compact F_ε défini en (2.1) vérifie,

$$F_\varepsilon \subset W_1 \cap W_2, \quad (3.81)$$

où W_1 et W_2 sont les voisinages ouverts du point $(0, \varepsilon_n)$ définis respectivement en (3.26) et (3.56), et telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_M$, on puisse trouver une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant (3.75) et (3.76). Considérons donc un paramètre $0 < \varepsilon < \varepsilon_M$ et $(u_h)_{0 < h \leq 1}$ la famille semi-classique associée. Commençons par remarquer que la proposition 2.3 montre au regard (3.75), (3.80) et (3.81) que l'ensemble $W_2^c \cap F_\varepsilon = \emptyset$ est un ensemble de concentration semi-classique pour la famille semi-classique $(R_1(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq 1}$, ce qui induit en particulier que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|R_1(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.82)$$

Comme les symboles c et \tilde{c} appartiennent à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, on déduit du théorème de Calderón-Vaillancourt, l'inégalité triangulaire, (3.75), (3.79) et (3.82) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $0 < h \leq 1$,

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|\tilde{c}(x, h\xi, h)^w c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|R_1(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + O(h^\infty), \end{aligned} \quad (3.83)$$

et,

$$\|c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C. \quad (3.84)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

On déduit des estimations (3.83) et (3.84) qu'il existe des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $0 < h_0 \leq 1$ telles que,

$$\forall 0 < h \leq h_0, \quad c_1 \leq \|c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_2. \quad (3.85)$$

Comme d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt, (3.40) et (3.75),

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(\|u_h\|_{H^l}) = O(h^{-ml}), \quad (3.86)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, on obtient en renormalisant en norme L^2 la famille semi-classique $(c(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq h_0}$, ce qui est licite d'après (3.85), une famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\forall 0 < h \leq h_0, \quad v_h(x) := \frac{c(x, h\xi, h)^w u_h(x)}{\|c(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}, \quad (3.87)$$

qui vérifie d'après (3.35), (3.76), (3.85), (3.86) et (3.87),

$$\|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|v_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.88)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ et,

$$\|\tilde{A}_h g(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.89)$$

Remarquons également que d'après la proposition 2.3, (3.75), (3.85) et (3.87), la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq h_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble compact F_ε ,

$$F_\varepsilon = \text{FS}_\infty((v_h)_{0 < h \leq h_0}). \quad (3.90)$$

Considérons ensuite $s(x, \xi, h)$ le symbole de Weyl semi-classique de l'opérateur pseudo-différentiel (3.29). D'après (3.30) et (3.32), ce symbole s est elliptique dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ sur l'ensemble ouvert W_1 . Cette propriété d'ellipticité nous permet de trouver deux symboles $S_1(x, \xi, h)$ et $S_2(x, \xi, h)$ dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$S_1(x, h\xi, h)^w s(x, h\xi, h)^w = I + S_2(x, h\xi, h)^w, \quad (3.91)$$

et,

$$S_2 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } W_1. \quad (3.92)$$

On en déduit en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt, l'inégalité triangulaire, (3.28), (3.29), (3.88) et (3.91) que,

$$\begin{aligned} 1 &= \|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|S_1(x, h\xi, h)^w \tilde{A}_h g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|S_2(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(\|\tilde{A}_h g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) + \|S_2(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(\|g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) + \|S_2(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Remarquons que la proposition 2.3 montre au regard de (3.81), (3.88), (3.90) et (3.92) que l'ensemble $W_1^c \cap F_\varepsilon = \emptyset$ est un ensemble de concentration semi-classique pour la famille semi-classique $(S_2(x, h\xi, h)^w v_h)_{0 < h \leq h_0}$, ce qui induit en particulier que,

$$\|S_2(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.94)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Comme d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt, (3.26), (3.28) et (3.88), on a

$$\|g(x, hD_x)\tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(1) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \quad (3.95)$$

on en déduit d'après (3.93), (3.94) et (3.95) que l'on peut choisir des constantes $\tilde{c}_1 > 0$, $\tilde{c}_2 > 0$ et $0 < \tilde{h}_0 \leq h_0$ telles que,

$$\forall 0 < h \leq \tilde{h}_0, 0 < \tilde{c}_1 \leq \|g(x, hD_x)\tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \tilde{c}_2 < +\infty. \quad (3.96)$$

Constatons aussi que d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt, (3.26), (3.28) et (3.88), on a

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|g(x, hD_x)\tilde{B}_h v_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.97)$$

Si on considère à présent la famille semi-classique $(\tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par,

$$\tilde{v}_h(x) := \frac{g(x, hD_x)\tilde{B}_h v_h(x)}{\|g(x, hD_x)\tilde{B}_h v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}, \quad (3.98)$$

ce qui est licite d'après (3.96), cette famille semi-classique vérifie d'après (3.89), (3.96), (3.97) et (3.98),

$$\|\tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|\tilde{v}_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.99)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ et,

$$\|\tilde{A}_h g(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.100)$$

Remarquons que d'après (3.26) et (3.98), cette famille semi-classique $(\tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}$ est supportée dans un même compact K . Nous allons maintenant démontrer que la famille semi-classique $(\tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble $\chi(F_\varepsilon)$,

$$\chi(F_\varepsilon) = \text{FS}_\infty((\tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}). \quad (3.101)$$

Pour ce faire, considérons ψ un symbole appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et vérifiant,

$$\psi = 0 \text{ sur un voisinage ouvert de l'ensemble } \chi(F_\varepsilon). \quad (3.102)$$

Le théorème d'Egorov et l'identité (3.102) montrent au regard de (3.29), (3.30), (3.32) et (3.81) que le symbole de Weyl semi-classique $t(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$t(x, h\xi, h)^w := \tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x)\tilde{B}_h, \quad (3.103)$$

appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et vérifie,

$$t \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur un voisinage ouvert de l'ensemble } F_\varepsilon. \quad (3.104)$$

La proposition 2.3 montre ensuite au regard de (3.88), (3.90) et (3.104) que la famille semi-classique,

$$(t(x, h\xi, h)^w v_h)_{0 < h \leq h_0},$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

se concentre semi-classiquement dans l'ensemble vide ce qui induit en particulier que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|t(x, h\xi, h)^w v_h\|_{H^l} = O(h^\infty),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, i.e. d'après (3.103),

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|\tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \quad (3.105)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Si on utilise maintenant le théorème de Calderón-Vaillancourt, l'inégalité triangulaire, (3.28), (3.34) et (3.105), on obtient que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \|\psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} \\ & \leq \|\tilde{C}_h \tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} \\ & \quad + \|r_1(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} \\ & = O(\|\tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l}) \\ & \quad + \|r_1(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} \\ & = O(h^\infty) + \|r_1(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l}. \end{aligned} \quad (3.106)$$

Si on remarque ensuite que (3.26) et (3.33) montrent que l'opérateur pseudo-différentiel,

$$r_1(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x),$$

appartient à la classe $\text{Op}_h^w(S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2))$ des opérateurs pseudo-différentiels définis en quantification de Weyl semi-classique par un symbole de classe,

$$S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2),$$

on obtient en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt, (3.28) et (3.88) que,

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}, \quad & \|r_1(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} \\ & = O(h^\infty \|\tilde{B}_h v_h\|_{H^l}) \\ & = O(h^\infty), \end{aligned} \quad (3.107)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. On déduit alors de (3.106) et (3.107) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|\psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h v_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui d'après (3.96) et (3.98) démontre (3.101). Il reste maintenant pour terminer la démonstration du lemme 3.2 à démontrer que,

$$\|q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.108)$$

Pour ce faire, remarquons tout d'abord que la proposition 2.3 montre au regard de (3.99) et (3.101) que,

$$\text{FS}_\infty((q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}) \subset \text{FS}_\infty((\tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}) = \chi(F_\varepsilon). \quad (3.109)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Comme le symbole de Weyl semi-classique q de l'opérateur pseudo-différentiel (3.24) appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, le théorème de Calderón-Vaillancourt montre d'après (3.99) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, ce qui nous permet d'appliquer à nouveau la proposition 2.3 au regard de (3.33) pour obtenir que la famille semi-classique,

$$(r_1(x, h\xi, h)^w q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0},$$

se concentre semi-classiquement dans l'ensemble,

$$V_3^c \cap \text{FS}_\infty((q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}),$$

qui est vide car d'après (3.27), (3.33), (3.81) et (3.109), on a

$$V_3^c \cap \text{FS}_\infty((q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}) \subset V_3^c \cap \chi(F_\varepsilon) \subset V_2^c \cap \chi(W_1) = \emptyset.$$

On en déduit en particulier que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|r_1(x, h\xi, h)^w q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.110)$$

Comme de plus d'après (3.28) et (3.100), on a

$$\|\tilde{C}_h \tilde{A}_h q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(\|\tilde{A}_h q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) = O(h^M),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, on déduit de l'inégalité triangulaire, (3.34) et (3.110) que,

$$\begin{aligned} \|q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\tilde{C}_h \tilde{A}_h q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \|r_1(x, h\xi, h)^w q(x, h\xi, h)^w \tilde{v}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^M), \end{aligned} \quad (3.111)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, ce qui démontre (3.108) et termine la démonstration du lemme 3.2. \square

Etape 4. Nous allons dans cette dernière étape terminer la démonstration du théorème 1.3 dans le cas d'une annulation à un ordre fini que nous étudions depuis le début de la section 3.a. Pour ce faire, considérons V un voisinage ouvert du point $\gamma(a_0) = \gamma(b_0)$ et un entier $N \in \mathbb{N}$. Comme d'après (3.16), $t_0 = a_0 = b_0$, on peut choisir le voisinage ouvert borné V_0 du point $\gamma(t_0)$ dans \mathbb{R}^{2n} déterminé au début du paragraphe 3.a (cf. (3.17)), suffisamment petit pour que,

$$V_0 \subset V. \quad (3.112)$$

On déduit alors de (3.18), (3.21) et du lemme 3.2 que l'on peut trouver une constante $h_0 > 0$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ à support dans un même compact K ,

$$\forall 0 < h \leq h_0, \text{ supp } u_h \subset K, \quad (3.113)$$

telles que,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.114)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

$$\text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \subset V_2 \text{ et } \|q(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N), \quad (3.115)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. On obtient d'après (1.3), (3.18), (3.112) et (3.115) que l'ensemble \bar{V} est également un ensemble de concentration semi-classique pour la famille $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ et que,

$$\text{FS}((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \subset \bar{V}.$$

Il suffit donc pour terminer la démonstration du théorème 1.3 dans le cas d'une annulation à un ordre fini de démontrer que,

$$\|P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.116)$$

Constatons tout d'abord que la propriété d'ellipticité dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ sur l'ensemble ouvert V_2 du symbole $A(x, \xi)$ donnée par (3.23) nous permet de trouver des symboles $\tilde{A}(x, \xi, h)$ et $R_2(x, \xi, h)$ appartenant à la classe,

$$S(1, dx^2 + d\xi^2),$$

tels que,

$$\tilde{A}(x, h\xi, h)^w A(x, h\xi)^w = I + R_2(x, h\xi, h)^w, \quad (3.117)$$

et,

$$R_2 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } V_2. \quad (3.118)$$

Si on utilise le théorème de Calderón-Vaillancourt, l'inégalité triangulaire et (3.117), on obtient d'après (3.24) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que,

$$\begin{aligned} & \|P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|\tilde{A}(x, h\xi, h)^w A(x, h\xi)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \quad + \|R_2(x, h\xi, h)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq c \|A(x, h\xi)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|R_2(x, h\xi, h)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & = c \|q(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|R_2(x, h\xi, h)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Pour continuer, nous allons démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.3. *On a l'estimation,*

$$\|R_2(x, h\xi, h)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.120)$$

Preuve du lemme 3.3. Commençons par choisir ϕ_1 et ϕ_2 deux fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telles que,

$$\phi_1 = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de } \text{supp} \phi_2 \text{ et } \phi_2 = 1 \text{ sur } V_2, \quad (3.121)$$

où V_2 est le voisinage ouvert borné du point (x_0, ξ_0) défini en (3.18). On peut écrire la décomposition suivante,

$$\begin{aligned} R_2(x, h\xi, h)^w P(x, h\xi, h)^w u_h &= R_2(x, h\xi, h)^w \phi_1(x, hD_x) P(x, h\xi, h)^w u_h + \\ & R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x)) P(x, h\xi, h)^w u_h. \end{aligned} \quad (3.122)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Remarquons tout d'abord que le fait que $\phi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ montre d'après (1.5) que,

$$\phi_1(x, hD_x)P(x, h\xi, h)^w \in \text{Op}_h^w(S(1, dx^2 + d\xi^2)), \quad (3.123)$$

ce qui induit d'après (3.118) que le symbole de Weyl semi-classique $R_4(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$R_4(x, h\xi, h)^w := R_2(x, h\xi, h)^w \phi_1(x, hD_x)P(x, h\xi, h)^w, \quad (3.124)$$

appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et vérifie,

$$R_4 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } V_2. \quad (3.125)$$

Comme l'ensemble ouvert V_2 est borné, on peut appliquer au regard de (3.114), (3.115) et (3.125) la proposition 2.3 pour montrer que la famille semi-classique $(R_4(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq h_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble,

$$V_2^c \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}),$$

qui d'après (3.115) est égal à l'ensemble vide. Ceci induit en particulier d'après (3.124) que,

$$\|R_2(x, h\xi, h)^w \phi_1(x, hD_x)P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty), \quad (3.126)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Considérons ensuite la décomposition,

$$\begin{aligned} & R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x))P(x, h\xi, h)^w \\ &= R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x))P(x, h\xi, h)^w \phi_2(x, hD_x) \\ & \quad + R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x))P(x, h\xi, h)^w (I - \phi_2(x, hD_x)). \end{aligned} \quad (3.127)$$

Comme la fonction ϕ_2 est à support compact et que d'après (3.121),

$$\text{supp} \phi_2 \cap \text{supp}(1 - \phi_1) = \emptyset,$$

le symbole de Weyl semi-classique de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x))P(x, h\xi, h)^w \phi_2(x, hD_x),$$

appartient à la classe $S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2)$, ce qui d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt et (3.114) induit que,

$$\begin{aligned} & \|R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x))P(x, h\xi, h)^w \phi_2(x, hD_x)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \quad = O(h^\infty), \end{aligned} \quad (3.128)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme la fonction ϕ_2 choisie en (3.121) est à support compact, on peut d'après (3.113) choisir une fonction $\phi_3 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que,

$$\begin{aligned} & \forall 0 < h \leq h_0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \\ & \phi_3(x)(I - \phi_2(x, hD_x))u_h(x) = (I - \phi_2(x, hD_x))u_h(x). \end{aligned} \quad (3.129)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Considérons $R_5(x, \xi, h)$ le symbole de Weyl semi-classique de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$R_5(x, h\xi, h)^w := R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x)) P(x, h\xi, h)^w \phi_3(x) (I - \phi_2(x, hD_x)). \quad (3.130)$$

Comme d'après (1.5), $P \in S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ et que la fonction $\phi_3(x)$ est à support compact, on en déduit d'après les résultats de calcul symbolique rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit et (3.118) que ce symbole R_5 appartient à la classe $S(\langle\xi\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ et que,

$$R_5 \in S(h^\infty \langle\xi\rangle^m, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } V_2. \quad (3.131)$$

On peut alors au regard de (3.114), (3.115) et (3.131) appliquer la proposition 2.3 pour démontrer que la famille semi-classique $(R_5(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq h_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble $V_2^c \cap \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) = \emptyset$, ce qui induit en particulier en utilisant (3.129) et (3.130) que,

$$\begin{aligned} & \|R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x)) P(x, h\xi, h)^w (I - \phi_2(x, hD_x)) u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= \|R_2(x, h\xi, h)^w (I - \phi_1(x, hD_x)) P(x, h\xi, h)^w \phi_3(x) (I - \phi_2(x, hD_x)) u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Enfin en utilisant l'inégalité triangulaire, les identités (3.122), (3.127) et les estimations (3.126), (3.128), (3.132), on obtient (3.120). Ceci termine la démonstration du lemme 3.3. \square

Enfinement en reprenant l'estimation (3.119), on obtient en utilisant (3.115) et le lemme 3.3 que,

$$\|P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui comme nous l'avons annoncé précédemment, termine la démonstration du théorème 1.3 dans le cas d'une annulation à un ordre fini.

3.b. Etude du cas d'une annulation à un ordre infini.

Commençons l'étude de ce second cas en rappelant que les réductions initiales (3.1) et (3.15) nous permettent de supposer que $z = 0$ et que la fonction q_0 apparaissant dans les identités (1.6), (1.7), (1.9), (1.10), (1.11), (1.12) et (1.13), est la fonction identiquement égale à 1. Nous allons recourir au lemme suivant.

Lemme 3.4. *On peut trouver un couple de points (a_1, b_1) de \mathbb{R}^2 arbitrairement proche du couple (a_0, b_0) défini en (1.8) vérifiant,*

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b,$$

tel que la courbe bicaractéristique $t \in [a_1, b_1] \mapsto \gamma(t)$ définie en (1.6) soit injective,

$$\text{Imp}_0(\gamma(a_1)) > 0 > \text{Imp}_0(\gamma(b_1)), \quad (3.133)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

et tel que si $a_0 < b_0$,

$$a \leq a_1 < a_0 < b_0 < b_1 \leq b. \quad (3.134)$$

Preuve du lemme 3.4. Remarquons tout d'abord que,

$$H_{\text{Rep}_0}(\gamma(b_0)) \neq 0. \quad (3.135)$$

En effet, si on avait $H_{\text{Rep}_0}(\gamma(b_0)) = 0$, l'unicité au problème de Cauchy,

$$\begin{cases} y'(t) = H_{\text{Rep}_0}(y(t)) \\ y(b_0) = \gamma(b_0), \end{cases} \quad (3.136)$$

dont sont solutions les applications $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t)$ et $t \in \mathbb{R} \mapsto \gamma(b_0)$ induirait que la courbe bicaractéristique γ soit constante, ce qui contredirait l'estimation (1.6). Ceci démontre (3.135) et induit que,

$$\gamma'(b_0) = H_{\text{Rep}_0}(\gamma(b_0)) \neq 0. \quad (3.137)$$

Considérons le cas où $a_0 = b_0$. Dans ce cas, l'identité (3.137) montre que l'application $t \mapsto \gamma(t)$ est injective au voisinage du point $a_0 = b_0$, ce qui nous permet d'après (1.13) de trouver un couple (a_1, b_1) de \mathbb{R}^2 arbitrairement proche du couple (a_0, b_0) vérifiant $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ et (3.133) tel que l'application,

$$t \in [a_1, b_1] \mapsto \gamma(t),$$

soit injective. Ceci démontre le lemme 3.4 dans le cas où $a_0 = b_0$. Supposons maintenant que $a_0 < b_0$. Remarquons que d'après (1.11), on a

$$\forall t \in [a_0, b_0], \text{Imp}_0(\gamma(t)) = 0. \quad (3.138)$$

Comme dans le cas que nous étudions $L_0 = b_0 - a_0 > 0$, on en déduit d'après (1.7), (1.9) et (1.10) qu'il existe $\tilde{a} \in [a, a_0[$ et $\tilde{b} \in]b_0, b]$ tels que,

$$\forall t \in [\tilde{a}, a_0], \text{Imp}_0(\gamma(t)) \geq 0 \text{ et } \forall t \in [b_0, \tilde{b}], \text{Imp}_0(\gamma(t)) \leq 0. \quad (3.139)$$

En effet d'après (1.9) et (1.10), on peut trouver $\tilde{a} \in [a, a_0[$ et $\tilde{b} \in]b_0, b]$ tels que,

$$a_0 - L_0/2 < \tilde{a} < a_0, \quad b_0 < \tilde{b} < b_0 + L_0/2, \quad \text{Imp}_0(\gamma(\tilde{a})) > 0 \text{ et } \text{Imp}_0(\gamma(\tilde{b})) < 0.$$

S'il existait un point $t_0 \in]\tilde{a}, a_0]$ vérifiant $\text{Imp}_0(\gamma(t_0)) < 0$, le fait que,

$$0 < t_0 - \tilde{a} < L_0/2,$$

serait en contradiction avec la définition de la quantité L_0 en (1.7). Ceci démontre la première inégalité de (3.139) et un raisonnement identique induit que la seconde inégalité de (3.139) est également satisfaite. Choisissons ensuite par (1.9) un point a_1 aussi proche que l'on veut du point a_0 tel que,

$$\tilde{a} \leq a_1 < a_0 \text{ et } \text{Imp}_0(\gamma(a_1)) > 0, \quad (3.140)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

et vérifions que l'application $t \in [a_1, b_0] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ est nécessairement injective. En effet, s'il existait $t_1, t_2 \in [a_1, b_0]$, $t_1 < t_2$ tels que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, l'unicité au problème de Cauchy,

$$\begin{cases} y'(t) = H_{\text{Rep}_0}(y(t)) \\ y(t_1) = \gamma(t_1), \end{cases}$$

dont sont solutions les applications $t \mapsto \gamma(t)$ et $t \mapsto \gamma(t + (t_2 - t_1))$ montrerait que la courbe bicaractéristique γ du symbole Rep_0 se prolonge de manière unique en une courbe bicaractéristique du symbole Rep_0 encore notée γ , définie sur \mathbb{R} et vérifiant,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t + (t_2 - t_1)) = \gamma(t). \quad (3.141)$$

Comme $0 < t_2 - t_1 \leq b_0 - a_1$ et que d'après (3.138), (3.139), $\text{Imp}_0(\gamma) \geq 0$ sur le segment $[\tilde{a}, b_0]$, l'identité (3.141) induirait au regard de (3.140) que,

$$\text{Imp}_0(\gamma(t)) \geq 0,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$, ce qui serait contraire à l'estimation (1.6) et démontre que l'application $t \in [a_1, b_0] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ est injective. Constatons également que d'après (3.137), on peut trouver une constante $0 < \delta < L_0$ et $b_0 + \delta \leq b$ telle que l'application $t \in [b_0 - \delta, b_0 + \delta] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ soit injective. On choisit ensuite par (1.10) un point b_1 arbitrairement proche du point b_0 tel que,

$$b_0 < b_1 \leq \min(\tilde{b}, b_0 + \delta/2) \text{ et } \text{Imp}_0(\gamma(b_1)) < 0. \quad (3.142)$$

Il suffit pour terminer la démonstration du lemme 3.4 de vérifier que l'application,

$$t \in [a_1, b_1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n},$$

est injective. Pour ce faire, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_1, t_2 \in [a_1, b_1]$, $t_1 < t_2$ tels que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Comme $0 < \delta < L_0$, l'injectivité de l'application $t \mapsto \gamma(t)$ sur les ensembles $[a_1, b_0]$ et $[b_0 - \delta, b_0 + \delta]$ montre d'après (3.140) et (3.142) que,

$$t_1 \in [a_1, b_0 - \delta[\text{ et } t_2 \in]b_0, b_1]. \quad (3.143)$$

En invoquant comme précédemment, l'unicité à un problème de Cauchy du type (3.136), on en déduit que la courbe bicaractéristique γ du symbole Rep_0 se prolonge de manière unique en une courbe bicaractéristique du symbole Rep_0 encore notée γ , définie sur \mathbb{R} et vérifiant,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \gamma(t + (t_2 - t_1)) = \gamma(t). \quad (3.144)$$

Comme d'après (3.138), (3.139), (3.140) et (3.143), $\text{Imp}_0(\gamma) \geq 0$ sur le segment $[t_1, b_0]$ de longueur strictement plus grande que la valeur de la constante δ et que d'après (3.142) et (3.143), $0 \leq b_1 - t_2 < b_1 - b_0 \leq \delta/2$, l'identité (3.144) induit que pour tout $t \in [t_2, b_1]$, $\text{Imp}_0(\gamma(t)) \geq 0$, ce qui contredit (3.142) et termine la démonstration du lemme 3.4. \square

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Choisissons par le lemme 3.4 un couple $(a_1, b_1) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a \leq a_1 < b_1 \leq b$ et (3.133) tel que l'application $t \in [a_1, b_1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ soit injective et tel que,

$$a \leq a_1 < a_0 < b_0 < b_1 \leq b,$$

si $a_0 < b_0$. Comme la courbe $t \in [a_1, b_1] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ est une courbe bicaractéristique du symbole Rep_0 , on peut appliquer la proposition 5.6 de la cinquième partie de cet article pour trouver un voisinage ouvert V_1 de l'ensemble,

$$\{(x_1, 0'; \varepsilon_n) : x_1 \in [a_1, b_1]\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.145)$$

et une transformation symplectique réelle χ de ce voisinage ouvert V_1 sur un voisinage ouvert $\chi(V_1)$ de l'ensemble $\gamma([a_1, b_1])$ dans \mathbb{R}^{2n} tels que,

$$\forall x_1 \in [a_1, b_1], \chi(x_1, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(x_1) \text{ et } \forall (x, \xi) \in V_1, \chi^*(\text{Rep}_0) = \xi_1. \quad (3.146)$$

Nous allons maintenant reprendre et détailler la discussion donnée dans [12] dans les lignes précédant la définition 26.4.9.

On définit pour tout point (x', ξ') suffisamment proche du point $(0', \varepsilon'_n)$ où,

$$0' = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } \varepsilon'_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

pour que l'inclusion suivante,

$$[a_1, b_1] \times \{(x'; 0, \xi')\} \subset V_1,$$

soit vérifiée, la quantité,

$$L(x', \xi') := \inf \{t - s : a_1 < s < t < b_1, \chi^*(\text{Imp}_0)(s, x'; 0, \xi') > 0 > \chi^*(\text{Imp}_0)(t, x'; 0, \xi')\}. \quad (3.147)$$

On obtient d'après (3.133) et (3.146) que,

$$\chi^*(\text{Imp}_0)(a_1, 0'; \varepsilon_n) > 0 > \chi^*(\text{Imp}_0)(b_1, 0'; \varepsilon_n), \quad (3.148)$$

ce qui nous permet de trouver un voisinage ouvert V_2 du point $(0', \varepsilon'_n)$ dans \mathbb{R}^{2n-2} tel que,

$$\forall (x', \xi') \in V_2, [a_1, b_1] \times \{(x'; 0, \xi')\} \subset V_1, \quad (3.149)$$

où V_1 est l'ouvert défini en (3.145), et tel que la quantité $L(x', \xi')$ soit finie pour tout $(x', \xi') \in V_2$. Considérons ensuite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de voisinages ouverts du point $(0', \varepsilon'_n)$ dans \mathbb{R}^{2n-2} qui soit décroissante au sens de l'inclusion et vérifie,

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n \subset V_2, \quad (3.150)$$

et dont la suite des diamètres vérifie,

$$\text{diam}(W_n) \rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty. \quad (3.151)$$

Notons,

$$\tilde{L}_0 := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{(x', \xi') \in W_n} L(x', \xi'). \quad (3.152)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Cette quantité \tilde{L}_0 est bien définie et est finie puisque d'après (3.147) et (3.148),

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \inf_{(x', \xi') \in W_n} L(x', \xi') \leq L(0', \varepsilon'_n) \leq b_1 - a_1 < +\infty.$$

Considérons $\delta > 0$. En utilisant que la suite des voisinages ouverts $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ du point $(0', \varepsilon'_n)$ est décroissante au sens de l'inclusion, on en déduit que la suite,

$$\left(\inf_{(x', \xi') \in W_n} L(x', \xi') \right)_{n \in \mathbb{N}},$$

est croissante et que l'on peut d'après (3.152) trouver un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que,

$$\forall n \geq n_0, \inf_{(x', \xi') \in W_n} L(x', \xi') \leq \tilde{L}_0 < \inf_{(x', \xi') \in W_n} L(x', \xi') + \frac{\delta}{2}. \quad (3.153)$$

En utilisant (3.151), on déduit de (3.147) et (3.153) que pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que le voisinage ouvert $V_\delta := W_{n_1}$ du point $(0', \varepsilon'_n)$ dans \mathbb{R}^{2n-2} soit tel que,

$$\text{diam}(V_\delta) < \delta, \quad (3.154)$$

$$\forall (x', \xi') \in V_\delta, L(x', \xi') > \tilde{L}_0 - \frac{\delta}{2}, \quad (3.155)$$

un couple (x'_δ, ξ'_δ) de l'ensemble ouvert V_δ tel que,

$$\tilde{L}_0 - \frac{\delta}{2} < L(x'_\delta, \xi'_\delta) < \tilde{L}_0 + \frac{\delta}{2}, \quad (3.156)$$

et des réels s_δ et t_δ tels que,

$$a_1 < s_\delta < t_\delta < b_1, \quad \tilde{L}_0 - \frac{\delta}{2} < L(x'_\delta, \xi'_\delta) < t_\delta - s_\delta < \tilde{L}_0 + \frac{\delta}{2} \text{ et} \\ \chi^*(\text{Imp}_0)(s_\delta, x'_\delta; 0, \xi'_\delta) > 0 > \chi^*(\text{Imp}_0)(t_\delta, x'_\delta; 0, \xi'_\delta). \quad (3.157)$$

Considérons une constante $\delta > 0$. Nous allons maintenant vérifier que (3.157) impose à la fonction $(t, x', \xi') \mapsto \chi^*(\text{Imp}_0)(t, x'; 0, \xi')$ et à ses dérivées de tous ordres par rapport aux variables x', ξ' de s'annuler au point $(t, x'_\delta; 0, \xi'_\delta)$ si,

$$s_\delta + \delta < t < t_\delta - \delta. \quad (3.158)$$

En effet, si ce n'était pas le cas, on pourrait choisir un point (x', ξ') de V_δ et $s_\delta + \delta < t < t_\delta - \delta$ tels que,

$$\chi^*(\text{Imp}_0)(t, x'; 0, \xi') \neq 0 \text{ et} \\ \chi^*(\text{Imp}_0)(s_\delta, x'; 0, \xi') > 0 > \chi^*(\text{Imp}_0)(t_\delta, x'; 0, \xi'). \quad (3.159)$$

Selon le signe de la quantité $\chi^*(\text{Imp}_0)(t, x'; 0, \xi')$, il se produirait ainsi d'après (3.159) un changement de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives sur l'un des deux intervalles (s_δ, t) ou (t, t_δ) pour la fonction,

$$s \mapsto \chi^*(\text{Imp}_0)(s, x'; 0, \xi').$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Comme d'après (3.157) et (3.158),

$$t - s_\delta < t_\delta - s_\delta - \delta < \tilde{L}_0 - \frac{\delta}{2} \text{ et } t_\delta - t = (t_\delta - s_\delta) + (s_\delta - t) < t_\delta - s_\delta - \delta < \tilde{L}_0 - \frac{\delta}{2},$$

on obtiendrait d'après la définition (3.147) et (3.159) que,

$$L(x', \xi') < \tilde{L}_0 - \frac{\delta}{2},$$

ce qui contredirait l'estimation (3.155). On en déduit donc que,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n-1}, \forall s_\delta + \delta < t < t_\delta - \delta, \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta [\chi^*(\text{Imp}_0)](t, x'_\delta; 0, \xi'_\delta) = 0. \quad (3.160)$$

Si on choisit ensuite une suite $(\delta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que $\delta_j \rightarrow 0$ lorsque $j \rightarrow +\infty$, on peut d'après ce qui précède trouver pour tout $j \in \mathbb{N}$ un voisinage ouvert V_{δ_j} du point $(0', \varepsilon'_n)$ dans \mathbb{R}^{2n-2} , des éléments $(x'_{\delta_j}, \xi'_{\delta_j}) \in V_{\delta_j}$ et $(s_{\delta_j}, t_{\delta_j}) \in [a_1, b_1]^2$ tels que,

$$\text{diam}(V_{\delta_j}) < \delta_j, \quad a_1 < s_{\delta_j} < t_{\delta_j} < b_1, \quad \tilde{L}_0 - \frac{\delta_j}{2} < t_{\delta_j} - s_{\delta_j} < \tilde{L}_0 + \frac{\delta_j}{2}, \quad (3.161)$$

$$\chi^*(\text{Imp}_0)(s_{\delta_j}, x'_{\delta_j}; 0, \xi'_{\delta_j}) > 0 > \chi^*(\text{Imp}_0)(t_{\delta_j}, x'_{\delta_j}; 0, \xi'_{\delta_j}), \quad (3.162)$$

et,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n-1}, \forall s_{\delta_j} + \delta_j < t < t_{\delta_j} - \delta_j, \quad \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta [\chi^*(\text{Imp}_0)](t, x'_{\delta_j}; 0, \xi'_{\delta_j}) = 0. \quad (3.163)$$

Comme tous les réels s_{δ_j} et t_{δ_j} appartiennent au segment compact $[a_1, b_1]$, on peut quitte à extraire une sous-suite supposer que,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} s_{\delta_j} = \tilde{a}_0 \text{ et } \lim_{j \rightarrow +\infty} t_{\delta_j} = \tilde{b}_0. \quad (3.164)$$

On obtient alors d'après (3.161), (3.163) et (3.164) que,

$$a_1 \leq \tilde{a}_0 \leq \tilde{b}_0 \leq b_1, \quad \tilde{L}_0 = \tilde{b}_0 - \tilde{a}_0 \text{ et } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n-1}, \quad \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta [\chi^*(\text{Imp}_0)](t, 0'; \varepsilon_n) = 0 \text{ si } \tilde{a}_0 < t < \tilde{b}_0, \quad (3.165)$$

car $(x'_{\delta_j}, \xi'_{\delta_j}) \rightarrow (0', \varepsilon'_n)$ lorsque $j \rightarrow +\infty$ puisque d'après (3.161),

$$\text{diam}(V_{\delta_j}) \rightarrow 0 \text{ lorsque } j \rightarrow +\infty.$$

Nous allons maintenant séparer deux cas.

