



HAL
open science

Surfaces et invariants de type fini en dimension 3

Emmanuel Auclair

► **To cite this version:**

Emmanuel Auclair. Surfaces et invariants de type fini en dimension 3. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT: . tel-00113863

HAL Id: tel-00113863

<https://theses.hal.science/tel-00113863>

Submitted on 14 Nov 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)
préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF*

SURFACES ET INVARIANTS DE TYPE FINI EN DIMENSION 3

Emmanuel AUCLAIR

Soutenue à Grenoble le 26 octobre 2006 devant le jury :

*Christian BLANCHET (Professeur, Université de Bretagne-Sud Vannes)
Michael EISERMANN (Maître de conférences, UJF)
Louis FUNAR (Chargé de Recherches, UJF)
Stavros GAROUFALIDIS (Professeur, Georgia Institute of Technology, Atlanta)
Christine LESCOP (Directrice de recherche, UJF) (directrice)
Pierre VOGEL (Professeur, Université Paris VII)*

Au vu des rapports de Stavros GAROUFALIDIS et Pierre VOGEL

RÉSUMÉ

Cette thèse porte sur les invariants des sphères d'homologie entière de dimension 3, et en particulier sur les invariants de type fini pour la filtration de Goussarov-Habiro.

Dans une première partie, on étudie la variation d'un invariant de degré $2n$ après chirurgie le long d'une surface par un élément du $2n$ -ième terme de la série centrale descendante du groupe de Torelli. Dans le cas d'un commutateur de $2n$ éléments du groupe de Torelli, on exprime cette variation en fonction de l'homomorphisme de Johnson évalué sur ces $2n$ éléments et du système de poids de l'invariant.

Le calcul des claspers de Goussarov-Habiro donne des équivalences topologiques entre des chirurgies sur des corps en anses plongés dans les variétés. Ce calcul a déjà permis de préciser le comportement des invariants de type fini lors de nombreuses modifications topologiques. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à un raffinement de ce calcul. Ce raffinement est ensuite appliqué à l'obtention d'une formule de chirurgie géométrique sur les noeuds pour les invariants de degré 4, c'est-à-dire que l'on exprime la variation d'un tel invariant après chirurgie sur un noeud en fonction d'invariants de courbes tracées au voisinage d'une surface de Seifert de ce noeud.

MOTS-CLÉS

Invariants de type fini, sphères d'homologie de dimension 3, chirurgies, filtration de Goussarov-Habiro, groupe de Torelli, homomorphisme de Johnson, Invariant de Casson, chirurgie borroméenne.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

57M25, 57M27, 57N10, 57R65.

Remerciements

Il n'est guère dans mon caractère de trop lancer de roses ni de manier avec art la brosse à reluire. Cependant, la conclusion de cette thèse, en refermant la longue parenthèse grenobloise, est une bonne occasion d'ôter un instant mes mouffes et de prendre le temps d'exprimer ma reconnaissance sincère pour ceux et celles qui ont contribué à leur manière à l'achèvement de ce travail.

En premier lieu, je me sens extrêmement reconnaissant envers Christine de m'avoir fait découvrir en DEA le joli petit monde de la topologie en dimension 3, d'avoir ensuite accepté de diriger cette thèse, et surtout d'avoir fourni de tels efforts, à l'heure de la *crise de la bourse*, pour que ce travail puisse seulement débiter. Je suis fortement redevable ensuite d'avoir pu trouver en elle un exemple d'honnêteté et de rigueur intellectuelles admirables, se traduisant au quotidien par une forte implication et par des heures de relectures minutieuses. Je la remercie enfin pour m'avoir laissé une grande liberté - quitte à tirer sur les rênes en cas de besoin -, et pour avoir su me motiver par ses encouragements.

Je veux ensuite exprimer ma gratitude envers Pierre Vogel et envers Stavros Garoufalidis pour avoir accepté au plus fort de l'été la lourde tâche de rapporter sur ma thèse. Merci en particulier à Pierre pour sa promptitude, et merci à Stavros pour le temps qu'il m'a consacré lors de sa dernière visite à Grenoble.

C'est avec grand plaisir que j'ai appris la participation de Christian Blanchet à ce jury de thèse, et je lui suis en outre extrêmement redevable du temps et de l'attention qu'il m'a accordés lors de mon séjour à Vannes. J'ai pu notamment y profiter pleinement de ses discussions mathématiques, riches d'enseignements et sources de nombreuses réflexions.

Je remercie très chaleureusement Louis Funar et Michael Eisermann pour avoir accepté de participer à mon jury, mais aussi pour leur disponibilité et pour leur soutien tout au long de cette thèse. Je dois à Louis une bonne partie de ma culture de la dimension 3, et les conseils et recommandations de Michael m'ont été d'un grand secours pour préparer cette soutenance.

Je me dois de mentionner ici Gwenaël Massuyeau, Bertrand Patureau-Mirand, Kristell Dequidt-Picot et Jean-Baptiste Meilhan. Je les remercie pour les diverses discussions que nous avons eues à Strasbourg, à Vannes, à Grenoble, ou lors des différentes réunions du GdR Tresses. A leur contact, un certain nombre d'éclairages et de déclis salvateurs ont pu se produire.

Je remercie les membres de l'équipe de Topologie de l'Institut Fourier pour leur écoute, et notamment Alexis Marin - dont les questions, soigneusement retranscrites, constituent des pistes de recherche que j'aimerais prochainement explorer -, Lucien Guillou, que j'ai parfois harcelé de questions,

et Maxime Wolf, pour sa disponibilité aux répétitions.

Je veux rendre hommage aux collègues que j'ai eu la chance de côtoyer en tant qu'apprenti-enseignant tout au long de ces quatre années. J'ai notamment particulièrement apprécié de travailler en tant que chargé de travaux dirigés sous la direction d'Yves Colin de Verdière, de Christian Dupuis et de Jacques Gasqui. Je garde également de très bons souvenirs de collaborations formatrices avec Éric Gaudron, Mikhail Zaidenberg et Alexei Pantchichkine.

Ces quelques lignes sont également l'occasion de saluer le travail admirable des personnels administratifs, secrétaires et bibliothécaires de l'Institut Fourier, avec une mention spéciale à Martine Barbelenet et à Françoise Martin pour leur participation directe à la mise en forme finale de cette thèse.

Je voudrais ensuite remercier du fond du cœur les membres du laboratoire qui, hors du cadre strictement mathématique ou professionnel, ont participé dans une grande mesure à donner vie à mes yeux aux couloirs sombres de l'Institut Fourier. En premier lieu, je garde une pensée émue pour mes deux cobureaux *historiques* : Laurent, dont l'humour vivace et le rire contagieux me laisseront toujours d'excellents souvenirs ; et Guillemette bien sûr, qui a su rendre plus qu'agréable notre cohabitation de quatre ans, et dont le sourire et les yeux pétillants ont été des remontrances bien douces à l'encontre de mes visées hégémoniques sur son espace vital.

Je dois également un énorme merci à Éric pour son franc-parler et sa gouaille rafraîchissante ; à Jérôme, alias Bichon, pour ses pensées métaphysiques et subtiles à l'ombre du Petit Soleil ; à Fabrice pour son imagination débridée et ses capacités explosives ; aux Deux Gros[®] pour la finesse épaisse de leurs allusions et pour la Grappa des grands jours ; à Martin, dit le Belge, pour son trafic international ; à Catriona, Tanguy, Michel et Laurent pour les soirées tarot-schlouk sans OGM ; à Stéphane pour son hospitalité post-ciné ; à Roland pour ses mille-et-un problèmes sur les matrices de Pascal ; et finalement à Sandrine, chez qui on n'achète pas son café par hasard.

Je veux enfin saluer ici les nombreux thésards de l'Institut dont j'ai pu partager les déboires et les fugitifs instants de grâce. Je pense en particulier à mes vénérables prédécesseurs, Erwann, Yan, David, Nicolas, Guillaume, Sophie, Hélène, Franck, Adrien, Jon ou les Nantais Pierre-Emmanuel et Paolo ; aux partenaires du foot du mercredi, à l'instar d'Alice, Vincent, Vidian, Bertrand et Daniele ; et finalement, aux plus ou moins jeunes qui ont accompagné mes derniers pas, avec notamment Amaël, Andreas, Boris, Vincent, Nicolas, Hadrien, Olga et Claire.

Je ne peux pas oublier la foule de copains, camarades et amis qui ont contribué à égayer mon séjour à Grenoble et m'ont aidé à leur manière à évacuer la pression des moments difficiles. Je pense naturellement à Isa pour son immense générosité, les promenades en Chartreuse et les soirées muscat ; à Guillaume, vieux baroudeur idéaliste et ambulancier de fortune ; à la communauté du Charles Lory, avec Beegee, Gaëlle, Lionel, Coralie, Paul, Émilie, Miguel, Solenne et Bibi, des fléchettes au Dourak, de l'Alsacien au Bulgare,

et des soirées canard aux concours de pâtisserie ; à Julien et à Vu Hung ; à Lapin, David, James et Yvon ; à Matthias et Dennis, du Queyras aux Dolomites ; à Skander, Rozenn et leur petite Elen, d'un grand secours à Nantes ; à Matthieu, Delphine, Glenn et Marion ; à Pascale pour les châtaignes et le violon ; à Nancy pour les randonnées-débat ; au Nek et au Boulet, trop rarement là.

Enfin, je veux rendre hommage à mes camarades du water polo, en compagnie desquels j'ai pu retrouver le minimum de sérénité nécessaire pour aborder cette dernière année de thèse. Je dois ainsi un énorme merci aux Deux Pélots pour les soirées à trois (ou à quatre, avec la cloche) ; à Aude pour les après-midi à Saint-Ismier et les retours musclés en Defender ; à Claudia et son Skat rigoureux ; à Charlotte et ses fantasmes aquatiques ; à Christophe pour sa passion du clairon, et à Nelly pour bien vouloir le laisser faire ; à Etienne pour ses chorégraphies, et à Anne-Lyse pour son caractère débridé ; à Sarah pour les tours à Dionay ; à Cécile et à Claire, mes charmantes déménageuses ; à Nico pour sa patience durement éprouvée ; à Hélène, enfin, pour l'Internationale et pour ses beaux yeux.

Pour finir, je voudrais remercier et rendre hommage à mes parents, grands-parents, frangins, belles-soeurs et petits gnomes, qui ont eu (et auront encore) à supporter dans la durée ce qu'il est légitime d'appeler une sacrée tête de mule.

Table des matières

1	Introduction	5
2	Rappels sur les invariants de type fini	19
2.1	Chirurgies sur les variétés de dimension 3	19
2.1.1	\mathbb{Z} -sphères et \mathbb{Z} -corps en anses	19
2.1.2	Chirurgie sur les nœuds	20
2.1.3	Chirurgie par un élément du groupe de Torelli	21
2.1.4	Graphes en Y et chirurgie en Y	22
2.1.5	Chirurgie lagrangienne	24
2.2	Filtration de Goussarov-Habiro	26
2.2.1	Définition	26
2.2.2	Filtration de G–H et diagrammes de Jacobi	27
2.2.3	Filtrations de G–H et chirurgies lagrangiennes	28
2.2.4	Invariants de type fini et n -congruence	29
3	Homomorphisme de Johnson et forme d’intersection	31
3.1	Enoncés des résultats	31
3.2	Résultats sur la forme d’intersection	33
3.3	Calcul effectif de l’homomorphisme de Johnson	37
3.4	Résultat principal	39
4	Invariants des variétés de dimension 3 et groupe de Torelli	43
4.1	Dépendance des lagrangiens	45
4.1.1	Définition de la filtration \mathcal{F}_n^T	46
4.1.2	Un lemme algébrique	46
4.1.3	Egalité des filtrations \mathcal{F}_n^T et \mathcal{F}_n	48
4.1.4	Preuve du théorème 4.1.1	50
4.1.5	Conséquence du théorème 4.1.1	51
4.2	Relier $\nu^*(c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}))$ aux $\tau_1(\varphi_i)$	52
4.2.1	Chirurgie lagrangienne et diagrammes de Jacobi	52
4.2.2	Calcul explicite	56
4.3	Homomorphisme de Johnson	60
4.3.1	Algèbres de Lie libres	60

4.3.2	Homomorphisme de Johnson généralisé (d'après Morita)	62
4.3.3	Arbres (à racine) décorés	65
4.3.4	L'homomorphisme de Johnson en terme d'arbres	67
4.4	Cas $n = 1$. L'invariant de Casson	69
4.4.1	Relier $\lambda^*([\varphi, \psi])$ à $\tau_2([\varphi, \psi])$	70
4.4.2	Conclusion dans le cas $n = 1$	74
4.5	Cas général	79
5	Mouvements de $(n + 3)$-congruence sur les graphes en Y	85
5.1	Préliminaires	86
5.1.1	Equivalences de chirurgie de Goussarov	86
5.1.2	Relations dans \mathcal{F}	88
5.1.3	Etude de \mathcal{G}_n	91
5.2	Couper une feuille	95
5.2.1	Mouvements de $(n + 1)$ -congruence	95
5.2.2	Mouvements de $(n + 2)$ -congruence	98
5.2.3	Mouvements de $(n + 3)$ -congruence	101
5.3	Cas d'une feuille triviale ± 1 -parallélisée	106
5.3.1	Mouvements de $(n + 1)$ -congruence	106
5.3.2	Mouvements de $(n + 2)$ -congruence	109
5.3.3	Mouvements de $(n + 3)$ -congruence	113
6	Applications aux formules de chirurgie sur les nœuds	121
6.1	$(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5) \otimes \mathbb{Q}$ et diagrammes de Jacobi	121
6.2	Cas des nœuds	123
6.3	Cas des nœuds de genre 1	138
6.3.1	Couper une feuille	139
6.3.2	Simplification de l'enlacement	145
6.3.3	Etude de G_1	151
6.3.4	Simplification de l'auto-enlacement	155
6.3.5	Etude de G_3	160
6.3.6	Epilogue	161
6.4	Cas des feuilles algébriquement scindées	167
6.4.1	Surfaces de Seifert d'un entrelacs	167
6.4.2	Calcul de \overline{G}_3	172
6.4.3	Calcul de \overline{G}_2	173
6.4.4	Calcul de \overline{G}_1	175
6.4.5	Conclusion pour les nœuds de genre 1	177
6.5	Cas des nœuds de genre 2	179
6.5.1	Simplification des enlacements	181
6.5.2	Simplification de l'auto-enlacement	194
6.5.3	Calcul de \overline{J}	194
A	Clover calculus via basic algebraic topology	197

Chapitre 1

Introduction

Après un chapitre préliminaire où l'on redéfinit différentes notions de chirurgies sur les variétés de dimension 3, on compare dans les chapitres 3 et 4 des applications sur le groupe de Torelli induites par des invariants de variétés de dimension 3 d'une part, et induites par l'homomorphisme de Johnson d'autre part. Dans le chapitre 5, on raffine les relations données sur la filtration de Goussarov-Habiro \mathcal{F}_n dans [GGP] pour obtenir des relations dans $(\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+4}) \otimes \mathbb{Q}$. On en déduit dans le chapitre 6 une formule de chirurgie sur les nœuds pour les invariants réels de degré 4.

Soit $\Sigma_{g,1} = \Sigma_g \setminus D$ une surface de genre g privée d'un disque. On note $\mathcal{T}_{g,1}$ le groupe de Torelli, c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes de $\Sigma_{g,1}$ induisant l'identité en homologie dont la restriction au bord est l'identité, quotienté par les isotopies préservant le bord point par point. Soit π le groupe fondamental de $\Sigma_{g,1}$ munie d'un point-base sur le bord. On désigne par $\pi_k \subset \pi$ le k -ième terme de la série centrale descendante de π définie par $\pi_1 = \pi$ et $\pi_{k+1} = [\pi_k, \pi]$. On note $H = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}) = \pi/\pi_2$ le premier module d'homologie de $\Sigma_{g,1}$ sur \mathbb{Z} . L'homomorphisme de Johnson $\tau_1(\varphi) \in \Lambda^3 H^*$ d'un élément $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$ est défini de la manière suivante (voir [J2]). L'action de $\mathcal{T}_{g,1}$ sur π induit un homomorphisme défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{g,1} &\longrightarrow \text{Hom}(\pi; \pi_2/\pi_3) \\ [\varphi] &\longmapsto ([\gamma] \mapsto [\varphi(\gamma)\gamma^{-1}]) \end{aligned}$$

qui induit à son tour un homomorphisme $\tau_{(1)}$ de $\mathcal{T}_{g,1}$ vers $\text{Hom}(H; \pi_2/\pi_3)$. Soit alors

$$\psi^* : \text{Hom}(H; \pi_2/\pi_3) \longrightarrow \Lambda^2 H^* \otimes H^*$$

l'isomorphisme induit par :

- composition à gauche par l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \frac{\pi_2/\pi_3}{[\gamma_1, \gamma_2]} &\longrightarrow \Lambda^2 H \\ &\longmapsto \overline{\gamma_1} \wedge \overline{\gamma_2} \end{aligned}$$

- (voir [MKS, Théorème 15.2]),
- l'identification canonique $\text{Hom}(H; \Lambda^2 H) \simeq \Lambda^2 H \otimes H^*$,
 - l'identification $\Lambda^2 H \simeq \Lambda^2 H^*$ venant de l'identification $H \simeq H^*$ par l'isomorphisme $\rho_H : c \mapsto \langle \cdot, c \rangle$ induit par la forme d'intersection sur H .

L'homomorphisme de Johnson est alors par définition

$$\tau_1 := \psi^* \circ \tau_{(1)} : \mathcal{T}_{g,1} \longrightarrow \Lambda^2 H^* \otimes H^*.$$

Dans [J2, Théorème 1], D. Johnson a montré que l'image de τ_1 est égale à $\Lambda^3 H^*$ via l'inclusion $\Lambda^3 H^* \subset \Lambda^2 H^* \otimes H^*$ définie par

$$a \wedge b \wedge c = a \wedge b \otimes c + c \wedge a \otimes b + b \wedge c \otimes a.$$

Soit M une 3-variété et soit $\Sigma \subset M$ un plongement orienté d'une surface de genre g sans composante de bord. Soit $D \subset \Sigma$ un disque plongé dans Σ . On choisit un voisinage tubulaire $T(\Sigma) = \Sigma \times [-1, 1]$ de Σ de telle sorte que l'orientation induite par les orientations de Σ et de $[-1, 1]$ coïncide avec l'orientation induite par l'orientation de M . Soit $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$ un élément du groupe de Torelli, que l'on étend par l'identité sur D . On définit

$$M_{(\Sigma, \varphi)} := (M \setminus \text{Int}(T(\Sigma))) \bigcup_{\bar{\varphi}: \partial(T(\Sigma)) \rightarrow \partial(\Sigma \times [-1, 1])} (\Sigma \times [-1, 1])$$

la variété obtenue à partir de M en enlevant l'intérieur de $T(\Sigma)$ et en recollant sur le bord de la variété obtenue une copie de $\Sigma \times [-1, 1]$ par l'homéomorphisme

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \partial(T(\Sigma)) &\longrightarrow \partial(\Sigma \times [-1, 1]) \\ (x, 1) &\longmapsto (\varphi^{-1}(x), 1) \\ (x, -1) &\longmapsto (x, -1). \end{aligned}$$

On dira que $M_{(\Sigma, \varphi)}$ est obtenue à partir de M par \mathcal{T} -chirurgie par φ le long de Σ . On définit le *tore d'application* de φ comme

$$\mathbb{T}_\varphi := (\Sigma \times [-1, 1]) / (x, 1) \sim (\varphi(x), -1).$$

Le tore d'application \mathbb{T}_φ s'obtient à partir de $\mathbb{T}_{\text{Id}} = \Sigma \times S^1$ par \mathcal{T} -chirurgie par φ le long d'une fibre $\Sigma \times \{*\}$.

Dans le chapitre 3, on identifie $\tau_1(\varphi)$ à l'intersection triple des surfaces dans \mathbb{T}_φ . Plus précisément, on désigne par

$$\mathcal{I}(\mathbb{T}_\varphi) \in \Lambda^3(H_2(\mathbb{T}_\varphi; \mathbb{Z}))^*$$

la forme d'intersection triple sur $H_2(\mathbb{T}_\varphi; \mathbb{Z})$ correspondant au produit cup sur $H^1(\mathbb{T}_\varphi; \mathbb{Z})$ via la dualité de Poincaré. On note p_φ l'homomorphisme de H dans $H_2(\mathbb{T}_\varphi; \mathbb{Z})$ défini de telle sorte que $p_\varphi([\gamma])$ est la classe d'homologie

d'une surface de $(\Sigma \setminus D) \times [-1, 1]$ qui rencontre $\Sigma \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ comme $\gamma \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On note

$$p_\varphi^* : \Lambda^3 (H_2(\mathbb{T}_\varphi; \mathbb{Z}))^* \longrightarrow \Lambda^3 H^*$$

l'homomorphisme induit par composition à droite par $\wedge^3 p_\varphi$. Dans le chapitre 3, on redémontre le résultat suivant, énoncé par D. Johnson dans [J3], et dont des généralisations dans le contexte des produits de Massey ont été prouvées par T. Kitano dans [K].

Théorème 1 (Théorème 3.1.2).

$$\forall \varphi \in \mathcal{T}_{g,1}, \tau_1(\varphi) = p_\varphi^* (\mathcal{I}(\mathbb{T}_\varphi)).$$

Réciproquement, on exprime en fonction de l'homomorphisme de Johnson la variation de la forme d'intersection triple d'une variété M lors d'une \mathcal{T} -chirurgie (Théorèmes 3.1.4 et 3.4.2).

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à des invariants de type fini pour la filtration de Goussarov-Habiro, redéfinie dans le chapitre 2. On appelle *arrangement de crochets de degré n* une application $c : E^n \rightarrow E$ sur une algèbre libre E munie du crochet $[a, b] = ab - ba$ définie récursivement de telle sorte que si $n = 1$, alors c vaut l'identité sur E , et si $n \geq 2$, alors il existe $r \leq (n-1)$ et deux arrangements de crochets c_1 et c_2 de degrés respectifs r et $n-r$ tels que $c = [c_1, c_2]$. À un tel arrangement de crochets, on associe un ensemble de permutations $\mathcal{S}_n^c \subset \mathcal{S}_n$ et une application $\gamma_c : \mathcal{S}_n^c \rightarrow \pm 1$ tels que,

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in E^n, c(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^c} \gamma_c(\sigma) a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(n)}.$$

Par exemple, si on note c l'arrangement de crochets de degré 3 défini par $c = [\cdot, [\cdot, \cdot]]$, alors

$$c(a_1, a_2, a_3) = a_1 a_2 a_3 - a_1 a_3 a_2 - a_2 a_3 a_1 + a_3 a_2 a_1.$$

Si G est un groupe, on note G_n le n -ième terme de sa *série centrale descendante* définie récursivement par

$$G_1 := G \quad \text{et} \quad G_{n+1} := [G_n, G],$$

et on note sa clôture rationnelle comme

$$G_{(n)} := \{g \in G / \exists r > 0, g^r \in G_n\}.$$

Si g_1, \dots, g_n sont des éléments de G et si c est un arrangement de crochets, alors on peut naturellement définir l'élément $c(g_1, \dots, g_n) \in G_n$ en remplaçant les crochets par des commutateurs $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$.

