



**HAL**  
open science

**INTEGRATION DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE  
DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE  
POUR FAVORISER UNE LIAISON ECOLE  
PRIMAIRE-COLLEGE : UNE INGENIERIE AU  
COLLEGE SUR LA NOTION DE PROPRIETE.**

Sylvia Coutat

► **To cite this version:**

Sylvia Coutat. INTEGRATION DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE POUR FAVORISER UNE LIAISON ECOLE PRIMAIRE-COLLEGE : UNE INGENIERIE AU COLLEGE SUR LA NOTION DE PROPRIETE.. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT : . tel-00110052v2

**HAL Id: tel-00110052**

**<https://theses.hal.science/tel-00110052v2>**

Submitted on 28 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Ecole doctorale des Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique

Thèse pour l'obtention du diplôme de  
Docteur de l'université JOSEPH FOURIER  
Spécialité : Mathématiques et Informatique

Dirigée par : Colette LABORDE

Soutenue le 24 octobre 2006

Par Sylvia GOUSSEAU-COUTAT

Intégration de la géométrie dynamique dans  
l'enseignement de la géométrie pour favoriser la liaison  
école primaire collège : une ingénierie didactique au  
collège sur la notion de propriété.

Jury :

M. Philippe R. RICHARD Professeur université de Montréal (Rapporteur)

M. Alain KUZNIAK Professeur IUFM Orléans-Tours (Rapporteur)

Mme Colette LABORDE Professeur émérite IUFM Grenoble (Directeur)

M. Raymond DUVAL Professeur émérite (Président)

Mme Sophie SOURY-LAVERGNE Maître de conférences IUFM Grenoble (Examinateur)

Thèse préparé au sein de l'ERTE IAM MAGI



*« En géométrie, comme d'ailleurs dans tous les domaines scientifiques, l'expression ne consiste pas à mettre en mots, à la manière dont on peut apprendre à mettre des mots sur des émotions et sur ses « vécus », mais à articuler des propositions, dont la richesse de sens est irréductible à celles des mots employés. »*

(Duval 2005 p.45)



## Merci ...

A Colette Laborde, ma directrice de thèse, pour m'avoir ouvert les portes de la didactique en m'acceptant et me dirigeant dans le DEA, d'avoir toujours les mots qu'il faut pour nous encourager, nous guider, nous conseiller et surtout pour être toujours disponible pour nos soucis professionnels et personnels.

A Philippe Richard pour sa disponibilité et tous les efforts investis comme rapporteur et membre du jury.

A Alain Kuzniak d'avoir accepté d'étudier ce travail et de le rapporter.

A Raymond Duval pour avoir présider le jury et consacré une partie de son temps à l'examen de ce travail.

A Sophie Soury-Lavergne pour son soutien, son dynamisme jusque dans la soutenance, merci d'avoir accepté d'être dans mon jury.

A Hamid Chaachoua pour ses remarques constructives lors de ma pré-soutenance.

A Aude Mory, professeur au collège Jean Vilar, pour sa participation aux expérimentations, sa large collaboration à ce travail, sa patience et son professionnalisme, sa compréhension de cette recherche.

A la classe de 5°4 du collège Jean Vilar pour sa participation aux expérimentations.

A Claude Fini pour ses conseils, ainsi qu'à tous les membres du projet MAGI.

A Iranete Lima pour les quelques longues soirées autour de didactique sans oublier les autres soirées filles !

A Christophe pour son amitié, ses connaissances de la langue française, et sa relecture

A Tristan pour ses conseils et sa présence qui m'ont permis de bien commencer cette recherche.

A Rossana pour son amitié, sa présence, ses conseils, ses encouragements.

A Zilora pour son soutien tant administratif que personnel.

A Ruth, Seden, Julio, Armando, Angela, Wok, Bernardo et tous les autres membres présents et passés de l'équipe IAM où il fait bon travailler !

A ma maman, mon papa pour leur soutien dans les moments difficiles et leur collaboration des derniers jours, rien de tel qu'un bon Magnum au chocolat pour garder le moral ou presque ...

A mon époux, toujours présent dans mon cœur, qui m'a encouragé dans les moments difficiles, qui m'a donné la volonté d'aller jusqu'au bout.

Cette recherche est un petit bout de ma vie, elle m'a fait grandir et découvrir de merveilleuses personnes, merci à tous ceux que j'ai croisé au cours de ces trois dernières années, vous avez tous contribué à votre manière à l'aboutissement de ce travail...

# Sommaire

INTRODUCTION .....	1
CHAPITRE 1 LIAISON PRIMAIRE COLLEGE .....	3
I.    La géométrie au primaire .....	4
A.    Ce que disent les programmes .....	4
B.    Une activité représentative d'un manuel .....	7
C.    Synthèse.....	8
II.   La géométrie au collège.....	9
A.    Que disent les programmes ? .....	9
B.    La preuve au collège.....	13
1    Organisation ternaire du raisonnement déductif .....	13
2    Appropriation du raisonnement déductif chez les élèves .....	18
C.    Une activité représentative d'un manuel .....	19
D.    Synthèse.....	21
III.  Liaison primaire collège rupture ou évolution ? .....	22
A.    Des paradigmes différents pour des enseignements différents .....	23
B.    Le dessin – La figure .....	24
C.    La notion de propriété .....	25
D.    La notion de validation .....	25
E.    Conclusion .....	26
CHAPITRE 2 OUTILS D'EVOLUTION DU CONTRAT POUR LA LIAISON PRIMAIRE- COLLEGE EN GEOMETRIE .....	29
I.    Le concept de propriété.....	30
A.    Dans les manuels.....	30
1    Le manuel Triangle .....	30
2    Le manuel Dimathème 5ième .....	30
B.    Le triplet de Vergnaud.....	31
C.    Caractérisation des propriétés .....	32
1    Le référent.....	32
2    L'invariant .....	34
3    Les signifiants .....	35

D.	Synthèse.....	39
II.	Processus d'intériorisation des outils en signes.....	41
A.	Vygotsky .....	41
B.	Zone Proximale de Développement, étayage .....	44
C.	Médiation sémiotique et Cabri.....	46
III.	Registres sémiotiques et leurs interactions.....	48
A.	Les registres sémiotiques.....	48
B.	Interaction entre les registres .....	49
C.	Synthèse.....	53
IV.	Instrumentation et Cabri.....	55
A.	De l'artefact à l'instrument.....	55
B.	Les instruments avec Cabri .....	58
V.	Conclusion.....	61
CHAPITRE 3 PROBLEMATIQUE ET METHODOLOGIE .....		63
I.	Cadre théorique et hypothèses de travail .....	63
II.	Questions de recherche .....	66
III.	Méthodologie.....	67
A.	L'expérimentation.....	67
B.	Description de l'ingénierie .....	68
1	Introduction .....	68
2	Activité Cabri .....	68
3	Phase collective d'énonciation des propriétés .....	70
4	Réinvestissement.....	72
5	Synthèse.....	73
6	Evaluation de l'appropriation du lien contraintes-conclusion .....	74
C.	Les observables.....	75
CHAPITRE 4 CHOIX ET ANALYSE A PRIORI DU PROCESSUS D'ENSEIGNEMENT .....		93
I.	Contraintes d'ingénierie longue .....	94
A.	Le contrat didactique.....	94
B.	Instrumentation .....	94
C.	Intériorisation du lien contraintes-conclusion .....	94
II.	Choix globaux et variables de l'ingénierie.....	95
A.	Choix globaux de l'ingénierie .....	95
1	Les types de problèmes .....	95
2	Choix des tableaux .....	96
B.	Variables didactiques .....	96

III.	Ce que l'on observe ? .....	96
A.	Les activités Cabri.....	96
B.	Phases collectives d'énonciation des propriétés .....	101
C.	Les exercices d'application.....	102
D.	Tests.....	102
IV.	Un quadrilatère particulier .....	103
A.	Introduction.....	103
B.	Séance Cabri .....	104
1	Organisation.....	104
2	Je découvre .....	104
3	J'utilise.....	110
4	Synthèse activité Cabri.....	112
C.	Phase collective.....	113
D.	Réinvestissement.....	117
V.	Parallélogrammes particuliers .....	121
A.	Séance Cabri .....	121
1	Organisation.....	121
2	Je découvre .....	121
3	J'utilise.....	127
4	Synthèse activité Cabri.....	130
B.	Phase collective.....	131
C.	Réinvestissement.....	134
VI.	Evaluation de l'appropriation du lien contraintes-conclusion par les élèves individuellement et en entretien .....	134
A.	Variables des problèmes .....	135
B.	Les attentes .....	137
C.	Présentation des exercices .....	139
CHAPITRE 5 ANALYSE A POSTERIORI .....		143
I.	Méthodologie d'analyse .....	144
A.	Analyse du processus de genèse instrumentale du Déplacement pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion chez les élèves .....	144
B.	Analyse du processus de genèse instrumentale du Déplacement pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion au cours des phases collectives avec Cabri. 145	
C.	Phases collectives de formulation des propriétés.....	145
D.	Explicitation des propriétés dans les corrections collectives des exercices de réinvestissement.....	146

E.	Evaluation de l'acquisition du lien contraintes-conclusion par les élèves individuellement et en entretien .....	146
II.	La séance un quadrilatère particulier .....	147
A.	Analyse du processus de genèse instrumentale dans la manipulation des élèves 148	
1	Déplacement et unités figurales inférieures.....	148
2	Quelle appréhension de la figure Cabri dans l'observation de l'unité figurale supérieure ? .....	158
3	Formulation du lien contraintes-conclusion .....	168
4	Synthèse du travail des binômes sur l'activité Cabri .....	173
B.	Analyse du processus de genèse instrumentale au cours de la phase collective Cabri 174	
1	Déplacement des unités figurales inférieures .....	174
2	Observation, transformation .....	175
3	Formulation du lien contraintes-conclusion .....	176
4	Abstraction du dessin et du logiciel-prise en compte des cas possibles .....	177
5	Conclusion.....	177
C.	Articulation entre environnement Cabri et environnement papier-crayon.....	178
1	Exercice de réinvestissement.....	178
2	Phase collective d'énonciation des propriétés .....	184
III.	La séance : Des parallélogrammes particuliers .....	187
A.	Analyse du processus de genèse instrumentale dans la manipulation des élèves 187	
1	Déplacement des unités figurales inférieures .....	187
2	Quelle appréhension de la figure Cabri dans l'observation de l'unité figurale supérieure ? .....	189
3	Formulation du lien contraintes-conclusion .....	201
4	Synthèse.....	203
B.	Analyse du processus de genèse instrumentale au cours de la phase collective Cabri 204	
1	Déplacement des unités figurales inférieures .....	205
2	Observation quelle appréhension de la figure Cabri ? .....	205
3	Formulation du lien contraintes-conclusion .....	207
4	Synthèse.....	208
C.	Articulation entre environnement graphique-dynamique et environnement papier- crayon 209	
1	Phase collective d'énonciation des propriétés .....	209
2	Exercices de réinvestissement .....	216
IV.	Evaluation de l'appropriation du lien contraintes-conclusion par les élèves individuellement et en entretien .....	223
A.	Analyse des réponses écrites .....	223

1	Exercice 1 .....	223
2	Exercice 2 .....	225
3	Exercice 3 .....	226
4	Synthèse .....	227
B.	Analyse des discussions.....	228
1	Salomé&Léane.....	228
2	Jade&Laura.....	230
C.	Conclusion .....	234
CHAPITRE 6 DISCUSSION.....		236
I.	Le processus de genèse instrumentale.....	237
A.	Prise en compte des unités figurales inférieures par le contrôle du déplacement 237	
B.	Identification de la transformation de l'unité figurale supérieure.....	240
C.	Formulation et articulation du lien contraintes-conclusion .....	242
II.	La relation de parallélisme .....	244
III.	Classification des formulations des propriétés .....	245
A.	Formulations avec association .....	245
B.	Les formulations temporelles avec un acteur .....	246
C.	Formulations théoriques .....	246
IV.	Articulation des registres .....	246
V.	Rôle de l'enseignant dans l'articulation entre les registres .....	247
VI.	Appropriation du lien contraintes-conclusion chez les élèves.....	248
A.	Les exercices de réinvestissement.....	248
B.	Le test d'appropriation du lien contraintes-conclusion .....	250
C.	Conclusion .....	250
VII.	Liaison primaire-collège à l'aide des propriétés.....	251
A.	Changement dans les énoncés de référence, théorisation de l'espace.....	251
B.	Changement de registre privilégié par l'évolution de statut du dessin et la décomposition dimensionnelle .....	252
C.	Changement de validation .....	252
CONCLUSION .....		254
I.	Résultats .....	254
II.	Limites.....	256
III.	Perspectives .....	257
REFERENCES.....		259



# Introduction

Nous considérons dans ce travail que la géométrie est de nature théorique. Il s'agit d'une théorie (ou plusieurs si l'on considère les géométries non euclidiennes) partiellement issues d'une modélisation de l'espace et s'étant développées ensuite de façon interne. La théorie en jeu dans le travail est celle de la géométrie euclidienne. Nous envisageons les objets de la théorie et les relations entre ces objets. Par exemple, les rectangles, cercles, droites et points sont des objets de la géométrie, la perpendicularité est une relation qui lie deux droites distinctes. Lorsque ces relations sont articulées pour former un énoncé nous les appelons **propriétés**. Les propriétés sont des énoncés contenant une implication et utilisées dans les démonstrations, raisonnements de validation utilisant le raisonnement déductif, comme énoncé-tiers. Prenons comme exemple la propriété suivante :

Si un quadrilatère à ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.
---

La première partie de l'énoncé : « Si un quadrilatère à ses diagonales qui se coupent en leur milieu » introduit par le connecteur « *si* » forme ce que l'on appelle les **contraintes**. Ces contraintes sont formées par un objet géométrique (ou plusieurs) et les **caractéristiques** qui lui sont imposées, ici le quadrilatère possède des diagonales qui ont le même milieu. La deuxième partie de l'énoncé : « alors c'est un parallélogramme » introduite par « *alors* » forme la **conclusion**. Dans cette recherche nous nous intéressons à l'enseignement des propriétés et plus particulièrement du lien entre les contraintes et la conclusion.



# Chapitre 1

## Liaison primaire collège

L'enseignement de la géométrie évolue au fur et à mesure de l'avancement dans la scolarité et des connaissances des élèves. La pratique de la géométrie à l'école primaire est bien différente de la pratique de la géométrie au collège puis au lycée.

Dans ce chapitre nous cherchons à identifier l'évolution de cet enseignement.

Pour cela nous étudions l'enseignement de la géométrie à l'école primaire à travers les programmes et quelques manuels scolaires. Nous identifions quelle géométrie est enseignée à ces jeunes élèves. Nous reprenons cette même analyse pour étudier la pratique de la géométrie au collège.

Munies de ces deux études, nous comparons les deux pratiques de la géométrie afin d'identifier quels sont les liens ou les ruptures dans cette évolution de l'enseignement.

Nous concluons cette étude comparative par les résultats des travaux de Kuzniak sur les différents paradigmes pour l'enseignement.

## I. La géométrie au primaire

### A. Ce que disent les programmes

Une sensibilisation à la géométrie par les objets de l'espace intervient dès les premières années de la scolarité, à l'école maternelle à travers l'étude des formes dans la *découverte des formes et des grandeurs* du domaine d'activité *découvrir le monde* :

*« (...) , l'enfant apprend à formuler des interrogations plus rationnelles, à anticiper des situations, à prévoir des conséquences, à observer les effets de ses actes, à construire des relations entre les phénomènes observés, à identifier des caractéristiques susceptibles d'être catégorisées. Il s'essaie à raisonner. »*

(BO 14 février 2002 p.18)

La construction des relations entre les phénomènes permet de familiariser les élèves avec les objets spatiaux de la géométrie. Les élèves peuvent se construire les premiers liens de dépendances entre les formes. Nous définissons par caractéristiques des signes distinctifs d'objets géométriques. Ici les caractéristiques sont des signes identifiables à partir des représentations spacio-graphiques des objets. Par exemple une caractéristique d'un carré sera qu'il a quatre côtés égaux et quatre angles droits (« Les maths à la découverte du monde CE1 Cycle 2 Hachette »). Le carré est associé à la caractéristique quatre côtés égaux et quatre angle droits.

*« (...) En enrichissant les observations et en multipliant les comparaisons, l'enseignant amène les enfants à mieux distinguer divers types de critères (forme, taille, masse, contenance...) et à se livrer à des classements, des rangements. »*

(BO 14 février 2002 p.33)

Cette première initiation à la géométrie s'appuie sur l'observation lors de jeux de découverte, des situations de communication et de manipulation sont proposées. Les activités ont pour but une évolution de la réflexion des élèves sur la mise en évidence de caractéristiques des objets spatiaux. Ainsi, les élèves sont sensibilisés au fait que des objets peuvent posséder des éléments communs (nombre de côtés) sans pour autant être identiques (forme et taille). Cela permet de travailler les invariants et les différences entre les objets.

L'introduction de la géométrie, en tant que discipline des mathématiques explicites, commence en primaire au cours du cycle II, cycle des apprentissages fondamentaux (CP, CE1). La pratique de la géométrie à ce niveau a pour but la mise en évidence des caractéristiques des objets spatiaux de la géométrie, tout comme au cycle précédent. Cependant ce n'est plus seulement une familiarisation à la reconnaissance des formes qui est visée, mais bien une pratique de la géométrie à travers l'utilisation des instruments de géométrie et le travail sur les caractéristiques.

« La maîtrise des relations spatiales est confortée en même temps que sont précisées quelques propriétés géométriques qui permettent d'aller au-delà de la simple reconnaissance perceptive des objets. »

(BO 14 février 2002 p.51)

« Au cycle 2, dans la plupart des problèmes de géométrie, les élèves appréhendent d'abord des propriétés de façon perceptive, puis sont amenés à utiliser des instruments pour vérifier les hypothèses émises »

(BO 14 février 2002 p.52)

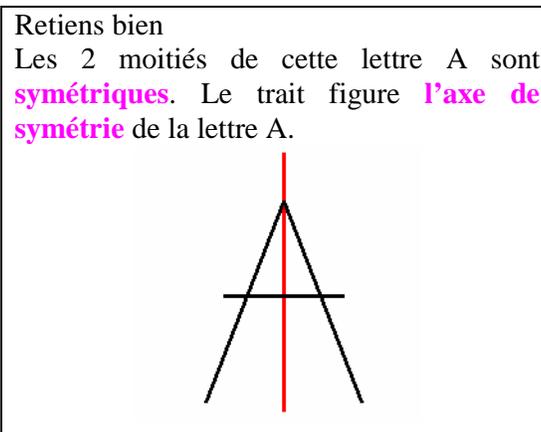
Le terme propriété utilisé dans ces extraits n'a pas le sens que nous avons choisi, ici les propriétés ne contiennent pas d'implications, elles apparaissent plutôt comme des énoncés qui caractérisent des objets mathématiques :

« Le carré a quatre côtés égaux et quatre angles droits »

« Le rectangle a ses côtés égaux l'un en face de l'autre et 4 angles droits »

(Hachette 2004 p.49)

Ces énoncés du primaire, caractérisant les objets géométriques traités, reposent sur les représentations graphiques, l'observation est une phase essentielle pour leur appropriation par les élèves. Par exemple, la symétrie par rapport à un axe est introduite à ce cycle de façon perceptive et donc à partir d'un exemple :



(Hachette 2004 p.99)

Ainsi, la géométrie de primaire s'appuie sur le sensible et les formes, c'est une géométrie du sensible. Cette géométrie de l'observation permet aux élèves de se construire des images mentales des différentes représentations physiques d'objets qu'ils appréhendent, images mentales étant éventuellement associées à des caractéristiques. Les connaissances construites par les élèves sont fortement liées à un environnement graphique, elles s'expriment principalement dans un registre graphique, aussi bien dans leur utilisation que dans leur appropriation par les élèves. L'utilisation des instruments intervient pour valider des conjectures émises à la suite d'observations. Le raisonnement initié au cycle précédent est

complété ici par une validation utilisant des instruments. Cet aspect de la validation, appelé par Rolet (1997) la validation instrumentée, permet l'introduction d'une pensée déductive dans le sens où les élèves valident des conjectures par l'utilisation d'outils, les outils seront à terme remplacés par des propriétés. Par exemple lorsque les élèves doivent reconnaître les angles droits parmi un ensemble d'angles, ils utilisent un gabarit d'angle (*Les maths à la découverte du monde*, Hachette p.48).

Dans la suite de la scolarité, au cycle III, on retrouve les mêmes commentaires et instructions. Les élèves perçoivent des propriétés sur les figures et sont amenés à les contrôler, les valider, par l'utilisation d'instruments :

*« (...) passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par explicitation de propriétés et recours à des instruments. »*

(BO 14 février 2002 p.83)

La géométrie du sensible s'enrichit progressivement de l'utilisation des outils pour identifier certaines caractéristiques d'objets.

*« Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes dans l'espace ordinaire, dans celui de la feuille de papier ou sur l'écran d'ordinateur, en particulier des problèmes de comparaison, de reproduction, de construction, de description, de représentation d'objets géométriques ou de configurations spatiales (notamment, représentations planes de solides). »*

(BO Hors série 14 février 2002 p.83)

Ainsi, l'activité essentielle des élèves de l'école primaire repose essentiellement sur une familiarisation des formes et une identification des caractéristiques de certains objets géométriques. Les élèves sont aussi amenés à produire des raisonnements deductifs. Cependant il n'est pas attendu qu'ils rédigent l'articulation entre les propriétés, les données et la conclusion. Ce raisonnement deductif intervient dans le registre graphique au cours d'activités comme : des comparaisons, constructions, reproductions et descriptions. Pour réaliser ces différentes activités, les élèves sont amenés à identifier les caractéristiques des objets géométriques traités.

En parallèle à ces activités, les élèves sont sensibilisés à la validation de conjectures. Cet aspect de la validation repose sur l'utilisation d'instruments, c'est-à-dire que les élèves mettent à jour des caractéristiques par l'observation. Ces caractéristiques sont ensuite validées par l'utilisation des instruments. Ainsi cette activité de validation, reste dans le registre graphique, nous la caractérisons de perceptive instrumentée.

### B. Une activité représentative d'un manuel

Dans les activités classiques du primaire, un problème fréquemment posé aux élèves est celui du jeu du portrait. Les élèves ont un ensemble de caractéristiques géométriques, et un ensemble de dessins. Ils doivent retrouver le ou les dessins qui correspondent aux caractéristiques indiquées.

Le problème que nous proposons ci-dessous est un problème du jeu du portrait issu d'un manuel de CM1. La solution proposée est la nôtre.

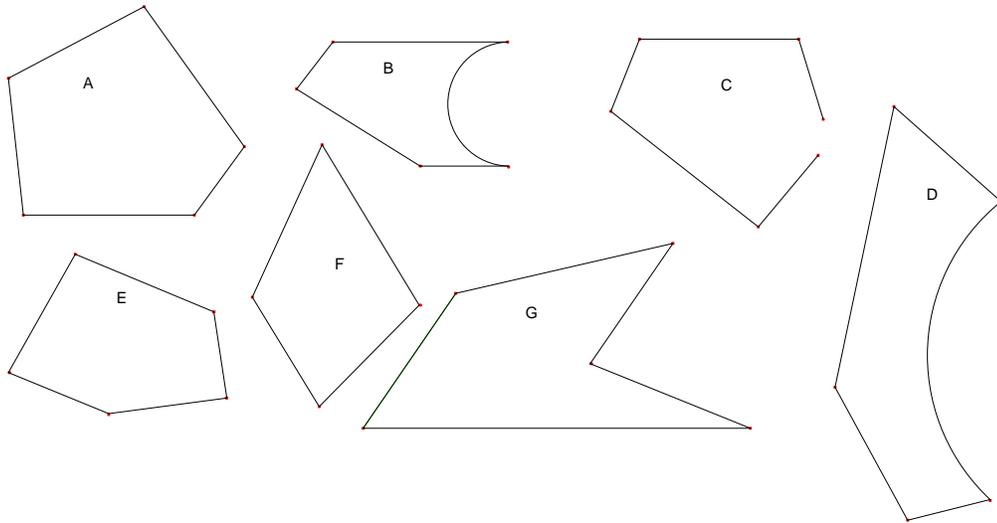
Jeu de portrait : (« j'apprends le maths CM1 » Ed. Retz p.45)

Une ou plusieurs figures correspondent à ce portrait :

C'est un polygone.

Il a 5 côtés (c'est un pentagone).

Deux de ses côtés semblent parallèles.



Solution :

A l'aide de la première information le dessin C ne peut convenir, ce n'est pas un polygone mais une ligne brisée non fermée. Les dessins B et D ne peuvent pas convenir, ce ne sont pas des polygones, certaines parties du contour ne sont pas des segments.

Le dessin F est bien un polygone mais de 4 côtés et non de 5.

Pour identifier les dessins qui ont deux côtés parallèles, on peut observer ou utiliser un instrument (gabarit, règle pour prolonger les côtés, ...), ainsi on conclut que le dessin A ne possède pas de côtés parallèles.

Les dessins correspondants au portrait sont les dessins E et G.

Analysons cet exercice du point de vue des moyens disponibles chez les élèves de CM1 pour résoudre ce problème.

Dans un premier temps, pour éliminer les dessins B, C, F et D, les élèves utilisent la perception et la définition des polygones. En effet, les caractéristiques du portrait,

mentionnées dans l'énoncé du problème sont testées par l'élève pour chaque dessin proposé. Lorsque les élèves testent la dernière caractéristique dans les trois derniers dessins (A, E et G), ils peuvent là encore se contenter de l'observation. Cependant cette caractéristique : deux côtés parallèles, peut être plus difficile à identifier par la perception seule, et l'utilisation d'un instrument peut s'avérer intéressante. Les élèves peuvent par exemple utiliser la règle et prolonger les côtés ou utiliser un gabarit pour identifier si les côtés sont parallèles.

Ainsi, les outils disponibles pour les élèves dans la résolution d'un problème de type le jeu du portrait, sont :

- leurs connaissances de ce qu'est un polygone :
  - soit des connaissances théoriques ligne brisée fermée formée de segments
  - Soit la connaissance spatiale de la forme d'un polygone
- la perception des caractéristiques dans les dessins proposés
- l'utilisation d'instruments

Nous retrouvons les directives du programme. Les élèves utilisent la perception pour identifier des caractéristiques puis ils valident leurs observations par des énoncés (ce que les programmes appellent des propriétés) ou l'utilisation d'instruments. Sur l'exemple, les élèves peuvent identifier perceptivement des parallèles et valider cette perception par l'utilisation d'outils. Ainsi la pratique de la géométrie au primaire peut être caractérisée comme une géométrie intuitive centrée sur la perception et une validation instrumentale.

### **C. Synthèse**

La pratique de la géométrie à l'école primaire a pour but une première sensibilisation à travers l'observation des formes. Les tâches proposées aux élèves sont : Construire, Reproduire, Comparer, Décrire. Ces activités permettent un travail sur ce que caractérisent les objets géométriques simples.

La validation apparaît au cycle II. Des caractéristiques sont observées par les élèves, les observations sont validées par l'utilisation d'instruments. On pourrait qualifier ces validations comme appartenant à la catégorie des preuves pragmatiques (Balacheff 1987) s'appuyant sur des raisonnements perceptifs instrumentés : les élèves émettent des conjectures qu'ils peuvent valider à l'aide d'instrument. Comme les élèves sont sensibilisés à la géométrie par une étude des formes, le registre support de ce travail est le registre graphique.

Une analyse des manuels par Houdement et Kuzniak (2000) a permis d'arriver à la même conclusion :

*« La géométrie de l'école, reflétée par les manuels, est une géométrie naturelle (géométrie GI) où le mode de validation est le sensible. »*

(Houdement & Kuzniak 2000)

## II. La géométrie au collège

### A. *Que disent les programmes ?*

L'enseignement de la géométrie au collège s'appuie sur les pratiques de l'école primaire pour évoluer vers un apprentissage de la démonstration :

*« Les travaux conduits à ce niveau [sixième] doivent prendre en compte les acquis antérieurs, évalués avec précision et se fixer de nouveaux enjeux (...) avec, notamment, un objectif d'initiation à la déduction. »*

(Articulation école-collège, document d'accompagnement 2002 p.5)

La pratique de la géométrie, comme elle a été introduite à l'école primaire, est reprise au collège. Elle est utilisée comme point de départ pour les élèves. Cependant la géométrie pratiquée au collège poursuit de nouveaux objectifs. Un de ces objectifs est cité dans les programmes : l'initiation à la déduction. Ce qu'il faut comprendre par la déduction, c'est le raisonnement déductif, outil de démonstration articulant les données et la conclusion à l'aide de propriétés (développé dans le chapitre suivant). Ce raisonnement de preuve est largement utilisé en géométrie. Il s'appuie sur des propriétés validées par la classe ou apportées par l'enseignant.

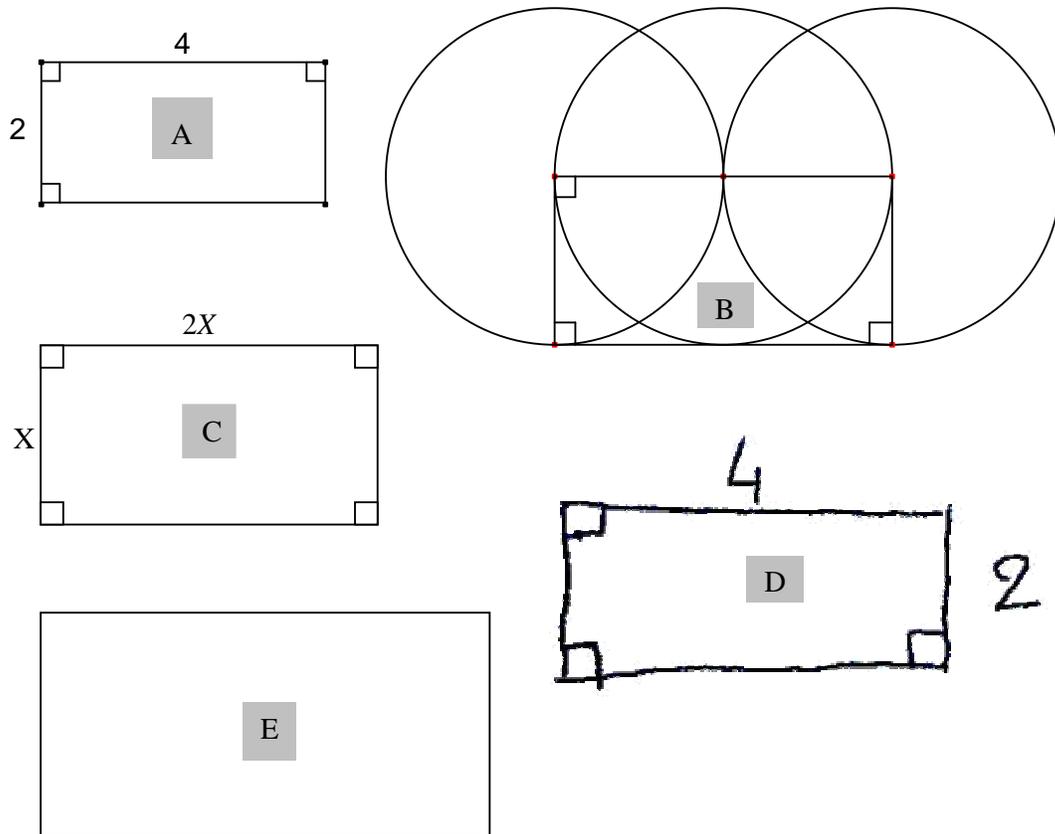
L'introduction de la déduction influe sur la pratique de la géométrie, il n'est plus question d'instruments pour valider mais de propriétés. Le type de validation évolue tout comme les objets manipulés :

*« (...) La distinction entre dessin et figure géométrique commence à être établie, notamment en distinguant les propriétés vérifiées expérimentalement et les propriétés établies par déduction. »*

(Articulation école-collège, document d'accompagnement 2002 p.5)

Le travail sur la distinction entre le dessin et la figure ouvre la porte à une pratique théorique de la géométrie. Cette distinction entre le dessin et la figure présente chez Parzysz (1988) a été reprise par Laborde et Capponi (1994) à l'aide du triplet référent, signifiant, signifié. Les dessins, sont considérés en géométrie comme des représentations graphiques des objets de la géométrie. Il n'existe pas nécessairement une seule représentation d'un objet géométrique (utilisation d'une échelle, dessin à main levée et surtout un objet géométrique est lui-même variable ...). Ainsi les caractéristiques perceptibles sur le dessin peuvent différer des caractéristiques de l'objet géométrique.

Par exemple, considérons comme objet un rectangle dont la longueur vaut deux fois la largeur, voici quelques représentations de cet objet géométrique :



Ces cinq dessins représentent le même objet géométrique, cependant on peut lire des informations différentes selon le dessin. Par exemple le dessin A que nous avons produit est une représentation parmi l'ensemble infini des rectangles dont la longueur vaut 2 fois la largeur. Dans le dessin B, les caractéristiques de l'objet géométrique sont respectées, mais ne sont peut être pas accessibles immédiatement. Ainsi, c'est en analysant le dessin et les cercles que l'on parvient à déduire la caractéristique des côtés. Pour le dessin C, aucune mesure particulière n'est donnée aux côtés, ce choix volontaire permet de considérer tous les rectangles dont la longueur vaut deux fois la largeur. Sur le dessin D, seul le codage (angles droits et mesure des côtés) permet de reconnaître les propriétés de la figure. Enfin, le dessin E ne nous donne aucune information sur les caractéristiques de l'objet, on peut appréhender perceptivement et considérer les angles droits, cependant dans un environnement papier-crayon, nous n'avons pas de moyens qui nous permettent de savoir si ses angles droits sont des caractéristiques réelles de l'objet ou des effets de représentation. Si l'on se contente du quadrilatère ou du rectangle tracé à main levée, les caractéristiques spatiales du dessin ne permettent pas d'inférer les caractéristiques géométriques de notre objet.

La notion de figure est un lien construit par le sujet entre les différentes représentations d'un objet géométrique et l'objet géométrique. Ce lien s'appuie sur les connaissances du sujet.

Cet exemple illustre que si l'on souhaite représenter un objet géométrique par un dessin, les caractéristiques de l'objet doivent être explicitées sur le dessin. Un dessin sans information codée peut être associé à de nombreuses figures.

De cette distinction entre dessin et figure résulte une pratique de la géométrie qui s'appuie sur les propriétés. Bien qu'une des attentes du collège soit que les élèves s'approprient le concept de figure, les dessins ne disparaissent pas pour autant des activités géométriques. En effet, la représentation des objets est primordiale en géométrie :

*« [Le dessin fait] apparaître sur un objet visible des relations ou des hypothèses de relations qui ne sont pas clairement évidentes dans un énoncé verbal. »*

(Bessot 1983 p.35)

On voit bien l'importance des propriétés dans la pratique de la géométrie, ce qui transparaît dans les programmes :

*« [les élèves vont] se constituer un premier répertoire de théorèmes et apprendre à les utiliser. »*

(BO Hors série n°5, 9 septembre 2004 p.4)

Ici les auteurs utilisent le mot théorème. Lorsque nous parlons de propriétés, nous considérons l'ensemble des énoncés géométriques, contenant une implication, validé par la classe et institutionnalisé par l'enseignant, en ce sens, les théorèmes correspondent à cette définition, avec une validation qui dépasse la classe, que l'on pourrait caractériser d'interinstitutionnelle. Les programmes précisent que les élèves doivent s'approprier les théorèmes mais aussi qu'ils doivent apprendre à les utiliser. Cela rejoint ce que nous disions, en effet lorsque les élèves doivent apprendre à utiliser les théorèmes, cela revient à dire que les élèves doivent apprendre à les réinvestir dans des raisonnements de preuve. Ces raisonnements de validation utilisant les propriétés, (théorèmes, définitions) sont appelés démonstrations :

*« La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. »*

(BO Hors série n°5, 9 septembre 2004 p.5)

Les outils de validation introduits à l'école primaire sont ici associés à l'argumentation. Les auteurs semblent considérer que l'argumentation prépare l'entrée dans la démonstration. Cette idée a été développée dans les travaux de Pedemonte (2002).

*« La construction de l'argumentation semble avoir un rôle non négligeable pour la construction de la démonstration, même quand les élèves ont de l'expérience avec la démonstration. Nous avons observé que les élèves qui ne réussissent pas à construire des argumentations, ne réussissent pas non plus à construire des démonstrations. »*

(Pedemonte 2002 p. 293)

Un dernier élément des programmes doit être cité :

*« Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis. »*

(BO Hors série n°5, 9 septembre 2004 p.5)

A ce point, nous pointons un élément délicat dans l'apprentissage. D'un côté les élèves doivent s'approprier les propriétés dans le but de travailler sur la démonstration et la validation théorique, d'un autre côté, la démonstration doit permettre aux élèves d'identifier les propriétés... Par quoi commencer ? Quand est-il nécessaire de démontrer ? Que sont la démonstration sans propriétés, et les propriétés sans démonstration ? Nous essaierons d'analyser comment les élèves peuvent entrer dans cette boucle.

Au collège, toute la problématique de la propriété est soulevée. Ainsi on voit apparaître les énoncés non démontrés, les conjectures, et les énoncés validés par la classe, admis ou démontrés. Toute cette problématique de la propriété n'a de sens qu'avec la démonstration.

La démonstration permet la validation de certaines propriétés par l'utilisation d'autres propriétés.

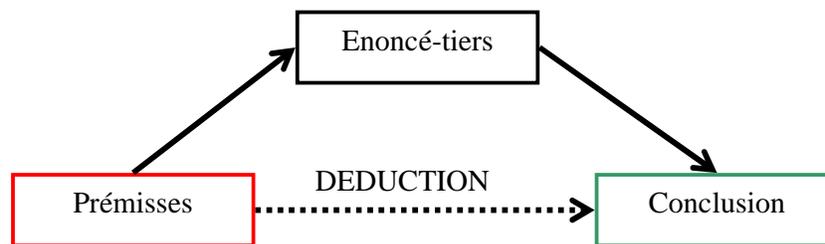
Dans une géométrie théorique, les propriétés permettent de structurer des démonstrations. Dans l'enseignement, l'évaluation de l'acquisition des propriétés passe essentiellement par leur utilisation comme outils dans des démonstrations ou des constructions raisonnées. Ainsi, l'apprentissage de la propriété, en tant qu'objet, est central si l'on veut que les élèves les réinvestissent comme outils dans les exercices de démonstration et de constructions raisonnées. C'est-à-dire qu'il est important que les élèves parviennent à leur associer un sens pertinent pour la suite de leur activité géométrique. Les démonstrations utilisent, le raisonnement déductif. La propriété tient une place centrale dans ce raisonnement, ce que nous expliquons dans le paragraphe suivant dans le paragraphe suivant.

## B. La preuve au collège

### 1 Organisation ternaire du raisonnement déductif

L'analyse du raisonnement déductif par Duval (1993) explicite le rôle des propositions dans un tel raisonnement. Une proposition peut être une conjecture, une définition ou un axiome, c'est-à-dire qu'elle possède un statut théorique, une fonction dans le raisonnement. Une fois le contexte établi c'est-à-dire que l'état des connaissances est connu, dans la structure même de la démonstration, Duval distingue trois statuts opératoires possibles pour une proposition : le statut de prémisses, le statut d'énoncé-tiers et le statut de conclusion. Ces trois statuts sont internes à l'organisation du raisonnement et ils structurent (indépendamment du contexte et contenu) ce que Duval appelle un pas de raisonnement.

Figure 1



La Figure 1 représente l'organisation d'un pas de raisonnement où la déduction entre les prémisses et la conclusion passe par l'explicitation d'un énoncé-tiers, appelée aussi règle d'inférence. Les prémisses correspondent aux données du problème, ce que l'on sait. La conclusion est ce que l'on cherche à prouver. L'énoncé-tiers est un énoncé validé par la classe, ce que nous appelons une propriété, qui permet de valider théoriquement la conclusion. Les contraintes de l'énoncé-tiers doivent coïncider avec les prémisses, la conclusion de l'énoncé-tiers doit correspondre avec l'énoncé qui a le statut de conclusion. Les couleurs pour les prémisses et la conclusion ont été rajoutées afin d'illustrer le *mapping*.

*« (...) une partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par « alors... ») est « détachée » comme conclusion du pas de déduction, après vérification que les prémisses correspondent bien à l'autre partie de l'énoncé-tiers (celle qui est parfois introduite par « si... ») »*

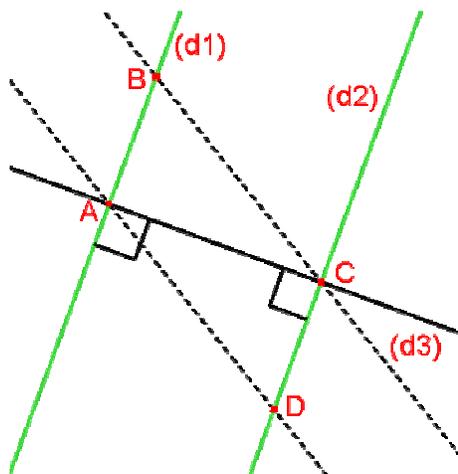
(Duval 1993)

Ce découpage de la propriété énoncé-tiers exige une distinction des contraintes et conclusion dans l'énoncé. Nous illustrons ce raisonnement par deux exemples :

Exemple 1 :

Dans la figure ci-dessous (d1) est la perpendiculaire à (AC) passant par A et (d2) est la perpendiculaire à (AC) passant par C.

D est un point de (d2), la droite (d3) est la parallèle à (AD) passant par C, elle coupe (d1) en B.



1. Pourquoi les droites (d1) et (d2) sont-elles parallèles ?
2. Pourquoi ABCD est-il un parallélogramme ?

Solution :

1. La droite (d1) est perpendiculaire à la droite (AC), la droite (d2) est perpendiculaire à la droite (AC) ainsi la propriété

« si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles »

nous permet de conclure que les droites (d1) et (d2) sont parallèles.

2. Dans le quadrilatère ABCD, les côtés [AB] et [CD] sont parallèles car portés par les droites (d1) et (d2), nous venons de démontrer qu'elles sont parallèles.

Les côtés [AD] et [CB] sont parallèles car portés par les droites (AD) et (d3) parallèles par construction.

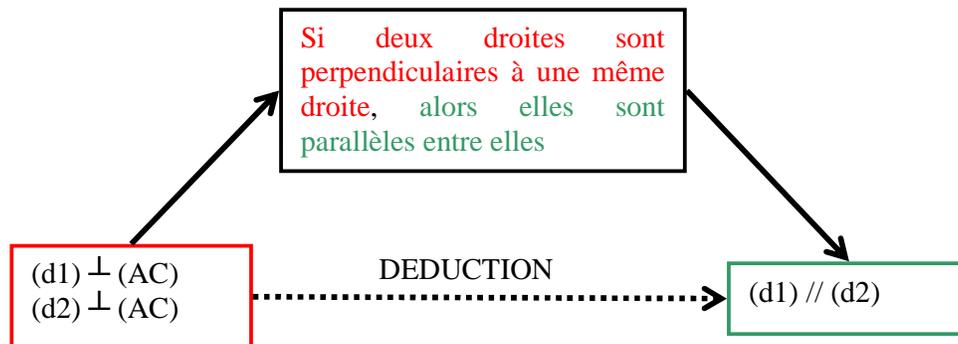
Le quadrilatère ABCD possède tous ses côtés opposés parallèles, ainsi la propriété :

« si un quadrilatère possède tous ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme »

nous permet de conclure que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

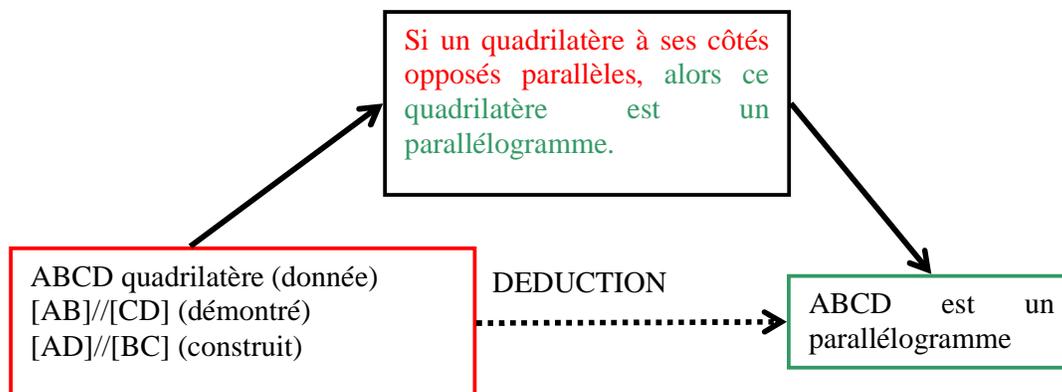
Voici la représentation des pas de déduction mis en œuvre au cours de cette démonstration :

Premier pas de déduction :



Dans l'exercice, les deux pas de déductions sont séparés en deux questions. Au niveau de la classe de 5<sup>e</sup> les raisonnements à deux pas ne sont pas exigibles. Ce premier pas permet de répondre à la première question. La conclusion de cette question devient une nouvelle donnée du problème, elle peut être réinvestie comme prémisse dans un autre pas de déduction.

Deuxième pas de déduction correspondant à la question 2 :



Ce deuxième pas de déduction reprend les données du problème, avec la conclusion du pas précédent, ces données forment les nouvelles prémisses. Ces prémisses s'accordent avec les contraintes de la règle d'inférence. La conclusion de l'énoncé-tiers devient la conclusion du pas de déduction.

Le deuxième exemple présente un raisonnement moins classique dans le sens où la réponse à la question n'est pas la conclusion d'un pas de raisonnement. Le problème repose sur une prémisse à identifier et à ajouter dans les données pour qu'une conclusion, une observation puisse être réalisée.

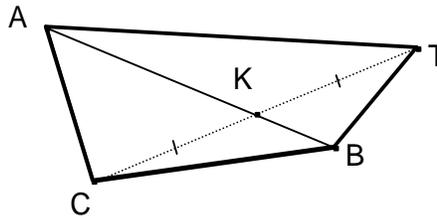
Exemple 2 :

ABC est un triangle.

K est un point de  $[AB]$ .

T est le symétrique de C par rapport à K.

Où peut être placé K pour que ATBC soit un parallélogramme ?



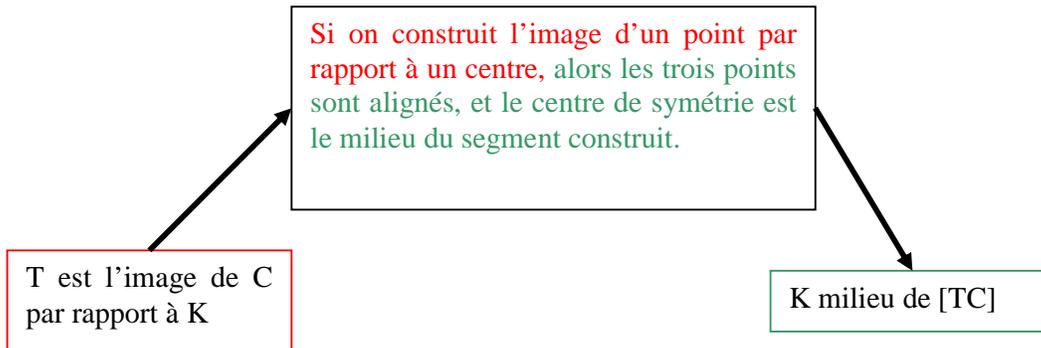
Solution :

Le problème est de trouver une condition suffisante pour obtenir un parallélogramme.

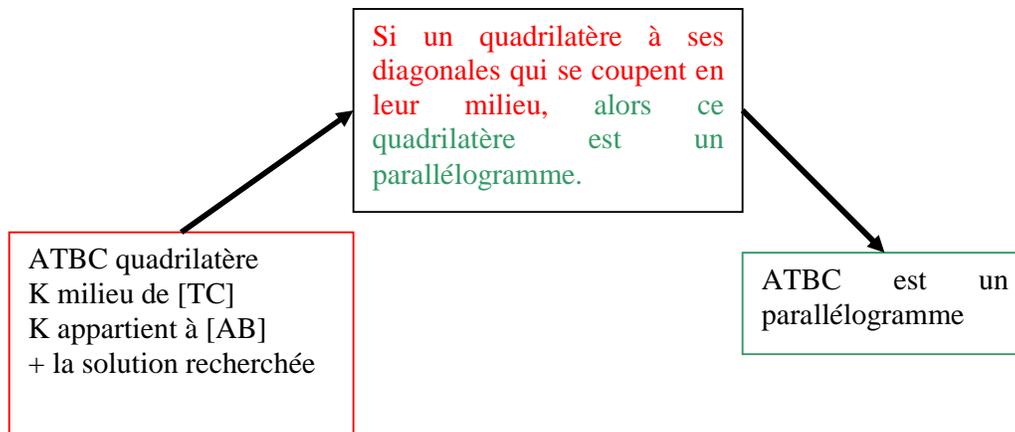
T est le symétrique de C par rapport à K donc K est le milieu de [CT].

Pour que ATBC soit un parallélogramme, il suffit que les diagonales se coupent en leur milieu. Ici une condition nécessaire ne convient pas, on cherche une condition suffisante K est le milieu de [CT], s'il est aussi le milieu de [AB], ACBT sera un parallélogramme. Si K est milieu de [AB] et de [CT], les diagonales de ATBC se coupent en leur milieu, donc ATBC est un parallélogramme.

Voici la représentation des pas de déduction mis en œuvre au cours de cette démonstration :



Ce premier pas de déduction permet de transformer une des contraintes (donnée) de l'exercice. La conclusion obtenue est recyclée en une nouvelle contrainte qui permet d'élaborer le pas de déduction suivant :



Dans ce deuxième pas de déduction, nous connaissons la conclusion (donnée dans l'énoncé de l'exercice) ainsi que certaines contraintes. Ces informations nous permettent d'identifier la propriété énoncé-tiers. A partir des contraintes de la propriété énoncé-tiers, nous pouvons déduire quelle contrainte doit être ajoutée dans l'ensemble de nos prémisses. Ainsi nous pouvons conclure que le point K doit être le milieu de [AB] pour que le pas de déduction soit complet.

Les travaux de Richard (2004b) complètent cette vision du raisonnement ternaire avec l'utilisation de l'inférence figurale. Ce travail met en évidence l'utilisation, par des élèves, d'un type d'inférence à partir du registre sémiotique d'un dessin à caractère géométrique. C'est-à-dire que les élèves formulent un raisonnement déductif et utilisent des dessins comme énoncé-tiers. Cela montre que bien que si le raisonnement déductif est exprimé dans un registre discursif, les représentations des objets géométriques et le registre graphique ne disparaissent pas pour autant.

Cette utilisation de dessins comme énoncé-tiers s'appuie sur l'appréhension des dessins dans le raisonnement déductif.

*« Permettant ainsi de saisir d'un coup une situation dans son ensemble, les figures sont le moyen le plus direct d'en explorer les différents aspects, d'anticiper les résultats d'une démarche, de sélectionner une solution. »*

(Duval 1994 p.121)

Le terme dessin correspondrait mieux que celui de figure pour exprimer que la représentation associée à l'énoncé d'un problème devient un outil d'anticipation de la solution.

Duval (1994) explique que pour que le dessin devienne un registre d'exploitation dans la recherche de la solution, il faut que l'élève puisse considérer le dessin avec ses différentes modifications possibles (décomposition en sous figures, agrandissement, ...) c'est-à-dire qu'il ait une appréhension que Duval définit *d'opérateur*. Cette appréhension ne nécessite pas de connaissances mathématiques, de contraintes théoriques ou techniques. La maîtrise de l'appréhension opératoire peut aider l'élève à une appréhension discursive qui elle s'appuie

sur une prise en compte des dénominations (légendes ou hypothèses, ...). Une appréhension discursive permet d'expliciter de nouvelles propriétés mathématiques associées au dessin. Cette explicitation de nouvelles propriétés repose sur un raisonnement de nature déductive. Dans la production d'un raisonnement, l'élève utilise l'énoncé mais aussi la traduction graphique de l'énoncé. Si on reprend le premier exemple, les élèves peuvent identifier les droites perpendiculaires, les côtés parallèles et le parallélogramme. Cette perception des parallèles peut guider l'élève dans sa phase de recherche.

Sur le deuxième exemple, une première appréhension opératoire permet de transformer le quadrilatère pour qu'il devienne un parallélogramme. A partir de la configuration du parallélogramme l'élève peut identifier la position de K comme milieu de la diagonale. Ce premier résultat correspond à une condition nécessaire sur la position du point K, reste à étudier si cette condition est aussi suffisante, c'est-à-dire si K est le milieu des deux diagonales alors le quadrilatère est bien un parallélogramme.

## 2 Appropriation du raisonnement déductif chez les élèves

L'analyse des productions d'élèves utilisant l'inférence figurale permet de mettre en évidence l'importance du registre graphique dans l'organisation du raisonnement. Ainsi, Richard (2000) explicite les liens entre les représentations graphiques, les représentations mentales et les relations avec les interprétations des élèves par la « figure géométrique opératoire ».

*« Si durant l'élaboration d'une preuve l'attention se promène entre le dessin, l'image visuelle et la figure, c'est parce qu'il s'établit des liaisons de dépendance qui s'appliquent aux savoir-faire et aux connaissances géométriques.*

*(...) nous définissons la figure géométrique opératoire, objet qui naît de l'union, pas nécessairement cohérente, des modèles avec lesquels il [l'élève] sait procéder. »*

(Richard 2000)

Cette triple perception (prémisses, énoncé-tiers, conclusion) est difficile à acquérir pour les élèves, leur compréhension des énoncés étant assez particulière. Les élèves considèrent souvent une propriété indépendamment de sa structure, un peu comme un ensemble de mots sans tenir compte de l'ordre des mots dans la proposition et surtout des liens entre les sous-groupes de la propriété.

*« Il n'y a pas de discrimination entre la partie Conditions et la partie Conclusion. Un élève peut « savoir » ses théorèmes et ne pas percevoir la séparation entre les deux parties. »*

(Duval 1995)

Pourtant deux propriétés contenant les mêmes mots, mais dans un ordre différent, seront différentes du point de vue de la déduction. Cela est particulièrement visible pour un théorème et sa réciproque. Les deux énoncés contiennent les mêmes groupes de mots, cependant ces groupes sont inversés : dans la réciproque, les contraintes deviennent conclusions et les conclusions des contraintes. Cela n'est pas un effet de style mais une organisation qui suit un schéma bien défini. Un élève incapable de distinguer les contraintes des conclusions dans un théorème risque de se retrouver en difficulté lorsqu'il devra utiliser ce théorème comme énoncé-tiers. En effet il ne pourra identifier les prémisses et les conclusions dans l'énoncé. Si l'on veut que les élèves comprennent le processus de démonstration, il faut donc qu'ils comprennent ce qu'est une contrainte et ce qu'est une conclusion. Or une telle compréhension représente un saut important dans la pratique de la géométrie. Non seulement les propriétés deviennent des outils puissants de par leur caractère de généralisation, mais en plus les propriétés ne se réduisent pas à des phrases mais expriment une conditionnalité entre différents objets exprimés. Nous entendons par là l'implication entre les contraintes et la conclusion.

Ce problème sur la reconnaissance des contraintes et conclusion dans une propriété a été analysé (Coutat 2003). Les résultats de ce travail ne sont pas des solutions mais des nouvelles hypothèses à prendre en compte. En effet, la recherche mentionnée a montré qu'un travail sur la distinction des contraintes et conclusion dans une propriété fait par les élèves n'implique pas que ces derniers seront, suite à ce travail, distinguer un énoncé et sa réciproque. On peut donc se demander si le travail à fournir repose sur la distinction des contraintes et des conclusions uniquement. Peut être faut-il sensibiliser les élèves à cette distinction, mais aussi à la structure même de la propriété ainsi le lien entre les contraintes et conclusion mériterait d'être travaillé avec les élèves. Cependant pour pouvoir travailler sur ce lien, il nous faut le caractériser. Ce qui nous amène à la question : **Comment caractériser le lien entre les contraintes et la conclusion dans un énoncé ?**

### *C. Une activité représentative d'un manuel*

Regardons comment les éléments du programme du collège transparaissent dans les exercices proposés aux élèves et comment les propriétés sont réinvesties dans les raisonnements de validation. Nous avons choisi un exercice de la classe de 5<sup>ème</sup> lorsque la formulation de raisonnement déductif commence à être introduite. Cet exercice reprend les étapes classiques de résolution de problème passant par la formulation de conjecture, et la validation ou invalidation de celle-ci par la mise en place d'un raisonnement de preuve.

Collection triangle mathématiques 5<sup>e</sup>, Hatier (2001) p.199

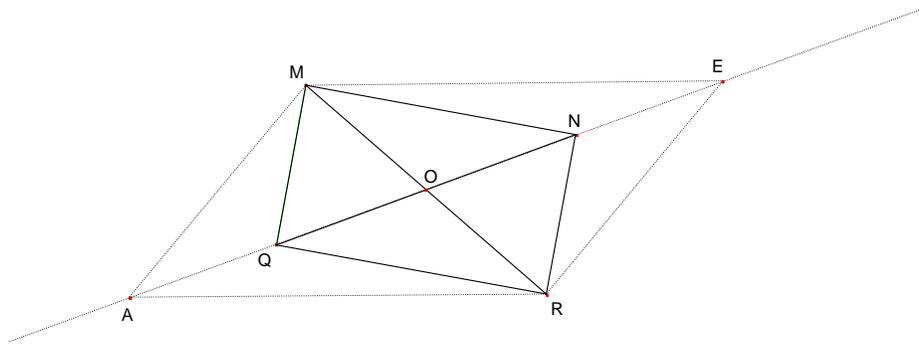
Tracer un rectangle MNRQ de centre O.

Placer sur la droite (QN) deux points A et E symétriques par rapport au point O.

Quelle est la nature du quadrilatère MARE ?

Justifier la réponse.

Construction :

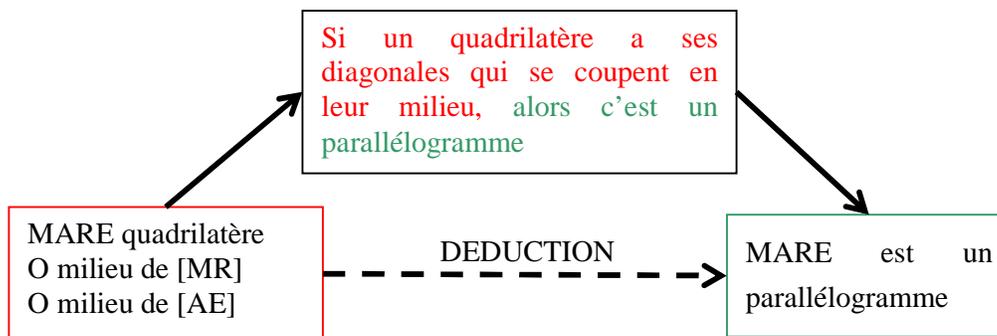


Solution que nous proposons :

La donnée « O centre du rectangle » se traduit par O milieu des diagonales, d'où O milieu de [MR]

La donnée « A et E symétriques par rapport au point O » se traduit par O le milieu de [AE]

Ces données nous permettent d'organiser le pas suivant :



Comme MARE est un quadrilatère, O milieu de [MR] et O milieu de [AE] d'après la propriété « Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme » on conclut que MARE est un parallélogramme.

Dans cet exercice, les élèves sont amenés à construire un dessin qui leur servira d'outil dans la mise en œuvre de leur raisonnement pour la résolution du problème. On peut remarquer que cette représentation permet une visualisation des données et de la solution. De plus elle incite à une réflexion sur un dessin générique. En effet, aucune information sur les côtés du rectangle MNRQ n'est donnée, les points A et E peuvent être placés n'importe où sur la droite (QN) à condition qu'ils soient symétriques. Cette première utilisation du dessin est le résultat d'une appréhension perceptive : on voit la solution, on reconnaît perceptivement la forme parallélogramme. Cette première perception de la solution n'est qu'une conjecture, dans un deuxième temps, les élèves doivent justifier théoriquement cette observation. C'est-à-dire que les élèves doivent réaliser un raisonnement théorique qui s'appuie sur les données du

problème et sur le dessin. Cette deuxième étape, dans la résolution de l'exercice, utilise une appréhension opératoire voire discursive du dessin. La forme générale du dessin est décomposée afin d'identifier quels sous-éléments permettent de justifier l'apparition du parallélogramme. La mise en valeur des diagonales du parallélogramme est le résultat d'une appréhension opératoire et la position du point O comme milieu des diagonales de MARE est le résultat d'une appréhension discursive. Il ne reste à l'élève qu'à travailler sur les deux hypothèses qui lui sont données de les associer au dessin pour parvenir à élaborer la démonstration. Cette démonstration repose sur des traductions<sup>1</sup> de données de l'énoncé puis sur un raisonnement déductif à un pas. Les prémisses de ce pas sont formées par les données du problème, la conclusion est connue (perceptivement, on cherche à obtenir un parallélogramme), il ne reste qu'à identifier quelle propriété permet de relier prémisses et conclusion : « Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme ».

Dans cette résolution, le dessin intervient non seulement comme outil de visualisation de la solution, mais aussi comme outil de recherche pour identifier les éléments clés de la démonstration, cela tout au long de l'appréhension opératoire du dessin au cours duquel les sous-figures, les diagonales du parallélogramme MARE et le point O sont dégagées du dessin.

Les éléments du programme sont repris dans cet exercice. L'utilisation des dessins permet d'établir une conjecture qui est ensuite validée par un raisonnement théorique s'appuyant sur les données du problème, des propriétés et le dessin. Ainsi, bien que les élèves soient amenés à raisonner avec des propriétés, la présence du registre graphique reste primordiale.

#### **D. Synthèse**

La pratique de la géométrie au collège a pour but d'initier les élèves à une géométrie qui se centre sur une validation théorique : le raisonnement déductif, comme dans les programmes à travers l'apprentissage des propriétés et théorèmes. En effet les propriétés sont les noyaux du raisonnement déductif. D'autre part, les élèves travaillent sur le raisonnement géométrique (conjecture, validation par démonstration), énoncé d'une propriété qui s'appuie sur la perception, puis sur la validation théorique, en s'appuyant sur les données de l'énoncé, les propriétés connues et une appréhension opératoire du dessin. Les tâches proposées aux élèves sont : Construire, Démontrer

La géométrie du collège peut être caractérisée comme une géométrie déductive, centrée sur la justification par l'utilisation d'énoncés validés dans le cadre de la classe. Ainsi le registre de travail est le registre discursif.

---

<sup>1</sup> Nous considérons ici des traductions, on pourrait aussi les considérer comme des définitions équivalentes.

### III. Liaison primaire collège rupture ou évolution ?

A travers le document d'accompagnement sur l'articulation école-collège il semble que les pratiques de la géométrie en CM2 et en 6<sup>e</sup> soient assez proches :

*« Les travaux conduits à ce niveau [sixième] doivent prendre en compte les acquis antérieurs, évalués avec précision et se fixer de nouveaux enjeux. Ils doivent viser en particulier à stabiliser les connaissances des élèves, à les structurer, et peu à peu à les hiérarchiser... avec, notamment, un objectif d'initiation à la déduction. »*

(Articulation école-collège, document d'accompagnement 2002 p.5)

A l'entrée en sixième, l'objectif ne semble pas être l'acquisition de nouvelles connaissances mais principalement le renforcement et la structuration des connaissances de primaire. Ce travail sur l'organisation des connaissances doit permettre une introduction à la déduction. Cette restructuration intervient au niveau des connaissances mais aussi dans la perception des objets géométriques :

*« Les élèves passent d'une lecture globale des dessins géométriques à une lecture ponctuelle : désignation des points par des lettres, identification de points comme intersection de deux droites, cercle comme figure constituée des points situés à une distance donnée d'un point donné. »*

(Articulation école-collège, document d'accompagnement 2002 p.5)

Cependant est ce que cela permet d'atteindre l'objectif de l'initiation à la déduction ?

Si l'on s'éloigne de la géométrie pour aller vers la résolution de problème, domaine certes plus général, mais dans lequel les activités de la géométrie ont une place :

*« Les deux programmes [CM2 et Sixième] mettent l'accent sur les mêmes objectifs et proposent des compétences voisines, par exemple :*

*« capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver » au cycle 3 et « capacités de raisonnement : observation, analyse, pensée déductive » en sixième ;*

*« faire des hypothèses et les tester » au cycle 3 et « conjecturer un résultat » en sixième ;*

*« argumenter<sup>2</sup> à propos de la validité d'une solution » au cycle 3 et « bâtir une argumentation » en sixième ;*

---

<sup>2</sup> Nous considérons que « argumentation » est pris au sens de Boero (1999), avec les liaisons avec la démonstration mise en évidence dans les travaux de Pedemonte (2002)

*« vérifier les résultats obtenus et formuler une réponse dans les termes du problème » au cycle 3 et « contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié » en sixième. »*

(Articulation école-collège, document d'accompagnement 2002 p.1)

Regardons de plus près la première compétence. Lorsque l'on parle de capacité à chercher et prouver en primaire, on attend un raisonnement sur les dessins tant dans la phase de recherche que dans la phase de validation (perceptive voire instrumentée). Lorsque l'on parle de capacité de raisonnement en sixième on attend plus une réflexion sur les figures dans l'observation, l'analyse et la pensée déductive. Les autres compétences peuvent être assez proches si l'on étudie l'activité de l'élève. Ainsi une certaine liaison transparait dans l'articulation primaire-collège, mais les activités et les attentes autour du raisonnement en géométrie ne sont pas si proches qu'elles peuvent paraître.

Certaines ruptures apparaissent, ces ruptures sont dues à deux pratiques différentes de la géométrie à l'école primaire et au collège et à des attentes différentes.

### ***A. Des paradigmes différents pour des enseignements différents***

Houdement et Kuzniak (2000) considèrent l'expérience, la déduction, et l'intuition, et ont étudié comment sont exercées ces trois activités ainsi que leur statut suivant le niveau scolaire dans lequel la géométrie est pratiquée.

*« Dans la scolarité de la maternelle à l'enseignement supérieur, force est de constater que le mot de géométrie ne recouvre pas le même type d'activité ni de raisonnement. De même le lien avec l'espace physique s'amenuise et tend à disparaître pour faire la place à une géométrie abstraite. »*

(Houdement et Kuzniak 2000)

L'analyse de la pratique de l'expérience, la déduction et l'intuition à différents niveaux scolaires leur permet de définir trois paradigmes pour la pratique de la géométrie. Cette idée est reprise dans un article plus récent :

*Dans l'enseignement des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie. Ces différents paradigmes rendent compte de la rupture souvent « dénoncée » dans l'enseignement français entre les différents cycles.*

(Houdement et Kuzniak 2005)

Les paradigmes dont parlent les auteurs nous permettent de caractériser des savoirs et croyances supports d'une activité géométrique. Ainsi le premier paradigme est le **paradigme GI** la géométrie naturelle. Dans ce paradigme,

- l'intuition est « liée à la perception, enrichie par l'expérience »
- l'expérience est « liée à l'espace mesurable »

- la déduction est « proche du réel et liée à l'expérience de la vue »
- le type d'espace est « l'espace intuitif et physique »
- le statut du dessin est « objet d'étude et de validation »
- l'aspect privilégié est « l'évidence et la construction »

Nous retrouvons dans ce paradigme les caractéristiques de l'activité géométrique du primaire que nous avons mises à jour par l'analyse des programmes et l'exercice du jeu du portrait.

Regardons maintenant le **paradigme GII** géométrie axiomatique :

- l'intuition est « liée aux figures »
- l'expérience est « le schéma de la réalité »
- la déduction est « démonstration basé sur des axiomes »
- le type d'espace est « un espace physico-géométrique »
- le statut du dessin est « support du raisonnement »
- l'aspect privilégié est « les propriétés et les démonstrations »

A travers les éléments de ce deuxième paradigme, nous retrouvons les caractéristiques de l'activité géométrique du collège.

Ces deux paradigmes illustrent bien les évolutions voire les sauts dans l'approche de la géométrie entre l'école primaire et le collège.

Nous retrouvons ce même écart dans la pratique de la géométrie dans les travaux d'Argaud (1998) lorsqu'il compare l'activité géométrique en primaire et au collège. Il prend l'exemple de droites parallèles :

*« L'élève pourra prouver le parallélisme des dessins des côtés, par une méthode instrumentée (contrôle du parallélisme avec la règle et l'équerre) qui est une « matérialisation » de la propriété théorique : « deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.*

*(...) En quatrième ou en troisième enfin, c'est, en revanche, une preuve dans la théorie, une démonstration qui sera attendue, celle s'appuyant sur le théorème des milieux. »*

(Argaud 1998)

## **B. Le dessin – La figure**

Analysons les supports proposés aux élèves. A l'école primaire, les élèves travaillent dans un espace intuitif et physique où les dessins sont les objets d'étude et de validation. On attend des élèves une appréhension perceptive du dessin, voire une appréhension séquentielle (Duval 1994). Au collège, les élèves travaillent dans un espace physico-géométrique où le dessin est

support du raisonnement. Une nouvelle appréhension du dessin est attendue : une appréhension discursive. Ainsi, le statut des représentations physiques des objets géométriques évolue du primaire au collège. Lorsque les élèves arrivent au collège, ils doivent se détacher du dessin comme objet d'étude pour qu'il ne devienne qu'un outil dans la résolution d'un problème. Le détachement du dessin nécessaire au collège demande de modifier leur rapport au registre graphique. En primaire, les élèves ont la possibilité de raisonner sur des dessins uniquement, en particulier dans les processus de validation, la nécessité de l'abstraction n'intervient pas. On peut alors se demander dans quelle mesure les élèves intériorisent les dessins et caractéristiques qu'ils perçoivent ? C'est-à-dire dans quelle mesure les dessins et leurs caractéristiques évoluent vers des figures et leurs propriétés ?

### **C. La notion de propriété**

Une troisième rupture concerne la notion de propriété. A l'école primaire, les propriétés sont perçues comme des caractéristiques d'objets géométriques représentés, c'est-à-dire des dessins. Le référentiel théorique du primaire repose sur des *définitions sensibles* dans le paradigme GI pour Houdement et Kuzniak. Ainsi une caractéristique est liée à un dessin et l'expression même d'une caractéristique passe par la représentation de l'objet sur lequel elle s'appuie. Le caractère de généralisation des propriétés n'est pas explicité en primaire. De plus ces énoncés du primaire reposent sur une association entre les éléments explicités.

Au collège une propriété est liée à une figure. L'expression d'une propriété utilise un énoncé, et éventuellement un dessin comme illustration qui peut être omis. Cependant à l'opposé de la caractéristique du primaire, la propriété au collège n'est pas liée aux représentations physiques mais aux objets théoriques. De plus les propriétés du collège ne sont pas des associations elles possèdent des contraintes et des conclusions et une relation entre les deux.

La notion de propriété au collège est fondamentale. En effet, les propriétés représentent la matière première pour les activités de démonstration. Ainsi, l'appropriation des propriétés et leur association à des figures et non plus à des dessins est essentielle pour l'évolution au collège.

### **D. La notion de validation**

Une quatrième rupture apparaît à propos de la validation :

*« La nécessité de démontrer, malgré l'évidence des propriétés lues sur une figure, c'est-à-dire le travail du passage du « vu au su », est davantage un problème du collège. »*

(Robert 2003)

Au cours du primaire, les élèves travaillent dans un registre graphique pour appréhender les objets de la géométrie (à travers les activités de constructions, reproduction, ...) mais aussi dans les activités de preuve avec les validations perceptives instrumentées.

Lorsque ces élèves arrivent au collège, ils travaillent encore dans le registre graphique puisque les activités de construction persistent, cependant les élèves doivent se détacher de ce registre pour réaliser les démonstrations. Les élèves doivent se détacher de ce qu'ils perçoivent physiquement et s'appuyer sur la théorie. La validation du collège ne se satisfait plus d'une analyse de la situation à travers les dessins, et éventuellement l'utilisation des instruments, les élèves doivent s'appuyer sur les propriétés.

### **E. Conclusion**

Le passage du primaire au collège n'apparaît pas aussi linéaire qu'il semble l'être dans une première lecture des textes officiels. Certes, certaines activités, connaissances et approches du primaire sont reprises au collège. Cependant si l'on considère les deux grandes pratiques de la géométrie dans chaque institution, un saut apparaît au niveau de l'appréhension des objets, le passage de dessin à la figure, la notion de propriété, mais aussi dans la pratique de la validation.

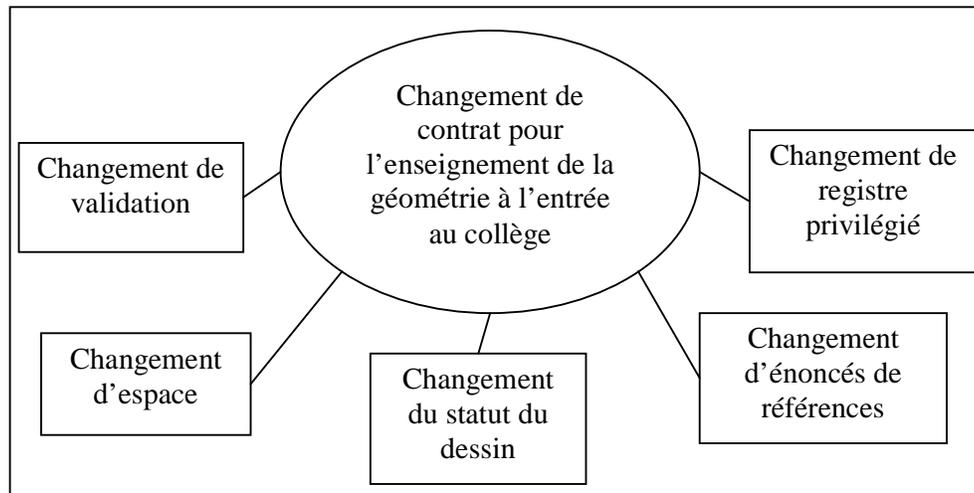
*« [les élèves] utilisent les connaissances empiriques qu'ils ont de l'espace et s'écartent difficilement de l'espace physique. Or l'idéalisation des objets mathématiques est nécessaire à la démonstration. »*

(Bergue, Borreani et al. 1990)

Le changement de niveau de réflexion, fondé sur la visualisation et la perception à l'école primaire, à une réflexion portant sur les objets théoriques au collège est certainement à l'origine de ce saut. Cette rupture transparaît dans les classes à travers une rupture dans les registres privilégiés, les énoncés de références (caractéristiques, propriétés). Cette rupture dans les programmes intervient dans les classes comme une rupture du contrat didactique accompagnant le changement d'institution.

Cette rupture au cours du passage du perceptif au déductif passe par un changement d'espace (d'un espace intuitif à l'école primaire à un espace physico-géométrique au collège) et de type de validation. Les énoncés caractérisant les objets de la géométrie de l'école primaire évoluent en propriétés, contenant des implications, au collège, cette évolution est due aux changements explicités précédemment. Nous résumons ces évolutions à l'aide du schéma 1

schéma 1



Ainsi, ces outils de la géométrie (outils pour la démonstration, et les déductions) reflètent l'évolution de la pratique de la géométrie. Les élèves arrivent au collège avec les énoncés de l'école primaire, ces énoncés sont repris au collège complétés par la généralisation et l'implication, et de nouveaux énoncés sont introduits. Les énoncés portant sur des objets communs (comme les quadrilatères) nous semble des supports intéressants pour relier les deux institutions. Cela constitue notre thème de recherche :

**Comment introduire les propriétés en s'appuyant sur les pré-requis du primaire et respectant les attentes du collège ?**



## Chapitre 2

# Outils d'évolution du contrat pour la liaison primaire-collège en géométrie

L'étude des programmes nous a permis d'identifier les ruptures lors du passage de l'école primaire au collège. Nous supposons que les propriétés pourraient établir un pont entre ces deux institutions par leurs représentations qui s'appuient à la fois sur des énoncés et sur des représentations graphiques. Les représentations graphiques appartiennent à l'espace sensible présent à l'école primaire et les énoncés contribuent à l'entrée dans la théorie du collège. La principale différence dans l'approche de la propriété à l'école primaire et collège réside dans le lien qu'elle exprime. Les caractéristiques de l'école primaire ne possèdent pas d'ordre interne elles utilisent une relation d'association. Les propriétés du collège utilisent une relation différente entre les contraintes et la conclusion. Les travaux antérieurs de Coutat (2003) nous montrent que la distinction entre contraintes et conclusion n'est pas suffisante pour distinguer une propriété de sa réciproque. Cela nous incite à penser que la distinction contraintes-conclusion ne permet pas nécessairement aux élèves de s'approprier le lien entre les contraintes et la conclusion. Afin d'identifier cette relation nous utilisons les théories des champs conceptuels de Vergnaud (1990). Cette étude des propriétés nous renseigne sur les différents types de tâche qui permettent de donner du sens au lien contraintes-conclusion, ces tâches appartenant à des registres différents. Nous reprendrons la théorie de la médiation sémiotique afin d'identifier comment sensibiliser les élèves à ce lien. A l'aide des situations mises à jour par les champs conceptuels, nous utilisons les travaux de Rabardel (1995) et Trouche (2005) sur l'instrumentation. Nous verrons que l'utilisation d'un environnement de géométrie dynamique permet une cohésion avec l'évolution interne à une propriété. Nous étudierons dans quelle mesure un logiciel de géométrie dynamique peut permettre la construction chez les élèves de ce lien interne à la propriété géométrique.

## I. Le concept de propriété

### A. Dans les manuels

En classe de 5<sup>ème</sup> (12/13 ans) les propriétés représentent un élément central dans l'enseignement de la géométrie. En effet, la formulation du raisonnement déductif est étudiée en classe de 5<sup>ème</sup>, ainsi les propriétés sont réinvesties dans des raisonnements de déduction à un pas. Nous avons étudié quelques manuels de 5<sup>ème</sup> afin d'identifier l'organisation et les éléments de la présentation des propriétés au collège.

#### 1 Le manuel Triangle

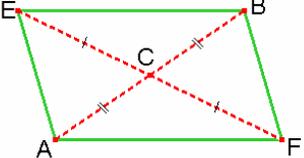
Voici une propriété explicitée dans le manuel Triangle 5<sup>ème</sup> (Hatier 2001) :

*Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme.*

Seul l'énoncé de la propriété est présenté, aucun dessin ne l'accompagne. Cet énoncé isolé, ne permet pas d'accéder aux contraintes ou à la conclusion si on ne connaît pas la propriété au préalable. Un moyen d'identifier les contraintes ou la conclusion serait d'utiliser les mots *si* et *alors*. Cependant, là encore ces mots n'évoquent pas grand-chose du lien entre contraintes et conclusion si on ne connaît pas au préalable la propriété.

#### 2 Le manuel Dimathème 5ème

Voici la même propriété explicitée dans le manuel Dimathème 5<sup>ème</sup> (Didier 2001) :

Si dans un quadrilatère les <b>diagonales</b> ont le <b>même milieu</b> , alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	<b>Donnée</b> [EF] et [AB] ont le même milieu		<b>Conclusion</b> EBFA est un parallélogramme
---	--	--	--

Ici, davantage d'éléments accompagnent l'énoncé ce qui pourrait rendre plus accessible sa compréhension. En effet, un exemple explicite les données, ce que nous appelons les contraintes, et la conclusion de la propriété. Cependant ces informations s'appuient sur un dessin particulier au sens où le manuel considère les diagonales du quadrilatère en les nommant. Pour identifier les segments [EF] et [AB] aux diagonales, il faut regarder le dessin. Cette illustration par un cas particulier reprend les expressions des énoncés de l'école primaire (en s'appuyant sur un dessin). Le danger est que les élèves associent la propriété à cet exemple et ne parviennent pas à l'appliquer lorsque les dessins sont différents. Un autre élément est à remarquer, seul le parallélogramme est représenté, on ne perçoit pas la transformation du quadrilatère quelconque initial en un quadrilatère particulier, le parallélogramme. Rappelons que nous cherchons à identifier dans quelle mesure le lien entre

les contraintes et la conclusion est accessible dans les manuels. Ne représenter que la conclusion nous semble réducteur pour illustrer une propriété. La représentation des contraintes n'est pas à négliger, le quadrilatère quelconque initial fait lui aussi partie des contraintes. La représentation simultanée des contraintes et de la conclusion permet de visualiser la transformation de l'objet représenté par la réalisation des contraintes pour aboutir à la conclusion. Enfin si on regarde le dessin proposé qui accompagne l'énoncé, il est impossible de déterminer quelle propriété est illustrée, la propriété directe ou sa réciproque. Ainsi on peut remarquer que bien que la représentation choisie par les auteurs de ce second manuel semble plus riche, elle ne renseigne pas sur le lien entre les contraintes et la conclusion.

La formulation adoptée dans ces deux manuels s'appuie sur les mots *si* et *alors* si ces mots deviennent des indicateurs pour un « expert » de la géométrie, ils sont beaucoup plus neutres pour un novice. Ainsi, cette formulation experte n'est pas forcément la formulation la plus adaptée pour un apprentissage des propriétés, ou plus précisément pour une première sensibilisation à la notion de contraintes et de conclusion.