• **Premier cas.** Considérons le premier cas où $\tilde{a}_0 < \tilde{b}_0$ et vérifions que dans ce cas la courbe $t \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0] \mapsto \tilde{\gamma}(t) := (t, 0'; \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ est une *courbe bicaractéristique unidimensionnelle* (cette notion est définie à la définition 26.4.9 de [12]) du symbole χ^*p_0 i.e. une courbe qui vérifie les identités,

$$\forall t \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], \quad (\chi^*p_0)(\tilde{\gamma}(t)) = 0 \text{ et } \tilde{\gamma}'(t) = c(t)H_{\chi^*p_0}(\tilde{\gamma}(t)) \neq 0, \quad (3.166)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où c désigne une fonction $C^\infty([\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], \mathbb{C})$. En effet, notons que d'après (3.145), (3.146) et (3.165), on a

$$\forall t \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], \tilde{\gamma}'(t) = (1, 0'; 0) = H_{\chi^*(\text{Rep}_0)}(\tilde{\gamma}(t)) \text{ et } (\chi^*p_0)(\tilde{\gamma}(t)) = 0. \quad (3.167)$$

Comme d'après (3.165),

$$\forall t \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], H_{\chi^*(\text{Imp}_0)}(\tilde{\gamma}(t)) = \frac{\partial(\chi^*(\text{Imp}_0))}{\partial \xi_1}(\tilde{\gamma}(t)) \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad (3.168)$$

on déduit de (3.167) que (3.166) est vérifiée pour,

$$\forall t \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], c(t) := \left[1 + i \frac{\partial(\chi^*(\text{Imp}_0))}{\partial \xi_1}(\tilde{\gamma}(t)) \right]^{-1}.$$

On peut alors dans ce premier cas appliquer au regard de (3.165) la proposition 5.7 de la cinquième partie de cet article pour trouver un voisinage ouvert V_3 de l'ensemble,

$$\Gamma := \{(x_1, 0'; \varepsilon_n) : x_1 \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0]\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.169)$$

une transformation symplectique réelle $\tilde{\chi}$ de ce voisinage ouvert V_3 sur un autre voisinage ouvert V_4 du segment Γ tel que,

$$V_4 \subset V_1, \quad (3.170)$$

où V_1 est l'ensemble ouvert défini en (3.145) et une fonction $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas sur le segment Γ telles que,

$$\forall x_1 \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], \tilde{\chi}(x_1, 0'; \varepsilon_n) = (x_1, 0'; \varepsilon_n) \text{ et} \\ \tilde{\chi}^*(A(\chi^*p_0)) = \xi_1 + if(x, \xi'), \quad (3.171)$$

sur l'ensemble ouvert V_3 , où f désigne une fonction C^∞ à valeurs réelles qui est indépendante de la variable ξ_1 . Précisons quelques faits. Si on relit la démonstration de la proposition 5.7 donnée dans la cinquième partie de cet article dans notre cadre d'application, on constate tout d'abord que comme on a déjà d'après (3.146),

$$\forall (x, \xi) \in V_1, \chi^*(\text{Rep}_0)(x, \xi) = \xi_1,$$

il n'est pas nécessaire d'user de la proposition 5.6 lors du début de cette démonstration. On peut donc commencer la relecture de la démonstration de cette proposition 5.7 à partir de (5.137) en supposant que la fonction q qui intervient dans (5.137) est identiquement égale à 1 et que la fonction g est égale à la fonction $\chi^*(\text{Imp}_0)$. On substitue donc l'identité suivante à l'identité (5.137) de la démonstration de la proposition 5.7,

$$\forall (x, \xi) \in V_1, (\chi^*p_0)(x, \xi) = \xi_1 + i\chi^*(\text{Imp}_0)(x, \xi). \quad (3.172)$$

On peut ensuite en suivant la démonstration de cette proposition 5.7 et en utilisant (3.167) appliquer le théorème de préparation de Malgrange pour trouver deux fonctions h et r appartenant à l'espace des fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ dont la

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

seconde est indépendante de la variable ξ_1 qui permettent d'écrire comme en (5.146) la décomposition suivante,

$$\xi_1 = h(x, \xi)(\xi_1 + i\chi^*(\text{Imp}_0)) + r(x, \xi'), \quad (3.173)$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ . Constatons ensuite que d'après (3.165), la fonction $\chi^*(\text{Imp}_0)$ vérifie,

$$\forall (M, \alpha, \beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{n-1} \times \mathbb{N}^{n-1}, \forall x_1 \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], \\ \partial_{x_1}^M \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta [\chi^*(\text{Imp}_0)](x_1, 0'; \varepsilon_n) = 0. \quad (3.174)$$

Si on différencie (3.173), on obtient l'identité,

$$d\xi_1 = h(x, \xi)[d\xi_1 + id(\chi^*(\text{Imp}_0))] + dh(x, \xi)(\xi_1 + i\chi^*(\text{Imp}_0)) \\ + dr(x, \xi'), \quad (3.175)$$

qui évaluée sur le segment Γ montre d'après (3.167), (3.169), (3.174) et l'indépendance de la fonction r par rapport à la variable ξ_1 que,

$$h = \left(1 + i \frac{\partial[\chi^*(\text{Imp}_0)]}{\partial \xi_1}\right)^{-1} \text{ et } dr = 0 \text{ sur le segment } \Gamma. \quad (3.176)$$

Plus précisément, remarquons également que si on dérive l'identité (3.173) par rapport aux variables x, ξ , on obtient d'après l'indépendance de la fonction r par rapport à la variable ξ_1 et (3.174) que,

$$\forall \gamma \in \mathbb{N}^{2n}, \partial_{x, \xi}^\gamma r = 0 \text{ sur le segment } \Gamma. \quad (3.177)$$

La suite de la démonstration de la proposition 5.7 montre que la transformation symplectique $\tilde{\chi}$ qui vérifie (3.171) préserve identiquement la direction x_1 puisque d'après (5.151),

$$y_1 = x_1, \quad (3.178)$$

si on note $\tilde{\chi}(y, \eta) = (x, \xi)$ et que d'après (5.161) et (5.162) les fonctions A et f apparaissant dans l'identité (3.171) sont définies par,

$$A := h \text{ sur un voisinage ouvert du segment } \Gamma, \quad (3.179)$$

et,

$$f(y, \eta) := -\text{Im}r(\tilde{\chi}(y, \eta)), \quad (3.180)$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ . Comme d'après (3.171), la transformation symplectique $\tilde{\chi}$ laisse invariant point par point le segment Γ , on déduit de (3.177) et (3.180) que la fonction f s'annule à un *ordre infini* sur le segment Γ . On obtient d'après (3.176) et (3.179) que,

$$A = \left(1 + i \frac{\partial[\chi^*(\text{Imp}_0)]}{\partial \xi_1}\right)^{-1} \neq 0 \text{ sur le segment } \Gamma. \quad (3.181)$$

Comme d'après (3.171), on a

$$f(y, \eta') = \tilde{\chi}^*(\text{Re}A \chi^*(\text{Imp}_0) + \text{Im}A \chi^*(\text{Rep}_0))(y, \eta) \text{ et} \\ \eta_1 = \tilde{\chi}^*(\text{Re}A \chi^*(\text{Rep}_0) - \text{Im}A \chi^*(\text{Imp}_0))(y, \eta),$$

pour tout $(y, \eta) \in V_3$, on en déduit d'après (3.181) que,

$$\begin{aligned} & f(y, \eta') \\ &= \tilde{\chi}^*[(\operatorname{Re}A + (\operatorname{Re}A)^{-1}(\operatorname{Im}A)^2)\chi^*(\operatorname{Imp}_0)](y, \eta) + \tilde{\chi}^*(\operatorname{Im}A(\operatorname{Re}A)^{-1})\eta_1 \\ &= \tilde{\chi}^*[(\operatorname{Re}A + (\operatorname{Re}A)^{-1}(\operatorname{Im}A)^2)\chi^*(\operatorname{Imp}_0)](y; 0, \eta'), \end{aligned} \quad (3.182)$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ car la fonction f est indépendante de la variable η_1 . Comme d'après (3.181), $\operatorname{Re}A > 0$ sur un voisinage ouvert du segment Γ et que d'après (3.178), la direction $y_1 = x_1$ reste invariante par la transformation symplectique $\tilde{\chi}$, on déduit de (3.161), (3.162), (3.164), (3.182) et du fait que $(x'_{\delta_j}, \xi'_{\delta_j}) \rightarrow (0', \varepsilon'_n)$ lorsque $j \rightarrow +\infty$ que sur tout voisinage ouvert convexe dans la direction y_1 du segment Γ , on peut trouver un intervalle dans la direction y_1 sur lequel la fonction f change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives lorsque la variable y_1 croît.

• **Second cas.** Considérons maintenant le cas où dans (3.165), $\tilde{a}_0 = \tilde{b}_0$. En utilisant (3.146), (3.161), (3.162), (3.164) et le fait que $(x'_{\delta_j}, \xi'_{\delta_j}) \rightarrow (0', \varepsilon'_n)$ lorsque $j \rightarrow +\infty$, on obtient que,

$$(\chi^*p_0)(\tilde{\gamma}(\tilde{a}_0)) = 0 \text{ et } H_{\operatorname{Re}(\chi^*p_0)}(\tilde{\gamma}(\tilde{a}_0)) = (1, 0, \dots, 0) \neq 0, \quad (3.183)$$

si $\tilde{\gamma}(t) := (t, 0'; \varepsilon_n)$ pour $t \in [a_1, b_1]$. On peut alors d'après (3.183) appliquer le théorème 5.1 de la cinquième partie de cet article pour trouver une transformation symplectique réelle $\tilde{\chi}$ d'un voisinage ouvert du point $(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)$ sur un voisinage ouvert du point $(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)$ et une fonction $A \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que,

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n) &= (\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n), \quad A(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n) \neq 0 \text{ et} \\ &\tilde{\chi}^*(A(\chi^*p_0)) = \xi_1 + if(x, \xi'), \end{aligned} \quad (3.184)$$

sur un voisinage ouvert du point $(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)$, où f désigne une fonction C^∞ à valeurs réelles qui est indépendante de la variable ξ_1 . Précisons également dans ce cas quelques faits. Si on relit la démonstration du théorème 5.1 dans notre cadre d'application, on constate tout d'abord qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser le théorème 21.1.6 de [12] pour obtenir (5.2) au début de cette démonstration puisque l'on a déjà d'après (3.146) l'identité,

$$\forall (x, \xi) \in V_1, \quad \chi^*(\operatorname{Rep}_0)(x, \xi) = \xi_1. \quad (3.185)$$

On s'aperçoit également comme précédemment que la transformation symplectique $\tilde{\chi}$ que nous construisons préserve identiquement la direction x_1 puisque d'après (5.8), on prend lors du choix des nouvelles coordonnées symplectiques locales,

$$y_1 = x_1, \quad (3.186)$$

si on note $\tilde{\chi}(y, \eta) = (x, \xi)$. Remarquons maintenant que l'identité (5.6) de la démonstration du théorème 5.1 montre que la fonction A définie en (3.184) vérifie d'après (3.185) que,

$$A(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n) = \left[1 + i \frac{\partial \chi^*(\operatorname{Imp}_0)}{\partial \xi_1}(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n) \right]^{-1}. \quad (3.187)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

On constate ensuite au regard de (3.187) que l'identité (3.184) permet d'écrire de la même manière qu'en (3.182) que,

$$f(y, \eta') = \tilde{\chi}^*[(\operatorname{Re}A + (\operatorname{Re}A)^{-1}(\operatorname{Im}A)^2)\chi^*(\operatorname{Imp}_0)](y; 0, \eta'), \quad (3.188)$$

sur un voisinage ouvert du point $(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)$. Comme d'après (3.187),

$$\operatorname{Re}A > 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)$ et que la direction $y_1 = x_1$ est préservée d'après (3.186) par la transformation symplectique $\tilde{\chi}$, on déduit de (3.161), (3.162), (3.164), (3.188) et du fait que $(x'_{\delta_j}, \xi'_{\delta_j}) \rightarrow (0', \varepsilon'_n)$ lorsque $j \rightarrow +\infty$ que sur tout voisinage ouvert convexe dans la direction y_1 du point $(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)$, on peut trouver un intervalle dans la direction y_1 sur lequel la fonction f change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives lorsque la variable y_1 croît.

Prenons quelques lignes pour récapituler les différents points que nous venons de démontrer dans cette section 3.b qui étudie le cas d'une annulation à un ordre infini. Mentionnons tout d'abord que l'on peut trouver un couple de points (a_1, b_1) de \mathbb{R}^2 arbitrairement proche du couple (a_0, b_0) défini en (1.8) vérifiant,

$$a \leq a_1 < b_1 \leq b,$$

$$a \leq a_1 < a_0 < b_0 < b_1 \leq b \text{ si } a_0 < b_0, \quad (3.189)$$

et,

$$\operatorname{Imp}_0(\gamma(a_1)) > 0 > \operatorname{Imp}_0(\gamma(b_1)). \quad (3.190)$$

On a vu ensuite en (3.165) et dans les deux cas que nous venons de distinguer que nous pouvions trouver un couple $(\tilde{a}_0, \tilde{b}_0)$ de \mathbb{R}^2 vérifiant,

$$a_1 \leq \tilde{a}_0 \leq \tilde{b}_0 \leq b_1, \quad (3.191)$$

une transformation symplectique réelle χ_0 d'un voisinage ouvert V_5 du segment,

$$\Gamma = \{(x_1, 0'; \varepsilon_n) : x_1 \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0]\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (3.192)$$

éventuellement réduit à un point, sur un voisinage ouvert de l'ensemble $\gamma([\tilde{a}_0, \tilde{b}_0])$ dans \mathbb{R}^{2n} telle que d'après (3.146), (3.171) et (3.184),

$$\forall x_1 \in [\tilde{a}_0, \tilde{b}_0], \quad \chi_0(x_1, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(x_1), \quad (3.193)$$

et une fonction $\tilde{A} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telle que,

$$0 \notin \tilde{A}(\chi_0(\Gamma)) \text{ et } \chi_0^*(\tilde{A}p_0) = \xi_1 + if(x, \xi'), \quad (3.194)$$

sur un voisinage ouvert borné V_6 du segment Γ tel que,

$$V_6 \subset V_5, \quad (3.195)$$

où la fonction f désigne une fonction C^∞ à valeurs réelles qui est indépendante de la variable ξ_1 telle que sur tout voisinage ouvert du segment Γ qui peut

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

être éventuellement réduit à un point, on puisse trouver un intervalle dans la direction x_1 sur lequel cette fonction f change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives lorsque la variable x_1 croît. Notons également que dans le cas où $\tilde{a}_0 = \tilde{b}_0$, les identités (3.183) et (3.184) montrent que la fonction f s'annule sur l'ensemble $\Gamma = \{(\tilde{a}_0, 0'; \varepsilon_n)\}$ et que dans le cas où $\tilde{a}_0 < \tilde{b}_0$, nous avons vérifié que la fonction f s'annule à un *ordre infini* sur le segment Γ .

Considérons maintenant l'opérateur pseudo-différentiel,

$$\tilde{Q}(x, h\xi, h)^w := \tilde{A}(x, h\xi)^w P(x, h\xi, h)^w. \quad (3.196)$$

D'après (1.5) et les résultats classiques de calcul symbolique rappelés en appendice à la fin de ce manuscrit, le symbole de Weyl semi-classique $\tilde{Q}(x, \xi, h)$ définissant l'opérateur (3.196) appartient à la classe de symboles $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique,

$$\tilde{Q}(x, \xi, h) \sim \tilde{A}(x, \xi)p_0(x, \xi) + \sum_{j=1}^{+\infty} \tilde{Q}_j(x, \xi)h^j, \quad (3.197)$$

où les fonctions \tilde{Q}_j désignent des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique. On peut choisir $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, [0, 1])$ une fonction vérifiant,

$$\text{supp } g \subset \chi_0(V_6) \text{ et } g = 1 \text{ sur l'ensemble } \chi_0(V_7), \quad (3.198)$$

où V_6 désigne le voisinage ouvert borné du segment Γ défini en (3.195) et où V_7 désigne un nouveau voisinage ouvert du segment Γ tel que,

$$\overline{V_7} \subset V_6. \quad (3.199)$$

On considère ensuite \tilde{A}_h , \tilde{B}_h et \tilde{C}_h trois opérateurs de Fourier intégraux semi-classiques d'ordre 0, proprement supportés et elliptiques. On suppose que l'opérateur de Fourier intégral \tilde{A}_h est associé à la sous-variété lagrangienne de \mathbb{R}^{4n} définie localement par le graphe de la transformation symplectique réelle χ_0^{-1} et que les opérateurs \tilde{B}_h et \tilde{C}_h sont eux associés à la sous-variété lagrangienne de \mathbb{R}^{4n} définie localement par le graphe de la transformation symplectique réelle χ_0 . On peut d'après une version semi-classique du théorème d'Egorov (voir section 1.2.2 dans [14]) et (3.198) choisir ces trois opérateurs de Fourier intégraux pour que les trois points suivants soient vérifiés.

(i)

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \sup_{0 < h \leq 1} \{ \|\tilde{A}_h\|_{\mathcal{L}(H^l)}, \|\tilde{B}_h\|_{\mathcal{L}(H^l)}, \|\tilde{C}_h\|_{\mathcal{L}(H^l)} \} < +\infty, \quad (3.200)$$

où $\mathcal{L}(H^l)$ désigne l'espace vectoriel normé des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Sobolev H^l .

(ii) Le symbole de Weyl semi-classique $s(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$s(x, h\xi, h)^w := \tilde{A}_h g(x, hD_x) \tilde{B}_h, \quad (3.201)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où la notation $g(x, hD_x)$ désigne la quantification semi-classique standard du symbole $g(x, \xi)$, admet un développement asymptotique semi-classique dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ de la forme,

$$\sum_{j=0}^{+\infty} s_j(x, \xi) h^j, \quad (3.202)$$

où les fonctions s_j sont des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique, à support compact tels que pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\text{supp} s_j \subset V_6, \quad (3.203)$$

et tels que,

$$s_0 = 1 \text{ et } s_j = 0 \text{ pour tout } j \geq 1 \text{ sur l'ensemble ouvert } V_7. \quad (3.204)$$

(iii) Il existe un symbole $R(x, \xi, h)$ appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tel que,

$$R \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2), \quad (3.205)$$

sur un voisinage ouvert du compact $\overline{\chi_0(V_6)}$ et,

$$\tilde{C}_h \tilde{A}_h = I + R(x, h\xi, h)^w. \quad (3.206)$$

Sous ces hypothèses, le théorème d'Egorov montre que l'opérateur pseudo-différentiel semi-classique,

$$\tilde{q}(x, hD_x, h) := \tilde{A}_h \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h, \quad (3.207)$$

est défini en quantification standard semi-classique à partir d'un symbole,

$$\tilde{q}(x, \xi, h),$$

appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui d'après (3.194), (3.197), (3.199), (3.201), (3.202) et (3.204), admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$\tilde{q}(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \tilde{q}_j(x, \xi) h^j, \quad (3.208)$$

où les fonctions \tilde{q}_j désignent des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique tels que,

$$\tilde{q}_0(x, \xi) = \xi_1 + if(x, \xi') \text{ sur l'ensemble ouvert } V_7. \quad (3.209)$$

D'après les hypothèses vérifiées par la fonction f , on peut appliquer le théorème 4.1 de la quatrième partie de cet article. Le résultat de ce théorème nous permet de trouver pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout voisinage ouvert V du segment Γ une

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

constante $0 < h_0 \leq 1$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que,

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \\ \bar{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et } \|\tilde{q}(x, hD_x, h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N), \end{aligned} \quad (3.210)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme d'après (3.202) et (3.204), le symbole s est elliptique dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ sur l'ensemble ouvert V_7 , on peut trouver deux symboles $S_1(x, \xi, h)$ et $S_2(x, \xi, h)$ dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$S_1(x, h\xi, h)^w s(x, h\xi, h)^w = I + S_2(x, h\xi, h)^w, \quad (3.211)$$

et,

$$S_2 \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2) \text{ sur l'ensemble ouvert } V_7. \quad (3.212)$$

On en déduit alors en utilisant le théorème de Calderón-Vaillancourt, l'inégalité triangulaire, (3.200), (3.201), (3.210) et (3.211) que,

$$\begin{aligned} 1 &= \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|S_1(x, h\xi, h)^w \tilde{A}_h g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|S_2(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(\|\tilde{A}_h g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) + \|S_2(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(\|g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}) + \|S_2(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (3.213)$$

On remarque ensuite que si le voisinage ouvert V du segment Γ choisi en (3.210) est pris suffisamment petit pour que,

$$\bar{V} \subset V_7, \quad (3.214)$$

où V_7 est le voisinage ouvert du segment Γ défini en (3.199), la proposition 2.3 montre au regard de (3.210), (3.212) et (3.214) que l'ensemble $V_7^c \cap \bar{V} = \emptyset$ est un ensemble de concentration semi-classique pour la famille semi-classique $(S_2(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq h_0}$, ce qui induit en particulier que,

$$\|S_2(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.215)$$

Comme d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt, (3.198), (3.200) et (3.210), on a

$$\begin{aligned} \|g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(1) \text{ et} \\ \forall l \in \mathbb{N}, \|g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \end{aligned} \quad (3.216)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, on en déduit d'après (3.213), (3.215) et (3.216) que l'on peut trouver des constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ et $0 < \tilde{h}_0 \leq h_0$ telles que,

$$\forall 0 < h \leq \tilde{h}_0, 0 < c_1 \leq \|g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c_2 < +\infty. \quad (3.217)$$

Si on considère à présent la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définie par,

$$v_h(x) := \frac{g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h(x)}{\|g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}, \quad (3.218)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

ce qui est licite d'après (3.217), cette famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq \bar{h}_0}$ vérifie d'après (3.216), (3.217) et (3.218),

$$\|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|v_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.219)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ et, d'après (3.207), (3.210), (3.217) et (3.128),

$$\|\tilde{A}_h \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.220)$$

Remarquons d'après (3.198) et (3.218) que cette famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq \bar{h}_0}$ est supportée dans un même compact K . Nous allons maintenant vérifier que la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq \bar{h}_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble $\chi_0(\bar{V})$,

$$\chi_0(\bar{V}) = \text{FS}_\infty((v_h)_{0 < h \leq \bar{h}_0}). \quad (3.221)$$

Pour ce faire, considérons ψ un symbole de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ vérifiant,

$$\psi = 0 \text{ sur un voisinage ouvert de l'ensemble } \chi_0(\bar{V}). \quad (3.222)$$

Le théorème d'Egorov, (3.202), (3.204), (3.214) et (3.222) montrent que le symbole de Weyl semi-classique $t(x, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel,

$$t(x, h\xi, h)^w := \tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h, \quad (3.223)$$

appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et vérifie,

$$t \in S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2), \quad (3.224)$$

sur un voisinage ouvert de l'ensemble compact \bar{V} . On peut alors appliquer au regard de (3.210) et (3.224) la proposition 2.3 pour démontrer que la famille semi-classique $(t(x, h\xi, h)^w u_h)_{0 < h \leq \bar{h}_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble vide, ce qui induit en particulier que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|t(x, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

i.e. d'après (3.223),

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|\tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \quad (3.225)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Si on utilise maintenant le théorème de Calderón-Vaillancourt, l'inégalité triangulaire, (3.200), (3.206) et (3.225), on obtient que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & \|\psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} \\ & \leq \|\tilde{C}_h \tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} \\ & \quad + \|R(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} \\ & = O(\|\tilde{A}_h \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l}) \\ & \quad + \|R(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} \\ & = O(h^\infty) + \|R(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l}. \end{aligned} \quad (3.226)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Si on remarque ensuite que (3.198) et (3.205) montrent que l'opérateur pseudo-différentiel,

$$R(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x),$$

appartient à la classe $\text{Op}_h^w(S(h^\infty, dx^2 + d\xi^2))$, on obtient d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt, (3.200) et (3.210) que,

$$\begin{aligned} \forall l \in \mathbb{N}, \quad & \|R(x, h\xi, h)^w \psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} \\ & = O(h^\infty \|\tilde{B}_h u_h\|_{H^l}) = O(h^\infty \|u_h\|_{H^l}) = O(h^\infty), \end{aligned} \quad (3.227)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En reprenant (3.226), on obtient d'après (3.227) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \quad \|\psi(x, h\xi, h)^w g(x, hD_x) \tilde{B}_h u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui d'après (3.217) et (3.218) démontre (3.221). Nous allons maintenant démontrer que,

$$\|\tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.228)$$

Pour ce faire, remarquons tout d'abord que la proposition 2.3 montre au regard de (3.219) et (3.221) que,

$$\text{FS}_\infty((\tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}) \subset \text{FS}_\infty((v_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0}) = \chi_0(\overline{V}). \quad (3.229)$$

Comme le symbole de Weyl semi-classique \tilde{Q} de l'opérateur pseudo-différentiel (3.196) appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, le théorème de Calderón-Vaillancourt montre d'après (3.219) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|\tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, ce qui nous permet d'appliquer à nouveau la proposition 2.3 au regard de (3.199), (3.205), (3.214) et (3.229) pour obtenir que la famille semi-classique,

$$(R(x, h\xi, h)^w \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h)_{0 < h \leq \tilde{h}_0},$$

se concentre semi-classiquement dans l'ensemble $\overline{\chi_0(\overline{V}_6)^c} \cap \chi_0(\overline{V}) = \emptyset$, ce qui induit en particulier que,

$$\|R(x, h\xi, h)^w \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (3.230)$$

On déduit ainsi de l'inégalité triangulaire, (3.200), (3.206), (3.220) et (3.230) que,

$$\begin{aligned} & \|\tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq \|\tilde{C}_h \tilde{A}_h \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|R(x, h\xi, h)^w \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ & = O(\|\tilde{A}_h \tilde{Q}(x, h\xi, h)^w v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + h^\infty) \\ & = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (3.231)$$

On déduit alors de (3.193), (3.196), (3.218), (3.219), (3.221) et (3.231) le résultat suivant.

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Lemme 3.5. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout voisinage ouvert V de l'ensemble $\gamma([\tilde{a}_0, \tilde{b}_0])$, il existe une constante $h_0 > 0$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ supportées dans un même compact K telles que,*

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}),$$

$$\bar{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et } \|\tilde{A}(x, h\xi)^w P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

En utilisant ensuite la propriété d'ellipticité du symbole \tilde{A} dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ sur un voisinage ouvert de l'ensemble compact $\gamma([\tilde{a}_0, \tilde{b}_0])$ donnée par (3.192), (3.193) et (3.194), on en déduit en usant du lemme précédent et en reprenant point par point l'étude menée à l'étape 4 de la section 3.a que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout voisinage ouvert V de l'ensemble compact $\gamma([\tilde{a}_0, \tilde{b}_0])$, il existe une constante $h_0 > 0$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}), \quad (3.232)$$

$$\bar{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et } \|P(x, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N), \quad (3.233)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme lors de notre construction, on peut choisir à la ligne précédant (3.189) le couple (a_1, b_1) de \mathbb{R}^2 arbitrairement proche du couple (a_0, b_0) défini en (1.8), on obtient d'après (3.191), (3.232) et (3.233) le résultat du théorème 1.3 dans le cas d'une annulation à un ordre infini. Ceci termine la démonstration du théorème 1.3 dans le cas d'une annulation à un ordre infini ainsi que la démonstration générale de ce théorème 1.3.

4. Un résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques pour un opérateur modèle.

L'objet de cette quatrième section est de donner la démonstration d'un résultat d'existence de quasi-modes semi-classiques pour un modèle d'opérateur pseudo-différentiel semi-classique (Théorème 4.1) dont nous avons usé lors de la section précédente pour démontrer le théorème 1.3 dans le cas d'une annulation à un ordre infini.

Théorème 4.1. *Considérons $F(x, \xi, h)$ un symbole défini sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n \times [0, 1]$ où $n \geq 2$, appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui admet dans cette classe un développement asymptotique semi-classique,*

$$F(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} F_j(x, \xi) h^j, \quad (4.1)$$

où les fonctions $F_j(x, \xi)$ désignent des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont supposés indépendants du paramètre semi-classique h . On suppose que,

$$F_0(x, \xi) = \xi_1 + i f(x, \xi') \text{ où } \xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n), \quad (4.2)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert de l'ensemble,

$$\Gamma := \{(x_1, 0'; 0, \xi'_0) : a_0 \leq x_1 \leq b_0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \text{ avec } a_0 \leq b_0, \\ 0' = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n-1}, \xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, \quad (4.3)$$

et où f est une fonction C^∞ à valeurs réelles, indépendante de la variable ξ_1 qui s'annule sur le segment Γ . Dans le cas où $a_0 < b_0$, on suppose de plus que l'annulation de la fonction f sur le segment Γ se fait à un ordre infini. On suppose également que sur tout voisinage ouvert convexe dans la direction x_1 du segment Γ , on peut trouver un intervalle dans cette direction x_1 tel que la fonction f change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives lorsque la coordonnée x_1 croît. Sous ces hypothèses, on peut pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout voisinage ouvert V du segment Γ trouver une constante $0 < h_0 \leq 1$ et une famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \\ \|F(x, hD_x, h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

et telles que ce quasi-mode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ se concentre semi-classiquement dans l'ensemble \bar{V} dans le sens précisé par la définition 1.2,

$$\bar{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}).$$

La démonstration de ce théorème 4.1 s'appuie et s'inspire très fortement de la démonstration du théorème 26.4.7' que donne L.Hörmander dans [12]. Nous allons reprendre et adapter dans un cadre semi-classique et pour des symboles ne possédant plus de propriétés d'homogénéité la construction de quasi-modes qu'il propose dans cette démonstration du théorème 26.4.7'. On s'attachera également dans notre démonstration à préciser dans quelles zones de l'espace des phases se concentrent semi-classiquement (au sens précisé par la définition 1.2) ces quasi-modes semi-classiques.

Remarquons tout d'abord que comme les opérateurs pseudo-différentiels obtenus par la quantification standard semi-classique $F(x, hD_x, h)$ et par la quantification de Weyl semi-classique $F(x, h\xi, h)^w$ d'un symbole $F(x, \xi, h)$ de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ vérifiant (4.1) ont le même symbole principal semi-classique, on peut substituer l'opérateur $F(x, h\xi, h)^w$ à l'opérateur $F(x, hD_x, h)$ dans l'énoncé du théorème 4.1. Les énoncés du théorème 4.1 en quantification standard semi-classique i.e. avec l'opérateur $F(x, hD_x, h)$ et en quantification de Weyl semi-classique i.e. avec l'opérateur $F(x, h\xi, h)^w$ sont exactement équivalents. Cette remarque induit que le résultat du théorème 4.1 est également vérifié pour une valeur nulle du paramètre ξ'_0 apparaissant dans (4.3). Il suffit pour démontrer ce résultat d'utiliser le résultat du théorème 4.1 énoncé en quantification de Weyl semi-classique pour une valeur non nulle du paramètre ξ'_0 , d'utiliser la propriété d'invariance symplectique de la quantification de Weyl (Théorème 18.5.9 dans [12]),

$$F(x; h\xi_1, h\xi' - \xi'_0, h)^w = \tilde{U}_h^{-1} F(x, h\xi, h)^w \tilde{U}_h,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où \tilde{U}_h désigne l'opérateur métaplectique,

$$\tilde{U}_h u(x) = e^{-\frac{i}{h} x' \cdot \xi'_0} u(x),$$

associé à la transformation symplectique affine,

$$(x, \xi) \mapsto (x; \xi_1, \xi' - h^{-1} \xi'_0),$$

et de s'assurer que le quasi-mode $(\tilde{U}_h u_h)_{0 < h \leq h_0}$ vérifie,

$$\|\tilde{U}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|\tilde{U}_h u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}),$$

$$\overline{V} = \text{FS}_\infty((\tilde{U}_h u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et } \|F(x, h\xi, h)^w \tilde{U}_h u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, si $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ désigne le quasi-mode vérifiant,

$$\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \quad \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}),$$

$$\overline{V}_0 = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et } \|F(x; h\xi_1, h\xi' - \xi'_0, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^N),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ et $V_0 = V + (0; 0, \xi'_0)$, où $N \in \mathbb{N}$ et où V désigne un voisinage ouvert du segment,

$$\{(x_1, 0'; 0, 0') : a_0 \leq x_1 \leq b_0\}.$$

Nous utilisons dans la démonstration du théorème 1.3 le résultat de ce théorème 4.1 pour une valeur non nulle du paramètre ξ'_0 et nous allons démontrer ce résultat sous cette hypothèse afin de pouvoir utiliser directement le remarquable lemme 26.4.14 de [12] pour exhiber la fonction de phase complexe permettant la construction du quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$. Mentionnons enfin que l'on pourrait aussi adapter la démonstration de ce lemme 26.4.14 pour traiter directement le cas général $\xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ sans recourir aux arguments précédents pour obtenir le résultat du théorème 4.1 dans le cas $\xi'_0 = 0$.

Preuve du théorème 4.1. Précisons tout d'abord quelques conventions de notation dont nous userons au cours des lignes à venir. Nous utiliserons les notations x' et ξ' pour désigner respectivement,

$$x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } \xi' = (\xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n-1},$$

si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Rappelons également que la dimension n que nous considérons ici est supérieure ou égale à 2. On commence par effectuer une préparation du symbole.

4.a. Préparation du symbole.

Considérons un entier $N \in \mathbb{N}$ et commençons par remarquer que comme la fonction $f(x, \xi')$ est indépendante de la variable ξ_1 et qu'elle s'annule sur le segment Γ , on peut d'après (4.3) appliquer le théorème de préparation de Malgrange (Théorème 7.5.6 de [12]) pour trouver en tout point $(y, \eta) \in \Gamma$, une constante $\varepsilon_{y, \eta} > 0$ et, des fonctions $q_{y, \eta}$ et $r_{y, \eta}$ qui sont C^∞ sur un voisinage

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

ouvert du point $(y, \eta) \in \Gamma$ telles que la fonction $r_{y,\eta}$ soit indépendante de la variable ξ_1 et que,

$$F_1(x, \xi) = q_{y,\eta}(x, \xi)(\xi_1 + if(x, \xi')) + r_{y,\eta}(x, \xi'), \quad (4.4)$$

si $|(x; \xi') - (y; \eta')| < \varepsilon_{y,\eta}$ et $|\xi_1 - \eta_1| < \varepsilon_{y,\eta}$. En utilisant ensuite la compacité du segment Γ défini en (4.3), on peut extraire un sous-recouvrement fini d'ouverts,

$$\Gamma \subset \bigcup_{j=1}^{\tilde{N}} \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : |(x; \xi') - (y_j; \eta'_j)| < \varepsilon_{y_j, \eta_j} \text{ et } |\xi_1 - (\eta_j)_1| < \varepsilon_{y_j, \eta_j}\},$$

du recouvrement obtenu par les ouverts associés en (4.4) aux points $(y, \eta) \in \Gamma$. Considérons pour tout $j = 1, \dots, \tilde{N}$ l'ensemble,

$$\tilde{W}_j := \{(x; \xi') \in \mathbb{R}^{2n-1} : |(x; \xi') - (y_j; \eta'_j)| < \varepsilon_{y_j, \eta_j}\}.$$

On peut écrire pour tout $j = 1, \dots, \tilde{N}$ une décomposition du type (4.4) au voisinage du point $(y_j, \eta_j) \in \Gamma$,

$$F_1(x, \xi) = \tilde{q}_j(x, \xi)(\xi_1 + if(x, \xi')) + \tilde{r}_j(x, \xi'),$$

si $|(x; \xi') - (y_j; \eta'_j)| < \varepsilon_{y_j, \eta_j}$ et $|\xi_1| < \varepsilon_{y_j, \eta_j}$ puisque d'après (4.3), $(\eta_j)_1 = 0$ si $(y_j, \eta_j) \in \Gamma$. Considérons ensuite une partition de l'unité C^∞ ,

$$\chi_1(x, \xi') + \dots + \chi_{\tilde{N}}(x, \xi') = 1,$$

sur un voisinage ouvert de l'ensemble $[a_0, b_0] \times \{(0', \xi'_0)\}$ dans \mathbb{R}^{2n-1} telle que pour tout $1 \leq j \leq \tilde{N}$, $\text{supp}\chi_j \subset \tilde{W}_j$ et, χ_0 une fonction $C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\text{supp}\chi_0 \subset [-\varepsilon_{y_j, \eta_j}, \varepsilon_{y_j, \eta_j}]$ pour tout $j = 1, \dots, \tilde{N}$ et $\chi_0 = 1$ sur un voisinage ouvert de 0. Si on pose,

$$q_1(x, \xi) := \chi_0(\xi_1) \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \chi_j(x, \xi') \tilde{q}_j(x, \xi) \text{ et } r_1(x, \xi') := \sum_{j=1}^{\tilde{N}} \chi_j(x, \xi') \tilde{r}_j(x, \xi'),$$

on obtient deux symboles q_1 et r_1 indépendants du paramètre semi-classique h qui appartiennent à la classe de symboles $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ dont le second est indépendant de la variable ξ_1 et qui vérifient,

$$F_1(x, \xi) = q_1(x, \xi)(\xi_1 + if(x, \xi')) + r_1(x, \xi'), \quad (4.5)$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ . Considérons maintenant l'opérateur pseudo-différentiel défini en quantification standard par,

$$s(x, hD_x, h) := (I - hq_1(x, hD_x))F(x, hD_x, h).$$

D'après (4.1) et les résultats classiques de calcul symbolique donnant le développement asymptotique semi-classique du symbole définissant en quantification standard semi-classique l'opérateur pseudo-différentiel $q_1(x, hD_x)F(x, hD_x, h)$, on

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

peut trouver des symboles s_j , $2 \leq j \leq N$ indépendants du paramètre semi-classique qui appartiennent à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$t_N(x, \xi, h) := s(x, \xi, h) - [F_0(x, \xi) + hF_1(x, \xi) - hq_1(x, \xi)F_0(x, \xi) + h^2s_2(x, \xi) + \dots + h^N s_N(x, \xi)] \in S(h^{N+1}, dx^2 + d\xi^2). \quad (4.6)$$

D'après (4.2) et (4.5), on a

$$t_N(x, \xi, h) = s(x, \xi, h) - [\xi_1 + if(x, \xi') + hr_1(x, \xi') + h^2s_2(x, \xi) + \dots + h^N s_N(x, \xi)],$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ . On peut ensuite en procédant comme précédemment trouver des symboles $q_2(x, \xi)$ et $r_2(x, \xi')$ appartenant à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui soient tous les deux indépendants du paramètre semi-classique et dont le second est indépendant de la variable ξ_1 tels que,

$$s_2(x, \xi) = q_2(x, \xi)(\xi_1 + if(x, \xi')) + r_2(x, \xi'), \quad (4.7)$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ . En considérant cette fois l'opérateur pseudo-différentiel,

$$\tilde{s}(x, hD_x, h) := (I - h^2q_2(x, hD_x))(I - hq_1(x, hD_x))F(x, hD_x, h),$$

on obtient d'après (4.1), (4.6) et les résultats classiques de calcul symbolique invoqués précédemment qu'il existe des symboles \tilde{s}_j , $3 \leq j \leq N$ dans la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ indépendants du paramètre semi-classique tels que,

$$\tilde{t}_N(x, \xi, h) := \tilde{s}(x, \xi, h) - [F_0(x, \xi) + hF_1(x, \xi) - hq_1(x, \xi)F_0(x, \xi) + h^2s_2(x, \xi) - h^2F_0(x, \xi)q_2(x, \xi) + h^3\tilde{s}_3(x, \xi) + \dots + h^N \tilde{s}_N(x, \xi)] \in S(h^{N+1}, dx^2 + d\xi^2).$$

En utilisant (4.2), (4.5) et (4.7), on en déduit que,

$$\tilde{t}_N(x, \xi, h) = \tilde{s}(x, \xi, h) - [\xi_1 + if(x, \xi') + hr_1(x, \xi') + h^2r_2(x, \xi') + h^3\tilde{s}_3(x, \xi) + \dots + h^N \tilde{s}_N(x, \xi)],$$

sur un voisinage ouvert du segment Γ . En itérant ce procédé jusqu'à l'ordre N , on en déduit que l'on peut trouver des symboles q_1, \dots, q_N , indépendants du paramètre semi-classique qui appartiennent à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et tels que le symbole $G(x, \xi, h)$ définissant en quantification standard semi-classique l'opérateur pseudo-différentiel,

$$G(x, hD_x, h) := (I - h^N q_N(x, hD_x)) \dots (I - hq_1(x, hD_x))F(x, hD_x, h), \quad (4.8)$$

appartienne à la classe de symboles $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ et admette un développement asymptotique semi-classique de la forme,

$$G(x, \xi, h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} G_j(x, \xi)h^j, \quad (4.9)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où les fonctions G_j sont des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants du paramètre semi-classique et qui vérifient,

$$G_0(x, \xi) = \xi_1 + if(x, \xi') \text{ et } G_j(x, \xi) = g_j(x, \xi') \text{ si } 1 \leq j \leq N, \quad (4.10)$$

sur Ω_1 un voisinage ouvert borné et convexe dans la direction x_1 du segment Γ , où les fonctions g_j apparaissant dans (4.10) désignent des fonctions qui sont indépendantes de la variable ξ_1 . Quitte à considérer des prolongements particuliers des fonctions f, g_1, \dots, g_N sur l'espace \mathbb{R}^{2n-1} tout entier, nous supposons à partir de maintenant que ces fonctions appartiennent à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n-1}, \mathbb{C})$ définissant ainsi des symboles de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ qui sont indépendants de la variable ξ_1 et du paramètre semi-classique h . Nous allons également supposer que l'on puisse trouver un voisinage ouvert suffisamment petit du segment Γ tel que la fonction f vérifie sur ce voisinage,

$$f(x, \xi') = 0 \implies \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \xi') \geq 0. \quad (4.11)$$

En effet dans le cas où tel ne serait pas le cas, on pourrait alors trouver un point $(\tilde{x}_0; 0, \tilde{\xi}'_0)$ de \mathbb{R}^{2n} aussi proche que l'on veut du segment Γ tel que,

$$f(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}'_0) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}'_0) < 0. \quad (4.12)$$

Considérons alors $p_0(x, \xi) = \xi_1 + if(x, \xi')$ et $\tilde{\gamma} = (\tilde{x}_0; 0, \tilde{\xi}'_0)$. Comme d'après (4.12),

$$p_0(\tilde{\gamma}) = 0 \text{ et } \{\text{Rep}_0, \text{Imp}_0\}(\tilde{\gamma}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_0, \tilde{\xi}'_0) < 0,$$

on en déduit que la fonction $t \mapsto \text{Imp}_0(\gamma(t))$ admet un changement de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à l'ordre 1 en 0 si,

$$t \mapsto \gamma(t),$$

désigne la bicaractéristique orientée du symbole Rep_0 passant par le point $\tilde{\gamma}$ en $t = 0$. On peut alors appliquer à l'opérateur $F(x, hD_x, h)$ le résultat du théorème 1.3 que nous avons déjà démontré dans la section précédente de cet article dans le cas d'une *annulation à un ordre fini* et ce, bien sûr, sans recourir au résultat du théorème 4.1 que nous cherchons à démontrer ici. Ceci est bien licite puisque le symbole principal en quantification de Weyl semi-classique de l'opérateur $F(x, hD_x, h)$ est le symbole $F_0(x, \xi)$ qui est égal d'après (4.2) à la fonction $\xi_1 + if(x, \xi')$ sur un voisinage ouvert du segment Γ . On en déduit qu'il existe une constante $0 < h_0 \leq 1$ et un quasi-mode semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant,

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+ \text{ et} \\ \|F(x, hD_x, h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= O(h^N) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \end{aligned}$$

qui se concentre semi-classiquement dans un voisinage arbitrairement fixé dans l'espace des phases \mathbb{R}^{2n} du point $\tilde{\gamma}$. Comme ce point $\tilde{\gamma}$ peut, dans le cas où

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

l'implication (4.11) est violée dans tout voisinage ouvert du segment Γ , être choisi arbitrairement proche du segment Γ , on obtient dans ce cas particulier le résultat du théorème 4.1. Nous supposons donc dans ce qui suit que l'implication (4.11) est vérifiée sur un voisinage ouvert W_1 du segment Γ que l'on peut d'après (4.3) supposer de la forme,

$$W_1 := V_1 \times V_2 \times \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - (0, \xi'_0)| < \tilde{\delta}\} \text{ tel que} \\ \overline{V_1} \times \overline{V_2} \times \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi - (0, \xi'_0)| \leq \tilde{\delta}\} \subset \Omega_1, \quad (4.13)$$

où V_1 est un voisinage ouvert borné du segment $[a_0, b_0]$, V_2 est un voisinage ouvert borné de 0 dans \mathbb{R}^{n-1} , $\tilde{\delta}$ est une constante strictement positive choisie suffisamment petite et où Ω_1 est le voisinage ouvert du segment Γ défini en (4.10).