Dans le chapitre 4, on considère un plongement d'une surface Σ dans une sphère d'homologie entière M , qui est alors vue comme une union $A \cup (-B)$ de deux corps en anses d'homologie séparés par Σ . Pour $X = A$ ou B , on désigne par $\mathcal{L}_X \subset H$ le lagrangien de X c'est-à-dire le noyau de l'application $H_1(\Sigma; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$ induite par l'inclusion de Σ dans X . On note $p_X : H \rightarrow \mathcal{L}_X$ la projection sur \mathcal{L}_X parallèlement au lagrangien de l'autre corps en anses d'homologie. On montre alors dans le paragraphe 4.1 le résultat suivant.

Théorème 2 (Théorème 4.1.8). *Soit ν un invariant à valeurs dans \mathbb{R} de degré n pour la filtration de Goussarov-Habiro. Soit*

$$\begin{aligned} \nu_{(M, \Sigma)}^* : (\mathcal{T}_{g,1})_{(n)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \nu(M_{(\Sigma, \varphi)}) - \nu(M). \end{aligned}$$

Alors $\nu_{(M, \Sigma)}^$ ne dépend que des lagrangiens $(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)$. On pose $\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* = \nu_{(M, \Sigma)}^*$. C'est un homomorphisme de $((\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. De plus, $\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*$ est nul sur $(\mathcal{T}_{g,1})_{(n+1)}$.*

Si a, b et c sont des éléments de H , on note $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$ l'arbre trivalent orienté à un sommet dont les trois arêtes sont décorées dans le sens direct par a, b et c , comme représenté sur la figure 1.1. On désigne par $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ le \mathbb{Z} -module librement engendré par les arbres (a, b, c) , où a, b et c parcourent H , quotienté par la relation de linéarité

$$(a + a', b, c) = (a, b, c) + (a', b, c)$$

et par la relation $(a, a, c) = 0$ (notée aussi $2A = 0$).



FIG. 1.1 – L'arbre (a, b, c) et la relation $2A = 0$.

Alors $\Lambda^3 H^*$ et $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ sont isomorphes par l'identification $H^* \simeq H$ induite par ρ_H^{-1} , et par l'isomorphisme $\Lambda^3 H \simeq \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ défini par

$$a \wedge b \wedge c \longmapsto (a, b, c).$$

On note

$$\tau_1^Y : \mathcal{T}_{g,1} \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$$

la composition de $\tau_1 : \mathcal{T}_{g,1} \rightarrow \Lambda^3 H^*$ par cet isomorphisme.

Si (T_1, \dots, T_{2n}) sont des arbres trivalents dans $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$, un appariement des

arêtes des T_i est la donnée d'une partition des arêtes des T_i en paires. On note \mathbb{P} l'ensemble des appariements sans boucle (c'est-à-dire où deux arêtes adjacentes à un même sommet ne peuvent former une paire). On définit alors une application $2n$ -linéaire

$$\langle\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} : (\mathcal{A}_{\mathbb{Z}, 2}(H))^{2n} \rightarrow \mathcal{A}_n$$

à valeurs dans un \mathbb{Z} -module \mathcal{A}_n engendré par des graphes trivalents orientés à $2n$ sommets -plus précisément défini dans le paragraphe 2.2.2- de la manière suivante. À tout appariement $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$, on associe un graphe trivalent $\Gamma_{\mathcal{P}}$ obtenu en connectant les arêtes des arbres T_i suivant \mathcal{P} . À chaque arête e de $\Gamma_{\mathcal{P}}$, qui correspond à une paire d'arêtes de T_i et de T_j décorées respectivement par a_i et par a_j , où $i < j$, on associe $x_e = \langle p_A(a_i), p_B(a_j) \rangle_{\Sigma}$. Alors

$$\langle\langle T_1, \dots, T_{2n} \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} = \sum_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \left(\prod_{e \in \mathcal{P}} x_e \right) [\Gamma_{\mathcal{P}}].$$

Notons que cette application est fortement dépendante de l'ordre des arbres T_i . À tout invariant ν à valeurs dans \mathbb{R} de degré $2n$ pour la filtration de Goussarov-Habiro, on peut associer une fonction

$$P_{\nu} : \mathcal{A}_n \rightarrow \mathbb{R},$$

appelée son système de poids. On montre les résultats suivants dans le chapitre 4.

Théorème 3 (Lemme 4.2.5). *Soient (h_1, \dots, h_{2n}) $2n$ éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Si on note*

$$[M; (h_1, \dots, h_{2n})] := \sum_{\{i_1 < \dots < i_r\} \subset \{1, \dots, 2n\}} (-1)^r M_{(\Sigma, h_{i_1} \circ \dots \circ h_{i_r})},$$

alors pour tout invariant ν à valeurs dans \mathbb{R} de degré $2n$ de système de poids P_{ν} ,

$$\nu([M; (h_1, \dots, h_{2n})]) = P_{\nu} \left(\langle\langle \tau_1^Y(h_1), \dots, \tau_1^Y(h_{2n}) \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} \right).$$

Théorème 4 (Théorème 4.2.7). *Soit c un arrangement de crochets de degré $2n$ sur $\mathcal{T}_{g,1}$. Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})$ $2n$ éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Soit ν un invariant de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{R} , et soit P_ν son système de poids. Alors,*

$$\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n})) = P_\nu \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c} \gamma_c(\sigma) \langle \langle \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(1)}), \dots, \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(2n)}) \rangle \rangle_{(p_A, p_B)} \right).$$

On utilise ensuite ces résultats dans le cas de l'invariant de Casson. On prouve alors que la variation de l'invariant de Casson après \mathcal{T} -chirurgie par un élément de $\mathcal{K}_{g,1} := (\tau_{g,1})_{(2)}$ peut s'écrire comme une somme de deux termes. Le premier terme dépend des lagrangiens et se factorise par l'homomorphisme τ_2 , dont on trouvera une définition dans le paragraphe 4.3. Le deuxième terme est indépendant des lagrangiens (Théorème 4.4.6). On calcule explicitement ces termes sur des générateurs de $\mathcal{K}_{g,1}$, et on en déduit que cette décomposition est différente de celle trouvée par S. Morita dans [Mo1].

On généralise ensuite cette construction en tout degré. Pour tout $\psi \in \mathcal{K}_{g,1}$, on peut considérer $\tau_2(\psi)$ comme une somme d'arbres trivalents orientés à deux sommets trivalents dont les arêtes sont décorées par des éléments de H . Alors, de façon similaire à $\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{(p_A, p_B)}$, on définit une application n -linéaire $[[\cdot, \dots, \cdot]]$ sur les arbres à deux sommets trivalents comme

$$[[\cdot, \dots, \cdot]] = \sum_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \left(\prod_{e \in \mathcal{P}} x_e \right) [\Gamma_{\mathcal{P}}]$$

où, pour toute arête e formée de deux arêtes de T_i et de T_j décorées respectivement par a_i et par a_j ,

$$x_e = \begin{cases} \langle p_A(a_i), p_B(a_j) \rangle_\Sigma & \text{si } i < j \\ -\frac{1}{2} (\langle p_A(a_i), p_B(a_j) \rangle_\Sigma + \langle p_A(a_j), p_B(a_i) \rangle_\Sigma) & \text{si } i = j. \end{cases}$$

On prouve alors le résultat suivant

Théorème 5 (Théorème 4.5.2). *Soit ν un invariant de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{R} , et soit P_ν son système de poids. On suppose que P_ν s'annule sur tous les éléments de \mathcal{A}_n comportant une composante connexe en θ . Soit c un arrangement de crochets de degré n . Alors, pour tout $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in (\mathcal{K}_{g,1})^n$,*

$$\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n))$$

ne dépend que des homomorphismes de Johnson $\tau_2(\psi_i)$ et

$$\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = P_\nu \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c} \gamma_c(\sigma) \left[[\tau_2(\varphi_{\sigma(1)}), \dots, \tau_2(\varphi_{\sigma(n)})] \right] \right),$$

Dans les chapitres 5 et 6, on s'intéresse plus précisément à la filtration de Goussarov-Habiro \mathcal{F}_n , définie de façon indépendante dans [GGP] et dans [H]. On rappelle qu'un graphe en Y dans une variété de dimension 3 (voir paragraphe 2.1.4) est la donnée d'un plongement d'un graphe trivalent parallélisé constitué de trois nœuds (*les feuilles*) reliés chacun par un segment (*une arête*) à un même sommet trivalent. Un entrelacs en Y à n composantes est le plongement de n copies disjointes d'un tel graphe. Si G est un entrelacs en Y dans une variété M de dimension 3, on note M_G la variété obtenue à partir de M par chirurgie en Y sur G . On note \mathcal{F} le \mathbb{Z} -module abstraitement engendré par les sphères d'homologie entière vues à homéomorphisme près. Pour tout entrelacs $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$ en Y à n composantes dans une sphère d'homologie M , on pose

$$[M; G] := \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{G(J)},$$

où $G(J)$ est le sous-entrelacs de G dont les composantes en Y sont indexées par J . Alors \mathcal{F}_n est le sous-module de \mathcal{F} engendré par les crochets $[M; G]$, où M parcourt les sphères d'homologie, et où G parcourt les entrelacs en Y à n composantes dans M .

Dans [GGP], S. Garoufalidis, M. Goussarov, et M. Polyak ont prouvé des relations dans $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ qui leur ont permis de comparer $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ à un \mathbb{Z} -module engendré par des graphes trivalents orientés, appelés diagrammes de Jacobi. Par exemple, ils ont démontré que si G est un entrelacs en Y à n composantes dans une sphère d'homologie entière M , si $l = l_1 \#_b l_2$ est une feuille de G vue comme une somme en bande de l_1 et de l_2 , et si G_1 et G_2 sont obtenus à partir de G en remplaçant l respectivement par l_1 et par l_2 , alors $[M; G] = [M; G_1] + [M; G_2]$ dans $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$. Il est à noter que les relations de [GGP] sont contenues dans le calcul de claspers introduit par K. Habiro dans [H]. Grâce à ces relations, il est possible d'exprimer les coordonnées du crochet $[M; G]$ d'un entrelacs en Y à n composantes sur le système de générateurs de $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ donné par les diagrammes de Jacobi en fonction des enlacements et des auto-enlacements des feuilles de G . Ainsi, si ν est un invariant de degré inférieur ou égal à n dont on connaît le système de poids, il est possible de calculer explicitement $\nu([M; G])$.

Dans le chapitre 5, on raffine les relations données dans [GGP] pour ob-

tenir leur équivalent dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$, où $\overline{\mathcal{F}}_n$ désigne la clôture rationnelle de \mathcal{F}_n dans \mathcal{F} . Ainsi, on démontre que si G , G_1 et G_2 sont des entrelacs en Y à n composantes tels que G_1 et G_2 s'obtiennent en coupant une feuille l de G en deux morceaux l_1 et l_2 , alors, dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$, $[M; G]$ est égal à $[M; G_1] + [M; G_2]$ plus un certain nombre de termes dans $\mathcal{F}_{n+1}/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$ que l'on exprime en fonction de G , de l_1 et de l_2 . Plus précisément,

Notation 1.0.1. On désigne par D_r un disque percé de r trous numérotés de 1 à r , comme représenté sur la figure 1.2.

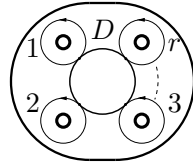


Figure 1.2

On fixe un plongement de D_r dans une sphère d'homologie M . Soit $H_r \simeq [-1, 1] \times D_r$ un voisinage de D_r dans M . On fixe un entrelacs $G_{(n-1)}$ en Y à $(n-1)$ composantes dans le complémentaire de H_r . Alors, pour tout entrelacs G dans H_r , on désigne $[M; G \cup G_{(n-1)}]$ par le dessin de G dans H_r entre crochets. Par exemple, avec cette notation,

$$\left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right] := [M; G \cup G_{(n-1)}]$$

Par commodité de notation, si deux feuilles de G forment un entrelacs de Hopf positif pour l'orientation trigonométrique des feuilles, on simplifie le diagramme de G en remplaçant les deux feuilles concernées par une arête, comme représenté ci-dessous.



Si deux éléments x et y sont deux éléments de \mathcal{F} , la notation $x \stackrel{n}{=} y$ signifie que $(x - y) \in \overline{\mathcal{F}}_{n+1}$. Ici, on considère les crochets $[M; G_{(n-1)} \cup G]$ dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$. Si K est un graphe trivalent orienté à quatre sommets dont les arêtes adjacentes à un seul sommet sont décorées par des nombres entre 1 et r , on lui associe un entrelacs $G(K)$ en Y à quatre composantes plongé dans D_r de la façon suivante. On plonge K dans D_r de telle sorte que les orientations des sommets de K soient induites par l'orientation de D_r , en attachant à chaque arête e décorée la courbe dans D_r numérotée par la décoration de e représentée sur la figure 1.2. Si deux décorations sont identiques, on

positionne les courbes à deux hauteurs différentes quelconques. On transforme ensuite chaque arête reliant deux sommets par un petit entrelacs de Hopf positif. L'entrelacs $G(K)$ ainsi obtenu dépend des plongements choisis, mais dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$, grâce aux relations trouvées dans [GGP], le crochet $[M; G_{(n-1)} \cup G(K)]$ ne dépend pas des choix qui ont été faits et est bien défini. Par exemple,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ 2 & 1 \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ 3 & 4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ \circ & \circ \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ 2 & 3 \\ \circ & \circ \end{array} \right].$$

De la même manière, soit K un graphe trivalent orienté à 3 sommets dont les arêtes adjacentes à un seul sommet sont décorées par des numéros i , i^+ , i^- munis d'un exposant précisant des hauteurs relatives entre les courbes associées aux décorations (la courbe i^+ se trouvant sur la figure en avant de la courbe i). On associe à K un entrelacs $G(K)$ en Y à trois composantes dans D_r en plongeant K dans le disque $D \subset D_r$ représenté sur la figure 1.2 de telle sorte que les orientations des sommets de K soient induites par l'orientation de D et de telle sorte que seules les extrémités des arêtes décorées touchent le bord de D , aux points de tangence de D avec les courbes i . On attache ensuite à chaque extrémité d'arête une copie de la courbe numérotée par sa décoration, à la hauteur précisée par l'exposant de la décoration. On démontrera que l'élément $[M; G_{(n-1)} \cup G(K)]$ est encore bien défini dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$. Par exemple,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2^- \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ 2 & 4 \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ 3 & 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ \circ & \circ \\ | & | \\ \bullet & \bullet \\ | & | \\ 2 & 3 \\ \circ & \circ \end{array} \right].$$

Dans le chapitre 5, on prouve le résultat suivant.

Théorème 6 (Théorème 5.2.16). *Avec les conventions de la notation 1.0.1,*

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \\ 2 & 3 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] \\
 - \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 2^- \\ | & | \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 3^+ & 4 \\ | & | \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ | & | \\ 2 & 4 \end{array} \right] \\
 - \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ | & | \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ | & | \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \\
 + \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1+4 & 1 & 4 \\ | & | & | \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1+4 & 1 & 4 \\ | & | & | \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Avant d'arriver à ce résultat, on détermine un arsenal de relations dans $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+3}$ qui constituent un raffinement dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+3}$ de toutes les relations de [GJP] qui permettent de passer d'un crochet d'entrelacs en Y à des sommes de crochets de diagrammes de Jacobi. On peut donc espérer utiliser cette batterie de relations pour déterminer les coordonnées du crochet d'un entrelacs en Y à n composantes dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+3}$ sur le système de générateurs donné par les diagrammes de Jacobi. Cela nous permettrait donc de déterminer la valeur d'un invariant de degré $n+3$ sur le crochet d'un entrelacs en Y à n composantes.

On prouve ensuite le résultat suivant dans l'optique de calculer la variation d'invariants de type fini après chirurgie sur les nœuds. En effet, on y exprime le crochet d'un entrelacs en Y à n composantes comprenant une composante réalisant un nœud bordant une surface de genre 1 en fonction de crochets d'entrelacs en Y comportant au moins $n+1$ composantes. Ce résultat sera fondamental dans le chapitre 6.

Théorème 7 (Théorème 5.3.12). Avec les conventions de la notation 1.0.1,

$$\begin{aligned}
 8 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline \text{circles} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline \text{circles} \end{array} \right] \\
 &- 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &- 3 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Dans le chapitre 6, on applique les relations trouvées dans le chapitre 5 pour trouver une formule de chirurgie sur les nœuds en fonction d’une surface de Seifert pour les invariants réels de degré 4 pour la filtration de Goussarov-Habiro. Si K est un nœud dans une sphère d’homologie M , alors $2[M; (K, \frac{1}{n})] := 2(M - M_{(K; \frac{1}{n})})$ est un élément de \mathcal{F}_2 , où $M_{(K; \frac{1}{n})}$ est la variété obtenue à partir de M par chirurgie de Dehn le long de K de coefficient $\frac{1}{n}$. On exprime alors $2[M; (K, \frac{1}{n})]$ dans $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ sur le système de trois générateurs donnés par les graphes Θ , Θ^2 et T définis dans le paragraphe 6.1. Pour cela, on considère une surface de Seifert Σ de K dans M représentée sur la figure 1.3.

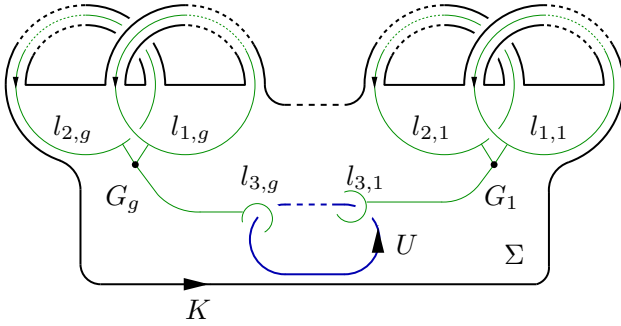


FIG. 1.3 – K , Σ , U et G .

On démontre alors dans un premier temps le résultat suivant.

Théorème 8 (Théorème 6.2.1). Soit K un nœud dans une sphère d’homologie entière M . Soit $G = G_1 \cup \dots \cup G_g$ un entrelacs en Y réalisant une surface de Seifert de K comme représenté sur la figure 6.4. On note $l_{1,i}$, $l_{2,i}$ et $l_{3,i}$ les feuilles de G_i comme représenté sur la figure 6.4. Alors, pour

tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) \stackrel{4}{=} n P_1(M; K) + n^2 P_2(M; K),$$

où $P_1(M; K)$ et $P_2(M; K)$ sont des éléments de $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ tels que

$$P_1(M; K) = 4 \sum_{i=1}^g \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ l_{1,i} \quad l_{2,i} \end{array} \right] - 4 \sum_{i=1}^g \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ l_{1,i} \quad l_{2,i} \end{array} \right] - 4 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ l_{1,i} \quad l_{2,j} \\ l_{2,i} \quad l_{1,j} \end{array} \right] \\ + R_1(\text{lk}(l_{s,i}, l_{r,j})) \cdot [\Theta^2] + R_2(\text{lk}(l_{s,i}, l_{r,j})) \cdot [T]$$

et

$$P_2(M; K) = Q_1(\text{lk}(l_{s,i}, l_{r,j})) \cdot [\Theta^2] + Q_2(\text{lk}(l_{s,i}, l_{r,j})) \cdot [T],$$

où R_1 , R_2 , Q_1 et Q_2 sont des polynômes explicites en les enlacements et en les auto-enlacements des feuilles $l_{s,i}$.

On se ramène au cas où les enlacements et les auto-enlacements des feuilles dans les trois premiers termes sont nuls en utilisant nos relations dans $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$. Pour obtenir une formule de chirurgie complète, il suffit ensuite de calculer ces trois termes dans ce cas. A ce jour, le troisième terme n'est pas encore calculé en toute généralité. On obtient cependant une formule de chirurgie pour les nœuds bordant une surface de Seifert de genre 1, résumée par le résultat suivant

Théorème 9 (Théorème 6.4.9). *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M bordant une surface de Seifert Σ de genre 1. Soit G_1 le graphe en Y représenté sur la figure 1.4 tel que K s'obtient à partir du nœud trival U par chirurgie sur G_1 . Soit \tilde{K}_1 et \tilde{K}_2 les deux courbes dans un épaississement de Σ correspondant aux feuilles de G_1 . On note ℓ l'enlacement de \tilde{K}_1 et de \tilde{K}_2 , et on note p_i l'auto-enlacement de \tilde{K}_i . Par isotopie, on peut supposer que \tilde{K}_1 et \tilde{K}_2 passent par une boîte avec ℓ motifs algébriques comme représenté sur la figure 1.4, de sorte que les nœuds K_1 et K_2 obtenus à partir de \tilde{K}_1 et de \tilde{K}_2 en remplaçant la boîte ℓ par la boîte 0 ne soient pas enlacés.*

Alors

$$\begin{aligned}
8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) \stackrel{4}{=} & 4n\lambda(K) \cdot [M; \Theta] + n\lambda(K)(n\lambda(K) - 2) \cdot [\Theta^2] \\
& + \left(4n(2\ell - 1)(\lambda(K_1 \#_b K_2) - \lambda(K_1) - \lambda(K_2)) \right. \\
& - 12nSL(K_1, K_2) - 8np_1\lambda(K_2) - 8np_2\lambda(K_1) \\
& + 2n(p_1p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) - 2n\ell(\ell - 1)(2\ell - 1) \\
& \left. - 20n\lambda(K) + 2n^2(-1 + 7\lambda(K))\lambda(K) \right) \cdot [T],
\end{aligned}$$

où $\lambda(K) = p_1p_2 - \ell(\ell - 1)$ est l'invariant de Casson du nœud K , et où $SL(K_1, K_2)$ est l'invariant de Sato-Levine de (K_1, K_2) , correspondant à l'auto-enlacement de la courbe d'intersection des surfaces de Seifert de K_1 et de K_2 .

