



**HAL**  
open science

# SIMULATIONS 3D NON-STATIONNAIRES DÉDIÉES À L'INVESTIGATION DE PROCESSUS DE SÉDIMENTATION À FORTE DYNAMIQUE

Grégoire Pianet

► **To cite this version:**

Grégoire Pianet. SIMULATIONS 3D NON-STATIONNAIRES DÉDIÉES À L'INVESTIGATION DE PROCESSUS DE SÉDIMENTATION À FORTE DYNAMIQUE. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2005. Français. NNT : . tel-00110838

**HAL Id: tel-00110838**

**<https://theses.hal.science/tel-00110838>**

Submitted on 1 Nov 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

## L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES PHYSIQUES ET DE L'INGÉNIEUR

par Grégoire PIANET

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE

\*\*\*\*\*

SIMULATIONS 3D NON-STATIONNAIRES DÉDIÉES À L'INVESTIGATION DE  
PROCESSUS DE SÉDIMENTATION À FORTE DYNAMIQUE

\*\*\*\*\*

Soutenue le : 20 Juillet 2005

Après avis de :

MM. B. MAURY, Professeur, LMO, Université Paris-Sud  
H. COMBEAU, Professeur, LSG2M, École des Mines de Nancy

**Rapporteurs**

Devant la commission d'examen formée de :

MM. P. SNABRE, Directeur de Recherche CNRS, CRPP, Bordeaux  
M. AZAÏEZ, Professeur, TREFLE, ENSCPB, Bordeaux  
É. ARQUIS, Professeur, TREFLE, ENSCPB, Bordeaux  
H. COMBEAU, Professeur, LSG2M, École des Mines de Nancy  
B. MAURY, Professeur, LMO, Université Paris-Sud  
F. RISSO, Chargé de Recherche CNRS, IMFT, Toulouse

**Président**  
**Rapporteur**  
**Examineurs**

# SIMULATIONS 3D NON-STATIONNAIRES DÉDIÉES À L'INVESTIGATION DE PROCESSUS DE SÉDIMENTATION À FORTE DYNAMIQUE

## Résumé

Le comportement d'une particule sphérique rigide immergée dans un fluide newtonien est étudié au moyen d'une méthode de Simulation Numérique Directe. Dans une première partie, un modèle de type '1-Fluide' assorti d'une technique de pénalisation de la viscosité est décrit, puis différentes méthodologies numériques sont associées pour résoudre les difficultés inhérentes aux fortes contraintes physiques. Par la suite, la pertinence du modèle est prouvée par une série de validations fondées sur une bibliographie exhaustive des écoulements bi ou tri-dimensionnels, et pour des régimes d'écoulement faiblement inertiels. Avec l'appui de résultats expérimentaux et numériques originaux obtenus à la suite d'une collaboration scientifique, nos expériences numériques sont alors systématiquement validées sur la base de champs PIV pour des régimes inertiels. Notre investigation se focalise ensuite sur des écoulements dont la dynamique est plus importante, pour aboutir à la mise en évidence d'instabilités attestant de la transition vers des écoulements et des trajectoires chaotiques.

**Mots-clés :** Simulation Numérique Directe, écoulements diphasiques, sédimentation, modèle 1-Fluide, pénalisation, 3D, instationnaire, expérimentation numérique, instabilités.

## 3D INSTATIONARY SIMULATIONS FOR INVESTIGATING HIGH $Re$ SEDIMENTATION PROCESSES

### Abstract

The behavior of a rigid spherical particle immersed in a viscous newtonian fluid is reproduced by means of Direct Numerical Simulation. The first step consists in introducing a 1-Fluid model coupled with a viscosity-based penalty method. Several computational techniques are then associated for solving the problems inherent to the strong physical constraints. Through the next step, our approach is assessed to by several test-cases based on an exhaustive bibliography of both two and three-dimensional flows, for Stokes and Oseen regimes. With original experimental and numerical results obtained through a scientific collaboration, our numerical experiments are then systematically validated relative to PIV fields for inertial regimes. Finally, our investigation focuses on a critical flow regime with simulations leading to instabilities, indicating the transitions that tend to chaotic wakes and trajectories.

**Key words:** Direct Numerical Simulation, two-phase flow, sedimentation, 1-Fluid model, penalty method, 3D, instationary, numerical experiments, instabilities.

## *Remerciements*

Cette thèse présentée à l'Université Bordeaux I a été financée grâce à une allocation de recherche du Ministère (MENRT). Ce travail a été conduit au sein du laboratoire Transferts Écoulements Fluides Énergétique (TrEFIE) sur le site de L'École Nationale Supérieure de Chimie Physique de Bordeaux (ENSCP).

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Éric Arquis, Professeur et également Directeur adjoint du laboratoire TrEFIE, pour sa confiance, son soutien efficace et inconditionnel, et pour son conseil toujours très avisé. Je lui dois l'opportunité d'avoir pu découvrir le métier de la recherche au laboratoire, et j'exprime toute ma reconnaissance à son égard.

Bien qu'il ne ménager pas ses efforts pour affirmer qu'il n'est pour rien dans ce travail, Mejd Azaïez, Professeur au laboratoire TrEFIE et tardif co-directeur de ma thèse, a vite gagné mon estime. Sa franchise, son honnêteté et sa manière très positive d'aborder les problèmes ont motivé et stimulé mon travail bien plus qu'il ne le pense...

Ensuite je désire exprimer ma reconnaissance à Bertrand Maury et Hervé Combeau, respectivement Professeurs au LMO de l'Université Paris-Sud et au LSG2M à l'École des Mines de Nancy, et rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'à Patrick Snabre, Directeur de Recherche au CRPP à Bordeaux et à Frédéric RISSO, Chargé de Recherche à l'IMFT de Toulouse, pour m'avoir fait l'honneur de participer au jury de cette thèse. J'ai particulièrement apprécié leur attention et leur investissement constructif dans le débat.

En plus de directeurs méritants, une aide et un point de vue de spécialistes extérieurs sont aussi des atouts inestimables en recherche, et c'est en cela que je remercie chaleureusement mes collègues hollandais le Docteur Andreas ten Cate et le Professeur Jos Derksen du laboratoire Kramers à Delft. Partant d'un projet de collaboration plutôt vague, je dois beaucoup à leurs compétences, leur confiance, et au temps qu'il m'ont consacré pendant deux années d'échanges assidus. Notre projet est à présent abouti, et je ne saurai jamais assez les remercier pour cela.

Également merci à Jean-Paul Caltagirone, Professeur au TrEFIE et initiateur des méthodes de calcul mises à ma disposition, ainsi qu'à Stéphane Vincent, Maître de Conférences au TrEFIE, qui m'a beaucoup apporté lors de nos collaborations. J'aimerais que ma contribution lui soit aussi profitable que la sienne l'est effectivement pour moi.



La face cachée de ce travail, c'est la participation plus ou moins directe de tous mes collègues du TrEFIE, à qui je réserve cette petite visite de couloir :

Dans le coin des 'particuleux', je salue d'abord Jean Toutain, pilier mathématique du laboratoire, collaborateur enjoué et compagnon de pause, son aide m'a souvent été précieuse. Je tiens aussi à remercier Nirina, le fait de travailler sur les mêmes problèmes nous aura surtout valu d'être entendus deux fois plus fort. Merci aussi à Claude et David pour les brèves de couloir à tendance visqueuse et sédimentaire.

Stéphane Glockner, Ingénieur de Recherche de son état, n'échappera point à la visite de son bureau (S1-16 au milieu à gauche), soit la seconde salle de pause du labo. Victime de ses grandes compétences et donc de visites intempestives, son unique revendication est un collègue de bureau aussi coi qu'une carpe koï pour ménager sa santé mentale. Je pense avoir bien rempli cette fonction car pendant trois ans les seuls noms d'oiseaux que nous échangeâmes étaient généralement destinés aux machines. Je tiens au passage à le remercier ainsi que Bernard et Sandrine, car si j'ai régulièrement servi de cobaye à cette fine équipe d'informaticiens, je n'en ai tiré que des bénéfices.

Un grand merci à Damien, Boris et Fred, notre inévitable surf-team zen, pour leur accueil chaleureux et les effluves d'iode et de wax qu'ils trimbalent quasi quotidiennement dans leur sillage, comme pour nous rappeler que la vie est ailleurs. Parmi les anciens, Guillaume nous manque aussi beaucoup : le poste officiel de poseur de questions pertinentes aux séminaires est désormais vacant, on recherche un remplaçant talentueux dont l'éloquence n'égale que la culture scientifique...

Le désormais permanent couple Pierre&Cédric quant à lui devient le symbole d'un labo jeune et dynamique. On n'aurait pu trouver de duo plus complémentaire :

Faire très très peur semble être un des seuls vices de Pierre tandis que Cédric est généralement plus stressé qu'un mec en armure mouillée au sommet d'une montagne par un soir d'orage. Je leur souhaite encore beaucoup de franches rigolades.

Un merci spécial à Delphine, ma seule collègue du grand cru 2001, ce qui nous a valu de nombreux serrages de coudes. Merci aussi à Aurélie, je regretterai les petites pauses culturelles ma foi bien rafraîchissantes que j'ai partagé avec vous.

Un dernier petit tour pour saluer notre énigmatique et placide Nicolas, notre ubiquitaire Christophe (bureaux S1-11 et S1-16), la tonitruante Stéphanie secondée de maître Étienne (notre spécialiste en ergonomie du travail), le jovial Mohamed expert en correction d'anglais franchouillard, mes disciples de varappe Sylvain et Guillaume II, les colons du second étage Eric et Cyril, pour finir par le malheureux Hamza qui devra supporter les blagues gastriques de Pierre pendant quelques années encore. Je n'oublie pas bien-sûr en partant de saluer notre chère secrétaire Marie-Paule, que je remercie pour avoir rattrapé les nombreuses tâches administratives dont j'ai rarement su m'acquitter correctement.

Pour finir, je remercie et dédie ce travail à ma famille et mes parents qui m'ont toujours épaulé durant ces longues années d'études. Je remercie par-dessus tout ma tendre amie Marine qui a vécu tous les moments difficiles à mes côtés, avec patience et bonne humeur.

Bien cordialement,  
Grégoire.



# Table des matières

Nomenclature	9
<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>13</b>
<b>2 GÉNÉRALITÉS</b>	<b>17</b>
2.1 Description qualitative du problème physique . . . . .	17
2.2 Paramétrisation du problème physique . . . . .	18
2.2.1 Nombre de Reynolds particulaire . . . . .	18
2.2.2 Nombre de Stokes . . . . .	19
2.2.3 Nombre de Galilée . . . . .	20
2.3 Modélisation d'un milieu fluide monophasique . . . . .	21
2.3.1 Équations de conservation . . . . .	21
2.3.2 Hypothèses simplificatrices . . . . .	21
2.4 Hypothèses de travail . . . . .	24
<b>3 MÉTHODOLOGIE NUMÉRIQUE</b>	<b>25</b>
3.1 Contexte de la méthode . . . . .	25
3.1.1 Simulation Numérique Directe . . . . .	25
3.1.2 Modélisation d'un milieu polyphasique . . . . .	27
3.2 Établissement du modèle 1-Fluide . . . . .	30
3.2.1 Définition d'un fluide équivalent . . . . .	30
3.2.2 Mise en équation des hypothèses . . . . .	31
3.2.3 Méthode de pénalisation tensorielle . . . . .	32
3.2.4 Équations constitutives du modèle 1-Fluide . . . . .	33
3.2.5 Continuité aux interfaces . . . . .	34
3.3 Méthodes de résolution . . . . .	34
3.3.1 Algorithmes de transport d'interfaces . . . . .	36
3.3.2 Interpolations . . . . .	40
3.3.3 Gestion des conditions aux limites . . . . .	41

3.3.4	Discrétisation en temps . . . . .	43
3.3.5	Couplage vitesse/pression : Méthode du lagrangien augmenté . . . .	45
3.3.6	Discrétisation spatiale . . . . .	48
3.3.7	Résolution des systèmes linéaires . . . . .	49
3.3.8	Apport des techniques de projection . . . . .	49
3.4	Conclusion . . . . .	51
<b>4</b>	<b>PARAMÉTRISATION ET CONSISTANCE DE LA MÉTHODE</b>	<b>53</b>
4.1	Inclusions fixes : cas 3D,	
	$Re_p \ll 1$ . . . . .	54
4.1.1	Configuration du cas-test . . . . .	54
4.1.2	Résultats . . . . .	56
4.2	Inclusions mobiles : cas 2D,	
	$Re_p < 1$ . . . . .	58
4.2.1	Approche du modèle de Faxén . . . . .	58
4.2.2	Optimisation du couplage fluide–solide . . . . .	62
4.2.3	Paramètres du Lagrangien Augmenté et du solveur Navier–Stokes .	67
4.2.4	Convergence en espace et en temps . . . . .	68
4.2.5	Vitesse maximale d’un cylindre sédimentant dans une cavité finie .	68
4.3	Inclusions mobiles : approche 2D de cas 3D,	
	$Re_p < 1$ . . . . .	79
4.3.1	Sédimentation d’une sphère dans une cuve cylindrique . . . . .	80
4.3.2	Étude de l’interaction sphère/sphère/paroi . . . . .	82
4.4	Conclusion . . . . .	90
<b>5</b>	<b>SIMULATIONS 3D INSTATIONNAIRES À <math>Re_p</math> CROISSANT</b>	<b>91</b>
5.1	Sédimentation d’une sphère en régime d’écoulement modéré . . . . .	92
5.1.1	Configuration expérimentale . . . . .	92
5.1.2	Analyse du phénomène . . . . .	94
5.1.3	Simulations préliminaires . . . . .	94
5.1.4	Introduction du Lagrangien augmenté variable . . . . .	95
5.1.5	Cohérence numérique . . . . .	97
5.1.6	Sédimentation d’une sphère dans une cuve, $Re_p \in [1.5, 31.9]$ . . . .	103
5.1.7	Conclusion. . . . .	109
5.2	Sédimentation d’une sphère, investigation	
	d’un régime critique. . . . .	110
5.2.1	Définition de l’expérience . . . . .	111

5.2.2	Approche numérique du problème . . . . .	111
5.2.3	Résultats des simulations . . . . .	115
5.2.4	Conclusion. . . . .	131
<b>6</b>	<b>CONCLUSION</b>	<b>133</b>
6.1	Bilan des objectifs et de leur réalisation . . . . .	133
6.2	Perspectives . . . . .	136
<b>A</b>	<b>Étude bibliographique, bases de validation</b>	<b>139</b>
A.1	Sphère en milieu infini . . . . .	139
A.1.1	Résultats de la théorie de Stokes, [[ $Re_p, St \rightarrow 0$ ]] . . . . .	139
A.1.2	Approche des régimes hors-Stokes, [[ $Re_p, St > 0$ ]] . . . . .	140
A.2	Sphère en milieu confiné ou semi-confiné . . . . .	142
A.2.1	Cas d'un confinement radial, [[ $Re_p, St \rightarrow 0$ ]] . . . . .	142
A.2.2	Approche d'une paroi infinie : étude de la lubrification, [[ $Re_p, St \rightarrow 0$ ]] . . . . .	143
A.3	Cas de validation pour des systèmes à inclusions multiples . . . . .	144
A.3.1	Écoulement de Stokes dans un réseau de sphères fixes . . . . .	146
A.3.2	Interactions entre un doublet vertical et une paroi . . . . .	147
A.4	Sédimentation d'un cylindre (2D) . . . . .	148
A.4.1	Sédimentation en milieu infini, [[ $k = 0, Re_p > 0$ ]] . . . . .	148
A.4.2	Sédimentation en milieu confiné, [[ $k \neq 0, Re_p \leq \mathcal{O}(1)$ ]] . . . . .	150
A.5	Références expérimentales . . . . .	152
A.5.1	Sphère en milieu confiné (Becker et McKinley, 1994), [[ $k = 0.243, Re_p = 0.025$ ]] . . . . .	152
A.5.2	Sphère en milieu confiné (ten Cate <i>et al.</i> , 2002), [[ $k \simeq 0.133, Re_p \in [1.5, 31.9]$ ]] . . . . .	153
A.5.3	Sphère en milieu quasi-illimité (Mordant et Pinton, 2000), [[ $k \simeq 0, Re_p \in [41, 7700]$ ]] . . . . .	158
<b>B</b>	<b>Temps caractéristiques de la sédimentation et du transport</b>	<b>161</b>
B.1	Première approximation pour le régime instationnaire . . . . .	161
B.2	Influence de la force d'histoire pour le régime instationnaire. . . . .	164

<b>C Fichiers de données</b>	<b>167</b>
C.1 Sphere fixe – 3D . . . . .	167
C.2 Cylindre mobile – 2D . . . . .	168
C.2.1 Cas(o) . . . . .	168
C.2.2 Cas(i) . . . . .	169
C.3 Sphère mobile – 2D Axisymétrique . . . . .	170
C.4 Sphère mobile – 3D – $Re_p = 31.9$ . . . . .	171
C.5 Sphère mobile – 3D – $Re_p = 280$ . . . . .	172
<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>

# Nomenclature

## Lettres Latines

$g$	: accélération de la pesanteur .....	$\text{m.s}^{-2}$
$m$	: masse .....	kg
$p$	: pression .....	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$ soit Pa
$t$	: temps .....	s
$u_i$	: composante de la vitesse instantanée suivant la direction i .....	$\text{m.s}^{-1}$
$x, y, z$	: coordonnées cartésiennes .....	m
$u, v, w$	: coordonnées cartésiennes de vitesse .....	$\text{m.s}^{-1}$
$r, \phi$	: coordonnées polaires .....	m,rad
$r, \theta, z$	: coordonnées cylindriques .....	m,rad, m
$r, \theta, \phi$	: coordonnées sphériques .....	m,rad, rad
$N_i$	: Résolution spatiale suivant la direction i .....	mailles

## Lettres grecques

$\mu$	: viscosité dynamique .....	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ soit Pa.s
$\nu$	: viscosité cinématique .....	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
$\rho$	: masse volumique .....	$\text{kg.m}^{-3}$
$\omega$	: vorticité .....	$\text{s}^{-1}$
$\sigma$	: nombre de Courant .....	adim.



## Vecteurs et tenseurs

$\overline{\overline{\mathbf{I}}}$	: tenseur unité .....	adim.
$\overline{\overline{\mathbf{D}}}$	: tenseur des taux de déformations .....	$s^{-1}$
$\overline{\overline{\mathbf{\Lambda}}}$	: tenseur des taux d'élongation .....	$s^{-1}$
$\overline{\overline{\mathbf{\Theta}}}$	: tenseur des taux de cisaillement .....	$s^{-1}$
$\overline{\overline{\boldsymbol{\eta}}}$	: tenseur des taux de rotation .....	$s^{-1}$
$\overline{\overline{\boldsymbol{\Sigma}}}$	: tenseur des contraintes .....	Pa
$\overline{\overline{\boldsymbol{\tau}}}$	: tenseur des contraintes visqueuses .....	Pa
$\mathbf{F}$	: force .....	N
$\mathbf{g}$	: vecteur gravité .....	$m.s^{-2}$
$\mathbf{m}$	: normale à l'interface fluide .....	$m^{-1}$
$\mathbf{n}$	: normale à l'interface(vecteur normé) .....	adim.
$\overline{\overline{\mathcal{P}}}$	: tenseur des quantités de mouvement .....	$kg.m^{-1}.s^{-2}$
$\mathbf{r}$	: vecteur position en coordonnées polaires .....	m
$\mathbf{x}$	: vecteur position en coordonnées cartésiennes .....	m
$\mathbf{r}_0$	: position initiale .....	m
$\mathbf{T}$	: vecteur contrainte .....	Pa
$\mathbf{u}$	: vecteur vitesse .....	$m.s^{-1}$

## Opérateurs mathématiques

- $\nabla$  : opérateur gradient  
 $\nabla \cdot$  : opérateur divergence  
 $\nabla \wedge$  : opérateur rotationnel  
 $\Delta$  : opérateur Laplacien vectoriel  
 $\Delta$  : opérateur Laplacien  
 $\partial$  : opérateur dérivée partielle  
 $\frac{D}{Dt}$  : opérateur dérivée particulaire

## Indices et exposants

- $i, j, k$  : directions 1, 2, 3  
 $f$  : relatif à la phase fluide  
 $p$  : relatif à la phase solide  
 $a$  : caractéristique de l'advection  
 $\nu$  : caractéristique de la diffusion  
 $r$  : caractéristique de l'inertie

## Abbreviations

<i>2D</i>	: 2 Dimensions
<i>3D</i>	: 3 Dimensions
<i>CFD</i>	: Computational Fluid Dynamics
<i>DLM</i>	: Distributed Lagrange Multiplier
<i>DNS</i>	: Direct Numerical Simulation
<i>ALE</i>	: Arbitrary Lagrange-Euler
<i>LB</i>	: Lattice-Boltzmann
<i>PIV</i>	: Particle Image Velocimetry
<i>VOF</i>	: Volume Of Fluid
<i>TVD</i>	: Total Variation Diminishing
<i>PLIC</i>	: Piecewise Linear Interface Calculation (CIAM en français)
<i>LA</i>	: Lagrangien Augmenté
<i>PV</i>	: Projection Vectorielle
<i>PS</i>	: Projection Scalaire
<i>ENS</i>	: Équation de Navier-Stokes
<i>ECM</i>	: Équation de Conservation de la Masse
<i>CFL</i>	: Condition de Courant-Friedrichs-Lewy

# Chapitre 1

## INTRODUCTION

La compréhension du comportement de particules solides immergées dans un fluide intéresse un très grand nombre d'applications industrielles ou environnementales. On peut citer pour exemple la fabrication de produits agro-alimentaires ou cosmétiques, l'élaboration de combustibles sophistiqués ou la culture de cristaux. Les écoulements environnementaux concernent par exemple le transport de micro-particules polluantes, la dynamique sédimentaire des environnements côtiers et fluviaux ou le transport de cendres à la suite d'une éruption volcanique. Lorsqu'il s'agit de comprendre, de modéliser ou de contrôler de tels processus, évaluer la contribution des phénomènes de sédimentation fait partie des études les plus en amont. Le terme sédimentation désigne le mouvement descendant d'un objet immergé dans un environnement fluide, mouvement engendré par l'accélération de la pesanteur.

La modélisation des phénomènes cités en exemple s'est tout d'abord fondée sur des acquis expérimentaux et théoriques. Les modèles valides couvrent les extrémités d'une échelle basée sur le nombre de particules prises en compte :

◇ d'un côté le cas d'une particule isolée ou de deux particules en interaction est relativement bien connu. Toutefois, au regard de la diversité des paramètres physiques impliqués, le comportement d'un très petit nombre de particules fait encore et fera certainement l'objet de nombreux travaux théoriques, expérimentaux et numériques.

◇ de l'autre côté, on peut prévoir le comportement global d'une très grande population de particules, excédant en général plusieurs milliers d'unités. Cela peut se faire soit par la mesure des propriétés globales de la suspension, soit par une modélisation basée sur des propriétés rhéologiques locales, elles-mêmes déduites du comportement de particules isolées.

Ces dernières décennies, les progrès exponentiels des moyens de calculs ont rendu les simulations numériques de plus en plus abordables. À l'image des méthodes d'investigation théoriques et expérimentales traitant différemment les échelles locales et globales, les méthodes numériques se distinguent de façon nette en deux classes :

(i) *Les méthodes 2-fluides (ou formulation Euler/Euler)*

Sur la base d'un modèle Navier–Stokes monophasique classique, le fluide chargé en particules peut être assimilé à un continuum dont la viscosité et la densité sont affectées localement par le biais de la concentration. Une technique consiste par exemple à coupler les équations de Naviers–Stokes avec un transport Lagrangien de particules. Le couplage mono– ou bi–directionnel entre le fluide et les particules se base alors sur des relations empiriques. Cette méthode s'applique à de grandes populations de particules.

(ii) *Les méthodes de Simulation Numérique Directe (DNS)*

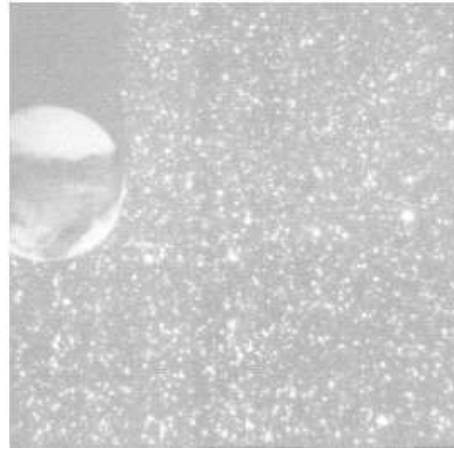
Cette terminologie est utilisée ici pour désigner toutes les méthodes pour lesquelles le couplage fluide–particule est résolu de façon exacte, autrement dit exempt de tout modèle empirique. Un compte rendu détaillé des méthodes existantes est proposé au chapitre 3 page 25. Les méthodes DNS sont les plus coûteuses en ressources de calcul. Elles sont dédiées à l'investigation locale des suspensions et se limitent jusqu'ici à un faible nombre de particules (en général inférieur au millier).

Pour un problème donné, lorsque les modèles théoriques sont insolubles, et que les approches expérimentales ne sont pas matériellement possibles ou trop coûteuses, l'intérêt de la simulation devient évident. Dans ce sens, les deux grandes classes de méthodes évoquées ci-dessus sont complémentaires puisqu'elles s'appliquent à des échelles très différentes. Les méthodes DNS sont utilisées notamment afin d'alimenter les méthodes Euler/Euler en modèles d'interaction déduits des phénomènes à l'échelle locale. Mais l'avantage fondamental que la Simulation Numérique Directe oppose aux méthodes plus dédiées tient à sa modularité. Si l'on parvient à valider précisément les processus de la sédimentation à une échelle locale et dans une gamme étendue de régimes d'écoulement, alors : (i) la méthode est théoriquement valable à une échelle globale, (ii) dans la même gamme de régimes d'écoulement, tous les processus particules/fluide sont *a priori* valides (sédimentation mais aussi transport, fluidisation, dynamique de bulles indéformables... ), (iii) la croissance constante de la vitesse des processeurs et l'accessibilité grandissante aux moyens de calculs partagé joueront toujours en faveur des méthodes de simulation directe.

Dans le cadre de ce doctorat, nous présentons ici une démarche de validation et d'exploitation de la bibliothèque de calcul AQUILON. Celle-ci permet entre autres la simulation numérique directe des écoulements fluides/particules tout en offrant des avantages relativement originaux par rapport aux autres méthodes DNS. Ce travail s'insère dans la continuité des travaux de Ritz (1997). Il consiste à paramétrer, valider et appliquer la prise en compte d'inclusions solides mobiles sur la base d'un code plus abouti concernant sa partie monophasique. Le principe utilisé ici est relativement simple. Dans un fluide initialement monophasique, on module la densité et la viscosité dans les zones où l'on veut définir notre phase dispersée (en l'occurrence la phase solide). La densité est alors identifiée à la densité physique du solide désiré. La viscosité, elle, est artificiellement augmentée, avec l'objectif d'obtenir un temps caractéristique de déformation de la phase dispersée supérieur de plusieurs ordres de grandeur aux temps de relaxation et d'advection de cette même phase. On parlera par la suite de technique de *pénalisation visqueuse*. Cette dernière technique est souvent jugée comme étant trop grossière et donc imprécise. Utilisée par très peu d'équipes, cette méthode souffre finalement d'un manque de crédibilité auprès de la communauté spécialisée. Un de nos objectifs consiste donc à montrer que couplée à une méthodologie de calcul stable et performante, cette technique n'a rien à envier aux méthodes les plus populaires.



(a)



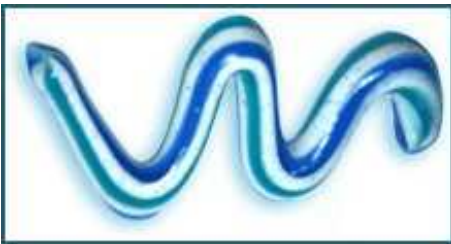
(b)



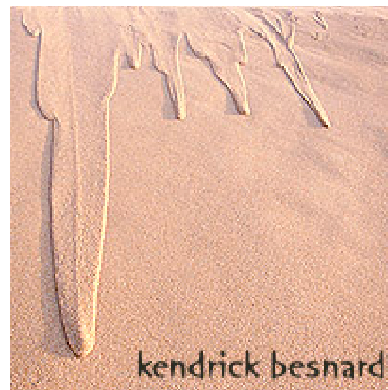
(c)



(d)



(e)



(f)

FIG. 1.1: Différentes variétés d'écoulements particuliers : (a) Éruption pyroclastique, (b) Sédimentation d'une sphère dans un fluide chargé de traceurs fluorescents, (c) Dispersion de sédiments fluviaux en estuaire, (d) Coulée volcanique, (e) Pâte dentifrice, (f) Coulée de sable.

# Chapitre 2

## GÉNÉRALITÉS

### 2.1 Description qualitative du problème physique

Comme il en a été fait mention auparavant, les écoulements particuliers interviennent dans une infinité de phénomènes environnementaux et de processus industriels. Les illustrations compilées dans la figure 1 montrent des suspensions fluide/particules extrêmement variées. Le but de la section suivante est de montrer qu'un petit nombre de paramètres basés sur les caractéristiques physiques des phases fluides et solides permet de prévoir simplement les phénomènes prédominants. Nous avons choisi des situations très éloignées les unes des autres sur le plan physique pour illustrer ces propos.

La vignette (a)<sup>1</sup> représente un panache de cendres éjectées à la suite d'une éruption volcanique. La plupart des cendres sont des micro-particules très légères. Ces particules sont pour la plupart transportées par des phénomènes de convection thermique puis par les écoulements atmosphériques. Leur déposition au sol n'est significative que sur un temps beaucoup plus long. En fait, la dynamique de l'écoulement, que l'on qualifiera plus tard avec le *nombre de Reynolds*, est quasiment celle de la phase fluide. Malgré les apparences, leur concentration est relativement faible et les particules n'agissent que très peu sur l'écoulement de la phase fluide et se comportent donc comme des traceurs.

Ce principe est illustré sur la vignette (b). Il s'agit d'une expérience de type PIV où une particule de taille centimétrique sédimente dans un fluide initialement au repos et chargé de micro-particules fluorescentes. Ce qui fait la qualité d'un traceur est sa petite taille et sa flottabilité très faible ( $\rho_{fluide} \simeq \rho_{particule}$ ). Ce sont des propriétés que l'on peut quan-

---

<sup>1</sup>[Sources : (a)►[http://news.bbc.co.uk/media/images/38765000/jpg/\\_38765903\\_vu\\_pichincha\\_ap150.jpg](http://news.bbc.co.uk/media/images/38765000/jpg/_38765903_vu_pichincha_ap150.jpg) ;  
(b)►ten Cate et al. (2002) ;(c)►<http://www.solarviews.com/browse/earth/sediment.jpg> ;  
(d)►[http://www.southwestbirders.com/Hawaii\\_2002/lava%20flow%20i.jpg](http://www.southwestbirders.com/Hawaii_2002/lava%20flow%20i.jpg) ;  
(e)►[http://204.71.32.211/images/toothpaste\\_squeezed.gif](http://204.71.32.211/images/toothpaste_squeezed.gif) ;(f)►<http://home.tiscali.be/amero/besnard.htm>.]



tifier à l'aide du *nombre de Stokes*, très faible pour les petites particules, et beaucoup moins faible pour la particule centimétrique qui est à l'origine du mouvement du fluide dans l'expérience.

En fait le nombre de Stokes définit l'effet dominant entre sédimentation ou transport. Dans le cas de la dynamique des sédiments en milieux côtiers ou fluviaux, (voir la vignette (c)) c'est une composition des deux phénomènes qui est donc qualifiée de transport sédimentaire. Les vignettes (d) et (e) montrent la prédominance d'une troisième caractéristique, définie par la *concentration en particules*. Les deux situations présentées peuvent avoir une phase liquide relativement peu visqueuse. Toutefois la fraction volumique liquide/solide, quant elle est très forte, implique plusieurs phénomènes dont la friction inter-particulaire. Ces phénomènes augmentent la viscosité apparente du mélange global pour donner, par exemple, l'aspect quasi-solide de la coulée de lave ou du dentifrice. La dernière vignette illustre avec une coulée de sable, un cas extrême où le nombre de Reynolds, le nombre de Stokes et la concentration des particules sont tous trois élevés et d'influence significative sur l'écoulement. Ceci n'a valeur ici que d'exemple car le cas particulier de l'écoulement du sable s'intègre plutôt dans le domaine très complexe de la physique des milieux granulaires.

La section suivante détaille le calcul des caractéristiques adimensionnelles et dimensionnelles, et comment situer un phénomène par rapport aux différents types de régimes d'écoulement.

## 2.2 Paramétrisation du problème physique

### 2.2.1 Nombre de Reynolds particulaire

On utilise le nombre de Reynolds pour qualifier l'importance des forces inertielles par rapport aux forces visqueuses. Il s'exprime habituellement de la façon suivante :

$$Re = \frac{\rho_f U L}{\mu_f} \quad (2.1)$$

où  $L$  représente une longueur caractéristique de l'échelle sur laquelle la diffusion visqueuse est susceptible d'intervenir, et  $U$  désigne la vitesse caractéristique du phénomène. Afin d'adapter ce nombre à la problématique d'un profil sphérique de rayon  $a$  immergé dans un fluide visqueux, on écrit le nombre de Reynolds particulaire :

$$Re_p = \frac{\rho_f |U_\infty - U_p| 2 a}{\mu_f}. \quad (2.2)$$

Le diamètre du profil  $d_p = 2a$  est choisi pour la longueur caractéristique tandis que la vitesse caractéristique est définie comme la différence entre la vitesse  $U_p$  de l'inclusion et  $U_\infty$  la vitesse du fluide non perturbé par celle-ci.<sup>2</sup> On utilise généralement ce nombre pour qualifier le régime d'écoulement. On peut décomposer ce nombre pour construire le rapport de deux temps caractéristiques :  $Re_p = \frac{\rho_f U_\infty d_p}{\mu_f} = \tau_\nu / \tau_a$ , où

$$\tau_\nu = \rho_f d_p^2 / \mu_f, \quad \text{et} \quad (2.3)$$

$$\tau_a = \frac{d_p}{U_\infty}. \quad (2.4)$$

La grandeur dimensionnelle  $\tau_\nu$  définit le temps mis par la quantité de mouvement pour diffuser sur la longueur  $d_p$ , et  $\tau_a$  désigne le temps d'advection de la particule. Nous distinguerons par la suite quatre gammes de nombre de Reynolds indiquant des comportements physiques très différents :

- ◇  $Re_p \rightarrow 0$  Régime de Stokes,
- ◇  $Re_p < \mathcal{O}(1)$  Régimes faibles,
- ◇  $Re_p \in [\mathcal{O}(1), \mathcal{O}(1000)]$  Régimes modérés,
- ◇  $Re_p > \mathcal{O}(1000)$  Régimes élevés.

Le régime de Stokes est un cas particulier d'écoulements totalement exempts d'effets inertiels. Nous verrons par la suite que dans ce cadre les équations de conservation se simplifient considérablement. On parlera d'une façon plus générale de régime faible dans le cas d'un écoulement à prédominance visqueuse. Les régimes modérés sont eux caractérisés par la compétition de termes inertiels et visqueux d'ordre voisin. Les régimes élevés impliquent des termes inertiels prépondérants avec l'apparition de phénomènes turbulents.

### 2.2.2 Nombre de Stokes

Dans le cas de particules mobiles en milieu fluide, le nombre de Reynolds particulière seul ne suffit pas à caractériser le type d'écoulement. Considérons en premier lieu un fluide très peu visqueux et une inclusion solide de densité proche de celle du fluide, et en second lieu un fluide très visqueux avec un rapport de densité important entre les deux phases.

---

<sup>2</sup>Afin d'alléger la notation et sauf s'il est fait mention du contraire,  $U_\infty$  désignera par la suite la vitesse relative entre la particule et le fluide à l'infini.

On réalise que le nombre de Reynolds particulaire peut être équivalent dans chacun des deux cas alors que le comportement de l'inclusion peut se révéler radicalement différent, notamment vis-à-vis des obstacles, parois et particules dans son voisinage. Il s'agit donc de considérer une grandeur permettant de discriminer les 'effets de densité'. On utilise à cet égard le nombre de Stokes associé à la particule :

$$St = \frac{1}{9} \frac{\rho_p}{\rho_f} Re_p \quad (2.5)$$

Une particule dont le nombre de Stokes est élevé est dite en 'régime inertiel', ce qui revient à dire que les perturbations extérieures auront peu d'influence sur sa trajectoire. Si par-contre son nombre de Stokes est faible, la particule sera beaucoup plus sensible aux fluctuations du champ de vitesse. On utilise notamment cette dernière propriété pour que la particule se comporte comme un traceur de l'écoulement. Le nombre de Stokes est également identifiable par le rapport  $St = \tau_r/\tau_a$  où

$$\tau_r = \frac{2\rho_p a^2}{9\mu_f}, \quad (2.6)$$

représente le temps de relaxation de la particule sans prise en compte de la masse ajoutée. Le nombre de Stokes correspond également au rapport de l'énergie cinétique par le travail de la force de traînée.

### 2.2.3 Nombre de Galilée

Dans le cas d'écoulements à bulles, on peut caractériser la nature du phénomène en définissant le couple de paramètres adimensionnels  $[G, \rho_p/\rho_f]$  (Jenny *et al.*, 2004) où le nombre de Galilée,

$$G = \frac{\rho_f \sqrt{(|\rho_p/\rho_f - 1| g d_p^3)}}{\mu_f} \quad (2.7)$$

représente le rapport des effets de flottabilité aux effets visqueux. Dans des cas de sédimentation, ce sont les termes inertiels qui remplacent le terme de gravité, et donc le nombre de Reynolds remplace le nombre de Galilée. Nous qualifierons par la suite la nature d'un écoulement par rapport à la valeur du couple de paramètres  $(Re_p, St)$ .

## 2.3 Modélisation d'un milieu fluide monophasique

### 2.3.1 Équations de conservation

On se place ici dans le cas de rhéologies simples, et on limitera donc l'étude aux fluides newtoniens en régime incompressible. On suppose également que les effets thermiques sont négligeables. S'il n'y a pas de couplages particuliers (réactions chimiques, forces électromagnétiques) impliquant des relations de fermeture empiriques, et dans le cadre de l'hypothèse du milieu continu, on peut modéliser la dynamique d'un milieu fluide macroscopique de manière *exacte* grâce aux équations de Navier-Stokes :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \quad (2.8)$$

Aux équations de conservation de la quantité de mouvement doit s'ajouter l'équation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.9)$$

La complexité de ces équations fait qu'elles n'admettent qu'un nombre extrêmement limité de solutions analytiques sous couvert d'hypothèses très restrictives. La difficulté tient notamment à la présence du terme non-linéaire  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  dans (2.8), ainsi qu'à la modélisation des conditions aux limites. Dans le cas d'écoulements particuliers, le problème est aggravé par des conditions d'adhérence sur des obstacles dont la position varie dans l'espace et dans le temps. Toutefois, quelques résolutions analytiques sont possibles en faisant intervenir les nombres adimensionnels ainsi que les grandeurs caractéristiques citées auparavant. Sur la base de ces grandeurs, une analyse dimensionnelle peut justifier l'introduction d'hypothèses supplémentaires permettant de simplifier le problème. Nous évoquons dans la partie suivante les simplifications les plus couramment utilisées.

### 2.3.2 Hypothèses simplificatrices

#### Écoulements à nombre de Reynolds nul : Théorie de Stokes

Dans cette section, on s'intéresse en particulier aux écoulements dits rampants, ou écoulements de Stokes, qui correspondent dans notre cas à des nombres de Reynolds particuliers  $Re_p \ll 1$ . Dans ce cas, les forces de frottement visqueux sont prépondérantes devant les forces inertielles ce qui permet de négliger le terme convectif  $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ , très faible devant le terme visqueux  $\nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}))$ . Si l'on considère des situations admettant un état stationnaire, alors l'équation (2.8) avec l'hypothèse  $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$  dégénère en une nouvelle relation appelée équation de Stokes :

$$\nabla p - \rho \mathbf{g} = \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \quad (2.10)$$

Une hypothèse supplémentaire consiste à supposer qu'un système à très faible  $Re_p$  correspond à une suite d'états stationnaires car ce type d'écoulement est réversible<sup>3</sup>. Dans ce cas on parle des équations de Stokes instationnaires :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p - \rho \mathbf{g} = \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \quad (2.11)$$

Ces équations ont fait l'objet de nombreuses études théoriques et analytiques dont les résultats ne sont valides que lorsque le nombre de Reynolds est strictement nul. Il s'agit bien évidemment d'une vue de l'esprit, mais la solution réelle tend de manière asymptotique vers la solution des équations de Stokes lorsque  $Re_p \rightarrow 0$ . Il n'existe pas de régime minimal en dessous duquel la solution de Stokes est automatiquement valide. Pour certains types d'écoulements à  $Re_p$  raisonnablement faible, l'influence de l'inertie est quasiment indécélable expérimentalement et la solution de Stokes pourra être considérée comme exacte.

Dans des cas d'écoulements non-déterministes présentant des situations d'équilibres instables (comme une suspension de particules par exemple), l'influence des termes inertiels si petits soient-ils pourront être à l'origine de résultats non reproductibles. D'une façon générale on montre que dans le cas d'une particule isolée en interaction avec un fluide, les termes inertiels et les termes visqueux deviennent du même ordre quand la distance  $r$  à la particule vérifie  $r > \frac{a}{Re_p}$ , ce qui remet en cause la validité de l'équation de Stokes. Avant donc d'utiliser cette hypothèse, il est plus prudent d'étudier l'impact réel des forces inertielles sur la zone de calcul.

### Écoulements à faible nombre de Reynolds : Approche d'Oseen

Par la suite, Oseen (1910) (voir également Batchelor (1967)) montre que l'étude du poids respectif des diverses contributions de l'équation de Navier-Stokes permet d'intégrer un terme inertiel permettant de s'affranchir de l'invalidité de l'équation de Stokes à grande distance de la particule. L'approche d'Oseen s'explique par une analyse dimensionnelle qui justifie l'introduction d'un terme inertiel simplifié dans une gamme de nombres de Reynolds faibles. On sait que l'équation de Stokes modélise correctement les écoulements autour d'un profil pour un nombre de Reynolds très inférieurs à l'unité. On sait toutefois que les effets inertiels deviennent comparables aux effets visqueux, et ceci à une distance du profil de l'ordre de  $\frac{a}{Re_p}$ . Oseen propose une amélioration en intégrant un terme inertiel au modèle, dans le cas d'un corps animé d'une vitesse fixe en milieu fluide.

<sup>3</sup>Voir le cas de la rotation d'un filament de colorant dans un fluide très visqueux, en page 446 de l'ouvrage de Guyon *et al.* (2001).

Cette contribution à l'équation (2.10) s'écrit  $\rho(-\mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ , où  $\mathbf{U}_\infty = \mathbf{cste}$  désigne la vitesse du fluide non perturbé. Si l'on étudie les ordres de grandeur, et que l'on se place à une distance  $r$  du solide on sait que  $\mathbf{u}$  décroît en  $\frac{1}{r}$  donc en  $\frac{a}{r}$  en normalisant, d'où  $\mathbf{u} \propto \mathbf{U}_\infty \frac{a}{r}$ . Le premier terme est donc de l'ordre de  $\rho \mathbf{U}_\infty^2 \frac{a}{r^2}$  tandis que le second est de l'ordre  $\rho \mathbf{U}_\infty^2 \frac{a^2}{r^3}$ . On voit donc que lorsque  $r$  tend vers  $a$ , c'est à dire en étant proche du solide, les deux termes alors équivalents s'annulent, tandis que loin du solide, c'est le premier qui prévaut sur le second. Les équations d'Oseen s'écrivent dès lors de la façon suivante :

$$\begin{cases} \rho \mathbf{U}_\infty \cdot \nabla \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) \\ Re_p < 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Mathématiquement, l'équation est consistante à l'infini comme au voisinage du solide et les résultats analytiques sont confortés par l'expérience pour un nombre de Reynolds d'environ 0.5. Néanmoins la validité de la formulation en champ proche peut être contestée (Voir Guyon *et al.* (2001)) en arguant du fait que le terme non-linéaire est mal défini lorsque  $r$  tend vers  $a$ , et qu'il est préférable de s'orienter vers un choix de raccordement asymptotique Stokes-Oseen pour unifier respectivement les cas champ proche-champ lointain.

Le champ de validité de l'approche d'Oseen peut paraître limité, mais de très nombreux auteurs ont utilisé avec succès cette approche pour qualifier des écoulements dont le nombre de Reynolds va bien au-delà de la limite  $Re = 0.5$ . Cela tient au formalisme de ces équations qui facilite singulièrement le calcul du champ de vitesse autour de profils très variés, et subséquemment aux applications directes pour le calcul de profils de carènes dans les domaines de l'aéronautique et de l'hydrodynamique navale, qui ont stimulé les recherches basées sur ce modèle.

En bref, les approches en régime de Stokes et d'Oseen permettent de trouver des solutions analytiques pour des écoulements simples, et fournissent des éléments de validation aux méthodes de simulation. Leur intérêt ne s'arrête pas là : en effet ces résultats classiques dont les plus courants sont pour la plupart décrits en annexe A page 139, servent de façon quasi-automatique au dimensionnement des cas plus complexes.

---

Milieu continu,  
Fluides newtoniens,  
Écoulement incompressible,  
Champ gravitationnel uniforme,  
Particules indéformables.

---

TAB. 2.1: Les hypothèses de base.

---

## 2.4 Hypothèses de travail

Afin de clore ce chapitre, nous rappelons dans le tableau 2.4 les hypothèses admises pour la suite de cette étude. Les trois premières conditionnent le formalisme et la validité des équations de Navier–Stokes telles qu’elles sont présentées par la suite. Concernant les forces extérieures au système, seule la gravité interviendra dans cette étude. La totalité des résultats de la littérature que nous utilisons ici reposent sur l’hypothèse de particules parfaitement sphériques ou cylindriques et indéformables. Rappelons également que les effets thermiques sont négligés et donc que les propriétés physiques de chaque phase restent constantes pour un cas donné.

# Chapitre 3

## MÉTHODOLOGIE NUMÉRIQUE

Nous allons dans ce chapitre argumenter le choix de la simulation numérique directe et situer notre méthode dans le contexte actuel. On décrira ensuite les organes essentiels du code dans leur performance et surtout dans leur limitations afin d'établir un cadre préliminaire d'investigation numérique. Ce dernier devra justifier à priori de certains choix de paramétrisation, sachant qu'il nous faudra toujours satisfaire au mieux les contraintes physiques et numériques.

### 3.1 Contexte de la méthode

#### 3.1.1 Simulation Numérique Directe

La simulation d'un processus physique peut-être qualifiée de simulation numérique directe (DNS) lorsque l'on satisfait les conditions suivantes :

(i) Un système d'équations complet avec des conditions initiales et des conditions aux limites déterminées suffisent à la modélisation exacte du processus physique ;

(ii) La discrétisation est suffisamment fine pour éviter tout filtrage spatial et temporel par rapport au phénomène réel ;

(iii) Pour un phénomène non-déterministe, la simulation doit faire l'objet d'une statistique suffisamment riche pour que les valeurs moyennes convergent vers les valeurs moyennes réelles.



Dans notre cas, les équations de Navier–Stokes vérifient bien ces conditions. Néanmoins, l’augmentation des régimes d’écoulement aboutit à une diversification des échelles vers les plus petites afin de dissiper l’énergie fournie. Ceci implique une finesse de résolution croissante. Donc pour une résolution donnée la notion de DNS se limite à un certain régime d’écoulement. Pour la simulation de phénomènes turbulents, la DNS implique également une démarche statistique due au caractère non-déterministe des phénomènes. Nous nous limiterons ici au cas d’écoulements laminaires où la nécessité d’une statistique n’est en général <sup>1</sup> pas justifiée.

Il est clair qu’un modèle physique remplace avantageusement une approche numérique en termes de temps de calcul et de taille mémoire, mais les performances grandissantes des processeurs permettent aujourd’hui de s’accommoder de la gourmandise des codes DNS pour des nombres de Reynolds raisonnables. Dans le cas d’écoulements multiphasiques fluide/solide, la terminologie ‘DNS’ est plus spécifiquement employée pour désigner la résolution directe des couplages entre différentes phases. Ceci revient à dire que l’action bilatérale entre la phase fluide et la phase solide est traitée implicitement, par opposition aux méthodes plus classiques où le couplage fluide–solide est approché par des modèles plus globaux. Pour des particules solides immergées dans un fluide newtonien incompressible, on doit donc pouvoir résoudre le problème de ‘manière exacte’ par les équations de Navier-Stokes si l’on s’assure que la modélisation des inclusions respecte la condition de rigidité et surtout que la méthodologie de transport d’interface soit conservative.

En conclusion il s’agit de vérifier de nombreuses conditions pour pouvoir parler de simulation numérique directe. On sait déjà quels types de problèmes peuvent émerger : (i) des problèmes de résolution spatiale et temporelle liés à la nature de la couche limite séparant fluide particules et parois, et le coût de calcul conséquent ; (ii) des problèmes de limitation de taille relative entre le domaine de calcul et les inclusions solides ; (iii) des problèmes de validité de la méthode de calcul pour des régimes d’écoulement élevés.

Par–contre, les potentiels de la DNS sont extrêmement attractifs : (I) une accessibilité totale à toutes les données physiques ; (II) un avantage de modularité et d’adaptabilité ; (III) la précision et la fiabilité des résultats.

---

<sup>1</sup>Citons le contre–exemple des lits fluidisés. Si les écoulements peuvent être complètement laminaires, la présence de particules induit un caractère non-déterministe dans l’évolution de la structure de l’écoulement, ce qui justifie l’emploi d’une statistique.

### 3.1.2 Modélisation d'un milieu polyphasique

Deux concepts sont généralement utilisés pour modéliser un milieu polyphasique. On parle d'approche lagrangienne ou d'approche eulérienne. Ces méthodes dérivent des deux façons de décrire un domaine matériel en mécanique. Si l'approche lagrangienne repose sur la notion de trajectoire, la description eulérienne revient à considérer l'évolution des grandeurs physiques en un point fixe de l'espace. Les modèles les plus anciens considèrent une suspension comme un fluide unique traité de façon eulérienne. Par exemple on peut intégrer des variables supplémentaires (fraction volumique fluide/solide) aux équations de conservation par le biais de viscosités équivalentes dépendant de la concentration locale en particules. L'inconvénient majeur de ces méthodes est celui de devoir fermer le système d'équations à l'aide d'une modélisation des échelles locales. Ces méthodes appliquées aux suspensions à grande échelle sont très efficaces quand les modèles de fermeture sont bien choisis par rapport aux concentrations fluide–solide. Un des objectifs des méthodes récentes est donc de caractériser de façon exacte les phénomènes liés aux échelles locales afin d'alimenter les modèles continus eulériens. Les premières approches des échelles locales (voir McLaughlin (1994) avec les méthodes de one-way ou two-way coupling) consistent à utiliser les équations de Navier-Stokes pour le fluide et la seconde loi de Newton pour les particules. Un tel modèle, où l'on tient compte explicitement de la masse, de la géométrie et de la trajectoire des particules est également qualifié de modèle cinétique. Concernant les méthodes citées, on ne peut encore parler de simulation directe puisque les interactions fluide-particules doivent être modélisées de façon empirique.

Avec les progrès de la technologie informatique, les approches DNS deviennent envisageables. Parmi ces dernières, on peut distinguer celles qui traitent les interfaces comme des frontières du domaine fluide. En fait, seule la phase fluide est simulée, et les inclusions sont suivies par un maillage non structuré mobile et dont les interfaces sont traitées par des conditions aux limites. Howard H. Hu et plusieurs co-auteurs (voir par exemple Hu *et al.* (2000)) ont introduit et validé cette approche baptisée méthode 'ALE' (Arbitrary Lagrangian-Eulerian). Cette dernière est très efficace en ce qui concerne les inclusions déformables comme les bulles et gouttes (Maury et Glowinski (1997)). On peut consulter pour une méthodologie et des applications analogues les travaux de Legendre *et al.* (2003). Cependant ces techniques sont très difficiles à implémenter en 3D et les coûts de calculs sont connus pour être très importants. Cela vient surtout de la nécessité de conditions aux limites mobiles qui imposent un remaillage fréquent du domaine. De plus un tel modèle supporte mal les déformations trop raides des interfaces, et interdit les cas de rupture ou de coalescence.

De nombreuses techniques ont donc été conçues pour des maillages cartésiens fixes afin de supprimer ces limitations :

Tout d'abord des approches hybrides permettent de conjuguer un suivi lagrangien sur une grille eulérienne classique, comme les méthodes de suivi de front. On peut par exemple bénéficier du maillage fixe d'une méthode eulérienne et distribuer un nombre discret de marqueurs dans le volume ou sur la surface de l'inclusion que l'on pourra alors traiter et suivre de manière lagrangienne. On donne quelques exemples de méthodes de repérage et de transport d'interface au paragraphe 3.3.1 page 36. Les méthodes de suivi de front se distinguent en suivi de volume et en suivi de surface. Elles ont l'avantage de représenter l'interface de façon précise, mais les marqueurs doivent être périodiquement redistribués et les problèmes de rupture ou de coalescence sont très délicats à traiter. De plus le traitement explicite appliqué aux marqueurs implique un stockage croissant de données lorsque l'on multiplie le nombre d'inclusions. Toutefois ces limitations ne sont pas rédhibitoires et de nombreuses équipes continuent à développer cette technique (voir par exemple les récents travaux de Shin et Juric (2002) pour la résolution des problèmes de rupture d'interface).

Ensuite, une alternative économique et assez populaire de nos jours concerne l'exploitation des méthodes de gaz sur réseau appelées également méthodes Lattice-Boltzmann (LB). L'idée consiste à reproduire la dynamique collisionnelle des molécules aux échelles microscopiques. Techniquement, le fluide est représenté par une masse qui se propage le long d'un maillage cartésien régulier. En appliquant des lois de collisions conservatives vis-à-vis de la masse et de la quantité de mouvement, on peut montrer que le système macroscopique obéit à l'hypothèse de continuité ainsi qu'aux équations de Navier-Stokes en écoulement incompressible. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Chen et Doolen (1998) et Succi (2001) pour le principe de la méthode, et aux travaux de Ladd (1994a,b) pour les premières applications aux écoulements fluide-particules. Pour la validation et la critique de notre propre méthode, nous utiliserons largement les résultats des simulations Lattice-Boltzmann publiés par ten Cate *et al.* (2002, 2004) et Hill *et al.* (2001).

Toujours dans l'idée d'advecter des particules au travers de maillages cartésiens et fixes, des progrès importants ont été réalisés avec une approche par domaines fictifs développée par Glowinski *et al.* (2001). On note d'ailleurs l'introduction des techniques de pénalisation permettant de rigidifier la phase solide par le biais de multiplicateurs de Lagrange distribués sur l'interface (*méthode DLM*).

Cette technique permet notamment de traiter un nombre important d'inclusions. Son efficacité a été prouvée dans de nombreux cas de sédimentation et de fluidisation (Glowinski *et al.*, 2001) ou de transport de particules dans des écoulements tubulaires (Pan et Glowinski, 2002).

Nous allons utiliser ici des concepts plus ou moins apparentés aux méthodes DLM, la philosophie de base revenant à traiter le milieu multiphasique de la manière la plus globale possible. La méthode décrite et exploitée dans ce rapport est l'une des branches de la bibliothèque de CFD 'Aquila' développée au laboratoire. L'apport de Caltagirone et Vincent (2001) pour la simulation d'écoulements multiphasiques a été inspiré par la recherche d'une méthode de pénalisation volumique en domaine fictif (Khadra *et al.*, 2000) ainsi que par des techniques de reconstruction d'interface (Scardovelli et Zaleski, 1999). Le code permet lors d'une opération de convolution des équations de conservation par une fonction de phase de ne traiter qu'un seul fluide au sens des équations de Navier-Stokes, permettant ainsi l'utilisation d'un maillage cartésien fixe. Le caractère implicite de la méthode permet une très faible dépendance du temps de calcul au nombre d'inclusions considérées.

## 3.2 Établissement du modèle 1-Fluide

### 3.2.1 Définition d'un fluide équivalent

Afin de modéliser plusieurs phases on génère initialement un ensemble de fonctions binaires de l'espace prenant la valeur 1 ou 0 si l'on se trouve respectivement dans une des phases solides ou dans la phase liquide. Ces fonctions décrivent alors la fraction volumique particule/fluide :  $C(x, y, z, t)$  avec dans le cas de  $N$  phases immiscibles  $C = \sum_{i=1}^N C_i$ , la fraction volumique spécifique  $C_i$  désignant le  $i$ ème constituant. Il est dès lors possible d'utiliser une grille cartésienne où le champ  $C(x, y, z, t)$  représente la topologie multiphasique de l'écoulement. On peut alors exprimer les paramètres physiques en fonction de la fraction volumique. Soit  $D$  désignant le domaine,  $\partial D$  sa frontière,  $D_f$  la phase fluide,  $D_{si}$  la phase solide associée au  $i$ ème constituant et  $\partial D_{si}$  la frontière de  $D_{si}$ . Alors  $M(x, y, z, t)$  étant un point du domaine, on définit la fraction volumique par la relation

$$\begin{cases} C(x, y, z, t) = 0, & M \in D_f \\ C_i(x, y, z, t) = 1, & M \in D_{si} \\ C_i(x, y, z, t) = 0, & M \in D - D_{si}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Après la discrétisation de cette fonction binaire, on obtiendra un continuum pour la fonction  $C$ . Il suffira alors pour identifier l'interface de localiser l'isovaleur  $C(x, y, z, t) = 0.5$ . La densité et la viscosité du fluide équivalent sont ensuite exprimées en fonction de  $C(x, y, z, t)$  pour chaque volume de contrôle à l'aide de différentes relations. La relation (3.2) utilise une fonction linéaire pour décrire la variation des caractéristiques  $\rho$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases} \mu(x, y, z, t) = \mu_f(1 - C(x, y, z, t)) + \mu_p C(x, y, z, t) & (a) \\ \rho(x, y, z, t) = \rho_f(1 - C(x, y, z, t)) + \rho_p C(x, y, z, t) & (b). \end{cases} \quad (3.2)$$

Nous verrons par la suite dans une section dédiée aux différentes interpolations que cette fonction linéaire est d'une efficacité limitée, et qu'il faudra sans doute choisir une fonction mieux adaptée au problème. Une méthode plus simple pour n'en être pas moins efficace, se base de façon binaire sur la condition  $C < 0.5$  ou  $C > 0.5$  pour affecter respectivement la caractéristique 'fluide' ou 'solide' au volume de contrôle considéré.

Ces deux dernières méthodes sont appelées respectivement lois de 'variation continue' et de 'variation discontinue'. Nous verrons que la fonction de phase n'apparaît pas explicitement dans les équations de conservation.

L'évolution de  $C$  sera en fait assurée par une équation de transport non diffusif. Il est donc clair que les relations choisies pour exprimer les paramètres physiques en fonction de  $C$  sont cruciales en tant que lien exclusif entre l'équation de transport et l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

### 3.2.2 Mise en équation des hypothèses

Nous allons à présent traduire les hypothèses de travail énoncées dans le tableau (2.4) page 24. Tout d'abord, l'hypothèse du milieu continu est la base de la mécanique des fluides telle que nous l'abordons dans ce travail, et la dimension des systèmes étudiés par la suite en fait une approximation indiscutable. On peut donc appliquer les équations de conservation macroscopiques classiques.

Ensuite on se limitera aux fluides newtoniens incompressibles. Le comportement de ces fluides repose sur la linéarité de la relation liant le tenseur des contraintes  $\overline{\Sigma}$  et le tenseur des taux de déformation  $\overline{D}$ . Cette loi de comportement du fluide est caractérisée de manière exacte par la loi de Newton :

$$\Sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda \sum_{k=1}^3 D_{kk}(\mathbf{u})\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{u}). \quad (3.3)$$

où  $p$  représente la pression,  $\mathbf{u}$  le vecteur vitesse,  $\mu$  et  $\lambda$  représentant respectivement la viscosité moléculaire (ou viscosité dynamique) et la viscosité de compression.

Quant à l'incompressibilité, le fluide équivalent est caractérisé par une densité variable en temps et en espace, et on ne pourra donc pas parler de 'fluide incompressible'. Par contre toute particule suivie de façon lagrangienne gardera sa densité initiale quelle que soit la phase, ce qui définit un *écoulement incompressible*. Par conséquent la densité équivalente  $\rho$  du fluide vérifie l'équation sur la dérivée particulaire  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ . Comme on doit obligatoirement respecter la loi de conservation de la masse, le champ de vitesse obtenu est forcément à divergence nulle :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans D.} \quad (3.4)$$

Une conséquence de cette propriété est que la somme des composantes diagonales du tenseur des taux de déformation  $\overline{D}$  est nulle ce qui permet de simplifier la loi de comportement du fluide.

$$\Sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu D_{ij}(\mathbf{u}) \text{ soit } \overline{\Sigma} = -p\overline{I} + 2\mu\overline{D} \quad \text{dans D.} \quad (3.5)$$

En ce qui concerne les forces extérieures appliquées au milieu considéré, seule la gravité sera prise en compte et modélisée par un champ de force uniforme  $\mathbf{g}$ .