### **B. *Le triplet de Vergnaud***

Par l'analyse de ces deux exemples on remarque que la représentation du lien contraintes-conclusion, utilise deux registres : le registre graphique et le registre discursif. L'expression des propriétés utilise les mots *si* et *alors*, cependant, il semblerait que d'autres expressions peuvent être envisagées. Enfin à travers l'analyse des programmes et l'activité des élèves au collège, on peut distinguer deux types de travail à propos des propriétés. Tout d'abord un travail sur les propriétés, c'est-à-dire une première présentation des propriétés aux élèves. Ensuite un travail avec les propriétés où l'élève est amené à utiliser les propriétés comme énoncés tiers. Nous cherchons à définir des scénarios dans un raisonnement déductif d'enseignements qui permettent aux élèves de s'approprier le lien entre les contraintes et la conclusion. Cependant pour cela nous devons préalablement définir ce lien. Nous venons de voir qu'il existait différents problèmes faisant intervenir les propriétés, et qu'une même propriété peut avoir plusieurs expressions.

*«C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens chez un enfant»*

(Vergnaud 1990)

Nous allons nous appuyer sur la caractérisation d'un concept en utilisant le triplet *réfèrent*, *signifié*, *signifiant*. Rappelons cette terminologie de Vergnaud :

Le premier composant du triplet est défini par l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept. Cet ensemble de situations est appelé par Vergnaud le réfèrent. Le deuxième élément du triplet est le signifié : «l'ensemble des invariants sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes : le signifié. » (Vergnaud 1990 p.145). Enfin le dernier élément

du triplet est le signifiant, caractérisé par l'ensemble des représentations langagières ou non du concept.

### ***C. Caractérisation des propriétés***

Nous appliquons ces résultats pour notre étude concernant le lien contraintes conclusion. A partir des travaux de Vergnaud, nous avons créé une terminologie adaptée au concept de propriétés géométriques. Cette terminologie est personnelle. Nous cherchons à caractériser l'invariant : lien contraintes conclusion. Dans ce paragraphe, nous illustrons notre discours à l'aide d'une propriété que nous appellerons la propriété exemple :

**« Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme. »**

#### **1 Le référent**

Nous avons choisi de classer en trois types de situations l'ensemble des situations qui donnent du sens au lien contraintes–conclusion.

#### **Situations d'illustration**

Dans un premier temps le lien contraintes–conclusion peut acquérir du sens au cours de situations que nous appelons des situations d'illustration. Ces situations regroupent l'ensemble des exercices où la propriété est le support du problème. L'exemple ci-dessous présente un exercice de cette classe de situations :

Exercice d'illustration de la propriété exemple :

- Construire un quadrilatère ABCD.
- Construire M milieu de [AC] et N milieu de [BD]
- Déplace C pour que M et N soient confondus
- Qu'observes-tu?

L'élève doit construire un quadrilatère, puis satisfaire une condition particulière sur les diagonales. Les manipulations demandées à l'élève correspondent aux contraintes de la propriété cible (illustrée). L'observation finale correspond à la conclusion de la propriété. Dans cette situation, le quadrilatère initial est représenté. La réalisation des contraintes permet de percevoir l'évolution du quadrilatère en un parallélogramme dès que les contraintes sont satisfaites. Cette transformation est l'illustration du lien contraintes–conclusion.

#### **Situations de validation**

Les deux types de situations suivantes peuvent être présentés conjointement car ils reposent sur la preuve. L'une rassemble l'ensemble des preuves pragmatiques de la propriété, l'autre rassemble l'ensemble des démonstrations de la propriété. Pour distinguer ces différents niveaux de preuves, nous avons repris la terminologie de Balacheff (1987). Les preuves

pragmatiques comprennent les preuves visuelles, une preuve visuelle permet de donner du sens. Harel (1999) considère aussi que les preuves visuelles permettent de considérer la causalité sous-jacente à la propriété. Une démonstration théorique permet de valider la validité d'un théorème ou d'une propriété, mais ne permet pas toujours de comprendre pourquoi la conclusion d'une propriété est liée à un ensemble de contraintes. D'autres preuves, éventuellement plus visuelles, ne renseignent pas uniquement sur la validité du théorème mais aussi sur : « the cause of the theorem's assertion » (Harel 1999 p.610). Une preuve visuelle permet de construire du sens, cependant dans la classe de 5<sup>ème</sup>, et par la suite dans les classes supérieures, toutes les preuves ne sont pas visuelles. Lorsque les élèves ont des connaissances qui le permettent, les propriétés peuvent être prouvées à l'aide de démonstrations.

Preuve de la propriété exemple : (ici la démonstration est accessible aux élèves)

ABCD est un quadrilatère non croisé.

M est le milieu des diagonales.

M milieu de [AC] alors A et C symétriques par rapport à M.

M milieu de [BD] alors B et D symétriques par rapport à M.

M centre de symétrie de [AC] et [BD] alors M centre de symétrie de ABCD.

Un quadrilatère non croisé qui a un centre de symétrie est un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme.

### **Situations d'énoncé tiers**

Enfin le dernier type de situations qui peut permettre aux élèves de s'approprier le lien contraintes-conclusion est l'ensemble des exercices où les propriétés sont utilisées comme énoncés tiers, l'ensemble de ces situations est d'ailleurs appelé énoncé-tiers. La différence entre cette classe de situations et la première classe des situations d'illustration est qu'ici la propriété n'est pas l'objet du problème mais un outil pour la résolution du problème. Nous retrouvons ici les résultats de Duval (1993) sur l'analyse du raisonnement déductif.

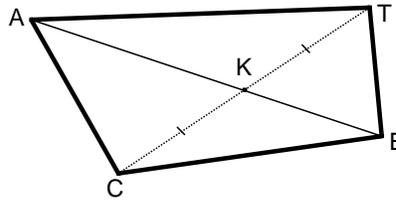
Exercice d'énoncé-tiers de la propriété exemple :

ABC est un triangle.

K est un point de [AB].

T est le symétrique de C par rapport à K.

Où peut être placé K pour que ATBC soit un parallélogramme ?



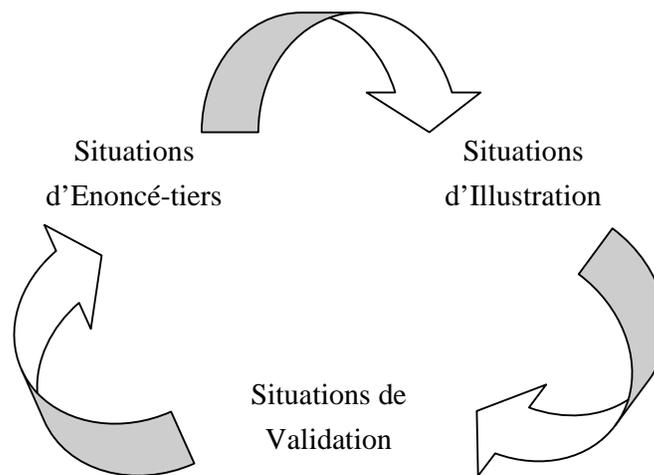
Solution :

K est le centre de symétrie de [CT] d'où K est le milieu de [CT].

Pour que ATBC soit un parallélogramme, il suffit que les diagonales se coupent en leur milieu. C'est-à-dire que K soit le milieu de [AB], il est déjà milieu de [CT].

Ainsi si K est le milieu de [AB] les diagonales de ATBC se coupent en leur milieu, d'où ATBC est un parallélogramme si K milieu de [AB].

Ainsi, nous obtenons trois grands types de situations qui permettent de donner du sens au lien contraintes-conclusion.



Nous choisissons d'entrer dans cette boucle par les situations d'illustration. Une fois que les élèves connaissent les propriétés, il est envisageable de les démontrer puis de les utiliser comme énoncé-tiers.

## 2 L'invariant

L'invariant que nous avons annoncé est le lien contraintes-conclusion. Essayons de préciser ce lien. A travers les trois types de situations et de la propriété exemple, on peut remarquer que quelque soit le quadrilatère du départ, lorsque les contraintes sont imposées, réalisées, progressivement ou non, le résultat final reste le même. Ainsi le lien entre les contraintes et la

conclusion peut être dénommé comme une **relation de subordination**. La conclusion est dépendante de la réalisation des contraintes. On peut affiner cette relation de subordination en précisant que la conclusion est le résultat de l'effet des contraintes, les contraintes sont la cause de l'apparition de la conclusion. Cette relation de causalité apparaît dans les travaux d'Harel (2005) sur les démonstrations. Le lien contraintes-conclusion peut s'identifier à une relation de cause à effet, où les contraintes sont les causes et la conclusion l'effet. L'association de l'implication à une relation de causalité peut induire un obstacle dans l'appropriation de l'implication formelle. Mais cette relation de causalité peut être exploitée dans un premier temps, pour donner du sens aux propriétés.

### 3 Les signifiants

Analysons maintenant quelles peuvent être les différentes expressions, langagières ou non, dans l'expression du lien contraintes-conclusion. Ce travail sur les signifiants prend en compte les deux registres d'expressions de la géométrie : le registre graphique et le registre discursif.

#### Signifiants du registre discursif

Si on ne considère que l'énoncé d'une propriété, quelles sont les expressions de la relation de subordination entre les contraintes et les conclusions ?

Nous avons vu précédemment une première expression de cette relation : *si ... alors*. Cette expression prend place dans la première catégorie de signifiant du registre discursif : les formulations expertes. Ces formulations sont les plus répandues, dans les manuels. Cela peut s'expliquer par le fait que cette formulation permet d'identifier les contraintes et la conclusion en s'appuyant sur les marques *si* et *alors*. Comme nous l'avons dit dans le chapitre précédent (Chapitre 1- II La géométrie au collège), l'identification des contraintes et de la conclusion n'implique pas nécessairement l'identification du lien contraintes-conclusion. Les mots *si* et *alors* sont les mots le plus couramment utilisés pour structurer une propriété, on peut envisager d'autres mots ayant la même fonction. Ainsi les mots qui annoncent les contraintes, comme *si*, seront les indicateurs conditionnels. C'est-à-dire qu'ils annoncent les conditions qui vont s'accumuler dans les contraintes. Les mots qui annoncent la conclusion, comme *alors*, seront considérés comme des indicateurs consécutifs. Les indicateurs consécutifs annoncent les conséquences des contraintes sur l'objet initial.

Formulation experte de la propriété exemple :

**Si** un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu  
**Indicateur conditionnel**

**alors** ce quadrilatère est un parallélogramme  
**Indicateur consécutif**

Un deuxième type de formulation peut être envisagé, que nous appelons formulation temporelle. Certaines formulations n'utilisent pas les indicateurs (*si* et *alors*) cependant elles

permettent d'exprimer le lien contraintes-conclusion. Ce lien est mis en évidence à l'aide d'une chronologie dans l'énonciation de la propriété. Cette chronologie concerne l'apparition des différentes contraintes imposées à l'objet initial. Les indicateurs de cette chronologie dans l'énoncé d'une propriété s'identifient au temps utilisé, ou à des expressions comme : *on aura*. Nous nommons ces mots ou expressions des indicateurs temporels. Ces expressions peuvent être plus visibles à l'oral plutôt qu'à l'écrit. Elles expriment davantage l'évolution d'objet quelconque vers un objet final particulier par l'imposition des contraintes.

Formulation temporelle de la propriété exemple :

Lorsqu'un quadrilatère aura ses diagonales qui se coupent en leur milieu il deviendra un parallélogramme.

Indicateurs temporels

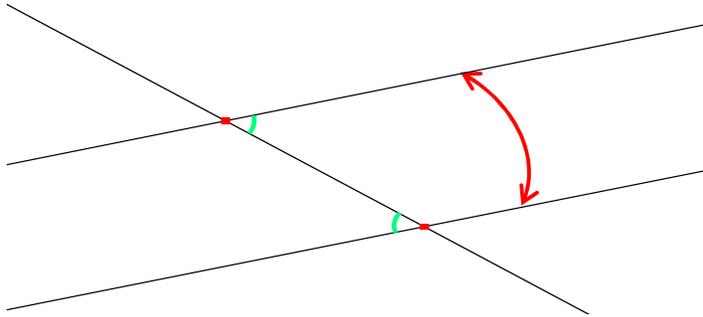
Les formulations de cette deuxième classe laissent transparaître la transformation au cours du temps des objets considérés dans la propriété.

Conjointement à ces deux types de formulations, nous pouvons identifier deux autres types de formulations. Tout d'abord les formulations qui utilisent des indicateurs uniquement pour les contraintes, ces indicateurs pouvant être conditionnels ou temporels. Enfin le dernier type de formulation que nous retiendrons ici dans le registre discursif est l'expression des conclusions uniquement par l'utilisation d'indicateurs temporels ou consécutifs.

### Signifiants registre graphique

Considérons maintenant les différentes représentations, dans le registre graphique, du lien contraintes-conclusion. Une première représentation graphique, (première ne veut pas forcément dire optimale), est la traduction graphique de l'énoncé par un dessin. Si dans le registre discursif, les contraintes et conclusions sont repérables par les indicateurs, dans le registre graphique, les contraintes et les conclusions peuvent être identifiées par des couleurs différentes.

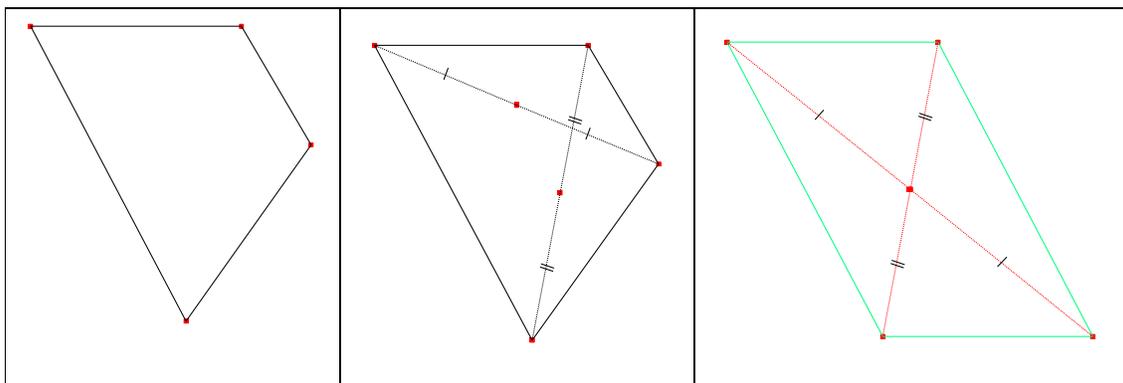
Si l'on considère notre propriété exemple, il est difficile de coder avec des couleurs différentes le quadrilatère qui est aussi le parallélogramme. On peut d'ores et déjà apercevoir les limites de cette représentation. Cependant sur un autre exemple on peut avoir :



Si deux droites coupées par une sécante sont parallèles, alors les angles alternes internes formés sont égaux.<sup>3</sup>

Cet exemple illustre cette représentation qui s'appuie sur le codage des contraintes et des conclusions en utilisant des couleurs particulières. Pour que ce dessin soit compréhensible, il faut que le lecteur connaisse la signification des couleurs, c'est pour cette raison que l'énoncé accompagne la représentation graphique de la propriété afin que l'on puisse identifier quelle propriété le dessin représente. Comme nous l'avons remarqué précédemment, le dessin à lui seul ne représente pas la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion, et toutes les propriétés ne peuvent pas être représentées, comme par exemple notre propriété exemple où le quadrilatère qui fait partie des contraintes devient un parallélogramme qui est la conclusion.

Tout en restant dans le registre graphique, on peut envisager une représentation plus riche de la relation de subordination entre contraintes et conclusion. Au lieu de ne considérer qu'un seul dessin, qui représente l'état final de la propriété, considérons une suite ordonnée de dessins qui indique les différentes étapes d'évolution des objets cibles de la propriété. Ainsi le premier dessin présente l'objet principal de la propriété, alors que le dernier dessin présente la conclusion. Les dessins intermédiaires permettent d'identifier les différentes contraintes imposées à l'objet principal. En reprenant la propriété exemple, qui devient maintenant représentable, on obtient<sup>4</sup> :



<sup>3</sup> Nous utilisons la double flèche entre deux droites pour indiquer que les deux droites sont parallèles.

<sup>4</sup> Les sommets ne sont pas nommés volontairement pour inciter une réflexion sur la figure et non le dessin.

1	2	3
---	---	---

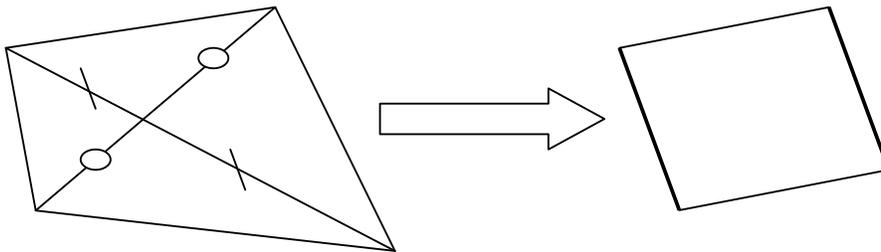
Les dessins ci-dessus représentent les différentes étapes de la propriété exemple.

1. Tout d'abord l'objet initial qui est le quadrilatère.
2. Ensuite la construction des diagonales et de leur milieu.
3. Enfin, les milieux sont confondus, le dernier dessin représente à la fois la dernière contrainte représentée en rouge et la conclusion de la propriété, représentée en vert, le parallélogramme. Cette représentation qui utilise le codage des contraintes et conclusion avec la couleur, peut être rapprochée de la formulation temporelle de la relation contraintes-conclusion.

chaque dessin reprend le précédent en ajoutant une donnée. Cette suite de dessins peut illustrer une chronologie explicitée dans les formulations temporelles.

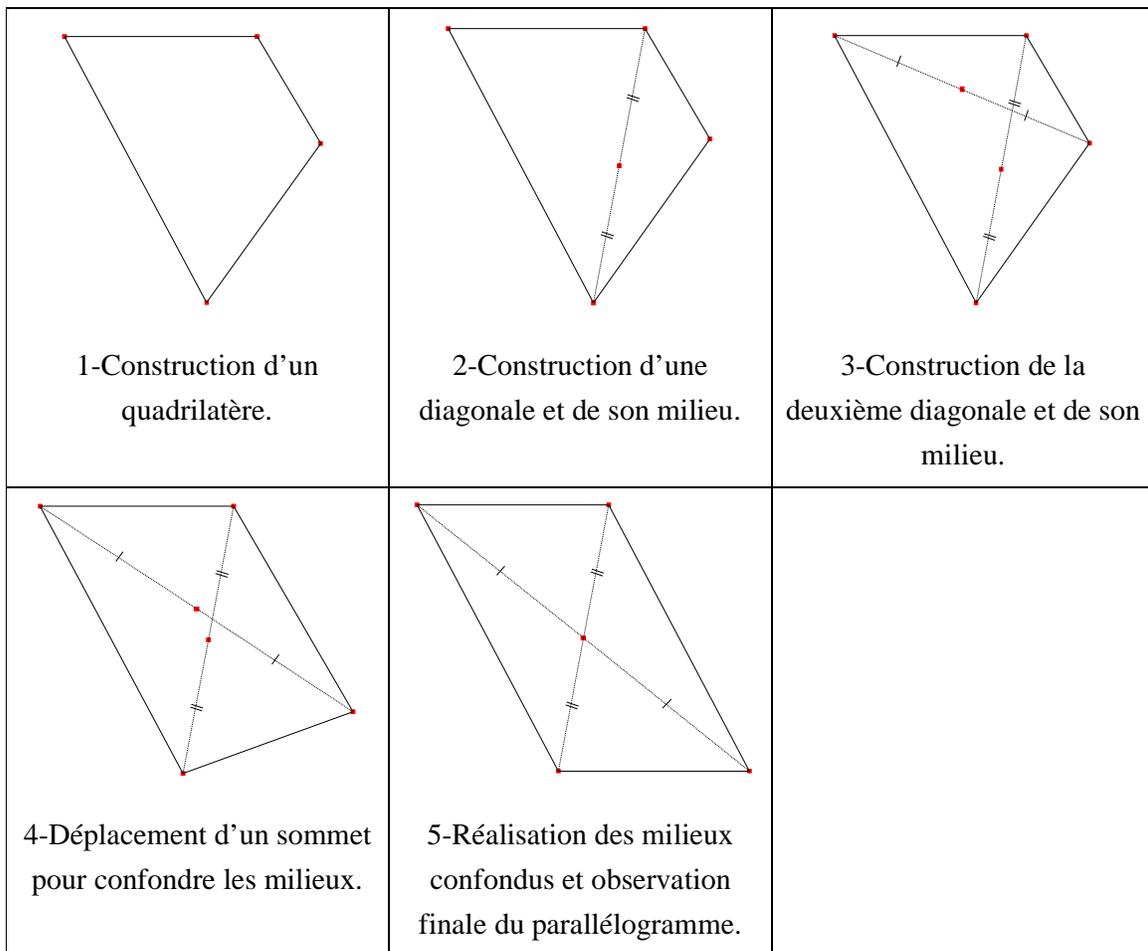
Bellard et Lewillion (2001) utilisent le registre graphique pour représenter un théorème à travers ce qu'ils appellent des schémas.

Voici comment elles illustrent la propriété exemple :



(Bellard, Lewillion 2001 p.130)

Cependant les limites de cette représentation sont rapidement atteintes. En effet, le nombre de dessins est proportionnel à celui des contraintes, ce qui fait que plus les contraintes sont nombreuses, plus les dessins se multiplient. Imaginons une propriété avec de nombreuses contraintes, ainsi, l'ensemble des dessins correspondant peut être rapproché d'un dessin animé. Cela nous amène à la notion de registre graphique animé, que nous nommerons registre graphique dynamique. Les contraintes sont représentées par les évolutions du dessin, les constructions, les déplacements d'objets, et la conclusion sera la dernière image, l'observation finale. Il nous est bien évidemment impossible de présenter la représentation d'une propriété dans un tel registre dans l'environnement statique du papier-crayon, cependant voici quelques images du dessin animé qui représenterait la propriété exemple :



Dans un environnement informatique, le codage automatique par les couleurs n'est pas disponible. Cependant les contraintes et conclusion sont différenciées à l'aide d'outils spécifiques à l'environnement dynamique. Ainsi, les contraintes peuvent être identifiées aux constructions et déplacements, et la conclusion à l'observation finale. Le sujet est engagé dans la réalisation des contraintes. Les différentes étapes visibles au cours du film permettent de prendre conscience des effets successifs des contraintes sur l'objet de départ. La visualisation de ces effets permet la prise de conscience du lien entre les contraintes et la conclusion.

Au début de ce paragraphe, nous avons annoncé que nous considérons comme registre de travail le registre graphique et le registre discursif. Cependant la géométrie peut aussi s'exprimer à l'aide du registre graphique dynamique.

### D. Synthèse

Pour conclure, sur l'expression d'une propriété, l'utilisation du registre graphique dynamique permet d'appréhender la juxtaposition des contraintes pour aboutir à la conclusion. Nous avons vu qu'une représentation langagière du lien contraintes-conclusion utilise la chronologie : formulation temporelle. Cette expression de la propriété à l'aide de la chronologie coïncide avec une représentation de la propriété dans un environnement dynamique. L'utilisation du déplacement, pour réaliser les contraintes, illustre la

transformation des objets géométriques. Cela nous amène à considérer les logiciels de géométrie dynamique comme outils pour l'introduction des propriétés et à nous poser deux questions.

Comment organiser l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour l'illustration des propriétés ?

Quel peut être l'impact d'une telle utilisation dans la construction du lien contraintes-conclusion chez les élèves ?

De plus, le travail sur le référent nous a permis de mettre à jour trois types de situations qui utilisent chacune un registre différent : illustration dans le registre graphique-dynamique, validation dans le registre discursivo-graphique et Enoncé tiers dans le registre discursif et (ou) graphique. Cette utilisation des différents registres nous amène aux questions suivantes : dans quelle mesure peut-on considérer ces systèmes de représentation comme des registres ? Quelle interaction entre les différents registres peut favoriser l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion ? Dans quelle mesure le registre graphique dynamique est-il exploitable, quels sont ses atouts ?

## II. Processus d'intériorisation des outils en signes

La pertinence d'un environnement dynamique vient d'être soulevée. Ainsi la sensibilisation du lien contraintes-conclusion passe par la manipulation des propriétés dans un environnement papier-crayon et un environnement graphique-dynamique. L'utilisation de l'environnement graphique-dynamique permet la visualisation de l'évolution de la propriété lorsque les contraintes sont réalisées l'une après l'autre. La visualisation de cette transformation peut influencer sur les connaissances des élèves, pour cela il faut que les élèves parviennent à lui associer du sens. La construction du sens par l'élève passe par l'appropriation des outils du logiciel ainsi que par l'articulation entre les registres. Cependant avant d'aborder ces deux domaines, il nous semble essentiel de commencer par renvoyer aux travaux de Vygotsky sur l'enseignement-apprentissage, et l'appropriation des signes par les élèves.

### A. Vygotsky

Divers courants de recherche ont donné lieu à l'élaboration de différentes théories de l'apprentissage : la conception transmissive, béhavioriste, socio-constructiviste. Parmi les acteurs de cette dernière conception, nous choisissons de nous intéresser plus particulièrement à Vygotsky pour ses travaux sur le développement de l'enfant, par le développement de la pensée et du langage.

Vygotsky s'inspire de la relation de l'homme avec la nature médiée par des outils. Il reprend cette idée pour la relation entre l'homme et ses propres pensées avec des outils qu'il appelle signes psychologiques. Les signes psychologiques sont des médiateurs dans le développement du psychique au même titre que les outils sont des médiateurs dans la relation entre l'homme et la nature. Son exemple classique de signe psychologique est le moyen mnémotechnique du nœud dans le mouchoir. Ce signe bien qu'externe est psychologique car il est orienté vers le sujet, il a pour but le contrôle de la pensée du sujet. Un signe peut être une représentation (orale, écrite, des mots, des dessins), un mouvement **expressif afin d'exprimer une chose objective** (indépendamment du sujet). Ainsi, tout stimulus, mot ou geste, n'est pas un signe, cependant ils peuvent évoluer en signe :

*« un stimulus devient un instrument psychologique par son utilisation comme moyen d'action sur le psychisme et sur le comportement »*

(Vygotsky 1930 p.44)

L'utilisation d'un signe psychologique, comme le nœud du mouchoir pour résoudre un problème psychique intérieur, est ce que Vygotsky appelle l'utilisation fonctionnelle du signe. Cette utilisation fonctionnelle du signe n'est pas immédiate chez l'enfant, elle correspond au troisième stade de développement de toutes « opérations psychiques », les fonctions mentales supérieures.

Le premier stade correspond à la découverte des outils par l'enfant. Une fois ces outils découverts et éventuellement utilisés de façon primitive, l'enfant apprend à utiliser ces outils. Nous conservons le terme d'outil et non le terme de signe psychologique pour ce stade. L'enfant apprend à utiliser l'outil mais cette utilisation reste très subjective. Ce deuxième stade permet à l'enfant de maîtriser la structure externe du signe. Prenons comme exemple le langage, considéré par Vygotsky comme un médiateur, un signe psychologique central pour la formation des concepts. Au cours de ce deuxième stade l'enfant peut utiliser les mots, la syntaxe de la langue cependant il ne maîtrise pas encore la syntaxe de la pensée.

*« L'enfant maîtrise la proposition subordonnée, les formes linguistique comme « parce que », « puisque », « si », « quand », « au contraire », ou « mais », bien avant de maîtriser les relations causales temporelles, conditionnelles, les oppositions etc... »*

(Vygotsky 1934 p.132-133)

La langue n'est pour le moment qu'un outil orienté vers l'extérieur et non tourné vers le sujet. Une fois que l'enfant maîtrise l'outil, nous entrons dans le troisième stade « stade du signe extérieur ». Nous ne parlons plus d'outils mais de signes. Ces signes sont le résultat d'interactions sociales, ils sont utilisés de manière objective et sont orientés vers le sujet. C'est à ce moment que l'enfant peut par exemple utiliser le signe mnémotechnique du mouchoir comme moyen d'action sur ses pensées. Si nous reprenons l'exemple du langage, Vygotsky considère le langage égocentrique comme un signe psychique, il est certes extérieur, mais il est utilisé pour structurer les connaissances de l'enfant. Il a un rôle médiateur dans la formation de la pensée verbale, à l'articulation du langage social et du langage interne. Le langage égocentrique peut être considéré comme langage social par sa nature physique (un outil externe), il peut aussi être du côté du langage interne par sa fonction psychique.

Enfin, le dernier stade de développement est le stade de « la croissance en dedans ». L'utilisation du signe extérieur, l'opération externe, devient une opération interne, Vygotsky parle d'intériorisation<sup>5</sup>. C'est à ce stade que le langage devient intérieur. Cependant signes extérieurs et signes intérieurs interagissent continuellement, ce n'est pas parce que l'enfant a internalisé certains mots qu'il ne les utilisera plus de façon externe.

Ainsi le développement des fonctions mentales supérieures est le résultat de l'intériorisation des signes extérieurs en des signes intérieurs. C'est au cours de ce développement que l'enfant accède au monde de la pensée adulte et prend conscience des concepts. Cependant l'introduction et la sensibilisation des signes chez l'enfant sont le résultat d'une activité

---

<sup>5</sup> Nous reprenons le terme « intériorisation » du livre Pensée et Langage dont nous tirons l'essentiel de nos citations.

sociale, ainsi dans un contexte scolaire d'apprentissage, c'est par les interactions avec les autres élèves et avec l'enseignant que l'élève va acquérir de nouveaux signes psychologiques.

Cela nous amène à proposer la définition suivante du processus de médiation sémiotique comme un enchaînement d'actions qui permet l'appropriation des signes (des dessins, schémas, écritures, expressions langagières ...). Cette appropriation des signes agit sur le développement de la pensée de l'enfant par l'accès à de nouveaux concepts. Pour cela nous parlerons de processus de médiation sémiotique pour l'acquisition d'un concept utilisant certains signes.

Cependant comment les signes extérieurs deviennent des signes intérieurs ?

*« L'étude expérimentale a montré que l'utilisation fonctionnelle du mot ou d'un autre signe comme moyen de diriger activement l'attention, de différencier et de dégager des traits caractéristiques, de les abstraire et d'en faire une synthèse est une partie fondamentale et indispensable du processus de formation des concepts dans son ensemble. La formation du concept ou le fait qu'un mot acquiert une signification est le résultat d'une activité complexe (maniement du mot ou du signe) à laquelle participent toutes les fonctions intellectuelles dans une combinaison spécifique.*

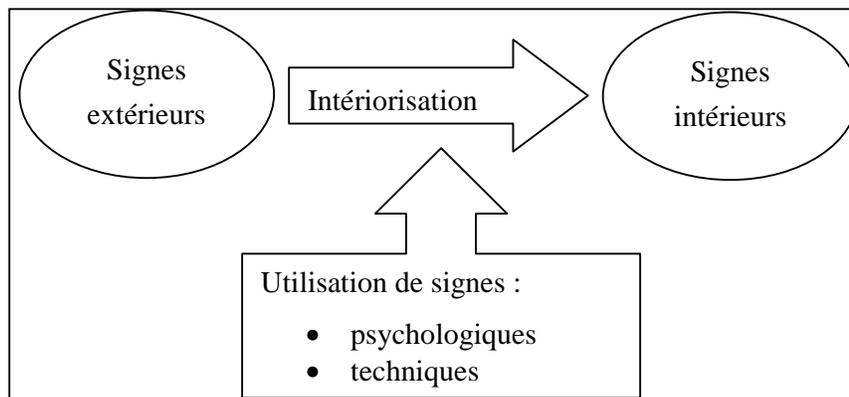
...

*L'élément central [le processus de formation des concepts] en est, comme le montre l'étude, l'utilisation fonctionnelle du signe, ou du mot, comme moyen permettant à l'adolescent de soumettre à son pouvoir ses propres opérations psychiques, de maîtriser le cours de ses propres processus psychiques et d'orienter leurs activités vers la résolution du problème auquel il est confronté »*

(Vygotsky 1934 p.156-157)

Ainsi, c'est par l'utilisation fonctionnelle des signes que l'enfant intériorise ces signes. Ce processus d'intériorisation utilise des outils de médiation sémiotique, les signes extérieurs et les outils (Figure 2). Le principal outil de médiation sémiotique est l'ensemble des échanges langagiers avec d'autres sujets éventuellement plus experts.

Figure 2



L'utilisation d'outils et de signes dans les interactions entre les individus en fait des outils de médiation sémiotique. Un processus de médiation sémiotique pour un concept mathématiques, dans un contexte d'apprentissage, est une suite d'évènements qui a pour but l'appropriation par le sujet d'un ensemble de signes associés au concept mathématique visé. Cette médiation des outils repose aussi sur leurs manipulations et leur utilisation, par exemple, l'appropriation du vocabulaire de la géométrie passe par son utilisation au cours d'échanges entre élèves ou entre élèves et enseignant.

*Le concept est impossible sans les mots, la pensée conceptuelle est impossible sans la pensée verbale ; l'élément nouveau, l'élément central de tout ce processus, qu'on est fondé à considérer comme la cause productive de la maturation des concepts, est l'emploi spécifique du mot, l'utilisation fonctionnelle du signe comme moyen de formation des concepts.*

(Vygotsky, 1934/1997, pp. 157)

Ainsi, l'utilisation des outils et des signes psychiques contribue à leur appropriation par l'élève. C'est en utilisant des mots que l'élève parvient à leur associer du sens. Cependant cette utilisation de signes nouveaux n'est pas spontanée, l'enseignant en est à l'origine.

### **B. Zone Proximale de Développement, étayage**

Dans les travaux de Vygotsky la présence d'un expert dans le processus de médiation sémiotique est centrale. Il contribue, en particulier, à l'introduction de nouveaux signes. L'interaction élève-enseignant peut entraîner chez l'élève une plus grande capacité dans la résolution de tâches proposées. Cet accompagnement par l'enseignant et l'écart entre ce que l'élève sait résoudre seul et ce que l'élève résout accompagné définit la Zone Proximale de Développement (appelée aussi zone de proche développement) :

*« Cette disparité entre l'âge mental, ou niveau de développement présent, qui est déterminé à l'aide des problèmes résolus de manière autonome, et le niveau qu'atteint l'enfant lorsqu'il résout des problèmes non plus seul mais en collaboration détermine précisément la zone de proche développement »*

(Vygotsky 1934, p. 270)

La détermination de la zone proximale de développement permet de définir des activités susceptibles d'entraîner un apprentissage :

*« L'apprentissage n'est valable que s'il devance le développement. Il suscite alors, fait naître toute une série de fonctions qui se trouvent au stade de la maturation, qui sont dans la zone proche de développement. »*

(Vygotsky 1934, p.275)

Les travaux de Vygotsky sont repris par Bruner. Ce dernier caractérise l'accompagnement par l'enseignant dans la résolution d'une tâche comme une forme d'échafaudage :

*« Ce système de support fourni par l'adulte à travers le discours, ou la communication plus généralement, est un peu comme un « échafaudage » à travers lequel l'adulte restreint la complexité de la tâche permettant à l'enfant de résoudre des problèmes qu'il ne peut accomplir tout seul. »*

(Bruner 1983, p. 288)

Soury-Lavergne (1998) complète cette intervention de l'enseignant :

*« nous proposons de qualifier « d'échafaudage » certaines de ces interventions [de l'enseignant] qui ne dénaturent pas complètement la situation de l'élève et qui préservent ainsi sa signification. »*

(Soury-Lavergne 1998 p.38)

Lorsque la situation a-didactique préparée par l'enseignant n'atteint pas ses objectifs, l'enseignant intervient dans la relation élève-milieu. Cette intervention peut permettre de décharger certains éléments de la tâche de l'élève afin qu'il soit plus à même de mettre en œuvre ses connaissances. Si en prenant en charge les éléments de la tâche, l'enseignant empêche la mise en œuvre des connaissances de l'élève, alors la situation est modifiée et on parlera d'effet Topaze. Les connaissances de l'élève n'interviennent plus et la situation ne permettra pas l'apprentissage visé.

L'intervention de l'enseignant dans la relation élève-milieu peut favoriser l'apprentissage par un processus d'échafaudage ou au contraire le bloquer par l'effet Topaze. Ces interventions agissent dans la négociation du contrat didactique. C'est au cours de la négociation du contrat didactique que les connaissances des élèves évoluent.

Dans la mise en place du nouveau contrat de géométrie du collège, l'enseignant tient une place importante. En effet c'est, entre autres, par ses interventions et échanges avec les élèves qu'il participe à la négociation du contrat, au développement de nouveaux concepts et donc à l'apprentissage des élèves. Cette interaction permet l'apparition de signes, nouveaux pour l'élève, dans les dialogues.

### *C. Médiation sémiotique et Cabri*

Cette étude faisant partie d'un projet plus vaste sur l'étude de l'intégration du logiciel de géométrie dynamique Cabri Géomètre, dans les classes, nous utilisons le logiciel Cabri Géomètre dans notre expérimentation.

Lorsque l'environnement de travail n'est plus l'environnement papier-crayon mais un environnement informatique, le processus de médiation agit de façon identique. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet d'illustrer le lien contraintes-conclusion d'une propriété (comme signifiant d'un registre visuel). Tout comme on met en œuvre des outils dans un environnement papier-crayon, on met en œuvre des outils dans la manipulation d'un logiciel de géométrie dynamique. Mariotti (2001) utilise un logiciel de géométrie dynamique (Cabri Géomètre) pour la construction d'une axiomatique avec les élèves. Chaque outil du logiciel est reconstruit telle une nouvelle propriété, les nouveaux outils utilisent des primitives de bases correspondant aux axiomes de la géométrie construite. La construction des outils du logiciel complétée par les interactions avec l'enseignant permet la mise en place d'un processus de médiation sémiotique par l'utilisation des outils. Falcade (2006) utilise un logiciel de géométrie dynamique pour l'introduction du concept de graphe de fonction chez des élèves du secondaire. Les manipulations avec le logiciel sont complétées par des discussions mathématiques, donnant une place centrale au langage.

Lorsque les élèves manipulent les outils d'un logiciel de géométrie dynamique, ils manipulent des outils techniques, médiateurs dans la relation de l'élève avec le concept visé. Ces outils techniques permettent aux élèves d'intervenir sur les objets de la géométrie représentés par l'interface du logiciel. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans la perspective d'une médiation sémiotique, a pour but l'évolution de ces outils techniques en signes psychologiques. Cette intériorisation passe par l'utilisation des outils et des signes avec l'enseignant. Ici le concept visé est le lien contraintes-conclusion.

Dans les activités de type Illustration le lien contraintes-conclusion est visualisable à l'aide de l'outil déplacement. Les élèves agissent sur l'objet initial en lui imposant des contraintes supplémentaires. La réalisation de ces contraintes transforme l'objet initial en un objet particulier. Notre objectif étant que les élèves s'approprient le concept de propriété par le lien contraintes-conclusion, ainsi dès le début de la manipulation, l'outil déplacement amorce le processus de médiation sémiotique pour le lien contraintes-conclusion. L'enseignant peut aussi être un élément important qui permet un échange et l'utilisation du langage pour exprimer les différentes interactions avec le logiciel. Cela nous amène à notre première hypothèse de travail :

HT1 : l'utilisation de Cabri Géomètre complétée par les interactions avec l'enseignant peut constituer un outil de médiation sémiotique pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion par les élèves.

---

Ainsi, une discussion gérée par l'enseignant permet la verbalisation des actions, et intervient comme outil de médiation sémiotique pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion. L'outil déplacement peut ainsi évoluer en signe psychologique. L'utilisation des outils et la verbalisation des différentes actions associées aux signes agissent comme outils de médiation sémiotique lors de l'évolution des outils techniques du logiciel en signes psychologiques.

### III. Registres sémiotiques et leurs interactions

#### A. *Les registres sémiotiques*

Revenons sur la question des registres soulevée dans la première partie de ce chapitre théorique. Duval (1993) considère un registre sémiotique comme un système de signes dont le fonctionnement est régi par un ensemble de règles. Ces règles permettent la production de représentations, qui est appelée par Duval la formation d'un registre de représentation. Plusieurs représentations peuvent se référer au même objet, c'est-à-dire qu'un objet peut être exprimé différemment tout en utilisant les signes du registre dans lequel il a été produit, ce qui est le traitement. Enfin, on peut convertir la représentation d'un objet dans un autre registre que celui dans lequel elle a été produite, c'est-à-dire l'exprimer avec un ensemble de signes différents, un tel processus est appelé par Duval conversion.

Nous considérons qu'un environnement de géométrie dynamique utilise un système sémiotique qui possède ses propres signes, ceux du registre graphique, complétés par les messages du logiciel. Par exemple, dans le logiciel Cabri Géomètre, la souris est représentée par une flèche qui se transforme en une main lorsqu'elle s'approche d'un objet à traiter. Des indications discursives, les messages, sont données par le logiciel pour informer le sujet sur l'utilisation des outils. La présence de ces signes contrôlés par un ensemble de règles permet une formation d'un registre de représentation. Par exemple une règle de ce système est que les objets représentés doivent conserver leurs propriétés lors du déplacement. Cette formation de la représentation est complétée par un traitement qui peut utiliser certains outils. Par exemple avec Cabri Géomètre l'outil cacher-montrer ou encore le déplacement qui ne change pas l'objet mais uniquement sa représentation. C'est par ces signes complémentaires et les règles associées que ce système peut être considéré comme un registre différent du registre graphique. Cela nous amène à considérer trois registres différents pour l'expression des relations des objets de la géométrie : le registre graphique dynamique, le registre graphique et le registre discursif.

*« (...) elles [les représentations] jouent un rôle primordial dans le développement des représentations mentales : celui-ci dépend de l'intériorisation des représentations sémiotiques, au même titre que les images mentales sont une intériorisation des percepts (Vygotsky 1962, Piaget 1986) »*

(Duval 1993 p.39)

L'utilisation des registres sémiotiques joue un rôle dans la construction des représentations mentales, et pourrait ainsi intervenir dans le processus de médiation sémiotique pour le concept de propriétés.

Cela nous amène notre deuxième hypothèse de travail :

HT2 : L'utilisation et l'interaction entre les registres graphique-dynamique, graphiques et discursifs contribuent à la construction du sens du concept de propriété c'est-à-dire l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion.

Cependant ce travail doit s'accompagner d'un travail sur la coordination des registres.

La présence et l'utilisation de registres différents permettent de comprendre certaines difficultés que peuvent rencontrer les élèves. Associer plusieurs registres ou utiliser différents registres passe par la conversion entre registres. La conversion d'un représenté d'un registre à un autre n'est pas anodine, elle n'utilise pas de règles comme pour la formation et le traitement. Ainsi, l'utilisation de registres différents aide l'élève à comprendre certains concepts s'il parvient à identifier le concept représenté dans les différents registres. C'est justement cette identification du concept à travers plusieurs registres qui pose problème à l'élève :

*« On peut observer à tous les niveaux un **cloisonnement des registres de représentation** chez la très grande majorité des élèves »*

*« (...) cette compréhension mono-registre conduit à un travail à l'aveugle, sans possibilité de contrôle du « sens » de ce qui est fait. »*

(Duval 1993 p.52)

Si on reprend l'analyse faite sur la distinction entre dessin et figure (première partie du chapitre théorique), nous comprenons bien que ce cloisonnement va à l'encontre de la construction de la notion figure chez l'élève. En effet, la figure est une construction du sujet qui relie les différentes représentations d'un objet géométrique (dans un registre graphique ou dans un registre discursif) et l'objet géométrique lui-même.

Ainsi, si l'on veut que les élèves s'approprient les figures, un travail sur la conversion des registres sémiotiques est indispensable :

*« La coordination des registres apparaît comme la condition fondamentale pour tous les apprentissages de base. »*

(Duval 1993 p.54)

Le concept de propriété et plus précisément, le lien contraintes-conclusion passe par la résolution d'exercices dans des registres différents.

### **B. Interaction entre les registres**

Les trois types de situations (définies dans le chapitre Concept de propriété) font intervenir les trois registres. Les problèmes de la classe Illustration utilisent le registre graphique-dynamique. Les exercices de la classe validation utilisent plusieurs registres, dynamique, graphique et discursif. Enfin, les exercices d'énoncé-tiers utilisent les registres graphique et discursif. Ensuite l'expression des propriétés se fait dans le registre discursif, un dessin peut

éventuellement être intégré pour représenter graphiquement les informations discursives. Par exemple en reprenant la propriété exemple, nous avons représenté une propriété dans deux registres : graphique et discursif. Ces deux registres sont souvent associés, comme nous l'avons montré, pour exprimer une propriété.

Le registre graphique-dynamique et le registre graphique sont utilisés dans des environnements différents. Le registre graphique dynamique intervient dans les environnements de géométrie dynamique (Cabri) alors que le registre graphique intervient dans un environnement papier-crayon. Ces deux environnements sont différents par les traitements et la réflexion associée, et surtout parce que l'un est statique et non l'autre. Le registre discursif, est utilisé dans les deux environnements. Ainsi dans un même environnement, deux registres peuvent être utilisés, conjointement ou non.

		Environnements	
		Cabri	Papier-crayon
Registres	Graphique-dynamique	Graphique	
	Discursif		Discursivo-graphique
			Discursif

Lorsque les élèves manipulent des objets géométriques dans un environnement de géométrie dynamique ils doivent interpréter les signes de cet environnement, c'est-à-dire les signes du registre graphique-dynamique. Cependant les échanges avec autrui utilisent le langage, c'est-à-dire des signes du registre discursif. La coordination des deux registres semble centrale dans ces activités. Pourtant la pratique de ces registres est différente :

*« Une figure<sup>6</sup> peut être produite pour illustrer un énoncé, mais inversement un énoncé peut être produit pour décrire ou pour illustrer une figure. Ces deux situations sont cognitivement totalement différentes et ne conduisent pas nécessairement aux mêmes productions. »*

(Duval 2005)

Lorsque nous associons un dessin à un énoncé pour exprimer une propriété, nous utiliserons simultanément deux représentations dans deux registres différents d'un même objet. Or chaque représentation introduit des éléments propres :

*« On peut ainsi vérifier qu'une figure et un énoncé (linguistique ou symbolique) ne remplissent pas l'un par rapport à l'autre les mêmes fonctions et n'ont donc pas le même statut. C'est pourquoi, lorsque deux représentations*

---

<sup>6</sup> Duval utilise le terme figure qui pourrait être remplacé par le terme dessin étant donné qu'il considère une représentation graphique d'un objet géométrique.

*sont simultanément mobilisées dans deux registres différents, il devient essentiel de distinguer les statuts de représentation autosuffisante pour l'une et de représentation auxiliaire pour l'autre. »*

(Duval 2005 p.34)

Pour l'expression des propriétés, le dessin doit devenir auxiliaire par rapport à l'énoncé qui lui doit acquérir une position autosuffisante. Les propriétés géométriques sont enseignées dans le but d'être utilisées comme énoncé-tiers dans les raisonnements de preuve. La formulation de ces raisonnements utilise principalement le registre discursif, c'est donc l'énoncé et non le dessin qui sera utilisé. Cela nous amène à penser que l'énoncé tend à devenir une représentation autosuffisante et que le dessin devient alors auxiliaire. Cependant n'oublions pas que les élèves sortent d'une institution où le registre graphique, par les dessins, est le registre autosuffisant. Si les élèves s'approprient les propriétés en utilisant les dessins comme registre autosuffisant, alors ces propriétés seront des propriétés pragmatiques, or notre but est que les élèves s'approprient des propriétés mathématiques. Duval (2005) nous présente deux exigences pour que les définitions soient des définitions mathématiques : « *la prise en compte des cas possibles* » et « *la recherche d'une économie maximale* ». La première exigence est reliée à la distinction dessin figure. C'est-à-dire que les élèves ne peuvent associer une propriété à un cas particulier, un dessin, travaillé en classe, une propriété doit être associée à un ensemble de cas, définit par la propriété elle-même. Si on reprend notre propriété exemple : *si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme* ; cette propriété considère l'ensemble des quadrilatères sur lesquels on impose une contrainte, et pas uniquement les quadrilatères représentés dans le cours. La deuxième exigence est un peu plus subtile et certainement moins évidente à mettre en place. Une définition est un énoncé construit par un ensemble minimal de caractéristiques de l'objet. A partir d'une définition on peut déduire un ensemble de propriétés. L'accès à ces nouvelles propriétés passe par l'élaboration de preuves. Or la démonstration ne peut intervenir qu'après un apprentissage d'une axiomatique minimale. Des activités de la classe Illustration permettent une introduction des propriétés, cependant les preuves relient les propriétés entre elles et permettent d'accéder à cette exigence de l'économie maximale de la définition. Ce qui nous montre bien que les propriétés ne peuvent être acquises par les élèves simplement par des illustrations mais aussi par des exercices d'énoncé-tiers et que le temps d'apprentissage des propriétés dépasse le temps didactique.

L'articulation entre le registre graphique et le registre discursif paraît centrale dans la construction d'une propriété, en particulier pour la prise en compte des cas possibles. Cependant, l'utilisation des différents registres sémiotiques ne sera intéressante pour l'apprentissage que lorsque la coordination entre ces registres sera opérationnelle. Duval, conscient de ce fait, a étudié l'articulation entre le registre visuel et le registre du discours. Pour traduire l'expression d'un objet géométrique du registre du discours vers le registre de la visualisation, l'appréhension de la figure n'est pas tout à fait la même. En effet, dans le

registre visuel, les objets géométriques sont vus dans leur globalité. Par exemple, dans le plan considérons des points et des segments qui les relient, alors cet ensemble est considéré comme un polygone. C'est ce que Duval appelle :

*« le mouvement spontané de la visualisation qui tend à fusionner les unités figurales de rangs inférieur EN UNE SEULE UNITE FIGURALE DE RANG SUPERIEUR. »*

(Duval 2005 p.46)

L'activité de « déconstruction dimensionnelle » qui permet de revenir aux unités figurales inférieures, pour ce qui concerne la visualisation, n'est pas prise en charge par l'institution. Pourtant elle est essentielle dans l'articulation visuel-discours. En effet, dans le discours géométrique, l'appréhension des objets suit le chemin inverse, c'est-à-dire que l'on part d'une unité figurale supérieure pour aller vers des unités figurales inférieures : on partira des polygones pour arriver aux sommets reliés par des segments. Duval a mis en valeur que le passage du visuel au discours passe par la déconstruction dimensionnelle :

*« on peut y voir aussi que cette articulation [articulation entre visuel et discours] présuppose la capacité à effectuer la déconstruction dimensionnelle des formes pour ce qui concerne la visualisation. »*

(Duval 2005 p.45)

Supposons que les activités de la classe Illustration permettent d'introduire une nouvelle propriété. Cette première représentation de la propriété s'effectue dans le registre graphique-dynamique. Nous avons expliqué l'intérêt d'une expression discursive des propriétés par l'autosuffisance du registre discursif. Il faut donc articuler les deux registres, appartenant chacun à un environnement, le registre graphique-dynamique s'exprime dans un environnement de géométrie dynamique, alors que l'énoncé d'une propriété s'exprime dans un environnement papier-crayon. Même si l'on considère que l'énoncé peut être réalisé dans l'environnement de géométrie dynamique, il est évident que la finalité est de l'exprimer sur une feuille transportable et non sur un écran d'ordinateur. Ainsi nous n'avons pas qu'une articulation de registres mais aussi un changement d'environnement (de Cabri à papier-crayon). L'articulation entre l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon apparaît dans les travaux d'Assude (2005). Alors que les élèves manipulent sur Cabri des formes géométriques, en utilisant le déplacement, ils expriment leurs actions dans un environnement papier-crayon. Le registre utilisé dans ce dernier environnement est le registre graphique, et le dynamisme est exprimé grâce à la succession de deux dessins. Le premier dessin représente l'état initial, la forme avant le déplacement, le deuxième dessin représente l'état final, la forme après le déplacement.

Afin d'assouplir la conversion de l'expression de la propriété, nous introduisons le registre discursivo-graphique, c'est-à-dire un registre hybride conçu à partir de représentations

graphiques et des signes du discours. La conversion entre le registre graphique-dynamique et le registre discursivo-graphique nous semble plus abordable dans le sens où ils possèdent un grand nombre de signes et de règles communs, les signes graphiques. Les deux registres diffèrent principalement par leurs traitements découlant de l'environnement dans lesquels ils interviennent. Ainsi, une conversion du registre graphique-dynamique au registre discursivo-graphique permet de changer d'environnement, nous passons d'un environnement graphique dynamique de Cabri à un environnement statique du papier-crayon. Cette conversion intermédiaire permet de changer de registre mais surtout de changer d'environnement. Une fois que la propriété est exprimée dans le registre discursivo-graphique, il faut la convertir dans le registre du discours. La conversion intermédiaire par le registre discursivo-graphique permet une articulation entre le registre graphique-dynamique et le registre discursif tout en assumant le changement d'environnement. Cette articulation exige un travail sur la déconstruction dimensionnelle dans le registre visuel, ici le registre graphique-dynamique. Cela nous amène notre troisième hypothèse de travail :

HT3 : Le registre discursivo-graphique participe à l'articulation entre l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon.

### **C. Synthèse**

Les trois types de situations mis en évidence dans le chapitre précédent (I Le concept de propriété) nous permettent d'introduire quatre registres sémiotiques : le registre graphique-dynamique (exercé dans un environnement de géométrie dynamique), le registre graphique (dans un environnement papier-crayon), le registre discursivo-graphique et le registre du discours.

Cette interaction entre les registres contribue à la construction chez l'élève des liaisons entre les imageries matérielles représentées et les imageries mentales représentées.

Pour que l'utilisation de ces quatre registres soit bénéfique à l'élève, il faut prendre en compte leur articulation. D'une façon générale, le lien entre le visuel et le discours passe par la déconstruction dimensionnelle des formes. Ce qui nous amène à une question : Comment introduire la déconstruction dimensionnelle dans l'environnement de géométrie dynamique ? L'articulation entre le registre graphique-dynamique et le registre discursif peut s'appuyer sur une conversion intermédiaire : le passage par le registre discursivo-graphique. Ce qui nous amène à une deuxième question : comment convertir les expressions du registre graphique-dynamique au registre discursivo-graphique ? Les différentes représentations mises en valeur dans le chapitre I (le concept de propriété) fournissent quelques éléments de départ pour répondre à cette deuxième question, c'est-à-dire qu'il faut s'interroger sur la représentation statique du dynamisme.

---

Puis pour la représentation du lien contraintes-conclusion, nous attendons des élèves qu'ils s'approprient des propriétés mathématiques et non des propriétés pragmatiques. Pour cela il faut que le registre discursif devienne autosuffisant, c'est-à-dire que les élèves prennent en compte les cas possibles. Cela nous amène à une dernière question : comment introduire cette prise en compte des cas possibles ?

## IV. Instrumentation et Cabri

Le chapitre précédent nous montre que le passage d'un registre visuel à un registre discursif passe par la déconstruction dimensionnelle. Ce qui nous amène à la question : Comment introduire la déconstruction dimensionnelle dans l'environnement de géométrie dynamique ?

Pour répondre à cette question, considérons le logiciel de géométrie dynamique comme un outil. Les travaux de Vygotsky nous éclairent sur les effets de l'utilisation d'outils et de signes pour l'apprentissage et le développement. Nous complétons ces résultats avec les travaux de Rabardel (1995) sur l'utilisation des outils techniques dans une perceptivo didactique.

### A. De l'artefact à l'instrument

Vygotsky s'est particulièrement intéressé aux effets du langage sur le développement du psychisme humain. Il a développé la notion d'instrument psychique, instrument orienté vers le sujet. Ces recherches sont poursuivies (Léontiev 1972, Wallon 1942.) afin d'identifier les conséquences de l'utilisation des artefacts pour le développement sur la pensée humaine. Les diverses constructions de l'homme enrichissent son environnement d'outils associés à ses besoins. Ainsi, l'homme évolue dans un environnement social en s'adaptant à des outils construits intégrés à l'environnement. Alors que Vygotsky a concentré son travail sur l'utilisation d'instruments agissant sur les pensées du sujet, Rabardel étudie les instruments techniques extérieurs au sujet et orientés vers une réalité physique. Vygotsky s'inspire de la relation de l'homme avec la nature médiatisée par les outils et soutient la thèse selon laquelle les instruments psychologiques médiatisent la relation de l'homme avec lui-même. Rabardel reprend ces idées, revient sur la relation entre l'homme et la nature médiatisée par les instruments. Cela l'amène à considérer deux niveaux pour la notion d'outils construits par l'homme : les artefacts et les instruments. L'artefact, objet matériel construit par l'homme, est susceptible d'un usage. L'instrument est un artefact utilisé dans la résolution d'une tâche, c'est un artefact associé à un usage effectif :

*« C'est donc le terme d'artefact que nous utiliserons désormais dans une optique de désignation "neutre" ne spécifiant pas un type de rapport particulier à l'objet. Cependant nous lui donnerons un contenu plus précis que celui de "chose ayant subi une transformation d'origine humaine". En effet, ce qui nous intéresse, c'est la chose susceptible d'un usage, élaborée pour s'inscrire dans des activités finalisées. »*

(...)

*Enfin nous utiliserons le terme d'instrument pour désigner l'artefact en situation, inscrit dans un usage, dans un rapport instrumental à l'action du sujet, en tant que moyen de celle-ci. Ce n'est là qu'une première définition correspondant à une approche minimale de la notion psychologique*

*d'instrument qui correspondra à l'un des usages, le plus faible, que nous aurons de la notion d'instrument.*

(Rabardel 1995 p.49)

La notion d'instrument est attachée à une tâche, elle-même étant associée à un objet. Ainsi l'instrument permet à l'utilisateur d'agir sur un objet. La notion d'instrument apparaît dans les travaux de Rabardel, elle est associée à deux autres éléments : un objet et un sujet. Plus tard Rabardel précise sa définition de l'instrument :

*La position intermédiaire de l'instrument en fait un médiateur des relations entre le sujet et l'objet. Il constitue un univers intermédiaire dont la caractéristique principale est donc d'être doublement adaptée au sujet et à l'objet, une adaptation en termes de propriétés matérielles mais aussi cognitives et sémiotiques en fonction du type d'activité dans lequel l'instrument s'insère ou est destiné à s'insérer.*

(Rabardel 1995 p.72)

Le sujet construit son propre instrument, se l'approprie, ce qui rend l'instrument réutilisable dans des situations similaires :

*A travers cette conservation, l'instrument est un **moyen de capitalisation de l'expérience** accumulée (cristallisée disent même certains auteurs). En ce sens, **tout instrument est connaissance.***

(Rabardel 1995 p.73)

Les connaissances véhiculées par l'instrument sont issues de l'instrument lui-même, par les concepteurs et les autres utilisateurs, mais aussi de l'activité mise en œuvre par le sujet. Pour un artefact donné, on peut retrouver toujours les mêmes actions, c'est à dire les mêmes invariants qui structurent l'activité et l'action du sujet. Pour caractériser ces invariances dans l'usage des instruments, Rabardel reprend la notion de *schème* développée par Vergnaud (1990) qu'il applique à l'usage des instruments. Les invariances des actions sont construites par le sujet au cours de l'usage de l'artefact, par les interactions entre les utilisateurs et par les aides et les informations que le sujet peut obtenir. Les schèmes associés à la notion d'artefact possèdent un caractère social. Ainsi, les invariances dans l'utilisation des instruments sont des schèmes sociaux d'utilisation.

Parmi ces schèmes sociaux d'utilisation, il distingue deux catégories, les schèmes concernant la manipulation des artefacts, les schèmes d'usage ; et les schèmes orientés vers l'objet de l'activité, les schèmes d'action instrumentée. Prenons l'exemple de la construction d'une parallèle à une droite avec une règle et une équerre. Le sujet met en œuvre des schèmes d'usages : position de la règle, position de l'équerre et glissement de l'équerre sur la règle. Le schème d'action instrumenté, l'objectif de l'activité est construire une parallèle à l'aide d'une équerre et d'une règle.

L'utilisation d'un artefact dans la réalisation d'une tâche passe par la mise en œuvre de schèmes d'utilisation. Cette association artefact-schème permet de compléter la notion d'instrument.

*Nous définissons l'instrument comme une totalité comprenant à la fois un artefact (ou une fraction d'artefact) et un ou des schèmes d'utilisation. (...) Piaget pour qui le schème d'une action est l'ensemble structuré des caractères généralisables de l'action qui permettent de répéter la même action ou de l'appliquer à de nouveaux contenus*

(Rabardel 1995 p.74)

Ainsi, un instrument devient une entité composée de deux éléments, un artefact et un ensemble de schèmes d'utilisation. Le schème est une construction mentale du sujet, ainsi la notion d'instrument devient une construction par le sujet d'un ensemble de schèmes associés à un artefact et à son utilisation dans une tâche donnée.

Les schèmes sociaux d'utilisation ont des propriétés assimilatrices et accommodatrices, c'est pourquoi ils sont réutilisables dans des classes de situations.

*Les schèmes d'utilisation ont un pouvoir assimilateur : ils permettent la répétition de l'action en assurant son adaptation aux aspects variables des objets et des situations appartenant à une même classe. Ils ont une capacité accommodatrice pour s'appliquer à des objets, des classes de situations différentes.*

(Rabardel 1999 p.209)

La construction d'un instrument par un sujet est appelée la **genèse instrumentale**. Cette genèse comporte deux entités, une première entité porte sur l'appropriation de l'artefact et de ses propriétés : l'instrumentalisation ; l'autre porte sur la construction des schèmes d'utilisation : l'instrumentation. Au cours du processus d'instrumentalisation, le sujet s'approprie les propriétés initiales de l'artefact, celles découlant de son utilisation première. Le sujet s'adapte à l'artefact. Le sujet peut aussi construire de nouvelles fonctions de l'artefact, ainsi c'est l'artefact qui s'adapte aux besoins de l'utilisateur. Le processus d'instrumentation concerne la construction de schèmes d'utilisation par le sujet. Les schèmes d'utilisations ont une composante privée, c'est-à-dire une construction propre au sujet. Ils ont aussi une composante sociale, c'est-à-dire résultant des interactions du sujet avec les autres utilisateurs, concepteurs et des diverses aides extérieures. De la même façon que l'utilisation des signes psychologiques influe sur les pensées du sujet, la genèse instrumentale permet de faire évoluer les conceptions du sujet concernant l'objet visé par l'instrument. Les conceptions évoluent par l'adaptation aux contraintes des outils mais aussi par la prise en compte des potentialités.

Le développement des nouvelles technologies dans l'enseignement a entraîné certaines études sur l'impact de l'introduction de ces nouveaux outils. Ainsi, Trouche reprend les hypothèses de Rabardel, développées initialement pour l'analyse des instruments dans un environnement professionnel, et s'intéresse à l'introduction des nouvelles technologies dans un contexte éducatif. Il reprend aussi les résultats d'Artigue (1995) sur l'introduction du logiciel Derive dans les classes de terminale. Trouche (2005.) développe une analyse des schèmes passant par les gestes mis en œuvre par les élèves. Ainsi, les schèmes d'usage peuvent être identifiés par les gestes instrumentés, c'est-à-dire les gestes mis en œuvre au cours d'une activité. Les schèmes d'actions instrumentés, peuvent être identifiés par les gestes que l'on retrouve à travers un ensemble d'activités. Tout comme les outils dans un environnement professionnel, les outils dans un contexte scolaire possèdent des contraintes. Ainsi l'utilisation des outils dans les classes ne peut être spontanée, elle résulte d'un processus de genèse instrumentale. Cependant, ce processus est lié à chaque utilisateur, par ses connaissances initiales et les utilisations qu'il fera de l'outil. Ainsi, l'intégration des outils, comme les nouvelles technologies, passe par la mise en place de scénarios associés à des objectifs mathématiques. Ces scénarios permettent un certain contrôle du processus de genèse instrumentale chez les élèves. Ainsi, chaque élève se construit son propre instrument, associe ses propres schèmes à un artefact donné. Cette diversité d'instruments apparaît par exemple dans les travaux de Trouche (2005), qui a identifié cinq profils d'utilisation des calculatrices, pour une même tâche.

### **B. *Les instruments avec Cabri***

Le logiciel de géométrie dynamique Cabri Géomètre a été conçu dans une perspective didactique. En utilisant les outils, pour résoudre des tâches visant des objets mathématiques, l'élève se construit des instruments et associe des connaissances mathématiques à ses manipulations.

Les activités de type Illustrations donnent accès au lien contraintes-conclusion par l'utilisation de l'outil déplacement de Cabri. Cet outil déplacement est associé à la tâche : réaliser les contraintes de la propriété. Ces contraintes s'appliquent à des sous-objets de l'objet ciblé par la propriété (des angles, des segments, des points...) qui doivent être placés dans une configuration particulière. Réaliser une contrainte, par le déplacement, sur un objet géométrique, dans Cabri, revient à identifier quelle unité figurale de rang inférieur doit être considérée et comment elle doit évoluer, c'est la décomposition dimensionnelle des formes. Ainsi il semble que le contrôle du déplacement passe par la prise en compte des unités figurales inférieures. Reprenons notre propriété exemple, la forme initiale est un quadrilatère, ensuite les contraintes s'appliquent aux milieux des diagonales qui doivent être confondus. Dans un premier temps, il s'agit de ne considérer que les diagonales pour identifier leur milieu, puis il s'agit de superposer les milieux, c'est-à-dire que l'on ne considère plus le quadrilatère mais deux points de ce quadrilatère. Une telle mise en œuvre de l'outil

déplacement permet la construction de schèmes associés à la tâche. Ces schèmes constituent la deuxième partie de l'instrument *Déplacement*<sup>7</sup>. Dans ce cas le *Déplacement* dans Cabri peut inciter, par son contrôle, à la décomposition dimensionnelle des formes.

La décomposition dimensionnelle d'une forme permet de rendre opérationnel le passage du registre graphique dynamique au registre discursif, ce que nous avons vu précédemment. Cependant, notre objectif n'est pas seulement que les élèves parviennent à décomposer les formes, mais aussi qu'ils visualisent l'évolution de l'objet géométrique au cours de la réalisation des contraintes. Dans un registre visuel le passage aux unités figurales supérieures est automatique. Ainsi, une fois la contrainte réalisée, par une action sur une figurale inférieure, l'élève revient rapidement à l'unité figurale supérieure, c'est-à-dire le dessin dans sa globalité. Cet aller et retour de la perception du dessin dans sa globalité devrait permettre d'identifier l'évolution de l'objet initial. On pourrait alors identifier deux catégories de schèmes, les schèmes associés à la mise en œuvre du contrôle, c'est-à-dire à la décomposition de la forme, puis les schèmes associés à l'identification de la transformation, par l'évolution de l'unité figurale supérieure.

Si on associe une propriété à une activité d'Illustration, nous descendons d'un niveau dans l'analyse du schème et celui-ci devient propre à la manipulation. Pour la propriété exemple, le schème serait de déplacer un sommet jusqu'à ce que les deux milieux soient confondus et d'observer la transformation d'un quadrilatère en un parallélogramme. Ainsi, à chaque propriété est associé un instrument *Déplacement*. Nous obtenons deux niveaux de *Déplacement*, le *Déplacement* associé à la notion de propriété et au lien contraintes-conclusion, et un *Déplacement* pour chaque propriété.

L'utilisation du déplacement par l'élève est primordiale car elle permet d'associer un geste à une observation et d'investir l'élève dans la tâche. Ces manipulations deviennent intéressantes du point de vue du processus de médiation sémiotique. En effet, ces gestes associés à l'observation peuvent devenir des signes dans un premier temps tournés vers l'extérieur, c'est-à-dire la résolution d'une tâche. En demandant à l'élève d'explicitier et d'articuler ces gestes et observations, ces derniers évoluent de signes externes en signes internes, c'est-à-dire tournés vers la pensée du sujet.

Ainsi l'utilisation du déplacement a un double effet, d'une part il engendre la construction de l'instrument *Déplacement* associé aux situations d'Illustration, d'autre part il amorce le processus de médiation sémiotique pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion. Ces deux effets sont bien évidemment liés, c'est en se construisant des schèmes d'utilisation que l'élève peut ensuite exprimer ses actions. Cela nous amène à notre dernière hypothèse de travail :

---

<sup>7</sup> Dans la suite cette écriture de *Déplacement* fera allusion à l'instrument associé à la résolution d'une situation de la classe Illustration.

HT4 : la construction des schèmes d'utilisation au cours de l'utilisation du déplacement, amorce le processus de médiation sémiotique pour le lien contraintes-conclusion.

## V. Conclusion

L'utilisation de l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon permet une interaction entre trois registres : le registre graphique-dynamique, le registre graphique et le registre discursif. Pour que l'interaction entre les registres soit pertinente pour les élèves, et en particulier pour favoriser l'interaction entre le registre graphique et le registre discursif, les élèves doivent utiliser la décomposition dimensionnelle des formes. L'environnement graphique-dynamique peut permettre cette décomposition, par le contrôle du déplacement, tout en illustrant le lien contraintes-conclusion. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique est double du point de vue des apports, mais aussi du point de vue de son utilisation. En effet, lorsque les élèves utilisent les outils du logiciel dans la réalisation d'une tâche, ici l'outil déplacement, ils construisent des schèmes qui permettent l'évolution de l'outil en instrument. Cet instrument est associé à une tâche. La construction de ces schèmes par les élèves, amorce le processus de médiation sémiotique pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion. Ce double aspect de l'utilisation d'un logiciel est présent dans les recherches de Mariotti :

*On one hand, in the process of instrumental genesis the artefact becomes an instrument: in acting the subject develops the potential utilization schemes, and then the artefact, become an instrument, may support the construction of meanings related to those utilization schemes.*

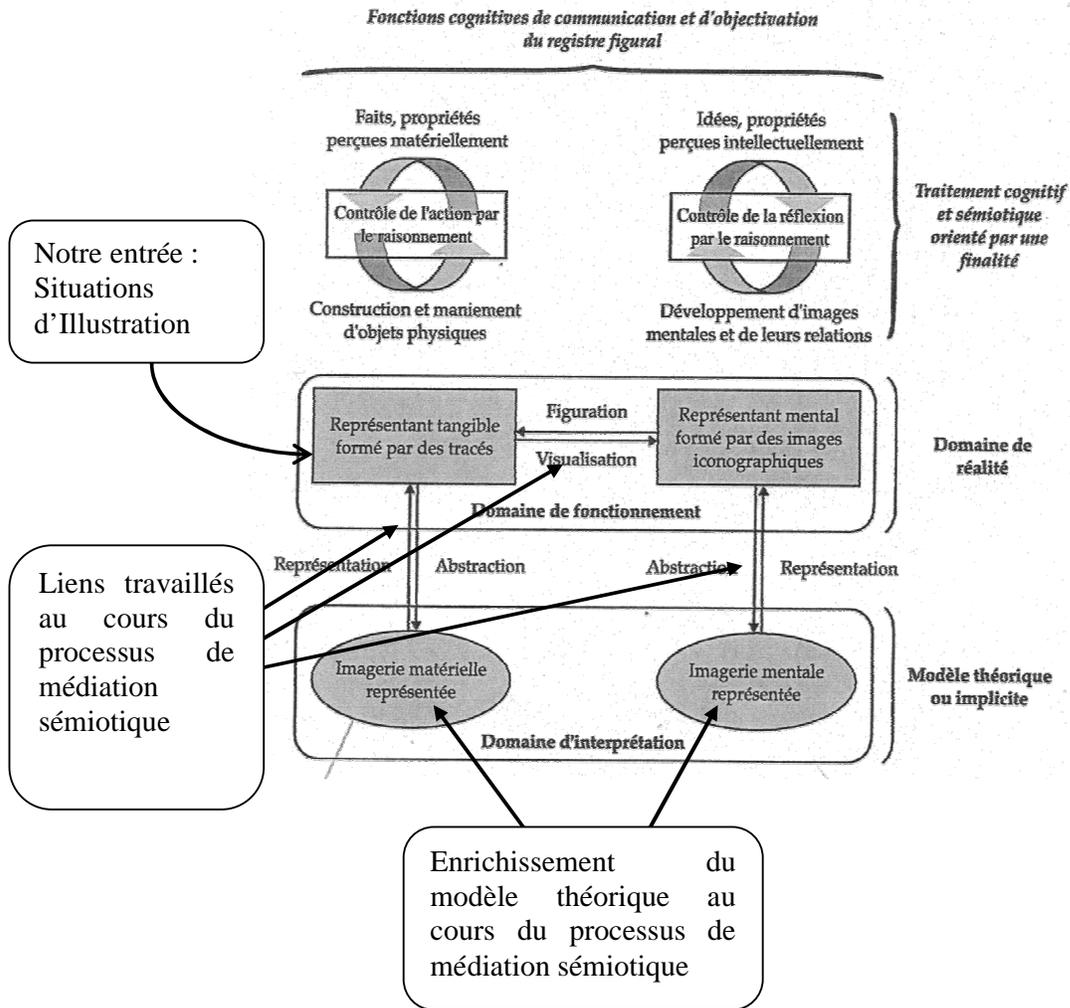
*On the other hand the artefact, inserted between the learners and the teacher, may be used by the teacher to exploit communication strategies aiming at guiding the evolution of meanings within the class community. In other terms the artefact may function as an "instrument of semiotic mediation".*

[Mariotti 2002].

Dans l'environnement Cabri, un artefact de Cabri sera le déplacement, les schèmes d'utilisations associés seront l'organisation des actions pour satisfaire les contraintes, les données d'un problème associées aux observations et formulations des actions. L'instrument que nous obtenons est un instrument *Déplacement* particulier. Cet instrument sera d'un point de vue global associé à la notion de propriété et permet une Illustration du lien contraintes-conclusion. Puis pour chaque tâche l'élève se construit un *Déplacement* associé à la propriété sous jacente à l'illustration.

Le logiciel intervient dans les activités de types Illustration, et amorce le processus de médiation sémiotique qui se poursuit lors des interactions avec l'enseignant. La construction du lien contraintes conclusion s'étale aussi sur plusieurs tâches les activités de types Énoncés-tiers et Validation, lorsque les élèves utilisent les propriétés comme énoncés-tiers.

Si nous reprenons le schéma de la figure géométrique opératoire de Richard (2005), nous pouvons situer notre thématique de recherche dans l'appropriation et l'interaction entre les modèles.



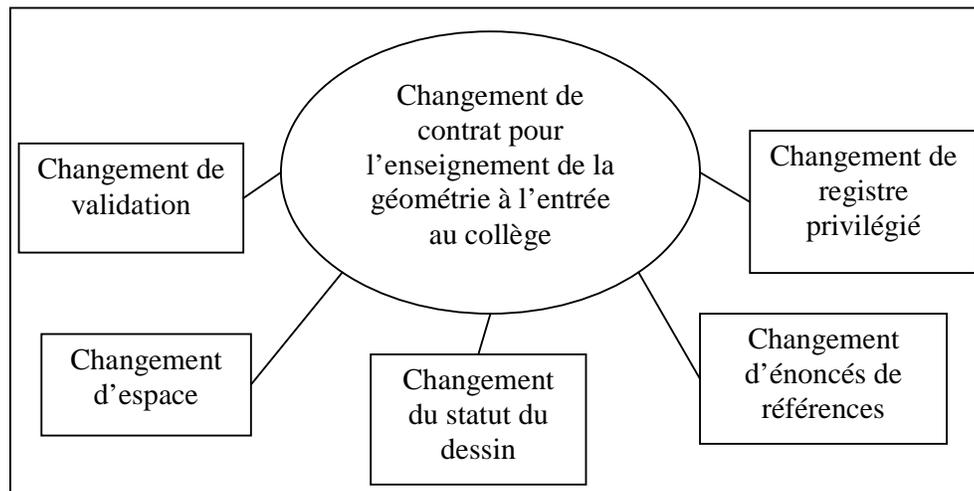
# Chapitre 3

## Problématique et Méthodologie

### I. Cadre théorique et hypothèses de travail

Le passage de l'école primaire au collège s'accompagne d'une évolution dans la pratique de la géométrie. A l'école primaire, la géométrie considère les objets physiques, les élèves travaillent dans un espace sensible où les représentations graphiques sont objets d'étude. La validation s'appuie sur la perception et l'utilisation d'instrument. Les élèves travaillent dans le paradigme de la « géométrie naturelle », la géométrie I. Au collège, les objets deviennent théoriques, l'espace est lié aux figures. Les dessins ne sont plus objets d'étude mais outils dans la réflexion de validation. La validation est basée sur les axiomes. Ce deuxième paradigme est la « géométrie axiomatique naturelle », la géométrie II. (Kuzniak 2005). Le changement d'institution s'accompagne d'un changement de paradigme. Nous présentons à nouveau le schéma 2 qui reprend les différents changements liés à l'évolution du contrat de l'enseignement de la géométrie à l'entrée au collège.

schéma 2



A travers l'étude des programmes et de quelques manuels, nous considérons que les propriétés pourraient établir un pont entre les deux paradigmes Géométrie I et Géométrie II. En effet, l'expression des propriétés utilise conjointement une représentation graphique et une représentation discursive, c'est-à-dire que les propriétés sont exprimées dans un registre discursivo-graphique. De plus les propriétés qui constituent d'abord en Géométrie I un ensemble de qualités attribuées aux objets fondamentaux de la géométrie introduits à l'école primaire (carré, rectangle, cercle ...) par une relation d'association, évoluent vers une relation plus complexe pour être réinvesties en Géométrie II comme règles d'inférence (Duval) dans des démonstrations. Il est donc fondamental que les conceptions des élèves relatives aux propriétés évoluent. Les propriétés pourraient être le terreau sur lequel l'enseignement

assurera le passage de GI à GII. Cette proposition constitue l'hypothèse à la base de notre travail que nous appelons pour cette raison hypothèse de travail Zéro.

HT0 : les propriétés peuvent être utilisées pour construire les conditions didactiques pour favoriser le passage de la géométrie I à la géométrie II.

Le pendant de cette hypothèse est la question qui a motivé cette recherche : comment construire un processus didactique sur les propriétés dans le but de faciliter le changement de paradigme c'est-à-dire prendre en compte les acquis des élèves tout en les préparant à la démonstration ?

La mise en place de ce processus passe par l'analyse des propriétés. Ainsi nous avons cherché à identifier comment elles s'expriment et comment elles sont structurées, c'est-à-dire comment les contraintes sont-elles reliées à la conclusion ? Pour répondre à cette question, nous avons utilisé les travaux de Vergnaud sur les champs conceptuels. Nous avons ainsi défini trois types de situations qui permettent de donner du sens au lien contraintes-conclusion : Illustration, Validation et Enoncé-tiers. Le premier type de situation utilise une représentation de la propriété dans un registre graphique-dynamique. Cela nous permet d'affiner notre recherche : Comment introduire les propriétés avec un logiciel de géométrie dynamique ?

Nous reprenons les travaux de Vygotsky complétés par les travaux de Mariotti (2002) et Falcade (2006) sur le processus de médiation sémiotique. Ces travaux nous présentent l'apport des interventions de l'enseignant conjointement à l'utilisation de Cabri pour que le processus de médiation sémiotique puisse avoir lieu. Ce qui nous donne notre première hypothèse de travail

HT1 : l'utilisation de Cabri Géomètre complétée par les interactions avec l'enseignant peut constituer un outil de médiation sémiotique pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion par les élèves

Les travaux de Duval (1993) sur l'articulation entre les registres montrent l'apport de l'usage de plusieurs registres de travail pour l'appropriation des concepts. L'environnement Cabri possède son propre registre, le registre graphique-dynamique, construit à partir de signes du registre graphique et complété par les signes propres à Cabri.

Ainsi, en nous appuyant sur l'interaction entre les registres, nous formulons notre deuxième hypothèse de travail :

HT2 : L'utilisation et l'interaction entre les registres graphique-dynamique, graphiques et discursifs contribuent à la construction du sens du concept de propriété c'est-à-dire l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion.

Cependant le registre discursif nécessite le recours à l'environnement papier-crayon entre le registre graphique-dynamique et le registre discursif. Le registre d'expression des propriétés, passe donc par une articulation entre deux environnements, l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon. Afin de faciliter cette double articulation, nous proposons d'introduire un registre intermédiaire le registre discursivo-graphique pouvant contribuer à articuler ces deux registres, ce qui donne lieu à notre troisième hypothèse de travail :

HT3 : Le registre discursivo-graphique participe à l'articulation entre l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon.

Cependant, d'après les travaux de Duval (2005), pour qu'une articulation entre un registre visuel et un registre discursif soit opérationnelle, il faut que les élèves parviennent à décomposer les formes qui leur sont proposées dans le registre visuel. Ainsi, les élèves doivent parvenir à identifier les unités figurales inférieures présentes dans un dessin pour les expliciter dans le registre discursif. Or l'utilisation du déplacement dans les situations d'Illustration, c'est-à-dire déplacer pour réaliser des contraintes et observer la transformation de la forme, utilise un contrôle qui peut s'appuyer sur les unités figurales inférieures. Ainsi, cet instrument *Déplacement* pourrait contribuer à la prise en compte des unités figurales inférieures.

Nous utilisons le terme instrument en référence aux travaux de Rabardel (1995.) et Trouche (2005) sur la genèse instrumentale. Comme nous venons de l'expliquer, lorsque les élèves utilisent l'outil Cabri déplacement associé à la tâche des situations Illustration ils construisent l'instrument *Déplacement*. La construction de l'instrument est une construction personnelle du fait de la construction de schèmes associés au type de tâche. Ainsi, lorsque les élèves construisent cet instrument, ils construisent aussi des nouvelles connaissances à travers les schèmes d'utilisation. Dans les tâches d'Illustration, les élèves peuvent identifier les constructions et déplacements comme les causes de la transformation de l'unité figurale supérieure. Lorsque les élèves utilisent le déplacement pour résoudre la tâche, ils mettent en œuvre des actions qui modifient les objets sur lesquels ils travaillent. Ainsi ces actions deviennent des signes externes. D'autre part en demandant aux élèves d'expliquer leurs actions, les signes externes peuvent être utilisés pour organiser leur discours, c'est-à-dire qu'ils sont tournés vers le sujet. Ainsi, les actions liées à l'utilisation du déplacement évoluent en signe internes et participent au processus de médiation sémiotique. Ce qui nous amène à notre quatrième hypothèse de travail.