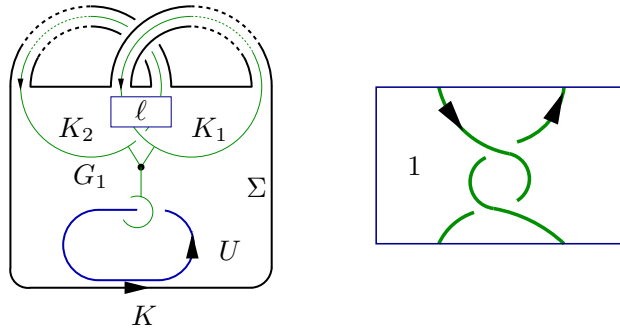


FIG. 1.4 – K_1 et K_2 .

Chapitre 2

Rappels sur les invariants de type fini

Dans ce chapitre préliminaire, on redéfinit rapidement différentes notions de chirurgie sur les sphères d'homologie entière : chirurgie de Dehn sur les nœuds, chirurgie par décollement/recollement le long d'une surface par un élément du groupe de Torelli, chirurgie en Y et chirurgie lagrangienne. On redéfinit également la filtration de Goussarov-Habiro. La majorité des résultats énoncés dans ce chapitre sont prouvés dans [AL], qui se trouve en appendice.

2.1 Chirurgies sur les variétés de dimension 3

2.1.1 \mathbb{Z} -sphères et \mathbb{Z} -corps en anses

Dans la suite, on appelle 3 -variété une variété topologique (ou lisse ¹) de dimension 3 compacte, connexe, orientée et, - sauf mention contraire -, sans bord. Toutes les 3 -variétés sont considérées à homéomorphisme (difféomorphisme) préservant l'orientation près. Une *sphère d'homologie entière*, ou \mathbb{Z} -sphère, désigne une 3 -variété dont les modules d'homologie sur \mathbb{Z} sont isomorphes aux modules d'homologie sur \mathbb{Z} de la sphère S^3 . Une \mathbb{Z} -sphère M vérifie donc

$$\begin{aligned} H_0(M; \mathbb{Z}) &\simeq H_3(M; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \\ H_1(M; \mathbb{Z}) &\simeq H_2(M; \mathbb{Z}) \simeq \{0\}. \end{aligned}$$

Dans une sphère d'homologie entière M , tout nœud $K \subset M$ borde une surface orientable plongée dans M (appelée *surface de Seifert de K*). Si K_1 et K_2 sont deux nœuds orientés dans M , on peut définir leur *nombre d'enlacement*, noté $\ell k(K_1, K_2)$, comme l'intersection algébrique

$$\ell k(K_1, K_2) := \langle K_1, \Sigma_2 \rangle_M = \langle \Sigma_1, K_2 \rangle_M,$$

¹En dimension 3, les catégories Top et C^∞ sont équivalentes.

où Σ_i est une surface de Seifert de K_i munie de l'orientation induite par l'orientation du nœud K_i avec la convention du *premier vecteur sortant*, et où $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ désigne l'intersection algébrique induite par l'orientation de M .

De la même manière, on appelle *corps en anses d'homologie entière de genre g* ou \mathbb{Z} -*corps en anses de genre g* toute 3-variété à bord dont les modules d'homologie sur \mathbb{Z} coïncident avec ceux du corps en anses (plein) H_g de genre g représenté sur la figure 2.1.

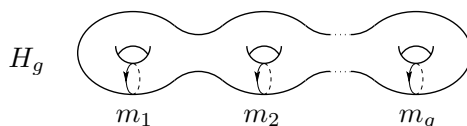


FIG. 2.1 – Le corps en anses H_g .

Un \mathbb{Z} -corps en anses X de genre g vérifie donc

$$\begin{aligned} H_0(X; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z} \\ H_1(X; \mathbb{Z}) &\simeq \mathbb{Z}^g \\ H_2(X; \mathbb{Z}) &\simeq \{0\} \\ H_3(X; \mathbb{Z}) &\simeq \{0\}. \end{aligned}$$

Notons que le bord ∂X d'un corps en anses d'homologie entière X de genre g est homéomorphe au bord Σ_g du corps en anses H_g . Pour toute surface Σ , on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$ la forme d'intersection sur $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$. Pour tout \mathbb{Z} -corps en anses X , on désigne par \mathcal{L}_X le noyau de l'application

$$H_1(\partial X \hookrightarrow X) : H_1(\partial X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(X; \mathbb{Z})$$

induite en homologie par l'inclusion. C'est un lagrangien de l'espace symplectique $(H_1(\partial X; \mathbb{Z}); \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial X})$, et on l'appelle le *lagrangien* de X . Dans le cas du corps en anses H_g , le lagrangien \mathcal{L}_{H_g} est engendré par les classes des courbes m_1, \dots, m_g représentées sur la figure 2.1.

2.1.2 Chirurgie sur les nœuds

Soit M une 3-variété et $K \subset M$ un nœud dans M . On choisit un voisinage tubulaire $T(K)$ de K dans M . On appelle alors \mathbb{Q} -*parallèle* de K dans M une courbe simple $\mu \subset \partial T(K)$ orientée non séparante sur le bord du voisinage tubulaire $T(K)$. On pose $T = S^1 \times D^2$ un tore plein et $m = \{1\} \times S^1$ un méridien de T . Si (K, μ) est la donnée d'un nœud \mathbb{Q} -parallélisé dans M , on note

$$M_{(K, \mu)} := (M \setminus \text{Int}(T(K))) \bigcup_{\mu \rightarrow m} T$$

la variété obtenue en recollant sur le complémentaire du voisinage $T(K)$ dans M une copie de T par un homéomorphisme du bord de $M \setminus \text{Int}(T(K))$ dans

$\partial T = S^1 \times S^1$ qui envoie la courbe μ sur le méridien m . La variété $M_{(K,\mu)}$ est bien définie à homéomorphisme près, et on dira que $M_{(K,\mu)}$ est la variété obtenue à partir de M par chirurgie sur le nœud parallélisé (K, μ) .

Si M est une sphère d'homologie entière, le nœud K , muni au préalable d'une orientation, admet un \mathbb{Q} -parallèle préféré μ_0 défini par

$$\begin{cases} \mu_0 \text{ est isotope à } K \text{ dans } T(K) \\ lk(K, \mu_0) = 0. \end{cases}$$

Si m_0 est un méridien de $T(K)$ vérifiant $lk(K, m_0) = 1$, alors la donnée d'un \mathbb{Q} -parallèle μ de K à isotopie dans $M \setminus K$ près est équivalente à la donnée d'un couple d'entiers (p, q) (p et q premiers entre eux) tels que $[\mu] = p.[m_0] + q.[\mu_0]$ dans $H_1(\partial T(K); \mathbb{Z})$. On dira alors que K est $\frac{p}{q}$ -parallélisé, et on notera $M_{(K; \frac{p}{q})}$ la variété obtenue par chirurgie sur K muni du \mathbb{Q} -parallèle $\mu_{p,q}$ correspondant. Notons que la variété obtenue $M_{(K; \frac{p}{q})}$ est une sphère d'homologie entière si et seulement si $p = \pm 1$.

2.1.3 Chirurgie par un élément du groupe de Torelli

Si M est une \mathbb{Z} -sphère, on considérera souvent un scindement de M en deux \mathbb{Z} -corps en anses de même genre g . On notera

$$M = A \bigcup_{h: \partial A \rightarrow \partial B} (-B)$$

où $h = h_B \circ h_A^{-1}$ est la composition de deux homéomorphismes

$$h_X : \Sigma_g \longrightarrow \partial X, \quad \text{où } X = A \text{ ou } B$$

identifiant ∂A et ∂B à une même surface Σ_g .

Pour toute \mathbb{Z} -sphère M , la donnée d'un scindement de M en deux \mathbb{Z} -corps en anses est équivalente à la donnée d'un plongement Σ de la surface (orientée) Σ_g dans M . Le \mathbb{Z} -corps en anses A est alors la composante connexe de $M \setminus \Sigma$ telle que Σ a la même orientation que ∂A avec la convention du premier vecteur sortant.

Soit $D \subset \Sigma_g$ un disque. On note $\mathcal{M}_{g,1}$ le groupe d'homéotopies de $\Sigma_g \setminus D$, c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes de Σ_g valant l'identité sur D , à isotopie valant l'identité sur D près.

On note $\mathcal{T}_{g,1}$ le *groupe de Torelli* défini comme le sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ constitué des classes d'isotopie des homéomorphismes de Σ_g induisant l'identité sur l'homologie de Σ_g .

Si (M, Σ) est la donnée d'une \mathbb{Z} -sphère M et d'un plongement de Σ_g dans M , et si $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$, on désigne par $M_{(\Sigma, \varphi)}$, ou par M_φ s'il n'y a pas d'ambiguïté, la \mathbb{Z} -sphère obtenue à partir de M en décollant les deux \mathbb{Z} -corps en anses A et B le long de Σ , puis en les recollant après composition

par φ .

$$M_\varphi := A \bigcup_{h_B \circ \varphi \circ h_A^{-1}} (-B).$$

La variété obtenue est bien définie à homéomorphisme près, et on dira que M_φ est obtenue à partir de M par \mathcal{T} -chirurgie le long de Σ par φ . Notons que la définition de \mathcal{T} -chirurgie énoncée ici est cohérente avec la définition plus générale sur les 3-variétés donnée en introduction.

2.1.4 Graphes en Y et chirurgie en Y

On rappelle ici la notion de *chirurgie en Y* définie par M. Goussarov dans [GGP]. Il est à noter que cette chirurgie est équivalente à la *transformation borroméenne* introduite dans les travaux de S. Matveev ([M]) et au Δ -mouvement étudié par H. Murakami et Y. Nakanishi dans [MN].

Soit Λ le graphe trivalent plongé dans le disque à trois trous $\Sigma(\Lambda)$ représenté sur la figure 2.2(a). On note

$$N := \Sigma(\Lambda) \times [-1, 1]$$

le corps en anses de genre 3 obtenu en épaississant la surface $\Sigma(\Lambda)$. Dans N , les arêtes de Λ sont parallélisées par un champ de vecteurs normal à $\Sigma(\Lambda) = \Sigma(\Lambda) \times \{0\}$. Au graphe Λ , on associe l'entrelacs $L(\Lambda) \subset N$ présenté sur la figure 2.2(b) dont les six composantes sont parallélisées suivant la parallélisation induite par la surface $\Sigma(\Lambda)$.

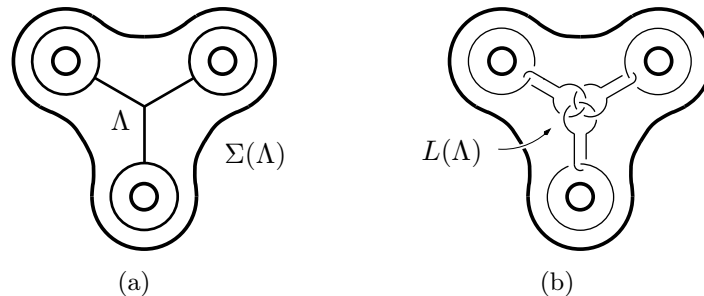


FIG. 2.2 – Graphe en Y et entrelacs associé

Soit M une 3-variété. Un *graphe en Y* dans M est un plongement ϕ de N (ou de $\Sigma(\Lambda)$) dans M vu à isotopie près. Une telle classe d'isotopie est entièrement déterminée par l'image parallélisée du graphe Λ par ϕ . Une *feuille* de ϕ est l'image par ϕ d'une des trois boucles de Λ . On appelle *arête* de ϕ une arête du graphe $\phi(\Lambda)$ qui n'est pas une feuille. Enfin, on nomme *sommet* de ϕ l'unique sommet de $\phi(\Lambda)$ adjacent aux trois arêtes. Avec cette terminologie, un graphe en Y compte un sommet, trois arêtes et trois feuilles, comme explicité sur la figure 2.3.

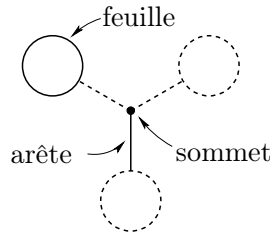


FIG. 2.3 – Anatomie d’un graphe en Y

Soit $G \subset M$ un entrelacs en Y . Une feuille l d’une des composantes en Y de G est dite *triviale* si l borde un disque plongé dans $M \setminus G$ (la feuille l pourra être munie d’une parallélisation différente de celle induite par le disque qu’elle borde dans le complémentaire de G).

Si $\phi(\Lambda)$ est un graphe en Y dans la variété M , la *chirurgie en Y le long de $\phi(\Lambda)$* - on parlera également de *chirurgie borroméenne* le long de $\phi(\Lambda)$ - est définie comme la chirurgie le long de l’entrelacs parallélisé $\phi(L(\Lambda))$. On note la variété ainsi obtenue $M_{\phi(\Lambda)}$. Un *entrelacs en Y à n composantes $G \subset M$* est le plongement de n copies disjointes de N dans la variété M à isotopie près. La chirurgie en Y le long de G est définie comme la chirurgie simultanée le long de chaque composante en Y de G . On notera M_G la 3-variété ainsi obtenue.

Le lemme suivant permet de mieux comprendre comment agit la chirurgie borroméenne. En particulier, un cobordisme entre deux segments peut être réalisé par une chirurgie en Y . Ce résultat sera primordial dans le chapitre 6, où l’on réalisera une chirurgie sur un nœud dans une sphère d’homologie par une chirurgie le long d’un entrelacs en Y réalisant une surface de Seifert de ce nœud.

Lemme 2.1.1 ([GGP, Lemme 2.1]).

Soit M une 3-variété (éventuellement à bord). Soit G un graphe en Y dans M muni d’une feuille triviale 0-parallélisée qui borde un disque D dans $M \setminus G$. Alors

- Pour tout graphe T_0 dans $M \setminus G$ qui ne rencontre pas D , le couple (M_G, T_0) est difféomorphe au couple (M, T_0) .
- Si T est un graphe parallélisé dans $M \setminus G$ qui rencontre $\text{Int}(D)$ en exactement un point, alors le couple (M_G, T) est difféomorphe au couple (M, T_G) , où T_G est le graphe parallélisé dans M représenté sur la figure 2.4.

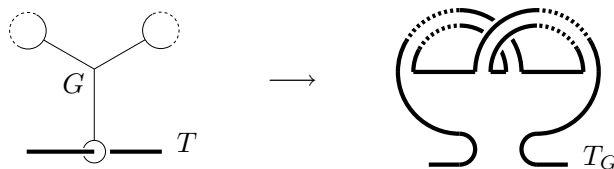


Figure 2.4

□

Corollaire 2.1.2. *Soit M une 3-variété. Soit Σ une surface de genre 1 plongée dans M . Soient I_1 et I_2 deux segments tels que*

- $\partial\Sigma = I_1 \cup I_2$
- $I_1 \cap I_2 = \partial I_1 = \partial I_2$
- I_1 et I_2 sont parallélisés par un champ de vecteurs normal à la surface Σ .

Soit T un graphe parallélisé tel que $I_1 = T \cap \Sigma$. Alors il existe un graphe G en Y dans $M \setminus T$ muni d'une feuille triviale méridienne de I_1 telle que le couple (M_G, T) est difféomorphe au couple $(M, (T \setminus \text{Int}(I_1)) \cup I_2)$. □

Si X est un \mathbb{Z} -corps en anses et si $G \subset \text{Int}(X)$ est un entrelacs en Y plongé dans l'intérieur de X , alors X_G est encore un \mathbb{Z} -corps en anses dont le bord s'identifie canoniquement au bord de X de telle sorte que les lagrangiens \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_{X_G} sont égaux. De façon similaire, si G est un entrelacs en Y dans une sphère d'homologie entière M , alors la variété M_G obtenue par chirurgie le long de G est encore une sphère d'homologie entière. Réciproquement, on a

Théorème 2.1.3 ([M, Théorème 2],[AL, Théorème 4.10]).

Si M et M' sont des sphères d'homologie entière, alors il existe un entrelacs G en Y dans M tel que $M_G = M'$. □

2.1.5 Chirurgie lagrangienne

Une donnée de chirurgie lagrangienne à n composantes est un triplet

$$D = (M; n; (A_i, B_i)_{i=1, \dots, n})$$

où

- M est une sphère d'homologie, $n \in \mathbb{N}$,
- pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, A_i et B_i sont des \mathbb{Z} -corps en anses dont les bords sont identifiés par des homéomorphismes implicites (on écrira $\partial B_i = \partial A_i$) tels que $\mathcal{L}_{B_i} = \mathcal{L}_{A_i}$,
- l'union disjointe des A_i est plongée dans M . On l'écrira

$$\sqcup_{i=1}^n A_i \subset M.$$

Pour une telle donnée de chirurgie lagrangienne D , On désigne par M_D la sphère d'homologie entière obtenue en remplaçant A_i par B_i pour tout i .

$$M_D := \left(M \setminus \left(\sqcup_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{Int}(A_i) \right) \right) \bigcup_{\sqcup_i \partial A_i} \left(\sqcup_{i \in \{1, \dots, n\}} B_i \right) = M \left(\left(\frac{B_i}{A_i} \right)_{i \in \{1, \dots, n\}} \right).$$

Notation 2.1.4. On note N le corps en anses de genre $2g$

$$N := (\Sigma \setminus \text{Int}(D)) \times [-1, 1] = \Sigma_{g,1} \times I$$

obtenu en épaississant la surface $\Sigma_{g,1}$ égale à Σ privée de l'intérieur d'un disque D . On pose $H := H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$. Le bord de N est

$$\partial N = (\Sigma_{g,1} \times \{1\}) \cup_{\partial D \times \{1\}} ((-\partial D) \times I) \cup_{\partial D \times \{-1\}} ((-\Sigma_{g,1}) \times \{-1\})$$

et le lagrangien de N est isomorphe à H par l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \aleph_N : H &\longrightarrow \mathcal{L}_N \subset H_1(\partial N; \mathbb{Z}) \\ [\gamma] &\longmapsto [\gamma \times \{1\}] - [\gamma \times \{-1\}]. \end{aligned}$$

Si $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$ est un homéomorphisme de Σ laissant le disque D invariant point par point, on note

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \partial N &\longrightarrow \partial N \\ (x, 1) &\longmapsto (\varphi^{-1}(x), 1) & x \in (\Sigma \setminus \text{Int}(D)) \\ (x, p) &\longmapsto (x, p) & x \in \partial D, p \in I \\ (x, -1) &\longmapsto (x, -1) & x \in (\Sigma \setminus \text{Int}(D)) \end{aligned}$$

l'homéomorphisme de ∂N obtenu en prolongeant φ^{-1} par l'identité à l'extérieur de $\Sigma_{g,1} \times \{1\}$. On désigne par (N, N^φ) la paire de chirurgie lagrangienne telle que N^φ soit une copie de N dont le bord est identifié au bord de N par l'homéomorphisme

$$\tilde{\varphi} : \partial N \longrightarrow \partial N^\varphi.$$

Notons que les \mathcal{T} -chirurgies peuvent être réalisées par des chirurgies lagrangiennes, comme résumé dans le lemme suivant.

Lemme 2.1.5. Soit Σ une surface de genre g plongée dans une sphère d'homologie M . Avec les conventions de la notation 2.1.4, on considère le corps en anses N dans un voisinage de Σ . Alors, si $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$,

$$M_{(\Sigma, \varphi)} \simeq M \left(\frac{N^\varphi}{N} \right),$$

c'est-à-dire que procéder à une \mathcal{T} -chirurgie le long de Σ par φ revient à procéder à une chirurgie lagrangienne sur la paire (N, N^φ) .

□

De même, on peut remarquer que les chirurgies borroméennes sont des types particuliers de chirurgies lagrangiennes. Réciproquement, (voir [Hbg, Théorème 2.5] ou [AL, Lemme 4.11]) toute chirurgie lagrangienne peut être réalisée par une chirurgie sur un entrelacs en Y .

2.2 Filtration de Goussarov-Habiro

2.2.1 Définition

Dans cette partie, on redéfinit la filtration de Goussarov-Habiro, initialement introduite de façon indépendante par M. Goussarov dans [GGP] et par K. Habiro dans [H]. Nous reprenons ici en substance la présentation de M. Goussarov. On note

$$\mathcal{M} := \{\mathbb{Z}\text{-sphères}\} / \text{Homéo}^+$$

l'ensemble des sphères d'homologie entière vues à homéomorphisme préservant l'orientation près. On pose

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{M \in \mathcal{M}} \mathbb{Z} \cdot M$$

le groupe abélien librement engendré par les éléments de \mathcal{M} .

Soit M une sphère d'homologie entière, et soit $G \subset M$ un entrelacs en Y à n composantes indexées par $\{1, \dots, n\}$. Pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, n\}$, on note $G(J)$ le sous-entrelacs en Y de G dont les composantes sont les composantes de G d'indice appartenant à J . On pose

$$[M, G] := \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{G(J)} \in \mathcal{F}.$$

On définit alors \mathcal{F}_n comme le sous-groupe de \mathcal{F} engendré par l'ensemble des éléments $[M, G]$, où G est un entrelacs en Y à n composantes dans une sphère d'homologie M . Cela définit une filtration

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \dots \mathcal{F}_n \supset \dots$$

de \mathcal{F} . On l'appelle filtration de Goussarov-Habiro (voir [GGP] et [H]). On note


$$\mathcal{G}_n := \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1}$$

et on définit

$$\overline{\mathcal{F}}_n := \{x \in \mathcal{F}; \exists r > 0, r \cdot x \in \mathcal{F}_n\}$$

la clôture rationnelle de \mathcal{F}_n .

2.2.2 Filtration de Goussarov-Habiro et diagrammes de Jacobi

On appelle *diagramme de Jacobi* un graphe trivalent Γ sans boucle, c'est-à-dire sans arête aux deux extrémités reliées au même sommet comme .

Une *orientation des sommets* d'un diagramme de Jacobi Γ est une *orientation* de chaque sommet de Γ , c'est-à-dire la donnée d'un ordre cyclique des trois demi-arêtes adjacentes à ce sommet. Deux orientations des sommets de Γ sont équivalentes si et seulement si elles diffèrent en un nombre pair de sommets. Une *orientation* de Γ est alors une classe d'équivalence d'orientation des sommets.

On appelle *degré* d'un diagramme de Jacobi la moitié de son nombre de sommets. On note \mathcal{A}_k le groupe abélien libre engendré par les diagrammes de Jacobi orientés de degré k , quotienté par les relations AS et IHX présentées ci-dessous.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} = 0 & & \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} = 0 \\
 \text{relation AS} & & \text{relation IHX}
 \end{array}$$

Ces deux relations mettent en rapport des diagrammes représentés par des plongements qui ne diffèrent que dans une boule où se trouve la partie représentée sur les figures. Sur le dessin, l'ordre cyclique des demi-arêtes est donné par le sens direct dans le plan de projection. Par exemple, la relation AS identifie à zéro la somme de deux diagrammes qui ne diffèrent que par l'orientation d'un sommet (on appellera la relation AS relation d'antisymétrie). L'espace \mathcal{A}_0 est isomorphe à \mathbb{Z} et est engendré par le diagramme vide. Dans la suite, si Γ est un diagramme de Jacobi orienté, on note $-\Gamma$ le même diagramme de Jacobi muni de l'orientation opposée.