Enfin tous les cas de validation abordés par la suite concernent des inclusions rigides de volume constant. Le paragraphe suivant expose une méthode permettant d'assurer implicitement la non-déformabilité de la phase solide.

### 3.2.3 Méthode de pénalisation tensorielle

Pour l'instant l'inclusion ne se distingue de la phase continue qu'en terme de masse et de viscosité. Il s'agit donc d'adapter le modèle pour que les inclusions obéissent à une loi de comportement mécanique particulière. Dans le cas de fluides newtoniens, on peut utiliser une méthode dite de 'pénalisation' (Caltagirone et Vincent, 2001).

Le principe de cette méthode consiste à ajouter certains termes à l'équation de conservation et en reformulant le tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\Sigma}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$  avec le tenseur des contraintes visqueuses  $\bar{\bar{\tau}} = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^t\mathbf{u})$  sous la forme  $\bar{\bar{\Sigma}} = (-p + \frac{\lambda}{2\mu}Tr(\bar{\bar{\tau}}))\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}}$ . Si l'on décompose le tenseur des contraintes visqueuses, on dégage trois composantes :  $\bar{\bar{\tau}} = \kappa\bar{\bar{\Lambda}} + \zeta\bar{\bar{\Theta}} - \eta\bar{\bar{\Gamma}}$ .

Ces dernières sont physiquement associées aux viscosités spécifiques dites d'élongation ( $\kappa$ ), de cisaillement ( $\zeta$ ) et de rotation ( $\eta$ ). Le quatrième paramètre,  $\lambda$ , est associé à une viscosité de compression/dilatation car le tenseur introduit dans la formulation,  $\frac{Tr(\bar{\bar{\tau}})}{2\mu}\bar{\bar{I}}$  fait intervenir la contrainte d'incompressibilité :  $\frac{Tr(\bar{\bar{\tau}})}{2\mu} = \nabla \cdot \mathbf{u}$ . L'écriture complète du tenseur des contraintes  $\bar{\bar{\Sigma}}$  peut s'exprimer directement dans un système de coordonnées cartésiennes :

$$\bar{\bar{\Sigma}} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u})\bar{\bar{I}} + \kappa\bar{\bar{\Lambda}} + \zeta\bar{\bar{\Theta}} - \eta\bar{\bar{\Gamma}}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Sigma}} = & \begin{bmatrix} -p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} & 0 & 0 \\ 0 & -p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} & 0 \\ 0 & 0 & -p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} + \kappa \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \\ & + \zeta \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} - \eta \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

On intègre ensuite ces termes aux équations de conservation de la quantité de mouvement pour obtenir la formulation :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot [(-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u})\bar{\bar{I}} + \kappa\bar{\bar{\Lambda}} + \zeta\bar{\bar{\Theta}} - \eta\bar{\bar{\Gamma}}] \quad (3.8)$$

Quant aux viscosités, elle s'expriment en fonction de la viscosité moléculaire (dynamique) de la façon suivante :  $\lambda = -\frac{2}{3}\mu, \kappa = 2\mu, \zeta = 2\mu, \eta = \mu$ . La technique de pénalisation consiste à moduler ces viscosités spécifiques afin d'induire un type de comportement particulier. Nous verrons dans la section 3.3.5 comment utiliser l'approche du lagrangien augmenté afin de satisfaire chacune de ces contraintes d'une façon indépendante. Par exemple cette méthode est largement pratiquée afin de contraindre l'incompressibilité du fluide par pénalisation, en augmentant la contribution du tenseur  $\frac{Tr(\bar{\bar{\mathbf{T}}})}{2\mu}$  via la condition  $\lambda \rightarrow \infty$ . De la même façon, on pourra imposer un comportement élastique de l'inclusion, une rotation solide, *etc...*. Dans notre cas il s'agit de faire tendre indifféremment  $\kappa, \zeta$  et  $\eta$  vers l'infini, ce qui revient en fait à imposer  $\mu_p \rightarrow \infty$ . Il est possible d'établir un critère de rigidité (3.9) en contrôlant que le tenseur des taux de déformation  $\bar{\bar{\mathbf{D}}}$  soit proche du tenseur nul dans la phase dispersée  $D_p$  :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = 0, \quad \forall M \in D_p, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.9)$$

### 3.2.4 Équations constitutives du modèle 1-Fluide

Pour obtenir le modèle complet, on convolve les équations de Navier-Stokes (3.10) avec la fonction de phase  $C$  par le biais des grandeurs physiques  $\rho(C)$  et  $\mu(C)$  variant donc en temps et en espace. Pour caractériser leur évolution, on dit que la dérivée particulaire de la fonction  $C$  est nulle, et donc que l'évolution de  $C$  au cours du temps ne dépend que du terme d'advection  $\mathbf{u} \cdot \nabla C$ . Il suffit donc d'ajouter une équation non diffusive de transport sur la fraction volumique  $C$  (3.11) aux équations de Navier-Stokes pour fermer le modèle. Le jeu d'équation résultant ((3.10), (3.11), (3.12)) constitue donc le modèle 1-Fluide global.

---


$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0, \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (3.12)$$


---

Modèle 1-Fluide pour les équations de Navier-Stokes multiphasiques.

---



En identifiant la phase dispersée à plusieurs sous-domaines fictifs, on voit que les équations de Navier-Stokes sont résolues pour un fluide seul sans qu'aucun couplage interfacial n'apparaisse de façon explicite. Mais de toute évidence, de forts gradients viendront compliquer la résolution de l'équation d'advection (3.11) qui doit être effectuée avec un minimum de diffusion numérique. Le problème de la résolution du couple vitesse-pression est également délicat. Il faudra également discuter des conditions de continuité aux interfaces et de l'implémentation des conditions aux limites.

### 3.2.5 Continuité aux interfaces

En appliquant le théorème de la divergence généralisée aux bilans de masse et de quantité de mouvement pour un milieu fluide newtonien incompressible présentant une surface de discontinuité, les termes dus à la surface de discontinuité donnent les relations de saut aux interfaces. Ces expressions dans le cas d'une dispersion liquide/solide ( $D_f/D_{si}$ ) qualifient respectivement la continuité des flux et la continuité des contraintes à la traversée de l'interface ( $\partial D_{si}$ ) :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{D_f} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{D_{si}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}_{\partial D_{si}} \cdot \mathbf{n} \\ |[p \cdot \mathbf{n} - \bar{\bar{\tau}} \cdot \mathbf{n}] = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Nous avons déjà vu que la méthode 1-Fluide remplace les discontinuités par de forts gradients, et qu'on ne traite qu'un seul fluide équivalent. Ce formalisme fait donc disparaître la notion d'interface au sens des équations de Navier-Stokes, et les relations de saut (3.13) sont donc implicitement vérifiées.

La section suivante énumère et discrimine des techniques conçues pour surmonter les obstacles mathématiques relevés précédemment, pour finalement proposer une méthode fonctionnelle.

## 3.3 Méthodes de résolution

Le code utilisé dans ce travail est la plate-forme de calcul multiphysique 'Aquilon' qui intègre de nombreuses méthodologies. Afin de clarifier la présentation de la méthode, on décrit un algorithme global schématisé en figure 3.1, où les techniques utilisées par la suite sont référencées en fonction de l'ordre d'appel.

Le code commence par lire toutes les caractéristiques initiales (maillage, pas de temps, dimensions, caractéristiques physiques, vitesses initiales, impositions, gravité, topologie des inclusions, méthodes de résolution et schémas...).

Il s'agit du bloc **(I)** séparé en deux parties, la première regroupant les paramètres conservés au cours du calcul (dimensions, maillage...) tandis que l'autre permet une modification dynamique de la simulation (pas de temps, schemas...). Le bloc **(II)** concerne le calcul du terme de conditions aux limites à rajouter au jeu d'équations (voir section 3.3.3). Le bloc **(III)** concerne la discrétisation en temps (voir section 3.3.4) : on choisit le temps auquel chaque contribution est exprimée en tenant compte de l'orientation implicite du code et de l'approximation des termes non-linéaires. On peut voir directement dans les équations que la pression n'est pas explicitée. Généralement prévu pour résoudre le couplage vitesse/pression lors d'une étape de prédiction, l'algorithme d'optimisation du lagrangien augmenté (voir section 3.3.5) qui itère entre les étapes **(III)** et **(VI)** constitue le coeur de la méthode. Il permet un traitement implicite de la conservation de la quantité de mouvement et de la contrainte d'incompressibilité et intervient donc dans le calcul de la pression et du couplage entre les différentes composantes de vitesse.

Au niveau du bloc **(IV)**, le nouveau jeu d'équations est discrétisé spatialement (voir section 3.3.6) sur un maillage fixe décalé en vitesse–pression, et par intégration conservative<sup>2</sup> des équations locales ((3.10)–(3.12)).

Cette discrétisation est faite en appliquant différents schémas d'espace aux différents termes du jeu d'équation en fonction de leur nature (terme du Lagrangien Augmenté, termes visqueux, termes convectifs...). Cette étape nécessite également d'interpoler sur la grille de vitesse les propriétés physiques définies jusque-là au centre des volumes de contrôle (voir section 3.3.2 page 40).

Le système linéaire  $Ax = B$  établi lors de l'étape précédente est préconditionné et inversé au niveau du bloc **(V)**, par une méthode itérative de Bi-gradient conjugué stabilisé (voir section 3.3.7).

Le bloc **(VI)** est constitué de deux parties : une étape de prédiction (nouveaux champs de vitesse et de pression issus de l'algorithme du lagrangien augmenté), et une étape optionnelle de correction impliquant une technique de projection vectorielle ou scalaire (voir section 3.3.8 page 49) de la solution sur un champ à divergence nulle (voir section 3.3.8).

Une fois que le résidu de l'équation de Navier-Stokes et la valeur de la divergence satisfont les critères de convergence définis lors de l'initialisation, on peut procéder au déplacement de l'interface (bloc**(VII)**). A ce niveau on dispose de plusieurs techniques détaillées dans la section 3.3.1. La technique la plus utilisée ici (VOF-CIAM) est une méthode explicite, et donc assujettie à un critère de stabilité dit 'CFL'.

---

<sup>2</sup>Voir la méthodes des Volumes Finis (Patankar (1980)).

La dernière phase (bloc(VIII)) consiste à recalculer la topologie des propriétés physiques du fluide équivalent. Plusieurs relations algébriques peuvent être utilisées (voir section 3.2.1 page 30). C'est également à ce niveau qu'interviennent les lois d'état pour exprimer les propriétés physiques en fonction de la température, du cisaillement, *etc.*

### 3.3.1 Algorithmes de transport d'interfaces

La distribution discontinue de la fonction de phase  $C$  représente une grande difficulté mathématique dans la discrétisation de l'équation (3.11). La présence d'interfaces génère donc des gradients très élevés de viscosité et de densité, et l'utilisation de schémas de transport classiques ne permet pas de prendre en compte correctement ces gradients dans les équations de conservation. En fait les schémas d'ordre faible sont trop imprécis du fait de leur caractère diffusif, tandis que les schémas d'ordre élevé plus précis génèrent des oscillations physiquement absurdes. Les méthodes eulériennes présentent plusieurs choix de capture d'interface.

On a tout d'abord les méthodes de suivi de front (Front Tracking) qui ne localisent que la surface de l'inclusion par un maillage lagrangien. On peut citer plusieurs travaux ( voir Harlow et Welch (1965), Daly (1969), Shin et Juric (2002)) qui utilisent le principe d'une dispersion de marqueurs distribués sur l'interface et suivis de manière lagrangienne. Les discontinuités peuvent être également caractérisées par une fonction continue donnant en chaque point de l'espace la plus petite distance à l'interface. Il s'agit des techniques de type level-set introduite par Osher et Sethian (1988). Cette fonction continue permet l'utilisation de schémas classiques.

Notre choix se porte plutôt sur les méthodes de suivi en volume. Nous utiliserons trois méthodes. Tout d'abord la méthode VOF-CIAM (voir Youngs *et al.* (1982) et Nichols et Hirt (1973)) présentée et validée dans la thèse de Breil (2001), puis un schéma vérifiant la propriété TVD (TVD-SUPERBEE) détaillé et validé par Vincent (1999), et enfin une méthode ('LAG') se limitant au transport d'inclusions sphériques développée par Ritz (1997).

Chaque type de méthode trouve en fait des limitations particulières : en général les techniques de traceurs posent des problèmes de distribution et de stockage en mémoire, et beaucoup ne supportent pas la coalescence ou le fractionnement (exception faite du Front-Tracking qui bénéficie des récents travaux de Shin et Juric (2002) pour la résolution des problèmes de rupture d'interface).

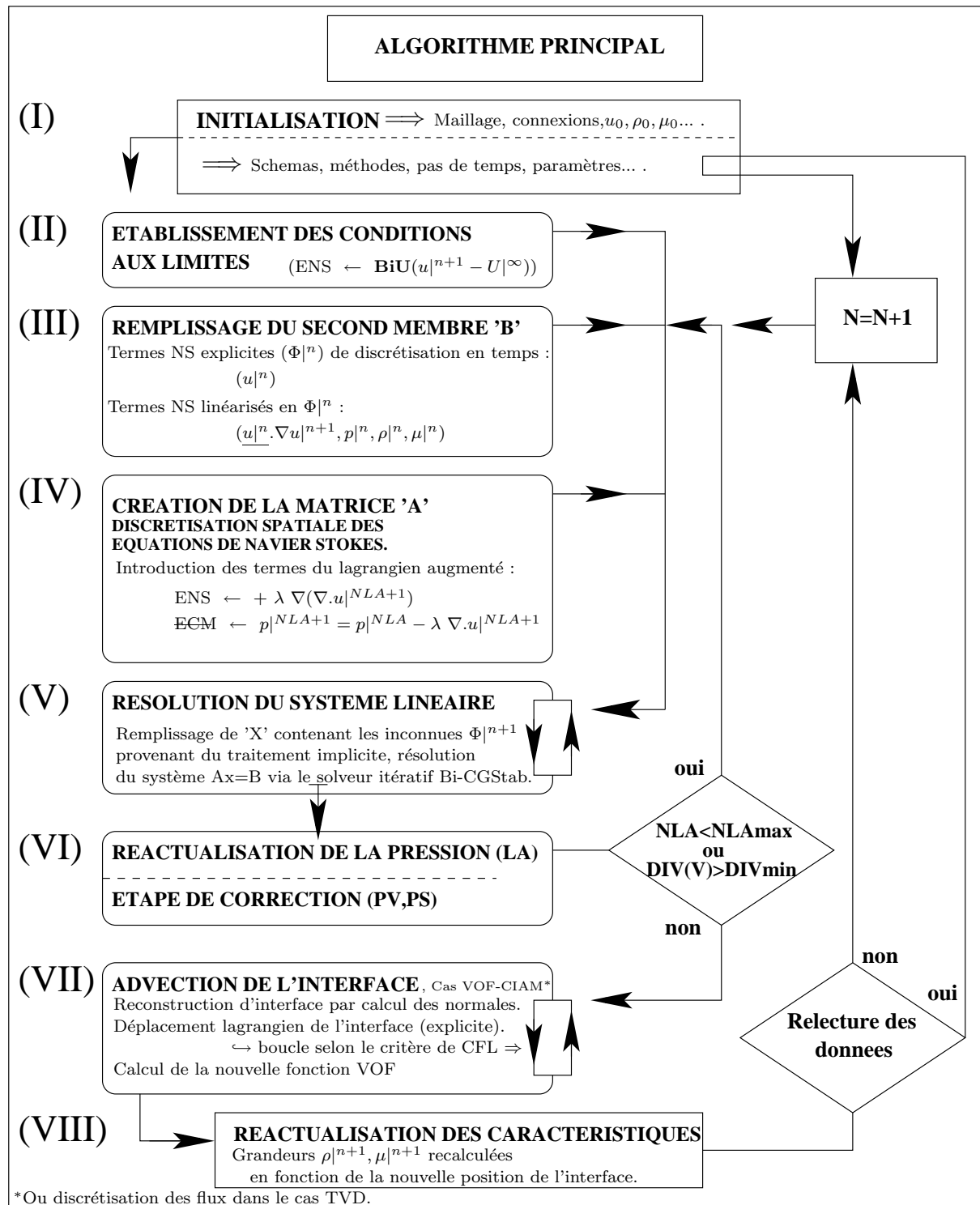


FIG. 3.1: Un algorithme global du code de calcul 'AQUILON'.

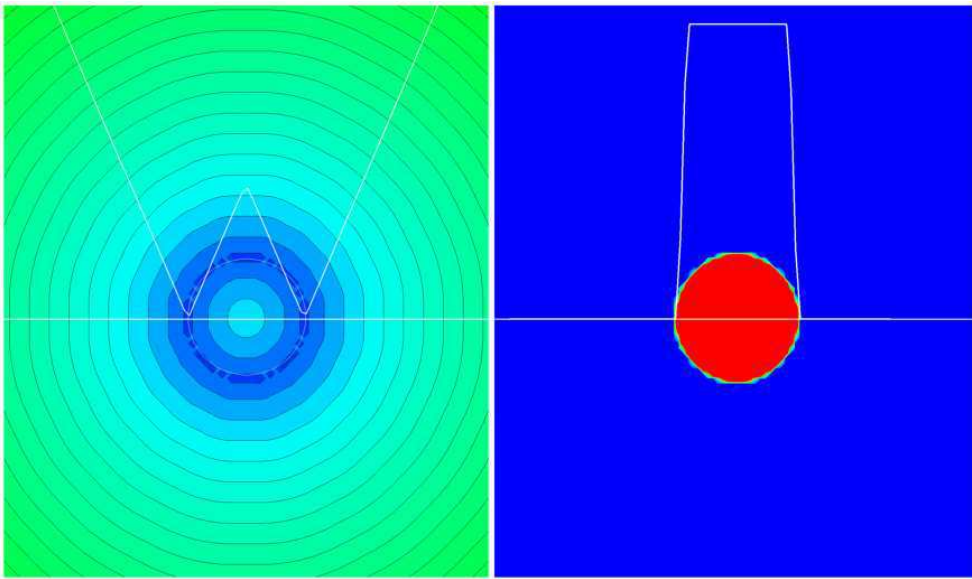


FIG. 3.2: Représentation graphique des fonctions Level-Set (figure de gauche) et Volume Of Fluid (figure de droite). Distribution 2D des fonctions pour une interface circulaire, distribution 1D des fonctions le long d'un diamètre.

La méthode Level-set peut donner des résultats remarquables, mais elle est connue pour être relativement coûteuse et sujette à des pertes de masse. Les schémas à propriété TVD sont assez efficaces mais leur principal défaut reste la diffusion trop prononcée de l'interface. Le schéma de type VOF quant à lui est assez conservatif, mais il souffre d'une tendance excessive au fractionnement.

### Méthode VOF-CIAM (ou VOF-PLIC (*Angl.*))

L'acronyme VOF-CIAM signifie respectivement 'Volume De Fluide' et 'Construction d'Interface Affine par Morceaux'. On parle de construction d'interface mais cette méthode fait bien partie des méthodes de suivi de volume. Elle s'opère en trois étapes :

◇ **Estimation de la normale** Pour chaque élément de volume appartenant à l'interface (soit  $C_i(x, y, z, t) \in ]0, 1[$ ,  $M \in \partial D_{si}$ ), on calcule le vecteur  $\mathbf{n} = -\nabla C$  à partir de la donnée de  $C$  sur chaque coin du volume de contrôle. Comme le gradient de  $C$  indique le passage d'une phase à l'autre, on obtient la normale extérieure à l'interface.

◇ **Positionnement de l'interface** Ensuite la normale sert à estimer la position de l'interface reconstruite par un plan ou une droite dans la maille. Selon les configurations (surtout en 3D) de nombreux tests sont faits pour discriminer le bon positionnement.

◇ **Déplacement de l'interface** La structure décalée du maillage impose d'interpoler le champ de vitesse  $\mathbf{U}$  au centre de la maille. Une méthode à pas fractionnaire permet d'advecter l'interface successivement dans chaque direction en suivant la normale définie précédemment. Il s'agit d'un traitement lagrangien explicite, donc le déplacement est limité à un nombre de Courant  $\sigma = |U| \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0.5$  (Hirsh, 1990). Si le déplacement de la portion d'interface excède la demi-maille, l'algorithme de VOF-CIAM décompose le déplacement en plusieurs étapes pour respecter la CFL (itérations VOF  $> 1$ , mais il est préférable de diminuer le pas de temps pour l'éviter!). On calcule finalement la fraction volumique pour la nouvelle position de l'interface. Les détails, développements et validations de la méthode sont explicités de manière exhaustive dans la thèse de Breil (2001). En ce qui concerne les performances, VOF-CIAM ne souffre d'aucune diffusion numérique puisque sa résolution est à l'échelle de la maille. Parmi ses défauts, on note qu'il n'est pas parfaitement conservatif (comme bien d'autres), mais il s'agit surtout de sa tendance excessive à la rupture dans le cas de forts cisaillement ou déformations, lorsque les échelles d'interface sont de l'ordre de 2 mailles ou moins.

### Méthode TVD

Pour résoudre l'équation (3.11) on dispose également d'un schéma de type Lax-Wendroff d'ordre 2 vérifiant la propriété de Variation Totale Décroissante (TVD). Pour plus de détails on pourra se référer à la thèse de Vincent (1999) ainsi qu'aux ouvrages de Hirsh (1990). Cette méthode permet de bénéficier d'un ordre 2 sur les zones à faible gradient tandis que la limitation des flux permet de s'affranchir des oscillations obtenues lorsque des schémas d'ordre élevé classiques sont appliqués sur de forts gradients. Des travaux récents au laboratoire sont menés afin de remplacer le schéma Lax-Wendroff TVD par le schéma Weno d'ordre 5 (Jiang et C. W. Shu, 1996) afin de gagner en précision. En ce qui concerne la diffusion de l'interface, elle est assez restreinte (3 mailles) comparée aux schémas traditionnels, mais elle reste moins intéressante que celle de la méthode VOF-CIAM évoquée précédemment. Parmi les autres propriétés du schéma TVD on note une tendance beaucoup moins nette au fractionnement par rapport à VOF-CIAM, et un meilleur comportement lors de l'introduction de tensions superficielles.

### Méthode LAG

La technique utilisée par Ritz (1997) est une méthode spécifique de transport d'inclusions rigides et sphériques. On définit un torseur caractérisant les forces appliquées à l'inclusion, et son déplacement sous l'action des forces extérieures est calculé de façon explicite.

Donc lors de l'étape de transport, au lieu de reconstruire l'interface et d'advecter chacun de ses éléments de volumes, on transporte toute l'inclusion en une seule étape. Cette méthode de suivi lagrangien permet en plus de conserver la forme des particules au cours du phénomène ce qui représente un avantage non négligeable vis-à-vis des précédentes techniques. Il faut par-contre observer une certaine prudence quant à son utilisation : LAG utilise une moyenne spatiale de la fonction de phase pour reconstruire le cylindre ou la sphère. Or, si les gradients de vitesse à l'interface deviennent trop importants ou si la viscosité imposée dans le solide est trop faible par rapport à celle du fluide, l'énergie dissipée par la déformation de la particule à chaque pas de temps dans les équations de Navier–Stokes sera restituée d'une manière erronée par la méthode LAG. On peut qualifier cela de filtrage ou de gommage des déformations, et l'on peut dès-lors s'attendre à quelques problèmes de conservation. À la base le schéma LAG fonctionne comme le schéma VOF, mais nous venons de voir que LAG est une méthode non-cumulative vis-à-vis des déformations. Par la suite on prendra donc soin de lancer des simulations grossières utilisant VOF-CIAM ou TVD et de s'assurer que l'indéformabilité de l'inclusion est effective avant d'utiliser LAG. Dans le cas d'inclusions multiples la méthode LAG peut-être très efficace et permet d'éviter beaucoup plus d'événements non-physiques de type coalescence par rapport à VOF-CIAM et TVD. En ce qui concerne le temps de calcul, ce dernier n'augmente que de 3% par particule ce qui est relativement performant, tandis que le temps de calcul pour les schémas VOF ou TVD est insensible au nombre de particules, dans la mesure où l'on ne traite qu'un seul type de particule solide (*i.e.* de même densité). Il y aura donc un compromis à faire à ce niveau.

### 3.3.2 Interpolations

Pour résumer, dès que la méthode de transport choisie est appliquée, les lois de variations abordées au paragraphe 3.2.1 permettent de recalculer la topologie des propriétés physiques d'après le déplacement de l'interface. La discrétisation en Volumes Finis sur une grille décalée en vitesse–pression nécessite d'interpoler les caractéristiques sur la grille de vitesse. Certaines interpolations non-conservatives ou trop grossières vis-à-vis des conditions de saut à l'interface, peuvent poser des problèmes. On devra donc tester scrupuleusement les fonctions disponibles afin d'adapter la méthode à la situation considérée.

La relation (3.2(b)) est une approche linéaire que l'on adopte la plupart du temps pour la densité équivalente, car elle vérifie la conservation du volume de fluide mélangé. Le traitement de la viscosité équivalente avec (3.2(a)) pose un problème. La compétition des deux termes est équilibrée lorsque le rapport de viscosité entre les phases  $\frac{\mu_p}{\mu_f}$  est de l'ordre de l'unité.

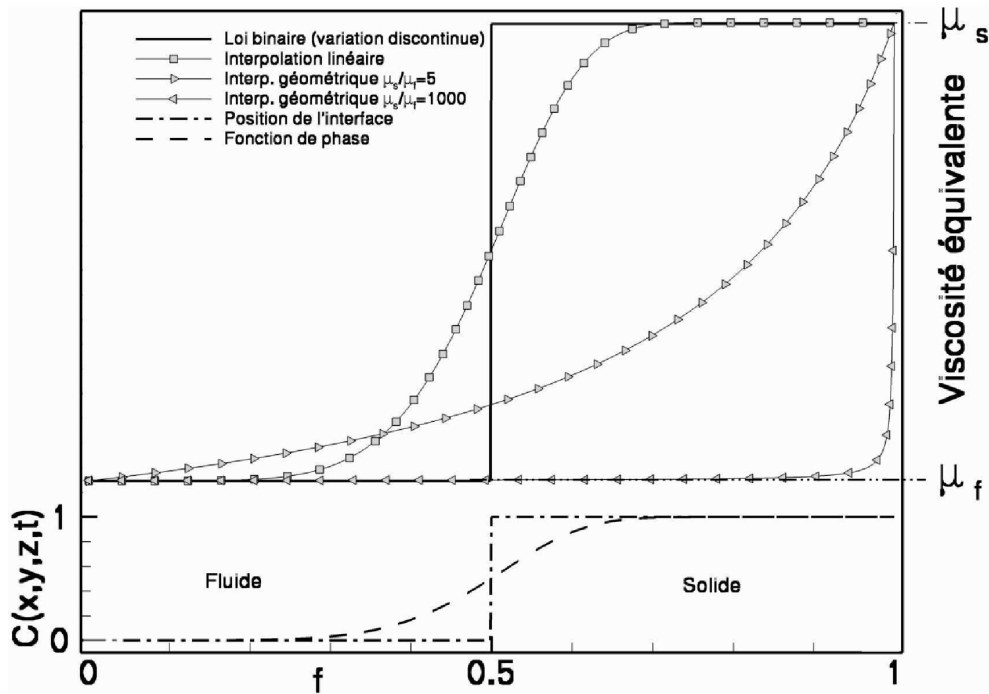


FIG. 3.3: Étude des méthodes d'interpolation de la viscosité dans une maille interfaciale.

Or dans les cas abordés par la suite, les gradients de viscosité sont beaucoup plus forts et le terme provenant de la phase solide supplante l'autre pour finalement rigidifier toute la maille. Sur la figure 3.3 on compare l'interpolation linéaire avec une interpolation géométrique (ou moyenne harmonique, voir équation (3.14)) tenant compte de la position  $f$  de l'interface dans la maille et respectant de surcroît la continuité des flux (Ritz (1997)) :

$$\mu = \frac{\mu_f \mu_p}{(1-f)\mu_p + f\mu_f}. \quad (3.14)$$

La moyenne harmonique favorise la contribution de la viscosité de la phase continue dans la maille lorsque l'on augmente le rapport de viscosités  $\frac{\mu_p}{\mu_f}$  de 5 à 1000. La relation linéaire, elle, devient de plus en plus inadéquate. Cependant dans certains cas à faible nombre de Reynolds et faible nombre de Stokes, le cisaillement tangentiel à l'interface est de moindre importance et on peut justifier le choix d'une interpolation linéaire.

### 3.3.3 Gestion des conditions aux limites

Nous verrons qu'une des particularités des grilles décalées en vitesse–pression est d'avoir des volumes de contrôle chevauchant les frontières du domaine. L'écriture des conditions aux limites se fait alors en exprimant un flux surfacique au niveau de ces cellules (voir les travaux de Khadra (1994) et Angot (1998)).



Grâce au traitement particulier du couplage vitesse–pression décrit plus loin, on s’affranchit des conditions aux limites sur la pression. La condition aux limites généralisée s’écrit dès–lors pour les trois composantes de vitesses :

$$-\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\right)_{\partial D} = \mathbf{Bi}_U(\mathbf{u}_{\partial D} - \mathbf{U}_\infty). \quad (3.15)$$

On intègre ensuite la relation (3.15) aux équations (3.8) pour obtenir la formulation finale :

$$M \in D = \begin{cases} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})) - \mathbf{Bi}_U(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty), \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

$$M \in \partial D = \begin{cases} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}\right) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

---

Modèle 1-Fluide complet.

---

Le terme inclus dans les équations de Navier-Stokes est un terme de pénalisation permettant l’imposition implicite de vitesses en tout point du domaine, frontières incluses. Faire tendre  $\mathbf{Bi}_U$  vers 0 implique un flux nul d’après l’équation (3.15), ce qui aboutit à une condition de Neumann. D’un autre côté, faire tendre  $\mathbf{Bi}_U$  vers l’infini amène une condition de Dirichlet  $\mathbf{u} = \mathbf{U}_\infty$ . Cette dernière manipulation permet par un effet de pénalisation de modéliser des parois fixes ou mobiles ainsi que des obstacles fixes. Elle permet également d’introduire des plans de symétrie.

En dehors des techniques de pénalisation, une identification de noeuds de vitesse d’un bord à l’autre du domaine permet également la gestion d’écoulements périodiques. On essaiera par la suite d’utiliser au maximum les conditions de Dirichlet, car elles pénalisent fortement l’équation, et induisent un meilleur comportement de la méthode de résolution du système linéaire en terme de résidu et de divergence. Si l’on désire minimiser l’effet de la condition aux limites sur l’écoulement, on pourra utiliser les conditions de Neumann en prenant soin d’étudier les conséquences de combinaisons directes<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>Par exemple la combinaison de deux conditions de Neumann et de la contrainte de divergence nulle, pose un problème de compatibilité au niveau de l’intersection des conditions, problème qui se propage par la suite le long de la limite.

Si l'imposition du flux nul sur les frontières engendre trop de problèmes, une condition revenant à résoudre les équations de conservation sur la limite (condition 'LIBRE') permet, en appliquant une symétrie locale, de modéliser une condition de sortie tout en gardant une certaine souplesse.

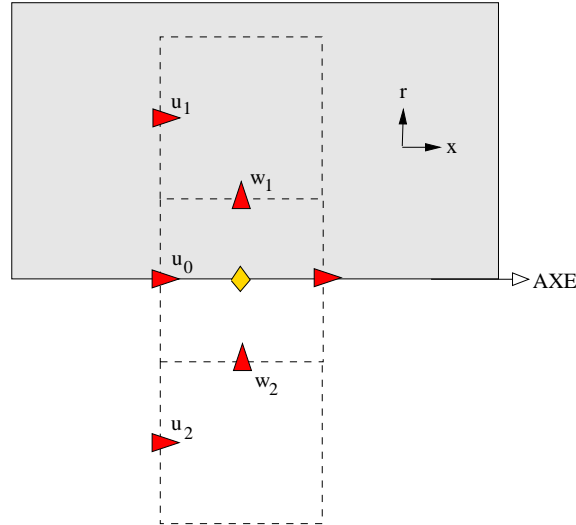


FIG. 3.4: Traitement des conditions aux limites appliqué au cas d'un domaine axisymétrique.

On peut illustrer la gestion des conditions aux limites dans le cas particulier d'une géométrie axisymétrique. Sur la figure 3.4 on représente les noeuds des vitesses nécessaires au calcul des vitesses normales et tangentiels à l'axe de rotation du domaine. Les indices 1 et 2 indiquent respectivement les noeuds situés à l'intérieur et à l'extérieur du domaine. Pour la vitesse normale à la limite, on écrit que  $\frac{1}{2}(w_1 + w_2) = 0$ , ce qui induit de façon implicite une condition de Dirichlet  $w = 0$  à la limite. Pour la vitesse tangentielle à la limite, le noeud extérieur  $u_2$  est identifié au noeud intérieur  $u_1$ , ce qui induit de façon implicite une condition de Neumann  $\frac{\partial u}{\partial r} = 0$ . C'est ce dernier traitement que l'on désigne par le nom de condition limite de type 'LIBRE'.

### 3.3.4 Discrétisation en temps

À ce niveau, deux choix sont possibles. Le premier consiste à adopter une méthode explicite, ce qui revient à exprimer directement les inconnues au temps  $n + 1$  en fonction des inconnues au temps  $n$ . Le principal avantage est de ne pas avoir à résoudre de système linéaire d'où l'économie importante du temps de calcul. La principale contre-partie est que la méthode n'est stable qu'à condition de respecter la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (voir paragraphe 3.3.1 page 38) d'où une importante restriction sur le pas de temps.

Notre méthode est implicite, ce qui revient à exprimer toutes les inconnues au temps  $n + 1$  et à résoudre le système obtenu de manière itérative. Contrairement à la méthode précédente, celle-ci est inconditionnellement stable, ce qui permet par exemple d'atteindre rapidement des solutions stationnaires en jouant sur le pas de temps. On doit par contre résoudre, simplifier ou s'accommoder de plusieurs contraintes, et la plus importante pour ce type de méthode est le problème posé par la taille et le conditionnement du système linéaire. De plus, la convergence est beaucoup plus lente dans le cas d'un solveur itératif pour les grands pas de temps, et le conditionnement souffre des forts gradients de viscosité et de densité.

Enfin, le jeu d'équations est linéarisé de façon à pouvoir être discrétisé de manière implicite. Le terme instationnaire est donc approché par un schéma d'Euler (ordre 1) ou de Gear (ordre 2) (Cf. resp. (3.18) & (3.19)). Les termes non linéaires recensés sont les caractéristiques  $\mu|^{n+1}$  et  $\rho|^{n+1}$ , ainsi que le terme convectif  $u|^{n+1} \cdot \nabla u|^{n+1}$ . On les linéarise de la façon suivante :  $\mu|^{n}, \rho|^{n}, u|^{n} \cdot \nabla u|^{n+1}$ . En ce qui concerne la pression et la satisfaction de la contrainte d'incompressibilité, cela fait l'objet d'un traitement ultérieur décrit dans la section suivante (cf. 3.3.5).

---


$$\diamond \text{ Euler ordre 1} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+1} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \quad (3.18)$$

$$\diamond \text{ Gear ordre 2} \quad \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{n+1} = \frac{3/2 u^{n+1} - 2 u^n + 1/2 u^{n-1}}{\Delta t} \quad (3.19)$$


---

Schémas en temps.

---

Les équations de Navier-Stokes (3.16) sont donc discrétisées en temps dans l'équation (3.20). Par la suite le terme explicite de la discrétisation (sur la dérivée temporelle) ainsi que les termes linéarisés sont utilisés pour définir le second membre du système linéaire. Hormis les termes linéarisés, on voit que la méthode obtenue est totalement implicite.

$$\rho|^{n} \left( \frac{\mathbf{u}|^{n+1}}{\Delta t} + \mathbf{u}|^{n} \cdot \nabla \mathbf{u}|^{n+1} \right) + \mathbf{Bi}_U(\mathbf{u}|^{n+1} - \mathbf{U}_\infty) = \rho|^{n} \mathbf{g} - \nabla p|^{n+1} + \nabla \cdot (\mu|^{n} (\nabla \mathbf{u}|^{n+1} + \nabla^t \mathbf{u}|^{n+1})) + \rho|^{n} \left( \frac{\mathbf{u}|^{n}}{\Delta t} \right) \quad (3.20)$$

---

Méthode semi-implicite pour la discrétisation en temps.

---

### 3.3.5 Couplage vitesse/pression : Méthode du lagrangien augmenté

#### Formulation

Comme la pression et l'équation de conservation de la masse (3.12) ne sont pas explicitées dans les relations précédentes, et afin de garder une méthodologie fondamentalement implicite, on utilise l'algorithme d'optimisation du Lagrangien Augmenté introduit par Fortin et Glowinski (1982). L'exploitation de cette méthode revient à chercher un point-selle dans le champ des couples vitesse/pression, cette dernière jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange. Pour appréhender cela de façon plus tangible, on peut dire que cette opération minimise l'équation de conservation de la masse sous la contrainte d'un terme de pénalisation introduit dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. L'origine physique de ce terme est une digression à l'hypothèse d'incompressibilité (voir section 2.4 page 24) : pour récupérer une nouvelle relation entre la pression et la vitesse, on écrit que le fluide est très faiblement compressible en fonction de la pression (fluide barotrope). On récupère une nouvelle formulation de l'équation de continuité (3.21) où  $c^2 \gg 1$  est proportionnel à l'inverse du coefficient de compressibilité isotherme. La discrétisation implicite de cette équation s'écrit sous la forme (3.22). En appliquant l'opérateur gradient à cette dernière relation, on obtient la forme (3.23) permettant de remplacer le terme gênant  $\nabla p|^{n+1}$  par un terme en  $\nabla u|^{n+1}$  dans l'équation (3.20). On possède maintenant un système d'équations permettant de résoudre successivement la vitesse et la pression.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + c^2 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.21)$$

$$p|^{n+1} = p|^{n} - dp \nabla \mathbf{u}|^{n+1}, \quad (3.22)$$

$$\nabla p|^{n+1} = \nabla p|^{n} - dp \nabla \nabla \mathbf{u}|^{n+1}. \quad (3.23)$$

Le tableau (Fig 3.5 page 47) décrit l'algorithme complet où l'indice  $k$  indexant la vitesse et la pression est incrémenté de 0 à  $NLA$ .  $NLA$  représente le nombre d'itérations du lagrangien augmenté nécessaire à l'obtention d'une divergence moyenne du champ de vitesse suffisamment faible. Le calcul du couple vitesse/pression est effectué par l'algorithme itératif d'Uzawa (voir Fortin et Glowinski (1982)).

### Les paramètres du lagrangien augmenté

L'algorithme du Lagrangien Augmenté occupe une place essentielle dans le processus de résolution. Elle assure à la fois le couplage vitesse/pression, la contrainte d'incompressibilité et le couplage des différentes composantes de la vitesse par le biais du terme de pénalisation  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})^{k+1}$  introduit dans les équations de Navier–Stokes et pondéré par le facteur  $dr$  (voir l'étape du calcul de la vitesse dans l'algorithme schématisé sur la figure 3.5). Il faut donc porter une attention toute particulière au réglage des paramètres  $dp$  et  $dr$ , strictement positifs. D'une manière générale ces paramètres sont de l'ordre de l'unité lorsque l'on travaille en variables adimensionnées. En variables réelles, on sait que  $dr$  doit excéder le terme prépondérant des équations de conservation (ENS) de deux ou trois ordres de grandeur. Si on prend pour exemple un cas de sédimentation de particule à faible régime, le terme prépondérant est le terme lié aux contraintes visqueuses ; en conséquence comme  $dr$  est homogène à une viscosité, on posera  $dr = M \cdot \mu_f$  avec  $M \in [10^2, 10^3]$ . Dans un cas fortement inertiel, (ex : goutte d'eau dans l'air), le terme prépondérant est dû à la densité du fluide le plus pesant, et on sait qu'il faut affecter à  $dr$  l'ordre de grandeur de cette densité.

L'influence principale de ces paramètres est d'affecter le poids relatif des équations de conservation. Plus  $dr$  est grand, mieux on résout  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  au détriment du résidu de Navier-Stokes, tandis que dans le cas où  $dr \rightarrow 0$ , on retrouve une méthode de prédiction classique où toutes les composantes de l'équation sont découplées. Concernant le paramètre  $dp$ , on pondère de la même façon le calcul de la vitesse et le calcul de la pression dans l'algorithme en posant  $dp = dr$ . On estime de façon empirique que la résolution des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement sont mutuellement satisfaits lorsque les conditions  $\left( \text{résidu} \ll 1 \text{ et } \frac{\text{résidu}}{\text{divergence}} \in [10, 1000] \right)$  sont satisfaites.

En fait le mécanisme de détermination de la pression repose entièrement sur l'algorithme du Lagrangien augmenté : la pression est calculée par le cumul des apports du terme d'incompressibilité ( $dp \nabla \cdot \mathbf{u}^{k+1}$ ) à chaque itération du lagrangien.

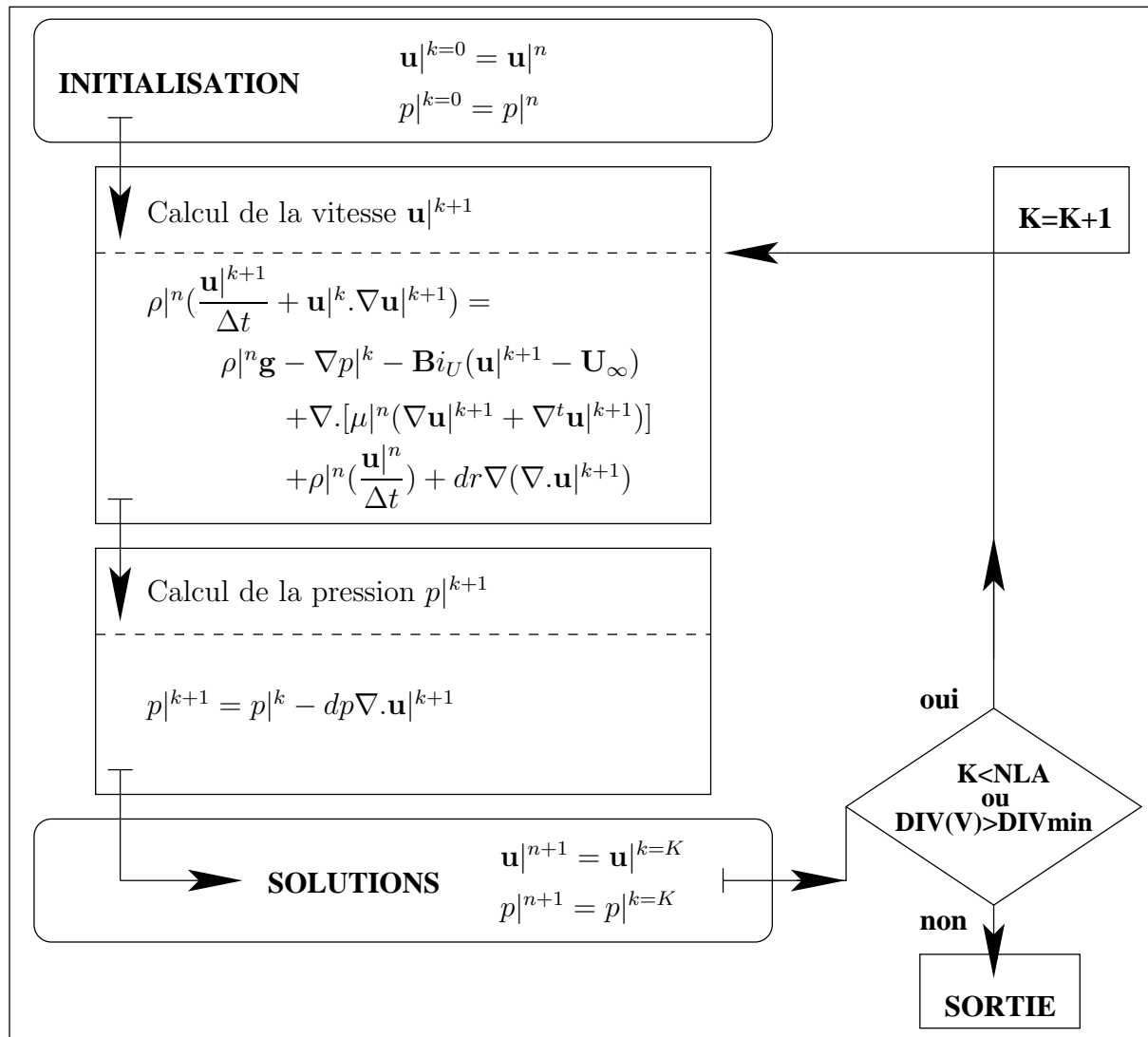


FIG. 3.5: Algorithme du lagrangien Augmenté.

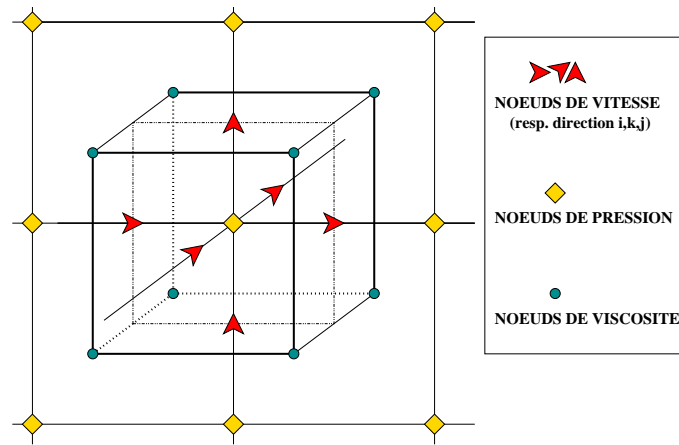


FIG. 3.6: Grille de calcul type MAC, décalée en vitesse, pression et viscosité.

Le problème vient du coût élevé de l'algorithme : conjuguer une bonne pression et une bonne divergence implique un grand nombre d'itérations, ce qui revient souvent très cher. Le fait d'augmenter  $dr$  pour mieux satisfaire l'incompressibilité accélère la convergence, mais se fait souvent au détriment de la physique. L'idéal serait donc d'avoir un petit  $dr$  ainsi qu'un grand nombre d'itérations du lagrangien. La notation  $dr$  et  $dp$  est utilisée ici car nous la retrouverons dans le détail des fichiers de données situés en annexe. Par la suite, on identifiera  $dr$  et  $dp$  au coefficient de viscosité de compression/dilatation  $\lambda$ , par souci de cohérence avec la notation adoptée dans la section 3.2.3 page 32. En effet lors de la pénalisation tensorielle, le terme ajouté au tenseur des contraintes correspond au terme ajouté pour le Lagrangien Augmenté, et leur coefficients sont une seule et même variable.

### 3.3.6 Discrétisation spatiale

Le système d'équations discrétisées en temps (voir figure 3.5) est à présent complet. L'étape suivante consiste à intégrer spatialement ces équations. Les grilles utilisées sont analogues à celles des méthodes de marqueurs de volume (grille MAC pour 'Marker And Cells'). On dispose donc de deux grilles décalées en vitesse et en pression, ainsi qu'une troisième grille décalée pour la viscosité calculée aux points matérialisés par les cercles vert sur la figure 3.6). Cette méthode adaptée au traitement de type volumes finis, permet d'éviter les oscillations de pression (Patankar (1980)). On doit ensuite intégrer les équations sur les volumes de contrôle délimités par les noeuds de vitesse. La discrétisation s'opère sur plusieurs niveaux en fonction de la nature du terme considéré :

◇ Tous les termes de l'équation de Navier-Stokes, le terme convectif excepté, sont approché par un schéma centré d'ordre 2. Ce dernier offre une bonne précision et sera utilisé pour tous les calculs à venir.

◇ L'approximation du terme non-linéaire convectif peut-être réalisée à l'aide de schémas de type centré, hybride, upwind, ou quick. Interchanger un schéma pour une situation donnée peut avoir un effet radical sur l'écoulement. Une étude paramétrique stricte doit donc être menée afin d'associer le type et la gamme d'écoulement à un schéma bien adapté, en tenant compte de sa précision et de sa tendance à osciller ou à diffuser. D'une manière générale les schémas classiques d'ordre élevé ont tendance à osciller tandis que ceux d'ordre plus faible manquent de précision du fait de leur caractère diffusif. L'intégration du terme convectif nécessite la connaissance de grandeurs scalaires sur la grille de vitesse. Cela justifie la phase d'interpolation des scalaires du problème (viscosité, densité, fraction volumique...) à partir des grilles de pression et de viscosité pour les exprimer au niveau de la grille des vitesses (voir §3.3.2 page 40).

◇ Le dernier terme à modéliser concerne l'équation d'advection (3.11). Dans notre cas la modélisation de particules solides requiert une précision optimale des schémas de transport d'interface. Aucun des schémas classiques n'étant satisfaisant, on utilise les méthodes VOF, TVD ou LAG décrites précédemment (voir la section 3.3.1 pages 38 à 39).

### 3.3.7 Résolution des systèmes linéaires

Le système algébrique, issu de la discrétisation des différentes équations par la méthodes des volumes finis, est inversé par un solveur itératif appelé bi-gradient conjugué stabilisé (BiCG-STAB2) (voir van der Vorst (1992)). Celui-ci se distingue des méthodes classiques (Gauss-Seidel, Jacobi, relaxation, *etc*) par un taux de convergence plus élevé, et moins sensible à la dégradation du conditionnement du système linéaire. Cette dégradation se manifeste par des matrices considérablement creuses et elle empire pour des tailles de domaines croissantes. Une bonne convergence nécessite donc un pré-conditionnement du système linéaire, ce dernier étant en général assuré par une méthode MILU (van der Vorst, 1982).

### 3.3.8 Apport des techniques de projection

On a vu que le choix du paramètre du lagrangien augmenté impose un compromis entre une bonne convergence et une bonne résolution. Si on fait le choix d'un petit  $\lambda$  afin de mieux respecter la physique de l'écoulement, la solution peut être améliorée *a posteriori* en terme de conservation de masse. Le champ en sortie du Lagrangien est alors qualifié de 'prédiction', l'étape de 'correction' consistant à projeter la solution sur un champ de vitesse à divergence nulle. A cet effet, deux méthodes de projection sont utilisées :



### Projection vectorielle

L'étape de projection vectorielle (voir Caltagirone et Breil (1999)) est intégrée à l'algorithme du lagrangien augmenté de la façon suivante : d'abord une étape de prédiction en sortie du Lagrangien calculée avec  $\lambda \rightarrow 0$  et conduisant à  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^K$ . Vient ensuite une étape de correction consistant à pénaliser l'incompressibilité du fluide en posant  $\lambda \rightarrow \infty$ . Tous les termes de l'équation de Navier-Stokes (3.20) deviennent donc négligeables devant  $\lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1})$  et on résout implicitement (3.24). Si l'on écrit la solution finale  $\mathbf{u}^{n+1}$  comme la somme de la prédiction  $\mathbf{u}^*$  et de la correction  $\mathbf{u}'$ , on résout (3.26) pour obtenir  $\mathbf{u}'$ .

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1}) = 0, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* + \mathbf{u}', \quad (3.25)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}^*) = -\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}'). \quad (3.26)$$

### Projection scalaire

On dispose également d'une technique de projection scalaire permettant essentiellement d'augmenter la précision sur le calcul de la pression. En partant de l'équation de Stokes instationnaire (3.27), une discrétisation en temps est effectuée à l'ordre voulu (par exemple (3.28) à l'ordre 1). On calcule alors la solution intermédiaire  $u^*$  qui vérifie l'équation de Stokes pour la pression antérieure  $p^n$  (3.29). La seconde phase consiste à projeter cette solution sur un champ à divergence nulle.

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u})), \quad (3.27)$$

$$\rho \frac{(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n)}{\Delta t} = \rho \mathbf{f}^{n+1} - \nabla p^{n+1} + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u}^{n+1} + \nabla^t \mathbf{u}^{n+1})), \quad (3.28)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n)}{\Delta t} = \rho \mathbf{f}^{n+1} - \nabla p^n + \nabla \cdot (\mu(\nabla \mathbf{u}^* + \nabla^t \mathbf{u}^*)) \\ \text{avec } \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{n+1} \text{ sur } \partial D. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

La soustraction des équations (3.29) et (3.28) donne, en négligeant la différence des termes de diffusion visqueuse, l'équation (3.30) avec  $p^* = p^{n+1} - p^n$ . Si on applique l'opérateur divergence sur l'équation (3.30) sachant que la solution finale  $u^{n+1}$  doit satisfaire la conservation de la masse, on peut alors obtenir la pression corrigée  $p^*$  en résolvant l'équation de Poisson (3.31) obtenue.

On calcule ensuite le couple vitesse-pression corrigé  $(u^{n+1}, p^{n+1})$  par la résolution successive de (3.30) et (3.32). Le terme additionnel dans (3.32) est une correction d'ordre supérieur pour la pression, et correspond à l'accumulation de la contrainte d'incompressibilité  $(-\mu \nabla \cdot u^*)$  provenant du champ intermédiaire  $u^*$  qui n'est pas à divergence nulle en général.

$$\rho \frac{(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^{n+1})}{\Delta t} = \nabla p^*, \quad (3.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^*}{\Delta t} = \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla p^* \right) \\ \text{avec } \frac{\partial p^*}{\partial \mathbf{n}} = 0 \text{ sur } \partial D, \end{array} \right. \quad (3.31)$$

$$p^{n+1} = p^n + p^* - \mu \nabla \cdot \left( \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p^* \right). \quad (3.32)$$

Les hypothèses nécessaires sont fortement contraignantes : on se limite aux écoulements de Stokes ; le conditionnement du système linéaire se dégrade avec l'augmentation du gradient de densité (en général on doit avoir  $\frac{\rho_s}{\rho_f} < 100$ ) ; nécessité de conditions aux limites de type Dirichlet et d'une condition de Neumann sur la pression ; approximation du terme de diffusion. Cela rend la méthode peu flexible par rapport à celle du Lagrangien augmenté. Elle présente néanmoins des avantages non négligeables dans son champ d'action et notamment un ordre de convergence en temps plus élevé ainsi qu'une précision bien meilleure sur la pression.

### 3.4 Conclusion

Après avoir posé le problème physique, nous avons détaillé pas-à-pas les méthodes mises en œuvre pour lever les difficultés mathématiques. Ces dernières sont dues essentiellement au couplage fluide-solide et à la satisfaction simultanée de nombreuses contraintes. Parmi les méthodes décrites, nous avons levé plusieurs choix stratégiques, et isolé un certain nombre de paramètres numériques dont l'impact est jugé déterminant sur la solution. La section suivante détaille donc la façon dont nous fixons nos choix, et avec quelles justifications, le but étant d'obtenir un enchaînement fiable et systématique de méthodes et de paramètres numériques bien adaptés à la simulation de la sédimentation.

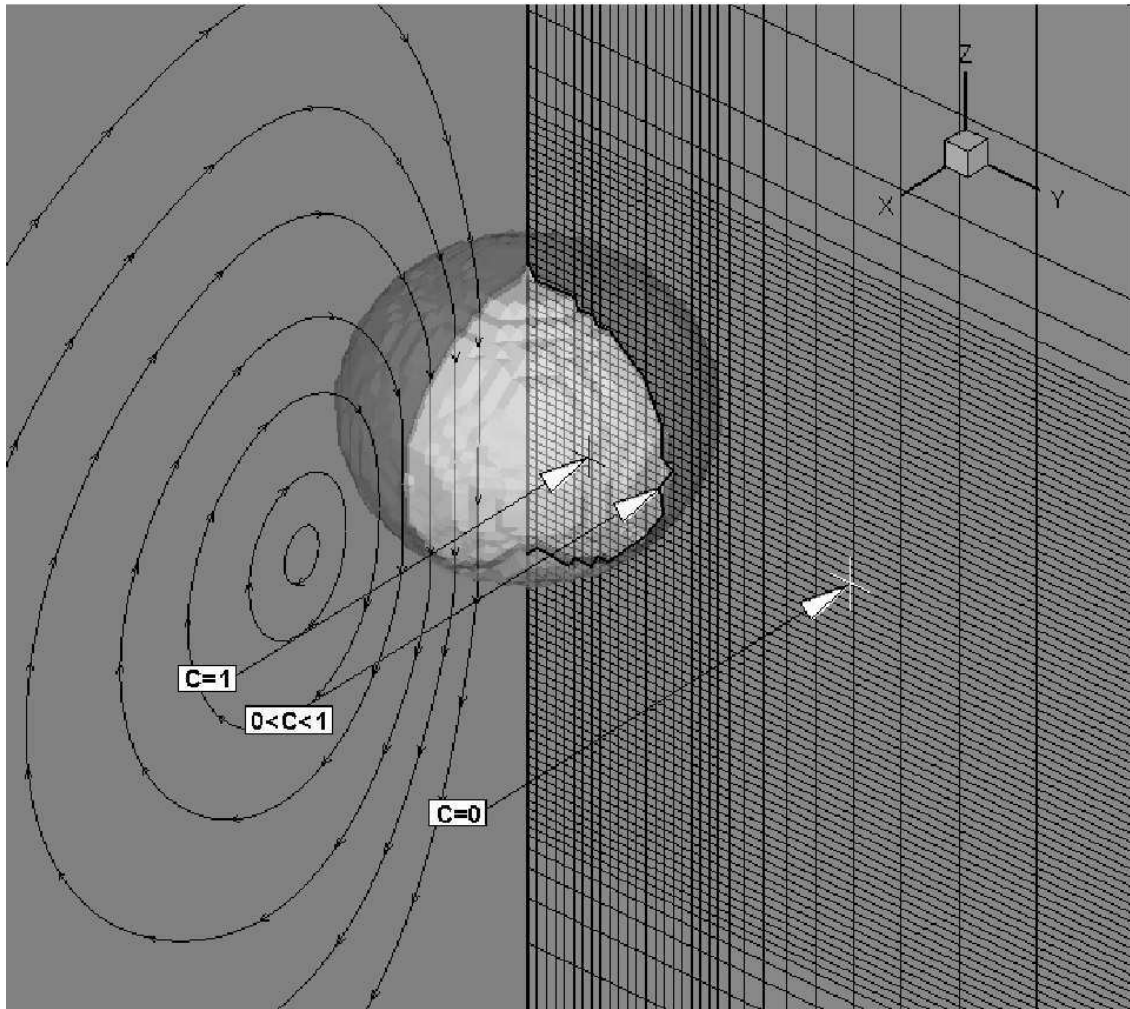


FIG. 3.7: Modélisation d'une sphère par la méthode 1-Fluide : répartition de la fonction de phase  $C$  dans un cas tridimensionnel.

# Chapitre 4

## PARAMÉTRISATION ET CONSISTANCE DE LA MÉTHODE

Rappelons qu’au chapitre 2, nous avons posé la problématique de base qui revient à paramétrer un modèle de couplage fluide–particule solide valable dans une gamme  $(Re_p, St)$  étendue. On peut scinder cette problématique en trois points :

- (i) validité des bilans de masse et de quantités de mouvement pour le fluide ;
- (ii) validité du couplage fluide–solide ;
- (iii) validité des interactions particule/conditions aux limites et particule/particule.

Dans ce même chapitre on montre qu’une analyse dimensionnelle du problème donne le comportement global de l’écoulement et les échelles caractéristiques associées aux particules. Cela permet de justifier les hypothèses géométriques admises par la suite.

Au chapitre 3, on décrit la stratégie numérique choisie pour aborder le problème. Cette stratégie repose sur une bibliothèque de méthodes variées : schémas de discrétisation spatiale et temporelle, schémas de transport, *etc.* Le but du présent chapitre consiste à mener de front la paramétrisation et la validation de la méthode. On se basera sur une série de cas-tests référencés et détaillés en Annexe A. Ce chapitre comporte trois sections liées aux trois problématiques évoquées ci-dessus. Une première partie concerne des écoulements monophasiques sans transport de particules. La seconde partie est dédiée à des cas simples du type sédimentation en régime pseudo-stationnaire. La dernière partie se base sur des cas plus proches d’écoulements réels. Pour chacune de ces parties, nous tacherons de justifier notre choix de schémas et de méthodes de transport, de tester la consistance numérique de la méthode en modulant la résolution spatiale et temporelle, et de détailler la calibration du couplage fluide–solide. La finalité de cet exercice revient à proposer une démarche systématique de paramétrisation pour un large éventail de configurations.

## 4.1 Inclusions fixes : cas 3D,

$$Re_p \ll 1$$

Dans un premier temps il est nécessaire de contrôler la validité de la méthode pour des écoulements monophasiques laminaires. Un des cas les plus simples, l'écoulement de Poiseuille, permet de valider notre méthode avec une erreur de l'ordre de la précision machine (Cf. Breil (2001)). Ici, nous allons configurer et tester la méthode dans le cas d'écoulements autour d'obstacles sphériques fixes. La définition du domaine et les valeurs de références prises pour ce cas sont décrites en Annexe A page 146 (cas(1)). La validation est basée sur la force de traînée d'un réseau cubique de sphères pour des régimes d'écoulement de type Stokes.

### 4.1.1 Configuration du cas-test

Directions	Dimensions du domaine	Conditions aux limites	Position de la particule
$\mathbf{x}$	0.01 [m]	périodique	0.005 [m]
$\mathbf{z}$	0.01 [m]	périodique	0.005 [m]
$\mathbf{y}$	0.01 [m]	périodique	0.005 [m]
Caractéristiques du fluide			$(Re_r, St)$
$\rho_f = 1000[kg/m^3]$	$\mu_f = 0.1[Pa.s]$	$\nabla P$ (paramètre)	$(5.e^{-6}, -)$
Caractéristiques de la particule			
$\rho_p = -$	$\mu_p = -$	$a$ (paramètre)	

TAB. 4.1: Cas-test : réseau de sphères fixes.