HT4 : La construction des schèmes d'utilisation au cours de l'utilisation du déplacement, amorce le processus de médiation sémiotique pour le lien contraintes-conclusion.

Nous concluons ce retour sur notre cadre théorique par une nouvelle et dernière hypothèse de travail. Dans notre première hypothèse la place de l'enseignant contribue à l'intériorisation du lien contraintes-conclusion. Le processus de médiation sémiotique intervient au cours de l'utilisation de Cabri, mais aussi tout au long des séquences d'enseignement. Ainsi, nous ajoutons une dernière hypothèse sur la position centrale de l'enseignant au cours des différents moments de l'enseignement des propriétés, lors de l'utilisation du logiciel, de la construction de l'instrument, de l'interaction entre les registres.

HT5 : le processus de médiation sémiotique s'étale tout au long de l'apprentissage des propriétés, ce qui rend les interventions de l'enseignant fondamentales dans les séquences d'enseignement.

## II. Questions de recherche

Ces hypothèses de travail nous permettent de réduire notre thème de recherche initial : **Comment construire un processus didactique sur les propriétés en s'appuyant sur les pré-requis du primaire et respectant les attentes du collège ?**

Ainsi l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique permet-il l'introduction d'un instrument *Déplacement* associé à la classe de situations Illustration. La construction par les élèves de cet instrument s'accompagne de la construction de connaissances relativement au lien entre les contraintes et la conclusion d'une propriété. Cela conduit à notre première question de recherche :

QR1 : Comment les élèves s'approprient-ils les instruments *Déplacement* relativement aux situations de la classe Illustration et à quelle explicitation du lien contraintes-conclusion conduit cette appropriation ?

Dans un deuxième temps, l'articulation entre les environnements Cabri et papier-crayon s'appuie sur une articulation entre le registre graphique-dynamique et le registre discursivo-graphique. Cette articulation contribue à la construction de connaissances chez les élèves.

Cela soulève notre deuxième question de recherche :

QR2 : Comment l'articulation entre les trois registres (graphique-dynamique, graphique et discursif) en lien avec le processus de médiation sémiotique du déplacement, participe-t-elle à l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion ?

Enfin, le processus de médiation sémiotique rend la place de l'enseignant centrale dans cette sensibilisation au lien contraintes-conclusion, ainsi, ces deux questions vont être étudiées relativement aux activités, mais aussi relativement au rôle de l'enseignant.

### III. Méthodologie

#### A. L'expérimentation

Afin d'étudier le rôle de l'enseignant nous sommes amenés à étudier une situation d'enseignement dans une classe. Ainsi, notre expérimentation prend la forme d'une ingénierie didactique. Cette ingénierie doit nous permettre d'analyser les interventions de l'enseignant mais aussi l'introduction du *Déplacement* de Cabri. L'utilisation de l'outil déplacement de Cabri que nous visons n'est pas classique. En effet le déplacement est habituellement utilisé afin d'identifier les invariants d'une construction, de contrôler que les propriétés d'une figure ont été utilisées dans la construction. Le déplacement associé aux situations d'Illustration n'est pas de cet ordre. Il permet de positionner les points de la figure dans une configuration où des propriétés apparaissent ; dès que la configuration change, dès que l'on déplace un point les propriétés peuvent disparaître. Nous caractérisons ce déplacement particulier comme un déplacement « **mou** » qui nous permet de réaliser des propriétés éphémères. Le résultat de ce déplacement mou est à rapprocher des constructions moles « soft construction » développées par Healy (2000). Elle oppose les constructions dures qui s'appuient sur l'utilisation des outils Cabri et qui résistent au déplacement aux constructions moles, réalisées perceptivement et qui ne résistent pas au déplacement. Afin que les élèves construisent l'instrument *Déplacement*, nous avons conçu des séquences d'enseignement associées à l'utilisation du logiciel en nous appuyant sur les situations d'Illustration.

Ces deux contraintes nous amènent à concevoir une ingénierie didactique où nous pourrions analyser le rôle de l'enseignant et les activités autour de l'enseignement des propriétés.

Le rôle de l'enseignant est important dans cette ingénierie, c'est pourquoi ce dernier a participé à sa conception après avoir pris connaissance de nos objectifs de recherche et échangé avec nous. De plus sa participation à la conception a permis de mettre en place des séquences de cours dont les supports, l'organisation globale, sont proches de ses habitudes et de celles de la classe.

Cette méthodologie d'ingénierie repose sur une ingénierie mixte, entre une méthodologie d'analyse de classes ordinaires et une méthodologie de construction d'ingénierie conçue par le chercheur et transmise à l'enseignant. Il s'agit d'une ingénierie conciliant les objectifs de

recherche et les contraintes de l'institution didactique concernée qui s'exercent à différents niveaux.

## B. Description de l'ingénierie

L'ingénierie repose sur quatre séquences, ayant toutes la même structure. Une introduction au concept si celui-ci est inconnu des élèves, une situation d'illustration (avec Cabri), une phase collective pour l'explicitation des propriétés en termes de lien contraintes-conclusion et une phase de réinvestissement.

### 1 Introduction

Une première étape, consiste à familiariser l'élève au nouveau concept mathématique si celui-ci lui est inconnu. Cette première familiarisation au nouveau concept mathématique permet l'introduction des définitions et une identification perceptive de la représentation graphique associée. Par exemple, nous introduisons la symétrie centrale comme un demi-tour autour d'un point. Cette introduction nous permet de la contraster à la symétrie axiale qui, elle, est considérée comme un pliage. Les définitions sont élaborées à la suite d'un ensemble de manipulations par les élèves. Cette première définition du concept donne des outils aux élèves pour identifier les objets géométriques au cours de l'activité Cabri.

### 2 Activité Cabri

Cette activité a pour but une sensibilisation perceptive au lien contraintes-conclusion, elle appartient à l'ensemble des activités de type Illustration. Elle s'appuie sur les hypothèses de travail 4 et 5 concernant l'instrument *Déplacement*. Les élèves travaillent en binôme, afin de favoriser les échanges langagiers. Ainsi les élèves peuvent échanger à propos de leurs observations, et surtout de leur résumé de l'activité. Nous attendons ainsi des échanges interpersonnels.

Dans une première partie de l'activité avec le logiciel, les élèves travaillent **sur** une propriété. Pour cela, nous utilisons un tableau qui contient la consigne, et où les élèves notent leurs observations :

Constructions	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construis un quadrilatère ABCD.</li> </ul>
Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>•  Sélectionne l'outil <i>Polygone</i> de la boîte <i>Lignes</i>. A chaque clic nomme les sommets A, B, C, D, reviens au point A pour terminer.</li> <li>• Construis M milieu de [AC] et N milieu de [BD]</li> <li>• Déplace le point C pour que les points M et N soient confondus.</li> </ul>

Observations	Que devient ABCD ? ----- -----
--------------	--------------------------------------

Cette première partie a pour but une appropriation du *Déplacement* par les élèves, pour cela, les constructions et déplacements sont indiqués aux élèves, ils correspondent aux instructions à suivre pour réaliser l'exercice. Les unités figurales inférieures sont mentionnées dans la consigne relative au déplacement afin d'inciter les élèves à une décomposition dimensionnelle des formes dans le contrôle du déplacement. L'observation demandée mentionne l'objet géométrique qui doit être considéré. Cela permet d'assurer une observation sur la représentation de l'objet ciblé dans la propriété et son interprétation dans le domaine théorique.

Une fois le tableau complété, les élèves sont amenés à résumer le contenu de ce tableau :

*Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus.*

Ce résumé correspond à une formulation personnelle de la propriété. Les élèves doivent reporter les constructions et déplacements, les contraintes, puis les observations, les conclusions. Cette verbalisation des actions incite les élèves à identifier les événements qui ont permis l'observation finale : nous cherchons à ce que les élèves prennent conscience de l'existence des contraintes et les identifient. Ce résumé contribue au processus de médiation sémiotique par les signes associés au *Déplacement* pour la formulation et l'articulation du lien entre les constructions et l'observation. De l'analyse de ce résumé nous dégagerons les types de formulation que l'élève utilise pour expliciter les différentes actions. Ces formulations nous renseignent sur la proximité du registre visuel dans l'expression des élèves, rappelons qu'à terme le registre autosuffisant est le registre discursif et non le registre visuel. Ces formulations fournissent des observables sur la capacité des élèves à articuler les différentes actions de la manipulation, en particulier sur la manière dont ils les articulent, c'est-à-dire comment ils articulent les contraintes avec la conclusion.

Cette première tâche permet un travail sur l'organisation interne de la propriété mais en mélangeant éventuellement ce qui relève du spatio-graphique et ce qui relève du théorique. Les constructions et déplacements peuvent être identifiés aux contraintes de la propriété, voire les déplacements sont les causes de l'observation finale. Les observations sont les conclusions de la propriété.

Ainsi, la structure du tableau complétée par l'activité Cabri devient un outil d'appropriation du lien contraintes-conclusion. La construction de schèmes associés à l'utilisation de cet outil contribue au processus de médiation sémiotique pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion.

Au cours de cette première partie de la séance Cabri, les élèves travaillent **sur** plusieurs propriétés, plusieurs tableaux. Chaque sous activité, manipulation, guidée par un tableau, s'achève par la formulation d'un résumé qui deviendra par la suite une propriété. Une fois que les élèves ont une première représentation personnelle de la propriété, ils sont amenés à l'utiliser dans une situation Enoncé-tiers. Cette deuxième partie de la séance Cabri correspond ainsi à une première utilisation de la propriété. Là encore, les élèves peuvent avoir recours à tous les outils disponibles dans le logiciel. Notre objectif n'est pas que les élèves rédigent une solution mettant en œuvre un raisonnement déductif, mais qu'ils prennent conscience de la fonction d'une propriété dans un processus de validation. Ainsi les élèves travaillent **avec** une propriété. Cette prise de conscience est motivée par la question de l'exercice qui demande à l'élève une justification. Le logiciel peut être utilisé comme outil d'exploration, cependant l'élève doit utiliser un lien contraintes-conclusion éventuellement exprimé dans une forme non purement théorique et encore ancrée dans le spacio-graphique pour parvenir à la solution.

### 3 Phase collective d'énonciation des propriétés

Deux phases collectives ont lieu, une première au cours de l'activité cabri, une seconde après l'activité.

La première phase collective vise la construction de schèmes sociaux d'utilisation, par une genèse sociale. Les manipulations avec Cabri sont présentées à l'aide d'un vidéoprojecteur ainsi tous les élèves échangent à propos de la même figure Cabri. Ensuite, un élève manipule selon ses propres idées ou réalise les idées que d'autres élèves lui dictent. Ainsi les élèves partagent les différents instruments ce qui contribue à leur genèse sociale par les constructions de schèmes d'utilisation du *Déplacement*. De plus ces échanges interpersonnels contribuent à l'évolution des signes externes en signes psychologiques, c'est-à-dire au niveau des pensées des élèves, au niveau intrapersonnel. Cette phase s'appuie sur la première et la quatrième hypothèse de travail, la collaboration entre l'enseignant et l'élève pour l'intériorisation du lien contraintes-conclusion. L'objectif de l'enseignant est de faire formuler par les élèves un résumé de leur activité où apparaissent les différentes manipulations : les constructions, les déplacements et l'observation et où elles sont articulées. L'enseignant peut introduire de nouveaux signes pour faciliter l'articulation par les élèves, ainsi il prolonge le processus de médiation sémiotique débuté par la formulation du résumé par les élèves.

Lorsque les élèves ont travaillé en binôme sur et avec une propriété, l'enseignant organise une deuxième mise en commun, éventuellement lors d'une séance ultérieure. Cette mise en commun poursuit la première phase collective par l'utilisation des signes relatifs à la relation de subordination au moyen d'une interaction entre élèves mais surtout une interaction avec l'enseignant sur les manipulations des élèves, leurs observations et en particulier leurs formulations. C'est au cours de cette phase collective que doit se réaliser pleinement le processus de médiation sémiotique pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion au niveau de la classe. Ainsi l'enseignant peut-il identifier si le lien contraintes-conclusion est

exprimé ou non, et intervenir pour que les formulations des élèves évoluent, il peut introduire de nouveaux signes (*si, alors* par exemple).

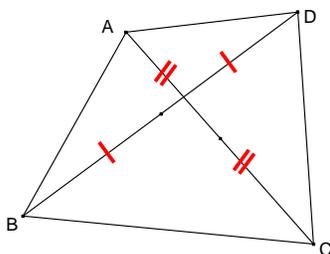
Cette phase collective permet l'articulation entre les environnements Cabri et papier-crayon. Elle s'appuie sur les hypothèses 2 et 3, c'est-à-dire sur l'articulation entre registres pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion. L'objectif de l'enseignant est d'articuler les deux environnements Cabri et papier-crayon. Elle débouche sur l'expression de la propriété dans un registre discursivo-graphique puis un registre discursif. L'expression dans le registre discursivo-graphique utilise un tableau afin de relier l'activité dynamique de Cabri à l'expression experte de la propriété. Ce tableau, s'inspire du tableau de l'activité Cabri, il a pour but de synthétiser statiquement une activité dynamique.

Si on construit ...

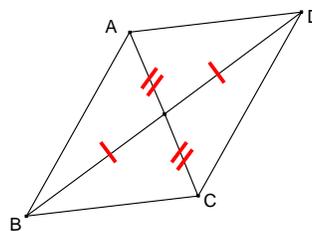
Alors on observe ...

Un quadrilatère ABCD tel que :

ABCD est un parallélogramme



Les diagonales se  
coupent en leur  
milieu



Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.

Ce tableau, distribué aux élèves et projeté sur le mur, est complété avec les élèves, il permet l'introduction de la formulation experte de la propriété. Comme cette formulation est reliée au tableau, lui-même relié à l'activité Cabri, la formulation de la propriété, et plus particulièrement le lien contraintes-conclusion, sont reliés à l'activité Cabri. L'identification des contraintes et des conclusions s'appuie sur l'activité avec le logiciel, elles sont introduites par « Si on construit ... » ou « Si on observe ... » ce qui relie le registre discursif au registre graphique-dynamique. Cette liaison utilise aussi les couleurs. Ainsi les contraintes sont représentées en rouge et les conclusions en vert, dans le tableau et dans l'énoncé.

Au cours de cette phase collective, l'enseignant en interaction avec les élèves peut valider la propriété par une preuve, éventuellement une démonstration de la propriété, cela permet un travail sur des situations de type Validation. En effet les connaissances des élèves du raisonnement déductif et des propriétés sont pour le moment limitées et en cours de construction.

#### 4 Réinvestissement

Une fois la propriété validée au sein de la classe, on demande aux élèves de l'utiliser comme énoncé-tiers dans la résolution d'un exercice. Les élèves travaillent sur des problèmes dont la question porte sur la conclusion ou sur les contraintes, ces deux types de problèmes contribuent à l'appropriation du raisonnement déductif, en ce qu'ils permettent une réflexion sur les données manquantes ou sur les conclusions envisageables. Les exercices d'Énoncés-tiers sont exprimés et travaillés essentiellement dans un registre papier-crayon, nous considérons que l'intérêt et la force du raisonnement déductif par rapport à la perception n'est pas encore acquis chez des élèves de 5<sup>e</sup>. En effet, l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut inciter les élèves à une résolution perceptive et non pas théorique.

La deuxième partie de l'activité avec Cabri, travaillant **avec** la propriété, n'exige pas la formulation d'un raisonnement déductif, la propriété n'étant pas encore validée par la classe.

Maintenant que la propriété a été énoncée et validée, il s'agit de travailler sur l'élaboration et la rédaction d'une solution mettant en œuvre un raisonnement déductif. Les connaissances nécessaires à ce travail nous semblent davantage disponibles.

## 5 Synthèse

Chaque séquence d'enseignement comporte trois séances (quatre séances avec l'introduction). Les trois types de situations apparaissent dans ce scénario. L'appropriation du lien contraintes-conclusion évolue tout au long de la séquence, nous considérons que les manipulations du logiciel (processus d'instrumentation) et la phase collective (processus de médiation sémiotique) sont deux étapes clés dans l'acquisition des connaissances visées chez les élèves.

Introduction	Activité d'exploration pour l'introduction de l'objet géométrique en jeu dans la séance et inconnu des élèves.
Activité Cabri	Activité dans un registre dynamique sur et avec les propriétés : exercice d'Illustration, exercice d'énoncé-tiers
Cours	Mise en commun Cours - Validation de la propriété : exercice de Validation
Exercices	Travail avec les propriétés, identifier les contraintes, identifier la conclusion : exercice d'énoncé-tiers

Comme nous l'avons expliqué, cette ingénierie s'est déroulée sur une année scolaire, les différents chapitres de la classe de 5<sup>ième</sup> ont été abordés suivant l'organisation que nous avons présentée.

Symétrie centrale	Parallélogramme
05/11/04-19/11/04	06/12/04-11/01/05- 31/01/05-09-02/05
Introduction par : Symétrie axiale <sup>8</sup>	Introduction par : Symétrie centrale
Activité Cabri sur : Propriétés de la symétrie centrale (08/11)	Activités Cabri sur : Parallélogramme (03/01) Quadrilatère particulier (31/01)

Angles et droites	Parallélogrammes particuliers
29/03/05-11/04/05 02/05/05-06/05	30/05/05-08/06/05
Introduction par : Angles opposés par le sommet, alternes internes correspondants ...	Non introduits déjà connus des élèves.
Activités Cabri sur : Angles-droites parallèles (04/04) Angles égaux-droites (02/05)	Activité Cabri sur : Parallélogrammes particuliers (30/05)

## 6 Évaluation de l'appropriation du lien contraintes-conclusion

Cette ingénierie se conclut par une évaluation de fin d'année afin d'identifier l'appropriation du lien contraintes-conclusion chez les élèves. Ce test n'utilise pas de situation Enoncé-tiers car nous ne souhaitons pas identifier si les élèves sont capables d'utiliser les propriétés dans

---

<sup>8</sup> La symétrie axiale est associée à un mouvement de pliage, ce mouvement est opposé au demi-tour autour d'un point, mouvement qui introduit la symétrie centrale.

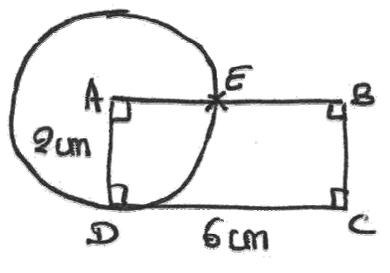
un raisonnement déductif, nous souhaitons évaluer leur appropriation du lien. Pour cela nous avons conçu trois exercices qui interrogent sur des formulations du lien contraintes-conclusion à partir de différentes situations. Ce test a été proposé à toute la classe, puis quatre élèves ont participé à une interview avec le chercheur. Le but de cette interview est d’approfondir les réponses des élèves et d’identifier quelle articulation ils peuvent utiliser pour exprimer les contraintes et les conclusions d’une propriété dans quelle mesure l’environnement Cabri influe sur cette articulation.

### C. Les observables

Cette ingénierie didactique a été mise en place dans deux classes de Cinquième dans un collège de ZEP de l’agglomération grenobloise. Chaque classe possède un enseignant différent et seul, l’un des deux enseignants a participé à l’élaboration de l’ingénierie. Ainsi, le deuxième enseignant maîtrisant moins les objectifs de notre recherche, les conditions d’observations ont été plus difficiles dans sa classe. Nous n’analyserons pas les données recueillies dans cette classe à l’exception de deux élèves pour lesquels la situation d’Illustration s’est avérée intéressante : Léa&Sandra. Ainsi, notre analyse portera sur une seule classe, celle dont l’enseignant a collaboré à la conception des séquences. Cinq binômes sont analysés finement, quatre binômes de la classe étudiée : Satine&Camille, Willy&Meddi, Jade&Laura, Salomé&Léane et les deux élèves Léa&Sandra de la deuxième classe.

Ces élèves ont été choisis suite à un test proposé en début d’année. L’objectif de ce test était d’identifier les connaissances initiales des élèves.

La conception des exercices s’est inspirée de la classification des contrôles de Rollet (1997) : perceptif, perceptif instrumenté, théorique. Ainsi, pour chaque exercice, trois procédures peuvent être mises en œuvre, une procédure perceptive, une procédure instrumentée et une procédure théorique, chaque procédure donnant un résultat spécifique. Afin de différencier ces trois procédures, nous avons utilisé des dessins à main levées.

<p><u>Exercice 1<sup>9</sup></u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p>	
--	--

Les données du problème sont toutes codées sur le dessin, elles n’apparaissent pas dans l’énoncé du problème. Nous attendons ici l’utilisation de la propriété du cercle et celle du rectangle pour conclure que la longueur de [EB] est de 4cm.

<sup>9</sup> Exercice inspiré des Evaluations Nationales 2002

Une résolution perceptive de l'exercice 1 repose sur la perception du point E au milieu de [AB]. Une telle stratégie ne prend pas en compte les données de l'exercice codée sur le dessin. L'élève utilise une appréhension perceptive du dessin. L'élève peut aussi s'appuyer sur cette première hypothèse perceptive et utiliser les mesures indiquées, ainsi soit l'élève utilise la longueur de [DC] qu'il divise par 2, il obtient 3cm. L'élève peut aussi utiliser la longueur de [AD] en supposant que  $AD=AE=EB$  et il obtient 2 cm.

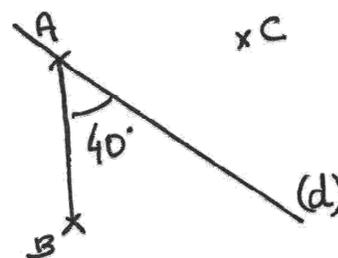
Une résolution instrumentée consiste à mesurer la distance [EB]. Ici le dessin est réduit, sur la copie de l'élève, [EB] mesure 1.7 cm.

Enfin, l'élève peut mettre en œuvre une stratégie théorique en utilisant les propriétés du cercle et du rectangle, il obtient ainsi  $EB = 4\text{cm}$ .

Les différentes stratégies envisageables pour résoudre ce problème donnent des résultats différents, cela nous permet très facilement d'identifier la stratégie de l'élève.

Exercice 2<sup>o</sup> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).

Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.

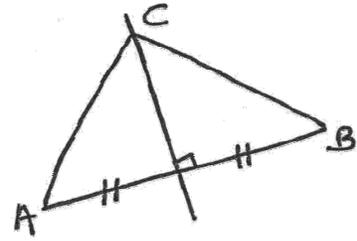


Dans cet exercice, les données ne sont pas codées sur le dessin mais elles sont données dans l'énoncé du problème. Pour résoudre cet exercice, l'élève doit utiliser les propriétés de la symétrie axiale, c'est-à-dire que A est un point invariant car appartenant à l'axe de symétrie et que la symétrie axiale conserve les longueurs. Le triangle n'est pas tracé, cela nous permet d'identifier quels sont les élèves qui s'appuient sur la perception dans leur résolution. Nous avons donné la mesure de l'angle pour distinguer les stratégies théoriques des stratégies instrumentées. En effet, le triangle est tracé pour être proche d'un triangle rectangle. L'angle droit en A est identifiable avec un instrument, une équerre par exemple.

Un élève qui utilise habituellement une procédure perceptive sera bien embêté car il ne peut pas s'appuyer sur la perception du triangle, on peut alors supposer qu'il va le construire en reliant les points. Une fois le triangle tracé, l'élève peut considérer que le triangle est quelconque car il n'est pas dans une position prototypique.

Une procédure perceptive instrumentée peut utiliser les instruments de géométrie pour identifier la nature du triangle, comme le dessin est à main levée la mesure ne permet pas d'identifier deux côtés égaux, cependant il se trouve qu'il est presque rectangle. Ainsi si un élève répond que le triangle est rectangle on pourra supposer qu'il a utilisé une procédure perceptive instrumentée par une équerre par exemple.

Exercice 3: Yanis a reproduit un triangle à main levée.  
Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.



Dans cet exercice toutes les données sont codées sur le dessin. Nous attendons des élèves qu'ils interprètent le codage et identifient la médiatrice comme l'axe de symétrie pour conclure que le triangle est isocèle.

Nous supposons qu'une procédure perceptive n'aboutit pas à la réponse car le triangle n'est pas représenté sur sa base, pour cela nous attendons d'une stratégie perceptive que le triangle est quelconque.

Tout comme le triangle précédent, une stratégie perceptive instrumentée avec une équerre peut conclure que le triangle est rectangle.

Ce test nous a permis d'établir trois profils d'élèves : le profil perceptif, le profil perceptif instrumenté et le profil théorique.

- Le profil perceptif : les élèves n'utilisent que la perception pour résoudre un problème de type Enoncé-tiers : ces élèves donneront comme réponse à l'exercice 1 : 2 cm ou 3 cm, à l'exercice 2 et 3 : ABC est un triangle quelconque

- Le profil perceptif instrumenté : les élèves utilisent la perception comme premier outil de résolution puis, valide celle-ci par l'utilisation d'instruments. Ces élèves donneront comme réponse à l'exercice 1 : 1.7 cm à l'exercice 2 et 3 : ABC est un triangle rectangle.

Ces élèves suivent encore uniquement le contrat de l'école primaire en géométrie, ils évoluent dans une géométrie du paradigme GI.

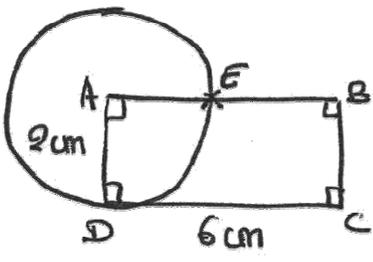
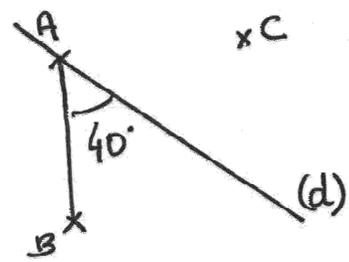
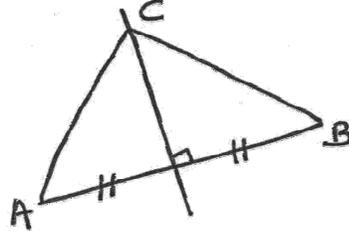
- Le profil théorique : ces élèves ne se contentent pas de la perception, mais aussi de la théorie pour résoudre un problème de type Enoncé-tiers. Ces élèves donneront comme réponse à l'exercice 1 : 4 cm, à l'exercice 2 et 3 : ABC est un triangle isocèle.

Ces élèves se rapprochent de la géométrie du paradigme GII.

Voici les analyses des réponses des élèves que nous avons choisis.

Camille&Satine ont été choisies pour les réponses que Satine a donné lors du premier test de profil.

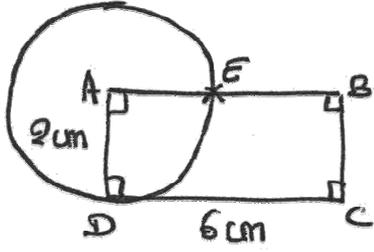
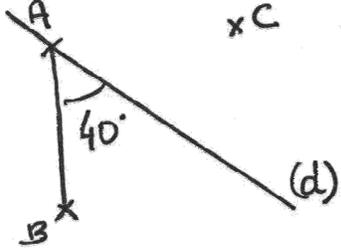
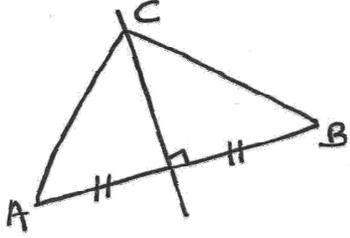
Copie Satine :

<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>Il me suffit de prendre ma règle puis de mesurer EB</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>La nature du triangle est un triangle rectangle car si on relie par un segment le point à la droite (d) ça fait un angle droit</p>	
<p><u>Exercice 3</u> : Yanis a reproduit un triangle à main levée.</p> <p>Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.</p> <p>La nature de ce triangle est un triangle équilatéral car il a 3 côtés égaux</p>	

Dans l'exercice 1 Satine propose de mesurer EB avec sa règle, ce que nous considérons comme une procédure instrumentée. Dans le deuxième exercice, la réponse de Satine évoque un angle droit, nous supposons que le segment évoqué dans sa réponse est le segment [AC] et l'angle droit est l'angle  $\hat{B}AC$ . Seule l'utilisation d'une équerre permet cette réponse, pour cela nous considérons que la réponse de Satine est issue d'une procédure instrumentale. Enfin dans l'exercice 3, Satine considère que le triangle est équilatéral car les 3 côtés sont égaux. Elle n'a pas pris en compte les données codées sur le dessin.

Satine utilise des instruments dans ses procédures de résolutions sans prendre en compte les données de l'énoncé ou les données codées sur le dessin. Ainsi, nous considérons que Satine a conservé les règles du contrat didactique du primaire, à savoir utiliser le dessin comme objet de réflexion dans la résolution d'un exercice. La réflexion est complétée, éventuellement validée par l'utilisation d'outils.

Les activités avec Cabri nécessitent des échanges dans les binômes, pour cela nous conservons les choix des élèves, ainsi Satine est accompagnée de Camille. Copie de Camille :

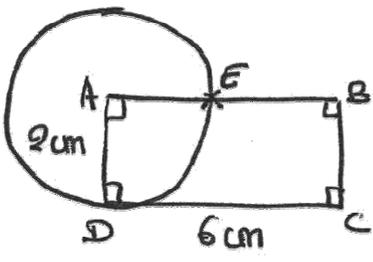
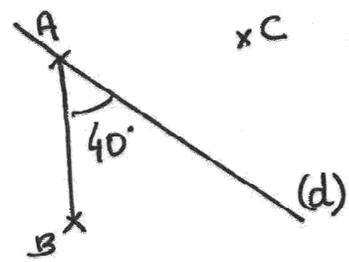
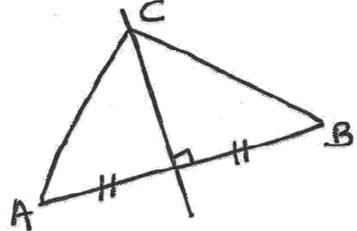
<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>Oui : 3cm. Il faut diviser par 2 la longueur de ce rectangle</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>C'est un triangle isocèle, car la distance du point A au point B est la même car ils sont symétriques à la droite (d)</p>	
<p><u>Exercice 3</u> : Yanis a reproduit un triangle à main levée.</p> <p>Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.</p> <p>C'est un triangle équilatéral. Tous ses segments sont égaux</p>	

Par l'analyse de sa copie, nous considérons que Camille utilise aussi le dessin comme objet d'étude, cependant lorsque le dessin ne permet pas de conclure, elle utilise les propriétés géométriques. Ainsi, Camille utilise une procédure perceptive pour répondre à la question de l'exercice 1 alors qu'elle s'appuie sur la propriété de la symétrie axiale dans l'exercice 2. Pour le dernier exercice, on peut supposer que Camille considère la forme global du triangle ce qui l'amène à conclure que le triangle est équilatéral.

Ce binôme est composé de Satine au profil instrumenté et de Camille au profil perceptif, cependant quand la perception ne permet pas de résoudre le problème elle utilise une procédure plus théorique.

Willy&Meddi ont été choisis pour les réponses que Willy a donné lors du premier test de profil.

Copie Willy

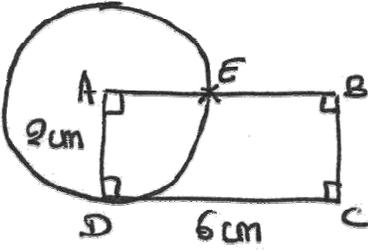
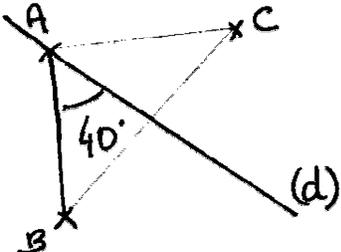
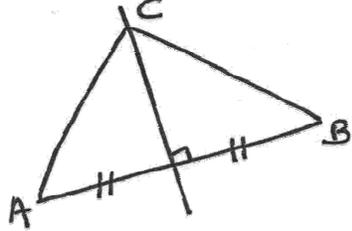
<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>MARC a tracé un cercle il a mis un point E au centre de la droite AB comme AB fait 6 cm alors j'ai pris la moitié qui fait 3 cm</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>Le triangle ABC est un triangle rectangle il a deux côtés de la même longueur</p>	
<p><u>Exercice 3</u> : Yanis a reproduit un triangle à main levée.</p> <p>Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.</p> <p>Le triangle ABC est un triangle quelconque</p>	

Dans le premier exercice, Willy appréhende le dessin perceptivement et conclut que le point E est le milieu du segment [AB]. Il n'utilise pas la propriété du cercle, uniquement la mesure du côté [CD]. Dans le deuxième exercice, Willy identifie un triangle rectangle. Le triangle ABC n'apparaît pas, et Willy n'a pas tracé les côtés du triangle. On peut supposer que l'angle droit identifié par Willy est l'angle  $\widehat{BAC}$  ce qui sous entend qu'il a utilisé une équerre. En effet nous considérons qu'une identification uniquement perceptuelle d'un angle droit dont seul un côté est tracé nous semble difficile. C'est pour cela que nous faisons l'hypothèse que Willy a utilisé un instrument. En ce qui concerne les deux côtés de la même longueur, on ne peut pas savoir si ce résultat est issu d'une déduction perceptuelle ou d'une déduction théorique s'appuyant sur la symétrie axiale. Dans la dernière question, Willy n'identifie pas le triangle isocèle. Si Willy s'appuie sur la perception globale des formes, l'orientation non prototypique du triangle peut empêcher une reconnaissance de la forme. On peut supposer qu'il n'a pas utilisé d'instrument de mesure qui lui aurait permis d'identifier les deux côtés égaux, comme pour l'exercice 2.

Nous considérons que Willy utilise des stratégies qui s'appuient sur la perception des formes. Lorsque les formes n'apparaissent pas, nous supposons qu'il utilise les instruments. Willy met en œuvre une pensée déductive perceptuelle et non théorique. Lorsque la perception est insuffisante, il utilise les instruments géométriques.

Dans la salle informatique, Willy est habituellement en binôme avec Meddi, comme nous ne souhaitons pas casser les binômes cela nous amène à analyser les réponses de Meddi.

Copie Meddi

<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>Oui je fais <math>6\text{ cm} - 2\text{ cm} = 4\text{ cm}</math> et on trouve la longueur de [EB] 4 cm</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>La nature du triangle ABC est un triangle quelconque parce qu'ils n'ont pas les mêmes longueurs.</p>	
<p><u>Exercice 3</u> : Yanis a reproduit un triangle à main levée.</p> <p>Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.</p> <p>C'est un triangle isocèle en C</p>	

Dans le premier exercice, Meddi utilise les données codées sur la figure et parvient à calculer la longueur du segment [EB].

Dans l'exercice 2 on peut voir que Meddi complète le dessin en traçant les côtés manquants du triangle ABC. On peut supposer qu'il a utilisé ses segments pour obtenir la longueur des côtés, ce qui l'amène à constater que les côtés n'ont pas la même longueur. Meddi n'a pas su réinvestir ces connaissances sur la symétrie axiale, soit parce que ces connaissances ne sont pas disponibles, soit parce qu'il n'a pas pris en compte les données de l'énoncé.

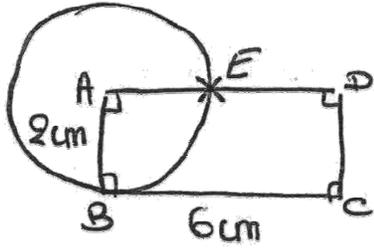
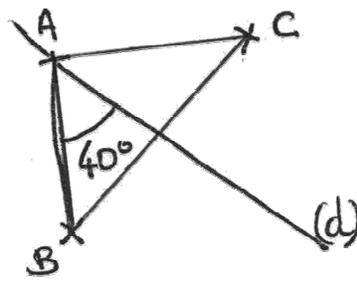
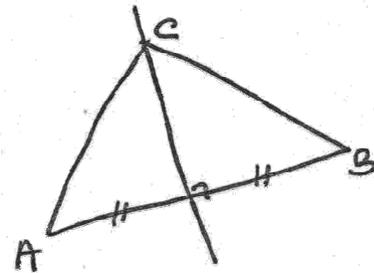
Dans le dernier exercice, comme le dessin est à main levée, les mesures des côtés sont différentes. Ainsi lorsque Meddi nous dit que le triangle est isocèle en C on peut supposer qu'il n'a pas utilisé d'instrument de mesure comme dans la question 2. Il a pu s'appuyer sur une reconnaissance perceptive globale du triangle et de la médiatrice de [AB]. On peut aussi supposer qu'il a su interpréter le codage du dessin pour reconnaître la médiatrice de [AB]. Nous choisirons cette deuxième hypothèse car si on revient sur sa réponse dans l'exercice 1, Meddi n'utilise pas la perception mais les données codées sur le dessin. Cela nous amène à supposer que Meddi utilise la propriété de la médiatrice pour identifier le triangle isocèle.

---

Meddi utilise le codage des dessins et les propriétés qu'il connaît pour résoudre les problèmes posés. On peut considérer que Meddi met en œuvre une appréhension opératoire voire discursive de la figure.

Léa&Sandra ont été choisies pour les réponses que Léa a donné lors du premier test de profil.

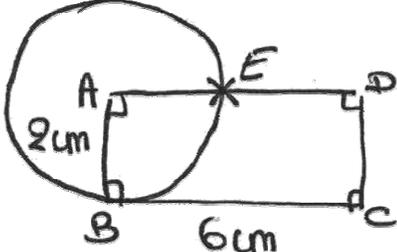
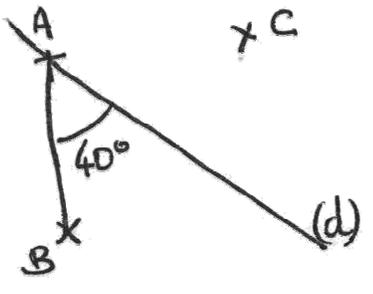
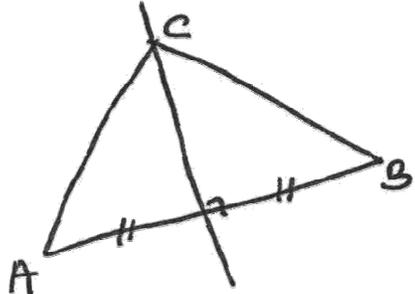
Copie de Léa :

<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur ED, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>E, est le point d'intersection de AD et du cercle ayant pour centre A, D est à droite de E et sur la même ligne que E. pour la longueur de ED, AB fait 2 cm AE aussi donc ED fait 2 cm car le point d'intersection se place au milieu de la longueur (ça se voit à l'œil nu)</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>La triangle A,B,C est un triangle rectangle et un triangle isocèle. C'est un triangle rectangle parce que AB et AC forment un angle droit (ça se voit à l'œil nu) ensuite pour trouver que c'est aussi un triangle isocèle j'ai mesuré les longueurs</p>	
<p><u>Exercice 3</u> : Yanis a reproduit un triangle à main levée.</p> <p>Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.</p> <p>Le triangle A.B.C est un triangle isocèle car : AC=CB=3cm mais AB=4cm (je l'ai mesuré)</p>	

Dans l'exercice 1, Léa utilise les informations sur le cercle pour trouver la longueur demandée. La propriété du cercle est complétée par la perception du point E comme étant le milieu du côté [AD]. Léa n'identifie pas de contradiction entre son résultat et la donnée sur la longueur du côté [BC]. Dans le deuxième exercice, Léa trace tous les côtés du triangle avec sa règle. Ensuite, elle nous donne sa procédure pour identifier la nature du triangle, elle utilise la perception puis un instrument de mesure. Dans la dernière question, Léa utilise encore un instrument de mesure pour connaître la longueur des côtés du triangle. Ainsi, Léa utilise la perception pour résoudre les problèmes, cette perception est complétée par l'utilisation d'instrument.

Léa travaille en binôme avec Sandra

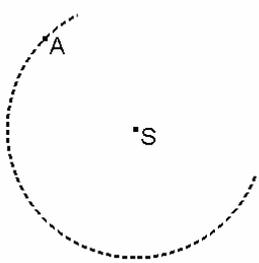
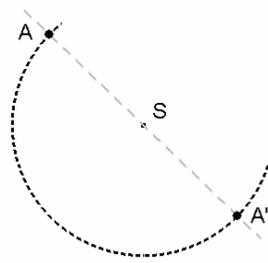
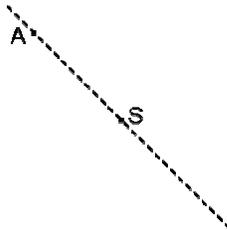
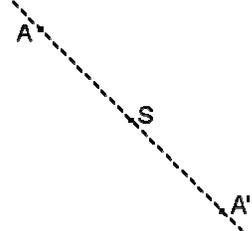
Copie de Sandra :

<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur ED, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>La longueur de ED fait 4 cm j'ai fait : un rayon du cercle fait 2 cm et la longueur BC fait 6 cm alors j'ai fait <math>6-2=4</math> cm ED fait 4 cm</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>C'est un triangle isocèle parce que <math>AB=AC</math> comme C est le symétrique de B alors c'est un triangle isocèle</p>	
<p><u>Exercice 3</u> : Yanis a reproduit un triangle à main levée.</p> <p>Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.</p> <p>C'est un triangle isocèle parce que <math>AC=CB</math> c'est comme si il y avait deux triangles rectangles collés parce que il y a un angle droit (<math>90^\circ</math>) et A et B font la même longueur</p>	

Dans les deux premiers exercices, Sandra utilise les propriétés pour résoudre les problèmes posés.

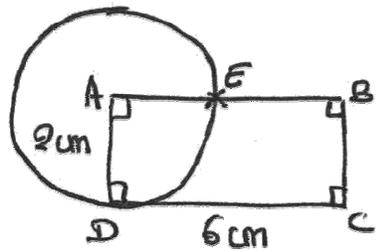
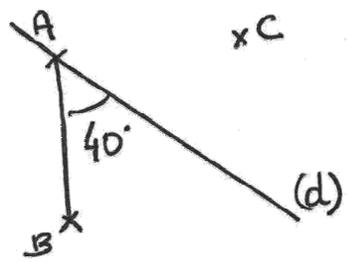
Dans le dernier exercice, Sandra ne reconnaît pas la médiatrice du côté [AB] pourtant elle identifie un triangle isocèle. Sandra a pu reconnaître perceptivement la forme du triangle isocèle ou elle a pu utiliser un instrument de mesure et considérer que les côtés [CA] et [CB] avaient la même longueur.

Jade a été choisie à partir des observations de son activité dans la classe. Nous avons remarqué que Jade a besoin de percevoir visuellement les problèmes et plus généralement les objets avec lesquels elle travaille. Par exemple, la symétrie centrale a été introduite comme un demi-tour autour du centre, ainsi la construction d'un point symétrique passe par l'utilisation du compas pour effectuer le demi-tour puis d'une règle non graduée pour aligner le point initial, le centre de symétrie et le point image. Par la suite l'enseignant a fait évoluer les procédures, le compas pouvait être remplacé par une règle graduée, lorsque les élèves l'utilisaient, c'était pour reporter les longueurs et non plus pour visualiser le demi-tour. Dans les constructions de symétries, Jade a continué à utiliser le compas pour visualiser le demi-tour, c'est-à-dire qu'elle a continué à tracer l'arc de cercle.

<p>Jade le demi-tour</p>	<p>Etape 1 le demi-tour</p> 	<p>Etape 2 alignement</p> 
<p>Report de longueur</p>	<p>Etape 1 alignement</p> 	<p>Etape 2 report de longueur</p> 

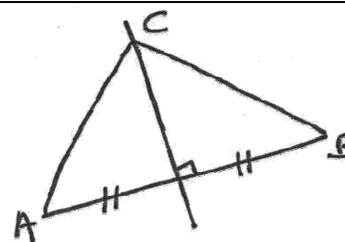
Notre ingénierie utilise la perception du lien contraintes-conclusion à travers les situations d'illustration, nous avons choisi Jade afin d'identifier quel est l'impact des situations d'illustration dans l'évolution des connaissances de Jade.

Copie de Jade :

<p><u>Exercice 1</u> : Marc a fait la figure suivante à main levée.</p> <p>Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode</p> <p>La longueur de AB mesure 6 cm si on enlève 2 cm il reste 4 cm donc la longueur de EB mesure 4 cm</p>	
<p><u>Exercice 2</u> : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).</p> <p>Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.</p> <p>La nature du triangle ABC est : que l'angle A mesure <math>40^\circ</math> et que si on trace la droite AC ça fait un angle de <math>90^\circ</math></p>	

Exercice 3 : Yanis a reproduit un triangle à main levée.  
Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.

Il a tracé un triangle  $ABC$  isocèle  $ABC$ . Au milieu de  $AB$  il y a une droite qui fait un angle, et qui passe par le point  $C$ .



Dans l'exercice 1, Jade utilise les données du dessin pour répondre à la question. Elle raccorde la mesure de  $[DC]$  et l'information codée que  $ABCD$  est un rectangle pour identifier la longueur de  $[AB]$ . Par la suite, elle s'appuie sur la propriété du cercle ce qui lui permet d'obtenir la longueur de  $[AE]$ . Ainsi, elle trouve la longueur de  $[EB]$ . Dans le deuxième exercice, Jade n'utilise pas les informations de l'énoncé. On peut supposer qu'elle a utilisé un instrument de mesure pour obtenir la mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ . Jade n'utilise pas les données de l'énoncé car elle ne s'appuie que sur les données du dessin, ou alors elle n'a pas su réinvestir les propriétés de la symétrie axiale. Dans le dernier exercice, Jade identifie un triangle isocèle, cependant elle ne justifie pas la nature du triangle en utilisant la propriété de la médiatrice. On peut supposer que Jade a identifié une forme : un triangle isocèle représenté sur un côté avec la médiatrice associée.

Jade a mis en œuvre une stratégie pour chaque exercice : dans le premier exercice elle appréhende la figure discursivement et s'appuie sur une propriété pour mettre en place un raisonnement déductif. Dans le deuxième exercice, elle utilise un instrument de mesure. Dans le dernier exercice, elle appréhende perceptivement le dessin et l'associe à la forme du triangle isocèle représenté avec une médiatrice. On peut supposer que Jade adapte ses stratégies en fonction des connaissances théoriques disponibles et des informations données par le dessin. Lorsque ses connaissances ne lui permettent pas d'obtenir une réponse, elle utilise sa perception du dessin, quand celle-ci n'est pas possible (dessin incomplet) elle utilise les instruments.

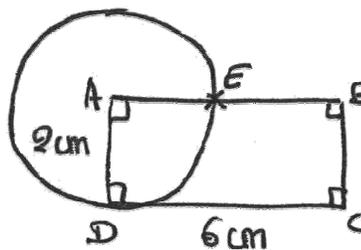
Jade est en binôme avec Laura.

Copie de Laura :

Exercice 1 : Marc a fait la figure suivante à main levée.

Il cherche la longueur  $EB$ , peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode

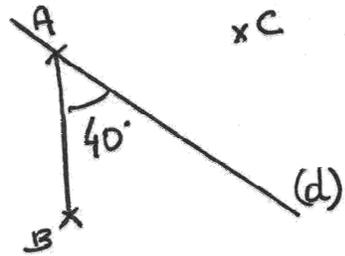
Puisque le côté  $[AD]$  mesure  $2\text{ cm}$  et que c'est pareil pour  $[AE]$  on enlève à  $6$  (longueur  $[DC]$ )  $2\text{ cm}$  ce qui fait  $6-2=4$ . donc  $[EB]$  mesure  $4\text{ cm}$



Exercice 2 : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).

Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.

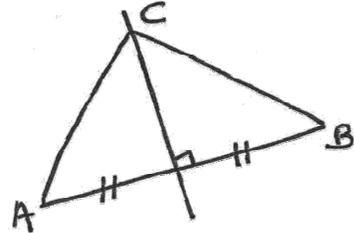
Le triangle ABC est un triangle isocèle, le point B et C sont symétriques donc ils ont la même longueur de [AC] et [AB]



Exercice 3 : Yanis a reproduit un triangle à main levée.

Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.

Le triangle ABC est un triangle isocèle car les segments [AC] et [BC] sont de la même longueur.



Dans le premier exercice, Laura utilise les propriétés du cercle et du rectangle pour répondre à la question tout comme Jade. Dans le deuxième exercice, Laura utilise les données de l'énoncé et la propriété de la symétrie axiale. Ainsi, elle met en œuvre un raisonnement déductif qui utilise la conservation des longueurs avec la symétrie axiale. Dans le dernier exercice, Laura identifie un triangle isocèle, elle s'appuie sur la longueur des côtés [AC] et [BC]. Cependant elle n'explique pas pourquoi ces côtés sont égaux. Elle ne semble pas utiliser la propriété de la médiatrice.

Dans les trois exercices Laura met en œuvre des procédures qui s'appuient sur les propriétés géométriques qu'elle connaît.

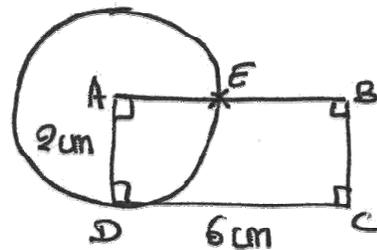
Salomé a été choisie pour ses réponses au test 1 :

Copie Salomé :

Exercice 1 : Marc a fait la figure suivante à main levée.

Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode

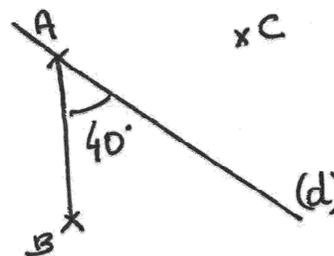
Comme le segment [DC] mesure 6 cm et que la figure est un rectangle la longueur fait 6 cm et la largeur 2 cm. Le segment [AB] fait 6 cm, la moitié de 6 est 3 donc le segment [EB] fait 3 cm.



Exercice 2 : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).

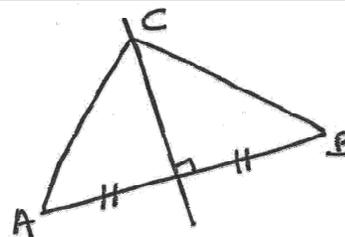
Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.

Le triangle ABC est un isocèle il a deux côtés égaux et un angle de  $40^\circ$



Exercice 3 : Yanis a reproduit un triangle à main levée. Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.

Le triangle ABC est quelconque il a trois côtés égaux



Dans le premier exercice, Salomé n'utilise pas la propriété du cercle mais sa perception de la position du point E au milieu du côté [AB]. Elle s'appuie sur l'égalité des côtés opposés du rectangle pour obtenir la longueur du côté [AB]. Elle conclut que la longueur du segment [EB] est la moitié de la longueur du segment [AB]. Pour le deuxième exercice, Salomé identifie la nature du triangle, mais elle ne donne aucune justification théorique à sa réponse. Comme le triangle n'est pas tracé, il nous semble improbable qu'elle ait utilisé la perception. Salomé considère que le triangle ABC a un angle de  $40^\circ$ , mais cet angle est interne au triangle. On peut se demander si Salomé a su identifier le triangle ABC sans ses côtés. Enfin, dans le dernier problème, la réponse de Salomé n'est pas claire. Soit elle a voulu répondre que le triangle est quelconque car il a trois côtés de longueur différente, soit elle voulait écrire que le triangle est équilatéral car il a trois côtés égaux. Dans les deux cas, on peut supposer que Salomé a mis en œuvre une identification perceptive du triangle. Dans les séances Cabri, Salomé est en binôme avec Léane.

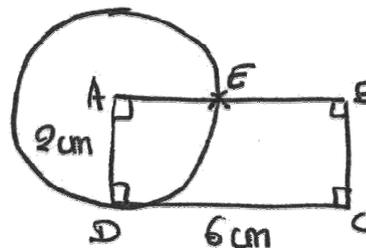
Salomé est en binôme Léane

Copie de Léane :

Exercice 1 : Marc a fait la figure suivante à main levée.

Il cherche la longueur EB, peux-tu retrouver cette longueur ? Explique ta méthode

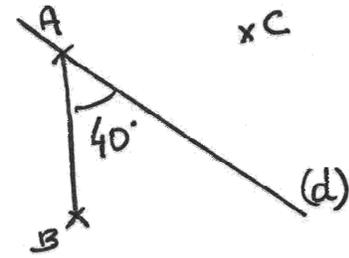
Comme ABCD est un rectangle  $AB = DC$ , donc il fait 6 cm. Le cercle mesure 2 cm il faut donc faire  $6 - 2 = 4$  EB mesure 4 cm.



Exercice 2 : Pierre a reproduit le dessin ci-dessous à main levée. Le point C est le symétrique du point B par rapport à la droite (d).

Quelle est la nature du triangle ABC ? Explique ta réponse.

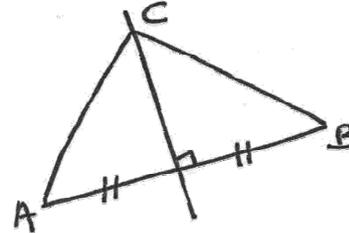
Le triangle ABC est équilatéral puisque A est sur l'axe de symétrie donc la longueur [AB] est égale à celle de [AC]



Exercice 3 : Yanis a reproduit un triangle à main levée.

Quelle est la nature de ce triangle ? Explique ta réponse.

Le triangle ABC est quelconque, car s'il était isocèle les deux côtés seraient égaux.



Dans le premier exercice, Léane mobilise les propriétés du cercle et du rectangle pour résoudre le problème. Ainsi, Léane utilise une procédure théorique. Dans le deuxième exercice, nous considérons que Léane a voulu écrire que le triangle est isocèle et non équilatéral puisqu'elle justifie sa réponse par la symétrie axiale et conclut que deux côtés du triangle sont égaux. Là encore, Léane utilise une procédure qui s'appuie sur les propriétés. Dans le dernier exercice, Léane considère que le triangle est quelconque, sa justification nous laisse penser qu'elle a utilisé un instrument de mesure pour comparer les deux côtés [AC] et [BC]. Dans ce troisième exercice, Léane a utilisé le dessin à main levée comme support dans la résolution du problème. Ainsi, elle a utilisé une procédure instrumentée pour résoudre le dernier problème.

Les élèves que nous avons choisi d'observer sont les élèves ayant un profil perceptif ou perceptif instrumenté. Ces élèves ont été suivis tout au long de l'année afin d'évaluer dans quelle mesure l'ingénierie didactique incluant des situations d'illustration avec un logiciel de géométrie dynamique permet l'évolution du monde perceptif vers le monde théorique.

Parmi les cinq binômes choisis, quatre élèves ont des procédures proches du primaire Satine (instrumentée), Willy (perceptif), Léa (perceptive) et Salomé (perceptive), dans l'utilisation du dessin, des outils géométriques. Ces quatre élèves semblent être dans le paradigme GI. Jade (théorique) a été choisie à partir des observations de la classe, l'analyse de son test nous révèle un profil proche du paradigme GII, cependant dans les classes, elle semble accorder une place importante à la perception. Nous avons conservé les binômes libres mis en place précédemment. Il nous semble que les interactions entre élèves sont plus riches lorsque les deux élèves composant le binôme ont choisi d'être ensemble.

Les binômes Satine&Camille, Willy&Meddi, Léa&Sandra, Jade&Laura interviennent dans l'analyse de la séance « un quadrilatère particulier ». Le binôme Salomé&Léane est analysé dans la séance « des parallélogrammes particuliers ».

Les matériaux recueillis reposent, pour l'analyse des activités, sur l'enregistrement audio et vidéo des cinq binômes. Ces enregistrements sont obtenus à partir du logiciel Camtasia Studio qui enregistre l'activité sur l'ordinateur, tous les déplacements de la souris ainsi que les échanges oraux des élèves. Nous obtenons un film de l'activité Cabri. Ainsi, les élèves sont enregistrés au cours de leurs manipulations avec le logiciel Cabri dans des situations d'Illustration, ce qui nous donne accès à l'utilisation du Déplacement qu'ils mettent en œuvre. Les vidéos de ces cinq binômes sont complétées par le journal de sessions disponible dans Cabri II Plus des autres élèves de la classe placés en binômes.

Pour l'analyse des interventions de l'enseignant, nous utilisons des données audio des phases collectives.

Nous avons choisi de nous intéresser à deux séquences d'enseignement :

Un quadrilatère particulier : sur les propriétés réciproques du parallélogramme

Des parallélogrammes particuliers : les propriétés qui relient le parallélogramme au rectangle et losange.

Un quadrilatère particulier :

	Analyse des activités
	Journal de session de 11 binômes
Analyse du rôle de l'enseignant	Fichiers Camtasia de 4 binômes
	Fichiers audio de 3 discussions collectives

Des parallélogrammes particuliers :

	Analyse des activités
	Journal de session de 11 binômes
Analyse du rôle de l'enseignant	Fichiers Camtasia de 2 binômes
	Fichiers audio de 3 discussions collectives

A partir de ces données, et pour répondre à nos questions de recherche, nous cherchons à observer l'impact des situations d'Illustration sur Cabri dans l'enseignement du lien contraintes-conclusion, ainsi que le rôle de l'enseignant. Notre analyse est guidée par les questions suivantes :

Pour l'analyse des activités Cabri, nous analyserons le processus de genèse instrumentale du *Déplacement* pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion chez les élèves à partir des questions :

- Quel déplacement est mis en œuvre par les élèves ? S'appuie-t-il sur des unités figurales inférieures ? (dans le déplacement, dans le contrôle du déplacement)
- Dans quelle mesure les élèves identifient l'évolution, la transformation de l'unité figurale supérieure, dans l'observation, dans le résumé

Nous analyserons aussi les formulations des élèves, et en particulier les signes qu'ils utilisent pour exprimer les contraintes et la conclusion, ainsi que les signes qui explicitent l'articulation entre les contraintes et la conclusion.

Ces questions sont utilisées dans l'activité de l'élève ainsi que dans la phase collective au cours de la séance Cabri.

L'analyse de l'articulation entre les registres est guidée par l'analyse des signes utilisés par l'enseignant pour relier les deux environnements ainsi qu'articuler les trois registres.

- Quels signes sont utilisés par l'enseignant pour exprimer et articuler la construction, le déplacement, l'observation ?
- Quels signes sont utilisés par les élèves pour exprimer et articuler la construction, le déplacement, l'observation ?

L'enseignant participe à la conception des séquences didactiques, cependant cette conception n'intègre pas la stratégie de conduite des phases collectives. Pour cela on ne peut développer une analyse aussi fine que pour l'analyse des élèves. Cependant nous nous intéresserons à l'évolution des signes qu'elle emploie dans son discours pour articuler les deux environnements, introduire les connecteurs pour expliciter les contraintes et la conclusion et l'articulation entre les deux. Nous faisons l'hypothèse que ces interventions vont permettre de contribuer à l'évolution de GI vers GII.



## Chapitre 4

# Choix et analyse a priori du processus d'enseignement

L'expérimentation doit permettre une observation des élèves en action lors de l'utilisation de Cabri, de l'enseignant au cours des phases collectives sur l'explicitation des propriétés, et d'une éventuelle évolution dans l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion.

Dans l'évolution du contrat au cours du passage du primaire au collège, l'appréhension du dessin dans le raisonnement évolue, ainsi que les outils de la validation. Les activités Cabri permettent d'établir un pont entre les deux contrats car dans un premier temps, les élèves peuvent appréhender perceptivement les dessins, par des observations. Dans un deuxième temps, l'appréhension perceptive ne suffit plus, ils doivent mettre en œuvre une appréhension opératoire voire discursive.

Nous présenterons tout d'abord les choix globaux de notre ingénierie. Puis nous exposerons les deux séquences d'enseignement que nous avons choisies. Dans ces séquences nous analyserons nos choix concernant l'activité Cabri mais aussi les phases collectives. Nous conclurons sur l'analyse a priori d'un test final proposé à la fin de l'année scolaire à l'ensemble de la classe.

## I. Contraintes d'ingénierie longue

### A. *Le contrat didactique*

Pour que les élèves comprennent et s'approprient le contrat du collègue, l'ingénierie se doit de s'étaler dans le temps. Les attentes des enseignants évoluent progressivement vers l'objectif final : l'appropriation de la relation de causalité dans les énoncés géométriques.

Cet apprentissage des propriétés passant par l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique demande aussi aux élèves de comprendre les attentes de l'enseignant relativement aux tâches données à faire dans le logiciel. Ainsi, les élèves doivent comprendre le fonctionnement des fiches. Cela nous amène au contrat didactique lié à l'utilisation de Cabri. Les fiches sont organisées de façon à ce que l'élève résolve seul les activités demandées. Le tableau contenu dans les fiches et le résumé demandé aux élèves peuvent sembler flous lors de la première séance Cabri, cependant à l'aide des phases collectives, c'est-à-dire l'articulation entre l'activité Cabri et la formulation experte des propriétés, les élèves appréhenderont les activités Cabri (le tableau et le résumé) de façon plus pertinente à chaque nouvelle séance.

### B. *Instrumentation*

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique ne doit pas être un obstacle à la résolution des problèmes, il est prévu au contraire comme contribuant à l'apprentissage. Les élèves doivent être familiers avec cet outil. Le logiciel est utilisé dès les premières séances de géométrie afin que les élèves le considèrent comme un outil de géométrie au même titre que le compas ou le double décimètre. Cette familiarisation avec l'outil passe par l'appropriation du caractère dynamique de l'environnement. En effet, jusqu'à présent, les élèves n'ont travaillé que dans un environnement papier-crayon, une représentation dynamique de la géométrie leur est donc inconnue. Nous avons profité des rappels de 6<sup>ième</sup> et des premiers chapitres du programme de 5<sup>ième</sup> pour familiariser les élèves avec le logiciel. Nous avons en quelque sorte joué sur une dialectique ancien-nouveau Assude (2002) en introduisant Cabri sur des notions géométriques déjà connues des élèves. Cela nous a permis de sensibiliser les élèves au déplacement dans Cabri ainsi qu'à la manipulation des outils de base (construire une droite, nommer un point, etc...). La prise en main du logiciel est essentielle pour que le travail des élèves, concernant l'appropriation du lien contraintes-conclusion, soit pertinent. C'est pour cette raison que nous avons intégré le logiciel dans le travail des élèves avant même de travailler sur la notion de propriété et le lien contraintes-conclusion.

### C. *Intériorisation du lien contraintes-conclusion*

Le processus de médiation sémiotique commence à s'installer tout au long des manipulations avec les élèves. L'instrument déplacement, complété par les consignes de l'activité, intervient comme outil dans le processus de médiation sémiotique. C'est au cours des échanges avec l'enseignant que les élèves peuvent formuler leurs actions au cours de la manipulation de cet outil. Cependant le processus d'intériorisation n'est pas immédiat. C'est en utilisant les outils

externes et en interagissant avec d'autres élèves et l'enseignant, que l'élève construit les schèmes d'utilisation associés et construit les signes psychologiques associés.

## II. Choix globaux et variables de l'ingénierie

### A. Choix globaux de l'ingénierie

#### 1 Les types de problèmes

Nous avons précédemment présenté une classification de problèmes : les exercices d'Illustration, de Validation, d'Enoncé-tiers. La classe des problèmes Enoncé-tiers est grande, des sous catégories peuvent être définies. Cette classe de problèmes a pour but d'utiliser une propriété comme énoncé-tiers dans un raisonnement déductif.

- Problèmes de construction raisonnée : Dans ce type de problème, l'élève mobilise des connaissances et des propriétés pour réaliser une construction. Les difficultés de la mise en forme d'un raisonnement déductif sont absentes. Cela nous permet de travailler avec les propriétés sur la production d'un raisonnement déductif, tout en restant dans un registre graphique.

- Problèmes avec dessin à main levée : Les travaux de Duval (1994) sur la place des figures dans le raisonnement nous montrent que l'on ne peut pas prétendre amener les élèves à travailler dans un registre uniquement discursif où la perception serait absente. Le dessin tient un rôle important dans la réflexion. Cependant le dessin ne doit pas être objet de réflexion des élèves, il doit devenir un outil de réflexion. Dans des problèmes où les dessins ne sont pas en vraie grandeur, les dessins sont à main levée, les élèves qui s'appuient sur la perception et l'utilisation d'instrument, évoluant dans le paradigme GI, ne peuvent pas arriver à la solution. Ainsi, ces problèmes nous renseignent sur le paradigme dans lequel l'élève se situe. Lorsqu'il utilise le dessin à main levée comme support de réflexion, nous considérons qu'il est dans le paradigme GI, lorsqu'il utilise le dessin à main levée comme outil, il est dans le paradigme GII.

- Problèmes qui interrogent sur la conclusion, problèmes qui interrogent sur les contraintes : dans cette catégorie, deux types d'exercices apparaissent. Tout d'abord, les exercices pour lesquels l'élève doit trouver la conclusion quand les contraintes sont données, ensuite les exercices pour lesquels l'élève doit identifier les contraintes manquantes pour que les conclusions (données) se réalisent effectivement. Le premier type d'exercices est le plus fréquent. Cependant dans la phase de résolution d'une preuve déductive, la conclusion peut être utilisée, même si elle n'est pas encore validée. La démarche d'élaboration d'un raisonnement déductif considère les données, les contraintes, pour avancer vers les conclusions, mais utilise aussi des conclusions pour déterminer les contraintes dont on a besoin. C'est pour cette raison que les exercices proposés aux élèves visent aussi bien une réflexion qui s'appuie sur les contraintes pour déterminer la conclusion, que des exercices qui

s'appuient sur les conclusions pour déterminer les contraintes. Cela prépare les élèves à l'utilisation des propriétés comme énoncé-tiers dans les raisonnements déductifs plus complexes. En ce qui concerne le lien contraintes-conclusion, ces exercices accentuent l'expression de la relation de causalité entre les contraintes et la conclusion. c'est-à-dire que la réalisation de la conclusion dépend de la présence des contraintes, inversement, la présence des contraintes implique « fatalement » la réalisation de la conclusion.

## 2 Choix des tableaux

Dans les activités avec l'ordinateur, mais aussi dans l'institutionnalisation, nous avons choisi d'utiliser des tableaux. Les tableaux permettent une structuration des idées, mais aussi des énoncés. En effet, la structure du tableau en deux lignes, dans les activités Cabri, ou deux colonnes, dans le cours, permet d'identifier les deux parties de l'énoncé géométrique : les contraintes et les conclusions. La relation entre l'énoncé et l'activité Cabri devient elle aussi plus aisée. Ce support identique dans les deux environnements contribue à l'articulation entre l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon.

### B. Variables didactiques

Les différents choix que nous avons faits reposent sur des choix de valeurs des variables didactiques. En effet certains choix évoluent suivant le contexte de travail de l'élève et nos attentes.

- Travail de recherche avec ou sans l'ordinateur : l'utilisation du logiciel est pertinente lorsque l'élève ne maîtrise pas encore la propriété, c'est-à-dire principalement au cours des activités Cabri. Comme nous l'avons expliqué, dans cette activité nous n'attendons pas que l'élève mette en forme mais produise un raisonnement déductif. Lorsque nous souhaitons évaluer dans quelle mesure l'élève parvient à mobiliser et organiser ses connaissances pour valider théoriquement un résultat et mettre en forme sa solution, nous utilisons l'environnement papier-crayon. Cet environnement peut aussi être utilisé pour évaluer dans quelle mesure les outils de Cabri sont intériorisés par l'élève.

- Travail en binôme lors des séances Cabri : il permet une interaction entre les élèves lors du déplacement pour la verbalisation de la condition d'arrêt. Lorsque les élèves doivent rédiger le résumé de l'activité, là encore les élèves peuvent interagir. Comme nous l'avons précédemment expliqué les échanges interpersonnels sont constitutifs du processus de médiation sémiotique.

## III. Ce que l'on observe ?

### A. Les activités Cabri

L'objectif de ces séances Cabri est que les élèves parviennent à réaliser les différentes manipulations et produire des formulations par eux mêmes, ainsi des aides instrumentales

sont-elles proposées pour minimiser les interventions de l'enseignant. Ces aides sont identifiables à l'aide de l'image : 

Lors de l'activité Cabri, trois moments nous semblent essentiels : le déplacement (réalisation des contraintes), l'observation (identification de la conclusion) et le résumé du tableau (formulation personnelle de la propriété).

Le déplacement utilisé par les élèves pour réaliser les contraintes et un déplacement mou, c'est-à-dire qu'il ne produit pas de configuration qui résistent au déplacement. Cette utilisation particulière de l'outil déplacement permet d'organiser les éléments du dessin Cabri pour qu'ils aient des caractéristiques éphémères, puis, dès que l'on change un des éléments, ces caractéristiques disparaissent. Ce déplacement se fait avec un contrôle, par exemple un contrôle sur deux points pour qu'ils soient confondus. Ainsi, c'est ce contrôle qui permet de considérer les unités figurales inférieures citées dans l'énoncé. Cependant cette décomposition n'est pas naturelle pour l'élève. En effet cette décomposition figurale va à l'encontre de la perception du dessin qui prend en compte l'unité figurale supérieure. En manipulant lui-même les objets, et en réalisant les déplacements, l'élève est amené à décomposer la forme pour réaliser les déplacements sur les unités figurales inférieures.

Une fois que la ou les contraintes sont réalisées à l'aide du déplacement, l'élève est amené à faire une observation. L'observation est le résultat d'une appréhension perceptive du dessin si celui-ci le permet, cependant, les élèves peuvent aussi utiliser les outils Cabri afin d'identifier ou de valider certaines caractéristiques. Cette observation s'appuie sur la perception naturelle de l'unité figurale supérieure. Nous attendons des élèves qu'ils identifient une évolution, une transformation, entre la forme construite et la forme observée et que cette transformation soit éventuellement associée au *Déplacement*.

Cette partie de l'exercice s'appuie principalement sur des connaissances perceptives. Elle se situe dans le contrat de l'enseignement du primaire, les élèves font des observations qu'ils peuvent éventuellement valider à l'aide d'outils. L'intérêt et la signification du *Déplacement* apparaissent dans la formulation du résumé.

Le résumé du tableau correspond à une formulation personnelle de la propriété illustrée. Nous attendons que les élèves y reportent leurs constructions, déplacements et observations. Si l'une de ces étapes n'apparaît pas dans le résumé, le lien de subordination entre les contraintes et la conclusion ne sera pas explicite. En effet, l'élève peut n'exprimer que :

- la conclusion : « on a observé un parallélogramme »
- les constructions « on a construit un quadrilatère »
- le déplacement « on a déplacé le point A » ou « on a déplacé le point A pour que M et N soient confondus »

Lorsque l'élève explicite une des contraintes et l'observation, le lien, entre les contraintes et la conclusion, sera alors partiel, on peut avoir :

- la construction et l'observation : « on a construit un quadrilatère qui est devenu un parallélogramme »
- le déplacement et l'observation : « on a déplacé le point A et c'est devenu un parallélogramme » ou « on a déplacé le point A pour que M et N soient confondus c'est devenu un parallélogramme »

Les observations, identifiées à la conclusion, doivent être articulées avec contraintes, constructions et déplacement. La structure du tableau peut orienter le résumé des élèves. Ainsi, comme les constructions et déplacements sont sur la même ligne, les élèves peuvent les réunir dans le résumé et séparer les manipulations du logiciel des observations. Cette structuration du tableau peut contribuer à exprimer une relation de causalité entre les constructions-déplacements et l'observation. C'est cette expression de la causalité que nous souhaitons voir apparaître dans les formulations des élèves. Dans les cours précédents, les propriétés ont été formulées en associant la construction au mot clef *si* et l'observation au mot clef *alors* cela nous laisse supposer que les élèves peuvent réutiliser ces mots dans leurs résumés.

Certains élèves peuvent considérer que le résumé du tableau concerne les consignes de l'activité et non les résultats ce qui donnerait :

*Nous avons construit des choses, déplacé des points et fait des observations.*

Bien évidemment une telle formulation ne permet aucune illustration du lien contraintes-conclusion, et sera discutée avec l'enseignant.

Enfin, les élèves peuvent reprendre les trois étapes de leur manipulations, la encore nous pouvons obtenir plusieurs articulations, par exemple :

- On a construit un quadrilatère, déplacé un sommet pour superposer les milieux des diagonales et on a observé un parallélogramme
- On a construit un quadrilatère, déplacé un sommet pour superposer les milieux des diagonales et le quadrilatère est devenu un parallélogramme

Nous ne considérons que les articulations qui expriment une relation de subordination, les élèves peuvent aussi utiliser une relation d'association. Nous considérons que l'ordre des actions, la structure du tableau et la manipulation du *Déplacement* contribuent à ce que les élèves expriment cette relation à l'aide d'une subordination.

Le Tableau 1 présente les différentes formulations des étapes de la manipulation dans le résumé. Les élèves peuvent formuler ou non les contraintes liées au déplacement, les contraintes liées à la construction, ce qui nous donne quatre formulations possibles. L'élève peut associer à sa formulation des contraintes la formulation de la conclusion, ce qui nous

donne sept formulations possibles. La formulation où les contraintes et les conclusions sont absentes n'est pas prise en compte.

**Tableau 1**

Formulation des contraintes	Formulation des constructions	Oui	Oui	Non	Non	Oui	Oui	Non
	Formulation des déplacements	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Non	Oui
Formulation de la conclusion		Oui	Oui	Oui	Oui	Non	Non	Non
Formulation lien contraintes-conclusion		Possible	Possible Partielle	Possible Partielle	Non	Non	Non	Non
Exemple		1	2	3	4	5	6	7

Exemples :

1. On a construit un quadrilatère, déplacé un sommet pour superposer les milieux des diagonales et le quadrilatère est devenu un parallélogramme
2. On a construit un quadrilatère qui est devenu un parallélogramme
3. On a déplacé le point A pour que M et N soient confondus c'est devenu un parallélogramme
4. On a observé un parallélogramme
5. On a construit un quadrilatère et on a déplacé le point A pour que M et N soient confondus
6. On a construit un quadrilatère
7. On a déplacé le point A

Lorsque les contraintes ne sont pas explicitées dans leur totalité (omission des constructions ou déplacement, exemples 2 et 3) nous considérons que l'expression du lien contraintes-conclusion est possible, mais elle sera alors partielle.

Dans la formulation du déplacement, les élèves peuvent évoquer l'objectif du déplacement, c'est-à-dire exprimer un déplacement orienté (indiquant le but du déplacement). Ils peuvent aussi n'indiquer que l'élément déplacé.

Dans leurs formulations, les élèves peuvent s'appuyer plus ou moins sur le registre visuel, c'est-à-dire que leur résumé peut être dissocié du dessin Cabri ou, à l'opposé, le dessin Cabri

est essentiel à la compréhension du résumé. Dans la pratique de la géométrie à l'école primaire, un registre visuel est autosuffisant au registre du discours, c'est-à-dire que les élèves peuvent se contenter du registre graphique. Au collège, le registre autosuffisant doit devenir le registre du discours. Deux types de formulations peuvent apparaître. Les formulations où les objets manipulés sont cités par leur dénomination (Formulation nominative) et les formulations plus 'abstraites' où le nom des objets n'apparaît pas (Formulation générale). Par exemple, lorsque les élèves déplacent un sommet d'un quadrilatère ABCD, ils peuvent rapporter leur déplacement par : « on a déplacé le sommet B » ce que nous caractérisons par la formulation nominative ou alors « on a déplacé un sommet » c'est-à-dire la formulation générale. Lorsque l'élève n'utilise pas le nom des points mais le nom géométrique de l'unité figurale, nous considérons que le l'élève se détache du registre visuel. Ainsi, plus la formulation de l'élève est générale, plus l'élève fait abstraction du dessin dans son résumé. A l'opposé, un élève qui utilise des expressions nominatives où le déplacement n'est pas orienté s'appuie fortement sur le dessin pour organiser son discours. Par exemple voici deux formulations pour la même manipulation :

*1-On a construit le quadrilatère ABCD et on a déplacé le point A pour que les points M et N soient confondus, ABCD est devenu un parallélogramme.*

*2-On a construit un quadrilatère, lorsque les diagonales ont le même milieu alors le quadrilatère devient un parallélogramme*

La formulation choisie par l'élève est à associer ou non à la prise en compte de l'acteur (on a déplacé le point A) et les manipulations de l'acteur. En effet, lorsque l'élève explicite son rôle, ses actions dans le résumé, nous considérons qu'il est encore associé à la manipulation, c'est-à-dire qu'il s'appuie sur l'environnement Cabri, le registre graphique-dynamique, un registre visuel. A l'opposé, une formulation où l'acteur disparaît, ainsi que ses actions, nous indique que l'élève a su se dégager du registre visuel. Ainsi nous associons les formulations nominatives avec l'explicitation de l'acteur. Nous supposons que l'acteur sera plus discret dans des formulations générales.

Les différentes formulations nominatives ou générales sont réunies dans le Tableau 2.

**Tableau 2**

[construction nominative]	[construction générale]
[déplacement nominatif-orienté]	[déplacement nominatif-orienté]
[observation nominative]	[observation nominative]
[construction nominative]	[construction générale]
[déplacement nominatif-orienté]	[déplacement nominatif-orienté]
[observation générale]	[observation générale]

[construction nominative]	[construction générale]
[déplacement général-orienté]	[déplacement général-orienté]
[observation nominative]	[observation nominative]
[construction nominative]	[construction générale]
[déplacement général-orienté]	[déplacement général-orienté]
[observation générale]	[observation générale]

Lorsqu'un élève utilise une formulation mixte dans son résumé, [construction générale] [déplacement nominatif-orienté] [observation générale], des éléments retranscrit à l'aide d'une formulation nominative et d'autres à l'aide d'une formulation générale, on peut supposer que l'élève est en cours d'apprentissage. Les éléments explicités à l'aide d'une formulation nominative peuvent nécessiter la présence du dessin pour être compris alors que les éléments explicités à l'aide de la formulation générale peuvent se passer du dessin.

Nous avons étudié le résumé par ce que les élèves peuvent exprimer, les constructions, les observations, comment ils peuvent les exprimer par formulation générale ou nominative, il nous reste à identifier comment ils peuvent articuler ces informations. Pour cela nous reprenons les signifiants du registre discursif que nous avons mis en valeur dans le chapitre 2 et la caractérisation des propriétés à l'aide des champs conceptuels (I.C.3). Les élèves peuvent relier chaque expression en utilisant une formulation experte (avec des indicateurs conditionnels ou consécutifs) ou une formulation temporelle (avec des indicateurs temporels).

Enfin la liaison entre le contenu du tableau et le contenu du résumé nous renseigne sur la stabilité des connaissances des élèves. Si les éléments du résumé ne coïncident pas avec les éléments du tableau, cela signifie que l'élève ne s'est pas complètement approprié la manipulation.

Une mise en commun au cours de l'activité avec Cabri permet à l'enseignant d'intervenir et de complexifier la tâche de formulation de l'élève. Ainsi l'articulation entre les manipulations et observations restent à la charge de l'élève, l'enseignant apporte simplement des éléments sur la structuration générale du résumé. Cet échange avec l'enseignant joue un rôle dans le processus de médiation sémiotique. Cependant les éléments de structuration, éventuellement donnés par l'enseignant, ne suffisent pas pour ordonner les actions dans une phrase.

### **B. Phases collectives d'énonciation des propriétés**

Les phases collectives peuvent intervenir à la fin de la séance Cabri, ou au cours de l'activité, elles sont aussi mises en place après la séance Cabri dans la salle de classe. Au cours d'une phase collective, l'enseignant interagit avec les élèves, introduit de nouveaux signes et explicite les règles du contrat concernant les résumés. Avant ces phases collectives, l'élève a réalisé les tâches d'Illustration avec l'utilisation du déplacement. Cet investissement personnel est essentiel dans le processus d'appropriation de l'instrument *Déplacement* tel que

nous l'avons présenté précédemment. Lors des phases collectives, les élèves interagissent sur leurs manipulations et sur leurs formulations, cette interaction est suivie, par l'enseignant qui pourra introduire des signes supplémentaires pour l'expression des propriétés.

La phase collective finale suivant la séance Cabri a pour but l'explicitation des propriétés. L'enseignant relie l'activité Cabri avec la formulation experte de la propriété. C'est à ce moment que les mots *si* et *alors* prennent leur sens, ils sont associés à l'activité Cabri. Cette liaison entre l'activité Cabri et les énoncés géométriques s'appuie sur un tableau utilisé pour représenter statiquement une activité dynamique. Cette dernière étape sera elle aussi analysée. Le langage au cours des échanges et les divers supports utilisés pour relier les registres et les environnements constituent des outils de médiation sémiotique pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion. Nous analyserons donc les échanges entre élèves mais aussi avec l'enseignant au cours des mises en commun afin d'identifier une possible évolution dans les signes utilisés, dans le registre du discours des élèves et de l'enseignant.