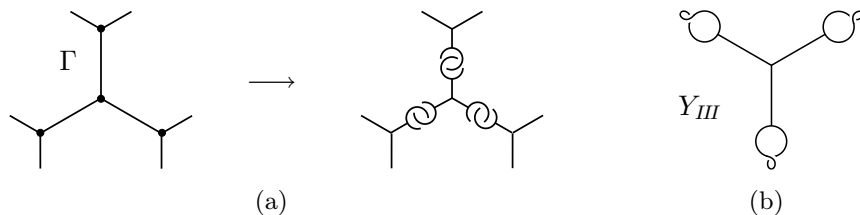
On va maintenant décrire un morphisme surjectif de $\bigoplus_{2k \leq n} \mathcal{A}_k$ vers \mathcal{G}_n , défini dans [GGP], dont le produit tensoriel par \mathbb{Q} est un isomorphisme. Soient k et n des entiers tels que $2k \leq n$. Soit Γ un diagramme de Jacobi orienté de degré k . Soit $\tilde{\Gamma}$ un plongement parallélisé arbitraire de Γ dans $\mathbb{R}^3 \subset S^3$, de telle sorte que la parallélisation provienne d'une projection régulière de $\tilde{\Gamma}$ dans \mathbb{R}^2 qui induise l'orientation des sommets de Γ par le sens direct dans le plan de projection. On insère alors au milieu de chaque arête de $\tilde{\Gamma}$ un petit entrelacs de Hopf comme représenté sur la figure 2.5(a). On note alors $G(\tilde{\Gamma})$ l'entrelacs en Y à $2k$ composantes dans S^3 ainsi obtenu.

Soit Y_{III} le graphe en Y dans S^3 muni de trois feuilles triviales 1-parallélisées représenté sur la Figure 2.5(b). On pose $\phi_n(\Gamma)$ l'union disjointe de $G(\tilde{\Gamma})$ et de $n - 2k$ copies de Y_{III} . Alors

Théorème 2.2.1 ([GGP, Théorème 4.13], [AL, Théorème 2.1]).

L'application linéaire

$$\begin{array}{ccc}
 \Psi_n : \bigoplus_{2k \leq n} \mathcal{A}_k & \longrightarrow & \mathcal{G}_n \\
 \Gamma & \longmapsto & [S^3, \phi_n(\Gamma)]
 \end{array}$$

FIG. 2.5 – Entrelacs en Y associé à un diagramme de Jacobi

ne dépend pas du choix de ϕ_n , est bien définie et est surjective. De plus, dans \mathcal{G}_n ,

$$2\Psi_n\left(\bigoplus_{2k < n} \mathcal{A}_k\right) = 0.$$

□

De plus,

Théorème 2.2.2 ([L, Théorème 4.1]).

$$\Psi_{2n} \otimes \mathbb{Q} : \mathcal{A}_n \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow \mathcal{G}_{2n} \otimes \mathbb{Q}$$

est un isomorphisme.

□

2.2.3 Filtration de Goussarov-Habiro et chirurgies lagrangiennes

Pour toute donnée de chirurgie lagrangienne D à n composantes, et pour tout sous-ensemble $J \subset \{1, \dots, n\}$, on note

$$D(J) = (M; \sharp J; (A_i, B_i)_{i \in J}).$$

On définit

$$[D] := \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\sharp J} M_{D(J)} \in \mathcal{F}.$$

Alors la filtration de Goussarov-Habiro peut être définie en terme de chirurgies lagrangiennes comme le montre le résultat suivant.

Proposition 2.2.3 ([AL, Proposition 3.1, Corollaire 3.2]).

Pour toute donnée de chirurgie lagrangienne D à n composantes,

$$[D] \in \mathcal{F}_n.$$

De plus, \mathcal{F}_n est le sous-module de \mathcal{F} engendré par les éléments $[D]$, où D parcourt l'ensemble des données de chirurgie lagrangienne à n composantes.

Dans [AL, Théorème 3.5], on a exprimé les coordonnées de $[D]$ sur les générateurs $\Psi_n(\Gamma)$ de \mathcal{G}_n en terme de forme d'intersection dans $H_2(A_i \cup B_i; \mathbb{Z})$. Nous utiliserons ce résultat dans le chapitre 4, où nous redonnerons un énoncé alternatif précis de ce théorème.

2.2.4 Invariants de type fini et n -congruence

Un invariant des sphères d'homologie entière à valeurs dans un groupe commutatif G est une application

$$\nu : \mathcal{M} \longrightarrow G.$$

Un tel invariant peut se prolonger par linéarité sur \mathcal{F} . Il est alors dit de *degré inférieur ou égal à n pour la filtration de Goussarov-Habiro* si et seulement si

$$\nu|_{\mathcal{F}_{n+1}} = 0.$$

On dit alors que ν est de *type fini pour la filtration de Goussarov-Habiro*.

Dans la suite, on dira que deux éléments x et y de \mathcal{F} sont *n -congruents*, et on notera $x \stackrel{n}{\sim} y$, si $x - y \in \overline{\mathcal{F}}_{n+1}$. En particulier, cela entraîne que x et y ne sont pas distingués par un invariant sur les sphères d'homologie à valeurs dans un groupe commutatif sans torsion de degré n pour la filtration de Goussarov-Habiro.

Dans le chapitre 4, on étudie la variation d'un invariant de degré n pour la filtration de Goussarov-Habiro à valeurs dans \mathbb{Z} après \mathcal{T} -chirurgie par un commutateur de n éléments du groupe de Torelli.

Dans le chapitre 6, on exprime les coordonnées du crochet d'un nœud

$$[M; K] := -M_K + M$$

dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_5$ sur un système de générateurs donné par les diagrammes de Jacobi de degré 2 ou moins. Cela nous permet de donner une formule de chirurgie pour les invariants réels de degré 4 pour la filtration de Goussarov-Habiro.

Chapitre 3

Homomorphisme de Johnson et forme d'intersection

3.1 Énoncés des résultats

Soient A_1 et A_2 deux \mathbb{Z} -corps en anses orientés de même genre $g \geq 3$. Soit Σ une surface sans bord orientée de genre g . Pour $i = 1$ ou 2 , on fixe

$$h_i : \partial A_i \longrightarrow \Sigma$$

un homéomorphisme identifiant le bord de A_i à Σ de telle sorte que l'orientation de ∂A_i (induite par l'orientation de A_i avec la convention premier vecteur sortant) soit l'orientation obtenue en tirant en arrière l'orientation de Σ par h_i . On pose

$$M := A_1 \bigcup_{h_2^{-1} \circ h_1 : \partial A_1 \rightarrow \partial A_2} (-A_2).$$

Remarque 3.1.1. Exceptionnellement, dans ce chapitre, M n'est pas a priori une sphère d'homologie entière.

Soit $\mathcal{L}_{A_i} \subset H_1(\partial A_i; \mathbb{Z})$ le lagrangien de A_i . On note

$$\mathcal{L}_{(A_i, \Sigma)} := (H_1(h_i))(\mathcal{L}_{A_i}) \subset H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$$

le lagrangien de A_i transporté sur $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ par l'isomorphisme

$$H_1(h_i) : H_1(\partial A_i; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$$

induit par h_i .

L'application bord de Mayer-Vietoris induit un isomorphisme $\partial_{M, \Sigma}$ entre $H_2(M; \mathbb{Z})$ et $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}$ défini par

$$\begin{aligned} \partial_{M, \Sigma} : H_2(M; \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)} \\ [S] &\longmapsto H_1(h_1)([\partial(S \cap A_1)]). \end{aligned}$$

On note

$$\mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma) \in (\otimes^3 (\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}))^*$$

la forme trilinéaire alternée sur $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}$ obtenue à partir de la forme d'intersection triple sur $H_2(M; \mathbb{Z})$ (égale au produit cup sur $H^1(M; \mathbb{Z})$ transporté par dualité de Poincaré) via l'isomorphisme $\partial_{M, \Sigma}^{-1}$.

Le but de ce chapitre est de relier la variation de la forme d'intersection triple

$$\mathcal{I}((A_1, \varphi \circ h_1), (A_2, h_2); \Sigma) - \mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma)$$

à l'homomorphisme de Johnson $\tau_1(\varphi) \in \Lambda^3 H^*$ d'un élément φ du groupe de Torelli. On prouve les résultats suivants.

Théorème 3.1.2. *Avec les conventions de la notation 2.1.4, pour tout $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$, on note*

$$N^\varphi * N := N^\varphi \cup (-N)$$

la variété obtenue par recollement de N^φ à N en identifiant leur bord par $\tilde{\varphi}^{-1}$. On note

$$\mathcal{I}(N^\varphi * N) \in \Lambda^3 (H_2(N^\varphi * N; \mathbb{Z}))^*$$

*la forme d'intersection triple sur $H_2(N^\varphi * N)$. On désigne par q_φ^* l'isomorphisme de $\Lambda^3 (H_2(N^\varphi * N))^*$ dans $\Lambda^3 H^*$ induit par l'isomorphisme $q_\varphi : H \rightarrow H_2(N^\varphi * N)$ défini de telle sorte que $q_\varphi([\gamma])$ est la classe d'homologie d'une surface dans $N^\varphi * N$ qui rencontre N^φ comme $\gamma \times [-1, 1]$. Alors*

$$\tau_1(\varphi) = q_\varphi^*(\mathcal{I}(N^\varphi * N)).$$

Remarque 3.1.3. Ce résultat implique le théorème 1 présenté dans l'introduction, car $p_\varphi \circ q_\varphi^{-1}$ identifie $H_2(N^\varphi * N)$ au sous-module $p_\varphi(H)$ de $H_2(\mathbb{T}_\varphi)$ de telle sorte que $\mathcal{I}(N^\varphi * N)$ coïncide avec la restriction de $\mathcal{I}(\mathbb{T}_\varphi)$ à $p_\varphi(H)$.

Théorème 3.1.4. *Soient A_1 et A_2 deux \mathbb{Z} -corps en anses de même genre g . On suppose que les bords de A_1 et de A_2 sont identifiés à la surface Σ par un homéomorphisme $h_i : \partial A_i \rightarrow \Sigma$. Alors, pour tout homéomorphisme $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$,*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}((A_1, \varphi \circ h_1), (A_2, h_2); \Sigma) &= \mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma) \\ &\quad + (\tau_1(\varphi)) \Big|_{\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}}. \end{aligned}$$

Le théorème 3.1.2 identifie l'homomorphisme de Johnson de φ à la partie principale de la forme d'intersection triple sur le tore d'application de φ . Le

théorème 3.1.4 affirme que si l'on procède à une \mathcal{T} -chirurgie sur une union de deux \mathbb{Z} -corps en anses par un élément φ du groupe de Torelli, alors la variation de la forme d'intersection est égale à la restriction sur l'intersection des lagrangiens de $\tau_1(\varphi)$ vu comme forme trilinéaire sur H . On énoncera ensuite une généralisation de ce résultat pour les \mathcal{T} -chirurgies dans les 3-variétés lorsque Σ ne scinde pas nécessairement M en deux \mathbb{Z} -corps en anses (Théorème 3.4.2).

3.2 Résultats sur la forme d'intersection

On donne d'abord ici des versions modifiées du lemme 4.25 et du sous-lemme 4.28 de [AL] de sorte qu'ils soient adaptés au cadre dans lequel nous nous sommes placés ici. Les preuves données s'obtiennent à partir des démonstrations de l'article par des modifications minimales.

Notation 3.2.1. Si $f : Q \rightarrow R$ est un morphisme de \mathbb{Z} -modules, on note

$$\begin{aligned} f^* : (\Lambda^3 R)^* &\longrightarrow (\Lambda^3 Q)^* \\ \psi &\longmapsto \psi \circ (\otimes^3 f) \end{aligned}$$

l'homomorphisme obtenu par composition à droite par f .

Lemme 3.2.2. Soient A_1, A_2 et A_3 trois \mathbb{Z} -corps en anses de même genre g . Pour $i = 1, 2$ ou 3 , soit $h_i : \partial A_i \rightarrow \Sigma$ un homéomorphisme entre le bord de A_i et la surface Σ . Pour i et j deux entiers distincts compris entre 1 et 3, on pose

$$\mathcal{R}_{ij} : \mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_3, \Sigma)} \longrightarrow \mathcal{L}_{(A_i, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_j, \Sigma)}$$

le morphisme d'inclusion de $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_3, \Sigma)}$ dans $\mathcal{L}_{(A_i, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_j, \Sigma)}$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{12}^* (\mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma)) &= \mathcal{R}_{13}^* (\mathcal{I}((A_1, h_1), (A_3, h_3); \Sigma)) \\ &\quad + \mathcal{R}_{32}^* (\mathcal{I}((A_3, h_3), (A_2, h_2); \Sigma)). \end{aligned}$$

PREUVE : On adapte ici la preuve de [AL, Lemme 4.25]. Soient a_1, a_2 et a_3 trois courbes orientées de Σ représentant des éléments $[a_1], [a_2]$ et $[a_3]$ dans $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_3, \Sigma)}$ et ne s'intersectant pas deux à deux. Pour tout i et tout j dans $\{1, 2, 3\}$, soit $S_{A_j}^i$ une surface orientée dans A_j telle que $h_j^{-1}(a_i)$ borde $S_{A_j}^i$ dans A_j . On suppose toutes les surfaces transverses à ∂A_j et transverses deux à deux. Soient k et l deux entiers compris entre 1

et 3. On note

$$M_{kl} := A_k \bigcup_{h_l^{-1} \circ h_k} (-A_l).$$

Posons

$$\Sigma_{M_{kl}}^i := S_{A_k}^i \bigcup_{h_l^{-1} \circ h_k} (-S_{A_l}^i) \subset M_{kl}.$$

Les orientations de $\Sigma_{M_{kl}}^i$ et de M_{kl} induisent un champ de vecteurs n_i normal positif à $\Sigma_{M_{kl}}^i$. Le signe d'un point d'intersection $x \in \cap_{i=1}^3 \Sigma_{M_{kl}}^i$ est défini comme valant $+1$ si $(n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ est une base directe de $T_x M_{kl}$ pour l'orientation de M_{kl} , et valant -1 sinon.

L'intersection algébrique $\langle \Sigma_{M_{kl}}^1, \Sigma_{M_{kl}}^2, \Sigma_{M_{kl}}^3 \rangle_{M_{kl}}$ est la somme des signes des points d'intersection. Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}((A_k, h_k), (A_l, h_l); \Sigma))([a_1] \otimes [a_2] \otimes [a_3]) &= \langle \Sigma_{M_{kl}}^1, \Sigma_{M_{kl}}^2, \Sigma_{M_{kl}}^3 \rangle_{M_{kl}} \\ &= \langle S_{A_k}^1, S_{A_k}^2, S_{A_k}^3 \rangle_{A_k} + \langle (-S_{A_l}^1), (-S_{A_l}^2), (-S_{A_l}^3) \rangle_{(-A_l)}. \end{aligned}$$

On remarque ensuite que le champ de vecteurs normal $n_{A_l}^i$ induit par les orientations de $S_{A_l}^i$ et de A_l est égal au champ de vecteur normal à $(-S_{A_l}^i)$ induit par les orientations de $(-S_{A_l}^i)$ et de $(-A_l)$. De plus, en tout point d'intersection $x \in \cap_{i=1}^3 \Sigma_{M_{kl}}^i$, le triplet $(n_{A_l}^1, n_{A_l}^2, n_{A_l}^3)$ est direct pour l'orientation de A_l si et seulement si il n'est pas direct pour l'orientation de $(-A_l)$. Cela entraîne que

$$\langle (-S_{A_l}^1), (-S_{A_l}^2), (-S_{A_l}^3) \rangle_{(-A_l)} = -\langle S_{A_l}^1, S_{A_l}^2, S_{A_l}^3 \rangle_{A_l}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}((A_k, h_k), (A_l, h_l); \Sigma))([a_1] \otimes [a_2] \otimes [a_3]) &= \\ &= \langle S_{A_k}^1, S_{A_k}^2, S_{A_k}^3 \rangle_{A_k} - \langle S_{A_l}^1, S_{A_l}^2, S_{A_l}^3 \rangle_{A_l} \end{aligned}$$

ce qui entraîne le lemme. \square

Si A et A' sont deux \mathbb{Z} -corps en anses tels que $A' \subset \text{Int}(A)$, on désigne par

$$\begin{aligned} \partial_A : H_2(A, \partial A) &\longrightarrow \mathcal{L}_A \\ \partial_{A'} : H_2(A', \partial A') &\longrightarrow \mathcal{L}_{A'} \end{aligned}$$

les isomorphismes induits par les suites exactes longues d'homologie. Soient

$$\begin{aligned} i_A : H_2(A, \partial A) &\longrightarrow H_2(A, A \setminus \text{Int}(A')) \\ i_{A'} : H_2(A', \partial A') &\longrightarrow H_2(A, A \setminus \text{Int}(A')) \end{aligned}$$

les homomorphismes induits par les applications d'inclusion. Par l'axiome d'excision, $i_{A'}$ est un isomorphisme. On pose

$$\Phi_{(A, A')} := \partial_{A'} \circ i_{A'}^{-1} \circ i_A \circ \partial_A^{-1} : \mathcal{L}_A \longrightarrow \mathcal{L}_{A'}.$$

Lemme 3.2.3 ([AL, Sous-Lemme 4.28]).

Soit A_1 un \mathbb{Z} -corps en anses de genre g . Soient $A'_1 \subset \text{Int}(A_1)$ et A'_2 deux \mathbb{Z} -corps en anses de même genre g' tels que les bords de A'_1 et de A'_2 soient identifiés à une surface $\Sigma_{g'}$ de genre g' par un homéomorphisme $h'_i : \partial A'_i \longrightarrow \Sigma_{g'}$ de telle sorte que $\mathcal{L}_{(A'_1, \Sigma_{g'})} = \mathcal{L}_{(A'_2, \Sigma_{g'})}$. Soit

$$A_2 = (A_1)_{A'_2/A'_1} = (A_1 \setminus \text{Int}(A'_1)) \bigcup_{(h'_2)^{-1} \circ h'_1} (-A'_2)$$

le \mathbb{Z} -corps en anses obtenu à partir de A_1 par chirurgie lagrangienne sur la paire (A'_1, A'_2) . Les bords des A_i s'identifient à la surface Σ_g par des homéomorphismes $h_i : \partial A_i \rightarrow \Sigma_g$. On note Φ la composition des applications

$$\Phi := H_1(h'_1) \circ \Phi_{(A_1, A'_1)} \circ H_1(h_1^{-1}) : \mathcal{L}_{(A_1, \Sigma_g)} \longrightarrow \mathcal{L}_{(A'_1, \Sigma_{g'})}.$$

Alors

$$\mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma_g) = \Phi^*(\mathcal{I}((A'_1, h'_1), (A'_2, h'_2); \Sigma_{g'})).$$

PREUVE : Soient a_1, a_2 et a_3 trois courbes orientées de Σ_g représentant des éléments $[a_1], [a_2]$ et $[a_3]$ dans $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma_g)}$ ne s'intersectant pas deux à deux. Soient a'_1, a'_2 et a'_3 des courbes orientées de $\Sigma_{g'}$ représentant les éléments $\Phi([a_i])$ dans $\mathcal{L}_{(A'_1, \Sigma_{g'})}$ et ne s'intersectant pas deux à deux. Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, les courbes $h_1^{-1}(a_i)$ et $(h'_1)^{-1}(a'_i)$ cobordent une surface orientée Σ^i dans $A_1 \setminus \text{Int}(A'_1)$. La courbe $(h'_1)^{-1}(a'_i)$ borde une surface orientée $\sigma^i_{A'_1}$ dans A'_1 , et la courbe $(h'_2)^{-1}(a'_i)$ borde une surface orientée $\sigma^i_{A'_2}$ dans A'_2 . On pose

$$\begin{aligned} S_i &:= \left(\sigma^i_{A'_1} \cup_{a'_i} \Sigma^i \right) \bigcup_{a_i} \left(- \left(\Sigma^i \cup_{a'_i} \sigma^i_{A'_2} \right) \right) \subset A_1 \bigcup_{\Sigma_g} (-A_2) \\ S'_i &:= \sigma^i_{A'_1} \bigcup_{a'_i} \left(-\sigma^i_{A'_2} \right) \subset A'_1 \bigcup_{\Sigma_{g'}} (-A'_2). \end{aligned}$$

On note

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{A'_1 A'_2} &:= (\mathcal{I}(A'_1, A'_2)) (\Phi(a_1) \otimes \Phi(a_2) \otimes \Phi(a_3)) \\ \mathcal{J}_{A_1 A_2} &:= (\mathcal{I}(A_1, A_2)) (a_1 \otimes a_2 \otimes a_3). \end{aligned}$$

Par définition, $\mathcal{J}_{A_1 A_2}$ est l'intersection dans $A_1 \cup (-A_2)$ des surfaces orientées S_i , et $\mathcal{J}_{A'_1 A'_2}$ est l'intersection dans $A'_1 \cup (-A'_2)$ des surfaces orientées S'_i . Alors $\mathcal{J}_{A_1 A_2} - \mathcal{J}_{A'_1 A'_2}$ est la contribution à l'intersection des surfaces $\Sigma^i \cup (-\Sigma^i)$. Cette contribution est nulle lorsque $A'_1 = A'_2$ car

$$\mathcal{I}(A_1, A_1) = \mathcal{I}(A'_1, A'_1) = 0$$

par le lemme 3.2.2. Donc elle est toujours nulle. \square

Le résultat suivant, qui se déduit des deux lemmes précédents, nous permet de restreindre l'étude de la forme d'intersection au cas particulier d'un tore d'application d'un élément du groupe de Torelli. Dans le paragraphe suivant, nous allons relier la forme d'intersection à l'homomorphisme de Johnson dans ce cas particulier. Cela nous permettra de conclure dans le cas général.