Pour des raisons de commodité et pour adopter les notations qui sont celles de [12], nous allons changer nos notations et désigner jusqu'à nouvel ordre, t , la variable $x_1 \in \mathbb{R}$, et x , les variables $(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Les nouvelles notations pour les variables d'espace que nous considérons à partir de maintenant sont donc, $(t, x) \in \mathbb{R}^n$.

On considère dans ce qui suit un entier $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$. Nous allons maintenant utiliser le remarquable lemme 26.4.14 de [12] pour exhiber une fonction de phase complexe que nous utiliserons lors de la construction de nos quasi-modes. Mentionnons que par rapport aux notations qui sont celles du théorème 26.4.7' et du lemme 26.4.14 de [12], la fonction f qui intervient dans ces résultats correspond dans nos notations à la fonction $-f$. Comme dans le cas que nous étudions, l'implication (4.11) est vérifiée sur le voisinage ouvert W_1 du segment Γ , on constate au regard des hypothèses du théorème 4.1 que les hypothèses du lemme 26.4.14 sont vérifiées. On peut alors appliquer ce lemme pour trouver les éléments suivants.

(4.14) Une courbe C^∞ , $t \in [a', b'] \mapsto (t, y(t); 0, \eta(t)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ avec $a' < b'$, que l'on peut choisir arbitrairement proche du segment Γ . On fait ce choix de sorte que,

$$\{(t, y(t); 0, \eta(t)) : t \in [a', b']\} \subset W_1, \quad \forall t \in [a', b'], \quad \eta(t) \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \text{ et} \\ \forall t \in [a', b'], \quad |(-if(t, y(t), \eta(t)), \eta(t) - \xi'_0)| < \tilde{\delta}/2, \quad (4.15)$$

ce qui est possible d'après (4.3), (4.13) et les hypothèses du théorème 4.1 qui stipulent que la fonction f s'annule sur le segment Γ . La constante strictement positive $\tilde{\delta}$ apparaissant dans (4.15) est définie en (4.13).

(4.16) Une fonction $w_0 \in C^\infty([a', b'], \mathbb{C})$ vérifiant,

$$\forall t \in [a', b'], \quad \text{Im}w_0(t) \geq 0, \quad \text{Im}w_0(a') > 0, \quad \text{Im}w_0(b') > 0 \text{ et} \\ \exists c' \in]a', b'[, \quad \text{Im}w_0(c') = 0.$$

(4.17) Des fonctions $w_\alpha \in C^\infty([a', b'], \mathbb{C})$, $2 \leq |\alpha| \leq M$, telles que la matrice,

$$(\text{Im}w_{j,k}(t) - \delta_{j,k}/2)_{1 \leq j,k \leq n-1}, \quad (4.18)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

soit définie positive pour tout $a' \leq t \leq b'$, et telles que si on pose,

$$w(t, x) := w_0(t) + (x - y(t)) \cdot \eta(t) + \sum_{2 \leq |\alpha| \leq M} w_\alpha(t) \frac{(x - y(t))^\alpha}{|\alpha|!}, \quad (4.19)$$

la fonction de phase complexe w vérifie l'estimation,

$$\frac{\partial w}{\partial t}(t, x) + i \sum_{|\beta| \leq M} \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial x}(t, x) - \eta(t)\right)^\beta}{\beta!} = O(|x - y(t)|^{M+1}), \quad (4.20)$$

uniformément sur tout compact de $[a', b'] \times \mathbb{R}^{n-1}$, si on note comme dans le lemme 26.4.14 de [12], $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ où $\alpha_j \in \{1, \dots, n-1\}$, les indices des fonctions w_α apparaissant dans la somme du membre de droite de (4.19) et,

$$|\alpha| := s.$$

Notons que d'après la construction du lemme 26.4.14 de [12], ces fonctions w_α sont symétriques par rapport à leurs indices au sens où elles sont invariantes par permutation des s -uplets, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$.

Pour continuer, nous allons avoir besoin du lemme suivant qui est une adaptation du lemme 26.4.16 de [12].

Lemme 4.2. *Considérons $q(x, \xi, h)$ un symbole de la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$ où $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n-2}$, $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, w une fonction C^∞ sur un voisinage de l'ensemble $\text{supp}\phi$ dans \mathbb{R}^{n-1} et $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. On suppose que les fonctions ϕ et w sont indépendantes du paramètre semi-classique,*

$$\begin{cases} \forall x \in \text{supp}\phi, x \neq y, \text{Im}w(x) > 0, \text{Im}w(y) = 0, \\ \forall x \in \text{supp}\phi, w'(x) \neq 0, w'(y) = \eta \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\} \text{ et que} \\ \text{la forme quadratique } \text{Im}w''(y) \text{ est définie positive.} \end{cases} \quad (4.21)$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a l'estimation suivante,

$$\begin{aligned} \left\| q(x, hD_x, h)(\phi e^{\frac{i}{h}w}) - \sum_{|\beta| < k} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(hD_x - \eta)^\beta}{\beta!} (\phi e^{\frac{i}{h}w}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \\ = O(h^{\frac{k}{2}}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Preuve du lemme 4.2. On suit dans cette preuve la démonstration du lemme 26.4.16 donnée par L.Hörmander dans [12] en l'adaptant à notre cadre d'étude semi-classique où aucune hypothèse d'homogénéité relative au symbole q n'est requise. Commençons par démontrer que pour tout indice $\beta \in \mathbb{N}^{n-1}$,

$$\left\| (hD_x - \eta)^\beta (\phi e^{\frac{i}{h}w}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = O(h^{\frac{|\beta|}{2}}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (4.23)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

En effet, constatons tout d'abord que,

$$\begin{aligned} |(hD_x - \eta)^\beta(\phi e^{\frac{i}{h}w})| &= |(hD_x)^\beta(\phi e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle})| \\ &= h^{|\beta|} |D_x^\beta(\phi e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle})|, \end{aligned} \quad (4.24)$$

si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^{n-1} . Il s'agit d'étudier les termes qui apparaissent lorsque l'on développe par la formule de Leibniz l'expression,

$$h^{|\beta|} D_x^\beta(\phi e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle}). \quad (4.25)$$

Dans le cas où on dérive exactement j fois le facteur exponentiel $e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle}$, ces dérivations font sortir un facteur h^{-j} ainsi que j facteurs du type,

$$i \left(\frac{\partial w}{\partial x_l} - \eta_l \right) \text{ où } l \in \{1, \dots, n-1\}, \quad (4.26)$$

qui peuvent être ensuite dériver. On peut donc écrire tout terme qui apparaît dans le développement de l'expression (4.25) pour lequel on dérive exactement j fois le facteur exponentiel $e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle}$ sous la forme,

$$h^{|\beta|-j} g(x) e^{\frac{i}{h}w(x) - \frac{i}{h}x \cdot \eta}, \quad (4.27)$$

où g est une fonction C^∞ à support compact dans $\text{supp}\phi$ qui est indépendante du paramètre semi-classique. Notons que d'après (4.21), les facteurs (4.26) s'annulent tous en y . Séparons deux cas.

- Si $j \leq |\beta|/2$, le terme (4.27) qui apparaît dans le développement de l'expression (4.25) a une norme L^∞ dans \mathbb{R}^{n-1} qui est un $O(h^{|\beta|-j})$ i.e. un $O(h^{\frac{|\beta|}{2}})$ lorsque $h \rightarrow 0^+$ car d'une part, $j \leq |\beta|/2$ et que d'autre part sur le compact $\text{supp}\phi$, on a

$$|e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle}| = e^{-\frac{\text{Im}w}{h}} \leq 1, \quad (4.28)$$

puisque d'après (4.21), $\eta \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $\text{Im}w \geq 0$ sur $\text{supp}\phi$.

- Si $j > |\beta|/2$, les $|\beta| - j$ dérivées restantes qui ne dérivent pas exactement le facteur exponentiel $e^{\frac{i}{h}w - \frac{i}{h}\langle \cdot, \eta \rangle}$ peuvent produire une réduction de l'ordre du zéro en y dû à la présence des j facteurs (4.26) d'au plus $|\beta| - j$. La fonction g du terme (4.27) s'annule donc en y à un ordre supérieur ou égal à,

$$j - (|\beta| - j) = 2j - |\beta|.$$

En utilisant la compacité du support de la fonction g et une formule de Taylor avec reste intégral au point y pour cette même fonction g , on en déduit au regard de (4.28) que la norme L^∞ dans \mathbb{R}^{n-1} du terme (4.27) peut être bornée par une constante strictement positive indépendante du paramètre semi-classique multipliée par le terme,

$$h^{|\beta|-j} \sup_{x \in \text{supp}\phi} [|x - y|^{2j-|\beta|} e^{-\frac{\text{Im}w(x)}{h}}].$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Or, comme d'après (4.21), $\text{Im}w \geq 0$ sur $\text{supp}\phi$, $\text{Im}w(y) = 0$ et $\text{Im}w'(y) = 0$, on en déduit que,

$$\text{Im}w(x) = \frac{1}{2}\text{Im}w''(y).(x - y)^2 + o(|x - y|^2) \text{ lorsque } x \rightarrow y. \quad (4.29)$$

En utilisant ensuite que d'après (4.21), la forme quadratique $\text{Im}w''(y)$ est définie positive, la compacité du support de la fonction ϕ et le fait que,

$$\forall x \in \text{supp}\phi, x \neq y, \text{Im}w(x) > 0,$$

on en déduit d'après (4.29) qu'il existe une constante $c_1 > 0$ telle que,

$$\forall x \in \text{supp}\phi, \text{Im}w(x) \geq c_1|x - y|^2. \quad (4.30)$$

On obtient à partir de (4.30) que pour tout $x \in \text{supp}\phi$ et $0 < h \leq 1$,

$$\begin{aligned} h^{|\beta|-j}|x - y|^{2j-|\beta|}e^{-\frac{\text{Im}w(x)}{h}} &\leq h^{|\beta|-j}|x - y|^{2j-|\beta|}e^{-\frac{c_1}{h}|x-y|^2} \\ &\leq h^{\frac{|\beta|}{2}} \sup_{u \in \mathbb{R}^{n-1}} [|u|^{2j-|\beta|}e^{-c_1|u|^2}] \\ &= O(h^{\frac{|\beta|}{2}}), \end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ car $j > |\beta|/2$, ce qui au regard de (4.24) et (4.25) démontre l'estimation (4.23). Considérons maintenant,

$$u_h(x) := \phi(x)e^{\frac{i}{h}w(x)}. \quad (4.31)$$

On va dans les deux étapes à venir étudier la décroissance du module de la transformée de Fourier de cette fonction u_h dans certains domaines de fréquence,

$$\widehat{u}_h(\xi) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x)e^{\frac{i}{h}w(x)-ix.\xi} dx.$$

Etape 1. L'objet de cette première étape est de démontrer l'estimation suivante,

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{N}, \exists C_\nu > 0, \forall 0 < h \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2, \\ |\widehat{u}_h(\xi)| \leq \frac{C_\nu}{(|\xi| + h^{-1})^\nu}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Commençons par écrire que,

$$\widehat{u}_h(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x)e^{i(|\xi|+h^{-1})\varphi_{\xi,h}(x)} dx, \quad (4.33)$$

où la fonction de phase complexe $\varphi_{\xi,h}$ est donnée par l'expression,

$$\varphi_{\xi,h}(x) = \frac{w(x) - x.h\xi}{1 + h|\xi|}. \quad (4.34)$$

Cette fonction de phase $\varphi_{\xi,h}$ reste confinée dans un ensemble borné de l'espace des fonctions $C^{\nu+1}(\text{supp}\phi)$ si $0 < h \leq 1$ et $|h\xi - \eta| \geq |\eta|/2$, et vérifie d'après

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

(4.21), $\text{Im}\varphi_{\xi,h} \geq 0$ sur $\text{supp}\phi$ si $0 < h \leq 1$ et $|h\xi - \eta| \geq |\eta|/2$. Montrons qu'il existe une constante $c_2 > 0$ telle que,

$$\forall 0 < h \leq 1, \forall x \in \text{supp}\phi, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2, \\ \Delta(x, \xi, h) := |\varphi'_{\xi,h}(x)|^2 + \text{Im}\varphi_{\xi,h}(x) \geq c_2 > 0. \quad (4.35)$$

D'après (4.34), on a

$$\Delta(x, \xi, h) = \frac{|w'(x) - h\xi|^2}{(1 + h|\xi|)^2} + \frac{\text{Im}w(x)}{1 + h|\xi|}. \quad (4.36)$$

Comme pour tout $x \in \text{supp}\phi$,

$$\frac{|w'(x) - h\xi|^2}{(1 + h|\xi|)^2} \geq \frac{h|\xi| \left(h|\xi| - 2 \sup_{x \in \text{supp}\phi} |w'(x)| \right)}{(1 + h|\xi|)^2},$$

et que l'ensemble $\text{supp}\phi$ est un compact, on en déduit qu'il existe des constantes strictement positives c_3 et c_4 telles que,

$$h|\xi| > c_3 \implies \frac{h|\xi| \left(h|\xi| - 2 \sup_{x \in \text{supp}\phi} |w'(x)| \right)}{(1 + h|\xi|)^2} \geq c_4 > 0,$$

ce qui induit d'après (4.30) et (4.36) que,

$$\forall 0 < h \leq 1, \forall x \in \text{supp}\phi, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, h|\xi| > c_3 \implies \Delta(x, \xi, h) \geq c_4 > 0. \quad (4.37)$$

D'autre part, comme pour tout $x \in \text{supp}\phi$,

$$\frac{|w'(x) - h\xi|}{1 + h|\xi|} \geq \frac{\inf_{x \in \text{supp}\phi} |w'(x)| - h|\xi|}{1 + h|\xi|},$$

on en déduit au regard de (4.21) et de la compacité de l'ensemble $\text{supp}\phi$ qu'il existe des constantes strictement positives c_5 et c_6 telles que,

$$c_5 < c_3 \text{ et } h|\xi| < c_5 \implies \frac{\inf_{x \in \text{supp}\phi} |w'(x)| - h|\xi|}{1 + h|\xi|} \geq c_6 > 0.$$

Il s'ensuit d'après (4.30) et (4.36) que,

$$\forall 0 < h \leq 1, \forall x \in \text{supp}\phi, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, h|\xi| < c_5 \implies \Delta(x, \xi, h) \geq c_6^2 > 0. \quad (4.38)$$

En utilisant maintenant que d'après (4.21), la fonction,

$$(u, x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} \mapsto \frac{|w'(x) - u|^2}{(1 + |u|)^2} + \frac{\text{Im}w(x)}{1 + |u|},$$

ne s'annule pas sur le compact,

$$\{(u, x) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}^{n-1} : c_5 \leq |u| \leq c_3, |u - \eta| \geq |\eta|/2, x \in \text{supp}\phi\},$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

on déduit de (4.36), (4.37) et (4.38) que l'estimation (4.35) est vérifiée. On peut alors appliquer le théorème 7.7.1 de [12] à l'intégrale (4.33) avec le paramètre,

$$(|\xi| + h^{-1}),$$

pour obtenir au regard de (4.35) l'estimation (4.32).

Etape 2. L'objet de cette deuxième étape est de démontrer l'estimation suivante,

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \exists C_\nu > 0, \forall 0 < h \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^{n-1}, |h\xi - \eta| < |\eta|/2, \\ |\widehat{u}_h(\xi)| \leq C_\nu h^\nu |h\xi - \eta|^{-2\nu}. \quad (4.39)$$

Considérons pour ce faire la nouvelle fonction de phase complexe,

$$\varphi_{\xi,h}(x) := w(x) - x.h\xi. \quad (4.40)$$

On peut écrire (4.33) sous la forme,

$$\widehat{u}_h(\xi) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x) e^{\frac{i}{h}\varphi_{\xi,h}(x)} dx. \quad (4.41)$$

Comme

$$|h\xi| \leq |h\xi - \eta| + |\eta| \leq \frac{3}{2}|\eta|,$$

si $|h\xi - \eta| < |\eta|/2$, la fonction de phase $\varphi_{\xi,h}$ définie en (4.40) reste confinée dans un ensemble borné de l'espace des fonctions $C^{\nu+1}(\text{supp}\phi)$ si,

$$0 < h \leq 1 \text{ et } |h\xi - \eta| < |\eta|/2.$$

Commençons par démontrer qu'il existe une constante $c_7 > 0$ telle que pour tout $x \in \text{supp}\phi$, $0 < h \leq 1$ et $|h\xi - \eta| < |\eta|/2$,

$$|h\xi - \eta|^2 \leq |h\xi - \eta|^2 + |x - y|^2 \leq c_7(|\varphi'_{\xi,h}(x)|^2 + \text{Im}\varphi_{\xi,h}(x)). \quad (4.42)$$

Notons tout d'abord que d'après (4.30) et (4.40), on a

$$\forall x \in \text{supp}\phi, \text{Im}\varphi_{\xi,h}(x) = \text{Im}w(x) \geq c_1|x - y|^2. \quad (4.43)$$

D'autre part comme d'après (4.21), $w'(y) = \eta$, on obtient d'après (4.40) que,

$$\varphi'_{\xi,h}(x) = w'(x) - h\xi = \eta - h\xi + O(|x - y|) \text{ lorsque } x \rightarrow y.$$

On en déduit qu'il existe une constante $c_8 > 0$ telle que pour tout $x \in \text{supp}\phi$, $0 < h \leq 1$ et $|h\xi - \eta| < |\eta|/2$,

$$|h\xi - \eta| \leq |\varphi'_{\xi,h}(x)| + c_8|x - y|, \quad (4.44)$$

car l'ensemble $\text{supp}\phi$ est compact. Il s'ensuit d'après (4.43) et (4.44) que pour tout $x \in \text{supp}\phi$, $0 < h \leq 1$ et $|h\xi - \eta| < |\eta|/2$,

$$(2c_8^2 + 1)|x - y|^2 + |h\xi - \eta|^2 \leq \frac{2c_8^2 + 1}{c_1} \text{Im}\varphi_{\xi,h}(x) + 2|\varphi'_{\xi,h}(x)|^2 + 2c_8^2|x - y|^2,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

i.e.,

$$|h\xi - \eta|^2 \leq |h\xi - \eta|^2 + |x - y|^2 \leq \frac{2c_8^2 + 1}{c_1} \operatorname{Im} \varphi_{\xi, h}(x) + 2|\varphi'_{\xi, h}(x)|^2,$$

ce qui démontre l'estimation (4.42). Une nouvelle application du théorème 7.7.1 de [12] pour l'intégrale (4.41) avec le paramètre h^{-1} permet alors d'après (4.42) d'obtenir l'estimation (4.39).

On étudie maintenant la quantité,

$$q(x, hD_x, h)(\phi e^{\frac{i}{h}w}) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix \cdot \xi} q(x, h\xi, h) \widehat{u}_h(\xi) d\xi. \quad (4.45)$$

Comme par hypothèse le symbole q appartient à la classe $S(1, dx^2 + d\xi^2)$, l'estimation (4.32) induit que,

$$\left\| \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} q(x, h\xi, h) \widehat{u}_h(\xi) d\xi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = O(h^\infty), \quad (4.46)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. On utilise ensuite la formule de Taylor avec reste intégral pour écrire que,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| < |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} q(x, h\xi, h) \widehat{u}_h(\xi) d\xi \\ &= \sum_{|\beta| < k} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| < |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(h\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \widehat{u}_h(\xi) d\xi \\ &+ r(x, h), \end{aligned} \quad (4.47)$$

où,

$$\begin{aligned} r(x, h) &= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| < |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} \\ &\times k \left(\int_0^1 (1-t)^{k-1} \sum_{|\beta|=k} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, (1-t)\eta + t h\xi, h) \frac{(h\xi - \eta)^\beta}{\beta!} dt \right) \widehat{u}_h(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.48)$$

En utilisant à nouveau que $q \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$, ainsi que l'estimation (4.39) pour l'indice $\nu = [k/2]$ et l'identité (4.48), on obtient l'existence d'une constante $c_k > 0$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $0 < h \leq 1$,

$$\begin{aligned} |r(x, h)| &\leq c_k \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| < |\eta|/2\}} h^{[k/2]} |h\xi - \eta|^{k-2[k/2]} d\xi \\ &\leq c_k (2^{-1}|\eta|)^{k-2[k/2]} h^{[k/2]} m(\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| < |\eta|/2\}) \\ &\leq 2^{n-1} c_k (2^{-1}|\eta|)^{k-2[k/2]+n-1} h^{[k/2]-n+1}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

où la notation $[y]$ désigne la partie entière du nombre réel y , ce qui induit que,

$$\|r(x, h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = O(h^{\frac{k}{2}-n}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (4.50)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Comme $q \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$, l'estimation (4.32) induit que,

$$\left\| \sum_{|\beta| < k} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(h\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \widehat{u}_h(\xi) d\xi \right\|_{L^\infty} = O(h^\infty), \quad (4.51)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En écrivant,

$$\begin{aligned} \sum_{|\beta| < k} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(hD_x - \eta)^\beta}{\beta!} (\phi e^{\frac{i}{h}w}) \\ = \sum_{|\beta| < k} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{ix \cdot \xi} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(h\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \widehat{u}_h(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

et, en découpant les intégrales apparaissant dans les membres de droite de (4.45) et de l'identité précédente selon les deux domaines de fréquence,

$$\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| < |\eta|/2\} \text{ et } \{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2\},$$

on obtient d'après (4.46), (4.47), (4.50) et (4.51) que,

$$\begin{aligned} & \left\| q(x, hD_x, h) (\phi e^{\frac{i}{h}w}) - \sum_{|\beta| < k} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(hD_x - \eta)^\beta}{\beta!} (\phi e^{\frac{i}{h}w}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \\ & \leq \|r(x, h)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \\ & \quad + \left\| \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} q(x, h\xi, h) \widehat{u}_h(\xi) d\xi \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} \\ & \quad + \left\| \sum_{|\beta| < k} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\{\xi \in \mathbb{R}^{n-1} : |h\xi - \eta| \geq |\eta|/2\}} e^{ix \cdot \xi} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(h\xi - \eta)^\beta}{\beta!} \widehat{u}_h(\xi) d\xi \right\|_{L^\infty} \\ & = O(h^{\frac{k}{2} - n}), \end{aligned} \quad (4.52)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Cette estimation (4.52) est plus faible que l'estimation (4.22) que nous voulons démontrer mais si on utilise cette estimation (4.52) pour l'indice $k + 2n$, on obtient que,

$$\left\| q(x, hD_x, h) (\phi e^{\frac{i}{h}w}) - \sum_{|\beta| < k+2n} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(hD_x - \eta)^\beta}{\beta!} (\phi e^{\frac{i}{h}w}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = O(h^{\frac{k}{2}}), \quad (4.53)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Il suffit alors pour obtenir l'estimation (4.22) d'établir l'estimation,

$$\left\| \sum_{k \leq |\beta| < k+2n} \frac{\partial^\beta q}{\partial \xi^\beta}(x, \eta, h) \frac{(hD_x - \eta)^\beta}{\beta!} (\phi e^{\frac{i}{h}w}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{n-1})} = O(h^{\frac{k}{2}}),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, qui est une conséquence de l'estimation (4.23) et du fait que $q \in S(1, dx^2 + d\xi^2)$. Ceci termine la preuve du lemme 4.2. \square

4.b. Construction d'une famille semi-classique.

Nous allons maintenant procéder à la construction proprement dite des quasi-modes semi-classiques. Commençons par remarquer que comme d'après (4.14), (4.15) et (4.19), on a pour tout $(t, x) \in [a', b'] \times V_2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}w(t, x) &= \operatorname{Im}w_0(t) + \frac{1}{2}|x - y(t)|^2 \\ &+ \sum_{\substack{\alpha=(j,k) \\ 1 \leq j, k \leq n-1}} \left[\operatorname{Im}w_{j,k}(t) - \frac{\delta_{j,k}}{2} \right] \cdot (x - y(t))^\alpha + \sum_{3 \leq |\alpha| \leq M} \operatorname{Im}w_\alpha(t) \frac{(x - y(t))^\alpha}{|\alpha|!}, \end{aligned}$$

et que la matrice (4.18) est définie positive pour tout $a' \leq t \leq b'$, on peut trouver une constante $c_9 > 0$ telle que pour tout $(t, x) \in [a', b'] \times V_2$,

$$\operatorname{Im}w(t, x) \geq \operatorname{Im}w_0(t) + \frac{1}{2}|x - y(t)|^2 - c_9|x - y(t)|^3. \quad (4.54)$$

Remarquons ensuite que d'après (4.19), on a

$$\forall t \in [a', b'], \quad d_x w(t, y(t)) = \eta(t). \quad (4.55)$$

On déduit alors au regard de (4.15) et (4.55) que l'on peut trouver un voisinage ouvert Ω_2 du compact $\{(t, y(t)) : t \in [a', b']\}$ dans \mathbb{R}^n contenu dans l'ensemble $V_1 \times V_2$ défini en (4.13),

$$\{(t, y(t)) : t \in [a', b']\} \subset \Omega_2 \subset V_1 \times V_2, \quad (4.56)$$

tel que,

$$\forall (t, x) \in \Omega_2, \quad d_x w(t, x) \neq 0 \text{ et } c_9|x - y(t)| \leq \frac{1}{4}. \quad (4.57)$$

Si on considère maintenant l'ouvert,

$$W := \Omega_2 \times \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n : |(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| < \tilde{\delta}\}, \quad (4.58)$$

on obtient d'après (4.13) et (4.56) que,

$$W \subset W_1. \quad (4.59)$$

Constatons d'après (4.16) que l'on peut trouver deux constantes strictement positives ε et c_{10} telles que,

$$\forall t \in [a', a' + \varepsilon] \cup [b' - \varepsilon, b'], \quad \operatorname{Im}w_0(t) \geq c_{10} > 0, \quad (4.60)$$

et,

$$a' + \varepsilon \leq c' \leq b' - \varepsilon, \quad (4.61)$$

où c' est le réel défini en (4.16). On peut alors d'après (4.60) trouver une fonction de troncature $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ telle que,

$$\operatorname{supp}\chi \subset \Omega_2 \cap ([a', b'] \times V_2), \quad (4.62)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où V_2 est le voisinage ouvert borné de 0 dans \mathbb{R}^{n-1} défini en (4.13) et Ω_2 est le voisinage ouvert de la courbe $\{(t, y(t)) : t \in [a', b']\}$ défini en (4.56),

$$\chi = 1 \text{ sur un voisinage ouvert de la courbe } \{(t, y(t)) : t \in [a' + \varepsilon, b' - \varepsilon]\}, \quad (4.63)$$

et telle que,

$$\exists c_{11} > 0, \forall (t, x) \in \text{supp}((1 - \chi)\mathbb{1}_{\Omega_2 \cap ([a', b'] \times V_2)}), \text{Im}w(t, x) \geq c_{11} > 0, \quad (4.64)$$

car d'après (4.54) et (4.57),

$$\forall (t, x) \in \Omega_2 \cap ([a', b'] \times V_2), \quad \text{Im}w(t, x) \geq \text{Im}w_0(t) + \frac{1}{4}|x - y(t)|^2 \geq \frac{1}{4}|x - y(t)|^2. \quad (4.65)$$

Considérons maintenant la fonction v_h définie par,

$$v_h(t, x) := e^{\frac{i}{h}w(t, x)} \chi(t, x) \sum_{j=0}^M \phi_j(t, x) h^j, \quad (4.66)$$

où les fonctions $\phi_j(t, x)$ sont des fonctions C^∞ que l'on va choisir dans les lignes à venir. On étudie la quantité suivante,

$$\Delta_j(t, x, h) := \left[hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x) \right] \left(e^{\frac{i}{h}w(t, x)} \chi(t, x) \phi_j(t, x) \right), \quad (4.67)$$

où les symboles g_1, \dots, g_N sont définis en (4.10). Comme d'après les lignes faisant suite à (4.10) les symboles f, g_1, \dots, g_N appartiennent à la classe,

$$S(1, dt^2 + dx^2 + d\xi^2),$$

nous allons vérifier que l'on peut appliquer le lemme 4.2 à l'expression (4.67) dans laquelle la variable t est considérée comme un paramètre pour obtenir que,

$$\begin{aligned} & \left\| \Delta_j(t, x, h) - \left[hD_t + \sum_{|\beta| \leq M} \left(i \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + h \frac{\partial^\beta g_1}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + \dots \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + h^N \frac{\partial^\beta g_N}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \right) \frac{(hD_x - \eta(t))^\beta}{\beta!} \right] \left(e^{\frac{i}{h}w(t, x)} \chi(t, x) \phi_j(t, x) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \\ & \left\| \Delta_j(t, x, h) - \left[hD_t + \sum_{|\beta| \leq M} \left(i \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + h \frac{\partial^\beta g_1}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + \dots \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + h^N \frac{\partial^\beta g_N}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \right) \frac{(hD_x - \eta(t))^\beta}{\beta!} \right] \left(e^{\frac{i}{h}[w(t, x) - i\text{Im}w_0(t)]} e^{-\frac{\text{Im}w_0(t)}{h}} \chi(t, x) \phi_j(t, x) \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\frac{M+1}{2}}), \quad (4.68) \end{aligned}$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Il s'agit de vérifier que l'utilisation de cette version à paramètre du lemme 4.2 est bien licite. Constatons tout d'abord d'après (4.19), (4.62) et (4.65) que,

$$\forall (t, x) \in \text{supp}\chi, \quad x \neq y(t), \quad \text{Im}[w(t, x) - i\text{Im}w_0(t)] \geq \frac{1}{4}|x - y(t)|^2 > 0, \quad (4.69)$$

et,

$$\text{Im}[w(t, y(t)) - i\text{Im}w_0(t)] = 0. \quad (4.70)$$

Notons que d'après (4.15), (4.55), (4.57) et (4.62), on a

$$\forall t \in [a', b'], \quad d_x[w(t, x) - i\text{Im}w_0(t)](t, y(t)) = d_x w(t, y(t)) = \eta(t) \neq 0, \quad (4.71)$$

et,

$$\forall (t, x) \in \text{supp}\chi, \quad d_x[w(t, x) - i\text{Im}w_0(t)] = d_x w(t, x) \neq 0. \quad (4.72)$$

Remarquons également que d'après (4.17) et (4.19), on a pour tout $t \in [a', b']$ et $X \in \mathbb{R}^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{Im}[d_x^2(w(t, x) - i\text{Im}w_0(t))](t, y(t)).X &= \text{Im}d_x^2 w(t, y(t)).X \\ &\geq \frac{1}{2}|X|^2. \end{aligned} \quad (4.73)$$

On en déduit en relisant la démonstration précédente du lemme 4.2 au regard de (4.69), (4.70), (4.71), (4.72) et (4.73) que l'on peut appliquer une version à paramètre du lemme 4.2 avec $w(t, x) - i\text{Im}w_0(t)$ pour fonction de phase et,

$$e^{-\frac{\text{Im}w_0(t)}{h}} \chi(t, x) \phi_j(t, x),$$

pour fonction d'amplitude, qui induit l'estimation (4.68). Précisons en effet que l'on constate en relisant cette démonstration du lemme 4.2 que le fait que la fonction d'amplitude,

$$e^{-\frac{\text{Im}w_0(t)}{h}} \chi(t, x) \phi_j(t, x),$$

dépende du paramètre semi-classique ne prête pas à conséquence puisque d'après (4.16), $\text{Im}w_0 \geq 0$ sur $[a', b']$ et que la propriété d'uniformité par rapport à la variable t dans l'estimation (4.68) est une conséquence de la présence de la fonction de troncature à support compact $\chi(t, x)$.