### **C. Les exercices d'application**

Après chaque phase collective, une fois que les propriétés sont validées par la classe, elles peuvent être réinvesties dans des exercices de type Enoncé-tiers. La résolution de ces exercices par les élèves n'utilise pas le logiciel. Celui-ci peut intervenir lors de la correction afin de visualiser s'il y a lieu le déplacement permettant de résoudre l'exercice. Dans cette phase nous analyserons dans quelle mesure les élèves parviennent à réinvestir les propriétés dans des raisonnements déductifs simples. Nous objectif n'est pas d'étudier la capacité par les élèves à formuler des raisonnements de preuve mais d'analyser s'ils parviennent à utiliser les propriétés introduites avec Cabri. Ainsi nous analyserons comment les élèves parviennent à formuler ces propriétés, quels signes ils utilisent, quelle formulation. Nous analyserons aussi dans quelle mesure ils parviennent à associer les contraintes de la propriété aux données du problème et la conclusion de la propriété à la conclusion du problème.

### **D. Tests**

À la fin de l'année scolaire nous avons proposé aux élèves un test afin d'évaluer leur appropriation du lien contraintes-conclusion. Pour cela nous avons conçu trois exercices qui interrogent sur des formulations du lien contraintes-conclusion. Ce test a été proposé à toute la classe. Deux des cinq binômes enregistrés ont participé à un entretien avec le chercheur. Cet entretien avait pour but l'étude de la reconnaissance par les élèves des contraintes et des conclusions et de les interroger sur leur articulation.

## IV. Un quadrilatère particulier

### A. Introduction

Le chapitre sur les parallélogrammes a suivi le chapitre sur la symétrie centrale. Cela a permis à l'enseignant de s'appuyer sur la symétrie centrale pour définir le parallélogramme :

*Définition : Un parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui possède un centre de symétrie, ce centre de symétrie est le point d'intersection des diagonales.*

Cette définition est volontairement redondante afin de faciliter sa compréhension par les élèves.

Le parallélogramme a été introduit en primaire comme un quadrilatère qui possède des côtés opposés parallèles. Nous sommes conscients que ce changement de définition peut s'avérer difficile pour les élèves, mais nous (l'enseignant et le chercheur) avons choisi d'introduire cette nouvelle définition afin de pouvoir démontrer certaines propriétés du parallélogramme. De plus cela permet de relier le parallélogramme à la symétrie centrale, les propriétés de la symétrie centrale pouvant ainsi être réinvesties dans un nouveau contexte pour valider les propriétés du parallélogramme. Munis de cette définition, les élèves construisent des parallélogrammes à partir de trois points : deux sommets et le centre de symétrie. Une fois que les élèves connaissent la définition du parallélogramme, ils sont amenés à manipuler un parallélogramme avec Cabri afin d'identifier les invariants du parallélogramme, les propriétés directes du parallélogramme. Cette activité Cabri ne suit pas la structure que nous avons présentée. En effet, le Déplacement utilisé n'est pas le celui que nous avons explicité, il s'agit du Déplacement habituel qui valide les propriétés. Ainsi les élèves n'ont pas eu de tableau lors de l'activité mais uniquement dans leur cours. Cette activité Cabri est suivie d'une phase collective avec l'utilisation d'un tableau qui permet une formulation des propriétés :

*P1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.*

*P2 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles et égaux.*

*P3 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés sont égaux.*

La relation entre les contraintes et la conclusion s'appuie ici essentiellement sur la couleur du codage puisque le parallélogramme n'évolue pas au cours de la propriété. Comme nous l'avons expliqué précédemment, la formulation experte utilise les mots *si* et *alors*, c'est pourquoi, lorsque les propriétés sont discutées avec l'enseignant, et institutionnalisées, nous avons choisi d'utiliser cette formulation experte introduite par l'enseignant. Cette séquence sur les propriétés directes du parallélogramme précède la séquence que nous allons analyser, les propriétés réciproques du parallélogramme :

*P4 : Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.*

*P5 : Si un quadrilatère a ses côtés opposés qui sont parallèles et égaux, alors c'est un parallélogramme.*

*P6 : Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés qui sont égaux, alors c'est un parallélogramme.*

Ces propriétés sont introduites au cours d'une nouvelle séquence. Les élèves connaissent une définition du parallélogramme ainsi que les propriétés du parallélogramme. Ils peuvent reconnaître perceptivement un parallélogramme mais aussi contrôler cette reconnaissance perceptive par l'utilisation des propriétés directes.

## **B. Séance Cabri**

### **1 Organisation**

Les élèves ont déjà eu le même type de fiche (avec un tableau et un résumé) lors des séquences sur la symétrie centrale et la médiatrice. Il est cependant probable qu'ils n'aient pas encore identifié les attentes de l'enseignant par rapport à l'utilisation des tableaux et relié les manipulations Cabri avec les propriétés car celles-ci sont en cours d'acquisition.

### **2 Je découvre**

L'objectif de cette la partie 'je découvre' est que les élèves manipulent un quadrilatère quelconque pour obtenir un parallélogramme (Fiche élève 1). Les indications manipulatoires de l'artefact sont indiquées avec une ampoule, ce qui permet aux élèves une certaine autonomie dans la manipulation du logiciel. Nous proposons à l'élève une construction par l'outil *polygone*, mais il peut aussi construire le quadrilatère avec l'outil *segments*. Ces deux types de construction aboutissent à un résultat équivalent pour la suite du problème. Le quadrilatère initial est construit par les élèves, nous n'avons aucun contrôle sur cette première construction qui n'est pas sans incidence sur la suite de l'exercice. La référence au papier-crayon est très forte. Ainsi, bien que le quadrillage soit absent de la page Cabri, on peut penser que les élèves choisiront de construire des côtés verticaux et horizontaux, débouchant ainsi sur des rectangles ou des carrés.

Fiche élève 1

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Construis un quadrilatère ABCD.</b></li> </ul>  Sélectionne l'outil <i>polygones</i> de la boîte <i>Lignes</i> . A chaque clic nomme les sommets A, B, C, D, reviens au point A pour terminer. <ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Construis M milieu de [AC] et N milieu de [BD]</b></li> <li>● <b>Déplace le point C pour que les points M et N soient confondus.</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Construis un quadrilatère ABCD.</b></li> <li>● <b>Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD)</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----
Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD) et que (AD) soit parallèle à (BC)</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Construis un quadrilatère ABCD.</b></li> <li>● <b>Mesure les longueurs de chacun des côtés du quadrilatère</b></li> </ul> AB =      AD =      BC =      CD = <ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Déplace le point C pour que AB = CD</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----
Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>● <b>Déplace le point C pour que AB = CD et AD = BC</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

Les élèves peuvent construire un quadrilatère particulier qui risque de compromettre la suite de l'activité. Nous assumons ce risque car les élèves auront la possibilité de revenir sur cette manipulation à n'importe quel instant dans le déroulement de l'activité Cabri et de considérer non plus un rectangle ou carré mais bien un quadrilatère quelconque.

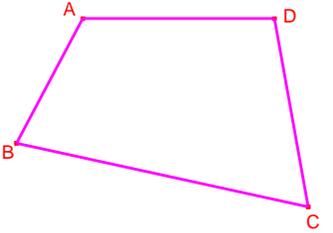
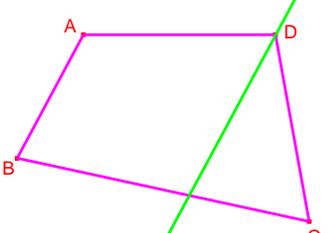
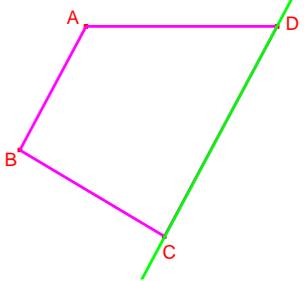
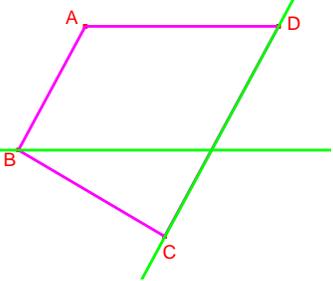
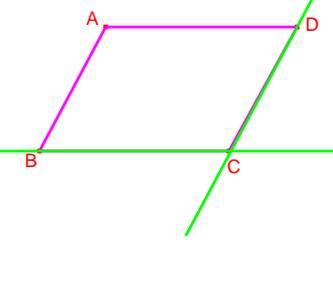
#### Stratégies de déplacement possibles

Nous appelons la première manipulation « milieux confondus ». L'élève déplace un sommet pour que les milieux de chaque diagonale soient superposés. Il peut travailler uniquement perceptivement, c'est-à-dire qu'il déplace un des sommets jusqu'à ce que les deux milieux soient superposés, le contrôle associé au déplacement porte sur les points. Les élèves peuvent aussi redéfinir les points (« point sur une droite »), cependant l'usage de l'outil correspondant de Cabri n'a pas été exposé aux élèves, pour cela nous doutons de son utilisation. Le but du déplacement est de confondre les milieux des diagonales d'un quadrilatère que nous avons demandé de construire. Ainsi les unités figurales inférieures, ici les milieux des diagonales (objets de dimension 0), sont présentés sur l'écran. D'autre part le but du déplacement, explicité dans la question, est de confondre deux points visibles. La mise en œuvre de ce déplacement passe nécessairement par une prise en compte de ces deux points. La réalisation du déplacement passe par le contrôle de la superposition des deux points.

Dans les deux dernières manipulations « côtés opposés égaux » et « côtés opposés parallèles » les déplacements sont séparés en deux étapes. Dans un premier temps, l'élève travaille sur deux côtés opposés, ensuite il travaille sur tous les côtés opposés. Cette étape intermédiaire a pour but de faire prendre conscience à l'élève qu'une contrainte (parallélisme ou égalité) sur deux côtés agit sur l'unité figurale supérieure en la transformant et qu'une deuxième contrainte agit aussi et transforme encore l'unité figurale supérieure. Si l'on veut imposer des contraintes sur un quadrilatère pour qu'il devienne un parallélogramme il faut que les contraintes agissent sur tous les côtés.

Lorsque l'élève doit déplacer un sommet pour que deux côtés opposés soient parallèles, deux stratégies sont envisageables, une stratégie avec un contrôle perceptif, une stratégie avec un contrôle instrumenté. Un élève qui utilise une stratégie avec contrôle perceptif déplace le sommet jusqu'à ce qu'il considère que deux côtés sont 'penchés pareil' c'est-à-dire que visuellement ils semblent parallèles. Pour que la reconnaissance visuelle soit facilitée, les élèves peuvent revenir à des côtés horizontaux et verticaux, ce qui les amène à un rectangle ou un carré. Le contrôle du déplacement peut aussi utiliser un outil de Cabri. L'élève peut construire la parallèle au côté passant par un des sommets, le déplacement revient alors à superposer le côté et la droite parallèle. Nous considérons ce contrôle comme instrumenté pour l'opposer au déplacement contrôlé uniquement par la perception. (Tableau 3)

Tableau 3

Déplacement instrumenté :		
		

Dans la troisième manipulation les élèves construisent encore une fois un quadrilatère puis ils déplacent un sommet pour que deux côtés opposés soient de la même longueur. Pour cette manipulation, un contrôle perceptif du déplacement n'apparaîtra pas car nous demandons aux élèves de mesurer les côtés du quadrilatère. Comme les élèves possèdent la longueur des côtés, ils vont l'utiliser. Ainsi, la stratégie attendue pour ce déplacement est un déplacement avec contrôle instrumenté par la mesure des côtés.

Dans les deux premiers déplacements, le contrôle porte sur un sous objet du quadrilatère et non le quadrilatère, c'est-à-dire sur les unités figurales inférieures. Lorsque le déplacement porte sur les mesures des côtés, nous n'associons pas les mesures à des unités figurales car ce ne sont pas des objets géométriques mais des objets numériques.

#### Observations possibles

Le quadrilatère ABCD à observer, l'objet de la conclusion, est cité dans la question même si la perception naturelle amène l'élève à une perception de l'unité figurale supérieure, c'est-à-dire le polygone. Cette formulation pour l'observation permet de sous-entendre une transformation du quadrilatère. L'expression de la causalité du lien contraintes-conclusion est introduite dans la question par « devient ». Ainsi l'élève sait que la nature du quadrilatère a changé. Cette indication est certes très forte et guide l'élève dans sa tâche, cependant elle nous assure une évolution entre l'objet construit et l'objet observé. En effet, les observations de l'élève dépendent de la construction initiale. Lorsqu'un élève construit un rectangle ou un carré, les diagonales se coupent déjà en leur milieu, l'élève n'aura aucune observation à faire, si ce n'est : on a construit un rectangle qui est resté un rectangle. Cependant, en référence au contrat, lorsque l'enseignant pose une question, l'élève doit trouver une réponse, comme nous demandons « que devient ABCD ? » nous induisons dans notre question que le quadrilatère s'est transformé, le travail de l'élève est d'identifier la nature de ce nouveau quadrilatère.

C'est pourquoi nous supposons que les élèves qui ont construit un quadrilatère particulier, peuvent refaire leur construction, c'est-à-dire construire un quadrilatère dont les diagonales ne se coupent pas en leur milieu, afin d'obtenir un nouveau quadrilatère à la fin de la manipulation.

Les élèves qui ont construit un quadrilatère quelconque, peuvent obtenir un parallélogramme dans une configuration qui ne permet pas à l'élève de le reconnaître. Dans cette hypothèse, l'élève pourrait considérer que le quadrilatère est resté un quadrilatère, mais pour les mêmes raisons de contrat que précédemment, on peut supposer que l'élève cherchera à identifier la nature du nouveau quadrilatère. Enfin, n'oublions pas que les élèves viennent de travailler sur le parallélogramme ce qui leur a permis d'être sensibilisés à cette forme particulière dans des orientations différentes au cours des exercices d'application.

Les élèves ont construit un quadrilatère quelconque, puis ont réalisé des contraintes sur le quadrilatère. Une fois les contraintes réalisées, le quadrilatère s'est transformé. Lorsque les élèves utilisent le *Déplacement*, nous attendons qu'ils considèrent les unités figurales inférieures puisque le contrôle du déplacement est effectué sur des unités figurales inférieures. Lorsqu'ils observent le résultat, la perception naturelle du registre visuel les amène à considérer l'unité figurale supérieure, c'est-à-dire le parallélogramme. La transformation du quadrilatère en un parallélogramme peut être reliée au déplacement du sommet, c'est-à-dire que le déplacement devient la cause de la transformation du parallélogramme.

#### Formulations possibles

L'analyse des formulations est décomposée en trois analyses : quel éléments de la manipulation sont rapportés, avec quel type de formulation sont-ils explicités, comment l'élève articule ces éléments.

Nous avons déjà présenté les différentes articulations possibles par les champs conceptuels. Dans le paragraphe « Ce que l'on observe », nous avons présenté les différentes combinaisons relatives à l'explicitation des actions. Il ne reste qu'à préciser quel type de formulation les élèves vont utiliser pour exprimer les actions de cette manipulation.

Ainsi, dans le Tableau 4 apparaissent les formulations nominatives et les formulations générales. Si l'élève s'attache à la représentation graphique, au dessin, dans son résumé, l'élève reportera ses actions sur le quadrilatère en nommant les sommets. Les éléments du dessin seront rapportés dans la formulation. Le type de formulation de l'élève (nominative ou générale) est un indicateur sur la prise en compte des cas possibles.

**Tableau 4**

Construction	Nominative	On a construit le quadrilatère ABCD.
	Générale	On a construit un quadrilatère.
Déplacement	Nominatif	On a déplacé le point C.

	Général	On a déplacé un sommet.
Déplacement orienté	Nominatif	On a déplacé le point C pour que M et N soient confondus
	Général	On a déplacé un sommet pour que les diagonales se coupent en leur milieu.
Observation	Nominative	ABCD devient un parallélogramme.
	Générale	Le quadrilatère devient un parallélogramme.

Le résumé devient une composition de ces formulations des étapes.

Nous avons séparé le déplacement et le déplacement orienté car sans le but du déplacement, toutes les contraintes ne sont pas explicitées.

### 3 J'utilise

La partie « j'utilise » confronte l'élève à un exercice de type énoncé-tiers portant sur une des propriétés qu'il vient de travailler. (Fiche élève 2)

#### Fiche élève 2

Ouvre le fichier qp-exercice1.fig.

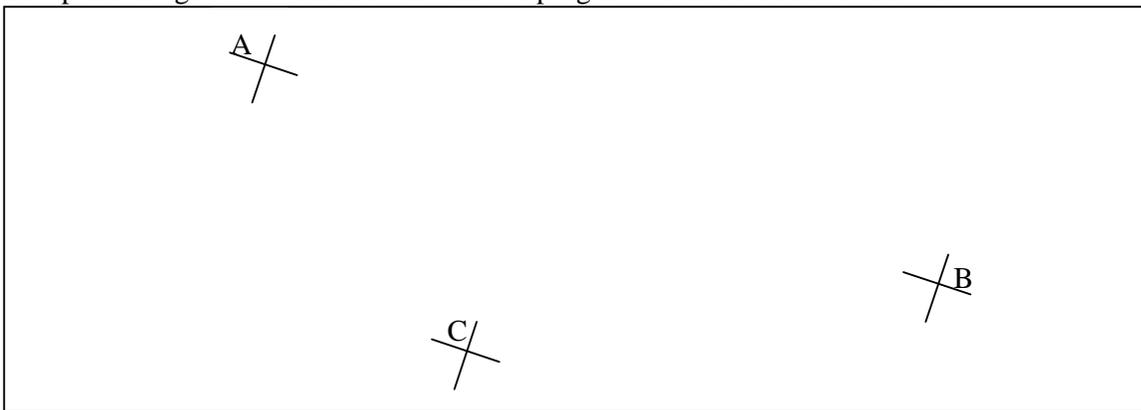
Voici le programme de construction de la figure :

*Construire 3 points A, B et C. Construire la droite (AB).*

*Construire la droite (d1) perpendiculaire à (AB) passant par A, puis la droite (d2) perpendiculaire à (AB) passant par B.*

*Construire la droite (CB) puis la droite (d3) parallèle à (CB) passant par A.*

Complète la figure ci-dessous en utilisant le programme de construction donné.



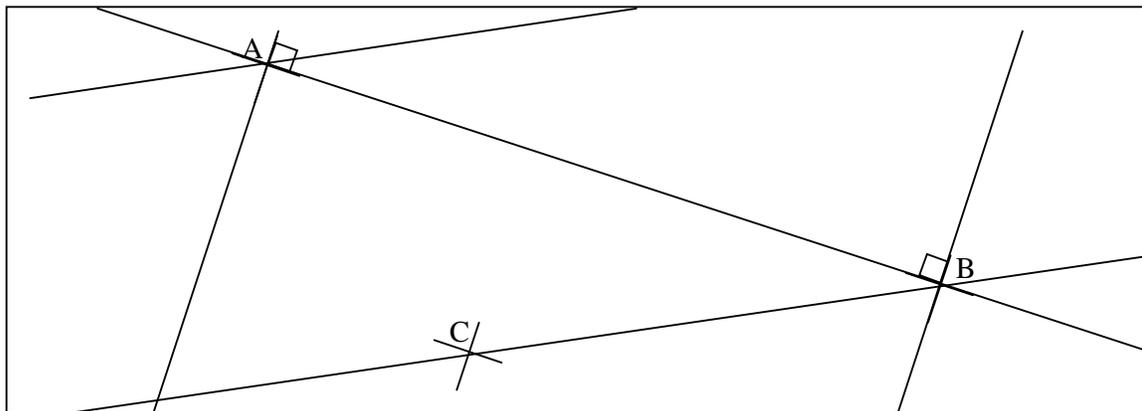
Retrouver un parallélogramme. Explique comment tu as fait.

Dans cette deuxième partie de la séance Cabri, l'environnement papier-crayon est mêlé à l'environnement dynamique de Cabri cela permet de ne pas dissocier les deux environnements, de plus les élèves peuvent organiser leur recherche avec l'un ou l'autre environnement. La construction est à faire uniquement dans le papier-crayon. Nous considérons qu'elle n'apporte pas à être faite dans les deux environnements. Ainsi l'environnement graphique et l'environnement graphique-dynamique sont présents dans la même activité. Cette association des environnements participe à leur articulation.

Comme nous l'avons précédemment expliqué, le registre graphique est primordial dans la résolution des problèmes de géométrie. Cependant, à l'arrivée au collège, l'utilisation des dessins dans le raisonnement géométrique doit évoluer. Les dessins, associés aux propriétés qu'ils contiennent, deviennent des outils pour établir un raisonnement, ils ne sont plus l'objet de réflexion. Ainsi, il faut amener les élèves à un raisonnement qui s'appuie sur le dessin mais qui utilise les propriétés de la figure représentée. L'exercice proposé s'appuie sur un dessin,

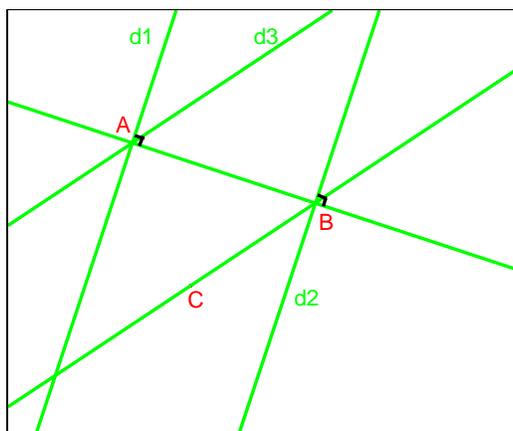
que les élèves peuvent compléter. Il sera utilisé comme support dans leur réflexion. Nous avons imposé les points A, B et C ce qui nous permet de contrôler le dessin final des élèves. En effet, lorsque les élèves réalisent le programme de construction, nous supposons qu'ils resteront dans la zone de dessin proposée. Une fois tous les éléments du dessin représentés, les élèves doivent retrouver un parallélogramme, cependant les quatre sommets du parallélogramme n'appartiennent pas tous à la zone de représentation (Figure 3). Nous avons choisi de 'faire sortir' le parallélogramme du cadre afin d'empêcher la mise en œuvre d'une stratégie perceptive dans la résolution du problème.

Figure 3



Les élèves peuvent accéder au fichier Cabri contenant la représentation du programme de construction. Les points A, B et C sont placés sur la feuille de travail Cabri pour que le parallélogramme n'apparaisse pas globalement à l'écran (Figure 4). Les élèves peuvent utiliser les ascenseurs pour faire apparaître le quatrième sommet mais font alors disparaître le sommet opposé. Là encore, une procédure uniquement perceptive ne peut pas être mise en place, les quatre sommets du parallélogramme n'apparaissant pas simultanément.

Figure 4



Stratégies possibles

Comme le parallélogramme ne peut pas être perçu globalement, les élèves qui utilisent uniquement des connaissances perceptives ne pourront pas identifier les sommets du parallélogramme. Ainsi les stratégies perceptives sont mises en échec.

Pour identifier le parallélogramme, il faut retrouver les quatre sommets. Le quatrième sommet n'appartient pas au cadre dans lequel le dessin est construit. Une appréhension perceptive ne peut pas permettre d'identifier le somme manquant car la forme n'est pas présente. Ainsi, les élèves sont amenés à identifier parmi les droites construites quelles sont celles qui pourraient supporter les côtés, c'est-à-dire identifier les parallèles, d'où une appréhension opératoire du dessin. Cette appréhension opératoire leur permet une décomposition du dessin en sous parties, chaque sous partie étant associée à un élément du programme de construction. Comme les éléments du programme de construction sont réinvestis dans l'analyse du dessin, l'appréhension opératoire évolue en une appréhension discursive. Cela permet l'explicitation de nouvelles propriétés mathématiques à partir des données de l'exercice, c'est-à-dire que les élèves mettent en place un raisonnement déductif, plus ou moins explicite. Le fait de demander aux élèves d'expliquer comment ils ont retrouvé le parallélogramme devrait permettre une explicitation de ce raisonnement déductif. Ainsi, les contraintes (d1) perpendiculaire à (AB) passant par A et (d2) perpendiculaire à (AB) passant par B associées à la propriété « deux droites perpendiculaires à une même droites sont parallèles » permettent d'obtenir que les droites (d1) et (d2) sont parallèles. Le dessin possède deux couples de parallèles, sachant que « si un quadrilatère possède tous ses côtés opposés parallèles alors c'est un parallélogramme » il ne reste plus qu'à trouver les sommets du quadrilatère pour trouver le parallélogramme. Les élèves vont prolonger les droites dans le but de déterminer les sommets, le prolongement des droites est le résultat d'un raisonnement déductif utilisant les propriétés des droites perpendiculaires et de la caractérisation du parallélogramme par la propriété de parallélisme des côtés (mise en valeur au cours de la manipulation 2).

La reconnaissance du parallélogramme passe nécessairement par une utilisation des données du programme de construction. Le dessin Cabri utilise le codage des angles droits afin de faciliter une reconnaissance des droites parallèles. Les élèves qui utilisent la figure Cabri et leur construction en papier-crayon peuvent ainsi ajouter le codage sur leur construction. Cela induit une appréhension discursive du dessin.

#### **4 Synthèse activité Cabri**

La première partie de l'activité Cabri sensibilise les élèves à de nouvelles propriétés pour la reconnaissance de parallélogramme. Cette sensibilisation passe par la construction puis la manipulation de quadrilatères. Une fois que ces contraintes sont réalisées, les élèves peuvent observer un nouvel objet.

Dans la deuxième partie les règles du contrat évoluent car les stratégies utilisant la perception seule ne peuvent pas aboutir, les élèves doivent mobiliser des connaissances pour résoudre les

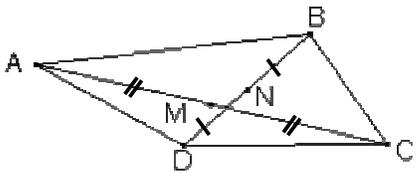
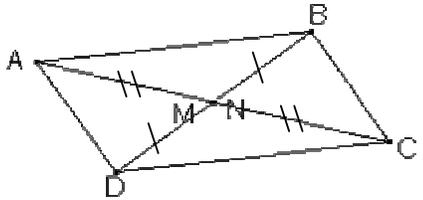
exercices. Ainsi, les élèves sont amenés à une évolution dans l'appréhension de la figure, ils doivent compléter leurs connaissances perceptives par des connaissances théoriques.

### ***C. Phase collective***

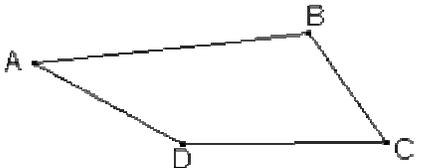
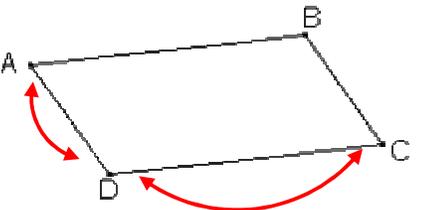
La mise en commun permet un partage et une discussion autour des formulations des élèves. Cet échange entre élèves et enseignant permet l'introduction et l'utilisation de signes. Au cours de cette phase collective, trois éléments seront discutés : les constructions et déplacements, les observations et les résumés. L'objectif est que les élèves formulent les propriétés en s'appuyant sur leur fiche et une trame du cours (Cours 1). Avec le rétroprojecteur, l'enseignant projette la feuille de cours, et remplit les éléments manquants avec les élèves.

Cours 1

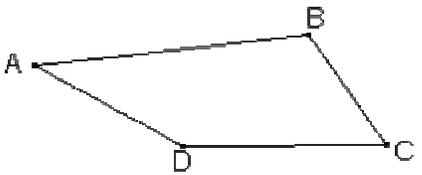
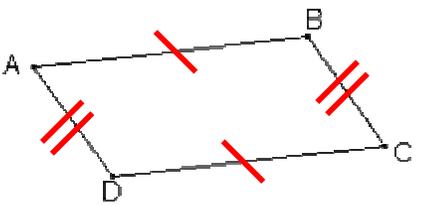
III RECONNAITRE UN PARALLELOGRAMME

Si on construit ...	Alors on observe ...
<p>Un quadrilatère ABCD de façon à ce que :</p>  <p style="color: red;">+ M et N confondus</p> <p>M milieu de [AC] et N milieu de [BD] soient confondus</p>	 <p style="color: green;">ABCD est un parallélogramme</p>

Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui **ont le même milieu**, alors c'est un **parallélogramme**.

Si on construit ....	Alors on observe ...
 <p style="color: red;">+(BC)//(AD) (AB)//(DC)</p> <p>Un quadrilatère ABCD de façon que <b>tous les côtés opposés soient parallèles</b></p>	 <p style="color: green;">ABCD est un parallélogramme</p>

Propriété : Si un quadrilatère a **ses** côtés **opposés** qui **sont parallèles**, alors c'est un **parallélogramme**

Si on construit ...	Alors on observe ...
 <p style="color: red;">+ BC=AD AB=DC</p> <p>Un quadrilatère ABCD de façon que [AB] ait la même longueur que [DC] et que [AD] ait la même longueur que [BC]</p> <p style="color: red; border: 1px solid black; border-radius: 50%; padding: 2px; display: inline-block;">Non croisé</p>	 <p style="color: green;">ABCD est un parallélogramme</p>

Propriété : Si un quadrilatère a **ses** côtés **opposés** qui **sont de même longueur**, alors c'est un **parallélogramme**.

Cette liaison manipulation-énoncé s'appuie sur un tableau, (Cours 1) comme dans l'activité Cabri. Dans la première colonne on retrouve les constructions et déplacements, dans la deuxième colonne les observations. Les constructions et observations ne sont plus en lignes mais en colonnes pour reprendre le sens de la lecture.

Dans un premier temps, les échanges sur les constructions - déplacements, et les questions comme « Pourquoi on a arrêté de déplacer ? » « En quoi la consigne est-elle respectée ? » mettent en valeur les contraintes de la propriété. L'enseignant commence par orienter les élèves sur les éléments de construction et de déplacements exprimés dans la première colonne du tableau : « si on construit ... ». Les contraintes sont aussi présentes à côté du quadrilatère exprimées à l'aide des symboles mathématiques comme «  $+(AB) // (CD) (BC) // (AD)$  ». Cette utilisation de l'opérateur additionnel permet de supprimer le dynamisme et l'ordre des actions. Ainsi les contraintes deviennent symétriques, et elles sont détachées de l'environnement dans lequel elles ont été introduites : l'environnement Cabri. Enfin, cette formulation des contraintes permet de supprimer l'actant et les actions.

Les contraintes sont ainsi exprimées dans un registre symbolique (sauf pour exprimer que deux points sont confondus) et dans un registre discursif. La présence de ces deux registres pour exprimer les mêmes données permet l'explicitation de la traduction entre les deux registres mais surtout une articulation entre l'environnement graphique dynamique de Cabri et l'environnement statique du papier-crayon. Le registre graphique-symbolique se rapproche du registre graphique dynamique par le dessin du quadrilatère et l'utilisation des symboles mathématiques. Le signe « + » permet d'introduire l'ajout d'une contrainte supplémentaire au quadrilatère. L'utilisation des symboles mathématiques implique une collecte d'informations non pas sur le dessin, mais sur la figure construite à partir du dessin et des symboles mathématiques. Lorsque les élèves ont construit puis manipulé le quadrilatère, les sommets étaient nommés. Pour cela nous nommons le quadrilatère par ses sommets. Le registre discursif est introduit par la deuxième formulation des contraintes. Cette deuxième formulation reste proche du registre graphique au sens où elle s'appuie sur le dessin, en effet, le quadrilatère est nommé par ses sommets. Cette double formulation permet d'articuler le registre graphique-dynamique et le registre discursif.

Les observations correspondent à la conclusion, là encore, les élèves échangent sur ce qu'ils ont observé, éventuellement lorsque cela est possible, ils peuvent essayer de comprendre pourquoi cette observation et pas une autre. L'enseignant peut aussi relancer les débats par exemple par 'Que se passe-t-il lorsque seulement deux côtés opposés sont parallèles?'. Les résultats de ce deuxième échange sont exprimés dans la deuxième colonne du tableau « alors on observe ... ». Comme nous nous situons à la fin de la manipulation, les contraintes liées au déplacement sont effectivement réalisées, elles apparaissent, codées sur le dessin.

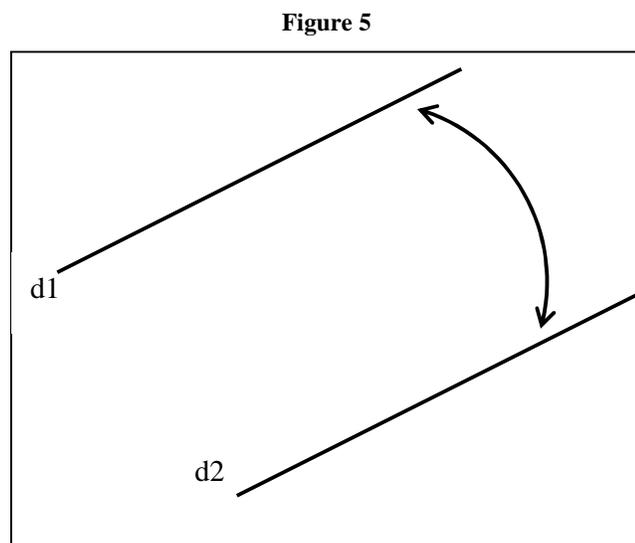
La formulation utilisée dans le tableau est nominative. Ce tableau du cours doit relier l'activité Cabri et l'énoncé de la propriété, il doit relier deux environnements, c'est pour cela que plusieurs registres apparaissent voire sont mêlés.

L'expression experte des propriétés utilise les mots *si* et *alors*. Pour que les élèves associent du sens à ces deux mots, nous les plaçons dans le tableau pour introduire les éléments construits (*si*) et les éléments observés (*alors*). Les éléments du tableau ne sont pas imposés par l'enseignant mais discutés avec les élèves. Cette discussion est importante si l'on veut que se mette en place un processus de médiation sémiotique pour la notion de propriété géométrique. Dans un premier temps les signes nouveaux sont introduits dans le tableau puis dans l'énoncé de la propriété. Ainsi nous attendons une utilisation de ces signes par les élèves au cours de la discussion.

Une fois que les manipulations avec le logiciel sont retranscrites dans le tableau, les formulations personnelles des élèves sont utilisées comme point de départ pour la discussion sur l'énoncé discursif de la propriété. Les éléments structurant l'énoncé sont préinscrits sur la feuille des élèves (écriture noires). La discussion revient à traduire les informations exprimées dans un registre graphique (du tableau) à une expression des énoncés dans le registre discursif. Les éléments manquants des énoncés sont discutés collectivement pour être transcrits sur la feuille de cours. L'expression de la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion passe par la mise en valeur des contraintes et des conclusions. Pour cela nous utilisons les deux colonnes du tableau, mais dans l'expression de la propriété, le tableau n'apparaît plus. Les mots *si* et *alors* peuvent être des repères pour identifier les contraintes et les conclusions. Nous complétons cette distinction par l'utilisation de couleurs différentes dans l'expression des contraintes liées au déplacement (en rouge) et l'expression des observations (en vert).

Remarque :

Dans la classe, un codage pour les droites parallèles a été introduit. Deux droites parallèles sont codées par une double flèche qui relie les deux droites, la Figure 5 illustre le codage de (d1) parallèle à (d2). Ainsi, dans la feuille de cours, les élèves peuvent coder toutes les contraintes, même les contraintes de droites parallèles.



#### **D. Réinvestissement**

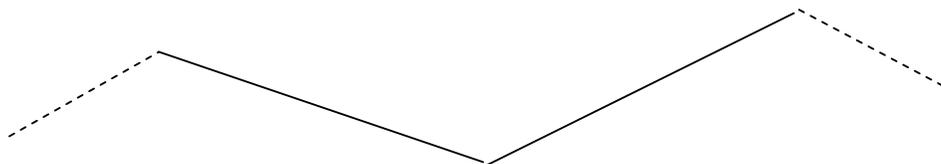
La phase collective d'énonciation des propriétés permet aux élèves de prendre un certain recul par rapport à l'activité Cabri. Les énoncés géométriques ont été discutés avec l'enseignant ce qui a permis aux élèves de construire du sens autour de ces énoncés. Cependant les propriétés ne sont pas encore acquises par les élèves, maintenant qu'ils ont travaillé sur les propriétés, ils vont travailler avec les propriétés.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, les exercices de type Énoncés-tiers peuvent interroger les élèves sur les contraintes ou sur les conclusions. Nous analysons ici un exercice sur les contraintes.

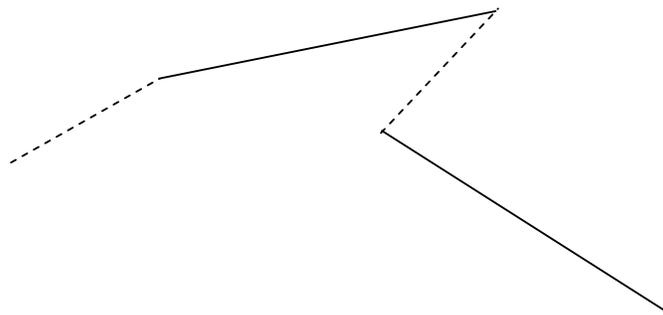
## Fiche élève 3

Essaie de refermer les lignes brisées suivantes, indique celles qui permettent de construire un parallélogramme, explique ton choix. (les traits de même apparence ont des longueurs égales)

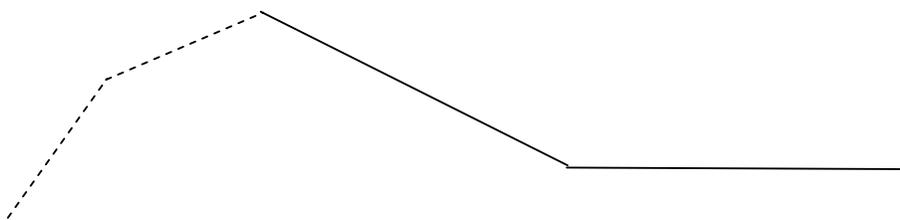
Ligne 1 :



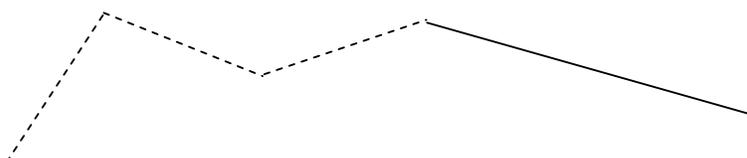
Ligne 2 :



Ligne 3 :



Ligne 4 :



On peut construire un parallélogramme avec la ligne ..... car .....

-----

On peut construire un parallélogramme avec la ligne ..... car .....

-----

Cet exercice est proposé aux élèves dans le cadre d'un exercice maison. Comme les élèves ne peuvent pas utiliser le déplacement de Cabri pour visualiser les transformations des lignes brisées en quadrilatères, le déplacement doit être mobilisé mentalement. Nous escomptions

ainsi contribuer au processus d'intériorisation du déplacement pour réaliser un lien contraintes conclusion :

Énoncé : Essaie de refermer les lignes brisées suivantes, indique celles qui permettent de construire un parallélogramme, explique ton choix. (les traits de même apparence ont des longueurs égales)

Tout comme dans l'exercice de la partie « j'utilise », les élèves doivent anticiper la réponse en utilisant les propriétés et non en s'appuyant sur la perception du parallélogramme. La conclusion est donnée par l'énoncé, un parallélogramme doit être obtenu, les élèves doivent retrouver les lignes brisées qui permettent d'obtenir un parallélogramme. Les seules informations accessibles aux élèves portent sur la longueur des côtés. Ainsi, la propriété qui permet de résoudre cet exercice est : *si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés égaux, alors c'est un parallélogramme*. Pour résoudre l'exercice, les élèves peuvent refermer mentalement les lignes brisées et imaginer quelle forme ils obtiennent, c'est-à-dire visualiser comment sont organisés les côtés égaux : par paire, consécutifs ou opposés ?

La première ligne brisée contient deux paires de segments égaux, mais lorsqu'on la referme, ces paires de segments deviennent des côtés égaux consécutifs et non opposés. Pour la deuxième ligne brisée, les segments égaux sont alternés, lorsque l'on referme la ligne, ils deviennent des côtés opposés égaux. La deuxième ligne brisée permet de construire un parallélogramme. La troisième ligne brisée possède aussi deux paires de segments égaux mais comme pour la première, ces segments sont consécutifs et non alternés. Enfin la dernière ligne brisée ne peut pas produire un parallélogramme car elle ne possède que trois segments de même longueur.

Les réponses des élèves sont discutées en classe avec la manipulation des lignes brisées sur Cabri. Les élèves proposent des réponses qui sont ensuite discutées une fois que la ligne brisée est refermée. Les anticipations des élèves s'appuient sur des manipulations mentales des lignes brisées.

Stratégies possibles :

L'élève peut refermer mentalement la ligne, c'est-à-dire superposer les extrémités. Une fois le polygone formé, l'élève identifie les côtés qui seront opposés ou consécutifs. Pour avoir un parallélogramme il faut que les côtés égaux soient opposés.

L'élève peut aussi conserver la ligne brisée, les segments de la ligne représentent les côtés du quadrilatère, ainsi deux segments consécutifs forment deux côtés consécutifs. L'élève peut alors identifier si les côtés égaux sont consécutifs ou non.

Pour la ligne 4 il suffit de compter les segments de même longueur, comme 3 segments sont égaux, le quadrilatère construit ne peut être un parallélogramme.

Les justifications que nous attendons des élèves portent sur le nombre ou la position des côtés de même longueur. Comme aucun point n'est nommé, les élèves doivent utiliser des formulations générales dans leurs justifications.

Cet exercice met en échec une résolution uniquement perceptive car les parallélogrammes ne sont pas présents. Cela incite les élèves à une appréhension opératoire du dessin pour la déformation de la ligne brisée. Par la suite les élèves appréhendent discursivement (par l'utilisation du codage) les représentations mentales qu'ils obtiennent. Enfin, dans la justification de leur réponse, les élèves ne peuvent utiliser qu'une formulation générale car aucun point n'est nommé. De plus nous considérons que les élèves ne vont pas ajouter d'informations supplémentaires sur le dessin par contrat. En effet, le dessin est considéré comme un élément de la consigne qui ne peut être modifié. Ainsi les élèves sont amenés progressivement à entrer dans le contrat du collègue.

## V. Parallélogrammes particuliers

Les élèves connaissant et reconnaissant parfaitement perceptivement les rectangles, losanges nous n'avons pas introduits ces figures. Les définitions des élèves, acquises en primaire suffisent pour la séance Cabri :

Un rectangle est un quadrilatère qui a trois angles droits

Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés égaux.

Les propriétés que nous visons considèrent un parallélogramme comme objet géométrique initial, les contraintes portent sur les côtés et les diagonales :

*P7 : Si un parallélogramme a ses côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle.*

*P°8 : Si un parallélogramme a ses côtés consécutifs égaux alors c'est un losange.*

*P9 : Si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur alors c'est un rectangle.*

*P10 : Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.*

### A. Séance Cabri

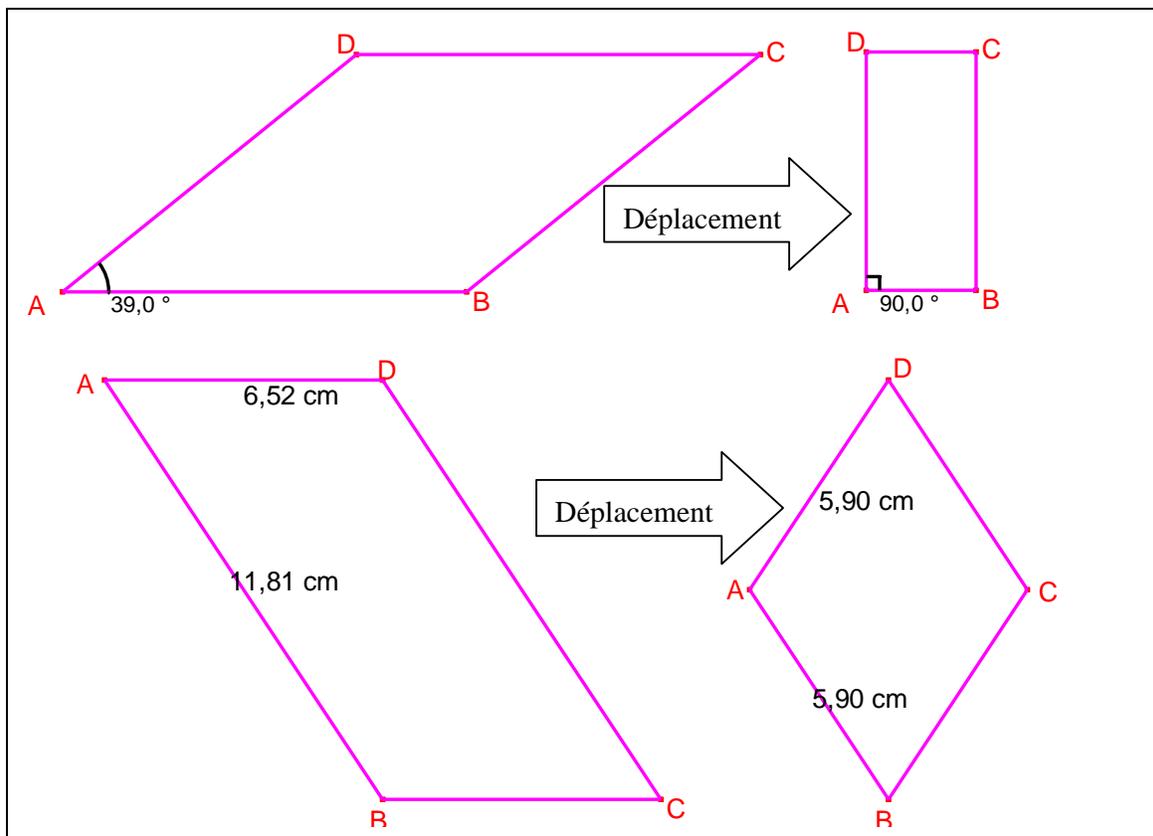
#### 1 Organisation

Cette séance a pour but la construction des propriétés des parallélogrammes particuliers (losange et rectangle). Les parallélogrammes sont préconstruits, en effet, ce qui est visé n'est pas la construction de parallélogrammes mais l'obtention de losange ou rectangle par l'application de contraintes sur les parallélogrammes.

#### 2 Je découvre

Dans cette activité Cabri, les élèves n'ont pas à construire le parallélogramme. Nous avons fait ce choix pour éviter les problèmes instrumentaux que les élèves pourraient rencontrer. Plusieurs constructions du parallélogramme sont possibles, cependant elles ne permettent pas les mêmes déplacements et rétroactions pour la suite. De plus, en construisant nous même le parallélogramme nous avons pu contrôler certains de ses paramètres. Par exemple l'orientation du parallélogramme est choisie afin de faciliter ou non la reconnaissance du rectangle ou losange. Le Tableau 5 présente la figure finale obtenue après la réalisation du déplacement pour les deux premières manipulations. Le rectangle et le losange apparaissent dans leur position prototypique, ce qui assure leur reconnaissance par les élèves.

Tableau 5



Dans les deux dernières manipulations, les élèves obtiennent un rectangle sur un sommet et un losange sur un côté. Nous avons choisi de nous écarter des positions prototypiques afin que les élèves évoluent dans la perception des unités figurales supérieures.

Cette première partie donne accès aux quatre propriétés :

- Déplacement pour obtenir des côtés perpendiculaires (rectangle)
- Déplacement pour obtenir des côtés égaux (losange)
- Déplacement pour obtenir des diagonales perpendiculaires (losange)
- Déplacement pour obtenir des diagonales de même longueur. (rectangle)

## Fiche élève 4

Ouvre le fichier *pp-exercice1.fig*

Constructions	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>On a construit un parallélogramme ABCD.</b></li> </ul>
Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Déplace le point A pour que <math>\widehat{DAB}</math> soit un angle droit.</b></li> </ul>
Observations	Qu' observes-tu ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

Ouvre le fichier *pp-exercice2.fig*.

Constructions	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>On a construit ABCD un parallélogramme.</b></li> </ul>
Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Déplace le point A pour que <math>AB = AD</math></b></li> </ul>
Observations	Qu' observes-tu ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

Ouvre le fichier *pp-exercice3.fig*.

Constructions	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>On a construit ABCD un parallélogramme de centre I.</b></li> </ul>
Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Déplace A pour que <math>AC = BD</math></b></li> </ul>
Observations	Qu' observes-tu ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

Ouvre le fichier *pp-exercice4.fig*.

Constructions	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>On a construit ABCD un parallélogramme de centre I.</b></li> </ul>
Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Déplace A pour que <math>\widehat{AID}</math> soit un angle droit.</b></li> </ul>
Observations	Qu' observes-tu ? -----

Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :

-----

### Construction des parallélogrammes

Pour chaque parallélogramme, les points A et B sont construits sur une droite. Le point B est punaisé, ainsi, seul le point A peut être déplacé. Tous les parallélogrammes sont construits à l'aide de la symétrie centrale. Nous avons choisi de cacher le centre de symétrie pour les deux premiers parallélogrammes pour ne pas surcharger la figure. De plus nous ne souhaitons pas que les élèves utilisent le centre de symétrie dans les deux premières manipulations, et que leurs observations concernent le centre ou les diagonales. Comme nous l'avons précisé précédemment, seul le point A est attrapable. Ainsi, les déplacements aboutissent à la même configuration pour tous les élèves, pour les deux premières manipulations, obtention du rectangle et losange dans leur position prototypique, pour les deux dernières, le rectangle et le losange ont des positions plus quelconques. L'élève est amené à analyser plus finement l'objet obtenu après déplacement.

### Stratégies de déplacement possibles

Pour la première manipulation, « côtés perpendiculaires » un des côtés du parallélogramme étant horizontal, les élèves peuvent se contenter de la perception pour contrôler le déplacement. On peut aussi supposer que certains élèves utilisent un outil Cabri, comme construire la perpendiculaire à [AB] passant par A ou B, ainsi le contrôle devient instrumenté.

Pour la deuxième manipulation, « côtés égaux » l'égalité des côtés est plus difficile à contrôler uniquement avec la perception. On peut supposer que les élèves vont utiliser la mesure des côtés, ils peuvent aussi utiliser le cercle. Ainsi, le déplacement est stoppé lorsque les deux côtés sont égaux.

Pour les deux dernières manipulations, « diagonales égales » et « diagonales perpendiculaires » les élèves doivent déplacer le sommet A pour imposer une contrainte sur les diagonales. Tout comme pour le déplacement précédent, une stratégie avec un contrôle uniquement perceptif nous semble difficile à mettre en œuvre. En effet, les diagonales ne sont pas tracées, de plus une égalité de longueur entre deux segments sécants est difficilement identifiable sans outils, tout comme un angle droit entre deux segments obliques. Dans un premier temps, les élèves peuvent construire les diagonales, dans le but de visualiser les unités figurales inférieures concernées par le déplacement. Les outils de Cabri « Distance ou longueur » et « Mesure d'angle » ne nécessitent pas le tracé des segments, car ils utilisent des points. Ainsi, lorsqu'un élève construit les diagonales, on peut supposer que la déconstruction de la forme est utilisée. Le Tableau 6 illustre le déplacement mis en œuvre qui concerne la longueur de deux diagonales. Un élève qui utilise l'outil sans construire les diagonales considère une distance entre deux points. Le Tableau 7 illustre ce déplacement où les diagonales ne sont pas construites. Dans le cas où les diagonales ne sont pas construites, nous considérons que la décomposition des formes n'est pas utilisée chez l'élève. En effet, ce n'est pas l'objet géométrique « diagonale » qui est pris en compte, mais l'objet numérique « distance entre deux points ».

Tableau 6

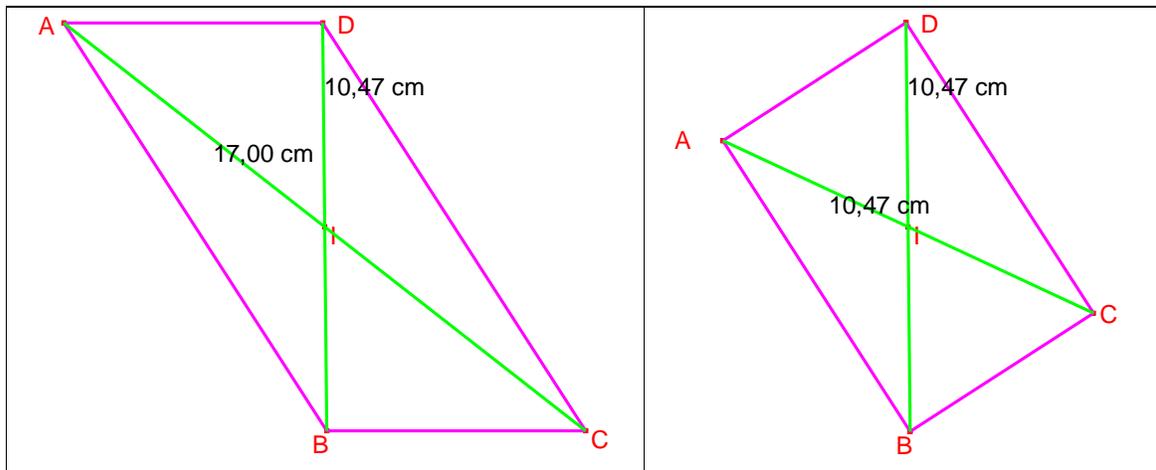
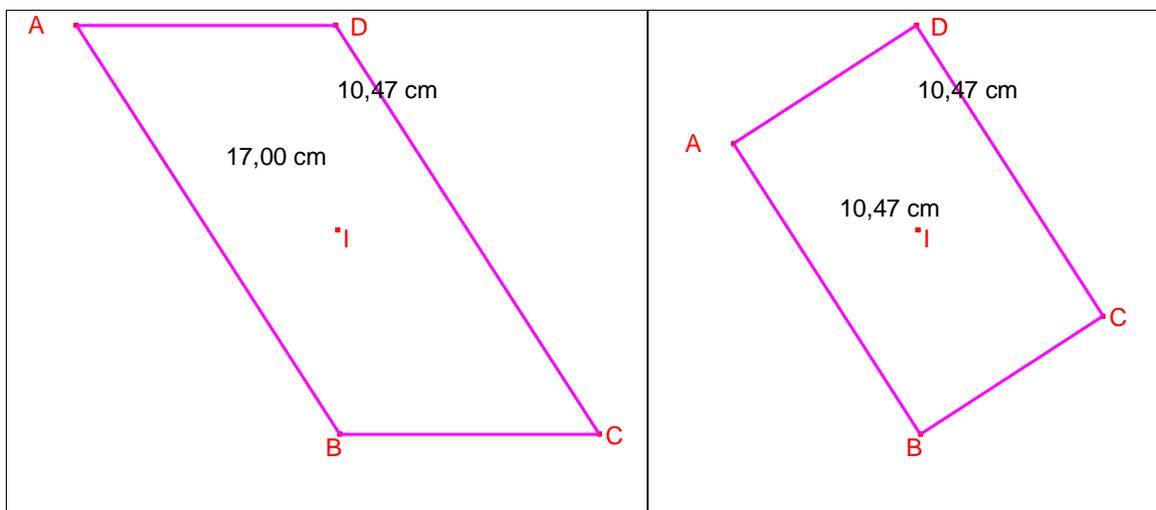


Tableau 7



Pendant les élèves peuvent aussi utiliser les outils *cercle* pour la troisième manipulation et *perpendiculaire* pour la dernière manipulation dans le contrôle du déplacement.

Observations possibles

Contrairement aux activités Cabri précédentes, l'objet de l'observation n'est pas cité dans la question : « Qu'observes-tu ? ». Dans cette dernière activité Cabri, les élèves n'ont pas à construire le parallélogramme. Nous avons fait ce choix pour éviter les problèmes instrumentaux que les élèves pourraient rencontrer. Plusieurs constructions du parallélogramme sont possibles, cependant elles ne permettent pas les mêmes déplacements et rétroactions pour la suite. De plus, en construisant nous même le parallélogramme nous avons pu contrôler certains de ses paramètres. Par exemple l'orientation du parallélogramme est choisie afin de faciliter ou non la reconnaissance du rectangle ou losange. Le Tableau 5 présente la figure finale obtenue après la réalisation du déplacement pour les deux premières manipulations. Le rectangle et le losange apparaissent dans leur position prototypique, ce qui assure leur reconnaissance par les élèves. Nous avons choisi de rendre très accessible la

reconnaissance de ces deux figures car cette activité Cabri n'est pas précédée d'introduction, ainsi les élèves ne sont pas préparés aux objets qu'ils vont étudier. Pour les deux premières manipulations, la perception naturelle nous semble suffisante pour identifier le rectangle et le losange.

Pour les deux dernières manipulations, les quadrilatères à identifier ne sont plus dans une position caractéristique, les élèves sont amenés à analyser davantage l'objet final pour identifier sa nature, c'est-à-dire de passer d'une appréhension perceptive à une appréhension opératoire. Cette activité Cabri intervient à la fin de l'année scolaire, les élèves ayant été confrontés à ce type de problème dans plusieurs autres activités Cabri, nous comptons sur le réinvestissement des observations des deux premières manipulations pour les deux dernières manipulations. Ainsi dans la manipulation « diagonales égales » les élèves peuvent s'appuyer sur la mesure des angles et rapprocher ce résultat de la manipulation « côtés perpendiculaires ». De même pour l'observation de la manipulation « diagonales perpendiculaires » où les élèves peuvent réinvestir la manipulation « côtés égaux » pour identifier le losange.

#### Formulations possibles

L'articulation entre les activités Cabri et les énoncés géométriques des propriétés a été travaillée lors de quatre séances précédentes. Cette dernière activité renseigne sur l'appropriation de l'instrument *Déplacement*, c'est-à-dire sur l'identification des contraintes aux constructions et déplacements et l'identification de la conclusion à l'observation. Cette dernière séance indique aussi le niveau d'appropriation des signes comme *si* et *alors* par les élèves. La formulation des élèves nous renseigne aussi sur la prise en compte du contrat du collègue, plus l'élève utilise une formulation générale, plus il est dans le contrat du collègue. Les différentes formulations sont réunies dans le Tableau 8. Il est possible que les élèves fassent abstraction des contraintes liées à la construction car les parallélogrammes sont préconstruits.

Tableau 8

Construction	Nominative	On nous a donné le parallélogramme ABCD
	Générale	A partir d'un parallélogramme
Déplacement	Nominatif	On a déplacé le point A
	Général	On a déplacé un sommet
Déplacement orienté	Nominatif	On a déplacé le point a pour que $\widehat{DAB}$ soit un angle droit
	Général	On a déplacé un sommet pour réaliser un angle droit dans le parallélogramme
Observation	Nominative	ABCD est devenu un rectangle
	Générale	Le parallélogramme est devenu un rectangle

Le résumé devient une composition de ces formulations des étapes.

### 3 J'utilise

Dans cet exercice<sup>10</sup> de réinvestissement, les élèves travaillent sur les conditions suffisantes pour obtenir un rectangle ou un losange à partir d'un parallélogramme. Ainsi le travail porte sur les hypothèses et non pas sur la conclusion.

Le fait de travailler sur Cabri permet une activité de recherche et l'apparition des contraintes sur les triangles par le déplacement.

---

<sup>10</sup> Exercice inspiré de l'exercice 46 p224 Dimathème 5° (2001)

**Fiche élève 5**

Ouvre le fichier pp-exercice.fig

On a construit un triangle MON.

Le point P est le symétrique de M par rapport à O, le point Q est le symétrique de N par rapport à O.

On a tracé ensuite le quadrilatère MNPQ.

Pourquoi MNPQ est-il un parallélogramme ?

.....

David dit qu'il peut obtenir un losange, comment peut-il y arriver en modifiant le triangle MNQ ?

.....

Comment peut-il y arriver en modifiant le triangle MON ?

.....

Leïla dit qu'elle peut obtenir un rectangle comment peut-elle y arriver en modifiant le triangle MNQ ?

.....

Comment peut-elle y arriver en modifiant le triangle MON ?

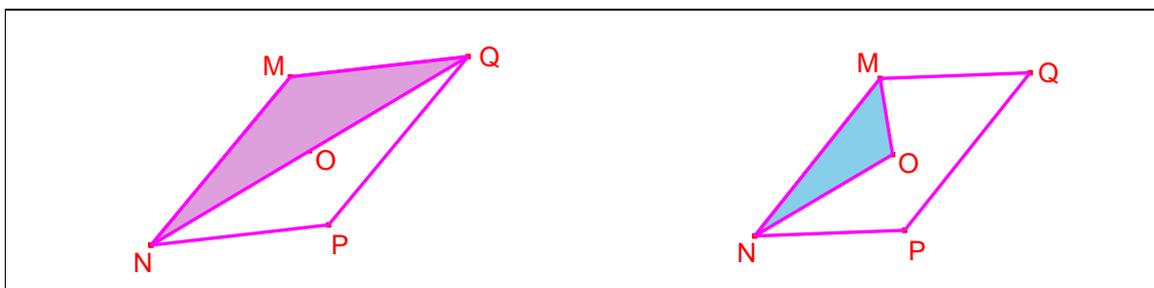
.....

La Figure 6 présente les constructions proposées aux élèves. Les deux triangles à étudier sont mis en valeur par un remplissage bleu et rose.

Dans un premier temps, nous demandons aux élèves de justifier pourquoi le quadrilatère est un parallélogramme. Ainsi, les élèves sont amenés à produire et formuler une démonstration reposant sur un raisonnement déductif. Ce type d'exercice a été proposé aux élèves dans les séances précédentes. Les réponses des élèves nous renseignent sur l'appropriation des propriétés de la symétrie centrale concernant la conservation des longueurs.

Une fois que l'information « MNPQ est un parallélogramme » a été établie par les élèves, le travail de réflexion à mettre en œuvre porte sur des contraintes à ajouter sur les triangles bleu et rose. Les parallélogrammes MNPQ ont été construits à partir du programme de construction donné dans l'énoncé du problème.

**Figure 6**



L'environnement, étant dynamique nous comptons sur une exploration de la figure proposée par le déplacement des points M, N et O. La formulation de notre question indique que les triangles doivent être modifiés, ce qui peut guider la réflexion de l'élève. Nous ne demandons pas la formulation d'un raisonnement déductif, simplement une identification de contraintes suffisantes pour l'obtention d'un parallélogramme particulier. En effet, les propriétés n'ont pas été validées par la classe. Les quatre propriétés sont exploitées dans cet exercice, la réflexion sur le triangle bleu considère les contraintes sur les diagonales et le triangle rose une réflexion sur les côtés.

#### Stratégies possibles

Une première stratégie consiste à déplacer un sommet afin d'obtenir la conclusion demandée (un rectangle ou un losange). Une fois la conclusion réalisée, l'élève peut identifier quelles contraintes sont apparues sur les triangles.

Ce déplacement peut être perceptif, l'élève déplace les points afin d'obtenir un losange dans sa position prototypique. Un tel déplacement reste très approximatif, ainsi, les contraintes à identifier seront-elles aussi approximatives. La liaison avec la manipulation de la partie « j'utilise » nous semble ardue.

La réalisation de la conclusion peut aussi utiliser les instruments de mesure de Cabri, avec la mesure des côtés ou la mesure de l'angle formé par les diagonales. Certains élèves peuvent utiliser la définition qu'ils connaissent du losange : « un quadrilatère qui a ces quatre côtés

égaux est un losange. ». L'utilisation d'un instrument dans la réalisation de la conclusion nous indique que l'élève a mobilisé une définition ou une propriété. Ainsi une fois que le losange est réalisé, l'élève peut identifier quelles nouvelles contraintes sont apparues sur le triangle bleu ou rose. Comme le déplacement est plus fiable que le déplacement présenté dans la stratégie précédente, l'identification des contraintes va être, elle aussi, plus précise. L'identification des nouvelles contraintes peut utiliser la perception ou un instrument. Ainsi, il peut observer que le triangle rose est devenu isocèle en M et que le triangle bleu est devenu rectangle en O.

Enfin, les élèves peuvent associer les manipulations précédentes avec le problème posé et identifier quelle contrainte doit être imposée aux triangles pour obtenir le losange ou le rectangle. Dans cette dernière stratégie, le déplacement est utilisé pour réaliser les contraintes, l'observation éventuellement pour valider que le parallélogramme est bien un losange ou un rectangle.

Le Tableau 9 présente les trois stratégies pouvant être mise en œuvre pour la résolution de cet exercice.

**Tableau 9**

De la conclusion vers les contraintes	
Stratégie perceptive	Réalisation de la conclusion perceptivement
	Identification approximative des contraintes
Stratégie instrumentée	Réalisation de la conclusion utilisant un instrument
	Identification des contraintes avec ou sans instrument
Des contraintes vers la conclusion	
Stratégie instrumentée	Réalisation des contraintes avec un instrument
	Validation par l'observation de la conclusion

#### 4 Synthèse activité Cabri

La première partie de l'activité met en œuvre des exercices de type Illustration. En construisant nous même les parallélogrammes initiaux, nous contrôlons les observations des élèves, dans un premier temps évidentes, puis plus problématiques. La construction ou non des diagonales nous renseigne sur la capacité des élèves à considérer les sous unités figurales du parallélogramme.

Dans la deuxième partie, l'exercice est de type Enoncé-tiers, mais nous n'attendons pas la formulation d'un raisonnement de démonstration simplement une identification des

contraintes suffisantes pour la réalisation d'un losange ou d'un rectangle à partir d'un parallélogramme.

Cette activité a pour but l'introduction des propriétés d'obtention d'un rectangle et d'un losange, le processus d'instrumentation devrait permettre une première appropriation ou au moins une première sensibilisation des élèves à ces propriétés. Les réponses des élèves nous renseignent sur l'appropriation de la géométrie du collègue.

### **B. Phase collective**

Au cours de la mise en commun les élèves sont amenés à verbaliser les différentes manipulations effectuées lors de l'activité Cabri. Ces échanges sur les manipulations, observations et résumés doivent permettre de compléter la trame de cours. (Cours 2). La trame de ce dernier cours ne suit plus fidèlement la fiche Cabri. Comme nous l'avons déjà souligné précédemment, les élèves ont travaillé sur quatre liaisons « manipulation Cabri » « énoncés de propriétés » en utilisant des tableaux. Cette dernière liaison n'utilise pas de tableau, et le codage de représentation du déplacement n'est plus apparent. Nous considérons que les tableaux précédents ont participé à l'intériorisation du déplacement, c'est pour cela qu'il n'apparaît plus explicitement dans la trame du cours. Il est simplement évoqué oralement à travers les échanges entre élèves et enseignant.

Dans un premier temps l'enseignant peut revenir sur les propriétés du parallélogramme, égalités de côtés opposés et angles opposés, elles seront utiles pour la suite de la phase collective en particulier pour la validation des propriétés.

Lors de la mise en commun des manipulations effectuées avec le logiciel, l'enseignant peut orienter la discussion sur les objets concernés par le déplacement. Par exemple pour la première manipulation : « Déplace le point A pour que  $\widehat{DAB}$  soit un angle droit ». Cette discussion sur les contraintes permet de verbaliser les déplacements opérés sur deux côtés (perpendicularité ou égalité) et les observations de la transformation de l'unité figurale supérieure. L'enseignant peut relancer les discussions avec « Combien d'angles droits avez-vous ajouté ? » « Combien d'angles droits avez-vous obtenu ? ». Dans les exercices d'illustration des propriétés du parallélogramme, il y avait plusieurs contraintes, par exemple pour l'égalité ou le parallélisme des côtés opposés. Ici, seul un angle droit suffit pour obtenir un rectangle, et il ne suffit que de deux côtés consécutifs égaux pour obtenir un losange. Comme l'objet initial est un parallélogramme, les contraintes supplémentaires à imposer deviennent minimales, elles s'opposent aux connaissances initiales des élèves : trois angles droits pour un rectangle et quatre côtés égaux pour un losange. Ces discussions autour des manipulations Cabri aboutissent sur les éléments manquants de la trame du cours.

Dans cette nouvelle trame de cours, les énoncés des propriétés sont intégrés aux représentations graphiques. Dans les trames précédentes, la liaison entre le registre graphique-dynamique et le registre discursif passe par le registre discursivo-graphique. Ici, cette étape

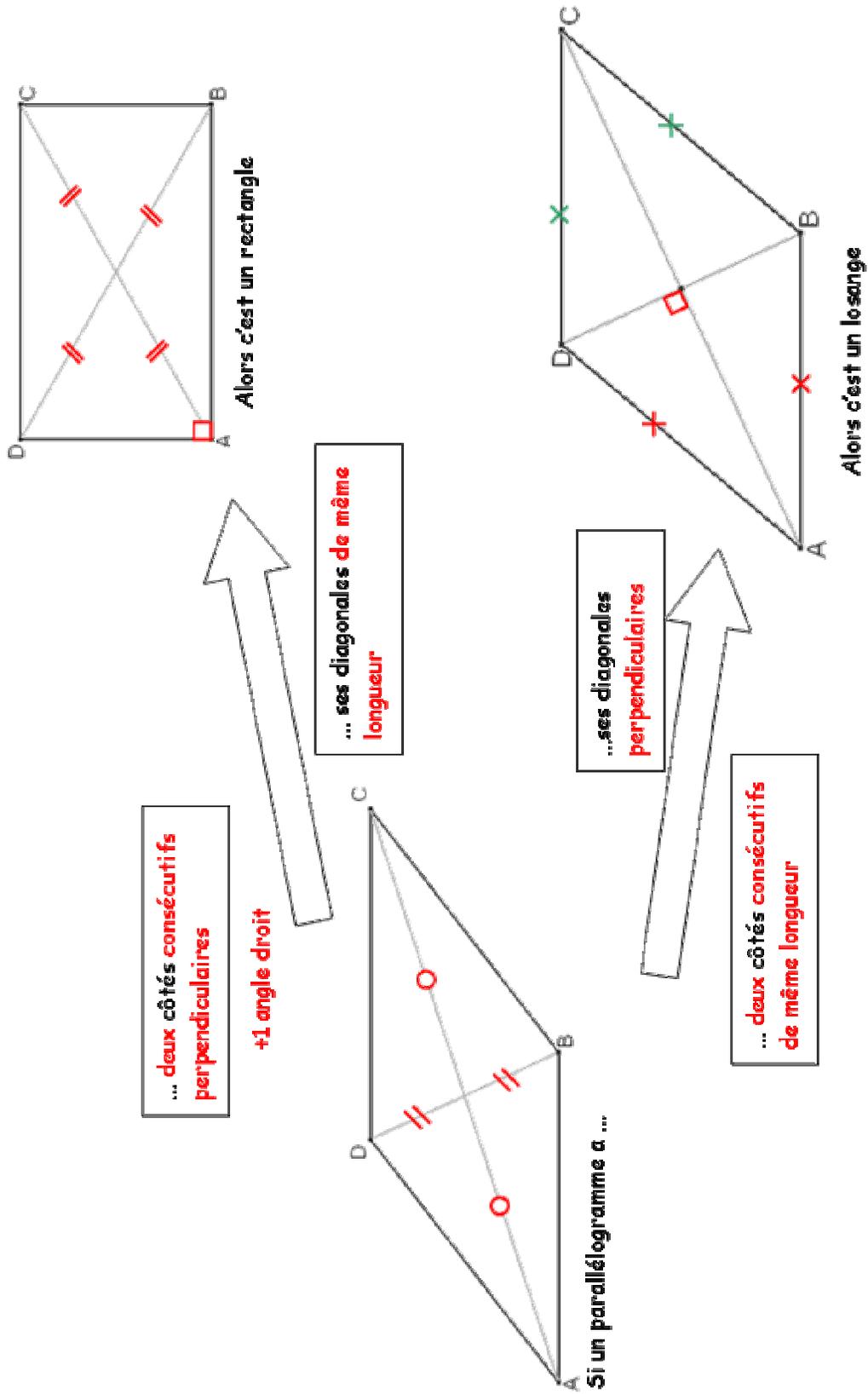
intermédiaire articulant l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon est supprimée. Les propriétés sont exprimées dans le registre discursivo-graphique. La référence aux constructions et observations n'est plus explicite, elle n'accompagne plus les termes *si on construit* et *alors on observe*. La représentation graphique du rectangle (du losange) contient l'ensemble des éléments (contraintes et conclusion) de chaque propriété. Le codage en rouge indique les contraintes (sur les diagonales ou sur les côtés) le codage en vert identifie les observations. L'expression du dynamisme par l'ajout des contraintes par l'utilisation de l'opérateur «+ » n'est plus utilisée.

Ces changements dans l'expression des propriétés s'expliquent par l'évolution des connaissances des élèves. Nous considérons qu'ils maîtrisent davantage les deux registres de représentation de l'environnement papier-crayon, c'est pour cela que nous le faisons évoluer.

Les quatre propriétés peuvent être validées à l'aide des propriétés directes du parallélogramme. Ainsi, les propriétés directes du parallélogramme sont réinvesties dans des exercices de type Validation pour les propriétés ciblées.

Matériellement l'enseignant opère comme pour le cours précédents. La trame du cours est projetée à l'aide d'un rétroprojecteur, l'enseignant la remplit avec les élèves.

Cours 2



### **C. Réinvestissement**

L'exercice de réinvestissement proposé dans cette séance est l'exercice de la deuxième partie de l'activité Cabri :

« A partir d'un triangle, on a construit un parallélogramme, quelles contraintes ajouter au triangle pour que le parallélogramme soit un rectangle, un losange. ».

En changeant les outils de résolution de cet exercice (environnement graphique-dynamique à un environnement graphique) nous influons sur les stratégies de résolution. De plus revenir sur cet exercice dans un environnement statique oblige les élèves à exprimer le dynamisme de leurs actions. Cet exercice de verbalisation intervient comme un outil de médiation sémiotique pour l'intériorisation des outils technique de Cabri.

Dans un environnement statique, la construction perceptive du rectangle à partir d'un triangle (du losange) est plus difficile, l'identification des contraintes précède la construction de la conclusion. Ainsi, l'exploration de recherche accessible avec Cabri devient plus difficile. Une appréhension opérationnelle voire discursive de la figure devient un outil intéressant. Elle permet d'identifier quelles sont les contraintes existantes sur le parallélogramme : égalité des côtés opposés, des angles opposés, les diagonales se coupent en leur milieu. Muni des quatre propriétés discutées lors de la phase collective, il s'agit d'identifier qu'elle est la contrainte manquante pour obtenir un rectangle ou un losange. On peut supposer que les élèves vont s'appuyer sur la représentation graphique du parallélogramme et celle du rectangle pour identifier quelle est la contrainte à réaliser.

Une réflexion déductive, s'appuyant sur un registre graphique et une appréhension discursive de la figure est la stratégie que nous attendons. L'utilisation du registre discursif seul ne nous semble pas accessible pour les élèves.

## **VI. Evaluation de l'appropriation du lien contraintes-conclusion par les élèves individuellement et en entretien**

Nous cherchons à identifier les aspects du lien contraintes-conclusion présents chez les élèves à l'issue du processus d'enseignement au début du mois de juin. L'utilisation des propriétés comme énoncé-tiers dans des raisonnements de démonstration demande que les élèves connaissent, éventuellement comprennent, les propriétés mais aussi que les élèves aient acquis le fonctionnement du raisonnement déductif. Les séquences d'enseignement que nous avons mises en place n'ont pas intégré l'enseignement du raisonnement déductif. Il nous semble alors qu'utiliser des exercices où les propriétés seraient utilisées comme énoncé-tiers constitueraient un biais pour les analyses. Si les élèves parvenaient à résoudre les problèmes, nous pourrions conclure qu'ils se sont appropriés les propriétés et le raisonnement déductif. Cependant si les élèves ne parviennent pas à formuler les raisonnements déductifs, les difficultés peuvent provenir des propriétés ou du raisonnement déductif. Notre objectif étant d'identifier dans quelle mesure le lien de subordination qui articule les contraintes à la

conclusion est acquis par les élèves, nous avons conçu trois exercices dans lesquels les élèves explicitent ce lien mais ne l'utilisent pas dans un raisonnement déductif.

### **A. Variables des problèmes**

Afin de pouvoir identifier dans quelle mesure les élèves explicitent les contraintes, les conclusions et les articulent, nous avons conçu des exercices différents, chacun ayant leur spécificité. Cependant nous conservons un minimum de variables fixées dans les trois exercices.

Un de nos objectifs était que les élèves parviennent à s'approprier les propriétés géométriques. L'environnement Cabri nous a servi pour l'introduction du lien contraintes-conclusion. Cependant à long terme, les élèves travaillent et s'expriment essentiellement dans l'environnement papier-crayon. Pour cela l'environnement Cabri n'est pas utilisé dans ce test.

Deux grands registres sont associés à l'environnement papier-crayon, le registre graphique et le registre discursif. Au collège le registre principal, autosuffisant, est le registre discursif, c'est pour cela que tous les énoncés sont formulés dans le registre discursif.

Enfin, notre objectif est une explicitation des contraintes et de la conclusion, pour cela les trois exercices s'appuient sur des énoncés qui ont obtenu le statut de propriété dans la classe.

Nous avons utilisé un registre discursif pour la formulation de la consigne, cependant nous ajoutons le registre discursivo-graphique pour la formulation de la réponse (l'exercice 3). Cela nous permet d'identifier comment les élèves ont été sensibilisé à l'articulation entre les registres.

Afin d'identifier si les élèves parviennent à exprimer mais aussi à comprendre les propriétés, nous demandons aux élèves de formuler des propriétés (exercice 1&2) mais nous leur proposons aussi des propriétés qu'ils doivent expliciter dans le registre discursivo-graphique (exercice 3). Le Tableau 10 reprend ces différents choix.

Tableau 10

	La propriété est la réponse du problème :	La propriété est l'énoncé du problème :
Registre de sortie : Discursivo-graphique	Proche du cours	Exercice 3
Registre de sortie : Discursif	Exercice 1 et 2	Pas de sens

Les exercices qui ont pour but l'explicitation d'une propriété dans un registre discursivo-graphique sans donner la propriété nous semble trop proche du cours pour présenter un intérêt.

La prise en compte des unités figurales inférieures est centrale dans la pratique de la géométrie en particulier pour l'articulation entre les registres mais aussi pour l'explicitation et la reconnaissance des contraintes ou conclusion dans un énoncé. Ainsi les exercices utilisent des combinaisons différentes entre les unités figurales inférieures et les unités figurales supérieures. Dans les activités Cabri que nous avons analysé, les unités figurales inférieures étaient associées aux contraintes, cependant les élèves ont aussi travaillé sur des activités avec des unités figurales inférieures associées à la conclusion.

- Le premier exercice demande l'explicitation d'une propriété dans le registre discursif, les objets à considérer dans la formulation de la propriété sont des segments, des unités figurales supérieures. Ces segments qui sont les objets de la contrainte, sont aussi des objets de la conclusion.
- Le deuxième exercice demande d'explicitier une propriété dans le registre discursif, l'objet des contraintes, un parallélogramme, est différents des objets de la conclusion, des angles. La contrainte s'appuie sur une unité figurale supérieure « parallélogramme » et l'observation sur une unité figurale inférieure, « égalité d'angles opposés »
- Le dernier exercice demande d'explicitier une propriété dans le registre discursivo-graphique. L'unité figurale supérieure est conçue de sous unités figurales avec des angles et d'unités figurales inférieures avec des droites. Ainsi, la contrainte porte sur l'unité figurale supérieure et ses sous unités, la conclusion porte sur des droites c'est-à-dire des unités figurales inférieures.

Ces choix sont regroupés dans le Tableau 11.

Les consignes sont toutes exprimées dans le registre discursif, cependant nous utilisons des formulations différentes pour exprimer les contraintes et les conclusions d'un exercice à un autre.

- L'exercice 1, reprend la formulation d'une manipulation Cabri réalisée par les élèves
- Dans l'exercice 2, nous utilisons un acteur qui nous permet d'associer un contexte à l'exercice, et nous conservons la structure construction-observation.
- Le dernier exercice utilise l'énoncé discursif théorique (avec « si » et « alors » sans référence au temps et à l'action) du cours d'une propriété.

Nous pourrions ainsi analyser la reconnaissance des contraintes et conclusion à partir de signes associés ou non à l'action. De plus, à l'aide de ces contextes différents nous pourrions identifier quels sont ceux qui contribuent le plus à une reconnaissance des contraintes et de la conclusion.

Une dernière variable distingue nos exercices : la consigne. La consigne du premier exercice est très explicite sur les attentes de l'enseignant puisqu'elle demande une propriété. La consigne du deuxième exercice demande une explication à partir d'une situation perceptive. Enfin la dernière consigne demande d'explicitier une propriété dans un registre discursivo-graphique.

Ces différents choix sont rassemblés dans le tableau suivant :

**Tableau 11**

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3
Objet géométrique associé aux contraintes identique à celui des conclusions	Segment / Segment	Parallélogramme / Angles	Droites, Angles/Droites
Place des unités figurales	UFS/UFS	UFS/UFI	UFS/UFI
Formulation des contraintes et conclusion	Construit/Observe	Construit/Remarque	Si/alors
Le contexte de l'exercice	Construction Observation	Construction remarque avec un acteur	Pas de contexte
Consigne	Donner une propriété	Expliquer	Représentation discursivo- graphique

Nous reprendrons ce tableau qui reprend les différents choix de ce test à l'issu des analyses.

### **B. Les attentes**

Ce test devrait pouvoir répondre aux questions : Comment les élèves explicitent-ils les contraintes et la conclusion, puis comment les articulent-ils ?

Nous avons identifié deux classes de formulation pour l'explicitation des contraintes et de la conclusion :

- les formulations nominatives avec un acteur :
  - on a construit un quadrilatère ABCD,
  - on a déplacé le sommet A pour que les milieux M et N soient confondus,
  - on a observé un parallélogramme.
- les formulations générales sans acteur.
  - Lorsque les milieux des diagonales sont confondus
  - Le quadrilatère devient un parallélogramme.