Lemme 3.2.4. *Soient A_1 et A_2 deux \mathbb{Z} -corps en anses de genre g . On suppose que les bords de A_1 et de A_2 sont identifiés à la surface Σ par un homéomorphisme $h_i : \partial A_i \rightarrow \Sigma$. Alors, pour tout homéomorphisme $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$, avec les conventions de la notation 2.1.4,*

$$\begin{aligned} \mathcal{I}((A_1, \varphi \circ h_1), (A_2, h_2); \Sigma) &= \mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma) \\ &+ (\mathfrak{K}_N^*(\mathcal{I}(N^\varphi, N)))|_{\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}}, \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{I}(N^\varphi, N) = \mathcal{I}((N, \tilde{\varphi}^{-1}), (N, id_{\partial N}); \partial N).$$

PREUVE : Soit $\partial A_1 \times [-2, 2] \subset A_1$ un voisinage tubulaire de ∂A_1 dans A_1 de telle sorte que $\partial A_1 \times \{2\} = \partial A_1$. Soit h le plongement de N dans $\text{Int}(A_1)$ défini par

$$\begin{aligned} h : N = (\Sigma \setminus \text{Int}(D)) \times [-1, 1] &\longrightarrow \partial A_1 \times [-2, 2] \subset A_1 \\ (x, p) &\longmapsto (h_1^{-1}(x), p) \end{aligned}$$

et soit

$$\tilde{h} : \partial N \longrightarrow h(\partial N)$$

l'homéomorphisme obtenu par restriction de h à ∂N . On pose

$$A_1^\varphi := (A_1 \setminus \text{Int}(h(N))) \bigcup_{\tilde{\varphi} \circ \tilde{h}^{-1} : h(\partial N) \rightarrow \partial N} N$$

le \mathbb{Z} -corps en anses de genre g obtenu à partir de A_1 par une chirurgie lagrangienne en décollant le \mathbb{Z} -corps en anses $h(N)$ le long de son bord et en recollant une copie de N par l'homéomorphisme $\tilde{\varphi}$. Le lagrangien de A_1^φ est $\mathcal{L}_{(A_1^\varphi, \Sigma)} = \mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)}$. On remarque que les deux 3-variétés

$$A_1 \bigcup_{h_2^{-1} \circ \varphi \circ h_1} (-A_2) \simeq A_1^\varphi \bigcup_{h_2^{-1} \circ h_1 : \partial A_1^\varphi \rightarrow \partial A_2} (-A_2)$$

sont homéomorphes et que

$$\mathcal{I}((A_1, \varphi \circ h_1), (A_2, h_2); \Sigma) = \mathcal{I}((A_1^\varphi, h_1), (A_2, h_2); \Sigma).$$

Or, d'après le lemme 3.2.2,

$$\mathcal{I}((A_1^\varphi, h_1), (A_2, h_2); \Sigma) = \mathcal{R}_1^*(\mathcal{I}((A_1^\varphi, h_1), (A_1, h_1); \Sigma)) + \mathcal{I}((A_1, h_1), (A_2, h_2); \Sigma)$$

où

$$\mathcal{R}_1 : \mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)} \longrightarrow \mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)}$$

est l'injection de $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}$ dans $\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)}$. De plus, si

$$\Phi_{(A_1, N)} : \mathcal{L}_{A_1} \longrightarrow \mathcal{L}_N$$

est le morphisme défini dans le préambule du lemme 3.2.3, $\Phi_{(A_1, N)}$ est égal à la restriction à \mathcal{L}_{A_1} de l'isomorphisme

$$\aleph_N \circ H_1(h_1) : H_1(\partial A_1; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathcal{L}_N.$$

Alors, d'après le lemme 3.2.3,

$$\mathcal{I}((A_1^\varphi, h_1), (A_1, h_1); \Sigma) = (\mathcal{I}((N, \tilde{\varphi}^{-1}), (N, id_{\partial N}); \partial N)) \circ (\otimes^3 \Phi)$$

où

$$\begin{aligned} \Phi &:= H_1(\tilde{\varphi}^{-1}) \circ \aleph_N \circ H_1(h_1)|_{\mathcal{L}_{A_1}} \circ H_1(h_1^{-1}) \\ &= (\aleph_N)|_{\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)}}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}_1^*(\mathcal{I}((A_1^\varphi, h_1), (A_1, h_1); \Sigma)) \\ &= \left((\aleph_N)|_{\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)}} \circ \mathcal{R}_1 \right)^* (\mathcal{I}((N, \tilde{\varphi}^{-1}), (N, id_{\partial N}); \partial N)) \\ &= (\aleph_N^*(\mathcal{I}((N, \tilde{\varphi}^{-1}), (N, id_{\partial N}); \partial N)))|_{\mathcal{L}_{(A_1, \Sigma)} \cap \mathcal{L}_{(A_2, \Sigma)}}. \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

3.3 Calcul effectif de l'homomorphisme de Johnson

Dans la suite, nous procédons à un calcul effectif de τ_1 sur un système de générateurs du groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$. On appelle *paire bordante de genre h* une paire de courbes simples dans $\Sigma_{g,1}$ ne s'intersectant pas, homologiquement non triviales et cobordant une surface de genre h dans $\Sigma_{g,1}$ (à exactement deux composantes de bord). Un *twist de Dehn le long d'une paire bordante* $(\gamma, \tilde{\gamma})$ désigne l'élément du groupe de Torelli obtenu par composition d'un twist droit T_γ le long de γ et d'un twist gauche $T_{\tilde{\gamma}}^{-1}$ le long de $\tilde{\gamma}$. Dans [J1, Théorème 2], D. Johnson a montré que si $g \geq 3$, alors le groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$ est engendré par les twists de Dehn le long des paires bordantes de genre 1.

Pour pouvoir relier la forme d'intersection étudiée dans les paragraphes précédents à l'homomorphisme de Johnson, nous recalculons l'image explicite des twists le long de paires bordantes de genre 1 par l'homomorphisme de Johnson dans $\Lambda^3 H^*$.

Soit $(\gamma, \tilde{\gamma})$ une paire bordante de genre 1. On choisit un système de $2g$ générateurs $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1, \dots, g}$ de π représentés par les courbes dessinées sur la figure 3.1. L'orientation de $\Sigma_{g,1}$ est celle induite par l'orientation de $\partial\Sigma_{g,1}$ donnée sur la figure avec la convention premier vecteur sortant.

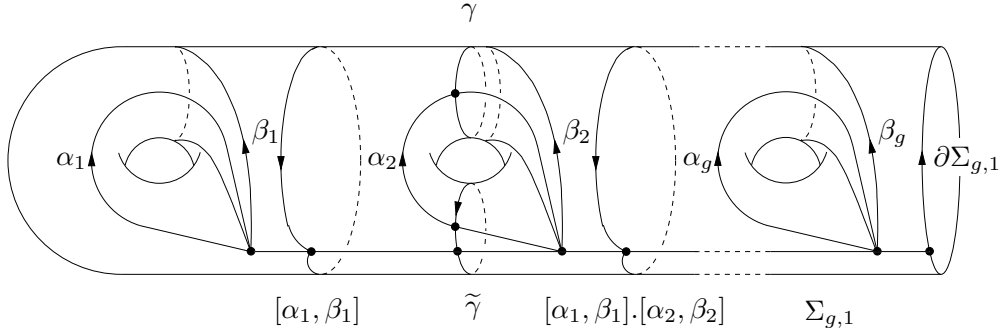


FIG. 3.1 – Générateurs de π associés à $(\gamma, \tilde{\gamma})$.

On désigne par $\varphi := T_\gamma \circ T_{\tilde{\gamma}}^{-1} \in \mathcal{T}_{g,1}$ le twist le long de la paire bordante $(\gamma, \tilde{\gamma})$. Les images des courbes α_i et β_i par φ sont représentées sur la figure 3.2. Si on pose

$$\beta'_2 := [\alpha_1, \beta_1].[\alpha_2, \beta_2].\beta_2 \in \pi$$

(β'_2 est représentée par la courbe de la figure 3.1 partant du point base, parcourant $\tilde{\gamma}$ dans le sens de la flèche sur la figure 3.1 puis retournant au point base), alors φ agit sur π de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall i > 1, \quad \varphi \cdot \beta_i &= \beta_i \\ \forall i > 2, \quad \varphi \cdot \alpha_i &= \alpha_i \\ \varphi \cdot \alpha_2 &= [\alpha_1, \beta_1] \cdot \alpha_2 \\ \varphi \cdot \alpha_1 &= [\beta'_2, \alpha_1] \cdot \alpha_1 \\ \varphi \cdot \beta_1 &= [\beta'_2, \beta_1] \cdot \beta_1. \end{aligned}$$

On désigne par a_i et par b_i les classes respectives dans H de α_i et de β_i . L'homomorphisme $\tau_{(1)}(\varphi)$ de H vers π_2/π_3 est alors défini par

$$\begin{aligned} \tau_{(1)}(\varphi) : H &\longrightarrow \pi_2/\pi_3 \\ a_i &\longmapsto 1 && \text{si } i \geq 3 \\ b_i &\longmapsto 1 && \text{si } i \geq 2 \\ a_2 &\longmapsto \overline{[\alpha_1, \beta_1]} \\ a_1 &\longmapsto \overline{[\beta'_2, \alpha_1]} \\ b_1 &\longmapsto \overline{[\beta'_2, \beta_1]}. \end{aligned}$$

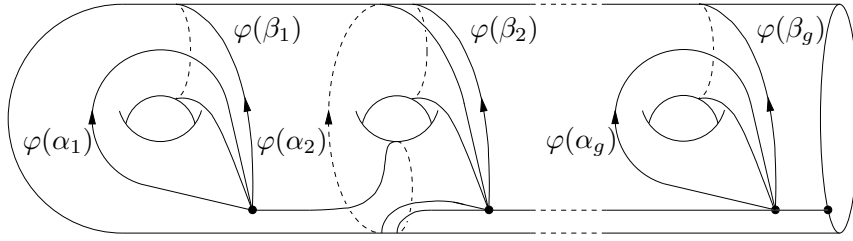


FIG. 3.2 – Images des courbes α_i et β_i par φ .

Soit $(a_i^*, b_i^*)_{i=1, \dots, g}$ la base duale de H^* associée à $(a_i, b_i)_{i=1, \dots, g}$. On a alors

$$\tau_1(\varphi) = \rho_H(a_1) \wedge \rho_H(b_1) \otimes a_2^* + \rho_H(b_2) \wedge \rho_H(a_1) \otimes a_1^* + \rho_H(b_2) \wedge \rho_H(b_1) \otimes b_1^*$$

où ρ_H est l'identification canonique $H \simeq H^*$ par l'intersection sur H

$$\rho_H : c \longmapsto \langle \cdot, c \rangle.$$

La famille $(a_i, b_i)_{i=1, \dots, g}$ est une base symplectique pour H . On a en effet $\langle a_i, b_j \rangle = \delta_{ij}$ et $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ pour $x = a$ ou $x = b$. Donc $\rho_H(a_i) = -b_i^*$ et $\rho_H(b_i) = a_i^*$. Finalement,

$$\begin{aligned} \tau_1(\varphi) &= -b_1^* \wedge a_1^* \otimes a_2^* - a_2^* \wedge b_1^* \otimes a_1^* + a_2^* \wedge a_1^* \otimes b_1^* \\ &= a_1^* \wedge b_1^* \otimes a_2^* + b_1^* \wedge a_2^* \otimes a_1^* + a_2^* \wedge a_1^* \otimes b_1^* \\ &= a_1^* \wedge b_1^* \wedge a_2^* \end{aligned} \quad \in \Lambda^3 H^*.$$

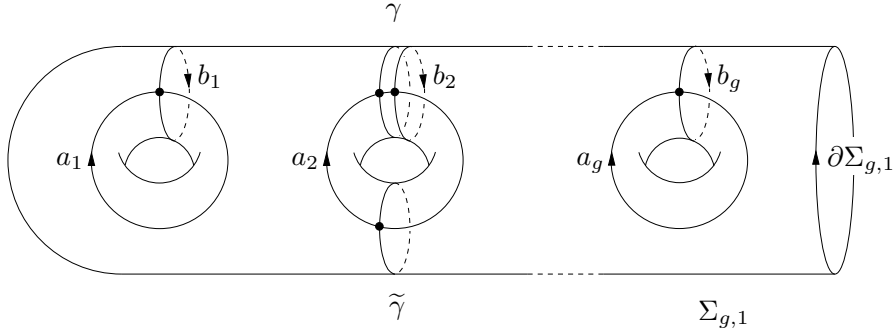
3.4 Résultat principal

Théorème 3.4.1. *Avec les conventions de la notation 2.1.4, pour tout homéomorphisme φ dans $\mathcal{T}_{g,1}$,*

$$\mathcal{I}(N^\varphi, N) = (\mathfrak{K}_N^{-1})^* (\tau_1(\varphi)).$$

PREUVE : Supposons pour commencer que $g \geq 3$. On prouve d'abord le théorème dans le cas où φ est un twist le long d'une paire bordante de genre 1. Le cas général en découlera par le fait que de tels twists engendrent $\mathcal{T}_{g,1}$ si $g \geq 3$, et par le fait que $\left((\mathfrak{K}_N^{-1})^* \circ \rho \circ \tau_1 \right)$ et $(\varphi \mapsto \mathcal{I}(N^\varphi, N))$ sont tous deux des homomorphismes sur $\mathcal{T}_{g,1}$. En effet, le premier est une composition d'homomorphismes. Que le deuxième soit un morphisme est une conséquence directe du lemme 3.2.2.

On pose donc $\varphi := T_\gamma \circ T_{\tilde{\gamma}}^{-1} \in \mathcal{T}_{g,1}$ le twist le long d'une paire bordante $(\gamma, \tilde{\gamma})$ de genre 1. Soit $(a_i, b_i)_{i=1, \dots, g}$ la base symplectique de H représentée par les courbes dessinées sur la figure 3.3.

FIG. 3.3 – Base symplectique de H associée à $(\gamma, \tilde{\gamma})$

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.3, si on note $(a_i^*, b_i^*)_{i=1, \dots, g}$ la base duale de (a_i, b_i) , alors

$$\tau_1(\varphi) = a_1^* \wedge b_1^* \wedge a_2^* \in \Lambda^3 H^*.$$

On étudie maintenant la forme d'intersection $\mathcal{I}(N^\varphi, N)$. Pour éviter toute ambiguïté, on notera dans la suite \tilde{a}_i et \tilde{b}_i les courbes orientées dessinées sur la figure 3.3 représentant les classes d'homologie a_i et b_i . Pour tout élément x de la base (a_i, b_i) de H , on construit une surface orientée explicite S_x dans $N^\varphi * N = N^\varphi \cup (-N)$ de telle sorte que $[S_x] = \partial_{N^\varphi * N, \partial N}^{-1} \circ \aleph_N(x)$ dans $H_2(N^\varphi * N; \mathbb{Z})$. On aura alors, pour tous éléments x, y et z dans la base (a_i, b_i) ,

$$(\aleph_N^*(\mathcal{I}(N^\varphi, N)))(x \otimes y \otimes z) = \langle S_x, S_y, S_z \rangle.$$

Si x est différent de a_2 , il suffit de poser

$$S_x = ((-\tilde{x}) \times I) \bigcup_{\tilde{\varphi}^{-1}} (\tilde{x} \times I) \subset N^\varphi \bigcup_{\tilde{\varphi}^{-1}} (-N).$$

Si $x = a_2$, quitte à perturber localement φ par une isotopie, on peut considérer que $\varphi^{-1}(\tilde{a}_2) \sqcup (-\tilde{a}_2)$ borde une surface orientée σ_0 de genre 1 dans $\Sigma_{g,1}$. La surface σ_0 est représentée en foncé sur la figure 3.4. Il suffit alors de poser

$$\begin{aligned} S_{a_2}^1 &:= ((-\tilde{a}_2) \times [-1, 0]) \cup (\sigma_0 \times \{0\}) \cup ((-\varphi^{-1}(\tilde{a}_2)) \times [0, 1]) \subset N^\varphi \\ S_{a_2}^2 &:= (-\tilde{a}_2) \times I \subset N \\ S_{a_2} &:= S_{a_2}^1 \bigcup_{\tilde{\varphi}^{-1}} (-S_{a_2}^2) \subset N^\varphi \bigcup_{\tilde{\varphi}^{-1}} (-N) \end{aligned}$$

pour trouver une surface S_{a_2} qui convient.

Si x, y et z sont trois éléments de la base (a_i, b_i) différents de a_2 , alors

$$S_x \cap S_y \cap S_z = ((-\tilde{x}) \cap (-\tilde{y}) \cap (-\tilde{z})) \times S^1 = \emptyset.$$

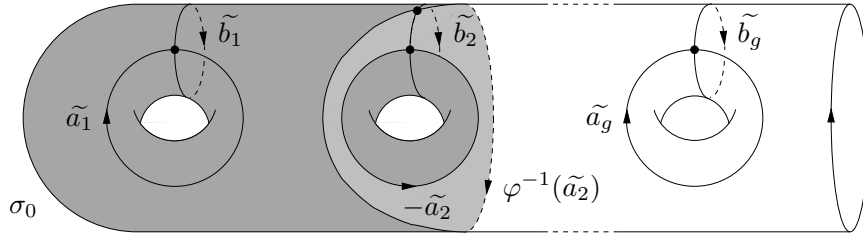


FIG. 3.4 – Image des courbes $(\tilde{a}_i, \tilde{b}_i)$ par φ^{-1} .

Si x et y sont deux éléments de (a_i, b_i) , alors S_x, S_y et S_{a_2} ne peuvent géométriquement s'intersecter que dans N^φ en $((-\tilde{x}) \cap (-\tilde{y}) \cap \sigma_0) \times \{0\}$. On en déduit alors facilement qu'il ne peut y avoir d'intersection qu'entre des éléments du triplet (a_1, b_1, a_2) . Dans ce cas, les surfaces correspondantes n'admettent qu'un seul et unique point d'intersection $p \times \{0\}$, où $p = \tilde{a}_1 \cap \tilde{b}_1$. En tant que sous-variété orientée de N^φ , $S_{a_1} \cap S_{b_1} = \{p\} \times [-1, 1]$. Comme l'orientation de σ_0 est induite par l'orientation de Σ , on en déduit que

$$\langle S_{a_1}, S_{b_1}, S_{a_2} \rangle = 1.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \aleph_N^*(\mathcal{I}(N^\varphi, N)) &= a_1^* \wedge b_1^* \wedge a_2^* \\ &= \tau_1(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure la preuve du lemme si $g \geq 3$.

Dans le cas où $g \leq 1$, le lemme est encore vrai car les deux termes de l'égalité sont nuls par des arguments simples de dimension. Enfin, le cas $g = 2$ se déduit du lemme en genre plus grand, par l'invariance simultanée de la forme d'intersection et de l'homomorphisme de Johnson associés à φ par ajout d'une anse sur le bord de $\Sigma_{2,1}$ et extension de φ par l'identité sur cette anse. \square

Le théorème 3.1.2 est un corollaire du théorème 3.4.1 et du fait que

$$\aleph_N^*(\mathcal{I}(N^\varphi, N)) = q_\varphi^*(\mathcal{I}(N^\varphi * N)),$$

car

$$q_\varphi = \partial_{N^\varphi * N, \partial N}^{-1} \circ \aleph_N,$$

où $\partial_{N^\varphi * N, \partial N} : H_2(N^\varphi * N) \rightarrow \mathcal{L}_N$ désigne l'isomorphisme induit par l'application bord de Mayer-Vietoris.

Le théorème 3.1.4 se déduit directement du lemme 3.2.4 et du théorème 3.4.1.

Plus généralement, on peut déduire des arguments utilisés dans ce chapitre une généralisation du théorème 3.1.4 à n'importe quelle \mathcal{T} -chirurgie sur une 3-variété. Soit $\Sigma \subset M$ un plongement orienté de Σ dans une 3-variété M . Soit $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$ un élément du groupe de Torelli. Alors, comme dans le lemme 2.1.5,

$$M_{(\Sigma, \varphi)} = M \left(\frac{N^\varphi}{N} \right),$$

où N est plongé dans un voisinage de Σ . Soit $S \subset M$ une surface plongée dans M . On suppose S transverse à Σ de telle sorte que $S \cap N = (\Sigma \cap S) \times [-1, 1]$. On associe à S une surface S' plongée dans $M_{(\Sigma, \varphi)}$ qui coïncide avec S sur $M \setminus \text{Int}(N)$. On note

$$S' = (S \cap (M \setminus \text{Int}(N))) \bigcup_{\tilde{\varphi}} \sigma,$$

où σ est une surface dans N bordée par

$$(\varphi^{-1}(S \cap \Sigma) \times \{1\}) \sqcup (-(S \cap \Sigma) \times \{-1\}).$$

Cela définit un isomorphisme entre $H_2(M; \mathbb{Z})$ et $H_2(M_{(\Sigma, \varphi)}; \mathbb{Z})$. Via cette identification, on pose $H_2 = H_2(M; \mathbb{Z}) \simeq H_2(M_{(\Sigma, \varphi)}; \mathbb{Z})$.

On désigne par $\mathcal{I}(M_{(\Sigma, \varphi)}) \in \Lambda^3 H_2^*$ et par $\mathcal{I}(M) \in \Lambda^3 H_2^*$ les formes d'intersection triple dans $M_{(\Sigma, \varphi)}$ et dans M . On note

$$\begin{aligned} \rho : H_2 &\longrightarrow H \\ [S] &\longmapsto [S \cap \Sigma] \end{aligned}$$

l'homomorphisme induit par l'intersection algébrique des surfaces. On remarque que si M est de la forme $N^\psi * N$, où ψ est un élément du groupe de Torelli, alors $\rho = q_\psi^{-1}$, où q_ψ est l'isomorphisme défini dans les hypothèses du théorème 3.1.2. Dans le cas où M est scindé en deux corps en anses, $\rho = \partial_{M, \Sigma}$ l'homomorphisme injectif induit par le bord de Mayer-Vietoris présenté dans le paragraphe 3.1. Dans le cas général, ρ n'est ni injectif ni surjectif. On note

$$\rho^* : \Lambda^3 H^* \longrightarrow \Lambda^3 H_2^*$$

l'homomorphisme induit par composition à droite par ρ . On peut alors déduire du théorème 3.4.1 le résultat suivant.

Théorème 3.4.2. *Soit Σ une surface plongée dans une 3-variété M . Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{T}_{g,1}$,*

$$\mathcal{I}(M_{(\Sigma, \varphi)}) = \mathcal{I}(M) + \rho^*(\tau_1(\varphi)).$$

□

Chapitre 4

Invariants des variétés de dimension 3 et groupe de Torelli

Dans cette partie, on s'intéresse à la variation d'un invariant ν de type fini pour la filtration de Goussarov-Habiro lors d'une \mathcal{T} -chirurgie. On considère une sphère d'homologie entière

$$M = A \bigcup_{h: \partial A \rightarrow \partial B} (-B)$$

scindée en deux corps en anses d'homologie de même genre g , où $h = h_B \circ h_A^{-1}$ est la composition de deux homéomorphismes

$$h_X : \Sigma_g \longrightarrow \partial X, \quad \text{où } X = A \text{ ou } B$$

identifiant ∂A et ∂B à une même surface Σ_g .