Les données de base sont résumées dans le tableau 4.1. L'écoulement de Stokes est induit par le biais d'une force volumique uniforme. Cette force est modélisée par un terme source homogène à un gradient de pression  $\nabla P$ . La gravité qui ici ne joue de rôle qu'au niveau de la pression statique n'est pas prise en compte. L'écoulement obtenu doit être stationnaire. Afin de travailler à  $Re_r$  constant, on corrige le gradient de pression de la façon suivante :  $\nabla P^{t+1} = \nabla P^t \alpha (1 - (Re_r^t - Re_r^C)/Re_r^C)$  où  $Re_r^C$  est la consigne et  $\alpha$  un facteur permettant de réguler la contre-réaction. Cette correction n'est activée que lorsque la variation relative  $|(Re_r^t - Re_r^{t-1})/Re_r^{t-1}|$  est inférieure à  $1.10^{-3}$ .

Concernant le paramétrage numérique, nous allons détailler les schémas et méthodes utilisées.

### Modélisation de l'obstacle

Deux solutions sont possibles à ce niveau : la plus simple est d'imposer la valeur du terme  $\mathbf{Bi}_U(\mathbf{u} - \mathbf{U}_\infty)$  dans l'équation (3.16), soit  $\mathbf{Bi}_U \rightarrow \infty$  et  $\mathbf{U}_\infty \rightarrow 0$  dans la sphère fixe ; la seconde méthode consiste à utiliser un schéma d'advection (VOF par exemple) sur une sphère mobile par la méthode de pénalisation, puis d'imposer un point de vitesse nulle dans la particule. Par effets visqueux cette condition va se propager de façon implicite dans la particule au cours des itérations du solveur Bi-CGstab. Nous n'utiliserons pour l'instant que la première méthode.

### Discrétisation spatiale et temporelle

Du fait du très faible régime d'écoulement, on adopte un schéma centré pour discrétiser le terme non-linéaire convectif. Il offre l'avantage d'une précision accrue mais peut se montrer instable pour des régimes plus élevés. Le maillage choisi est cartésien et le pas d'espace est constant selon les trois directions.

Ce cas-test est stationnaire, donc la phase instationnaire offre peu d'intérêt et le pas de temps est en général choisi pour minimiser le temps de convergence. Le schéma d'Euler d'ordre 1 est pris pour assurer la discrétisation en temps.

### Configuration du Lagrangien Augmenté

Le Lagrangien Augmenté est utilisé ici dans sa formulation classique. Avec cette méthode on pénalise la viscosité de compression pour vérifier la conservation de la masse. Pour le cas de régimes faibles et stationnaires on doit converger rapidement et on se limite donc à une seule itération du Lagrangien. Le paramètre de pénalisation  $M$  est fixé à  $1.10^2$

### Paramètres du solveur

Le système linéaire est pré-conditionné par la méthode ILU, et le nombre d'itérations du solveur Bi-CGStab est limité à 10.

### 4.1.2 Résultats

On réalise les simulations suivantes pour 4 maillages définis par  $N = N_x = N_z = N_y = 15, 30, 50, 80$  et pour 5 fractions volumiques  $c = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ .

Les calculs ne sont arrêtés que lorsque la consigne  $Re_r^C$  est approchée à  $1.10^{-4}$  près et que la précision machine est atteinte (résidu Navier–Stokes et divergence à  $1.10^{-15}$ ). Le gradient de pression induit un écoulement dans la direction des  $x$  croissant. La figure 4.1 représente trois écoulements pour des fractions volumiques différentes. L’axisymétrie propre aux écoulements de Stokes est brisée par la géométrie du réseau, mais la symétrie amont/aval est parfaitement conservée.

Une comparaison globale des simulations et des résultats analytiques sont représentés sur la figure 4.2. La traînée augmente de façon logique avec la fraction volumique. Les simulations convergent de façon nette vers le profil analytique. La convergence en espace est mise en valeur dans la figure 4.3 où l’ordre global de convergence est de 1 quelque soit le cas mais le niveau d’erreur au départ augmente avec la fraction volumique. On observe donc une transition entre le cas où l’écart  $\epsilon$  dépend du nombre de noeuds qui définit la particule et le cas où  $\epsilon$  dépend du nombre de noeuds présents dans la phase continue. On peut noter en consultant le tableau de la figure 4.1 et la figure 4.2 que des résultats consistants physiquement sont obtenus avec moins de 10 points pour définir le diamètre. Par comparaison aux résultats de la littérature, on a pu caractériser l’évolution de la solution en fonction de la résolution spatiale. La convergence est effective mais l’ordre de convergence est moyen alors que l’on sait pouvoir atteindre de meilleurs ordres. Il s’agit là d’un problème associé à l’imposition de l’obstacle. La méthode implicite est sensible aux impositions directes sur une variable résolue, ce qui induit une dégradation de l’ordre en espace. Il nous serait donc plus profitable d’utiliser la méthode indirecte citée plus haut pour améliorer les résultats.

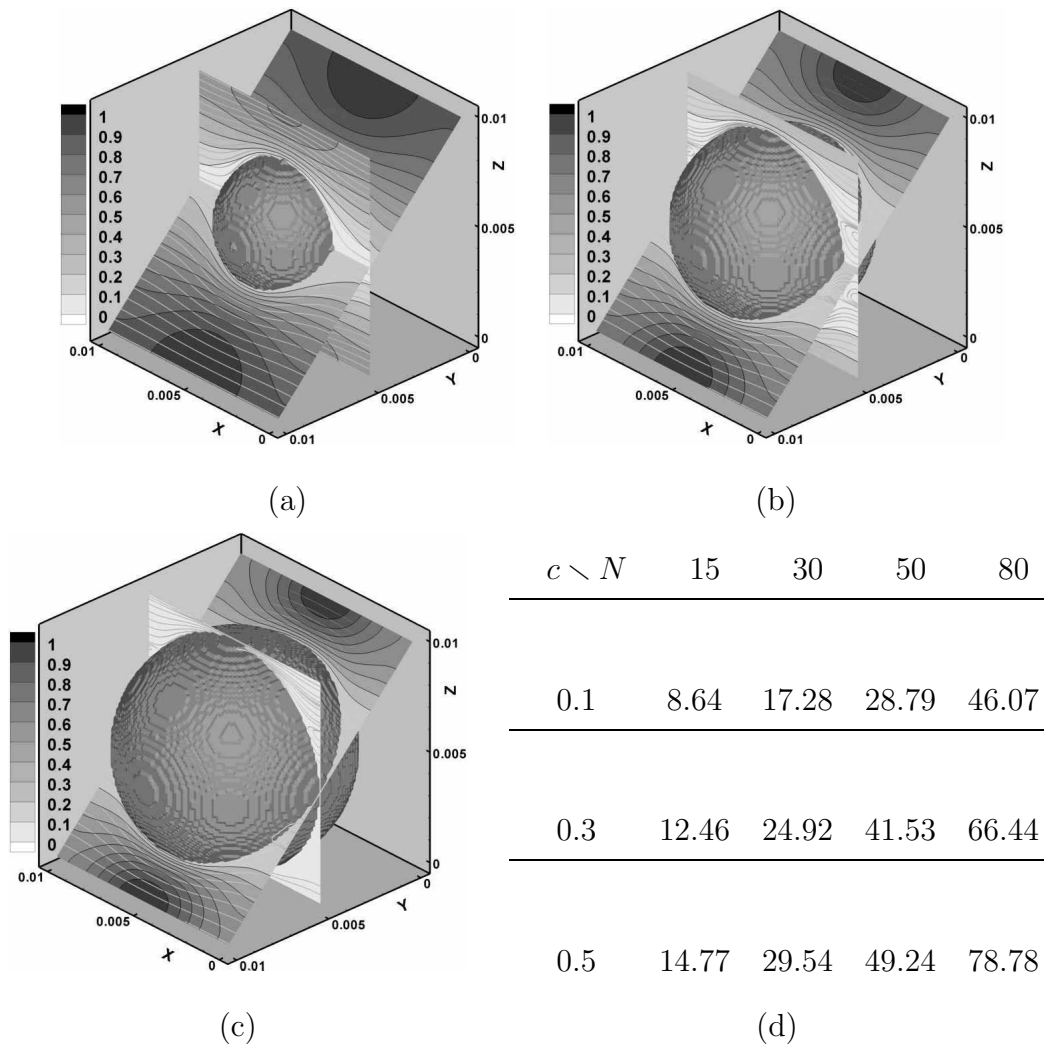


FIG. 4.1: Contours de l'amplitude relative de la vitesse  $|\mathbf{u}|/\max(|\mathbf{u}|)$  d'un écoulement de Stokes dans un réseau cubique simple de sphères. La résolution de la grille est  $80^3$ . Les fractions volumiques sont respectivement  $c=0.1$  (a),  $c=0.3$ (b),  $c=0.5$  (c). Le tableau (d) donne le nombre de points utilisés pour définir le diamètre de la sphère pour différentes valeurs de  $(c,N)$ .



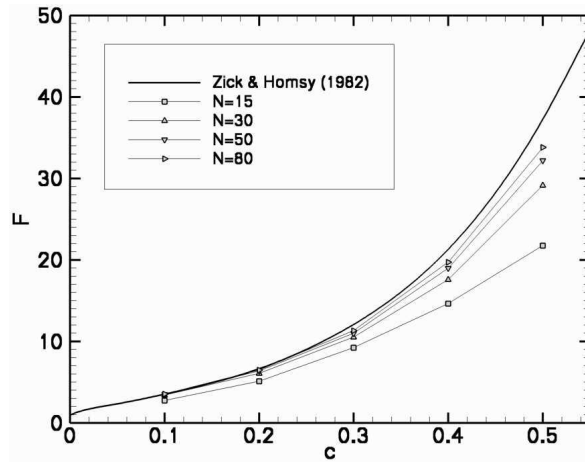


FIG. 4.2: Force de traînée adim.  $F$  en fonction de la fraction volumique  $c$  et de la résolution spatiale  $N$ . Solution de Zick & Homsy, simulations.

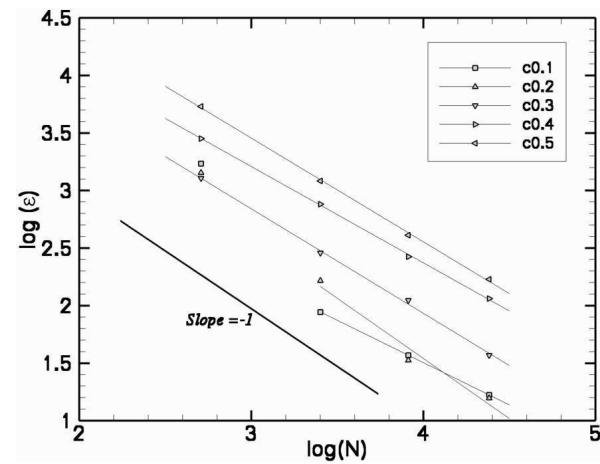


FIG. 4.3: Courbes de convergence de la méthode (écart  $\log(\epsilon)$  en fonction de la résolution spatiale  $\log(N)$ ) en fonction de la fraction volumique  $c$ .

## 4.2 Inclusions mobiles : cas 2D,

$Re_p < 1$

Il convient à présent de trouver des configurations simples qui puissent être directement comparables à la littérature théorique ou analytique. L'idéal serait de disposer d'un cas bidimensionnel totalement confiné caractérisé de façon exacte. À notre connaissance, il n'y a pas de telle référence dans la littérature. Or ne serait-ce que pour valider un code en cours d'implémentation (avant le passage au 3D par exemple) il serait intéressant de disposer d'une relation fiable. Nous utiliserons ici l'approche de Faxën, décrite en Annexe A page 150, qui donne la vitesse limite de chute d'un cylindre dans un milieu semi-infini. Nous nous proposons ici de paramétrer et valider le code sur la base du modèle de Faxën puis de tenter de fournir un modèle valable en domaine totalement confiné.

### 4.2.1 Approche du modèle de Faxën

Afin de vérifier l'approche analytique de Faxën nous distinguerons trois type de tests :

- ◇ confinement  $k = a/l$  constant avec  $a$  constant et  $l$  constant ;
- ◇ confinement  $k = a/l$  constant avec  $a$  variable et  $l$  constant ;
- ◇ confinement  $k = a/l$  variable avec  $a$  constant et  $l$  variable.

Les propriétés physiques du fluide et des particules seront choisies afin d'englober les gammes d'écoulement pour lesquelles les lois analytiques sont valides. Nous utiliserons des conditions aux limites de type adhérence pour les parois et de type flux nul (Neumann) pour simuler des milieux infinis.

## Configuration préliminaire

La résolution spatiale est assez délicate à définir car il faut tenir compte de deux paramètres : le nombre de cellules dans la particule et le confinement  $k$ . Pour un confinement  $k$  proche de 1, le gap paroi/particule est très restreint et le nombre de cellules par unités de volume fluide  $N_f$  sera déterminant pour la convergence en espace. Dans le cas inverse où  $k \rightarrow 0$ , c'est le nombre de cellules par unités de volume solide  $N_p$  qui déterminera la précision du résultat. D'une manière générale en dehors des études de convergence spatiale, nous travaillerons à  $N_p = \pi N^2/4$  constant où  $N$  représente le nombre de mailles sur le diamètre de la particule. La discrétisation en temps reste ici secondaire car ne disposant pas d'informations sur la phase instationnaire, on se contente d'arrêter le calcul lorsque l'on atteint la vitesse limite de chute c'est à dire en régime pseudo-stationnaire.

Nous définissons ici la configuration qui nous permettra de tester les différents modèles. On pose un domaine 2D de dimensions ( $L_x = 2l = 0.1046$ ,  ${}^1L_z = 1.046$ ). Sur l'axe de symétrie vertical du domaine, on initialise un disque mobile de rayon  $a = 0.0132$  placé à mi-hauteur. Les propriétés physiques des fluides sont  $\rho_f = 900 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_p = 3847 \text{ kg/m}^3$ ,  $\mu_f = 22.1 \text{ Pa.s}$  et  $\mu_p = 22.1 \cdot 10^4 \text{ Pa.s}$ . On obtient un rapport d'aspect horizontal  $k_x (= k) \simeq 0.25$ . On a choisi un faible rapport d'aspect vertical  $k_z = 2a/L_z \simeq 0.025$  pour limiter les effets des frontières inférieures et supérieures et se rapprocher au mieux des conditions analytiques. On remarque que par souci d'économie on ne simule qu'une moitié du domaine, grâce à l'axe vertical de symétrie présent dans l'écoulement. Après calculs, la solution analytique prédit que l'état d'équilibre est atteint pour une vitesse limite de chute  $U_\infty = 0.0321[m/s]$  soit un Reynolds particulaire  $Re_p = 0.0345$ .

On utilise ici un schéma de transport de type TVD pour l'advection. Le pas de temps est choisi à  $\Delta t = 2.10^{-5} [s]$ , soit environ 400 fois plus petit que le temps de relaxation de la particule  $T_a$ . Pour la pénalisation de l'incompressibilité le Lagrangien Augmenté est utilisé dans sa forme originale ce qui nécessite un seul paramètre de pénalisation. Ce dernier est calculé pour excéder le plus grand terme des équations de conservation de deux à trois ordres de grandeurs. Dans ce cas à faible Reynolds où la dissipation visqueuse prédomine on utilise la viscosité  $\mu_f$ . On obtient  $dr = N \times \mu_f = 1.10^3 \times 22.1$ .

## Résultats préliminaires

Des résultats préliminaires, on tire une vitesse limite de chute proche du modèle analytique pour le jeu de paramètres et de méthodes décrites en Annexe C page 168. En étudiant  $U_p(t)/U_\infty$  sur la figure 4.4 on observe une accélération préliminaire de la particule, et à long terme une stabilisation de la vitesse à une valeur proche de la référence.

---

<sup>1</sup>Par la suite, pour un domaine bidimensionnel, la direction  $\hat{z}$  désignera la direction verticale.

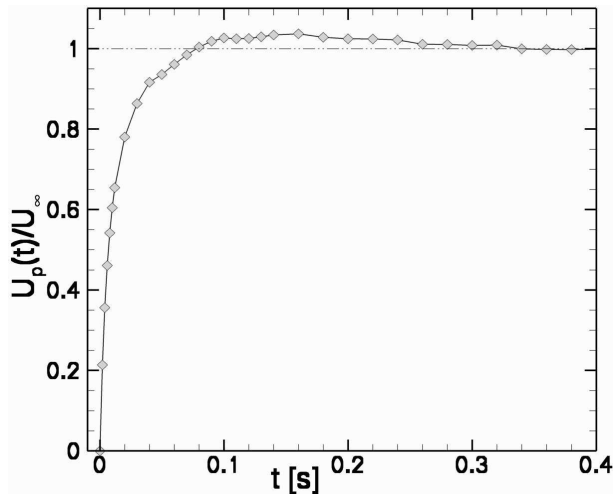


FIG. 4.4: Sédimentation d'un cylindre, Cas (o) : vitesse verticale de la particule  $U_p(t)$  rapportée à la vitesse limite de chute  $U_\infty$  déduite du modèle de Faxën.

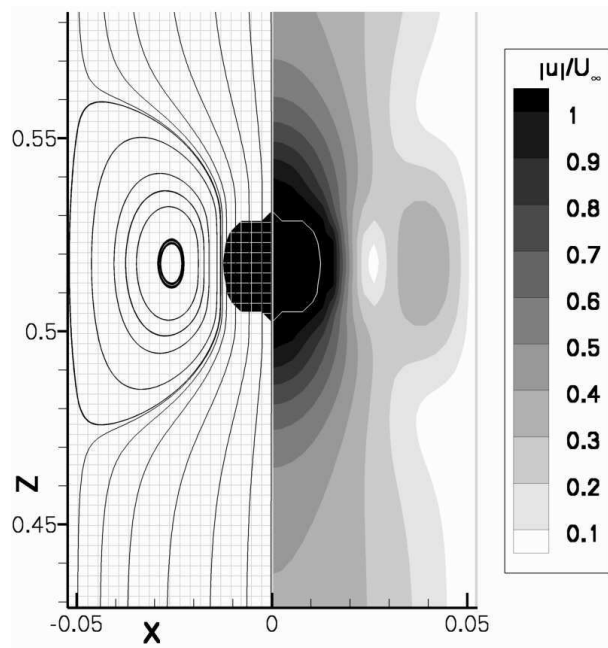


FIG. 4.5: Sédimentation d'un cylindre, Cas (o) : lignes de courant, isovaleur 0.5 de la fonction de phase  $C$  (à gauche) ; magnitude du champ de vitesse  $|\mathbf{u}|/U_\infty$  (à droite).

On peut noter la présence d'un dépassement local qui, s'il peut être observable dans le cas de fluides visco-élastiques, n'est pas d'origine physique ici. Pour calculer  $U_p(t)$ , on interpole la fonction de phase  $C$  sur la grille de vitesse et on fait la moyenne des composantes de vitesse  $(u_p, w_p)$  pour lesquelles  $C \geq 0.5$ . Dans ce cas, la particule reste sur l'axe, donc on obtient  $u_p(t) \simeq 0$  et  $U_p(t) \simeq w_p(t)$ .

La magnitude de la vitesse dans le fluide et les lignes de courant sont représentées sur la figure 4.5. Ces dernières sont bien rectilignes dans la particule, ce qui conforte le traitement implicite de la continuité du champ de vitesse à la traversée de l'interface. L'extension verticale de la recirculation située entre la particule et la paroi est vite limitée par une forte composante verticale de la vitesse en amont et en aval de la particule. Sur la partie droite de la figure on voit que les isovaleurs sont étirées dans ces zones. Il s'agit de l'influence des conditions de Neumann en entrée et en sortie qui faussent les résultats car le champ lointain devrait avoir une vitesse tendant vers zéro.

On note ici un maximum pour la vitesse de sédimentation qui ne correspond pas à l'équilibre des forces de traînée et de flottabilité. L'équilibre attendu est atteint après cet 'overshoot' lors d'une étape de relaxation très longue devant le temps de relaxation physique associé à la particule.

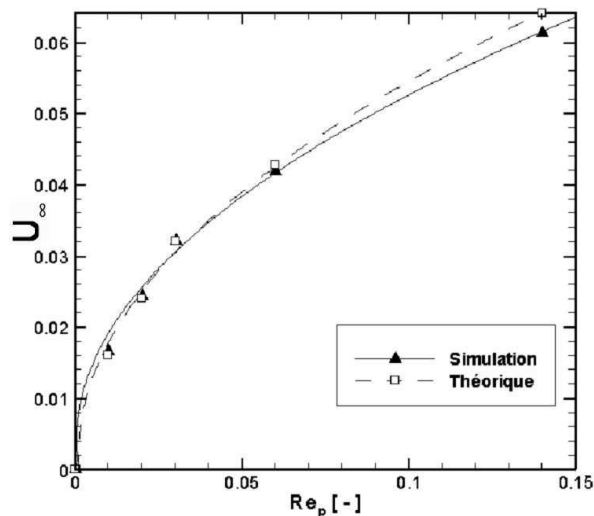


FIG. 4.6: Vitesse d'un cylindre en sédimentation entre deux parois. Vitesse terminale  $U_p$  pour différents régimes  $Re_p$ . Solutions stationnaires analytiques de Faxën.

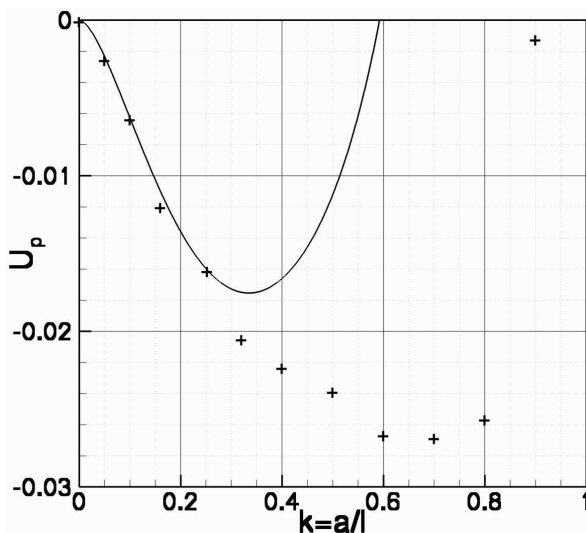


FIG. 4.7: Vitesse limite de chute d'un cylindre de rayon  $a$  en sédimentation entre deux parois distantes de  $2l$ . Simulations (+), solutions stationnaires analytiques de Faxën (-).

**Consistance de la solution à  $Re_p$  variable.** Il s'agit maintenant de moduler le régime d'écoulement et le confinement afin de voir si cette solution suit la loi analytique, et si les résultats sont valables au-delà des limites du modèle. Nous allons pour cela modifier le nombre de Reynolds via la viscosité du fluide, tout les autres paramètres étant inchangés. La figure 4.6 montre l'évolution de la vitesse limite de chute en fonction de  $Re_p$ . On note déjà que le comportement de type parabolique satisfait bien l'évolution de la force de traînée dans le cadre de la théorie de Stokes :  $Re \propto V^2$ . On observe une très bonne concordance à faible  $Re_p$  puis un écart progressif à la loi de Faxën. On peut dégager deux raisons : soit la loi de Faxën sort de son domaine de validité à cause de l'apparition d'effets inertiels, soit lors de l'apparition de ces mêmes effets inertiels, la simulation devient plus sensible au confinement vertical par rapport au confinement horizontal et les effets négatifs des conditions de Neumann nous éloignent de la solution analytique.

**Consistance de la solution à confinement  $k$  variable.** On se base sur la configuration initiale (Cas (o) avec schéma TVD), et plusieurs simulations sont effectuées en faisant varier le rayon  $a$  de la particule. Les résultats de la figure 4.7 confirment le comportement asymptotique de la relation de Faxën pour  $a \rightarrow 0$ .

On observe une bonne concordance jusqu'à  $k \simeq 0.3$  puis une divergence des prédictions. De fait, les travaux de Liu (1998) et Verhelst (2001) confirment que Faxën sur-estime la force de traînée à partir de  $k \simeq 0.4$  ce qui conforte nos résultats. Pour les confinements croissants, on prédit un minimum pour la traînée autour de  $k = 0.6$  puis une augmentation violente jusqu'au blocage de la particule à  $k = 1$ . Le minimum à  $k = 0.6$  correspond au moment où l'accélération due au gain de masse et la décélération due au confinement s'annulent mutuellement. Néanmoins ces résultats mériteraient de plus amples investigations car le fluide est de moins en moins bien résolu entre la particule et la paroi lorsque  $k$  augmente, ce qui nécessite une étude coûteuse de convergence spatiale.

Cette dernière étude montre que les résultats ne sont pas dénués de sens physique, et l'on sait disposer ici d'une bonne base de départ pour paramétrer et calibrer le code.

#### 4.2.2 Optimisation du couplage fluide–solide

Comme nous avons observé une bonne cohérence entre la relation de Faxën et nos calculs préliminaires, nous allons tenter d'optimiser le couplage entre phases sur cette même base analytique. On dispose de plusieurs outils : les schémas d'advection VOF et TVD, les méthodes d'interpolation de la densité et de la viscosité, et bien sûr le choix de la viscosité de pénalisation  $\mu_p$ . De plus les effets des techniques de variation et d'interpolation sont assurément couplés ce qui nous oblige à discriminer les combinaisons valables de méthodes. Pour cette étude, le cas(o) de l'Annexe C page 168 est repris avec la même condition de symétrie mais en remplaçant les conditions de Neumann par des conditions d'adhérence. On garde le maillage grossier pour mettre en évidence l'influence du maillage sur la précision.

#### Choix des méthodes d'interpolation et de variation de la viscosité.

La première étude paramétrique concerne les différentes méthodes d'évaluation de la viscosité. On rappelle que la variation (continue ou discontinue) est définie avant les équations de Naviers-Stokes et permet de choisir soit  $\mu_f$ , soit  $\mu_p$  dans le cas discontinu, soit une valeur de la gamme  $[\mu_f, \mu_p]$  dans le cas continu. Les autres méthodes d'évaluation nécessitent une interpolation (linéaire ou géométrique) de la viscosité d'une grille à l'autre. Ces mêmes méthodes sont utilisées pour la densité, mais comme nous n'atteindrons pas de forts contrastes de masse, l'impact des différentes techniques sera beaucoup moins perceptible que dans le cas de la viscosité.

On observe effectivement des résultats très contrastés sur la figure 4.8 :

◇ On voit tout d'abord que la survitesse mise en évidence au paragraphe §4.2.1 page 59 n'est due qu'à l'utilisation de la variation continue de la viscosité. Cette même méthode conduit à une sous-estimation de 15 à 30% de la vitesse limite de chute. La variation discontinue donne par-contre la croissance régulière que l'on doit observer physiquement.

◇ Ce test est également déterminant pour le choix de la méthode d'interpolation. L'utilisation d'une interpolation linéaire conduit à la sous-estimation de la vitesse de chute allant de 10 à 30% en fonction des méthodes associées. La combinaison optimale consiste donc à coupler la variation discontinue à l'interpolation géométrique.

◇ La combinaison suivante (discontinue/linéaire) est écartée car on note une sensibilité exagérée à la résolution spatiale. Cette sensibilité est due à la raideur de la méthode de variation discontinue lorsque l'interface passe d'une maille à l'autre. Pour la combinaison optimale (discontinue/géométrique), cette sensibilité est présente à un moindre niveau. L'écart de la simulation à la référence est de 1% avec une erreur de  $\pm 1\%$  indépendamment de la méthode de transport.

### Choix de la méthode de transport d'interface

La dernière analyse montre que chacune des méthodes VOF et TVD sont utilisables. On peut néanmoins tenter d'expliquer les petites différences sur ce cas pour appuyer un choix plus qu'un autre. Tout d'abord, sur chacun des cas précédents, la méthode VOF est plus sensible que la méthode TVD à la résolution spatiale. Toutefois, pour des maillages moins grossiers la sensibilité doit être équivalente. Cela est dû à la nature géométrique et donc à la précision de la méthode VOF. On peut montrer que le schéma TVD diffuse l'interface sur plus d'une maille et donc que le passage d'une maille à l'autre est forcément 'lissé'.

Si l'on revient aux combinaisons (continue/géométrique) et (continue/linéaire), les différences entre VOF et TVD sont amplifiées : après la survitesse (ou 'overshoot') due à la variation continue, VOF conduit à une stabilisation rapide tandis que TVD n'atteint l'état stationnaire que très lentement. Cet effet est tout juste observable sur la figure 4.8 pour la configuration optimale. Ce symptôme est certainement dû à la diffusion importante de l'interface par le schéma TVD (trois mailles typiquement).

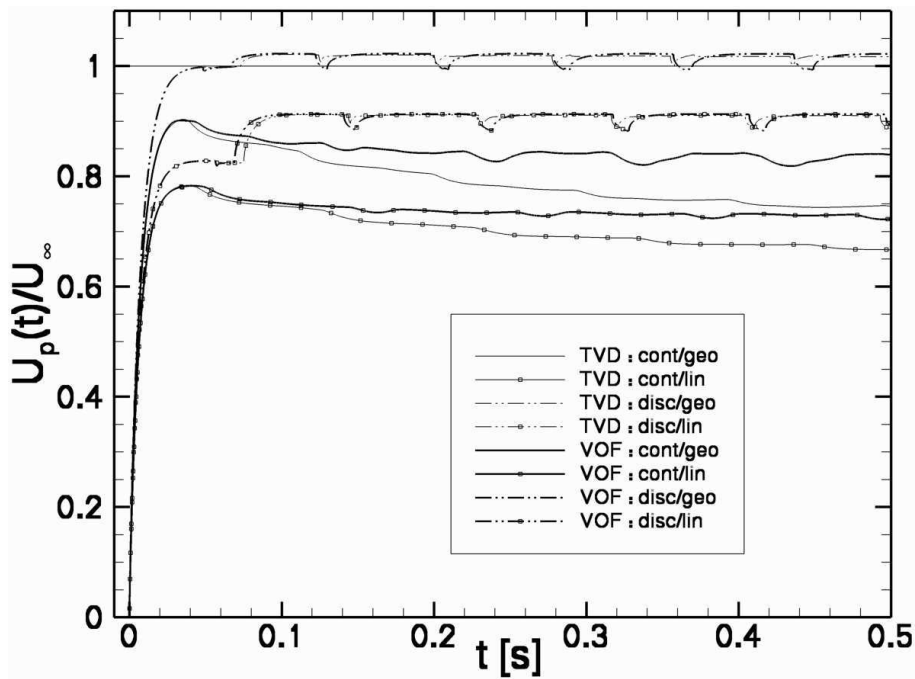


FIG. 4.8: Calibration du couplage fluide–solide. Impact de la variation (continue ou discontinue) et de l’interpolation (linéaire ou géométrique) de la viscosité sur la vitesse limite de chute d’un cylindre  $U_\infty$  (relation analytique de Faxën). Comparaison des résultats pour les schémas de transport VOF et TVD.

Cette diffusion, qui s’établit quasi instantanément pour des régimes beaucoup plus élevés, doit s’établir ici sur un temps plus long que le temps de relaxation de la particule. Cela expliquerait le retard de l’équilibre entre force de flottabilité et traînée visqueuse, et le profil de la vitesse de la particule. Par-contre il est certain, en regardant la figure 4.8, que c’est la survitesse qui permet d’amplifier la réponse des schémas. Ce comportement n’est pas physique, mais il nous permet d’étudier la réponse indicielle et de conclure que le schéma VOF offre l’avantage d’un temps de relaxation beaucoup plus court que le schéma TVD. On pourra déterminer par la suite dans quelle mesure ce temps est physiquement représentatif, mais il nous faudra des références plus détaillées sur l’instationnarité.

À la lumière de cette étude, la méthode VOF, associée à la combinaison des méthodes de variation discontinue et d’interpolation géométrique de la viscosité, représente un choix robuste et judicieux pour la suite de notre travail. Les figures 4.9 et 4.10 schématisent les résultats de ce nouveau cas-test ( cas(i) ) dont les données figurent en Annexe C page 169. Sur la figure de gauche sont superposés les résultats pour la simulation d’un domaine total et celle d’un demi-domaine (avec condition de symétrie). L’écart maximal entre les deux configurations n’excède pas 0.026%, ce qui justifie l’économie de la moitié du nombre de degrés de liberté.

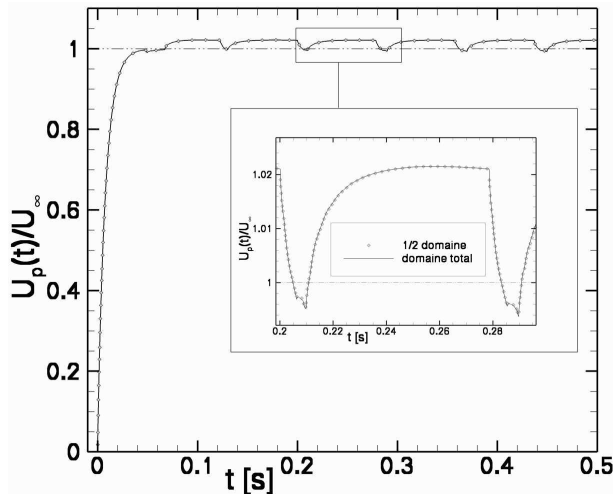


FIG. 4.9: Sédimentation d'un cylindre, cas(i) : vitesse verticale de la particule  $U_p(t)$  rapportée à la vitesse limite de chute  $U_\infty$  déduite du modèle de Faxën; comparaison domaine total/demi-domaine.

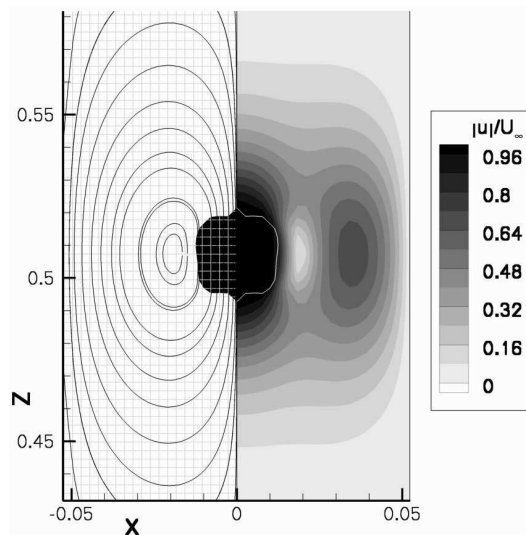


FIG. 4.10: Sédimentation d'un cylindre, cas(i) : lignes de courant, isovaleur 0.5 de la fonction de phase  $C$  (à gauche); magnitude du champ de vitesse  $|\mathbf{u}|/U_\infty$  (à droite).

Sur la figure de droite, la magnitude du champ de vitesse est analogue à celui de la figure 4.5 autour de la particule mais diffère très vite en amont et en aval. Avec des conditions aux limites du type paroi, le champ fluide tend bien vers une vitesse nulle et les lignes de courant sont à notre avis bien plus représentatives du comportement physique attendu.

### Choix de la viscosité de pénalisation $\mu_p$

Théoriquement on doit vérifier  $\mu_p \rightarrow \infty$  pour que le tenseur des taux de déformations soit strictement nul dans la particule. Techniquement cette pratique met en échec les algorithmes de transport d'interfaces ainsi que les méthodes d'interpolation. En ce qui concerne le transport, plus le rapport des viscosités  $\mu_p/\mu_f$  est grand, plus la résolution du problème est difficile. Quant à l'interpolation, on montre (voir section 3.3.2 page 40) qu'un trop fort gradient de viscosité donne une moyenne inadéquate. Il s'agit à présent de paramétrer  $\mu_p$  sur la base du dernier cas-test (cas(i) validé pour  $\frac{\mu_p}{\mu_f} = 1.10^3$ ), afin d'établir un critère systématique pour le choix de la viscosité de pénalisation.

Sur la figure 4.11, on représente l'évolution de la vitesse limite de chute du cylindre rapportée à la valeur analytique de référence  $U_p/U_\infty$  en fonction du rapport des viscosités  $\mu_p/\mu_f$  lors de la chute d'un cylindre solide dans un fluide.



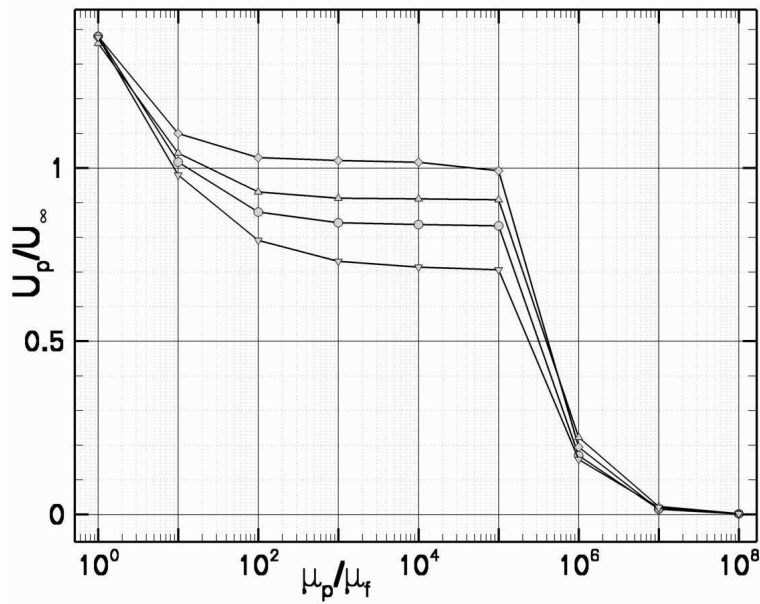


FIG. 4.11: Convergence de la vitesse limite de chute  $U_p$  rapportée à la valeur analytique  $U_\infty$  pour cylindre en milieu confiné, en fonction de la viscosité de pénalisation  $\mu_p$ . Cas(i) avec : variation discontinue et interpolation géométrique ( $-\diamond-$ ); variation discontinue et interpolation linéaire ( $-\triangle-$ ); variation continue et interpolation géométrique ( $-\circ-$ ); variation continue et interpolation linéaire ( $-\nabla-$ ).

On compare les résultats pour toutes les combinaisons de méthodes de variation et d'interpolation de la viscosité. Il ressort clairement que pour les valeurs extrêmes du rapport des viscosités, ces méthodes n'ont quasiment aucun impact sur le résultat. À faible  $\mu_p$ , la particule peut se déformer facilement, les frottements visqueux et le champ de vorticit   à l'interface ne sont pas représentatifs d'un comportement fluide–solide, et cela aboutit à la sur–estimation de la vitesse de la particule. À très fort  $\mu_p$ , on sur–estime la tra  n  e visqueuse et le sch  ma de transport g  re difficilement de tels gradients de viscosit  . On voit qu'un trop fort gradient entra  ne le blocage de la particule. Ce qui nous int  resse ici, ce sont les valeurs interm  diaires. On voit qu'entre  $10^2$  et  $10^5$ , le rapport  $\mu_p/\mu_f$  n'a quasiment plus d'influence sur le r  sultat.    ce niveau, seules les m  thodes d'interpolation ont un effet sensible et on peut confirmer ici l'efficacit   de la combinaison des m  thodes de variation discontinue et d'interpolation g  om  trique de la viscosit  .

L'existence de ce plateau nous permet de d  finir une zone de validit   du couplage :  $\mu_p/\mu_f \in [1.10^3, 1.10^5]$ .   videmment cette zone risque d'  tre diff  rente pour des r  gimes plus forts. En effet si les effets inertiels deviennent pr  dominants, une m  sestimation de la dissipation visqueuse aura peut-  tre moins d'impact sur le r  sultat.

En tout cas un choix optimal consiste à calculer  $\mu_p$  de façon à ce que le rapport soit le plus bas possible dans la zone de validité, soit :

$$\mu_p/\mu_f = 1.10^3 \quad (4.1)$$

De cette façon on satisfait la condition de validité tout en facilitant au maximum la résolution de l'équation d'advection de l'interface.

### 4.2.3 Paramètres du Lagrangien Augmenté et du solveur Navier–Stokes

On rappelle que l'algorithme d'optimisation du Lagrangien Augmenté nécessite un paramètre de pénalisation  $r$  devant excéder de  $M$  ordres de grandeur le plus grand terme de l'équation de conservation,  $M$  étant généralement pris entre  $10^2$  et  $10^3$ . Toutefois, le Lagrangien augmenté écrit dans sa forme originale est mal adapté au cas diphasique. Il peut y avoir des termes prédominants différents entre les phases au même instant, comme il peut y avoir des transitions brutales entre différents processus au cours du temps. Toutefois dans le cas de régimes d'écoulement faibles, le terme visqueux reste prédominant, et il est possible d'obtenir de bon résultats avec un paramètre de pénalisation  $M$  unique dans tout le domaine. La valeur  $M = 10^3$  choisie ici permet d'obtenir un équilibre stable entre la valeur du résidu de Navier–Stokes et la valeur de la divergence (*resp.* de l'ordre de  $\mathcal{O}(10^{-9})$  et  $\mathcal{O}(10^{-6})$ ). Pour le cas(i) on passe de une à deux itérations du Lagrangien Augmenté et de 20 à 50 itérations du solveur. Les paramètres de convergence montrent une amélioration du résidu et une divergence stable (*resp.* de l'ordre de  $\mathcal{O}(10^{-13})$  et  $\mathcal{O}(10^{-6})$ ). La comparaison des champ de vitesse ne montre aucune différence significative dans le voisinage de la particule. Ces différences n'apparaissent qu'à plusieurs diamètres de distance et trouvent leur origine dans la modification du champ de pression, directement affecté par le nombre d'itérations LA. Une comparaison des vitesses de chute montre des différences infimes. Il faut néanmoins noter que lors de phases instationnaires, la simulation la mieux résolue semble offrir un temps de réponse plus court que dans le cas de la simulation la moins résolue.

Tout cela montre bien la nécessité d'un dimensionnement correct du nombre d'itérations LA et Bi–CGStab par rapport à la physique du système étudié, pour éviter de sur-estimer la résolution, sachant que le Lagrangien Augmenté et le solveur Navier–Stokes sont naturellement les étapes les plus chères en temps de calcul. D'un autre côté, un manque de dynamique de la simulation ne signifie pas forcément que le pas de temps est trop important, mais peut-être que la résolution est sous-estimée.

#### 4.2.4 Convergence en espace et en temps

La convergence en espace est contrôlée pour le cas(i). L'écart  $\varepsilon$  à la référence analytique de Faxën est comparé au nombre de degrés de libertés  $N$  que l'on fait varier en doublant le nombre de points dans chaque direction. Il faut tout d'abord noter que pour la plus basse résolution (5 points dans le diamètre), le résultat est très proche de la référence analytique et souligne la fiabilité de la méthode. On utilise la figure 4.12 pour montrer l'évolution de la précision du résultat. Cette précision notée  $\xi$  est basée sur l'écart de  $U_p(t > \tau_{95})$  par rapport à sa valeur moyenne à l'état stationnaire. L'oscillation due au passage de l'interface à travers les mailles est réduite lorsque  $N$  augmente. On trouve que  $\xi$  décroît en  $\mathcal{O}(1/N^{\frac{5}{4}})$ .

La figure 4.13 montre la convergence en espace de la solution. La convergence est effective, mais on se heurte à un problème d'homogénéité : à faible résolution, l'ordre de convergence est relativement mauvais (0.43) et à forte résolution l'ordre de convergence augmente et devient meilleur que celui du cas(1) (voir 4.1.2 page 56) soit 1.31, valeur à laquelle on pouvait s'attendre pour cette méthode (Randrianarivelo *et al.* (2005)). L'ordre global est de 0.66. Le problème peut avoir plusieurs sources : si  $\varepsilon$  est trop faible pour un maillage grossier, la convergence peut saturer directement. Inversement, si les deux premiers points sont sous-résolus, leur contribution peut éventuellement fausser l'ordre de convergence global. De toute façon, l'effort de calcul est dispersé sur une zone très grande au regard de la zone utile entourant la particule. Il est clair que ce cas est peu adapté à ce genre d'étude. Quant à l'étude de la convergence en temps, on ne dispose pas pour ce cas de données réelles sur la phase instationnaire, nous mènerons cette étude par la suite lors de la simulation d'une situation réelle.

#### 4.2.5 Vitesse maximale d'un cylindre sédimentant dans une cavité finie

En étudiant les résultats précédents, on montre que la relation analytique de Faxën peut être utilisée avec succès pour la validation du code en configuration bidimensionnelle. Toutefois, la nécessité de modéliser un milieu semi-infini pose un problème de conditions aux limites, et la plupart des approches numériques posent une approximation à ce niveau. D'autre part cette relation analytique est limitée car elle diverge pour les deux *extrema* de la gamme de confinement.

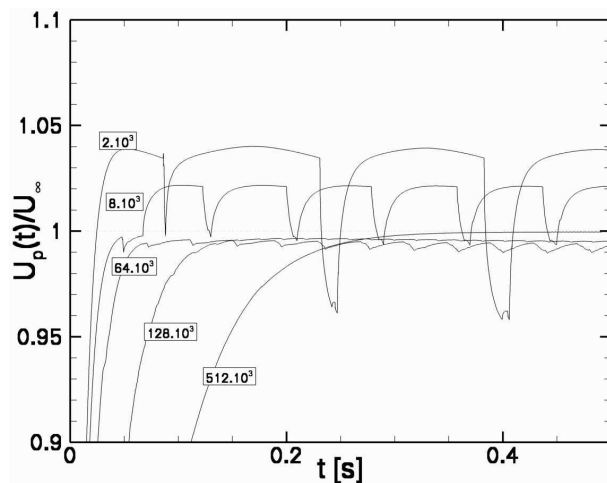


FIG. 4.12: Prédiction de la vitesse limite du cylindre  $U_p(t)$  rapportée à sa valeur analytique  $U_\infty$  représentée pour différentes résolutions spatiales ( $N$ ).

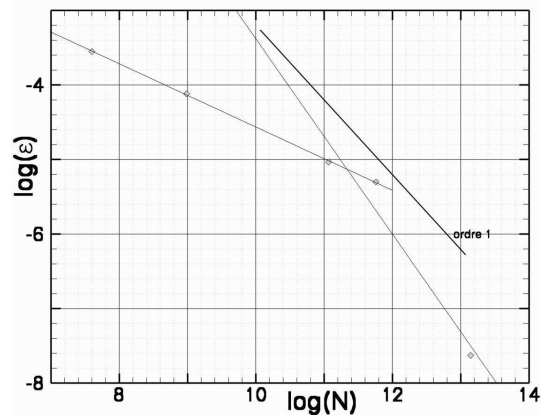


FIG. 4.13: Convergence en espace, cas(i) (2D), Écart  $\varepsilon$  à la référence analytique de Faxën en fonction de  $N$ .

On peut par ailleurs penser à composer les corrections de Faxën dans le cas d'un cylindre sédimentant parallèlement aux parois infinies (voir équation (A.19) page 150) et perpendiculairement aux parois infinies (voir équation (A.20) page 151), mais ce genre de correction – déjà envisagée dans le cas d'une sphère – ne donnerait au mieux qu'une estimation grossière.

### Objectifs.

Le but de cette analyse est de montrer l'intérêt d'une relation valable en milieu confiné, et donc affranchie des limitations susdites. Il n'y aurait évidemment pas d'application physique potentielle, mais plutôt une application académique dédiée à la validation 'bas-niveau' des méthodes de simulation numérique. En effet un code se teste d'abord en 2D pour des raisons de coût et de temps de calcul avant de passer à l'implémentation 3D. Pour la validation de modèles de couplage fluide–solide, il n'existe pas à notre connaissance de données exactes sur le coefficient de frottement appliqué à un cylindre en sédimentation dans une cavité de dimensions finies.

Nous allons donc dans cette partie tenter de définir un tel modèle. Pour cela, le cas(i) paramétré précédemment servira de base. Dans un premier temps la consistance physique du cas(i) sera testée par rapport à la relation de Faxën. Ensuite, sous couvert de certaines hypothèses, nous tenterons de proposer une loi valable pour un milieu confiné. En conclusion, une exploration des confinements extrêmes nous permettra d'évaluer les limites de notre approche.

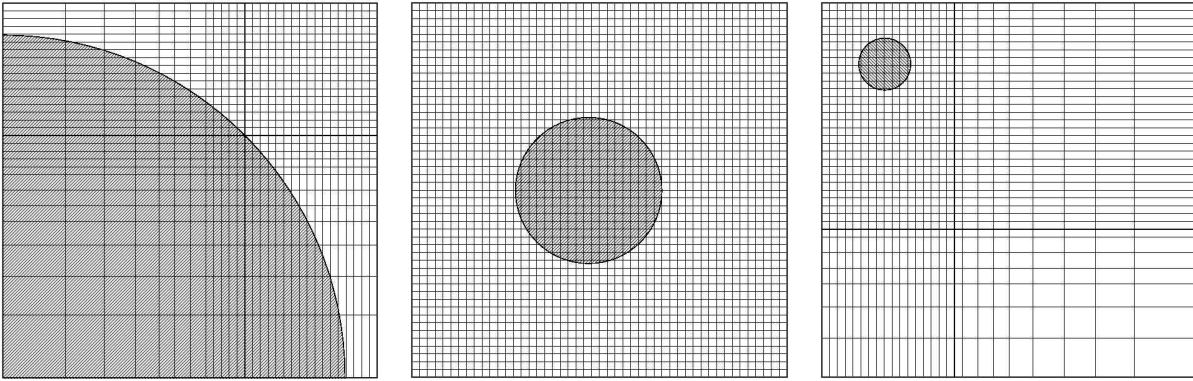


FIG. 4.14: Cas du cylindre en milieu confiné : maillages réguliers ou exponentiels utilisés pour optimiser la résolution des trois gammes de confinement. De gauche à droite : confinement *fort* (maillage  $M2$ ), *intermédiaire* (maillage  $M1$ ) et *faible* (maillage  $M3$ ).

### Vérification de la loi de Faxën dans le cas ( $a=cste$ , $l$ variable).

Des simulations sont définies pour une cavité carrée d'arête  $L = 2l$ , au centre de laquelle un cylindre de rayon  $a$  est lâché à une vitesse initiale nulle. Les propriétés physiques du cylindre solide et du fluide environnant sont choisies pour que le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  n'excède pas  $1.10^{-2}$ .  $Re_p$  est basé ici sur la vitesse limite de chute d'un cylindre en milieu infini (définie en annexe A page 148), vitesse que la particule ne pourra théoriquement pas dépasser dans la configuration présente. Dans cette section, les simulations sont de nouveau comparées à la relation de Faxën, mais cette fois-ci le confinement est modulé via la taille caractéristique  $L$  du domaine, et le rayon  $a$  est gardé constant. Comme on l'a évoqué en annexe A page 150, on s'attend à une vitesse nulle lorsque  $k$  tend vers 1 (ce qui correspond au blocage du cylindre entre les parois du domaine), et à une vitesse tendant vers la vitesse en milieu infini lorsque  $k$  tend vers 0. Évidemment, comme le cylindre est soumis à un confinement vertical *et* latéral, nous obtiendrons une vitesse *maximale* de la particule et non plus sa vitesse terminale. Dans la gamme intermédiaire des confinements, on peut s'attendre à ce que que la vitesse maximale et la vitesse terminale prévue par la loi de Faxën en milieu semi-infini présentent des similarités. Nous allons à présent explorer les trois gammes de confinement à l'aide de trois méthodes différentes.

#### *Confinement intermédiaire.*

La gamme de confinements  $k \in [0.005, 0.6]$  est relativement facile d'accès pour la simulation. En effet, l'expérience que l'on a du nombre de mailles nécessaire à la modélisation correcte d'une particule nous permet d'estimer qu'une résolution spatiale suffisante nécessite

entre  $N = 10$  et  $N = 1000$  mailles dans  $L$ . Le maillage 'M1' associé à ce cas est cartésien, régulier, et pour lequel on a  $N_x = N_z = N$  (voir figure 4.14).

Les simulations pour cette gamme intermédiaire de confinements sont représentées sur la figure 4.15. Un résultat remarquable est mis en évidence : la vitesse prévue par le modèle de Faxën et nos simulations sont confondues dans la gamme de confinements  $k \in [0.025, 0.4]$ . Cela signifierait qu'à confinement  $k$  égal, la vitesse *maximum* de sédimentation  $U_p^{max}/U_\infty$  d'un cylindre dans une cavité fermée serait directement comparable à la vitesse *terminale* de sédimentation d'un cylindre dans un milieu semi-infini. Le domaine de validité de cette propriété se limite *a priori* aux régimes d'écoulement relativement faibles ( $Re_p < 0.01$ ), et à un confinement  $k$  compris dans la gamme  $[0.025, 0.4]$ . Afin de conforter ce résultat et de tester les limites de notre méthode, on compare deux résolutions spatiales  $d_p = 6.25^2$  et  $12.5$ . Si la convergence vers la loi de Faxën est nette, on remarque un comportement particulier pour la plus basse résolution  $d_p = 6.25$ . Il s'agit en fait d'oscillations 'paires-impaires' dues au nombre  $N$  de mailles qui est alternativement pair ou impair. À ce niveau de résolution le résultat est sensible à la position initiale de la particule qui est soit centrée sur une maille (si  $N$  est impair), soit centrée sur un noeud (si  $N$  est pair). Naturellement cette fluctuation disparaît lorsque l'on travaille à plus forte résolution. Toutefois on peut noter que si l'on est amené à travailler à faible résolution, le résultat sera sensiblement meilleur si l'on prend soin de centrer la particule sur une maille et non sur un noeud.

### *Limites du modèle.*

En analysant les résultats pour les confinements faibles, notre prédiction semble s'écarter de la solution de Faxën que l'on sait tendre vers une vitesse infinie. Il nous faudra toutefois augmenter encore la taille du domaine pour montrer si oui ou non notre méthode converge vers la solution en milieu fluide illimité.

Pour les confinements forts, on s'aperçoit que le modèle de Faxën diverge de la solution physique pour  $k > 0.4$ , tandis que la vitesse prédite par la simulation converge de façon nette et logique vers une valeur nulle. Peut-on quantifier ce comportement ? Pour répondre à cela on effectue une convergence spatiale pour deux valeurs fortes du confinement :  $k = 0.625$  et  $k = 0.833$ . La figure 4.16 montre une convergence satisfaisante pour le confinement  $k = 0.625$ .

---

<sup>2</sup>Par la suite, l'omission de la dimension de  $d_p$  signifiera que l'unité est identifiée au pas d'espace élémentaire de la grille de calcul.

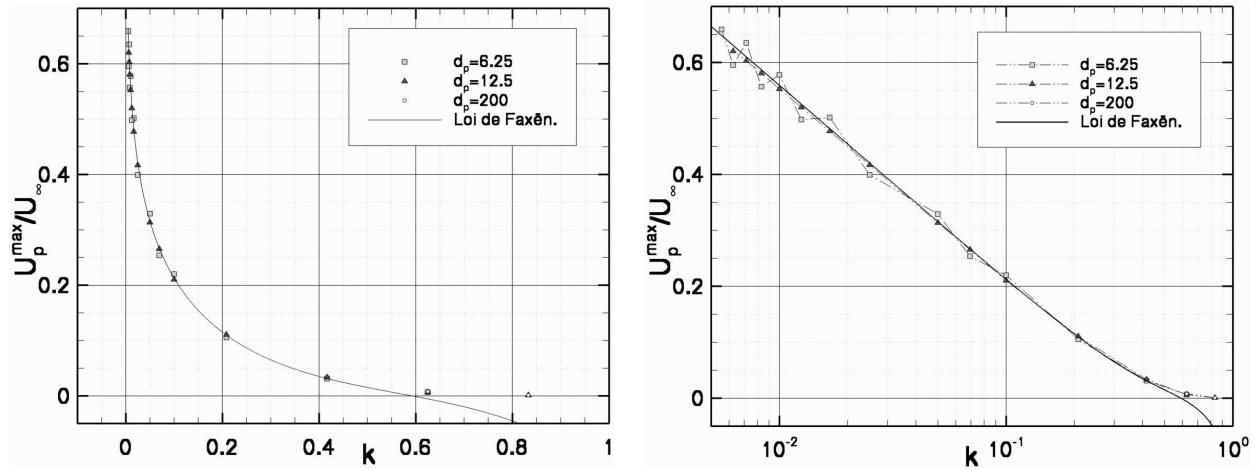


FIG. 4.15: Cas du cylindre en milieu confiné : ratio de la vitesse maximale du cylindre et de sa vitesse en milieu infini  $U_p^{max}/U_\infty$ , en fonction du confinement  $k$ ; simulations pour trois maillages de type  $M1$  :  $d_p = 6.25, 12.5$  et  $200$ ; comparaison à la loi analytique de Faxén; représentation arithmétique (graphe de gauche) et semi-logarithmique (graphe de droite).

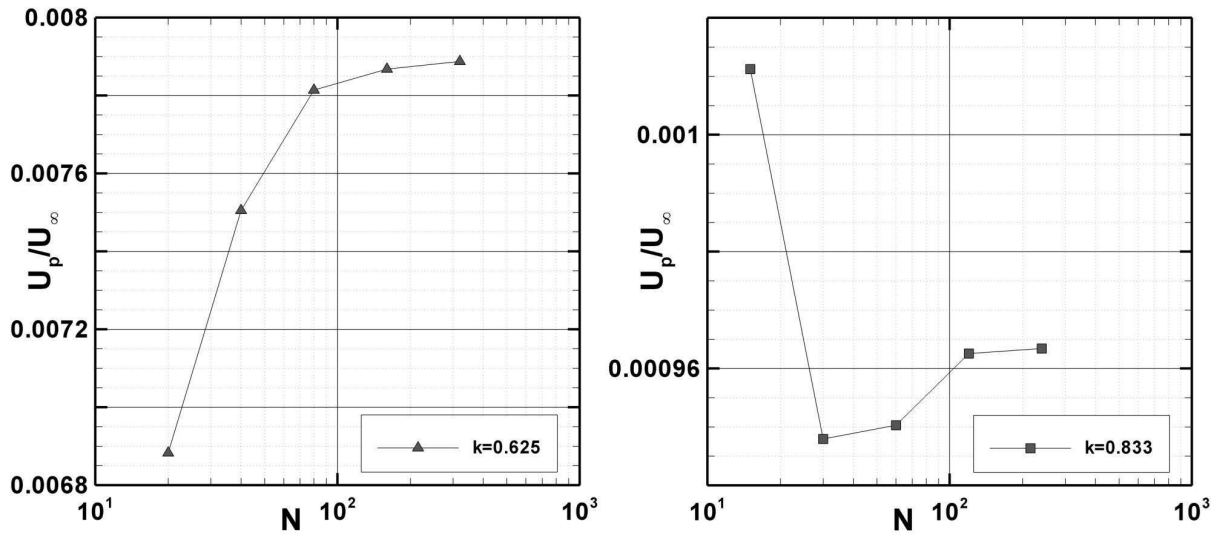


FIG. 4.16: Cas du cylindre en milieu confiné : convergence numérique de la vitesse maximale de chute  $U_p^{max}/U_\infty$  observée pour une résolution spatiale  $N$  croissante; impact du maillage régulier  $M1$  sur les confinements élevés,  $k = 0.625$  (graphe de gauche) et  $k = 0.833$  (graphe de droite).

Le résultat est plus nuancé pour  $k = 0.833$  où la convergence est beaucoup moins nette. Ceci est dû au faible nombre de mailles utilisé pour discrétiser l'espace entre la particule et la paroi (respectivement 1.5, 2.9, 5.9, 11.8 et 23.5 mailles).

Pour un maillage de type  $M1$ , une dizaine de mailles dans le gap paraît suffisant, mais cette dizaine coûtera de plus en plus cher lorsqu'il s'agira d'augmenter encore le confinement.

Pour se faire une idée de la morphologie typique de l'écoulement, la figure 4.17 détaille respectivement les champs de pression, de rotationnel et de vitesse pour un confinement intermédiaire  $k = 0.625$  pris à l'instant correspondant au maximum de vitesse de la particule. Une surpression en aval de la particule est couplée à une dépression en amont. La simulation montre naturellement que la pression motrice s'annule au niveau de l'interstice<sup>3</sup> latéral, ce qui correspond à un maximum de vitesse dans le fluide égal à 1.8 fois la vitesse maximum de la particule. Le champ de vorticité est également intense dans cette zone. La survitesse et la friction consécutive entraîne une déformation de la particule bien visible au niveau du champ  $|u|/U_p^{max}$  et des lignes de courant. Du fait de la rapidité de la mise en régime, on voit que les déformations n'ont pas encore eu le temps de se manifester de manière visible au niveau de l'interface. Toutefois la pénalisation visqueuse a été notablement sous-dimensionnée pour ce cas, et l'étude ultérieure des confinements élevés nécessitera donc d'augmenter les rapports de viscosité.

### ***Confinement fort.***

Pour une investigation correcte des confinements  $k > 0.6$ , on définit un type de maillage plus spécialisé dit de type  $M2$ . Illustré sur la figure 4.14, ce maillage est raffiné dans la zone fluide et relâché dans la zone solide (où plus précisément dans le carré circonscrit par la particule). Inévitablement, le maillage ne peut être régulier au niveau de l'interstice latéral particule-paroi (ou gap minimal  $g_{pp}$ ), car notre méthode ne prend pas encore en compte les blocs non-conformes. Cependant le raffinement est privilégié dans les directions où les gradients de vitesse sont supposés les plus importants. Pour de tels confinements, le temps que la particule met pour atteindre sa vitesse maximale est *a priori* si court qu'elle ne doit pratiquement pas bouger ni ressentir les variations en pas d'espace.