L'utilisation ou non de l'acteur dans les formulations nous renseigne sur la proximité de la propriété avec le contexte. Dans une formulation avec l'acteur, nous faisons l'hypothèse que les élèves n'ont pas encore décontextualisé la propriété.

La formulation des contraintes et de la conclusion est à compléter par la formulation de l'articulation entre les deux. Nous avons identifié trois grandes classes de formulation de l'articulation entre les contraintes et la conclusion.

- un lien d'association, les contraintes et les conclusions sont associées : « le quadrilatère a ses milieux qui sont confondus c'est un parallélogramme. » Dans ces formulations l'ordre n'apparaît pas il est très difficile d'identifier si l'élève peut distinguer les contraintes et la conclusion
- relation de subordination avec dimension temporelle : « Quand on confond les milieux des diagonales, alors le quadrilatère devient un parallélogramme. » cette formulation est proche du contexte car elle s'appuie sur les actions et éventuellement l'acteur. Cette formulation est une formulation intermédiaire qui permet d'introduire la relation de subordination, grâce à l'ordre, et d'identifier les contraintes et la conclusion.
- Articulation des contraintes et des conclusions sans référence au temps, formulation théorique : « si un quadrilatère a ses diagonales de même milieu alors c'est un parallélogramme ». Cette formulation n'utilise plus d'acteur, elle ne fait plus référence au temps.

Ces différentes formulations apparaissent dans les énoncés des exercices

Ex1 : pas de lien mais actions « construit » « observe » proche des actions de Cabri

Ex2 : attaché à un contexte explicitation des actions « construit » « mesurer » « remarque »

Ex3 : articulation entre contraintes et conclusion par une formulation théorique plus d'acteur ni de temps.

### C. *Présentation des exercices*

Exercice 1 :

- Construis 3 points A, B et I, puis le segment [AB].
- Construis le symétrique de [AB] par rapport à I.
- On observe que le symétrique de [AB] et [AB] ont la même longueur.

Par quelle propriété du cours peux-tu résumer cette activité?

L'énoncé de l'exercice 1 reprend la structure d'un énoncé d'une manipulation Cabri sur la symétrie centrale, cet exercice a été proposé aux élèves lors d'une activité Cabri. Nous ajoutons aux éléments de constructions les éléments de l'observation. Nous avons repris le vocabulaire utilisé en classe dans les situations d'illustration : « construire » pour les contraintes « observer » pour la conclusion. Dans cette manipulation, le déplacement n'intervient pas, toutes les contraintes sont liées à la construction. Nous ne demandons pas aux élèves de résumer l'activité car les élèves n'ont pas à manipuler. Le résumé a du sens dans le processus de genèse instrumentale lorsque les élèves manipulent les outils du logiciel, ici nous ne visons pas ce processus mais la capacité des élèves à formuler directement le lien de subordination dans une propriété. Ainsi nous considérons que les mots « construis » et « observe » peuvent contribuer à ce que les élèves explicitent l'ensemble des contraintes et l'observation. Ce qui nous intéresse davantage est comment les élèves vont expliciter les contraintes et la conclusion s'ils vont les articuler et comment : y aura-t-il simple juxtaposition des contraintes et de la conclusion dans des énoncés. Les noms des sommets symétriques ne sont pas indiqués afin de favoriser une formulation générale. Aucune illustration n'accompagne l'énoncé, cela nous permet de distinguer les élèves qui vont compléter l'énoncé d'une construction dans le registre graphique de ceux qui vont se contenter de l'énoncé discursif. Lorsque les élèves complètent l'énoncé par un dessin, cela nous indique que la description donnée ne suffit pas, ils doivent visualiser graphiquement. Pour ces élèves le registre discursif n'est pas encore autosuffisant, ils éprouvent le besoin de traduire un ensemble de données discursives dans le registre graphique.

Comme la consigne explicite que les élèves doivent répondre par une propriété, on peut s'attendre à des formulations expertes car dans les formulations des propriétés l'enseignant a utilisé les indicateurs « si » et « alors ». Les élèves peuvent reprendre la propriété telle qu'elle a été formulée dans le cours :

« Si on construit le symétrique d'un segment alors on obtient un segment qui a la même longueur. »

On pourrait analyser une telle réponse comme la récitation d'un poème, les élèves récitent la propriété du cours mais se la sont-ils appropriée ? Nous dirions que oui. Comme la question ne demande pas de donner la propriété 1 du cours sur la symétrie centrale, nous supposons qu'une telle réponse nous renseigne au contraire sur deux éléments. Dans un premier temps les élèves sont parvenus à identifier les contraintes et l'observation, éventuellement grâce aux mots « construis » et « observe ». Dans un deuxième temps cette réponse nous indique que

l'élève est parvenu à associer aux contraintes ou à la conclusion la propriété correspondante. L'utilisation de la formulation experte peut indiquer que l'élève s'est approprié les signes « si » et « alors » pour exprimer la relation de subordination. Proche de cette formulation, on peut supposer que certains élèves utiliseront une formulation temporelle :

« Quand on construit le symétrique d'un segment par rapport à point à la fin on observe que les deux segments sont égaux. »

Cette formulation diffère principalement de la première par les connecteurs. Cependant nous considérons qu'elle exprime elle aussi la relation de subordination.

Lorsque la propriété explicitée par l'élève, avec une formulation experte ou temporelle, nous considérons que le lien de subordination que nous avons visé dans notre ingénierie est acquis.

Les élèves peuvent articuler les contraintes et la conclusion par une relation d'association. Pour ces élèves nous pouvons considérer que la relation visée n'est pas acquise.

Exercice 2 :

Alex a construit un parallélogramme. Il a mesuré les 4 angles du parallélogramme. Il remarque que les angles opposés sont égaux. Est-ce normal ? Explique ta réponse.

Ce deuxième exercice reprend la structure construction-observation, mais en s'éloignant de l'activité Cabri. Les constructions et observations sont faites par un autre élève fictif. Nous ne considérons pas cet exercice comme un exercice de type Enoncé-tiers. En effet, ici les élèves n'ont pas à utiliser une propriété pour obtenir une contrainte ou une conclusion. Aucune illustration n'accompagne l'énoncé de l'exercice, pour les mêmes raisons que l'exercice 1. Cela nous permet d'identifier si le registre discursif est autosuffisant par rapport au registre graphique.

En demandant aux élèves d'expliquer leur réponse nous attendons qu'ils explicitent une propriété théorique, et non qu'ils utilisent, au cas où ils dessinent, des instruments de mesures ou la reconnaissance perceptive des angles égaux. Cependant ces deux stratégies, perceptive ou instrumentée, ne sont possibles que si les élèves construisent un parallélogramme. Ainsi, cela renforcerait notre hypothèse que la traduction de l'énoncé dans le registre graphique reflète l'importance du registre visuel sur le registre discursif.

Les élèves peuvent expliciter la propriété du cours :

« Si on construit un parallélogramme alors on observe que les angles alternes-internes sont égaux. »

Une telle réponse nous semble valider l'appropriation par l'élève de la relation de subordination visée. Cependant, la question ne demande pas explicitement de donner une propriété du cours. Ce problème est plus ouvert, il laisse plus de liberté dans les formulations des élèves. Les élèves peuvent aussi formuler leur justification par une formulation plus personnelle, c'est-à-dire en utilisant une formulation temporelle par exemple :

« Quand on a un parallélogramme, on observe que les angles opposés sont égaux. »

Les élèves peuvent aussi donner comme explication : « dans un parallélogramme les angles opposés sont toujours égaux ». Cette explication s'appuie sur une relation d'association et on ne peut pas identifier les contraintes des conclusions.

Les élèves peuvent aussi s'investir dans une réflexion plus théorique en validant les angles opposés égaux à l'aide de la symétrie centrale :

« Le parallélogramme a un centre de symétrie, comme les angles opposés sont symétriques donc ils sont égaux ».

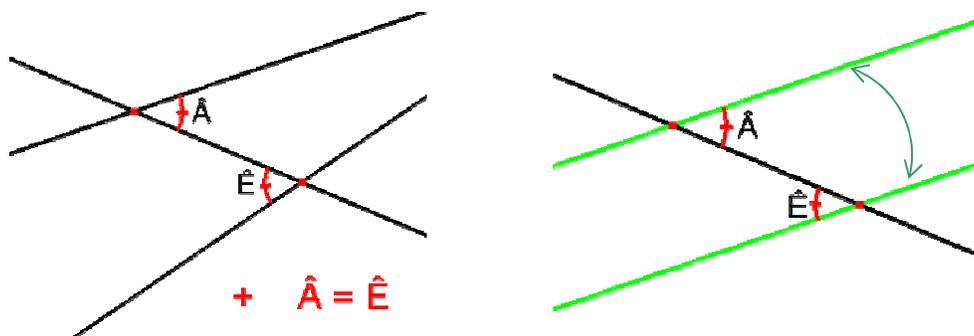
Cette réponse dépasse nos attentes qui se limitent à la formulation du lien entre les contraintes et la conclusion. Dans cette réponse, on peut voir que non seulement l'élève s'est approprié le lien de subordination, ici pour la symétrie centrale, mais il est aussi capable de l'utiliser dans un raisonnement déductif. Cependant, ce n'est pas ce que nous attendons ici.

Exercice 3 :

Illustre par un dessin la propriété suivante :

Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes égaux, alors les droites sont parallèles.

Ce dernier exercice diffère des deux premiers, ici la propriété est donnée dans le registre discursif, les élèves doivent l'expliciter dans un registre discursivo-graphique. Cet exercice est très attaché au processus d'enseignement que nous avons mis en place. De plus cette dernière propriété contient des contraintes liées au déplacement. En effet dans un premier temps les droites ne sont pas construites parallèles elles le deviennent lorsque les angles alternes-internes deviennent égaux. La consigne indique que l'illustration s'appuie sur un dessin. Nous attendons des élèves qu'ils produisent deux représentations permettant de traduire le dynamisme de la propriété :



Bien que cette illustration contienne deux représentations, nous considérons que nous n'avons qu'un dessin, les deux représentations étant liées. Les élèves peuvent expliciter discursivement la contrainte liée au déplacement avec «  $+ \hat{A} = \hat{E}$  » cependant cela peut sembler ne pas correspondre à la consigne qui demande un dessin.

Dans l'hypothèse où les élèves ne font qu'une représentation, nous supposons qu'ils utilisent la deuxième représentation, c'est-à-dire l'état final de la propriété. Nous comptons alors sur l'utilisation de couleurs (en référence aux couleurs utilisées dans les tableaux par l'enseignant) qui permettent d'identifier quels sont les éléments de départ, les constructions et

---

les éléments d'arrivée, les observations. La couleur permet de différencier les contraintes de la conclusion, c'est-à-dire ce qui est construit de ce qui est observé.

Une réponse avec uniquement la deuxième représentation, sans couleur n'explique pas le dynamisme, elle n'explique pas le lien de subordination.

## Chapitre 5

### Analyse a posteriori

La présentation des analyses s'appuie sur les questions, ainsi dans un premier temps, l'analyse des activités Cabri donne accès au processus d'instrumentation. Plusieurs profils apparaissent dans le processus d'appropriation du *Déplacement*. La phase collective lors de l'activité Cabri est une discussion qui porte sur la manipulation du logiciel (instrumentalisation) et sur l'explicitation des schèmes d'utilisation liés à l'activité mathématique (instrumentation). L'analyse de cette phase collective entre dans l'analyse du processus d'instrumentation. Cependant, dans cette discussion l'enseignant tient une place importante par les signes qu'il introduit lors des échanges langagiers.

Comme l'instrument *Déplacement* est relié à la notion de propriété ou au moins à la relation contraintes-conclusion, la construction du *Déplacement* permet aussi la construction de connaissances mathématiques. Ainsi lors de la phase collective, en travaillant sur le processus d'instrumentation avec les élèves l'enseignant participe aussi à la construction de connaissances mathématiques chez l'élève. Cette acquisition de connaissance passe par l'appropriation par les élèves de la structure de la propriété. La formulation du résumé est à rapprocher de l'expression des propriétés, lorsque les élèves et l'enseignant échangent sur le contenu et la structure de ce résumé, l'enseignant introduit de nouveaux signes liés à l'expression des propriétés. Cette discussion est à analyser du point de vue du processus d'instrumentation et du point de vue du processus de médiation sémiotique pour la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion.

Une fois l'activité Cabri terminée, les élèves et l'enseignant reviennent sur les diverses manipulations dans le but d'expliciter de nouvelles propriétés. L'objectif de cette deuxième phase collective n'est plus le processus d'instrumentation mais l'explicitation des propriétés dans un registre discursif.

A la fin de la séquence, les élèves réinvestissent les propriétés dans des exercices. L'analyse de ces exercices nous renseigne sur l'appropriation par les élèves des propriétés et du lien de subordination entre les contraintes et la conclusion.

Nous concluons cette analyse a posteriori par l'étude des productions des élèves sur le test final complétée par la discussion avec le chercheur.

## I. Méthodologie d'analyse

### A. *Analyse du processus de genèse instrumentale du Déplacement pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion chez les élèves*

Le processus de genèse instrumentale concerne l'appropriation par l'élève de l'instrument *Déplacement* dans des situations de types Illustration. L'instrument visé par cette analyse n'est pas relui uniquement à l'artefact déplacement de Cabri, nous le complétons par les observations et la formulation du résumé de l'activité.

Cela nous amène à étudier, dans un premier temps, les actions associées à l'utilisation de l'artefact déplacement. Comme nous l'avons explicité dans le chapitre 4, deux contrôles accompagnent le déplacement un contrôle perceptif et un contrôle instrumenté. Nous analysons dans quelle mesure l'action de déplacer permet une prise en compte des unités figurales inférieures. Pour cela, nous identifions quels objets géométriques sont ciblés au cours du déplacement, par le contrôle. L'analyse de l'action de déplacer est guidée par la question :

- Quel déplacement est mis en œuvre, quelles sont les unités figurales inférieures identifiées par le contrôle ?

Le deuxième élément que nous analysons concerne l'observation par les élèves de l'unité figurale supérieure. Cette observation peut aussi s'accompagner de l'identification d'une évolution, d'une transformation de l'unité figurale supérieure. Par exemple lorsque les élèves construisent un quadrilatère et observe un parallélogramme après avoir déplacé pour confondre les milieux des diagonales. L'identification d'une transformation peut apparaître à travers les dialogues des élèves ou dans la formulation du résumé par les élèves par exemple : « le quadrilatère s'est **transformé** en parallélogramme ». Nous nous appuyons sur la question suivante dans l'analyse des observations des élèves :

- Quelle est l'observation des élèves, explicitent-ils une transformation ? Si oui, comment ?

Le *Déplacement* est associé aux tâches Cabri, c'est-à-dire aux gestes, aux contrôles, aux actions à mettre en œuvre pour réaliser la tâche posée. La construction des schèmes associés à ces actions amorce le processus de médiation sémiotique du lien contraintes-conclusion. Ainsi les formulations des élèves dans le résumé nous indiquent dans quelle mesure l'élève associe les constructions et les déplacements aux contraintes d'une propriété et les observations à la conclusion. Le résumé s'appuie sur ce que l'élève perçoit de sa manipulation, par exemple, lorsqu'un élève n'explique pas les unités figurales inférieures dans son résumé on peut supposer qu'il ne les a pas identifiées dans son déplacement. Nous guidons notre analyse des résumés par la question suivante :

- Quels sont les éléments de la tâche explicités par l'élève, avec quels signes et comment sont-ils articulés ?

Enfin, la formulation choisie par les élèves nous renseigne sur la prise en compte des cas possibles. Ainsi une formulation nominative, explicitant la place de l'acteur et ses manipulations par des verbes d'actions est une formulation dans laquelle le dessin tient une place importante. A l'opposé une formulation générale avec abstraction de l'acteur et des mouvements mis en œuvre nous semble compatible avec la notion de figure. La question précédente est complétée par quelques éléments que nous cherchons à identifier :

- Abstraction des verbes de mouvements
- Disparition de l'acteur
- Quel type de formulation (temporelle ...)
- Dessin comme objet d'étude à figure comme outil de réflexion
- Utilisation des figures prototypique, orientation particulière

### ***B. Analyse du processus de genèse instrumentale du Déplacement pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion au cours des phases collectives avec Cabri.***

Au cours de cette séance Cabri, l'enseignant met en place une phase collective qui vise l'utilisation du *Déplacement*. Cet échange avec les élèves vise aussi l'organisation du résumé. Pour cela l'enseignant revient sur les manipulations de l'artefact et sur la formulation du résumé. Cette formulation du résumé entre dans le processus de médiation sémiotique dans le sens où elle permet une discussion sur l'articulation des constructions, déplacements et observation. L'analyse de cette phase collective avec Cabri reprend les mêmes questions que dans l'analyse des élèves.

### ***C. Phases collectives de formulation des propriétés***

Les phases collectives ont pour but la formulation des propriétés. Cette formulation passe par une articulation entre l'environnement de Cabri et l'environnement du papier-crayon. Cependant l'environnement graphique-dynamique est absent lors de cette phase. Ainsi les manipulations des élèves exercées avec le logiciel lors de l'activité Cabri ne peuvent pas être reproduites. Les élèves peuvent utiliser leurs fiches avec leurs réponses pour se remémorer leurs activités. Le tableau permet d'explicitier la manipulation dans le registre du papier-crayon, c'est à partir du tableau que l'énoncé de la propriété est formulé.

La liaison entre les deux environnements utilise la fiche de cours et un registre discursivo-graphique pour la formulation de la propriété. A l'aide de ces supports nous analysons comment le registre graphique-dynamique est explicité dans la discussion par les questions suivantes :

- Quels signes sont utilisés par l'enseignant pour exprimer et articuler la construction, le déplacement, l'observation ?
- Quels signes sont utilisés par les élèves pour exprimer et articuler la construction, le déplacement, l'observation ?

Au cours de l'activité Cabri, le résumé correspond à une formulation personnelle de la propriété attachée à la situation Illustration associée. Le but de cette phase collective est de passer du résumé individuel de chaque élève à l'énoncé collectif de la propriété, cela passe par un processus de généralisation et de prise en compte des cas possibles. Nous analyserons comment cela est-il pris en charge dans la phase collective par l'enseignant ? Comment concilie-t-elle les différents résumés individuels ?

#### ***D. Explicitation des propriétés dans les corrections collectives des exercices de réinvestissement***

Nos analyses ne portent pas sur la capacité des élèves à formuler les propriétés dans un raisonnement déductif. Nous nous intéressons à leurs formulations personnelles des propriétés. Nous identifions quels signes les élèves utilisent pour expliciter les contraintes, car ces exercices portent sur l'identification des contraintes manquantes. Pour cela nous nous appuyons sur les corrections collectives de ces exercices.

#### ***E. Evaluation de l'acquisition du lien contraintes-conclusion par les élèves individuellement et en entretien***

Les trois exercices que nous analysons sont des énoncés de propriétés dans des formulations différentes. Nous analysons dans un premier temps comment les élèves parviennent à traduire ces énoncés pour traduire le lien contraintes conclusion dans un autre registre. Pour cela nous analysons sur quels signes de la consigne les élèves semblent s'appuyer et quels signes ils utilisent dans leur formulation. Dans un deuxième temps, nous discutons avec deux binômes et nous analysons leur capacité à identifier et formuler les contraintes et la conclusion à partir des consignes des exercices posés en nous appuyant sur des références aux situations d'Illustrations.

## II. La séance un quadrilatère particulier

A ce moment de l'année scolaire, le parallélogramme a été introduit à l'aide la symétrie centrale et les élèves ont travaillé sur les propriétés du parallélogramme.

Les élèves travaillent par deux et chaque élève possède une fiche contenant les consignes pour la séance. Trois experts sont présents, l'enseignante (Ete), le chercheur (Ch) et un enseignant d'une autre classe (Et).

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Construis un quadrilatère ABCD.</b></li> <li>•  Sélectionne l'outil polygones de la boîte Lignes. A chaque clic nomme les sommets A, B, C, D, reviens au point A pour terminer.</li> <li>• <b>Construis M milieu de [AC] et N milieu de [BD]</b></li> <li>• <b>Déplace le point C pour que les points M et N soient confondus.</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----

Essaies de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :  
-----

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Construis un quadrilatère ABCD.</b></li> <li>• <b>Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD)</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----
Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD) et que (AD) soit parallèle à (BC)</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----

Essaies de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :  
-----

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Construis un quadrilatère ABCD.</b></li> <li>• <b>Mesure les longueurs de chacun des côtés du quadrilatère</b> AB =      AD =      BC =      CD =</li> <li>• <b>Déplace le point C pour que AB = CD</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----
Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Déplace le point C pour que AB = CD et AD = BC</b></li> </ul>
Observations	Que devient ABCD ? -----

Essaies de résumer en une phrase le tableau ci-dessus :  
-----

Les binômes analysés pour cette séance Cabri « Quadrilatère particuliers » sont Satine&Camille, Willy&Meddi, Léa&Sandra et Jade&Laura. Nous appelons la première

manipulation « milieux confondus », la deuxième « côtés parallèles » et la troisième « côtés égaux ».

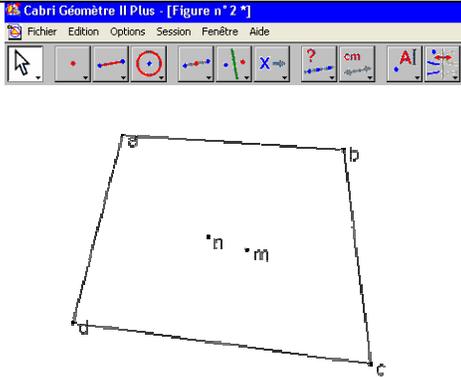
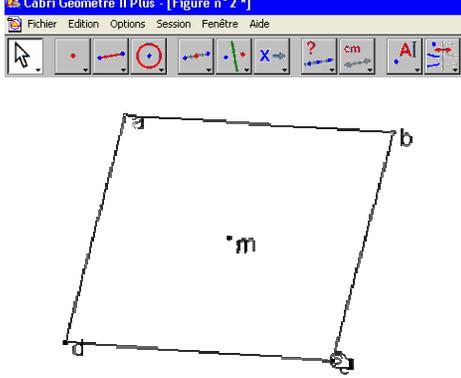
Dans un premier temps nous analysons quel déplacement et quel contrôle les élèves ont mis en œuvre pour chaque manipulation, puis nous étudions les observations des élèves, enfin nous analysons les formulations des élèves à travers l'étude de leur résumé.

### ***A. Analyse du processus de genèse instrumentale dans la manipulation des élèves***

#### **1 Déplacement et unités figurales inférieures**

Tout d'abord nous analysons quels ont été les déplacements mis en œuvre par les élèves pour les trois manipulations.

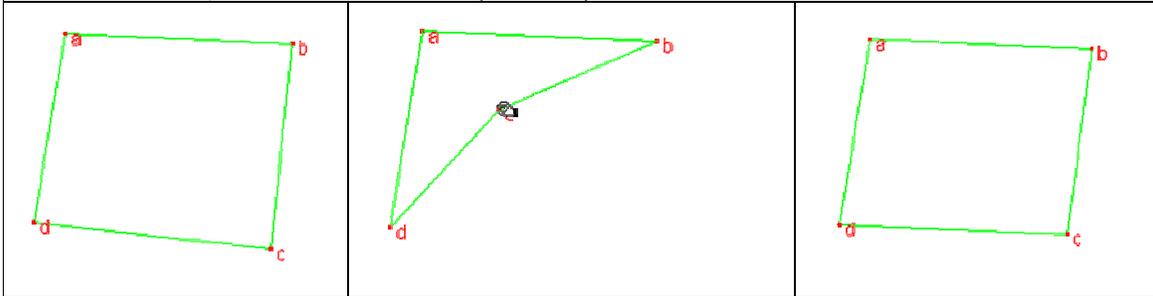
Sandra&Léa – Déplacement « milieux confondus »

<p>S : déplace le point C pour que les point M et N soient confus soient confondus, ça veut dire quoi confondus ?</p> <p>L : que ils arrivent au même endroit...</p>	 <p>2 :53</p>
<p>L : voilà c'est bon c'est bon comme ça</p>	 <p>3 :05</p>

Dans la manipulation « milieux confondus » les quatre binômes que nous observons utilisent le milieu des diagonales dans leur déplacement. La consigne qui demande de superposer les milieux, est suivie par les élèves, ce qui les amène à identifier les unités figurales inférieures dans la réalisation du déplacement.

Sandra&Léa - Déplacement perceptif « côtés parallèles »

*L construit un quadrilatère ABCD déplace le point C :*



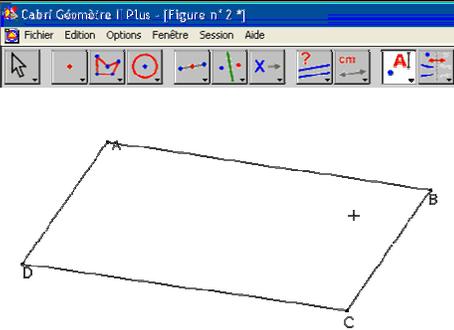
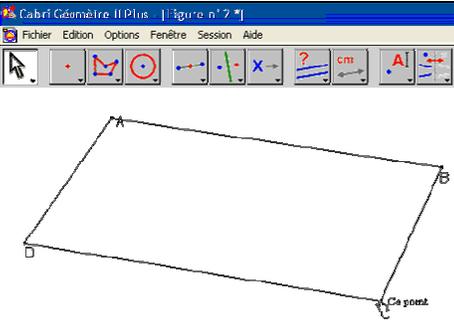
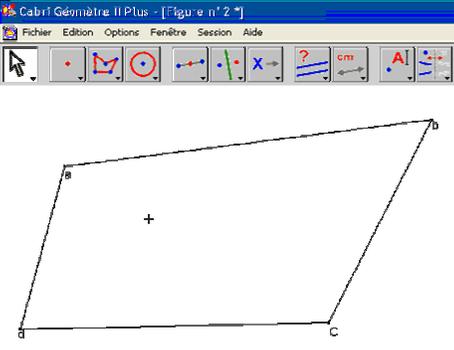
S : construire un quadrilatère ABC, déplace le point C pour que (AB) soit parallélogramme à (DC) c'est bon t'as déjà fait ?

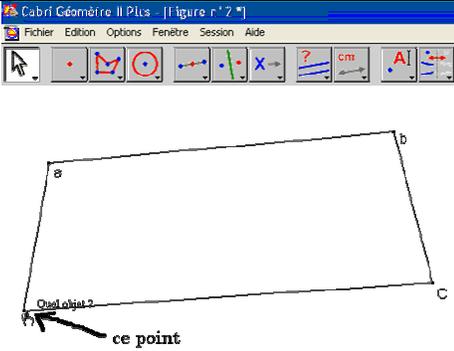
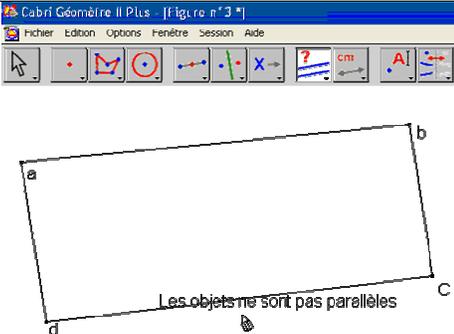
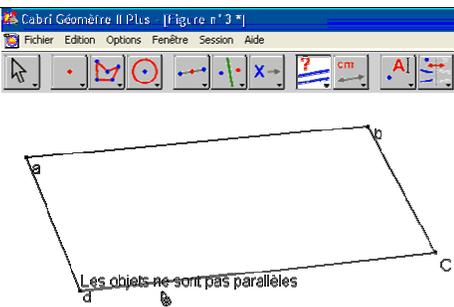
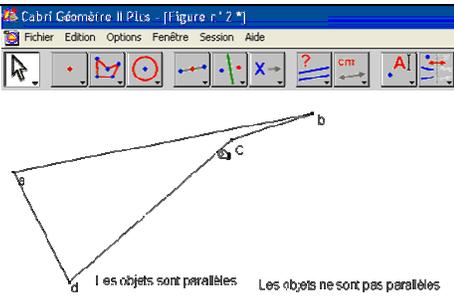
L : oui ...

Interprétation : Dans la manipulation « côtés opposés parallèles » Léa met en œuvre un contrôle perceptif sur la forme du quadrilatère pour obtenir les côtés [AB] et [CD] parallèles. Lorsqu'elle déplace le point C tous les côtés du quadrilatère deviennent parallèles. On peut supposer que Léa n'a pas pris en compte les côtés dans son déplacement mais la forme globale du quadrilatère. Elle semble associer la contrainte deux côtés opposés parallèles à la forme du parallélogramme. Ainsi elle n'utilise pas les unités figurales inférieures mais l'unité figurale supérieure du parallélogramme dans son contrôle. Le déplacement qu'elle met en œuvre ne vise pas les côtés mais l'obtention d'un parallélogramme.

Conclusion : En utilisant cette stratégie, Léa ne peut pas dissocier les deux déplacements : « deux côtés opposés parallèles » est identique à « tous les côtés opposés parallèles ». Il semble qu'elle associe « deux côtés opposés parallèles » au parallélogramme. Cette même association apparaît aussi dans la réplique de Sandra qui utilise « parallélogramme » à la place de « parallèle ». Cette association présente chez les deux élèves provient certainement du primaire et de la caractérisation du parallélogramme comme un quadrilatère avec tous ses côtés parallèles. Cette difficulté à distinguer l'objet géométrique et la relation entre deux droites n'est pas facilitée par le registre discursif où les deux mots sont relativement proches.

Satine&Camille - Déplacement perceptif avec validation « côtés parallèles »

<p>S : déplace le point C pour que le point AB soit parallèle à (CD)  S : (AB) il faut que ça soit à ça ...  C : ben c'est bon ils sont parallèles attends  <i>Utilise l'oracle Parallèles Sélectionne les côtés [AB] et [CD] Résultat les objets ne sont pas parallèles</i>  C : hein ?!  S : he t'as fait tout parallèle  <i>C efface le résultat de l'oracle puis recommence</i>  S : encore ... tu vas dans parallèle, tu crois déplace le point C, on nous demande de déplacer le point C  <i>C déplace le point C dans tous les sens</i>  S : attends, attends il faut qu'ils soient parallèles</p>	 <p style="text-align: right;">24 :42</p>
<p><i>Camille déplace le point C</i>  S : descends un peu la descends un peu la mais non ! Descends un petit peu vers la descends un petit peu vers la il faut qu'il soit tous les ... la ! encore attends la ... la allez (26 :08)  <i>Satine utilise Oracle parallèles</i>  S : la ! Ce côté du polygone (sur le côté [AB]) pourquoi ils font tout le polygone ? (car tout le polygone clignote)  <i>Sélectionne deux fois le côté [AB]</i>  S : C'est parallèle ... ok que devient ABCD ? ABCD devient un parallélogramme</p>	 <p style="text-align: right;">26 :08</p>
<p><i>Satine ouvre une nouvelle figure leur construction disparaît elles recommencent la première construction 29 :58</i>  <i>Satine déplace tous les points pour obtenir (AB) parallèle à (CD)</i></p>	 <p style="text-align: right;">29 :58</p>

<p><i>C : mais non ça, ça doit être rentré à l'intérieur A propos du point d</i></p>	 <p>30 :15</p>
<p><i>Une fois qu'elles considèrent que le déplacement est réalisé, elles utilisent l'oracle parallèle sur les côtés [AB] et [CD] qui répond que les objets ne sont pas parallèles. Satine réalise un nouveau déplacement qu'elle essaie de valider avec l'oracle parallèle</i></p>	 <p>30 :45</p>
<p><i>En voulant effacer le résultat de l'oracle Satine sélectionne deux fois le même côté et obtient que les objets sont parallèles Elles reviennent sur la consigne et Satine déplace le point C, pour identifier les points, et perd sa position, elle essaie de revenir à la position précédente et valide encore avec l'oracle qui ne valide pas les droites parallèles S: il me saoule avec son pas parallèle, c'est parallèle je suis désolée</i></p>	 <p>35 :57</p>
<p><i>C : je sais ce que tu vas faire, clique là ils vont nous dire utilisent l'oracle parallèle sur les côtés [AB] et [CD] et garde la réponse C : non efface pas laisse ils vont nous dire au bout d'un moment Camille utilise l'oracle parallèle sur [AB] et [CD] au cours de son déplacement</i></p>	 <p>34 :20</p>

Remarque : L'ordinateur de Camille&Satine a été utilisé et projeté lors de la phase collective qui a précédé le déplacement de la manipulation « côtés opposés parallèles » ainsi lorsqu'elles

reprennent la manipulation « côtés parallèles » elles utilisent la même figure Cabri, c'est-à-dire un parallélogramme.

Interprétation : Lorsque les élèves s'engagent dans le déplacement pour obtenir deux côtés opposés parallèles, le quadrilatère présent sur l'écran de Satine&Camille vérifie les conditions de la première manipulation avec les milieux confondus. Elles ne reprennent pas une nouvelle figure cabri, simplement effacent les milieux M et N. La manipulation consistant à déplacer le point C pour que (AB) et (CD) soient parallèles ne passe pas par le déplacement, cette contrainte étant déjà réalisée. Afin de s'assurer que les deux côtés en questions sont parallèles elles utilisent l'outil *Parallèle* de *L'oracle*<sup>11</sup> et questionnent les deux côtés [AB] et [CD]. Les deux élèves n'utilisent pas de déplacement donc pas de contrôle, cependant elles valident la position de leurs points à l'aide d'un outil Cabri, c'est pour cela que nous considérons qu'elles utilisent un déplacement avec validation. C'est au cours de cette validation qu'elles considèrent les unités figurales inférieures en utilisant l'oracle sur les deux côtés considérés dans la consigne. Cette validation ne peut pas fonctionner ici car les parallèles ne sont pas construites en utilisant des outils Cabri, mais à l'aide du déplacement mou. Il leur donne tout de même la réponse qu'elles attendaient lorsque Satine sélectionne deux fois le même côté.

Lorsque les deux élèves recommencent la manipulation, elles construisent elles-mêmes un quadrilatère et déplacent les sommets pour obtenir les cotés [AB] et [CD] parallèles. Nous retrouvons le même déplacement que pour le binôme Léa&Sandra, un déplacement qui porte sur l'obtention d'un parallélogramme, où les unités figurales inférieures ne sont pas prises en compte. Une fois qu'elles considèrent le déplacement terminé, elles utilisent à nouveau l'oracle sur [AB] et [CD] pour valider leur déplacement. Elles utilisent maladroitement l'oracle ce qui leur permet de valider leur déplacement. Après avoir perdu la position du point C, l'utilisation de l'oracle évolue chez Camille, l'oracle intervient non plus dans la validation du déplacement mais au cours du déplacement. Cependant il ne permet toujours pas d'identifier la position du point C.

Conclusion : Tout comme Léa&Sandra il semble que Camille&Satine associent le parallélogramme à deux côtés parallèles. Ainsi leur contrôle du déplacement s'appuie sur l'unité figurale supérieure. Cependant, pour valider leur déplacement, elles interrogent les deux côtés ciblés dans la consigne. Cette considération des unités figurales inférieures, explicitées dans l'énoncé de l'exercice, apparaît lors de la validation et non lors du contrôle.

Willy&Meddi - Déplacement instrumenté par les outils Cabri « côtés parallèles »

---

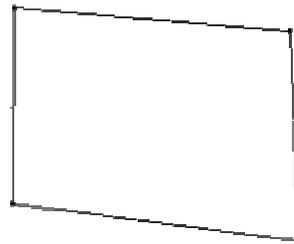
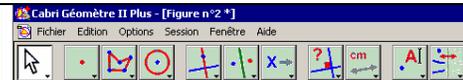
<sup>11</sup> L'outil *Oracle* vérifie cinq types de relations : l'alignement de 3 points, le parallélisme de deux droites, la perpendicularité entre deux droites, l'équidistance d'un point par rapport à deux autres points et l'appartenance d'un point à un objet. Ces relations sont validées théoriquement, une construction réalisée perceptivement n'est pas validée par *l'Oracle*.

M : déplace le point C pour que A la droite (AB) soit parallèle à (CD)

M *Déplace sans points sur le quadrilatère*

W : il faut déjà que tu marques les points

M : parallèle à CB donc la les points A construis déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD)



14 :29

M : madame regardez parallèle

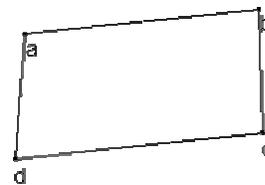
Ete : bon alors si tu mets ces deux côtés parallèles ceux qui sont en face là-bas voilà tu peux

*Meddi construit la parallèle à (AB) passant par D*

M : parallèle à ce côté

Ete : passant par, il faut passer par un point, donc passant par le point D par exemple

M : ce point



15 :45

Ete : voilà tu y es presque c'est bien

*Ete part*

*Meddi construit la parallèle à (AB) passant par C, puis la parallèle à (CD) passant par B*

M : monsieur là pourquoi c'est tordu ?

*Meddi montre le point A puis le déplace.*

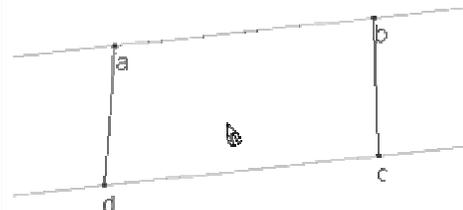
Et : pourquoi c'est tordu ? Ben qu'est ce qu'on vous a demandé ? Déplacer quel point ?

M : C

Et : alors la tu déplaces le point A ? Alors pourquoi c'est tordu, alors bon et qu'est ce que vous voulez faire ?

M : ici la on est pas vraiment

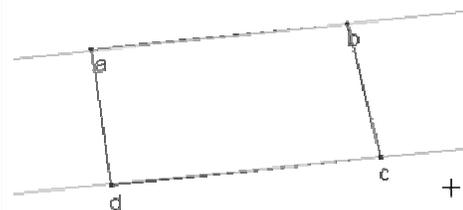
W : ben c'est pas droit



16 :19

Et : oui, c'est pas droit là bon qu'est ce qui ne va pas ?

M : la c'est droit



15 :13

Remarque : Dans la manipulation précédente, l'enseignant a introduit l'outil *Perpendiculaire* chez ce binôme pour tester la perpendicularité de deux droites, l'outil *Perpendiculaire* de *l'Oracle* ne fonctionnant pas sur leur machine. Cette introduction de l'outil *Perpendiculaire* fait travailler au niveau des unités figurales inférieures. Dans cette manipulation Willy est très discret.

Interprétation : Dans un premier temps, Meddi déplace les sommets perceptivement pour obtenir les côtés [AB] et [CD] parallèles. Le quadrilatère qu'ils obtiennent est assez proche d'un parallélogramme et il est difficile de savoir si le déplacement s'est appuyé sur la perception globale du quadrilatère ou si les élèves ont uniquement considéré les côtés [AB] et [CD]. En effet, le quadrilatère construit semble plus proche du parallélogramme que le quadrilatère qu'ils obtiennent à la fin de leur déplacement. Meddi valide son déplacement par l'outil *Parallèle*. Cependant, il construit la parallèle à [AB] passant par D, la parallèle à [AB] passant par C et la parallèle à [CD] passant par B. Il construit trois parallèles alors qu'une suffit. Il semble que pour Meddi, le parallélisme n'est pas une relation entre droites mais une caractéristique d'une droite.

La superposition des côtés du quadrilatère avec les parallèles lui permet de valider le déplacement. On retrouve une validation du déplacement comme chez le binôme Satine&Camille, Meddi utilise l'outil *Parallèle*, alors que Satine&Camille ont utilisé *l'Oracle*.

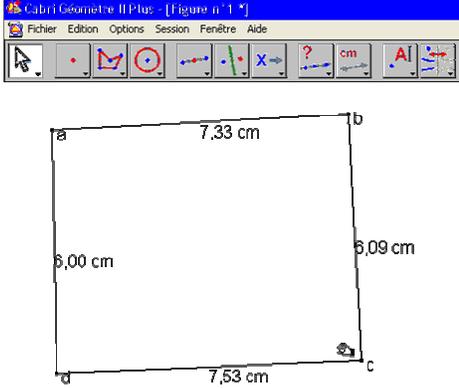
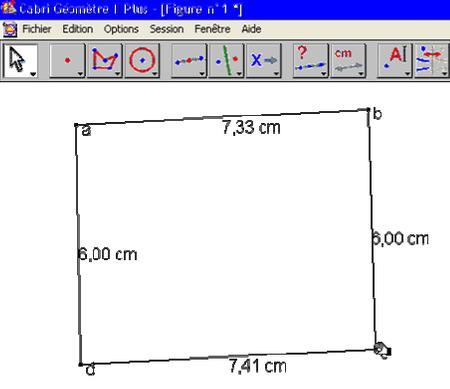
Meddi est lui aussi influencé par le parallélogramme et déplace les sommets pour que son dessin ne soit plus « tordu » mais ressemble éventuellement davantage à un parallélogramme. Pour cela, Meddi déplace le point C avec deux contrôles. Un premier contrôle qui utilise les droites parallèles, les points D et A restent sur les parallèles construites. Son deuxième contrôle est perceptif, il semble porté sur les côtés [AD] et [BC]. On peut supposer que dans la réalisation de ce déplacement Meddi n'a pas considéré la forme globale du quadrilatère mais les points et segments qui la composent car les droites parallèles ne permettent plus d'utiliser le quadrilatère comme contrôle du déplacement. Ainsi l'utilisation de l'outil *parallèle* leur permet, dans un premier temps, de valider le déplacement perceptif et dans un deuxième temps de conserver le parallélisme des deux côtés pendant qu'ils déplacent perceptivement un sommet pour obtenir les deux autres côtés parallèles. Ce deuxième déplacement anticipe la deuxième partie de la manipulation et nous laisse penser que Meddi cherchent à obtenir un parallélogramme, configuration plus connue.

Conclusion : L'utilisation de l'outil *Parallèles* fait travailler Meddi sur les unités figurales inférieures, cependant une fois le déplacement réalisé, il revient rapidement à l'unité figurale supérieure et cherche à obtenir un parallélogramme. Ainsi il suit les consignes et réalise des déplacements sur les unités figurale inférieures, mais il contrôle aussi son déplacement globalement puisqu'il cherche à obtenir un parallélogramme. Enfin, la construction des

parallèles nous indique que Meddi considère le parallélisme comme une caractéristique d'une droite et non une relation entre droites.

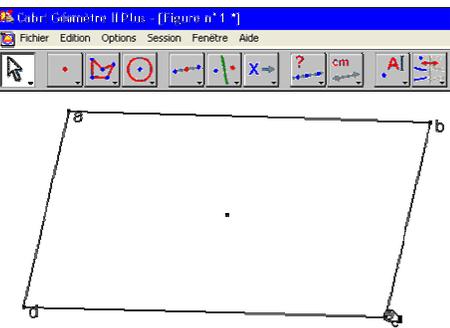
Jade&Laura - Déplacement instrumenté par des propriétés « côté parallèles »

*Laura construit un quadrilatère ABCD et mesure les côtés pour obtenir deux côtés opposés égaux.*

 <p style="text-align: right;">12 :37</p>	 <p style="text-align: right;">14 :05</p>
--	---

J : c'est bon, c'est bon, c'est bon arrête parce que le 6 ca va la  
*Après l'observation, Laura ouvre une nouvelle figure, leur quadrilatère disparaît. Elle recommence mais la phase collective l'arrête. Elles terminent l'exercice après la mise en commun qui porte sur la manipulation « milieux confondus »*

*Laura commence à déplacer le sommet C pour que (AB) et (CD) soient parallèles, Jade prend la souris et construit les milieux des diagonales, sans tracer les diagonales*  
 J : voilà la il est par



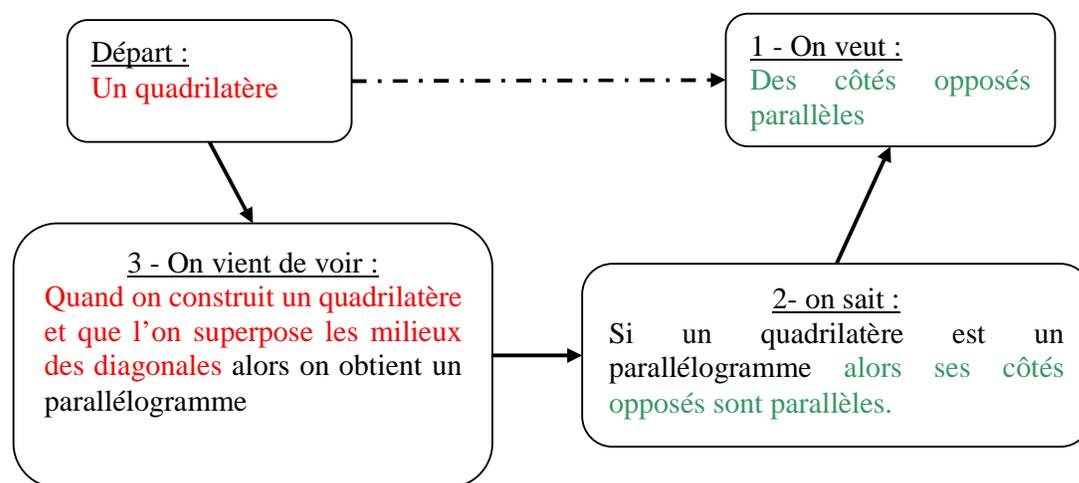
24 :34

Interprétation : Dans un premier temps, Laura mesure tous les côtés et s'appuie sur les longueurs des côtés pour contrôler son déplacement. On peut supposer que Laura associe deux droites parallèles à un écart constant entre ces deux droites. Laura se place dans un cadre numérique et s'appuie sur des mesures. Elle n'utilise pas les unités figurales inférieures que sont les côtés [AB] et [CD]. Ce déplacement utilise un contrôle instrumenté par les mesures des côtés. Après la mise en commun, Jade utilise le *Déplacement* de la manipulation « milieux confondus ».

Conclusion : Après la mise en commun, Jade réinvestit le résumé discuté. Elle s'appuie sur l'instrument *Déplacement* associé à la manipulation « milieux confondus » pour obtenir les côtés opposés du quadrilatère parallèles. Ce réinvestissement de la manipulation précédente ne permet pas de réaliser uniquement la condition (AB) et (CD) parallèles, tous les côtés

deviennent parallèles. On peut supposer que pour Jade, la phase collective a participé à la construction de l'instrument *Déplacement* associé à la manipulation « milieux confondus ». Si on analyse de plus près la démarche de Jade on pourrait supposer qu'elle a mis en œuvre un raisonnement déductif. Un premier pas utilise l'instrument *Déplacement*, le deuxième utilise une propriété du parallélogramme étudiée précédemment. Le schéma 3 présente le raisonnement que Jade a peut-être utilisé. Une première lecture du schéma du départ à 3 en passant par 1 et 2 est une supposition de la réflexion que Jade a éventuellement mise en œuvre. La lecture du schéma par les flèches serait la réalisation du raisonnement. On peut aussi supposer que Jade associe deux côtés opposés au parallélogramme et qu'elle n'utilise pas de propriété, simplement une association entre les côtés opposés et le parallélogramme.

schéma 3



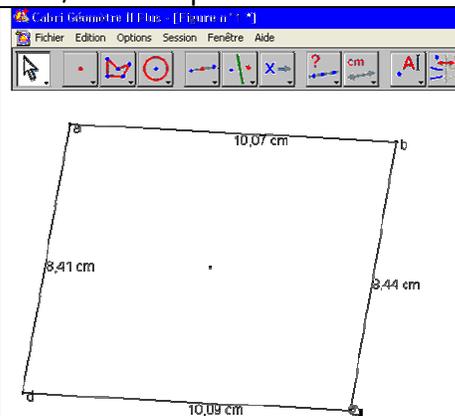
Cette anticipation de la deuxième question par la réalisation d'un parallélogramme peut provenir du déplacement perceptif de Laura (avant la phase collective) qui aboutit à un parallélogramme, ou d'une association parallèles, parallélogramme.

Dans la manipulation « côtés opposés égaux » le contrôle du déplacement porte sur des mesures des côtés, c'est-à-dire une valeur numérique. Les élèves quittent alors le cadre de la géométrie et entrent dans le cadre numérique. L'utilisation des mesures pour contrôler le déplacement ne permet pas de décomposition des formes, l'identification des unités figurales inférieures n'a pas de sens pour cette manipulation. Nous noterons simplement que tous les élèves réalisent deux déplacements distincts, c'est-à-dire qu'ils n'anticipent pas l'observation, dans un premier temps ils déplacent pour obtenir deux côtés opposés égaux, puis ils déplacent pour obtenir tous les côtés opposés égaux. Nous ne présentons que l'analyse de la procédure de Jade&Laura particulière car elles utilisent le Déplacement associé à la manipulation « milieux confondus ».

Jade&Laura – Déplacement instrumenté par une propriété « côtés égaux »

L : déplace le point  $C$  pour que  $AB=CD$  *Laura déplace le point  $C$  pour avoir  $BC=CD$*   
 J : non mais faut pas faire comme ça faut faire le milieu parce que comme ça tu n'y arriveras pas la comme ça Laura ... fais avec le milieu  
 L : t'as dit quoi  
 J : fais avec son milieu, c'est plus facile  
 J : milieu et là tu fais milieu de  $A$  milieu de  $C$  comme ça, ça va être plus facile  
 L : et ça va changer quoi ?  
 J : he ben on trouve, et ben ils seront, ce sera un parallélogramme. Maintenant tu déplace le point  $C$  et tu les fais superposer les deux, les deux points

J : voilà arrêtes (31 :25)  
 L : c'est vachement de la même longueur  
 J : ça devrait pourtant  
 L efface les milieux  
 J : bon on va dire hein donc  
 L construis des milieux, déplace le point  $C$   
 L : oui ils sont pareils  
 J : quoi  
 L :  $AB=CD$  !  
 J : ouais mais la  
 L : oui mais la il faut juste que  $AB=CD$ , déplacer le point  $C$  pour que  $AB=CD$



31 :25

Interprétation : On retrouve un déplacement qui utilise le *Déplacement* de la manipulation « milieux confondus ». Cependant une fois les milieux superposés, les longueurs des côtés opposés ne sont pas les mêmes. Cela provient de la représentation de points et droites sur l'écran et non de la procédure de Jade.

Lorsque Laura parvient à obtenir les côtés  $[AB]$  et  $[CD]$  égaux, Jade n'est pas satisfaite du résultat car elle attend que tous les côtés opposés soient de la même longueur. Laura a bien identifié que la condition porte uniquement sur deux côtés opposés, ce qui n'est pas aussi clair pour Jade. On peut supposer que Jade cherche à obtenir un parallélogramme et non deux côtés opposés égaux.

Synthèse sur les déplacements et la prise en compte des unités figurales inférieures :

Dans la manipulation « côtés opposés parallèles ». Trois procédures apparaissent parmi les binômes que nous avons analysés :

- Une première procédure s'appuie uniquement sur la perception globale de la forme avec les élèves Léa&Sandra.
- Une deuxième procédure utilise un déplacement instrumenté, l'instrument intervient soit pour valider le déplacement avec Camille&Satine, soit pour valider et contrôler le déplacement avec Willy&Meddi. Ce déplacement utilise les unités figurales inférieures, dans le contrôle ou dans la validation.

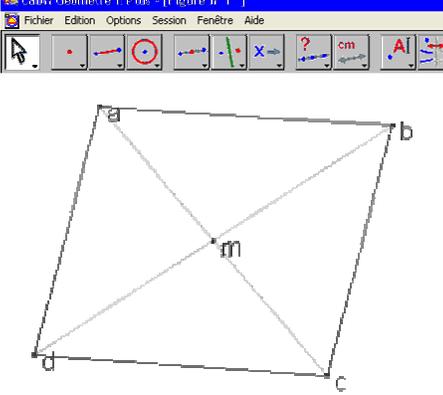
- Une troisième procédure utilise un déplacement instrumenté par des propriétés avec Jade&Laura

L'association parallèles-parallélogramme est présente chez tous les élèves, on peut alors se demander si cette manipulation telle qu'ils l'ont réalisé leur permet d'identifier les contraintes et la conclusion. En effet, ils ont utilisés l'observation dans le déplacement, les actions qu'ils ont mis en œuvre ne coïncident plus avec l'instrument Déplacement visé.

## 2 Quelle appréhension de la figure Cabri dans l'observation de l'unité figurale supérieure ?

Une fois que les élèves ont réalisé les constructions et observation, nous leur demandons ce que devient ABCD. Pour analyser les observations du quadrilatère par les élèves, nous nous appuyons sur la classification des appréhensions de la figure de Duval. La reconnaissance du parallélogramme peut s'appuyer sur une reconnaissance de la forme, c'est-à-dire que les élèves appréhendent perceptivement le dessin Cabri. Les contraintes imposées par le déplacement sont des contraintes éphémères mais présentes lors de l'observation. Ainsi, les élèves peuvent mettre en œuvre une appréhension opératoire dans l'identification du parallélogramme.

Sandra&Léa – Appréhension perceptive VS appréhension opératoire « milieux confondus »

<p>S : que devient ABCD ? ... ben un carré          S : un parallélogramme          L : haha carré          S : parallélogramme si c'était un carré il y aurait des angles droits et il n'y a pas d'angles droits          L : je sais pas peut être, peut être que si          S : non, non il n'y en a pas ça devient quoi ?          L : parallélogramme</p>	
---	--

Interprétation : Dans la manipulation « milieux confondus » Léa reconnaît un carré alors que Sandra identifie un parallélogramme. La proposition de Léa est rapidement rejetée par Sandra qui explicite l'absence des angles droits. Comme elle n'utilise pas d'instrument comme la construction d'une perpendiculaire ou l'outil *Parallèles* de *l'Oracle*, on peut supposer que Sandra identifie perceptivement que les angles ne sont pas droits. Ainsi, Sandra a certainement décomposé la figure afin d'identifier, perceptivement, si les angles formés par les côtés étaient des angles droits, de plus elle parvient à expliciter ces caractéristiques, nous pourrions considérer que Sandra à utilisé une appréhension opératoire du dessin Cabri non pas pour la mise en valeur de conclusion : nouvelles caractéristiques mais pour identifier leur absence.

## Sandra&amp;Léa – Appréhension perceptive VS appréhension opératoire « côtés parallèles »

L : mais non ! ça fait pas un parallélogramme ça fait un carré ! ben ouais, si

S : mais il n'y a pas d'angles droits

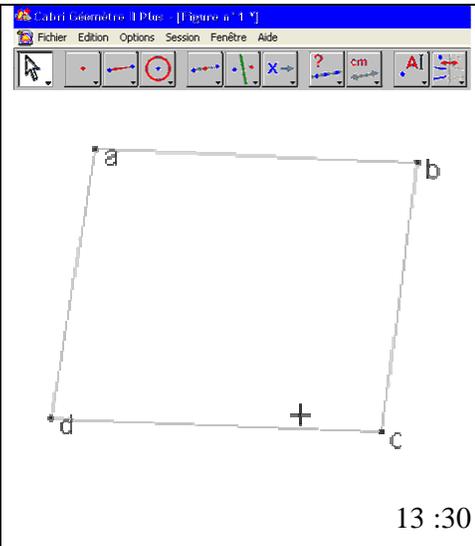
L : ben si :

S : prend mon équerre ! on regarde

L : ouais mais je sais là il n'y a pas d'angles droits, mais en fait normalement il faut que ça, ça soit parallèle et ça aussi et un carré c'est pareil avec un parallélogramme on peut pas faire ça

S : ben si eux deux sont parallèles, eux deux sont parallèles

L : ha si...



13 :30

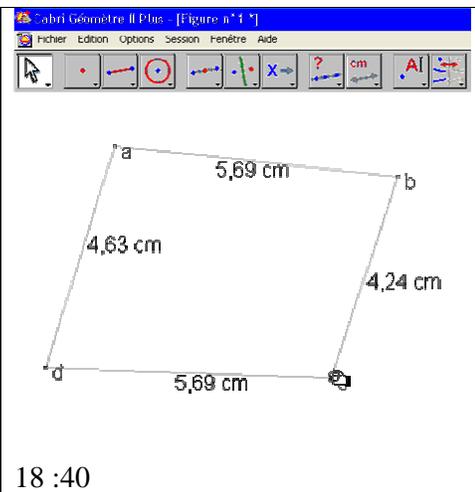
Interprétation : On retrouve l'appréhension opératoire de Sandra. Elle explicite les caractéristiques absentes du dessin. Afin de convaincre Sandra de ses réponses Léa est elle aussi amenée à identifier les unités figurales inférieures et les caractéristiques qui leur sont associées. Ainsi, Léa explicite que les côtés opposés parallèles, sont une caractéristique des carrés.

## Sandra&amp;Léa – Appréhension perceptive identification par élimination « côtés égaux »

L : que devient ABCD ? ben... ça c'est pas un parallélogramme ! c'est un trapèze

S : c'est un trapèze ?

L : c'est pas un parallélogramme c'est pas un carré ni un rectangle

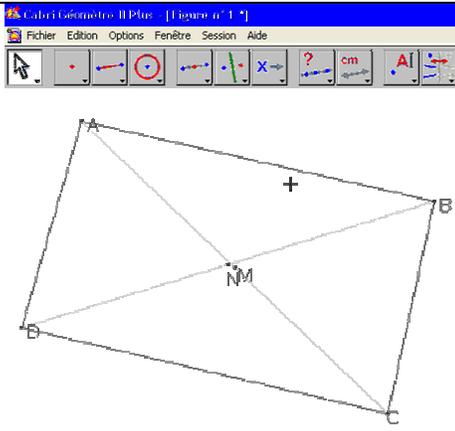
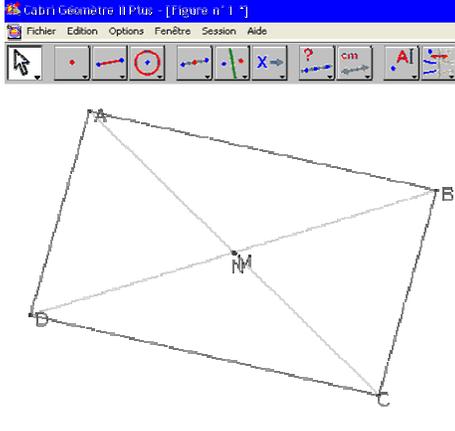


18 :40

Interprétation : La dernière manipulation illustre que Léa prend en compte principalement la forme et non les unités figurales inférieures qui la composent. Elle veut identifier un quadrilatère particulier connu, elle procède par élimination à partir des quadrilatères particuliers qu'elle connaît.

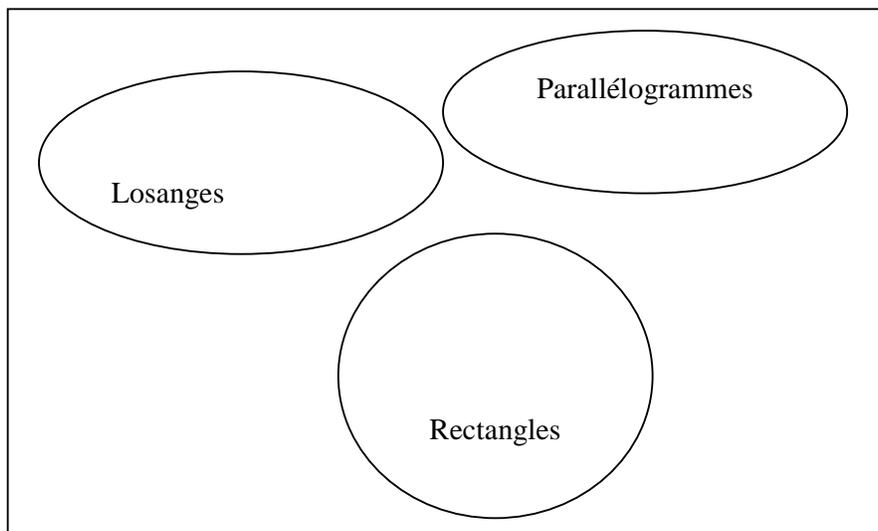
Conclusion : Dans ce binôme, Léa utilise une appréhension perceptive pour la reconnaissance des formes. Sandra ne se contente pas de la perception de la forme, elle identifie aussi les éléments qui composent le quadrilatère et les angles droits absents.

## Satine&amp;Camille - Appréhension perceptive instrumentée « milieux confondus »

<p>S : il est rectangle  C : parallèle ... c'est un parallélogramme  S : mais c'est pas un parallélogramme ! c'est un rectangle !  C : il devient un parallélogramme  S : ça ? c'est pas ça un parallélogramme c'est que les côtés ils sont parallèles ils sont pas parallèles ?  C : ils sont pas parallèles ces côtés ?  S : non  <i>Camille contrôle avec l'outil oracle parallèles sur [AB] et [CD]</i>  S : ne sont pas parallèles ! Mais je t'ai dit ça se voit ho  C : ils sont ... moi je te dis qu'ils sont ...  S : moi je te dis que ça devient un rectangle dans perpendiculaire un rectangle ça a des côtés perpendiculaires</p>	 <p>10 :34</p>
<p><i>Camille déplace le point C</i>  C : il faut que ça soit comme ça et après tu viens la (à propos de l'utilisation de l'Oracle)  <i>Avec l'autre groupe on entend l'Enseignant dire voilà un parallélogramme</i>  C : je t'ai pas dit que c'était un parallélogramme ?  M : vous avez entendu c'est normal !  S : ne sont <b>pas</b> parallèles ! Ils ne sont pas parallèles (en référence à l'Oracle)  S : il devient un parallélogramme essaies de résumer en une phrase le tableau ci-dessous</p>	 <p>12 :02</p>

Interprétation : On peut supposer que Satine appréhende perceptivement la forme du quadrilatère avec ses diagonales pour identifier le rectangle. On peut supposer que pour Satine les quadrilatères appartiennent à des ensembles indépendants schéma 4.

schéma 4



On peut aussi supposer que pour Satine un rectangle n'a pas de côtés opposés parallèles mais quatre angles droits, ce qui expliquerait pourquoi elle opte pour le rectangle alors qu'elle considère que les côtés ne sont pas parallèles. Ainsi, le rectangle n'appartient pas à la classe des parallélogrammes. Camille identifie les côtés parallèles et considère que le quadrilatère est un parallélogramme. L'oracle ne peut valider les droites parallèles car elles n'ont pas été obtenues à l'aide des outils de construction Cabri. Bien que *l'Oracle* invalide la présence des parallèles, Satine&Camille concluent que le quadrilatère est un parallélogramme après avoir entendu l'enseignant en discuter avec le binôme voisin.

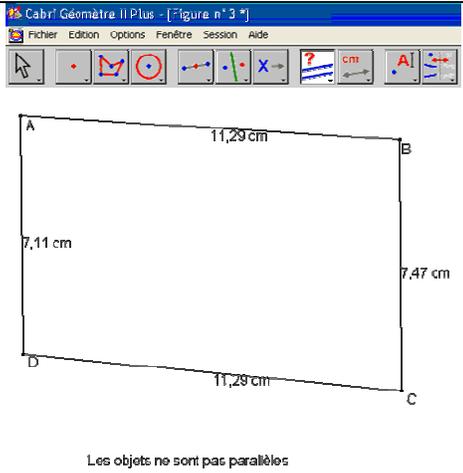
Satine&Camille - Appréhension perceptive instrumentée « milieux confondus »

<p>S : il me saoule avec son pas parallèle, c'est parallèle je suis désolée</p>	<p>35 :57</p>
---	---------------

Interprétation : Dans la manipulation « côtés opposés parallèles » comme le déplacement s'appuie sur l'obtention de la forme d'un parallélogramme, elles identifient le parallélogramme immédiatement. *L'Oracle* considère que les côtés ne sont pas parallèles, mais Satine&Camille vont contre *l'Oracle* et concluent que le quadrilatère est un parallélogramme. Ainsi l'utilisation de *l'Oracle* intervient pour valider le déplacement mais aussi pour valider les réponses de Satine&Camille, cependant elles semblent avoir plus

confiance en leur propre perception que dans les réponses de *l'Oracle*. Ainsi la perception est plus forte que la validation.

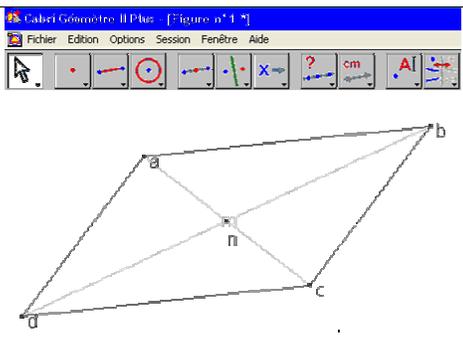
Satine&Camille - Appréhension perceptive instrumentée « côtés égaux »

<p>C : que devient qu'est ce qu'il devient ?          S : c'est pas un parallélogramme regarde !  <i>Oracle et parallèles sur AB et CD</i>          S : ce ne sont pas, ces objets ne sont pas parallèles ! C'est pas un parallélogramme</p>	 <p>42 :14</p>
--	--

Interprétation : Dans la dernière manipulation, Satine n'identifie pas de parallélogramme alors que l'orientation du quadrilatère est poché du parallélogramme. Elle utilise encore *l'Oracle* et cette fois, elle accepte la réponse qui valide son observation.

Conclusion : Satine utilise *l'Oracle* pour valider ses réponse cependant elle accepte la réponse de *l'Oracle* que si celle-ci valide ses propres réponses. En effet, dans les deux premières manipulations, elle conclut que le quadrilatère est un parallélogramme à l'encontre de *l'Oracle*. Pour la dernière manipulation, elle se range du côté de *l'Oracle* qui valide que les côtés ne sont pas parallèles.

Jade&Laura – Appréhension discursive VS appréhension perceptive « milieux confondus »

<p>L : Que devient ABC          J : ils sont parallèles          L : c'est un, c'est un losange ... t'as mis quoi alors pour le truc ?          J : j'ai dit les côtés sont parallèles et          L : non mais ça la          J : ben oui, les côtés sont parallèles et ça devient un losange          L : ce que devient c'est pas la figure, faut pas dire qu'ils sont parallèles          J : mais ils demandent que devient la figure parce que tout à l'heure les trucs ils étaient pas parallèles</p>	 <p>6 :06</p>
--	---

Interprétation : Jade explicite les nouvelles caractéristiques des unités figurales inférieures, nous considérons pour cela qu'elle appréhende discursivement le dessin Cabri qu'elle a obtenu. A l'opposée, Laura cherche à quel quadrilatère particulier elle peut associer le

quadrilatère qu'elle obtient. Dans sa réponse, Jade donne la nouvelle nature du quadrilatère et précise que les côtés sont devenus parallèles. Jade ne se contente pas de répondre à la question, elle mentionne aussi les évolutions, changements, transformations qu'elle a pu observer.

Jade – Appréhension discursive « côtés parallèles »

Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Construis un quadrilatère ABCD.</li> <li>• Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD)</li> </ul>
Observations	<p>Que devient ABCD ?</p> <p>tous les côtés sont parallèles mais ne forment pas d'angles droit... c'est un rectangle parallélogramme</p>
Constructions Déplacement	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD) et que (AD) soit parallèle à (BC)</li> </ul>
Observations	<p>Que devient ABCD ?</p> <p>ABCD est devenu un parallélogramme et tous ces côtés sont parallèles... et leur milieu son</p>

Interprétation : Le déplacement de Jade&Laura a utilisé l'instrument Déplacement associé à la manipulation « milieux confondus », c'est pour cela qu'elles obtiennent dès le premier déplacement un parallélogramme. Dans sa réponse, Jade explicite la nouvelle nature du quadrilatère, les évolutions et transformations des côtés du parallélogramme. Dans la deuxième partie de la manipulation « côtés opposés parallèles » on voit que Jade a commencé à écrire dans ses observations que les milieux sont confondus mais elle s'est arrêtée. En effet, les milieux confondus ne sont pas une observation, mais bien un élément de construction-déplacement.

Jade – Appréhension discursive « côtés parallèles »

Dans la manipulation « côtés opposés égaux » Jade anticipe la deuxième manipulation car elle essaie de construire un parallélogramme en utilisant les milieux confondus. Ainsi, elle obtient tous les côtés opposés égaux. Sa procédure anticipe le deuxième déplacement de la manipulation, c'est pourquoi elle considère que les deux parties (deux côtés opposés égaux et tous les côtés opposés égaux) de la manipulation sont identiques. On retrouve la même procédure que pour la manipulation précédente. Cependant dans cette dernière manipulation l'enseignant intervient et permet de revenir sur un quadrilatère avec uniquement deux côtés opposés de même longueur. Ainsi, Jade&Laura repèrent que le parallélogramme n'est obtenu que lorsque tous les côtés opposés sont égaux.

Conclusion : En utilisant son instrument *Déplacement*, Jade ne peut distinguer les quadrilatères intermédiaires entre le quadrilatère quelconque et le parallélogramme. D'un point de vue raisonnement et réinvestissement de l'instrument *Déplacement*, cette procédure

est très intéressante. Cependant du point de vue de nos objectifs initiaux, c'est-à-dire associer les contraintes à ce qui est construit et déplacé et les observations à la conclusion, cette procédure est plus dangereuse, elle ne permet pas d'obtenir les configurations intermédiaires, et les déplacements ne peuvent pas être associés aux contraintes.

Meddi – Appréhension discursive « milieux confondus »

M : ... madame, madame, si on bouge le point C ça fait un quadrilatère un ...un rectangle

Ete : ça fait un rectangle oui mais de façon générale à quoi ils ressemblent tous ces points ? La tu crois que c'est un rectangle exactement un rectangle ?

M : il est un peu tordu

Ete : ha il est un peu tordu mais il ne ressemble pas à quelque chose que vous connaissez comme figure ?

M : parallélogramme,

W : non,

M : oui il y a des parallèles maintenant

Ete : ha bah oui et si en plus il avait un angle droit se serait un rectangle

M : ben la il en a un, madame, il en a un ça veut dire quatre angles droits il en a 4

*L'Oracle ne fonctionne pas*

Ete : toi ce que tu peux faire c'est tracer une perpendiculaire et regarder si c'est confondu, tu traces une droite perpendiculaire à ce côté qui passe par le point C

Ete : alors est ce que c'était vraiment un angle droit ?

M : de ça oui

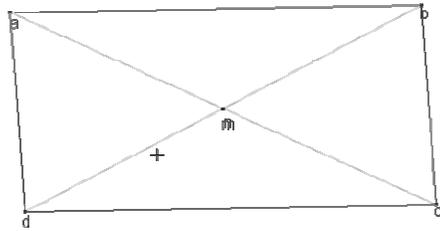
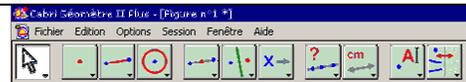
*L'enseignante fait déplacer le point D vers la droite.*

Ete : maintenant tu me bouges ton C pour que les deux points soient confondus

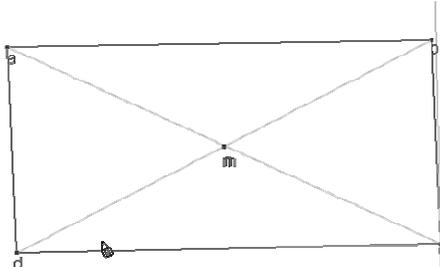
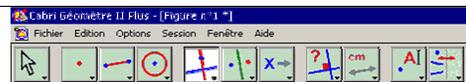
*Meddi déplace le point C pour que B soit sur la perpendiculaire à (DC) passant par C*

Ete : tu vois hein !! non je veux que les deux points soient confondus le M et le N

M : ben ils sont confondus, ha le ... le quoi ?



7 :56

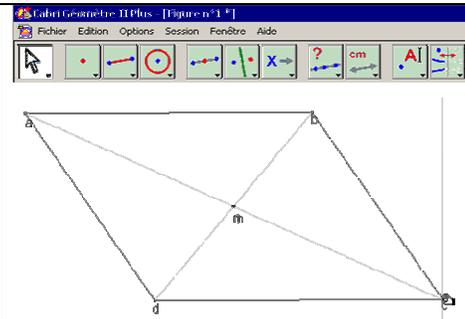


10 :58

Ete : le M et le N... alors est ce que ça devient un rectangle là ?

M : un parallélogramme !

Ete : he ben voilà !



11 :48

Interprétation : Willy&Meddi ont utilisés les outils de Cabri pour valider et contrôler leurs déplacements. Meddi explicite une transformation et la présence de nouvelles caractéristiques dans les unités figurales inférieures, « il y a des parallèles maintenant ». C'est pour cela que nous considérons que Meddi appréhende discursivement le dessin Cabri. L'échange avec l'enseignant permet d'obtenir des positions différentes des sommets mais tout en conservant les mêmes caractéristiques, l'élève peut identifier un quadrilatère qui possède ses milieux confondus mais qui n'a pas d'angle droits. L'utilisation de l'outil *Perpendiculaire* et l'intervention de l'enseignant pour déplacer le point D permet d'invalider une conjecture de l'élève obtenue à partir d'une appréhension opératoire de la figure Cabri.

Willy&Meddi – Appréhension opératoire « côtés opposés parallèles »

M : (AB) soit parallèle à (CD) que devient ABCD ça devient heu ... ça devient

*Construit la perpendiculaire à (BC) par C*

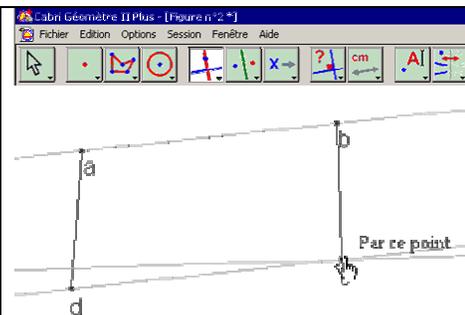
M : perpendiculaire à ce côté par ce point c'est pas perpendiculaire

Et : alors vous avez fait la première case vous avez juste déplacé le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD) donc (AB) parallèle à (CD) ça à l'aire bon qu'est ce qu'est ce que vous obtenez ?

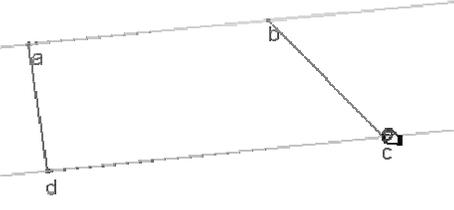
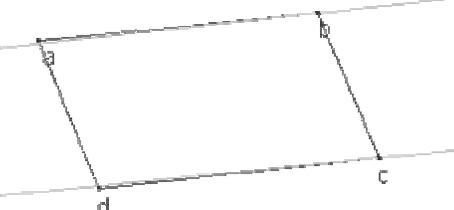
M : un parallélogramme

Et : un parallélogramme ? c'est sur ? est ce que l'on peut mettre le point C ailleurs et que ça fasse toujours parallèle ?

M : non



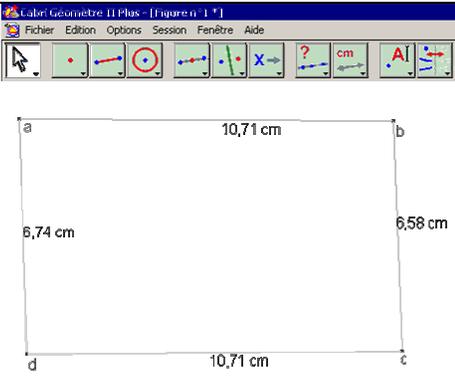
16 :46

<p>Et : ha la c'est plus parallèle mais déplace encore un peu vers la droite ou vers la gauche... ha la c'est encore parallèle non ? à peu près ? Est-ce que c'est un parallélogramme ça, W : quadrilatère</p>	 <p>25 :45</p>
<p>M ramène le point C puis le point D Et : oui et est-ce qu'il a un nom particulier ce quadrilatère M : heu carré Et : c'est un carré ? M : non je rigole ... c'est un parallélogramme monsieur regardez monsieur regardez, regardez c'est un parallélogramme</p>	 <p>26 :05</p>

Interprétation : Dans la manipulation « côtés opposés parallèles » une fois que les élèves considèrent que (AB) et (CD) sont parallèles, Meddi utilise l'instrument *Perpendiculaire* pour tester la présence d'un angle droit. Ainsi il réinvesti l'instrument introduit par l'enseignant. Meddi ne se contente pas de la perception, il valide les conjectures issues de la perception par l'utilisation des outils Cabri.

Tout comme dans la manipulation précédente, l'enseignant propose une configuration des points moins particulière que celle qu'à choisie Meddi. Cependant Meddi ne conserve pas le trapèze et revient rapidement à la configuration du parallélogramme. Il semble que l'association parallèles-parallélogramme soit trop forte de plus il est possible que Meddi n'identifie pas le trapèze comme un quadrilatère connu. En reprenant la position du parallélogramme Meddi revient sur un quadrilatère connu et peut ainsi expliciter une transformation du quadrilatère en un quadrilatère connu.

## Willy&amp;Meddi – appréhension opératoire « côtés égaux »

<p>M : que devient ABC ? ça devient rien</p> <p>W : si un quadrilatère</p> <p>M : ça devient rien !</p> <p>W : si un quadrilatère</p> <p>M : ça devient rien ! Monsieur, la ils ont dit, déplace le point C pour que AB est égal CD j'ai fait ça</p> <p>E : alors qu'est ce que vous obtenez ?</p> <p>M : rien</p> <p>W : un quadrilatère</p> <p>E : rien de spécial c'est un quadrilatère, qu'est ce qu'il a comme particularité ?</p> <p>M : il a deux côtés égaux</p> <p>E : voilà bon</p> <p>W : c'est un quadrilatère</p> <p>E : c'est un quadrilatère mais il a deux côtés égaux quand même</p> <p><i>E part</i></p> <p>M : ouais, que devient ABCD ? Ben c'est toujours un quadrilatère</p> <p>W : qui a, qui a deux côtés égaux</p>	 <p style="text-align: right;">38 : 18</p>
---	--

Interprétation : Meddi ne reconnaît aucune forme connue ce qui l'amène à conclure que le quadrilatère devient rien. Cela peut indiquer que Meddi s'attend à un quadrilatère particulier et que pour lui un simple quadrilatère n'est pas intéressant. Willy ne semble rencontrer aucune difficulté à identifier le quadrilatère. A l'aide de l'enseignant Meddi explicite les deux côtés égaux mais cela ne lui permet toujours pas d'identifier un quadrilatère particulier. La caractéristique deux côtés égaux n'est pas retenue par Willy qui explicite qu'ABCD est toujours un quadrilatère.

Conclusion : Les interventions de l'enseignant permettent de faire évoluer les appréhensions des dessins Cabri chez Willy&Meddi. Meddi parvient à identifier les caractéristiques sur les unités figurales inférieures, cependant il reste attaché à la configuration des points. L'enseignant enrichit les observations dans le sens où il propose d'autres configurations avec les mêmes caractéristiques.

Synthèse :

Dans la manipulation « milieux confondus » tous les élèves identifient le parallélogramme. Cette reconnaissance s'appuie sur une appréhension discursive chez Sandra et Jade, une utilisation de l'Oracle chez Satine&Camille une appréhension opératoire complétée par les échanges avec l'enseignant pour Willy&Meddi.

Dans la manipulation « côtés opposés parallèles » les quatre binômes analysés reconnaissent le parallélogramme. On peut supposer que cette observation provient de l'association

parallèles-parallélogramme. En effet la première définition du parallélogramme proposée aux élèves à l'école primaire est un quadrilatère avec ses côtés opposés parallèles. Ainsi lorsque l'on demande aux élèves de déformer pour obtenir des côtés opposés parallèles, les élèves rapprochent rapidement ce déplacement de l'obtention d'un parallélogramme. Ainsi, il est très difficile de savoir si pour les élèves le parallélogramme fait parti des constructions déplacement ou de l'observation. Cela peut troubler les élèves car cette association ne permet pas la construction du *Déplacement* associé à la manipulation « côtés parallèles ».

Dans la manipulation « côtés opposés égaux » seules Jade&Laura reconnaissent le parallélogramme. Les autres élèves s'appuient sur la forme mais aussi sur les éléments construits et déplacés. Cette prise en compte des éléments déplacés intervient comme obstacle à la reconnaissance du parallélogramme. En effet, la définition du parallélogramme, mise en place dans cette classe, n'est pas explicitement reliée aux mesures des côtés. Pour ces élèves le parallélogramme est un quadrilatère ayant un centre de symétrie. Les binômes peuvent aussi avoir conservé la définition du primaire où le parallélogramme est défini comme un quadrilatère avec des côtés opposés parallèles. Ainsi dans l'observation les élèves doivent faire abstraction des mesures pour se concentrer sur la forme du quadrilatère qu'ils obtiennent.

### 3 Formulation du lien contraintes-conclusion

Les résumés présentés sont issus des échanges entre les élèves. Les résumés de Jade sont issus de sa fiche.

Pour les binômes Satine&Camille, Willy&Meddi et Jade&Laura l'enseignante a mis en œuvre une phase collective sur le contenu du résumé. Cette phase collective est intervenue une fois la manipulation « milieux confondus » réalisée par l'ensemble des binômes. Le binôme Léa&Sandra est dans une classe différente, la phase collective n'a pas eu lieu, cependant l'enseignant a discuté longuement avec le binôme sur le contenu du résumé de la première manipulation.