On montre dans le paragraphe 4.1 que si ν est un invariant à valeurs dans \mathbb{Z} de degré n pour la filtration de Goussarov-Habiro, si M est une sphère d'homologie entière, si Σ est une surface de genre g plongée dans M , et si φ est un élément de $(\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}$, alors la variation $\nu(M_{(\Sigma;\varphi)}) - \nu(M)$ ne dépend que de φ et de la configuration des lagrangiens des \mathbb{Z} -corps en anses délimités par Σ dans M .

Dans le chapitre 3, on a relié l'homomorphisme de Johnson d'un homéomorphisme φ à la forme d'intersection triple sur $H_2(A \cup B)$ associée à l'union de deux \mathbb{Z} -corps en anses A et B recollés par φ . Cela nous permet d'exprimer dans le paragraphe 4.2 la variation de ν par chirurgie sur un élément du n -ième terme de la série descendante du groupe de Torelli, vu comme un produit de commutateurs d'homéomorphismes $\varphi_i \in \mathcal{T}_{g,1}$, en fonction de l'homomorphisme de Johnson des φ_i .

En préambule du paragraphe 4.4, on redéfinit dans le paragraphe 4.3 l'homomorphisme de Johnson en terme d'arbres décorés par des éléments de $H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$. En particulier, en suivant la démarche de S. Morita, cela nous permet de relier $\tau_2([\varphi, \psi])$ à $\tau_1(\varphi)$ et $\tau_1(\psi)$ si φ et ψ sont deux éléments du groupe de Torelli.

Dans le paragraphe 4.4, on calcule explicitement la variation de l'invariant de Casson lorsque φ est un élément de $\mathcal{K}_{g,1} := (\mathcal{T}_{g,1})_{(2)}$. On en déduit une décomposition de la variation de Casson, différente de celle donnée par S. Morita dans [Mo2], en un terme qui se factorise par l'homomorphisme de Johnson dépendant des lagrangiens, plus un terme de correction indépendant des lagrangiens.

On généralise ensuite cette construction pour des invariants ν de degré $2n$ dans le paragraphe 4.5 sous certaines conditions sur le système de poids de ν . Plus précisément, si le système de poids de ν s'annule sur les diagrammes de Jacobi admettant une composante connexe en θ , on exprime la variation de ν par un commutateur de n homéomorphismes $\psi_i \in \mathcal{K}_{g,1}$ en fonction des homomorphismes de Johnson $\tau_2(\psi_i)$.

4.1 Dépendance des lagrangiens

Dans ce paragraphe, on démontre le résultat suivant :

Théorème 4.1.1. *Soient*

$$M^{(1)} = A^{(1)} \bigcup_{h_B^{(1)} \circ (h_A^{(1)})^{-1}} (-B^{(1)}) \quad \text{et} \quad M^{(2)} = A^{(2)} \bigcup_{h_B^{(2)} \circ (h_A^{(2)})^{-1}} (-B^{(2)})$$

deux \mathbb{Z} -sphères scindées de telle sorte que tous les \mathbb{Z} -corps en anses $X^{(j)}$ soient de même genre g . On suppose que les applications induites en homologie

$$H \left(h_X^{(2)} \circ (h_X^{(1)})^{-1} \right) : H_1 \left(\partial X^{(1)}; \mathbb{Z} \right) \longrightarrow H_1 \left(\partial X^{(2)}; \mathbb{Z} \right)$$

envoient $\mathcal{L}_{X^{(1)}}$ sur $\mathcal{L}_{X^{(2)}}$. Soit ν un invariant de degré au plus n à valeurs dans un groupe commutatif G . Alors,

- si $\varphi \in (\mathcal{T}_{g,1})_n$, ou
- si $\varphi \in (\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}$ et si G est un groupe sans torsion,

$$\nu \left(M_\varphi^{(1)} \right) - \nu \left(M^{(1)} \right) = \nu \left(M_\varphi^{(2)} \right) - \nu \left(M^{(2)} \right).$$

Dans les deux cas, si ν est de degré au plus $(n-1)$, alors

$$\nu \left(M_\varphi^{(i)} \right) = \nu \left(M^{(i)} \right).$$

Conséquences : Dès lors que l'on étudie les variations d'un invariant de degré n sous l'action d'éléments de $(\mathcal{T}_{g,1})_n$,

- On peut se restreindre à des scindements de Heegaard

$$M = H_g \cup (-H_g),$$

où H_g est un vrai corps en anses de genre g , avec toutes les configurations de lagrangiens $H_1(\Sigma) = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$ possibles.

- On peut se restreindre au cas $M = S^3$ avec tous les scindements possibles par des \mathbb{Z} -corps en anses.
- $\nu(M_\varphi) - \nu(M)$ ne dépend que de φ et de la disposition des lagrangiens.

Pour prouver le théorème 4.1.1, on définit une autre filtration de \mathcal{F} que l'on note $\overline{\mathcal{F}}_n^T$ et qui a été introduite par Garoufalidis et Levine dans [GL] à partir du groupe de Torelli. Cette filtration a entre autres comme propriété que, pour toute \mathbb{Z} -sphère scindée (M, Σ) , pour tout φ dans $(\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}$,

$$M_{(\Sigma, \varphi)} - M \in \overline{\mathcal{F}}_n^T$$

et avec les notations du théorème,

$$\left(M_\varphi^{(1)} - M^{(1)}\right) - \left(M_\varphi^{(2)} - M^{(2)}\right) \in \mathcal{F}_{n+1}^T.$$

En adaptant la démarche utilisée par S. Garoufalidis, M. Goussarov, J. Levine et M. Polyak dans [GL] et [GGP], on montrera que les deux filtrations \mathcal{F}_n^T et \mathcal{F}_n^Y sont égales, ce qui permettra de conclure.

4.1.1 Définition de la filtration \mathcal{F}_n^T

Si G est un groupe, on note

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z} \cdot g \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Q} \cdot g$$

les anneaux de groupe entier et rationnel sur G . On pose

$$\begin{aligned} IG &:= \left\langle \bigcup_{g \in G} (g - 1) \cdot \mathbb{Z}G \right\rangle \subset \mathbb{Z}G \\ I_{\mathbb{Q}}G &:= \left\langle \bigcup_{g \in G} (g - 1) \cdot \mathbb{Q}G \right\rangle \subset \mathbb{Q}G \end{aligned}$$

les idéaux d'augmentation de $\mathbb{Z}G$ et de $\mathbb{Q}G$, c'est-à-dire les idéaux engendrés par les éléments du type $(g - 1)$, où $g \in G$.

Soit M une \mathbb{Z} -sphère et soit $\Sigma \subset M$ une surface de genre g plongée dans M . On note alors

$$\begin{aligned} \Psi_{M,\Sigma} : \quad \mathbb{Z}\mathcal{T}_{g,1} &\longrightarrow \mathcal{F} \\ \sum_i m_i \cdot g_i &\longmapsto \sum_i m_i \cdot M_{(\Sigma, g_i)} \quad \forall m_i \in \mathbb{Z}, \forall g_i \in \mathcal{T}_{g,1} \end{aligned}$$

le prolongement linéaire sur $\mathbb{Z}\mathcal{T}_{g,1}$ de l'application $\varphi \mapsto M_{(\Sigma, \varphi)}$. On pose

$$\mathcal{F}_n^T := \bigcup_{(M, \Sigma)} \Psi_{M, \Sigma} ((I\mathcal{T}_{g,1})^n)$$

où (M, Σ) parcourt l'ensemble des \mathbb{Z} -sphères M scindées par une surface $\Sigma \subset M$ de genre $g \geq 0$. La notation $(I\mathcal{T}_{g,1})^n$ représente la puissance n -ième de l'idéal d'augmentation, c'est-à-dire l'idéal engendré par les éléments $(1 - g_1)(1 - g_2) \dots (1 - g_n)$, où $g_i \in \mathcal{T}_{g,1}$.

4.1.2 Un lemme algébrique

Lemme 4.1.2. *Pour tout groupe G , pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\begin{aligned} g \in G_n &\implies (g - 1) \in (IG)^n \\ g \in G_{(n)} &\implies (g - 1) \in (I_{\mathbb{Q}}G)^n. \end{aligned}$$

Conséquence du lemme 4.1.2 : Pour tout homéomorphisme $\varphi \in (\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}$, pour toute \mathbb{Z} -sphère scindée (M, Σ) , avec Σ de genre g ,

$$M_{(\Sigma, \varphi)} - M \in \overline{\mathcal{F}}_n^T.$$

Preuve du lemme 4.1.2 :

- On prouve tout d'abord par récurrence sur n

$$\forall n \geq 1, g \in G_n \implies (g - 1) \in (IG)^n.$$

Le cas $n = 1$ est trivial. Si la propriété est vraie au rang n , soit $x \in G_n$ et $y \in G$. La relation

$$[x, y] - 1 = ((x - 1)(y - 1) - (y - 1)(x - 1))x^{-1} - ([x, y] - 1)(y - 1)$$

entraîne que $[x, y] - 1 \in (IG)^{n+1}$. Donc la propriété est vraie pour tous les générateurs de G_{n+1} . La relation

$$ab - 1 = (a - 1) + (b - 1) + (1 - a)(1 - b)$$

permet alors de conclure que

$$\forall g \in G_{n+1}, (g - 1) \in (IG)^{n+1}.$$

- Soit maintenant $g \in G_{(n)}$. Il existe un entier $m > 0$ tel que $g^m \in G_n$. Alors $g^m - 1 \in (IG)^n$. Or

$$g^m - 1 = \sum_{i=1}^m C_m^i (g - 1)^i$$

donc

$$m(g - 1) = g^m - 1 - \sum_{i=2}^m C_m^i (g - 1)^i.$$

On en déduit que, si $(g - 1) \in (I_{\mathbb{Q}}G)^k$, alors

$$m(g - 1) \in (I_{\mathbb{Q}}G)^{\min(n, 2k)},$$

et donc

$$(g - 1) \in (I_{\mathbb{Q}}G)^{\min(n, 2k)}.$$

Finalement, cela entraîne que

$$(g - 1) \in (I_{\mathbb{Q}}G)^n.$$

□

4.1.3 Egalité des filtrations \mathcal{F}_n^T et \mathcal{F}_n

Dans ce paragraphe, on redémontre le résultat suivant en utilisant [AL].

Proposition 4.1.3 ([GL, Corollaire 1.21], [GGP, Théorème 5.2]).

$$\forall n \geq 0, \mathcal{F}_n^T = \mathcal{F}_n.$$

On va démontrer les deux inclusions $\mathcal{F}_n^T \subset \mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_n^T$ en utilisant deux systèmes de générateurs équivalents de \mathcal{F}_n :

- les crochets d’entrelacs en Y à n composantes
- les crochets de données de chirurgies lagrangiennes à n composantes.

Remarque 4.1.4. Pour la preuve du théorème 4.1.1, on n’aura besoin que de l’inclusion $\mathcal{F}_n^T \subset \mathcal{F}_n$.

Sous-lemme 4.1.5. Soit (M, Σ) une \mathbb{Z} -sphère scindée par une surface de genre g . Soient h, g_1, \dots, g_n des éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Alors il existe des corps en anses N_1, \dots, N_n plongés dans un voisinage de Σ tels que

$$\Psi_{(M,\Sigma)}((1 - g_n) \dots (1 - g_1)h) = [(M_{(\Sigma,h)}; ((N_1, N_1^{g_1}), \dots, (N_n, N_n^{g_n})))]$$

PREUVE : Soit $D \subset \Sigma$ le disque préservé par h et par les g_i . Pour tout sous-ensemble $J = \{j_1, \dots, j_k\}$ de $\{1, \dots, n\}$, où $(j_1 < \dots < j_k)$, on pose

$$\varphi(J) := g_{j_k} g_{j_{k-1}} \dots g_{j_1} h \in \mathcal{T}_{g,1}.$$

Dans un petit voisinage tubulaire autour de Σ dans M , on place $(n + 1)$ copies parallèles $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ de la surface Σ numérotées dans l’ordre croissant en allant de A à B . Alors, pour tout $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, on a

$$M_{(\Sigma, \varphi(J))} = \left(\left(\dots \left((M_{(\Sigma_0, h)})_{(\Sigma_{j_1}, g_{j_1})} \right) \dots \right)_{(\Sigma_{j_k}, g_{j_k})} \right).$$

Pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$, avec la notation 2.1.4, soit $N_i \simeq N$ un voisinage tubulaire de $\Sigma_i \setminus (\text{Int}(D_i))$ choisi assez petit pour que les N_i ne s’intersectent pas deux à deux. Les voisinages tubulaires $\Sigma_i \times I$ de Σ_i sont paramétrés par le segment I de façon croissante en allant de A vers B . Opérer une \mathcal{T} -chirurgie par g_i le long de Σ_i revient alors exactement à faire une chirurgie lagrangienne selon la paire $(N_i, N_i^{g_i})$, et

$$M_{(\Sigma, \varphi(J))} = M_{(\Sigma_0, h)} \left(\frac{N_{i_1}^{g_{i_1}}}{N_{i_1}}, \frac{N_{i_2}^{g_{i_2}}}{N_{i_2}}, \dots, \frac{N_{i_k}^{g_{i_k}}}{N_{i_k}} \right)$$

est obtenue à partir de $M_{(\Sigma_0, h)}$ par des chirurgies lagrangiennes. Finalement,

$$\begin{aligned} \Psi_{(M, \Sigma)}((1 - g_n) \dots (1 - g_1)h) &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{(\Sigma, \varphi(J))} \\ &= \sum_J (-1)^{\#J} (M_{(\Sigma_0, h)}) \left(\frac{N_{i_1}^{g_{i_1}}}{N_{i_1}}, \frac{N_{i_2}^{g_{i_2}}}{N_{i_2}}, \dots, \frac{N_{i_k}^{g_{i_k}}}{N_{i_k}} \right) \\ &= \left[((M_{(\Sigma_0, h)}); ((N_1, N_1^{g_1}), (N_2, N_2^{g_2}), \dots, (N_n, N_n^{g_n}))) \right] \end{aligned}$$

□

• **Preuve de $\mathcal{F}_n^T \subset \mathcal{F}_n$** : Il nous suffit de montrer que

$$\Psi_{(M, \Sigma)}((1 - g_n) \dots (1 - g_1)h) \in \mathcal{F}_n.$$

Par le sous-lemme 4.1.5,

$$\Psi_{(M, \Sigma)}((1 - g_n) \dots (1 - g_1)h) = \left[((M_{(\Sigma_0, h)}); ((N_1, N_1^{g_1}), (N_2, N_2^{g_2}), \dots, (N_n, N_n^{g_n}))) \right]$$

où

$$((M_{(\Sigma_0, h)}); n; ((N_1, N_1^{g_1}), (N_2, N_2^{g_2}), \dots, (N_n, N_n^{g_n})))$$

est une donnée de chirurgie lagrangienne à n composantes. Le résultat en découle alors par la proposition 2.2.3. □

• **Preuve de $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_n^T$** : Il nous suffit de montrer que, pour tout $G \subset M$ un entrelacs en Y à n composantes dans une \mathbb{Z} -sphère M , le crochet $[M, G]$ est un élément de \mathcal{F}_n^T . Soit $G \subset M$ un tel entrelacs en Y . Pour chaque composante G_i de G , la chirurgie sur G_i s'opère en décollant un voisinage tubulaire V_i de G_i le long de son bord S_i et en recollant V_i par composition par un élément φ_i de $\mathcal{T}_{3,1}$. On note $D_i \subset S_i$ un disque que φ_i laisse invariant point par point. Soit $S_0 = \partial B$ une sphère bordant une boule B dans $(M \setminus (\sqcup_{i=1}^n V_i))$. On raccorde la boule B à chaque \mathbb{Z} -corps en anse V_i par un chemin dans $(M \setminus (B \sqcup_{i=1}^n V_i))$ qui relie S_0 à un point de D_i . Ces chemins sont choisis disjoints deux à deux. On épaissit l'ensemble constitué de la boule B , des chemins et des \mathbb{Z} -corps en anses V_i pour obtenir un \mathbb{Z} -corps en anses V , et on pose $\Sigma := \partial V$. Par définition, Σ est une surface obtenue par somme connexe des surfaces S_i . On pose alors, pour tout entier $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_i : \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ x &\longmapsto \varphi_i(x) \quad \text{si } x \in S_i \\ x &\longmapsto x \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Alors $\bar{\varphi}_i$ est un homéomorphisme et est un élément du groupe de Torelli $\mathcal{T}_{3n,1}$. Tous les $\bar{\varphi}_i$ commutent entre eux et permettent de réaliser la chirurgie

en Y sur G_i par une \mathcal{T} -chirurgie le long de Σ . Finalement,

$$\begin{aligned} [M, G] &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{G(J)} \\ &= \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{(\Sigma, \circ_{i \in J} \bar{\varphi}_i)} \\ &= \Psi_{M, \Sigma} ((1 - \bar{\varphi}_1) (1 - \bar{\varphi}_2) \dots (1 - \bar{\varphi}_n)) \in \mathcal{F}_n^{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

□

4.1.4 Preuve du théorème 4.1.1

On peut alors conclure la preuve.

Preuve du théorème 4.1.1 : Soient $M^{(i)} = A^{(i)} \cup (-B^{(i)})$, $i = 1$ ou 2 , deux \mathbb{Z} -sphères scindées comme dans les hypothèses du théorème 4.1.1. Pour $i = 1$ ou 2 , on choisit un épaississement $\Sigma \times [-1, 1]$ de la surface $\Sigma = \partial A^{(i)}$ dans $M^{(i)}$. On peut écrire

$$M^{(i)} = A^{(i)} \bigcup_{(h_A^{(i)})^{-1} : \partial A^{(i)} \rightarrow \Sigma \times \{-1\}} (\Sigma \times [-1, 1]) \bigcup_{h_B^{(i)} : \Sigma \times \{1\} \rightarrow \partial B^{(i)}} (-B^{(i)}).$$

Soit $\varphi \in (\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}$. Si $D \subset \Sigma$ un disque laissé invariant point par point par φ . On pose

$$C^{(i)} = A^{(i)} \cup (D \times [-1, 1]) \cup (-B^{(i)}) \subset M^{(i)}.$$

Alors $M^{(i)} = C^{(i)} \cup N$ est une sphère scindée en deux corps en anses, et on peut obtenir $M^{(2)}$ à partir de $M^{(1)}$ par une chirurgie lagrangienne le long de la paire $(C^{(1)}, C^{(2)})$. D'après le lemme 4.1.2 et le sous-lemme 4.1.5, $M_{(\Sigma, \varphi)}^{(1)} - M^{(1)}$ est, à multiplication par un coefficient entier près, une somme de crochets de données de chirurgies lagrangiennes à n composantes de la forme

$$\left[\left(M_{(\Sigma, h)}^{(1)}; n; ((N_1, N_1^{g_1}), \dots, (N_n, N_n^{g_n})) \right) \right],$$

où les N_i sont des corps en anses plongés dans N . Alors

$$M_{(\Sigma, \varphi)}^{(2)} - M^{(2)} - \left(M_{(\Sigma, \varphi)}^{(1)} - M^{(1)} \right)$$

est, toujours à un coefficient entier près, une somme d'éléments de la forme

$$\left[\left(M_{(\Sigma, h)}^{(1)}; n+1; \left((N_1, N_1^{g_1}), \dots, (N_n, N_n^{g_n}), (C^{(1)}, C^{(2)}) \right) \right) \right]$$

qui appartiennent tous à \mathcal{F}_{n+1} , ce qui nous permet de conclure dans le deuxième cas. La preuve pour $\varphi \in (\mathcal{T}_{g,1})_n$ est similaire. □

Remarque 4.1.6. Dans le même ordre d'idée, on a des résultats comparables en regardant la série centrale descendante de $\mathcal{K}_{g,1}$, où $\mathcal{K}_{g,1} := (\mathcal{T}_{g,1})_{(2)}$. En définissant $\mathcal{F}_n^{\mathcal{K}}$ de la même manière que $\mathcal{F}_n^{\mathcal{T}}$ en remplaçant $\mathcal{T}_{g,1}$ par $\mathcal{K}_{g,1}$, on a (voir [GL, Corollaire 1.21] et [GGP, Théorème 6.6, Théorème 6.11])

$$\overline{\mathcal{F}}_n^{\mathcal{K}} = \overline{\mathcal{F}}_{2n}.$$

L'égalité directe des filtrations serait fautive. On peut par contre déduire de l'égalité sur les clôtures rationnelles le résultat suivant.

Proposition 4.1.7. *Si $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ sont deux \mathbb{Z} -sphères scindées vérifiant les hypothèses du théorème 4.1.1, si $\varphi \in (\mathcal{K}_{g,1})_{(n)}$, et si ν est un invariant de degré $2n$ à valeurs dans un groupe sans torsion, alors*

$$\nu \left(M_{\varphi}^{(1)} \right) - \nu \left(M^{(1)} \right) = \nu \left(M_{\varphi}^{(2)} \right) - \nu \left(M^{(2)} \right).$$

□

4.1.5 Conséquence du théorème 4.1.1

Théorème 4.1.8. *Soit $\Sigma \subset M$ une surface de genre g . On note $\mathcal{L}_A \subset H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ et $\mathcal{L}_B \subset H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ les lagrangiens des deux \mathbb{Z} -corps en anses séparés par Σ . Soit ν un invariant de degré n à valeurs dans \mathbb{Z} . On pose*

$$\begin{aligned} \nu_{(M,\Sigma)}^* : (\mathcal{T}_{g,1})_{(n)} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \varphi &\longmapsto \nu(M_{(\Sigma, \varphi)}) - \nu(M). \end{aligned}$$

Alors $\nu_{(M,\Sigma)}^$ ne dépend que des lagrangiens $(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)$. On pose $\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* = \nu_{(M,\Sigma)}^*$. C'est un homomorphisme de $((\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}, \cdot)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. De plus, $\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*$ est nul sur $(\mathcal{T}_{g,1})_{(n+1)}$.*

PREUVE : Le fait que ν^* ne dépende que de $(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)$ est une simple reformulation du théorème 4.1.1. Si φ_1 et φ_2 sont deux éléments de $(\mathcal{T}_{g,1})_{(n)}$, alors

$$\begin{aligned} \nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(\varphi_1 \varphi_2) &= \nu(M_{\varphi_1 \circ \varphi_2}) - \nu(M) \\ &= \nu(M_{\varphi_1 \circ \varphi_2}) - \nu(M_{\varphi_2}) + \nu(M_{\varphi_2}) - \nu(M) \\ &= \nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(\varphi_1) + \nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(\varphi_2) \end{aligned}$$

car

$$\nu(M_{\varphi_1 \circ \varphi_2}) - \nu(M_{\varphi_2}) = \nu(M_{\varphi_1}) - \nu(M)$$

d'après le théorème 4.1.1 avec $M = M^{(1)}$ et $M^{(2)} := M_{\varphi_2}^{(1)}$. □

4.2 Relier $\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}))$ aux $\tau_1(\varphi_i)$

Dans ce paragraphe, on étudie la variation d'un invariant ν de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{Z} après \mathcal{T} -chirurgie par un arrangement de crochets $c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n})$ du $2n$ -ième terme de la série descendante du groupe du Torelli. En particulier, on relie cette variation aux images $\tau_1^Y(\varphi_i) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ des φ_i par l'homomorphisme de Johnson.