On étudie maintenant attentivement la quantité,

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_j(t, x, h) &:= \left[hD_t + \sum_{|\beta| \leq M} \left(i \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + h \frac{\partial^\beta g_1}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + h^N \frac{\partial^\beta g_N}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \right) \frac{(hD_x - \eta(t))^\beta}{\beta!} \right] \left(e^{\frac{i}{h}w(t, x)} \chi(t, x) \phi_j(t, x) \right). \end{aligned} \quad (4.74)$$

Comme la fonction de phase complexe w est une solution approchée de l'équation eikonale (4.20), le terme semi-classique d'ordre $h^0 = 1$ de (4.74) est du type,

$$A_0(t, x, h) := e^{\frac{i}{h}w(t, x)} O(|x - y(t)|^{M+1} \mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x)), \quad (4.75)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

uniformément par rapport aux variables $(t, x) \in [a', b'] \times \mathbb{R}^{n-1}$ au sens où il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $(t, x) \in [a', b'] \times \mathbb{R}^{n-1}$,

$$|A_0(t, x, h)e^{-\frac{i}{h}w(t, x)}| \leq C_0|x - y(t)|^{M+1}\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x), \quad (4.76)$$

où $\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $\text{supp}\chi$. Le terme d'ordre h de (4.74) est le produit du facteur exponentiel $e^{\frac{i}{h}w(t, x)}$ et d'un terme de la forme,

$$D_t(\chi(t, x)\phi_j(t, x)) + \tilde{c}(t, x) \cdot \nabla_x(\chi(t, x)\phi_j(t, x)) + \tilde{d}(t, x)\chi(t, x)\phi_j(t, x), \quad (4.77)$$

où $\tilde{c} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{n-1})$ et $\tilde{d} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ car lors du développement de l'expression (4.74), les seuls termes qui peuvent contribuer à ce terme d'ordre h sont ceux où on dérive au plus une fois un facteur autre que le facteur exponentiel,

$$e^{\frac{i}{h}w(t, x)}.$$

En utilisant que d'après (4.62) et (4.65),

$$\forall (t, x) \in \text{supp}\chi, |e^{\frac{i}{h}w(t, x)}| = e^{-\frac{\text{Im}w(t, x)}{h}} \leq 1, \quad (4.78)$$

on déduit au regard de (4.62), (4.66), (4.74), (4.75) et (4.77) que l'on peut trouver des fonctions $\psi_1, \dots, \psi_{M+1}$, C^∞ à support dans l'ensemble,

$$\text{supp}\chi \subset \Omega_2 \cap ([a', b'] \times V_2),$$

telles que,

$$\left\| \left[hD_t + \sum_{|\beta| \leq M} \left(i \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + \sum_{j=1}^N h^j \frac{\partial^\beta g_j}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(hD_x - \eta(t))^\beta}{\beta!} \right] v_h(t, x) - e^{\frac{i}{h}w(t, x)} \left(\sum_{j=0}^{M+1} \psi_j(t, x) h^j \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(h^{M+1}), \quad (4.79)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ et telles que,

$$\begin{aligned} \psi_0(t, x) &= O(|x - y(t)|^{M+1}\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x)), \\ \psi_1(t, x) &= D_t(\chi(t, x)\phi_0(t, x)) + \tilde{c}_0(t, x) \cdot \nabla_x(\chi(t, x)\phi_0(t, x)) \\ &\quad + \tilde{d}_0(t, x)\chi(t, x)\phi_0(t, x) + O(|x - y(t)|^{M+1}\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x)), \\ \psi_{j+1}(t, x) &= D_t(\chi(t, x)\phi_j(t, x)) + \tilde{c}_j(t, x) \cdot \nabla_x(\chi(t, x)\phi_j(t, x)) \\ &\quad + \tilde{d}_j(t, x)\chi(t, x)\phi_j(t, x) + R_j(t, x) \\ &\quad + O(|x - y(t)|^{M+1}\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x)), \end{aligned} \quad (4.80)$$

uniformément par rapport aux variables $(t, x) \in [a', b'] \times \mathbb{R}^{n-1}$ (au sens défini en (4.75) et (4.76)) pour tout $1 \leq j \leq M$ où \tilde{c}_j désigne une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{n-1})$, \tilde{d}_j est une fonction $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et où R_j est une fonction C^∞ supportée dans l'ensemble compact $\text{supp}\chi$, uniquement déterminée par les fonctions $\chi, w, f, g_1, \dots, g_N, \eta$ qui sont des données et les fonctions $\phi_0, \dots, \phi_{j-1}$ qui sont des

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

fonctions inconnues encore à déterminer. Il s'agit maintenant de déterminer ces fonctions ϕ_j . Commençons par choisir la fonction $\phi_0(t, x)$ sous la forme suivante,

$$\phi_0(t, x) := \sum_{|\alpha| < M} \phi_{0,\alpha}(t) (x - y(t))^\alpha, \quad (4.81)$$

où les fonctions $\phi_{0,\alpha}(t)$ sont de nouvelles fonctions inconnues à déterminer. On veut réaliser sur l'ensemble $[a', b'] \times V_2$,

$$[D_t + \tilde{c}_0(t, x) \cdot \nabla_x + \tilde{d}_0(t, x)] \phi_0(t, x) = O(|x - y(t)|^M), \quad (4.82)$$

uniformément par rapport aux variables $(t, x) \in [a', b'] \times V_2$. En utilisant des formules de Taylor avec reste intégral au point $(t, y(t))$ pour développer en puissance de $(x - y(t))$ les fonctions $\tilde{c}_0(t, x)$ et $\tilde{d}_0(t, x)$, on constate qu'il suffit pour réaliser (4.82) que les fonctions $\phi_{0,\alpha}(t)$ apparaissant dans le membre de droite de (4.81) satisfassent un système linéaire d'équations différentielles ordinaires de la forme,

$$D_t \phi_{0,\alpha}(t) + \sum_{|\beta| < M} a_{\alpha,\beta}(t) \phi_{0,\beta}(t) = 0. \quad (4.83)$$

On peut résoudre ce système linéaire (4.83) globalement sur l'ensemble $[a', b']$ en imposant que,

$$\phi_{0,0}(c') = 1, \quad (4.84)$$

où c' est le réel défini dans (4.16). Concernant la construction des fonctions $\phi_j(t, x)$ pour $1 \leq j \leq [M/2] - 1$, on procède comme suit. Considérons,

$$1 \leq j \leq [M/2] - 1,$$

et supposons que les fonctions $\phi_0, \dots, \phi_{j-1}$ soient déjà construites. On cherche alors la fonction $\phi_j(t, x)$ sous la forme,

$$\phi_j(t, x) := \sum_{|\alpha| < M-2j} \phi_{j,\alpha}(t) (x - y(t))^\alpha,$$

où les fonctions $\phi_{j,\alpha}(t)$ sont choisies pour que,

$$[D_t + \tilde{c}_j(t, x) \cdot \nabla_x + \tilde{d}_j(t, x)] \phi_j(t, x) + R_j(t, x) = O(|x - y(t)|^{M-2j}), \quad (4.85)$$

sur $[a', b'] \times V_2$, uniformément par rapport aux variables $(t, x) \in [a', b'] \times V_2$. Il suffit pour ce faire de développer en puissance de $(x - y(t))$ les fonctions $\tilde{c}_j(t, x)$, $\tilde{d}_j(t, x)$ et $R_j(t, x)$, et de choisir comme précédemment ces fonctions $\phi_{j,\alpha}(t)$ comme solutions d'un système linéaire d'équations différentielles ordinaires avec cette fois un second membre. En itérant ce procédé jusqu'à l'ordre $[M/2] - 1$ et en considérant des fonctions $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ quelconques pour les fonctions $\phi_j(t, x)$ si $[M/2] \leq j \leq M$, on termine notre construction de la famille semi-classique définie en (4.66),

$$v_h(t, x) = e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \chi(t, x) \sum_{j=0}^M \phi_j(t, x) h^j, \quad (4.86)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

qui est maintenant entièrement déterminée. On en déduit ensuite d'après (4.80), (4.82) et (4.85) que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
& e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \sum_{j=0}^{M+1} \psi_j(t,x) h^j \\
&= e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \left(\sum_{j=0}^M h^{j+1} \left[[(D_t \chi)(t,x) + \tilde{c}_j(t,x) \cdot (\nabla_x \chi)(t,x)] \phi_j(t,x) \right. \right. \\
&+ \chi(t,x) [(D_t \phi_j)(t,x) + \tilde{c}_j(t,x) \cdot (\nabla_x \phi_j)(t,x) + \tilde{d}_j(t,x) \phi_j(t,x) + R_j(t,x)] \\
&+ \left. \left. (1 - \chi(t,x)) R_j(t,x) \right] + O(|x - y(t)|^{M+1} \mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x)) \right) \\
&= e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \left(\sum_{j=0}^M \left[h^{j+1} [(D_t \chi)(t,x) + \tilde{c}_j(t,x) \cdot (\nabla_x \chi)(t,x)] \phi_j(t,x) \right. \right. \\
&+ \left. \left. h^{j+1} (1 - \chi(t,x)) R_j(t,x) \right] \right. \\
&+ \sum_{j=0}^{[M/2]-1} h^{j+1} \chi(t,x) \times O(|x - y(t)|^{M-2j} \mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x)) \\
&+ \sum_{j=[M/2]}^M h^{j+1} \chi(t,x) \times O(\mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x)) \\
&\left. + O(|x - y(t)|^{M+1} \mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x)) \right), \tag{4.87}
\end{aligned}$$

uniformément par rapport aux variables $(t, x) \in \mathbb{R}^n$ si on pose $R_0 = 0$. Il s'agit maintenant d'estimer les termes apparaissant dans le membre de droite de (4.87). Comme d'après (4.62), $\text{supp}\chi \subset \Omega_2 \cap ([a', b'] \times V_2)$, l'estimation (4.65) montre que pour tout $j = 0, \dots, [M/2] - 1$, le terme suivant apparaissant dans le membre de droite de (4.87) vérifie,

$$\begin{aligned}
& \left\| h^{j+1} e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \chi(t,x) \times O(|x - y(t)|^{M-2j} \mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x)) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= O\left(h^{j+1} \left\| |x - y(t)|^{M-2j} e^{-\frac{1}{4h}|x-y(t)|^2} \chi(t,x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&= O(h^{\frac{M}{2}+1}), \tag{4.88}
\end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Par une estimation analogue, on obtient également au regard de (4.62) et (4.65) que l'un des autres termes de (4.87) vérifie,

$$\begin{aligned}
& \left\| e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \times O(|x - y(t)|^{M+1} \mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x)) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
&= O\left(\left\| e^{-\frac{1}{4h}|x-y(t)|^2} |x - y(t)|^{M+1} \mathbf{1}_{\text{supp}\chi}(t,x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \right) \\
&= O(h^{\frac{M+1}{2}}), \tag{4.89}
\end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. D'autre part, comme d'après (4.60), (4.63) et (4.65), on peut trouver une constante $c_{12} > 0$ telle que,

$$\forall (t, x) \in \text{supp}\partial_t \chi \cup \text{supp}\partial_x \chi, \quad \text{Im}w(t, x) \geq c_{12} > 0, \tag{4.90}$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

on en déduit que pour tout $j = 0, \dots, M$,

$$\|h^{j+1}(D_t\chi)(t, x)\phi_j(t, x)e^{\frac{i}{h}w(t, x)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(e^{-\frac{c_{12}}{h}}), \quad (4.91)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Pour les mêmes raisons, on obtient que pour tout $j = 0, \dots, M$,

$$\|h^{j+1}\tilde{c}_j(t, x).(\nabla_x\chi)(t, x)\phi_j(t, x)e^{\frac{i}{h}w(t, x)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(e^{-\frac{c_{12}}{h}}), \quad (4.92)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme la fonction R_j définie en (4.80) est supportée dans l'ensemble $\text{supp}\chi$, on obtient d'après (4.62) et (4.64) que pour tout $j = 0, \dots, M$,

$$\|h^{j+1}(1 - \chi(t, x))R_j(t, x)e^{\frac{i}{h}w(t, x)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(e^{-\frac{c_{11}}{h}}), \quad (4.93)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme d'après (4.62) et (4.65), on a pour tout $j = [M/2], \dots, M$ l'estimation suivante du terme,

$$h^{j+1}e^{\frac{i}{h}w(t, x)}\chi(t, x) \times O(\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x)),$$

$$\|h^{j+1}e^{\frac{i}{h}w(t, x)}\chi(t, x) \times O(\mathbb{1}_{\text{supp}\chi}(t, x))\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(h^{[M/2]+1}),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, on déduit de (4.87), (4.88), (4.89), (4.91), (4.92) et (4.93) que,

$$\left\| e^{\frac{i}{h}w(t, x)} \sum_{j=0}^{M+1} \psi_j(t, x) h^j \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\frac{M+1}{2}}),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, ce qui induit en utilisant l'inégalité triangulaire et (4.79) que,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[hD_t + \sum_{|\beta| \leq M} \left(i \frac{\partial^\beta f}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + h \frac{\partial^\beta g_1}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) + \dots \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + h^N \frac{\partial^\beta g_N}{\partial \xi^\beta}(t, x, \eta(t)) \right) \frac{(hD_x - \eta(t))^\beta}{\beta!} \right] v_h(t, x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\frac{M+1}{2}}), \end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En utilisant une nouvelle fois l'inégalité triangulaire et l'estimation (4.68) pour tout $j = 0, \dots, M$, on obtient au regard de (4.66), (4.67) et de l'estimation précédente que,

$$\begin{aligned} & \left\| \left[hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x) \right] v_h(x) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ & = O(h^{\frac{M+1}{2}}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \quad (4.94) \end{aligned}$$

4.c. Etude de la concentration semi-classique de la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq 1}$.

On s'intéresse dans ce paragraphe à préciser un ensemble de concentration semi-classique de la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq 1}$ qui a été définie en (4.86). Commençons par établir une minoration de la norme $L^2(\mathbb{R}^n)$ de cette famille

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

semi-classique. Un calcul direct montre d'après (4.86) que pour toute fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
& h^{-n} (v_h, \psi(h^{-1}(t - c'), h^{-1}[x - y(c')]))_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= h^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}w(t,x)} \chi(t,x) \bar{\psi}(h^{-1}(t - c'), h^{-1}[x - y(c')]) \sum_{j=0}^M \phi_j(t,x) h^j dt dx \\
&= e^{\frac{i}{h}w(c',y(c'))} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\frac{i}{h}[w(ht+c',hx+y(c'))-w(c',y(c'))]} \chi(ht+c',hx+y(c')) \\
&\quad \times \bar{\psi}(t,x) \sum_{j=0}^M \phi_j(ht+c',hx+y(c')) h^j dt dx. \tag{4.95}
\end{aligned}$$

Comme d'après (4.16) et (4.19),

$$\operatorname{Im}w(c', y(c')) = \operatorname{Im}w_0(c') = 0, \tag{4.96}$$

on obtient au regard de (4.62) et (4.65) que sur le support de la fonction,

$$\chi(ht+c', hx+y(c')),$$

$$\operatorname{Im}[w(ht+c', hx+y(c')) - w(c', y(c'))] = \operatorname{Im}w(ht+c', hx+y(c')) \geq 0. \tag{4.97}$$

Si on utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient d'après (4.95), (4.96) et (4.97) que,

$$\begin{aligned}
& h^{-n} |(v_h, \psi(h^{-1}(t - c'), h^{-1}[x - y(c')]))_{L^2(\mathbb{R}^n)}| \rightarrow \\
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iw'(c',y(c')) \cdot (t,x)} \chi(c', y(c')) \bar{\psi}(t,x) \phi_0(c', y(c')) dt dx \right|, \tag{4.98}
\end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme d'après (4.61), (4.63), (4.81) et (4.84), on a

$$\chi(c', y(c')) = 1 \text{ et } \phi_0(c', y(c')) = 1,$$

on peut choisir une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ telle que,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iw'(c',y(c')) \cdot (t,x)} \chi(c', y(c')) \bar{\psi}(t,x) \phi_0(c', y(c')) dt dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{iw'(c',y(c')) \cdot (t,x)} \bar{\psi}(t,x) dt dx \right| > 0. \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Comme d'autre part,

$$\|\psi(h^{-1}(t - c'), h^{-1}[x - y(c')])\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = h^{\frac{n}{2}} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

on déduit au regard de (4.98), (4.99) et de l'utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz à partir de (4.95) qu'il existe des constantes $c_{13} > 0$ et $0 < h_0 \leq 1$ telles que,

$$\forall 0 < h \leq h_0, \|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq c_{13} h^{\frac{n}{2}}. \tag{4.100}$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Considérons dorénavant la nouvelle famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ normalisée pour la norme L^2 ,

$$u_h(t, x) := \frac{v_h(t, x)}{\|v_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}}. \quad (4.101)$$

Comme d'après (4.62) et (4.65), $\text{Im}w \geq 0$ sur l'ensemble compact $\text{supp}\chi$, on obtient directement en reprenant la définition (4.86) de la famille semi-classique $(v_h)_{0 < h \leq h_0}$, (4.100) et (4.101) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+.$$

Pour préciser un ensemble de concentration semi-classique de cette famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$, on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.3. *On a l'estimation suivante,*

$$\begin{aligned} \forall \nu \in \mathbb{N}, \exists C_\nu > 0, \forall 0 < h \leq 1, \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n, |h(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| \geq \tilde{\delta}/2, \\ |\widehat{v}_h(\tau, \xi)| \leq \frac{C_\nu}{(|(\tau, \xi)| + h^{-1})^\nu}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

où v_h est la fonction définie en (4.86) et $\tilde{\delta}$ est la constante strictement positive choisie en (4.13).

Preuve du lemme 4.3. Pour la preuve de ce lemme, nous allons user d'arguments similaires à ceux utilisés lors de l'étape 1 de la démonstration du lemme 4.2. Commençons par écrire,

$$\widehat{w}_h(\tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi(t, x) \phi_j(t, x) e^{i(|(\tau, \xi)| + h^{-1})\varphi_{\tau, \xi, h}(t, x)} dt dx, \quad (4.103)$$

où w_h désigne la fonction,

$$w_h(t, x) := \chi(t, x) \phi_j(t, x) e^{\frac{i}{h}w(t, x)}, \quad (4.104)$$

et où la fonction de phase complexe $\varphi_{\tau, \xi, h}(t, x)$ est définie par,

$$\varphi_{\tau, \xi, h}(t, x) = \frac{w(t, x) - h(t, x) \cdot (\tau, \xi)}{1 + h|(\tau, \xi)|}, \quad (4.105)$$

si $(t, x) \cdot (\tau, \xi)$ désigne le produit scalaire canonique dans \mathbb{R}^n de (t, x) et (τ, ξ) . Cette fonction de phase $\varphi_{\tau, \xi, h}$ reste confinée dans un ensemble borné de l'espace des fonctions $C^{\nu+1}(\text{supp}(\chi\phi_j))$ si,

$$0 < h \leq 1 \text{ et } |h(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| \geq \tilde{\delta}/2,$$

où $\tilde{\delta}$ désigne la constante strictement positive choisie en (4.13), puisque la fonction χ définie en (4.62) est à support compact. Montrons maintenant qu'il existe une constante $c_{14} > 0$ telle que,

$$\begin{aligned} \forall 0 < h \leq 1, \forall (t, x) \in \text{supp}(\chi\phi_j), \\ \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n, |h(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| \geq \tilde{\delta}/2, \\ \Delta(t, x, \tau, \xi, h) := |\nabla_{t, x}\varphi_{\tau, \xi, h}(t, x)|^2 + \text{Im}\varphi_{\tau, \xi, h}(t, x) \geq c_{14} > 0. \end{aligned} \quad (4.106)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

D'après (4.105), on peut écrire,

$$\Delta(t, x, \tau, \xi, h) = \frac{|\nabla_{t,x}w(t, x) - h(\tau, \xi)|^2}{(1 + h|(\tau, \xi)|)^2} + \frac{\operatorname{Im}w(t, x)}{1 + h|(\tau, \xi)|}. \quad (4.107)$$

Remarquons tout d'abord que d'après (4.62) et (4.65), on a

$$\forall(t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j), \operatorname{Im}w(t, x) \geq \frac{1}{4}|x - y(t)|^2 \geq 0, \quad (4.108)$$

et,

$$\forall(t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j), \operatorname{Im}\varphi_{\tau, \xi, h}(t, x) = \frac{\operatorname{Im}w(t, x)}{1 + h|(\tau, \xi)|} \geq 0. \quad (4.109)$$

Comme pour tout $(t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j)$,

$$\frac{|\nabla_{t,x}w(t, x) - h(\tau, \xi)|^2}{(1 + h|(\tau, \xi)|)^2} \geq \frac{h|(\tau, \xi)| \left(h|(\tau, \xi)| - 2 \sup_{(t,x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j)} |\nabla_{t,x}w(t, x)| \right)}{(1 + h|(\tau, \xi)|)^2},$$

et que l'ensemble $\operatorname{supp}(\chi\phi_j)$ est compact, on en déduit qu'il existe des constantes strictement positives c_{15} et c_{16} telles que,

$$h|(\tau, \xi)| > c_{15} \implies \frac{h|(\tau, \xi)| \left(h|(\tau, \xi)| - 2 \sup_{(t,x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j)} |\nabla_{t,x}w(t, x)| \right)}{(1 + h|(\tau, \xi)|)^2} \geq c_{16} > 0,$$

ce qui induit d'après (4.107) et (4.108) que,

$$\forall 0 < h \leq 1, \forall(t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j), \forall(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n, \\ h|(\tau, \xi)| > c_{15} \implies \Delta(t, x, \tau, \xi, h) \geq c_{16} > 0. \quad (4.110)$$

D'autre part, comme pour tout $(t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j)$,

$$\frac{|\nabla_{t,x}w(t, x) - h(\tau, \xi)|}{1 + h|(\tau, \xi)|} \geq \frac{\inf_{(t,x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j)} |\nabla_{t,x}w(t, x)| - h|(\tau, \xi)|}{1 + h|(\tau, \xi)|},$$

on en déduit en utilisant (4.57) et le fait que d'après (4.62), l'ensemble compact $\operatorname{supp}(\chi\phi_j)$ soit contenu dans l'ensemble Ω_2 qu'il existe des constantes strictement positives c_{17} et c_{18} telles que $c_{17} < c_{15}$ et,

$$h|(\tau, \xi)| < c_{17} \implies \frac{\inf_{(t,x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j)} |\nabla_{t,x}w(t, x)| - h|(\tau, \xi)|}{1 + h|(\tau, \xi)|} \geq c_{18} > 0,$$

ce qui induit d'après (4.107) et (4.108) que,

$$\forall 0 < h \leq 1, \forall(t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j), \forall(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n, \\ h|(\tau, \xi)| < c_{17} \implies \Delta(t, x, \tau, \xi, h) \geq c_{18}^2 > 0. \quad (4.111)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Vérifions maintenant que la fonction positive,

$$(u; t, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \frac{|\nabla_{t,x} w(t, x) - u|^2}{(1 + |u|)^2} + \frac{\operatorname{Im} w(t, x)}{1 + |u|}, \quad (4.112)$$

ne s'annule pas sur le compact,

$$\left\{ (u; t, x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : c_{17} \leq |u| \leq c_{15}, |u - (0, \xi'_0)| \geq \tilde{\delta}/2, \right. \\ \left. (t, x) \in \operatorname{supp}(\chi\phi_j) \right\}. \quad (4.113)$$

Constatons que d'après (4.19) et (4.55), on a

$$\forall t \in [a', b'], (\nabla_{t,x} w)(t, y(t)) = (w'_0(t) - y'(t) \cdot \eta(t), \eta(t)). \quad (4.114)$$

D'après (4.19) et (4.114), on obtient en évaluant (4.20) en $x = y(t)$ que,

$$w'_0(t) = y'(t) \cdot \eta(t) - if(t, y(t), \eta(t)), \quad (4.115)$$

sur $[a', b']$. On déduit alors de (4.114) et (4.115) que,

$$\forall t \in [a', b'], (\nabla_{t,x} w)(t, y(t)) = (-if(t, y(t), \eta(t)), \eta(t)). \quad (4.116)$$

On conclut d'après (4.15), (4.108) et (4.116) que la fonction (4.112) ne s'annule pas sur le compact (4.113). En collectant ce fait, (4.110) et (4.111), on obtient au regard de (4.107) l'estimation (4.106). On peut alors d'après (4.106) et (4.109) appliquer le théorème 7.7.1 de [12] à l'intégrale (4.103) avec le paramètre,

$$|(\tau, \xi)| + h^{-1},$$

pour obtenir que,

$$\forall \nu \in \mathbb{N}, \exists C_\nu > 0, \forall 0 < h \leq 1, \forall (\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n, |h(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| \geq \tilde{\delta}/2, \\ |\widehat{w}_h(\tau, \xi)| \leq \frac{C_\nu}{(|(\tau, \xi)| + h^{-1})^\nu},$$

ce qui d'après (4.86) et (4.104) induit l'estimation (4.102) et termine la preuve du lemme 4.3. \square

Nous allons maintenant démontrer que l'ensemble compact,

$$K := \overline{V}_1 \times \overline{V}_2 \times \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n : |(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| \leq \tilde{\delta}\}, \quad (4.117)$$

où $V_1 \times V_2 \times \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n : |(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| < \tilde{\delta}\}$ est le voisinage ouvert du segment Γ défini en (4.13), est un ensemble de concentration semi-classique pour la famille $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ définie en (4.101),

$$K = \operatorname{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}). \quad (4.118)$$

Pour ce faire, considérons V un voisinage ouvert de l'ensemble compact K ,

$$K \subset V, \quad (4.119)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

et ψ un symbole de la classe $S(1, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)$ vérifiant,

$$\text{supp}\psi \subset V^c. \quad (4.120)$$

Comme d'après (4.13), (4.15) et (4.62), $\text{supp}\chi \subset [a', b'] \times V_2 \subset V_1 \times V_2$, on peut trouver une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ telle que,

$$\varphi = 1 \text{ sur un voisinage de } \text{supp}\chi \text{ et } \text{supp}\varphi \subset \overline{V_1} \times \overline{V_2}. \quad (4.121)$$

Compte tenu de (4.117), (4.119) et (4.121), on peut ensuite choisir une fonction $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1])$ bornée sur \mathbb{R}^n telle que,

$$w = 0 \text{ sur un voisinage de } \{(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^n : |(\tau, \xi) - (0, \xi'_0)| \leq \tilde{\delta}\}, \quad (4.122)$$

et,

$$\text{supp}\varphi \times \text{supp}(1 - w) \subset V. \quad (4.123)$$

Comme d'après (4.86) et (4.101),

$$\forall 0 < h \leq h_0, \text{supp}u_h \subset \text{supp}\chi,$$

on peut écrire au regard de (4.121) que,

$$\begin{aligned} & \psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w u_h \\ &= \psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w \varphi(t, x) u_h \\ &= \psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w \varphi(t, x) w(h\tau, h\xi)^w u_h \\ & \quad + \psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w \varphi(t, x) (1 - w(h\tau, h\xi))^w u_h. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Constatons ensuite que le fait que la fonction bornée w vérifie (4.122), induit au regard de (4.100), (4.101) et du lemme 4.3 que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\|w(h\tau, h\xi)^w u_h\|_{H^l} = \|\langle (\tau, \xi) \rangle^l w(h\tau, h\xi) \widehat{u}_h(\tau, \xi)\|_{L^2} = O(h^\infty), \quad (4.125)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En utilisant maintenant que,

$$\psi \in S(1, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2),$$

et le théorème de Calderón-Vaillancourt, on obtient d'après (4.125) que pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w \varphi(t, x) w(h\tau, h\xi)^w u_h\|_{H^l} &= O(\|w(h\tau, h\xi)^w u_h\|_{H^l}) \\ &= O(h^\infty), \end{aligned} \quad (4.126)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. D'autre part, les inclusions (4.120) et (4.123) montrent que,

$$\psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w \varphi(t, x) (1 - w(h\tau, h\xi))^w \in \text{Op}_h^w(S(h^\infty, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)),$$

ce qui induit d'après le théorème de Calderón-Vaillancourt et les estimations précédant le lemme 4.3 que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|\psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w \varphi(t, x) (1 - w(h\tau, h\xi))^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty), \quad (4.127)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on déduit alors de (4.124), (4.126) et (4.127) que,

$$\forall l \in \mathbb{N}, \|\psi(t, x, h\tau, h\xi, h)^w u_h\|_{H^l} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,$$

ce qui démontre que,

$$K = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}). \quad (4.128)$$

4.d. Estimation caractéristique d'un quasi-mode semi-classique.

Il s'agit dans ce paragraphe de vérifier que cette famille semi-classique $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que nous venons de construire est bien un quasi-mode semi-classique avec la propriété de décroissance annoncée par le théorème 4.1 pour l'opérateur initial $F(t, x, hD_t, hD_x, h)$. Soulignons que nous conservons encore les notations, $(t, x) \in \mathbb{R}^n$, pour désigner les variables d'espace et que ces notations diffèrent de celles de l'énoncé du théorème 4.1 et du début de sa démonstration. Nous ne manquerons pas de mentionner explicitement lorsque nous reprendrons les notations initiales. On procède en deux étapes.

Etape 1. D'après le développement asymptotique semi-classique (4.9), on peut trouver un symbole s_N dans la classe $S(1, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)$ tel que,

$$\begin{aligned} G(t, x, hD_t, hD_x, h) &= G_0(t, x, hD_t, hD_x) + hG_1(t, x, hD_t, hD_x) + \dots \\ &\quad + h^N G_N(t, x, hD_t, hD_x) + h^{N+1} s_N(t, x, hD_t, hD_x, h). \end{aligned} \quad (4.129)$$

Commençons par démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.4. *On a l'estimation,*

$$\|G(t, x, hD_t, hD_x, h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\min(N+1, \frac{M-n+1}{2})}), \quad (4.130)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$.

Preuve de la proposition 4.4. D'après (4.129) et le théorème de Calderón-Vaillancourt, il suffit pour démontrer (4.130) de prouver que,

$$\begin{aligned} &\| [G_0(t, x, hD_t, hD_x) + hG_1(t, x, hD_t, hD_x) + \dots \\ &\quad + h^N G_N(t, x, hD_t, hD_x)] u_h \|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\min(N+1, \frac{M-n+1}{2})}), \end{aligned} \quad (4.131)$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ puisque d'après (4.101), $\|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 1$. Constatons tout d'abord que d'après (4.94), (4.100) et (4.101), on a

$$\begin{aligned} &\| [hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x)] u_h \|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad = O(h^{\frac{M-n+1}{2}}), \end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Comme d'après les lignes faisant suite à (4.10), les fonctions f , g_1 , \dots , g_{N-1} et g_N sont à support compact et que d'après (4.86) et (4.101),

$$\forall 0 < h \leq h_0, \text{supp} u_h \subset \text{supp} \chi,$$

on en déduit au regard de (4.62) qu'il existe un compact K_0 de \mathbb{R}^{2n} tel que pour tout $0 < h \leq h_0$,

$$[hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x)] u_h \subset K_0,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

ce qui induit d'après l'estimation précédente que,

$$\begin{aligned}
& \left\| [hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x)] u_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq \left\| [hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x)] u_h \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \\
& \quad \times m(K_0)^{1/2} \\
& = O(h^{\frac{M-n+1}{2}}), \tag{4.132}
\end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$ si on note m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^{2n} . Considérons maintenant l'opérateur,

$$\begin{aligned}
& \tilde{s}(t, x, h\tau, h\xi, h)^w := \\
& \left[hD_t + if(t, x, hD_x) + hg_1(t, x, hD_x) + \dots + h^N g_N(t, x, hD_x) \right] \\
& - \left[G_0(t, x, hD_t, hD_x) + hG_1(t, x, hD_t, hD_x) + \dots + h^N G_N(t, x, hD_t, hD_x) \right]. \tag{4.133}
\end{aligned}$$

Comme d'après (4.10), on a dans les notations que nous utilisons actuellement pour désigner les variables d'espace, $(t, x) \in \mathbb{R}^n$,

$$G_0(t, x, \tau, \xi) = \tau + if(t, x, \xi) \text{ et } G_j(t, x, \tau, \xi) = g_j(t, x, \xi) \text{ si } 1 \leq j \leq N,$$

sur Ω_1 , le symbole de Weyl semi-classique $\tilde{s}(t, x, \tau, \xi, h)$ de l'opérateur pseudo-différentiel (4.133) est nul sur l'ensemble ouvert Ω_1 qui d'après (4.13) contient l'ensemble de concentration semi-classique K de la famille $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ défini en (4.117). Il s'ensuit d'après la définition 1.2 que,

$$\|\tilde{s}(t, x, h\tau, h\xi, h)^w u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^\infty) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \tag{4.134}$$

On déduit alors d'après (4.132), (4.133) et (4.134) que,

$$\begin{aligned}
& \left\| [G_0(t, x, hD_t, hD_x) + hG_1(t, x, hD_t, hD_x) + \dots \right. \\
& \quad \left. + h^N G_N(t, x, hD_t, hD_x)] u_h \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\frac{M-n+1}{2}}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+,
\end{aligned}$$

ce qui induit l'estimation (4.131) et termine la preuve de la proposition 4.4. \square

Etape 2. Nous allons maintenant établir que,

$$\|F(t, x, hD_t, hD_x, h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\min(N+1, \frac{M-n+1}{2})}), \tag{4.135}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. On rappelle que d'après (4.8) et dans les notations que nous utilisons actuellement pour désigner les variables d'espace, $(t, x) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\begin{aligned}
G(t, x, hD_t, hD_x, h) &= (I - h^N q_N(t, x, hD_t, hD_x)) \dots \\
& \quad (I - h q_1(t, x, hD_t, hD_x)) F(t, x, hD_t, hD_x, h), \tag{4.136}
\end{aligned}$$

où les fonctions q_j sont des symboles indépendants du paramètre semi-classique appartenant à la classe $S(1, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)$. Compte tenu de l'ellipticité des symboles,

$$1 - h^j q_j(t, x, \tau, \xi),$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

dans la classe $S(1, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)$ pour tout $1 \leq j \leq N$, on peut pour tout $1 \leq j \leq N$ trouver une paramétrix $r_j \in S(1, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)$ et un symbole \tilde{r}_j appartenant à la classe $S(h^\infty, dt^2 + dx^2 + d\tau^2 + d\xi^2)$ tels que,

$$\begin{aligned} & r_j(t, x, hD_t, hD_x, h)(I - h^j q_j(t, x, hD_t, hD_x)) \\ &= I + \tilde{r}_j(t, x, hD_t, hD_x, h). \end{aligned} \quad (4.137)$$

On en déduit que si une famille semi-classique $(\tilde{u}_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\|\tilde{u}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(1)$ et,

$$\|(I - h^j q_j(t, x, hD_t, hD_x))\tilde{u}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\min(N+1, \frac{M-n+1}{2})}),$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$, le théorème de Calderón-Vaillancourt induit en utilisant (4.137) et l'inégalité triangulaire que,

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &\leq \|r_j(t, x, hD_t, hD_x, h)(I - h^j q_j(t, x, hD_t, hD_x))\tilde{u}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad + \|\tilde{r}_j(t, x, hD_t, hD_x, h)\tilde{u}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &= O(\|(I - h^j q_j(t, x, hD_t, hD_x))\tilde{u}_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + h^\infty) \\ &= O(h^{\min(N+1, \frac{M-n+1}{2})}), \end{aligned}$$

lorsque $h \rightarrow 0^+$. Au regard de (4.101), (4.130) et (4.136), l'estimation (4.135) est alors une simple conséquence de ce résultat et de l'utilisation du théorème de Calderón-Vaillancourt.

Considérons maintenant V un voisinage ouvert du segment Γ défini en (4.3). Si on reprend notre démonstration, on peut choisir le voisinage ouvert Ω_1 du segment Γ défini en (4.10) tel que,

$$\Omega_1 \subset V. \quad (4.138)$$

Avec ces données, les lignes précédentes ont montré en (4.118) que le quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ défini en (4.101) se concentre semi-classiquement dans l'ensemble compact K au sens donné par la définition 1.2. On déduit au regard de (4.13), (4.117) et (4.138) que l'ensemble fermé \bar{V} est également un ensemble de concentration semi-classique du quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$,

$$\bar{V} = \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}).$$

En reprenant maintenant les notations initiales, $x \in \mathbb{R}^n$, qui sont celles de l'énoncé du théorème 4.1 pour désigner les variables d'espace, nous avons établi en (4.101), (4.135) et dans les estimations qui font immédiatement suite à cette identité (4.101) que le quasi-mode $(u_h)_{0 < h \leq h_0}$ vérifie,

$$\begin{aligned} \|u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= 1, \quad \forall l \in \mathbb{N}, \exists m_l \in \mathbb{N}, \|u_h\|_{H^l} = O(h^{-m_l}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+, \\ \bar{V} &= \text{FS}_\infty((u_h)_{0 < h \leq h_0}) \text{ et} \\ \|F(x, hD_x, h)u_h\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= O(h^{\min(N+1, \frac{M-n+1}{2})}) \text{ lorsque } h \rightarrow 0^+. \end{aligned} \quad (4.139)$$

En mentionnant enfin que les choix de l'entier N au début du paragraphe 4.a et de l'entier $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$ précédant (4.14) sont arbitraires et indépendants, on déduit de (4.139) le résultat du théorème 4.1. Ceci termine la démonstration du théorème 4.1. \square

5. Résultats annexes.

Nous avons rassemblé dans cette cinquième partie les preuves d'un certain nombre de résultats qui ont été utilisés dans les parties précédentes. Tous ces résultats sont des résultats de réductions géométriques qui permettent de ramener par un changement local de coordonnées symplectiques, l'étude de certains symboles à celle de quelques formes normales classiques. Tous ces résultats sont des variantes de résultats établis dans [12]. Leurs démonstrations ne sont donc que de simples adaptations de celles proposées par L.Hörmander dans son livre [12]. La différence essentielle entre ces résultats et ceux contenus dans [12] réside dans le caractère non homogène des symboles et des transformations symplectiques que nous considérons. Cette différence nous permet de relaxer certaines hypothèses des énoncés contenus dans [12]. Ce paragraphe se propose donc dans un souci de clarté et de complétude de notre discussion de donner précisément les énoncés et les preuves des résultats de réduction géométrique que nous utilisons lors de notre démonstration du théorème 1.3. Notons également que lors de cette démonstration du théorème 1.3, il est parfois nécessaire de se référer à certains points précis des démonstrations des résultats de cette cinquième partie. Ce paragraphe est donc une référence simple dont nous userons et auquel nous ferons explicitement appel lors de la démonstration du théorème 1.3.

Le premier résultat est une variante du théorème 21.3.6 de [12]. Etant donnée une fonction à valeurs complexes p , on convient de noter dans tout ce qui suit par Rep sa partie réelle et par Imp sa partie imaginaire.