Satine&Camille-Association des contraintes à la conclusion « milieux confondus »

Si on construit un quadrilatère ainsi que ses diagonales et que l'on prend les milieux de celles-ci et qu'on les superpose : on obtient alors un parallélogramme

Ce résumé contient les constructions, déplacements et observations. Les élèves sont parvenues à expliciter et articuler les différentes actions réalisées au cours de la manipulation.

Les actions sur les unités figurales inférieures sont reliées avec les constructions. L'articulation entre les actions et les observations utilise les mots « si » et « alors » et le code « : ». Ce code sépare les informations concernant les contraintes des informations concernant la conclusion. Ainsi on peut considérer que les élèves ont bien identifié deux éléments distincts : d'un côté les contraintes imposées à la construction de l'autre côté les observations.

Cependant ce code peut aussi refléter une symétrie entre les deux parties du résumé, voire une association.

Satine&Camille - Association des contraintes à la conclusion « côtés parallèles »

**(AD) et (BC) et (AB) sont parallèles à (CD) = parallélogramme**

L'association nous semble encore plus présente dans ce deuxième résumé. En effet, les élèves utilisent un signe d'égalité entre les contraintes et l'observation. Il n'y a plus « on obtient ». Cependant les contraintes ne sont pas explicitées et reliées comme dans le résumé précédent. Cette distinction peut provenir de la manipulation qui n'a pas été aussi évidente. Rappelons que pour Satine&Camille parallélogramme et parallèles semblent associés. Ainsi, dans le déplacement, les unités figurales inférieures ne sont pas prises en compte mais la forme du quadrilatère. L'évolution du quadrilatère est difficilement identifiable par les élèves. Cette difficulté se retrouve dans la formulation du résumé. Les constructions n'apparaissent pas et les déplacements ne sont pas clairement explicités tout comme l'observation. On peut supposer que n'ayant pas travaillé avec les unités figurales inférieures dans la réalisation du déplacement mais uniquement dans la validation du déplacement, les élèves ne parviennent pas à les expliciter et à les articuler avec les constructions et observations.

Les deux élèves n'ont pas terminé la dernière manipulation.

Willy&Meddi – omission des unités figurales inférieures « milieux confondus »

**ABCD se transforme en un parallélogramme**

***Rajouté avec l'enseignant : parce que les milieux sont confondus***

L'évolution du quadrilatère en un parallélogramme est explicitée dans le résumé de Willy&Meddi par l'utilisation du mot « transforme » alors que l'enseignant et l'énoncé du problème utilise le mot « devient ». On peut considérer que l'élève a identifié l'évolution du quadrilatère car il utilise un mot personnel, non proposé par l'enseignant ou la consigne. Cependant cette transformation n'est pas reliée à la réalisation des contraintes. Les élèves ne sont pas parvenus à expliciter les actions réalisées avec le déplacement. Dans les contraintes, seul le quadrilatère est cité par ses sommets, les contraintes liées au déplacement n'apparaissent pas. Willy&Meddi ont pris en compte les unités figurales inférieures dans leur déplacement, on peut alors se demander si l'absence des contraintes est due à une impossibilité de l'expliquer ou à une mauvaise compréhension de la consigne relative au résumé.

L'enseignant (Et) intervient pour faire évoluer le résumé des élèves, il remarque que les contraintes sont incomplètes. Il explicite la partie manquante : « il se transforme quand je lui mets les milieux qui deviennent confondus c'est parce que je lui mets les mêmes milieux que ça devient un parallélogramme, c'est ça qu'il est important d'écrire ». Cette intervention de l'enseignant est prise en compte par les élèves qui complètent leur résumé en indiquant la cause de la transformation.

Willy&Meddi explicitation des unités figurales inférieures « côtés parallèles »

W : Si les 4 segments sont parallèles (... ?)

M : si  $(AD) // (BC)$   $(AB) // (CD)$  (... ?)

On peut supposer que les élèves réinvestissent la remarque de l'enseignant dans ce résumé. En effet dans leurs échanges, les élèves explicitent les causes de l'observation et semblent les considérer dans leur résumé. Nous n'avons pas d'information sur la suite de ce résumé. Nous supposons que les élèves ont exprimés les observations cependant nous n'en avons aucune trace (dans la vidéo). Les élèves explicitent les contraintes sur l'ensemble des côtés. La formulation des contraintes par Willy n'indique pas que les quatre segments sont en fait les côtés d'un quadrilatère, le dessin devient essentiel pour la compréhension des contraintes. La formulation de Meddi n'explique que les contraintes liées au résultat du déplacement. Tout comme pour Willy le dessin reste important pour comprendre que l'objet de départ est un quadrilatère.

Comme pour Satine&Camille, les deux élèves n'ont pas terminés la dernière manipulation.

Jade - Le lien contraintes-conclusion avec l'acteur « milieux confondus »

Ils veulent que l'on fasse un polygone ABCD. Ensuite il faut tracer le milieu de [AC] et de [BD] pour [AC] c'est M et pour [BD] c'est N ensuite superposer les points

Jade explicite ses actions, c'est-à-dire les constructions, et les déplacements effectués au cours de cette manipulation, mais l'observation n'apparaît pas. L'explicitation de ses constructions reprend le vocabulaire de Cabri, au sens où elle utilise le mot polygone issu de l'outil polygone de Cabri et non le terme quadrilatère présent dans la consigne. Cela est aussi visible dans la formulation de ses constructions. Alors que la consigne utilise le terme « construis » Jade utilise les termes « fasse, trace ». Une observation est beaucoup moins concrète d'un point de vue manipulateur que les actions avec Cabri ce qui pourrait expliquer pourquoi les observations n'apparaissent pas. Comme les observations ne sont pas explicitées, le lien contraintes-conclusion n'apparaît pas. Jade utilise une formulation où les acteurs apparaissent, ici on peut supposer qu'elle fait allusion aux enseignants lorsqu'elle utilise « ils veulent ».

Jade - Le lien contraintes-conclusion avec l'acteur « côtés opposés égaux »

J'ai tracé un quadrilatère ABCD et j'ai fait en sorte que ses côtés soient parallèles et donc la figure est un parallélogramme.

Dans ce résumé, il semble que Jade a pris en compte les éléments discutés au cours de la phase collective, son résumé étant plus complet. Elle utilise une formulation moins nominative que la précédente, les côtés ne sont pas nommés par leurs extrémités. Cependant l'acteur est toujours présent.

Rappelons que Jade a utilisé le *Déplacement* de la manipulation « milieux confondus » pour obtenir les côtés opposés parallèles. Ainsi, dans ces contraintes elle n'exprime pas ses déplacements, ses manipulations, elles sont entendues par « j'ai fait en sorte que ». De plus l'articulation entre les constructions-déplacements et observation est ambiguë par l'utilisation

de « et donc ». Elle exprime à la fois la conséquence et l'association. Cette ambiguïté reflète l'ambiguïté de sa manipulation où il est difficile de savoir si le parallélogramme fait parti de ses constructions ou de ses observations.

Ces deux résumés de Jade sont proches de l'environnement Cabri, de la tâche réalisée car elle utilise une formulation, où l'acteur est présent

Jade – résumé copié sur sa voisine « côtés égaux »

**Si tous les côtés opposés ont la même longueur ça devient un parallélogramme.**

Nous supposons que le résumé de Jade est en fait certainement le résumé de Laura. En effet, on peut constater une grande évolution entre les deux premiers résumés et ce dernier résumé. Jade emploie une formulation générale où l'acteur n'apparaît pas. De plus, les connecteurs introduisant les contraintes et la conclusion sont utilisés. Aucun échange entre les deux élèves ne peut nous renseigner sur l'élaboration de ce résumé.

Léa&Sandra - Le lien contraintes-conclusion avec l'enseignant « milieux confondus »

**Résumé de Léa : il faut faire des observations**

Et : oui alors il faut faire des observations c'est pas ... vraiment une phrase ça Léa ?  
... essaie de résumer en une phrase ce qui a été dit qu'est ce qu'on a fait ?

S : on a tracé un quadrilatère ABCD

Et : alors on a construit un quadrilatère ABCD et après qu'est ce qu'on a dit ? Qu'est ce qu'on a obligé ?

S : et sur les diagonales on ... ABCD on trace le milieu on fait le milieu de ABCD

Et : voilà on fait le milieu des diagonales et après donc on construit un quadrilatère ABCD on a le milieu des diagonales et puis qu'est ce qu'on lui fait à ce milieu ?

S : heu ...

L : ben on les fait se superposer

Et : voilà on les superpose et qu'est ce qu'on observe ? qu'est ce qu'on obtient ?

L : que ça fait un parallélogramme

Et : que ça fait un parallélogramme, donc on fait une phrase pour dire ça

S : attends c'est quoi la phrase ?

Et : si on construit un quadrilatère ABCD et puis après on essaie de la compléter pour dire tout ce que vous m'avez dit, que les diagonales ... on prend leur milieu et puis on les met l'un sur l'autre et on obtient

*Résumés de Sandra&Léa :*

S : si on construit un quadrilatère ABCD, on déplace un point de façon que les milieux des diagonales soient superposés ça forme un parallélogramme.

L : on construit un quadrilatère ABCD, on déplace un point de façon que les milieux des diagonales soient superposés ça forme un parallélogramme.

Le premier résumé de Léa ne résume que la tâche demandée à l'élève dans la partie manipulation, c'est-à-dire : « il faut faire des observations ». Par la suite, l'enseignant intervient et leur demande d'explicitier davantage ce qui a été dit et ce qui a été fait. Les questions de l'enseignant permettent aux élèves d'explicitier les actions mises en œuvre et donne une structure au résumé. Les actions sont reprises chronologiquement, l'enseignant ne

donne pas de réponses, il ne pose que les questions. L'enseignant utilise la chronologie de la manipulation pour organiser le résumé. La dernière réplique de l'enseignant est beaucoup plus riche car elle contient déjà les mots et les articulations entre les idées. Cependant la phrase du résumé reste à compléter par l'élève. Au cours de cet échange l'enseignant introduit les expressions « si on construit » ou « on obtient » qui seront réutilisées par la suite dans la formulation des propriétés. Pour ce binôme, cette discussion avec l'enseignant remplace la phase collective qui a eu lieu avec les autres binômes.

Dans leur résumé, les élèves reprennent les constructions, le déplacement, avec le but du déplacement, et l'observation. Ce résumé utilise une formulation générale, et tous les éléments sont présents et articulés entre eux.

Léa&Sandra - Le lien contraintes-conclusion avec l'enseignant « côtés parallèles »

*Résumés de Sandra&Léa :*

L : il faut faire un quadrilatère et déplacer le point C pour faire des parallèles

S : il faut construire un quadrilatère et déplacer le point C pour former des parallèles

Et : il faut construire le quadrilatère déplacer le point C pour faire des parallèles oui et qu'est ce que vous avez obtenu à la fin ? est ce que ça résume ce que vous avez fait

S : parallélogramme

Et : ha donc il faut dire ce qu'on avait au départ et ce qu'on a obtenu à la fin ben oui faut le dire dans la phrase qui résume le tableau ... donc si on construit un quadrilatère et puis ?

S : ça devient un parallélogramme

Et : ses côtés ils sont comment ses côtés ? ça ne devient pas tout seul, ses côtés ils sont comment ?

S : parallèles

Et : ils sont parallèles, mais c'est côtés qui sont comment pour le quadrilatère ?

S : opposés

Et : oui

S : parallèles et opposés

Et : donc non, c'est d'abord si les côtés opposés sont parallèles alors on obtient un parallélogramme

S : parallélogramme

Et : donc la vous faites la même phrase le même genre de phrase qu'il y a ici correctement

S : si on obtient un parallélogramme

Et : non, si on construit un quadrilatère et puis à la fin tu marques ce que l'on obtient

Dans leur résumé, Sandra&Léa n'explicitent que les contraintes, les constructions et déplacements. Le but du déplacement est exprimé, il faut former des parallèles, cependant, rien ne précise que ces parallèles sont des contraintes imposées aux côtés ou le résultat de la manipulation. Cette ambiguïté provient certainement du déplacement global de Léa. Comme nous l'avons exprimé précédemment, l'observation de cette manipulation a été souvent anticipée à cause de l'association parallélogramme-parallèles, les élèves ont déplacé perceptivement pour obtenir un parallélogramme, les parallélogrammes ont découlées du

déplacement. Il est donc possible que les élèves ne sachent pas eux même quels sont les éléments imposés au quadrilatère et quelles en sont les conséquences. Le lien entre les contraintes et la conclusion ne peut être formulé car l'observation finale n'est pas explicitée.

Comme pour le résumé précédent, l'enseignant intervient et discute avec les élèves afin qu'elles complètent leur résumé.

Au cours de l'échange, l'enseignant revient sur l'ensemble de la manipulation, ce qui lui permet de garder une cohérence dans son discours, et de revenir sur les éléments ciblés par le déplacement : les côtés opposés. Ainsi, Sandra&Léa sont amenées à expliciter sur quel contrôle s'appuie le déplacement ainsi que l'observation qui en découle.

La confusion entre les éléments construits et les éléments observés apparaît de nouveau dans les échanges avec l'enseignant. Sandra ne sait plus par quoi commencer, le parallélogramme ou les côtés opposés parallèles.

Nous n'avons aucune information sur le résumé final des deux élèves sur les vidéos.

Synthèse :

Lorsque les élèves explicitent les constructions et les observations dans un même énoncé, ils utilisent une formulation générale « un quadrilatère » « un parallélogramme », éventuellement ils nomment le quadrilatère par ses sommets, mais ne semblent pas considérer le quadrilatère particulier de leur écran Cabri. Cependant pour l'explicitation des contraintes liées au déplacement ils utilisent plutôt une formulation nominative avec éventuellement des verbes d'actions voire avec la présence de l'acteur (Jade). Il est possible que les élèves explicitent les contraintes liées au déplacement à l'aide du déplacement car les signes associés au contrôle du déplacement sont en cours d'intériorisation chez les élèves.

#### **4 Synthèse du travail des binômes sur l'activité Cabri**

A priori, nous avons prévu que les élèves parviendraient facilement à réaliser la consigne et qu'ils utiliseraient un contrôle sur les unités figurales inférieures. Ce déplacement n'est cependant pas si anodin. D'une part certains élèves n'ont pas identifiés les unités figurales inférieures lors du contrôle du déplacement, mais la forme globale comme pour Léa&Sandra. D'autre part certains élèves ont ajouté un contrôle a posteriori, une validation, Camille&Satine et Willy&Meddi. C'est lors de cette validation que les élèves travaillent sur les unités figurales inférieures. La prise en compte des unités figurales inférieures lors du contrôle du déplacement n'est pas systématique. Cependant elle est accessible aux élèves car ils ont tous utilisé un contrôle sur les unités figurales inférieures dans leur déplacement de la manipulation « milieux confondus ». Ce qui est moins évident pour les autres manipulations.

En effet, les tâches proposées dans cette activité Cabri peuvent sembler proches, pourtant les procédures des élèves révèlent des différences dans les déplacements et la prise en compte des unités figurales inférieures.

Dans la manipulation « milieux confondus » tous les élèves ont déplacé avec un contrôle sur les unités figurales inférieures. Tous les élèves sont parvenus à identifier le parallélogramme. On peut supposer que les élèves ont identifié la transformation du quadrilatère initial en un quadrilatère particulier.

La manipulation « côtés parallèles » est bien différente de la manipulation « milieux confondus ». Les élèves n'ont pas déplacé pour obtenir deux côtés opposés parallèles, mais ils ont tous déplacé pour obtenir un parallélogramme. Le déplacement est différent pour chaque binôme. Léa&Sandra utilisent un contrôle perceptif sur la forme du parallélogramme, elles n'identifient absolument pas les unités figurales inférieures. Camille&Satine valident leur déplacement à l'aide de *l'Oracle*, mais le contrôle du déplacement reste perceptif sur la forme du parallélogramme. Ainsi la prise en compte des unités figurales inférieures apparaît lors de la validation et non lors du contrôle du déplacement. Willy&Meddi contrôlent et valident leur déplacement avec l'outil *Parallèle*. Enfin Jade utilise le *Déplacement* associé à la manipulation « milieux confondus ». La réalisation du parallélogramme chez les binômes provient d'une association entre parallèles et parallélogramme. Ainsi le déplacement que nous visions perd son sens car le parallélogramme n'est plus une observation mais peut être considéré comme un élément lié au déplacement. Cette association intervient comme un obstacle dans la construction du lien contraintes-conclusion.

Enfin dans la manipulation « côtés égaux » nous considérons que les mesures ne sont pas des objets géométriques, le contrôle du déplacement pas les mesures ne prend pas en compte des unités figurales inférieures.

Ces trois exercices mettent en œuvre trois contrôles différents. Les élèves n'utilisent les unités figurales que pour le premier exercice, où ils n'ont aucune autre alternative.

Les élèves que nous analysons n'ont pas travaillé sur la partie « j'utilise » par manque de temps.

### ***B. Analyse du processus de genèse instrumentale au cours de la phase collective Cabri***

Cette phase collective intervient lorsque tous les élèves ont terminé la manipulation « milieux confondus ». L'écran de Camille&Satine est projeté sur le mur. Cette phase collective a pour but une explicitation des attentes pour la formulation du résumé.

#### **1 Déplacement des unités figurales inférieures**

Les élèves ont utilisé l'outil milieu sur un segment alors que l'enseignant propose de l'utiliser avec seulement deux points sans construire au préalable le segment.

Une fois que les milieux sont construits l'enseignant demande quelle est la prochaine manipulation.

Ete : on en a un quadrilatère n'importe lequel le milieu des diagonales qu'est ce qu'on fait ?  
 Z : on déplace le point  
 Ete : ça c'est le plus important  
 Elève : On déplace le point C  
 Ete : déplace le point C Camille bon alors déplace le point C et bien c'est parti jeune fille tu déplaces le point C pour que quoi ? Parce qu'elle elle déplace le point C tu lui dis déplace le point C elle le déplace Hugo tu n'as pas été assez précis  
 H : pour que les point M et N  
 Ete : oui alors Zinedine pardon  
 Z : le point M et N ils se confondent

Interprétation :

Le contrôle du déplacement est un élément important car il permet d'exprimer la contrainte liée au déplacement ce qui contribue à la construction de l'instrument *Déplacement* que nous visons. Ainsi l'élève n'explique pas la tâche reliée au déplacement c'est-à-dire qu'elle contrainte il va réaliser grâce au déplacement. L'enseignante est amenée à demander des précisions dans la consigne de l'élève pour que l'élève sherpa parvienne à réaliser effectivement le déplacement demandé dans la consigne. Cette précision dans la consigne incite l'élève à expliciter la contrainte liée au déplacement et à considérer les milieux des diagonales c'est-à-dire les unités figurales inférieures.

## 2 Observation, transformation

Une fois les contraintes réalisées avec l'ordinateur, l'enseignante amène les élèves à expliciter leurs observations.

Ete : bon on déplace le point C pour que les deux points M et N se confondent et ce qu'on nous demande c'est qu'est ce qu'on observe **alors** ? **Si** je déplace le point C si je fais se confondre les deux points M et N qu'est ce que j'observe sur cette figure ? Qu'est ce que ça **devient** on vous dit ? Hervé  
 H : le quadrilatère devient un parallélogramme  
 Ete : il devient un ?  
 La classe : un parallélogramme

Interprétation :

Lorsque l'enseignante reprend la question de l'observation, elle reprend aussi l'ensemble des actions précédemment réalisées, cela lui permet de relier les contraintes aux observations. Pour expliciter les contraintes, l'enseignante introduit les signes *si* et *alors* qui seront repris dans la formulation experte de la propriété. Cette utilisation précoce de ces connecteurs permet de relier les constructions et déplacements à l'observation. Ainsi, l'observation est introduite comme une conséquence liée à la réalisation des constructions et déplacements.

### 3 Formulation du lien contraintes-conclusion

L'enseignant incite à la prise en compte des unités figurales inférieures lors de l'explicitation des contraintes de la manipulation « milieux confondus ».

- 1 Ete : on a dit qu'on a construit quoi **au départ** c'est ça ce qu'on attend de vous comme phrase après le tableau on construit quoi au départ ? Shérif
- 2 S : un quadrilatère ABCD
- 3 Ete : un quadrilatère ABCD qu'est ce qu'on lui **impose** comme **condition** ? on déplace pour qu'il ait quoi ? ça c'est ce qu'on attend de vous à la fin si je construis un quadrilatère ABCD **ET** que je lui fais quoi ? On lui **impose** quoi ? Laura
- 4 L : pour que les deux soient confondus
- 5 Ete : pour que les deux points soient confondus **alors** quand je fais ça qu'est ce que j'observe ?
- 6 Hugo : qu'il a un centre de symétrie
- 7 Ete : qu'il a un centre de symétrie, ben plus simple il s'appelle comment cette figure ?
- 8 Hugo : un polygone
- 9 Ete : oui mais **à la fin** quel est le nom
- 10 Hugo : un parallélogramme
- 11 Ete : oui ça devient un parallélogramme, si j'en prend un au hasard il doit pouvoir me faire une phrase qui résume ce qu'on vient de voir ici, Salomé
- 12 Salomé : ben on dit ce qu'on a construit
- 13 Ete : oui t'as construit quoi ?
- 14 S : un quadrilatère et c'est devenu un parallélogramme.
- 15 Ete : **comment** c'est devenu un parallélogramme ?
- 16 S : en construisant les diagonales
- 17 Ete : et sur ces diagonales on leur a imposé d'avoir quoi ?
- 18 S : les milieux
- 19 Ete : oui que leurs milieux ils soient ?
- 20 S : confondus
- 21 Ete : bon alors tu me fais une phrase complète tu dis quoi quoi quoi une seule phrase j'ai dit... **quand** on construit ...
- 22 S : un quadrilatère
- 23 Ete : un quadrilatère et qu'on lui **impose** que ses ?
- 24 S : diagonales
- 25 Ete : diagonales
- 26 S : soient confondues
- 27 Ete : c'est pas une diagonale qui sont confondues **on lui impose que les milieux des diagonales** sont
- 28 S : confondues
- 29 Ete : **alors ça devient** ?
- 30 S : un parallélogramme

Interprétation : En utilisant « impose » à la ligne 3, l'enseignant relie les contraintes entre elles comme des spécificités qui sont ajoutées au quadrilatère. Cela transparait aussi lorsque

l'enseignant insiste sur le « et » pour relier ce qui a été construit (le quadrilatère) et ce que l'on lui impose par le déplacement.

L'enseignant s'appuie sur l'ordre des actions présentes dans la consigne ce qui lui permet d'introduire une formulation temporelle : *au départ* ; *à la fin* (ligne 1 et 9)

De la ligne 11 à la ligne 29, dans cette dernière partie de la mise en commun, l'enseignant reprend le résumé avec une élève. Dans un premier temps l'élève ne reprend pas les contraintes liées au déplacement, uniquement les contraintes reliées à la construction, elle ne considère que l'unité figurale supérieure : le quadrilatère. Les unités figurales inférieures sont mises en valeur par l'enseignant comme étant les causes de l'observation. L'enseignant motive l'explicitation des contraintes manquantes en utilisant la causalité demandant « comment » (ligne 15) le quadrilatère devient un parallélogramme. On peut voir que l'enseignant garde à sa charge l'expression des connecteurs du résumé, de même pour l'articulation entre les contraintes et la conclusion, l'enseignant utilise une formulation temporelle, avec un connecteur temporel pour l'introduction des contraintes et un connecteur consécutif pour la conclusion.

Conclusion : Au cours de cette phase collective, l'enseignant a utilisé diverses formulations, temporelle, experte, et a introduit plusieurs connecteurs : *si*, *quand*, *alors*. Ces signes participent à la construction du résumé et à l'articulation entre les contraintes et la conclusion. L'enseignant a aussi utilisé des signes associés à la relation de subordination pour articuler les contraintes et la conclusion : comment il devient un parallélogramme. Cela permet d'introduire la relation entre les contraintes et la conclusion comme une relation de causalité, les contraintes transforment le quadrilatère qui devient un parallélogramme.

#### 4 Abstraction du dessin et du logiciel-prise en compte des cas possibles

La prise en compte des cas possible est un passage obligé pour l'appropriation des propriétés. On peut voir que l'enseignant explicite cette généralité à propos du quadrilatère :

Ete : (...) on en a un quadrilatère n'importe lequel le milieu des diagonales qu'est ce qu'on fait ?

Dans les échanges avec les élèves, l'enseignant n'utilise pas de formulation nominative dans ses propres expressions. Dans le début de la phase collective les élèves utilisent le nom des points dans leurs formulations. Donc dans la dernière partie de la phase collective, dans l'échange entre l'enseignant et Salomé, la formulation utilisée est une formulation générale.

#### 5 Conclusion

Les contraintes et les observations sont connectées très tôt dans la discussion avec l'introduction par l'enseignant des signes « si », « alors », « quand ». Les contraintes liées aux déplacements sont introduites comme des spécificités ajoutées au quadrilatère construit avec l'utilisation de « impose ». La discussion permet l'élaboration de deux résumés. Le premier

résumé est structuré par les questions de l'enseignant « construit quoi ? », « impose quoi ? », « observe quoi ? ». Ces questions permettent de lier la construction et le déplacement puis de les articuler avec l'observation. Ces questions sont relativement fermées, les réponses des élèves sont ainsi relativement réduites. L'articulation s'appuie sur la suite des manipulations de l'activité ce qui lui permet d'utiliser une formulation temporelle « au début » « à la fin ». Dans cet énoncé, les élèves utilisent une formulation mixte où les noms de sommets interviennent pour nommer le quadrilatère construit. Le deuxième résumé est largement guidé par l'enseignant dans le sens où il prend à sa charge l'utilisation des connecteurs. Ce deuxième résumé s'appuie sur un connecteur temporel « quand » qui introduit les contraintes et un connecteur de type expert « alors » qui introduit la conclusion. Ce deuxième résumé utilise une formulation générale.

Enfin, la prise en compte des cas possible est elle aussi introduite lorsque l'enseignant indique que le quadrilatère construit initialement est quelconque.

### ***C. Articulation entre environnement Cabri et environnement papier-crayon***

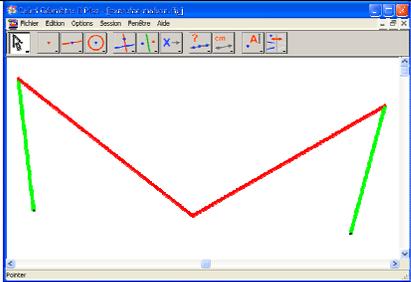
#### **1 Exercice de réinvestissement**

Cet exercice de réinvestissement a été donné aux élèves à la fin de l'activité Cabri. L'enseignant a pour habitude de donner des exercices à faire à la maison à chaque fin de cours. Comme il n'avait pas d'autres exercices disponibles à la fin de la séance Cabri, il a proposé cet exercice aux élèves bien que les propriétés n'aient pas encore été discutées collectivement.

Cette correction collective intervient donc après l'activité Cabri et avant la phase collective d'explicitation des propriétés. Du fait de la place de l'activité avant cette séance, cette phase collective a pour but que les élèves identifient les contraintes de la propriété : « si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés égaux, alors c'est un parallélogramme »

Les élèves ne sont pas parvenus à répondre à l'exercice chez eux. Il semble qu'ils n'aient pas compris la consigne « fermer les lignes brisées ». L'enseignant n'a pas utilisé le logiciel pour illustrer la consigne lorsqu'il a distribué l'exercice, ne voulant pas répondre prématurément au problème. L'enseignant a comparé les lignes brisées à des suites de stylos, refermer une ligne revient à déplacer un stylo pour recoller les extrémités de la ligne.

1



2 Ete : celui-là alors (*la première ligne brisée*) qui a une idée de ce que l'on peut obtenir qu'est ce que vous en pensez voyons voir Jade vas-y

3 J : on peut pas parce que (*attente*)

4 Ete : pourquoi tu dis on peut pas

5 J : les côtés marrons ça passera pas parce qu'il faut que les côtés soient face à face

6 Ete : alors les deux côtés marrons (*rouge sur le dessin*), ici c'est les deux côtés rouges tu nous dis qu'on va avoir un problème parce que les deux côtés rouges ils vont se suivre sur le dessin et toi tu voudrais que quand ils sont aussi long ils soient ?

7 J : face à face

*L'enseignant valide la réponse de Jade en refermant la ligne brisée avec Cabri.*

Interprétation :

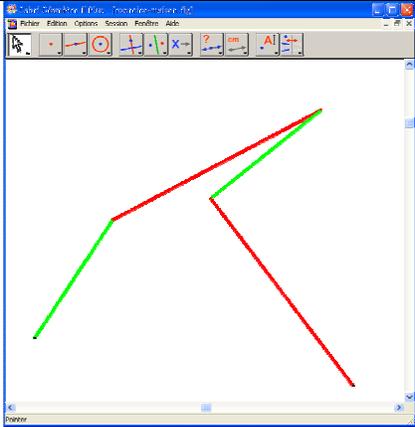
Jade exprime (ligne 5) une condition sur les côtés pour obtenir un parallélogramme qui ne sera pas réalisée lorsque la ligne sera fermée, elle utilise « il faut » cependant il est difficile d'identifier si Jade cherche à exprimer une condition nécessaire ou suffisante. Cette expression est aussi utilisée dans le langage courant où la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante n'est pas systématique.

Comme elle utilise le terme « côtés » (ligne 5) on peut supposer que sa réflexion porte sur le quadrilatère formé lorsque la ligne brisée est fermée. C'est-à-dire qu'elle a peut être refermé la ligne mentalement, elle obtient ainsi un quadrilatère. A partir de ce quadrilatère elle peut identifier le problème des côtés égaux qui ne sont pas opposés. Cependant elle n'exprime pas la contrainte sur la longueur des côtés, elle s'appuie sur les couleurs c'est l'enseignant qui complète la réponse de Jade et précise que les côtés verts sont des côtés de même longueur.

Conclusion :

Jade reste attachée à la représentation pour exprimer les contraintes, car elle utilise les couleurs cependant elle raisonne sur le quadrilatère et non sur la ligne brisée car elle considère des côtés et non segments.

1



2 Ete : qu'est ce que vous en pensez si cette ligne brisée si on essaie de la refermer est ce qu'elle va bien former un parallélogramme ou pas et pourquoi Nathan vas-y

3 N : ben ouais ben si on referme la ligne rouge

4 Ete : si on referme la ligne rouge donc si on vient l'attraper par ici et qu'on la met au bout

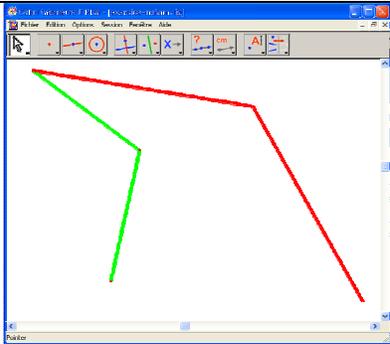
5 N : heu ben elle sera opposée avec une ligne rouge elle sera de la même longueur

6 N : et les opposés seront de même mesure

Interprétation : Nathan utilise le terme ligne et non le terme côté, on peut se demander s'il raisonne sur la ligne brisée ou sur le quadrilatère, c'est-à-dire qu'il referme mentalement cette ligne. Dans un premier temps (ligne 5) Nathan s'appuie sur les couleurs et considère les segments de la ligne brisée pour expliciter que la ligne rouge, qui est déplacée, sera opposée à une autre ligne rouge. Comme il n'utilise qu'une ligne, on peut se demander si Nathan a bien considéré les deux paires de côtés opposés car il ne formule rien sur les lignes vertes. A la fin de son explication (ligne 6) Nathan semble faire référence à une contrainte plus générale. Il ne s'appuie plus sur les couleurs pour exprimer l'égalité des longueurs et on peut supposer qu'il fait référence aux côtés opposés du quadrilatère lorsqu'il parle des opposés.

La propriété n'a pas encore été travaillée avec les élèves pourtant une partie des contraintes commencent à être exprimées par Nathan.

1



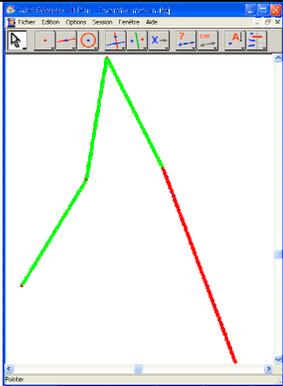
2 Ete : est-ce que ça va nous faire un parallélogramme ou pas vous me trouvez l'argument tout de suite Théo

3 T : on ne peut pas car les deux côtés verts ils sont consécutifs et les deux côtés rouges aussi

- 4 Ete : parce que les deux côtés verts sont consécutifs, les deux côtés rouges sont consécutifs ils ne sont pas opposés
- 5 T : il faudrait que ça fasse un rouge un vert, un rouge un vert
- 6 Ete : il faudrait que ça fasse un rouge un vert, un rouge un vert que ça se suive et qu'on alterne les couleurs tout à fait

Interprétation : Théo exprime l'argument en s'appuyant sur les côtés, certainement en référence aux côtés du parallélogramme, et sur les couleurs. Il ne revient pas aux mesures et s'appuie sur le codage de l'exercice. La contrainte qu'il exprime ne repose pas sur la position des côtés égaux dans le quadrilatère mais sur l'organisation des segments dans la ligne brisée.

1



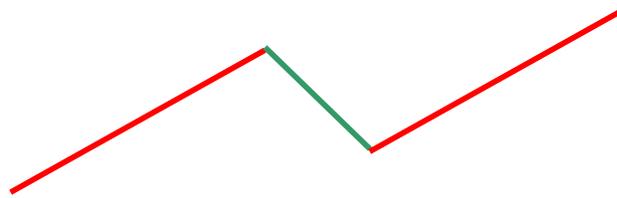
- 2 Ete : si on veut que l'on ait un parallélogramme à la fin qu'est ce qu'il nous faut comme condition pour être sûr que quand on va fermer ça fera un parallélogramme Marina
- 3 M : il faut que les deux rouges et le deux verts ils soient opposés à la fin
- 4 Ete : il faut qu'il y ait deux rouges et deux verts déjà, la je ne peux pas avoir trois verts

Interprétation : Marina reprend le codage des longueurs des côtés (ligne 3) pour exprimer sa contrainte qu'elle relie aux côtés du quadrilatère. Cependant on peut supposer que pour cet exercice, elle ne s'appuie pas sur les longueurs des côtés mais sur le nombre de côtés de même longueur, c'est-à-dire que les côtés égaux sont par paire.

Conclusion de l'exercice :

- 1 Ete : donc il faut que j'ai deux rouges et deux verts deux rouges et deux verts voilà j'ai deux rouges et deux verts (*construit deux segments rouges consécutifs et deux segments verts consécutifs*)
- 2 M : ouais mais il faut qu'ils soient opposés
- 3 Ete : il faut qu'à chaque fois les deux rouges soient opposés et les deux verts soient
- 4 M : opposés
- 5 Ete : opposés donc si je prends les côtés opposés deux par deux alors à chaque fois ils doivent être de la même couleur c'est-à-dire que si je commence par un rouge après
- 6 Classe : un vert
- 7 Ete : après il doit y avoir un vert qui suit on est d'accord un vert qui est consécutif, si j'ai mis un vert juste après
- 8 M : on a un rouge

9 Ete : on a un rouge donc on vient de faire rouge alors il faudrait faire comme une ligne brisée je peux le faire comme ça on va avoir un rouge



Ete : et puis après si on veut que ça se termine j'ai seulement deux côtés opposés ho ben c'est bon, j'ai fait deux côtés qui ont la même longueur (*deux rouges*) donc je peux mettre à la limite n'importe quoi là

10 Classe : non

11 Ete : non la je suis obligée de mettre aussi

12 Classe : même longueur

13 Ete : la même longueur que le vert donc effectivement là (*après le segment rouge*) je vais être obligée de rajouter un autre morceau vert et la si je referme c'est sûr que l'on a

14 Classe : un parallélogramme

15 Ete : un parallélogramme donc c'est si les côtés deux par deux on quoi

16 Théo : on la même longueur

17 Ete : on la même longueur alors c'est sûr que j'ai

18 T : un parallélogramme

Interprétation : L'enseignant conclut cette correction par l'explicitation des contraintes sur les côtés d'un quadrilatère pour obtenir un parallélogramme. Il s'appuie sur l'organisation des segments dans la ligne brisée pour introduire l'organisation des paires de côtés. Ainsi des segments alternés donnent, une fois la ligne brisée fermée, des côtés opposés (lignes 3-7-13).

A la fin de cette conclusion, l'enseignant reformule les contraintes exprimées à l'aide de la ligne brisée en termes de côtés, c'est-à-dire qu'il laisse le vocabulaire de la ligne brisée, reprend le vocabulaire du quadrilatère.

Conclusion :

La contrainte sur les côtés, qui est visée dans cet exercice, possède deux éléments, les côtés opposés forment des paires puis dans chaque paire les côtés sont égaux. L'activité Cabri a permis de travailler principalement sur l'**égalité** des côtés opposés, pas sur la mesure. Dans cet exercice, les élèves travaillent sur les paires de côtés c'est-à-dire sur les côtés opposés.

La résolution de cet exercice se fait dans le registre graphique, le but étant d'identifier si la ligne permet ou non d'obtenir un parallélogramme. Cependant les élèves ne peuvent pas appréhender le dessin perceptivement car le quadrilatère n'est pas représenté. Ainsi l'identification du parallélogramme passe par une étude des unités figurales inférieures ici les segments de la ligne brisée. Ces segments sont analysés suivant leur longueur, par leur

couleur, et leur position dans le quadrilatère, par leur position dans la ligne brisée ou par la déformation mentale de la ligne brisée pour obtenir le quadrilatère.

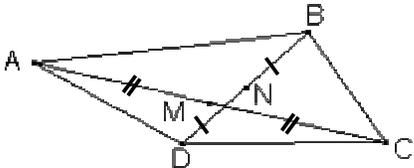
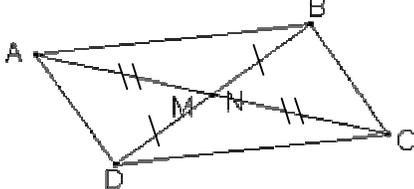
On peut supposer que Jade a utilisé un déplacement mental pour raisonner sur la position des côtés dans le quadrilatère car elle évoque les côtés. Théo semble aussi raisonner sur le quadrilatère car il évoque les côtés, cependant il exprime une condition sur l'ordre des segments dans la ligne brisée.

Ce registre graphique avec la ligne brisée permet d'introduire des signes graphiques pour identifier des côtés égaux et des côtés opposés. Ces signes attachés à la ligne brisée sensibilisent les élèves aux contraintes de la propriété visée par les unités figurales inférieures.

Cependant dans les formulations, la condition est souvent introduite par « il faut » par les élèves et par l'enseignant. Ce terme est couramment utilisé dans le langage courant mais n'est pas systématiquement associé à une condition nécessaire, parfois il est utilisé avec un sens de « il suffit ». Dans les échanges avec les élèves, les deux sens semblent être utilisés, « il faut » étant associé à « pour être sûr » semble avoir le sens de « il suffit ». Cependant « il faut » est aussi associé à « oblige » qui correspond à une condition nécessaire.

Cet exercice était prévu comme un exercice de réinvestissement, il a été utilisé comme un exercice d'explicitation des contraintes de la propriété visée. Dans l'activité Cabri les élèves ont utilisé la mesure dans le contrôle de leur déplacement. La mesure n'étant pas un objet géométrique mais numérique, elle a empêché une prise en compte des unités figurales inférieures. Ici, les mesures numériques ne sont pas utilisées, les élèves sont amenés à décomposer la ligne brisée pour identifier, les côtés du quadrilatère. Cependant pour ce qui est de la construction du lien contraintes-conclusion, il semble que les élèves ont plutôt construit une procédure de résolution attachée à la situation « lignes brisées », c'est-à-dire comment doit être la ligne brisée pour obtenir un parallélogramme. Les élèves n'explicitent pas la propriété détachée, la formulation de la propriété est provoquée par l'enseignant.

## 2 Phase collective d'énonciation des propriétés

Si on construit ...	Alors on observe ...
<p data-bbox="212 300 743 331">Un quadrilatère ABCD de façon à ce que :</p>  <p data-bbox="727 422 857 495">+ M et N confondus</p> <p data-bbox="272 583 824 657">M milieu de [AC] et N milieu de [BD] soient confondus</p>	 <p data-bbox="938 520 1317 552">ABCD est un parallélogramme</p>

Propriété : Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.

- 1 Ete: bon alors qui peut me lire quel est le titre du grand trois donc qu'est ce qu'on va faire dans ce paragraphe Oualid vas-y
- 2 O : reconnaître un parallélogramme
- 3 Ete : donc reconnaître un parallélogramme si tu regarde ce qui est dessiné dans la première colonne est ce qu'il y a quelque chose qui te gêne
- 4 O : non
- 5 Ete : il n'y en a aucun qui te gêne est ce qu'il y en a qui sont gênés par certains dessins Hugo qu'est ce qui ne te plaît pas
- 6 H : ben la première figure
- 7 Ete : la première figure
- 8 H : et ben les côtés ils ne sont pas parallèles
- 9 Ete : elle est tordue
- 10 H : ouais
- 11 Ete : elle est tordue alors Meddi m'a dit ho lala madame vous nous avez dessiné n'importe quoi parce que c'est tout tordu et toi tu voudrais que ce ne soit pas tordu Hugo, tu voudrais que celle qui est dessinée là ce soit quoi
- 12 H : un parallélogramme
- 13 Ete : tu voudrais que ce soit un parallélogramme alors est ce que quelqu'un comprend pourquoi je vous ai dessiné quelque chose de tordu au départ pourquoi au départ je vous ai dessiné quelque chose de tordu exprès je ne me suis pas trompée pourquoi je vous ai dessiné ça Théo
- 14 T : pour qu'on le remette droit
- 15 Ete : pour qu'on le remette droit he bien le travail d'aujourd'hui c'est bien ça on part de quelque chose de tordu on part d'un quadrilatère comme celui qui est là n'importe lequel et a vous de lui ajouter des choses pour qu'à la fin on construise
- 16 Classe : un parallélogramme
- 17 Ete : alors qui a une idée pour le premier de comment on peut le déformer vous l'avez fait avec l'informatique pour obtenir celui qui est à droite allez qu'est ce qu'on

- lui ajoute, allez Marina vas-y
- 18 M : on lui ajoute ses diagonales
- 19 Ete : on lui ajoute ses diagonales je les ai ses diagonales [AC] et [BD]
- 20 M : et après on prend un point M et N
- 21 Ete : on les confond et si on les confond on va obtenir un
- 22 Classe : un parallélogramme
- 23 Ete : un parallélogramme allez vous préparez le rouge le vert,
- 24 T : c'est un parallélogramme parce que les diagonales se coupent en leur milieu
- 25 Ete : exactement alors qu'est ce qu'on rajoute à cette figure on lui rajoute simplement que les points M et N sont
- 26 Classe : confondus
- 27 Ete : confondus
- 28 Elève : c'est déjà la
- 29 Ete : oui je sais bien mais je veux que vous l'avez aussi avec le symbole plus M et N confondus vous pouvez l'écrire aussi en dessous si on construit un quadrilatère de façon à ce que M et N soient confondus alors on observe que quoi alors je vais construire quoi qu'est ce qu'on va construire Théo
- 30 T : où
- 31 Ete : alors on observe que ce qui est à droite
- 32 T : ben que ça devient un parallélogramme
- 33 Ete : voilà vous me l'écrivez en vert à côté ABCD est un parallélogramme alors il y en a qui me l'on dit de façon plus précise qui m'ont dit madame on peut le faire avec une phrase complète sans mettre les points M et N il y en a qui m'ont dit madame c'est parce que les diagonales comment on peut le dire ça comment on va pouvoir le dire Jade tu essaies
- 34 J : il faut que les diagonales elles aient
- 35 Ete : il faut que les diagonales elles aient
- 36 J : le même milieu
- 37 Ete : le même milieu qui peut prendre la suite alors qu'est ce que je construis du coup à la fin qu'est ce que je vais avoir Cédric
- 38 C : alors c'est un parallélogramme
- 39 Ete : alors c'est un parallélogramme

Interprétation : Dans un premier temps (lignes 1-14), l'enseignant introduit les nouvelles propriétés par les quadrilatères quelconques dessinés en colonne de gauche. En commençant ainsi, la transformation du quadrilatère est immédiatement introduite et non par l'enseignant mais par un élève.

Dans un second temps, l'enseignant et les élèves reviennent sur les manipulations effectuées dans l'environnement Cabri (lignes 15-22). L'enseignant utilise une formulation temporelle qui suit les actions de la manipulation pour articuler les contraintes et l'observation. Les contraintes liées au déplacement sont explicitées à l'aide de « ajoute » qui symétrise les contraintes mais conserve l'action et « comment on peut le transformer » qui fait référence au contexte Cabri. L'enseignant s'appuie sur les deux formulations pour articuler l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon.

Dans une troisième étape (lignes 22-33), l'enseignant utilise le tableau où il reprend « ajoute » qu'il traduit par le signe « + ». Ainsi, les déplacements effectués avec Cabri sont exprimés comme des contraintes ajoutées au quadrilatère dans l'environnement papier-crayon. L'utilisation du signe « + » permet de symétriser les contraintes, de faire disparaître la dimension temporelle liée à l'environnement Cabri et supprime l'actant. L'articulation entre les contraintes et la conclusion évolue, l'enseignant s'appuie sur le texte du tableau et utilise une formulation experte « si » « alors » pour articuler les contraintes et la conclusion.

Dans la dernière étape (ligne 33-39), pour relier le tableau et l'énoncé discursif, l'enseignant explique qu'il est possible d'exprimer les mêmes informations mais en utilisant une phrase et de façon plus précise. Cette précision peut être incomprise voire contradictoire car les lettres disparaissent. Dans cette dernière partie, l'enseignant utilise à la fois une formulation temporelle « on part ... à la fin » et une formulation experte pour introduire la conclusion. Les élèves semblent s'appuyer sur la feuille et utilisent « alors » pour expliciter la conclusion alors que l'enseignant utilise « à la fin ». On peut supposer que l'enseignant revient à une formulation temporelle car il est difficile d'introduire un énoncé quantifié et détaché du contexte sans utiliser les quantificateurs.

Conclusion :

Au cours de cette phase collective l'enseignant tient une place importante dans les échanges. Il introduit les signes qui permettent d'articuler les deux environnements. L'articulation entre contraintes et conclusion utilise une formulation temporelle dans un premier temps, puis elle évolue vers une formulation experte.

### III. La séance : Des parallélogrammes particuliers

#### A. Analyse du processus de genèse instrumentale dans la manipulation des élèves

Dans cette séance, nous analysons le binôme Salomé&Léane.

##### 1 Déplacement des unités figurales inférieures

Dans les quatre manipulations, le déplacement est contrôlé par la mesure. Dans les manipulations « côtés perpendiculaires » et « diagonales perpendiculaires », Salomé&Léane déplacent un sommet pour obtenir des angles droits. Elles ont utilisé les outils de mesure disponible dans Cabri et se sont appuyées sur la mesure de l'angle pour contrôler le déplacement. De même dans les activités « côtés consécutifs égaux » et « diagonales égales » les élèves ont utilisé les mesures. Les mesures ne peuvent être considérées comme des unités figurales inférieures du dessin.

S : je peux pas la parce que quand tu bouges celui-là (référence au point A) ça bouge celui-là (référence au point C)

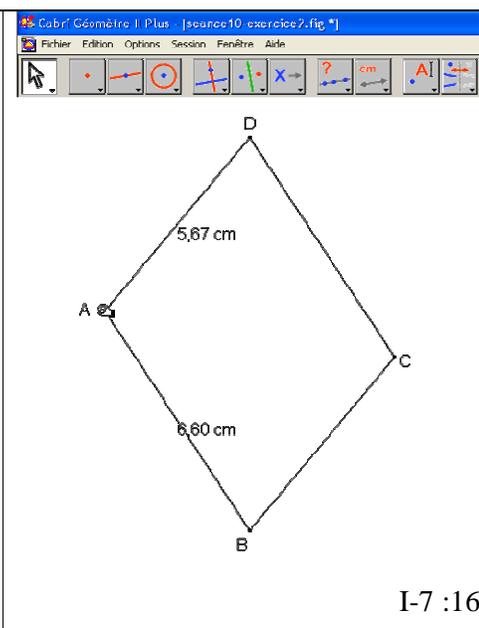
L : il faut que ces deux là ils soient

S : ben oui he ben ça va jamais le faire quand ça bouge celui-là ça bouge celui-là

L : ben oui

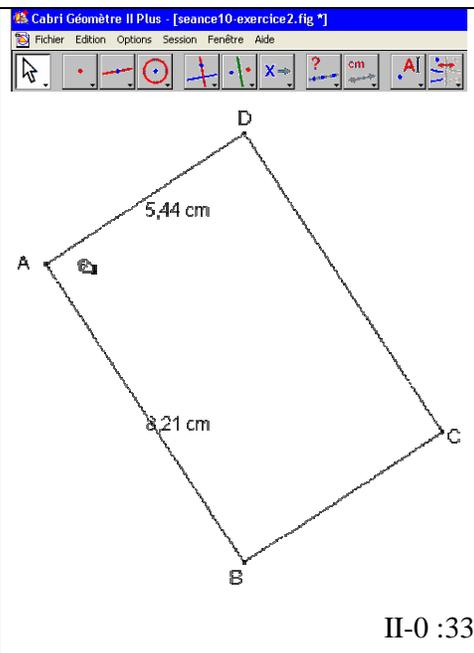
S : he ben tu peux pas les avoir de la même longueur

*L'observation est interrompue par une phase collective.*



*Les élèves recommencent la manipulation après la phase collective*

*Salomé déplace le point A et s'arrête à une configuration proche du rectangle (II-0 :33)*



Interprétation :

Salomé est troublée par l'effet du déplacement sur les points. Dans la construction du parallélogramme, nous avons repris la définition de la classe, c'est-à-dire un quadrilatère qui a un centre de symétrie. Ainsi, lorsque Salomé déplace le point A, le point C bouge aussi et les mesures des côtés [AD] et [AB] changent.

Lorsque Salomé déplace le point A pour obtenir les côtés [AB] et [AD] égaux après la phase collective, elle s'arrête à une configuration des côtés quasi-perpendiculaire (II-0 :33). Ainsi on peut supposer que dans un premier temps, Salomé associe au déplacement instrumenté par la mesure des côtés un contrôle perceptif de la forme. On peut aussi supposer que la manipulation précédente influence ce déplacement et Salomé arrête le déplacement lorsqu'elle identifie un rectangle. Dans la suite de son déplacement elle utilise les mesures.

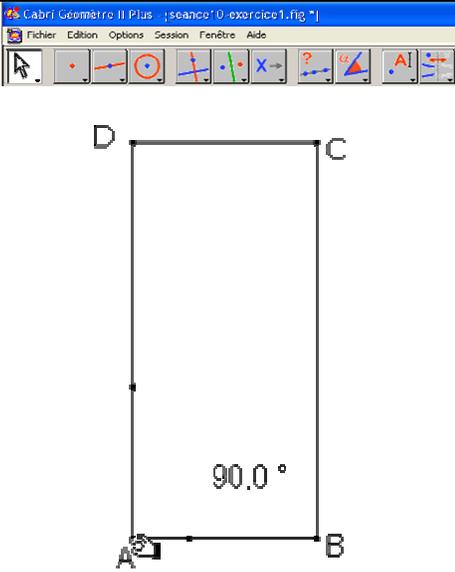
Dans la manipulation « diagonales égales », puis dans la manipulation « diagonales perpendiculaires » Salomé ne trace pas les diagonales. Son contrôle du déplacement ne s'appuie que sur les mesures. Les élèves ne travaillent pas sur les unités figurales inférieures contrairement à nos attentes de l'analyse a priori.

Tous les déplacements de Salomé&Léane ont utilisé la mesure soit des angles soit des segments. Cette utilisation instrumentée du déplacement permet aux élèves de focaliser leur attention sur les mesures. Une fois le déplacement terminé, elles peuvent identifier les évolutions du parallélogramme.

## 2 Quelle appréhension de la figure Cabri dans l'observation de l'unité figurale supérieure ?

Appréhension perceptive chez Salomé contre appréhension opératoire chez Léane

Appréhension perceptive « côtés perpendiculaires » :

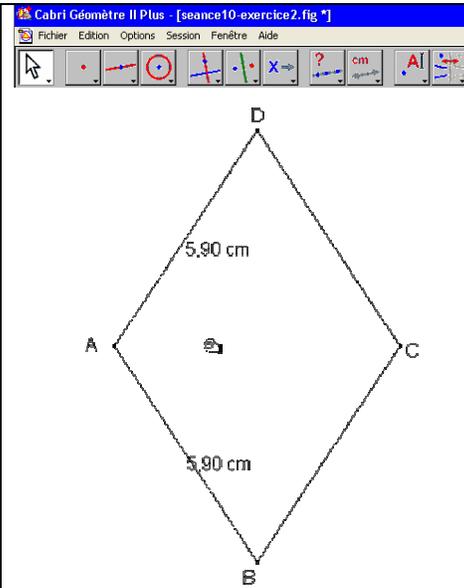
<p>S : ça devient un  L : un rectangle  S : un parallélogramme rectangle  L : non un rectangle</p>	 <p>I-2 :56</p>
--	---

Interprétation : comme les élèves contrôlent le déplacement avec les mesures, elles peuvent identifier une transformation de l'unité figurale supérieure consécutive au déplacement. Lorsque Salomé identifie le quadrilatère comme un parallélogramme rectangle, on peut supposer que la caractéristique *rectangle* complète la caractéristique *parallélogramme* comme pour le *triangle rectangle*. Les deux élèves échangent quelques mots qui semblent convaincre Salomé mais nous ne pouvons les entendre. Elles n'utilisent pas d'outil Cabri pour contrôler cette observation ce qui nous laisse penser qu'elles ont mis en œuvre une appréhension perceptive du dessin Cabri.

On peut remarquer que les élèves réinvestissent le mot « devient » utilisé dans la consigne des activités Cabri précédentes. Dans cette activité, on ne demande pas ce que devient le parallélogramme, on demande simplement ce qu'ils observent. Les élèves expriment d'elles-mêmes la transformation du parallélogramme en un rectangle.

Appréhension perceptive « côtés égaux »

S : ça devient un losange  
 L : le parallélogramme devient un losange

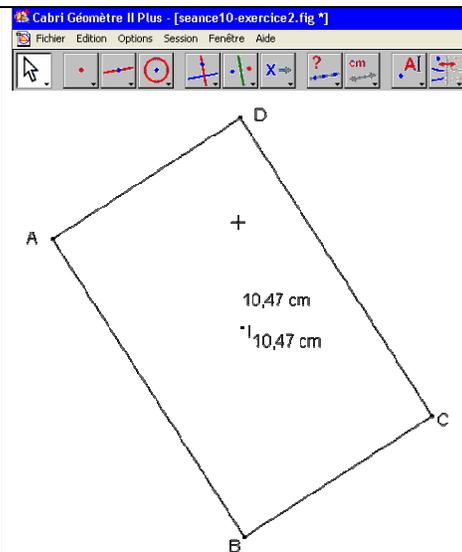


II-0 :52

Interprétation : Salomé&Léane appréhendent le dessin Cabri perceptivement et reconnaissent un losange. Elles expriment la transformation du parallélogramme en utilisant « devient » comme précédemment.

Appréhension opératoire « diagonales égales »

S : qu'observes-tu le parallélogramme reste un parallélogramme ben oui ça reste un parallélogramme  
 L : il devient rectangle  
 S : ben moi je trouve que c'est encore un parallélogramme mesure d'angle quel angle  
*Léane mesure l'angle DÂB qui vaut 90°*  
 S : on va voir les autres ça va être un ...  
*Léane continue de mesurer les angles, les mesures des quatre angles sont affichées*  
 S : c'est un carré  
 L : un carré ça fait la même mesure  
 S : là ça fait pas la même mesure là (*référence aux mesures d'angles*)  
 L : oui mais un carré ça fait les 4 côtés de la même mesure  
 S : ça fait pas les 4 côtés de la même mesure là  
 L : non  
 S : 90 90 90 90  
 L : ça c'est les angles  
 S : ha oui he ben des fois ça mesure la même  
 L : ben quand c'est un carré il a des angles droits mais un rectangle aussi



II-5 :24

<p>S : c'est où distances et longueurs  <i>S veut mesurer les côtés mais obtient le périmètre</i>  L : pourquoi tu fais ça  S : ben parce que je veux mesurer ça (<i>un côté</i>)  L : mais ça c'est le périmètre c'est tout  S : j'ai mis distance et longueur  L : oui mais quand tu cliques sur le ça fait le périmètre  S : attends  <i>Salomé mesure les quatre côtés</i>  L : donc c'est bien un rectangle</p>	
--	--

Interprétation : On peut supposer que la position du rectangle n'étant pas prototypique Salomé ne parvient à l'identifier. Cependant lorsqu'elle dit « le parallélogramme reste un parallélogramme » on peut supposer qu'elle s'attendait à une transformation du parallélogramme en un quadrilatère particulier. Ainsi, Salomé semble avoir acquis le concept que lorsque l'on réalise un changement sur un objet géométrique à l'aide du déplacement, ce dernier se transforme, car ici, elle remarque que le parallélogramme ne se transforme pas. Le fait que Salomé considère le carré une fois que les angles sont mesurés nous laisse penser qu'elle n'avait pas identifié les angles droits. On peut supposer que l'appréhension du dessin a changé avec l'apparition des mesures, Salomé ne s'appuie plus sur la perception de la figure lorsqu'elle reconnaît le carré mais sur les mesures d'angle. Lorsque Salomé mesure les quatre côtés du parallélogramme, elle cherche à valider sa réponse.

Les deux élèves ne parviennent pas à se mettre d'accord, les trois enseignants présent pour cette activité vont intervenir.

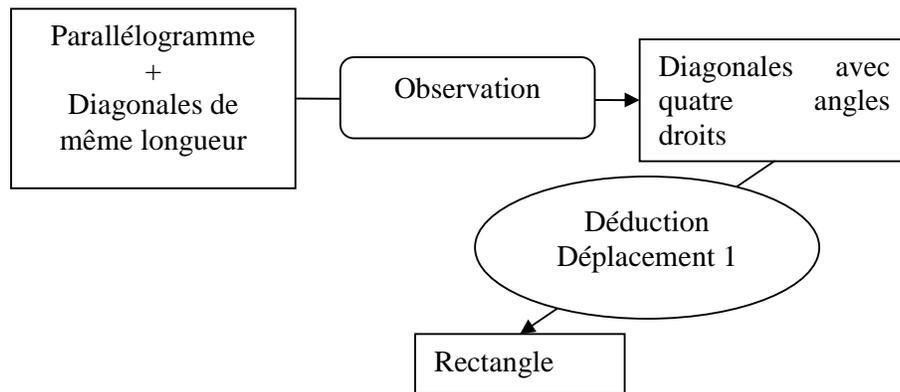
Appréhension opératoire et discussion avec un expert (le chercheur) :

1	S : c'est un rectangle ça ( <i>demande à l'enseignant</i> )
2	Ch : ha
3	L : ben oui
4	Ch : c'est un rectangle ou ce n'est pas un rectangle pourquoi ce serait un rectangle
5	L : parce qu'il a les mêmes mesures des côtés et puis tous ces angles font 90°
6	Ch : toi tu n'es pas d'accord qu'est ce qui te dérange
7	S : on dirait que c'est un parallélogramme
8	Ch : ha
9	<i>Ch tourne l'écran du portable pour que les côtés soient horizontaux et verticaux</i>
10	Ch : et la
11	S : ben oui
12	Ch : c'est quoi la oui quoi
13	S : c'est un parallélogramme
14	Ch : et la encore et la
15	S : ouais la on dirait un rectangle

- 16 Ch : c'est quoi la différence entre un rectangle et un parallélogramme la ici dans la première
- 17 S : ça donne un rectangle
- 18 Ch : en mettant comment
- 19 S : en mettant  $D\hat{A}B$  à  $90^\circ$
- 20 Ch : d'accord donc si on prend un parallélogramme et qu'on lui met un angle droit il devient quoi
- 21 S : un rectangle
- 22 Ch : et la on a quoi
- 23 S : tout à  $90^\circ$
- 24 Ch : et alors ça reste un parallélogramme ou c'est devenu un rectangle mettez vous d'accord
- E part*
- 25 L : donc on met le parallélogramme est devenu un rectangle
- 26 S : non le parallélogramme est resté un parallélogramme

Interprétation : dans un premier temps (lignes 1-8) l'enseignant ne se prononce pas et laisse Léane s'exprimer et expliquer pourquoi elle considère que ABCD est un rectangle. Léane s'appuie sur les informations obtenus à l'aide des outils de mesure de Cabri, c'est-à-dire qu'elle utilise une appréhension discursive du dessin Cabri. Salomé s'appuie sur la perception globale de la forme du quadrilatère « on dirait ». L'enseignant s'appuie sur cette appréhension perceptive et tourne l'écran (lignes 9-15) afin que le rectangle soit dans une position prototypique ce qui pourrait faciliter la reconnaissance du rectangle chez Salomé. Cette dernière semble reconnaître le rectangle, on peut s'interroger sur ses motivations. A-t-elle effectivement identifié un rectangle ou cherche-t-elle à combler les attentes de l'enseignant. Comme Salomé ne semble pas persuadée de sa réponse, l'enseignant revient à la première manipulation (lignes 16-24) « côtés perpendiculaires » afin que l'élève réinvestisse ce résultat dans l'identification de la manipulation « diagonales égales ». Pour que Salomé identifie un rectangle, il faut qu'elle considère le quadrilatère par ses caractéristiques et non plus uniquement par sa forme. L'enseignant reprend la première manipulation et exprime avec Salomé la propriété qui lui est associée (ligne 20). L'enseignant semble vouloir mettre en œuvre un raisonnement déductif qui s'appuie sur la première manipulation illustré par le schéma 5. Dans la discussion avec l'élève, l'enseignant n'explicite pas la propriété liée à la manipulation « côtés perpendiculaires ». De plus il n'articule pas les contraintes : « diagonales avec un angle droit » obtenu par l'observation et « parallélogramme plus un angle droit » prémisses de la propriété énoncée-tiers.

schéma 5



Ce raisonnement qui semble trivial pour l'enseignant ne l'est pas pour Salomé. On peut supposer qu'elle ne parvient pas à articuler les contraintes entre elles. Lorsque l'enseignant part, Salomé exprime son observation par « le parallélogramme est resté un parallélogramme » (ligne 26).

#### Appréhension discursive

- |    |  |
|----|--|
| 1  | S : comment on voit pour que ce soit un parallélogramme faut qu'il soit  |
| 2  | L : les droites sont parallèles et mais un rectangle aussi c'est parallèle                                       |
| 3  | S utilise l'oracle parallèles pour les côtés (DC) et (AB)  |
| 4  | S : donc c'est parallèle   |
| 5  | L : un rectangle aussi c'est parallèle   |
| 6  | S : faut qu'il y ait quoi d'autre  |
| 7  | L : ben il n'y a rien  |
| 8  | S : voilà ben on ne peut pas savoir c'est quoi   |
| 9  | L : ben oui ça peut être les deux mais c'est pareil pour là (référence à la manipulation côtés perpendiculaires) |
| 10 | S : mais c'est un parallélogramme rectangle  |

Interprétation : l'intervention de l'enseignant n'a pas eu l'effet escompté. Le fait que les élèves ne maîtrisent pas le déplacement dur apparaît dans cet échange où Salomé veut valider que le quadrilatère est un parallélogramme, alors que cette caractéristique est une donnée de la situation. On peut supposer que la réalisation du déplacement pour Salomé change la forme mais aussi les caractéristiques initiales. Ainsi on peut avoir un parallélogramme avant le déplacement et ne plus l'avoir après, avoir un quadrilatère quelconque ou un trapèze à la place.

#### Appréhension opératoire et discussion avec un expert (l'enseignant)

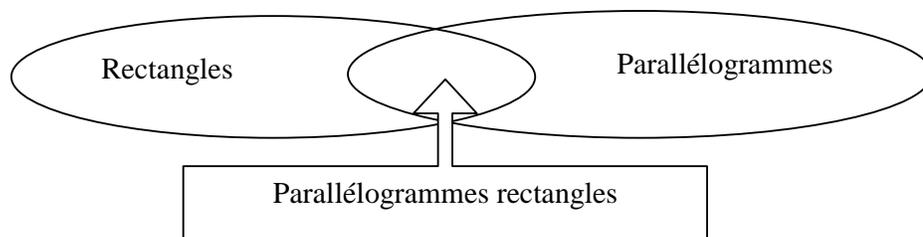
- |   |   |
|---|---|
| 1 | S : mais c'est un parallélogramme rectangle |
| 2 | L : mais ça peut être les deux              |
| 3 | Et : oui c'est les deux                     |
| 4 | S : ben voilà ben j'ai quand même raison    |
| 5 | L : mais oui on peut utiliser les deux      |

- 6 Et : mais heu ce n'est pas la peine de dire trop de choses
- 7 S : elle, elle dit que c'est un rectangle, moi je dis que c'est un parallélogramme ben c'est un parallélogramme rectangle
- 8 Et : ben c'est les deux mais on dit que c'est un rectangle parce que c'est un peu plus que le parallélogramme c'est plus précis donc on essaie de dire les choses les plus précises possibles d'accord parce qu'il a quelque chose en plus que n'importe quel parallélogramme  
*E part*

Interprétation : la réponse de Salomé a évolué car elle considère que le quadrilatère est un parallélogramme rectangle. On peut supposer que le mot rectangle est utilisé comme un qualificatif associé à parallélogramme de la même façon que pour le triangle rectangle. L'enseignant s'appuie sur le fait que le rectangle est plus particulier qu'un parallélogramme. Considérer que le parallélogramme est un rectangle permet d'exprimer ses particularités propres, c'est-à-dire des angles droits.

Comme Salomé ne veut pas considérer simplement le rectangle, on peut supposer que lorsque Salomé précise que le quadrilatère est un parallélogramme rectangle elle exprime que le quadrilatère est à la fois un parallélogramme et un rectangle. Cette redondance peut s'expliquer par une conception erronée des quadrilatères. Il est possible que pour Salomé le rectangle ne soit pas perçu comme un parallélogramme particulier mais comme un quadrilatère particulier, le parallélogramme appartenant à une autre classe. Le quadrilatère qu'elle obtient à la suite du déplacement est très particulier car il appartient à l'ensemble des parallélogrammes et à l'ensemble des rectangles (schéma 6).

schéma 6



L'intervention de l'enseignant ne parvient pas à lever l'ambiguïté dans la formulation de Salomé, elle conforte la conception des quadrilatères de Salomé.

Appréhension opératoire et discussion avec un expert, l'enseignante de la classe

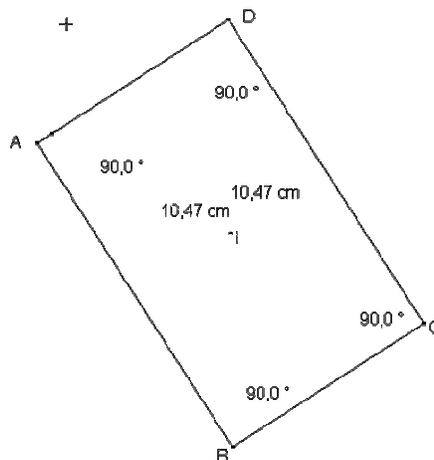
- 1 Ete : ho ça m'étonne (*en référence à ce que Salomé a écrit sur sa feuille*) pour celui-là qu'il soit resté il n'avait rien de spécial alors on lui rajouté quelque chose et il n'a pas bougé
- 2 L : tu vois
- 3 S : ben oui ça peut être un parallélogramme ça peut être un rectangle

- 4 Ete : les deux faites les moi voir ils étaient comment
- 5 L : en fait elle dit que c'est un parallélogramme et moi je dis que c'est un rectangle
- 6 Ete : et vous n'avez pas réussi à trouver quelque chose qui prouve que c'était bien un des deux
- 7 S : c'est les deux
- 8 Ete : alors les parallélogrammes dans la grande famille des parallélogrammes il y aura justement les rectangles à un moment donné mais nous on peut savoir en fait qu'est ce qu'il a de plus le rectangle que n'a pas le parallélogramme classique
- 9 L : il a tous les angles à  $90^\circ$
- 10 Ete : il a des angles droits par exemple il n'en a pas forcément le parallélogramme ou pas toujours
- 11 S : ben si
- 12 Ete : si il a des angles droits celui-là
- 13 S : ben non
- 14 Ete : oui mais attends c'est un parallélogramme lui
- 15 S : oui
- 16 Ete : bon alors quand je vais le redresser justement quand je vais le remettre droit ça va devenir
- 17 S : un rectangle
- 18 Ete : un rectangle
- 19 S : mais aussi un parallélogramme
- 20 Ete : mais c'est aussi exactement tu as tout à fait raison c'est un parallélogramme qui a ses angles droits qui donc devient aussi un rectangle exactement donc les rectangles ils doivent avoir chacun leurs angles droits, pour vérifier sur ta figure si c'est un parallélogramme et aussi un rectangle il faut que tu regardes s'il a quoi
- 21 S : les angles de même mes les angles qui font 90
- 22 Ete : oui par exemple donc vous avez vérifié ça
- 23 L&S : oui
- 24 Ete : vous avez regardé et alors il en avait
- 25 S : ben oui
- 26 Ete : donc c'est un parallélogramme qui est aussi
- 27 S : rectangle
- 28 Ete : mais c'est juste si tu me dis que c'est un parallélogramme et aussi un rectangle par contre celui-là tu ne vas jamais me dire que c'est aussi un rectangle lui
- 29 S : ben non
- 30 Ete : c'est un parallélogramme tout court bon, c'est bon si vous l'aviez vu c'est ce qu'il fallait c'est le plus important donc ici tu peux me mettre est resté un parallélogramme et en plus il est devenu (*E part*)  
*Salomé note sur sa feuille : le parallélogramme est resté un parallélogramme et en plus rectangle*

Interprétation : dès le début dans son intervention (ligne 1) l'enseignant explicite que les parallélogrammes doivent changer lorsque les déplacements sont réalisés. A la ligne 7 de Salomé, l'enseignant semble avoir identifié la difficulté de Salomé ainsi, il explicite (ligne 8) que le rectangle appartient à la famille des parallélogrammes. L'enseignant 3 s'appuie sur la

première manipulation « côtés perpendiculaires » et explicite (lignes 8-21) avec les élèves que le rectangle possède une caractéristique supplémentaire sur les angles que le parallélogramme n'a pas. Comme le rectangle est un parallélogramme particulier, et que si l'on a un rectangle on a nécessairement un parallélogramme, l'enseignant ne peut pas contredire les réponses de Salomé qui continue de dire que le quadrilatère est un rectangle et un parallélogramme. Une fois que les contraintes sur les angles sont explicitées, l'enseignant revient à leur dessin et la présence des angles droits (lignes 22-27). Ainsi, la mesure des angles droits valide le rectangle. Cependant il est fort probable que Salomé ait conservé sa conception des quadrilatères malgré les discussions avec les trois enseignants.

Remarque : Alors que Salomé&Léane n'ont pas construit les diagonales dans cette manipulation, Jade&Laura ont construit les diagonales et Jade a identifié rapidement le rectangle. Jade&Laura ont utilisé la mesure des angles et ont identifié la nature du quadrilatère. On peut supposer que la présence des diagonales contribue à la reconnaissance du rectangle.



## Appréhension opératoire « diagonales perpendiculaires »

*Après avoir mesuré  $\widehat{AIB}$ , et déplacé pour obtenir un angle droit, Salomé mesure  $\widehat{AID}$  puis  $\widehat{DIC}$*

S : qu'observes-tu alors là faut pas dire que c'est pas un parallélogramme quand même alors là c'est pas un rectangle

*Salomé Mesure l'angle  $\widehat{DAB}$   $\widehat{DBC}$   $\widehat{DCB}$   $\widehat{CDA}$*

S : mais tu bouges (la mesure d'un angle), ça c'est lui ça c'est lui

*Salomé mesure les côtés de ABCD*

L : ils ont tous les côtés de la même mesure

S : ils ont tous regarde les côtés sont de mêmes mesure les angles opposés font la même mesure et (ne sait pas quoi dire)

L : ben c'est un parallélogramme

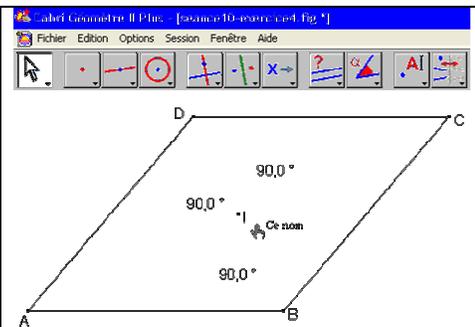
S : il est resté parallélogramme

L : le parallélogramme devient un parallélogramme avec tous les côtés de même mesure

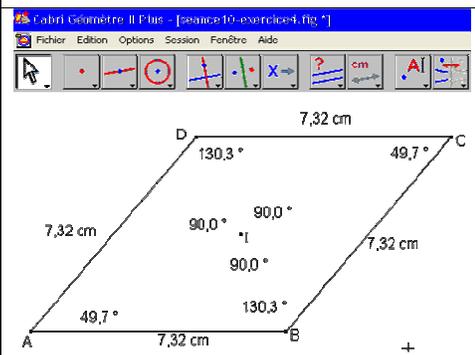
S : de quoi de quoi

L : le parallélogramme devient un parallélogramme avec tous les côtés de même mesure

S : ABCD devient parallélogramme les côtés sont de même mesure



II-17 :40



II-19 :37

Interprétation : la première réplique de Salomé confirme notre hypothèse selon laquelle Salomé n'a pas conscience que le parallélogramme reste un parallélogramme après la réalisation du déplacement, il devient un parallélogramme particulier. Les élèves utilisent les outils de mesure Cabri comme des outils de recherche afin d'identifier une nouvelle caractéristique dans le parallélogramme. S ne se contente plus de sa perception pour identifier la nature du parallélogramme, elle utilise les instruments de mesure. Salomé répertorie les caractéristiques du quadrilatère qu'elle obtient mais ne parvient pas à identifier le losange. Il semble qu'elle ne parvient pas à relier la manipulation « côtés égaux » avec son observation. On peut supposer que cette articulation n'est pas faite soit parce que Salomé ne parvient pas à réinvestir ces observations (quatre côtés égaux) comme contraintes pour utiliser le résultat de la manipulation « côtés égaux », soit elle n'a pas identifié dans la manipulation « côtés égaux » que tous les côtés sont devenus de même longueur. La deuxième hypothèse nous semble plus probable car dans l'observation du losange, les élèves ont utilisées une appréhension perceptive, elles n'ont pas mesuré tous les côtés.

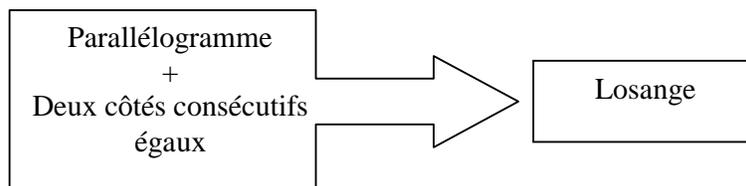
Appréhension discursive et discussion avec l'enseignante

- 1 Ete : c'est quoi un parallélogramme dont les côtés ont la même mesure
- 2 L : rien
- 3 Ete : rien
- 4 S : ben c'est un parallélogramme

- 5 Ete : tu as raison ça c'est vrai mais les parallélogrammes n'ont pas tous les côtés opposés les 4 côtés tous les parallélogrammes n'ont pas les 4 côtés égaux
- 6 S : ben si la preuve
- 7 Ete : oui ça s'en est un mais est ce qu'ils sont tous comme ça
- 8 S : non pas forcément c'est un parallélogramme
- 9 Ete : ha et est ce qu'il aurait un nom ce parallé
- 10 S : je sais pas je l'ai jamais appris
- 11 Ete : il y a quoi comme autre parallélogramme particuliers que vous venez d'étudier
- 12 S : ben ça
- 13 Ete : et avant (*pause*) il a quoi le losange ?
- 14 S : il a deux côtés de même mesure
- 15 Ete : deux ?
- 16 S : deux côtés de même mesure
- 17 Ete : deux juste deux
- 18 S : ben oui
- 19 L : ben non 4
- 20 S : ben non regarde on a noté

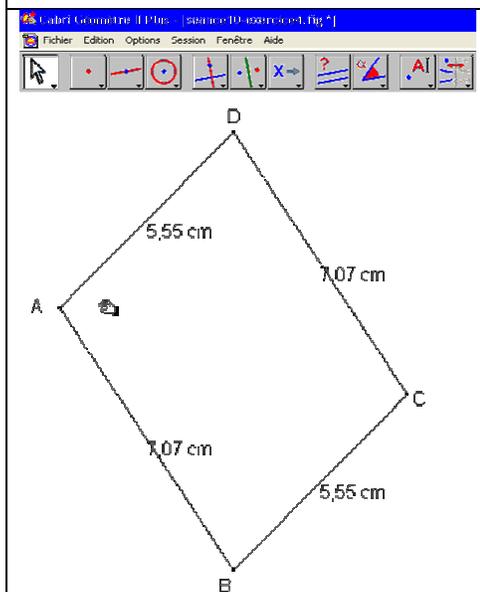
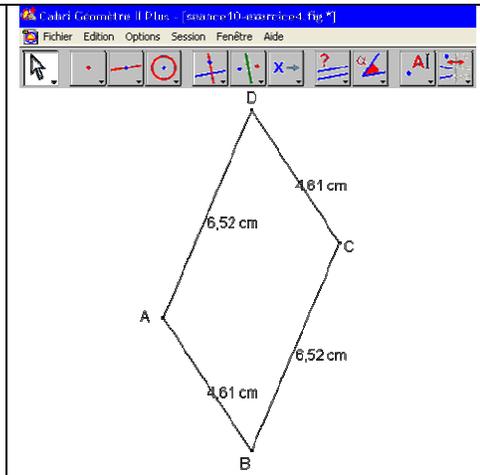
Interprétation : les deux élèves ne reconnaissent pas le losange dans cette position non prototypique (lignes 2-3). L'enseignante introduit elle-même le losange (ligne 13), les élèves explicitent les contraintes liées à la manipulation « côtés égaux ». On peut voir que les élèves n'ont pas identifié que le losange est un parallélogramme avec quatre côtés égaux. Elles ont repris les informations visibles sur leur dessin, c'est-à-dire deux côtés de même mesure (schéma 7).

schéma 7



## Retour sur la manipulation « côtés égaux » avec un expert (chercheur)

- 1 *E ouvre l'exercice 2*
- 2 Ch : ok c'était ça la 2<sup>o</sup> je bouge A bon ça reste toujours un parallélogramme on est d'accord on ne va pas sortir des parallélogrammes donc qu'est ce que l'on aura tout le temps quand on va bouger notre point A qu'est ce qui ne change pas quels sont les côtés qui vont restés de même mesure
- 3 S : DC et AB
- 4 Ch : DC et AB
- 5 S : DC et CB mais non eux deux parce qu'on ne les bouge pas
- 6 *Ch affiche les mesure des 4 côtés et déplace le point A*
- 7 Ch : bon qu'est ce qu'on remarque
- 8 L : les côtés ils changent
- 9 Ch : donc les côtés ils changent toujours de mesure mais il y a quelque chose qui reste quand même en commun qu'est ce qui reste tout le temps
- 10 S : ils restent de même mesure
- 11 Ch : les opposés restent de même mesure d'accord de toute façon ces deux là ils seront toujours égaux (*deux opposés*), ces deux (*deux opposés*) là ils seront toujours égaux toujours si maintenant on fait que ces deux là (*deux côtés consécutifs*) ils sont égaux
- 12 L : he ben ils sont tous égaux
- 13 Ch : pourquoi
- 14 L : parce que lui il va être égaux à lui et lui il va être égaux à lui
- 15 Ch : est ce que tu as compris
- 16 S : en fait si on change deux côtés
- 17 Ch : oui
- 18 S : he ben les autres ils seront égaux
- 19 Ch : oui parce que en fait on change ces deux là mais quand on change celui-là on change celui-là puisque eux ils sont ensemble tout le temps ensemble on grandit celui-là et celui-là grandit tout ce suite celui-là il diminue celui-là il diminue tout de suite pareil ces deux là ils sont toujours ensemble si on grandit celui-là, celui-là il va grandir



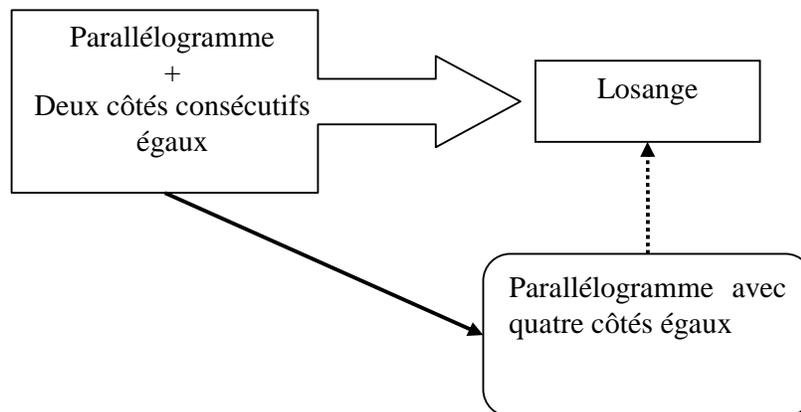
si on le diminue celui-là il va diminuer donc si ces deux là ils sont égaux celui-là il est égal à celui-là, celui-là il est égal à celui-là si ces deux là sont égaux ben les 4 deviennent égaux c'est bon ou ce n'est pas bon

20 S : c'est bon

Interprétation : ce retour avec l'enseignant sur la manipulation « côtés égaux » permet de travailler avec le déplacement dur (ligne 2) ainsi, la conservation des caractéristiques du parallélogramme est introduite et discutée (lignes 2-11). Ce déplacement, qui permet de visualiser les invariances d'une construction, n'a pas été vraiment travaillé avec ces élèves. Cela peut contribuer à atténuer la difficulté de Salomé concernant sa conception des classes des quadrilatères.