4.2.1 Données de chirurgie lagrangienne et diagrammes de Jacobi

On donne d'abord ici une formulation alternative de [AL, Théorème 3.5] qui établit un lien entre le crochet d'une donnée de chirurgie lagrangienne et un système de poids sur les diagrammes de Jacobi.

Notation 4.2.1. • Si Q est un \mathbb{Z} -module, on note χ l'isomorphisme défini par

$$\begin{aligned} \chi : \quad \Lambda^3 Q &\longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(Q) \\ a \wedge b \wedge c &\longmapsto (a, b, c). \end{aligned}$$

• Si $f : Q \rightarrow R$ est un morphisme de \mathbb{Z} -modules, on note

$$f_* : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(Q) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(R)$$

l'homomorphisme qui à un arbre (q_1, q_2, q_3) associe $(f(q_1), f(q_2), f(q_3))$. Alors, avec ces notations, si on note $\rho_H : c \rightarrow <, c >$ l'identification $H \simeq H^*$ induite par l'intersection sur H ,

$$\tau_1^Y(\varphi) = (\rho_H^{-1})_* (\chi(\tau_1(\varphi))).$$

• Si $(M; (A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_{2n}, B_{2n}))$ est une donnée de chirurgie lagrangienne à $2n$ composantes, on note

$$\mathcal{I}_{A_i B_i} \in \Lambda^3(\mathcal{L}_{A_i})^*$$

la forme d'intersection triple dans $H_2(A_i \cup (-B_i); \mathbb{Z})$ transportée par l'isomorphisme induit par le bord de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} \partial_{A_i B_i} : \quad H_2(A_i \cup (-B_i); \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathcal{L}_{A_i} \\ [S] &\longmapsto [\partial(S \cap A_i)]. \end{aligned}$$

Pour tout i , on désigne par \mathcal{L}_{Z_i} le lagrangien du \mathbb{Z} -corps en anses $Z_i :=$

$M \setminus (\text{Int}(A_i))$. On note alors

$$\begin{aligned} \xi_i : \mathcal{L}_{Z_i} &\longrightarrow (\mathcal{L}_{A_i})^* \\ c &\longmapsto \langle \cdot, c \rangle \end{aligned}$$

l'isomorphisme induit par la forme d'intersection sur $H_1(\partial A_i; \mathbb{Z})$.

Si (T_1, \dots, T_{2n}) sont des arbres trivalents dans $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(\mathcal{L}_{Z_i})$, on définit un appariement des arêtes des T_i sans boucle comme la donnée d'une partition des arêtes des T_i en paires, telle que deux arêtes adjacentes à un même sommet n'appartiennent pas à une même paire. On note \mathbb{P} l'ensemble des appariements sans boucle. À tout appariement $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$, on associe un graphe trivalent $\Gamma_{\mathcal{P}}$ obtenu en connectant les arêtes des arbres T_i suivant \mathcal{P} . À chaque arête e de $\Gamma_{\mathcal{P}}$, qui correspond à une paire d'arêtes de T_i et de T_j décorées respectivement par c_i et par c_j , on associe $x_e = \ell k(c_i, c_j)$. On note alors

$$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{(M, A_1, \dots, A_{2n})} : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(\mathcal{L}_{Z_1}) \times \dots \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(\mathcal{L}_{Z_{2n}}) \rightarrow \mathcal{A}_n$$

l'application $2n$ -linéaire symétrique qui à $2n$ éléments

$$T_1, \dots, T_{2n} \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(\mathcal{L}_{Z_{2i}})$$

associe

$$\langle T_1, \dots, T_{2n} \rangle_{(M, A_1, \dots, A_{2n})} = \sum_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \left(\prod_{e \in \mathcal{P}} x_e \right) [\Gamma_{\mathcal{P}}].$$

Le lemme suivant est alors un corollaire de [AL, Théorème 3.5].

Lemme 4.2.2. *Soit $D = (M; (A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_{2n}, B_{2n}))$ une donnée de chirurgie lagrangienne à $2n$ composantes. Alors, avec les conventions de la notation 4.2.1,*

$$[D] \stackrel{2n}{=} \Psi_{2n} \left(\left((\xi_1^{-1})_* (\chi(\mathcal{I}_{A_1 B_1})) \right), \dots, \left((\xi_{2n}^{-1})_* (\chi(\mathcal{I}_{A_{2n} B_{2n}})) \right) \right)_{(M, A_1, \dots, A_{2n})}.$$

□

Soit (M, Σ) une \mathbb{Z} -sphère scindée. Soient h_1, h_2, \dots, h_{2n} des éléments du groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$. On note $D \subset \Sigma$ le disque laissé invariant par les h_i . Soient $2n$ copies parallèles $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2n}$ de Σ dans un petit voisinage tubulaire autour de Σ , numérotées de façon croissante en allant de A vers B . On note $D_i \subset \Sigma_i$ la copie correspondante de D . On choisit un voisinage tubulaire N_i de $\Sigma_i \setminus (\text{Int}(D_i))$ pris assez petit dans M pour que ces voisinages

ne s'intersectent pas deux à deux. Dans la suite, on va s'intéresser à des données de chirurgies lagrangiennes de la forme

$$\left(M; \left(N_1, N_1^{h_1} \right), \dots, \left(N_{2n}, N_{2n}^{h_{2n}} \right) \right),$$

où (N_i, N_i^h) est la paire de chirurgie lagrangienne définie dans la notation 2.1.4. Le but de ce paragraphe est de donner une expression simple de

$$\left\langle\left\langle (\xi_1^{-1})_* \left(\chi \left(\mathcal{I}_{N_1 N_1^{h_1}} \right) \right), \dots, (\xi_{2n}^{-1})_* \left(\chi \left(\mathcal{I}_{N_{2n} N_{2n}^{h_{2n}}} \right) \right) \right\rangle\right\rangle_{(M, N_1, \dots, N_{2n})}.$$

Dans le chapitre 3, on a donné, pour tout homéomorphisme $h \in \mathcal{T}_{g,1}$, une forme explicite de $\mathcal{I}_{N N^h}$ en fonction de l'image $\tau_1(h)$ de h par l'homomorphisme de Johnson. Traduit dans le formalisme des arbres, le théorème 3.4.1 se réécrit

Lemme 4.2.3. *Avec les conventions des notations de l'introduction et des notations 2.1.4 et 4.2.1, si on désigne par*

$$(\mathfrak{N}_N^{-1})^* : H^* \longrightarrow \mathcal{L}_N^*$$

l'isomorphisme défini par composition à droite par l'isomorphisme \mathfrak{N}_N^{-1} , alors pour tout homéomorphisme $h \in \mathcal{T}_{g,1}$,

$$\chi(\mathcal{I}_{N N^h}) = - \left((\mathfrak{N}_N^{-1})^* \circ \rho_H \right)_* \left(\tau_1^Y(h) \right)$$

dans $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(\mathcal{L}_N^)$.*

□

Notation 4.2.4. Si (M, Σ) est une \mathbb{Z} -sphère scindée en deux \mathbb{Z} -corps en anses A et B , on pose

$$p_X : H \longrightarrow \mathcal{L}_X, \quad X = A \text{ ou } B$$

la projection sur le lagrangien \mathcal{L}_X parallèlement au lagrangien de l'autre corps en anses. On note ensuite

$$\langle\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} : (\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H))^{2n} \longrightarrow \mathcal{A}_n$$

l'application $2n$ -linéaire définie de la façon suivante. Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ un appariement sans boucle des arêtes des arbres (T_1, \dots, T_{2n}) . À chaque arête e de $\Gamma_{\mathcal{P}}$, qui correspond à une paire d'arêtes de T_i et de T_j décorées respectivement par a_i et a_j , on associe

$$x_e = \langle p_A(a_i), p_B(a_j) \rangle_{\Sigma} \quad \text{si } i < j.$$

On pose

$$\langle\langle T_1, \dots, T_{2n} \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} = \sum_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \left(\prod_{e \in \mathcal{P}} x_e \right) [\Gamma_{\mathcal{P}}].$$

Notons que $\langle\langle T_1, \dots, T_{2n} \rangle\rangle_{(p_A, p_B)}$ dépend fortement de l'ordre des arbres T_i .

On peut alors prouver le résultat suivant :

Lemme 4.2.5. *Soit (M, Σ) une \mathbb{Z} -sphère scindée. Soient (h_1, \dots, h_{2n}) $2n$ éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. On choisit $2n$ copies parallèles $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2n}$ de Σ dans un petit voisinage tubulaire autour de Σ , numérotées de façon croissante en allant de A vers B , et on note N_i un voisinage tubulaire de $\Sigma_i \setminus (\text{Int}(D_i))$. Alors, avec les conventions des notations 2.1.4 et 4.2.4,*

$$\left[\left(M; \left(N_1, N_1^{h_{2n}} \right), \dots, \left(N_{2n}, N_{2n}^{h_1} \right) \right) \right] \stackrel{2n}{=} \Psi_{2n} \left(\langle\langle \tau_1^Y(h_1), \dots, \tau_1^Y(h_{2n}) \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} \right).$$

Sous-lemme 4.2.6. *Sous les hypothèses du lemme 4.2.5, on pose $Z_i := M \setminus (\text{Int}(N_i))$ le complémentaire de N_i dans M et on note ξ_{N_i} l'isomorphisme*

$$\begin{aligned} \xi_{N_i} : \mathcal{L}_{Z_i} &\longrightarrow (\mathcal{L}_{N_i})^* \\ c &\longmapsto \langle \cdot, c \rangle_{\partial N_i} \end{aligned}$$

induit par la forme d'intersection sur ∂N_i . Alors, si $i < j$, les deux formes bilinéaires sur H

$$\ell k \left(\xi_{N_i}^{-1} \circ (\mathfrak{N}_{N_i}^{-1})^* \circ \rho_H(\cdot), \xi_{N_j}^{-1} \circ (\mathfrak{N}_{N_j}^{-1})^* \circ \rho_H(\cdot) \right)$$

et

$$- \langle p_B(\cdot), p_A(\cdot) \rangle_{\Sigma}$$

sont égales.

PREUVE : Pour $\varepsilon = \pm$, on note

$$j_{\varepsilon}^i : H \longrightarrow H_1(\partial N_i; \mathbb{Z})$$

le morphisme injectif induit en homologie par le plongement naturel de Σ dans $\Sigma_i \times \{\varepsilon 1\}$. Avec cette notation, $\mathfrak{N}_{N_i} = j_+^i - j_-^i$. On va alors démontrer dans un premier temps que

$$\xi_{N_i}^{-1} \circ (\mathfrak{N}_{N_i}^{-1})^* \circ \rho_H = j_+^i \circ p_B + j_-^i \circ p_A.$$

On remarque que

$$H_1(\partial N_i; \mathbb{Z}) = j_+^i(H) \oplus j_-^i(H)$$

et que la forme d'intersection sur $H_1(\partial N_i; \mathbb{Z})$ est induite par la forme d'intersection sur H de la manière suivante. $\forall x_+, x_-, y_+, y_- \in H$,

$$\langle j_+^i(x_+) + j_-^i(x_-), j_+^i(y_+) + j_-^i(y_-) \rangle_{\partial N_i} = \langle x_+, y_+ \rangle_{\Sigma} - \langle x_-, y_- \rangle_{\Sigma}.$$

Le lagrangien de Z_i est égal à

$$\mathcal{L}_{Z_i} = j_-^i(\mathcal{L}_A) \oplus j_+^i(\mathcal{L}_B).$$

On a, $\forall c, d \in H$,

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{N}_{N_i}(d), j_+^i(p_B(c)) + j_-^i(p_A(c)) \rangle_{\partial N_i} &= \langle d, p_B(c) \rangle_{\Sigma} - \langle -d, p_A(c) \rangle_{\Sigma} \\ &= \langle d, c \rangle_{\Sigma} \end{aligned}$$

ce qui entraîne que, pour tout $c \in H$,

$$\begin{aligned} \rho_H(c) &= (\xi_{N_i}((j_+^i \circ p_B + j_-^i \circ p_A)(c))) \circ \mathfrak{N}_{N_i} \\ &= \mathfrak{N}_{N_i}^*(\xi_{N_i}((j_+^i \circ p_B + j_-^i \circ p_A)(c))). \end{aligned}$$

Donc

$$\xi_{N_i}^{-1} \circ (\mathfrak{N}_{N_i}^{-1})^* \circ \rho_H = j_+^i \circ p_B + j_-^i \circ p_A.$$

On remarque ensuite que, $\forall a, b \in H$,

$$\begin{aligned} \ell k((j_+^1 \circ p_B + j_-^1 \circ p_A)(a), (j_+^2 \circ p_B + j_-^2 \circ p_A)(b)) \\ = \ell k((j_+^1 \circ p_B)(a), (j_-^2 \circ p_A)(b)) \\ = -\langle p_B(a), p_A(b) \rangle_{\Sigma} \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure. \square

Preuve du lemme 4.2.5 : Le lemme 4.2.3 affirme que, pour tout i ,

$$\chi(\mathcal{I}_{N_i N_i^{h_i}}) = -\left((\mathfrak{N}_{N_i}^{-1})^* \circ \rho_H \right)_* (\tau_1^Y(h_i)).$$

Le lemme 4.2.2 et le sous-lemme 4.2.6 nous permettent alors de conclure. \square

4.2.2 Calcul explicite

Si ν est un invariant de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{Z} , on note

$$\begin{aligned} P_{\nu} : \mathcal{A}_n &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \Gamma &\longmapsto \nu(\Psi_{2n}(\Gamma)) \end{aligned}$$

le système de poids associé à ν .

Théorème 4.2.7. *Soit*

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . Soit c un arrangement de crochets de degré $2n$ sur $\mathcal{T}_{g,1}$. Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})$ $2n$ éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Soit ν un invariant de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{Z} , et soit P_ν son système de poids. Alors, avec les conventions des notations de l'introduction et de la notation 4.2.4,

$$\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n})) = P_\nu \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c} \gamma_c(\sigma) \langle\langle \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(1)}), \dots, \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(2n)}) \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} \right).$$

PREUVE : Soit (M, Σ) une \mathbb{Z} -sphère scindée de telle sorte que les deux \mathbb{Z} -corps en anses A et B aient pour lagrangiens respectifs \mathcal{L}_A et \mathcal{L}_B . Soient $2n$ copies parallèles $\Sigma_1, \dots, \Sigma_{2n}$ de Σ dans un petit voisinage tubulaire autour de Σ , numérotées de façon croissante en allant de A vers B . Alors, pour tout $2n$ -uplet (f_1, \dots, f_{2n}) dans $(\mathcal{T}_{g,1})^{2n}$, faire une \mathcal{T} -chirurgie par $f_1 \circ \dots \circ f_{2n}$ le long de Σ revient à faire des \mathcal{T} -chirurgies par f_i le long de Σ_{2n-i} , pour i allant de 1 à $2n$. De la relation algébrique

$$[\varphi, \psi] - 1 = ((\varphi - 1)(\psi - 1) - (\psi - 1)(\varphi - 1))\varphi^{-1} - ([\varphi, \psi] - 1)((\psi - 1)),$$

on déduit que si

$$c(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = [c_1(\varphi_1, \dots, \varphi_p), c_2(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_n)],$$

alors dans $(\mathbb{Z}\mathcal{T}_{g,1})/(\mathcal{I}\mathcal{T}_{g,1})^{2n+1}$,

$$\begin{aligned} c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}) - 1 &= \left((c_1(\varphi_1, \dots, \varphi_p) - 1)(c_2(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_{2n}) - 1) \right. \\ &\quad \left. - (c_2(\varphi_{p+1}, \dots, \varphi_{2n}) - 1)(c_1(\varphi_1, \dots, \varphi_p) - 1) \right) \\ &\quad \cdot (c_1(\varphi_1, \dots, \varphi_p))^{-1} \\ &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c} \gamma_c(\sigma) (\varphi_{\sigma(1)}^\sigma - 1) \dots (\varphi_{\sigma(2n)}^\sigma - 1) \right) h, \end{aligned}$$

où $\varphi_{\sigma(i)}^\sigma$ est un élément de $\mathcal{T}_{g,1}$ conjugué à $\varphi_{\sigma(i)}$ dans $\mathcal{T}_{g,1}$, et où h est un élément de $\mathcal{T}_{g,1}$.

On fixe ensuite pour tout i un voisinage tubulaire N_i de $\Sigma_i \setminus (\text{Int}(D))$. Procéder à une \mathcal{T} -chirurgie par un homéomorphisme $h \in \mathcal{T}_{g,1}$ le long de Σ_i revient à faire une chirurgie lagrangienne sur la paire (N_i, N_i^h) . Alors, par l'égalité

précédente, et grâce au théorème 4.1.1,

$$M_{(\Sigma, c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}))} - M \stackrel{2n}{=} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c} \gamma_c(\sigma) \left[\left(M; \left(N_1, N_1^{\varphi_{\sigma(2n)}} \right), \dots, \left(N_{2n}, N_{2n}^{\varphi_{\sigma(1)}} \right) \right) \right].$$

Le lemme 4.2.5 entraîne alors que

$$M_{(\Sigma, c(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{2n}))} - M \stackrel{2n}{=} \Psi_{2n} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c} \gamma_c(\sigma) \left\langle \left\langle \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(1)}^\sigma), \dots, \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(2n)}^\sigma) \right\rangle \right\rangle_{(p_A, p_B)} \right).$$

Le théorème découle alors du fait que $\tau_1^Y(\varphi_{\sigma(i)}^\sigma) = \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(i)})$. □

Pour illustrer ce résultat, on présente maintenant un exemple valable pour des invariants de tout degré en exhibant des éléments $\varphi_1, \dots, \varphi_{2n}$ du groupe de Torelli pour lesquels la contraction des homomorphismes de Johnson donne un résultat non trivial quel que soit l'arrangement de crochets utilisé.

On considère le diagramme de Jacobi R_n de degré n composé de n boucles sur un cercle, plongé dans \mathbb{R}^3 et dont les arêtes sont numérotées de 1 à $3n$ comme représenté sur la figure 4.1. Le diagramme R_n est non trivial dans \mathcal{A}_n , car pour le système de poids associé à l'algèbre de Lie \mathfrak{sl}_2 munie de la forme bilinéaire $(x, y) \rightarrow tr(xy)$, rajouter une boucle revient à faire une multiplication par 4 (pour plus de précisions sur les systèmes de poids sur les diagrammes, voir [B] et [V]).

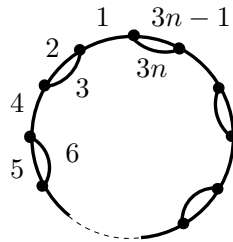


FIG. 4.1 – Le diagramme R_n .

On épaissit chaque arête de R_n dans \mathbb{R}^3 et on rajoute à chaque épaississement d'arête une 1-anse de dimension 3, comme représenté sur la figure 4.2. On obtient ainsi à partir de R_n un corps en anses $T(R_n)$ de genre $(4n + 1)$ plongé dans $\mathbb{R}^3 \subset S^3$. Pour tout $i \in \{1, \dots, 3n\}$, on note (a_i, b_i) les classes d'homologie des courbes orientées tracées sur le bord de $T(R_n)$ et représentées sur la figure 4.2.

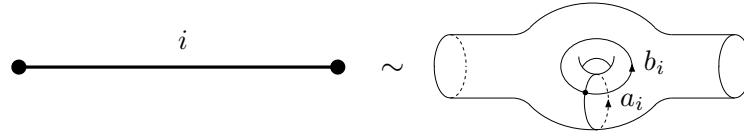


FIG. 4.2 – Epaissement des arêtes et ajout d’une anse triviale.

Comme l’image de l’homomorphisme de Johnson τ_1^Y est égale à $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$, pour tout entier $i \in \{1, \dots, 2n\}$, il existe un élément du groupe de Torelli $\varphi_i \in \mathcal{T}_{4n,1}$ qui vérifie

$$\begin{aligned} \tau_1^Y(\varphi_1) &= (a_1, a_2, a_3) \\ \tau_1^Y(\varphi_2) &= (a_4, b_3, b_2) \\ \tau_1^Y(\varphi_{2j+1}) &= (b_{3j+1}, a_{3j+2}, a_{3j+3}) \\ \tau_1^Y(\varphi_{2j+2}) &= (a_{3j+4}, b_{3j+3}, b_{3j+2}) \\ \tau_1^Y(\varphi_{2n-1}) &= (b_{3n-2}, a_{3n-1}, a_{3n}) \\ \tau_1^Y(\varphi_{2n}) &= (b_1, b_{3n}, b_{3n+2}) \end{aligned}$$

où $j \in \{1, \dots, n-2\}$.