Théorème 5.1. *Considérons $p = \text{Rep} + i\text{Imp}$ une fonction à valeurs complexes, C^∞ sur un voisinage ouvert du point $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ où $n \geq 2$ vérifiant,*

$$p(\gamma) = 0 \text{ et } H_{\text{Rep}}(\gamma) \neq 0. \quad (5.1)$$

On peut alors trouver une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} et une fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma, \quad a(\gamma) \neq 0 \text{ et } \chi^*(ap) = \xi_1 + if(x, \xi'),$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, où ξ' désigne les variables (ξ_2, \dots, ξ_n) , $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ et où f est une fonction C^∞ à valeurs réelles sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon'_n)$ si $\varepsilon'_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Preuve. Comme d'après (5.1), $p(\gamma) = 0$ et $d\text{Rep}(\gamma) \neq 0$ puisque,

$$H_{\text{Rep}}(\gamma) \neq 0,$$

on peut en utilisant le théorème 21.1.6 de [12] trouver de nouvelles coordonnées symplectiques locales encore notées (x, ξ) telles que dans ces coordonnées,

$$\gamma = (0, \varepsilon_n) \text{ et } \text{Rep} = \xi_1.$$

On s'est ainsi ramené après une transformation symplectique réelle au cas où,

$$\gamma = (0, \varepsilon_n), \quad p(0, \varepsilon_n) = 0 \text{ et } p(x, \xi) = \xi_1 + i\text{Imp}(x, \xi), \quad (5.2)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Comme d'après (5.2),

$$p(\gamma) = 0 \text{ et } \frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\gamma) = 1 + i \frac{\partial \text{Im} p}{\partial \xi_1}(\gamma) \neq 0, \quad (5.3)$$

on peut utiliser le théorème de préparation de Malgrange (Théorème 7.5.6 dans [12]) pour trouver des fonctions a et r appartenant à l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que l'identité,

$$\xi_1 = a(x, \xi)p(x, \xi) + r(x, \xi'), \quad (5.4)$$

soit vérifiée sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} et que la fonction r soit indépendante de la variable ξ_1 . Vérifions que cette fonction a ne peut pas s'annuler au point γ ,

$$a(\gamma) \neq 0. \quad (5.5)$$

Il suffit pour ce faire de dériver l'identité (5.4) par rapport à la variable ξ_1 et d'évaluer cette expression au point γ . On en déduit en utilisant (5.2) que,

$$1 = \frac{\partial a}{\partial \xi_1}(\gamma)p(\gamma) + a(\gamma) \frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\gamma) = a(\gamma) \frac{\partial p}{\partial \xi_1}(\gamma), \quad (5.6)$$

ce qui démontre (5.5). En utilisant (5.2), on obtient également en évaluant l'identité (5.4) au point γ que,

$$r(0, \varepsilon'_n) = 0. \quad (5.7)$$

On peut ensuite appliquer une nouvelle fois le théorème 21.1.6 de [12] au système,

$$x_1 \text{ et } \xi_1 - \text{Rer}(x, \xi'),$$

pour trouver de nouvelles coordonnées symplectiques locales sur un voisinage ouvert du point $\gamma = (0, \varepsilon_n)$ notées (y, η) qui fixent le point $(0, \varepsilon_n)$ et vérifient,

$$y_1 := x_1 \text{ et } \eta_1 := \xi_1 - \text{Rer}(x, \xi'). \quad (5.8)$$

Ceci est bien licite puisque d'après (5.7),

$$x_1 = 0 \text{ et } \xi_1 - \text{Rer}(x, \xi') = 0,$$

en $(x, \xi) = (0, \varepsilon_n)$,

$$\{\xi_1 - \text{Rer}(x, \xi'), x_1\} = 1,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} et que les différentielles,

$$dx_1 \text{ et } d\xi_1 - \frac{\partial \text{Rer}}{\partial x} dx - \frac{\partial \text{Rer}}{\partial \xi'} d\xi',$$

sont linéairement indépendantes au voisinage du point $(0, \varepsilon_n)$. Si on note χ la transformation symplectique réelle associée à ce changement local de variables symplectiques,

$$\chi(y, \eta) = (x, \xi), \quad (5.9)$$

on obtient au regard de (5.4) et (5.8) que,

$$\chi^*(ap) = \eta_1 - i\chi^*(\text{Im}r), \quad (5.10)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ si on désigne par χ^*f la fonction *pullback* de la fonction f par la transformation χ . Considérons maintenant la fonction à valeurs réelles définie sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ par,

$$f(y, \eta) := -\chi^*(\text{Im}r)(y, \eta). \quad (5.11)$$

En utilisant la conservation du crochet de Poisson par les transformations symplectiques (cf. (21.1.4) dans [12]) et l'indépendance de la fonction $\text{Im}r$ définie en (5.4) par rapport à la variable ξ_1 , on obtient d'après (5.8), (5.9) et (5.11) que pour tout (y, η) appartenant à un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \eta_1}(y, \eta) &= \{f(y, \eta), y_1\} = \{y_1, \chi^*(\text{Im}r)(y, \eta)\} \\ &= \{x_1, \text{Im}r(x, \xi')\} \\ &= -\frac{\partial \text{Im}r}{\partial \xi_1}(x, \xi') = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Cette identité (5.12) montre que la fonction f est indépendante de la variable η_1 ce qui démontre d'après (5.10) et (5.11) que l'identité,

$$\chi^*(ap) = \eta_1 + if(y, \eta'), \quad (5.13)$$

est vérifiée sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Ceci termine au regard de (5.5) la démonstration du théorème 5.1. \square

Le théorème suivant est une variante du théorème 21.3.5 de [12].

Théorème 5.2. *Considérons $p = \text{Rep} + i\text{Imp}$ une fonction à valeurs complexes, C^∞ sur un voisinage ouvert du point $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ où $n \geq 2$. On suppose que,*

$$p(\gamma) = 0, \quad H_{\text{Rep}}(\gamma) \neq 0, \quad (5.14)$$

et que la partie imaginaire Imp de la fonction p change de signe à l'ordre,

$$k > 1,$$

en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives au point γ sur la bicaractéristique orientée du symbole Rep passant par le point γ . On suppose également qu'il existe un voisinage ouvert V_0 du point γ dans \mathbb{R}^{2n} tel que la fonction Imp s'annule une unique fois dans V_0 le long de toute bicaractéristique orientée du symbole Rep passant par un point d'un voisinage ouvert suffisamment petit du point γ et que la fonction Imp change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à l'ordre exactement k en ces annulations le long de ces bicaractéristiques orientées du symbole Rep . Sous ces hypothèses, l'ordre k est nécessairement impair et les résultats suivants sont vérifiés,

i) Si on note V l'ensemble caractéristique $p^{-1}(\{0\})$, cet ensemble V possède une structure de sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert W du point γ . On a l'identité,

$$H_{\text{Imp}} = bH_{\text{Rep}}, \quad (5.15)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur l'ensemble $W \cap V$, où b désigne une fonction à valeurs réelles C^∞ sur l'ensemble ouvert W . Tous les crochets de Poisson des symboles Rep et Imp avec au plus k occurrences de ces symboles s'annulent sur l'ensemble $W \cap V$ et pour toute fonction $a \in C^\infty$, on a l'identité,

$$H_{\text{Re}(ap)}^k \text{Im}(ap) = |a|^2 (\text{Re}(a + iab))^{k-1} H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}, \quad (5.16)$$

sur l'ensemble $W \cap V$.

ii) Il existe une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} , où $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} et une fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma, \quad a(\gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \chi^*(ap) = \xi_1 - ix_1^k \xi_n, \quad (5.17)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} .

Preuve. Commençons par remarquer que les hypothèses de changement de signe de la fonction Imp à l'ordre fini k imposent l'imparité de cet entier. Considérons l'ensemble $V_1 = (\text{Rep})^{-1}(\{0\})$, cet ensemble V_1 est une hypersurface dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point γ puisque d'après (5.14), $d\text{Rep}(\gamma) \neq 0$. Notons maintenant V_2 l'ensemble des zéros de la fonction,

$$q := H_{\text{Rep}}^{k-1} \text{Imp}, \quad (5.18)$$

sur cette hypersurface V_1 . Cet ensemble V_2 est une hypersurface de la sous-variété V_1 sur un voisinage ouvert des points vérifiant,

$$\{\text{Rep}, q\} \neq 0. \quad (5.19)$$

En effet, ceci vient du fait que l'ensemble,

$$V_2 := (\text{Rep})^{-1}(\{0\}) \cap q^{-1}(\{0\}), \quad (5.20)$$

est une sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert des points vérifiant,

$$\{\text{Rep}, q\} \neq 0,$$

car sur un voisinage ouvert de ces points, les différentielles $d\text{Rep}$ et dq sont linéairement indépendantes puisque c'est le cas de leurs champs hamiltoniens H_{Rep} et H_q compte tenu de l'identité,

$$\sigma(H_{\text{Rep}}, H_q) = \{\text{Rep}, q\} \neq 0.$$

Considérons $t \mapsto \Gamma(t)$ la bicaractéristique du symbole Rep vérifiant,

$$\Gamma(0) = \gamma. \quad (5.21)$$

D'après les hypothèses du théorème 5.2, la fonction $t \mapsto \text{Imp}(\Gamma(t))$ s'annule à l'ordre exactement k et change de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives en $t = 0$. Il s'ensuit d'après (5.21) que,

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} \left(\text{Imp}(\Gamma(t)) \right) \right|_{t=0} = H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}(\Gamma(0)) = H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}(\gamma) < 0. \quad (5.22)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

On peut donc d'après (5.18) et (5.22) trouver un voisinage ouvert V_3 du point γ dans \mathbb{R}^{2n} sur lequel,

$$H_{\text{Rep}}^k \text{Imp} = \{\text{Rep}, q\} < 0. \quad (5.23)$$

L'ensemble V_2 a donc une structure de sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point γ . Considérons ensuite γ_1 un point de l'ensemble $V_2 \cap V_3$ que l'on choisit suffisamment proche du point γ pour que le changement de signe de valeurs positives vers des valeurs négatives à l'ordre k qui se produit par hypothèse pour la fonction Imp sur la bicaractéristique orientée du symbole Rep passant par le point γ_1 , se produise dans l'ensemble V_3 . Notons $t \mapsto \Gamma_1(t)$ cette bicaractéristique et supposons que,

$$\Gamma_1(0) = \gamma_1. \quad (5.24)$$

Si on désigne par t_0 le temps où se produit ce changement de signe à l'ordre k , il s'ensuit que,

$$\forall 0 \leq j \leq k-1, \left. \frac{d^j}{dt^j} (\text{Imp}(\Gamma_1(t))) \right|_{t=t_0} = H_{\text{Rep}}^j \text{Imp}(\Gamma_1(t_0)) = 0. \quad (5.25)$$

Quitte à choisir le point γ_1 suffisamment proche du point γ , on peut supposer que $\Gamma_1(t) \in V_3$ pour tout $0 \leq t \leq t_0$ si $t_0 \geq 0$ ou que $\Gamma_1(t) \in V_3$ pour tout $t_0 \leq t \leq 0$ si $t_0 \leq 0$. Comme d'après (5.23),

$$\frac{d}{dt} (H_{\text{Rep}}^{k-1} \text{Imp}(\Gamma_1(t))) = H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}(\Gamma_1(t)) < 0,$$

si $\Gamma_1(t) \in V_3$, la fonction $t \mapsto H_{\text{Rep}}^{k-1} \text{Imp}(\Gamma_1(t))$ ne peut donc s'annuler qu'une seule et unique fois sur l'intervalle $[0, t_0]$ si $t_0 \geq 0$, respectivement $[t_0, 0]$ si $t_0 \leq 0$. Ceci impose d'après (5.25) que nécessairement $t_0 = 0$ car comme $\gamma_1 \in V_2$, on a d'après (5.18), (5.20) et (5.24) que,

$$H_{\text{Rep}}^{k-1} \text{Imp}(\gamma_1) = H_{\text{Rep}}^{k-1} \text{Imp}(\Gamma_1(0)) = 0.$$

On déduit alors de (5.24) et (5.25) que,

$$\forall 0 \leq j \leq k-1, H_{\text{Rep}}^j \text{Imp}(\gamma_1) = 0. \quad (5.26)$$

Comme l'entier naturel k est supposé strictement plus grand que 1 et que $\gamma_1 \in V_2$, on obtient d'après (5.20) et (5.26) que,

$$p(\gamma_1) = 0. \quad (5.27)$$

Réciproquement, considérons $\gamma_1 \in \mathbb{R}^{2n}$ un point appartenant à un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} tel que,

$$p(\gamma_1) = 0, \quad (5.28)$$

et $t \mapsto \tilde{\Gamma}(t)$ la bicaractéristique orientée du symbole Rep tel que,

$$\tilde{\Gamma}(0) = \gamma_1. \quad (5.29)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

D'après (5.28), (5.29) et les hypothèses du théorème 5.2, la fonction Imp doit s'annuler et changer de signe en passant de valeurs positives vers des valeurs négatives à l'ordre exactement k en $t = 0$ sur la bicaractéristique orientée,

$$t \mapsto \tilde{\Gamma}(t),$$

du symbole Rep_0 si ce point γ_1 est choisi suffisamment proche du point γ . Ceci induit en particulier d'après (5.18) et (5.29) que,

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \left(\text{Imp}(\tilde{\Gamma}(t)) \right) \Big|_{t=0} = H_{\text{Rep}}^{k-1} \text{Imp}(\gamma_1) = q(\gamma_1) = 0, \quad (5.30)$$

et,

$$\frac{d^k}{dt^k} \left(\text{Imp}(\tilde{\Gamma}(t)) \right) \Big|_{t=0} = H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}(\gamma_1) < 0. \quad (5.31)$$

On déduit de (5.20), (5.28) et (5.30) que $\gamma_1 \in V_2$. Nous venons donc de démontrer que l'ensemble caractéristique $V = p^{-1}(\{0\})$ du symbole p est localement égal à la sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} ,

$$V_2 = (\text{Rep})^{-1}(\{0\}) \cap q^{-1}(\{0\}) = p^{-1}(\{0\}), \quad (5.32)$$

sur un voisinage ouvert du point γ . Pour continuer, nous allons avoir besoin de recourir au lemme suivant.

Lemme 5.3. *Il existe des fonctions b et c à valeurs réelles qui sont C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ telles que,*

$$\text{Imp} = b\text{Rep} + cq^k, \quad (5.33)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} .

Preuve du lemme 5.3. Comme d'après (5.23), l'ensemble,

$$V_2 = (\text{Rep})^{-1}(\{0\}) \cap q^{-1}(\{0\}),$$

possède une structure de sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point γ et que d'après (5.14) et (5.32),

$$\gamma \in V_2, \quad (5.34)$$

on peut après une composition avec un C^∞ difféomorphisme local supposer que dans les nouvelles coordonnées obtenues via le changement de variables associé à ce difféomorphisme $y \mapsto f(y) = (x, \xi)$, $f(0) = \gamma$,

$$y_1 = \text{Rep} \text{ et } y_2 = q. \quad (5.35)$$

Dans ces nouvelles coordonnées (5.35), l'ensemble V_2 est décrit localement sur un voisinage ouvert du point 0 dans \mathbb{R}^{2n} par les équations,

$$y_1 = y_2 = 0, \quad (5.36)$$

si $y = (y_1, y_2, \dots, y_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$. La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 1 montre alors au regard de (5.36) que si une fonction h qui est C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ s'annule sur l'ensemble V_2 , on peut trouver des fonctions à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ , notées b_1 et c_1 telles que,

$$h(f(y)) = b_1(f(y))y_1 + c_1(f(y))y_2, \quad (5.37)$$

sur un voisinage ouvert de 0 dans \mathbb{R}^{2n} . En revenant au système précédent de coordonnées par (5.35), on déduit de (5.37) que,

$$h = b_1 \text{Rep} + c_1 q, \quad (5.38)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} . Comme d'après (5.14) et (5.32), la fonction Imp s'annule sur l'ensemble V_2 au voisinage du point γ , on peut d'après (5.38) trouver des fonctions b_1 et c_1 à valeurs réelles qui sont C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ telles que,

$$\text{Imp} = b_1 \text{Rep} + c_1 q, \quad (5.39)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} . Comme par hypothèse $k > 1$, l'identité (5.26) induit que,

$$\{\text{Rep}, \text{Imp}\} = 0, \quad (5.40)$$

sur l'ensemble,

$$W_1 := V_2 \cap V_3, \quad (5.41)$$

quitte à réduire le voisinage ouvert V_3 du point γ dans \mathbb{R}^{2n} . On peut également choisir ce voisinage ouvert V_3 tel que l'identité (5.39) soit vérifiée sur cet ensemble. Comme d'après (5.20), (5.39), (5.40) et (5.41),

$$0 = \{\text{Rep}, \text{Imp}\} = \{\text{Rep}, b_1 \text{Rep} + c_1 q\} = c_1 \{\text{Rep}, q\},$$

sur l'ensemble W_1 et que d'après (5.23) et (5.41), $\{\text{Rep}, q\} < 0$ sur l'ensemble W_1 , on en déduit que la fonction c_1 s'annule identiquement sur l'ensemble W_1 . Ceci nous permet au regard des lignes précédentes de décomposer cette fonction c_1 sous la forme,

$$c_1 = b_2 \text{Rep} + c_2 q, \quad (5.42)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} , où b_2 et c_2 désignent deux fonctions à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ . On peut alors écrire d'après (5.39) et (5.41) que,

$$\text{Imp} = (b_1 + b_2 q) \text{Rep} + c_2 q^2 = b_3 \text{Rep} + c_3 q^2, \quad (5.43)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} si $b_3 = b_1 + b_2 q$ et $c_3 = c_2$. Constatons que comme pour toute fonction régulière \tilde{b} ,

$$\{\text{Rep}, \tilde{b} \text{Rep}\} = \{\text{Rep}, \tilde{b}\} \text{Rep}, \quad (5.44)$$

sur un voisinage ouvert du point γ , on en déduit que pour tout $l \in \mathbb{N}^*$,

$$H_{\text{Rep}}^l(\tilde{b} \text{Rep}) = (H_{\text{Rep}}^l \tilde{b}) \text{Rep}, \quad (5.45)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert du point γ . Cette identité (5.45) appliquée à la fonction b_3 induit d'après (5.20) et (5.41) que quitte à réduire une nouvelle fois le voisinage ouvert V_3 du point γ , on a

$$\forall l \in \mathbb{N}^*, H_{\text{Rep}}^l(b_3 \text{Rep}) = 0, \quad (5.46)$$

sur l'ensemble W_1 . Un calcul direct montre ensuite l'identité,

$$\begin{aligned} H_{\text{Rep}}^2(c_3 q^2) &= H_{\text{Rep}}(q^2 \{\text{Rep}, c_3\} + 2q c_3 \{\text{Rep}, q\}) = 2q \{\text{Rep}, c_3\} \{\text{Rep}, q\} \\ &+ q^2 H_{\text{Rep}}^2 c_3 + 2c_3 \{\text{Rep}, q\}^2 + 2q \{\text{Rep}, c_3\} \{\text{Rep}, q\} + 2q c_3 H_{\text{Rep}}^2 q. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Comme d'après (5.26) et (5.41), $H_{\text{Rep}}^2 \text{Imp} = 0$ sur l'ensemble W_1 puisque k est un entier *impair* strictement supérieur à 1 i.e. $k \geq 3$, on en déduit en utilisant (5.20), (5.41), (5.43), (5.46) et (5.47) que,

$$0 = H_{\text{Rep}}^2 \text{Imp} = 2c_3 \{\text{Rep}, q\}^2, \quad (5.48)$$

sur l'ensemble W_1 . Comme d'après (5.23) et (5.41), $\{\text{Rep}, q\} < 0$ sur l'ensemble W_1 , on déduit de (5.48) que $c_3 = 0$ sur l'ensemble W_1 . On peut alors utiliser à nouveau notre étude précédente pour décomposer la fonction c_3 sous la forme,

$$c_3 = b_4 \text{Rep} + c_4 q, \quad (5.49)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} , où b_4 et c_4 désignent deux fonctions à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ . On obtient alors d'après (5.43) et (5.49) la nouvelle décomposition suivante du symbole Imp ,

$$\text{Imp} = b_5 \text{Rep} + c_5 q^3,$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} , avec $b_5 = b_3 + b_4 q^2$ et $c_5 = c_4$. Pour terminer la preuve de ce lemme, il suffit d'itérer le procédé précédent jusqu'à l'ordre k . Ceci est bien possible. En effet, supposons que nous disposions d'une décomposition du symbole Imp de la forme,

$$\text{Imp} = b_l \text{Rep} + c_l q^l, \quad (5.50)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} , avec l un entier vérifiant,

$$1 \leq l \leq k - 1,$$

et b_l, c_l des fonctions à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ . Comme quitte à réduire le voisinage ouvert V_3 du point γ dans \mathbb{R}^{2n} , on a d'après (5.20) et (5.41),

$$H_{\text{Rep}}^l(c_l q^l) = c_l \{\text{Rep}, q\}^l,$$

sur l'ensemble W_1 puisque le terme $c_l \{\text{Rep}, q\}^l$ est le seul terme apparaissant lorsque l'on développe les crochets de Poisson $H_{\text{Rep}}^l(c_l q^l)$, qui ne possède pas en facteur la fonction q qui s'annule par définition sur l'ensemble W_1 et que d'après (5.20), (5.41) et (5.45),

$$H_{\text{Rep}}^l(b_l \text{Rep}) = 0,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur l'ensemble W_1 , on obtient en utilisant (5.26), (5.41) et (5.50) que,

$$0 = H_{\text{Rep}}^l \text{Imp} = c_l \{\text{Rep}, q\}^l,$$

sur l'ensemble W_1 . Ce fait induit d'après (5.23) que,

$$c_l = 0 \text{ sur l'ensemble } W_1. \quad (5.51)$$

Cette identité (5.51) permet alors d'écrire à nouveau une décomposition de la fonction c_l dans l'idéal engendré par les fonctions Rep et q , et d'itérer notre procédé jusqu'à l'ordre k . Ceci termine la démonstration du lemme 5.3. \square

Le lemme précédent nous permet de trouver des fonctions b et c à valeurs réelles qui sont C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ telles que,

$$\text{Imp} = b\text{Rep} + cq^k, \quad (5.52)$$

sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} . Comme par hypothèse $k > 1$, un calcul direct montre d'après (5.20) et (5.41) que,

$$H_{\text{Imp}} = bH_{\text{Rep}}, \quad (5.53)$$

sur l'ensemble W_1 . On déduit alors de (5.32), (5.41) et (5.53) que l'identité (5.15) est vérifiée. Un autre calcul direct utilisant (5.52) donne que,

$$\begin{aligned} \{\text{Rep}, \text{Imp}\} &= \{\text{Rep}, b\text{Rep} + cq^k\} = \text{Rep}\{\text{Rep}, b\} + \{\text{Rep}, c\}q^k \\ &\quad + ck\{\text{Rep}, q\}q^{k-1}, \end{aligned} \quad (5.54)$$

sur un voisinage ouvert du point γ . Comme par hypothèse $k > 1$, on déduit de (5.20), (5.32), (5.41), (5.52) et (5.54) qu'il existe un voisinage ouvert \tilde{W} du point γ tel que l'identité (5.52) soit vérifiée sur l'ensemble \tilde{W} ,

$$p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W} \subset W_1, \quad (5.55)$$

et,

$$\text{Rep} = \text{Imp} = \{\text{Rep}, \text{Imp}\} = 0, \quad (5.56)$$

sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. Plus généralement, nous allons vérifier que tous les crochets de Poisson des symboles Rep et Imp avec au plus k occurrences de ces symboles s'annulent sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. En effet, considérons des symboles r_j égaux soit à Rep , soit à Imp pour tout $j = 1, \dots, s$. Remarquons tout d'abord que d'après (5.32), (5.41) et (5.55),

$$H_{r_1 \dots r_s}(\{\text{Rep}, c\}q^k) = H_{r_1 \dots r_s}(ck\{\text{Rep}, q\}q^{k-1}) = 0, \quad (5.57)$$

sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$ si $1 \leq s \leq k-2$ puisqu'il reste en facteur dans tous les termes qui apparaissent en développant ces crochets de Poisson la fonction q qui s'annule sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. Etudions maintenant le terme,

$$H_{r_1 \dots r_s}(\text{Rep}\{\text{Rep}, b\}), \quad (5.58)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

pour $1 \leq s \leq k-2$. On peut d'après l'identité (5.54) trouver pour toute fonction régulière r des fonctions a_1 et b_1 à valeurs réelles qui sont C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ telles que,

$$H_{\text{Rep}}(r\text{Rep}) = \text{Rep } H_{\text{Rep}}r, \quad (5.59)$$

et,

$$H_{\text{Imp}}(r\text{Rep}) = -r\{\text{Rep}, \text{Imp}\} + \text{Rep } H_{\text{Imp}}r = a_1\text{Rep} + b_1q^{k-1}, \quad (5.60)$$

sur un voisinage ouvert du point γ . En itérant un nombre fini de fois les identités (5.59) et (5.60), on en déduit que pour tout $1 \leq s \leq k-2$,

$$H_{r_1} \dots H_{r_s}(\text{Rep}\{\text{Rep}, b\}) \in (\text{Rep}, q^{k-s}), \quad (5.61)$$

où (Rep, q^{k-s}) désigne l'idéal engendré par les fonctions Rep et q^{k-s} . Comme on suppose ici que $k-s \geq 2$, on en déduit d'après (5.32), (5.41) et (5.55) que,

$$H_{r_1} \dots H_{r_s}(\text{Rep}\{\text{Rep}, b\}) = 0, \quad (5.62)$$

pour tout $1 \leq s \leq k-2$ sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. On déduit alors de (5.54), (5.56), (5.57) et (5.62) que tous les crochets de Poisson des symboles Rep et Imp avec au plus k occurrences de ces symboles s'annulent sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. Nous allons maintenant démontrer que pour toute fonction $a \in C^\infty$ l'identité,

$$H_{\text{Re}(ap)}^k \text{Im}(ap) = |a|^2 (\text{Re}(a + iab))^{k-1} H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}, \quad (5.63)$$

est vérifiée sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. Il suffit en fait de démontrer cette identité dans le cas où la fonction a est constante. En effet, en développant les crochets de Poisson $H_{\text{Re}(ap)}^k \text{Im}(ap)$, on constate que tous les termes où apparaissent des dérivées des fonctions $\text{Re}a$ et $\text{Im}a$ possèdent au moins un facteur constitué d'un crochet de Poisson des symboles Rep et Imp avec au plus k occurrences de ces symboles qui nous venons de le voir s'annule sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. Considérons donc le cas où $a \in \mathbb{C}$. Comme d'après (5.52),

$$\{\text{Re}(ap), \text{Im}(ap)\} = |a|^2 \{\text{Rep}, \text{Imp}\}, \quad (5.64)$$

$$H_{\text{Re}(ap)} = (\text{Re}a)H_{\text{Rep}} - (\text{Im}a)H_{\text{Imp}}, \quad (5.65)$$

et,

$$H_{\text{Imp}} = bH_{\text{Rep}} + (\text{Rep})H_b + q^{k-1}(ckH_q + qH_c), \quad (5.66)$$

sur l'ensemble ouvert \tilde{W} , il s'ensuit que,

$$H_{\text{Re}(ap)}^l = \text{Re}(a + iab)H_{\text{Rep}}^l - (\text{Im}a)(\text{Rep } H_b + q^{k-1}(ckH_q + qH_c)), \quad (5.67)$$

sur l'ensemble ouvert \tilde{W} puisque la fonction b est à valeurs réelles. On déduit en itérant l'identité (5.67) que pour tout $1 \leq l \leq k-1$,

$$H_{\text{Re}(ap)}^l = (\text{Re}(a + iab))^l H_{\text{Rep}}^l + \sum_{j=1}^{l-1} d_{j,l} H_{\text{Rep}}^j + \text{Rep } A_l + q^{k-l} B_l, \quad (5.68)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur l'ensemble ouvert \tilde{W} , où les notations $d_{j,l}$ désignent des fonctions $C^\infty(\tilde{W})$ et, où A_l et B_l sont des champs de vecteurs C^∞ sur l'ensemble ouvert \tilde{W} . En utilisant (5.64), (5.68) pour $l = k - 1$ et le fait que tous les crochets de Poisson avec au plus k occurrences des symboles Rep et Imp s'annulent sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$, on en déduit d'après (5.32), (5.41) et (5.55) que,

$$\begin{aligned} H_{\text{Re}(ap)}^k \text{Im}(ap) &= H_{\text{Re}(ap)}^{k-1} (\{\text{Re}(ap), \text{Im}(ap)\}) \\ &= |a|^2 (\text{Re}(a + iab))^{k-1} H_{\text{Rep}}^k \text{Imp}, \end{aligned} \quad (5.69)$$

sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$ ce qui démontre l'identité (5.16). Constatons également au regard des identités,

$$H_{\text{Re}(ap)} = (\text{Re}a)H_{\text{Rep}} + (\text{Rep})H_{\text{Re}a} - (\text{Im}a)H_{\text{Imp}} - (\text{Imp})H_{\text{Im}a}, \quad (5.70)$$

et,

$$H_{\text{Im}(ap)} = (\text{Re}a)H_{\text{Imp}} + (\text{Imp})H_{\text{Re}a} + (\text{Im}a)H_{\text{Rep}} + (\text{Rep})H_{\text{Im}a}, \quad (5.71)$$

vérifiées pour toute fonction $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$, que la nullité de tous les crochets de Poisson avec au plus k occurrences des symboles Rep et de Imp sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$ induit la nullité de tous les crochets de Poisson avec au plus k occurrences des symboles $\text{Re}(ap)$ et de $\text{Im}(ap)$ sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$. On peut alors d'après (5.14) appliquer le théorème 5.1 pour trouver une fonction,

$$a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C}),$$

et une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert Ω du point γ dans \mathbb{R}^{2n} telles que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma, \quad a(\gamma) \neq 0 \quad \text{et} \quad \chi^*(ap) = \xi_1 + if(x, \xi'), \quad (5.72)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, où f est une fonction à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0; \varepsilon'_n)$ et ξ' désigne les variables (ξ_2, \dots, ξ_n) . Soulignons bien que cette fonction f est indépendante de la variable ξ_1 . Nous allons maintenant démontrer qu'il existe un voisinage ouvert Ω_1 du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} tel que,

$$\forall 0 \leq j \leq k - 1, \quad \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} < 0, \quad (5.73)$$

sur l'ensemble $\chi^{-1}(p^{-1}(\{0\}) \cap \Omega) \cap \Omega_1$. Remarquons tout d'abord que comme d'après (5.53), (5.55) et (5.70),

$$H_{\text{Re}(ap)} = \text{Re}(a + iab)H_{\text{Rep}}, \quad (5.74)$$

sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \tilde{W}$ puisque la fonction b est à valeurs réelles et que d'après (5.72),

$$H_{\chi^*(\text{Re}(ap))} = \frac{\partial}{\partial x_1} \neq 0, \quad (5.75)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, on déduit de (5.72) que,

$$\operatorname{Re}(a + iab) \neq 0, \quad (5.76)$$

sur un voisinage ouvert du point γ . En utilisant ensuite la conservation des crochets de Poisson par une transformation symplectique, l'imparité de l'entier naturel k et (5.23), on obtient d'après (5.69), (5.72), (5.76) et la remarque précédente relative à l'annulation de tous les crochets de Poisson des symboles $\operatorname{Re}(ap)$ et $\operatorname{Im}(ap)$ avec au plus k occurrences de ces symboles sur l'ensemble $p^{-1}(\{0\}) \cap \bar{W}$ qu'il existe un voisinage ouvert Ω_1 du point $(0, \varepsilon_n)$ tel que,

$$\begin{aligned} \forall 0 \leq j \leq k-1, \quad \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j} &= H_{\chi^*(\operatorname{Re}(ap))}^j \chi^*(\operatorname{Im}(ap)) \\ &= (H_{\operatorname{Re}(ap)}^j \operatorname{Im}(ap)) \circ \chi = 0, \end{aligned} \quad (5.77)$$

et,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k} &= H_{\chi^*(\operatorname{Re}(ap))}^k \chi^*(\operatorname{Im}(ap)) = (H_{\operatorname{Re}(ap)}^k \operatorname{Im}(ap)) \circ \chi \\ &= |a \circ \chi|^2 (\operatorname{Re}(a + iab) \circ \chi)^{k-1} (H_{\operatorname{Re}(ap)}^k \operatorname{Im}(ap)) \circ \chi < 0, \end{aligned} \quad (5.78)$$

sur l'ensemble $\chi^{-1}(p^{-1}(\{0\}) \cap \Omega) \cap \Omega_1$, ce qui démontre (5.73). Considérons maintenant le symbole,

$$\tilde{q} := \xi_1 + if(x, \xi'), \quad (5.79)$$

défini sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. On constate d'après (5.14), (5.72) et (5.73) que le symbole \tilde{q} vérifie les hypothèses du théorème 5.2 au point $(0, \varepsilon_n)$, ce qui induit au regard des premières lignes de notre démonstration (cf. (5.18) et (5.32)) que l'ensemble $\tilde{q}^{-1}(\{0\})$ possède une structure de sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert Ω_2 du point $(0, \varepsilon_n)$ et que,

$$\tilde{q}^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_2 = \left\{ (x, \xi) \in \Omega_2 : \xi_1 = 0 \text{ et } \frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k-1}}(x, \xi') = 0 \right\}, \quad (5.80)$$

puisque d'après (5.79),

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k-1}} = H_{\operatorname{Re} \tilde{q}}^{k-1} \operatorname{Im} \tilde{q}.$$

On peut choisir d'après (5.72) le voisinage ouvert Ω_2 du point $(0, \varepsilon_n)$ tel que,

$$\tilde{q}^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_2 \subset \chi^{-1}(p^{-1}(\{0\}) \cap \Omega) \cap \Omega_1, \quad (5.81)$$

où Ω_1 est le voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ défini en (5.73). Considérons maintenant l'équation,

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k-1}}(x, \xi') = 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0; \varepsilon'_n)$. Comme d'après (5.14), (5.72) et (5.79), $\tilde{q}(0, \varepsilon_n) = 0$, on peut au regard de (5.73) et (5.81) utiliser le théorème des fonctions implicites pour trouver une fonction $X(x', \xi')$ qui soit C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0', \varepsilon'_n)$ dans \mathbb{R}^{2n-2} telle que,

$$X(0', \varepsilon'_n) = 0, \quad (5.82)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

qui vérifie,

$$\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_1^{k-1}}(x, \xi') = 0 \iff x_1 = X(x', \xi'), \quad (5.83)$$

si (x, ξ') appartient à un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon'_n)$ et $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Ceci nous permet de donner au regard de (5.80) et (5.83) la paramétrisation suivante de la sous-variété $\tilde{q}^{-1}(\{0\}) \cap \Omega_2$ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$,

$$\{(X(x', \xi'), x'; 0, \xi') : (x', \xi') \text{ décrivant un voisinage ouvert du point } (0', \varepsilon'_n) \text{ dans } \mathbb{R}^{2n-2}\}. \quad (5.84)$$

Comme d'après (5.73), (5.81) et (5.84), on a

$$\forall 0 \leq j \leq k-1, \quad \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j}(X(x', \xi'), x', \xi') = 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0', \varepsilon'_n)$, l'utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral montre d'après (5.73), (5.81), (5.83) et (5.85) que la fonction suivante qui est indépendante de la variable ξ_1 ,

$$\frac{f(x, \xi')}{(x_1 - X(x', \xi'))^k} = \int_0^1 \frac{\partial^k f}{\partial x_1^k}((1-t)X(x', \xi') + tx_1, x', \xi') \frac{(1-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt,$$

est C^∞ et strictement négative sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon'_n)$. On peut donc trouver une fonction h indépendante de la variable ξ_1 , strictement positive et C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon'_n)$ telle que,

$$\frac{f(x, \xi')}{(x_1 - X(x', \xi'))^k} = -h(x, \xi')^k. \quad (5.85)$$

En posant,

$$g(x, \xi') := (x_1 - X(x', \xi'))h(x, \xi'), \quad (5.86)$$

on obtient d'après (5.85) que,

$$f(x, \xi') = -g(x, \xi')^k, \quad (5.87)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon'_n)$ et le calcul direct suivant,

$$\{\xi_1, g(x, \xi')\} = \frac{\partial g}{\partial x_1}(x, \xi') = h(x, \xi') + (x_1 - X(x', \xi')) \frac{\partial h}{\partial x_1}(x, \xi'),$$

montre d'après (5.82) que,

$$\{\xi_1, g(x, \xi')\}(0, \varepsilon_n) = h(0, \varepsilon'_n) > 0. \quad (5.88)$$

Comme d'après (5.82) et (5.86), les fonctions ξ_1 et $g(x, \xi')$ s'annulent au point $(0, \varepsilon_n)$, on peut alors d'après (5.88) appliquer le lemme 21.3.4 de [12] avec le couple $(k/(k+1), 1/(k+1))$ pour trouver une fonction u strictement positive et C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ telle que,

$$\{\Phi, \Psi\} = 1, \quad (5.89)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ pour,

$$\Phi := u^{\frac{k}{k+1}} \xi_1 \text{ et } \Psi := u^{\frac{1}{k+1}} g(x, \xi'). \quad (5.90)$$

Pour la suite, nous allons utiliser le lemme suivant.