Cette méthode nous a permis d'étudier le confinement jusqu'à  $k = 0.98$ . Au-delà, la déformation de la phase solide n'est plus négligeable du point de vue numérique et la

---

<sup>3</sup>Nous désignons sous le nom d'interstice l'espace minimal qui sépare la surface de la particule d'une paroi (voir l'anglicisme 'gap' particule-paroi).



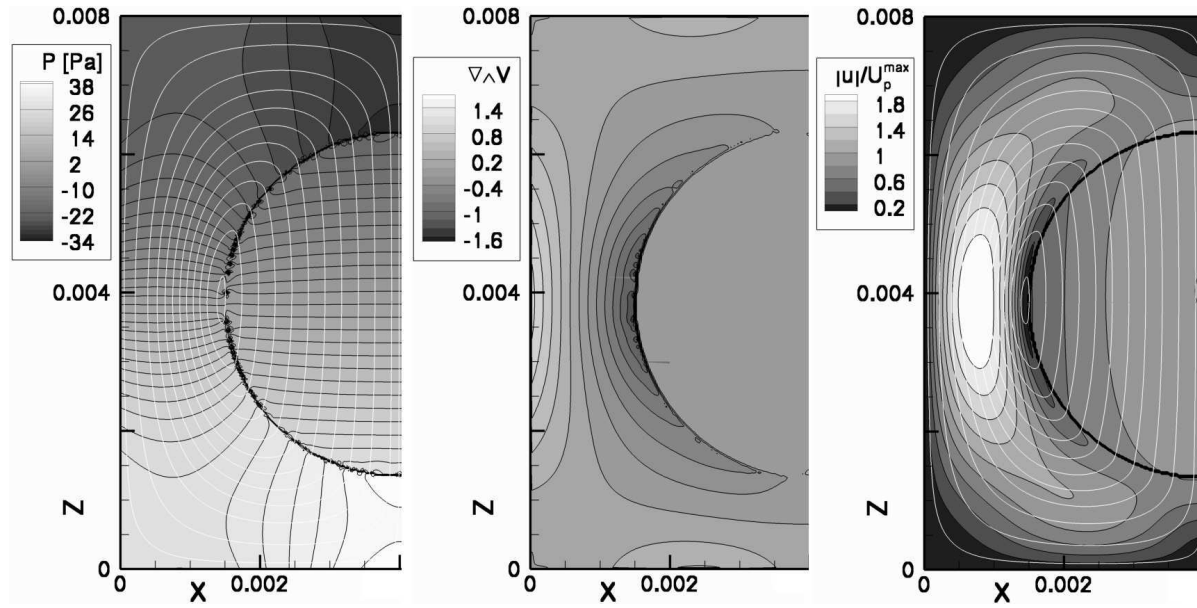


FIG. 4.17: Cas du cylindre en milieu confiné.  $k = 0.625$ , maillage  $M1$ . De gauche à droite : pression motrice  $p$  [Pa]; rotationnel du champ de vitesse  $\nabla \wedge \mathbf{u}$ ; magnitude de la vitesse  $|\mathbf{u}|/U_p^{max}$ , lignes de courant et isovaleur  $C = 0.5$  indiquant l'interface.

poursuite de l'étude perd donc son sens. La figure 4.18 résume les résultats obtenus. À partir d'un confinement  $k > 0.5$ , on montre que la relation

$$U_p^{max}/U_\infty = 0.12(1 - k)^{2.8} \quad (4.2)$$

permet d'approcher le comportement asymptotique de nos simulations lorsque  $k \rightarrow 1$ . Plusieurs contraintes ont été prises en compte : pour  $k = 0.625$  la relation (4.2) passe par la solution bien convergée du maillage  $M1$ . Pour  $k = 0.833$  la relation est une pondération équilibrée des méthodes  $M1$  et  $M2$ . Pour les confinements plus importants la relation interpole les solutions du maillage  $M2$ .

La figure 4.19 détaille le champ de vitesse pour un confinement élevé  $k = 0.962$ , pris à l'instant correspondant au maximum de vitesse de la particule. Le champ représenté est très particulier. Par conservation le volume fluide chassé du bas par la particule se retrouve en haut. Ceci entraîne des vitesses verticales presque exclusivement positives avec un maximum au niveau de l'interstice latéral. Ce maximum de vitesse dans le fluide atteint 36 fois la vitesse maximum de la particule. Par conséquent, les profils de vitesse obtenus dans le fluide sont paraboliques et donc tout à fait analogues aux écoulement de type poiseuille-plan utilisés dans la théorie de la lubrification.

*Confinement faible.*

Contrairement au cas précédent, le coût de calcul aux confinements très faibles dépend de la résolution spatiale dans la phase solide. Pour le maillage de type  $M1$ , il en résulte un trop grand nombre de points dans le fluide. Diminuer le confinement d'un ordre devient donc matériellement prohibitif (pour passer de  $k = 5.10^{-3}$  à  $k = 5.10^{-4}$  il nous faudrait pour une résolution  $d_p = 6.25$  passer de 800 mille points à 80 millions de points).

Une autre donnée limitante provient du temps caractéristique  $\tau_{95}$  associé à la particule, et qui augmente lorsque le confinement tend vers zéro. Il s'agit du même phénomène de force d'histoire que celui décrit pour une sphère en annexe B page 162. La conséquence est que la particule doit parcourir des distances de plus en plus longues sur un maillage régulier pour avoir le temps d'atteindre sa vitesse limite.

On définit donc le maillage  $M3$  comme un rectangle discrétisé de façon régulière, large de  $4d_p$ , et dont la hauteur est estimée à l'aide du résultat obtenu pour le confinement précédent. Autour de cette zone régulière, le pas d'espace augmente de manière exponentielle jusqu'à l'obtention de la taille voulue pour le domaine. Pour éviter des problèmes numériques, on limite le rapport de deux pas d'espace consécutifs à la valeur 1.3.

L'encart de la figure 4.20 montre que l'écart à la loi de Faxën pressenti avec les résultats du maillage  $M1$  se confirme avec le maillage  $M3$ . Là où la loi de Faxën dépasse la valeur théorique en milieu infini, notre approche semble s'en approcher de manière asymptotique. Néanmoins des problèmes numériques se posent lorsqu'il s'agit de descendre en dessous de  $k = 1.10^{-4}$ . Sur la figure 4.21, on prouve que le temps caractéristique de sédimentation  $\tau_{95}$  augmente de façon critique lorsque  $k \rightarrow 0$ . Cela implique un maillage régulier sur des distances de plus en plus grandes, et un nombre d'itérations en temps trop important. L'augmentation du pas de temps engendre des instabilités numériques rédhibitoires, car on filtre des informations sur la phase transitoire par une advection trop rapide de la phase solide. Bien que l'on se trouve en régime de Stokes, on retrouve les problèmes typiques de la DNS d'écoulements fortement inertiels. Il est dès-lors difficile d'obtenir suffisamment de points pour en déduire une tendance asymptotique.

Si les résultats globaux présentés pour le maillage de type  $M3$  sont valides, on doit pouvoir comparer nos simulations au modèle détaillé dans l'ouvrage de Batchelor (1967) (voir annexe A page 149). Ce modèle est valable à proximité de la sphère pour  $Re_p = \mathcal{O}(1)$ . Nous utilisons la simulation  $M3$  pour un confinement  $k = 1.10^{-4}$ . Le relevé de la vitesse maximale de la particule correspond à  $U_p^{max}/U_\infty = 0.853$  avec  $Re_p = 0.0086$ . La figure 4.22 représente des agrandissement successifs du domaine de calcul.

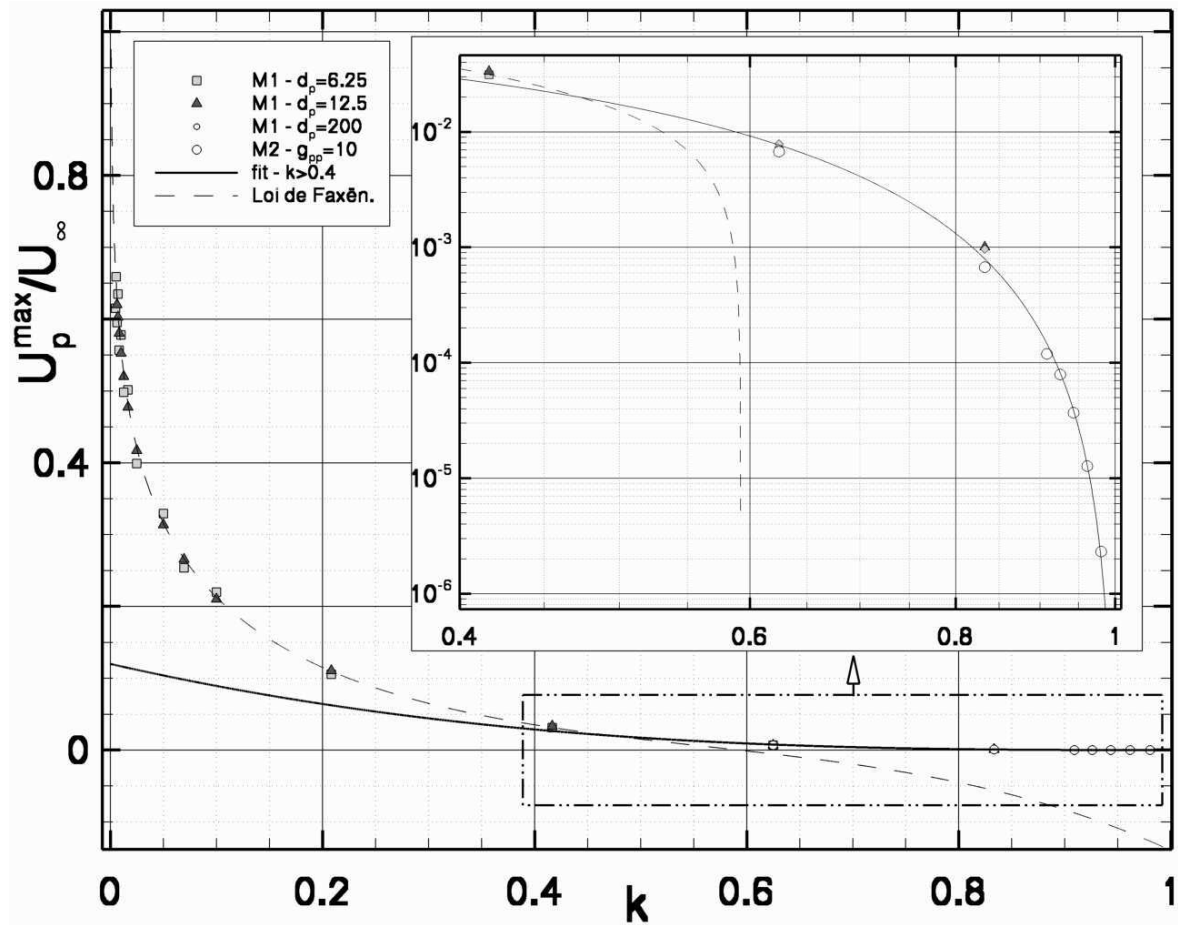
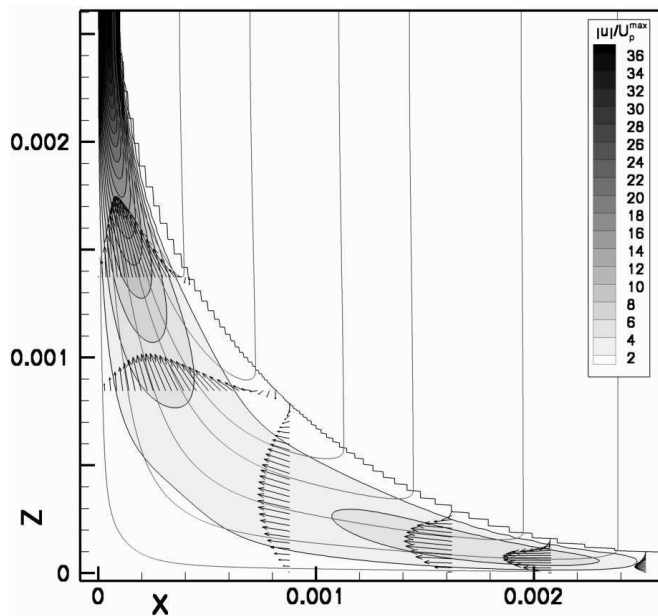


FIG. 4.18: Cas du cylindre en milieu confiné. Comportement asymptotique de la vitesse maximale de chute  $U_p^{max}/U_\infty$  calculée pour un confinement  $k \rightarrow 1$ . Incrustation : représentation log-log de la zone des forts confinements.

FIG. 4.19: Cas du cylindre en milieu confiné.  $k = 0.962$ , maillage M2. Magnitude de la vitesse  $|u|/U_p^{max}$ , lignes de courant et isovaleur  $C = 0.5$  indiquant l'interface. Échantillons des vecteurs vitesse  $u$  dans le fluide.



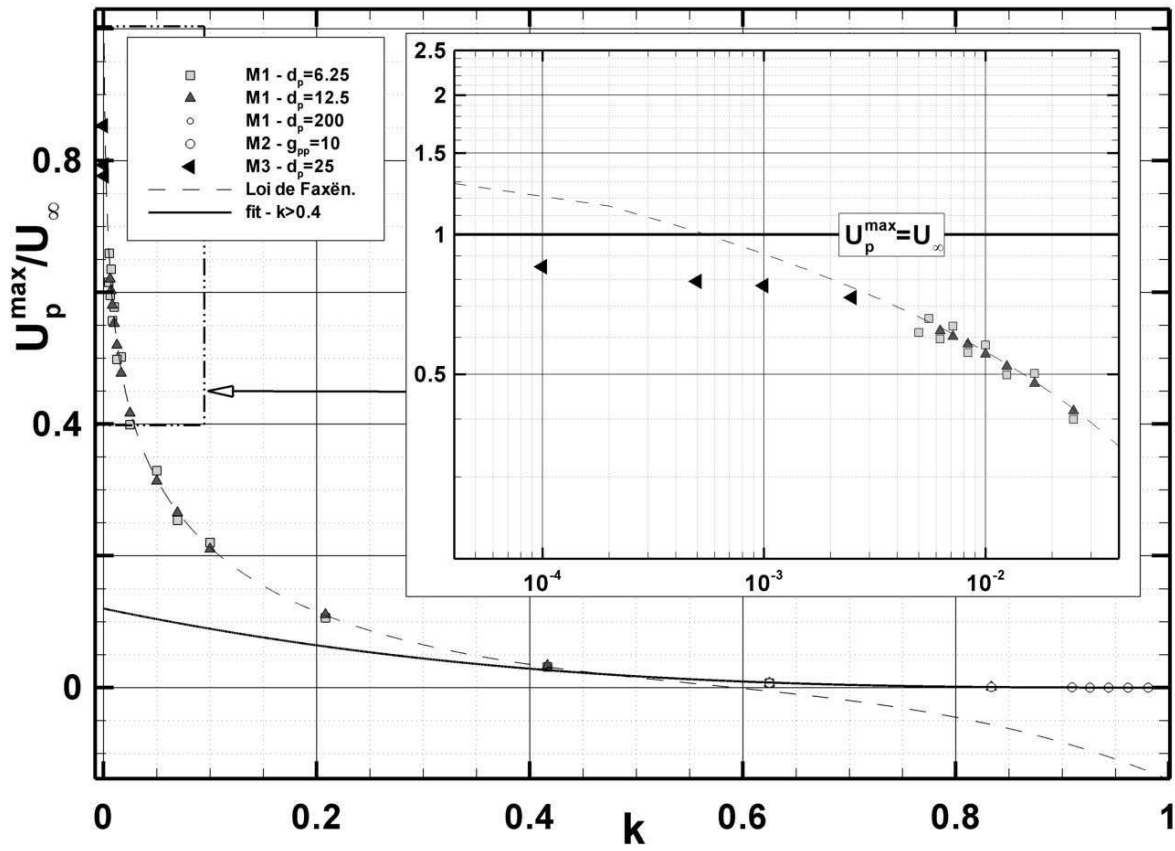


FIG. 4.20: Cas du cylindre en milieu confiné : comportement asymptotique de la vitesse maximale de chute  $U_p^{\max}/U_\infty$  calculée pour un confinement  $k \rightarrow 0$ . Incrustation : représentation log-log de la zone des confinements faibles.

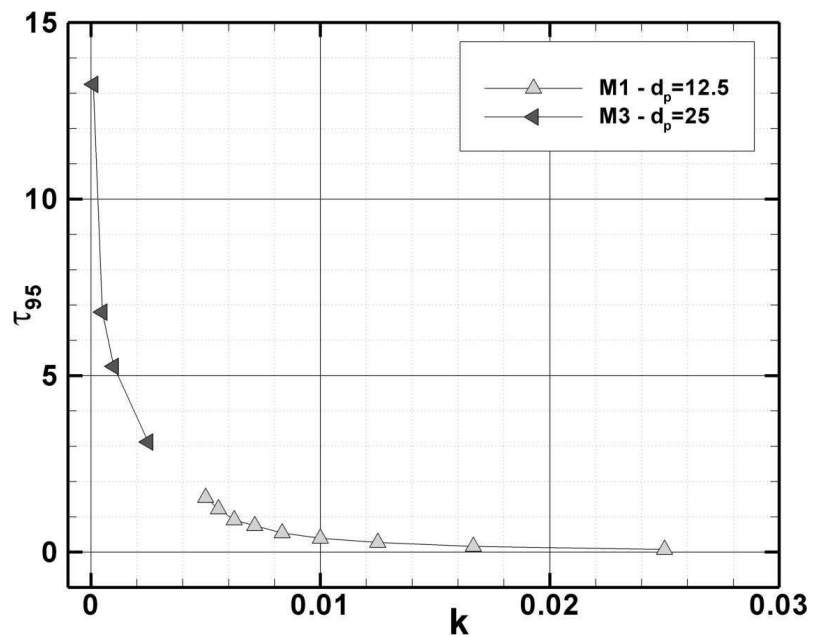


FIG. 4.21: Cas du cylindre en milieu confiné : évolution du temps caractéristique de sédimentation  $\tau_{95}$  pour un confinement  $k$  tendant vers 0.

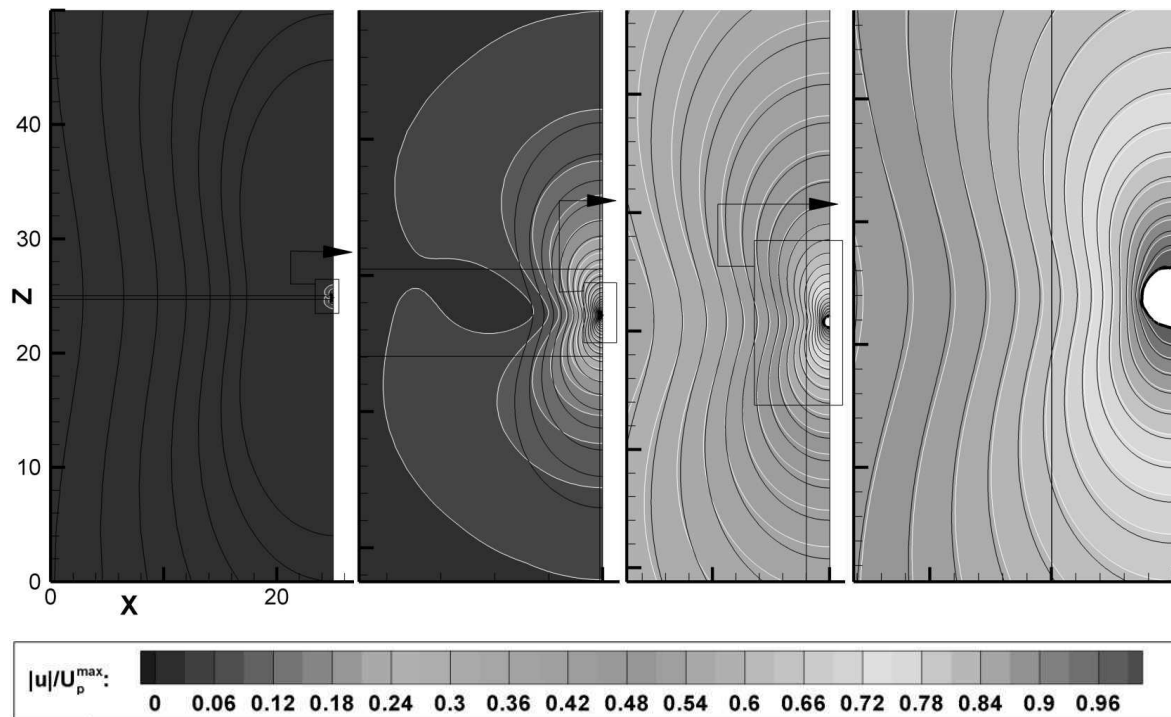


FIG. 4.22: Cas du cylindre en milieu quasi-infini : (maillage  $M3$ , confinement  $k = 1.10^{-4}$ ,  $Re_p = 0.0086$ ). Agrandissements successifs centrés sur les zones représentées en pointillés. Isovaleurs de la magnitude de la vitesse  $|u|/U_p^{\max}$ , modèle en contours noirs (voir Batchelor (1967)), Simulation en contours blancs.

Entre les deux lignes noires horizontales, le maillage est régulier dans la direction  $z$ . Entre la ligne verticale et l'axe de sédimentation, le maillage est régulier dans la direction  $x$ . La magnitude de la vitesse étant notée  $M_{th}$  pour le modèle et  $M_{sim}$  pour la simulation, le modèle est ajusté à la simulation dans la direction radiale du cylindre selon la relation  $(1 - M_{th}) = (1 - M_{sim})/1.325$ . Sur la figure 4.22, les deux premiers champs indiquent que l'influence des parois induit un résultat très éloigné du modèle. Sur les champs suivants, on montre qu'en se rapprochant de la particule, la topologie calculée se rapproche de celle du modèle jusqu'à une coïncidence quasiment parfaite. Ceci appuie la cohérence de notre approche, même s'il nous est pour l'instant impossible d'atteindre exactement la vitesse  $U_\infty$  pour une comparaison simulation/modèle exempte de toute correction.

## Conclusion.

Le modèle de Faxën utilisé dans cette étude permet de calculer la vitesse limite de chute d'un cylindre sédimentant entre deux plan parallèles infinis. Avec l'appui d'une méthode de simulation directe, nous avons pu montrer que ce modèle est également applicable au calcul de la vitesse *maximale* de sédimentation d'un cylindre dans une cavité carrée, pour un régime d'écoulement faible. L'intérêt de cette extension est évident pour plusieurs raisons :

(i) elle s'applique à un cas instationnaire, (ii) elle est valable pour une géométrie bornée, (iii) elle tient compte à la fois des couplages fluide-particule et fluide-paroi. (iv) les conditions d'application sont faciles à mettre en œuvre pour la validation d'une méthode de simulation.

Dans un second temps, nous avons montré les limites de l'approche et proposé des prolongements logiques au modèle de Faxën pour les gammes de confinement extrêmes.

Bien entendu, cette démarche n'est pas complète, et un travail futur consisterait à déterminer une relation unique sur toute la gamme des confinements, assortie d'une étude de sensibilité et de dépendance aux nombres de Reynolds et de Stokes. Cette section achève notre démarche de validation de cas bidimensionnels. La paramétrisation du code se poursuit dans la section suivante, où nous abordons la simulation de situations ayant pour la plupart fait l'objet d'études expérimentales.

## 4.3 Inclusions mobiles : approche 2D de cas 3D,

$$Re_p < 1$$

Afin d'approfondir la paramétrisation du code, on peut utiliser les propriétés d'axi-symétrie de certains écoulements fluide-particules. L'avantage de la symétrie axiale est considérable car elle permet d'approcher un certain nombre de cas 3D tout en simplifiant la configuration numérique jusqu'à se ramener à un cas bidimensionnel. L'intérêt de cette propriété est relativement académique, mais elle nous permettra néanmoins de définir des paramètres pertinents pour l'utilisation globale de la méthode. De nombreuses références existent pour le cas d'inclusions à symétrie de révolution, fixées dans le domaine ou se déplaçant le long d'une trajectoire rectiligne. Par exemple, nous utiliserons des données expérimentales (Becker et McKinley (1994)) tirées de l'étude de la sédimentation d'une sphère en régime de Stokes et en milieu confiné. D'autre part on se basera sur des études analytiques (Elasmi *et al.* (2003), Brenner (1961)) proposant des lois d'interactions particule-paroi ou particule-particule dans des configurations à symétrie de révolution.

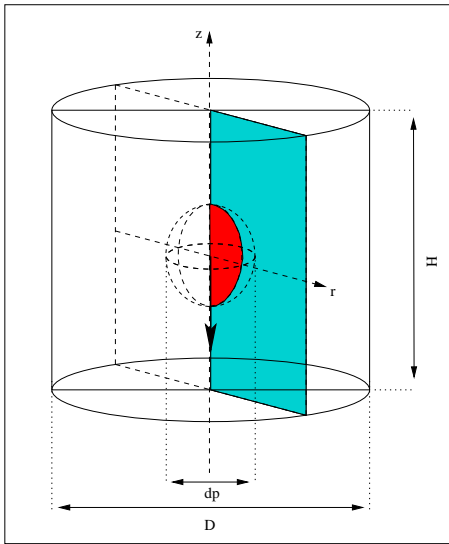


FIG. 4.23: Schéma de la configuration axi-symétrique.

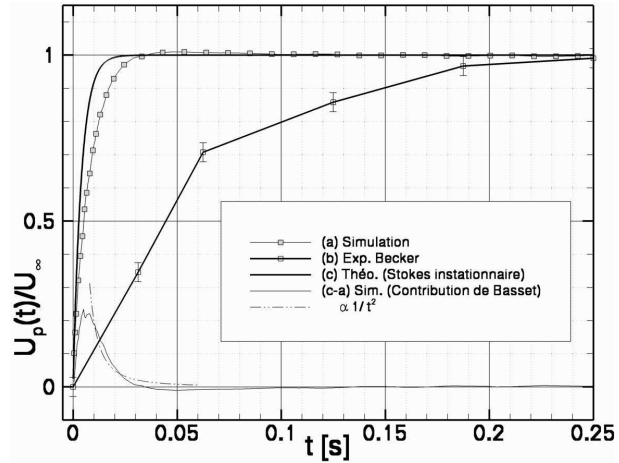


FIG. 4.24: Phase d'accélération de la sphère : simulation, modèle théorique (Bousinesq), expérience (Becker),  $Re_p = 0.025$ ,  $k = 0.243$ .

### 4.3.1 Sédimentation d'une sphère dans une cuve cylindrique

On prend pour référence les résultats expérimentaux provenant des travaux de Becker et McKinley (1994). Les caractéristiques des phases et les géométries utilisées pour l'expérience sont détaillées en annexe A page 152. Une sphère initialement suspendue au sein d'un fluide newtonien au repos est libérée à l'instant  $t = 0$ . Cette sphère est confinée dans un cylindre fini et le rapport d'aspect radial est  $k_{radial} \simeq 0.243$ . Les auteurs trouvent une vitesse limite de chute de  $U_\infty = 0.0243$  [m/s] avec une marge d'erreur de 3%. Comme la vitesse de Stokes (A.5) en fluide illimité est  $U_{St} = 0.04687$  [m/s], on détermine le coefficient de correction  $f = U_\infty/U_{St}$  soit  $f = 1.928$ . Il est clair que même en tenant compte de l'incertitude expérimentale, le coefficient de correction  $f = 1.9271$  obtenu avec l'équation (A.8) page 143 est très proche de la réalité. (Pour information on obtient la correction ( $f = 1.9632$ ) avec l'équation (A.6)).

Initialement placée sur l'axe, la particule en mouvement ne révèle aucun déplacement radial, comme la théorie le laisse prévoir pour ce régime d'écoulement faible. Les données ne donnent pas de signes de l'influence du confinement axial, ce dernier étant d'un ordre de grandeur plus faible que le confinement radial.

Toutes ces données confirment que la particule sédimente sur l'axe et que dans un plan  $(\mathbf{r}, \mathbf{z})$  (voir la figure 4.23), le champ de vitesse reste bidimensionnel et se conserve par rotation autour de l'axe. Une simulation en configuration 2D-axisymétrique permet donc de se ramener à un cas 3D directement comparable aux résultats expérimentaux, avec une économie remarquable en ressources de calcul. Les caractéristiques du cas sont détaillées en annexe C page 170. Des problèmes probablement liés à ce type de configuration apparaissent lors de l'utilisation des approches géométriques et discontinues de la viscosité avec des discontinuités de vitesse de la particule. En se référant au paramétrage précédent pour des cas 2D, la meilleure solution est de se ramener à l'approche géométrique et continue. On choisit un rapport de viscosité tel que  $\mu_p/\mu_f = 1.10^3$ .

Les résultats sont représentés sur la figure 4.24 où la simulation est confrontée à deux résultats. Le premier est le modèle déduit des équations de Stokes instationnaires et décrit en annexe B page 162. Le second est la phase instationnaire mesurée par Becker et McKinley (1994). Les vitesses limites obtenues par simulation numérique directe concordent de manière satisfaisante avec les résultats expérimentaux et théoriques. La vitesse limite de chute prédite est de  $0.0241 m.s^{-1}$  pour une vitesse expérimentale de  $0.0243 \pm 0.007 m.s^{-1}$  soit un écart inférieur à 1%.

L'analyse se complique en ce qui concerne les temps caractéristiques d'établissement. Le temps de relaxation de la particule est évalué à  $\tau_0 \simeq 7.e^{-3}[s]$  pour la simulation et  $\tau_0 \simeq 4.e^{-3}[s]$  pour le modèle, mais à  $\tau_0 \simeq 5.e^{-2}[s]$  pour l'expérience. Plusieurs explications sont plausibles : n'ayant qu'un modèle simplifié dans le cas d'une géométrie confinée, on ne tient pas compte de la masse ajoutée dynamique (force d'histoire) ce qui peut rendre la comparaison caduque. D'autre part, Becker et McKinley (1994) admettent que la fréquence d'acquisition adoptée pour l'expérience est trop faible pour capter correctement la mise en régime <sup>4</sup> et ne poussent pas plus loin l'étude de la phase instationnaire. A proximité de la sphère, l'influence du dispositif de lâché peut également avoir des conséquences visibles. En retranchant la simulation à la relation théorique, on obtient l'approche DNS du terme d'histoire. Ce dernier serait non négligeable lors de la phase instationnaire. Aux temps longs, on obtient un certain accord avec la décroissance en  $t^{-2}$  prévue par plusieurs auteurs. Finalement, l'accélération prédite par notre méthode est en bon accord avec la théorie mais les doutes évoqués plus haut montrent que ce problème doit faire l'objet d'études plus précises.

---

<sup>4</sup>(30 *hz* soit 0.033 images par secondes)



### 4.3.2 Étude de l'interaction sphère/sphère/paroi

La configuration précédente peut se généraliser à plusieurs cas. Le coût peu élevé du 2D-axisymétrique permet d'envisager de très grandes tailles de domaines afin d'approcher des situations de milieux fluides illimités. Ici nous étudions le cas d'une sphère ou le cas d'un doublet vertical de sphères sédimentant vers une paroi plane infinie.

#### Simulation de la phase de lubrification

En étudiant les effets de lubrification qu'implique ce cas, on peut estimer le gap particule-paroi minimum en deçà duquel notre modèle devient invalide. Les méthodes DNS n'ont à priori pas besoin d'intégrer de modèles de lubrification lorsque les séparations particule-particule et particule-paroi restent suffisamment grandes. Dans le cas contraire, il faut connaître les limites de la méthode et s'assurer que le gap minimal est bien résolu durant toute la simulation.

Lorsqu'une sphère, de rayon  $a$  et dont le centre est repéré par l'altitude  $Y_p$ , sédimente perpendiculairement à une paroi d'altitude  $Y_p = 0$ , la théorie 'exacte' de Brenner (1961) prévoit pour la sphère une force de traînée corrigée  $F = 6\pi\mu_f a U_p f_{lub}$  où  $f_{lub}$  est un coefficient de frottement dépendant uniquement du gap particule-paroi normalisé  $R = Y_p/a - 1$  (voir Annexe A page 143).

En comparant ces résultats aux résultats classiques en milieu infini, des calculs simples permettent de retrouver ce coefficient :

$$f_{lub} = \frac{C_d}{C_d^\infty} = \frac{U_{St}}{U_p}. \quad (4.3)$$

La théorie de Brenner (1961) a été vérifiée de nombreuses fois de manière expérimentale et numérique. Nous allons donc pour retrouver cette loi reprendre la géométrie du cas précédent, toujours en régime d'écoulement faible. De ce fait, la longue portée des effets visqueux nécessite de définir une taille de domaine beaucoup plus importante. Nous avons vu précédemment qu'il était préférable d'utiliser des parois plutôt que des conditions de Neumann, donc il faut que le confinement soit faible afin de minimiser la dissipation sur des parois qui ne rentrent pas dans le cadre du modèle de Brenner.

Dans sa position initiale, la sphère est placée au milieu de l'axe de symétrie du domaine, à 10 diamètres des parois inférieures et supérieures, et à 20 diamètres de la paroi latérale et ceci afin de minimiser l'effet du confinement radial par rapport au confinement axial. La résolution du domaine est définie par  $N_x = N_y = 420$  et la résolution de la particule est d'environ 18 mailles pour 1 diamètre.

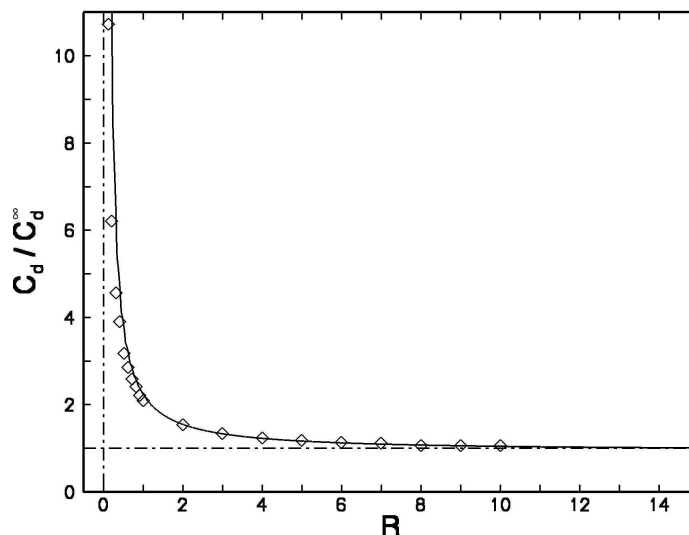


FIG. 4.25: Cas d'une sphère sédimentant vers une paroi infinie. Traînée adimensionnée  $C_d/C_d^\infty$  en fonction du gap particule/paroi  $R$  exprimé en nombre de rayons. Simulation à  $Re_p = 0.01$  (—), théorie de Brenner ( $\diamond$ ) valable en régime de Stokes.

Le nombre de Reynolds calculé pour un milieu infini est  $Re_p = 0.01$ , et une fois la phase d'accélération terminée, l'écart entre la vitesse limite de chute obtenue  $U_\infty$  et la vitesse de Stokes  $U_{St}$  n'excède pas 1%. La figure 4.25 représente  $f_{lub}$  en fonction de  $R$ . Il est clair que la simulation prévoit un accroissement réaliste de la traînée à l'approche de la paroi : on ne discerne de différence qu'à partir de  $R = 0.2$  ce qui signifie que tant que le gap reste supérieur à une ou deux mailles, le modèle reste consistant. Cela représente un résultat assez remarquable car l'échelle de la maille constitue une limite optimale pour une méthode de simulation directe sans ajout de modèle de lubrification.

Les champs représentés sur les figures 4.26 et 4.27 indiquent la magnitude du champ de vitesse  $|U|/U_\infty$  lorsque la vitesse limite de chute est atteinte ( $R \simeq 14.7$  pour un gap initial  $R \simeq 15.7$ ) et à l'approche du fond lorsque  $R = 1$ . Sur la première figure la superposition du champ théorique de Stokes (voir les équations (A.1) et (A.2) page 140) montre un bon accord à proximité de la particule.

Sur la figure 4.27 on note la rupture de la symétrie amont/aval due à la proximité de la paroi et une augmentation de la vitesse radiale dans la zone de lubrification.

On peut néanmoins critiquer le comportement sur l'axe d'après la sous-évaluation peu physique de la magnitude de la vitesse. Également visible sur la simulation précédente, ce problème non résolu à ce jour découle directement du point singulier que constitue l'axe. Afin de distinguer le calcul 2D-axisymétrique du calcul 2D, on définit une métrique proportionnelle à  $r$  dans la direction orthoradiale.

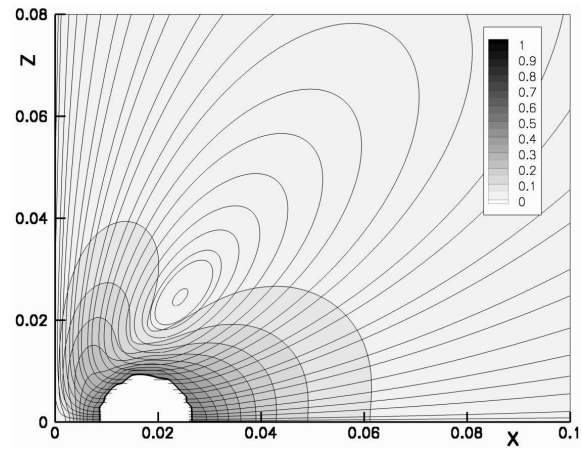
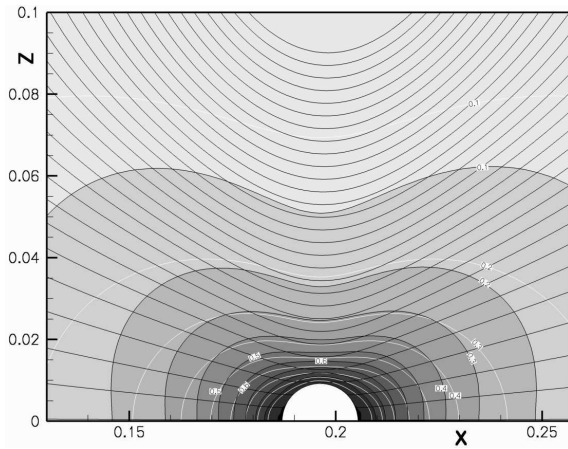


FIG. 4.26: Régime stationnaire atteint après une trajectoire d'environ 1 rayon. Contours de la magnitude de la vitesse  $|u|/U_\infty$ . Comparaison au champ de Stokes en fluide illimité.  $Re_p = 0.01$ .

FIG. 4.27: Contours de la magnitude de la vitesse  $|u|/U_\infty$  pour un gap particule/paroi d'environ 1 rayon. Lignes de courants.  $Re_p = 0.01$ .

Cette métrique est théoriquement nulle sur l'axe ce qui engendre des problèmes de résolution et une sensibilité exagérée aux paramètres du Lagrangien augmenté. Cela explique notamment la nécessité de rectifier l'équilibre flottabilité/trainée en choisissant une technique de couplage moins performante que celle des précédents cas 2D, mais également moins sensible aux problèmes induits au niveau de l'axe.

$R^2$	$R^1$	$N_x \times N_z$	$d_p$	$F^\infty (ref.)$	$F_1^\infty(sim.)$	$F_2^\infty(sim.)$	$\varepsilon$ [%]
1.1	44.61	$840 \times 840$	18.396	0.651	0.6280	0.6279	3.6
2	44.16	$840 \times 840$	18.396	0.698	0.6807	0.6797	2.6
11	40.16	$840 \times 840$	18.396	0.889	0.8765	0.8723	1.6

TAB. 4.2: Cas du doublet vertical de sphères : choix des conditions initiales, résolution spatiale dans le domaine ( $N_x \times N_z$ ) et dans la particule ( $d_p$ ). Trainée adim. minimale  $F^\infty$  sur le doublet : référence en milieu infini (voir Elasmî *et al.* (2003)), simulations ( $F^\infty$  sur les sphères 1 et 2). Écart  $\varepsilon$  entre la trainée moyenne du doublet  $\frac{1}{2}(F_1^\infty + F_2^\infty)$  et celle de référence. Le régime d'écoulement maximum varie dans la gamme  $Re_p \in (0.016, 0.11)$ .

### Simulation d'un doublet vertical de sphères en interaction avec une paroi

En se basant sur la simulation précédente, nous allons tenter de valider le cas d'un doublet vertical sédimentant vers une paroi plane infinie et orthogonale à la direction de la gravité. Cette configuration<sup>5</sup> est décrite en Annexe A page 147. Les conditions initiales définies pour trois simulations sont résumées au début du tableau 4.2. Les deux sphères sont alignées sur l'axe du domaine, et leurs altitudes respectives sont définies telles que le sommet de la sphère la plus proche de la paroi (d'indice 1) et le centre de la seconde sphère (d'indice 2) soient respectivement séparés d'une distance  $R^2$ . Les distances  $R^1$ , correspondant à l'écart entre le centre de la sphère 1 et la paroi, sont pré-dimensionnées pour que le doublet puisse atteindre sa vitesse limite de chute avant que l'influence du fond ne devienne trop notable. Le confinement radial est environ deux fois plus faible que le confinement axial. Pour éviter tout effet de coalescence entre les deux inclusions, on utilise deux fonctions de phases distinctes  $C_1$  et  $C_2$  pour le même type de solide (voir eq. (3.1) page 30). Ce moyen est un peu plus cher en temps de calcul, mais on interdit ainsi toute connexion d'interface inopportune entre les deux sphères. Le tableau 4.2 montre deux résultats :

(i) Notre prédiction pour la traînée globale du doublet est assez précise. Toutefois, la sphère amont est toujours plus lente que la sphère aval. Deux justifications sont possibles : pour un régime d'écoulement faible, la diffusion visqueuse de quantité de mouvement interagit avec la paroi inférieure et provoque un ralentissement de la sphère 1 par rétroaction. Si le régime d'écoulement est plus fort, le sillage de la première particule va contribuer à l'accélération de la seconde, par effet inertiel (phénomène d'aspiration). Dans le cas présent, l'écart de vitesse s'accroît avec l'écart initial, ce qui privilégie la première solution.

(ii) La précision de la simulation augmente avec l'écart initial. Ceci reste cohérent avec le gap minimal de deux mailles dans la zone de lubrification évoqué dans la section précédente. Dans le premier cas l'écart initial  $R^2 - 1$  est d'une seule maille, donc le manque de précision doit signifier que ce cas est sous-résolu.

Le régime d'écoulement faible permet un traitement pseudo-statique du phénomène. La formulation proposée par Elasmî *et al.* (2003) repose sur l'hypothèse de Stokes, et la force de traînée adimensionnelle calculée pour chaque sphère dépend uniquement des

---

<sup>5</sup>Attention ici à la notation pour les distances adimensionnées  $R^1$  et  $R^2$ . Les indices ne sont pas des puissances et au besoin, nous écrirons  $(R^2)^2$  pour élever  $R^2$  au carré.

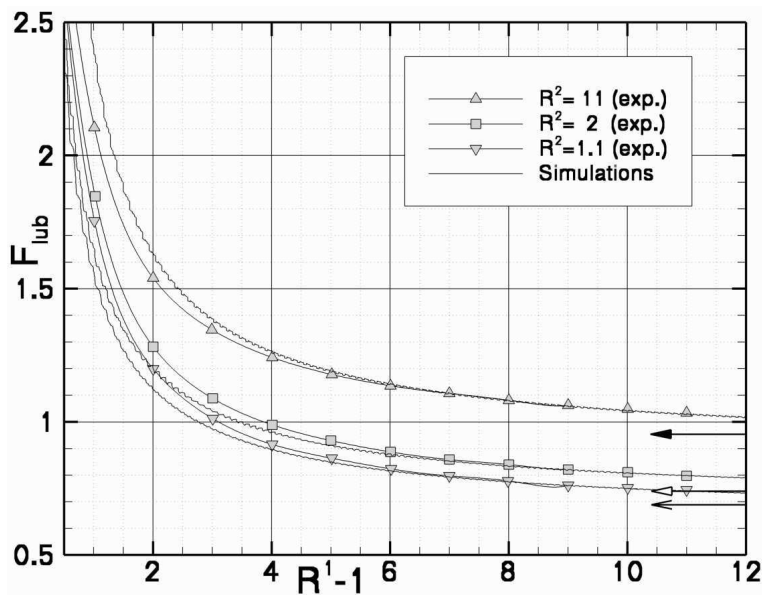


FIG. 4.28: Cas du doublet vertical de sphères : traînée adimensionnée  $F_{lub}$  sur la sphère 1 en fonction du gap particule–paroi  $R^1 - 1$ . Comparaison des résultats pour différentes configurations initiales du doublet ( $R^2 = 1.1, 2$ , et  $11$ ). Dans l’ordre respectif des valeurs initiales prises par  $R^2$ , les flèches  $\wedge$ ,  $\Delta$  et  $\blacktriangle$  symbolisent les tangentes aux profils simulés sans facteur de correction.

distances  $R^1$  et  $R^2$ . Leurs résultats concernant la force de traînée sur la sphère 1 et nos simulations sont comparés sur la figure 4.28.

Pour le doublet en régime stationnaire, on ne réalise pas un écart aussi faible que dans le cas de la sphère seule. Pour que les comparaisons soient faites au même niveau, les écarts de la simulation sont compensés par un facteur de correction sur la traînée.

On note des différences flagrantes lorsque  $R^1 - 1 < 3$ . Les traînées simulées sont initialement plus fortes, et entraînent des phases de lubrification plus raides par rapport à la référence. Ces différences plus prononcées que dans le cas précédent sont également dues à l’accumulation d’erreurs que l’on peut attribuer à l’existence d’effets inertiels ( $Re_p \simeq 1/100$ ), aux déformations de l’interface qui deviennent sensibles à la fin de la phase de lubrification, et toujours aux mêmes problèmes numériques concernant la gestion de l’axe. Toutefois les profils obtenus et ceux de Elasmî *et al.* (2003) sont tout à fait analogues, et l’on identifie dans nos simulations les mêmes particularités propres à la configuration initiale.

La série de figures (4.29) illustre la topologie des champs de vitesse dans quelques cas particuliers. En définissant la vitesse théorique du doublet en milieu infini de la façon suivante :  $U_d = U_\infty / F_{ref}^\infty$ , on dispose d’une base commune pour adimensionner le module de la vitesse dans le fluide :  $|u|/U_d$ . Comme le prévoit la théorie, on obtient après la mise en régime un écoulement quasi–stationnaire dans le repère mobile attaché au doublet.

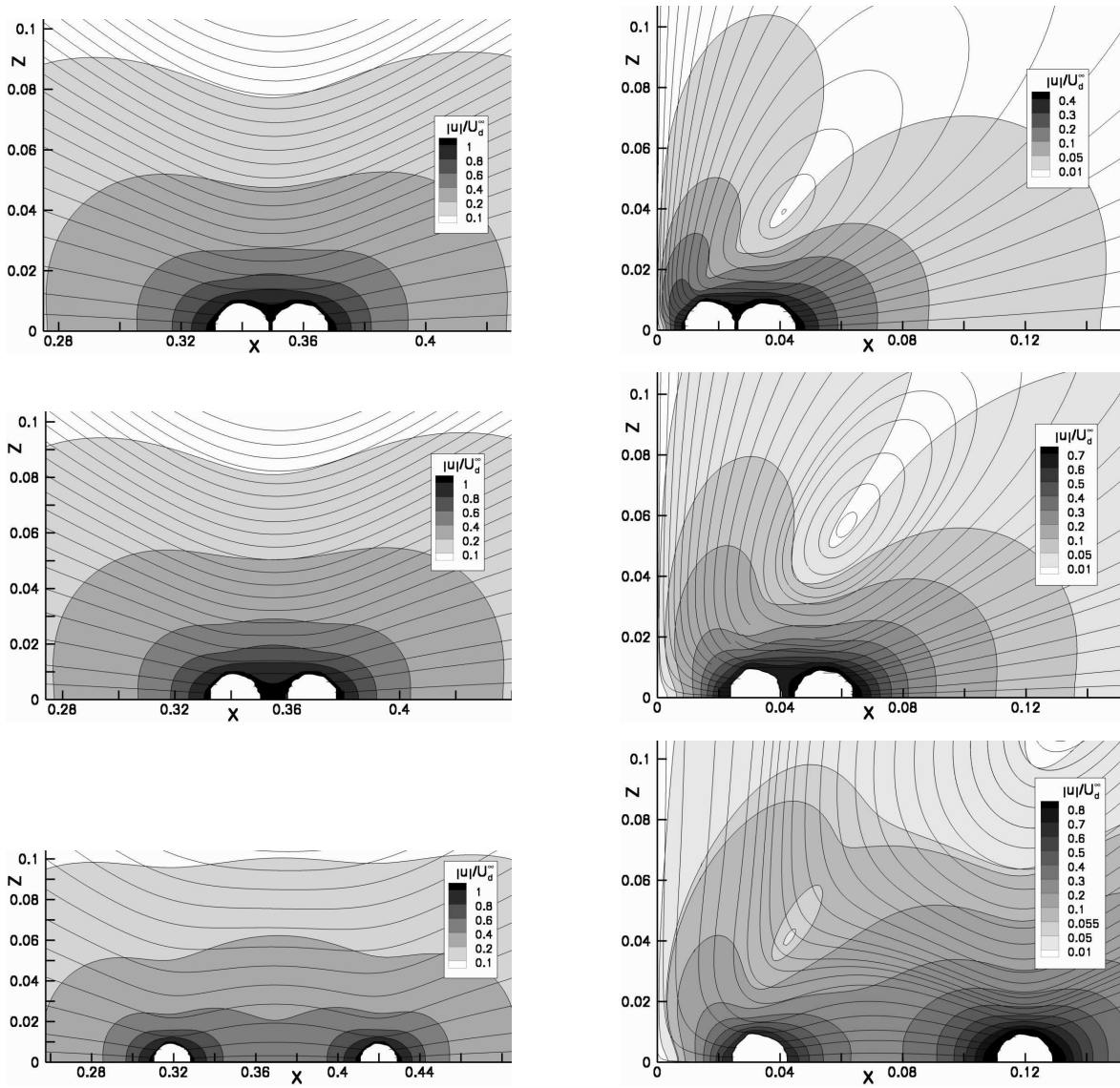


FIG. 4.29: Cas du doublet vertical de sphères : contours de la norme de la vitesse adimensionnée par la vitesse théorique du doublet en milieu infini  $|u|/U_d$ , lignes de courant. La gravité est ici orientée dans le sens des  $x$  décroissants. De haut en bas, l'écartement initial du doublet correspond à  $R^2 = 1.1, 2,$  et  $11$ . De gauche à droite sont représentées les phases pseudo-stationnaires (obtenues pour  $R^1 \simeq 35$ ), et les phases de lubrification sphère-sphère-paroi ( $R^1 = \mathcal{O}(1)$ ).

On retrouve toutes les propriétés de symétrie amont–aval caractérisant les écoulements de Stokes. Pour les écarts initiaux les plus faibles, le doublet induit un champ de vitesse très proche de celui d’une particule seule. La différence principale se traduit en terme d’intensité du champ de vitesse : le doublet est deux fois plus lourd mais présente une ‘traînée de forme’ analogue à celle de la sphère seule, d’où la réduction de la traînée globale et l’augmentation de l’énergie cinétique transmise au fluide. Pour des écarts initiaux plus importants, l’écoulement atteint également un état stationnaire mais les topologies obtenues sont plus complexes. La même complexité se développe lors de la phase de lubrification.

### Cas du doublet vertical en milieu infini et en régime faiblement inertiel

Toutes les solutions analytiques exploitées jusqu’ici reposent sur la résolution des équations de Stokes. Lorsque le régime d’écoulement augmente, la contribution du terme convectif n’est plus négligeable et les modèles s’appuyant sur l’hypothèse  $Re_p \rightarrow 0$  ne sont plus valables. Une façon d’appréhender l’influence des premiers effets inertiels revient à se placer dans le cadre de la théorie d’Oseen (1910), dont l’approche consiste à ajouter un terme convectif simplifié aux équations de Stokes.

De nombreux auteurs montrent que l’équation d’Oseen admet des solutions analytiques physiquement réalistes et valables pour des nombres de Reynolds  $Re_p < 1$ . Parmi ces auteurs, Vasseur et Cox (1977) ont proposé plusieurs modèles analytiques pour des configurations à deux particules, et notamment dans le cas d’un doublet vertical de sphères sédimentant en milieu illimité. Dans cette configuration, nous utiliserons la notation suivante : la distance inter-centres normalisée par  $a$  notée  $R^2$ , et l’altitude de la sphère numéro  $i$  notée  $Y_{pi}$ . Le modèle de Vasseur et Cox (1977) permet de calculer la vitesse relative du doublet  $\Delta U_p = U_{p2} - U_{p1}$  à partir des constantes du problèmes et de l’écart relatif  $R^2$  entre les deux particules, avec la relation

$$\frac{\Delta U_p}{U_{St} Re_p} = \frac{3}{4(Re_p R^2)^2} (e^{-Re_p R^2} - 1 + Re_p R^2). \quad (4.4)$$

Comme le développement de Taylor à l’ordre 2 du terme  $e^{-Re_p R^2}$  au point  $R^2 = 0$  donne  $1 - Re_p R^2 + (Re_p R^2)^2/2$ , on trouve que la vitesse relative du doublet doit tendre vers une valeur constante

$$\frac{\Delta U_p}{U_{St} Re_p} = \frac{3}{8}. \quad (4.5)$$

$Y_{p1}/a$	$R^2$	$Re_p$	$St$	$\mu_f$	$\rho_f$	$\rho_p$	$U_{St}$	$d_p$	
[-]	[-]	[-]	[-]	[-]	[Pa.s]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[m/s]	[m]
219	12	0.22	0.042	0.85	1250	2150	0.0233	0.00635	

TAB. 4.3: Cas du doublet vertical en régime d’Oseen : conditions initiales et caractéristiques physiques.

On se propose ici de simuler la sédimentation du doublet et de montrer que la vitesse de rapprochement devient effectivement constante. Même en régime faiblement inertiel, la topologie admet encore la propriété d’axisymétrie qui nous intéresse ici.

L’étude faite dans cette section reprend donc les configurations précédentes avec un nombre de Reynolds plus important  $Re_p = 0.22$  et un confinement plus faible, soit  $k_{axial} = 2k_{radial} = 0.013$ . Le tableau 4.3 pose les conditions initiales et détaille les paramètres physiques de la simulation.

Bien que des battements rendent le signal passablement bruité, la figure 4.30(a) montre que notre vitesse relative converge vers une valeur constante et très proche de la valeur  $3/8Re_p$  déduite du calcul de Vasseur et Cox (1977). La figure 4.30(b) détaille la distribution de la grandeur  $|u|/U_{St}$  autour du doublet. La comparaison de ce cas avec le cas des doublets en régime faible et pseudo-stationnaire (voir les images de gauche sur la figure 4.29) montre les différences typiques des topologies des écoulements de Stokes et d’Oseen : (i) dissymétrie du champ entre l’amont et l’aval ; (ii) extension plus importante du champ aval par rapport au champ amont ; (iii) divergence des lignes de courant en amont et resserrement en aval.

Ces résultats montrent que le code réalise de façon correcte le couplage particule–fluide (et donc particule–particule) pour un régime d’écoulement dit régime d’Oseen, où les effets inertiels ne sont pas négligeables. Toutefois, ce cas fait actuellement l’objet d’une certaine polémique. Les résultats de Vasseur et Cox (1977) sont reconnus de façon quasi-unanime dans la communauté spécialisée, mais certains résultats expérimentaux comme ceux d’Happel et Pfeffer (1960) et plus récemment de Vanroyen *et al.* (2005) ainsi que l’approche analytique de Leshansky *et al.* (2003) trouvent pour les vitesses relatives des asymptotes situées entre  $0.11Re_p$  et  $0.14Re_p$ . Ces écarts importants n’ont toujours pas été interprétés, et bien que notre DNS ne laisse aucun doute quand à son accord avec la tendance générale, il serait intéressant d’analyser plus profondément ce cas qui n’a été quasiment pas été revu durant ces trente dernières années.



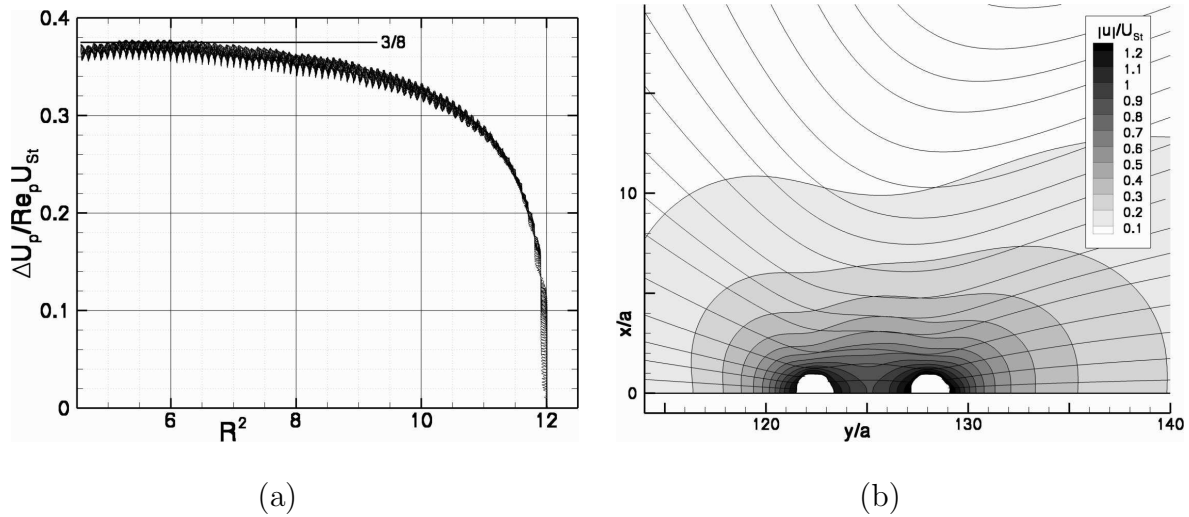


FIG. 4.30: Cas du doublet vertical de sphères. (a) : évolution de l'écart de vitesse entre les deux particules  $\Delta U_p$  en fonction de l'écart  $R^2$  entre les particules. (b) : contours de la norme de la vitesse adimensionnée par la vitesse de Stokes  $|u|/U_{St}$ , lignes de courant.  $R^2 = 5.7$ ,  $Y_{pi}/a = 122$ . La direction  $y/a$  est l'axe du domaine cylindrique et s'oppose à la direction de la gravité.

## 4.4 Conclusion

Le but de ce chapitre consistait à choisir et paramétrer différentes méthodes numériques pour la validation des interactions fluide-particules. À travers une série de cas-tests classiques, nous avons progressivement dégagé une procédure systématique pour l'optimisation du couplage fluide-solide, avec les besoins en résolution spatiale, le choix des conditions aux limites et des paramètres du solveur Navier-Stokes.

Pour conforter cette procédure, nous avons mené l'étude de cas de validation à la fois proches de la réalité et relativement peu coûteux en ressources de calcul. La confirmation des résultats principaux de la littérature et peut-être même l'apport de quelques réponses originales à des problématiques encore trop peu détaillées, montrent à l'évidence la robustesse de la méthode et son potentiel pour l'investigation future d'écoulements complexes. Le prochain objectif consiste à généraliser la calibration du couplage en portant notre investigation vers des écoulements 3D à dominance inertielle.

# Chapitre 5

## SIMULATIONS 3D INSTATIONNAIRES À $Re_p$ CROISSANT

Notre objectif consiste maintenant à comparer des simulations pleinement résolues avec des références expérimentales rigoureuses. Il est important de savoir jusqu'à quel point la méthode systématique définie au chapitre précédent est valide, et le seul moyen consiste à augmenter le régime d'écoulement afin d'obtenir des comportements plus complexes. C'est une complexité croissante qui permettra de révéler les défauts jusqu'ici indétectables de la méthodologie. Dans ce chapitre nous utilisons deux sources expérimentales récentes, et citées de nombreuses fois dans la littérature comme étant des bases de données fiables sur la sédimentation d'une sphère à des nombres de Reynolds modérés et élevés.

Dans un premier temps nous validons le code d'une façon grossière. Sur cette base, une étude de la convergence en temps et en espace, ainsi que le test de nouvelles méthodes de pénalisation et de couplage fluide–solide, nous permettent d'optimiser la résolution et d'aboutir à des résultats complètement valides pour des régimes modérés.

Concernant les régimes élevés, il n'existe quasiment pas de données sur le champ fluide, quantitativement parlant. Cela nous a suggéré l'idée de collaborer avec une équipe de chercheurs du Laboratoire Kramers (Delft, Hollande) ayant développé une méthode numérique valide à Reynolds modérés, et ceci afin de comparer nos techniques respectives sur un cas relativement raide, dont la structure est indéterminée.