Une fois que les élèves ont visualisé que les côtés opposés du parallélogramme restent de même longueur, l'enseignant réalise la contrainte, c'est-à-dire déplace pour que  $AB=AD$ . Ainsi, les élèves peuvent visualiser les quatre côtés devenir égaux en même temps. Dans leur déplacement initial, les deux élèves n'avaient pas, semble-t-il, fait cette observation, ou tout du moins cette déduction. Ainsi, les élèves peuvent associer le déplacement « deux côtés » égaux à l'observation « un parallélogramme avec quatre côtés égaux ». Le schéma 7 issu de la première manipulation des élèves est complété avec l'enseignant et devient schéma 8

schéma 8



La flèche en pointillée n'a pas été explicitée par l'enseignant.

Fin de la manipulation « diagonales perpendiculaires » avec l'enseignante

- 1 Ete : ok donc la on a fait quoi à notre parallélogramme au début c'était un parallélogramme
- 2 L : et la on l'a transformé en parallélogramme
- 3 Ete : et là on a ajouté quoi on l'a transformé comment notre parallélogramme pour
- 4 L : il est devenu particulier
- 5 Ete : il est devenu particulier et comment il est devenu particulier qu'est ce qu'on lui a fait pour qu'il soit devenu particulier

- 6 L : on a tout mis de la même mesure  
 7 S : on a mis un angle droit  
 8 Ete : où ça  
 9 L : sur les diagonales  
 10 Ete : donc vous avez rajouté un angle droit et la il est devenu quoi  
 11 S : ils ont tous la même mesure (*fin de l'activité*)

Interprétation : Léane identifie le parallélogramme qu'elles obtiennent comme un parallélogramme particulier (ligne 4). Lorsque l'enseignant demande d'explicitier le contrôle associé au déplacement de la manipulation « diagonales perpendiculaires » Léane explicite l'observation (ligne 6). Salomé parvient à expliciter les contraintes liées au déplacement (ligne 7), cependant il semble qu'elle n'a pas construit la flèche en pointillée du schéma 8 et conclut que le parallélogramme est à quatre côtés égaux, mais ne parvient pas à identifier le losange.

Conclusion : Les observations de Salomé s'appuient sur la perception globale de la forme, ainsi lorsque la forme globale s'écarte des positions prototypiques elle ne parvient plus à identifier les formes, elle rencontre des difficultés dans ses observations. Léane s'appuie sur une appréhension discursive, ce qui lui permet d'identifier le rectangle dans une position atypique grâce à la mesure des angles droits. Cependant le losange reste une forme difficile pour les élèves. Elles sont parvenues à l'identifier dans la manipulation « côté égaux » uniquement par la perception et non comme un quadrilatère qui a quatre côtés égaux. On peut supposer que cette caractéristique du losange n'était pas disponible chez Salomé&Léane, ce qui expliquerait pourquoi elles ne l'ont pas identifié lorsqu'elles ont obtenu les mesures des quatre côtés égaux dans la dernière manipulation. Enfin, nous remarquons que les élèves n'articulent pas les différentes manipulations. Nous attendions que les élèves réinvestissent les observations des deux premières manipulations dans les deux dernières manipulations, cependant Salomé&Léane ne semblent pas faire référence aux manipulations précédentes dans leur identification. Elles ne parviennent pas à réinvestir le lien illustré d'une manipulation à une autre.

### 3 Formulation du lien contraintes-conclusion

Formulation temporelle et nominative du déplacement « côtés perpendiculaires »

#### Résumé S&L 1

Ce tableau nous dit de transformer un parallélogramme de façon à ce que un de ses angles fasse  $90^\circ$ .

Les deux élèves résumant le tableau en n'explicitant que le contrôle du déplacement (Résumé S&L 1). Les déplacements sont associés à la transformation du parallélogramme.

Le lien entre les contraintes et la conclusion n'apparaît pas car l'observation n'est pas explicitée dans le résumé.

Entre les deux résumés, l'enseignante a mis en place une phase collective sur la première manipulation. Au cours de cette phase collective, l'enseignant revient sur la structure du résumé, il met en particulier en valeur que le résumé doit contenir trois choses : ce que l'on avait au départ, ce que l'on a fait et ce que l'on a à la fin.

Formulation temporelle nominative avec action « côtés égaux »

S : t'as marqué quoi toi

L : moi j'ai marqué au début on a quoi après on fait quoi et à la fin on a quoi

#### Résumé S&L 2

S : au début on nous donne un parallélogramme puis on déplace le point A de façon à ce que  $[AD] = [AB]$  et on obtient un losange.

L : au début nous avons un parallélogramme puis on déplace le point A de façon à ce que  $[AD]$  et  $[AB]$  fassent la même mesure et on obtient un losange.

Cette phase collective influe sur l'organisation du résumé de Salomé&Léane. Léane explicite qu'elle reprend les informations données par l'enseignant pour réaliser son résumé. Ainsi, le résumé des élèves est composé de trois parties (Résumé S&L 2). Les deux élèves expriment les constructions et observation par une formulation générale, alors que le déplacement est exprimé à l'aide des noms des points. Le lien entre les contraintes et la conclusion est exprimé à l'aide d'une formulation temporelle et du verbe « on obtient » qui reprend la chronologie de la manipulation.

Formulation temporelle nominative avec action « diagonales égales »

#### Résumé S&L 3

S : au début on nous donne un parallélogramme puis on déplace A pour que  $AC = BD$  et on obtient un parallélogramme rectangle.

L : au début nous avons un parallélogramme puis on déplace A de façon à ce que  $AC = BC$  et on obtient un rectangle

La manipulation « diagonales égales » n'a pas été aussi évidente que les autres en particulier pour l'observation. Les deux élèves conservent leur formulation mise en place lors de la manipulation précédente. Elles conservent une formulation mixte, où la construction et l'observation sont exprimées à l'aide d'une formulation générale et la contrainte liée au déplacement par une formulation nominative. Salomé conserve son observation c'est-à-dire que le quadrilatère qu'elles obtiennent est un parallélogramme rectangle. Il est difficile de savoir si les interactions avec les enseignants ont eu un effet sur sa perception des classes de quadrilatères.

Formulation nominative avec action « diagonales perpendiculaires »

#### Résumé S&L 4

S : au début on a un parallélogramme puis on déplace A pour que AID soit un angle droit et on obtient un parallélogramme dont les côtés font la même mesure.

L : au début nous avons un parallélogramme puis on déplace A pour que AID fasse  $90^\circ$

et on obtient un parallélogramme dont les côtés font la même mesure.

Dans la manipulation « diagonales perpendiculaire » les élèves reprennent leurs actions pour structurer leur résumé. Elles ne sont pas parvenues à identifier le losange, cependant elles explicitent que le parallélogramme obtenu à l'issue du déplacement possède tous ses côtés égaux (Résumé S&L 4).

Ainsi, le lien contraintes-conclusion apparaît au sens où les contraintes sont exprimées comme modifiant le parallélogramme, le rendant particulier. Dans les résumés de Salomé&Léane les contraintes liées au déplacement sont exprimées avec le nom des points. Elles ne parlent que d'angles ou de segments mais pas de relations de perpendicularité entre deux côtés ou diagonales. Lors du déplacement, les côtés, ou les diagonales, sont perçus à travers leurs mesures, de même pour les angles. Ainsi, il est possible qu'elles n'aient pas considéré les objets géométriques associés aux mesures et qu'elles n'aient pas visualisé les liens entre les sous objets et l'unité figurale supérieure lors du déplacement.

Dans les trois dernières manipulations, les deux élèves organisent leur résumé avec les trois éléments mis en valeur par l'enseignant.

#### 4 Synthèse

Les deux premières manipulations devaient être réinvesties dans les deux dernières manipulations pour identifier le rectangle et le losange. Il semble que Salomé&Léane ne construisent aucun lien entre les manipulations. Il apparaît à plusieurs reprises que Salomé ne s'est pas approprié les propriétés du parallélogramme. Lorsqu'elle déplace le sommet A dans la manipulation « côtés égaux » elle est surprise que tous les côtés changent en même temps. Ensuite, lorsque l'enseignant revient sur cette manipulation, les élèves n'explicitent pas immédiatement que les côtés opposés sont égaux et restent égaux. Ainsi, nous attendions un réinvestissement des propriétés du parallélogramme dans les deux premières manipulations. Dans la manipulation « côtés perpendiculaires » lorsque les élèves réalisent un angle droit, elles mesurent les quatre angles, alors que deux angles consécutifs sont suffisants. De même dans la manipulation « côtés égaux » les élèves mesurent les quatre côtés. Il est possible que les élèves ne réinvestissent pas les propriétés du parallélogramme car elles ne sont pas encore intériorisées, cependant elles ont été introduites plus de trois mois auparavant. Cette hypothèse impliquerait un temps d'apprentissage bien plus long que le temps didactique. On peut aussi supposer que les élèves n'utilisent pas les propriétés du parallélogramme car elles ne maîtrisent pas encore le raisonnement déductif.

L'enseignant intervient régulièrement au cours de l'observation des parallélogrammes lorsque le rectangle et le losange ne sont plus dans une position prototypique. Les moments d'observations révèlent des difficultés dans la classification des quadrilatères, le parallélogramme et le rectangle appartiennent à deux classes différentes, ces deux classes ont des éléments communs : les parallélogrammes rectangle.

Pour que l'articulation entre les registres soit possible, il faut que les élèves parviennent à considérer les unités figurales inférieures dans le registre visuel. Cependant il faut aussi que lorsque les élèves descendent, dans l'appréhension de la figure, aux unités figurales inférieures, ils puissent identifier les relations entre ces unités figurales inférieures et l'unité figurale supérieure. C'est-à-dire que dans un quadrilatère un côté devient un segment, mais il faut que le segment redevienne un côté du quadrilatère. Les élèves doivent descendre dans l'appréhension des sous-unités, par déconstruction dimensionnelle, puis lorsqu'ils remontent à l'unité figurale supérieure, il faut qu'ils puissent reconstruire les liens entre les unités de la représentation graphique, c'est-à-dire qu'ils doivent faire une reconstruction dimensionnelle de la forme. Dans ces activités Cabri, il semble que les élèves parviennent à descendre mais ne parviennent pas à remonter.

L'expression du lien contraintes-conclusion suit le même schéma dans les trois dernières manipulations, c'est-à-dire dans les manipulations qui suivent la phase collective. Les deux élèves expriment le lien entre les contraintes et la conclusion par une formulation mixte. Les constructions et observations utilisent une formulation générale, alors que les déplacements sont exprimés à l'aide d'une formulation nominative. On peut supposer que les élèves n'ont pas considéré les objets déplacés comme des éléments du parallélogramme mais ont focalisé leur attention sur les mesures à obtenir.

Dans cette séance, le lien interne aux propriétés est à construire, mais le lien entre les quadrilatères est aussi à construire. Pour les élèves, le parallélogramme et le rectangle appartiennent à deux classes de parallélogrammes.

Comme pour l'activité « Quadrilatères particuliers » les élèves n'ont pas abordé la deuxième partie de l'activité.

### ***B. Analyse du processus de genèse instrumentale au cours de la phase collective Cabri***

Cette phase collective intervient en deux temps. Tout d'abord au début de la séance, une fois que les élèves ont terminé la première manipulation. Puis à la fin de la séance, comme bilan des manipulations des élèves. La première phase collective est perturbée par des différences entre les dessins Cabri des élèves enregistrés par Camtasia et les élèves qui ne sont pas enregistrés. L'élève interrogé est un élève non enregistré qui va manipuler sur un ordinateur qui est enregistré. Ainsi, le parallélogramme qu'il manipule devant la classe (Figure 8) est différent du parallélogramme qu'il a manipulé précédemment (Figure 7).

Figure 7

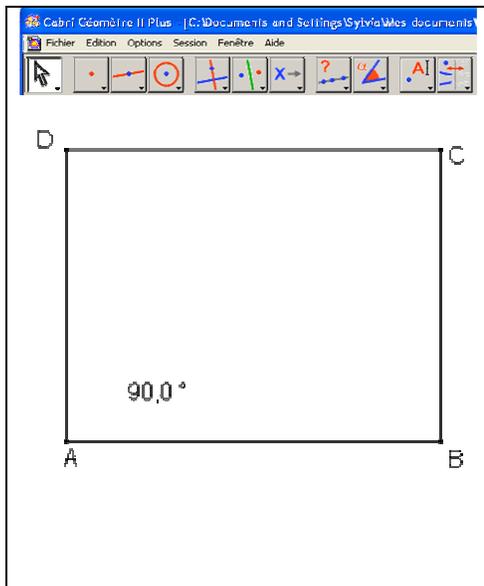
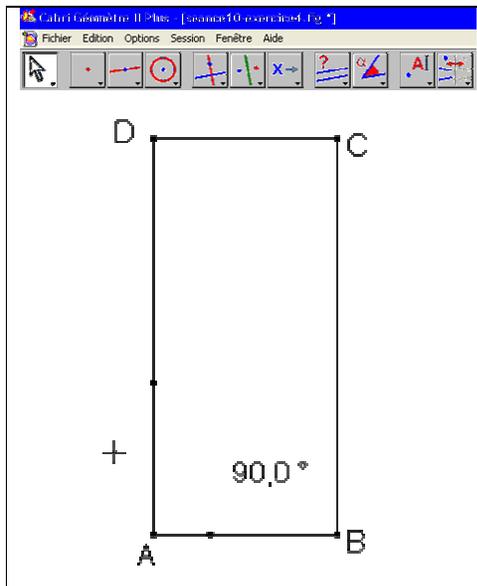


Figure 8



Cette différence entraîne des problèmes dans l'observation du parallélogramme, ce qui met un terme à la première phase collective.

### 1 Déplacement des unités figurales inférieures

Au cours de la première phase collective, les élèves utilisent le déplacement pour réaliser un angle droit. L'enseignant n'intervient pas au sujet de la manipulation de l'outil. Ainsi, la prise en compte des unités figurales au cours du déplacement n'est pas abordée, les élèves étant plutôt centrés sur l'unité figurale supérieure.

### 2 Observation quelle appréhension de la figure Cabri ?

Ete : Zinédine nous dit un carré il a obtenu un carré Zinédine ben oui il a pris un parallélogramme n'importe lequel il a mis un angle droit et c'est devenu un carré  
 S : un rectangle  
 Ete : non mais c'est bon un carré ?  
 S : non  
 Ete : pourquoi c'est pas bon un carré  
 S : parce que t'as pas les mesures  
 Ete : parce que si tu mesures tout, les mesures ne restent pas ne seront pas toutes les mêmes alors Zinédine il a bougé les points et puis il s'est rendu compte que non tu n'as rien bougé c'était tout de la même mesure

La majorité des élèves non enregistrés semblent avoir identifié un carré (Figure 7). Cette reconnaissance du carré s'appuie certainement sur une appréhension perceptive, c'est-à-dire une reconnaissance de la forme. Cette observation est mise en doute par Cédric, un élève non enregistré.

Nous avons analysé la procédure de Cédric à l'aide du journal de session de Cabri. Cédric a utilisé les mesures pour identifier la nature du parallélogramme. Il ne se contente pas d'une appréhension de la forme, il considère aussi les unités inférieures, ici les côtés.

L'analyse de la procédure de Zinédine à l'aide du journal de session montre que Zinédine a effectivement mesuré, mais uniquement les angles, il revient sur la mesure des côtés après la discussion collective.

La comparaison des longueurs n'est pas réalisée concrètement au cours de cette phase collective, cependant les caractéristiques du dessin Cabri, identifiables à l'aide des outils Cabri, sont explicitées. L'analyse des sessions des élèves non enregistrés avec Camtasia montre que la majorité d'entre eux revient sur la première manipulation et mesure les côtés. Ainsi, cette différence dans les dessins Cabri a entraîné une évolution dans l'appréhension du dessin Cabri pour les élèves non enregistrés.

### 3 Formulation du lien contraintes-conclusion

Formulation du résumé manipulation « côtés perpendiculaires »

- |    |  |
|----|--|
| 1  | Ete : le tout premier vous aviez quoi au début qu'est ce que vous avez fait qu'est ce que vous avez eu à la fin c'est ça que je veux savoir 3 choses au début on avait quoi qu'est ce qu'on fait qu'est ce qu'on a à la fin donc au début déjà Laura     |
| 2  | L : on avait un parallélogramme  |
| 3  | Ete : au début on avait un parallélogramme qu'est ce qu'on a fait je vous écoute le premier vous lui avez fait quoi au parallélogramme comment vous l'avez déformé Marina  |
| 4  | M : on a déplacé le point A et on a fait en sorte que ce soit un angle droit   |
| 5  | Ete : trop long, le parallélogramme tu lui as rajouté quoi   |
| 6  | Elève : un angle droit   |
| 7  | M : un angle droit   |
| 8  | Ete : un angle droit donc au début un parallélogramme je lui rajoute   |
| 9  | E&M : un angle droit   |
| 10 | Ete : et à la fin vous avez observé plein de choses alors qui peut me dire ce que vous avez observé à la fin ce parallélogramme vous lui avez mis un angle droit qu'est ce que c'est devenu Zinédine   |
| 11 | Z : un carré   |
| 12 | <i>La différence de parallélogramme entre les élèves entraine une agitation dans la classe l'enseignant met fin à la phase collective sans conclure sur l'observation</i><br>Elève : on fait quoi madame   |
| 13 | Ete : pendant ce temps reprenez votre fiche reprenez votre travail je vous demande à chaque fois dans le bilan qu'est ce que j'ai au départ qu'est ce que je lui rajoute et qu'est ce que j'obtiens à la fin c'est ça qu'on attend de vous à chaque fois |

Dès le début de la phase collective l'enseignant explicite la consigne et ses attentes concernant ce résumé (ligne 1). L'enseignant s'appuie sur la chronologie de la manipulation et utilise une formulation temporelle du lien contraintes-conclusion. Une fois que la structure du résumé est rappelée, l'enseignant échange avec les élèves pour élaborer le résumé de la première manipulation. L'enseignant incite les élèves à formuler les contraintes en réduisant l'explicitation des actions, c'est pour cela qu'il rejette la formulation de Marina (ligne 5) qu'elle considère trop longue. L'enseignant utilise le mot « ajoute » pour introduire la contrainte liée au déplacement (ligne 5). Cela lui permet de supprimer les actions liées au déplacement. L'observation est introduite comme l'état final du parallélogramme. L'observation exprimée par l'élève n'est pas celle que l'enseignant attendait, face à la perturbation des élèves, l'enseignant suspend la phase collective après avoir rappelé une dernière fois ce qu'il attendait du résumé en utilisant une formulation temporelle (ligne 13).

Bilan collectif sur les manipulations Cabri

- 1 Ete : nous allons terminer dites-moi juste pour aujourd'hui je ne vous demande pas d'entrer dans les détails mais juste à partir du parallélogramme quelles sont les deux figures que vous êtes capable d'obtenir en le déformant donc deux parallélogrammes particuliers Sébastien
- 2 S : un losange
- 3 Ete : alors tu nous dis on peut obtenir à partir du parallélogramme on peut obtenir le losange qu'est-ce qu'on peut obtenir aussi comme autre figure à part le losange à partir du parallélogramme en lui rajoutant souvent une seule chose Satine
- 4 S : un rectangle
- 5 Ete : on peut obtenir un rectangle alors pour aujourd'hui déjà ça c'est pas mal mais moi ce que j'aimerais bien on ne sait jamais si vous êtes à l'aise et ça c'est ce qu'on mettra demain dans la leçon est ce qu'il y en a qui on retenu comment on peut déformer le parallélogramme pour obtenir un rectangle qu'est ce qu'il faut que je lui ajoute sans regarder votre feuille qu'est ce qu'il faut que j'ajoute au parallélogramme pour qu'il devienne un rectangle à coup sur une seule chose à lui rajouter c'est quoi un parallélogramme qu'est ce que je lui rajoute pour qu'il devienne un rectangle Salomé
- 6 S : un angle qui fait  $90^\circ$
- 7 Ete : alors toi tu nous dis on n'a qu'à lui rajouter un angle
- 8 S : qui fait  $90^\circ$
- 9 Ete : un angle qui fait  $90^\circ$  on peut le dire mieux que ça
- 10 S : un angle droit
- 11 Ete : un angle droit

Interprétation : dans un premier temps l'enseignant interroge sur les observations, les conclusions (ligne 1 et 3). L'enseignant utilise le mot « déformant » dans sa première question ce qui lui permet de faire référence à l'environnement Cabri, au déplacement et aux actions des élèves. Puis, l'enseignant le mot « rajoutant » dans la deuxième question, et fait disparaître progressivement les actions liées au déplacement. Cette évolution dans les signes est aussi visible dans sa question pour l'explicitation des contraintes

#### 4 Synthèse

Cette phase collective n'a pas permis de travailler la genèse instrumentale du *Déplacement* dans le sens où il n'y a pas eu d'échange sur les schèmes d'utilisation. Dans la formulation du résumé de la manipulation « côtés perpendiculaires » l'enseignant utilise une formulation temporelle par l'utilisation des signes comme : *au départ*, *à la fin*. L'enseignant prend à sa charge les connections entre les contraintes et la relation entre les contraintes et la conclusion. L'enseignant commence l'articulation entre les environnements en utilisant le mot « rajoute » à la place de « déforme » ce qui introduit le passage de l'environnement dynamisme à l'environnement statique.

### C. Articulation entre environnement graphique-dynamique et environnement papier-crayon

#### 1 Phase collective d'énonciation des propriétés

Rappel de la manipulation Cabri :

- 1 Ete : qu'est ce que vous avez fait hier là je suis partie de ce que nous disait Léonie elle se souvenait de parallélogramme et les parallélogrammes c'est tout ça qu'est ce que vous avez fait hier précisément Cédric
- 2 C : on a vu aussi que quand ben on a un parallélogramme
- 3 Ete : oui un parallélogramme qu'on a reconnu par un moyen comme ça et ben quoi
- 4 C : he ben avec ses milieux on a essayé de former un losange
- 5 Ete : on a essayé de former un losange est ce que l'on a essayé de former autre chose qu'un losange Marie
- 6 M : si (*inaudible*) du parallélogramme on pouvait mettre en forme un rectangle
- 7 Ete : on pouvait effectivement mettre en forme un rectangle par exemple si je bouge ce point la on va mettre des lettres ça va être plus facile si ici on a A B C et D souvent c'est le point A qu'on vous faisait bouger mais en fait on peut bouger n'importe quel sommet comment est ce que je le fait bouger, Marie tu te souviens comment on obtient un rectangle
- 8 M : fallait que le point A il devienne un angle droit
- 9 Ete : il fallait que le point A il fallait qu'ici j'ai un angle droit
- 10 M : oui
- 11 Ete : d'accord donc si j'ai un parallélogramme et qu'en plus j'ai un angle droit alors je vais avoir à la fin
- 12 M : un rectangle
- 13 Ete : ha oui mais non moi dans le rectangle il ne m'en faut pas qu'un angle droit
- 14 M : il en faut 4
- 15 Ete : il en faut 4 t'en mets qu'un
- 16 M : non il fallait que les 4 ils aient un angle droit
- 17 Ete : et tu as mis les 4
- 18 M : oui
- 19 Ete : tu les as obligé les 4 ou t'en as mis qu'un toi
- 20 M : non j'en n'ai mis qu'un seul et les quatre ils sont venus après tous seuls
- 21 Ete : ha
- 22 M : ça faisait les opposés directement en faisant un seul point  
*Démontre qu'un seul angle droit suffit pour obtenir un rectangle puis revient sur les activités Cabri elle utilise les parallèles et angle alternes-internes puis que 3 angles droits suffisent*
- 23 Ete : dites-moi vite fait ça, ça doit aller très très vite qu'est ce qu'il faut rajouter au parallélogramme pour que ça devienne un losange je voudrai une condition sur les côtés qu'est ce que vous rajoutez aux côtés du parallélogramme pour qu'il devienne un losange qu'est ce que vous lui avez fait la dernière fois (*interroge d'abord Théo qui revient sur le rectangle, interroge ensuite Salomé*) Salomé
- 24 S : deux côtés de même mesure
- 25 Ete : deux côtés de la même

26 S : mesure et qui se suivent

27 E : et qui se suivent exactement

*Démontre oralement pourquoi deux côtés consécutifs égaux suffisent pour obtenir un losange.*

L'enseignant revient sur les déplacements des élèves, c'est-à-dire les contrôles et les unités figurales inférieures associées qui permettent la réalisation du déplacement. A la fin de l'activité Cabri nous avons conclu que la prise en compte des unités figurales n'avait pas fonctionné suffisamment pour permettre aux élèves d'explicitier les contraintes. Cette prise en compte des unités figurales inférieures apparaît dans ce rappel des manipulations Cabri.

Dans un premier temps, Marie ne parvient pas à ordonner le contrôle du déplacement, sur un angle droit, et les caractéristiques finales du dessin qu'elle utilise pour conclure qu'elle a un rectangle. C'est-à-dire qu'elle sait qu'elle va obtenir un rectangle c'est-à-dire que le parallélogramme va avoir quatre angles droits cependant elle ne parvient pas à expliciter et distinguer quels sont éléments déplacés et les éléments observés. Le verbe « falloir » et le verbe « mettre » sont trop polysémiques pour que Marie et l'enseignant se comprennent et c'est le terme « oblige » renvoyant à la notion de contrainte et au contexte de Cabri qui débloque Marie. A ce moment on voit que le déplacement dans Cabri a bien joué un rôle de médiateur sémiotique de la notion de contrainte car Marie reconnaît qu'elle n'a « obligé » qu'un angle. C'est le signe « oblige » qui sert de lien entre le déplacement et la contrainte. Cela permet à Marie d'exprimer le lien de subordination avec une dimension temporelle avec évocation de l'action pour la contrainte (ligne 20). Marie conclut sur l'expression des contraintes (ligne 22) en utilisant une formulation sans acteur et action, cependant il persiste de légères traces de la dimension temporelle par les temps qu'elle utilise. Cette formulation peut être considérée comme une formulation intermédiaire à la formulation théorique du lien contraintes-conclusion.

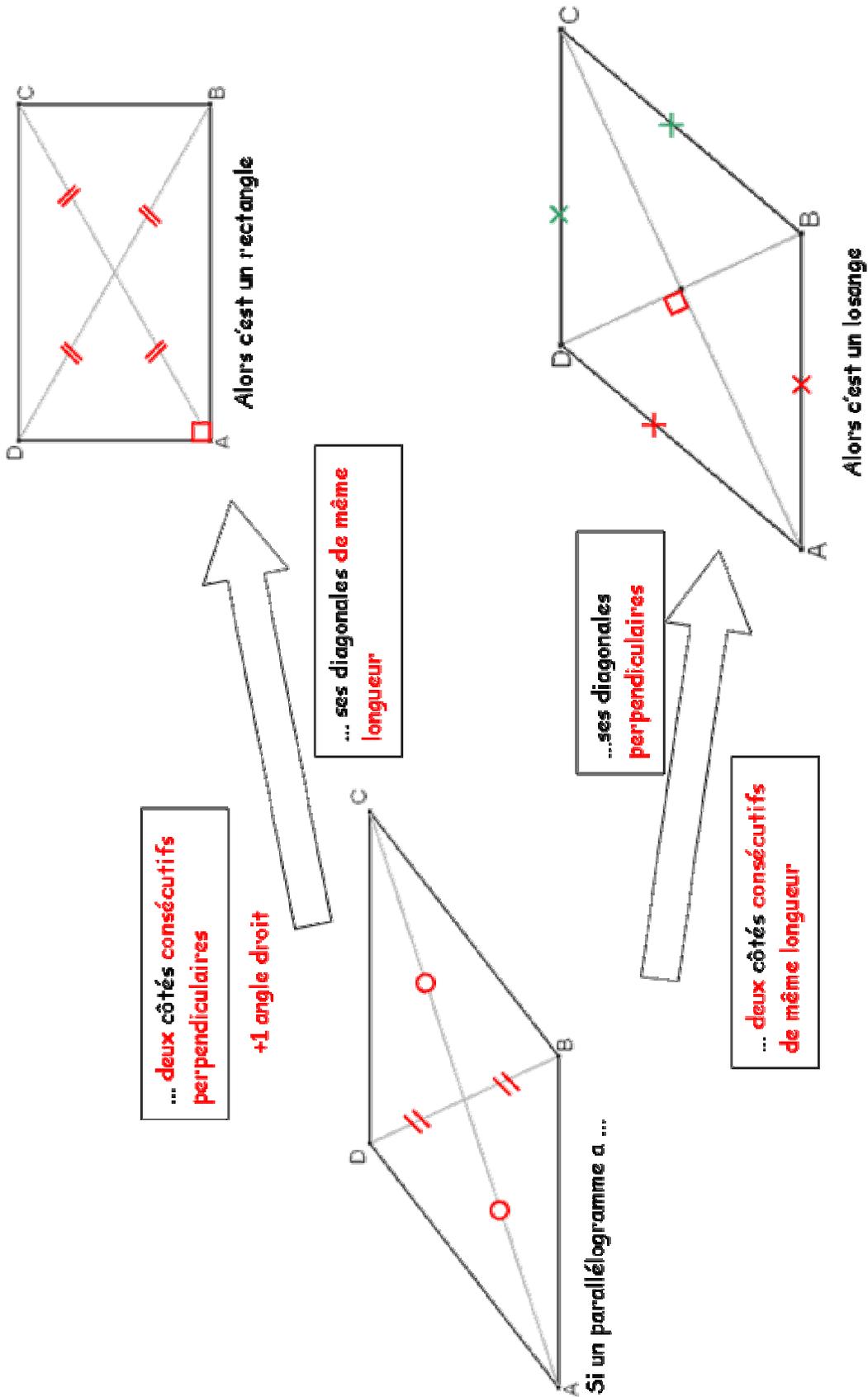
Marie utilise une formulation temporelle pour exprimer l'apparition des angles droits dans le parallélogramme « j'en n'ai mis qu'un seul et les quatre ils sont venus après tous seuls », c'est-à-dire l'observation des quatre angles droits n'intervient qu'après le déplacement. Le retour au déplacement et particulièrement au contrôle du déplacement lui permet d'exprimer uniquement la condition suffisante, ajouter un angle droit au parallélogramme. Ainsi, l'enseignant s'appuie sur les manipulations et les contrôles pour identifier les contraintes suffisantes sur les côtés d'un parallélogramme pour obtenir un rectangle. Au cours de cette discussion, le *Déplacement* intervient comme médiateur pour identifier les contraintes de la propriété. Il permet aussi l'utilisation de signes temporels pour exprimer le lien entre les contraintes et la conclusion.

Une fois que les élèves ont explicité avec l'enseignant leurs manipulations dans Cabri, l'enseignant distribue la trame de cours et la projette sur le mur.

Articulation entre l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon :

- 1 Ete : vous me préparez les stylos de couleurs alors vous savez qu'en rouge c'est ce qu'on a ce qu'on sait au départ et en vert c'est ce qu'on obtient à la fin
- 2 Ete : qu'est ce qu'on lui rajoute à ce parallélogramme sur ses côtés comment vous le transformez sur ses côtés pour qu'il devienne un rectangle Hugo
- 3 H : 4 angles droits
- 4 Ete : quatre d'un coup
- 5 Elève : 1
- 6 Ete : est ce que tu as besoin d'en mettre 4 le minimum que tu as besoin d'en mettre est ce que tu n'as pas besoin d'en mettre encore moins
- 7 H : c'est un parallélogramme
- 8 Ete : oui et comme c'est un parallélogramme il a des côtés qui sont
- 9 H : parallèles
- 10 Ete : parallèles donc ils vont être parallèles 2 à 2 et tu auras à chaque fois que tu auras un angle droit tu vas avoir tous les autres qui vont arriver
- 11 Ete : donc on lui rajoute plus un angle droit (*écrit : + un angle droit*)
- 12 Ete : alors on ne va pas l'écrire vraiment comme ça parce que plus un angle droit qu'est ce que ça veut dire plus un angle droit ça veut dire que là par exemple ou ici (*sur le rectangle du la feuille*) je peux mettre un angle droit (*ajoute en rouge le codage d'un angle droit sur le rectangle*) ça veut dire que je veux lui imposer des côtés qui sont comment un angle droit c'est une façon de dire mais on peut le dire avec les côtés ils doivent être comment ces côtés oui il y a un mot qui correspond à angle droit Séverine
- 13 S : perpendiculaire
- 14 Ete : exactement et combien je veux de côtés perpendiculaires
- 15 S : 4
- 16 Ete : 4 moins que ça juste un angle droit
- 17 S : 2 côtés
- 18 Ete : deux côtés
- 19 Ete : ce que j'ai mis en dessous (*+ un angle droit*) c'est pour vous c'est une façon de l'obtenir la vraie propriété elle est avec les mots qu'on a utilisé la vraie propriété c'est bien si un parallélogramme a ses côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle mais vous vous pouvez le retenir en disant s'il a en plus un angle droit simplement

Cours 3



Avant de travailler sur la fiche, l'enseignant rappelle le code des couleurs (ligne 1), par ce rappel il revient aussi sur la dimension temporelle introduite par le *Déplacement* dans l'activité Cabri. Ainsi, il explicite la relation entre les contraintes et la conclusion par les couleurs et par une formulation temporelle.

Les élèves ont discuté au cours du rappel de l'activité des contraintes suffisantes et l'enseignant a démontré avec eux pourquoi un angle droit suffit, dans un parallélogramme, pour obtenir un rectangle. Cette nouvelle propriété s'oppose à la caractéristique du rectangle « un quadrilatère avec quatre angles droits » introduite à l'école primaire. On voit qu'ici cette caractéristique est très forte chez les élèves avec la réponse d'Hugo (ligne 4) et avec la réponse de Séverine (ligne 13). Les deux élèves reviennent sur les quatre angles droits. L'enseignant ne revient pas sur la démonstration il y fait simplement référence en évoquant les côtés parallèles (ligne 10).

L'articulation entre les environnements Cabri et l'environnement papier-crayon s'appuie sur l'utilisation de différents signes (ligne 2). L'enseignant exprime les contraintes liées au déplacement par deux signes « rajoute » et « transformez ». Ce deuxième signe renvoie à la manipulation dans Cabri, alors que le premier introduit l'association entre les contraintes, c'est-à-dire la formulation des contraintes dans l'environnement papier-crayon. La contrainte liée au déplacement est exprimée à l'aide de l'opérateur plus (Ligne 11), l'enseignant reprend la notation du cours précédent c'est-à-dire l'utilisation de l'opérateur addition « + un angle droit ». Cela permet de supprimer l'actant et symétrise les contraintes. A ce moment de la discussion l'enseignant reste dans un registre visuel en réalisant cette contrainte sur le rectangle lorsqu'il ajoute le code de l'angle droit. Cela lui permet de faire apparaître la contrainte sur le rectangle c'est-à-dire un seul angle droit et non quatre. Ainsi, le dessin du rectangle, qui est la représentation graphique de la conclusion, est représenté avec le codage d'un seul angle droit, ce qui change de la représentation du rectangle de l'école primaire avec le codage des quatre angles droits.

Pour introduire la formulation de la propriété dans le registre discursif (ligne 12) l'enseignant modifie l'expression de la contrainte, elle n'est plus attachée aux angles « plus un angle droit » mais aux côtés « deux côtés perpendiculaires ». Cela lui permet d'exprimer une relation entre les unités figurales inférieures « deux côtés perpendiculaires » en les situant dans l'unité figurale supérieure. Ainsi, l'enseignant relie la formulation discursivo-graphique à la formulation discursive de la propriété en s'appuyant sur un travail sur les unités figurales inférieures.

Dans la ligne 19 l'enseignant explicite la propriété à apprendre, l'expression de la contrainte avec l'opérateur plus est présentée comme un moyen mnémotechnique, un signe, pour mémoriser la propriété, plus particulièrement les contraintes de la propriété.

Dans la suite de cette discussion, l'enseignant reprend la même organisation pour exprimer les trois autres propriétés. Le déplacement est souvent évoqué par l'enseignant quand il pose des

questions sur les contraintes, il utilise les signes « transforme » et « ajoute ». Lorsque les élèves explicitent les contraintes liées au déplacement, l'enseignant code ces contraintes sur le rectangle et le losange, puis il exprime ses contraintes dans le registre discursif. La traduction des actions liées au déplacement dans l'environnement papier-crayon n'utilise plus l'opérateur addition, l'enseignant exprime directement les objets visés par le contrôle du déplacement dans un registre discursif.

Les diagonales de même longueur pour obtenir un rectangle :

- 1 Ete : comment est ce qu'on a changé les diagonales du parallélogramme qu'est ce que vous en avez fait hier pour que ça deviennent un rectangle Jarod
- 2 J : ben heu les diagonales elles font la même longueur
- 3 Ete : elles font la même longueur exactement vous les avez raccourci alors si vous mesurez sur la feuille pour bien vous convaincre parce qu'il y en a peut être qui ne se souviennent plus mesurez-les les diagonales du rectangles  
*Mesure des diagonales du parallélogramme, du rectangle*
- 4 Ete : donc ici vous me codez tu as raison Théo on lui a rajouté d'abord les diagonales qui ont la même longueur c'est-à-dire que je vais avoir les mêmes symboles au lieu des deux ronds ici qui voulaient dire que ce n'était pas la même longueur ben je vais avoir tout partout les mêmes longueurs (*ajoute le codage des diagonales du rectangle de même longueur*) donc ses diagonales de même (*écrit de même longueur*) alors ça devient un rectangle

Cette propriété est la dernière propriété, l'enseignant évoque les manipulations Cabri et utilise le signe « devient » qui sous entend la transformation du parallélogramme en rectangle. Alors que pour les autres propriétés, l'enseignant ne valide pas les contraintes, ici l'enseignant propose de mesurer les diagonales du rectangle afin de valider qu'elles sont effectivement de même longueur. Cette réaction de l'enseignant peut s'expliquer par le fait que le rectangle est principalement construit à partir de ses angles droits, les diagonales de même longueur étant beaucoup moins utilisées. Il est possible que l'enseignant ait choisi de faire mesurer les diagonales du rectangle afin de renforcer cette contrainte souvent oubliée par la mesure, qui comme nous l'avons vu est très forte pour les élèves.

Mémorisation des propriétés

- 1 H : avec le rectangle c'est presque pareil qu'avec heu qu'avec les diagonales avec le losange
- 2 Ete : et dites c'est fait exprès levez tous vos yeux ici si vous voulez m'apprendre tout ça par cœur vous n'y arriverez pas il y a quand même 4 propriétés à savoir par contre ce que dit Hervé et vous pouvez le retenir comme ça dans votre tête
- 3 Ete : vous partez du parallélogramme je me dis il suffit d'en retenir un et vous les avez tous les 4
- 4 Ete : si vous avez retenu parallélogramme côtés même longueur j'ai le losange pour le parallélogramme j'ai côtés et même longueur

- 5 Ete : ce que j'ai sur les côtés pour avoir le losange je vais l'avoir sur le sur les diagonales pour le rectangle c'est-à-dire qu'il n'y a que les mots qu'on change au lieu des diagonales ici c'est les côtés et là-bas l'angle droit je l'ai sur les côtés alors qu'ici il est sur les
- 6 Classe : perpendiculaire
- 7 Ete : oui perpendiculaire il est sur les
- 8 Classe : diagonales

L'enseignant explicite avec les élèves un moyen pour mémoriser les propriétés.

Considérons les deux relations « égalité » et « perpendicularité », complétons ces relations par deux paires d'objets : des diagonales et des côtés consécutifs. Ainsi, il suffit de connaître ces quatre éléments et le résultat d'une combinaison de ces quatre éléments, par exemple l'égalité entre deux côtés consécutifs donne le losange. Par déduction, les élèves peuvent retrouver les trois autres propriétés.

Ce moyen d'appropriation des propriétés s'appuie sur des combinaisons, le lien de subordination que nous avons utilisé pour introduire les propriétés nous semble loin et peu accessible. Il nous semble que les élèves peuvent très facilement revenir à une association. Cependant la formulation théorique des propriétés avec équivalence est relativement proche d'une relation d'association, mais la subordination reste sous-entendue. Ainsi les élèves peuvent aussi revenir à une relation d'association à condition qu'ils aient intériorisé la relation de subordination et qu'elle leur est disponible.

Le jeu des propriétés

- 1 Ete : diagonales donc si j'éteins tout ça vous ne regardez pas votre feuille voyons voir parallélogramme plus les côtés comment pour avoir un losange Marie
- 2 M : ben heu les deux côtés con ben heu
- 3 Ete : les deux côtés consécutifs
- 4 M : deux côtés consécutifs perpendiculaires ... ha non de même longueur
- 5 Ete : bon alors côtés si on part du parallélogramme on lui rajoute un angle droit sur les côtés on obtient quoi on obtient quoi si on a un parallélogramme un angle droit sur les côtés qu'est ce que ça fait à la fin un seul angle droit sur les côtés Léonie
- 6 L : un rectangle
- 7 Ete : un rectangle si maintenant l'angle droit je ne le place pas sur les côtés mais que je le mets donc sur les diagonales si je le mets sur les diagonales l'angle droit un angle droit sur les diagonales qu'est ce que je vais obtenir toujours à partir du parallélogramme si l'angle droit je le mets sur les côtés j'ai le rectangle si je le mets sur les diagonales j'ai qui Hugo
- 8 H : le losange
- 9 Ete : le losange Meddi on t'écoute donc ici on va avoir le losange à partir de là si je lui mets l'angle droit sur les diagonales Meddi le parallélogramme comment je le transforme cette fois sur les diagonales pour obtenir le rectangle
- 10 M : c'est heu ben les diagonales elles ont la même longueur

- 11 Ete : elles très bien les diagonales ont la même longueur Agnès comment je transforme le parallélogramme sur les côtés pour obtenir le losange sur ses côtés tu le raccourcis donc tu lui mets deux côtés qui ont
- 12 A : la même longueur

L'enseignant organise une sorte de jeu où les élèves doivent compléter les formulations de l'enseignant. L'enseignant conserve la responsabilité de l'expression du lien, les élèves doivent retrouver les mots manquants qui sont soit des contraintes soit des conclusions. Ce jeu contribue à la construction d'automatismes par les élèves. L'enseignant exprime la relation entre les contraintes et la conclusion à l'aide de plusieurs signes « on part ... on ajoute ... on obtient à la fin », « si je mets ... je vais obtenir » ; « comment transforme ... pour obtenir... ». Dans toutes ses formulations, l'enseignant utilise un acteur et une référence à des actions ou à une dimension temporelle.

Conclusion :

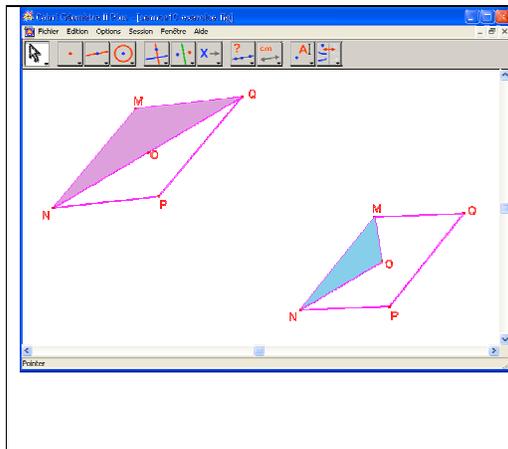
Dans un premier temps, l'enseignant revient sur les manipulations réalisées par les élèves dans l'environnement Cabri. L'enseignant s'appuie sur le *Déplacement* pour expliciter les contraintes à imposer au parallélogramme pour obtenir un losange ou un rectangle. L'environnement Cabri n'est pas présent, il est évoqué à l'aide du signe « transforme ». Ainsi le *Déplacement* construit par les élèves devient un médiateur pour l'identification des contraintes. L'enseignant revient à une dissymétrie dans les contraintes par l'explicitation de l'actant, de l'action et une prise en compte de la dimension temporelle lorsque les élèves rencontrent des difficultés pour exprimer les contraintes. Cependant l'enseignant conclut avec une formulation théorique.

Dans l'explicitation des propriétés, l'enseignant évoque l'environnement Cabri par le signe « transforme ». Ce signe est associé au signe « ajoute » qui permet de relier les contrôles du déplacement dans Cabri à l'explicitation des contraintes dans l'environnement papier-crayon. L'enseignant utilise un grand nombre de formulations, en jouant sur l'explicitation ou non de l'acteur, de la transformation, du temps. Cette diversité dans la formulation des propriétés permet l'usage de signes langagiers qui contribuent à l'avancé du processus de médiation sémiotique pour l'articulation entre les contraintes et la conclusion.

L'enseignant conclut la séance en interrogeant les élèves sur les contraintes ou la conclusion des propriétés travaillées.

## 2 Exercices de réinvestissement

Cette séance intervient après la validation des propriétés de l'activité Cabri « Parallélogrammes particuliers ». Les propriétés qui permettent de résoudre cet exercice ont été discutées puis exprimées à l'aide d'une formulation experte.



On a construit un triangle  $MON$ .

Le point  $P$  est le symétrique de  $M$  par rapport à  $O$ , le point  $Q$  est le symétrique de  $N$  par rapport à  $O$ .

On a tracé ensuite le quadrilatère  $MNPQ$ .

Pourquoi  $MNPQ$  est-il un parallélogramme ?

David dit qu'il peut obtenir un losange, comment peut-il y arriver en modifiant le triangle  $MNQ$  ?

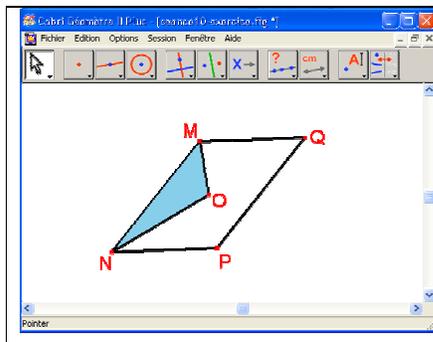
Comment peut-il y arriver en modifiant le triangle  $MON$  ?

Leïla dit qu'elle peut obtenir rectangle comment peut-elle y arriver en modifiant le triangle  $MNQ$  ?

Comment peut-elle y arriver en modifiant le triangle  $MON$  ?

Cet exercice est l'exercice de la partie « j'utilise » de l'activité Cabri « Parallélogrammes particuliers ». Nous ne demandons pas de formuler un raisonnement déductif mais d'explicitier quelles sont les contraintes à imposer aux triangles pour que le parallélogramme devienne un rectangle ou un losange.

Très peu d'élèves sont parvenus à terminer cette partie de l'activité, il restait trop peu de temps.



Comment obtenir un rectangle en modifiant le triangle  $MON$  ?

Comment obtenir un losange en modifiant  $MON$  ?

- 1 Ete : comment est-ce qu'il faut que je le (*le triangle bleu*) modifie pour que la figure entière  $MNPQ$  devienne par exemple on va dire un losange cette figure bleue elle vous fait penser par exemple je sais pas moi aux côtés ou aux diagonales à quelque chose Sébastien il faudrait mettre quoi dans ce triangle pour avoir un losange
- 2 S : avec un angle droit
- 3 Ete : il faudrait un angle droit alors mieux que ça tu me le dis mais vraiment précisément faudrait un angle droit où Sébastien
- 4 S montre le point  $O$
- 5 Ete : au niveau du point  $O$  donc ça veut dire qu'il faudrait un triangle comment tu vas pas me dire un triangle avec un angle droit mieux que ça un triangle
- 6 S : rectangle
- 7 Ete : rectangle donc il faudrait que ce triangle soit un triangle rectangle
- 8 S : en  $O$
- 9 Ete : en  $O$  alors voyons voir vous vérifiez vite fait si je lui rajoute hop vous m'arrêtez quand vous pensez que c'est bon on ne s'occupe que de cet angle là est ce que j'ai obtenu un losange

10 Classe : non

*La cloche sonne, fin du cours*

Dès le début de l'exercice (ligne 1), l'enseignant introduit une prise en compte des unités figurales inférieures en exprimant les diagonales et les côtés. Sébastien parvient à identifier la contrainte sur l'unité figurale inférieure (ligne 2 et 4) mais ne situe pas cette unité figurale dans le triangle. C'est l'enseignant (ligne 5) qui commence à l'explicitier, l'élève ne fait que terminer (ligne 6). L'enseignant réalise lui-même le déplacement et exprime (ligne 9) l'objet ciblé par le contrôle du déplacement c'est à dire l'angle MÔN. Cependant les élèves ne reconnaissent pas le losange à la fin de la manipulation.

- 1 *Le cours suivant commence par des questions de l'enseignant sur les propriétés.*
- 2 Ete : alors qui peut me dire vous la connaissez tous ça doit être clair dans vos têtes comment est ce que on peut obtenir un losange en modifiant les diagonales d'un parallélogramme c'est-à-dire un parallélogramme qui a ses diagonales comment est un losange qu'est ce que je rajoute aux diagonales du parallélogramme pour qu'elles deviennent pour que cette figure devienne un losange Hugo
- 3 H : un angle droit
- 4 Ete : un angle droit c'est-à-dire que l'on rajoute des diagonales
- 5 H : perpendiculaires
- 6 Ete : perpendiculaires comment est ce que je modifie les diagonales du parallélogramme toujours de façon à obtenir un rectangle Sébastien
- 7 S : des angles droits
- 8 Ete : bon tu ne sais pas ta leçon on ne va pas avancer vite Meddi
- 9 M : il faut que ses diagonales elles aient la même longueur
- 10 Ete : il faut que ses diagonales aient la même longueur et dans le parallélogramme elles ont déjà le même milieu il faut en plus qu'elles aient la même longueur maintenant sur les côtés qu'est ce que comment je modifie les côtés d'un parallélogramme de façon à obtenir un rectangle une seule chose vous avez les côtés du parallélogramme qu'est ce que vous rajouter pour avoir un rectangle Mathis
- 11 M : il faut il y a un angle droit
- 12 Ete : un angle droit sur les côtés ou on peut le dire autrement ça veut dire qu'il faut qu'il y ait deux côtés
- 13 M : consécutifs heu
- 14 Ete : consécutifs qui se suivent et qui sont
- 15 M : perpendiculaires
- 16 Ete : comment on modifie les côtés d'un parallélogramme pour obtenir un losange donc toujours sur deux côtés qui se suivent Théo
- 17 T : deux côtés consécutifs aient la même longueur
- 18 Ete : deux côtés consécutifs qui ont la même longueur

On peut supposer que l'enseignant a choisi de commencer ce cours par un retour sur les propriétés afin que les élèves ne restent pas à un niveau perceptif pour traiter l'exercice. Cette explicitation des propriétés peut préparer les élèves à une résolution théorique de l'exercice. L'enseignant explicite les unités figurales inférieures (côtés et diagonales) mais il n'explicité pas le lien de subordination dans ses questions. L'enseignant reprend la même organisation

que lors de la phase collective de formulation des propriétés, les élèves n'ont qu'à compléter les formulations de l'enseignant.

- |    |  |
|----|--|
| 1  | <i>Reprise de l'exercice le cours suivant, la figure Cabri est projetée et la mesure de l'angle MÔN est affichée :</i>   |
| 2  | Ete : donc ce triangle que vous avez devant les yeux il est placé en quelque sorte au centre du parallélogramme alors ce qu'il faut imaginer dans votre tête c'est qu'ici on a quoi pour le parallélogramme ce que l'on peut tracer à partir du triangle bleu c'est quoi Meddi   |
| 3  | M : c'est les diagonales   |
| 4  | Ete : c'est les diagonales, donc si vous ne regardez que le triangle bleu ce qu'il faut que vous ayez en tête c'est les diagonales.  |
| 5  | Eet : Donc voilà ce qu'on vous demandait comment est ce que je modifie ce triangle bleu comment est ce qu'il doit être pour que la figure rose soit un losange donc quelle est la nature du triangle bleu pour que la figure rose soit un losange Hugo ( <i>l'élève ne répond pas</i> ) est ce que ce parallélogramme est un losange ? |
| 6  | H : non  |
| 7  | Ete : ça n'en est pas un qu'est ce qu'il y a qui ne va pas sur le triangle bleu  |
| 8  | H : il faut un angle droit   |
| 9  | Ete : il faut qu'il y ait un angle droit alors tu m'arrêtes quand tu penses que c'est bon d'accord   |
| 10 | H : c'est trop grand   |
| 11 | Ete : c'est trop grand alors on revient en arrière tu m'arrêtes  |
| 12 | H : stop   |
| 13 | Ete : tu veux que j'ai quoi en fait  |
| 14 | H : 90   |

Lors de la séance suivante, l'enseignant n'explicite plus lui-même les unités figurales inférieures c'est un élève qui explicite les diagonales du parallélogramme (ligne 11). L'enseignant reprend la réponse de l'élève (ligne 12) et explicite que les côtés du triangle sont à associés aux diagonales du parallélogramme. Il relie ainsi les unités figurales inférieures du triangle aux unités figurales inférieures du parallélogramme.

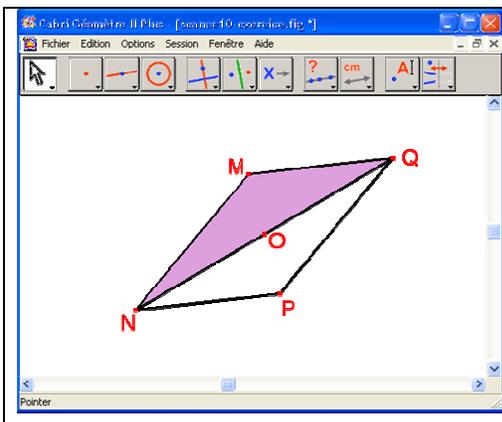
L'élève explicite une contrainte en utilisant un angle droit, mais cette contrainte n'est pas reliée au triangle ou au parallélogramme. Comme pour la séance précédente l'enseignant réalise lui-même le déplacement mais ne formule pas le contrôle associé, c'est l'élève qui l'exprime (ligne 22).

- |   |  |
|---|--|
| 1 | Ete : comment est ce que l'on peut modifier ce triangle comment est ce qu'il doit être pour que je n'ai pas un losange mais un rectangle cette fois Jarod  |
| 2 | J : il faut que le triangle MON soit isocèle en O  |
| 3 | Ete : il faut que le triangle soit isocèle en O alors pourquoi il faut qu'il soit isocèle en O tu peux aller nous montrer comment on fait un triangle isocèle en O vas-y tu vas à l'ordinateur et tu nous fais bouger tu nous montre |
| 4 | J : ben déjà prendre la mesure   |

- 5 Ete : oui tu viens chercher les mesures de longueur exactement donc tu mesures du point M au point O tu as raison si tu veux isocèle en O c'est que tu as deux côtés égaux donc 2,53 et de O vers N 4,77 alors toi tu as l'air de nous dire qu'il faut les deux mêmes longueurs
- 6 J : oui
- 7 Ete : alors vas-y tu essaies tu vois petit à petit il se transforme le parallélogramme il devient quoi
- 8 Jade : il devient rectangle
- 9 Ete : alors est ce que tu pourrais nous dire pourquoi ton triangle il fallait qu'il ait deux côtés de la même longueur ça vient d'où dans ta leçon ça
- 10 J : ben parce que les diagonales font la même longueur
- 11 Ete : ha oui mais les côtés ce n'est pas des diagonales c'est seulement
- 12 J : oui mais si on prolonge des deux côtés
- 13 Ete : voilà si on les prolonge

Dans la deuxième question du problème Jarod explicite (ligne 2) immédiatement une condition sur le triangle. A partir de cette formulation, nous pouvons supposer que Nathan a su identifier les unités figurales, ici les côtés du triangle (confirmation par sa procédure et la mesure des côtés), et qu'il les a reliés aux diagonales du parallélogramme. Sa formulation revient au triangle, c'est-à-dire qu'il remonte à l'unité figurale supérieure pour exprimer sa réponse.

La réponse de Nathan est la réponse à l'exercice, c'est-à-dire qu'il explicite une caractéristique sur le triangle pour que le parallélogramme devienne un rectangle. Cependant l'enseignant essaie d'aller plus loin dans cette correction et essaie d'obtenir l'explicitation de la propriété sous-jacente à ce raisonnement (ligne 9). Pour cela l'enseignant fait référence à la leçon. Jade ne reprend l'ensemble de la propriété (ligne 10), simplement les contraintes qui portent sur les diagonales qu'elle relie aux côtés du triangle (ligne 12).



Comment obtenir un rectangle en modifiant le triangle MNQ ?

Comment obtenir un losange en modifiant MNQ ?

- 1 Ete : comment je modifie ce triangle de façon à obtenir un rectangle Jade vas-y
- 2 J : il y a un angle qui mesure  $90^\circ$
- 3 Ete : d'accord un angle qui mesure  $90^\circ$  quel angle précisément
- 4 J : l'angle M

- 5 *L'enseignant utilise la mesure de l'angle, déplace un sommet jusqu'à QMN fasse  $90^\circ$*   
 6 Ete : comment doit être le triangle pour que le parallélogramme devienne un rectangle il faut que ce soit un triangle  
 7 J : rectangle  
 8 Ete : rectangle  
 9 J : en M

Lorsque Jade exprime la contrainte (ligne 2) il est difficile d'identifier si elle considère le triangle où le parallélogramme « un ». De plus il est difficile d'identifier le statut de la réponse de Jade, elle utilise une formulation descriptive « il y a » pour exprimer la présence d'un angle droit alors que celui-ci n'existe pas sur le dessin à ce moment. S'agit-il de ce qu'il faut imposer, observer ? C'est l'enseignant (ligne 6) qui exprime cette réponse comme une condition sur le triangle.

- 1 Ete : comment est ce qu'il faut que je modifie ce triangle rose de façon à avoir un losange Marina  
 2 M : c'est heu les diagonales il faut qu'elles soient perpendiculaires  
 3 Ete : pour un losange est ce que ce triangle il utilise les diagonales il en utilise qu'une en fait l'autre elle n'est pas tracée tu n'y as pas le droit maintenant si je veux un losange il faut qu'il soit comment ce triangle pour que j'ai un losange Sébastien  
 4 S : il faut mettre tous ses côtés égaux  
 5 Ete : il faut mettre tous ses côtés égaux je ne vais peut être pas le faire pour tous je peux faire une économie peut être  
 6 S : ben pour deux  
 7 Ete : ben viens, fait nous le pour deux comme tu dis c'est-à-dire il faut que tu aies un triangle comment Sébastien  
 8 M : isocèle  
 9 Ete : oui mais Sébastien pas Mathis  
 10 *Sébastien mesure les côtés [MN] et [NQ] et déplace jusqu'à ce que les deux côtés soient égaux*

Pour répondre à la dernière question, Marina utilise uniquement le cours, en effet, la contrainte qu'elle exprime n'est pas réalisable avec le triangle rose (ligne 2), on attend des contraintes sur les côtés du parallélogramme et non sur les diagonales. Il semble que Marina ne parvienne pas à associer les côtés du triangle aux côtés du parallélogramme.

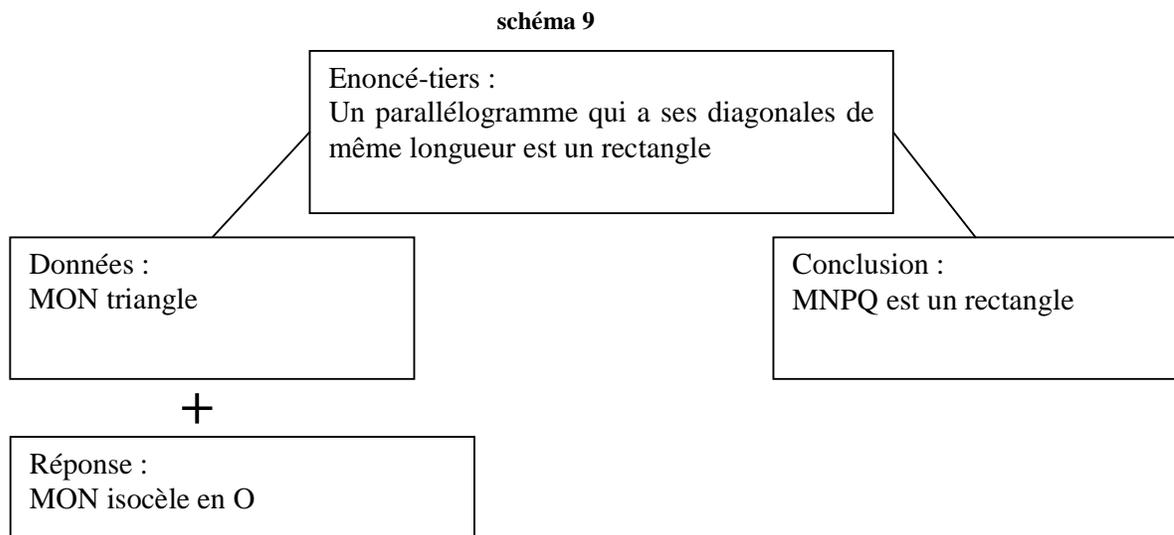
A partir de la réponse de Sébastien (ligne 4) on ne peut pas savoir s'il exprime une contrainte sur les côtés du triangle ou sur les côtés du parallélogramme. Dans la suite de la discussion, ce n'est pas Sébastien qui explicite le triangle mais l'enseignant (ligne 7).

Conclusion :

On peut remarquer que dans la correction il n'y a pas eu de formulation de propriété énoncés. Il est vrai que la consigne initiale ne le demandait pas. Rappelons que cet exercice avait été prévu comme exercice de la partie « j'utilise » de l'activité Cabri « Parallélogrammes particuliers ». Dans ce contexte, nous ne pouvions attendre la formulation par les élèves d'une propriété qui n'avait pas été validée dans la classe. Pour résoudre cet exercice avec Cabri nous

attendions dans un premier temps une stratégie perceptive, c'est-à-dire réaliser le rectangle (losange) puis identifier la nouvelle caractéristique du triangle. Le déplacement est utilisé dans la phase de recherche.

Le contexte de correction des exercices est différent du contexte dans lequel les exercices ont été posés. Les attentes de l'enseignant ont évoluées avec les connaissances des élèves. En effet, maintenant les propriétés sont connues et ont été validées au cours de la phase collective d'énonciation des propriétés. Ainsi, les élèves peuvent expliciter les propriétés. Ainsi la résolution de cet exercice passe d'une résolution perceptive à une résolution qui porte sur les propriétés. Le raisonnement pour la question obtenir un rectangle à partir du triangle bleu est présenté dans le schéma 9.



La question initiale interroge sur les caractéristiques que doit avoir le triangle. Les justifications de cette réponse concernent les prémisses de la propriété énoncé-tiers. Les élèves restent dans le contexte initial de l'exercice et considèrent les unités figurales associées au triangle. Il semble que l'enseignant se situe dans le contexte théorique et attend une explicitation des contraintes de la propriété, c'est-à-dire des unités figurales inférieures du parallélogramme. Dans ce contexte les élèves doivent interpréter les unités figurales inférieures du triangle par rapport au parallélogramme, cela permet la connexion entre les contraintes des données (triangle) et les contraintes de la propriété. Ainsi élèves et enseignant évoluent dans deux contextes différents lors de la correction de cet exercice. Cependant l'enseignant n'explique clairement l'évolution de ces attentes.

Les élèves doivent organiser leur raisonnement sans manipuler le dessin Cabri. Dans la phase de recherche ce dessin devient un outil de résolution cependant il ne permet pas de voir la solution. Cette impossibilité de percevoir la solution contribue à une appréhension opératoire du dessin pour identifier les éléments sur lesquels agir pour obtenir un rectangle ou un losange. Cette appréhension opératoire porte sur les côtés du triangle à interpréter avec les

diagonales ou les côtés du parallélogramme. Cette interprétation passe par une prise en compte des unités figurales inférieures. Les élèves parviennent à identifier ces unités figurales inférieures du triangle, cependant ils ne parviennent pas facilement à les interpréter par rapport au parallélogramme. Le déplacement n'est plus utilisé pour identifier les contraintes à imposer au triangle mais pour valider les réponses des élèves.

#### IV. Evaluation de l'appropriation du lien contraintes-conclusion par les élèves individuellement et en entretien

Nous ne présentons ici que l'analyse des binômes Salomé&Léane et Jade&Laura que nous avons interviewée, après qu'ils aient répondu par écrit.

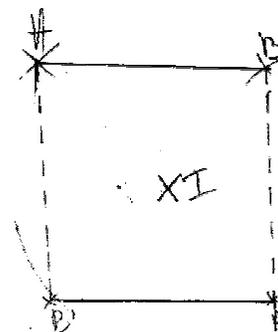
##### A. Analyse des réponses écrites

###### 1 Exercice 1

Tous les élèves ont fait la construction associée à l'énoncé. Il est possible que les élèves aient considérés l'énoncé du premier exercice comme un programme de construction à réaliser, ce qui expliquerait pourquoi ils ont tous traduit les données du premier exercice dans un registre graphique et non celles du deuxième.

Salomé :

Si on construit trois points A, B et I puis le segment  $[AB]$  et on construit le symétrique de  $[AB]$  par rapport à I alors on observe que  $[AB] = [A'B']$  !

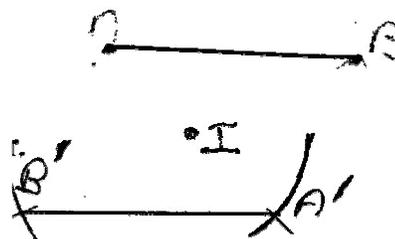


L'ensemble des contraintes et la conclusion sont explicitées dans le résumé de Salomé. Le lien est explicité à l'aide d'une formulation experte. Pourtant Salomé ne reprend pas la propriété du cours, elle reprend les contraintes de l'énoncé qu'elle articule avec la conclusion par une relation de subordination.

Nous formulons deux hypothèses pour interpréter cette réponse de Salomé. Dans un premier temps comme elle utilise les signes de la formulation experte « si » « alors » on peut supposer qu'elle est partie de la propriété du cours qu'elle a adapté au contexte de l'exercice. On peut aussi supposer qu'elle n'utilise pas de propriété du cours mais qu'elle décrit et articule les actions de l'énoncé comme elle décrit ses actions dans la manipulation Cabri. Il apparaît alors qu'elle semble maîtriser l'utilisation des signes « si » pour les constructions et « alors » pour les observations. Il semble qu'elle ait appliquée la propriété à l'exercice dans le sens où elle reprend les noms des points dans sa formulation.

Léane :

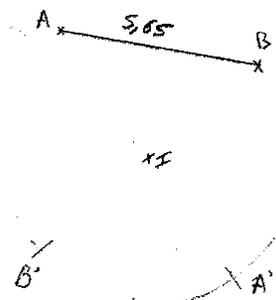
Quand une droite est symétrique d'une autre droite par rapport à un point alors elles font la même mesure.



Léane organise sa réponse très différemment de Salomé. Ici plus de formulation experte mais une formulation, où le signe « si » est remplacé par « quand ». Cependant Léane utilise une formulation générale qui n'exprime plus un processus mais un lien statique alors que l'énoncé est dans l'action. La distinction entre segment et droite ne semble pas claire pour elle ce qui rend son articulation entre les contraintes et la conclusion non compréhensible, une droite ne pouvant être mesurée. Cependant à partir de son schéma et des connecteurs qu'elle utilise, nous considérons qu'elle est parvenue à exprimer une relation de subordination et elle est parvenue à une décentration forte par rapport à l'énoncé.

Jade :

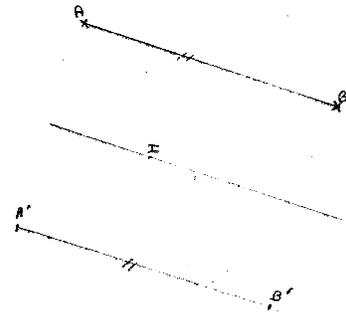
Si des points sont symétriques alors leurs opposés sont de l'autre côté par rapport à un point.



La propriété de Jade est très particulière car elle ne semble pas être liée à la construction, en effet, elle n'exprime pas la conservation de la longueur. Elle utilise un dessin, comme les autres élèves, mais elle utilise aussi la mesure. Il semble qu'elle n'a pas identifié cette conservation de longueur car sur son dessin la mesure n'apparaît que sur le segment  $[AB]$  et rien sur le segment  $[A'B']$ . La seule observation qu'elle peut faire de son dessin, c'est qu'effectivement les points images sont opposés aux points initiaux par rapport au centre  $I$ . Ainsi, on peut supposer qu'elle a utilisé le programme de construction pour construction pour réaliser son dessin, puis qu'elle a réalisé sa propriété à partir de son dessin, perdant ainsi la conservation des longueurs. Si on s'appuie sur cette hypothèse pour analyser la propriété de Jade, on peut considérer qu'elle a articulé sa construction, construction de points symétriques, avec son observation, les points symétriques sont opposés par rapport au centre. Cependant cette conclusion n'est pas la conclusion de l'énoncé.

Laura :

Quand un segment est symétrique à une autre par rapport à un point sa symétrie est de même longueur.



Laura utilise une formulation personnelle de la propriété. Elle exprime l'ensemble des constructions en utilisant une formulation générale. Cependant elle n'articule pas les contraintes et la conclusion en utilisant une formulation experte, elle utilise une formulation temporelle. Comme Laura exprime cette propriété avec ses propres mots, nous considérons qu'elle s'est approprié le lien de subordination de cette propriété.

Conclusion exercice 1 :

Les élèves sont tous parvenus à expliciter les contraintes et l'observation associée à l'exercice en l'articulant. Il semble que les élèves s'appuient sur les marques de l'action pour structurer leurs réponses.

## 2 Exercice 2

Dans cet exercice, les élèves n'ont pas réalisé de construction.

Salomé :

Oui car si on construit un parallélogramme et qu'on mesure les angles opposés alors les angles seront de même mesures !

Salomé reprend les différents éléments de l'énoncé qu'elle articule avec une formulation experte. Il semble qu'elle ait acquis que les contraintes sont introduites par « si » et qu'elles correspondent aux constructions et manipulations faites sur la construction. La conclusion est l'observation finale. Elle formule une propriété comme pour l'exercice précédent.

Léane

C'est normale car un parallélogramme a un centre de symétrie donc tout ce qui est opposé dans un parallélogramme est égal à son opposé.

On retrouve des difficultés dans l'expression de Léane, mais les idées sont très intéressantes. Elle ne se contente pas d'expliquer la propriété du parallélogramme, elle reprend la définition du parallélogramme comme un quadrilatère avec un centre de symétrie. Cette définition lui permet d'utiliser la conservation des propriétés par la symétrie centrale pour expliquer pourquoi les angles opposés sont égaux, ainsi elle donne une raison dans le domaine théorique. Il ne manque que l'énonciation de la propriété qu'elle utilise pour que cette réponse soit la formulation d'un raisonnement déductif. Nous considérons que ce raisonnement passe par l'appropriation du lien entre les contraintes et la conclusion.

Jade :

Oui c'est normal parce que dans un parallélogramme tous les côtés opposés sont de même longueur, ils sont parallèles et les diagonales ont le même milieu

Jade n'explique pas de relation de subordination dans son résumé. On ne peut pas distinguer d'ordre dans les caractéristiques qu'elle énumère. Elle ajoute toutes les informations qu'elle connaît sur le parallélogramme, son résumé exprime une relation d'association et non une relation de subordination. De plus elle considère les côtés alors qu'il était question des angles.

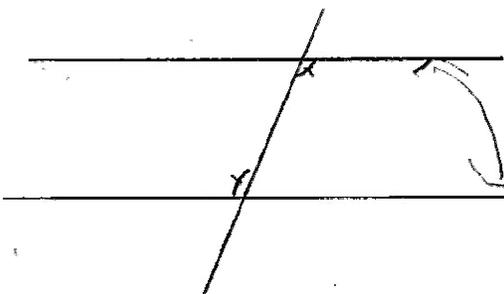
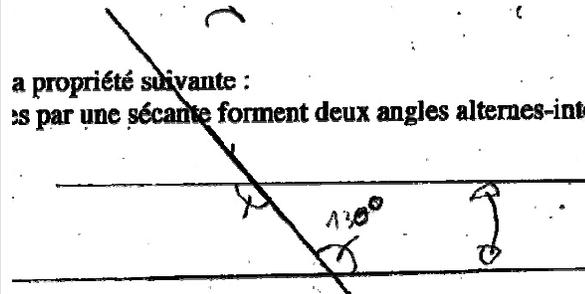
Laura :

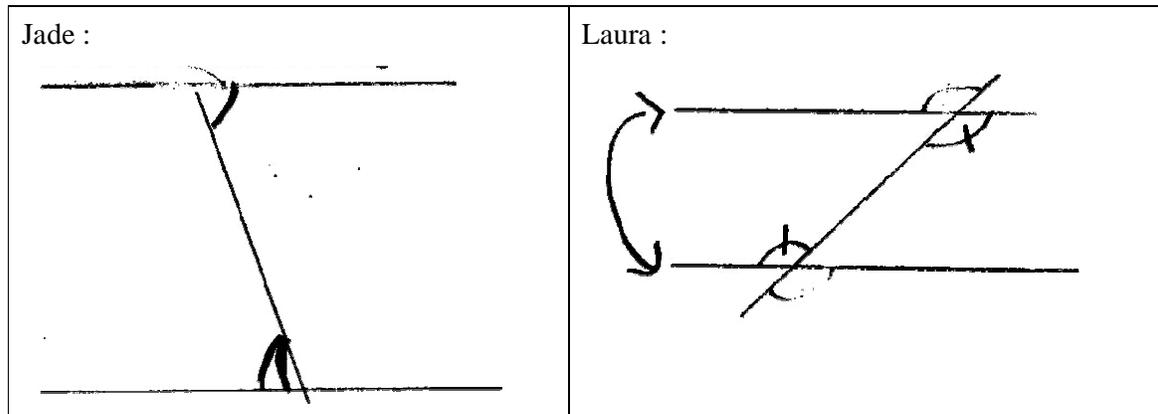
Oui c'est normal car les côtés opposés sont parallèles et de même mesure.

Tout comme pour Jade on ne peut identifier l'expression d'un lien dans cette explication. Alors que Jade à associé toutes les informations qu'elle connaissait sur le parallélogramme, Laura n'explique que des caractéristiques sans les relier. On pourrait supposer que cette explication est le début d'une formulation d'un raisonnement déductif dans lequel elle utilise les côtés pour justifier l'égalité des angles, mais on ne connaît pas son point de départ et sa conclusion.

Conclusion exercice 2 : cet exercice a été beaucoup moins bien réalisé par les élèves. La question est différente de l'exercice précédent elle ne demande plus explicitement une propriété mais une explication. Cette consigne difficile peut avoir déstabilisé les élèves.

### 3 Exercice 3

<p>Salomé :</p> 	<p>Léane :</p> <p>a propriété suivante :          is par une sécante forment deux angles alternes-inte</p>  <p>urs est illustrée par le dessin ci-dessous?</p>
---	--



Dans les réponses que nous avons obtenues, tous les élèves ont réalisé une seule représentation et n'ont pas utilisé de couleur. Il est très difficile d'identifier si les élèves veulent exprimer une relation de subordination ou expriment une relation d'association. On peut aussi supposer que les élèves ont produit une seule représentation pour répondre à la consigne qui demande un dessin.

Parmi les quatre dessins, seule Jade n'a pas représenté le codage des droites parallèles. Soit elle considère que les droites sont perceptiblement parallèles, soit elle n'a pas codé la conclusion. Nous ne considérons pas que le codage de l'angle du bas n'exprime pas une mesure d'angle différente, mais qu'elle a retracé le codage de l'angle après avoir changé d'angle en haut de son dessin.

Léane ne se contente pas du codage, elle utilise la mesure, elle a effectivement construit un angle de  $130^\circ$ . On peut remarquer que ses droites dépassent largement l'espace prévu pour le dessin, on peut supposer que cela provient de l'utilisation de son rapporteur. Cependant on ne peut pas savoir si elle a utilisé son rapporteur pour construire des angles alternes-internes égaux ce qui lui donne comme résultat que les droites sont parallèles ou si au contraire elle a construit des droites parallèles et elle a obtenu des angles alternes-internes égaux. Chaque procédure étant associée à une propriété.

Salomé et Laura ont des dessins assez proches réalisés sans couleur.

Conclusion exercice 3 : cet exercice semble être le plus complexe des trois exercices du fait de la formulation théorique détachée, de la tâche peu courante et de la propriété elle-même qui possède une réciproque. Ainsi cette propriété peut amener les élèves à une association et non une subordination.

#### 4 Synthèse

Il semble que les élèves éprouvent plus de difficultés pour expliciter des propriétés dans des tâches d'explication (ex2) que dans des tâches de description (ex1). Nous pouvons supposer que les tâches d'explication sont loin du contexte d'introduction des propriétés. Pourtant, les élèves ont travaillé avec des propriétés comme énoncé-tiers dans des raisonnements déductifs. Les tâches de description sont elles par contre très proches des activités d'Illustration Cabri.

Au vu des ces trois exercices, il s'avère que les élèves parviennent mieux à exprimer une relation de subordination dans le registre discursif que dans le registre discursivo-graphique. Ainsi, il semble que le registre discursif devient un registre exploitable par les élèves.

### **B. Analyse des discussions**

Nous avons approfondi l'étude de ce test en proposant à Salomé&Léane et Jade&Laura de s'expliquer sur leurs réponses. Cette discussion est guidée par le chercheur, et les questions : « Qu'est ce qui a été construit, qu'est ce qui a été observé ? ». Nous cherchons à identifier par ces questions comment les élèves expriment les constructions, les observations et les articulent. Nous n'attendons pas de formulations expertes de l'articulation avec l'utilisation de « si » et « alors », simplement des formulations personnelles.

#### **1 Salomé&Léane**

Exercice 1 :

*Auparavant il y a eu un retour sur la consigne les constructions et les observations.*

L : oui, et après on devait faire une propriété

Ch : d'accord et donc cette propriété comment vous l'avez construite comment vous savez que c'était celle-ci

L : ben parce que au début il parlait qu'il y avait une droite et qu'il y avait le symétrique

Ch : hum hum allez y

L : et après à la fin dans la propriété il y avait marqué que ça finissait de la même mesure

Ch : d'accord

S : mettre si alors

Ch : alors le si c'est pour quoi

S : si on construit un segment 3 points le segment AB alors à la fin

Ch : ok

L : Si c'est ce qu'on fait et alors c'est ce qu'on observe

Salomé et Léane utilisent l'organisation de l'énoncé pour structurer leur résumé. Léane semble utiliser l'ordre d'apparition des événements et Salomé réinvestit les signes « si » et « alors » pour articuler les constructions et ce qu'on obtient à la fin. La dernière réplique de Léane nous indique qu'elle associe les actions à « si » et les observations à « alors ». Les deux élèves s'appuient sur le contexte et les actions puis elles réinvestissent les signes introduits par l'enseignant pour formuler leur propriété.

## Exercice 2 :

Ch : ok (...) part rapport à l'exercice 2 qu'est ce qu'on l'on a construit  
 S : un parallélogramme  
 Ch : et à la fin qu'est ce qu'on remarque qu'est ce qu'on observe ?  
 L&S : que les angles opposés sont égaux  
 Ch : d'accord et donc là ça vous fait penser à quelle propriété  
 L : parallélogramme  
 S : si on construit un parallélogramme alors les angles opposés sont de même mesure  
 Ch : qu'est ce que tu en pense Léane  
 S : lis ce que tu as mis  
 Ch : pas forcément  
 S : elle a mis un centre de symétrie  
 L : que un parallélogramme a un centre de symétrie donc tout ce qui est opposé dans un parallélogramme est égaux avec son opposé  
 Ch : d'accord  
 L : mais c'est pareil, moi je suis d'accord avec ce qu'elle a dit

L'enseignant introduit cet exercice par la discussion sur ce qui est construit et ce qui est observé. Ce qui ne pose pas de problème aux élèves. Salomé exprime la propriété en utilisant une formulation experte où elle réinvesti « on construit ». La proposition de Léane n'est pas discutée car nous ne cherchons pas à analyser les capacités des élèves à formuler un raisonnement déductif mais leur capacité à exprimer une relation de subordination.

## Exercice 3 :

Ch : ok donc pour l'exercice 3 qu'est ce que l'on construit dans l'exercice 3  
 L : des angles alternes internes sur une droite sur 2 droites parallèles coupées par une  
 L & S : par une sécante  
 S : qui forment 2 angles alternes internes  
 Ch : on commence par construire quoi (...) on construit quoi on observe quoi (...) on construit quoi  
 L : les angles alternes internes avec les droites parallèles et la droite sécante  
 Ch : alors répète tu me dis 2 angles  
 S : mais on va d'abord faire les droites  
 Ch : on fait les droites  
 L : parallèles et après la droite sécante  
 Ch : alors est ce qu'on les fait parallèles dès le début  
 S : non on fait 2 droites 2 droites  
 Ch : ouais et après  
 S : après on les coupe  
 L : on trace des parallèles dès le début pour illustrer cette propriété  
 Ch : qu'est ce que tu en pense Salomé  
 L : a non en fait non  
 Ch : je ne sais pas je veux juste que vous m'expliquiez  
 L : en fait on construit des droites de façon à ce que les angles alternes internes soient égaux  
 Ch : hum hum

**L : Et alors la on observe que les droites elles sont parallèles**

Ce dernier exercice a entraîné une discussion plus longue. En effet, notre analyse à partir des productions écrites des élèves ne nous permet pas d'identifier si elles expriment une relation de subordination car constructions et observations sont représentées conjointement. La discussion avec les élèves illustre que la distinction entre ce qui est construit et ce qui est obtenu à la fin n'est si évidente pour les élèves.