Lemme 5.4. *Il existe une fonction \tilde{h} à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} telle que,*

$$\begin{aligned} \tilde{h}(0, \varepsilon_n) = 1, \quad d\tilde{h}(0, \varepsilon_n) \neq 0 \text{ et } \{\Phi, \tilde{h}\} = \{\Psi, \tilde{h}\} = 0, \\ \text{sur un voisinage ouvert du point } (0, \varepsilon_n) \text{ dans } \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Preuve du lemme 5.4. Considérons les champs hamiltoniens réels $v_1 := H_\Phi$ et $v_2 := H_\Psi$ où Φ et Ψ sont les fonctions définies en (5.90). Comme d'après (5.89),

$$1 = \{\Phi, \Psi\} = \sigma(H_\Phi, H_\Psi) \neq 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, les champs de vecteurs $v_1(0, \varepsilon_n)$ et $v_2(0, \varepsilon_n)$ sont linéairement indépendants. Comme d'après l'identité (21.1.3)' de [12] et (5.89),

$$[v_1, v_2] = [H_\Phi, H_\Psi] = H_{\{\Phi, \Psi\}} = 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$, on peut appliquer le corollaire C.1.2 du volume 3 de [12] pour trouver une fonction \tilde{h} à valeurs réelles, C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ et vérifiant,

$$v_1 \tilde{h} = v_2 \tilde{h} = 0,$$

i.e.,

$$\{\Phi, \tilde{h}\} = \{\Psi, \tilde{h}\} = 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Comme de plus, si S désigne une sous-variété de codimension 2 dans \mathbb{R}^{2n} (donc de dimension $2n - 2 \geq 2$ puisque ici $n \geq 2$) dont le plan tangent au point $(0, \varepsilon_n)$ soit un sous-espace vectoriel supplémentaire du plan engendré par les vecteurs $v_1(0, \varepsilon_n)$ et $v_2(0, \varepsilon_n)$, le corollaire C.1.2 permet de prescrire la restriction $u_0 \in C^\infty(S)$ de la fonction \tilde{h} sur la sous-variété S . On peut de ce fait choisir une sous-variété et une restriction particulières de manière à imposer que,

$$\tilde{h}(0, \varepsilon_n) = 1 \text{ et } d\tilde{h}(0, \varepsilon_n) \neq 0.$$

Ceci termine la démonstration du lemme 5.4. \square

Reprenons notre démonstration du théorème 5.2. Le théorème 21.1.6 de [12] nous permet d'après (5.82), (5.86), (5.90) et (5.91) de trouver de nouvelles coordonnées symplectiques (y, η) au voisinage du point $(0, \varepsilon_n)$ fixant ce point $(0, \varepsilon_n)$ telles que,

$$\eta_1 := \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}} \Phi, \quad y_1 := \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}} \Psi \text{ et } \eta_n := \tilde{h}, \quad (5.92)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

où \tilde{h} est la fonction définie par le lemme 5.4. En effet, nous allons vérifier que les hypothèses de ce théorème sont bien vérifiées. Tout d'abord, constatons d'après (5.89) que,

$$\begin{aligned} \{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi, \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi\} &= \{\Phi, \Psi\} + \Phi\Psi\{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}, \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\} + \Phi\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}, \Psi\} \\ &\quad + \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Psi\{\Phi, \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\} = \{\Phi, \Psi\} = 1, \end{aligned} \quad (5.93)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ car un calcul direct montre que,

$$\{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}, \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\} = 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ et que d'après (5.91), les identités $\{\Phi, \tilde{h}\} = 0$ et $\{\Psi, \tilde{h}\} = 0$ induisent que,

$$\{\Phi, \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\} = 0 \text{ et } \{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}, \Psi\} = 0,$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. D'autres calculs analogues utilisant (5.91) montrent ensuite que,

$$\{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi, \tilde{h}\} = \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\{\Phi, \tilde{h}\} + \Phi\{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}, \tilde{h}\} = 0, \quad (5.94)$$

et,

$$\{\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi, \tilde{h}\} = \tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\{\Psi, \tilde{h}\} + \Psi\{\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}, \tilde{h}\} = 0, \quad (5.95)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$. Il faut encore pour appliquer le théorème 21.1.6 vérifier que le système de champs de vecteurs réels,

$$(H_{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi}, H_{\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi}, H_{\tilde{h}}),$$

est libre au point $(0, \varepsilon_n)$. Pour ce faire, considérons un triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de \mathbb{R}^3 tel que,

$$\Delta := \lambda_1 H_{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi}(0, \varepsilon_n) + \lambda_2 H_{\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi}(0, \varepsilon_n) + \lambda_3 H_{\tilde{h}}(0, \varepsilon_n) = 0. \quad (5.96)$$

Comme d'après (5.93) et (5.94),

$$\begin{aligned} \sigma(\Delta, H_{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi}(0, \varepsilon_n)) &= \lambda_1 \{\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi, \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi\}(0, \varepsilon_n) \\ &\quad + \lambda_2 \{\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi, \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi\}(0, \varepsilon_n) + \lambda_3 \{\tilde{h}, \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi\}(0, \varepsilon_n) = -\lambda_2, \end{aligned}$$

on déduit de (5.96) que $\lambda_2 = 0$. On obtient de la même manière d'après (5.93), (5.95) et (5.96) que,

$$0 = \sigma(\Delta, H_{\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi}(0, \varepsilon_n)) = \lambda_1,$$

puis comme d'après (5.91), $H_{\tilde{h}}(0, \varepsilon_n) \neq 0$, il s'ensuit au regard de (5.96) que $\lambda_3 = 0$. Le système $(d(\tilde{h}^{\frac{1}{k+1}}\Phi), d(\tilde{h}^{-\frac{1}{k+1}}\Psi), d\tilde{h})$ est donc libre au point $(0, \varepsilon_n)$. Ceci montre que les hypothèses du théorème 21.1.6 de [12] sont bien remplies.

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

On obtient alors en utilisant (5.87), (5.90) et (5.92) que dans le nouveau système local de coordonnées symplectiques,

$$\begin{aligned} u^{\frac{k}{k+1}} \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}} (\xi_1 + if(x, \xi')) &= u^{\frac{k}{k+1}} \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}} (\xi_1 - ig(x, \xi')^k) \\ &= \Phi \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}} - i\Psi^k \tilde{h}^{\frac{1}{k+1}} = \eta_1 - iy_1^k \eta_n, \end{aligned}$$

ce qui puisque la fonction u définie en (5.90) est strictement positive et au regard de (5.72) et (5.88), termine la démonstration du théorème 5.2. \square

Le théorème suivant est une variante du théorème 21.3.3 de [12].

Théorème 5.5. *Considérons $p = \text{Rep} + i\text{Imp}$ une fonction à valeurs complexes, C^∞ sur un voisinage ouvert du point $\gamma \in \mathbb{R}^{2n}$ où $n \geq 2$ vérifiant,*

$$p(\gamma) = 0 \text{ et } \{\text{Rep}, \text{Imp}\}(\gamma) < 0. \quad (5.97)$$

On peut alors trouver une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} , où $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} et une fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telles que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma, \quad a(\gamma) \neq 0 \text{ et } \chi^*(ap) = \xi_1 - ix_1 \xi_n, \quad (5.98)$$

sur un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} .

Preuve. On peut appliquer le lemme 21.3.4 de [12] aux fonctions à valeurs réelles Imp, Rep pour le couple $(a, b) = (1/2, 1/2)$ au point γ pour trouver une fonction u strictement positive et C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ telle que,

$$\{\text{Im}\tilde{q}, \text{Re}\tilde{q}\} = 1, \quad (5.99)$$

sur un voisinage ouvert du point γ si,

$$\tilde{q} := u^{\frac{1}{2}} p. \quad (5.100)$$

On choisit par la même méthode que celle utilisée dans la démonstration du lemme 5.4 une fonction \tilde{h} à valeurs réelles qui soit C^∞ sur un voisinage ouvert du point γ et vérifie,

$$\tilde{h}(\gamma) = 1, \quad d\tilde{h}(\gamma) \neq 0 \text{ et } \{\text{Re}\tilde{q}, \tilde{h}\} = \{\text{Im}\tilde{q}, \tilde{h}\} = 0, \quad (5.101)$$

sur un voisinage ouvert du point γ . On peut alors au regard de (5.97), (5.99), (5.100), (5.101) et en reprenant les mêmes arguments que ceux donnés lors de la démonstration du théorème 5.2 à partir de (5.92) trouver une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point γ dans \mathbb{R}^{2n} , $\chi(y, \eta) = (x, \xi)$ telle que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma, \quad \eta_1 := \tilde{h}^{\frac{1}{2}} \text{Re}\tilde{q}, \quad y_1 := -\tilde{h}^{-\frac{1}{2}} \text{Im}\tilde{q} \text{ et } \eta_n := \tilde{h}, \quad (5.102)$$

ce qui permet d'obtenir d'après (5.100) et (5.102) que,

$$\tilde{h}^{\frac{1}{2}} \tilde{q} = \tilde{h}^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}} p = \eta_1 + i\tilde{h}^{\frac{1}{2}} \text{Im}\tilde{q} = \eta_1 - iy_1 \eta_n,$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

et termine au regard de (5.101) la démonstration du théorème 5.5. \square

Le résultat suivant est une variante de la proposition 26.1.6 de [12].

Proposition 5.6. *Considérons p une fonction à valeurs réelles, C^∞ sur \mathbb{R}^{2n} où $n \geq 2$ et $\gamma : t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, $a < b$, une bicaractéristique du symbole p i.e.,*

$$\forall t \in [a, b], p(\gamma(t)) = 0 \text{ et } \forall t \in [a, b], \gamma'(t) = H_p(\gamma(t)). \quad (5.103)$$

On suppose que l'application $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ est injective. On peut alors trouver un voisinage ouvert V de l'ensemble,

$$\{(x_1, 0'; \varepsilon_n) : x_1 \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (5.104)$$

où $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, et une transformation symplectique réelle χ de V sur $\chi(V)$ un voisinage ouvert de l'ensemble $\gamma([a, b])$ tels que,

$$\forall x_1 \in [a, b], \chi(x_1, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(x_1) \text{ et } \forall (x, \xi) \in V, \chi^*p = \xi_1. \quad (5.105)$$

Preuve. Supposons pour simplifier les notations que $0 \in I = [a, b]$. Commençons par remarquer que l'on a nécessairement,

$$dp(\gamma(0)) \neq 0. \quad (5.106)$$

En effet, si $dp(\gamma(0)) = 0$, l'unicité au problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} y'(t) = H_p(y(t)) \\ y(0) = \gamma(0), \end{cases} \quad (5.107)$$

dont sont solutions les applications,

$$t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n} \text{ et } t \in \mathbb{R} \rightarrow \gamma(0) \in \mathbb{R}^{2n},$$

imposerait que l'application $t \in [a, b] \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ soit constante et contredirait l'hypothèse d'injectivité qui est réalisée. Comme d'après (5.103), $p(\gamma(0)) = 0$, on peut appliquer le théorème 21.1.6 de [12] pour trouver une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert convexe V_0 du point $(0, \varepsilon_n)$ dans \mathbb{R}^{2n} sur un voisinage ouvert du point $\gamma(0)$ dans \mathbb{R}^{2n} telle que,

$$\chi(0, \varepsilon_n) = \gamma(0) \text{ et } \chi^*p = \xi_1 \text{ sur l'ensemble ouvert } V_0. \quad (5.108)$$

Considérons maintenant f une fonction C^∞ , la conservation par la transformation symplectique χ des crochets de Poisson (voir (21.1.4) dans [12]) montre au regard de (5.108) que,

$$\begin{aligned} \chi^*\{p, f\} &= \{\chi^*p, \chi^*f\} = \{\xi_1, \chi^*f\} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\chi^*f) \\ &= df(\chi(x, \xi)) \cdot \frac{\partial \chi(x, \xi)}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (5.109)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur l'ensemble ouvert V_0 . Comme d'autre part, on a pour toute fonction $f \in C^\infty$,

$$\chi^*\{p, f\} = \chi^*(df(y, \eta) \cdot H_p(y, \eta)) = df(\chi(x, \xi)) \cdot H_p(\chi(x, \xi)), \quad (5.110)$$

sur l'ensemble ouvert V_0 , on déduit de (5.109) et (5.110) que,

$$df(\chi(x, \xi)) \cdot \frac{\partial \chi(x, \xi)}{\partial x_1} = df(\chi(x, \xi)) \cdot H_p(\chi(x, \xi)), \quad (5.111)$$

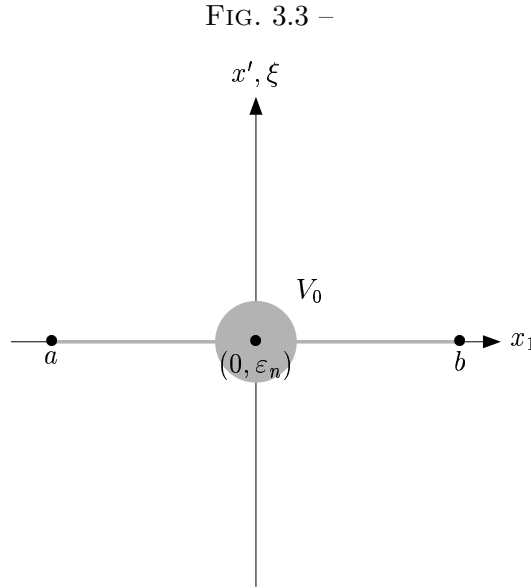
sur l'ensemble ouvert V_0 . Cette identité (5.111) valable pour toute fonction C^∞ arbitraire f induit l'identité suivante,

$$\frac{\partial \chi(x, \xi)}{\partial x_1} = H_p(\chi(x, \xi)), \quad (5.112)$$

sur le voisinage ouvert convexe V_0 du point $(0, \varepsilon_n)$. On remarque ensuite d'après (5.103) et (5.108) que l'application $x_1 \in [a, b] \mapsto \gamma(x_1)$ est solution du problème de Cauchy,

$$\begin{cases} \gamma'(x_1) = H_p(\gamma(x_1)) \\ \gamma(0) = \chi(0, \varepsilon_n). \end{cases} \quad (5.113)$$

On en déduit que l'on peut étendre d'une manière unique l'application $\chi(x, \xi)$



sur un voisinage ouvert V du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$, convexe dans la direction x_1 de sorte que l'identité (5.112) soit vérifiée sur l'ensemble V et que,

$$\forall x_1 \in [a, b], \quad \chi(x_1, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(x_1). \quad (5.114)$$

Nous allons maintenant démontrer que quitte à réduire le voisinage ouvert V du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$, cette application χ est un difféomorphisme global de V sur $\chi(V)$. On obtient tout d'abord en différentiant l'identité (5.112) que,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (\nabla \chi(x, \xi)) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \nabla p \right) (\chi(x, \xi)) \\ - \frac{\partial}{\partial x} \nabla p (\chi(x, \xi)) \end{pmatrix} \nabla \chi(x, \xi), \quad (5.115)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur l'ensemble ouvert V . Si on note ensuite $x_1 \mapsto R_{x',\xi}(x_1, 0)$ la résolvante de l'équation différentielle linéaire,

$$Y'(x_1) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \nabla p \right) (\chi(x, \xi)) \\ \left(- \frac{\partial}{\partial x} \nabla p \right) (\chi(x, \xi)) \end{pmatrix} Y(x_1), \quad (5.116)$$

d'origine $x_1 = 0$, on obtient que,

$$\nabla \chi(x_1, x'; \xi) = R_{x',\xi}(x_1, 0) \nabla \chi(0, x'; \xi). \quad (5.117)$$

Or, comme la différentielle $d\chi(0, x'; \xi)$ est inversible si $(0, x'; \xi) \in V_0$ puisque χ est une transformation symplectique sur l'ensemble V_0 et que l'on peut quitte à réduire le voisinage ouvert V du segment (5.104) en gardant sa propriété de convexité dans la direction x_1 supposer que,

$$(x_1, x'; \xi) \in V \implies (0, x'; \xi) \in V_0, \quad (5.118)$$

on déduit de (5.117) que la différentielle $d\chi(x_1, x'; \xi)$ est inversible pour tout $(x_1, x'; \xi) \in V$ d'inverse donné par,

$$d\chi(0, x'; \xi)^{-1} R_{x',\xi}(0, x_1).$$

Il s'ensuit que l'application χ est un difféomorphisme local sur l'ouvert V . Pour montrer que χ est un difféomorphisme global de V sur $\chi(V)$, il nous reste à montrer, quitte à éventuellement réduire ce voisinage ouvert V du segment,

$$I \times \{(0'; \varepsilon_n)\},$$

dans \mathbb{R}^{2n} que l'application χ est injective sur l'ensemble V . En utilisant le fait que l'application χ soit un difféomorphisme local sur l'ensemble V et la compacité du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$, on peut trouver un voisinage ouvert V du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ de la forme apparaissant sur la figure ci-contre tel que l'application χ soit injective sur les ensembles V_j si $1 \leq j \leq N$ et sur les ensembles W_l si $1 \leq l \leq N - 1$, et que la propriété (5.118) reste vérifiée. Les quantités δ_1 et δ_2 désignent ici deux constantes strictement positives. Comme la fonction,

$$(u, v) \mapsto |\chi(u, 0'; \varepsilon_n) - \chi(v, 0'; \varepsilon_n)|,$$

ne s'annule pas sur l'ensemble compact,

$$\{u, v \in I : |u - v| \geq \delta_1/2\},$$

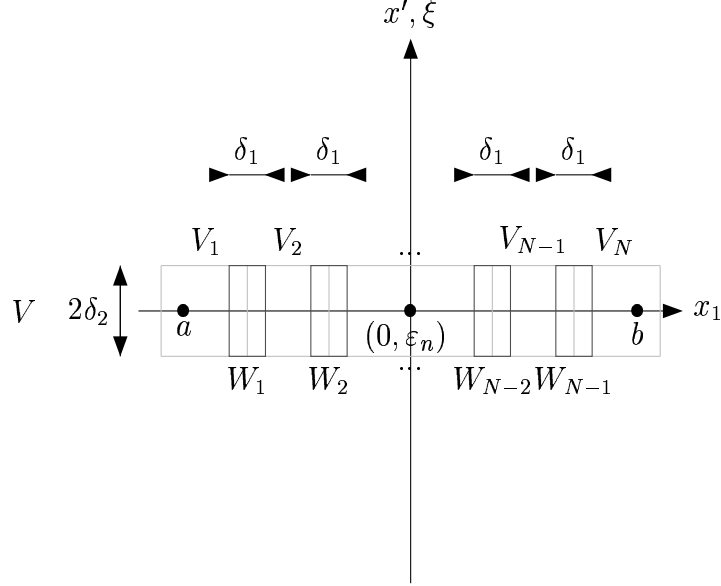
puisque d'après nos hypothèses et (5.114), l'application,

$$t \in I \mapsto \chi(t, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n},$$

est injective, on peut supposer que la quantité,

$$c_1 := \inf_{\{(u, 0'; \varepsilon_n) \in V, (v, 0'; \varepsilon_n) \in V : |u - v| \geq \delta_1/2\}} |\chi(u, 0'; \varepsilon_n) - \chi(v, 0'; \varepsilon_n)|, \quad (5.119)$$

FIG. 3.4 –



soit strictement positive. Supposons qu'il existe des points $(t, x'; \xi) \in V$ et $(s, y'; \eta) \in V$ tels que,

$$\chi(t, x'; \xi) = \chi(s, y'; \eta) \text{ et } (t, x'; \xi) \neq (s, y'; \eta). \quad (5.120)$$

L'injectivité de l'application χ sur les ensembles V_j pour $1 \leq j \leq N$ et W_l pour $1 \leq l \leq N - 1$ implique que les points $(t, x'; \xi)$ et $(s, y'; \eta)$ ne peuvent pas appartenir à un même ensemble V_j ou W_l pour $1 \leq j \leq N$ et $1 \leq l \leq N - 1$. Il s'ensuit d'après notre construction de l'ouvert V (cf. figure ci-contre) que nécessairement,

$$|t - s| \geq \delta_1/2 > 0. \quad (5.121)$$

Considérons maintenant la quantité,

$$c_2 := \sup_{\{(t, \tilde{x}'; \tilde{\xi}) \in V, |(\tilde{x}', \tilde{\xi}) - (0', \varepsilon_n)| \leq \delta_2\}} |\chi(t, \tilde{x}'; \tilde{\xi}) - \chi(t, 0'; \varepsilon_n)|. \quad (5.122)$$

Si on choisit la constante $\delta_2 > 0$ suffisamment petite pour que,

$$c_1 - 2c_2 > 0, \quad (5.123)$$

on obtient en utilisant (5.119), (5.120), (5.121), (5.122), (5.123), l'inégalité triangulaire et la forme de l'ouvert V donnée par la figure ci-contre que,

$$\begin{aligned} 0 &= |\chi(t, x'; \xi) - \chi(s, y'; \eta)| \\ &\geq |\chi(t, 0'; \varepsilon_n) - \chi(s, 0'; \varepsilon_n)| - |\chi(t, x'; \xi) - \chi(t, 0'; \varepsilon_n)| \\ &\quad - |\chi(s, y'; \eta) - \chi(s, 0'; \varepsilon_n)| \\ &\geq c_1 - 2c_2 > 0, \end{aligned}$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

ce qui induit une contradiction. Ceci démontre que l'application χ est injective sur l'ensemble ouvert V et qu'elle réalise donc un difféomorphisme global de l'ensemble V sur son image $\chi(V)$. Il s'agit maintenant vérifier que l'application χ est une transformation symplectique. Notons,

$$\chi^{-1} = (X_1, \dots, X_n, \Xi_1, \dots, \Xi_n). \quad (5.124)$$

En dérivant l'identité suivante par rapport à la variable x_1 ,

$$\forall (x, \xi) \in V, \chi^{-1} \circ \chi(x, \xi) = (x, \xi),$$

et en utilisant que l'identité (5.112) est vérifiée sur l'ensemble ouvert V , on obtient d'après (5.124) que,

$$\begin{aligned} & d(\chi^{-1})(\chi(x, \xi)) \cdot \frac{\partial \chi(x, \xi)}{\partial x_1} \\ &= (dX_1(\chi(x, \xi)), \dots, dX_n(\chi(x, \xi)), d\Xi_1(\chi(x, \xi)), \dots, d\Xi_n(\chi(x, \xi))) \\ & \quad \cdot H_p(\chi(x, \xi)) \\ &= (H_p X_1, \dots, H_p X_n, H_p \Xi_1, \dots, H_p \Xi_n)(\chi(x, \xi)) = (1, 0, \dots, 0). \end{aligned} \quad (5.125)$$

On déduit de (5.125) que,

$$H_p X_1 = 1, \quad H_p X_j = 0 \text{ si } j > 1 \text{ et } H_p \Xi_k = 0 \text{ si } 1 \leq k \leq n, \quad (5.126)$$

sur l'ensemble ouvert $\chi(V)$. Il suffit alors d'utiliser l'identité de Jacobi pour démontrer que les crochets de Poisson $\{X_j, X_l\}$, $\{\Xi_j, X_l\}$, $\{\Xi_j, \Xi_l\}$ sont constants sur les orbites du champ hamiltonien H_p si $1 \leq j, l \leq n$. En effet, étudions par exemple le cas du crochet de Poisson $\{X_j, X_l\}$. Les autres crochets de Poisson se traitent d'une manière identique. L'identité de Jacobi et (5.126) montrent que,

$$\begin{aligned} 0 &= \{p, \{X_j, X_l\}\} + \{X_j, \{X_l, p\}\} + \{X_l, \{p, X_j\}\} \\ &= \{p, \{X_j, X_l\}\} = H_p(\{X_j, X_l\}), \end{aligned} \quad (5.127)$$

sur l'ensemble ouvert $\chi(V)$. Cette identité (5.127) induit que le crochet de Poisson $\{X_j, X_l\}$ est constant le long des orbites du champ hamiltonien H_p . En utilisant enfin que les relations,

$$\{X_j, X_l\} = 0, \quad \{\Xi_j, X_l\} = \delta_{j,l}, \quad \{\Xi_j, \Xi_l\} = 0, \quad (5.128)$$

sont vérifiées sur l'ensemble ouvert $\chi(V_0)$ puisque d'après (5.108), l'application χ est une transformation symplectique de l'ensemble ouvert V_0 sur l'ensemble ouvert $\chi(V_0)$, les faits que les crochets de Poisson $\{X_j, X_l\}$, $\{\Xi_j, X_l\}$, $\{\Xi_j, \Xi_l\}$ pour $1 \leq j, l \leq n$ soient constants le long des orbites du champ hamiltonien H_p et que les courbes $x_1 \mapsto \chi(x_1, x'; \xi)$ soient des orbites du champ hamiltonien H_p puisque l'identité (5.112) est vérifiée sur l'ouvert V , on en déduit au regard de (5.118) que les relations (5.128) sont vérifiées sur l'ensemble $\chi(V)$. Ceci démontre que χ est une transformation symplectique réelle de l'ensemble ouvert V sur l'ouvert $\chi(V)$. Il nous reste encore pour terminer la démonstration de cette proposition 5.6 à vérifier que l'identité,

$$\chi^* p = \xi_1, \quad (5.129)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

est vérifiée sur l'ensemble ouvert V . Comme d'après (5.103) et (5.108),

$$(\chi^*p)(0, \varepsilon_n) = p(\gamma(0)) = 0,$$

cette identité (5.129) est une conséquence des identités suivantes vérifiées pour toute fonction f régulière sur l'ensemble ouvert V et de la propriété de connexité de l'ensemble V ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(\chi^*f) &= df(\chi(x, \xi)) \cdot \frac{\partial \chi(x, \xi)}{\partial x_1} = df(\chi(x, \xi)) \cdot H_p(\chi(x, \xi)) \\ &= \chi^*\{p, f\} = \{\chi^*p, \chi^*f\}, \end{aligned}$$

où on a utilisé successivement pour obtenir les égalités précédentes que l'identité (5.112) est vérifiée sur l'ensemble ouvert V et que χ est une transformation symplectique sur l'ensemble V . Ceci termine la démonstration de la proposition 5.6. \square

Le résultat suivant est une variante de la proposition 26.4.13 de [12].

Proposition 5.7. *Considérons une fonction $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ où $n \geq 2$, un intervalle compact $I := [a, b]$ tel que $a < b$ et $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ une bicaractéristique unidimensionnelle du symbole p i.e.,*

$$\forall t \in I, p(\gamma(t)) = 0 \text{ et } \gamma'(t) = c(t)H_p(\gamma(t)) \neq 0, \quad (5.130)$$

où $c \in C^\infty(I, \mathbb{C})$. On suppose que l'application $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ est injective. On peut alors trouver une transformation symplectique réelle χ d'un voisinage ouvert V de l'ensemble,

$$\{(x_1, 0'; \varepsilon_n) : x_1 \in I\} \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad (5.131)$$

où $\varepsilon_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, sur un voisinage ouvert de l'ensemble $\gamma(I)$ dans \mathbb{R}^{2n} et une fonction $a \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ qui ne s'annule pas sur l'ensemble $\gamma(I)$ telles que,

$$\forall x_1 \in I, \chi(x_1, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(x_1) \text{ et } \chi^*(ap) = \xi_1 + if(x, \xi'), \quad (5.132)$$

sur l'ensemble ouvert V , où f désigne une fonction C^∞ à valeurs réelles et indépendante de la variable ξ_1 .

Preuve. Le fait que l'application $t \in I \mapsto \gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ soit injective et que d'après (5.130), $\forall t \in I, \gamma'(t) \neq 0$, nous permet de trouver une fonction $q \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ telle que,

$$\forall t \in I, q(\gamma(t)) = c(t). \quad (5.133)$$

Nous allons vérifier que les identités suivantes sont bien vérifiées,

$$\forall t \in I, \gamma'(t) = H_{\text{Re}(qp)}(\gamma(t)) \text{ et } d\text{Im}(qp)(\gamma(t)) = 0. \quad (5.134)$$

En effet, constatons tout d'abord que d'après (5.130) et (5.133), on a

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= c(t)H_p(\gamma(t)) = q(\gamma(t))H_p(\gamma(t)) = (H_{qp} - pH_q)(\gamma(t)) \\ &= H_{qp}(\gamma(t)), \end{aligned} \quad (5.135)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

puisque $p(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in I$. En utilisant ensuite que $\gamma(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^{2n}$, on obtient que pour tout $t \in I$,

$$\gamma'(t) = H_{\text{Re}(qp)}(\gamma(t)) \text{ et } H_{\text{Im}(qp)}(\gamma(t)) = 0,$$

i.e.,

$$d\text{Im}(qp)(\gamma(t)) = 0,$$

ce qui démontre l'identité (5.134). On peut alors appliquer d'après (5.130) et (5.134) la proposition 5.6 à la fonction $\text{Re}(qp)$ pour trouver un voisinage ouvert V de l'ensemble,

$$\{(x_1, 0'; \varepsilon_n) : x_1 \in [a, b]\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

et une transformation symplectique réelle χ de l'ensemble ouvert V sur un voisinage ouvert $\chi(V)$ de l'ensemble $\gamma(I)$ dans \mathbb{R}^{2n} tels que,

$$\forall x_1 \in I, \chi(x_1, 0'; \varepsilon_n) = \gamma(x_1) \text{ et } \forall (x, \xi) \in V, \chi^*(\text{Re}(qp)) = \xi_1. \quad (5.136)$$

On déduit de (5.136) que l'on peut trouver une fonction $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ telle que,

$$\chi^*(qp) = \xi_1 + ig(x, \xi), \quad (5.137)$$

sur l'ensemble ouvert V . Comme d'après (5.130), $p(\gamma(I)) = \{0\}$, on obtient d'après (5.136) et (5.137) que,

$$g = 0 \text{ sur le segment } I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}. \quad (5.138)$$

En utilisant le fait que la transformation χ soit un difféomorphisme, on déduit aussi de (5.134), (5.136) et (5.137) que,

$$dg = 0 \text{ sur le segment } I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}. \quad (5.139)$$

On peut alors au regard de (5.138) appliquer le théorème de préparation de Malgrange (Théorème 7.5.6 dans [12]) au point $(\tilde{x}_0, 0'; \varepsilon_n)$ si $\tilde{x}_0 \in I$ pour trouver une constante $\varepsilon_0 > 0$ et des fonctions $h_{\tilde{x}_0}(x, \xi)$, $r_{\tilde{x}_0}(x, \xi')$ qui sont C^∞ sur un voisinage ouvert du point $(\tilde{x}_0, 0'; \varepsilon_n)$ dont la seconde est indépendante de la variable ξ_1 telles que,

$$\xi_1 = h_{\tilde{x}_0}(x, \xi)(\xi_1 + ig(x, \xi)) + r_{\tilde{x}_0}(x, \xi'), \quad (5.140)$$

pour tout $(x, \xi) \in V_{\tilde{x}_0}$ si,

$$V_{\tilde{x}_0} := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : |x_1 - \tilde{x}_0| < \varepsilon_0 \text{ et } |(x'; \xi) - (0'; \varepsilon_n)| < \varepsilon_0\}. \quad (5.141)$$

En utilisant la compacité du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$, on peut extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement formé par les ouverts $V_{\tilde{x}_0}$ pour tout $\tilde{x}_0 \in I$,

$$\bigcup_{x \in I} V_x, \quad I \times \{(0'; \varepsilon_n)\} \subset \bigcup_{j=1}^N V_{\tilde{x}_j}, \quad (5.142)$$

où,

$$V_{\tilde{x}_j} := \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n} : |x_1 - \tilde{x}_j| < \varepsilon_j \text{ et } |(x'; \xi) - (0'; \varepsilon_n)| < \varepsilon_j\}.$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Considérons ensuite une partition de l'unité C^∞ telle que,

$$\chi_1(x_1) + \dots + \chi_N(x_1) = 1, \quad (5.143)$$

si x_1 appartient à un voisinage ouvert du segment I contenu dans l'ensemble ouvert,

$$\bigcup_{j=1}^N \{x_1 \in \mathbb{R} : |x_1 - \tilde{x}_j| < \varepsilon_j\}, \quad (5.144)$$

et,

$$\chi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \text{supp}\chi_j \subset \{x_1 \in \mathbb{R} : |x_1 - \tilde{x}_j| < \varepsilon_j\}. \quad (5.145)$$

On en déduit que quitte à réduire suffisamment le voisinage ouvert V du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ l'identité,

$$\xi_1 = h(x, \xi)(\xi_1 + ig(x, \xi)) + r(x, \xi'), \quad (5.146)$$

est vérifiée sur l'ensemble ouvert V si on pose,

$$h(x, \xi) := \sum_{j=1}^N \chi_j(x_1) h_{\tilde{x}_j}(x, \xi) \quad \text{et} \quad r(x, \xi') := \sum_{j=1}^N \chi_j(x_1) r_{\tilde{x}_j}(x, \xi'). \quad (5.147)$$

Nous allons maintenant démontrer les identités suivantes,

$$h = 1 \quad \text{et} \quad dr = 0 \quad \text{sur le segment} \quad I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}. \quad (5.148)$$

En effet, en différentiant l'identité (5.146), on obtient l'identité,

$$d\xi_1 = h(x, \xi)(d\xi_1 + idg) + dh(x, \xi)(\xi_1 + ig) + dr(x, \xi'), \quad (5.149)$$

qui évaluée sur le segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ montre d'après (5.138) et (5.139) que,

$$d\xi_1 = h(x, \xi)d\xi_1 + dr(x, \xi'), \quad (5.150)$$

sur le segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$. En invoquant l'indépendance de la fonction r par rapport à la variable ξ_1 , l'identité (5.150) induit l'identité (5.148). Nous allons maintenant choisir de nouvelles coordonnées symplectiques locales sur l'ensemble ouvert V . Considérons tout d'abord les deux premières coordonnées,

$$y_1 := x_1 \quad \text{et} \quad \eta_1 := \xi_1 - \text{Rer}(x, \xi'). \quad (5.151)$$

Il reste à choisir les coordonnées restantes $y_2, \dots, y_n, \eta_2, \dots, \eta_n$. Commençons par constater que l'application $x_1 \in I \mapsto (x_1, 0'; \varepsilon_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ est injective et qu'elle est solution du problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} Y'(x_1) = H_{\eta_1}(Y(x_1)) \\ Y(0) = (0, \varepsilon_n), \end{cases} \quad (5.152)$$

puisque d'après (5.148) et (5.151),

$$\forall x_1 \in I, \quad H_{\eta_1}(x_1, 0'; \varepsilon_n) = (1, 0'; 0). \quad (5.153)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

Un raisonnement identique à celui utilisé lors de la démonstration de la proposition 5.6 à partir de (5.113) montre que le flot $\psi(x_1, x'; \xi)$ défini comme solution du problème de Cauchy,

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi(x_1, x'; \xi)}{\partial x_1} = H_{\eta_1}(\psi(x_1, x'; \xi)) \\ \psi(0, x'; \xi) = (0, x'; \xi), \end{cases} \quad (5.154)$$

est un difféomorphisme global d'un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ sur un autre voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ qui laisse invariant point par point ce segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$. En utilisant ce difféomorphisme ψ , on peut définir des variables $y_2, \dots, y_n, \eta_2, \dots, \eta_n$ définies sur un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ telles que,

$$y_2 := x_2, \dots, y_n := x_n, \eta_2 := \xi_2, \dots, \eta_n := \xi_n \text{ lorsque } x_1 = 0, \quad (5.155)$$

en imposant à ces variables $y_2, \dots, y_n, \eta_2, \dots, \eta_n$ d'être constantes le long des orbites du champ hamiltonien H_{η_1} . Par construction, on obtient que,

$$\{\eta_1, y_2\} = \dots = \{\eta_1, y_n\} = \{\eta_1, \eta_2\} = \dots = \{\eta_1, \eta_n\} = 0, \quad (5.156)$$

sur un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$. D'autre part, on a aussi d'après (5.151) que,

$$\{\eta_1, y_1\} = \{\xi_1 - \text{Rer}(x, \xi'), x_1\} = 1, \quad (5.157)$$

sur un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0', \varepsilon_n)\}$. Comme l'identité de Jacobi montre d'après (5.156) que,

$$0 = \{\eta_1, \{\eta_2, y_2\}\} + \{\eta_2, \{y_2, \eta_1\}\} + \{y_2, \{\eta_1, \eta_2\}\} = H_{\eta_1}(\{\eta_2, y_2\}), \quad (5.158)$$

il s'ensuit que le crochet de Poisson $\{\eta_2, y_2\}$ est constant le long des courbes intégrales du champ hamiltonien H_{η_1} . Le même raisonnement montre que c'est le cas également de tous les crochets de Poisson de deux variables choisies parmi $y_1, \dots, y_n, \eta_2, \dots, \eta_n$. On en déduit en utilisant le fait que ψ soit le difféomorphisme associé au problème de Cauchy (5.154) et d'après la définition que nous avons donnée des variables $y_2, \dots, y_n, \eta_2, \dots, \eta_n$ que les relations,

$$\{y_j, y_l\} = 0, \quad \{\eta_j, \eta_l\} = 0, \quad \{\eta_j, y_l\} = \delta_{j,l}, \quad (5.159)$$

pour $1 \leq j, l \leq n$, qui sont vérifiées pour $x_1 = 0$ sur un voisinage ouvert du point $(0', \varepsilon_n)$ d'après (5.151), (5.155), (5.156) et (5.157), le sont également sur un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$. On obtient ainsi une transformation symplectique réelle associée à ce changement de coordonnées locales,

$$\tilde{\chi}(y, \eta) = (x, \xi), \quad (5.160)$$

d'un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ sur un autre voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ qui d'après (5.151) laisse invariant point par point ce segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ et, vérifie d'après (5.146) et (5.151),

$$\tilde{\chi}^* [h(x, \xi)(\xi_1 + ig(x, \xi))] = \eta_1 + if(y, \eta), \quad (5.161)$$

3.2. Un résultat général d'existence de pseudo-spectre.

sur un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ si,

$$f(y, \eta) := -\text{Im}r(\tilde{\chi}(y, \eta)). \quad (5.162)$$

En utilisant que la transformation symplectique $\tilde{\chi}$ conserve les crochets de Poisson, on obtient d'après (5.151) et (5.162) que,

$$\frac{\partial f}{\partial \eta_1} = \{f, y_1\} = -\{\text{Im}r(x, \xi'), x_1\} = 0, \quad (5.163)$$

sur un voisinage ouvert du segment $I \times \{(0'; \varepsilon_n)\}$ puisque la fonction r est indépendante de la variable ξ_1 . On déduit finalement de (5.162) et (5.163) que la fonction f est à valeurs réelles et est indépendante de la variable η_1 , ce qui au regard de (5.130), (5.133), (5.136), (5.137), (5.148) et (5.161) termine la démonstration de la proposition 5.7. \square

Chapitre 4

Etude du pseudo-spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel.

Le quatrième chapitre de cette thèse propose une étude complète du pseudo-spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel. Il reprend le contenu de l'article [22], *A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator*, qui a été accepté pour publication dans le JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY et qui recouvre une étude complète des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques et des ensembles ε -pseudo-spectraux classiques de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel. Cette étude permet de donner une démonstration de la conjecture de Boulton énoncée à la section 1.2 du chapitre 1. Mentionnons que nous avons gardé ici la structure originelle de l'article [22], afin de permettre une lecture de ce texte indépendante de celle des chapitres précédents. Les numérotations et les notations adoptées sont de ce fait propres et internes à cet article.