## 5.1 Sédimentation d'une sphère en régime d'écoulement modéré

En cherchant des références expérimentales complètes sur une gamme variée de régimes d'écoulement, les travaux de ten Cate *et al.* (2002) sont apparus comme étant très fiables et précis. Leur attrait fondamental est l'exploitation de mesures PIV pour le champ fluide. Les régimes d'écoulement étudiés sont compris entre  $Re_p = 1.5$  et  $Re_p = 31.9$ . La cuve et la sphère utilisées aboutissent à un champ fluide relativement contraint par les parois, car le confinement latéral obtenu :  $k = 0.15$ , est plutôt fort pour ce genre d'expérience. Ce fait n'est pas anodin puisque l'expérience a été spécialement conçue pour la validation d'une méthode DNS de type Lattice–Boltzmann. Par conséquent cette configuration nous est également accessible. A la suite d'une collaboration avec A. ten Cate et J.J. Derksen du laboratoire Kramers à Delft (Pays–Bas), nous avons pu disposer des données expérimentales brutes pour les trois régimes d'écoulement  $Re_p = 1.5$ , 11.6 et 31.9. Cela comprend les différentes fenêtres d'acquisition PIV accumulées au cours des processus, des données pré-traitées représentant la trajectoire de la sphère au cours du temps, ainsi que l'évolution des composantes de vitesse  $u$  et  $v$  en un point particulier du fluide.

### 5.1.1 Configuration expérimentale

Pour une adaptation numérique aisée, la géométrie de la cuve se résume à un cylindre vertical de section carrée et de dimensions  $L_x$ ,  $L_z$  et  $L_y$  respectivement égales à 0.1, 0.1 et 0.16 [m] (voir la figure 5.1). La sphère est la même pour toutes les expériences, et son diamètre  $d_p = 0.015$  [m] est assez grand car la résolution spatiale des simulations dépend du confinement latéral défini par  $k = d_p/L_x$ . La densité de la sphère est définie par  $\rho_p = 1120[\frac{kg}{m^3}]$ . Le nombre de Reynolds est modulé via la phase continue, avec un choix de différentes huiles de silicone. Leurs caractéristiques physiques sont indiquées sur la figure 5.1.

La position de la particule est caractérisée par le gap vertical normalisé  $h/d_p$  qui sépare le fond de la cuve du bas de la sphère. Toutes les expériences ont été faites avec un gap initial  $h/d_p = 8$ . Afin de pouvoir comparer des écoulements à différents régimes, la vitesse limite de chute en milieu infini  $U_\infty$  semble judicieuse pour la normalisation des vitesses de la particule et du fluide. Le calcul préliminaire de  $U_\infty$  et subséquemment celui de  $Re_p$  ne peuvent se faire à l'aide du formalisme de Stokes. L'utilisation de la relation d'Abraham décrite en Annexe A page 140 est plus judicieuse, car elle restitue un coefficient de traînée réaliste dans une gamme très étendue de régimes d'écoulement ( $Re < 5000$ ).

Les acquisitions PIV sont faites dans le plan représenté en gris sur la figure 5.1. Les données sont traitées et restituées sous la forme de champs de vitesse. La résolution temporelle de l'expérience dépend de la fréquence d'acquisition de la caméra, fréquence définie entre  $60Hz$  et  $248Hz$  en fonction du régime d'écoulement. Le haut de la sphère ayant été préalablement coloré, une technique de filtrage permet d'enlever le flou dû au mouvement, puis une phase de seuillage permet de récupérer la coordonnée du sommet de la sphère au pixel près. Cela donne une mesure précise de la trajectoire de la sphère.

Il faut spécifier qu'une résolution accrue entraîne la réduction de la fenêtre d'acquisition. En fonction de  $Re_p$ , de 3 à 4 fenêtres d'acquisition sont nécessaires pour capturer toute la trajectoire. Pour des raisons matérielles, les mesures ne peuvent être faites dans toutes les fenêtres simultanément. L'expérience est donc répétée plusieurs fois sur des lieux différents de la trajectoire. Chaque mesure est répétée pour le contrôle de la reproductibilité.

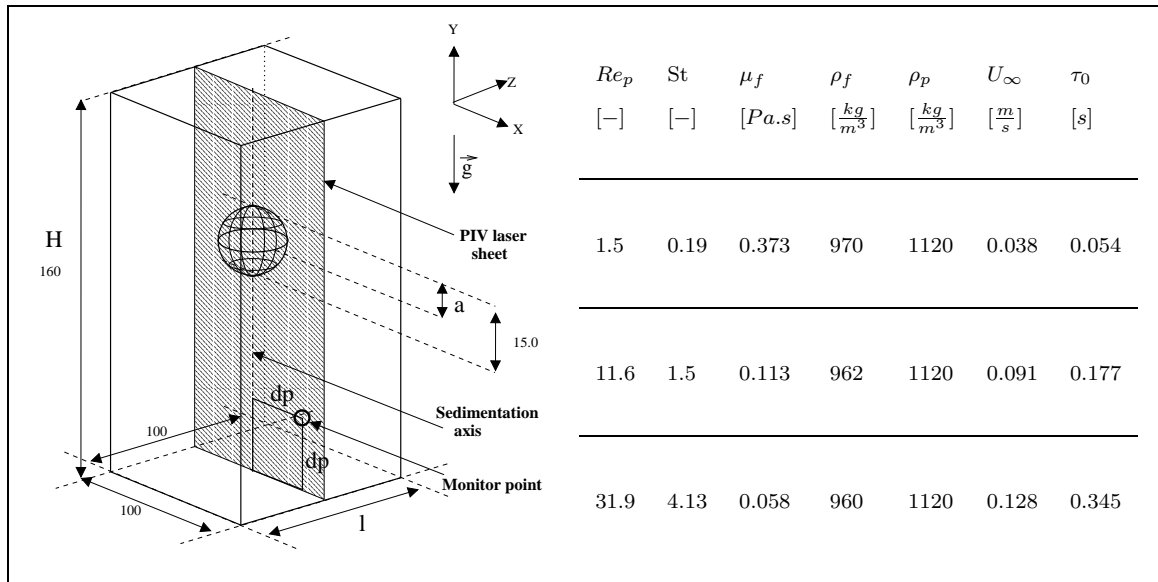


FIG. 5.1: Réglages expérimentaux : dimensions de la cuve [mm], position du plan de mesure PIV et position du point de monitoring de la vitesse. Paramètres physiques pour les trois campagnes de mesures, prédiction des vitesses et des temps de relaxation caractéristiques.

Une compilation des principaux résultats expérimentaux figure en Annexe A page 153.

### 5.1.2 Analyse du phénomène

Grâce à l'expérience décrite ci-dessus, nous pouvons à présent valider totalement le couplage fluide–solide. Dans cette section, une étude qualitative du phénomène est menée afin de pré-dimensionner au mieux notre simulation.

Dans le cas d'une sphère pesante immergée dans un milieu fluide illimité, dans la gamme de régimes d'écoulement  $Re_p \in [1.5, 31.9]$ , plusieurs faits sont sûrs : (i) La trajectoire est rectiligne et parallèle à la direction de la gravité. (ii) Le champ fluide garde une topologie axisymétrique autour de la trajectoire de la particule. (iii) Tous les régimes d'écoulement prévus sont strictement inférieurs à  $Re_p = 50$ . Dans le fluide, on ne doit donc pas relever de vitesse supérieure à la vitesse de la particule, et notamment dans le sillage.

Ensuite on peut poser plusieurs hypothèses fiables : (1) les nombres de Stokes et de Reynolds prévus pour l'écoulement sont suffisamment forts pour admettre que le dispositif de lâcher n'a quasiment pas d'influence sur l'accélération initiale de la sphère, et ne doit donc pas faire l'objet d'une modélisation ; (2) la position initiale de la particule coïncide avec l'axe central du domaine (soit l'intersection des plans verticaux de symétrie du domaine), donc les éventuelles interactions attribuées aux parois latérales se compensent, et donc la particule doit rester à l'aplomb de sa position initiale ; (3) la composition de la topologie axisymétrique prévue en milieu infini et de l'influence de la géométrie du domaine doit donner une topologie torique à proximité de la sphère, et en s'éloignant de la sphère, cette propriété doit dégénérer en fonction du confinement. Globalement l'écoulement conserve quatre plans verticaux de symétrie : deux plans orthogonaux d'équations respectives  $z = L_z/2$  et  $x = L_x/2$ , et deux plans orthogonaux d'équations respectives  $x = z$  et  $x = -z + L_z$ .

### 5.1.3 Simulations préliminaires

Les conditions aux limites pour ce problème sont simples et reviennent à des conditions d'adhérence dans toutes les directions. Toutefois, dans l'optique de réduire les besoins de calcul, nous utilisons les deux plans de symétrie  $z = L_z/2$  et  $x = L_x/2$ . Pour une résolution équivalente, le nombre de degrés de liberté est donc réduit des trois-quarts. Comme ce choix repose sur l'hypothèse de symétrie définie précédemment, il faut vérifier celle-ci numériquement en utilisant une simulation pleinement résolue. Concernant le fond du domaine et les conditions latérales restantes, on garde une condition d'adhérence. Une alternative se présente pour la modélisation de l'interface air–liquide située sur la limite supérieure du domaine. Comme nous n'utilisons qu'une seule phase fluide, cette surface peut être modélisée par une paroi, sachant qu'il y aura à ce niveau une dissipation visqueuse non représentative de la réalité.

On pense que ce type d'interface sera mieux modélisée par une condition de Neumann qui équivaut à un glissement libre. Au sujet du paramètre de couplage fluide-particule, l'augmentation du régime d'écoulement provoque une augmentation du cisaillement à l'interface, ce qui risque d'aboutir à des déformations trop importantes. Pour anticiper ce problème, on choisit de pénaliser plus fortement la viscosité, avec le paramètre  $\mu_p/\mu_f = 5.10^3$ . Les autres paramètres numériques sont définis de la même façon que dans la situation 2D (cas(i)).

Des simulations préliminaires sont basées sur le cas le plus 'raide' soit pour  $Re_p = 31.9$ . Les résultats sont assez éloignés des références expérimentales. Le couplage fluide-particule est donc mal évalué. Plusieurs symptômes sont identifiés : tout d'abord l'équilibre entre résidu et divergence est difficile à atteindre et se montre inégal lors des différentes phases du processus. Ensuite on observe des déformations difficilement contrôlables par le biais du ratio des viscosités.

L'augmentation du régime d'écoulement et la méthode de pénalisation sont à l'origine du problème. La situation physique est complexe, car dans un premier temps les effets visqueux sont prédominants, puis une compétition entre effets visqueux et effets inertiels change la nature de l'écoulement. On s'aperçoit que le traitement de l'incompressibilité par la pénalisation est trop simpliste, et que très certainement le paramètre  $dr^{-1}$  devient de plus en plus inadapté lorsque les gradients de densité ou de viscosité augmentent ou lors de transitions de régime d'écoulement. La section suivante décrit la façon de résoudre ce problème.

#### 5.1.4 Introduction du Lagrangien augmenté variable

Pour amplifier et identifier le problème évoqué ci-dessus, il suffit par exemple d'augmenter le contraste en densité entre les phases. Prenons le cas d'une goutte d'eau dans l'air, on observe sur la figure 5.2 (champ de gauche) une rémanence verticale de la pénalisation à l'aplomb de la position initiale de l'inclusion, et un champ de vitesse manifestement faux dans l'air. Numériquement, le très fort gradient de densité induit de grandes disparités entre les termes spécifiques à chaque phase. Lors de la paramétrisation, on affecte au paramètre  $\lambda$  de 10 à 1000 fois la valeur du plus grand terme des équations de conservation. Dans l'exemple de la goutte, le plus grand terme dépend de la densité de l'eau, mille fois supérieure à celle de l'air.

---

<sup>1</sup>voir section 3.3.5 page 46

<sup>2</sup>Rappelons que la viscosité de compression/dilatation  $\lambda$  est identifiée aux paramètres du Lagrangien Augmenté  $dr = dp$

Or pendant l'étape de préconditionnement de la matrice 'A' du système linéaire, les termes les plus élevés sont identifiés et utilisés pour normaliser tous les termes de la matrice. Du fait de la pénalisation, ce terme de normalisation dépend fatalement du coefficient  $\lambda$  extrêmement grand dans notre exemple. Numériquement, la normalisation induit l'écrasement des termes les plus faibles liés à l'air et notamment au niveau de l'interface. La conséquence est que dans cette phase, la sur-estimation de  $\lambda$  fait que l'algorithme ne satisfait plus que la contrainte de divergence nulle, au détriment de la conservation de la quantité de mouvement.

En conclusion le choix d'un paramètre de pénalisation constant dans le domaine ne convient plus lorsque les caractéristiques physiques des phases continues et dispersées sont trop éloignées. Dans notre cas, le fait d'augmenter le régime d'écoulement signifie forcément que l'on a accentué les contrastes en densité ou en viscosité, ainsi que l'erreur commise.

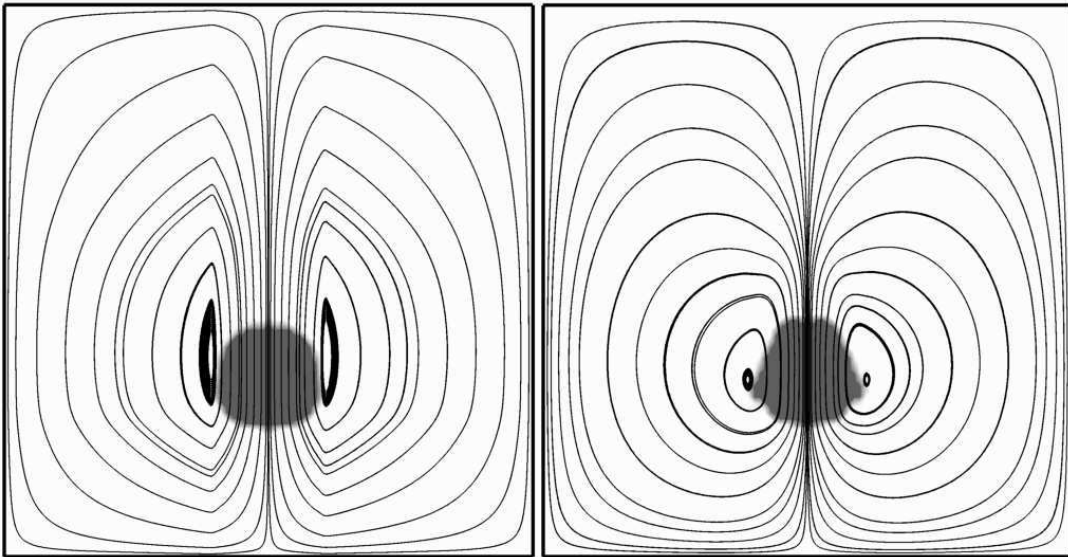


FIG. 5.2: Cas d'une goutte d'eau dans de l'air : Lagrangien Augmenté classique (à gauche) comparé au cas du Lagrangien Augmenté variable (à droite) ; isovaleurs de la fonction de phase  $C$  ; lignes de courant.

La solution pour résoudre de façon équilibrée le couplage vitesse–pression consiste à remplacer un paramètre de pénalisation constant unique par un paramètre adaptatif. Nous utiliserons donc le Lagrangien variable introduit par Vincent *et al.* (2004), où l'on prend en compte une pénalisation pour la divergence découplée dans chaque phase. Sur la figure 5.2 (champ de droite), les lignes de courant ne montrent plus de discontinuités et paraissent beaucoup plus réalistes.

Dans son principe, cette méthode évalue l'intensité de chaque terme de l'équation de conservation de façon locale. Cette évaluation locale sert à pénaliser correctement l'incompressibilité en tout point d'un fluide hétérogène. En se ramenant à notre cas de sédimentation, les caractéristiques varient peu dans une phase donnée, et nous obtiendrons alors une grandeur  $\lambda$  à peu près constante par phase. Concernant la pénalisation de la contrainte d'indéformabilité, on la traite de la façon classique par le biais de la viscosité.

### 5.1.5 Cohérence numérique

#### Validité des conditions aux limites

Cette section concerne la validation des hypothèses faites sur la topologie de l'écoulement au niveau des plans de symétries. La configuration numérique utilisée est résumée en Annexe C page 171 et comprend l'introduction du Lagrangien Augmenté variable pour la contrainte d'incompressibilité. Un premier contrôle est effectué sur un maillage  $N_x \times N_z \times N_y = 50 \times 50 \times 160$  qui correspond au quart du domaine réel. La géométrie de ce domaine est illustrée sur la figure 5.3, avec un aperçu des lignes de courant et de la magnitude de la vitesse. Sur la durée du test, la vitesse de la particule est d'un ordre de grandeur correct par rapport aux résultats expérimentaux. Une analyse rapide des champs ne révèle pas d'anomalie physique majeure, ni de contradiction évidente aux hypothèses formulées précédemment.

Dans l'étape suivante, une simulation pleinement résolue est faite pour un maillage  $N_x \times N_z \times N_y = 50 \times 50 \times 80$ . La résolution spatiale utilisée pour la particule est donc définie le long du diamètre par  $d_p = 7.5$ . Ce maillage grossier permet d'amplifier les erreurs pour mieux les identifier. Sur le même principe, l'influence d'une petite variation de la résolution spatiale de la particule est testée, en ajoutant un point dans les directions  $N_x$  et  $N_z$  (maillage  $N_x \times N_z \times N_y = 51 \times 51 \times 82$ , soit  $d_p = 7.65$ ). Après un nombre raisonnable d'itérations, on contrôle l'écoulement pour remarquer que dans les deux cas, la topologie ne présente pas de différences fondamentales par rapport à la simulation du quart de domaine.

La figure 5.4 compare la composante radiale de la vitesse moyennée selon  $y$  :  $\langle u_{\parallel} \rangle_y = \langle \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \rangle_y$ , et la composante orthoradiale de la vitesse moyennée selon  $y$  :  $\langle u_{\perp} \rangle_y = \langle \sqrt{u_z^2} \rangle_y$ . Cette comparaison est faite dans l'un des deux plans de symétrie attendus ( $z = L_z/2$ ). On remarque rapidement que la valeur moyenne de composante radiale excède largement celle de la composante orthoradiale :  $(\langle u_{\perp} \rangle_y) < \frac{2}{100} (\langle u_{\parallel} \rangle_y)$ . Cela valide l'hypothèse des plans de symétrie, sachant qu'il faudra la remettre en cause pour des nombres de Reynolds plus importants où le sillage tend à devenir tridimensionnel.



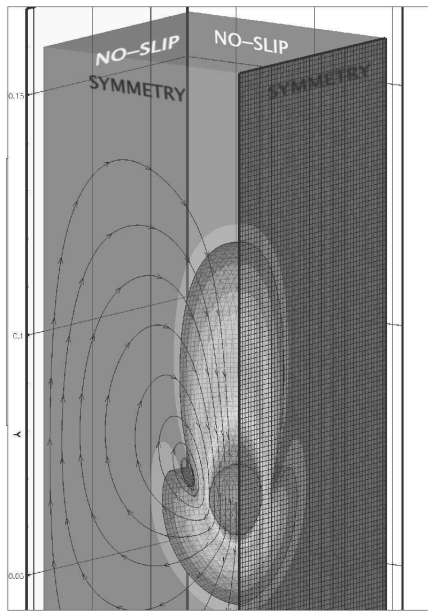


FIG. 5.3: Illustration du domaine de calcul équivalent au quart du domaine réel. Aperçu des conditions aux limites latérales, de la position de l'interface, des isovalues de la norme de la vitesse et des lignes de courant.

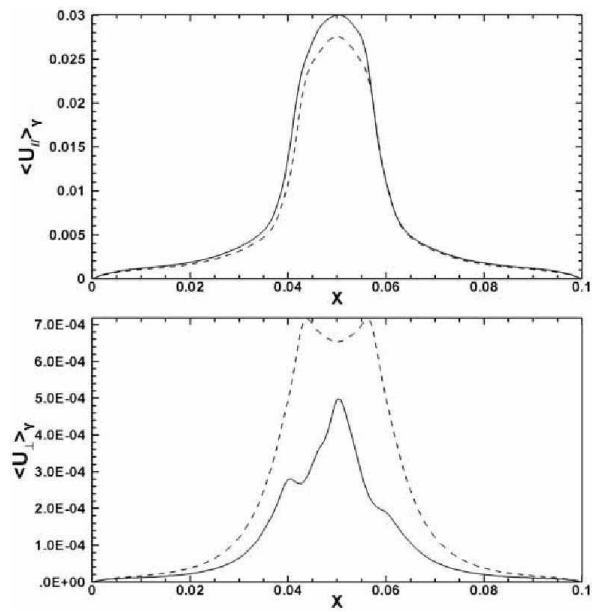


FIG. 5.4: Rapport des composantes de vitesse radiales et orthoradiales au niveau des plans de symétrie. Simulations complètes : (—)  $50 \times 50 \times 80$ , (- - -)  $51 \times 51 \times 82$ .

Les différences observées sur la composante orthoradiale avec les deux maillages proches sont relativement importantes, mais il faut plutôt mettre cela sur le compte de la résolution spatiale trop limitée. Si nous prouvons que le code converge en espace pour ce cas, alors ces différences sont gommées<sup>3</sup> en augmentant le nombre de mailles dans la particule.

## Études de convergence

Dans cette section, la configuration décrite en page 171 pour un régime d'écoulement  $Re_p = 31.9$  fait l'objet d'une étude de convergence en temps, en espace, et en viscosité.

### *Convergence en temps*

L'intégration implicite utilisée par la méthode permet une grande flexibilité quant au choix de la résolution temporelle. Il faut donc déterminer un critère physique, basé sur des échelles de temps caractéristiques, et qui permette d'éviter de surestimer ou de sous-estimer le pas de temps.

<sup>3</sup>Comme nous l'avons montré précédemment pour le cas  $2D$  en page 70, avec les oscillations importantes du résultat pour un  $d_p$  pair/impair à faible résolution.

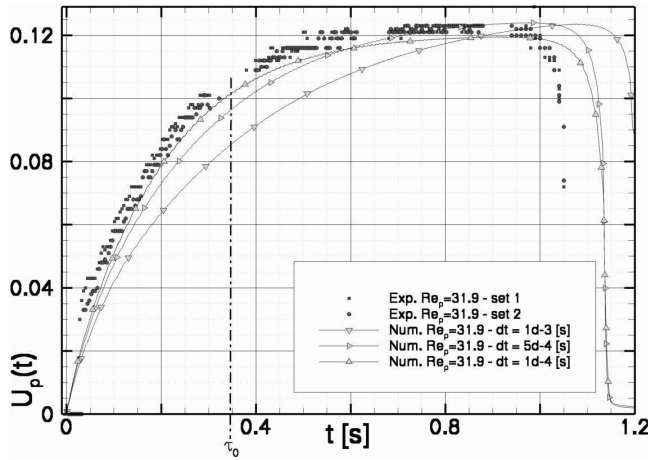


FIG. 5.5: Cas  $Re_p = 31.9$ , vitesse instantanées  $U_p(t)$ . Simulations pour  $\alpha = 344, 688$  et  $3440$ . Références expérimentales.

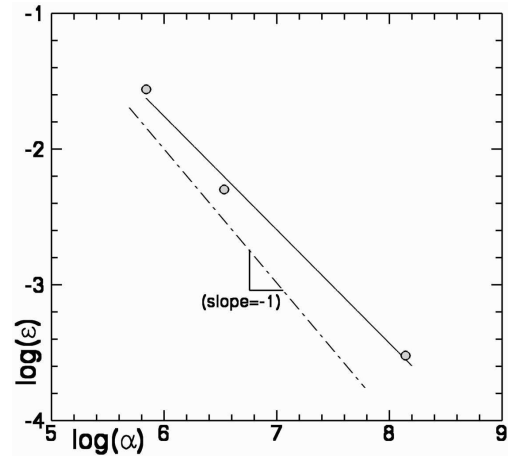


FIG. 5.6: Convergence en temps de l'écart relatif  $\varepsilon = (\Phi_{exp} - \Phi_{sim})/\Phi_{exp}$  en fonction de  $\alpha$ , à l'instant  $t = \tau_0/2.5$ . Ordre 1.

On montre en Annexe B que le temps de relaxation  $\tau_0 = \frac{2(\rho_p + C_m \rho_f) a^2}{9f\mu_f}$  associé à la particule est la seule échelle représentative exploitable. En effet la vitesse limite de chute  $U_\infty$  rapportée à ce temps  $\tau_0$  permet d'évaluer l'accélération maximale de la particule. Si cette phase est bien résolue en temps, le cas est théoriquement bien résolu pour tout le reste du processus. Cela n'est évidemment plus valable dans des cas plus complexes où des accélérations plus violentes dues au milieu extérieur surviendraient après cette phase (choc inter-particulaire, choc particule-paroi, *etc*). Dans ce cas des critères numériques associés à un pas de temps adaptatif peuvent résoudre le problème, mais nous préférons pour des raisons pratiques nous en tenir aux pas de temps constants quel que soit le cas abordé ici.

La caractérisation expérimentale de la phase d'accélération sert ici de référence. Trois pas de temps  $\Delta t$  différents sont choisis pour couvrir un ordre de grandeur complet.  $\Delta t$  est défini par la suite comme une certaine fraction  $\alpha$  du temps caractéristique  $\tau_0$  :

$$\alpha \Delta t = \tau_0, \quad (5.1)$$

$$\Phi(t) = U_p(t)/U_\infty. \quad (5.2)$$

La convergence est basée sur la grandeur physique  $\Phi$  associée ici à la vitesse instantanée de la particule  $U_p(t)$  rapportée à la valeur maximale  $U_\infty$ . La figure 5.5 compare les valeurs expérimentales aux valeurs simulées pour  $\alpha = 344, 688$  et  $3440$ . On voit que la convergence est effective pour un temps inférieur à  $\tau_0$ .

Au-delà de ce point, les phases de la sédimentation sont différentes entre les courbes et la convergence en temps n'a plus de sens. Pour  $t < \tau_0$ , l'ordre de convergence est relativement stable et varie autour de l'unité, c'est à dire qu'en multipliant  $\alpha$  par 10 on divise l'erreur par 10. Par exemple, la figure 5.6 montre l'évolution de l'écart  $\varepsilon$  entre la grandeur physique simulée  $\Phi(\tau_0/2.5)$  et sa valeur expérimentale, en fonction de  $\alpha$ . Les valeurs expérimentales sont déduites d'une fonction d'interpolation dont le calcul est détaillé en Annexe A page 157. Pour résumer, les résultats semblent satisfaisants lorsque le pas de temps  $\Delta t$  rapporté à  $\tau_0$  est de l'ordre du millièème, soit pour  $\alpha = \mathcal{O}(1000)$ . Le défaut visible sur la figure 5.5 est que la vitesse semble constamment converger vers une valeur un peu trop faible. L'accumulation de cette erreur explique le retard de la particule dans la phase d'approche de la paroi inférieure. En tout cas, on montre bien l'importance du choix du pas de temps, et notamment en ce qui concerne la phase initiale d'accélération. Un pas de temps trop grand entraîne une sous-évaluation de l'accélération initiale qui compromet toute la simulation dans notre cas.

### *Convergence en espace*

À l'instar de la convergence en temps, la convergence spatiale est assez délicate à déterminer par faute d'une grandeur physique réellement significative. Avec le pas de temps le plus fin ( $\alpha = 3440$ ), trois simulations de résolutions spatiale croissantes sont comparées. La particule est successivement définie par  $d_p = 4.5, 7.5$  et  $15$  [mailles/diamètre]. En se référant à la figure 5.7 qui représente l'évolution de  $\Phi$  en fonction de  $d_p$ , il est clair que la convergence ne se traduit que sur l'amplitude de l'erreur numérique  $\xi$  qui décroît logiquement lorsque le maillage est plus fin. Les trois simulations restituent la mise en régime d'une façon analogue. Lorsque la résolution est faible, on remarque que l'on finit par surestimer l'accélération de la particule. Le cas  $d_p = 4.5$  se comporte mal lors de la phase de décélération car l'ordre de grandeur de diffusion de l'interface n'est plus négligeable devant la longueur  $d_p$ , et la déformation de l'interface finit par affecter la traînée de la particule. Pour les cas  $d_p = 7.5$  et  $15$ , les résultats sont très comparables.

Pour une analyse plus fine de la convergence spatiale, notre investigation se porte sur la phase de décélération. La dynamique de l'écoulement est plus raide lors de cette phase, et cela peut mettre une simulation sous-résolue en défaut. Pour que la comparaison des trois maillages et de l'expérience soit sensée, l'analyse du champ de vitesse est faite pour un gap particule/paroi identique, soit  $h/d_p = 0.5$ . La figure 5.8 superpose les trois champs de vitesse numériques eux mêmes interpolés sur le champ expérimental. On montre une convergence claire de la direction du champ de vitesse vers le champ expérimental. Il est également clair qu'on ne peut dégager d'ordre de convergence global.

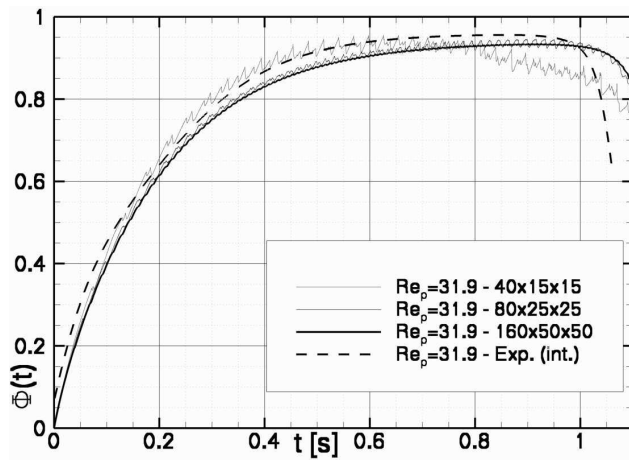


FIG. 5.7: Cas  $Re_p = 31.9$ , vitesse instantanée  $U_p(t)$ . Simulations pour les maillages  $160 \times 50 \times 50$ ,  $80 \times 25 \times 25$  et  $48 \times 15 \times 51$ . Fonction interpolant la référence expérimentale.

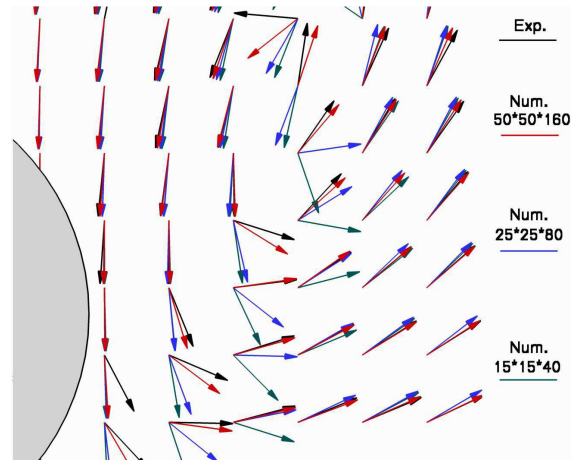


FIG. 5.8: Convergence spatiale de la direction du champ de vitesse. Champ expérimental. Simulations :  $160 \times 50 \times 50$ ,  $80 \times 25 \times 25$ ,  $48 \times 15 \times 51$ .

Un résultat remarquable est que dans toutes les zones peu cisillées, les quatre champs de vitesse sont quasiment confondus, ce qui montre que même dans le cas le plus grossier  $d_p = 4.5$ , le résultat est déjà significatif. Dans les zones à plus forts gradients, on note une convergence régulière vers la référence. Concernant la plus haute résolution  $d_p = 15$ , la direction du champ est quasiment identique à celle du champ expérimental. La zone de recirculation est en général moins bien résolue car l'amplitude des vitesses y est très faible. Dans les simulations suivantes, on choisit d'utiliser la résolution  $d_p = 15$ . Les simulations montrent que l'on peut reproduire très correctement le phénomène pour une résolution  $d_p = 7.5$ . Néanmoins, la résolution  $d_p = 15$  prouve que l'on améliore encore les détails de l'écoulement, donc on utilise la grille  $160 \times 50 \times 50$  pour la suite de l'étude.

En conclusion, on peut dire que l'ordre de convergence en espace n'est pas calculable ici, et en tout cas qu'il doit être relativement médiocre. Par-contre, et c'est ce qui distingue la méthode de beaucoup d'autres, on montre un niveau élevé de précision pour des résolutions extrêmement faibles. Cela veut dire qu'avec des moyens de calcul limités, on est capable de dégager un comportement proche de la réalité.

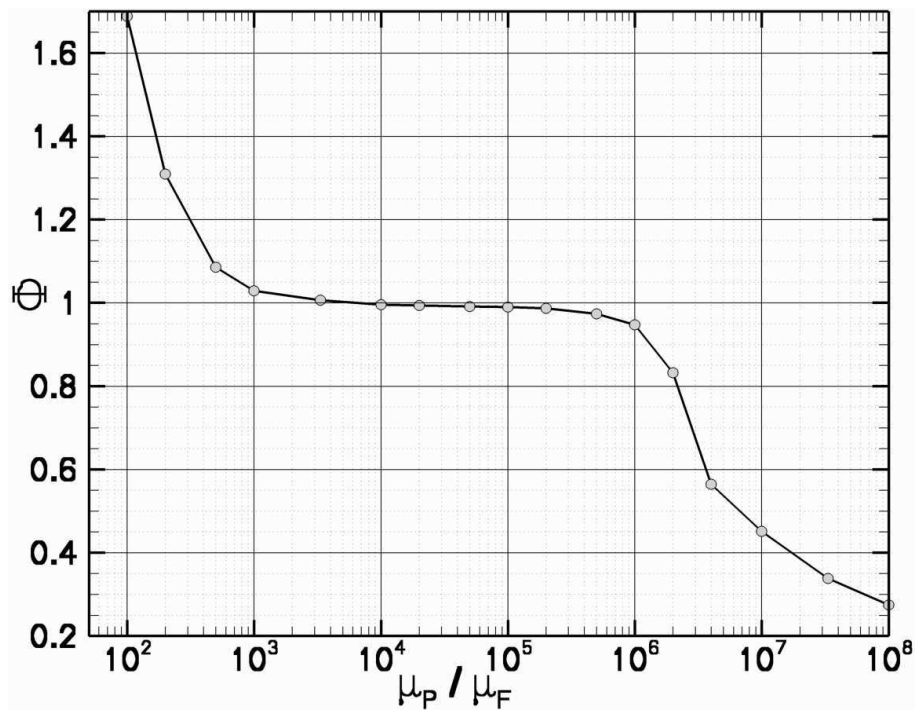


FIG. 5.9: Cas  $Re_p = 31.9$ , convergence de la grandeur physique  $\Phi$  en fonction du paramètre de couplage  $\mu_p/\mu_f$ .

### *Convergence en fonction du paramètre de couplage $\mu_p/\mu_f$ .*

Avec l'étude précédente, on dispose du cas  $d_p = 7.5$  correspondant au maillage  $80 \times 25 \times 25$ . On sait que cette simulation est vraisemblablement valide, et de surcroît relativement rapide à effectuer. Il suffit donc d'étudier l'influence du couplage en modulant le paramètre de couplage autour du point valide. Le but est de voir par rapport aux situations 2D si la gamme de validité de  $\mu_p/\mu_f$  est restreinte à cause de l'augmentation du régime d'écoulement. La convergence est contrôlée via le paramètre  $\Phi = \max(U_p)/U_p^{ref}$ , où  $U_p^{ref}$  est le maximum de vitesse de la particule pour notre cas de référence  $\mu_p/\mu_f = 5.10^3$ .

La figure 5.9 montre un comportement tout à fait analogue à celui des situations 2D, avec un plateau de validité du couplage couvrant entre trois et quatre ordres de grandeur. On remarque un décalage à droite du plateau qui justifie vraisemblablement qu'il faille accentuer le paramètre de pénalisation lorsque le régime d'écoulement augmente. La gamme de validité du couplage en 3D pour des régimes modérés s'étend donc sur l'intervalle  $\mu_p/\mu_f \in [1.10^3, 1.10^6]$ . Comme le phénomène est suffisamment rapide pour que les déformations n'affectent pas la particule dans son mouvement, on adopte pour la suite la valeur la plus basse du paramètre :  $\mu_p/\mu_f = 1.10^3$ , afin de compenser légèrement le déficit de vitesse noté pour  $U_p$ .

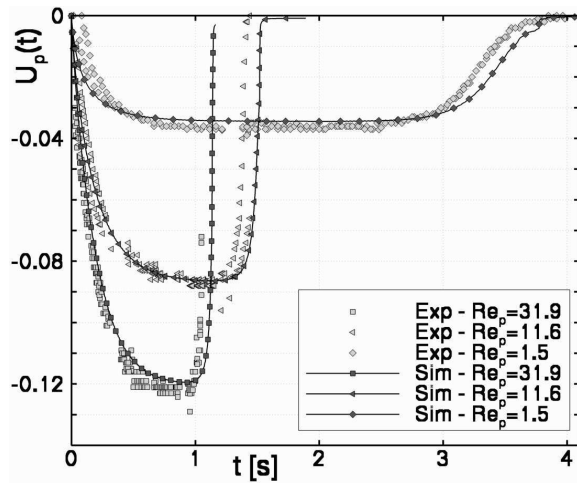


FIG. 5.10: Cas  $Re_p = 1.5, 11.6$  et  $31.9$ . Vitesse de la sphère  $U_p(t)$ . Expériences (sets 1 et 2). Simulations.

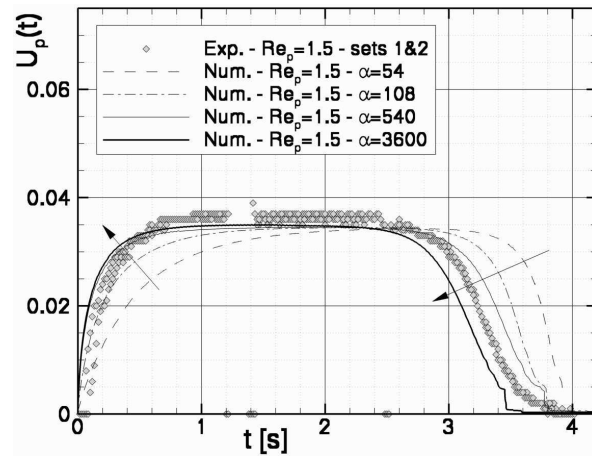


FIG. 5.11: Cas  $Re_p = 1.5$ , vitesse de la sphère  $U_p(t)$ . Expériences (sets 1 et 2). Simulations : résolution en temps  $\alpha = 54, 108, 540$  et  $3600$ .

### 5.1.6 Sédimentation d'une sphère dans une cuve, $Re_p \in [1.5, 31.9]$

Dans la section précédente, nous avons recherché une approche cohérente d'une situation réelle en terme de couplage fluide-particule. Avec le même jeu de paramètres numériques, nous détaillons ici les simulations des trois régimes d'écoulement caractérisés expérimentalement. L'analyse se porte d'abord sur l'évolution de la particule, puis sur le champ fluide. Avant de conclure, on détaille les ressources utilisées pour cette étude.

#### Comportement de la particule

La première étape de validation consiste à reproduire le mouvement transitoire de la particule pour les trois nombres de Reynolds. Les résultats assemblés sur la figure 5.10 montrent un bon accord global des simulations et des données expérimentales. À  $Re_p = 1.5$ , l'état stationnaire est bien reproduit, avec un écart inférieur à 5%. Cet équilibre correspond à la portée importante du champ perturbé par la sphère, ce qui induit une résistance due aux parois. Cette résistance est non négligeable vu l'écart de 5% entre la vitesse maximum et la vitesse  $U_\infty$  calculée pour un milieu infini. Le nombre de Reynolds augmentant, cet écart doit diminuer avec la portée des effets visqueux. Ce comportement n'est pas clair sur les résultats, car pour les deux nombres de Reynolds les plus importants, la vitesse limite de chute n'est pas tout à fait atteinte. Pour ces deux régimes, le moment de l'impact est très différent du cas  $Re_p = 1.5$ .

On ne voit quasiment pas les effets de la lubrification car la pente finale présente un très fort gradient, assez bien restitué par notre méthode. On note encore une sous-évaluation légère de la vitesse, assez visible de par le retard consécutif.

Le problème le plus visible concerne justement l'étape de la lubrification dans le cas  $Re_p = 1.5$ , pour laquelle on repère des discontinuités non-physiques de la simulation. La figure 5.11 détaille ce cas lorsque l'on module le pas de temps. La convergence de la vitesse vers les valeurs expérimentales est très nette, mais l'étape de lubrification présente toujours le même défaut. Une étude des trajectoires montre que la discontinuité coïncide dans tous les cas à un gap particule-paroi équivalent à une seule maille. À ce stade, la seule solution consiste à utiliser un maillage plus fin, ou un modèle de lubrification. Cette étude nous donne néanmoins des précisions sur la convergence en temps. On remarque que l'accélération initiale converge vers la valeur théorique  $A_0 = U_\infty/\tau_0 \sim 0.704 [m/s^2]$ . L'ordre de convergence est comme précédemment voisin de 1 (0.98).

## Comportement du fluide.

### *Comparaison des champs PIV et numériques.*

Cette section aborde l'évolution du champ de vitesse lors du mouvement de la particule. Chacune des fenêtres PIV est traitée afin d'enlever les vecteurs manifestement faux qui sont localisés principalement sur les bords et au niveau de l'interface fluide-particule. Ces fenêtres sont ensuite connectées dans un plan afin de recomposer une image contenant la particule et son sillage. Les comparaisons avec les champs simulés sont présentées sur la figure 5.12. La première remarque concerne les champs expérimentaux. Chaque zone blanche horizontale marque le passage d'une fenêtre d'acquisition à l'autre. Bien que chacune de ces fenêtres d'acquisition corresponde à une expérience différente, les champs se connectent très bien dans le temps, au fur et à mesure que le sillage s'étend d'une façon continue d'une fenêtre à l'autre. La conséquence est que la reproductibilité de l'expérience n'est pas discutable.

La direction du champ de vitesse est indiquée par les vecteurs, et sa magnitude par des lignes d'isovaleurs. Les zones montrant des directions incohérentes et une magnitude très faible sont dominées par le bruit expérimental. Les champs sont présentés pour trois temps spécifiques  $\tau_{str} \simeq 0.1s$ ,  $\tau_{acc} \simeq 0.5s$  et  $\tau_{std} \simeq 1s$  dont les indices désignent respectivement la phase initiale, la phase d'accélération et la phase stationnaire. Les isovaleurs de la magnitude normalisée  $|u|/U_\infty$  s'échelonnent entre 0 et 100% de la vitesse maximum de chute, qui est également la vitesse maximum dans le fluide pour ces régimes d'écoulement modérés.

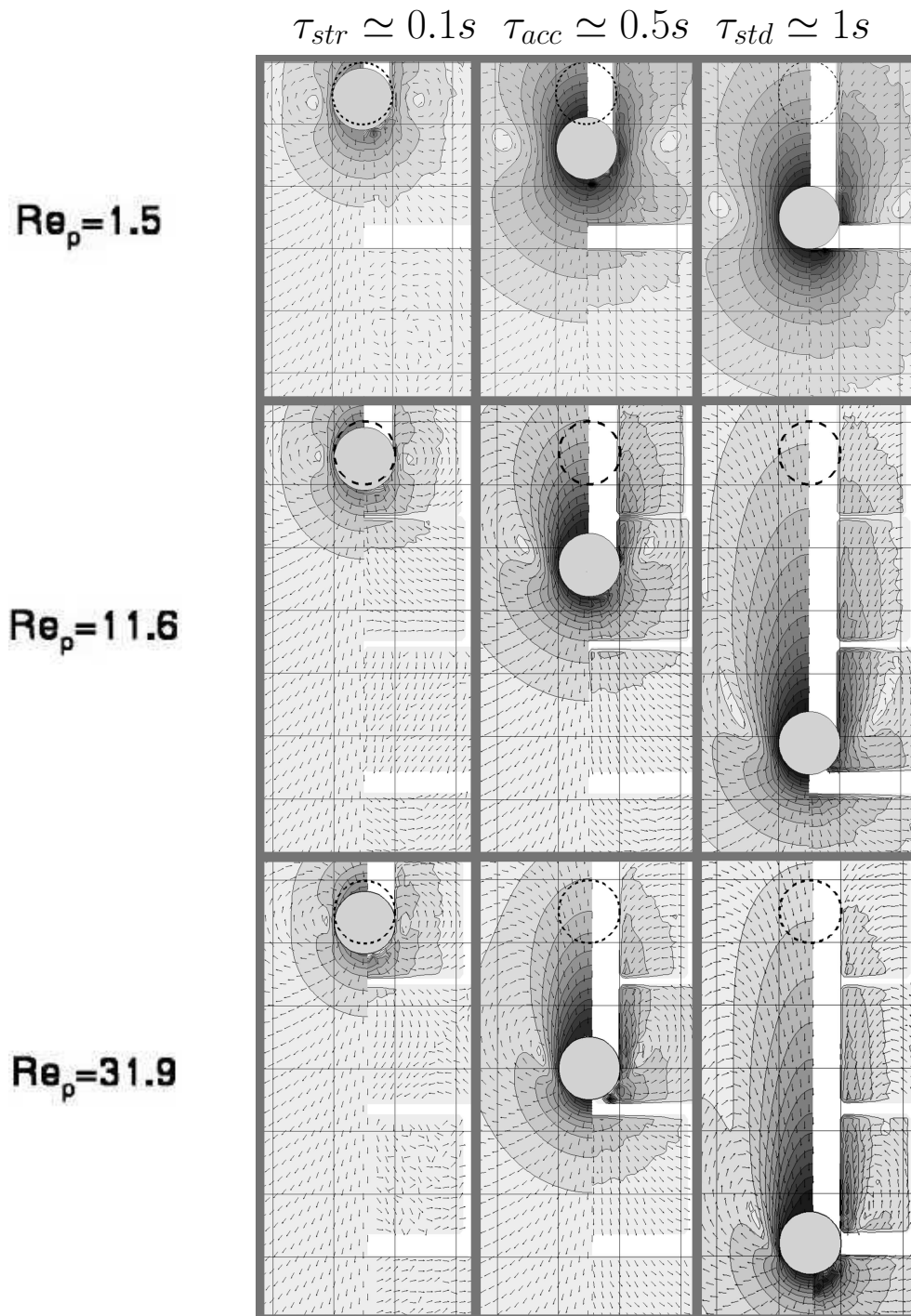


FIG. 5.12: Comparaison des simulations et des mesures PIV respectivement placées du côté gauche et du côté droit de chacune des neuf images. Isovaleurs de la magnitude de la vitesse  $|u|/U_\infty$ , direction du champ de vitesse. Le cercle en pointillés matérialise la position de départ de la sphère.



---

$Re_p[-]$	$\tau_a[s]$	$\tau_\nu[s]$	$\tau_0^1[s]$	$\tau_0[s]$
1.5	0.395	0.585	0.037	0.054
11.6	0.165	1.915	0.124	0.177
31.9	0.117	3.724	0.241	0.345

---

TAB. 5.1: Échelles de temps caractéristiques liées respectivement aux phénomènes suivants : advection, diffusion, relaxation sans masse ajoutée, relaxation. Évolution des échelles pour des nombres de Reynolds  $1.5 < Re_p < 31.9$ .

---

En comparant les deux côtés de chaque figure, on montre que la simulation reproduit précisément le comportement du fluide. On remarque pour les deux résultats l'influence des effets inertiels lorsque le régime d'écoulement augmente. plus le régime est élevé, plus l'extension latérale du champ fluide décroît. Trois échelles de temps caractéristiques détaillées dans le tableau 5.1.6 peuvent illustrer les différentes contributions de l'advection, de la diffusion, et de la relaxation au comportement du fluide. Le temps d'advection  $\tau_a = d_p/U_\infty$  caractérise l'ordre de grandeur du temps mis par la particule pour parcourir la distance  $d_p$ . On reconnaît le temps de relaxation associé à la particule,  $\tau_0$ , et ce même temps auquel on retranche la contribution due à la masse ajoutée,  $\tau_0^1$ . On connaît également le temps de relaxation associé au fluide,  $\tau_\nu$ , qui quantifie le temps nécessaire à la quantité de mouvement pour diffuser par effet visqueux sur une longueur  $d_p$ . Comme le ratio  $Re_p = \frac{\tau_\nu}{\tau_a}$  augmente avec le régime d'écoulement, la diffusion de quantité de mouvement dans le sillage est plus lente que le temps d'advection de la particule, ce qui explique la rémanence du sillage, et l'allongement vertical des structures situées sur les côtés de la sphère. Ces structures sont la trace d'un vortex annulaire et se localisent là où la magnitude de la vitesse est très faible.

### ***Étude locale du champ de vitesse.***

Cette section aborde une validation plus fine des amplitudes respectives de chaque composantes de vitesse. Dans cette optique, la méthode de ten Cate *et al.* (2002) consiste à définir un point de contrôle en un lieu particulier de l'écoulement, situé à la distance  $d_p$  de l'axe de sédimentation, et à l'altitude  $y = d_p$  (voir la figure 5.1). La figure 5.13 représente la mesure des composantes de vitesse  $u_x(t)$  et  $u_y(t)$  en ce point, en comparaison des résultats numériques. Dans le cas  $Re_p = 1.5$ , on remarque une accélération directement suivie d'une décélération.

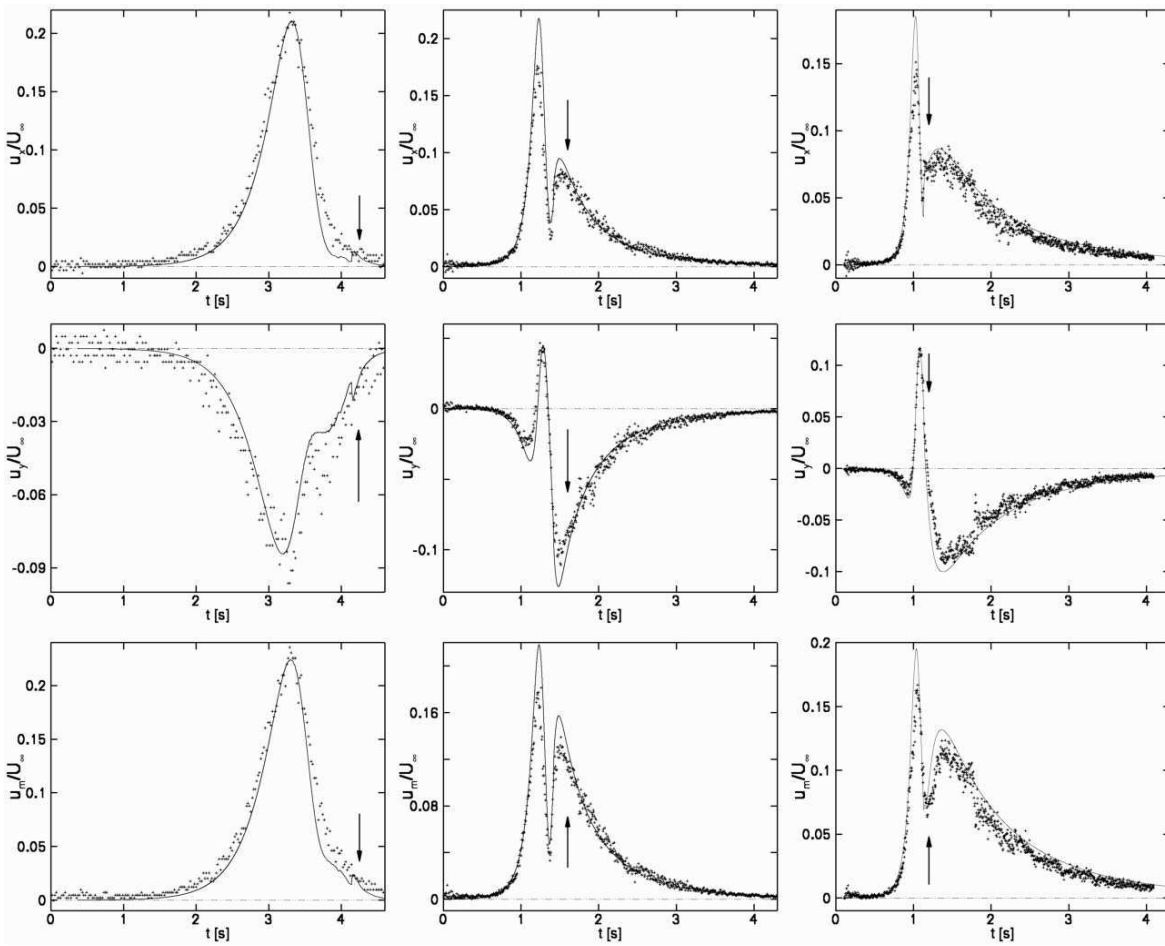


FIG. 5.13: Comparaison des composantes de vitesse  $u_x/U_\infty$  et  $u_y/U_\infty$ , et de leur norme  $u_m/U_\infty$  au niveau du point de contrôle défini sur la figure 5.1. Simulations (-). Mesures expérimentales (+). De gauche à droite,  $Re_p = 1.5, 11.6$  et  $31.9$ . Les flèches indiquent l'instant de l'impact de la sphère sur la paroi du fond.

En fait, la portée du champ fluide perturbé par la sphère, et le ralentissement de la sphère sont fortement couplés, et à l'instant où la particule touche le fond, le fluide est quasiment au repos. Cette corrélation forte due à la grande portée des effets visqueux disparaît avec l'augmentation du régime d'écoulement.

En effet en étudiant les composantes de la vitesse à  $Re_p = 11.6$  et  $31.9$  après l'arrêt de la particule, on voit que l'écoulement est loin d'être au repos et qu'il faut attendre de deux à trois fois le temps de chute de la particule pour que l'énergie qu'elle a transmise au fluide se dissipe. Physiquement, cet effet inertiel se manifeste surtout quand le fluide contenu dans le sillage contourne la particule à l'arrêt, car le point de contrôle se trouve précisément dans ce flux. Pour une explication plus précise, analysons la composante  $u_x/U_\infty$  à  $Re_p = 11.6$ . D'abord on trouve une accélération commune à tous les cas.

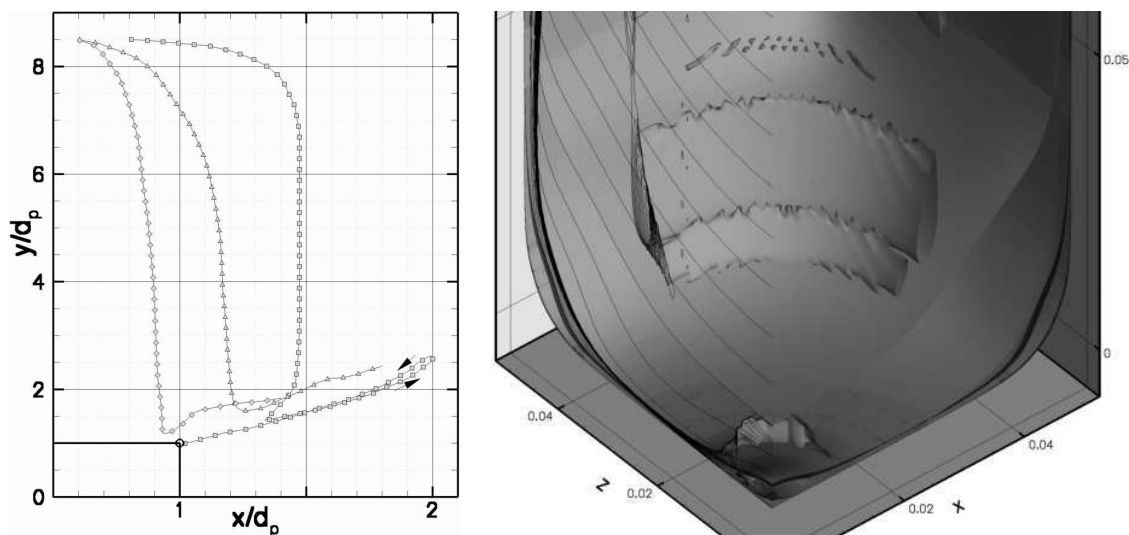


FIG. 5.14: À gauche : trajectoire de la recirculation dans le plan  $(x, y)$ ,  $Re_p = 1.5$  ( $\square$ ),  $11.6$  ( $\triangle$ ) et  $31.9$  ( $\diamond$ ); position du point de contrôle. À droite : cas  $Re_p = 11.6$ ; superposition des iso-surfaces  $|u|/U_\infty$  correspondant aux recirculations visualisées à trois instants différents; trace des iso-surfaces  $|u|/U_\infty$  dans le plan  $(z, y)$  au cours du temps.

La décélération consécutive est attribuée au centre du vortex qui s'approche du point de contrôle. Le gradient violent qui suit est dû au ralentissement de la particule qui est alors contournée par le fluide de son sillage. La conséquence est que le vortex qui s'approchait du point de contrôle est brusquement rejeté, et le point se trouvant de nouveau dans le flux, on trouve une nouvelle accélération. Ce phénomène finit par s'amortir par dissipation visqueuse, d'où la lente décélération dans le fluide. La figure 5.14 montre la trajectoire de la recirculation dans chacun des cas. On note que la recirculation s'écarte de la particule puis se stabilise à une distance d'autant plus grande que le régime est faible. le rejet de la recirculation est mis en évidence dans chacun des cas.

Bien que les processus instationnaires impliqués ici soient relativement complexes, nos simulations parviennent à prédire les gradients et les amplitudes de chaque composante d'une manière très précise. Quelques différences subsistent : (i) En étudiant  $u_m/U_\infty$  on note une sur-estimation au niveau des maximums. Il pourrait s'agir du couplage qui n'est pas complètement valide, avec un équilibre favorisant la vitesse transmise au fluide au détriment de la vitesse de la particule. (ii) Quelques problèmes apparaissent pour le cas  $Re_p = 1.5$ . Les résultats sont obtenus avec une résolution en temps  $\alpha = 540$ , et le retard constaté sur la figure 5.11 est corrigé en contractant l'échelle temporelle d'environ 10%. Le plateau constaté à  $t \simeq 3.6s$  pour la composante  $u_y/U_\infty$  est un peu éloigné des données expérimentales.

Néanmoins la dispersion verticale élevée des points expérimentaux à cet endroit permet d'envisager la présence d'un plateau de vitesse analogue au notre. (iii) Pour le même cas, on remarque une discontinuité dans l'évolution de la vitesse du fluide lors de l'impact de la particule. C'est la conséquence des faibles effets inertiels dans le sillage, mais certainement amplifiés par l'anomalie remarquée pour  $U_p(t)$  lorsque le gap particule–paroi équivaut à une maille. Cependant, le bruit expérimental est trop fort ici pour infirmer ou confirmer ce comportement.

On peut enrichir cette comparaison en analysant les résultats des simulations Lattice–Boltzmann présentées par ten Cate *et al.* (2002) (voir Annexe A 156). Concernant le problème (i), il n'y a pas de sur–estimation locale de la vitesse. Par–contre, pour une résolution équivalente et les régimes les plus faibles, on peut noter que la méthode LB approche moins bien la solution. Par exemple, le plateau noté en (ii) apparaît également (ce qui confirme sa présence réelle), mais d'une façon trop prononcée, et plus éloignée des données expérimentales. Le problème relevé en (iii) n'apparaît pas avec la méthode LB, et peut être attribué à l'absence de modèles de lubrification dans notre propre méthode.

### Ressources nécessaires.

Ici, nous présentons les moyens informatiques mis en œuvre lorsque nous avons effectué cette étude. Prenons le cas dont le régime d'écoulement est le plus faible, il faut alors exécuter le code pour un maillage de 400000 points (maillage  $50 \times 50 \times 160$ ), avec plus de 40000 itérations en temps (pour  $\Delta t = 1.10^{-4}[s]$ ). La mémoire vive utilisée est d'environ 1.12 Go. Sur un super–calculateur IBM–AIX p690, avec la version monoprocesseur du code, 390H CPU ont été nécessaires pour mener la simulation à son terme. En temps réel, cette simulation nécessite typiquement une vingtaine de jours.

### 5.1.7 Conclusion.

Lors de cette étude, nous avons abordé des écoulements relativement complexes, car le comportement global relève d'effets à la fois inertiels et visqueux, dont les contributions aux équations de conservation sont équivalentes. Pour ces régimes, les parois jouent aussi un rôle non–négligeable. Le code de calcul est donc confronté à deux obstacles : (i) Le problème d'une modélisation correcte des couplages fluide–particule, fluide–paroi, particule–paroi. (ii) La nécessité de réaliser un équilibre correct entre les contributions inertielles et visqueuses lors des différentes phases de la sédimentation.

Les DNS présentées ci-dessus montrent que tout ces objectifs sont atteints d'une manière très satisfaisante, et qu'une fois la simulation validée, on peut atteindre des précisions élevées et observer des phénomènes inaccessibles aux méthodes expérimentales. Dans la continuité de notre démonstration, la partie suivante est consacrée à l'investigation de régimes d'écoulement plus élevés.

## 5.2 Sédimentation d'une sphère, investigation d'un régime critique.

Cette section développe les moyens mis en œuvre pour étendre le champ d'investigation de la méthode en approchant des régimes de sédimentation de modérés à élevés. En fait il existe une limite localisée dans la gamme  $Re_p \in [250, 300]$ , pour laquelle on observe l'apparition des premières instabilités de sillage ou de trajectoire. Pour ce type d'écoulement il n'existe que peu de références fiables dans la littérature, notamment lorsqu'il s'agit de la topologie du fluide. Pour la validation du code nous nous basons sur deux types de résultats :

(i) des mesures expérimentales de la trajectoire d'une sphère dure pour des régimes élevés, obtenues à partir des travaux de Mordant et Pinton (2000) ; (ii) des résultats provenant généralement de travaux numériques concernant des écoulements autour d'une sphère fixe pour des régimes élevés (voir par exemple les travaux de Johnson et Patel (1999) et Kim et Choi (2002)).