Salomé reprend la propriété et traduit les contraintes avec des actions : « on fait deux droites » « on les coupe ». Ainsi elle reprend l'ordre de la propriété pour identifier les constructions et les observations.

Léane semble anticiper l'observation, c'est-à-dire qu'il lui faut des angles alternes-internes égaux et pour cela il semble qu'elle n'utilise pas d'instrument de mesure mais des droites parallèles. Lorsqu'elle nous dit « on construit des droites de façon à ce que les angles alternes internes soient égaux » il est difficile de savoir quelle procédure elle utiliserait. Cependant elle conclut par l'observation des droites parallèles. Si on considère le début de la discussion on peut supposer que dans son illustration Léane a utilisé les droites parallèles pour construire les angles alternes-internes égaux.

En conclusion, le contexte de l'exercice est donc bien une variable de tâche dont le changement de valeur change le degré de facilité à distinguer contraintes et conclusion. Il n'est pas sûr que les élèves soient à même de reconnaître contraintes et conclusion à l'issue de ce processus d'enseignement dans un énoncé classique sans explicitation d'actions. L'action contribue à l'émergence de signes pour identifier les contraintes.

## 2 Jade&Laura

Exercice 1 :

Ch : donc à quelle propriété ça vous fait penser

L moi j'ai mis quand un segment est symétrique à un autre par rapport à un point sa symétrique est de même longueur

Ch : hum hum et Jade

J : j'ai marqué si des points sont symétriques alors leurs opposés est de l'autre côté par rapport à un point ben c'est pas trop précis mais

Ch : c'est pas trop précis tu voudrais le dire comment alors

J : je sais pas je ne savais pas trop comment l'expliquer

Ch : d'accord et là si tu m'expliques juste à moi comme ça

J : je sais je veux dire je sais comment dire c'est leur opposé

Ch : leur opposé

J : je veux dire ils sont à la même longueur par exemple si il y a 3 centimètres de AB jusqu'à I et ben de l'autre côté aussi ce sera de 3 centimètres jusqu'à AB prime

L'analyse de la production de Jade nous laisse supposer que Jade n'a pas pris en compte l'observation de l'énoncé mais l'observation de sa propre construction. Ici, Jade exprime que le centre de symétrie, ici I, est équidistant du segment [AB] et du segment [A'B']. On peut

voir dans son explication que Jade a besoin de s'appuyer sur un exemple, avec une valeur numérique pour exprimer la propriété. Nous pourrions considérer cette utilisation des mesures dans l'explication comme un retour à l'espace sensible. Or sur sa construction, Jade n'a pas construit le segment image, simplement les points. Ainsi, si elle ne s'appuie que sur son dessin, la conservation des longueurs par la symétrie centrale ne lui apparaît pas. Elle ne peut que percevoir la relation entre chaque point et son image. On peut supposer que Jade considère les unités figurales inférieures dans son appréhension, mais elle reste au niveau des points, elle ne remonte pas aux segments.

Exercice 2 :

Ch : ok et donc là ça vous fait penser à quelle propriété  
 L : que dans un parallélogramme il a ses angles opposés égaux  
 Ch : ok Jade  
 J : que tous les angles opposés sont de même longueur et même ouais voilà et qu'ils sont parallèles et que les diagonales ont même milieu  
 Ch : bon alors on est toutes les 3 si tu m'explique un peu à quoi ça te fait penser si on construit un parallélogramme  
 J : que les angles opposés ils ont la même longueur  
 Ch : bon d'accord et le fait que les angles opposés soient de la même longueur c'est ce qu'on observe ou c'est ce qu'on construit  
 L : ce qu'on construit non parce que la ils ne disent pas de la même longueur ils disent égaux  
 Ch : ha donc si on observe que les angles opposés sont égaux c'est ce qu'on observe ou c'est ce qu'on construit  
 L : c'est ce qu'on observe  
 Ch : Jade  
 J : ben  
 L : on observe et on construit parce que en construisant on observe  
 Ch : en construisant quoi  
 L : ben un parallélogramme  
 Ch : hum hum  
 L : avec des angles et ben on s'aperçoit qu'ils sont égaux

Après un retour sur l'énoncé, l'enseignant revient sur la propriété visée par cet exercice. Jade reprend l'association de l'ensemble des caractéristiques qu'elle connaît sur le parallélogramme. Lorsque l'enseignant revient sur l'énoncé et ce qui est construit, Jade reprend l'observation, la conclusion mais n'exprime pas de lien avec les constructions. L'observation ne résulte pas de la construction, les deux événements semblent simultanés. Cette proximité dans la réalisation de ces deux actions apparaît lorsque Jade précise : « on observe et on construit parce que en construisant on observe ».

Exercice 3 :

1- Ch : alors l'exercice 3 on construit quoi  
 2-J : des droites  
 3-L : parallèles

4-J : coupées par une sécante

5-L : parallèles

6-J : ouais des droites parallèles coupées par une sécante qui forment

7-L : ben pour que les angles alternes internes soient égaux il faut qu'elles soit parallèles les deux droites

8- Ch : donc on va construire quoi et on va observer quoi

9-J : ils veulent qu'on construise deux droites parallèles coupées par une sécante et ils veulent savoir si les droites enfin si les angles alternes internes sont égaux

10-L : en fait en construisant deux angles alternes internes ils disent que les droites sont pa s'il faut qu'ils soient égaux comme ils sont égaux les droites elles vont être parallèles

11- Ch : alors est ce que vous dites la même chose ou pas toutes les deux

12-L : non pas vraiment

13- Ch : mettez vous d'accord allez-y discuter si tu as l'impression de ne pas dire la même chose que Jade je te laisse discuter avec Jade

14-L : ben parce que elle elle a dit il faut il me demande de construire deux droites parallèles et après de partir des angles qui sont égaux alors que là ils disent qu'il faut d'abord construire les deux angles égaux et après la on s'aperçoit que les droites sont parallèles parce que pour que les angles soient égaux il faut que les droites soient parallèles

15-J : en fait ils veulent savoir quand il y a deux droites n'importe laquelle et coupées par une sécante est ce que ça peut former des les est ce que les angles alternes internes seront égaux c'est ça qu'ils veulent savoir je crois et puis après s'ils sont égaux ben alors ça veut dire que les droites elles sont parallèles

16- Ch : d'accord

17-J : fin ouais les deux droites il y en a deux

18- Ch : tu veux dire d'autres choses c'est clair ce que tu dis ou

19-J : non ce que je veux dire c'est que

20- Ch : si tu veux dessiner si tu veux tu peux faire tout ce que tu veux pour m'expliquer vas-y je t'écoute (*E sollicite le dessin car Jade voulait s'exprimer par gestes sans grande réussite, de plus les observations de classe nous indique que Jade s'appuie fortement sur le registre graphique*)

21-J : comment je pourrais dire là ils disent que ils nous donnent pas de précisions au début ils nous disent deux droites coupées par une sécante donc on peut penser deux droites comme ça (*dessine 2 droites non parallèles*) comme ça par exemple

22- Ch : hum hum

23-J : coupées par une sécante ça peut être comme ça

24- Ch : hum hum

25-J : et après ils nous disent qui forment deux angles alternes internes égaux ben la ça veut dire que la les deux droites ceux la par exemple d1 et d2 ben elles doivent être parallèles pour que les angles alternes internes soient égaux mais au début ils nous donnent pas la précision

26- Ch : on nous donne quoi comme précisions

27-J : comment

28- Ch : quelles précisions on nous donne au début

29-J : on nous donne deux droites coupées par une sécante qui forment deux angles

alternes internes égaux

30- Ch : d'accord

31-J : et dès qu'on entend des angles alternes internes égaux ben c'est que les deux droites d1 et d2 elles sont parallèles

Lorsque l'enseignant revient sur les constructions et l'observation, on peut voir que les élèves ont des difficultés à identifier ce qui doit être construit, il faut des angles égaux, mais pour réaliser des angles égaux il faut des parallèles. Cependant Laura parvient à exprimer une relation de subordination lorsqu'elle explique « comme ils sont égaux les droites elles vont être parallèles ». Lorsque Laura oppose la formulation de Jade à la propriété de l'énoncé (14), elle s'appuie sur l'ordre d'appariation des événements dans la propriété. Ainsi elle exprime que les angles alternes-internes égaux sont à réaliser avant les droites parallèles, cette caractéristique des droites étant une observation. Cependant elle conclut sa réflexion par « parce que pour que les angles soient égaux il faut que les droites soient parallèles ». Si on analyse cette réplique au sens de la logique, en utilisant « il faut » Laura exprime une condition nécessaire. Cependant, dans le langage courant, ce n'est pas toujours ce sens qui est utilisé. A la fin de l'échange, Jade revient sur ce qui est construit et utilise un dessin, encore le registre graphique, pour s'expliquer. Jade s'appuie sur le déplacement de Cabri lorsqu'elle dessine les deux droites non parallèles, cependant Cette référence à l'environnement Cabri ne transparait pas dans son discours, elle n'utilise pas de signes associés au dynamisme (bouge transforme, déplace ...). Le fait que Jade s'appuie sur le dynamisme mais ne l'explique pas dans son discours est un indice de l'accomplissement du processus de médiation sémiotique. Dans son explication (ligne 25) il est encore difficile de distinguer si les droites parallèles sont utilisées comme outils pour obtenir les angles alternes-internes égaux ou si elles sont observées à la fin de la construction.

A la ligne 31 Jade exprime « et dès qu'on entend des angles alternes internes égaux ben c'est que les deux droites d1 et d2 elles sont parallèles ». Exprime-t-elle une association entre les angles alternes-internes égaux et les droites parallèles ou une conséquence immédiate liée aux angles alternes-internes égaux ?

Conclusion : Les échanges avec Laura nous montrent que la distinction entre condition nécessaire et condition suffisante est très difficile pour les élèves étant donné l'utilisation du signe « il faut » dans le langage courant. Les propriétés de la géométrie s'articulent toutes à l'aide de l'équivalence, ainsi les conditions nécessaires sont aussi des conditions suffisantes et inversement.

A travers les explications de Jade, nous identifions que pour elle le registre graphique reste le registre dans lequel elle parvient le mieux à s'exprimer. De plus il semble que dans sa réflexion elle s'appuie sur le dynamisme de l'environnement Cabri pour identifier les contraintes, les conclusions.

### **C. Conclusion**

Dans les productions écrites des élèves, parmi les différentes variables que nous avons choisies, il semble que celles qui influent le plus sur les réponses des élèves soient la référence à un contexte dans l'énoncé de l'exercice ; l'expression de la propriété dans un registre discursivo-graphique ou discursif et la consigne.

En effet dans les deux premiers exercices, les élèves s'appuient sur le contexte pour formuler la propriété. La consigne utilise les signes « construit », « mesure », « remarque », « observe ». Ces signes sont proches, voire identiques, aux signes utilisés dans les activités Cabri puis dans l'articulation entre les deux environnements. Dans le dernier exercice, le temps et l'action ne sont pas exprimés, et les élèves ne sont pas parvenus à exprimer la relation de subordination. On peut aussi supposer que cette difficulté provient du fait que les élèves devaient exprimer la relation de subordination dans le registre discursivo-graphique. Enfin, le deuxième exercice a été moins concluant que le premier. Nous supposons que la consigne est à l'origine de ce décalage. Nous ne demandons plus de citer une propriété du cours mais de donner une explication. L'attente de la propriété est beaucoup moins explicite.

La discussion nous montre la complexité de distinguer les propriétés et leurs réciproques pour les élèves, c'est-à-dire quelles sont les contraintes quelles sont les conclusions. Cependant le fait d'avoir introduit les propriétés à l'aide de Cabri permet aux élèves d'associer les propriétés à des manipulations, avec ou sans déplacements, mais pour lesquelles on a des constructions, et des observations. En effet dans l'exercice 3 les élèves ont exprimés une association dans leur représentation graphique. En utilisant un contexte lié à l'environnement de Cabri l'ambiguïté et la difficulté associée à l'équivalence est soulevée, non pas résolue, mais les élèves peuvent identifier et distinguer les contraintes des conclusions grâce aux constructions et observations. Les manipulations liées à l'environnement Cabri semblent être intériorisées chez Jade lorsqu'elle dessine des droites non parallèles pour l'exercice 3.

Ainsi la référence au contexte apparaît importante de façon explicite, et implicite. De façon explicite dans l'utilisation des termes « construit », « observe » le contexte contribue à structurer les propriétés chez les élèves. De façon implicite chez Jade où le contexte permet de distinguer les constructions des observations en différenciant l'état des unités figurales inférieures (les droites) dans les contraintes et dans la conclusion.



## Chapitre 6

### Discussion

Cette recherche s'intéresse à l'introduction des propriétés pour favoriser le passage de l'école primaire au collège pour l'enseignement de la géométrie. Les propriétés sont utilisées dans trois types de situations, les situations d'Illustration, les situations de Validation et les situations d'Enoncé-tiers. Les situations d'Illustration s'appuient sur un environnement dynamique utilisent le déplacement mou dans la réalisation des contraintes. A partir des travaux de Rabardel (1995) et Trouche (2005) sur le processus d'instrumentation, l'utilisation de l'artefact déplacement de Cabri dans la résolution d'une tâche, aboutit à la construction d'un instrument *Déplacement* particulier. La construction de cet instrument contribue à la mise en place du processus de médiation sémiotique pour l'apprentissage du lien de subordination entre les contraintes et la conclusion. Ce processus de médiation sémiotique se poursuit au cours de l'articulation entre les environnements et les registres. Ces résultats théoriques nous permettent de réduire notre thème de recherche à ces deux questions :

QR1 : Comment les élèves s'approprient-ils les instruments *Déplacement* relativement aux situations de la classe Illustration et à quelle explicitation du lien contraintes-conclusion conduit cette appropriation ?

QR2 : Comment l'articulation entre les trois registres (graphique-dynamique, graphique et discursif) en lien avec le processus de médiation sémiotique du déplacement, participe-t-elle à l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion ?

Pour répondre à la première question, nous avons conçu une ingénierie qui intègre l'environnement de géométrie dynamique Cabri Géomètre, en nous appuyant sur les travaux de Trouche (2005) et l'hypothèse de travail 4 : la construction des schèmes d'utilisation au cours de l'utilisation du déplacement amorce le processus de médiation sémiotique pour le lien contraintes-conclusion, sur la construction du *Déplacement*. Afin d'identifier comment les élèves s'approprient le *Déplacement* nous avons analysé l'activité filmée de cinq binômes. Cette analyse s'est organisée autour de trois questions qui suivent les actions des élèves au cours des manipulations dans l'environnement Cabri :

- Analyse de la prise en compte des unités figurales inférieures au cours de l'utilisation du déplacement et la mise en œuvre de son contrôle.
- Analyse de l'observation par l'élève de la transformation de l'unité figurale supérieure.
- Analyse de la formulation des élèves dans leur résumé relativement à ce qui est formulé : comment est-ce formulé et articulé ?

En ce qui concerne la deuxième question, les trois registres ciblés n'appartiennent pas tous au même environnement, le registre graphique-dynamique relève de l'environnement Cabri, les registres graphique et discursif du papier-crayon. L'articulation entre les registres passe par une articulation entre environnements. L'ingénierie a recours au registre discursivo-graphique pour articuler l'environnement Cabri et l'environnement papier-crayon, ce registre contribue à l'articulation entre les environnements mais aussi à celle entre le registre graphique-dynamique et le registre discursif. L'analyse de la mise en place en classe de l'articulation entre les environnements a reposé sur l'analyse des échanges entre l'enseignant et les élèves. Ainsi nous avons cherché à identifier, d'une part les signes introduits par l'enseignant, d'autre part les signes utilisés par les élèves pour exprimer les contraintes, les conclusions et éventuellement l'articulation entre les deux.

Afin d'identifier à la fin du processus didactique comment les élèves se sont appropriés le lien contraintes-conclusion, nous avons analysé les corrections collectives des exercices d'applications (ou de réinvestissement) et un test proposé aux élèves à la fin de l'année scolaire. Les analyses des corrections collectives nous ont permis d'identifier dans quelle mesure les élèves réinvestissent les propriétés et comment ils explicitent les différents éléments des propriétés. Le dernier test nous a permis d'étudier plus finement la construction du lien chez quatre élèves interrogés lors d'une interview.

## I. Le processus de genèse instrumentale

### A. *Prise en compte des unités figurales inférieures par le contrôle du déplacement*

L'utilisation de l'artefact déplacement que nous visions dans les situations d'Illustration n'a pas fait l'objet d'un enseignement. En effet, nous considérons la consigne comme suffisante pour les élèves. Cependant il s'avère au vu des observations que l'instrument *Déplacement* visé n'a pas *de facto* de caractère d'immédiateté.

La réalisation du déplacement demandé dans la consigne, passe par un contrôle de l'action qui porte sur les unités figurales inférieures : comme par exemple dans la consigne, « déplace un sommet de façon à ce que les côtés [AB] et [CD] deviennent parallèles ». Le contrôle de l'action porte dans ce dernier cas sur le parallélisme des unités figurales inférieures que sont les côtés [AB] et [CD] et nous attendions qu'il soit effectué, soit de façon perceptive, soit de façon perceptive instrumentée grâce à l'outil Parallèle de Cabri.

Nous avons bien obtenu un contrôle sur les unités figurales inférieures dans la manipulation « milieux confondus » de l'activité « Quadrilatère particulier » par tous les binômes. Tous les élèves ont déplacé un sommet à l'aide d'un contrôle sur les milieux des diagonales. Nous supposons que cette prise en compte de l'unité figurale inférieure dans la mise en œuvre du déplacement provient du fait que la superposition des points est facilement identifiable

perceptivement. Ainsi, dans cette activité tous les élèves ont mis en œuvre un contrôle du déplacement perceptif en s'appuyant sur les unités figurales inférieures.

Pourtant dans la manipulation « côtés parallèles » de l'activité Cabri « Quadrilatère particulier », le contrôle de certains élèves a porté sur l'unité figurale supérieure que constitue la forme du quadrilatère, ce que nous avons appelé le contrôle perceptif sur la forme globale. Par exemple, dans le binôme Léa&Sandra à la consigne « déplace le point C pour que [AB] soit parallèle à [CD] », Léa répond en déplaçant perceptivement le point C et s'arrête lorsque les deux paires de côtés opposés du quadrilatère sont parallèles, c'est-à-dire lorsque le quadrilatère est un parallélogramme, alors que la consigne ne demandait qu'une paire de côtés parallèles. Ainsi le contrôle qu'elle utilise ne porte pas sur une paire de côtés parallèles mais sur la forme globale, elle utilise un contrôle perceptif global sur la forme et ne prend pas en compte les unités figurales inférieures.

Les binômes Camille&Satine et Willy&Meddi ont aussi utilisé un contrôle perceptif sur la forme dans cette manipulation. En revanche, il s'est produit un phénomène non prévu chez ces deux binômes : une validation *a posteriori* du déplacement, une fois que ce dernier est effectué. Cette validation s'appuie sur l'Oracle de Cabri pour les élèves Camille&Satine. Les deux élèves déplacent un sommet et comme pour Léa&Sandra arrêtent le déplacement lorsque le quadrilatère a la forme d'un parallélogramme. Le contrôle du déplacement porte là encore sur la forme globale. Camille&Satine ajoutent une validation à leur déplacement à l'aide de l'outil Parallèles de l'Oracle, c'est-à-dire qu'elles demandent à Cabri de valider si les droites sont parallèles. Rappelons que l'Oracle est une fonctionnalité de Cabri qui juge si certaines propriétés (parallélisme, perpendicularité, équidistance, appartenance) sont satisfaites dans la figure et affiche ce jugement par un message discursif, comme par exemple : « les objets sont parallèles ». Satine&Camille ne construisent pas des droites parallèles en utilisant des outils Cabri (une construction en dur) mais en utilisant un déplacement avec un contrôle perceptif (déplacement mou), l'Oracle ne peut donc valider positivement le parallélisme des droites. Cependant, les deux élèves utilisent l'Oracle Parallèles sur les côtés [AB] et [CD], les deux côtés opposés cités dans la consigne, ce qui nous permet d'identifier une prise en compte des unités figurales inférieures dans la validation du déplacement. On retrouve la même organisation du déplacement chez le binôme Willy&Meddi avec un contrôle perceptif sur la forme globale, puis ils valident leur déplacement en construisant la parallèle à [AB] passant par C puis la parallèle à [CD] passant par B. Chez ces deux binômes, la prise en compte des unités figurales inférieures n'intervient pas dans le contrôle du déplacement mais dans la validation de celui-ci.

Dans cette manipulation, Jade utilise un déplacement différent des deux déplacements présentés. En effet, elle réinvestit le *Déplacement* associé à la manipulation « milieux confondus » c'est-à-dire qu'elle superpose les milieux des diagonales de façon délibérée pour obtenir un parallélogramme. Elle a transformé la consigne « déplacer de façon à obtenir deux côtés parallèles » en « déplacer de façon à obtenir un parallélogramme », comme les autres

binômes, mais a utilisé à cette fin le lien de subordination construit dans la situation d'illustration précédente. Pour cette manipulation, tous les binômes ont dévié le contrôle du déplacement initial qui portait sur le parallélisme de deux côtés et ont déplacé pour obtenir un parallélogramme.

Dans la situation « milieux confondus », les élèves n'anticipaient probablement pas la conséquence de la superposition des milieux et s'en sont tenu au contrôle spécifié. Dans la situation « côtés parallèles », nous supposons que le contrôle perceptif du parallélisme de deux côtés est plus difficile à réaliser que le contrôle perceptif de la forme et que de plus le contrôle perceptif sur la forme globale peut découler de l'association parallèles-parallélogramme, probablement issue de la caractérisation du parallélogramme à l'école primaire. Nous revenons plus longuement sur cette association dans la partie suivante « La relation de parallélisme ». L'association ainsi créée amalgame le parallélisme des côtés à la forme parallélogramme. Notons que l'absence de lien de subordination renforce l'amalgame. Comme de plus à l'école primaire, l'objectif n'est pas de distinguer entre une paire de côtés parallèles et deux paires, il n'y a aucun travail sur les unités figurales inférieures que sont les côtés. On ne distingue pas les dimensions des objets, et ce d'autant plus que la difficulté conceptuelle de passer d'une unité supérieure à une unité inférieure est ignorée. L'observation des élèves tend à montrer que l'association ainsi construite peut s'ériger en obstacle à la distinction des unités figurales inférieures.

Dans la dernière manipulation « côtés égaux » de cette activité et dans toutes les manipulations de l'activité « Parallélogrammes particuliers », les élèves utilisent un contrôle sur la mesure. Les consignes interrogeaient sur des égalités ou des relations de perpendicularité entre segments. Les élèves se sont engagés dans des procédures qui utilisent les mesures et ne se sont pas investis dans un déplacement s'appuyant sur des constructions géométriques (constructions de perpendiculaires pour la perpendicularité, de cercles pour l'égalité). L'utilisation de la mesure est certes très économique et de plus la mesure est très prégnante chez les élèves, en particulier parce que les dessins à faire à l'école primaire sont le plus souvent de dimensions fixées. L'utilisation des mesures ne permet pas d'accéder aux unités figurales inférieures alors que des stratégies attachées aux constructions géométriques restent dans le cadre géométrique et contribue à la décomposition dimensionnelle des formes par la prise en compte des unités figurales inférieures dans le contrôle du déplacement.

Ainsi, le déplacement, associé à nos activités, que nous avons considéré comme largement accessible ne s'est pas réduit au seul contrôle sur les unités figurales inférieures. À partir des binômes étudiés, nous avons identifié trois utilisations différentes du déplacement :

- Déplacement associé à un contrôle perceptif
  - sur les unités figurales supérieures dans manipulation « côtés parallèles » de l'activité « quadrilatère particulier » chez Léa.

- sur les unités figurales inférieures dans la manipulation « milieux confondus » de l'activité « quadrilatère particulier » chez tous les élèves.
- Déplacement avec un contrôle perceptif (sur unités figurales inférieures ou unités figurales supérieures) complété par une validation sur les unités figurales inférieures chez les binômes Willy&Meddi et Camille&Satine.
- Déplacement avec le réinvestissement du *Déplacement* associé à la manipulation « milieux confondus » chez Jade.

La prise en compte des unités figurales inférieures peut apparaître à deux instants dans la mise en œuvre du déplacement : dans l'action et après l'action. Comme tous les élèves observés sont parvenus à identifier les unités figurales inférieures dans la manipulation « milieux confondus » de l'activité Cabri « Quadrilatère particulier », nous pouvons considérer que la décomposition des formes est un processus d'acquisition longue et que suivant les configurations les élèves savent le mettre en jeu ou non. Cette prise en compte des unités figurales inférieures dépend ainsi des tâches proposées mais aussi des connaissances antérieures des élèves qui peuvent gêner cette décomposition (association). La mesure et la perception globale de la forme semblent deux moyens très forts et économiques pour le contrôle du déplacement.

Or de plus Duval (2005) précise que la prise en compte des unités figurales inférieures va à l'encontre de la perception naturelle. Le contrôle sur les unités figurales inférieures est donc moins immédiat. On peut comprendre ainsi pourquoi certains élèves ont recours soit à l'unité figurale supérieure aisément reconnaissable ou à un moyen de contrôle de reconnaissance encore plus immédiat : les mesures.

Notons à ce propos le rôle de révélateur qu'ont joué les tâches d'illustration proposées dans l'environnement Cabri sur les difficultés qu'ont les élèves à considérer les unités figurales inférieures. Comme le déplacement n'est pas présent en papier crayon, il est probable que ce dernier environnement ne nous aurait pas donné autant d'informations, sur les connaissances des élèves.

On peut remarquer que pour l'activité « Quadrilatère particulier », dans la construction des quadrilatères initiaux, nous attendions des rectangles et des carrés mais tous les élèves ont construit des quadrilatères quelconques. Là encore on peut penser que l'environnement est à l'origine de ce choix des élèves. Le papier crayon favorise les angles droits et les égalités de longueur de par son quadrillage. Cabri offre un écran vide, et de plus l'outil polygone à une icône qui donne à voir un polygone quelconque.

### ***B. Identification de la transformation de l'unité figurale supérieure***

Nous attendions une prise en compte des unités figurales inférieures dans la réalisation du déplacement mais elle n'a pas vraiment eu lieu. Nous attendions des appréhensions

perceptives dans l'identification de l'unité figurale supérieure, elles se sont produites mais ont été complétées par des appréhensions opératoires.

Lorsque les formes à identifier sont dans des positions qui diffèrent des positions prototypiques, les élèves ont eu des difficultés à les reconnaître. Dans l'activité « milieux confondus » de l'activité « Quadrilatère particulier », Léa identifie un rectangle, Sandra invalide la réponse de Léa en explicitant l'absence des angles droits. Elle descend aux sous unités figurales supérieures (les angles) pour invalider la présence des angles droits. Dans la manipulation « diagonales égales » de l'activité « Parallélogrammes particuliers », Salomé ne reconnaît pas un rectangle, Léane s'appuie sur la mesure des angles pour justifier à Salomé le fait que le quadrilatère est un rectangle. Comme pour Sandra, Léane décompose la figure en sous unités ce qui lui permet d'identifier les nouvelles caractéristiques du parallélogramme portant sur les angles. Ainsi, l'appréhension du dessin évolue de l'appréhension perceptive à l'appréhension opératoire au cours des échanges interpersonnels entre les membres des binômes. Au cours de cette appréhension opératoire, certains élèves (Willy, Satine&Camille, Salomé&Léane) valident leurs conjectures sur les unités figurales inférieures par l'utilisation d'outils Cabri (mesures, oracle, construction de parallèles).

Lorsque nous demandons aux élèves d'identifier l'unité figurale supérieure, nous attendons qu'ils explicitent une évolution, une transformation dans l'unité figurale supérieure. Le fait que l'unité figurale supérieure change par la réalisation des contraintes est identifié par les élèves même si l'unité figurale supérieure n'est pas reconnue. Par exemple dans la manipulation « côtés égaux » de l'activité « Quadrilatère particulier » Willy refuse d'identifier un simple quadrilatère après avoir imposé deux côtés opposés égaux, le quadrilatère devient « rien ». Dans la même manipulation, Léa cherche à identifier le quadrilatère particulier obtenu par élimination dans la famille des quadrilatères qu'elle connaît, et en est réduite à décider que c'est un trapèze parce que c'est le plus ressemblant. De plus l'identification de la transformation transparaît dans la formulation des élèves. Le mot « devient » de la consigne ou le mot « transforme » apparaissent spontanément dans la deuxième activité Cabri « Parallélogrammes Particuliers » alors que la consigne n'utilisait pas ce terme.

Ces manipulations avec Cabri, issues de la classe Illustration étaient considérées comme appartenant au paradigme GI. Pour certains élèves (Léa) et pour certaines tâches (activité « Parallélogrammes particuliers », manipulations « côtés égaux » et « côtés perpendiculaires »), ces manipulations se sont effectivement déroulées dans le paradigme GI, avec des appréhensions perceptives, et un contrôle du déplacement sur l'unité figurale supérieure. Cependant pour certains élèves (Willy, Jade), dans certaines tâches (activité « Quadrilatère particulier » manipulation « côtés parallèles »), l'appréhension du dessin n'est pas que perceptive, elle évolue vers une appréhension opératoire aussi bien dans la réalisation du déplacement que dans l'observation qui suit. Nous ne parlons pas encore de paradigme GII, cependant le statut du dessin semble évoluer.

### ***C. Formulation et articulation du lien contraintes-conclusion***

L'étude du résumé écrit par les élèves s'est faite suivant trois axes d'analyse : quels sont les éléments de la manipulation que les élèves expriment, comment expriment-ils ces éléments et comment les articulent-ils ?

Dans le résumé de la manipulation « milieux confondus » de l'activité « Quadrilatère particulier », certains élèves n'explicitent dans leur résumé que des constructions ou leur observation. La phase collective qui suit la première manipulation (dans les deux activités analysées) apporte des éléments repris ensuite par les élèves. Par exemple Léane dans l'activité « Parallélogrammes particuliers » reprend la formulation temporelle de l'enseignant dans son résumé : ce que l'on a au début, ce que l'on fait et ce que l'on obtient. La phase collective a permis l'explicitation des attentes de l'enseignant et son appropriation par les élèves. Ainsi les élèves explicitent-ils davantage les contraintes après la phase collective.

Les élèves formulent les contraintes liées au déplacement en utilisant des verbes d'action et parfois en explicitant le rôle de l'acteur.

De plus Duval précise que les unités figurales inférieures doivent être prises en compte dans le registre visuel pour qu'elles soient explicitées dans le registre du discours. Les élèves ont eu des difficultés à prendre en compte les unités figurales inférieures dans la mise en œuvre du déplacement ce qui peut expliquer pourquoi ils ne parviennent pas à les expliciter dans leur résumé à l'aide d'une formulation générale, détachée du contexte. A l'inverse, les élèves sont parvenus à identifier les unités figurales supérieures après le déplacement ce qui peut expliquer pourquoi ils utilisent une formulation générale. Nous considérons que lorsqu'un élève utilise une formulation nominative, il s'appuie sur le dessin dans l'organisation de son discours. Ainsi les élèves ne sont pas tous parvenus à se détacher du registre visuel en ce qui concerne les déplacements.

Cependant, la formulation de l'articulation entre les constructions-déplacements et l'observation reste difficile pour les élèves, ils ne reprennent pas tous une formulation experte (avec « si » et « alors ») du type de celle donnée par l'enseignant pour la manipulation « milieux confondus » pour exprimer le lien contraintes-conclusion dans les autres manipulations. Certes ils reprennent la chronologie de l'activité qui leur permet d'ordonner les contraintes et la conclusion. Le binôme Léane&Salomé, analysé dans l'activité Cabri « Parallélogrammes Particuliers », parvient à expliciter les constructions, les observations et à les articuler, elles utilisent une formulation temporelle en s'appuyant sur les actions faites avec Cabri. Seul Satine est parvenue à réinvestir une formulation experte pour l'articulation des contraintes et de la conclusion, c'est-à-dire avec les mots « si » et « alors ». Cependant les contraintes liées au déplacement sont explicitées par une formulation nominative, elle nomme les points pour expliciter les côtés et les angles.

Le contexte des activités Cabri apporte un certain nombre de signes pour la formulation du lien de subordination :

- Expression du temps
- Utilisation de l'actant
- Présence de l'action
- Explicitation de la transformation de l'unité figurale supérieure
- Evocation des noms des sommets

Les élèves peuvent s'appuyer sur ces signes dans la formulation du résumé. La présence de ces signes dans les formulations des élèves nous renseigne sur la proximité entre le lien de subordination construit par l'élève et le contexte qui a permis son introduction. C'est-à-dire que plus les élèves utilisent des signes associés au contexte, plus leur formulation de la propriété sera associée au contexte. Ainsi, les élèves ne sont pas parvenus à formuler leur résumé sans utiliser ces signes, leurs formulations sont contextualisées soit par une référence au temps, à l'action ou l'évocation des noms des points du dessin Cabri. Aucun élève ne parvient à formuler son résumé à l'aide d'une formulation experte avec « si » et « alors » sans évocation d'une transformation ou du temps. La métaphore du temps et du déplacement pour l'expression du lien de subordination semble donc ne pas avoir posé de problème d'appropriation par les élèves, puisqu'une situation d'Illustration (milieux confondus) suivie d'une seule phase collective suffit à cette appropriation. Le lien de subordination semble bien construit dans l'environnement mais c'est son détachement de l'environnement qui pose problème.

#### Conclusion sur l'instrumentation du déplacement

Une utilisation *Déplacement* contrôlée perceptivement sur la figure globale où à l'aide des mesures est une procédure économique choisie de préférence par les élèves, ainsi un contrôle sur les unités figurales inférieures n'est pas la première stratégie que les élèves vont utiliser. Cependant pour la tâche « milieux confondus », les élèves ont utilisé un contrôle sur les unités figurales inférieures. Si l'on veut que l'utilisation du déplacement permette une prise en compte des unités figurales inférieures, il s'agit alors de concevoir les situations où les élèves ne peuvent pas utiliser de stratégies perceptives ou s'appuyant sur la mesure. Par exemple nous pouvons proposer les mêmes situations que celles présentées mais en supprimant l'outil Distance ou longueur de la barre d'outils Cabri. Ainsi, les élèves doivent s'investir dans d'autres procédures qui par exemple utilisent le Cercle qui est un objet géométrique.

La difficulté des élèves à prendre en compte les unités figurales inférieures au cours du déplacement transparaît dans les formulations des élèves. Ils utilisent des formulations attachées à l'action et à l'environnement Cabri pour exprimer les contraintes liées au déplacement alors qu'ils utilisent des formulations générales pour les conclusions.

Conclusion sur ce qu'apporte le *Déplacement* pour le lien contraintes-conclusion :

Le *Déplacement* permet de visualiser la transformation de l'unité figurale supérieure. Cela permet d'introduire un ordre et une chronologie dans la propriété, il y a avant le déplacement et après le déplacement. Ainsi le déplacement apporte une dimension temporelle pour la transformation de l'unité figurale supérieure. Cette dimension temporelle contribue à l'émergence de la relation de subordination. Cependant, l'identification des contraintes exige un travail sur les unités figurales inférieures. Nos analyses montrent que le déplacement ne sollicite pas nécessairement une décomposition dimensionnelle des formes, contrairement à ce que nous avons pensé, il faut un travail en parallèle sur l'articulation et le lien entre les contraintes et la conclusion. Cependant si les situations sont bien choisies, le déplacement peut contribuer à ce travail sur les unités figurales inférieures.

Nous avons observé le réinvestissement quasi immédiat du *Déplacement* associé à la manipulation « milieux confondus » de l'activité « Quadrilatère particulier » chez Jade. Elle a utilisé cet instrument dans les manipulations « côtés parallèles » et « côtés égaux ». Jade avait été choisie suite aux observations de classe où elle apparaissait comme une élève pour qui le registre visuel a son importance, elle a besoin de voir pour comprendre. Le fait qu'elle utilise aussi tôt le *Déplacement* nous laisse penser qu'elle a été très sensible à la situation d'Illustration qui a permis son émergence. L'utilisation si précoce du *Déplacement* est intéressante car elle nous prouve que la construction de l'instrument *Déplacement* est accessible aux élèves. Cependant, en réinvestissant cet instrument dans les tâches de l'activité, Jade perd l'accès aux autres instruments visés. En effet, en utilisant le *Déplacement* dans la manipulation « côtés égaux », Jade ne peut identifier la transformation intermédiaire du quadrilatère par la réalisation du déplacement pour obtenir deux côtés opposés égaux. Elle obtient directement sur les quatre côtés. De plus lorsque Jade réinvestit le *Déplacement* elle anticipe les observations, on peut alors se demander si la dimension temporelle que permet d'introduire ces situations d'Illustration est exploitable ici à cause de l'ambiguïté dans les constructions. En utilisant le *Déplacement* pour la manipulation « côtés égaux » de la manipulation « Quadrilatère particulier », Jade construit-elle un parallélogramme ou des côtés opposés de même longueur ?

## II. La relation de parallélisme

Dans l'activité Cabri « Quadrilatères particuliers », la manipulation « côtés parallèles » nous apporte de nombreuses informations sur les connaissances des élèves sur le parallélisme. Les quatre binômes analysés ont tous anticipé l'observation en déplaçant, non pour obtenir uniquement une paire de côtés parallèles mais pour obtenir un parallélogramme. Avec Willy&Meddi, l'enseignant a utilisé la configuration du trapèze pour mettre en valeur deux côtés opposés parallèles uniquement, mais cette configuration n'a pas été conservée par l'élève qui est revenu immédiatement à une configuration du parallélogramme. Nous interprétons cette réaction des élèves comme une association forte entre l'objet « parallélogramme » et la relation « côtés opposés parallèles ». Cette association provient très

probablement de l'école primaire où le parallélogramme est associé à des côtés opposés parallèles. Le parallélisme n'est pas une relation entre deux droites mais une caractéristique d'un quadrilatère. On retrouve ce même statut pour le parallélisme chez Meddi. Pour valider le parallélisme de deux côtés opposés, il construit trois parallèles, deux à un même côté et une au côté opposé. Ainsi nous supposons que lorsque l'élève construit des droites parallèles, il ne leur associe pas les droites auxquelles elles sont parallèles, il obtient simplement une droite parallèle. Le parallélisme n'est pas une relation entre deux droites pour ces élèves mais une qualité ou une caractéristique d'une droite.

Enfin, la proximité des deux mots « parallèle » et « parallélogramme » ne facilite pas la distinction entre les deux statuts. Sandra utilise le mot « parallélogramme » dans une phrase à la place du mot « parallèle ». Ainsi, le registre discursif n'aide pas à distinguer les deux éléments géométriques et contribue à renforcer l'association entre côtés parallèles et parallélogramme.

Cette relation d'association peut être un obstacle à la relation de subordination que nous visions. En effet, les élèves n'ont pas pu accéder au trapèze, configuration intermédiaire entre le quadrilatère et le parallélogramme car pour eux le bloc côtés opposés parallèles n'est pas décomposable en deux unités inférieures. De plus la relation d'association fait disparaître l'ordre alors que nous avons utilisé l'ordre pour introduire la relation de subordination. L'absence d'ordre rend impossible l'observation de la transformation de l'unité figurale supérieure.

### **III. Classification des formulations des propriétés**

Les échanges entre les élèves et l'enseignant ont donné à entendre différentes formulations des propriétés. Nous distinguons trois classes de formulation : une formulation avec une simple association entre les contraintes et la conclusion, une formulation avec explicitation en termes de temps, et/ou d'acteur et/ou d'action du lien de subordination, et une formulation du lien de subordination en termes des seuls objets et relations théoriques.

#### **A. Formulations avec association**

Formulation de Jade dans le test : « dans un parallélogramme tous les côtés opposés sont de même longueur, ils sont parallèles et les diagonales ont le même milieu ».

Dans ces formulations l'ordre n'apparaît pas, les contraintes et les conclusions ont des positions symétriques. Il n'y a pas de marques langagières des contraintes et des conclusions car tous les éléments sont juxtaposés. Les premières propriétés auxquelles sont confrontés les élèves sont les caractérisations de l'école primaire. Ces formulations ne sont pas utilisables dans un raisonnement déductif, car elles n'explicitent pas de lien de subordination. En particulier, elles ne permettent pas de distinguer les conditions nécessaires et les conditions suffisantes.

### **B. Les formulations temporelles avec un acteur**

Formulation de Léane dans la manipulation « côtés égaux » de l'activité « Parallélogrammes particuliers » : « Au début nous avons un parallélogramme, puis on déplace le point A de façon à ce que [AD] et [AB] fassent la même mesure et on obtient un losange ».

Cette formulation est la plus proche du contexte Cabri, elle correspond à une description des actions réalisées au cours de la manipulation. Ainsi l'acteur et ses actions sont explicites. Les actions permettent d'introduire la dimension temporelle et l'ordre. La conclusion apparaît comme un résultat consécutif des actions liées au déplacement.

Au cours de la phase collective issue de l'activité « Parallélogrammes particuliers » l'enseignant utilise une formulation avec un acteur mais les actions ne sont pas explicitées : « si j'ai un parallélogramme et qu'en plus j'ai un angle droit alors je vais avoir à la fin ? » et un élève répond un rectangle.

Le fait de ne pas expliciter l'action permet de réduire la présence de la dimension temporelle dans la formulation de la propriété. La transformation liée au déplacement a disparu. Cette formulation permet de garder un contexte concret avec la présence de l'acteur pendant le déplacement n'apparaît plus. Elle se rapproche de la formulation théorique. On peut la considérer comme un intermédiaire entre une formulation théorique et la formulation située dans Cabri.

### **C. Formulations théoriques**

Formulation de l'enseignant : « si un parallélogramme a ses côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle ».

Dans cette formulation, les références à la situation d'illustration ont disparu. Ainsi, les contraintes ne sont pas explicitées à l'aide d'un verbe d'action, et le temps n'apparaît plus. Cette propriété est décontextualisée de l'environnement Cabri.

Les formulations retenues par la classe sont des formulations de la dernière classe, sans référence au temps et à l'action. Cependant cette formulation reste difficile et les élèves avec l'aide de l'enseignant reviennent fréquemment à une formulation orale des propriétés de la classe intermédiaire.

## **IV. Articulation des registres**

A partir de nos analyses il apparaît qu'un environnement de géométrie dynamique comme Cabri apporte des éléments intéressants pour l'introduction et la construction du lien contraintes-conclusion chez les élèves. Ces activités avec Cabri utilisent le temps et l'action ce qui permet de fragiliser la relation d'association que les élèves ont acquis à l'école primaire. De plus ces activités utilisent le *Déplacement* qui, dans certaines manipulations contribue à la décomposition dimensionnelle des formes. Ainsi, ces activités introduisent des

leviers qui peuvent participer à l'appropriation du lien contraintes-conclusion. L'articulation entre les registres reprend ces leviers et les fait évoluer selon le besoin.

Avant même l'articulation entre les environnements, la description dans le registre du discours des manipulations des élèves participe à la prise en compte des unités figurales inférieures. Par exemple, dans la phase collective de l'activité Cabri « Quadrilatère particulier » lorsque l'élève explicite son déplacement il est amené à expliciter sur quelle unité figurale il fait porter son contrôle du déplacement, ici les milieux des diagonales. Cette explicitation des unités figurales est liée à l'organisation de la phase collective, c'est parce que l'élève doit expliciter son déplacement qu'il est amené à expliciter les unités figurales inférieures. Dans la suite des activités Cabri, les élèves ont identifié la transformation de l'unité figurale associée à la conclusion à l'aide du déplacement, cependant le travail sur les unités figurales inférieures est à développer. Ce travail intervient lors de l'articulation entre les deux environnements avec l'enseignant. Ainsi, la décomposition dimensionnelle des formes, si elle n'est pas mise en valeur lors de l'utilisation de l'environnement Cabri, apparaît dans la traduction dans le registre discursivo-graphique des manipulations avec Cabri. Dans ce registre, les unités figurales inférieures sont mises en évidence car elles sont explicitées à plusieurs reprises. Tout d'abord dans la colonne des constructions-déplacements à l'aide d'une phrase, par exemple « M milieu de [AC] et N milieu de [BD] soient confondus », puis à l'aide des symboles « + M et N confondus ». Puis, l'explicitation des unités figurales inférieures apparaît dans la colonne des observations par l'utilisation du codage et de la couleur.

L'utilisation de plusieurs registres s'accompagne de l'explicitation d'un grand nombre de signes. Ces signes participent à l'intériorisation du *Déplacement*, par les élèves et à la construction du lien de subordination. Ces signes participent aussi à la décontextualisation des propriétés. Par exemple, l'action disparaît progressivement, elle est dans un premier temps explicitée avec « on transforme », « on ajoute », puis des signes neutres conservent l'acteur mais réduisent l'action « j'ai » enfin, l'utilisation de code supprime l'acteur, l'action et symétrise les contraintes « + ».

L'articulation entre les environnements Cabri et papier-crayon se réalise par une articulation entre registres. Les traductions d'un registre à l'autre constituent des étapes pour le détachement de l'environnement Cabri et l'introduction d'une formulation théorique des propriétés (sans le temps ni l'action).

## **V. Rôle de l'enseignant dans l'articulation entre les registres**

Nous attendions des phases collectives que les élèves échangent entre eux et avec l'enseignant. Cela permet des échanges interpersonnels et une évolution des signes externes en signes internes. Cependant les formulations de l'enseignant ont pris une part importante

dans les discussions, elles ont laissé peu de place aux formulations personnelles des élèves. L'enseignant a pris à sa charge la formulation du lien, il articule lui-même les contraintes et les conclusions et n'interroge les élèves que sur une partie des contraintes ou la conclusion. Par exemple à l'issue de la phase collective de formulation des propriétés relatives aux parallélogrammes particuliers :

**Enseignant : comment je transforme le parallélogramme sur les côtés pour obtenir le losange ?**

**Elève : la même longueur**

Les formulations de l'enseignant sont nombreuses et variées. Ainsi l'enseignant joue sur les signes pour expliciter un lien avec ou sans acteur, avec ou sans action, avec ou non une référence au déplacement, avec ou non une référence à la transformation. Cette richesse dans l'utilisation et l'articulation des signes permet à l'enseignant de se référer aux deux environnements et à plusieurs registres. La formulation finale que vise l'enseignant est la formulation théorique. Cette formulation détachée de tout contexte se révèle parfois difficile pour les élèves, en particulier pour identifier les contraintes. L'enseignant reprend alors une formulation avec processus et/ou acteur ce qui lui permet une référence au contexte Cabri. Ainsi l'enseignant joue avec les niveaux de formulations tout en revenant et concluant sur la formulation théorique. Il a fait fonctionner le *Déplacement* comme médiateur de la distinction contraintes-conclusion.

Cette recherche nous montre le rôle complexe de l'enseignant. Un objectif d'apprentissage dépend de la réussite d'un ensemble de sous objectifs. Dans notre ingénierie, l'objectif didactique est l'appropriation par les élèves de la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion. L'enseignant est à la fois responsable de :

- l'articulation des registres ;
- l'introduction des signes pour l'explicitation des contraintes, des conclusions, et de leur articulation ;
- l'évolution des formulations avec acteur, action et dimension temporelle à une formulation théorique.

## **VI. Appropriation du lien contraintes-conclusion chez les élèves**

### **A. Les exercices de réinvestissement**

Nous avons prévu deux exercices de réinvestissement, cependant un seul a tenu ce rôle. Le premier exercice sur les lignes brisées a interrogé les élèves sur les contraintes que devait posséder une ligne brisée pour qu'elle forme un parallélogramme une fois fermée. Cet exercice n'a pas été posé dans un contexte de réinvestissement puisqu'il a été traité avant la phase collective de formulation des propriétés. La manipulation Cabri correspondant à la propriété sous-jacente à cet exercice n'a pas été clairement identifiée par les élèves. En effet

ils ont utilisé la mesure ce qui a bloqué l'accès aux unités figurales inférieures et ils n'ont pas tous reconnu le parallélogramme. Comme l'exercice des lignes brisées n'utilise pas la mesure mais le codage à l'aide de couleurs pour renseigner sur les longueurs des segments, cet exercice a permis un travail sur les unités figurales inférieures. De plus le déplacement qui permet de refermer la ligne et de visualiser le quadrilatère est utilisé uniquement pour valider les réponses des élèves. Dans leur phase de recherche, les élèves utilisent le dessin de la ligne brisée, cependant une simple appréhension perceptive de ce dessin ne permet pas d'identifier le parallélogramme. Les élèves doivent mettre en œuvre une appréhension opératoire du dessin afin d'identifier les segments qui deviendront les côtés du quadrilatère. Cet exercice a permis un travail sur l'appréhension opératoire du dessin afin d'identifier les unités figurales inférieures. Les élèves n'ont pas travaillé sur la formulation de la propriété, ils ont explicité les contraintes de la propriété mais dans le contexte du problème. Il est probable qu'ils n'ont pas identifié la propriété sous jacente car celle-ci n'avait pas encore été traitée par la classe. Ainsi les élèves sont parvenus à identifier les unités figurales inférieures de la ligne brisée et à leur associer des caractéristiques : les segments de même longueur doivent être opposés, il faut un rouge un vert un rouge un vert. Cependant ils sont restés attachés au contexte, c'est l'enseignant qui formule la propriété détachée du contexte.

Le deuxième exercice de réinvestissement a lui aussi changé de statut au cours du déroulement du processus d'enseignement. Il était prévu dans un contexte de problème ouvert avec le déplacement de Cabri comme outil d'exploration pour identifier les contraintes manquantes. Nous n'attendions pas de formulation de propriétés, celles-ci n'ayant pas encore été discutées avec la classe. La correction de l'exercice s'est déroulée après la formulation des propriétés. Ainsi, les connaissances des élèves ayant évolué, le contexte a lui aussi changé. L'enseignant n'a pas explicité l'évolution de ses attentes, la correction de l'exercice a présentée une ambiguïté dans les réponses. Les élèves explicitent des réponses en liaison avec la consigne, c'est-à-dire sur la sous unité figurale supérieure, (le triangle) l'enseignant attend des réponses sur les sous unités figurales inférieures (les côtés ou les diagonales). Le changement de contexte a aussi permis un changement dans l'utilisation du déplacement qui est devenu lors de la correction un outil de validation des réponses des élèves. Ainsi comme dans l'exercice des lignes brisées, les élèves se sont appuyés sur une appréhension opératoire afin d'identifier comment intervenir sur les unités figurales inférieures pour obtenir un rectangle ou un losange. Cependant alors que l'enseignant attendait des contraintes sur des unités figurales inférieures du parallélogramme les élèves ont exprimé des contraintes sur le triangle.

Conclusion : le rôle des deux exercices a évolué lors de leur utilisation dans le processus d'enseignement. L'exercice sur les lignes brisées devait être un exercice de réinvestissement. Il a été utilisé comme un exercice pour l'illustration d'une propriété et a contribué à la mise en évidence de l'égalité des côtés opposés d'un quadrilatère pour obtenir un parallélogramme. L'exercice de la partie « j'utilise » de Cabri est passé d'un exercice de recherche à un exercice

de réinvestissement au cours de la correction. Au cours de la correction, les élèves sont parvenus à identifier et expliciter les contraintes à imposer au triangle pour obtenir un rectangle ou un losange. Ces deux exercices ont participé à la prise en compte des unités figurales inférieures. Dans ces exercices, seul le deuxième exercice pouvait prétendre, lors de la correction, à ce que les élèves explicitent la propriété ou au moins ses contraintes. Cependant les élèves sont restés très attachés aux contraintes liées au contexte.

### **B. *Le test d'appropriation du lien contraintes-conclusion***

Nous avons proposé aux élèves trois exercices différents principalement par leurs énoncés, explicitant ou non le contexte. Les deux premiers exercices utilisent des programmes de constructions, neutre pour le premier, associé à un acteur pour le deuxième. Le troisième exercice reprend l'énoncé théorique (sans allusion au temps et à l'action).

L'analyse des productions écrites nous révèle que les élèves utilisent le contexte pour identifier et formuler les propriétés. Les énoncés des deux premiers exercices proposés s'appuyaient sur des contextes où l'action et le temps étaient explicités. Les signes utilisés pour exprimer les constructions ou l'observation sont des outils qui permettent aux élèves de distinguer les contraintes des conclusions. De plus l'expression de la relation de subordination semble plus abordable dans le registre discursif que dans le registre discursivo-graphique. En effet aucun élève n'est parvenu à représenter la relation de subordination dans le registre discursivo-graphique, ils n'utilisent qu'un seul dessin qui pourrait représenter une association et non une subordination.

Les analyses des discussions avec le chercheur montrent que le contexte, l'évocation de l'action et du temps, collaborent à l'expression des propriétés, l'identification des contraintes et des conclusions. Ainsi, il semble que lorsque les propriétés sont introduites avec l'environnement Cabri, les élèves s'approprient les manipulations, constructions, déplacements, observations. Cette appropriation est par la suite réinvestie dans l'expression des propriétés de façon explicite par l'utilisation des signes « construit » ou « observe » mais aussi implicite lorsque Jade trace deux droites qui ne sont pas parallèles pour exprimer les contraintes de la propriété de l'exercice 3.

### **C. *Conclusion***

Il apparaît que le processus de médiation sémiotique a permis d'intérioriser le déplacement pour identifier les contraintes d'une propriété.

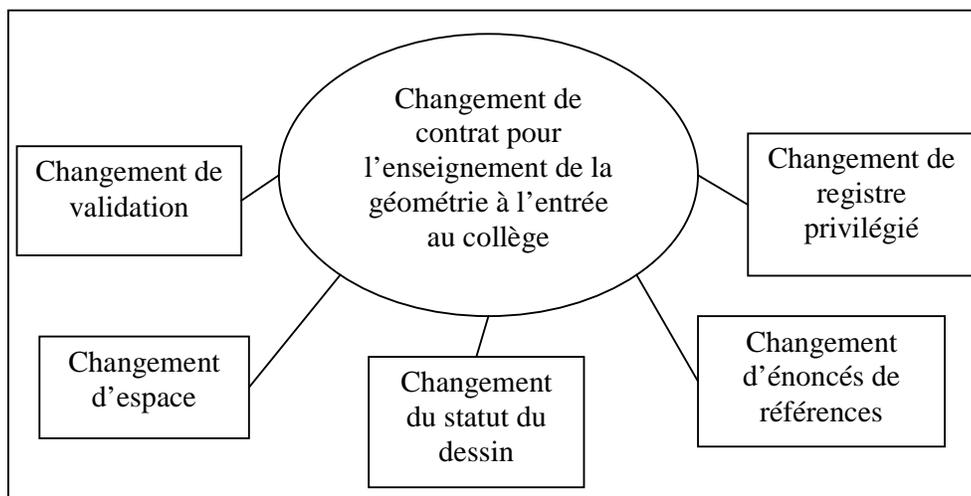
Les situations d'Illustration avec Cabri permettent de déstabiliser l'association très forte chez les élèves par l'utilisation du temps. La dimension temporelle associée aux situations d'Illustration permet d'introduire la relation de subordination. Les échanges avec l'enseignant lors des phases collectives de formulation des propriétés font évoluer la formulation du lien contraintes-conclusion vers une formulation théorique sans référence au temps et à l'action. Cette décontextualisation des propriétés permet à l'enseignant d'atteindre le niveau le plus

théorique dans la formulation des propriétés, le temps disparaît ainsi que l'action. Cependant cette formulation théorique reste difficile pour les élèves. Les analyses nous montrent que les élèves s'appuient sur le contexte des exercices de réinvestissement et des exercices de formulation des propriétés pour distinguer et exprimer les contraintes et le lien de subordination, d'où des références à des formulations intermédiaires avec l'explicitation du temps ou de l'action. Ainsi l'action et le temps qui nous ont permis d'introduire la relation de subordination sont réinvestis par les élèves pour identifier les contraintes et la conclusion. Il semble que le processus de médiation sémiotique qui s'est, entre autre, appuyé sur le *Déplacement* comme médiateur pour l'introduction de la relation de subordination, a permis aux élèves de s'approprier des signes attachés à l'action, au temps et à la transformation pour intérioriser le lien entre les contraintes et les conclusions.

Le temps d'apprentissage dépasse largement le temps didactique car les élèves ne se sont toujours pas approprié la formulation théorique (sans référence au temps et à l'action) à la fin du processus d'enseignement de la classe de 5<sup>ième</sup>.

## VII. Liaison primaire-collège à l'aide des propriétés

La motivation initiale de cette recherche était de mettre en place un processus d'enseignement des propriétés qui contribue à la liaison primaire-collège dans la pratique de la géométrie. Nous avons identifié quelques ruptures entre les deux institutions que nous rappelons par le schéma ci-dessous :



### A. *Changement dans les énoncés de référence, théorisation de l'espace*

Notre recherche s'est intéressée principalement au changement des énoncés de références. A l'école primaire, les énoncés de références sont des caractéristiques d'objets géométriques liées au dessin où la relation d'association est forte. Au collège les énoncés de références sont des propriétés, énoncés utilisés comme énoncé-tiers dans des raisonnements déductifs. Ces énoncés s'appuient sur une relation de subordination. Nous avons introduit la relation de

subordination à l'aide des actions et du temps présents dans les activités Cabri. Le contexte d'introduction de ce lien disparaît progressivement pour laisser place à des énoncés plus théoriques, c'est-à-dire ne faisant plus référence au temps et à l'action et exprimés dans le registre discursif.

Supprimer progressivement le temps et l'action dans les énoncés des propriétés contribue à l'introduction progressive de l'espace physico-géométrique. De plus la traduction des actions du registre graphique-dynamique au registre discursif participe à l'essor du registre discursif.

### ***B. Changement de registre privilégié par l'évolution de statut du dessin et la décomposition dimensionnelle***

Comme on a pu le voir le registre du discours est très utilisé par l'enseignant qui utilise un grand nombre de signes. Cela contribue à l'articulation entre les registres et à l'émancipation du registre discursif.

Au cours des activités Cabri les élèves travaillent essentiellement dans un registre visuel, le registre graphique-dynamique. Dans ce registre le dessin est objet d'étude et de validation, les élèves construisent leurs raisonnements à partir de ce qu'ils perçoivent.

Dans la suite du processus d'apprentissage, au cours des phases collectives l'accent est mis sur la décomposition dimensionnelle des formes. Le travail sur les unités figurales inférieures commence avec la traduction des actions de l'environnement Cabri à l'environnement papier-crayon, lors du passage du registre graphique-dynamique au registre discursivo-graphique. Ce travail sur la décomposition dimensionnelle des formes participe à l'évolution de l'appréhension de la figure. Les élèves ne perçoivent plus uniquement une forme mais aussi les sous unités qui la composent. Le dessin devient support pour la représentation des objets considérés dans la propriété, les unités figurales inférieures sont explicitées sur le dessin à l'aide des codes et à l'aide de phrases.

Ce travail sur les unités figurales inférieures se poursuit dans les exercices de réinvestissement. Le dessin est toujours présent mais devient un outil de résolution, les élèves ne peuvent plus construire leur raisonnement simplement à partir de ce qu'ils perçoivent. La résolution des exercices utilise une appréhension opératoire des dessins proposés, c'est-à-dire que les élèves doivent identifier qu'elles sont les unités figurales concernées par le problème et comment elles doivent évoluer.

### ***C. Changement de validation***

La prise en compte des unités figurales inférieures contribue au passage d'une appréhension perceptive à une appréhension opératoire des figures. De plus nous avons choisi des exercices qui ne permettent pas d'identifier les solutions par la simple perception. Ainsi, la résolution de ces exercices utilise les dessins comme outils, c'est par le réinvestissement des propriétés que les élèves parviennent à construire les solutions.



# Conclusion

L'étude des programmes de l'école primaire et du collège concernant la géométrie, complétée de celle de quelques manuels nous a permis d'identifier une rupture dans l'enseignement de la géométrie entre les deux institutions. Cette rupture apparaît dans plusieurs domaines (changement de registre et d'énoncés de référence, changement de validation, d'espace de travail et de place du dessin). Nous avons considéré que l'enseignement des propriétés pouvait établir un pont entre les deux institutions. Afin de favoriser un processus d'apprentissage de la notion de propriété, nous avons utilisé la théorie des champs conceptuels pour identifier le lien entre les contraintes et la conclusion dans une propriété. Cette étude nous a amené à considérer trois types de situations associées aux propriétés : les situations d'illustration, les situations d'énoncé-tiers et les situations de validation, de plus, nous avons caractérisé le lien entre les contraintes et la conclusion comme une relation de subordination. Munie de cette caractérisation théorique du concept de propriété, nous avons cherché à identifier comment sensibiliser les élèves à cette relation de subordination. Pour cela nous avons repris les travaux sur le processus de médiation sémiotique (Vygotsky 1934) utilisés dans le cas des nouvelles technologies comme Cabri (Mariotti 2002). Nous avons eu recours au déplacement de la géométrie dynamique comme médiateur de l'introduction au lien de subordination. De plus nous avons associé l'articulation entre les registres (Duval 1995-2005) et les travaux sur l'instrumentation (Rabardel 1995, Trouche 2005). Cette étude a conduit à deux questions :

QR1 : Comment les élèves s'approprient-ils les instruments *Déplacement* relativement aux situations de la classe Illustration et à quelle explicitation du lien contraintes-conclusion conduit cette appropriation ?

QR2 : Comment l'articulation entre les trois registres (graphique-dynamique, graphique et discursif) en lien avec le processus de médiation sémiotique du déplacement, participe-t-elle à l'appropriation par les élèves du lien contraintes-conclusion ?

Afin de répondre à ces questions, nous avons conçu une ingénierie didactique qui a permis d'étudier un processus d'enseignement dans une classe en intégrant Cabri Géomètre II+. Cette expérimentation a pour but l'observation des élèves et de leurs appropriations des propriétés mais aussi de l'enseignant et de son rôle dans l'articulation entre les registres et dans l'évolution du processus de médiation sémiotique pour le lien contraintes-conclusion.

## I. Résultats

Nos premiers résultats portent sur les situations d'illustration, qui utilisent l'environnement Cabri. Nos objectifs initiaux étaient d'utiliser le temps et l'action afin de déstabiliser la relation d'association forte entre contraintes et conclusion chez les élèves de primaire et

contraire à la relation de subordination que nous visions. Nous attendions aussi que les élèves construisent l'instrument *Déplacement*, instrument qui leur permet d'identifier les contraintes aux constructions et les déplacements et la conclusion à l'observation. Ainsi la construction de cet instrument par les élèves amorce le processus de médiation sémiotique pour l'appropriation du lien contraintes-conclusion.

Nos analyses montrent que l'utilisation du déplacement tel que nous l'avions prévu, un déplacement mou (Healy 2000) n'est pas aussi évident qu'il peut sembler à première vue. Il s'appuie sur les unités figurales inférieures qui sont difficilement identifiables par les élèves. Il apparaît que la prise en compte des unités figurales inférieures n'est pas considérée comme une procédure économique par les élèves, ainsi, ils considèrent les unités figurales inférieures en dernier recours, ce qui modifie l'instrument *Déplacement* que nous visions. En effet, les constructions et déplacements des élèves ne correspondent plus systématiquement aux contraintes de la propriété visée. Cette difficulté dans la prise en compte des unités figurales inférieures a des répercussions dans la différenciation entre contraintes et conclusion. Lorsque les élèves ne parviennent pas à identifier les unités figurales inférieures dans un registre visuel ils rencontrent des difficultés pour les expliciter dans un registre discursif. Nous avons identifié d'autres éléments qui remplacent la prise en compte des unités figurales dans le déplacement. Les connaissances initiales des élèves influent sur l'utilisation du déplacement (Association parallèle-parallélogramme et classes des quadrilatères). De plus les élèves utilisent la mesure dès que cela leur est possible, la mesure n'est pas un objet géométrique mais numérique. La prise en compte des unités figurales par les élèves ne semble pas être la stratégie la plus accessible chez les élèves qui lui préfèrent des stratégies utilisant la perception globale ou l'utilisation de la mesure.

La suite du processus d'enseignement a utilisé l'articulation entre les registres. Ainsi, la prise en compte des unités figurales inférieures qui n'a pas été systématique chez les élèves dans la mise en œuvre du déplacement devient explicite dans les phases collectives animées par l'enseignant qui conduit un processus de reformulation des propriétés exprimées par les élèves lors du maniement de Cabri. Lors de la traduction des actions de l'environnement Cabri dans l'environnement papier-crayon, les unités figurales inférieures sont explicitées car elles supportent les contraintes. Les traductions entre les registres participent à une hiérarchisation dans les formulations des propriétés. Ainsi dans un premier temps, une formulation intermédiaire des propriétés s'appuient sur les actions des élèves au cours des activités Cabri. Les manipulations des élèves sont intériorisées progressivement et la formulation évolue sous la direction de l'enseignant, les actions et le temps qui sont des références à l'environnement Cabri disparaissent, la formulation finale ne s'appuie plus sur le contexte qui a permis l'introduction de la propriété.

Le rôle central de l'enseignant est confirmé dans l'appropriation du lien contraintes-conclusion par les élèves. Un objectif d'apprentissage dépend de la réussite d'un ensemble de sous objectifs. Dans notre ingénierie, l'objectif didactique est l'appropriation par les élèves de

la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion. Cette appropriation passe par la réalisation des activités Cabri mais aussi par l'articulation entre les registres. Dans toutes les phases collectives, l'enseignant participe à l'intériorisation de ce lien par les élèves, en introduisant et utilisant un ensemble de signes qui permettent l'articulation entre les registres pour aboutir aux énoncés théoriques c'est-à-dire sans référence aux temps et à l'action.

Cette recherche nous a permis d'étudier les conditions pour la mise en place de deux apprentissages (la prise en compte des unités figurales inférieures et la relation de subordination entre les contraintes et la conclusion) qui ne sont pas pris en charge explicitement dans l'enseignement usuel. Il apparaît que ces deux apprentissages sont relativement complexes pour les élèves. En effet à la fin d'une année scolaire, la référence au contexte est encore présente chez de nombreux élèves, il apparaît un décalage important entre le temps didactique et le temps d'apprentissage.

Ces deux apprentissages se sont avérés essentiels dans le passage de la géométrie enseignée à l'école primaire à la géométrie enseignée au collège. En effet, la prise en compte des unités figurales inférieures participe à l'appréhension opératoire de la figure. L'évolution dans l'expression de la relation de subordination contribue à une théorisation de l'espace.

## II. Limites

Brousseau (1998) considère que les élèves n'arrivent pas vierges de connaissances en classe. Cette remarque s'est confirmée à travers nos analyses : les élèves avaient des connaissances inattendues en géométrie qui ont eu des effets sur les activités Cabri, et l'absence de certaines connaissances du logiciel a gêné l'avancement dans l'apprentissage.

D'un point de vue logiciel, lorsque les élèves déplacent pour réaliser une contrainte, il faut que ce déplacement soit perçu comme l'ajout d'une caractéristique qui ne supprime pas les caractéristiques initiales. C'est-à-dire que les caractéristiques attachées aux constructions perdurent lors de la réalisation du déplacement. Pour cela il faut que les élèves connaissent le déplacement « dur » de Cabri.

D'un point de vue procédures, la mesure et la perception globale de la forme sont des procédures très fortes et qui peuvent sembler économiques pour les élèves. Mais ces procédures interviennent comme des obstacles à la décomposition dimensionnelle des formes. Ainsi la prise en compte des unités figurales inférieures n'apparaît pas au cours du déplacement. Cela a pour conséquence une difficulté dans l'identification des contraintes d'une propriété.

D'un point de vue géométrique, les élèves ont réalisé les activités Cabri en s'appuyant sur les connaissances géométriques qu'ils possédaient. Ainsi, l'association entre parallèles et parallélogramme a-t-elle empêché une prise en compte des unités figurales inférieures.

Les propriétés géométriques étudiées au collège sont des équivalences. Cela rend plus difficile le travail sur la relation entre les contraintes et la conclusion, car la distinction entre contraintes et conclusions n'est plus aussi nette. Dans l'énoncé réciproque, les contraintes deviennent conclusions et les conclusions deviennent contraintes. Comme la propriété et sa réciproque sont vraies, ces équivalences incitent très fortement à une utilisation d'un lien d'association et non à une relation de subordination.

Les équivalences complexifient la distinction des conditions nécessaires et des conditions suffisantes. Cette difficulté est renforcée par les ambiguïtés de la langue naturelle et l'utilisation du terme « il faut ». Dans la langue naturelle, la distinction entre conditions nécessaires et conditions suffisantes est très peu utilisée. Dans le langage mathématique, cette distinction est primordiale.

Ainsi le langage naturel peut perturber le travail sur les contraintes et la conclusion. Nous retrouvons les mêmes effets avec les connaissances préalables des élèves. Les élèves utilisent leurs connaissances dans les activités Cabri, ces connaissances influent sur les stratégies des élèves. Le *Déplacement* que l'élève va se construire dépend de ses manipulations et observations, ainsi des connaissances erronées peuvent détourner le *Déplacement* visé par les activités.

### III. Perspectives

La prise en compte des unités figurales inférieures est centrale dans le travail d'identification des contraintes, il l'est aussi dans l'articulation entre les registres. Certaines des activités que nous avons conçues laissent une place importante aux mesures. Une évolution de ces situations serait de concevoir des tâches dans lesquelles les mesures n'interviennent pas dans le déplacement. Un moyen très simple serait de supprimer l'outil Mesure des outils de Cabri. Ce choix referme la situation car réduit l'ensemble des possibilités de l'élève. On peut aussi se demander s'il contribue à un renforcement de la prise en compte des unités figurales dans le registre visuel.

Comme les unités figurales inférieures sont liées aux contraintes, un autre moyen de travailler sur les contraintes ou les unités figurales inférieures serait de concevoir des situations d'Illustration avec des propriétés sans équivalence. Ainsi les élèves pourraient travailler sur les contraintes sans l'ambiguïté présente dans les propriétés avec équivalence.

La place de l'enseignant est importante autant par ses discours que par ses silences. L'enseignant qui a collaboré à notre ingénierie était très présent dans les échanges, prenant beaucoup de formulations à sa charge. Cet investissement de l'enseignant dans son discours peut provenir de la classe avec laquelle nous avons travaillé. Il est vrai que dans les établissements ZEP, la place de l'enseignant est primordiale et elle est fortement liée à son discours.

Dans le processus de médiation sémiotique, l'enseignant permet l'introduction des signes langagiers. Cependant c'est au cours de l'utilisation des nouveaux signes que l'élève peut se les approprier. Ainsi il serait intéressant de mettre en œuvre des phases collectives où les élèves échangent sur leurs formulations. Ces échanges interpersonnels contribueraient à une évolution des signes en signes psychologiques et des formulations interpersonnelles en intra personnelles.

Enfin, concernant les connaissances limitées des élèves à propos du logiciel avec lesquels nous avons travaillé (déplacement dur), il serait intéressant de reprendre les activités Cabri que nous avons proposées avec des élèves qui connaissent la philosophie de l'environnement Cabri-Géomètre, c'est-à-dire avec des élèves qui connaissent le déplacement dur. Les deux déplacements, dur et mou, pourraient alors être utilisés conjointement. Le déplacement mou permettrait d'introduire les nouvelles propriétés. Ainsi, les élèves ne considèreraient pas que l'objet est transformé pour changer de classe, mais qu'il acquiert des particularités supplémentaires. Dans un deuxième temps, le déplacement dur serait utilisé pour réinvestir les propriétés précédemment illustrées. Les élèves réaliseraient les constructions en « dur » correspondant à leurs manipulations en mou. Ces constructions réalisées avec Cabri constitueraient des constructions raisonnées dynamiques, on pourrait avoir par exemple comme construction : construire un parallélogramme particulier en imposant des contraintes sur ses côtés pour que le parallélogramme soit un rectangle.

Nous concluons à propos de cette recherche que, malgré les limites mentionnées plus haut, elle a apporté des informations sur les connaissances des élèves, sur la possibilité d'utiliser les outils de géométrie dynamique comme médiateur sémiotique de la notion de propriété. Elle a permis de préciser des conditions de bon fonctionnement du processus de médiation sémiotique. Rappelons que l'ingénierie a été menée avec des élèves de ZEP qui, a priori jugés comme manquant de flexibilité, ont pu entrer dans la métaphore du déplacement comme médiateur du lien de subordination et se l'approprier au moins en partie car ils peuvent le réinvestir quand il est évoqué.

## Références

- Argaud H.C., 1998, *Problèmes et milieux a-didactiques pour un processus d'apprentissage en géométrie place à l'école élémentaire dans les environnements papier-crayon et Cabri-géomètre*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Arsac G., 1999, Variations et variables de la démonstration géométrique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol 19(3), 357-399
- Artigue M., 1995, Une approche didactique de l'intégration de l'EIAO à l'enseignement, In Guin D., Py D., Nicaud J.F. (Eds.), *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec l'Ordinateur*, (pp 17-28). Paris: Eyrolles
- Assude T., 2005, Time management in the work economy of a class, a case study: integration of Cabri in primary school mathematics teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 59(1), 183-203
- Assude T., 2002, Dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 259-287
- Bergue D., Borreani J., Poulain B., 1989, De la figure à la démonstration, *Petit x*, 27, 5-39
- Balacheff N., 1987, Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Bellard N., Lewillion M., 2001, Schémas pour la compréhension des théorèmes en classe de Quatrième, In Barbin E., Duval R., Giorgiutti I., Houdebine J., Laborde C. (Eds.) *Produire et lire des textes de démonstration*, (pp.129-142) Paris : Ellipses
- Berthelot R., Salin M.H., 2000, L'enseignement de la géométrie au début du collège, *Petit x*, 56, 5-34
- Bessot D., 1983, Problème de représentation dans l'espace, *Bulletin Inter-Irem*, 23, 33-40
- Boero P., 1999, Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education, *International Newspaper on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 7/8.
- Brousseau G., 1998, *Théorie des situations didactiques* : Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Bruner J.S., 1983, *Le développement de l'enfant Savoir faire Savoir dire*, Paris : PUF.
- Coutat S., 2003, *Connaître et reconnaître les théorèmes*, Mémoire de DEA de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Duval R., 1993, Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif, *Repère IREM*, 12, 114-140
- Duval R., 1994, Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repères IREM*, 17, 121-138
- Duval R., 1995, *Sémiosis et pensée humaine: registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Berne : Peter Lang.
- Duval R., 2005, Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de didactique des sciences cognitives*, 10, 5-53

- Falcade R., 2006, *Théorie des Situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement qui utilisent Cabri-géomètre et qui visent à l'apprentissage des notions de fonction et graphe de fonction*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Harel G., 1999, Student's understanding proofs: a historical analysis and implications for the teaching of the geometry and the linear algebra, *Linear Algebra and its applications*, 302-303, 601-613
- Harel G., 2005, Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of research on Mathematics Teaching and learning*, National Council of Teachers of Mathematics (in press)
- Healy L. 2000, Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions, in *PME XXIV, Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Hiroshima: Tadao Nakahara, Masataka Koyama. v. 1, (pp. 103-117).
- Houdement C., Kuzniak A., 2000, Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 89-116
- Houdement C., Kuzniak A., 2006, Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactiques des sciences cognitives*, 11, 175-193
- Laborde C., Capponi B., 1994, Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 14, 1.2, 165-210.
- Leontiev A.N., 1972, *Le développement du psychisme*, trad. Fcse, Paris: Editions Sociales, 1976
- Mariotti M. A., 2002, *Influence of technologies advances on students' mathematical learning*, In L. English, M.G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh and D. Tirosh (Eds), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 695-723) Lawrence Erlbaum Associates
- Mariotti M.A., 2001, Introduction to proof in a mediation of a dynamic software environment, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 25-53
- Parzysz B., 1988, Knowing vs Seeing, Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, 19(1), 79-92.
- Pedemonte B., 2002, *Etude didactique et cognitive des rapports entre argumentation et démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Rabardel P., 1995, *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Paris : Armand Colin.
- Rabardel P., 1999, Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, In M. Bailleul (Ed.) *Actes de la IXème Ecole d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate (pp. 202-213).
- Richard R.P., 2000, *Modélisation du comportement en situation de validation*, Thèse de l'université autonome de Barcelone.
- Richard R.P., 2004a, *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Berne : Peter Lang.
- Richard R.P., 2004b, L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics*, 57(2), 229-263.

- 
- Rolet C., 1997, *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte CABRI-GEOMETRE*, Thèse de l'Université Claude Bernard, Lyon 1
- Robert A., 2003, Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, 7-29
- Soury-Lavergne S., 1998, *Etayage et explication dans le préceptorat à distance, le cas de Télécabri*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1
- Trouche L., 2005, Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : Nécessité d'orchestrations, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 25, 91-138.
- Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels, *Recherche en didactique des mathématiques*, 10, 133-170
- Vygotsky L.S., 1934, *Pensée et langage*, Traduction française : F. Sève 1985, Paris : Messidor Edition Sociales.
- Vygotsky, L.S., 1930, La méthode instrumentale en psychologie, In : B.Schneuwly et J.P. Bronckart (eds) *Vygotsky aujourd'hui*, Delachaux et Niestlé.
- Wallon H., 1942, *De l'acte à la pensée*, Paris : Flammarion

Programmes primaire et collège :

---

Bulletin Officiel HS n°1, 14 février 2002

Bulletin Officiel HS n°5, 9 septembre 2004

Articulation école-collège, document d'accompagnement 2002

Manuels :

---

CE1 : Les maths à la découverte du monde CE1(2004) Ed. Hachette

CE1 : Pour comprendre les mathématiques CE1 (2004) Ed. Hachette

CM1 : J'apprends les maths CM1 (2004) Ed. Retz

5<sup>ème</sup> : Collection triangle mathématiques 5<sup>ème</sup> (2001) Ed. Hatier

5<sup>ème</sup> : Dimathème 5<sup>ème</sup> (2001) Ed. Didier

Evaluations nationales

---

Titre : INTEGRATION DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE POUR FAVORISER UNE LIAISON ECOLE PRIMAIRE-COLLEGE : UNE INGENIERIE AU COLLEGE SUR LA NOTION DE PROPRIETE.

Résumé: Cette recherche s'intéresse à l'apprentissage de la notion de propriété géométrique en début de collège en tant que relation de subordination entre les contraintes (données) et une conclusion. Les choix dans la structure de cet enseignement reposent sur un travail de distinction entre les données et la conclusion dans un énoncé. Cette distinction est nécessaire pour le réinvestissement des propriétés dans le raisonnement déductif. A partir des travaux de Vygotsky sur la médiation sémiotique et les travaux de Rabardel et Trouche sur l'instrumentation, nous avons conçu des situations didactiques intégrant un logiciel de géométrie dynamique, pour introduire la notion de propriété. L'outil déplacement du logiciel est utilisé pour réaliser les données d'une propriété. Les objets géométriques sur lesquels travaillent les élèves sont des constructions « molles », issues du déplacement, dans lesquelles les nouvelles caractéristiques des figures sont éphémères. Le processus de médiation sémiotique est amorcé au cours de la construction, par l'élève, de l'instrument Déplacement, il se poursuit au cours des échanges collectifs avec l'enseignant. La construction du lien entre les données et la conclusion s'appuie sur l'utilisation du dynamisme de l'environnement et sur l'interaction entre les registres visuels et discursifs. Nous avons étudié comment les élèves s'approprient la relation entre les données et la conclusion à travers l'étude de :

- la construction de l'instrument déplacement que nous visons lors des activités avec Cabri
- l'articulation entre les registres graphiques et discursifs en lien avec le processus de médiation sémiotique

Mots clé : géométrie dynamique, décomposition dimensionnelle, registres, propriété, contraintes-conclusion, didactique mathématiques, instrumentation, médiation sémiotique.

---

Title: THE INTEGRATION OF DYNAMIC GEOMETRY IN THE TEACHING OF GEOMETRY TO FAVOR THE CONNECTION BETWEEN PRIMARY SCHOOL AND MIDDLE SCHOOL: AN ENGINEERING IN MIDDLE SCHOOL ABOUT PROPERTY.

Abstract: This research deals with the learning of the notion of property as a subordination relation between the data and the conclusion. The choices in the structure of this education are based on a work of distinction between the data and the conclusion in a statement. This distinction is necessary for the reinvestment of the properties in the deductive reasoning. From the works of Vygotsky on the semiotic mediation and the works of Rabardel and Trouche on the instrumentation, we conceived situations, integrating a dynamic geometry software, to introduce the properties. The tool dragging of the software is used to carry out the data of a property. Students work on "soft" constructions, stemming from the dragging, where the new characteristics are short-lived. The process of semiotic mediation is at the begging of the construction, by the student, of the instrument Dragging, it continues during the collectives' discussions with the teacher. The construction of the link between the data and the conclusion leans on the use of the dynamism of the environment but also on the interaction between the visual and discursive registers. We studied how the students appropriate the properties, the relation between the data and the conclusion through the study of:

- The construction of the expected dragging instrument during the activities with Cabri
- The coordination between the graphic and discursive registers in relation with the process of semiotic mediation

Keywords: dynamic geometry, dimensional breaking down, registers, property, data-conclusion, instrumentation, semiotic mediation.