Résumé. On étudie dans cet article les ensembles pseudo-spectraux de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel. Les ensembles pseudo-spectraux d'un opérateur sont des sous-ensembles du plan complexe qui décrivent les régions où la résolvante est grande en norme. L'étude de ces sous-ensembles permet de comprendre la stabilité du spectre par rapport à d'éventuelles perturbations de l'opérateur et le possible calcul de « valeurs propres aberrantes » pouvant être très éloignées des valeurs spectrales par les algorithmes pour le calcul numérique de valeurs propres. L'oscillateur harmonique non auto-adjoint est l'exemple le plus simple d'hamiltonien quadratique classique non auto-adjoint. Il a déjà fait l'objet de plusieurs études comme celles notamment de E.B.Davies et de L.S.Boulton. Dans un de ces travaux, L.S.Boulton énonce une conjecture concernant les ensembles pseudo-spectraux qui donne une description fine des instabilités spectrales qui se développent pour les hautes énergies de cet opérateur. On peut démontrer cette conjecture à partir d'un résultat de N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski qui donne une borne pour la norme de la résolvante de certains opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques dans un cadre très

général. Cet article propose une preuve plus élémentaire de ce résultat qui utilise seulement un découpage dans l'espace des fréquences.

1. Introduction.

1.1. Divers faits concernant les ensembles pseudo-spectraux.

Depuis quelques années, il y a eu un vif intérêt porté à l'étude de la notion de pseudo-spectre pour les opérateurs non auto-adjoints. Commençons par rappeler quelques faits classiques et connus sur cette notion. Le développement de ce sujet s'explique par le fait que dans un certain nombre de problèmes d'ingénierie mathématique où interviennent naturellement des opérateurs non auto-adjoints, on note de sensibles différences entre d'un côté les résultats théoriques et les prédictions suggérées par l'analyse spectrale de ces opérateurs, et d'un autre côté les résultats obtenus par simulation numérique. Ce constat originel laisse penser que dans certains cas la connaissance seule du spectre d'un opérateur ne permet pas de comprendre suffisamment son action. C'est ainsi que pour suppléer à cet apparent manque d'information contenu dans le spectre de nouveaux sous-ensembles du plan complexe appelés pseudo-spectres ont été introduits. L'idée sous-jacente à la définition de ces nouveaux objets est qu'il s'avère intéressant d'étudier non seulement les points où la résolvante d'un opérateur n'est pas définie i.e. son spectre mais également là où elle est en norme de taille significative.

On se réfère ici à l'article L.N.Trefethen [27] pour la définition du ε -pseudo-spectre $\sigma_\varepsilon(A)$ d'une matrice ou d'un opérateur A ,

$$\sigma_\varepsilon(A) := \left\{ z \in \mathbb{C}, \|(zI - A)^{-1}\| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

On convient d'écrire dans l'expression ci-dessus que $\|(zI - A)^{-1}\| = +\infty$ si le point z appartient au spectre de l'opérateur A . On constate que les ε -pseudo-spectres d'un opérateur sont des ensembles croissants au sens de l'inclusion par rapport au paramètre strictement positif ε et qu'ils contiennent tous le spectre de l'opérateur. L'étude des ensembles ε -pseudo-spectraux d'un opérateur se réduit donc d'après la définition précédente à l'étude des lignes de niveau de la norme de sa résolvante. Il est intéressant de noter que cette étude des lignes de niveau de la norme de la résolvante d'un opérateur permet d'apprécier sa stabilité spectrale par rapport à des perturbations. En effet, on peut donner une autre description des ensembles ε -pseudo-spectraux d'un opérateur en terme du spectre de perturbations de cet opérateur puisque pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, on a l'identité,

$$\sigma_\varepsilon(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{il existe une matrice } \Delta A \in M_n(\mathbb{C}) \text{ vérifiant } \|\Delta A\| \leq \varepsilon \right. \\ \left. \text{telle que } z \in \sigma(A + \Delta A) \right\},$$

si on note ci-dessus $\sigma(A + \Delta A)$ pour désigner le spectre de la matrice $A + \Delta A$. Cette deuxième description montre qu'un nombre complexe z appartient au ε -pseudo-spectre d'une matrice A si et seulement s'il appartient au spectre d'une perturbation $A + \Delta A$ de taille $\|\Delta A\| \leq \varepsilon$ de cette matrice. On comprend avec

ce nouveau point de vue l'intérêt d'étudier de tels sous-ensembles lorsque l'on cherche par exemple à déterminer numériquement les valeurs propres d'un opérateur. Pour mener à bien un tel calcul, on commence par effectuer une discrétisation de cet opérateur. Cette discrétisation et les inévitables erreurs d'arrondis qui se produisent lors des calculs numériques vont générer des perturbations de l'opérateur initial ce qui induit en fin de compte que les algorithmes pour le calcul des valeurs propres vont déterminer des valeurs propres d'une perturbation de l'opérateur initial i.e. une valeur d'un ε -pseudo-spectre mais pas nécessairement une valeur spectrale. Dans le cas auto-adjoint, le spectre d'un opérateur est stable sous de petites perturbations. Cette propriété de stabilité est une conséquence du théorème spectral qui induit que le ε -pseudo-spectre d'un opérateur auto-adjoint A coïncide exactement avec le ε -voisinage de son spectre $\sigma(A)$,

$$\sigma_\varepsilon(A) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, \sigma(A)) \leq \varepsilon\},$$

où $d(z, \sigma(A))$ désigne la distance entre le point z et l'ensemble $\sigma(A)$. Cependant, cette propriété de stabilité n'est généralement plus du tout vérifiée pour les opérateurs non auto-adjoints. Le spectre de ces opérateurs peut alors être très instable sous de petites perturbations.

1.2. Quelques résultats sur l'oscillateur harmonique non auto-adjoint.

L'oscillateur harmonique non auto-adjoint est défini comme l'opérateur,

$$H_c = -\frac{d^2}{dx^2} + cx^2,$$

où c désigne un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re} c > 0$ et $\operatorname{Im} c > 0$. On suppose que H_c opère sur $L^2(\mathbb{R})$ avec des conditions de Dirichlet aux bords. Plus précisément, l'opérateur H_c est défini comme la fermeture de l'opérateur m -sectoriel associé à la forme quadratique m -sectorielle Q_c via le théorème de représentation de Friedrichs (cf. [15]),

$$Q_c(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\overline{g'(x)}dx + c \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\overline{g(x)}dx,$$

où f, g sont des éléments de l'espace,

$$W^{1,2}(\mathbb{R}) \cap \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < +\infty \right\}.$$

Comme l'a démontré L.S.Boulton dans [2], les sous-espaces $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sont des cœurs pour la forme quadratique définissant l'opérateur H_c dont le spectre est composé uniquement de valeurs propres de multiplicité un,

$$\sigma(H_c) = \{\lambda_n = c^{1/2}(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$ et H_n désigne le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite,

$$\Psi_n(x) := c^{1/8} H_n(c^{1/4}x) e^{-c^{1/2}x^2/2},$$

est une fonction propre de H_c associée à la valeur propre λ_n ,

$$H_c \Psi_n = \lambda_n \Psi_n.$$

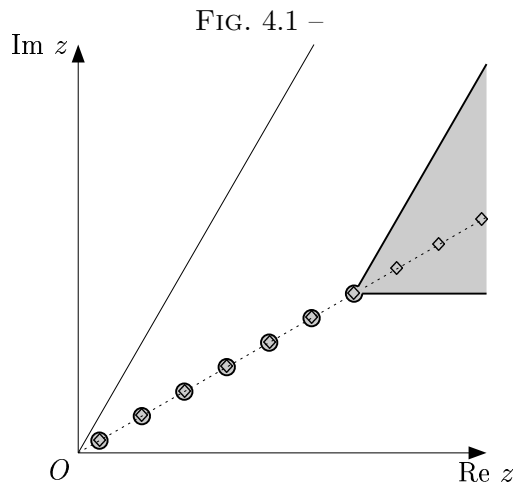
Dans son article [2], L.S.Boulton démontre tout d'abord que la norme de la résolvante tend vers l'infini le long des courbes de la forme $\eta \mapsto b\eta + c\eta^p$ (Théorème 3.3 dans [2]) où b et p sont des constantes strictement positives, indépendantes de η vérifiant $1/3 < p < 3$ i.e,

$$\|(H_c - (b\eta + c\eta^p))^{-1}\| \rightarrow +\infty \text{ lorsque } \eta \rightarrow +\infty. \quad (1.2.1)$$

D'un autre côté, il établit que la résolvante $(H_c - z)^{-1}$ reste bornée en norme lorsque $|z| \rightarrow +\infty$ le long de certaines demi-droites parallèles aux demi-droites \mathbb{R}^+ ou $c\mathbb{R}^+$. Plus précisément, il démontre qu'il existe des constantes strictement positives d et M_d telles que,

$$\sup_{\eta \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq b \leq d} \|(H_c - (\eta + ib))^{-1}\| \leq M_d \text{ et} \\ \sup_{\eta \in \mathbb{R}_+^*, 0 \leq b \leq d} \|(H_c - c(\eta - ib))^{-1}\| \leq M_d. \quad (1.2.2)$$

Ces bornes permettent d'obtenir certaines informations concernant la forme des ε -pseudo-spectres de l'opérateur H_c . En effet, au regard de ces résultats L.S.Boulton montre que pour toute valeur suffisamment petite du paramètre strictement positif ε , le ε -pseudo-spectre de l'opérateur H_c est contenu dans l'ensemble grisé de la figure suivante où les valeurs propres de H_c sont notées par les symboles \diamond .



Plus précisément, il établit que pour tout $0 < \delta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$, il existe une constante strictement positive ε_0 telle que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sigma_\varepsilon(H_c) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_n| < \delta\} \cup [\lambda_{m+1} - \delta c^{1/2} + S(0, \arg c)], \quad (1.2.3)$$

où,

$$S(0, \arg c) = \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \arg c\} \cup \{0\}.$$

Au regard de certaines simulations numériques réalisées par E.B.Davies dans [5], L.S.Boulton a conjecturé que l'indice $p = 1/3$ est réellement l'indice critique. Plus précisément, considérons des constantes $0 < p < 1/3$, $0 < \delta < 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Si $b_{m,p}$ et E sont des constantes strictement positives vérifiant,

$$b_{m,p}E + cE^p = \lambda_m \text{ et } \forall \eta > E, \arg z_\eta < \arg(c^{1/2}),$$

où $z_\eta = b_{m,p}\eta + c\eta^p$, on pose,

$$\Omega_{m,p} := \{|z_\eta|e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \eta \geq E \text{ et } \arg z_\eta \leq \theta \leq \arg(\overline{z_\eta}c/|c|)\}.$$

La conjecture de Boulton s'énonce comme suit.

Conjecture de Boulton. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\sigma_\varepsilon(H_c) \subset \bigcup_{n=0}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_m| < \delta\} \cup \Omega_{m,p}.$$

Le but de cet article est de démontrer ce résultat qui permet de préciser quelle est la forme des ε -pseudo-spectres de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. Notons qu'au regard de (1.2.1), cette description est optimale. La démonstration que nous allons proposer dans les lignes qui vont suivre, utilise l'étude dans un cadre semi-classique d'une autre notion de pseudo-spectre pour l'opérateur $-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2$, $r > 0$, $0 < \alpha < \pi$, que nous allons maintenant définir.

2. Pseudo-spectre semi-classique.

2.1. Définition du pseudo-spectre semi-classique et du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique.

Dans un cadre semi-classique, on définit deux notions d'ensembles pseudo-spectraux semi-classiques.

Définition 1. *Considérons $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ une famille semi-classique d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définis sur un domaine D . Pour tout $\mu \geq 0$, l'ensemble,*

$$\Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) = \{z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \|(P_h - z)^{-1}\| \geq Ch^{-\mu}\},$$

est appelé pseudo-spectre semi-classique d'indice μ de la famille $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ (on écrit par convention $\|(P_h - z)^{-1}\| = +\infty$ si z appartient au spectre de l'opérateur P_h). Le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini est défini par,

$$\Lambda_\infty^{\text{sc}}(P_h) = \bigcap_{\mu \geq 0} \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h).$$

Au regard de cette définition, les points de l'ensemble complémentaire de $\Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h)$ sont les points du plan complexe pour lesquels on a le contrôle suivant de la norme de la résolvante si h est suffisamment petit,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \|(P_h - z)^{-1}\| < Ch^{-\mu}.$$

Il est également intéressant d'introduire une autre notion qui est celle de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique.

Définition 2. *Considérons $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ une famille semi-classique d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définis sur un domaine D . Pour tout $\mu \geq 0$, l'ensemble,*

$$\lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) = \{z \in \mathbb{C} : \forall C > 0, \forall h_0 > 0, \exists 0 < h < h_0, \\ \exists u \in D, \|u\|_{L^2} = 1, \|(P_h - z)u\|_{L^2} \leq Ch^\mu\},$$

est appelé pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ de la famille $(P_h)_{0 < h \leq 1}$. Le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice infini est défini par,

$$\lambda_\infty^{\text{sc}}(P_h) = \bigcap_{\mu \geq 0} \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h).$$

Le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ est par définition l'ensemble des points du plan complexe qui sont des « presque valeurs propres » avec une décroissance en $O(h^\mu)$ lorsque $h \rightarrow 0^+$. On remarque que les ensembles pseudo-spectraux d'injectivité semi-classiques comme les ensembles pseudo-spectraux semi-classiques sont décroissants par rapport à l'indice. L'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique en un point donné est caractérisée par l'existence d'un certain type d'estimation a priori. En effet, il n'y a pas de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ au point z si et seulement si on a,

$$\exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in D, \\ \|(P_h - z)u\|_{L^2} \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2}. \quad (2.1.1)$$

On dit qu'il n'y a aucune perte de puissance de h , respectivement une perte d'au plus h^μ pour les points de l'ensemble complémentaire du pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice 0, respectivement d'indice μ lorsque le paramètre μ est strictement positif. En toute généralité, les inclusions suivantes sont vérifiées,

$$\forall \mu \geq 0, \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h) \subset \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h). \quad (2.1.2)$$

Pour obtenir l'égalité entre ces sous-ensembles, on a besoin d'une propriété supplémentaire de surjectivité concernant ces opérateurs qui est par exemple réalisée lorsque ces opérateurs sont des opérateurs de Fredholm d'indice 0. On peut aussi remarquer que si $P_h - z$ est un opérateur fermé à domaine dense et $\bar{z} \notin \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h^*)$, l'estimation a priori (2.1.1) pour l'opérateur $P_h^* - \bar{z}$ implique la surjectivité de l'opérateur $P_h - z$ si h est suffisamment petit. Sous ces hypothèses, $z \in \Lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h)$ implique que $z \in \lambda_\mu^{\text{sc}}(P_h)$.

En fait, si on suppose que $P_h - z$ est un opérateur fermé, l'absence de pseudo-spectre d'injectivité semi-classique au point z pour l'opérateur P_h donne un contrôle de la norme de l'inverse à gauche,

$$(P_h - z)^{-1} : \text{Im}(P_h - z) \rightarrow D,$$

puisque l'estimation (2.1.1) induit que l'image $\text{Im}(P_h - z)$ de l'opérateur $P_h - z$ est fermée dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Les définitions précédentes diffèrent de celle donnée dans [7] pour un opérateur pseudo-différentiel semi-classique. En fait, on a choisi des définitions d'ensembles pseudo-spectraux inspirées par la remarque de [7] p.388 puisque ces définitions dépendent des propriétés de l'opérateur plutôt que de celle de son symbole.

Remarque. Le spectre d'un opérateur auto-adjoint est purement réel. Cette propriété est encore vraie pour le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'une famille semi-classique d'opérateurs auto-adjoints. En effet, si $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ est une famille semi-classique d'opérateurs auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ définis sur un domaine D alors l'estimation a priori standard,

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall u \in D, \|P_h u - zu\|_{L^2} \geq |\text{Im } z| \|u\|_{L^2},$$

démontre que pour tout $\mu \geq 0$, le pseudo-spectre d'injectivité semi-classique d'indice μ de $(P_h)_{0 < h \leq 1}$ est contenu dans \mathbb{R} .

Exemple. Le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'oscillateur harmonique semi-classique,

$$-h^2 \frac{d^2}{dx^2} + x^2,$$

est exactement \mathbb{R}_+^* puisque son spectre est composé des valeurs propres de multiplicité un,

$$\{h(2n + 1) : n \in \mathbb{N}\},$$

et que l'on peut vérifier sur l'ensemble complémentaire de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{C} , les estimations suivantes,

$$\forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \left\| -h^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x^2 u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq h \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$\forall z \notin \mathbb{R}_+, \forall h > 0, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\left\| -h^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x^2 u - zu \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq d(z, \mathbb{R}_+) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

où $d(z, \mathbb{R}_+)$ désigne la distance entre le point z et l'ensemble \mathbb{R}_+ . Concernant l'oscillateur harmonique non auto-adjoint, la description de son spectre évoquée précédemment implique que les deux notions de pseudo-spectre semi-classique coïncident. En effet, au regard de (2.1.2) il suffit de démontrer les inclusions suivantes,

$$\forall \mu \geq 0, \Lambda_\mu^{\text{sc}}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2) \subset \lambda_\mu^{\text{sc}}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2),$$

si $r > 0$ et $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Si $z \notin \lambda_\mu^{\text{sc}}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2)$, on peut trouver d'après (2.1.1) des constantes strictement positives C et h_0 telles que,

$$\forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2 - z)u\|_{L^2} \geq Ch^\mu \|u\|_{L^2}. \quad (2.1.3)$$

Comme en utilisant le changement de variables $y = h^{1/2}x$ avec $h > 0$, on a

$$-(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2 = \frac{1}{h}(-h^2(\partial_y)^2 + re^{i\alpha}y^2),$$

il résulte de cette identité que le spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique,

$$-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2,$$

est composé uniquement des valeurs propres de multiplicité un,

$$(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2)\varphi_n(x) = h(2n+1)r^{1/2}e^{i\alpha/2}\varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

où,

$$\varphi_n(x) = r^{1/8}e^{i\alpha/8}H_n(r^{1/4}e^{i\alpha/4}h^{-1/2}x)\exp(-2^{-1}h^{-1}r^{1/2}e^{i\alpha/2}x^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

si H_n désigne le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Hermite. Ce dernier fait induit au regard de l'estimation (2.1.3) que z n'appartient pas au spectre de l'opérateur,

$$-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2,$$

et que,

$$\forall 0 < h < h_0, \quad \|(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2 - z)^{-1}\| \leq C^{-1}h^{-\mu}.$$

Ceci implique que $z \notin \Lambda_\mu^{\text{sc}}(-h^2(\partial_x)^2 + re^{i\alpha}x^2)$. L'intérêt de travailler et d'étudier des notions de pseudo-spectre dans un cadre semi-classique se résume à une question de géométrie. En effet pour cet opérateur, la géométrie des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques est plus simple à appréhender et à décrire que celle des ε -pseudo-spectres. Qui plus est, la connaissance de la géométrie des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques permet d'obtenir certaines informations sur la géométrie des ensembles ε -pseudo-spectraux.

2.2. Etude du pseudo-spectre semi-classique de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint.

2.2.1. Image numérique et pseudo-spectre. Considérons $p(x, \xi)$ un hamiltonien classique défini sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La quantification de Weyl¹ associée à cet hamiltonien l'opérateur p^w défini pour la fonction $u(x)$ par,

$$(p^w u)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi(x-y)\xi} p\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

L'image numérique $\Sigma(p)$ de l'hamiltonien p est alors défini comme l'ensemble suivant,

$$\Sigma(p) = p(\mathbb{R} \times \mathbb{R}).$$

¹Le choix de cette normalisation de la quantification de Weyl diffère de celui des chapitres précédents. Il est propre à tout ce chapitre 4.

Pour $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et $r > 0$, le symbole $p_\alpha(x, h\xi) = h^2\xi^2 + re^{i\alpha}x^2$ définit en quantification de Weyl l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique,

$$p_\alpha(x, h\xi)^w = (hD_x)^2 + re^{i\alpha}x^2,$$

où D_x désigne l'opérateur² $\partial_x/(2i\pi)$. L'image numérique de ce symbole est donnée par,

$$\begin{aligned} \{z \in \mathbb{C}^* : 0 \leq \arg z \leq \alpha\} \cup \{0\} & \text{ si } \alpha > 0, \\ \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha \leq \arg z \leq 0\} \cup \{0\} & \text{ si } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Le spectre de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique est composé uniquement des valeurs propres suivantes,

$$\{hr^{1/2}e^{i\alpha/2}(2n+1) : n \in \mathbb{N}\}. \quad (2.2.1)$$

On peut appliquer le théorème 4.2 démontré par L.Hörmander dans [11] pour prouver qu'il n'y a aucune perte de puissance de h pour les points de l'ensemble complémentaire de l'image numérique. Plus précisément, son résultat montre que,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0, \forall z \in \mathbb{C}, d(z, \Sigma(p_\alpha)) \geq \varepsilon, \forall 0 < h \leq 1, \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \\ \|(hD_x)^2u + re^{i\alpha}x^2u - zu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

En fait si $z \notin \Sigma(p_\alpha)$, on peut en utilisant l'ellipticité de l'opérateur (pseudo)-différentiel semi-classique $p_\alpha(x, h\xi)^w - z$ construire une paramétrix et trouver un inverse pour cet opérateur qui soit borné en norme uniformément en h pour h suffisamment petit. La situation est bien différente à l'intérieur de l'image numérique. En effet, le théorème 1 de E.B.Davies dans [6] montre que l'intérieur de l'image numérique est inclus dans le pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'opérateur,

$$p_\alpha(x, h\xi)^w = (hD_x)^2 + re^{i\alpha}x^2.$$

Pour finir la description des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques, nous allons maintenant étudier dans les lignes qui vont suivre l'éventuelle existence ou absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur la frontière de l'image numérique.

2.2.2. Etude à la frontière de l'image numérique. La définition de la transformée de Fourier que nous choisissons ici, est pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} u(x)e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

On utilisera aussi la notation \mathcal{F} pour désigner la transformation de Fourier. On rappelle qu'avec cette normalisation, on a

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \widehat{D_x u}(\xi) = \xi \widehat{u}(\xi) \text{ et } \widehat{xu}(\xi) = -D_\xi \widehat{u}(\xi).$$

²Cette nouvelle définition de l'opérateur D_x différente de l'opérateur $i^{-1}\partial_x$ qu'il désignait dans les chapitres précédents, est dictée par le choix particulier de la normalisation de la quantification de Weyl propre à ce chapitre 4.

Dans la suite, la notation (u, v) désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions u et v de $L^2(\mathbb{R})$. On commence par démontrer qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini en 0.

• *Etude de l'existence de pseudo-spectre semi-classique en 0.* Comme pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $r, h > 0$ et $\alpha \in]-\pi, \pi[$, on a

$$((hD_x)^2u + re^{i\alpha}x^2u, u) = \|hD_xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + re^{i\alpha}\|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

il découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que,

$$2\|(hD_x)^2u + re^{i\alpha}x^2u\|_{L^2(\mathbb{R})}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \operatorname{Re}((hD_x)^2u + re^{i\alpha}x^2u, u) + \operatorname{Re}((hD_x)^2u + re^{i\alpha}x^2u, e^{i\alpha}u) = (1 + \cos \alpha)(\|hD_xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + r\|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2).$$

En utilisant l'identité $[hD_x, ir^{1/2}x] = hr^{1/2}/(2\pi)I$ et le fait que les opérateurs hD_x et $ir^{1/2}x$ soient respectivement auto-adjoint et anti-auto-adjoint, on obtient que,

$$h\frac{r^{1/2}}{2\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = ([hD_x, ir^{1/2}x]u, u) = 2\operatorname{Re}(hD_xu, ir^{1/2}xu),$$

où $[P, Q]$ désigne le commutateur des opérateurs P et Q . On déduit alors d'une nouvelle utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour tout $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|hD_xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + r\|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq 2r^{1/2}\|hD_xu\|_{L^2(\mathbb{R})}\|xu\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq h\frac{r^{1/2}}{2\pi}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2,$$

ce qui induit au regard de ce qui précède que,

$$\forall h > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \|(hD_x)^2u + re^{i\alpha}x^2u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq (1 + \cos \alpha)\frac{r^{1/2}}{4\pi}h\|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En utilisant la description du spectre rappelée en (2.2.1) et cette dernière estimation, on en déduit que 0 n'appartient pas au pseudo-spectre semi-classique d'indice infini de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique si,

$$\alpha \in]-\pi, \pi[.$$

Considérons maintenant le cas où α appartient à l'ensemble $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et étudions s'il existe du pseudo-spectre semi-classique d'indice infini sur les demi-droites \mathbb{R}_+^* et $e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$.

• *Etude de l'existence de pseudo-spectre semi-classique sur $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$.* Nous allons démontrer dans ce paragraphe qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice infini pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique sur $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$. Plus précisément, nous allons montrer qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice $2/3$ sur cet ensemble i.e. qu'il y a une perte d'au plus $h^{2/3}$ sur $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$. Pour ce faire, on commence par démontrer le résultat du lemme suivant.

Lemme. *Considérons $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $r > 0$ et $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ . On a pour tout $h > 0$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ l'estimation a priori suivante,*

$$\|hD_x u + Vu + ir \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq (8\pi + (r|\sin \alpha|)^{-1})^{-1} h^{\frac{2}{3}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En particulier, il y a une perte d'au plus $h^{2/3}$ en 0 pour l'opérateur semi-classique $hD_x + V + ir \sin \alpha x^2$.

Preuve. On commence par étudier le cas où $0 < \alpha < \pi$. Considérons $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $X \in \mathbb{R}$ et Λ un paramètre strictement positif. On a,

$$\begin{aligned} (D_x u + \Lambda V u + i\Lambda r \sin \alpha x^2 u, iH(x - X)u) &= - \int_X^{+\infty} D_x u(x) \overline{iu(x)} dx \\ &\quad - i \int_X^{+\infty} \Lambda V(x) |u(x)|^2 dx + r \sin \alpha \int_X^{+\infty} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

si on note H la fonction de Heaviside. Comme

$$\begin{aligned} - \int_X^{+\infty} \partial_x u(x) \overline{u(x)} dx &= |u(X)|^2 + \overline{\int_X^{+\infty} \partial_x u(x) \overline{u(x)} dx}, \\ |u(X)|^2 &= -2 \operatorname{Re} \left(\int_X^{+\infty} \partial_x u(x) \overline{u(x)} dx \right), \end{aligned}$$

il s'ensuit que,

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} (D_x u + \Lambda V u + i\Lambda r \sin \alpha x^2 u, iH(x - X)u) &= |u(X)|^2 / (2\pi) \\ &\quad + 2r \sin \alpha \int_X^{+\infty} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx \geq |u(X)|^2 / (2\pi), \end{aligned}$$

puisque $0 < \alpha < \pi$. On en déduit les estimations suivantes,

$$\begin{aligned} \forall X \in \mathbb{R}, |u(X)|^2 / (2\pi) &\leq 2 \|D_x u + \Lambda V u + i\Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \\ \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 &\leq 4\pi \|D_x u + \Lambda V u + i\Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

En utilisant ensuite le découpage suivant de la norme L^2 de u , on obtient que,

$$\begin{aligned} &\Lambda^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &= \int_{\{x \in \mathbb{R} : \Lambda^{1/3} \leq x^2 \Lambda\}} \Lambda^{1/3} |u(x)|^2 dx + \int_{\{x \in \mathbb{R} : \Lambda^{1/3} > x^2 \Lambda\}} \Lambda^{1/3} |u(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx + \Lambda^{1/3} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 m(\{x \in \mathbb{R} : \Lambda^{1/3} > x^2 \Lambda\}), \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

où m désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Ensuite, comme $[D_x, i] = 0$ et que les opérateurs D_x et i sont respectivement auto-adjoint et anti-auto-adjoint, on obtient que,

$$\operatorname{Re}(D_x u + \Lambda V u + i\Lambda r \sin \alpha x^2 u, iu) = r \sin \alpha \int_{\mathbb{R}} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx. \quad (2.2.4)$$

Il s'ensuit en utilisant (2.2.2), (2.2.3), (2.2.4) et l'identité,

$$\Lambda^{1/3} m(\{x \in \mathbb{R} : \Lambda^{1/3} > x^2 \Lambda\}) = 2,$$

que,

$$\begin{aligned} & \Lambda^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} \Lambda x^2 |u(x)|^2 dx + 2 \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \\ & \leq \frac{1}{r \sin \alpha} \operatorname{Re}(D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u, i u) + 2 \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \\ & \leq (8\pi + (r \sin \alpha)^{-1}) \|D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'obtenir l'estimation,

$$\begin{aligned} \forall \Lambda > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad & \|D_x u + \Lambda V u + i \Lambda r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ & \geq (8\pi + (r \sin \alpha)^{-1})^{-1} \Lambda^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

En considérant maintenant le paramètre $h = \Lambda^{-1}$ pour revenir à un cadre semi-classique, on obtient l'estimation a priori,

$$\begin{aligned} \forall h > 0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad & \|h D_x u + V u + i r \sin \alpha x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ & \geq (8\pi + (r |\sin \alpha|)^{-1})^{-1} h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Cette dernière estimation montre qu'il y a une perte d'au plus $h^{2/3}$ en 0 pour l'opérateur semi-classique $h D_x + V + i r \sin \alpha x^2$. Pour obtenir la même estimation dans le cas où $-\pi < \alpha < 0$, il suffit d'appliquer l'estimation que nous venons de démontrer à la fonction \check{u} définie par $\check{u}(x) = u(-x)$. \square

Considérons η une constante strictement positive. Nous allons maintenant démontrer qu'il y a une perte d'au plus $h^{2/3}$ en η pour l'opérateur semi-classique $(h D_x)^2 + r e^{i\alpha} x^2$.

Proposition. *Considérons $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, $r > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha} \mathbb{R}_+^*$. Il existe alors des constantes strictement positives C et h_0 telles que,*

$$\forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|(h D_x)^2 u + r e^{i\alpha} x^2 u - \eta u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Le résultat de cette proposition peut être vu comme une conséquence du théorème 1.4 de N.Dencker, J.Sjöstrand et M.Zworski dans [7] qui donne sous des hypothèses générales une borne pour la norme de la résolvante de certains opérateurs pseudo-différentiels semi-classiques en un point de la frontière de leurs images numériques. Nous allons donner ici dans le cas particulier de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint unidimensionnel, une preuve de ce résultat qui utilise seulement un découpage dans l'espace des fréquences et des arguments élémentaires.

Preuve. Commençons par étudier le cas où η appartient à \mathbb{R}_+^* . Dans ce cas, on peut en fait se contenter de démontrer l'estimation a priori lorsque η est égal à 1 puisqu'en conjuguant par une isométrie, on obtient,

$$T_\eta^{-1}[(hD_x)^2 + re^{i\alpha}x^2 - \eta]T_\eta = \eta[(hD_x)^2 + re^{i\alpha}x^2/\eta^2 - 1],$$

si T_η désigne l'isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ définie par,

$$T_\eta u(x) := \eta^{1/4}u(\eta^{1/2}x).$$

Considérons a une constante strictement positive vérifiant,

$$0 < a < \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2^{5/3}}(8\pi + (r|\sin\alpha|)^{-1})^{-1/2}\right), \quad (2.2.5)$$

et χ une fonction C^∞ sur \mathbb{R} telle que $\chi(x) = 1$ si $x \leq 0$, $\chi(x) = 0$ si $x \geq 1$ et $\chi' \leq 0$ sur \mathbb{R} . On définit pour tout $\Lambda \geq 1$,

$$\chi_1^\Lambda(x) := \chi\left(\frac{|x - \Lambda| - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}}{2a\Lambda^{1/2}}\right).$$

Cette fonction est C^∞ sur \mathbb{R} puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \Lambda \\ x > \Lambda}} \partial_x^k \chi_1^\Lambda(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow \Lambda \\ x < \Lambda}} \partial_x^k \chi_1^\Lambda(x) = 0.$$

En effet, on a $\partial_x^k \chi(-\Lambda^{1/6} + 2^{-1}) = 0$ puisque $\chi^{(k)} = 0$ sur $] -\infty, 0]$ et $\Lambda \geq 1$. On considère ensuite,

$$\chi_{-1}^\Lambda(x) = \chi_1^\Lambda(-x).$$

On a les inclusions suivantes des supports,

$$\text{supp } \chi_1^\Lambda \subset \{x \in \mathbb{R} : \Lambda - 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2} \leq x \leq \Lambda + 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}\},$$

et,

$$\text{supp } \chi_{-1}^\Lambda \subset \{x \in \mathbb{R} : -\Lambda - 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2} \leq x \leq -\Lambda + 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}\}.$$

Comme d'un côté, on a

$$0 \leq \chi_1^\Lambda \leq 1, \quad 0 \leq \chi_{-1}^\Lambda \leq 1 \quad \text{et} \quad \text{supp } \chi_1^\Lambda \cap \text{supp } \chi_{-1}^\Lambda = \emptyset,$$

puisque d'après l'estimation (2.2.5), on a

$$\forall \Lambda \geq 1, \quad 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2} < \Lambda,$$

et que d'un autre côté, $\chi_1^\Lambda = 1$ sur l'ensemble,

$$\{x \in \mathbb{R} : \Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2} \leq x \leq \Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2}\},$$

qui contient le segment $[\Lambda - a\Lambda^{2/3}, \Lambda + a\Lambda^{2/3}]$, et $\chi_{-1}^\Lambda = 1$ sur l'ensemble,

$$\{x \in \mathbb{R} : -\Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2} \leq x \leq -\Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2}\},$$

qui contient le segment $[-\Lambda - a\Lambda^{2/3}, -\Lambda + a\Lambda^{2/3}]$, on obtient une partition de l'unité C^∞ de \mathbb{R} ,

$$\forall \Lambda \geq 1, \chi_\infty^\Lambda + \chi_0^\Lambda + \chi_{-1}^\Lambda + \chi_1^\Lambda = 1,$$

en posant,

$$\begin{aligned} \chi_0^\Lambda(x) &= \mathbb{1}_{[-\Lambda, \Lambda]}(x)(1 - \chi_1^\Lambda(x) - \chi_{-1}^\Lambda(x)) \text{ et} \\ \chi_\infty^\Lambda(x) &= \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus [-\Lambda, \Lambda]}(x)(1 - \chi_1^\Lambda(x) - \chi_{-1}^\Lambda(x)), \end{aligned}$$

où $\mathbb{1}_X$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble X . La construction qui est la nôtre induit les propriétés suivantes,

$$0 \leq \chi_0^\Lambda \leq 1, \quad 0 \leq \chi_\infty^\Lambda \leq 1,$$

$$\text{supp } \chi_0^\Lambda \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}\},$$

et,

$$\text{supp } \chi_\infty^\Lambda \subset \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2}\}.$$

Dans les calculs qui vont suivre, on désigne par specu le support de \hat{u} . On commence par étudier les régions où respectivement $|\xi| \ll \Lambda$ et $|\xi| \gg \Lambda$. Considérons,

$$P_\Lambda = D_x^2 + r e^{i\alpha} \Lambda^2 x^2 - \Lambda^2,$$

et

$$A_0^\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \leq \Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}\}.$$

On a pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \text{Re}(P_\Lambda u, -u) = \Lambda^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|D_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\quad - r \cos \alpha \Lambda^2 \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Comme $\text{Re}(P_\Lambda u, i(\text{sgn } \alpha)u) = r|\sin \alpha| \Lambda^2 \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ si $\text{sgn } \alpha$ désigne le signe de α , on en déduit que,

$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \Lambda^2 \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq (r|\sin \alpha|)^{-1} \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.7)$$

Il découle alors de (2.2.6) et (2.2.7) que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant,

$$\text{specu} \subset A_0^\Lambda,$$

$$\begin{aligned} (1 + |\cotan \alpha|) \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \Lambda^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \|D_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (\Lambda^2 - \xi^2) |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq (\Lambda^2 - (\Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Comme l'estimation (2.2.5) implique que,

$$\begin{aligned} \forall \Lambda \geq 1, \quad \Lambda^2 - (\Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2 &= \\ &= (2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2})(2\Lambda - 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}) \geq a\Lambda^{5/3}, \end{aligned}$$

on obtient pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{spec} u \subset A_0^\Lambda$ et $\Lambda \geq 1$ que,

$$\|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq a(1 + |\cotan \alpha|)^{-1} \Lambda^{5/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.8)$$

Concernant la seconde région dans laquelle $|\xi| \gg \Lambda$, il suffit juste de changer le multiplicateur $-u$ en u pour obtenir une estimation similaire. En effet, considérons,

$$A_\infty^\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R} : |\xi| \geq \Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2}\}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \text{Re}(P_\Lambda u, u) = \|D_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \Lambda^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\quad + r \cos \alpha \Lambda^2 \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

on déduit de (2.2.7) et (2.2.9) que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{spec} u \subset A_\infty^\Lambda$,

$$\begin{aligned} (1 + |\cotan \alpha|) \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \|D_x u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 - \Lambda^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (\xi^2 - \Lambda^2) |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \geq ((\Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2})^2 - \Lambda^2) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned}$$

Comme l'estimation (2.2.5) implique que,

$$\begin{aligned} \forall \Lambda \geq 1, (\Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2})^2 - \Lambda^2 &= \\ &= (2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2})(2\Lambda + 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2}) \geq a\Lambda^{5/3}, \end{aligned}$$

on en déduit que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{spec} u \subset A_\infty^\Lambda$ et $\Lambda \geq 1$,

$$\|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq a(1 + |\cotan \alpha|)^{-1} \Lambda^{5/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.10)$$