Dans le premier cas, les données permettent de valider l'équilibre dynamique entre force de flottabilité et force de traînée au niveau de la particule, mais elles ne nous apprennent rien sur la structure du sillage de la particule. D'autre part dans le cas d'un nombre de Stokes élevé, la particule n'est sensible ni aux fluctuations du champ fluide, ni à l'influence de son sillage. Par conséquent on peut poser une analogie avec le cas d'une sphère fixe dans un écoulement uniforme à l'infini, et utiliser les résultats de la littérature. Mais dans un cas plus général, ces références ne permettent au plus qu'une validation partielle.

Pour cette raison nous avons réalisé une comparaison entre notre méthode et le code Lattice-Boltzmann utilisé dans les travaux de ten Cate *et al.* (2002, 2004). En partant d'une configuration numérique analogue, les résultats sont comparés en terme de précision et de performance, sur le cas d'une sphère solide sédimentant à un nombre de Reynolds particulière  $Re_p = 280$ . Comme les deux méthodes utilisent deux approches très différentes, une comparaison positive reviendrait en quelque sorte à une double validation.

$Re_p$	$St$	$\mu_f$	$\rho_f$	$\rho_p$	$U_\infty$	$\tau_0$	$\tau_{95}$	$d_{95}$
[–]	[–]	[Pa.s]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[kg/m <sup>3</sup> ]	[m/s]	[s]	[s]	[m]
280	240	$8.9 \cdot 10^{-4}$	1000	7710	$0.316 \pm 1\%$	0.328	0.108	0.0233

TAB. 5.2: Configuration expérimentale pour le cas  $Re_p = 280$  (voir Mordant et Pinton (2000)).

### 5.2.1 Définition de l'expérience

Le cas étudié ici est tiré des expériences de Mordant et Pinton (2000). Les caractéristiques et les résultats principaux de ces mesures sont reportés en annexe A page 158. En résumé, il s'agit de la sédimentation d'une sphère en milieu quasi-illimité (confinement radial  $k$  de l'ordre de  $1 \cdot 10^{-3}$ ). La plupart des régimes d'écoulement étudiés nous sont inaccessibles car au-dessus d'un nombre de Reynolds de 1000, la DNS devient prohibitive. On choisit le régime  $Re_p = 280$  obtenu par la sédimentation d'une bille d'acier de diamètre  $d_p = 8 \cdot 10^{-4}$  [m] dans de l'eau à  $25^\circ C$ . Les auteurs montrent que la trajectoire de la sphère reste rectiligne et verticale, et que la vitesse de la particule peut être reproduite à l'aide de la loi exponentielle  $U_p(t) = (U_\infty(1 - e^{-\frac{3t}{\tau_{95}}}))$ . Le temps caractéristique  $\tau_{95}$  associé à la durée de la phase transitoire évolue *a priori* comme une fonction  $\tau_{95}(Re_p, \rho_p/\rho_f)$  du nombre de Reynolds et du ratio des densités (soit une fonction du couple  $(Re_p, St)$ ). Avec l'expression de  $U_p(t)$ , on peut évaluer la distance verticale caractéristique  $d_{95}$ , qui correspond à la distance parcourue par la sphère sur une durée  $t = \tau_{95}$ , ce qui est très utile au dimensionnement de la hauteur du domaine de calcul. Toutes ces données sont détaillées dans la table 5.2.

### 5.2.2 Approche numérique du problème

#### Pré-dimensionnement des simulations 1-Fluide et Lattice-Boltzmann

Notre but consiste ici à reproduire la trajectoire, et ensuite d'étudier et comparer la topologie du sillage obtenu par nos méthodes numériques respectives. À cause du confinement excessivement faible, la configuration expérimentale exacte ne peut être raisonnablement envisagée. Cependant, les nombres de Stokes et de Reynolds sont suffisamment élevés pour que l'on puisse se permettre d'augmenter le confinement sans effet perceptible sur la trajectoire de la particule. On adopte un domaine cylindrique, de hauteur  $L_y = 0.064$  [m], et de section carrée de surface  $L_x \times L_z = 0.004$  [m]  $\times$   $0.004$  [m].

La taille de la particule et les propriétés physiques des deux phases sont exactement les mêmes que dans le cas expérimental. La bille est lâchée à une vitesse initiale  $U_p(t = 0) = 0$  sur l'axe vertical du domaine. Le gap particule/paroi normalisé est initialement défini à  $h/d_p = 74.5$ . Comme les effets du confinement sur la bille doivent être négligeables, on adopte des conditions aux limites de type paroi sur toutes les faces du domaine. Comme le sillage peut potentiellement devenir complètement 3D, nous ne pouvons plus admettre de plans de symétrie, et la simulation porte sur la sphère entière.

### **Simulations 1–Fluide préliminaires : introduction du Lagrangien Augmenté généralisé.**

Les simulations préliminaires sont basées sur un jeu de paramètres numériques analogues à ceux que l'on a déterminé dans la section 5.1. Les premiers résultats sont très éloignés des comportements attendus : tout d'abord on commet une erreur d'environ 50% sur la vitesse transitoire de la particule, et la loi obtenue est loin d'être de type exponentiel. Ensuite la topologie du champ fluide n'est pas physique et semble affectée par un problème de pénalisation. Cela veut dire que notre façon de pénaliser ne tient pas compte de phénomènes que l'on pouvait négliger à un régime moindre, mais qui deviennent critiques dans le cas présent. La pénalisation de l'incompressibilité ne semble pas en être la source. Par-contre, une analyse physique du processus transitoire montre que la pénalisation de l'indéformabilité nécessite d'être adaptée en temps. Lors de l'accélération de la particule, on peut très bien avoir une prédominance alternative soit du terme instationnaire convectif soit du terme associé à la gravité. De ce fait, il se peut que la pénalisation constante soit valable pour une partie du processus, et inadéquate pour l'autre. La solution consiste à modifier et étendre cette technique au cas d'une particule solide, avec deux objectifs :

(i) la méthode doit distinguer la nature solide ou liquide du point considéré et tenir compte de cette nature lors de l'évaluation des différents termes des équations de conservation.

(ii) la méthode doit assurer d'une façon dynamique la pénalisation de l'incompressibilité et la pénalisation de l'indéformabilité.

Pour des Reynolds de l'ordre de 300, on sait que les écoulements peuvent typiquement présenter une phase transitoire, une phase stationnaire et une singularité suivie d'une phase oscillante. Le terme instationnaire, le terme convectif, les forces volumiques ou le

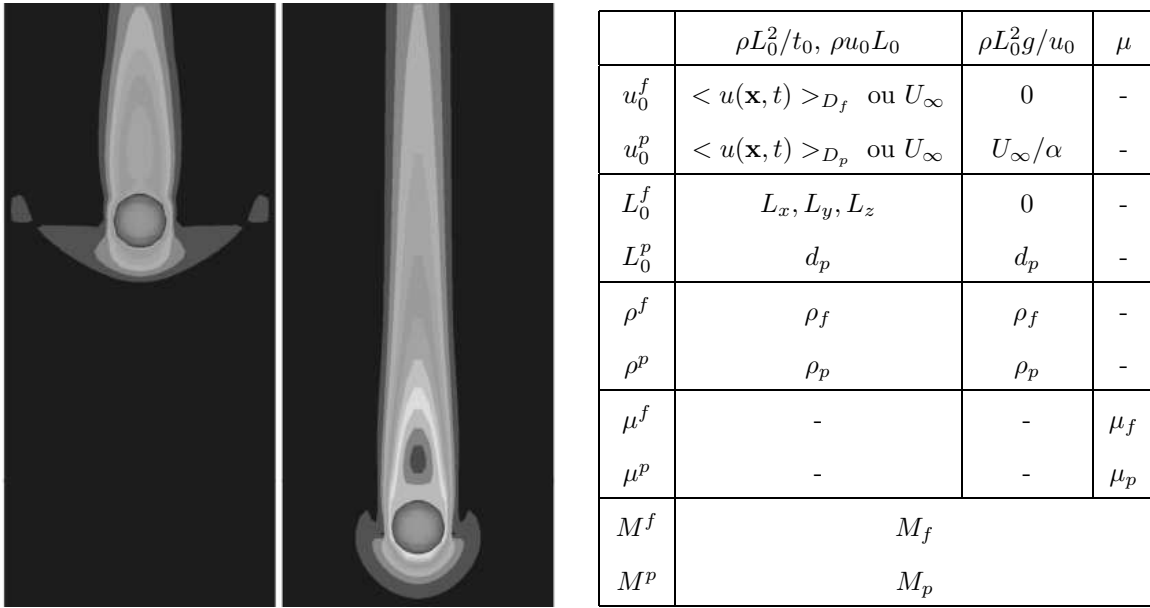


FIG. 5.15: (i) Sédimentation d'une sphère à  $Re_p = 280$ , coupe médiane du domaine de calcul. Comparaison au temps  $t/\tau_{95} = 0.94$  des méthodes Lagrangien Augmenté variable (à gauche) et Lagrangien Augmenté généralisé (à droite). Iso-valeurs du module du champ de vitesse  $|u|$ . (ii) Définition des échelles caractéristiques utilisées par la méthode du Lagrangien Augmenté généralisé, dans le cas particulier d'une sphère en sédimentation dans un fluide visqueux. Les colonnes correspondent respectivement de gauche à droite au terme instationnaire convectif, au terme associé à la gravité et au terme associé aux contraintes visqueuses.

terme visqueux, tous sont donc potentiellement prédominants suivant la phase considérée et la dynamique de l'écoulement. La méthode généralisée fonctionne de la manière suivante. Comme le paramètre de pénalisation local  $\lambda(\mathbf{x}, t)$ , toutes les viscosités spécifiques  $\kappa$ ,  $\zeta$ , et  $\eta$  sont considérées comme étant variables en temps et en espace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(\mathbf{x}, t) \\ \kappa(\mathbf{x}, t) \\ \zeta(\mathbf{x}, t) \\ \eta(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\} = \begin{cases} M_f \times \max(\rho^f L_0^{f2}/t_0^f, \rho^f u_0^f L_0^f, \rho^f L_0^{f2} g/u_0^f, p_0^f L_0^f/u_0^f, \mu^f), & \mathbf{x}(t) \in D_f. \\ M_p \times \max(\rho^p L_0^{p2}/t_0^p, \rho^p u_0^p L_0^p, \rho^p L_0^{p2} g/u_0^p, p_0^p L_0^p/u_0^p, \mu^p), & \mathbf{x}(t) \in D_p. \end{cases} \quad (5.3)$$

On reconnaîtra à droite tous les termes de l'équation de conservation rapportés à la dimension d'une viscosité. Ensuite il suffit d'adapter les échelles caractéristiques  $u_0$ ,  $L_0$ ,  $t_0$ ,  $p_0$  et le coefficient  $M$  à la phase à laquelle se rattachent les viscosités spécifiques.



Dans le fluide, on traite  $\lambda$  comme on le faisait avant. Dans le solide,  $\kappa$ ,  $\zeta$  et  $\eta$  sont traitées de la même façon, mais avec des échelles caractéristiques différentes que l'utilisateur doit définir sur la base d'une estimation physique simple.

Le tableau de la figure 5.15 montre notre façon de moduler les échelles caractéristiques pertinentes afin d'adapter la méthode au cas de la sédimentation en régime élevé. En utilisant les critères tels qu'ils sont présentés dans le tableau, on distingue  $u_0^i$ ,  $L_0^i$ ,  $t_0^i$ ,  $p_0^i$  et  $M^i$  selon la phase  $i$ . Concernant les vitesses caractéristiques dans le terme instationnaire convectif, on pose un choix entre une moyenne spatiale des vitesses par phases  $u_0 = \langle u(\mathbf{x}, t) \rangle_{D_i}$  et une vitesse caractéristique constante  $u_0 = U_\infty$ . Pour le terme associé à la gravité,  $u_0$  est calculé à partir de l'accélération initiale  $A_0 = U_\infty/\tau_0$ , et du pas de temps  $\Delta t$ , soit  $u_0 = A_0 \times \Delta t = U_\infty/\alpha$ .  $M_f$  permet de moduler la pénalisation de l'incompressibilité, tandis que  $M_p$  permet de moduler la pénalisation de l'indéformabilité, tel qu'on le faisait en fixant un rapport de viscosité entre les deux phases. La figure attenante au tableau montre, les autres paramètres restant inchangés, que le Lagrangien Augmenté généralisé donne des résultats beaucoup plus réalistes.

## Résolution spatiale et temporelle des simulations

### 1–Fluide et Lattice–Boltzmann

Dans cette partie, on détaille les résolutions en espace et en temps qui ont été choisies pour chacune des méthodes. La méthode 1–Fluide est testée sur un grille cartésienne de taille  $800 \times 50 \times 50$ , ce qui correspond à un diamètre  $d_p$  de 10 mailles, et le pas de temps est choisi tel que  $\alpha = \tau_0/\Delta t = 4686$ . La simulation LB est effectuée sur une grille cartésienne de taille  $1280 \times 80 \times 80$  soit un diamètre  $d_p$  correspondant à 16 mailles, avec un pas de temps  $\Delta t$  constant tel que  $\alpha = \tau_0/\Delta t = 24095$ . Plusieurs simulations ont été faites avant d'arrêter notre choix sur ces paramètres. On remarque que les prédictions de la méthode LB s'améliorent lorsque la résolution spatiale augmente, et que l'écart à la loi expérimentale est acceptable à partir de la résolution  $d_p = 16$ . De la même façon, la prédiction du modèle 1–Fluide converge lorsque la résolution spatiale est successivement définie avec  $d_p = 7, 8$  et  $10$ . Cependant, il n'y a pas de modification significative ni de la trajectoire de la particule, ni de la topologie des champs de vitesse lorsque que l'on passe de  $d_p = 8$  à  $d_p = 10$ . Pour cette raison et au regard de ressources de calcul limitées, la résolution  $d_p = 16$  n'a pas été testée pour la méthode 1–Fluide. Les autres paramètres numériques associés à notre méthode ont fait l'objet d'une optimisation, et sont indiqués en annexe C page 172. Notons qu'une fois la méthode optimisée, on remplace le schéma de transport VOF par le schéma LAG, qui donne les mêmes résultats à court terme, mais qui permet d'éviter les déformations qui se manifestent avec VOF à long terme.

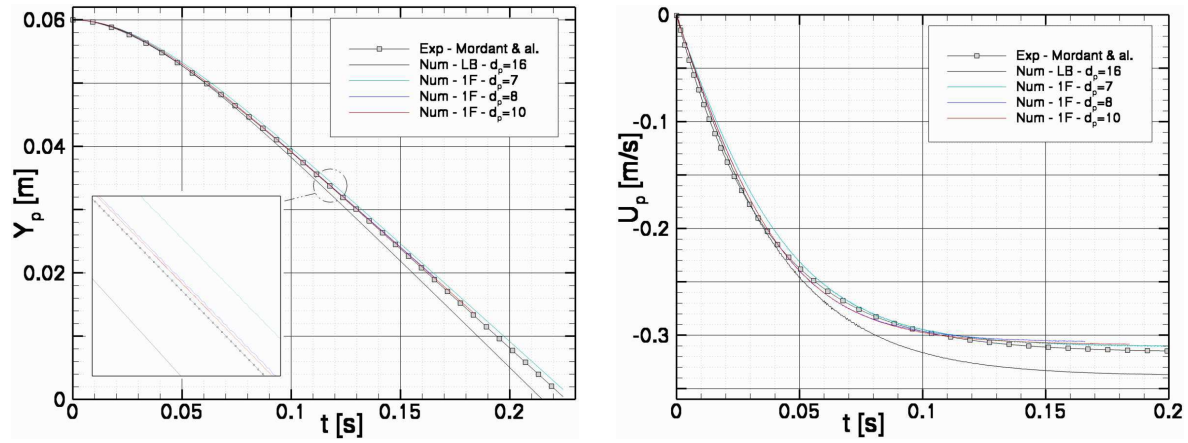


FIG. 5.16: Cas de la sédimentation d'une sphère à  $Re_p = 280$ . Altitude  $Y_p(t)$  du centre de la particule (à gauche), composante verticale  $U_p(t)$  de la vitesse de la particule (à droite). Lissage des résultats expérimentaux de Mordant et Pinton (2000). Méthode LB. Méthode 1F (résolutions  $d_p = 7, 8$  et 10).

### 5.2.3 Résultats des simulations

#### Comparaison des trajectoires

Les prédictions pour la vitesse de sédimentation  $U_p(t)$  et l'altitude de la sphère  $Y_p(t)$  sont comparées à la loi expérimentale sur la figure 5.16. Concernant la vitesse, nos modèles satisfont globalement les temps caractéristiques et les vitesses limites expérimentales connues par le biais de la relation exponentielle (A.22). Les deux méthodes prévoient une trajectoire rectiligne et verticale, conformément aux observations expérimentales. L'écart réalisé sur la vitesse limite de chute  $U_\infty$  est d'environ 2% pour notre méthode et de 6% pour la méthode LB, alors que la convergence spatiale a été notée pour les deux méthodes (voir par exemple la zone magnifiée sur la figure 5.16 représentant  $Y_p(t)$ ). Par conséquent, les trajectoires représentées approchent très bien la relation expérimentale entre l'instant initial et  $t \simeq 0.22[s]$  correspondant à l'arrivée de la particule sur la paroi inférieure.

#### Comparaison des champs de vitesse et de la structure du sillage

L'écoulement est analysé dans un des plans de symétrie verticaux du domaine. On compare la magnitude du champ de vitesse  $|u|/U_\infty$  entre les figures 5.17(a) et 5.17(b) correspondant respectivement à la simulation 1F aux instants  $t = 0.028, 0.091, 0.175 [s]$  puis à la simulation LB aux instants  $t = 0.027, 0.088, 0.177 [s]$ . La grille en surimpression comporte un index se référant au rapport entre la position verticale de la sphère et  $d_p$ . Le cercle noir indique la position initiale de la sphère. On utilise des lignes de courant 3D dans le cas 1F, et projetées dans le cas LB, afin d'illustrer la direction du champ de vitesse.

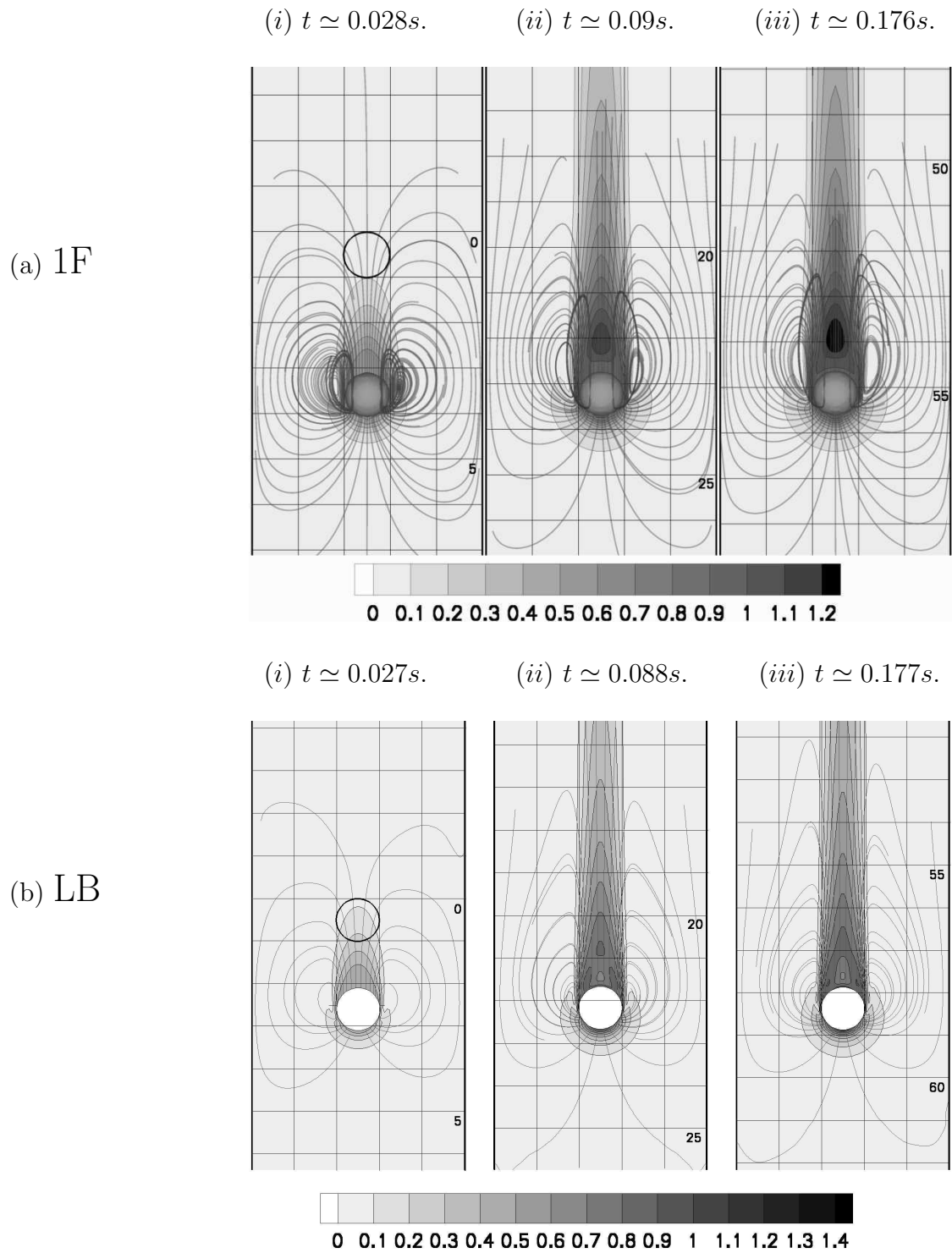


FIG. 5.17: Vues d'une section verticale du champ fluide,  $Re_p = 280$ , simulations 1F (a) et LB (b).

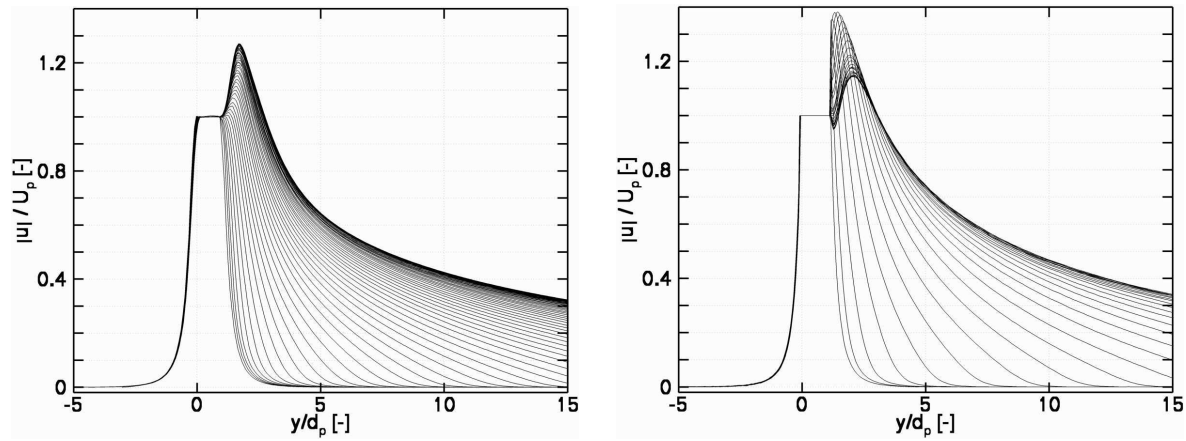


FIG. 5.18: Distribution axiale de la magnitude de la vitesse  $|u(y/d_p, t)|/U_p(t)$ , le temps  $t$  variant entre 0.0375 [s] et 0.125 [s] par pas de 0.0375[s] avec la méthode 1F (gauche), et par pas de 0.0681 [s] avec la méthode LB (droite).

En étudiant la distribution spatiale de la magnitude  $|u|/U_\infty$  lors de la phase transitoire, on peut remarquer la naissance et la croissance d'une recirculation derrière la sphère, tandis que le champ amont tend rapidement vers un état stationnaire. Une comparaison des champs 1F et LB est faite à l'instant  $t = 2 \times \tau_{95}$  à partir duquel on observe une vitesse  $U_p$  stationnaire. On peut localiser la quasi-totalité du fluide perturbé en deux endroits spécifiques, en visualisant l'isovaleur  $|u|/U_\infty < 2\%$ .

(i) Au niveau du champ amont, qui s'inscrit de toute évidence dans une topologie sphérique. Les deux méthodes montrent que le centre de cette topologie se situe sur l'axe et à une altitude  $Y_c \simeq Y_p - 0.3a$  (1F :  $Y_c = 0.29$ , LB :  $Y_c = 0.34$ ), et que la magnitude du champ fluide devient négligeable ( $|u|/U_\infty < 2\%$ ) à environ deux diamètres en amont du centre de la sphère.

(ii) Au niveau du champ aval, où les deux méthodes prédisent que le sillage est borné par un cylindre vertical d'un diamètre de l'ordre de  $2d_p$  (1F :  $1.94 d_p$ , LB :  $1.91 d_p$ ), et d'une hauteur  $Y_s - Y_p$  correspondant quasiment à la distance parcourue par la sphère (1F :  $Y_s - Y_p = 65 d_p$ , LB :  $Y_s - Y_p = 67 d_p$ ). Cela signifie que lors de la phase transitoire, l'arrière du sillage ne s'est déplacé que de 3 à 5 diamètres par diffusion visqueuse tandis que la sphère s'est déplacée de 70 diamètres.

Les différences entre les deux approches sont principalement induites par l'écart entre les vitesses limites de chute. Comme la méthode 1F a tendance à sous-estimer cette vitesse et la méthode LB à la sur-estimer, l'équilibre des forces induit une énergie cinétique transmise au fluide plus importante dans le cas 1F. Cela peut expliquer pourquoi l'extension du champ fluide est visiblement plus faible dans le cas de la simulation LB.

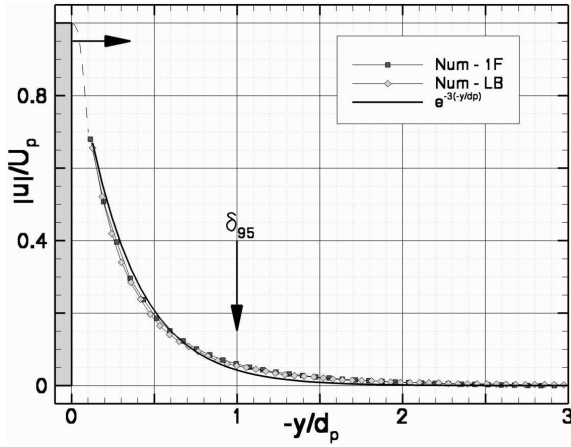


FIG. 5.19: Distribution axiale amont de la magnitude de la vitesse  $|u(-y/d_p, t)|/U_p(t)$ , méthode 1F (■), méthode LB (◇), approximation (—). La flèche horizontale indique le sens de déplacement de la sphère schématisée par la zone grisée.

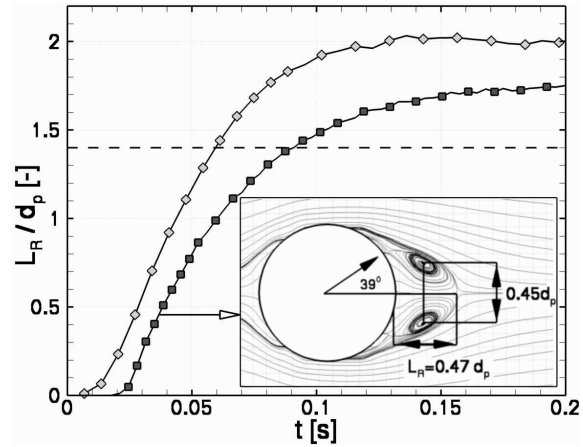


FIG. 5.20: Croissance de la longueur de recirculation  $L_R/d_p$  au cours du temps. Méthode 1F (■), méthode LB (◇), référence de Kim et Choi (2002) en sphère fixe (---). Encart : coupe du champ fluide en repère mobile pour la simulation 1F,  $L_R/d_p = 0.47$ .

Le développement du sillage est détaillé sur la figure 5.18, où la distribution axiale de la magnitude de la vitesse  $|u(y/d_p, t)|/U_p(t)$  est reportée dans un repère mobile par rapport au repère du laboratoire et fixe par rapport à la sphère. Le centre de celle-ci se situe dans le nouveau repère à l'altitude  $y/d_p = 0.5$ . Pour chacune des méthodes, on retrouve l'allongement considérable du sillage, mais surtout on note une convergence nette vers un profil stable, ce qui justifie l'hypothèse de pseudo-stationnarité admise lorsque la particule atteint sa vitesse limite. Un fait remarquable peut être noté quant au profil amont qui reste parfaitement auto-similaire sur l'intégralité de la phase transitoire. La caractérisation de ce profil est illustrée sur la figure 5.19. La concordance des deux méthodes de simulation est nette, et permet donc une approximation commune valable dans le repère attaché à la sphère et basée sur un décrétement de type exponentiel :

$$|u(y/d_p, t)|/U_p(t) = e^{-3(-y/d_p)}, \quad y/d_p < 0. \quad (5.4)$$

Définissons la distance,  $\delta_{95}$ , pour laquelle la perturbation du champ fluide devient négligeable, par exemple  $e^{-3(-\delta_{95}/d_p)} = 5/100$ , ce qui donne en valeur absolue  $\delta_{95} = d_p$ . Cette grandeur peut être assimilée à une profondeur caractéristique de pénétration du champ fluide par diffusion visqueuse. Cela signifie qu'en amont de la particule où la topologie est sphérique, les points situés à plus d'un diamètre de distance de l'interface ne ressentent pas la présence de la sphère.

Revenons au reste du profil représenté sur la figure 5.18. Les estimations pour le sillage en champ lointain concordent tout à fait. Juste en aval de la sphère, une recirculation due à l'inertie du fluide est remarquée (voir les zones où  $|u(t)|/U_p(t) > 1$ ). Dans cette zone sensible, la prédiction du comportement dynamique et statique diffère selon la méthode. La simulation 1F prédit une croissance monotone du profil jusqu'au maximum de vitesse dans le fluide. Avec la simulation LB,  $|u(t)|/u_p(t)$  atteint un maximum global avant de se stabiliser sur une valeur moins élevée. Notons que la méthode LB présente un défaut de continuité à l'interface pour cette simulation, et que l'écoulement voisin de la sphère doit être pénalisé par une composante de vitesse anormale (voir les structures dans le sillage de la sphère sur la figure 5.17(b)).

La figure 5.18 est utilisée pour déterminer le développement de la longueur de recirculation  $L_R$ , détaillée sur la figure 5.20. Cette longueur est définie par la position dans le sillage du point où la magnitude de la vitesse du fluide égale la valeur de la vitesse de sédimentation. La première remarque concerne la différence entre le profil  $U_p(t)$  et le profil  $L_R/d_p$ . En représentant l'un en fonction de l'autre à partir de l'instant auquel la recirculation apparaît, la loi obtenue ne devient linéaire qu'à partir de  $t \simeq 0.075$  [s]. Ceci révèle une différence importante entre le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ , et le nombre de Reynolds apparent de l'écoulement. Afin d'illustrer ce propos, l'encart de la figure 5.20 montre une coupe du champ fluide, dans le repère attaché à la sphère, et où l'on détaille la longueur  $L_R/d_p = 0.47$ , l'angle de décollement de la couche limite  $\theta = 39^\circ$  et l'espace entre les recirculations  $L_V/d_p = 0.45$ . Ces valeurs sont très proches de celles de Taneda (1956) pour une sphère fixe à  $Re = 50$  ( $L_R/d_p = 0.42$ ,  $\theta = 40^\circ$ ,  $L_V/d_p = 0.42$ ). Donc le Reynolds apparent de notre écoulement est  $Re \simeq 50$  tandis que le régime correspondant à la vitesse de la sphère est  $Re_p \simeq 180$ . Par la suite le Reynolds apparent rejoint  $Re_p$  car la longueur de recirculation converge vers une valeur constante pour les deux méthodes, mais on observe un écart de 13% à l'état stationnaire.

Comme il en a été fait mention plus tôt, le contraste des densités est considéré comme étant élevé ( $\rho_p/\rho_f = 7.71$ ), donc la contribution au champ de vitesse due aux déplacements latéraux de la sphère est certainement très faible. Cela permet l'usage d'une analogie entre une sphère fixée dans un écoulement uniforme à l'infini, et une sphère mobile en régime pseudo-stationnaire. En se référant aux résultats numériques de Kim et Choi (2002), la longueur de recirculation normalisée derrière une sphère fixe est  $L_R/d_p \simeq 1.4$  dans l'intervalle  $250 < Re_p < 300$ . Chacune des simulations montrent une convergence vers une valeur excédant celle de Kim et Choi (2002). Avec une configuration similaire, Johnson et Patel (1999) estime les vitesses moyennes dans le sillage proche, et prédit une vitesse

maximum dans le fluide  $|u|_m/U_\infty = 1.22$ . Cette valeur prise pour une sphère fixe est bien encadrée par les valeurs des méthodes 1F et LB à l'état stationnaire (1F : 1.269, LB : 1.146).

### Étude du déclenchement des instabilités dans le sillage (I).

Quelque-soit la méthode de simulation utilisée, il est important de noter que la propriété d'axisymétrie de l'écoulement est conservée. D'autre part, il est montré dans les travaux de Mordant et Pinton (2000) que les données non moyennées pour  $Re_p = 280$  ne montre aucun cas d'oscillation de l'inclusion. Néanmoins, ces pistes ne constituent pas une preuve de l'absence d'instabilité dans le sillage, et ces expériences n'apportent pas plus d'indices sur la topologie du fluide. Dans le cas d'écoulements autour de sphères fixes, plusieurs observations concordent sur l'apparition d'instabilités à différents nombres de Reynolds critiques :

- $Re_p < 210$  le sillage reste axisymétrique et stationnaire.
- $210 < Re_p < 250$  une première instabilité se traduit par une transition entre un écoulement stationnaire axisymétrique et un écoulement stationnaire à symétrie plane.
- $250 < Re_p < 300$  une seconde instabilité se traduit par une transition entre un écoulement stationnaire à symétrie plane et un écoulement instationnaire à symétrie plane. Dans les deux cas, le plan de symétrie est sélectionné d'une façon aléatoire.
- $Re_p = 300$  le dernier plan de symétrie est perdu, l'écoulement est instationnaire et totalement 3D. À partir de ce régime, on observe un lâcher périodique de vortex de part et d'autre de l'ancien plan de symétrie.

Le cas d'une sphère mobile est nettement plus complexe car les effets de densité interviennent, et il faut situer le résultat par rapport à une fonction du couple  $(Re_p, St)$ . Dans le cas où le nombre de Stokes est suffisamment faible, le sillage d'une sphère en sédimentation peut engendrer une contre-réaction sur la trajectoire de la particule. Dans le cas  $210 < Re_p < 250$ , deux vortex stables mais de dimensions différentes cohabitent dans le sillage, et peuvent induire une trajectoire oblique de la particule. Dans l'intervalle  $250 < Re_p < 300$ , chacun des deux vortex complémentaires se surpasse alternativement en taille, ce qui peut conduire à des oscillations dans un plan vertical ou oblique. Juste au-dessus de la limite  $Re_p = 300$ , on peut obtenir des trajectoires hélicoïdales. Comme ces phénomènes dépendent à la fois du régime d'écoulement et du contraste en densité, des lieux particuliers du plan  $(Re_p, St)$  correspondent à une composition des processus cités

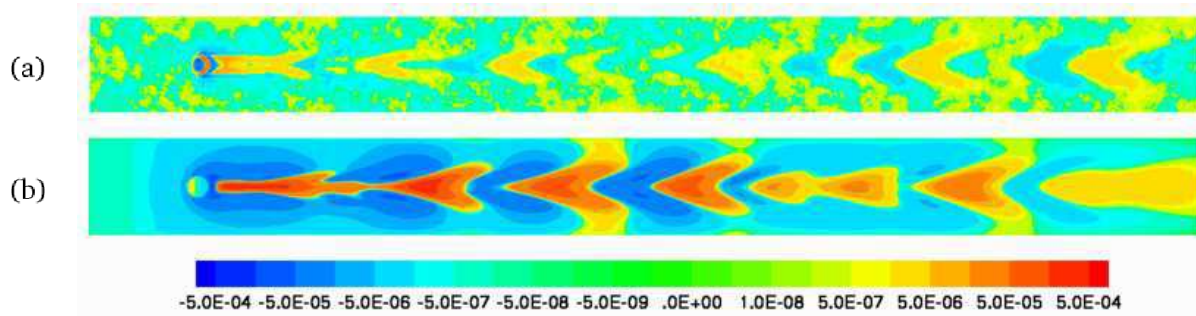


FIG. 5.21: Détection du déclenchement des instabilités dans le sillage. Champ de vitesse orthoradial  $V_z(x, y, 0)/U_\infty$ . Méthode LB avec filtrage spatial (a), Méthode 1F (b).

ci-dessus. Les transitions d'un processus à l'autre peuvent induire des comportements chaotiques.

En revenant sur nos simulations, plusieurs raisons peuvent expliquer l'absence d'instabilités : (i) l'extension latérale du domaine est trop restreinte, et la symétrie des conditions initiales peuvent amortir le développement d'oscillations dans le sillage ; (ii) l'extension verticale du domaine est trop courte et la particule se pose avant que l'instabilité n'ait eu le temps de se manifester ; (iii) la résolution spatiale est insuffisante pour une modélisation efficace de la couche limite de la sphère.

Comme aucune des instabilités attendues n'est apparente, nous tentons de les détecter à un niveau plus sensible. Le premier indice doit apparaître au niveau des vitesses orthoradiales aux plans contenant l'axe de sédimentation. Par conséquent, on analyse le champ des vitesses  $V_z(x, y, 0)$  qui est théoriquement nul pour une topologie axisymétrique. Les résultats des simulations 1F et LB sont comparés sur la figure 5.21. On utilise une échelle logarithmique centrée sur zéro afin de mettre en valeur les zones où  $V_z(x, y, 0)$  change de signe. La méthode 1F révèle de façon très nette des structures en forme de 'V', imbriquées en zones alternativement positives et négatives. La même analyse faite pour la simulation LB produit un champ extrêmement bruité. Néanmoins, un filtrage spatial par transformée de Fourier permet de dégager des structures tout à fait analogues au cas 1F. Les deux méthodes de simulation révèlent donc un mouvement oscillant, ce qui signifie que l'instabilité est présente. Dans les deux cas on note une décroissance en intensité de ces structures lorsque l'on parcourt l'axe en s'éloignant de la particule. Une étude dynamique montre que cette décroissance n'est que très partiellement due à la diffusion de quantité de mouvement dans le sillage, et que l'intensité des oscillations augmente donc avec l'accélération de la particule.



			Simulation 1F	Simulation LB	Référence
Vitesse de sédimentation	$U_\infty$	$[m/s]$	0.310	0.337	0.316 <sup>(a)</sup>
Magnitude maximum	$ u _m/U_\infty$	$[-]$	1.27	1.15	1.22 <sup>(c)</sup>
Longueur de recirculation	$L_R/d_p$	$[-]$	1.74	2.00	1.4 <sup>(b)</sup>
Nombre de Strouhal	$St_l$	$[-]$	0.104	0.169	0.137 <sup>(b)</sup>

TAB. 5.3: Échelles caractéristiques de l'écoulement ( $Re_p = 280$ ,  $St = 240$ ).

Simulations 1-Fluide et Lattice-Boltzmann. Références en sphère mobile ou fixe tirées de la littérature : (a) : Mordant et Pinton (2000), (b) : Kim et Choi (2002), (c) : Johnson et Patel (1999).

Dans les deux cas, le plan où les oscillations ont l'amplitude la plus élevée, est l'un des deux plans médians verticaux du domaine. Théoriquement cette section contenant l'axe de sédimentation doit être sélectionnée de manière aléatoire. En fait nous interprétons la sélection systématique d'un plan médian comme une conséquence directe du confinement quadrangulaire.

Comme la distribution spatiale des structures est clairement périodique, il est dès-lors possible d'évaluer le nombre de Strouhal  $St_l$  de l'écoulement avec la relation

$$St_l = \frac{f d_p}{U_\infty}, \quad (5.5)$$

où  $f$  est la fréquence associée à l'apparition des structures.  $f$  est calculée par le ratio  $f = U_\infty/\lambda_\infty$  où  $\lambda_\infty [m]$  représente la longueur d'onde des structures dans le sillage de la sphère quand celle-ci atteint la vitesse limite  $U_\infty$ . Dans la table 5.3 où les données concernant des sphères fixes et les résultats des simulations sont résumées, on remarque que les nombres de Strouhal simulés sont tous deux du même ordre de grandeur que dans la littérature. Il est clair que la comparaison devrait porter à la fois sur des confinement plus faibles et sur une gamme  $(Re_p, St)$  étendue. Néanmoins, au regard du nombre de Reynolds relativement élevé, les comparaisons quantitatives et qualitatives sont satisfaisantes, et on peut admettre que le comportement physique global est bien prédit par chaque méthode.

### Comparaison des efforts de calcul.

Pour les simulations décrites ci-dessus, nous décrivons ici les paramètres qui conditionnent le temps de calcul et l'espace mémoire requis, et sur ces points, les performances des méthodes de simulation 1-fluide et Lattice-Boltzmann sont comparées.

(i) *méthode 1-Fluide* : une grille cartésienne de taille  $800 \times 50 \times 50$  (soit  $d_p = 10$  mailles) est utilisée avec une résolution en temps  $\alpha = \tau_0/\Delta t = 4686$ . Les simulations basées sur ces paramètres demandent 3500 pas de temps et  $N = 2.10^6$  points. Pour avoir un ordre d'idée, cette tâche exécutée en mode séquentiel (monoprocasseur) sur une machine SGI Altix/3300 (12 cpus ia64 Madison/1300Mhz/L3/3Mo), a demandé 1225H en temps CPU. En tenant compte du temps réel de calcul et des contraintes liées à l'utilisation des machines, cette simulation nécessite environ trois semaines pour arriver à son terme, c'est cette durée qui justifie le manque d'études paramétriques pour ce cas. Quant à la mémoire requise, elle est indépendante de la machine et se calcule de la façon suivante :  $N \times 300(\text{tableaux de réels}) \times 8(\text{bits}) \approx 5Go$ . Pour information, la configuration de ce cas a nécessité une trentaine de tests complets.

(ii) *méthode Lattice-Boltzmann* : une grille cartésienne de taille  $1376 \times 86 \times 86$  est utilisée avec une résolution en temps  $\alpha = \tau_0/\Delta t = 24095$ . Le diamètre résultant pour la particule est donc  $d_p = 16$  mailles, mais dans la pratique, il correspond à la valeur  $d_{p \text{ hydro}} = 17.22$  après la calibration du rayon hydrodynamique de la particule. Cette simulation a nécessité 20000 pas de temps et  $N = 10.210^6$  points. Cette tâche exécutée en mode parallèle (multiprocesseurs) sur 8 processeurs (MPI /Clusters LINUX Pentium 3 900 MHz) a demandé 37H de temps CPU. La mémoire allouée est  $143Mbytes \times 8(\text{processeurs})$  ce qui donne environ 1.14Go en mémoire totale.

On note en premier lieu que l'investissement en terme de moyens de calcul diffère singulièrement entre les deux méthodes. Ceci est principalement dû à l'utilisation d'un code parallélisé pour la méthode Lattice-Boltzmann. En effet la section suivante détaille des simulations 1-Fluide postérieures exécutées à l'aide de la version récemment parallélisée du code. Avec 128 processeurs utilisés sur une machine Power4 P690, le même calcul nécessite environ 12H CPU. En supposant une efficacité de 1 et un speed-up comparable pour les deux méthodes, on aboutit très grossièrement à 5H CPU pour la méthode LB contre les 12H CPU de la méthode 1F.

La méthodologie 1–Fluide requiert donc plus de capacités en temps et en mémoire par rapport à la méthode LB. La première raison est l’orientation implicite du code, et la taille très importante des systèmes linéaires à résoudre. La seconde raison doit être attribuée à l’algorithme du Lagrangien Augmenté. En fait la matrice principale du système linéaire est de la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \text{composante de vitesse } u & \text{couplage LA} & \text{couplage LA} \\ \text{couplage LA} & \text{composante de vitesse } v & \text{couplage LA} \\ \text{couplage LA} & \text{couplage LA} & \text{composante de vitesse } w \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Donc le Lagrangien Augmenté dégrade fortement le conditionnement de cette matrice car il joue sur les termes extra–diagonaux. La durée d’une itération en temps dépend donc principalement de cet algorithme et du nombre d’itérations requis par celui–ci pour obtenir une bonne convergence. Notons également que la bibliothèque de calcul *Aquilon* que nous utilisons pour la méthode 1–Fluide est une plate–forme multi–physique qui paye pour sa modularité le prix de contraintes de compatibilité entre les différentes méthodologies. La méthode Lattice–Boltzmann est un code de recherche plus dédié et donc forcément plus optimisé.

De son côté, la méthode Lattice–Boltzmann est partiellement pénalisée par son orientation explicite. Cela joue principalement sur le nombre d’itérations en temps qui est, pour ce cas, 5 fois supérieur au nombre d’itérations affiché par la méthode 1–Fluide. Par–contre, elle bénéficie de schémas d’ordre élevé et donc d’une convergence en espace plus rapide que la notre. Cela lui permet notamment de compenser un manque flagrant de précision aux résolutions faibles. Pour résumer, les avantages et inconvénients propres aux deux méthodes sont résumés dans la table 5.4.

	Méthode 1F	Méthode LB
<b>Avantages</b>	◆ Grande précision à résolution faible.	◆ Temps de calcul.
	◆ Modularité.	◆ Schémas en espace d'ordre élevé.
<b>Inconvénients</b>	◆ Coût de calcul.	◆ Précision nécessitant une résolution forte.
		◆ Calibration du rayon.

TAB. 5.4: Avantages et inconvénients respectifs des méthodes de simulation 1-Fluide et Lattice-Boltzmann.

## Étude du déclenchement des instabilités (II).

Une étude de la bibliographie récente nous donne des pistes supplémentaires sur la nature de cette expérience. Les travaux de Jenny *et al.* (2004) concernent l'application d'une méthode spectrale au cas d'une sphère en ascension ou en sédimentation. Le but consiste à identifier dans le plan des paramètres  $(G, \frac{\rho_p}{\rho_f})$ , les sites des différentes bifurcations traduisant les zones de transition entre différentes topologies d'écoulement. Le diagramme qu'ils proposent suggère que le cas de la section précédente ( $Re_p = 280$ ,  $St = 240$ ), soit  $(206, 7.17)$  dans le plan  $(G, \frac{\rho_p}{\rho_f})$ , conduit à une oscillation de la sphère le long d'une trajectoire oblique. L'oscillation est observée à une fréquence  $f \approx 0.180$  [hz] qui pourrait être voisine de celle observée dans le sillage lors des simulations précédentes.

Cette section propose une approche différente du cas ( $Re_p = 280$ ,  $St = 240$ ). Auparavant, nous avons identifié les limitations liées au confinement et à la résolution spatiale comme les causes premières de l'amortissement des oscillations. L'utilisation de conditions aux limites mieux adaptées nous permet avec l'aide de la version récemment parallélisée du code d'essayer de contourner ces problèmes.

*Note sur la version parallélisée du code.*

La parallélisation récente de la bibliothèque de calcul 'Aquila' grâce au protocole MPI (Message Passing Interface), permet par une technique de décomposition de domaine, d'exploiter plusieurs processeurs simultanément. Lorsque des échanges de données sont nécessaires entre plusieurs sous-domaines, les processeurs communiquent entre-eux. Lorsqu'il n'y a pas de calculs de type séquentiel qui impliquent ce genre d'échange, chaque processeur travaille de façon indépendante et simultanée. Si l'investissement en terme d'heures de calcul allouées reste le même qu'en protocole séquentiel, le gain en temps de restitution du calcul est considérable. Par manque de temps, il ne nous a pas été possible de quantifier exactement l'accélération de la méthode parallélisée pour les cas présentés ici, car il faut pour cela travailler à résidu constant avec des résultats convergés. Cependant, pour des résidus relativement voisins, une parallélisation de la tâche sur 128 processeurs nous a permis d'observer une restitution au moins 100 fois plus rapide qu'en version séquentielle, ce qui signifie que l'efficacité de la méthode est proche de 1.

Quant à la qualité du résultat, elle peut parfois souffrir d'une dégradation du résidu proportionnelle au nombre de processeurs utilisés. Néanmoins, les régimes d'écoulement abordés dans cette thèse restent modérés, et les résidus observés ont toujours été très faibles, que le calcul soit séquentiel ou non. Cela montre que notre méthode se prête bien au calcul partagé. La plupart des cas-tests présentés dans cet ouvrage (voir annexe C page 167) ont été exécutés avec succès sur la version parallélisée. Les résultats présentés ici et dans les sections 4.2.5 page 68 et 4.3.2 page 88 sont issus de la version parallèle.

*Paramétrisation*

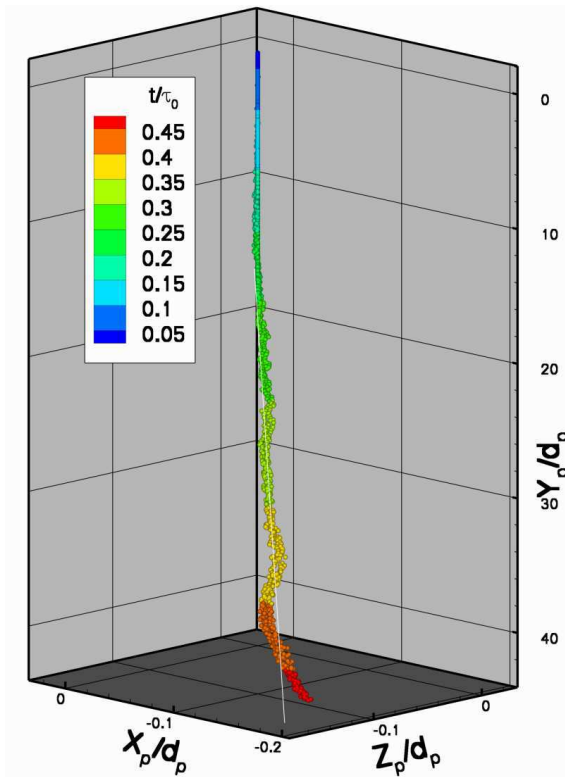
Les simulations de la section précédente sont reprises avec un confinement latéral de  $k = 0.125$  au lieu de  $0.2$  précédemment. La résolution spatiale dans la particule reste la même et correspond à  $d_p = 10$  mailles. La hauteur du domaine est augmentée d'un quart par rapport à la valeur précédente. Les dimensions finales correspondent donc à  $L_y = 0.08 [m]$  et  $L_x = L_z = 0.0064 [m]$  pour un maillage  $N_y \times N_x \times N_z = 1000 \times 80 \times 80$ , ce qui donne une grille de 6.4 millions de points. Afin de réduire encore l'influence du confinement, les conditions d'adhérences sur les limites latérales sont remplacées par des conditions périodiques, ce qui signifie que l'on regarde la chute d'un réseau de sphères. Normalement, le régime d'écoulement élevé devrait empêcher que le comportement de la sphère ne soit biaisé par interaction avec ses homologues. Des problèmes risquent par-contre de se poser avec la méthode de transport. La méthode LAG n'étant pas encore implémentée pour la version parallèle, on utilise la méthode VOF qui au regard de cisaillements importants à l'interface risque de produire des déformations et/ou des pertes de masse excessives.

### *Étude de la trajectoire*

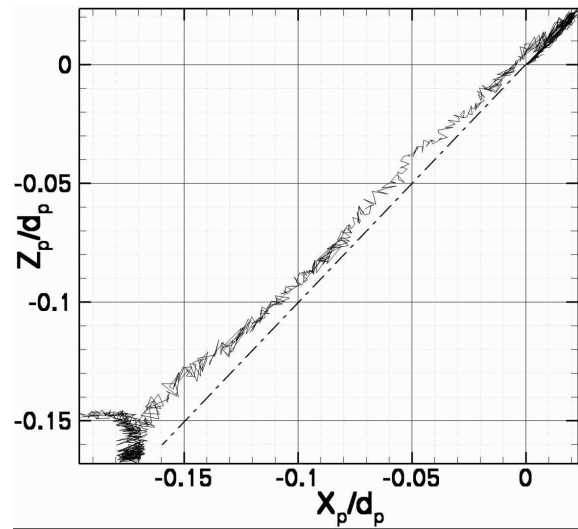
Par rapport aux données de Mordant et Pinton (2000), ce cas reste identique au précédent sur une bonne partie de la phase instationnaire. Au-delà de  $t/\tau_0 \simeq 0.25$ , la vitesse prédite atteint un maximum inférieur de 15% à la vitesse limite expérimentale et décroît lentement. Nous attribuons cela aux déformations et à la perte de masse lors du transport par le schéma VOF. Jusqu'ici ces défauts étaient minimes et n'avaient pas d'influence notable. Dans le cas présent le faible nombre de points dans la particule et les cisaillements très élevés à l'interface amplifient ces problèmes, et au-delà de la limite définie précédemment on ne peut raisonnablement pas identifier nos résultats au comportement expérimental. Cependant les comportements obtenus sont intéressants.

La figure 5.22 détaille la trajectoire obtenue. Lorsque la particule a parcouru une dizaine de diamètres, la déviation de la trajectoire par rapport à l'axe vertical devient nette, car sur la figure 5.22(c), l'écart à l'axe se détache par rapport au bruit numérique. À ce niveau l'évolution identique des composantes radiales de la position montre que le plan sélectionné est d'équation  $x = z$ . L'écoulement est censément valide jusqu'ici, et la mise en évidence d'une instabilité déclenchant un déplacement latéral très faible, reste cohérente avec les approches de Mordant et Pinton (2000) et de Jenny *et al.* (2004). Après un parcours vertical d'une vingtaine de diamètres, les trois figures montrent que la trajectoire dévie et se replace dans un second plan vertical très proche du plan précédent. Ce plan est matérialisé sur la figure 5.22(a) par la droite blanche alignée sur la nouvelle trajectoire et l'axe original. Sur la même figure, on voit qu'après une trentaine de diamètres, la trajectoire oscille et s'enroule légèrement autour de sa direction initiale. La phase suivante ( $Y_p/d_p \gtrsim 34$ ) montre une déviation plus violente, mais la perte de masse notable à ce niveau invalide l'analyse de la suite du phénomène.

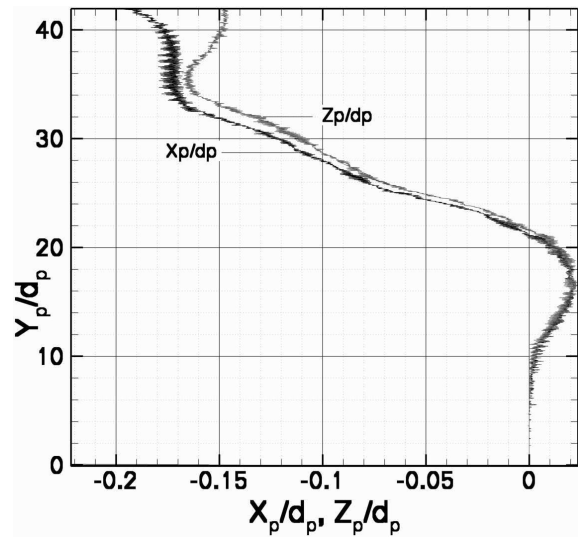
Pour résumer, les instabilités de la trajectoire sont significatives car elles surpassent nettement le bruit numérique. La sélection d'une direction oblique de sédimentation est claire ainsi que l'apparition de petites oscillations. Ces phénomènes ne sont pas incompatibles avec les observations expérimentales car un déplacement radial d'un dixième de diamètre pour un déplacement vertical de 40 diamètres est difficilement discernable d'une trajectoire strictement verticale.



(a)



(b)



(c)

FIG. 5.22: Cas ( $Re_p = 280$ ,  $St = 240$ ). Trajectoire de la particule définie par l'ensemble des positions  $(X_p, Z_p, Y_p)(t)$  rapportées au diamètre  $d_p$ . Trajectoire 3D (a); trajectoire vue du plan  $(X_p, Z_p)$  (b); trajectoire vue des plans  $(X_p, Y_p)$  et  $(Z_p, Y_p)$  (c).

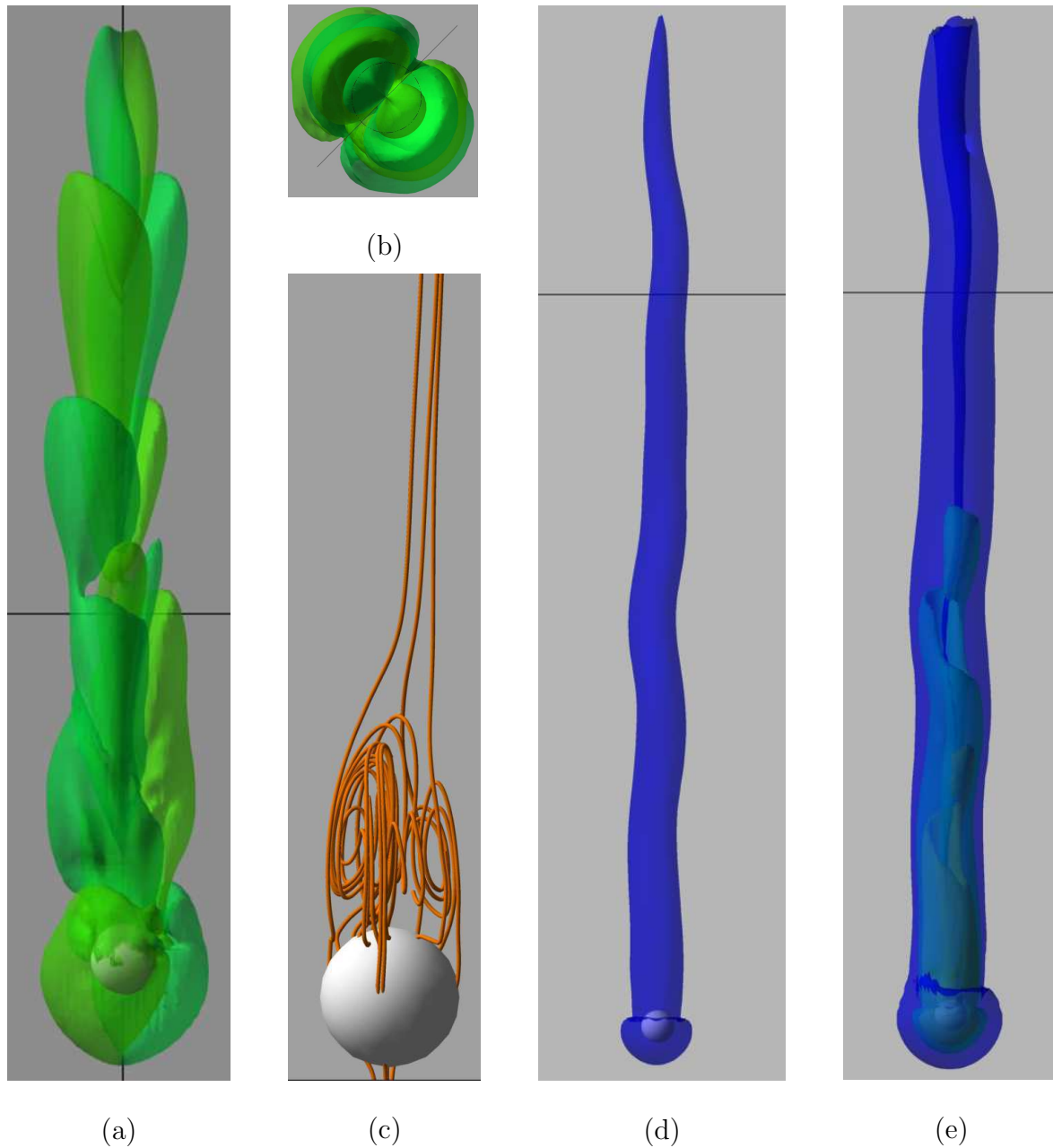


FIG. 5.23: Cas ( $Re_p = 280$ ,  $St = 240$ ). Aperçu qualitatif de la structure du sillage. À  $t/\tau_0 \simeq 0.32$  : (a), distribution spatiale de la composante de vitesse orthoradiale, orientation  $x = cste$  et (b), orientation  $y = cste$  ; (c), lignes de courant dans le référentiel de la sphère. À  $t/\tau_0 \simeq 0.45$  : (d), iso-surface de la magnitude du champ de vitesse  $|u|/U_\infty = 0.1$ , (e) iso-surfaces de la magnitude de la vorticité  $|\nabla \wedge u|$ .