Nous avons maintenant besoin d'étudier les régions pour lesquelles $\xi \sim \Lambda$ et $\xi \sim -\Lambda$. Considérons la première région,

$$A_1^\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R} : \Lambda - 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2} \leq \xi \leq \Lambda + 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}\},$$

et L_Λ l'opérateur suivant,

$$L_\Lambda = 2\Lambda(D_x - \Lambda) + re^{i\alpha} \Lambda^2 x^2.$$

Pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{spec} u \subset A_1^\Lambda$, on a

$$\begin{aligned} \|(P_\Lambda - L_\Lambda)u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|(\xi - \Lambda)^2 \widehat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq (2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Il découle du lemme précédent que,

$$\begin{aligned} \|L_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \Lambda^2 \|2\Lambda^{-1} D_x u - 2u + re^{i\alpha} x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq \Lambda^{4/3} 2^{2/3} (8\pi + (r|\sin \alpha|)^{-1})^{-1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

On déduit alors de (2.2.11) et (2.2.12) que pour tout $\Lambda \geq 1$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{spec}u \subset A_1^\Lambda$,

$$\begin{aligned} \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \|L_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} - \|(P_\Lambda - L_\Lambda)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq \left(\Lambda^{4/3} 2^{2/3} (8\pi + (r|\sin \alpha|)^{-1})^{-1} - (2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2 \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Au regard du choix de la constante a en (2.2.5), on déduit que pour tout $\Lambda \geq 1$,

$$\begin{aligned} &\Lambda^{4/3} 2^{2/3} (8\pi + (r|\sin \alpha|)^{-1})^{-1} - (2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2 \\ &= \left(\Lambda^{2/3} 2^{1/3} (8\pi + (r|\sin(\alpha)|)^{-1})^{-1/2} - 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2} \right) \\ &\times \left(\Lambda^{2/3} 2^{1/3} (8\pi + (r|\sin(\alpha)|)^{-1})^{-1/2} + 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2} \right) \\ &\geq 2a\Lambda^{4/3} \left(2^{1/3} (8\pi + (r|\sin(\alpha)|)^{-1})^{-1/2} - 3a \right) \geq 2a^2 \Lambda^{4/3}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Il s'ensuit que,

$$\forall \Lambda \geq 1, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{spec}u \subset A_1^\Lambda, \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq 2a^2 \Lambda^{4/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.14)$$

D'une manière analogue pour la région,

$$A_{-1}^\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R} : -\Lambda - 2a\Lambda^{2/3} - a\Lambda^{1/2} \leq \xi \leq -\Lambda + 2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2}\},$$

on considère l'opérateur,

$$\tilde{L}_\Lambda = -2\Lambda(D_x + \Lambda) + re^{i\alpha} \Lambda^2 x^2.$$

On a pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ vérifiant $\text{spec}u \subset A_{-1}^\Lambda$,

$$\begin{aligned} \|(P_\Lambda - \tilde{L}_\Lambda)u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|(\xi + \Lambda)^2 \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\leq (2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

En utilisant à nouveau le lemme précédent, on obtient que,

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \Lambda^2 \|2\Lambda^{-1} D_x u + 2u - re^{i\alpha} x^2 u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq \Lambda^{4/3} 2^{2/3} (8\pi + (r|\sin \alpha|)^{-1})^{-1} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Il découle alors de (2.2.15) et (2.2.16) que,

$$\begin{aligned} \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} &\geq \|\tilde{L}_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} - \|(P_\Lambda - \tilde{L}_\Lambda)u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &\geq \left(\Lambda^{4/3} 2^{2/3} (8\pi + (r|\sin \alpha|)^{-1})^{-1} - (2a\Lambda^{2/3} + a\Lambda^{1/2})^2 \right) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

ce qui induit au regard de (2.2.13) l'estimation suivante,

$$\forall \Lambda \geq 1, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \text{spec}u \subset A_{-1}^\Lambda, \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq 2a^2 \Lambda^{4/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.2.17)$$

En utilisant notre partition de l'unité, on peut maintenant combiner les estimations précédentes. En collectant les estimations (2.2.8), (2.2.10), (2.2.14) et

(2.2.17), on en déduit que pour tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
& \forall \Lambda \geq 1, \Lambda^{8/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= \Lambda^{8/3} \|(\chi_\infty^\Lambda(\xi) + \chi_0^\Lambda(\xi) + \chi_{-1}^\Lambda(\xi) + \chi_1^\Lambda(\xi)) \widehat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq 4\Lambda^{8/3} (\|\chi_\infty^\Lambda(D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\chi_0^\Lambda(D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\chi_{-1}^\Lambda(D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\quad + \|\chi_1^\Lambda(D_x)u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2) \\
&\leq \frac{C}{2} \left(\|P_\Lambda(\chi_\infty^\Lambda(D_x)u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|P_\Lambda(\chi_0^\Lambda(D_x)u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|P_\Lambda(\chi_{-1}^\Lambda(D_x)u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|P_\Lambda(\chi_1^\Lambda(D_x)u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right),
\end{aligned}$$

où C est une constante strictement positive indépendante de Λ et u . On a noté par $f(D_x)$ l'opérateur de multiplication par la fonction $f(\xi)$ côté fréquence.

$$\begin{aligned}
& \forall \Lambda \geq 1, \Lambda^{8/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq C \left(\|\chi_\infty^\Lambda(D_x)(P_\Lambda u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\chi_0^\Lambda(D_x)(P_\Lambda u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right. \\
&\quad + \|\chi_{-1}^\Lambda(D_x)(P_\Lambda u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|\chi_1^\Lambda(D_x)(P_\Lambda u)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\quad + \|[P_\Lambda, \chi_\infty^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|[P_\Lambda, \chi_0^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\quad \left. + \|[P_\Lambda, \chi_{-1}^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|[P_\Lambda, \chi_1^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right) \\
&\leq C \left(\|[P_\Lambda, \chi_\infty^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|[P_\Lambda, \chi_0^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right. \\
&\quad \left. + \|[P_\Lambda, \chi_{-1}^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|[P_\Lambda, \chi_1^\Lambda(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \right).
\end{aligned}$$

Considérons f une fonction à valeurs réelles de l'espace $C^\infty(\mathbb{R})$ telle que,

$$Df \in L^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } D^2f \in L^\infty(\mathbb{R}).$$

On a besoin d'évaluer le commutateur $[P_\Lambda, f(D_x)] = [re^{i\alpha}\Lambda^2x^2, f(D_x)]$. Pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, un calcul direct donne,

$$[re^{i\alpha}\Lambda^2x^2, f(D_x)]u = re^{i\alpha}\Lambda^2\mathcal{F}^{-1}((D^2f)\widehat{u} + 2(Df)D_\xi\widehat{u}).$$

Il s'ensuit que,

$$\begin{aligned}
\|[P_\Lambda, f(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= r^2\Lambda^4 \|(D^2f)\widehat{u} + 2(Df)D_\xi\widehat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\leq 2r^2\Lambda^4 (\|D^2f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + 4\|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|xu\|_{L^2(\mathbb{R})}^2),
\end{aligned}$$

ce qui induit au regard de (2.2.7) que,

$$\begin{aligned}
\|[P_\Lambda, f(D_x)]u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq 2r^2\Lambda^4 \|D^2f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&\quad + 8r\Lambda^2 |\sin \alpha|^{-1} \|Df\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Comme d'après le choix de notre partition de l'unité, on a

$$\forall j \in J, \|D\chi_j^\Lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_{1,j}\Lambda^{-1/2} \text{ et } \|D^2\chi_j^\Lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_{2,j}\Lambda^{-1},$$

si $J = \{0, -1, 1, \infty\}$, où $C_{1,j}$ et $C_{2,j}$ sont des constantes strictement positives indépendantes de Λ . On obtient pour tout $j \in J$,

$$\begin{aligned} & \| [P_\Lambda, \chi_j^\Lambda(D_x)]u \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & \leq 2r^2 \Lambda^2 C_{2,j}^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \frac{8r\Lambda}{|\sin \alpha|} C_{1,j}^2 \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ & \leq \tilde{C}_{1,j} \Lambda^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \tilde{C}_{2,j} \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

où $\tilde{C}_{1,j}$ et $\tilde{C}_{2,j}$ sont des constantes strictement positives indépendantes de Λ et u . Il s'ensuit qu'il existe des constantes strictement positives C_1 et C_2 telles que,

$$\forall \Lambda \geq 1, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \Lambda^{8/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_1 \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 + C_2 \Lambda^2 \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Finalement, on obtient l'existence d'une constante strictement positive \tilde{C} telle que pour Λ_0 assez grand, on ait

$$\forall \Lambda \geq \Lambda_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \|P_\Lambda u\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq \tilde{C} \Lambda^{4/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

En reformulant cette estimation dans un cadre semi-classique via le changement de paramètre $h = \Lambda^{-1}$, on obtient que,

$$\begin{aligned} \exists C > 0, \exists h_0 > 0, \forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad & \| (hD_x)^2 u + r e^{i\alpha} x^2 u - u \|_{L^2(\mathbb{R})} \\ & \geq C h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où η appartient à $e^{i\alpha} \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la transformation de Fourier, cette étude pseudo-spectrale sur $e^{i\alpha} \mathbb{R}_+^*$ est essentiellement la même que celle sur \mathbb{R}_+^* . En effet, considérons $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et η une constante strictement positive, comme

$$\begin{aligned} & \| (hD_x)^2 u + r e^{i\alpha} x^2 u - e^{i\alpha} \eta u \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & = \| (h\xi)^2 \hat{u} + r e^{i\alpha} D_\xi^2 \hat{u} - e^{i\alpha} \eta \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & = r^2 \| D_\xi^2 \hat{u} - r^{-1} \eta \hat{u} + (h\xi)^2 r^{-1} e^{-i\alpha} \hat{u} \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\ & = \frac{r^2}{h} \| (hD_x)^2 v + r^{-1} e^{-i\alpha} x^2 v - r^{-1} \eta v \|_{L^2(\mathbb{R})}^2, \end{aligned}$$

où $v(x) = \hat{u}(h^{-1}x)$. On déduit de l'étude sur \mathbb{R}_+^* qu'il existe des constantes strictement positives C et h_0 telles que,

$$\forall 0 < h < h_0, \quad \frac{r^2}{h} \| (hD_x)^2 v + r^{-1} e^{-i\alpha} x^2 v - r^{-1} \eta v \|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \geq \frac{r^2}{h} C^2 h^{4/3} \|v\|_{L^2(\mathbb{R})}^2.$$

Comme $\|v\|_{L^2(\mathbb{R})} = h^{1/2} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$, on obtient que,

$$\begin{aligned} \forall 0 < h < h_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ & \| (hD_x)^2 u + r e^{i\alpha} x^2 u - e^{i\alpha} \eta u \|_{L^2(\mathbb{R})} \geq r C h^{2/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

On a ainsi démontré qu'il n'y a pas de pseudo-spectre semi-classique d'indice 2/3 en tout point de l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \cup e^{i\alpha}\mathbb{R}_+^*$ pour l'opérateur semi-classique,

$$(hD_x)^2 + re^{i\alpha}x^2,$$

lorsque $\alpha \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ et $r > 0$. Ces résultats achèvent la description des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint semi-classique.

3. Forme des ensembles pseudo-spectraux.

Au regard de la description précédente des ensembles pseudo-spectraux semi-classiques, on peut démontrer la conjecture de Boulton. Ce résultat est une conséquence de l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 2/3 en tout point de l'ensemble $\partial\Sigma(p_\alpha) \setminus \{0\}$ pour l'oscillateur harmonique non auto-adjoint. En effet, considérons l'opérateur semi-classique $(hD_x)^2 + c/(4\pi^2)x^2$ où c est un nombre complexe vérifiant $\operatorname{Re} c > 0$ et $\operatorname{Im} c > 0$. Comme une conjugaison par l'isométrie T_h où T_h désigne l'isométrie de $L^2(\mathbb{R})$ définie par,

$$T_h u(x) := h^{1/4} u(h^{1/2}x),$$

montre que,

$$\forall \nu > 0, \forall h > 0, h^{-1}((hD_x)^2 + c/(4\pi^2)x^2 - \nu) = T_h^{-1}(D_x^2 + c/(4\pi^2)x^2 - \nu h^{-1})T_h,$$

on déduit d'après l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 2/3 en 1 et en c pour cet opérateur qu'il existe des constantes strictement positives ν_0 et C telles que,

$$\forall \nu \geq \nu_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \left\| -\frac{d^2}{dx^2}u + cx^2u - \nu u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C\nu^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

$$\forall \nu \geq \nu_0, \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \left\| -\frac{d^2}{dx^2}u + cx^2u - \nu cu \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \geq C\nu^{1/3} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Ces estimations a priori impliquent que si ν_0 est choisi suffisamment grand, on a pour tout z_0 dans l'ensemble,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \nu_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C(\operatorname{Re} z)^{1/3} - \varepsilon \right\} \cup S_c \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \nu_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C(\operatorname{Re} z)^{1/3} - \varepsilon \right\} \right),$$

que $z_0 \notin \sigma(H_c)$ et,

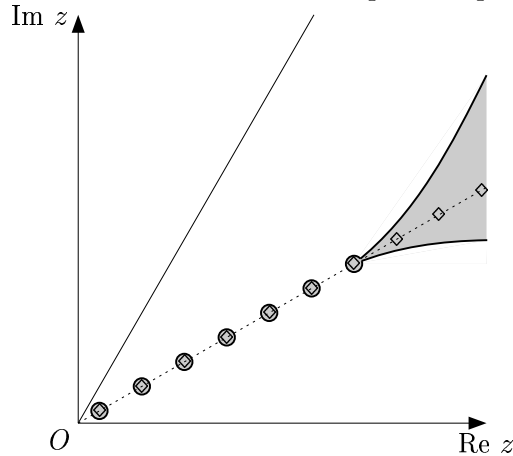
$$\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \left\| \left(-\frac{d^2}{dx^2} + cx^2 - z_0 \right)^{-1} u \right\|_{L^2(\mathbb{R})} < \frac{1}{\varepsilon} \|u\|_{L^2(\mathbb{R})},$$

si S_c désigne la symétrie axiale par rapport à la droite $e^{i \arg c/2}\mathbb{R}$. Il s'ensuit que,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \nu_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C(\operatorname{Re} z)^{1/3} - \varepsilon \right\} \cup S_c \left(\left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq \nu_0 \text{ et } 0 \leq \operatorname{Im} z < C(\operatorname{Re} z)^{1/3} - \varepsilon \right\} \right) \subset \sigma_\varepsilon(H_c)^c.$$

Finale­ment, en utilisant cette dernière inclusion, (1.2.3) et le fait que la norme de la résolvante reste bornée sur les sous-ensembles compacts inclus dans l'ensemble résolvant, on obtient le résultat conjecturé par L.S.Boulton. Ce résultat est optimal au regard de (1.2.1). On a ainsi démontré que l'indice $p = 1/3$ est l'indice critique. Ces résultats permettent de décrire la forme des ε -pseudo-spectres de l'opérateur H_c (ensemble grisé sur la figure ci-contre) et donnent des informations précises sur les instabilités spectrales qui peuvent se vérifier numériquement.

FIG. 4.2 – Forme des ensembles ε -pseudo-spectraux.

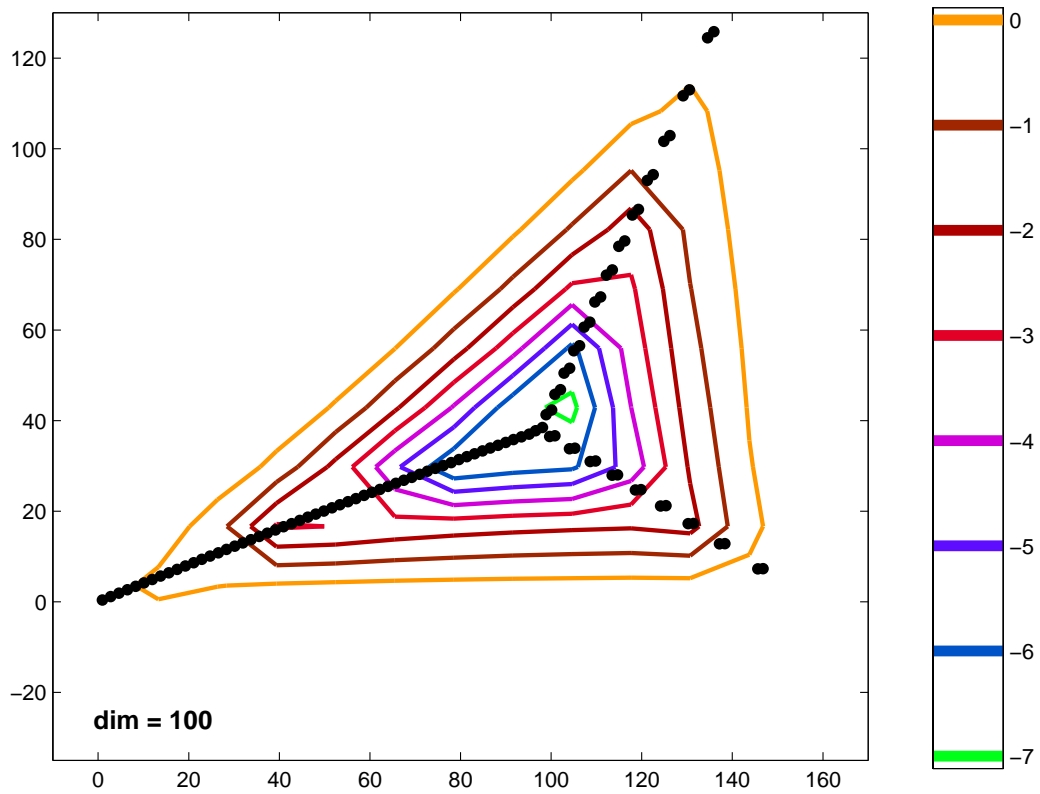


Pour illustrer ce fait, on peut essayer de déterminer numériquement le spectre et quelques lignes de niveau de la norme de la résolvante pour une discrétisation de l'opérateur H_c . La simulation numérique suivante est réalisée sur la discrétisation matricielle,

$$((H_c \Psi_i, \Psi_j)_{L^2(\mathbb{R})})_{1 \leq i, j \leq N},$$

où $c = e^{i\pi/4}$, N est un entier pris égal à 100 et $(\Psi_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ désigne la base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$ formées par les fonctions de Hermite. Les points noirs apparaissant sur la simulation numérique désignent les valeurs propres calculées numériquement. Cette simulation numérique corrobore les résultats d'estimation de norme de la résolvante obtenus dans cet article. En effet, on vérifie bien que les basses énergies sont stables puisque l'on calcule bien pour ces énergies des valeurs proches des valeurs théoriques. Par contre, comme l'a montré notre étude, on constate de très fortes instabilités pour les hautes énergies qui conduisent au calcul de « valeurs propres aberrantes » très éloignées de la droite $e^{i\pi/8}\mathbb{R}$ ce qui est caractéristique du fait que la norme de la résolvante explose loin du spectre de l'opérateur. Notons pour finir que l'on peut trouver des simulations numériques comparables dans [5].

FIG. 4.3 – Calcul de quelques lignes de niveau $\{z \in \mathbb{C} : \|(zI - H_c)^{-1}\| = \varepsilon^{-1}\}$ de la norme de la résolvante de l'oscillateur harmonique non auto-adjoint H_c avec $c = e^{i\pi/4}$. La colonne de droite donne les valeurs correspondantes de $\log_{10} \varepsilon$.



Appendice : précis de calcul symbolique.

Nous allons rappeler dans cet appendice quelques résultats classiques de calcul symbolique propres à la quantification de Weyl et à la quantification de Weyl semi-classique dont nous usons dans les différents chapitres de cette thèse. Commençons par définir formellement la classe de fonctions,

$$S(m(x, \xi, h), \rho_1(x, \xi, h)^2 dx^2 + \rho_2(x, \xi, h)^2 d\xi^2),$$

comme l'ensemble des fonctions $a(x, \xi, h) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ pour tout $0 < h \leq 1$ où $n \in \mathbb{N}^*$, qui vérifient,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

$$\sup_{\substack{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \\ 0 < h \leq 1}} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, h)| m(x, \xi, h)^{-1} \rho_1(x, \xi, h)^{-|\alpha|} \rho_2(x, \xi, h)^{-|\beta|} < +\infty.$$

Une classe de symboles semi-classiques.

Nous utilisons dans ce manuscrit les classes de symboles semi-classiques,

$$S(h^N \langle X \rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

où $N \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{R}$, $\langle X \rangle := (1 + |X|^2)^{1/2}$ pour $X := x \in \mathbb{R}^n$ ou $X := (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et,

$$S(h^\infty \langle X \rangle^m, dx^2 + d\xi^2) := \bigcap_{N \in \mathbb{N}} S(h^N \langle X \rangle^m, dx^2 + d\xi^2).$$

Un symbole semi-classique $a(x, \xi, h)$ de la classe,

$$S(h^N \langle X \rangle^m, dx^2 + d\xi^2),$$

définit en quantification de Weyl semi-classique l'opérateur pseudo-différentiel $a(x, h\xi, h)^w$,

$$a(x, h\xi, h)^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} a\left(\frac{x+y}{2}, h\xi, h\right) u(y) dy d\xi.$$

Remarquons que l'opérateur pseudo-différentiel obtenu par la quantification de Weyl semi-classique du symbole $a(x, \xi, h)$ est l'opérateur pseudo-différentiel obtenu

par la quantification de Weyl du symbole $a(x, h\xi, h)$ et que les équivalences suivantes sont vérifiées,

$$a(x, \xi, h) \in S(h^N \langle x \rangle^m, dx^2 + d\xi^2) \iff a(x, h\xi, h) \in S(h^N \langle x \rangle^m, dx^2 + h^2 d\xi^2),$$

et,

$$a(x, \xi, h) \in S(h^N \langle (x, \xi) \rangle^m, dx^2 + d\xi^2) \iff a(x, h\xi, h) \in S(h^N \langle (x, h\xi) \rangle^m, dx^2 + h^2 d\xi^2),$$

si $0 < h \leq 1$. On note $\text{Op}^w(S)$, respectivement $\text{Op}_h^w(S)$, l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels obtenus par la quantification de Weyl, respectivement la quantification de Weyl semi-classique d'un symbole de la classe S . La métrique riemannienne $g_h = dx^2 + h^2 d\xi^2$ est uniformément σ tempérée par rapport au paramètre $0 < h \leq 1$ puisque c'est une métrique constante (voir la définition 18.5.1 dans [12]) et vérifie le principe d'incertitude,

$$g_h \leq g_h^\sigma,$$

puisque dans ce cas la métrique duale g_h^σ est égale à la métrique $h^{-2}dx^2 + d\xi^2$ et que,

$$\sup_{t \neq 0} \frac{g_h(t)}{g_h^\sigma(t)} = h^2 \leq 1,$$

si $0 < h \leq 1$. On peut vérifier explicitement que les poids,

$$h^N \langle x \rangle^m \text{ et } h^N \langle (x, h\xi) \rangle^m,$$

sont uniformément σ, g_h tempérés par rapport au paramètre $0 < h \leq 1$ si $N \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{R}$ (voir la définition 18.5.1 dans [12]) ce qui nous permet d'utiliser pour cette classe de symbole les résultats de calcul symbolique propres à la quantification de Weyl comme le théorème 18.5.4 de la section 18.5 dans [12]. Ce théorème 18.5.4 montre par exemple que l'opérateur pseudo-différentiel $p(x, \xi, h)^w$ obtenu comme composition des deux opérateurs pseudo-différentiels $a_1(x, h\xi, h)^w$ et $a_2(x, h\xi, h)^w$ où,

$$a_1 \in S(h^{N_1} \langle (x, \xi) \rangle^{m_1}, dx^2 + d\xi^2),$$

$$a_2 \in S(h^{N_2} \langle (x, \xi) \rangle^{m_2}, dx^2 + d\xi^2),$$

$N_1 \in \mathbb{N}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $m_1 \in \mathbb{R}$ et $m_2 \in \mathbb{R}$;

$$p(x, \xi, h)^w := a_1(x, h\xi, h)^w a_2(x, h\xi, h)^w,$$

est défini en quantification de Weyl par le symbole,

$$p(x, \xi, h) = e^{\frac{i}{2}\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)} a_1(x, h\xi, h) a_2(y, h\eta, h) \Big|_{(x, \xi) = (y, \eta)},$$

qui appartient à la classe $S(h^{N_1+N_2}\langle(x, h\xi)\rangle^{m_1+m_2}, dx^2 + h^2 d\xi^2)$ et vérifie pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$p(x, \xi, h) - \sum_{j < N} \left(\frac{i}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \right)^j \frac{a_1(x, h\xi, h) a_2(y, h\eta, h)}{j!} \Big|_{(x, \xi) = (y, \eta)} \\ \in S(h^{N+N_1+N_2}\langle(x, h\xi)\rangle^{m_1+m_2}, dx^2 + h^2 d\xi^2).$$

Si on considère $a(x, \xi, h)$ le symbole de Weyl semi-classique de l'opérateur,

$$a_1(x, h\xi, h)^w a_2(x, h\xi, h)^w,$$

on en déduit que,

$$a \in S(h^{N_1+N_2}\langle(x, \xi)\rangle^{m_1+m_2}, dx^2 + d\xi^2),$$

puisque $a(x, \xi, h) = p(x, h^{-1}\xi, h)$ et que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$a(x, \xi, h) - \sum_{j < N} \left(\frac{i\hbar}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta) \right)^j \frac{a_1(x, \xi, h) a_2(y, \eta, h)}{j!} \Big|_{(x, \xi) = (y, \eta)} \\ \in S(h^{N+N_1+N_2}\langle(x, \xi)\rangle^{m_1+m_2}, dx^2 + d\xi^2).$$

On en déduit par exemple que si,

$$a_1(x, \xi, h) \in S(\langle(x, \xi)\rangle^{m_1}, dx^2 + d\xi^2),$$

où $m_1 \in \mathbb{R}$ et $a_2(x, \xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{C})$ alors l'opérateur $a_1(x, h\xi, h)^w a_2(x, h\xi)^w$ appartient à la classe,

$$\text{Op}_h^w(S(\langle(x, \xi)\rangle^{-\infty}, dx^2 + d\xi^2)) := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} \text{Op}_h^w(S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)),$$

puisque $a_2(x, \xi) \in S(\langle(x, \xi)\rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$. Remarquons également par exemple que dans le cas où $a_2(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ l'opérateur,

$$a_1(x, h\xi, h)^w a_2(x),$$

appartient à la classe d'opérateurs,

$$\text{Op}_h^w(S(\langle(x, \xi)\rangle^{m_1}, dx^2 + d\xi^2)),$$

puisque $a_2(x) \in S(\langle x \rangle^m, dx^2 + d\xi^2)$ pour tout $m \in \mathbb{R}$.

Une classe de symboles non semi-classiques.

Nous utilisons également dans ce manuscrit la classe de symboles non semi-classiques S^m pour $m \in \mathbb{R}$ qui désigne l'ensemble des fonctions,

$$a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n),$$

vérifiant,

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad \sup_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}} |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi)| \langle (x, \xi) \rangle^{-m+|\alpha|+|\beta|} < +\infty,$$

où $\langle (x, \xi) \rangle := (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$. Si on utilise les notations de la section 18.5 de [12], la classe de symboles S^m correspond à la classe de symboles,

$$S(\langle (x, \xi) \rangle^m, \langle (x, \xi) \rangle^{-2}(dx^2 + d\xi^2)).$$

On peut vérifier aisément que la métrique riemannienne,

$$g_{x, \xi} := \langle (x, \xi) \rangle^{-2}(dx^2 + d\xi^2),$$

est σ tempérée et qu'elle vérifie le principe d'incertitude,

$$g_{x, \xi} \leq g_{x, \xi}^\sigma,$$

puisque dans ce cas la métrique duale $g_{x, \xi}^\sigma$ est égale à la métrique,

$$g_{x, \xi}^\sigma = \langle (x, \xi) \rangle^2(dx^2 + d\xi^2),$$

et que,

$$h(x, \xi)^2 := \sup_{t \neq 0} \frac{g_{x, \xi}(t)}{g_{x, \xi}^\sigma(t)} = \frac{1}{\langle (x, \xi) \rangle^4}.$$

On montre également que le poids $\langle (x, \xi) \rangle^m$ est σ, g tempéré si $m \in \mathbb{R}$, ce qui nous permet d'utiliser pour cette classe de symboles les résultats de calcul symbolique propres à la quantification de Weyl de la section 18.5 dans [12]. Le théorème 18.5.4 montre par exemple que si $a_1 \in S^2$ et $a_2 \in S^{-2}$ alors l'opérateur,

$$a_1(x, \xi)^w a_2(x, \xi)^w,$$

vérifie,

$$a_1(x, \xi)^w a_2(x, \xi)^w - (a_1(x, \xi) a_2(x, \xi))^w \in S^{-2}.$$

Conclusion et perspectives.

L'étude de l'instabilité spectrale des opérateurs non auto-adjoints est un domaine de recherche qui suscite depuis quelques années beaucoup d'intérêt. Les travaux qui ont conduit à la rédaction de cette thèse trouvent naturellement leur place aux côtés des contributions récentes dans ce domaine de L.S.Boulton, E.B.Davies, N.Dencker, M.Hager, J.Sjöstrand, L.N.Trefethen, M.Zworski et d'autres. Notre étude générale du pseudo-spectre des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques, qui constitue le sujet principal de cette thèse, propose une compréhension et une description précise des phénomènes de stabilité ou d'instabilité spectrale qui se produisent sous l'effet de petites perturbations dans cette classe particulière d'opérateurs différentiels. Si les modèles unidimensionnels comme l'oscillateur harmonique non auto-adjoint étaient essentiellement bien compris, ce n'était pas le cas avant notre étude, des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques en dimension supérieure dont l'étude est plus riche et plus compliquée. Notre description presque complète des ensembles pseudo-spectraux nous a permis d'établir pour un opérateur différentiel quadratique elliptique en dimension $n \geq 2$, une condition nécessaire et suffisante simple sur son symbole de Weyl qui est équivalente à la propriété de normalité de cet opérateur et qui assure la stabilité de son spectre par rapport à de petites perturbations. Lorsque cette condition est violée, notre étude microlocale fine nous a permis de préciser la géométrie des régions de l'ensemble résolvant qui peuvent être très lointaines du spectre, où la résolvante de ces opérateurs explose en norme. Notons que notre étude laisse encore ouverte la question générale de l'absence de pseudo-spectre semi-classique d'indice 1 sur les demi-droites qui composent la frontière de l'image numérique des opérateurs différentiels quadratiques elliptiques non normaux en dimension $n \geq 2$. Nous ne proposons pour l'heure qu'une réponse partielle à cette question. Une direction de recherche qui pourrait être explorée et permettrait de répondre à cette question, est l'étude de l'éventuelle décroissance exponentielle en temps de la norme du semi-groupe à contractions,

$$\|e^{tq^w}\|_{\mathcal{L}(L^2)},$$

généralisé par un opérateur différentiel quadratique elliptique q^w lorsque la partie réelle de son symbole de Weyl $\text{Re}q$ est une forme quadratique négative non identiquement nulle. Soulignons que l'hypothèse d'ellipticité de la forme quadratique q est bien sûr essentielle et que ce résultat est clair dans le cas où la forme quadratique $\text{Re}q$ est supposée définie négative. On peut également répondre par l'affirmative à cette question dans un certain nombre de cas particuliers mais une réponse générale fait encore défaut.

Quelques notations.

\bar{A}	adhérence de l'ensemble A
\mathring{A}	intérieur de l'ensemble A
∂A	frontière de l'ensemble A
A^c	ensemble complémentaire dans le plan complexe de l'ensemble A
$d(z, F)$	distance entre le point z et l'ensemble F
$\operatorname{arg} z$	argument du nombre complexe non nul z
$B(z, r)$	boule ouverte du plan complexe centrée en z et de rayon r
P^T	transposée de la matrice P
$\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$	sous-espace vectoriel de E engendré par e_1, \dots, e_n
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espace de Schwartz
$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$	espace des fonctions à valeurs complexes, C^∞ à support compact sur \mathbb{R}^n
$C_b^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$	espace des fonctions à valeurs complexes, C^∞ et bornées sur \mathbb{R}^n , ainsi que toutes leurs dérivées
$\mathcal{L}(H)$	espace des opérateurs linéaires bornés sur H
$\sigma(P)$	spectre de l'opérateur P

$q(x, y)$ forme polaire associée à la forme quadratique $q(x)$

σ forme symplectique canonique sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$:

$$\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \xi \cdot y - x \cdot \eta, \quad (x, \xi), (y, \eta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

H_p champ hamiltonien associé au symbole $p(x, \xi)$:

$$H_p = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$\{p, q\}$ crochet de Poisson des symboles p et q :

$$\{p, q\} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial \xi}$$

$a(x, \xi)^w$ quantification de Weyl du symbole $a(x, \xi)$:

$$a(x, \xi)^w u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-y) \cdot \xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi$$

$a(x, D_x)$ quantification standard du symbole $a(x, \xi)$:

$$a(x, D_x)u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

$a \sharp b$ symbole de Weyl de l'opérateur $a^w b^w$

Bibliographie

- [1] J.M.Bony, N.Lerner, *Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur*, Ann. Sci. ENS, **22**, 377-433 (1989).
- [2] L.S.Boulton, *Non-self-adjoint harmonic oscillator semigroups and pseudospectra*, J. Operator Theory, **47**, 413-429 (2002).
- [3] H.Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Dunod (1999).
- [4] E.B.Davies, *One-Parameter Semigroups*, Academic Press, London (1980).
- [5] E.B.Davies, *Pseudospectra, the harmonic oscillator and complex resonances*, Proc. R. Soc. Lond. A, **455**, 585-599 (1999).
- [6] E.B.Davies, *Semi-classical states for non-self-adjoint Schrödinger operators*, Comm. Math. Phys., **200**, 35-41 (1999).
- [7] N.Dencker, J.Sjöstrand, M.Zworski, *Pseudospectra of Semiclassical (Pseudo-)Differential Operators*, Comm. Pure Appl. Math., **57**, 384-415 (2004).
- [8] N.Dencker, *The solvability of pseudo-differential operators*, Phase space analysis of partial differential equations, vol. 1, Pubbl. Cent. Ric. Mat. Ennio Giorgi, Scuola Norm. Sup., Pisa, 175-200 (2004).
- [9] V.V.Grušin, *Pseudodifferential operators on \mathbb{R}^n with bounded symbols*, Funkcional Anal. i Priložen, **4**, no 4, 37-50 (1970). Functional Anal. Appl., **4**, 202-212 (1970).
- [10] M.Hager, *Instabilité Spectrale semi-classique d'opérateurs non auto-adjoints*, Thèse soutenue à l'Ecole Polytechnique (2005).
- [11] L.Hörmander, *A Class of Hypoelliptic Pseudodifferential Operators with Double Characteristics*, Math. Ann., **217**, 165-188 (1975).
- [12] L.Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators* (vol. I,II,III,IV), Springer Verlag (1985).
- [13] L.Hörmander, *Symplectic classification of quadratic forms, and general Mehler formulas*, Math. Z., **219**, 413-449 (1995).
- [14] V.Ivrii, *Microlocal Analysis and Precise Spectral Asymptotics*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [15] T.Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer-Verlag, Berlin (1980).
- [16] N.Lerner, *The Wick calculus of pseudo-differential operators and some of its applications*, Cubo Mat. Edu., **5**, N° 1, 213-236 (2003).
- [17] N.Lerner, *Energy methods via coherent states and advanced pseudo-differential calculus*, Contemporary Mathematics, **205**, 177-201 (1997).

- [18] N.Lerner, *Cutting the loss of derivatives for solvability under condition (Ψ)* , Prépublication 05-42 de l'Institut de Recherche Mathématique de Rennes (2005).
- [19] A.Martinez, *An introduction to Semiclassical and Microlocal Analysis*, Universitext, Springer-Verlag, New York (2002).
- [20] A.Melin, J.Sjöstrand, *Determinants of pseudodifferential operators and complex deformations of phase space*, Methods Appl. Anal., **9**, no.2, 177-237 (2002).
- [21] K.Pravda-Starov, *A general result about pseudo-spectrum for Schrödinger operators*, Proc. R. Soc. Lond. A, **460**, 471-477 (2004).
- [22] K.Pravda-Starov, *A complete study of the pseudo-spectrum for the rotated harmonic oscillator*, à paraître dans le Journal of the London Mathematical Society (2005).
- [23] S.Roch, B.Silbermann, *C^* -algebra techniques in numerical analysis*, J. Oper. Theory **35**, 241-280 (1996).
- [24] J.Sjöstrand, *Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics*, Ark. för Mat., **12**, 85-130 (1974).
- [25] J.Sjöstrand, *Pseudospectrum for differential operators*, Seminar notes, Equations aux Dérivées Partielles, Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique (2002-2003).
- [26] P.Tauvel, *Mathématiques générales pour l'agrégation*, deuxième édition, Masson, Paris (1997).
- [27] L.N.Trefethen, *Pseudospectra of linear operators*, Siam Review **39**, 383-400 (1997).
- [28] L.N.Trefethen, M.Embree, *Spectra and Pseudospectra : The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press (2005).
- [29] M.Zworski, *A remark on a paper of E.B.Davies*, Proc. Am. Math. Soc., **129**, 2955-2957 (2001).
- [30] M.Zworski, *Numerical linear algebra and solvability of partial differential equations*, Comm. Math. Phys., **229**, 293-307 (2002).