*Étude du sillage*

Cette section s'attache à l'étude qualitative de la structure du sillage. La figure 5.23 détaille quelques grandeurs significatives. la figure 5.23(a) a été obtenue en transposant le repère cartésien  $(x, z, y)$  dans un repère cylindrique  $(r, \theta, y)$  dont l'axe vertical coïncide avec l'axe initial de la sédimentation. Ceci permet d'extraire facilement la composante de vitesse orthoradiale  $u_\theta$ . Cette composante doit rester nulle en écoulement axisymétrique. La distribution spatiale de  $u_\theta$  révèle la présence de structures organisées et cohérentes. Les zones de couleurs différentes distinguent les composantes positives de celles négatives. Il suffit de faire une coupe dans le plan de sélection  $x \simeq z$  (dont la trace est représentée par la droite dans la figure 5.23(b)) pour retrouver une analogie tout à fait claire avec les structures 'en V' détectées dans la section précédente (voir figure 5.21 page 121). Une augmentation singulière de l'intensité de cette composante montre que le confinement joue un rôle non négligeable sur le développement du sillage.

La figure 5.23(c) montre des lignes de courant dans le repère mobile attaché à la sphère, au temps  $t/\tau_0 \simeq 0.32$ , pour lequel notre prédiction doit être encore raisonnablement proche de la réalité. On obtient la topologie typique des sillages stationnaires obliques, avec les lignes qui s'écartent significativement de l'axe en aval de la sphère, et puis les deux recirculations stables mais de tailles très différentes. Il est clair que cette différence influence à la fois la trajectoire de la sphère et la direction du sillage en aval. Les deux angles correspondants semblent analogues, mais il nous faudrait beaucoup plus de simulations avec des états stationnaires corrects pour prétendre à corrélérer le comportement sillage/particule. Les deux recirculations apparaissent avec une taille égale lorsqu'on les visualise dans le plan  $x \simeq -z$ .

À l'instant  $t/\tau_0 \simeq 0.45$ , on remarque sur la figure 5.23(d) que la répartition spatiale de la magnitude du champ de vitesse reste globalement homogène par rotation autour de l'axe vertical. Le comportement le plus intéressant est l'oscillation visible qui se déclenche très tôt dans le sillage. La fréquence associée à cette oscillation semble proche de la fréquence d'oscillation de la particule autour de l'axe oblique de sédimentation, mais la remarque précédente est aussi valable ici : cette étude est trop ponctuelle pour identifier de façon catégorique la fréquence d'oscillation de la particule et la fréquence des oscillations dans le sillage proche. La figure 5.23(e) représente des iso-surfaces de la magnitude de la vortacité  $|\nabla \wedge \mathbf{u}|$ . D'une façon globale, ce terme dissipatif siège dans le sillage et montre donc une oscillation analogue à la figure précédente.

Une analyse des iso-surfaces associées à une vorticité plus intense montre des structures plus locales émises périodiquement de part et d'autre de la trajectoire. Celles-ci pourraient ressembler aux structures vorticitaires émises derrière une sphère fixe à un régime analogue, mais il faudrait calculer des grandeurs moins triviales que le module du rotationnel de la vitesse pour s'en assurer.

#### 5.2.4 Conclusion.

Cette section était dédiée à l'investigation des forts régimes d'écoulement. Dans un premier temps, nous avons présenté une comparaison globalement positive de nos résultats aux simulations obtenues avec un code fondamentalement diff rent ainsi qu'à des références expérimentales. Plusieurs défauts ont ensuite été identifiés comme étant à l'origine d'un amortissement des instabilités usuellement observées à ces régimes.   la suite d'une amélioration singulière des moyens de calcul, les paramètres numériques ont été modulés avec l'intention d'améliorer les résultats précédents. Le confinement excessif a été atténué en substituant des conditions aux limites de type périodique aux parois. L'impact sur l'écoulement est considérable puisque les instabilités, qu'il fallait chercher à une très petite échelle, se développent pour produire des effets notables à un niveau global.

Toutefois, nous avons rencontré des problèmes inhérents aux choix des méthodes de transport d'interface. Ce fait nous empêche d'identifier strictement la simulation à la situation expérimentale d'origine. Néanmoins nous avons dans nos résultats identifié de nombreux comportements communément admis dans la littérature scientifique. Encore plus important, parmi les deux équipes qui ont caractérisé le cas ( $Re_p = 280$ ,  $St = 240$ ), Mordant et Pinton (2000) montrent expérimentalement que la trajectoire reste rectiligne et verticale, tandis que Jenny *et al.* (2004) prévoient numériquement une trajectoire oblique et oscillante. Il a été montré que nos simulations aboutissent à une trajectoire analogue mais très proche de la verticale. Nous ne contredisons donc aucune des deux références.

Enfin, nous insistons sur le fait que des études paramétriques et surtout le développement de méthodes de transport plus fiables sont nécessaires avant d'étendre l'investigation à des régimes d'écoulement plus élevés.



# Chapitre 6

## CONCLUSION

### 6.1 Bilan des objectifs et de leur réalisation

Dans le premier chapitre de cet ouvrage, nous avons introduit le modèle dit '1-Fluide' en tant que modèle de simulation numérique directe des écoulements particuliers. Ce modèle est une composante de la plate-forme multiphysique de calcul 'Aquila' dédiée notamment à la modélisation des fluides complexes et des interfaces fluide-fluide ou fluide-solide. Le chapitre 2 présente de façon synthétique les différentes problématiques impliquées lors du couplage fluide-particule. On y décrit ensuite les paramètres pertinents permettant de caractériser la nature d'un écoulement chargé de façon qualitative.

Après une étude bibliographique des différentes familles de méthodes numériques utilisées pour la modélisation des suspensions, le chapitre 3 détaille notre propre approche. La résolution du modèle 1-Fluide est proposée avec l'appui d'un ensemble de techniques numériques performantes. Nous avons notamment mis l'accent sur la particularité commune de ces techniques, choisies pour contribuer à l'orientation résolument implicite de la méthode globale de résolution. La perte inévitable induite au niveau du temps de calcul est typiquement compensée par une bonne stabilité numérique. Pour la résolution du couplage vitesse-pression, le choix de l'algorithme d'optimisation de type Lagrangien Augmenté est présenté comme une stratégie centrale permettant d'atteindre un haut niveau de précision. Avec l'appui d'un algorithme de transport d'interface de type VOF, on introduit la méthode de pénalisation par la viscosité afin de générer des particules rigides. Cette technique généralement inusitée possède en fait un très bon potentiel lorsqu'elle est intégrée dans un cadre approprié. Nous nous sommes attachés dans les chapitres suivants à mettre ce potentiel en évidence.

Dans ce but, le chapitre 4 conjugue naturellement la paramétrisation et la validation du modèle 1-Fluide. C'est ici que l'étude bibliographique consacrée aux cas de validation rentre en jeu. Il s'agit d'un ensemble documenté de cas théoriques ou physiques accessibles du point de vue de la simulation numérique directe. Afin d'alléger cet ouvrage, tous ces cas sont compilés et classés dans une annexe assortie d'analyses personnelles. Sur ces bases, le chapitre se distingue en deux parties.

(i) La paramétrisation s'appuie tout d'abord sur le cas d'un écoulement autour d'une sphère fixe, puis sur celui d'une inclusion cylindrique en sédimentation. Cette phase est conçue afin de permettre au lecteur d'appréhender notre méthode de travail. En démontrant un comportement numérique consistant au regard des résultats de la littérature, elle consiste à justifier nos choix quant aux techniques et paramètres numériques pertinents. À chaque fois que cela nous semble justifié, la sensibilité du résultat est soumise à de nombreuses études paramétriques. Des critères sont alors définis pour rendre la méthode opérationnelle dans un large éventail de configurations physiques. Dans la suite du document, notre progression est décrite de façon chronologique, et synthétisée ponctuellement dans différents cas-tests rédigés en annexe. Dans le cas de particules cylindriques, l'étude paramétrique de l'effet du confinement a révélé des propriétés intéressantes. Ces propriétés nous ont permis de montrer que le modèle théorique de Faxën (voir Happel et Brenner (1983)) valable pour la vitesse stationnaire d'un cylindre sédimentant en milieu semi-infini, est également valable pour un cas instationnaire dans un domaine borné. Du point de vue de la DNS, nous expliquons qu'il s'agit de conditions très favorables pour un outil de validation précis, rapide et complet du point de vue des couplages impliqués.

(ii) La paramétrisation numérique étant définie d'une façon quasiment systématique, nous éprouvons notre modèle sur des applications plus réalistes. Une investigation des écoulements de topologie axisymétrique générés par la sédimentation d'une sphère isolée ou d'un doublet de sphères prouve que le code restitue d'une façon remarquable les couplages fluide-particules-parois en régime de Stokes ou d'Oseen.

Le chapitre 5 met à profit les résultats précédents pour l'investigation des régimes d'écoulement croissants. Une première partie est dédiée à la validation du code sur la base des résultats expérimentaux de ten Cate *et al.* (2002). Il s'agit de régimes d'écoulement modérés, avec une particule soumise à un confinement parallélépipédique. Le phénomène est donc instationnaire, tridimensionnel et requiert donc une simulation extrêmement équilibrée des contributions de type dissipatives et inertielles. L'identification des problèmes induits par une dynamique de plus en plus raide nous conduit à présenter et exploiter des améliorations des techniques précédentes. Les simulations suivantes montrent une restitution excellente des résultats expérimentaux, tant sur la phase solide que sur la

phase fluide. Dans un souci d'objectivité, les résultats obtenus ici et antérieurement sont toujours modérés par la recherche de problèmes latents et potentiellement invalidants dans des conditions plus difficiles. La continuité de notre travail est ainsi clarifiée en faisant un point régulier sur les problèmes qui nécessiteraient soit des techniques plus performantes, soit des études paramétriques plus rigoureuses.

La seconde partie est consacrée à la reproduction d'un cas expérimental particulier, puisqu'il s'agit d'un régime critique séparant un état pseudo-stationnaire d'un état instationnaire de type chaotique. La référence expérimentale de Mordant et Pinton (2000) qui est utilisée ici concerne la mesure de la vitesse verticale d'une sphère d'acier sédimentant dans de l'eau. Le but décrit est de valider le code sur ce résultat, de caractériser la topologie du champ fluide, et enfin de déceler les instabilités qui doivent inévitablement se manifester ici. Afin de critiquer et de consolider nos résultats, l'échange engagé avec A. ten Cate et J.J. Derksen du Laboratoire Kramers (Pays-Bas) s'est poursuivi par une comparaison de nos simulations respectives sur le même cas expérimental. L'intérêt de cette démarche s'est avéré très positif sur deux points : d'un côté nous avons présenté des résultats très proches compte-tenu de la raideur du problème, la comparaison la plus remarquable étant sans nul doute la détection des premières instabilités, tout à fait analogues d'une méthode à l'autre ; d'un autre côté, la comparaison des performances respectives de nos méthodes nous permet de juger du niveau de notre travail, de nos points forts, et des progrès qu'il reste à faire par rapport à une méthode populaire et efficace en terme de coût de calcul. Par la suite, l'implémentation du code dans sa nouvelle version parallèle nous a permis de minimiser singulièrement l'obstacle posé par le temps de calcul. La dynamique paramétrisation/simulation beaucoup plus réactive s'est alors soldée par une restitution bien plus nette du déclenchement des instabilités, tant au niveau de la particule qu'au niveau de son sillage.

Tout au long de cette thèse, la collaboration étroite entre les divers projets de modélisation, de développement, et d'expérimentation numérique propres au laboratoire nous a permis d'intégrer de nouvelles méthodes afin de lever les problèmes que posent des situations physiques de plus en plus raides. Globalement nous pensons avoir réalisé les objectifs suivants : (i) démontrer l'originalité, la stabilité et la précision du modèle 1-Fluide à-travers son aptitude à traiter des écoulements chargés dans une large gamme de régimes et de confinements ; (ii) mettre à profit le potentiel remarquable du modèle pour la simulation numérique directe de phénomènes encore mal connus ou caractérisés de façon incomplète. Afin de clore cet ouvrage, la section suivante aborde les points qui nécessitent encore des améliorations. Enfin, l'étendue des perspectives y est illustrée par l'exemple d'une problématique industrielle à laquelle nous avons pu apporter notre contribution.

## 6.2 Perspectives

En ce qui concerne l'investissement matériel, la parallélisation ramène le code à des coûts de calcul raisonnablement élevés. L'orientation implicite du code offre peu d'alternatives à cet égard. Par contre, la méthode montre une précision tout à fait remarquable pour des résolutions faibles. Un progrès notable consisterait à améliorer l'ordre de convergence en temps et en espace.

D'autre part, nous avons dans ce document relevé des problèmes récurrents liés essentiellement au transport d'interface. Utilisée telle-quelle, la méthode VOF couplée à la technique de pénalisation par la viscosité trouve ses limites lorsque l'on aborde des régimes d'écoulement critiques. D'autre part nous qualifions ce type de transport comme étant globalement implicite, car dès que l'inclusion est libérée, son traitement devient indépendant de toutes les données lagrangiennes associées à la particule (centre de masse, vitesse de rotation, vitesse de translation). Ceci complique singulièrement l'implémentation de forces de lubrification ou de contraintes imposées au mouvement de la particule. La qualité des résultats pour le traitement implicite est tout à l'honneur de la méthode, mais le problème des déformations sur le long terme doit être résolu.

La méthode LAG est présentée comme une bonne alternative. Son implémentation de type explicite permet d'éviter les déformations et de propager les caractéristiques lagrangiennes de la particule tout le long du calcul. Les forces de répulsion particule-particule et particule-paroi ont été implémentées et améliorées dans le cadre d'une autre thèse du laboratoire, mais elles restent encore à tester pour la plupart des cas décrits dans cet ouvrage. Pour de nombreuses inclusions, le coût du transport n'est plus du tout négligeable devant le coût quasiment constant de la méthode VOF, mais cette dépense devient inévitable lorsqu'il s'agit de traiter la lubrification.

Les perspectives d'applications possibles sont innombrables. À titre d'exemple nous évoquons notre contribution au projet PAMM<sup>1</sup>. Ce projet impliquant notre laboratoire et La SME (SNPE – Matériaux Énergétiques), est une étude amont concernant la modélisation du comportement sous fort cisaillement de matériaux énergétiques chargés. La conception de carburants solides passe par une phase de mise en forme qui implique des cisaillements très importants. La concentration très élevée en petites particules donne un fluide extrêmement visqueux. L'adjonction de particules plus importantes en taille induit une diminution dramatique de la stabilité du matériau soumis à un cisaillement. Notre rôle revenait à chercher quel rôle ces particules pouvaient jouer dans la perte de stabilité.

---

<sup>1</sup>Pôle Aquitaine Matériaux/Mécanique

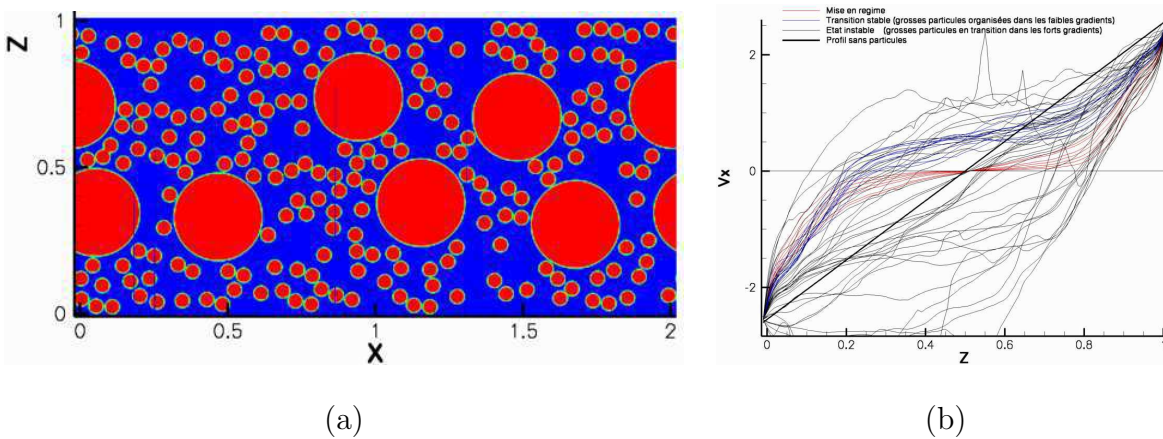


FIG. 6.1: Exemple d'application : Écoulement 2D de particules bi-dispersées soumis à un cisaillement de type Couette plan. (a) Organisation en quinconce des particules de grande taille. (b) Évolution temporelle du profil de vitesse moyen dans l'entrefer.

Cette étude n'a pas été assez approfondie pour figurer en bonne place dans cet ouvrage, mais les premières investigations montrent des résultats intéressants. Sur la figure 6.1(a) on montre que lors d'un cisaillement violent, les particules de taille importante transportent moins facilement l'énergie fournie au fluide, et migrent pour s'organiser naturellement autour des faibles gradients. Les profils de vitesse stabilisés (profils bleus) sur la figure 6.1(b) caractérisent cette organisation. Il est dès-lors possible que le matériau soit stable sous cisaillement moyen (profil rectiligne), mais que le dépassement du cisaillement moyen aux parois causé par la réorganisation des particules provoque un 'point chaud' puis la combustion prématurée du matériau. Naturellement les contraintes inhérentes au cas 2D sont claires, car le degré de liberté manquant joue forcément un rôle significatif, surtout lorsqu'il s'agit de forts taux de charge. Dans un futur proche, nous pensons pouvoir simuler sur un temps significatif une suspension bi-disperse 3D telle que celle représentée en figure 6.2.



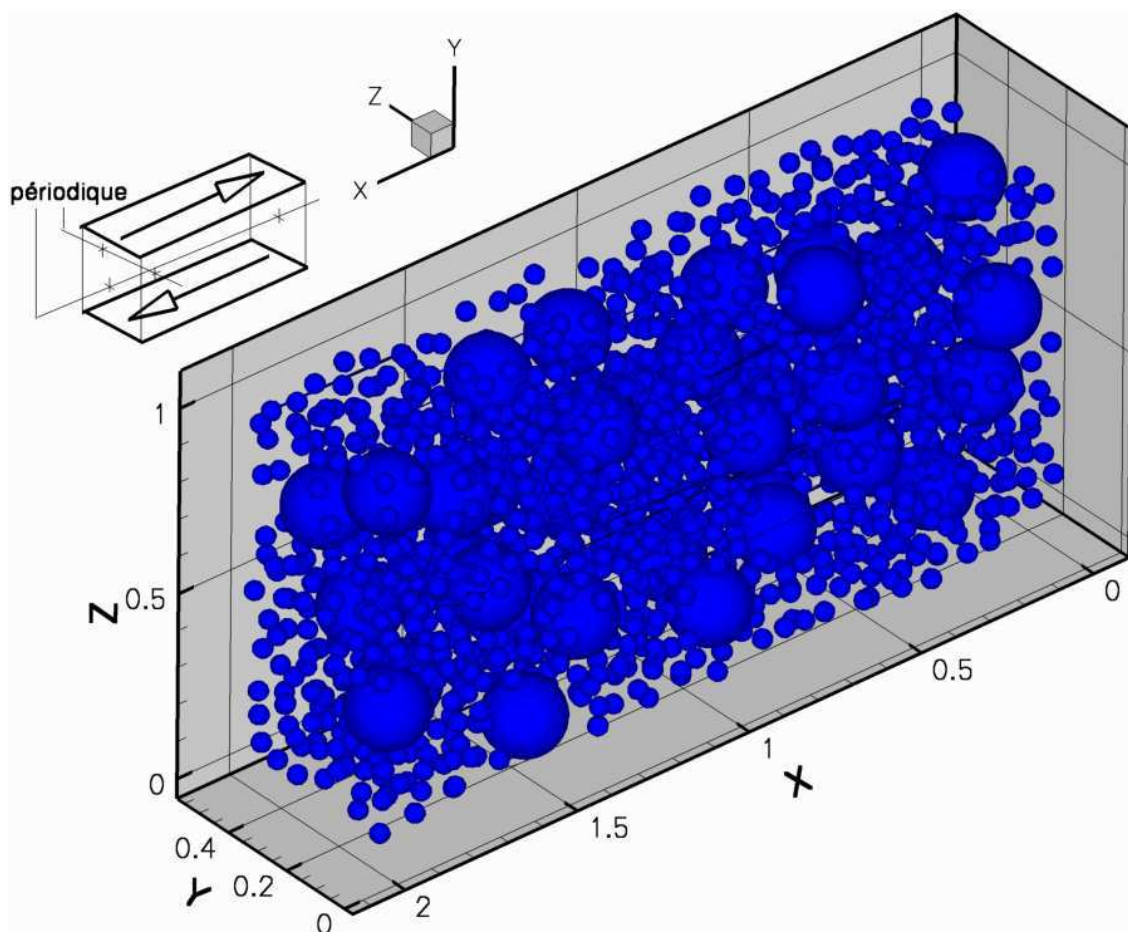


FIG. 6.2: Projet de simulation d'un matériau énergétique sous cisaillement. Particules bi-disperses, conditions latérales de type périodique

# Annexe A

## Étude bibliographique, bases de validation

Nous allons exposer ici différents résultats de travaux théoriques, analytiques, expérimentaux et numériques issus de la littérature dédiée à la compréhension des suspensions fluide/solide. Cette base d'acquis qualitatifs et quantitatifs nous permettra à posteriori de calibrer puis de valider notre propre méthode pour des situations de complexité croissante. D'autre part, les simulations n'ont d'intérêt que dans leur potentiel à dépasser les limitations des méthodes classiques. Le deuxième objectif de ce chapitre est donc de situer les domaines d'application de chaque approche afin de mettre en valeur les avantages de la simulation numérique.

### A.1 Sphère en milieu infini

#### A.1.1 Résultats de la théorie de Stokes,

$$[(Re_p, St) \rightarrow 0]$$

Le cas de la sédimentation d'une sphère en milieu infini pour un nombre de Reynolds très inférieur à l'unité peut être caractérisé de façon exacte par l'équation de Stokes. En effet l'équilibre entre les forces de flottabilité, le gradient de pression et les frottements visqueux conduit à une vitesse de chute constante tandis que le champ de vitesse vu par la particule est stationnaire. La solution de l'équation de Stokes pour une sphère fixée dans un écoulement uniforme de vitesse  $U$  à l'infini est analogue au cas de la sphère sédimentant à la vitesse  $U$  dans ce même fluide au repos à l'infini. On pourra consulter l'ouvrage de Guyon *et al.* (2001) pour le détail de la résolution des équation de Stokes.

Trois résultats fondamentaux découlent de la solution :

(i) le champ de vitesse dans le repère galiléen en coordonnées polaires  $(r, \Phi)$  :

$$u_r = U_{St} \cdot \cos(\phi) \cdot \left( \frac{3a}{2r} - \frac{a^3}{2r^3} \right), \quad (\text{A.1})$$

$$u_\phi = -U_{St} \cdot \sin(\phi) \cdot \left( \frac{3a}{4r} + \frac{a^3}{4r^3} \right). \quad (\text{A.2})$$

ce champ étant valable à la vitesse  $(U_{St} \cos(\phi), -U_{St} \sin(\phi))$  près, à la fois dans le repère fixe et dans le repère mobile attaché à la sphère ;

(ii) la force de traînée totale  $F$  et le coefficient de traînée  $C_d$  associé :

$$F = 6\pi\mu_f a U_{St}, \quad (\text{A.3})$$

$$C_d = \frac{F}{\frac{1}{2} S \rho U_{St}^2} = \frac{24}{Re}; \quad (\text{A.4})$$

(iii) la vitesse limite de chute ou vitesse de Stokes  $U_{St}$  :

$$U_{St} = \frac{2(\rho_p - \rho_f)ga^2}{9\mu_f}. \quad (\text{A.5})$$

### A.1.2 Approche des régimes hors–Stokes,

$[(Re_p, St) > 0]$

	Loi de traînée	Domaine de validité
Théorie de Stokes	$C_d = \frac{24}{Re}$	$Re \ll 1$
Oseen & Proudman	$C_d = \frac{24}{Re} (1 + 3/16 Re + 9/160 Re^2 \ln(Re))$	$Re < 1$
Schiller & Naumann	$C_d = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687})$	$Re < 800$
Abraham	$C_d = \frac{24}{(9.06)^2} \left( \frac{9.06}{\sqrt{Re}} + 1 \right)^2$	$Re < 5000$

TAB. A.1: Domaines de validité de différentes lois pour la traînée d'un profil sphérique.

Dans tous les cas de transport d'inclusions en milieu fluide, la donnée physique de référence est le coefficient de traînée  $C_d$ . Autrement dit, il s'agit d'estimer la résistance opposée au mouvement de l'inclusion. Le cas particulier de la sphère en milieu infini a été largement étudié dans la littérature, et l'on dispose de nombreuses lois de traînée valides dans diverses gammes de régimes d'écoulement. D'une manière générale, les expériences ainsi que les méthodes DNS s'accommodent mal de telles conditions aux limites. Cependant, si cette donnée ne sert pas à valider directement la méthode, elle reste largement utilisée afin de dimensionner les problèmes en tant que valeur de référence, et notamment pour la prédiction de la vitesse limite de chute dans les cas où forces de flottabilité et force de traînée s'équilibrent. Dans ce dernier cas, si la vitesse relative du repère attaché à la sphère par rapport au repère fixe du laboratoire est constante, on parlera de régime pseudo-stationnaire.

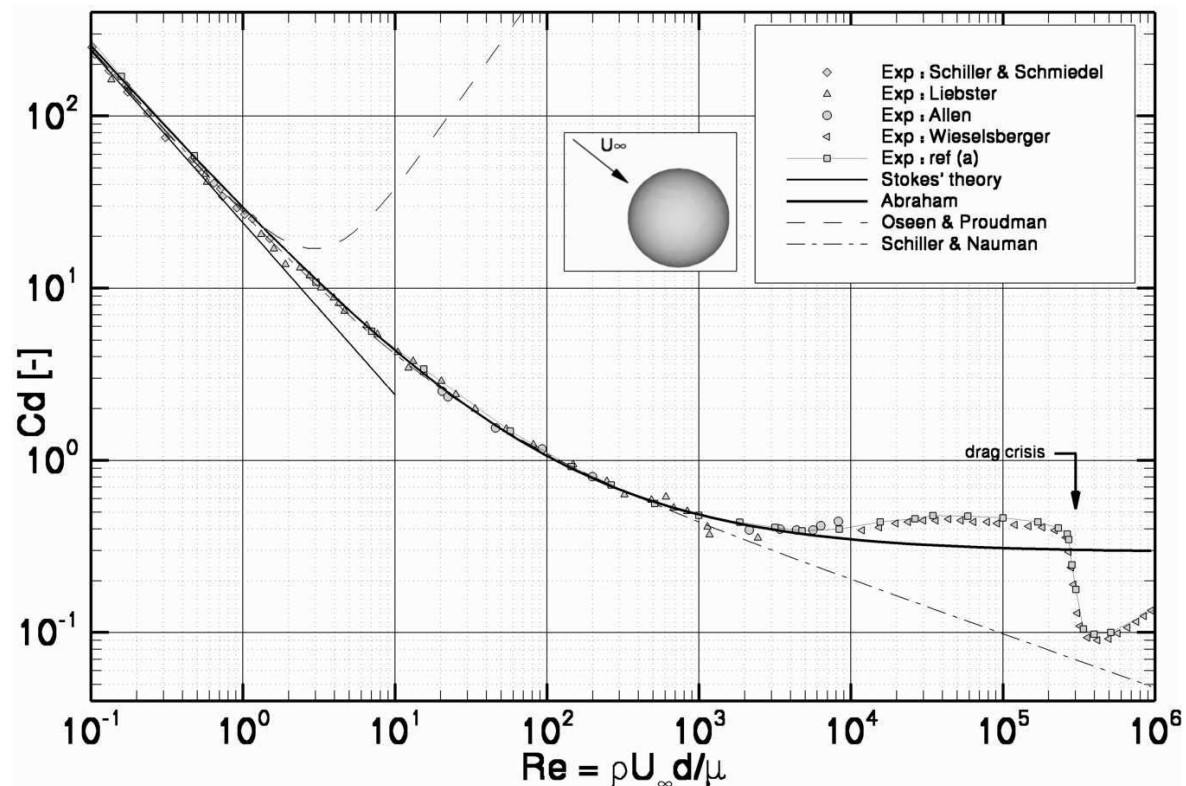


FIG. A.1: Comparaison de différentes lois de traînée pour une sphère solide en milieu infini. Les données pour la référence (a) (H. E. Donley) sont récupérables via l'adresse html : <http://www.ma.iup.edu/projects/CalcDEMma/drag/drag.html>.

Sur la figure A.1, différentes lois de traînée sont comparées aux données expérimentales classiques. Les expressions de ces lois et leur domaine de validité sont détaillés dans le tableau A.1.2. La théorie de Stokes représentée par l'asymptote linéaire n'est valable qu'à faible nombre de Reynolds. La loi d'Oseen (1910) (en  $3/16 Re$ ) corrigée par le terme dû à Proudman et Pearson (1957) (en  $9/160 Re^2 \ln(Re)$ ) prend en compte les premiers effets inertiels et se rapproche de la réalité, mais diverge très vite au-delà d'un nombre de Reynolds supérieur à l'unité. La loi de Schiller & Nauman (voir Clift *et al.* (1978)) quant à elle, est reconnue comme étant valide jusqu'à  $Re = 800$ , ce qui est visible sur la figure A.1. Nous utiliserons le plus souvent la loi d'Abraham (1970) représentée sur la figure A.1 où l'on voit que le coefficient de traînée est restitué de façon remarquable dans la gamme de nombres de Reynolds  $Re \in [0, 5000]$ . Au-delà de ces régimes l'écoulement devient pleinement turbulent ce qui ne correspond plus au cadre de ce travail.

## A.2 Sphère en milieu confiné ou semi-confiné

### A.2.1 Cas d'un confinement radial,

$$[(Re_p, St) \rightarrow 0]$$

Nous avons vu que la force de traînée exercée par un fluide sur une sphère est très documentée pour une large gamme de Nombres de Reynolds, mais toujours dans le cas d'un milieu fluide infini. La littérature est beaucoup moins prolixe en solutions analytiques dans le cas de géométries confinées. Nous abordons ici le comportement d'une sphère sédimentant le long de l'axe d'un tube cylindrique de rayon  $R_0$  et de hauteur infinie (voir Happel et Brenner (1983)). Le résultat principal est le rapport entre la force de traînée ressentie par la sphère et la force de traînée dans un fluide illimité,

$$\frac{F}{6\pi\mu Ua} = \frac{1}{1 - 2.104(a/R_0) + 2.087(a/R_0)^3} + \left(\frac{C_d^\infty}{C_d^{St}} - 1\right). \quad (\text{A.6})$$

On remarque que le rapport des forces de traînée tend bien vers le rapport des coefficients de traînée en milieu infini lorsque le rapport d'aspect radial  $k = a/R_0$  tend vers 0. Pour le coefficient de traînée  $C_d^\infty$  en fluide illimité, nous choisirons le modèle d'Abraham décrit plus haut. Il suffit ensuite d'effectuer le bilan des forces pour l'état pseudo-stationnaire  $F = (\rho_f - \rho_p) g 4/3\pi a^3$ , et on montre que l'on peut trouver la vitesse limite de chute  $u_\infty$  parmi les racines du polynôme de degré 4 :

$$B^4 U^4 + (2KB^2 - 4B^2)U^3 + (K^2 - 2AB^2)U^2 + U(-2AK) + A^2, \quad (\text{A.7})$$

où  $K$  est le terme dépendant de  $a/R_0$  dans l'équation (A.6), puis  $A$  et  $B^2$  définis de la façon suivante :  $A = (\rho_f - \rho_p)2ga^2/9\mu_f$  et  $B^2 = 2a\rho_f/9.06^2\mu_f$ .

D'autre part on peut estimer le coefficient de correction  $f$  à l'aide de la relation due à Haberman (voir Happel et Brenner (1983)),

$$f = \frac{1 - 0.75857(a/R_0)^5}{1 - 2.1050(a/R_0) + 2.0865(a/R_0)^3 + 0.72603(a/R_0)^6}. \quad (\text{A.8})$$

Cette dernière correction est la plus souvent utilisée tant que le confinement  $k$  reste inférieur à 0.6.

### A.2.2 Approche d'une paroi infinie : étude de la lubrification, $[(Re_p, St) \rightarrow 0]$

Dans le cas d'un confinement vertical, on s'intéresse ici au cas particulier qui concerne l'évolution de la force de traînée appliquée à une sphère sédimentant vers une paroi plane infinie. On assiste logiquement à un ralentissement de la sphère, suivi d'un arrêt total. Plusieurs types de phénomènes sont possibles en fonction du régime d'écoulement :

(i) En absence d'inertie ( $(Re_p, St) \rightarrow 0$ ), l'extension du champ de vitesse fluide décroît de façon parfaitement synchrone avec le ralentissement de la sphère. Cela signifie que la vitesse dans le fluide doit devenir nulle à l'instant où la particule s'arrête. Dans ce cas, la traînée tend vers l'infini selon une loi déterminée de façon exacte par Brenner (1961). Si  $y_c$  représente l'altitude du centre de la sphère par rapport à celle de la paroi, définie à 0, et si l'on définit  $R = y_c/a - 1$  l'interstice paroi-sphère (ou 'gap') normalisé par rapport au rayon  $a$ , alors cette loi prévoit qu'un coefficient de frottement  $f_{lub}$  affecte la traînée de Stokes selon les relations suivantes :

$$F = 6\pi\mu a U_p f_{lub}, \quad (\text{A.9})$$

$$f_{lub} = \frac{4}{3} \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha}{4 \sinh^2(n+1/2)\alpha - (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha} - 1 \right] \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)}. \quad (\text{A.10})$$

Le gap étant pris en compte dans cette dernière relation via  $\alpha = \cosh^{-1}(y_c/a)$ . Pour plus de lisibilité, la solution de Brenner peut être approchée d'une façon relativement correcte par la relation  $f_{lub} = 1 + 1/R = 1 + 1/(y_c/a - 1)$ , comme on peut le voir sur la figure A.2 (où l'écart maximum se situe entre  $R = 0.1$  et  $R = 10$  et ne dépasse pas 6%). Il s'agit d'un résultat très important, car il signifie que pour un gap particule-paroi d'une cinquantaine de diamètres, la traînée est augmentée de 1% par rapport à la traînée en milieu infini. Cela montre la portée considérable du champ perturbé par la sphère à faible régime d'écoulement.

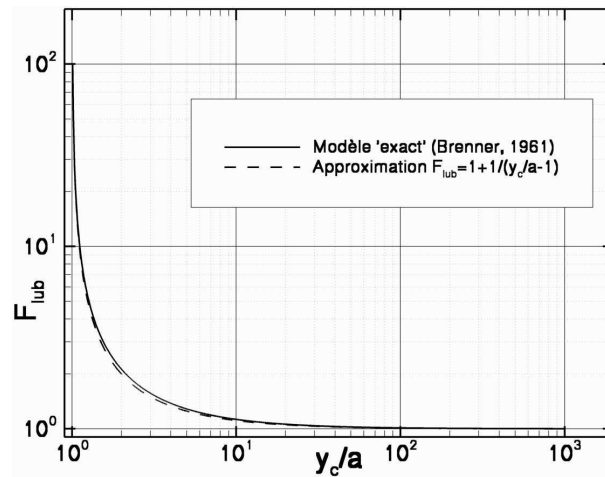


FIG. A.2: Modèle de lubrification entre une sphère et une paroi plane infinie. Coefficient de frottement  $F_{lub}$  en fonction du gap particule–paroi adimensionné  $y_c/a$ .

(ii) Lorsque les termes inertiels ne sont pas négligeables ( $(Re_p, St) > 0$ ), le champ de vitesse dans le fluide n'est plus nul à l'arrêt de la particule car le fluide n'a pas fini de dissiper l'énergie fournie précédemment. Concernant la particule, le temps caractéristique de décélération diminue lorsque le régime d'écoulement équivalent en milieu infini augmente. Donc, le coefficient de frottement ne dépend plus uniquement de la taille de l'interstice, mais aussi du régime d'écoulement. D'autre part, Gondret *et al.* (2002) montrent que lorsque la particule atteint des régimes élevés avant le choc, la compétition entre dissipation visqueuse et restitution d'énergie par choc élastique détermine la nature de l'impact. Les auteurs établissent un nombre de Stokes critique  $St = 10$ , au-delà duquel l'inertie du sillage et la dissipation visqueuse ne suffisent plus à amortir et immobiliser la particule au moment du choc. Leurs résultats expérimentaux montrent qu'à partir de cette limite on assiste à un phénomène de rebond elasto-hydrodynamique.

### A.3 Cas de validation pour des systèmes à inclusions multiples

Les références théoriques et analytiques concernant les interactions entre plusieurs particules sont peu nombreuses, et encore moins lorsqu'il s'agit de configurations abordables par le biais de la DNS sans coûts de calculs prohibitifs. Plusieurs lois pourtant décrivent le comportement de doublets de particules dans le cadre de l'hypothèse de Stokes et en milieu infini. Cependant la grande portée des effets visqueux et l'interaction inévitable avec les conditions aux limites qui en résulte rend leur simulation difficile.

Alternativement, des données plus qualitatives existent pour des régimes hors–Stokes pour lesquels les interactions avec les conditions aux limites sont négligeables. Citons pour exemple le cas du 'DKT'<sup>1</sup> désignant le mouvement relatif d'un doublet de sphères. Le problème est que le résultat d'une telle expérience est trop indéterministe pour faire office de cas de validation.

Dans cette section, nous présentons deux cas de figures précis et 'numériquement abordables'. Le premier concerne la prédiction de la traînée d'un réseau de sphères fixes, un cas très utile qui nous permettra de tester l'impact de la résolution spatiale au niveau des gaps inter-particulaires. Le second cas nous permettra d'estimer les forces de traînées appliquées à deux sphères appartenant à un doublet vertical, et en présence d'une paroi plane infinie.

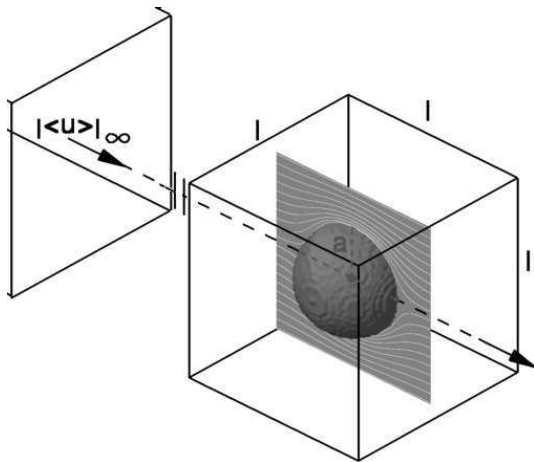


FIG. A.3: Schématisation d'une cellule élémentaire pour un réseau cubique simple de sphères.

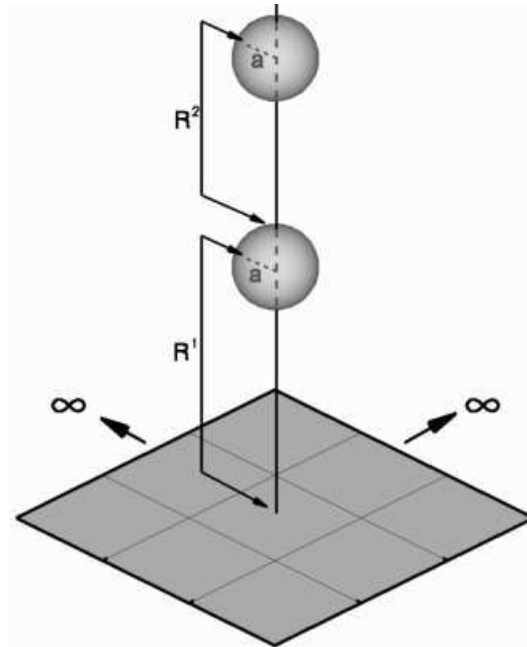


FIG. A.4: Paramétrisation du cas de l'interaction d'un doublet vertical avec une paroi horizontale.

<sup>1</sup>Drafting, Kissing, Tumbling : pour un régime d'écoulement modéré, cela concerne un doublet vertical de sphères avec une séparation de l'ordre du rayon. La sphère aval accélère jusqu'à toucher la sphère amont, il en résulte un retournement aboutissant à une stabilisation en doublet horizontal.



### A.3.1 Écoulement de Stokes dans un réseau de sphères fixes

Cette configuration intéresse de nombreux domaines d'applications<sup>2</sup> et on dispose donc de nombreuses références théoriques et numériques dont le lecteur pourra trouver une synthèse dans Hill *et al.* (2001) ( voir Hasimoto (1959), Sangani & Acrivos (1982), Zick & Homsy (1982)). Dans le cas d'un réseau cubique simple (CS), on peut diviser le domaine en une infinité de cellules élémentaires identiques contenant  $n = 1$  sphère chacune. Les suppositions faites dans ce cadre reposent sur l'approximation  $Re_p = 0$ . En conséquence on doit obtenir un écoulement stationnaire tri-périodique. Le terme source est introduit par le biais d'un gradient linéaire de pression.

Le système est paramétré de la façon suivante. Chaque cellule est un cube de volume  $l^3$ . Le facteur de forme  $a$  est égal au rapport du rayon de la sphère par  $l$ , et  $C_v$  désigne la fraction volumique solide avec  $C_v = \frac{4n\pi a^3}{3}$ . On définit la vitesse du fluide 'non perturbé' comme la vitesse à l'infini. Du fait de la périodicité on prend la vitesse moyenne  $|\langle \mathbf{u} \rangle|$  dans la cellule *sphère comprise* (voir figure A.3). Le nombre de Reynolds du réseau  $Re_r$  s'écrit alors  $Re_r = \frac{\rho_f |\langle \mathbf{u} \rangle| a}{\mu_f}$ . Il s'agit maintenant d'extraire l'information pertinente qui est la résistance du réseau à l'écoulement. A l'état stationnaire, et dans une cellule, la dissipation visqueuse n'est due qu'à la présence de la sphère puisqu'il n'y a pas de parois. Donc le terme source  $\langle \nabla \mathbf{p} \rangle$  doit compenser exactement la force de traînée moyenne par sphère  $|\langle \mathbf{f} \rangle|$ , ce qui donne la relation  $\langle \nabla \mathbf{p} \rangle = n |\langle \mathbf{f} \rangle|$ . La force de traînée adimensionnée  $F$  est alors définie par rapport à la force de traînée d'une sphère en régime de Stokes et milieu infini (voir section A.1.1 page 139) :  $F = \frac{|\langle \mathbf{f} \rangle|}{6\pi\mu_f a |\langle \mathbf{u} \rangle|}$ . Une analyse asymptotique vers les fractions volumiques nulles montre que la traînée  $F$  se comporte en  $C_v^{-1/3}$ . Pour les fractions volumiques faibles, Hasimoto (1959) se base sur un développement en série de Fourier pour proposer une loi valide dans la gamme  $C_v \in [0, 0.1]$  :

$$F^{-1} = 1 - 1.7601C_v^{1/3} + C_v - 1.5593C_v^2 + \mathcal{O}(C_v^{8/3}). \quad (\text{A.11})$$

Pour une investigation plus large de la gamme de fractions volumiques, les résultats des simulations de Zick & Homsy (1982) montrent qu'à partir d'une fraction volumique nulle jusqu'à la fraction volumique maximum du réseau cubique simple ( $C_v = \pi/6 \simeq 0.52$ ), la traînée augmente de façon monotone (voir figure A.5). Nous avons interpolé leurs données par la relation suivante :

$$F^{-1} = 1.0348 - 1.8045C_v^{1/3} + 0.7993C_v + 0.3737C_v^2 - 0.4363C_v^{8/3}. \quad (\text{A.12})$$

---

<sup>2</sup>Lits fluidisés, milieux poreux, filtres, réacteurs catalytiques à lit compact, *etc.*

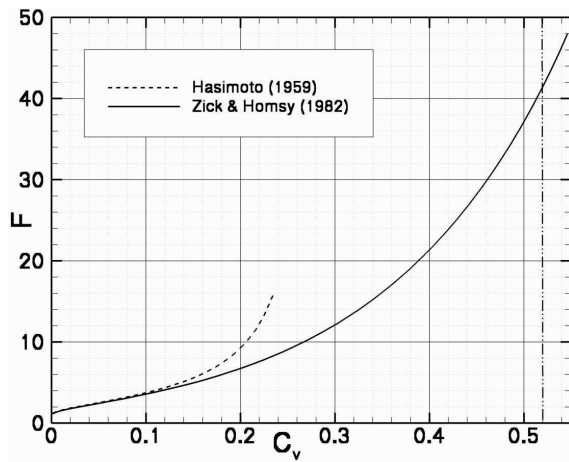


FIG. A.5: Traînée adimensionnée du réseau CS en fonction de la fraction volumique  $C_v$ . Les pointillés verticaux indiquent la limite de compacité  $C_v = \pi/6$  pour le réseau CS.

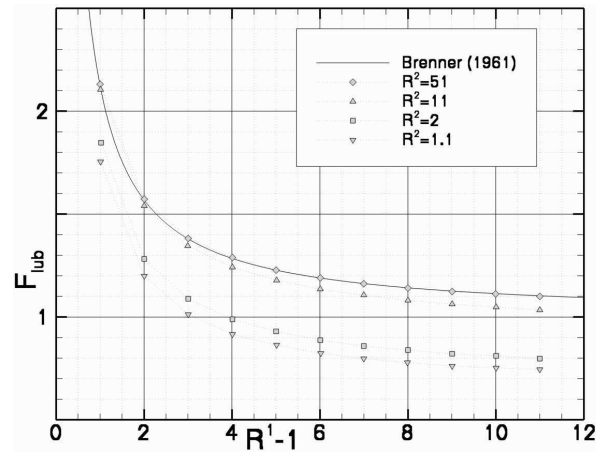


FIG. A.6: Doublet vertical de sphères en interaction avec une paroi horizontale. Coefficient de frottement  $F_{lub}$  de la sphère 1 en fonction de son gap  $(R^1 - 1)$  et de la séparation initiale  $R_2$ .

### A.3.2 Interactions entre un doublet vertical et une paroi

Ces interactions sont évaluées lorsque deux sphères identiques alignées verticalement sédimentent vers une paroi plane infinie (voir la figure A.4). Pour ce problème, Elasmî *et al.* (2003) ont présenté et validé une méthode numérique dans le cadre de l'hypothèse de Stokes. Les solutions proposées dans le cas d'une particule ont été validées par rapport aux résultats de Brenner (1961) (présentés en Annexe A.2.2 page 143). Dans le cas de deux particules, la validation se porte d'abord sur la traînée minimale du doublet. L'indice 1 désignant la sphère la plus proche de la paroi et l'indice 2 la sphère la plus éloignée, on pose  $R^1 = y_c^1/a$  et  $R^2 = (y_c^2 - y_c^1)/a - 1$ . Les auteurs présentent quatre simulations où la distance initiale entre les sphères est prise respectivement à  $R^2 = 1.1, 2, 11, 51$ . Leur prédiction des traînées minimales des doublets correspond tout à fait aux résultats de la littérature concernant ces mêmes doublets en milieu infini (resp.  $F_{lub}^{min} = 0.651, 0.698, 0.889, \sim 1$ ). La phase d'approche de la sphère 1 est reportée sur la figure A.6. On remarque tout d'abord la cohérence de la simulation lorsque la sphère 2 est très éloignée de la sphère 1, car la traînée sur la sphère 1 est confondue avec le modèle à une particule de Brenner (1961). Dans le cas où les écarts  $R^2$  sont les plus faibles, le doublet se comporte comme une sphère unique dont la traînée globale présente un offset constant par rapport au modèle à une sphère de Brenner. Les interactions sont plus complexes pour des écarts intermédiaires ( $R^2 = 11$ ). Bref, la cohérence de ces simulations par rapport à la littérature et l'originalité des résultats font de cette méthode une bonne référence pour la validation de nos DNS.

## A.4 Sédimentation d'un cylindre (2D)

### A.4.1 Sédimentation en milieu infini,

$$[k = 0, Re_p > 0]$$

On mène une étude analogue au cas de la sphère. La caractérisation précise du coefficient de traînée d'un cylindre se heurte à deux problèmes : Premièrement les équations de Stokes n'admettent pas de solution analytique exacte dans le cas d'un cylindre. Deuxièmement, la caractérisation expérimentale de la traînée se heurte au problème des effets de bords du cylindre, et surtout en régime d'écoulement faible où ces effets se propagent à plus grande distance.

Toutefois des solutions analytiques ont été développées à partir des équations d'Oseen qui permet des régimes d'écoulement faibles avec effets inertiels ( $Re_p \leq 1$  (Oseen) contre  $Re_p \ll 1$  (Stokes)). L'expression suivante (Oseen & Lamb, voir Batchelor (1967)) donne le comportement asymptotique du coefficient de traînée d'un cylindre en fonction du nombre de Reynolds :

$$C_d^{cylindre} = \frac{F}{1/2 \rho_f |\mathbf{U}|^2 d} = \frac{8\pi}{Re_p \ln(7.4/Re_p)}. \quad (\text{A.13})$$

	Loi de traînée	Domaine de validité
Oseen & Lamb	$C_d = \frac{8\pi}{Re_p \ln(7.4/Re_p)}$	$Re < 0.5$
Loi empirique (voir White (1991))	$C_d = 1 + 10Re^{-2/3}$	$1 < Re < 2.10^5$

TAB. A.2: Domaines de validité de différentes lois pour la traînée d'un cylindre infini en fluide illimité.

Cette solution analytique valable à  $Re_p = \mathcal{O}(1)$  peut s'étendre à des Reynolds inférieurs ou égaux à 1 si l'on prend soin de vérifier que l'écoulement garde la symétrie amont/aval et que les efforts de pression et contraintes visqueuses contribuent dans la même mesure à la force de traînée (ce qui se traduit au niveau du tenseur des contraintes par l'équivalence des termes de contraintes normales et tangentielles  $\sigma_{rr} \simeq \sigma_{r\phi}$  ).

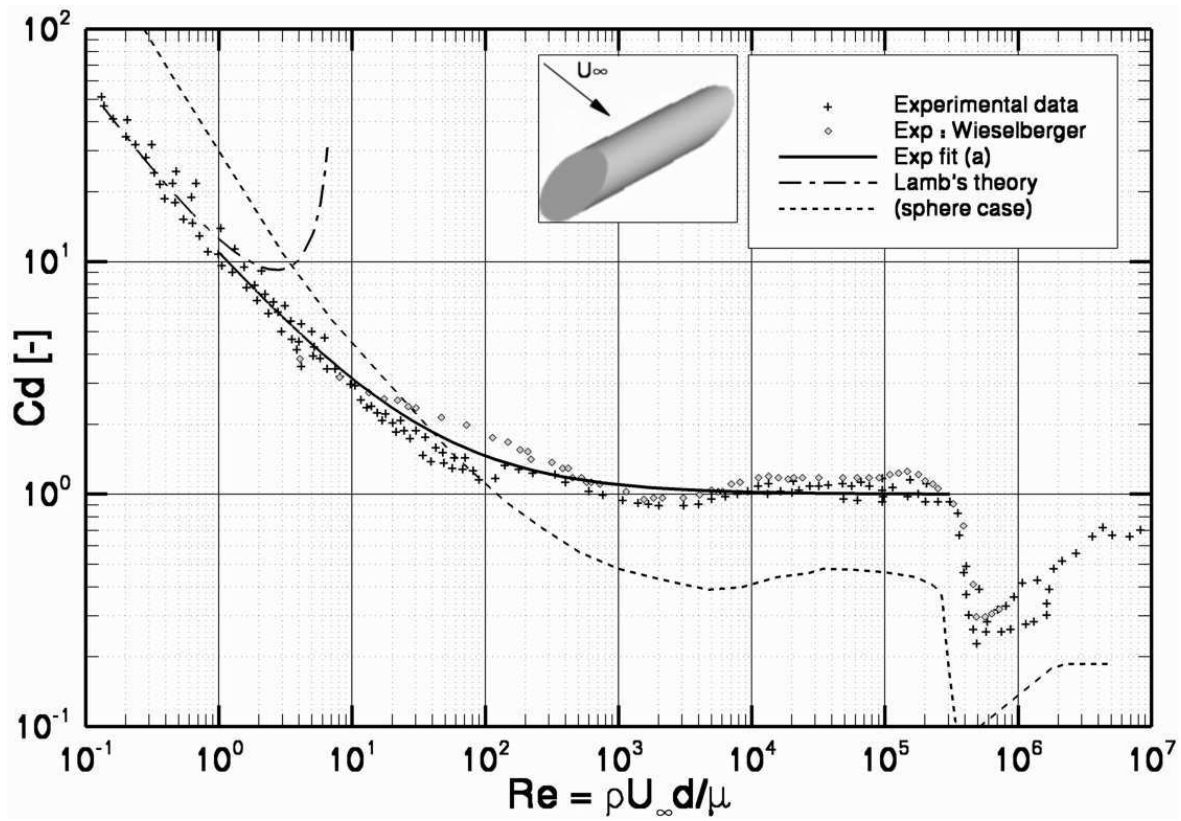


FIG. A.7: Comparaison de la loi de traînée d'Oseen (ou théorie de Lamb), de données expérimentales provenant de différents auteurs pour un cylindre en milieu infini, et de la loi empirique due à White (1991)  $C_d = 1 + 10Re^{-2/3}$  (a).

En utilisant la relation (A.13) dans la gamme des nombres de Reynolds faibles devant l'unité, on peut proposer pour ces régimes d'écoulement une approche pour le calcul de la vitesse maximale de sédimentation  $U_\infty$  par la résolution numérique de l'équation suivante :

$$e^{U_\infty} = A^B \cdot (U_\infty)^{-B}, \text{ avec} \quad (\text{A.14})$$

$$A = \frac{7.4\mu_f}{\rho_f d}, \quad (\text{A.15})$$

$$B = \frac{(\rho_p - \rho_f)d^2 g}{16\mu_f}. \quad (\text{A.16})$$

On sait de plus qu'à  $Re_p = \mathcal{O}(1)$  (voir Batchelor (1967)), la distribution 2D des vitesses s'écrit :

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + c\mathbf{U}\left(-\frac{1}{2}\log\frac{r}{a} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{a^2}{r^2}\right) + c\mathbf{x}\frac{(\mathbf{U}\cdot\mathbf{x})}{r^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2}\right), \quad (\text{A.17})$$

avec  $c = 2/\log(7.4/Re)$ ,  $|\mathbf{U}| = U_\infty$ ,  $|\mathbf{x}| = r$ . Il a été vérifié qu'au voisinage du cylindre, l'erreur absolue pour cette relation est de l'ordre de  $(\log(Re_p))^2$  et donc que l'écoulement est bien modélisé pour  $Re_p = \mathcal{O}(1)$ .

Pour des régimes plus élevés on pourra utiliser la loi empirique  $C_d = 1 + 10Re^{-2/3}$  de White (1991). Cette loi issue de données expérimentales est conçue pour évaluer correctement le  $C_d$  pour des régimes modérés à très élevés. Contrairement aux relations énumérées dans le tableau A.1.2 (cas de la sphère), la validité de cette loi n'est pas extensible aux faibles régimes.

#### A.4.2 Sédimentation en milieu confiné,

$$[k \neq 0, Re_p \leq \mathcal{O}(1)]$$

Cette configuration a été étudiée en détail par Faxën (voir Happel et Brenner (1983)) qui, sur la base des équations de Stokes, montre que la fonction de courant  $\Psi$  obéit à l'équation bidimensionnelle harmonique :

$$\begin{cases} \nabla^4(\Psi) = 0, \\ u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \\ v = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

La fonction de courant  $\Psi(x, y)$  satisfaisant l'équation (A.18) est un développement en série d'intégrales convergentes affecté d'un ordre de troncature. Deux résultats intéressants en découlent. La force de résistance d'un cylindre sédimentant parallèlement aux parois :

$$F = \frac{4\pi\mu_f U_\infty}{\ln(\frac{l}{a}) - 0.9157 + 1.7244(\frac{a}{l})^2 - 1.7302(\frac{a}{l})^4}. \quad (\text{A.19})$$

Dans cette dernière relation, le rapport d'aspect  $a/l$  que nous appellerons  $k$  par la suite représente le rapport du rayon de la particule sur la demi-distance entre les deux plans. Il suffit d'effectuer un bilan de quantité de mouvement en égalant la force de traînée et la force de flottabilité :  $F(U_\infty) = [\rho_f - \rho_p]\pi a^2 g$  pour calculer la vitesse analogue à la vitesse de sédimentation.

Détaillons les tendances du modèles : Pour une même valeur de  $k$ , Les résultats sur  $U_\infty$  diffèrent singulièrement si l'on utilise des jeux de paramètres  $(a, l)$  différents. Sur la figure A.8, on compare une étude à  $(a$  variable,  $l$  constant) (i) puis à  $(a$  constant,  $l$  variable) (ii). On utilise les paramètres suivants :  $\mu_f = 44.2 \text{ Pa.s}$ ,  $\rho_p = 3847 \text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_f = 900 \text{ kg/m}^3$ .

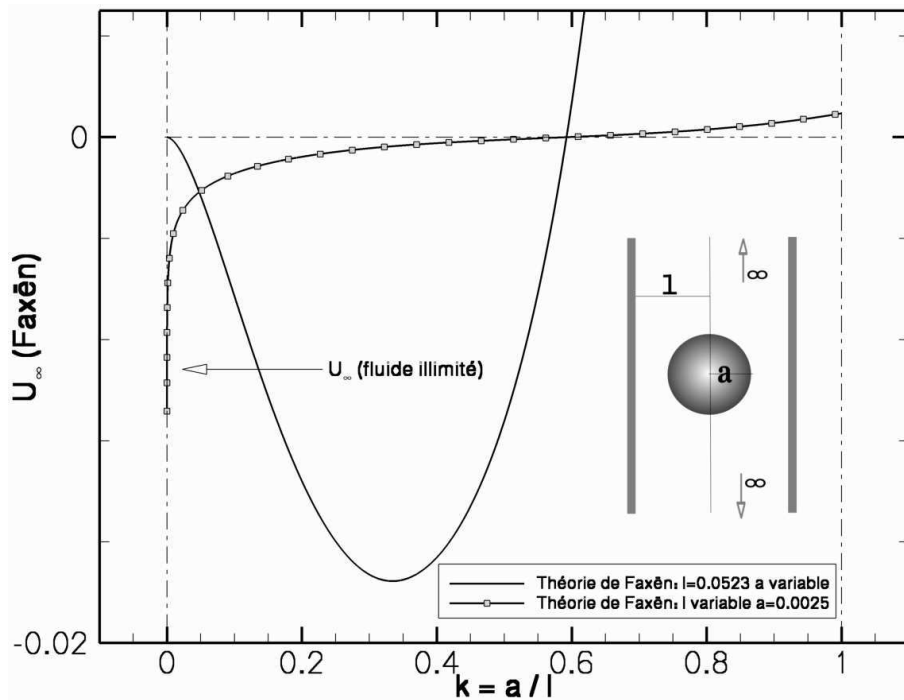


FIG. A.8: Comportement du modèle de Faxén : Vitesse limite de chute  $U_\infty$  d'un cylindre entre deux parois infinies en fonction du rapport d'aspect  $k = a/l$ .

Pour des confinements très faibles ( $k \rightarrow 0$ ) dans le cas (i), le rayon  $a$  de la particule tend vers 0 ainsi que  $U_\infty$  ce qui paraît physiquement consistant. Dans le cas (ii)  $U_\infty$  tend vers  $-\infty$  au lieu de tendre vers la valeur finie correspondant à la vitesse limite de chute en milieu infini (voir flèche figure A.8). En augmentant  $k$  dans le cas (i) on observe un maximum pour  $U_\infty$  tandis que l'on observe une décroissance continue dans le cas (ii). Les deux cas prévoient ensuite un blocage de la particule pour la même valeur  $k = 0.59235$  puis un changement de signe de la vitesse. Ces derniers phénomènes ne sont pas physiquement envisageables. De plus, plusieurs travaux concordent sur le fait que le modèle de Faxén sur-estime la force de traînée à partir de  $k \simeq 0.4$  (voir Liu (1998) et Verhelst (2001)). Un résultat obtenu de façon analogue concerne un cylindre sédimentant perpendiculairement aux plans :

$$F = \frac{4\pi\mu_f U_\infty}{\ln(\frac{l}{a}) - 0.62026 + 1.04207(\frac{a}{l})^2}. \quad (\text{A.20})$$

## A.5 Références expérimentales

### A.5.1 Sphère en milieu confiné (Becker et McKinley, 1994), [ $k = 0.243$ , $Re_p = 0.025$ ]

Afin de valider l'outil numérique dans le cas d'un écoulement réel, nous reproduirons les conditions expérimentales de Becker et McKinley (1994). Il s'agit un tube cylindrique contenant une solution très visqueuse de polybutène, et une particule sphérique est lâchée au sein de ce fluide initialement au repos. Une camera CCD permet de capturer la phase transitoire de la sédimentation. Plusieurs diamètres après la position de départ, deux photodiodes enregistrent le passage de la sphère, ce qui permet d'évaluer la vitesse limite de chute. Becker et McKinley (1994) tentent également d'estimer le régime transitoire de la sphère. Les résultats expérimentaux montrent que cette sphère accélère pour atteindre la vitesse limite de chute  $U_\infty \simeq 0.0243$  [m/s]. La théorie de Stokes en fluide illimité donne une approximation pour la vitesse limite :  $U_{St} \simeq 0.0469$  [m/s]. De ces résultats, on déduit le facteur correctif  $f(k)$  (facteur de Faxën) affecté à la vitesse pour tenir compte de l'augmentation de la traînée due à la présence de parois :  $U_\infty = U_{St}/f$  avec  $f(0.243) = 1.93$ .

Caractéristiques du dispositif :	
Rayon de la particule	$a = 0.0127$ [m]
Position initiale ( $r, \theta, z$ )	(0, 0, 75a)
Densité de la particule	$\rho_p = 3847$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Diamètre du tube	$D = 0.1046$ [m]
Hauteur du tube	$H = 1.046$ [m]
Densité du fluide	$\rho_f = 900$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Viscosité du fluide	$\mu_f = 22.1$ [Pa.s]

FIG. A.9: Configuration expérimentale de Becker et McKinley (1994).

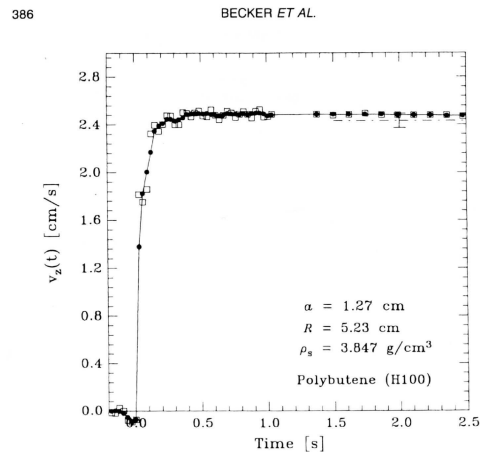


FIG. 5. Transient velocity profile for a ceramic sphere ( $\rho_s = 3.85$  g/cm<sup>3</sup>) in a viscous Newtonian solvent. (●) Velocity calculated using a five-point difference method; (□) velocity calculated using a three-point difference method.

FIG. A.10: Résultats expérimentaux de Becker et McKinley (1994).

$Re_p$ [-]	$u_\infty$ [ $\frac{m}{s}$ ]	$\mu_f$ [ $Pa.s$ ]	$\rho_f$ [ $\frac{kg}{m^3}$ ]	$\rho_p$ [ $\frac{kg}{m^3}$ ]
1.5	0.038	0.373	970	1120
11.6	0.091	0.113	962	1120
31.9	0.128	0.058	960	1120

TAB. A.3: Caractéristiques physiques associées aux phases fluides et solides.

### A.5.2 Sphère en milieu confiné (ten Cate *et al.*, 2002),

$$[k \simeq 0.133, \quad Re_p \in [1.5, 31.9]]$$

Cette section résume brièvement les résultats expérimentaux mis à notre disposition lors d'une collaboration avec A. ten Cate et J.J. Derksen du laboratoire Kramers à Delft (Pays-Bas). Ces données sont présentées dans les détails par ten Cate *et al.* (2002). Les caractéristiques des fluides et de la sphère sont détaillées dans le tableau A.3, et la géométrie du domaine est illustrée sur la figure A.11. La technique PIV (Particle Imaging Velocimetry) utilisée permet d'obtenir les champs de vitesse dans une section du domaine. La première phase consiste à ensemercer le fluide à l'aide de particules fluorescentes. Ces particules ne doivent pas interagir avec l'écoulement et sont donc choisies pour leur qualité de traceur (concentration et taille caractéristique extrêmement faibles,  $St \simeq 0$ ). En illuminant la zone d'investigation avec un plan laser, on peut filmer une portion de la zone à une fréquence donnée. Pour une fréquence d'acquisition très grande devant la fréquence caractéristique du phénomène physique, la comparaison de deux images successives dans un plan donné permet de repérer le déplacement des traceurs, et d'en déduire une vitesse locale. Cette technique est bien adaptée aux cas où les composantes de vitesse normales au plan d'acquisition sont très faible devant les autres composantes. Les champs PIV montrés par la suite sont mesurés dans le plan de symétrie grisé de la figure A.11. La zone grisée secondaire correspond à l'ombre de la sphère, ce qui signifie que les traceurs fluorescents n'y sont pas illuminés et donc que l'on ne dispose pas de données concernant le sillage.

la figure A.12 montre l'évolution temporelle de la vitesse de la particule,  $U_p(t)$ , obtenue par dérivation à partir de l'altitude  $y(t)$ . Afin d'obtenir une bonne précision, la dérivée est approchée à l'aide d'un schéma centré à cinq points :

$$U^i = (2y^{i+2} + y^{i+1} - y^{i-1} - 2y^{i-2})/10(t^i - t^{i-1}). \quad (\text{A.21})$$



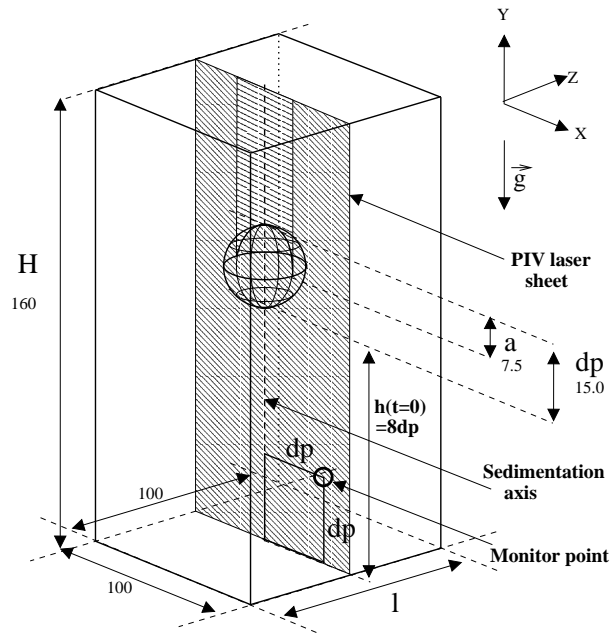


FIG. A.11: Configuration expérimentale représentée dans le repère  $(x, z, y)$ . Les cotes sont indiquées en mm. Les champs PIV sont photographiés dans le plan de symétrie grisé.

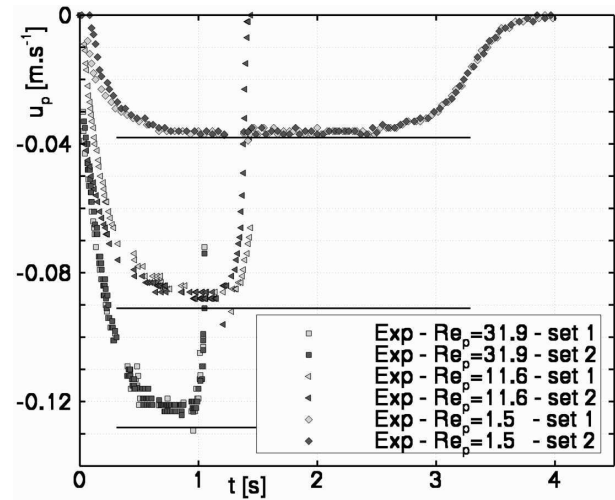


FIG. A.12: Vitesse de sédimentation de la particule pour les trois régimes d'écoulement  $Re_p = 1.5, 11.6, 31.9$ . Superposition de l'expérience dupliquée et de la valeur  $u_\infty (-)$ .

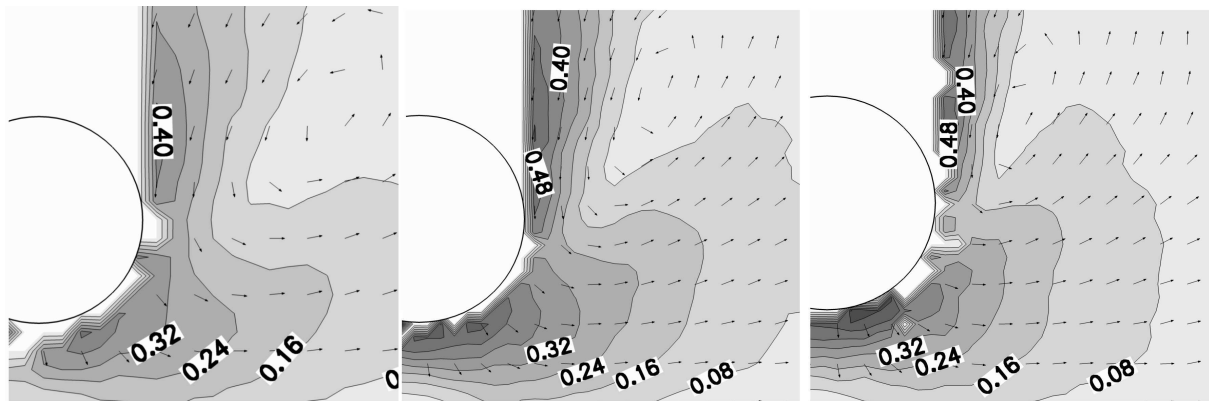


FIG. A.13: Topologie du champ fluide lors de la phase de lubrification. Expérimental. De gauche à droite :  $Re_p = 1.5, 11.6$  et  $31.9$ ,  $h/d_p = 0.5$ . Contours : Magnitude du champ de vitesse normalisée par la vitesse limite de chute en milieu infini  $|u|/u_\infty$ . Vecteurs : direction du champ de vitesse.

Les trois écoulements sont comparés sur la figure A.13 lors de l'approche de la paroi inférieure. Ici la position occupée par la particule dans le domaine est la même dans les trois cas et correspond à un gap particule–paroi  $h/d_p = 0.5$ . On s'aperçoit que le point de contrôle défini sur la figure A.11 se trouve dans les trois cas sur la trajectoire de la recirculation. Ce point est forcément le témoin d'une dynamique assez brutale, ce qui explique l'intérêt des auteurs pour cet emplacement. En effet on montre sur la figure A.14 les variations brutales de vitesse à la fois en terme d'amplitude et de direction. Les mesures se comportent de façon cohérente lorsqu'elles sont répétées, et constituent donc une source précise et fiable pour la validation en simulation directe. Sur la même figure, on représente les résultats de simulations de type Lattice–Boltzmann réalisées par les mêmes auteurs (voir également ten Cate *et al.* (2002)). Les résolutions spatiales utilisées correspondent à  $d_p = 8$  pour le cas où  $Re_p = 11.6$ , et  $d_p = 16$  pour les deux autres régimes d'écoulement.

Afin de concevoir des procédures de validation basées sur des données expérimentales précises, il est utile de substituer une fonction continue aux points expérimentaux par interpolation. La plupart des courbes étant peu communes, avec des gradients relativement prononcés, les interpolations polynômiales sont à éviter. Nous choisissons la méthode d'interpolation et de lissage de Burger et Neubauer (2003) basée sur les réseaux de neurones. Cette méthode fonctionne d'autant mieux que le nombre de points expérimentaux est élevé, surtout dans les zones à fort gradient. Les données et algorithmes synthétisés dans le tableau A.4 permettent de reconstruire les fonctions d'interpolation. Le graphe associé montre une reproduction assez fidèle des distributions expérimentales.

En conclusion, les données décrites ici constituent un outil très puissant :

La plupart des moyens de validation présentés précédemment sont basés sur un coefficient de traînée. Cette donnée qualifie un équilibre dans le bilan des forces appliquées à la particule. Or dans le cas d'une méthode de simulation comme la notre, il est souvent possible d'atteindre un équilibre particulier en modulant le couplage fluide–particule, avec une paramétrisation numérique adéquate. En terme de rigueur scientifique, ce genre de validation est nécessaire mais certainement pas suffisante. La caractérisation complète des cas 3D non–stationnaires présentés ici permet en cas de succès de valider la méthode d'une façon peu discutable, car l'investigation porte aussi bien sur la phase continue que sur la phase dispersée.

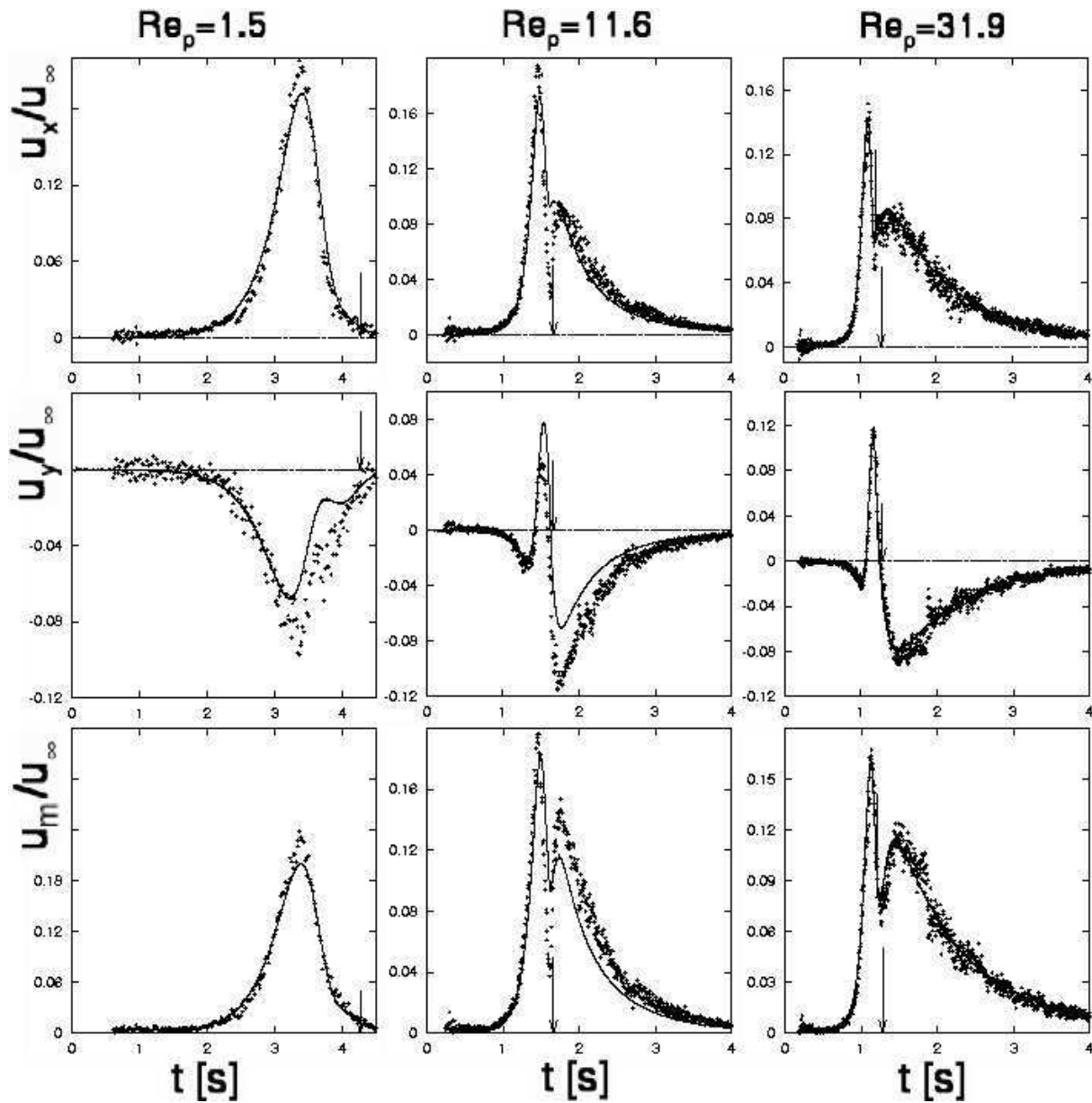


FIG. A.14: Évolution temporelle des composantes de vitesse  $u_x/U_\infty$ ,  $u_y/U_\infty$  et de la norme de la vitesse  $u_m/U_\infty$ , au niveau du point de contrôle défini sur la figure A.11. Comparaison des résultats pour  $Re_p = 1.5, 11.6$  et  $31.9$ . Expérimental ( $\bullet$ ). Simulations par la méthode Lattice-Boltzmann ( $-$ ). Les flèches ( $\downarrow$ ) indiquent l'instant du contact entre la particule et le fond de la cuve.

Vitesse instantanée de la particule $U_p(t)$ : Interpolation à 4 neurones.										
$Re_p$	$t_{min}$	$t_{max}$	$b_s$	$\alpha$	$\beta$	$i$	1	2	3	4
1.5	0	4.017	2.0091	21.053	0.1	$a(i)$	-0.80826	0.70030	-17.237	-1.1454
						$b(i)$	-26.902	-20.719	26.4530	16.4070
						$x_0(i)$	0.74779	4.1312	-0.017326	1.1013
11.6	0	1.42	-5.6978	9.0909	0.1	$a(i)$	1.84790	0.51817	-1.8602	5.27640
						$b(i)$	-12.862	-4.6656	-0.60832	50.0
						$x_0(i)$	0.057684	0.25944	0.45788	0.93715
31.9	0	1.06	-1.9664	6.499	0.1	$a(i)$	0.3782	0.63085	0.71669	1.5167
						$b(i)$	-50	-10.878	-32.056	44.108
						$x_0(i)$	0.8826	0.21987	0.079849	0.9136
<pre> do j = 1, n   do i = 1, n_r     x(j) = 0.8j/n + 0.1     y(j) = y(j) + <math>\frac{a(i)}{1 + e^{b(i)(x(j) - x_0(i))}}</math>   enddo   y(j) = ((y(j) + b_s) - <math>\beta</math>)/<math>\alpha</math> enddo </pre>						<p>Boucle sur le nombre de points <math>n</math> de la courbe interpolée.</p> <p>Boucle sur le nombre de neurones <math>n_r</math>.</p> <p>Dimensionnement des abscisses.</p> <p>Somme des fonctions sigmoïdes pondérées.</p> <p>Ajout du 'biais' <math>b_s</math>, mise à l'échelle, résultat dans <math>y</math>.</p>				

TAB. A.4: Interpolation des résultats expérimentaux par une méthode de réseaux de neurones. Algorithme de reconstruction. Comparaison des fonctions interpolées aux données expérimentales.

$d_p$ [mm]	matériau	$\rho_p$ [Kg/m <sup>3</sup> ]	$U_\infty$ [m/s]	$\pm \xi_{rel}$ [%]	$Re_p$	$S_t$	$\tau_{95}$ [s]	$d_{95}$ [m]
0.5	<i>g</i>	2560.0	0.0741	0.6	41.000	11.66	0.0550	0.0028
0.8	<i>s</i>	7710.0	0.316	0.9	280.00	239.9	0.1080	0.0233
1.5	<i>g</i>	2560.0	0.218	0.4	360.00	102.4	0.1420	0.02115
1.0	<i>s</i>	7850.0	0.383	0.5	430.00	375.1	0.1320	0.0345
2.0	<i>g</i>	2480.0	0.271	0.5	600.00	165.3	0.1970	0.0365
1.0	<i>w</i>	14800	0.590	0.3	660.00	1085	0.1480	0.0597
2.0	<i>s</i>	7670.0	0.636	0.2	1400.0	1193	0.1970	0.0856
3.0	<i>s</i>	7800.0	0.813	0.5	2700.0	2340	0.2250	0.125
4.0	<i>s</i>	7700.0	0.973	0.4	4300.0	3679	0.2920	0.19413
6.0	<i>s</i>	7750.0	1.158	0.4	7700.0	6631	0.3150	0.249

TAB. A.5: Sédimentation d'une sphère en milieu illimité : Expériences de Mordant et Pinton (2000). Classement par  $Re_p$  croissant. Correspondance respective de chaque colonne : diamètre de la sphère  $d_p$ , matériau de la sphère (*g* : verre, *s* : acier, *w* : tungstène), densité du matériau  $\rho_p$ , vitesse limite de chute  $U_\infty$ , précision  $\xi_{rel}$  sur la mesure de  $U_\infty$ , nombre de Reynolds  $Re_p$ , nombre de Stokes  $S_t$ , temps caractéristique de chute  $\tau_{95}$ , distance caractéristique de chute  $d_{95}$ .

### A.5.3 Sphère en milieu quasi-illimité (Mordant et Pinton, 2000), [ $k \simeq 0$ , $Re_p \in [41, 7700]$ ]

L'expérience décrite dans cette section concerne la sédimentation d'une sphère de diamètre  $d_p$  dans un milieu fluide de taille caractéristique très supérieure à celle de l'inclusion. La phase continue est constituée d'eau maintenue à 25°C, de densité  $\rho_f = 1000$  [Kg/m<sup>3</sup>] et de viscosité  $8.9 \cdot 10^{-4}$  [Pa.s]. Les nombres de Reynolds et de Stokes sont modulés via la densité  $\rho_p$  et le diamètre  $d_p$  de l'inclusion. La cuve utilisée est un parallépipède de section horizontale  $L_x \times L_z = 1.1$  [m]  $\times$  0.75 [m] et de profondeur  $L_y = 1.1$  [m]. La méthode d'investigation consiste à mesurer la diffraction d'ultrasons générés à partir d'une source située à l'aplomb de la sphère. L'analyse du spectre énergétique des ondes diffractées par le milieu révèle une composante diffractée par la particule en mouvement. La mesure de l'effet Doppler résultant permet de calculer la composante verticale de la vitesse de la particule. Plusieurs résultats sont détaillés :

L'évolution du coefficient de traînée mesuré dans la gamme  $Re_p \in [41, 7700]$  est tout à fait conforme aux résultats de la littérature détaillés dans la section A.1.2 page 140. Dans la plupart des cas la trajectoire reste verticale. Les deux exceptions concernent les particules de verre qui oscillent de façon transitoire pour les Reynolds  $Re_p = 360$  et  $Re_p = 600$ .

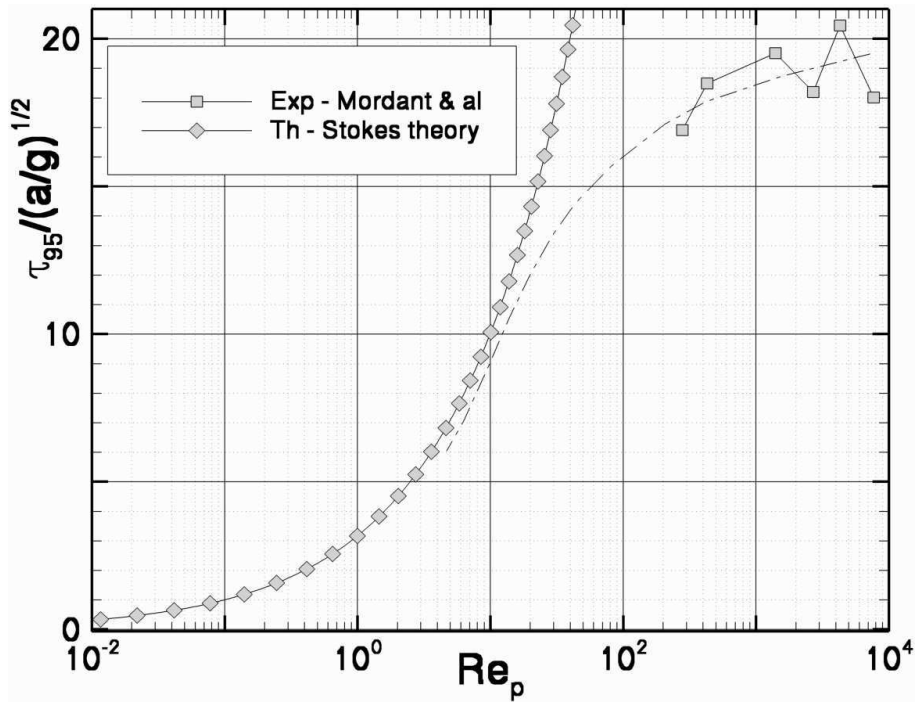


FIG. A.15: Évolution du temps caractéristique de chute d'une sphère en milieu infini en fonction du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . Cas d'une sphère en acier ( $\rho_p \simeq 7750$ ) de rayon variable sédimentant dans de l'eau. Comparaison de la théorie de Stokes sans force d'histoire et des résultats expérimentaux de Mordant et Pinton (2000).

Dans le cas de l'acier ou du tungstène et pour des nombres de Reynolds équivalents, le nombre de Stokes est respectivement de 4 à 6 fois plus élevé par rapport au cas du verre, et la trajectoire reste rectiligne. En répétant et en moyennant les mesures pour le verre, on retrouve un comportement analogue à celui de l'acier. Au final toutes les courbes suivent une unique loi exponentielle,

$$U_p(t) = U_\infty(1 - e^{\frac{-3t}{\tau_{95}}}), \quad (\text{A.22})$$

où le temps  $\tau_{95}$  mis par la sphère pour atteindre 95% de la vitesse  $U_\infty$  est reporté dans la table A.5. Notons que pour des écoulements en régimes décroissants, le ratio  $\tau_{95}/3$  devrait tendre vers le temps de relaxation de la particule  $\tau_0$  défini en page 162. Sur la figure A.15 on compare les résultats expérimentaux et la théorie de Stokes sans prise en compte de la force d'histoire. Même si la théorie de Stokes est approximative dans l'intervalle représenté, on devine qu'un raccordement asymptotique du type de celui schématisé en pointillés doit être possible. Concernant la force d'histoire, les auteurs montrent un comportement identique à la théorie aux temps courts, mais une décroissance rapide en  $t^{-2}$  du terme transitoire aux temps longs, au lieu de la loi en  $t^{-1/2}$  prévu par la théorie.



# Annexe B

## Temps caractéristiques de la sédimentation et du transport

### B.1 Première approximation pour le régime instationnaire

Dans le cadre d'un problème de Stokes instationnaire gouverné par l'équation

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \rho \mathbf{g} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{u}, \quad (\text{B.1})$$

l'équation dite de Boussinesq-Basset permet de trouver une solution analytique pour la vitesse verticale de chute  $U_p(t)$  d'une sphère sédimentant en milieu fluide illimité :

$$m_p \frac{dU_p}{dt} = (m_p - m_f)g - 3\pi\mu_f d_p U_p f - \frac{1}{12}\pi d_p^3 \rho_f \frac{dU_p}{dt} - \frac{3}{2}\rho_f d_p^2 \sqrt{\pi\nu} \int_{-\infty}^t \frac{dU_p(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{(t-\tau)}} \quad (\text{B.2})$$

On reconnaît le postulat fondamental de la dynamique avec la force de gravité et la poussée d'Archimède, la force de traînée stationnaire à corriger éventuellement avec un facteur de correction<sup>1</sup>  $f$  dépendant de la géométrie du domaine et du confinement de la sphère, et enfin la somme de la traînée dynamique et du terme de Basset. Ces deux dernières contributions sont étroitement liées, la traînée dynamique portant aussi le nom de force de masse ajoutée et qui s'écrit traditionnellement  $F_{m.a.j.} = C_m m_f \frac{dU_p}{dt}$  où  $C_m$  est le coefficient de masse ajoutée, égal à 0.5 dans le cas de la sphère.

---

<sup>1</sup>Si l'on suppose qu'aux tout premiers instant du processus, la sphère ne doit pas ressentir l'effet du confinement, on fait l'hypothèse ici que l'effet des parois sur la traînée dynamique reste négligeable.



La notion de force de Basset est étroitement liée au phénomène de masse ajoutée. Une particule animée d'une vitesse constante dans un fluide non-parfait déplace avec elle une couche de fluide immobile dans le repère lié à la particule, d'où le terme de 'masse ajoutée'. On explicite plus clairement ce phénomène par l'étude de la couche limite que l'on peut classiquement dissocier en considérant un solide comprenant la particule ainsi qu'une enveloppe de fluide, immergé dans un fluide parfait équivalent. La force de Basset intervient en régime instationnaire et prend en compte le retard de développement de la couche limite lors d'une phase d'accélération de la particule. Même dans le cadre du régime de Stokes, ces micro-effets inertiels s'accompagnent donc de nombres de Reynolds instantanés qui peuvent ne plus être négligeables devant l'unité. Appelée aussi 'Force d'histoire', ce terme instationnaire prend en compte toute perturbation du fluide rencontré par la sphère. De ce fait, intégrer le terme de Basset peut conduire à un stockage de données très contraignant, puisque l'équation (B.2) implique d'intégrer à chaque pas de temps toute l'histoire de la particule sur sa trajectoire. Dans un premier temps nous négligerons ce terme afin de résoudre le problème de façon simple et en tirer une analyse des temps caractéristique de la sédimentation. On peut réécrire l'équation (B.2) en fonction des paramètres  $A = \rho_p + \rho_f/2$ ,  $B = 9f\mu_f/2a^2$  et  $D = (\rho_f - \rho_p)g$  sous la forme suivante :

$$A \frac{dU_p}{dt} + BU_p + D = 0 \quad (\text{B.3})$$

On obtient pour l'évolution de la vitesse de sédimentation le profil exponentiel

$$U_p(t) = -\frac{D}{B} \left( 1 - e^{-\frac{Bt}{A}} \right) \quad (\text{B.4})$$

Ce profil croît de façon monotone pour tendre vers la vitesse correspondant à la vitesse limite de chute de la particule.

$$U_\infty = -D/B = \frac{2(\rho_p - \rho_f)ga^2}{9\mu_f} \quad (\text{B.5})$$

On relève trois temps caractéristiques :

- $\tau_0 = B/A = \frac{2(\rho_p + C_m\rho_f)a^2}{9f\mu_f}$  désigne le temps de relaxation de la particule appelé également temps de Stokes.
- $\tau_{95} = 3 \times \tau_0$  désigne le temps nécessaire à la particule pour atteindre 95% de sa vitesse limite.
- $\tau_c = 9 \times \tau_0/2 = (\rho_p + C_m\rho_f)a^2/f\mu_f \simeq \tau_{99}$  désigne le temps nécessaire à la particule pour atteindre 99% de sa vitesse limite.

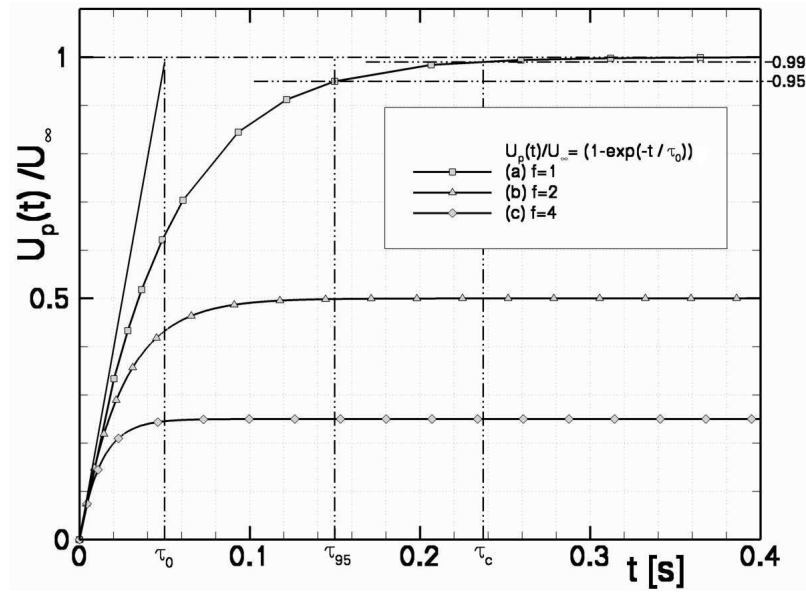


FIG. B.1: Temps caractéristiques associés à la sédimentation d'une particule en régime de Stokes.

Tel qu'il est défini ici, le coefficient de correction  $f$  influence la vitesse limite et les temps caractéristiques. Comme on peut le voir sur la figure B.1, le modèle prévoit une décroissance linéaire des temps caractéristiques pour un facteur de confinement  $f$  croissant. Par contre l'accélération initiale reste inchangée. Selon ce modèle cette accélération  $A_0$  ne dépend que du contraste en densité et s'exprime de la façon suivante :

$$A_0 = U_\infty/\tau_0 = \left( \frac{\rho_p - \rho_f}{\rho_p + C_m \rho_f} \right) g \quad (\text{B.6})$$

Nous avons montré pour ce modèle que l'échelle de temps caractéristique est homogène à  $\rho_p a^2/\mu_f$ . Il s'agit d'une échelle inertielle de réponse de la particule aux perturbations du fluide environnant. Avec la donnée  $U_\infty$ , elle permet d'estimer à la fois l'accélération initiale et le temps global de mise en régime. Il s'agit donc de la seule donnée qui puisse constituer pour nous une base d'évaluation du paramètre de résolution en temps du code.

## B.2 Influence de la force d'histoire pour le régime instationnaire.

Plusieurs auteurs ont proposé des solutions à l'équation (B.2) tenant compte de la force d'histoire de Basset. Par exemple pour simplifier le calcul, il est possible de linéariser ce terme en exploitant la formulation de Michaelides (voir Sommerfeld (2000)) ou bien celle de Abbad et Souhar (2001) où le noyau de Basset est exprimé en fonction de la vitesse, de l'accélération et de la vitesse terminale de Stokes.

$$F_{hs} = 6\pi\mu_f a \left( \frac{1}{\delta_e} (U_p - U_\infty) + \frac{\tau_\nu \delta_e}{2} \frac{dU_p}{dt} \right) \quad (\text{B.7})$$

Avec :

- $\tau_\nu = \frac{\rho_f a^2}{\mu_f}$  le temps caractéristique de diffusion visqueuse (ou temps de relaxation du fluide sur une distance  $a$ ),
- $\delta_e$  la distance adimensionnelle caractérisant la distance d'un point du fluide à l'interface pour lequel la vorticité est négligeable.

Toutefois l'équation (B.2) admet des solutions analytiques, comme le prouvent Belmonte *et al.* (2001). Cette équation préalablement adimensionnée et soumise à une transformation de Laplace permet d'isoler la vitesse de la façon suivante :

$$U = \mathcal{L}(U_p(t)) : p \rightarrow \frac{1}{p} \frac{1}{C_1 + C_2 p + \sqrt{p}} \quad (\text{B.8})$$

où  $C_1$  et  $C_2$  représentent une combinaison des constantes physiques du système. Une transformation du dénominateur du second membre permet de factoriser celui-ci pour donner un résultat dont on connaît la transformée  $\mathcal{L}^{-1}$ . Le facteur  $1/p$  équivaut à une dérivée, donc on obtient l'accélération  $U'_p(t)$  que l'on intègre pour aboutir à la solution analytique :

$$\frac{U_p(t)}{U_\infty} = 1 + \frac{\sqrt{\mathcal{K}}}{\alpha - \beta} \left[ \frac{e^{\alpha \mathcal{B}t} \operatorname{erfc} \sqrt{\alpha \mathcal{B}t}}{\sqrt{\alpha}} - \frac{e^{\beta \mathcal{B}t} \operatorname{erfc} \sqrt{\beta \mathcal{B}t}}{\sqrt{\beta}} \right] \quad (\text{B.9})$$

Avec :

- $\mathcal{K} = \frac{9\rho_f}{2(\rho_p + C_m \rho_f)}$  caractérisant le contraste en densité,
- $\mathcal{B} = \mathcal{K} \frac{\mu_f}{\rho_f a^2}$  l'inverse du temps de relaxation de la particule  $1/\tau_0$ ,
- $\alpha$  et  $\beta$  les racines du polynôme  $m^2 + (2 - \mathcal{K})m + 1 = 0$ .

Les auteurs de ce développement ont montré que des solutions existaient pour tous les rapports de densités, même dans le cas de valeurs de  $\mathcal{K}$  comprises entre 0 et 4, pour lesquelles le polynôme précédent admet des racines  $\alpha$  et  $\beta$  complexes. Quant aux temps

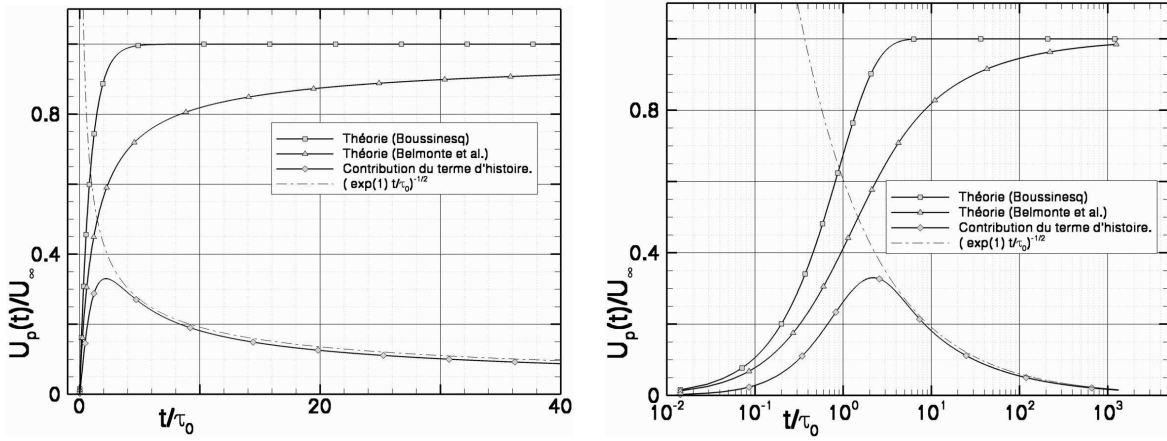


FIG. B.2: Comparaison du modèle de Boussinesq (eq. (B.4)) (a), et de la solution exacte proposée par Belmonte *et al.* (2001) (b). Contribution et comportement asymptotique du terme d'histoire (a-b). Vitesse adimensionnée  $U_p(t)/U_\infty$  en fonction du temps adimensionnel  $t/\tau_0$  représenté en échelle linéaire (figure de gauche) et logarithmique (figure de droite).

caractéristiques on retrouve une dépendance en  $\mathcal{B}t = t/\tau_0$  avec la pondération des termes  $\alpha$  et  $\beta$ .

Nous avons codé la solution (B.9). Son comportement est particulier, et notamment pour certaines valeurs du contraste en densité  $\mathcal{K}$  pour lesquelles le code échoue avant d'atteindre l'état stationnaire.

La figure B.2 compare cette solution avec la relation classique (B.4). La contribution de Basset déduite de la différence entre les deux approches montre un accroissement exponentiel aux temps courts puis un maximum à  $t \simeq 2\tau_0$ . Comme ce terme est purement instationnaire, il tend vers zéro aux temps longs selon la loi  $(\tau_0/t)^{\frac{1}{2}}$ .

L'impact de la force d'histoire sur la phase d'accélération est considérable. Une représentation en échelle logarithmique est également proposée sur la figure B.2 afin de mieux distinguer les différences aux temps courts comme aux temps longs. Si l'accélération aux temps très courts reste inchangée, on remarque que la traînée instationnaire est vite sous-estimée par l'approche de type Boussinesq. Les relations entre les différents temps caractéristiques changent de façon critique :

(i) Le temps de relaxation  $\tau_0$  reste comparable, ce qui est logique car l'accélération initiale et la vitesse limite sont en principe inchangés, ainsi que  $\tau_0$  qui correspond à l'intersection des asymptotes extrêmes.

(ii) Quant aux temps représentatifs de la phase instationnaire, on trouve  $\tau_{95} = 120\tau_0$  au lieu de  $3\tau_0$ , et  $\tau_{99}$  est supérieur à 1000 fois  $\tau_0$  au lieu de 4.5 fois. Cela montre que la solution algébrique de Belmonte *et al.* (2001) diffère radicalement d'une simple loi exponentielle.

N'ayant pas connaissance de résultats expérimentaux indiscutables concernant l'accélération d'une sphère en milieu infini et en régime de Stokes, il reste difficile de confirmer ce résultat. Il faut également garder en tête l'hypothèse  $Re_p = 0$  qui étaye cette étude, et qui n'est jamais vérifiée expérimentalement. Dans la réalité, l'existence d'effets inertiels même très faibles peut avoir un impact important sur la force de Basset. Toutefois l'origine première de l'absence de données expérimentales précises réside certainement dans l'influence des systèmes de lâcher de sphère : Il est extrêmement difficile de définir un dispositif qui ne perturbe pas le champ fluide lors de la phase d'accélération. En effet, pour ce type de régime, la sphère sera extrêmement sensible à la présence d'obstacles proches.

Ce problème pourrait être mieux compris en tentant de l'approcher à l'aide d'une méthode de simulation directe.

# Annexe C

## Fichiers de données

### C.1 Sphere fixe – 3D

=====			
=====Force de traînée d'un réseau de sphères fixes=====			
=====Aq0407c=====			
	3D	CARTESIEN	
CALCUL	3D	CARTESIEN	
DIM MIN	0.0D0	0.0D0	0.0D0
DIM MAX	1.D-2	1.D-2	1.D-2
MAILLAGE	80	80	80
GRILLE	CONSTANTE		
ITERATION TEMPS	3000		
NAVIER	OUI		
ADVECTION	NON		
INERTIE	OUI		
VISCOSITE ELONGATION	OUI		
VISCOSITE COMPRESSION	NON		
VISCOSITE ROTATION	OUI		
VISCOSITE CISAILLEMENT	OUI		
LAGRANGIEN	OUI		
LIMITE VITESSE GAUCHE	LIBRE		
LIMITE VITESSE DROITE	LIBRE	PERIODIQUE X	
LIMITE VITESSE INF	LIBRE		
LIMITE VITESSE SUP	LIBRE	PERIODIQUE Z	
LIMITE VITESSE AVANT	LIBRE		
LIMITE VITESSE ARRIERE	LIBRE	PERIODIQUE Y	
PAS DE TEMPS ADVECTION	1.D-4		
PAS DE TEMPS NAVIER	1.D-4		
METHODE NAVIER	LAGRANGIEN		
ITERATION LAGRANGIEN	1		
SCHEMA NAVIER	UPWIND		
PARAMETRE DR	1.D1		
PARAMETRE DP	1.D1		
SOLVEUR NAVIER	MASTER		
PRECONDITIONNEMENT NAVIER	ILU		
ITERATION BICG NAVIER	10		
GRAVITE STANDARD	0.D0		

## C.2 Cylindre mobile – 2D

### C.2.1 Cas(o)

=====		
====Sédimentation d'un cylindre entre deux parois infinies====		
===== Vterminale=0.032 m/s=====Aq0201=====		
CALCUL	2D	CARTESIEN
DIM MIN	0.0D0	0.0D0
DIM MAX	0.0523D0	1.046D0
MAILLAGE	20	400
GRILLE	CONSTANTE	
NAVIER	OUI	
ADVECTION	OUI	
INERTIE	OUI	
VISCOSITE ELONGATION	OUI	
VISCOSITE COMPRESSION	NON	
VISCOSITE ROTATION	OUI	
VISCOSITE CISAILLEMENT	OUI	
LAGRANGIEN	OUI	
LIMITE VITESSE INF	NEUMAN	
LIMITE VITESSE SUP	NEUMAN	
LIMITE VITESSE GAUCHE	PAROI	
LIMITE VITESSE DROITE	SYMETRIE	
PAS DE TEMPS ADVECTION	0.00002D0	
SCHEMA ADVECTION	TVD	
PAS DE TEMPS NAVIER	0.00002D0	
METHODE NAVIER	LAGRANGIEN	
ITERATION LAGRANGIEN	2	
INTERPOLATION VISCOSITE	LINEAIRE	
INTERPOLATION MASSE	LINEAIRE	
VARIATION MASSE	CONTINUE	
VARIATION VISCOSITE	CONTINUE	
SCHEMA NAVIER	CENTRE	
PARAMETRE DR	22.1D3	
PARAMETRE DP	22.1D3	
SOLVEUR NAVIER	MASTER	
PRECONDITIONNEMENT NAVIER	ILU	
ITERATION BICG NAVIER	50	

## C.2.2 Cas(i)

=====		
=====Sédimentation d'un cylindre entre deux parois infinies =====		
===== Vterminale=0.032 m/s=====Aq0201/Aq0411aP=====		
CALCUL	2D	CARTESIEN
DIM MIN	0.0D0	0.0D0
DIM MAX	0.0523D0	1.046D0
MAILLAGE	20	400
GRILLE	CONSTANTE	
NAVIER	OUI	
ADVECTION	OUI	
INERTIE	OUI	
VISCOSITE ELONGATION	OUI	
VISCOSITE COMPRESSION	NON	
VISCOSITE ROTATION	OUI	
VISCOSITE CISAILLEMENT	OUI	
LAGRANGIEN	OUI	
LIMITE VITESSE INF	PAROI	
LIMITE VITESSE SUP	PAROI	
LIMITE VITESSE GAUCHE	PAROI	
LIMITE VITESSE DROITE	SYMETRIE	
PAS DE TEMPS ADVECTION	0.0001D0	
SCHEMA ADVECTION	VOF	
PAS DE TEMPS NAVIER	0.0001D0	
METHODE NAVIER	LAGRANGIEN	
ITERATION LAGRANGIEN	1	
INTERPOLATION VISCOSITE	GEOMETRIQUE	
INTERPOLATION MASSE	LINEAIRE	
VARIATION MASSE	CONTINUE	
VARIATION VISCOSITE	DISCONTINUE	
SCHEMA NAVIER	CENTRE	
PARAMETRE DR	22.1D3	
PARAMETRE DP	22.1D3	
SOLVEUR NAVIER	MASTER	
PRECONDITIONNEMENT NAVIER	ILU	
ITERATION BICG NAVIER	20	



### C.3 Sphère mobile – 2D Axisymétrique

=====		
=====Sédimentation d'une sphère dans une cuve cylindrique=====		
===== Vterminale=0.0243 m/s=====Aq0201/Aq0411aP=====		
CALCUL	2D	AXISYM
DIM MIN	0.0D0	0.0D0
DIM MAX	0.901652D0	0.0523D0
MAILLAGE	862	50
GRILLE	CONSTANTE	
NAVIER	OUI	
ADVECTION	OUI	
INERTIE	OUI	
VISCOSITE ELONGATION	OUI	
VISCOSITE COMPRESSION	NON	
VISCOSITE ROTATION	OUI	
VISCOSITE CISAILLEMENT	OUI	
LAGRANGIEN	OUI	
LIMITE VITESSE INF	SYMETRIE	
LIMITE VITESSE SUP	PAROI	
LIMITE VITESSE GAUCHE	PAROI	
LIMITE VITESSE DROITE	PAROI	
PAS DE TEMPS ADVECTION	0.0005D0	
SCHEMA ADVECTION	VOF	
PAS DE TEMPS NAVIER	0.0005D0	
METHODE NAVIER	LAGRANGIEN	
ITERATION LAGRANGIEN	1	
INTERPOLATION VISCOSITE	GEOMETRIQUE	
INTERPOLATION MASSE	LINEAIRE	
VARIATION MASSE	CONTINUE	
VARIATION VISCOSITE	CONTINUE	
SCHEMA NAVIER	CENTRE	
PARAMETRE DR	22.1D3	
PARAMETRE DP	22.1D3	
SOLVEUR NAVIER	MASTER	
PRECONDITIONNEMENT NAVIER	ILU	
ITERATION BICG NAVIER	20	

C.4 Sphère mobile – 3D –  $Re_p = 31.9$ 

=====			
====Sédimentation d'une sphère dans une cuve====			
==Rep=[1.5,31.9]====Aq0207/Aq0411aP====			
CALCUL	3D		
DIM MIN	0.0D0	0.0D0	0.0D0
DIM MAX	0.05D0	0.05D0	0.16
MAILLAGE	50	50	160
GRILLE	CONSTANTE		
NAVIER	OUI		
ADVECTION	OUI		
INERTIE	OUI		
VISCOSITE ELONGATION	OUI		
VISCOSITE COMPRESSION	NON		
VISCOSITE ROTATION	OUI		
VISCOSITE CISAILLEMENT	OUI		
LAGRANGIEN	OUI		
LIMITE VITESSE INF	SYMETRIE		
LIMITE VITESSE SUP	PAROI		
LIMITE VITESSE GAUCHE	SYMETRIE		
LIMITE VITESSE DROITE	PAROI		
LIMITE VITESSE AVANT	NEUMAN		
LIMITE VITESSE ARRIERE	PAROI		
PAS DE TEMPS ADVECTION	0.0005D0		
SCHEMA ADVECTION	VOF		
PAS DE TEMPS NAVIER	0.0005D0		
METHODE NAVIER	LAGRANGIEN		
ITERATION LAGRANGIEN	1		
INTERPOLATION VISCOSITE	GEOMETRIQUE		
INTERPOLATION MASSE	LINEAIRE		
VARIATION MASSE	CONTINUE		
VARIATION VISCOSITE	DISCONTINUE		
SCHEMA NAVIER	CENTRE		
DPDR-VARIABLE	OUI		
SOLVEUR NAVIER	MASTER		
PRECONDITIONNEMENT NAVIER	ILU		
ITERATION BICG NAVIER	5		

## C.5 Sphère mobile – 3D – $Re_p = 280$

=====			
====Sédimentation d'une sphère dans une cuve====			
==Rep=280=====Aq0402e/Aq0411aP=====			
CALCUL	3D	CARTESIEN	
DIM MIN	0.0D0	0.0D0	0.0D0
DIM MAX	0.004D0	0.004D0	0.064D0
MAILLAGE	50	50	800
GRILLE	CONSTANTE		
NAVIER	OUI		
ADVECTION	OUI		
INERTIE	OUI		
VISCOSITE ELONGATION	OUI		
VISCOSITE COMPRESSION	NON		
VISCOSITE ROTATION	OUI		
VISCOSITE CISAILLEMENT	OUI		
LAGRANGIEN	OUI		
LIMITE VITESSE INF	PAROI		
LIMITE VITESSE SUP	PAROI		
LIMITE VITESSE GAUCHE	PAROI		
LIMITE VITESSE DROITE	PAROI		
LIMITE VITESSE AVANT	PAROI		
LIMITE VITESSE ARRIERE	PAROI		
PAS DE TEMPS ADVECTION	0.00007D0		
SCHEMA ADVECTION	LAG		
PAS DE TEMPS NAVIER	0.00007D0		
METHODE NAVIER	LAGRANGIEN		
ITERATION LAGRANGIEN	2		
INTERPOLATION VISCOSITE	GEOMETRIQUE		
INTERPOLATION MASSE	LINEAIRE		
VARIATION MASSE	CONTINUE		
VARIATION VISCOSITE	DISCONTINUE		
SCHEMA NAVIER	CENTRE		
DPDR-VARIABLE FLUIDE	SEUIL	1.D+5	
	VITESSE-G	1.D-4	
	VITESSE-I	0.316D0	
	DIM	0.8D-3	
	DR	100.D0	
	DIM-LOC,VIT-LOC	NON	
DPDR-VARIABLE SOLIDE	SEUIL	1.D+5	
	VITESSE-G	1.D-4	
	VITESSE-I	0.316D0	
	DIM	0.8D-3	
	DR	10.D0	
	DIM-LOC,VIT-LOC	NON	
SOLVEUR NAVIER	MASTER		
PRECONDITIONNEMENT NAVIER	ILU		
ITERATION BICG NAVIER	30		

1

<sup>1</sup>Pour information, les fichiers de cas-tests fournis indiquent les numéros des premières versions validées [versions séquentielles (ex : Aq0201 pour Janvier 2002) ou parallèles (ex : Aq0411aP)].

# Bibliographie

- M. Abbad et M. Souhar. L'effet du terme d'histoire sur le mouvement des particules sphériques rigides. *XV<sup>ème</sup>, Congrès Français de Mécanique, 3-7 Septembre 2001, Nancy*, 2001.
- F. F. Abraham. Functional dependance of drag coefficient of a sphere on reynolds number. *Phys. Fluids.*, 13(8) :2194–2195, 1970.
- P. Angot. Contribution à l'étude des transferts thermiques dans des systèmes complexes ; application aux composants électroniques. *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, spécialité mécanique*, 1998.
- G. K. Batchelor. An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press*, 1967.
- L. E. Becker et G. H. McKinley. The unsteady motion of a sphere in a viscoelastic fluid. *Journal of Rheology*, 38(2) :377–403, 1994.
- A. Belmonte, J. Jacobsen, et Jayaraman A. Monotone solutions of a nonautonomous differential equation for a sedimenting sphere. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2001(62) :1–17, 2001.
- J. Boussinesq. Sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini au repos. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 100 :935–937, 1885.
- J. Breil. Modélisation du remplissage en propergol de moteur à propulsion solide. *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, spécialité mécanique*, 2001.
- H. Brenner. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical Engineering Science*, 16 :242–251, 1961.
- M. Burger et A. Neubauer. Analysis of tikhonov regularization for function approximation by neural networks. *Neural Networks*, 16 :79–90, 2003.

- J. P. Caltagirone et J. Breil. Sur une méthode de projection vectorielle pour la résolution des équations de navier-stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 327(2b) :1179–1184, 1999.
- J. P. Caltagirone et S. Vincent. Sur une méthode de pénalisation tensorielle pour la résolution des équations de navier-stokes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 329(2b) :607–613, 2001.
- S. Chen et G. D. Doolen. Lattice boltzmann method for fluid flows. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 30 :329–364, 1998.
- R. Clift, J. R. Grace, et M. E. Weber. Bubbles, drops and particles. *Academic Press, New-York*, 1978.
- B. J. Daly. A technique for including surface tension effects in hydrodynamic calculations. *Journal of Computational Physics*, 4 :97–117, 1969.
- L. Elasmî, M. Berzig, et F. Feuillebois. Stokes flow for the axisymmetric motion of several spherical particles perpendicular to a plane wall. *Z. angew. Math. Phys.*, 54 :304–327, 2003.
- J. Feng, H. H. Hu, et D. D. Joseph. Direct simulation of initial value problems for the motion of solid bodies in a newtonian fluid, part1. sedimentation. *Journal of Fluid Mechanics*, 261 :95–134, 1994.
- M. Fortin et R. Glowinski. Méthode de lagrangien augmenté, application à la résolution numérique des problèmes aux limites. *Collection méthodes mathématiques de l'informatique, Dunod, Paris*, 1982.
- R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, et D. D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 25 :755–794, 1999.
- R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, et J. Periaux. A fictitious domain method with distributed lagrange multipliers for the numerical simulation of particulate flow. *Contemporary Mathematics*, 218 :121–137, 1998.
- R. Glowinski, T. W. Pan, T. I. Hesla, D. D. Joseph, et J. Periaux. A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies : Application to particulate flow. *Journal of Computational Physics*, 169 :363–426, 2001.

- P. Gondret, M. Lance, et L. Petit. Bouncing motion of spherical particles in fluids. *Phys. Fluids.*, 14 :643, 2002.
- E. Guyon, J. P. Hulin, et L. Petit. écoulements à petit nombre de reynolds. *Hydrodynamique physique, Nouvelle Édition*, 2001.
- J. Happel et H. Brenner. Low reynolds number hydrodynamics. *Kluwer Academic Publishers*, 1983.
- J. Happel et R. Pfeffer. The motion of two spheres following each other in a viscous fluid. *AIChE J.*, 6 :129–133, 1960.
- F. H. Harlow et J. E. Welch. Numerical calculations of time dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Phys. Fluids.*, 8 :2182, 1965.
- R. J. Hill, D. L. Koch, et A. J. C. Ladd. The first effects of fluid inertia on flows in ordered and random arrays of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, 448 :213–241, 2001.
- C. Hirsh. Numerical computation of internal and external flows. *Wiley-Interscience Publishers*, 2, 1990.
- K. Hofer. Simulation and modeling of mono- and bidisperse suspensions. *Doctoral Thesis, University of Stuttgart*, 2000.
- H. H. Hu, N. A. Patankar, et M. Y. Zhu. Direct numerical simulations of fluid–solid systems using the arbitrary lagrangian–eulerian technique. *Journal of Computational Physics*, 169 :427–462, 2000.
- M. Jenny, J. Dusek, et G. Bouchet. Instabilities and transition of a sphere falling or ascending freely in a newtonian fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 508(1) :201–239, 2004.
- G. S. Jiang et Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes C. W. Shu. Efficient implementation of weighted eno schemes. *Journal of Computational Physics*, 126 :202–228, 1996.
- T. A. Johnson et V. C. Patel. Flow past a sphere up to a reynolds number of 300. *Journal of Fluid Mechanics*, 378(1) :19–70, 1999.
- K. Khadra. Méthodes adaptatives de raffinement local multigrille, applications aux équations de navier-stokes et de l'énergie. *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, spécialité mathématiques appliquées*, 1994.

- K. Khadra, P. Angot, S. Parneix, et J. P. Caltagirone. Fictitious domain approach for numerical modelling of navier-stokes equations. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, 34(1) :651–684, 2000.
- D. Kim et H. Choi. Laminar flow past a sphere rotating in the streamwise direction. *Journal of Fluid Mechanics*, 461(1) :365–386, 2002.
- A. J. C. Ladd. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 1. theoretical foundation. *Journal of Fluid Mechanics*, 271 :285–309, 1994a.
- A. J. C. Ladd. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized boltzmann equation. part 2. numerical results. *Journal of Fluid Mechanics*, 271 :311–339, 1994b.
- D. Legendre, J. Magnaudet, et G. Mougin. Hydrodynamic interactions between two spherical bubbles rising side by side in a viscous liquid. *Journal of Fluid Mechanics*, 497 :133–166, 2003.
- A. Leshansky, O. Lavrenteva, et A. Nir. The weakly inertial settling of particles in a viscous fluid. *The Royal Society*, 497, 2003.
- A. W. Liu. Viscoelastic flow of polymer solutions around a periodic, linear array of cylinders : comparisons of predictions for microstructures and flow fields. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 77(3) :153–190, 1998.
- B. A. Maury et R. Glowinski. Fluid-particle flow : a symmetric formulation. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 324(1) :1079–1084, 1997.
- J. B. McLaughlin. Numerical computation of particles-turbulence interaction. *International Journal of Multiphase Flow*, 20 :211–232, 1994.
- N. Mordant et J. F. Pinton. Velocity measurement of a settling sphere. *European Physical Journal B*, 18 :343–352, 2000.
- B. D. Nichols et C. W. Hirt. Calculating three-dimensionnal free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures. *Journal of Computational Physics*, 12 : 234–246, 1973.
- C. W. Oseen. über die stokesche formel und über eine verwandte aufgabe in der hydrodynamik. *Ark. Mat. Astron. Fys.*, 6 :1–20, 1910.

- S. Osher et J. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the hamilton–jacobi formulation. *Journal of Computational Physics*, 79 : 12–49, 1988.
- T. W. Pan et R. Glowinski. Direct simulation of the motion of neutrally buoyant circular cylinders in plane poiseuille flow. *Journal of Computational Physics*, 181 :260–279, 2002.
- N. A. Patankar, D. D. Joseph, J. Wang, R. D. Barea, M. Conway, et M. Asadi. Power law correlations for sediment transport in pressure driven channel flows. *International Journal of Multiphase Flow*, 28 :1269–1292, 2002.
- S. V. Patankar. Numerical heat transfert and fluid flow. series in computational methods in mechanics and thermal sciences. *Hemisphere Publishing Corporation*, 1980.
- S. Popinet et S. Zaleski. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 30 :775–793, 1999.
- I. Proudman et J. R. A. Pearson. Expansion at small reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, 2 :237–262, 1957.
- N. Randrianarivelo, G. Pianet, S. Vincent, et J. P. Caltagirone. Numerical modelling of solid particle motion using a new penalty method. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 47 : 1245–1251, 2005.
- G. H. Ristow. Wall correction factor for sinking cylinders in fluids. *Physical Review E*, 55(3) :2808–2813, 1997.
- J. B. Ritz. Modélisation numérique des écoulements fluides-particules. *Thèse de l’Université de Bordeaux I, Spécialité Mécanique*, 1997.
- R. Scardovelli et S. Zaleski. Direct numerical simulation of free-surface and interfacial flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 31(1) :567–603, 1999.
- S. Shin et D. Juric. Modeling three–dimensional multiphase flow using a level contour reconstruction method for front tracking without connectivity. *J. Comput. Phys.*, 180 : 427–470, 2002.
- M. Sommerfeld. Theoretical and experimental modelling of particulate flows. *Lecture Series 2000-06, von Karman Institute for Fluid Dynamics*, 2000.



- S. Succi. The lattice boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. *Oxford : Oxford University Press*, 2001.
- S. Taneda. Experimental investigation of the wake behind a sphere at low reynolds number. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 11 :1104, 1956.
- A. ten Cate, J. J. Derksen, L. M. Portela, et H. E. A. Van den Akker. Fully resolved simulations of colliding monodisperse spheres in forced isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 519 :233–271, 2004.
- A. ten Cate, C. H. Nieuwstad, J. J. Derksen, et H. E. A. Van den Akker. Particle imaging velocimetry experiments and lattice-boltzmann simulations on a single sphere settling under gravity. *Phys. Fluids.*, 14(11) :4012–4025, 2002.
- H. A. van der Vorst. Preconditioning by incomplete decompositions. *PhD thesis, University of Utrecht, The Netherlands*, 1982.
- H. A. van der Vorst. Bi-cgstab : A fast and smoothly converging variant of bi-cg for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2) :631–644, 1992.
- C. Vanroyen, J. Toutain, A. Omari, et D. Reungoat. Effets inertiels à faible nombre de reynolds : Application à la sédimentation de sphères. *Récents Progrès en Génie des Procédés*, 92, 2005.
- P. Vasseur et R. G. Cox. The lateral migration of spherical particles sedimenting in a stagnant bounded fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 80 :561–591, 1977.
- J. M. Verhelst. Model evaluation and dynamics of a viscoelastic fluid in a complex flow. *PhD Thesis, Technische Univerisiteit Delft.*, 2001.
- S. Vincent. Modélisation d'écoulements incompressibles de fluides non-miscibles. *Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, spécialité mécanique*, 1999.
- S. Vincent, J. P. Caltagirone, P. Lubin, et N. Randrianarivelo. An adaptative augmented lagrangian method for three-dimensional multi-material flows. *Comput. and Fluids.*, 33 :1273–1289, 2004.
- F. M. White. Viscous fluid flow. *2nd edition, McGraw-Hill, New York*, 1991.
- D. L. Youngs, K. W. Morton, et M. J. Baines. Time-dependent multimaterial flow with large fluid distortion. *Numerical Methods for Fluid Dynamics, Academic Press, New-York*, 1982.