Si on appelle \mathcal{L}_A le lagrangien de $T(R_n)$ et \mathcal{L}_B le lagrangien du complémentaire de $T(R_n)$ dans S^3 , alors, pour tout i , $a_i \in \mathcal{L}_A$ et $b_i \in \mathcal{L}_B$. On en déduit que, pour tout $(x, y) \in \{a_1, b_1, \dots, a_{3n}, b_{3n}\}^2$,

$$\begin{aligned} \langle p_A(x), p_B(y) \rangle_\Sigma &= 1 \quad \text{si } \exists j \in \{1, \dots, 3n\} / x = a_j \text{ et } y = b_j \\ &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Cela induit un appariement préféré des arêtes des $\tau_1^Y(\varphi_i)$ de telle sorte que lors d’une contraction des homomorphismes de Johnson par $\langle p_A(\cdot), p_B(\cdot) \rangle_\Sigma$, le résultat ne peut être non nul que si chaque arête est connectée à son arête préférée, avec une condition supplémentaire d’être à la bonne hauteur par rapport à celle-ci. Cela entraîne que si c est un arrangement de crochets de degré $2n$, alors, pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}^c$,

$$\langle\langle \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(1)}), \dots, \tau_1^Y(\varphi_{\sigma(2n)}) \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} = 0$$

sauf si $\sigma = \text{Id}$, auquel cas

$$\langle\langle \tau_1^Y(\varphi_1), \dots, \tau_1^Y(\varphi_{2n}) \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} = R_n.$$

Donc si ν est un invariant de degré $2n$ dont le système de poids vaut $\nu(R_n)$ sur R_n , alors, pour tout arrangement de crochets c de degré $2n$ sur $\mathcal{T}_{g,1}$,

$$\nu_{(p_A, p_B)}^*(c(\varphi_1, \dots, \varphi_{2n})) = \nu(R_n).$$

4.3 Homomorphisme de Johnson

Dans ce paragraphe, on redéfinit des outils qui nous seront utiles dans la suite du chapitre. On rappelle tout d'abord ici la définition des homomorphismes de Johnson τ_k construits par analogie avec τ_1 , déjà présenté dans l'introduction. Pour plus de détails sur la construction des homomorphismes de Johnson, voir [J2] et [Mo1]. Soit $\mathcal{M}_{g,1}$ le groupe des homéotopies sur $\Sigma_{g,1}$ relatives au bord de $\Sigma_{g,1}$, c'est-à-dire l'ensemble des homéomorphismes de $\Sigma_{g,1}$ valant l'identité sur le bord, quotienté par les isotopies préservant le bord point par point. Le groupe des homéotopies agit naturellement sur $\pi = \pi_1(\Sigma_{g,1})$ par l'action

$$\forall [\varphi] \in \mathcal{M}_{g,1}, \forall [\gamma] \in \pi, [\varphi].[\gamma] = [\varphi(\gamma)].$$

Pour tout entier $k \geq 0$, on note $\mathcal{M}(k)$ le sous-groupe de $\mathcal{M}_{g,1}$ agissant trivialement sur π/π_{k+1} . Par définition, $\mathcal{M}(1)$ est le groupe de Torelli $\mathcal{T}_{g,1}$. Il est facile d'établir que $\mathcal{M}(k)$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{M}_{g,1}$.

L'action de $\mathcal{M}_{g,1}$ sur π induit un homomorphisme défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(k) &\longrightarrow \text{Hom}(\pi; \pi_{k+1}/\pi_{k+2}) \\ [\varphi] &\longmapsto ([\gamma] \mapsto [\varphi(\gamma)\gamma^{-1}]) \end{aligned}$$

qui induit à son tour un homomorphisme $\tau_{(k)}$ de $\mathcal{M}(k)$ vers $\text{Hom}(H; \pi_{k+1}/\pi_{k+2})$. Comme π est un groupe libre, π_{k+1}/π_{k+2} s'identifie à l'algèbre de Lie libre \mathcal{L}_k sur H ([MKS, Théorème 15.2]) dont on redonne une définition dans le paragraphe 4.3.1. On définit l'homomorphisme de Johnson

$$\tau_k : \mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{L}_k \otimes H^*$$

à partir de $\tau_{(k)}$ par identification de π_{k+1}/π_{k+2} avec \mathcal{L}_k et par l'identification canonique $\text{Hom}(H; \mathcal{L}_k) \simeq \mathcal{L}_k \otimes H^*$. Dans le paragraphe 4.3.2, on redonne la définition de l'homomorphisme de Johnson généralisé $\tau_k^{(l)}$ à valeurs dans $\mathcal{L}_k \otimes (\mathcal{L}_l)^*$ défini par S. Morita dans [Mo2] dans le but de relier $\tau_{k_1+k_2}([\varphi, \psi])$ à $\tau_{k_1}(\varphi)$ et à $\tau_{k_2}(\psi)$. Enfin, dans le paragraphe 4.3.3, on identifie l'algèbre de Lie libre \mathcal{L}_k sur H à une algèbre engendrée par des arbres trivalents orientés aux arêtes décorées par des éléments de H . Cela nous permettra de considérer l'homomorphisme de Johnson en terme d'arbres trivalents aux arêtes décorées par H .

4.3.1 Algèbres de Lie libres

Une *algèbre de Lie* A sur \mathbb{Z} est un \mathbb{Z} -module muni d'une loi de multiplication, désignée ici par des crochets qui vérifie les relations suivantes. Pour tout x, y et z dans A ,

$$(4.3.1) \quad [x, x] = 0$$

$$(4.3.2) \quad [[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$$

$$(4.3.3) \quad [x, y] + [y, x] = 0.$$

L'équation 4.3.2 est la *relation de Jacobi*, et l'équation 4.3.3, qui s'obtient facilement à partir de l'équation 4.3.1 par distributivité, est la relation d'*antisymétrie*.

On appelle *algèbre de Lie libre de rang r sur \mathbb{Z}* , et on note $\Lambda(\mathbb{Z}, r)$, l'unique \mathbb{Z} -algèbre de Lie (à isomorphisme près) contenant r éléments ξ_1, \dots, ξ_r telle que pour toute autre \mathbb{Z} -algèbre de Lie contenant r éléments ξ'_i , il existe un unique homomorphisme de \mathbb{Z} -algèbre qui associe ξ'_i à ξ_i (voir [MKS]). Autrement dit, les uniques relations entre les éléments ξ_i proviennent des lois de \mathbb{Z} -algèbre et des relations 4.3.1 et 4.3.2. On dit que les ξ_i sont des *générateurs libres* de $\Lambda(\mathbb{Z}, r)$. On pose $\Lambda_1(\mathbb{Z}, r)$ le sous-module de $\Lambda(\mathbb{Z}, r)$ librement engendré par les ξ_i . On définit ensuite récursivement

$$\Lambda_n(\mathbb{Z}, r) := \bigoplus_{1 \leq i \leq n} [\Lambda_i(\mathbb{Z}, r), \Lambda_{n-i}(\mathbb{Z}, r)]$$

le sous-module de $\Lambda(\mathbb{Z}, r)$ composé des *éléments homogènes de degré n* . Par les relations de Jacobi et d'antisymétrie, on a en fait

$$\Lambda_{n+1}(\mathbb{Z}, r) = [\Lambda_n(\mathbb{Z}, r), \Lambda_1(\mathbb{Z}, r)].$$

Comme H est un \mathbb{Z} -module libre de rang $2g$, on peut définir l'*algèbre de Lie libre \mathcal{L} sur H* comme l'unique algèbre de Lie isomorphe à $\Lambda(\mathbb{Z}, 2g)$ telle que $\mathcal{L}_1 = H$ (voir [MKS]). On peut construire explicitement \mathcal{L} comme une sous-algèbre de $\bigoplus_{k>0} (\otimes^k H)$ munie du crochet

$$\begin{aligned} [,] : (\otimes^k H) \otimes (\otimes^l H) &\longrightarrow \otimes^{k+l} H \\ x \otimes y &\longmapsto x \otimes y - y \otimes x. \end{aligned}$$

En posant $\mathcal{L}_1 := H$ et en définissant par récurrence

$$\mathcal{L}_{k+1} := \langle [\mathcal{L}_r, \mathcal{L}_{k+1-r}]_{r=1}^k \rangle,$$

on a alors

$$\mathcal{L} := \bigoplus_{k \geq 1} \mathcal{L}_k.$$

Comme π est un groupe libre à $2g$ générateurs, le morphisme de groupes abéliens

$$\psi_k : \begin{aligned} (\mathcal{L}_k; +) &\longrightarrow (\pi_k / \pi_{k+1}; \cdot) \\ [[\dots [\overline{\gamma_1}, \overline{\gamma_2}], \dots], \overline{\gamma_k}] &\longmapsto [[\dots [\gamma_1, \gamma_2], \dots], \gamma_k] \cdot \pi_{k+1} \end{aligned}$$

est bien défini et est un isomorphisme (voir [MKS, Théorème 15.2]).

Remarque 4.3.4. Le crochet dans π est défini par

$$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}.$$

On a $[\pi_k, \pi_l] \subset \pi_{k+l}$, ce qui induit un crochet

$$\pi_k / \pi_{k+1} \times \pi_l / \pi_{l+1} \longrightarrow \pi_{k+l} / \pi_{k+l+1}$$

qui correspond au crochet $\mathcal{L}_k \otimes \mathcal{L}_l \rightarrow \mathcal{L}_{k+l}$ par l'isomorphisme ψ_k . Il est à noter que les relations de Jacobi et d'antisymétrie sont valables.

4.3.2 Homomorphisme de Johnson généralisé (d'après Morita)

On reprend ici des résultats de S. Morita ([Mo2]) pour définir dans un contexte général l'homomorphisme de Johnson τ_k , notamment dans le but de pouvoir relier $\tau_{k_1+k_2}([\varphi, \psi])$ à $\tau_{k_1}(\varphi)$ et à $\tau_{k_2}(\psi)$.

On va définir des homomorphismes

$$\tau_k^{(l)} : \mathcal{M}(k) \longrightarrow \mathcal{L}_{k+l} \otimes (\mathcal{L}_l)^*$$

qui généralisent l'homomorphisme de Johnson dans le sens où $\tau_k^{(1)} = \tau_k$. Ces morphismes ne donnent pas plus d'information que l'homomorphisme de Johnson classique, car ils sont entièrement déterminés par sa donnée. Par contre, ils nous sont utiles pour relier entre elles les différentes graduations de cet homomorphisme.

Lemme 4.3.5 ([Mo2, Lemme 3.2 (i)]). *Posons $k \geq 0$ et $l \geq 1$ deux entiers. Soit $\varphi \in \mathcal{M}(k)$. Alors,*

$$\forall \gamma \in \pi_l, \varphi(\gamma)\gamma^{-1} \in \pi_{k+l}.$$

PREUVE : On procède par récurrence sur $l \geq 1$. Le cas $l = 1$ provient de la définition de $\mathcal{M}(k)$. Si la propriété est vraie au rang l , soit $\gamma \in \pi_{l+1}$. On considère d'abord le cas où γ s'écrit sous la forme

$$\gamma = [x, y]$$

avec $x \in \pi_l$ et $y \in \pi_1$. L'hypothèse de récurrence entraîne qu'il existe $a \in \pi_{k+l}$ et $b \in \pi_{k+1}$ tels que $\varphi(x) = xa$ et $\varphi(y) = yb$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi([x, y])[y, x] &= x.ayba^{-1}.x^{-1}b^{-1}x.y^{-1}x^{-1} \\ &= x.[a, yb].yb.[x^{-1}, b^{-1}].b^{-1}.y^{-1}.x^{-1} \\ &= x.([a, yb].yb.([x^{-1}, b^{-1}]).(yb)^{-1}).x^{-1} \end{aligned}$$

où $[a, yb]$ et $[x^{-1}, b^{-1}]$ appartiennent à π_{k+l+1} . Donc $\varphi([x, y])[y, x] \in \pi_{k+l+1}$. Le cas général se déduit alors de la formule

$$(4.3.6) \quad \varphi(\gamma_1\gamma_2)\gamma_2^{-1}\gamma_1^{-1} = (\varphi(\gamma_1)\gamma_1^{-1})(\varphi(\gamma_2)\gamma_2^{-1}) \left[(\varphi(\gamma_2)\gamma_2^{-1})^{-1}, \gamma_1 \right].$$

□

Le lemme 4.3.5 et la formule 4.3.6 permettent d'affirmer que, pour tout $\varphi \in \mathcal{M}(k)$, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_k^{(l)}(\varphi) : \pi_l/\pi_{l+1} &\longrightarrow \pi_{k+l}/\pi_{k+l+1} \\ [\gamma] &\longmapsto [\varphi(\gamma)\gamma^{-1}] \end{aligned}$$

est bien définie et est un morphisme de groupes. De plus,

Lemme 4.3.7. *Soient $k \geq 1$ et $l \geq 1$ deux entiers. Alors l'application*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\tau}_k^{(l)} : \mathcal{M}(k) & \longrightarrow & \text{Hom}(\pi_l/\pi_{l+1}, \pi_{k+l}/\pi_{k+l+1}) \\ \varphi & \longmapsto & \tilde{\tau}_k^{(l)}(\varphi) \end{array}$$

est un morphisme de groupes.

PREUVE : soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{M}(k)$, et soit γ un élément de π_l . Alors

$$\begin{aligned} \varphi \circ \psi(\gamma)\gamma^{-1} &= \varphi(\psi(\gamma))\gamma^{-1} \\ &= \varphi(\gamma)\gamma^{-1} \cdot \psi(\gamma)\gamma^{-1} \cdot \gamma\psi(\gamma^{-1})\gamma\varphi(\gamma^{-1}\psi(\gamma)) \cdot \gamma^{-1} \\ &= \varphi(\gamma)\gamma^{-1} \cdot \psi(\gamma)\gamma^{-1} \cdot \gamma \left(\varphi(\psi(\gamma^{-1})\gamma) (\psi(\gamma^{-1})\gamma)^{-1} \right)^{-1} \gamma^{-1} \end{aligned}$$

où

$$\varphi(\psi(\gamma^{-1})\gamma) (\psi(\gamma^{-1})\gamma)^{-1} \in \pi_{2k+l} \subset \pi_{k+l+1}$$

d'après le lemme 4.3.5. Cela entraîne

$$\tilde{\tau}_k^{(l)}(\varphi \circ \psi) = \tilde{\tau}_k^{(l)}(\varphi) + \tilde{\tau}_k^{(l)}(\psi).$$

□

On définit alors

$$\begin{array}{ccc} \tau_k^{(l)} : \mathcal{M}(k) & \longrightarrow & \mathcal{L}_{k+l} \otimes (\mathcal{L}_l)^* \simeq \text{Hom}(\mathcal{L}_l, \mathcal{L}_{k+l}) \\ \varphi & \longmapsto & (\psi_{k+l})^{-1} \circ \left(\tilde{\tau}_k^{(l)}(\varphi) \right) \circ \psi_l \end{array}$$

l'homomorphisme de Johnson *généralisé*. Si $l = 1$, alors on réobtient $\tau_k^{(1)}(\varphi) = \tau_k(\varphi) \in \mathcal{L}_{k+1} \otimes H^*$ l'homomorphisme de Johnson *classique*. Le résultat suivant montre que $\tau_k^{(l)}$ se déduit de τ_k de façon explicite.

Lemme 4.3.8 ([Mo2, Proposition 3.5]).

Soient $k \geq 1$ et $l \geq 1$ deux entiers. Si $\varphi \in \mathcal{M}(k)$, et si $\xi = [[\dots [u_1, u_2], \dots], u_l] \in \mathcal{L}_l$, ($u_i \in H$), alors

$$\tau_k^{(l)}(\varphi)(\xi) = \sum_{i=1}^l [[\dots [[\dots [u_1, u_2], \dots], \tau_k(\varphi)(u_i)], \dots], u_l].$$

PREUVE : Soit $\varphi \in \mathcal{M}(k)$. Soient $x \in \pi_l$ et $y \in \pi$. D'après le lemme 4.3.5, il existe $a \in \pi_{k+l}$ et $b \in \pi_{k+1}$ tels que $\varphi(x) = ax$ et $\varphi(y) = by$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi([x, y])[y, x] &= axbyx^{-1}a^{-1}y^{-1}b^{-1}[y, x] \\ &= [a, y]yay^{-1} \cdot [x, b]bx \cdot yx^{-1}a^{-1}y^{-1}b^{-1}[y, x] \\ &= [a, y] \cdot [x, b] \left([[b, x], yay^{-1}] \right) yay^{-1} \cdot b[x, y](yay^{-1})^{-1} \cdot b^{-1}[y, x] \\ &= [a, y] \cdot [x, b] \cdot \left([[b, x], yay^{-1}] \right) \cdot \left([yay^{-1}, b[x, y]] \right) \cdot ([b, [x, y]]) \end{aligned}$$

où $[b, x], yay^{-1} \in \pi_{2k+2l+1}$, $[yay^{-1}, b[x, y]] \in \pi_{k+l+1+\min(k,l)}$ et $[b, [x, y]] \in \pi_{k+l+2}$. Comme $k \geq 1$ et $l \geq 1$, cela entraîne que, dans π_{k+l+1}/π_{k+l+2} ,

$$\varphi([x, y])[y, x] \equiv [a, y].[x, b].$$

On en déduit alors que, $\forall \varphi \in \mathcal{M}(k), \forall x \in \mathcal{L}_k, \forall y \in \mathcal{L}_1$,

$$(4.3.9) \quad \tau_k^{(l+1)}(\varphi)([x, y]) = \left[\tau_k^{(l)}(\varphi)(x), y \right] + \left[x, \tau_k^{(1)}(\varphi)(y) \right] \in \mathcal{L}_{k+l+1}.$$

Le lemme découle alors facilement de l'équation 4.3.9 par récurrence sur $l \geq 1$. \square

Le résultat suivant affirme que les groupes $\mathcal{M}(k)$ définissent une graduation de $\mathcal{M}_{g,1}$ compatible avec le crochet des applications, et il permet de relier $\tau_{k_1+k_2}^{(*)}([\cdot, \cdot])$ à $\tau_{k_1}^{(*)}(\cdot)$ et à $\tau_{k_2}^{(*)}(\cdot)$.

Lemme 4.3.10 ([Mo2, Proposition 3.4]).

Soient $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ et $l \geq 1$ des entiers. Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{M}(k_1), \forall \psi \in \mathcal{M}(k_2)$,

$$[\varphi, \psi] \in \mathcal{M}(k_1 + k_2)$$

et

$$\tau_{k_1+k_2}^{(l)}([\varphi, \psi])(\cdot) = \tau_{k_1}^{(k_2+l)}(\varphi)\left(\tau_{k_2}^{(l)}(\psi)(\cdot)\right) - \tau_{k_2}^{(k_1+l)}(\psi)\left(\tau_{k_1}^{(l)}(\varphi)(\cdot)\right).$$

PREUVE : On pose $a := \varphi(x)x^{-1} \in \pi_{k_1+l}$ et $b := \psi(x)x^{-1} \in \pi_{k_2+l}$. Alors

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi](x).x^{-1} &= \varphi\psi\varphi^{-1}(\psi^{-1}(b^{-1}).x).x^{-1} \\ &= \varphi\psi(\varphi^{-1}\psi^{-1}(b^{-1}).\varphi^{-1}(a^{-1}).x).x^{-1} \\ &= \varphi(\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(b^{-1}).\psi\varphi^{-1}(a^{-1}).bx).x^{-1} \\ &= ([\varphi, \psi](b^{-1}).(\varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})).\varphi(b).a \\ &= ([\varphi, \psi](b^{-1}).\varphi(b).[\varphi(b^{-1}), \varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})].\varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})a \\ &= \varphi(\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(b^{-1})b).[\varphi(b^{-1}), \varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})].(\varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})a) \end{aligned}$$

où $\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(b^{-1})b$ et $\varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})a$ appartiennent tous deux à $\pi_{k_1+k_2+l}$ d'après le lemme 4.3.5, tandis que $[\varphi(b^{-1}), \varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})]$ appartient à $\pi_{k_1+k_2+2l}$. On a donc ainsi démontré que $[\varphi, \psi]$ appartient à $\mathcal{M}(k_1 + k_2)$. On en déduit également que, dans $\pi_{k_1+k_2+l}/\pi_{k_1+k_2+l+1}$,

$$\begin{aligned} [\varphi, \psi](x).x^{-1} &= \varphi(\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(b^{-1})b) + (\varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})a) \\ &= \psi\varphi^{-1}\psi^{-1}(b^{-1})b + \varphi\psi\varphi^{-1}(a^{-1})a \\ &= \tilde{\tau}_{k_1+k_2+l}^{(k_2+l)}(\psi\varphi^{-1}\psi^{-1})(\tilde{\tau}_{k_2}^{(l)}(\psi)(x^{-1})) \\ &\quad + \tilde{\tau}_{k_1+k_2+l}^{(k_1+l)}(\varphi\psi\varphi^{-1})(\tilde{\tau}_{k_1}^{(l)}(\varphi)(x^{-1})). \end{aligned}$$

Alors, comme $\tilde{\tau}_k^{(l)}$ et un morphisme grâce au lemme 4.3.7, en utilisant le fait que $k_1 \geq 1$ et $k_2 \geq 1$ et que $[\varphi, \psi] \in \mathcal{M}(k_1 + k_2)$, on en déduit que

$$\tilde{\tau}_{k_1+k_2+l}^{(k_2+l)}(\psi\varphi^{-1}\psi^{-1}) = -\tilde{\tau}_{k_1+k_2+l}^{(k_2+l)}(\varphi)$$

et que

$$\tilde{\tau}_{k_1+k_2+l}^{(k_1+l)}(\varphi\psi\varphi^{-1}) = \tilde{\tau}_{k_1+k_2+l}^{(k_1+l)}(\psi).$$

Le résultat en découle. □

4.3.3 Arbres (à racine) décorés

On appelle *arbre de degré d* un graphe univalent non vide orienté simplement connexe à d sommets trivalents (ou sommets internes). Dans la suite, les arbres seront représentés dans le plan de telle sorte que l'orientation des sommets trivalents est donnée par l'orientation usuelle du plan dans le sens trigonométrique. Un arbre de degré d comprend $d + 2$ sommets univalents, ou sommets *externes*. On note $Ex(T)$ l'ensemble des sommets externes d'un arbre T . Un *arbre à racine* est un arbre muni d'un sommet externe préféré, noté $*$, que l'on appelle sa racine. Si Q est un \mathbb{Z} -module, une *décoration* d'un arbre T à racine par des éléments de Q est la donnée d'une application

$$\sigma : Ex(T) \setminus \{*\} \longrightarrow Q$$

qui à tout sommet externe de T distinct de la racine associe un élément de Q . On dira alors que $(T; \sigma)$ est un arbre à racine décoré par Q . On note alors $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$ le \mathbb{Z} -module librement engendré par les arbres à racine décorés par Q , quotienté par les relations de multilinéarité par rapport aux décorations des sommets externes, et quotienté par les relations AS , IHX , et $2A = 0$ illustrées sur la figure 4.3, où A , B , C et D peuvent représenter aussi bien un arbre, une décoration ou la racine.

FIG. 4.3 – Relations AS , IHX et $2A = 0$.

On note ensuite, pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}^r(Q)$ le sous-module de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$ engendré par les arbres de degré $n - 1$. Pour $n = 1$, le \mathbb{Z} -module $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},1}^r(Q) \simeq Q$ est composé des arbres composés d'une seule arête, dont le sommet extérieur différent de la racine est décoré par un élément de Q .

Il est possible de munir $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$ d'une structure d'algèbre de Lie en définissant le crochet de deux arbres à racine comme sur la figure 4.4, et en l'étendant à $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$ par multilinéarité (voir par exemple [HP] ou [GL2]).

$$\left[\begin{array}{c} A \quad B \\ \downarrow \quad \downarrow \\ * \quad * \end{array} \right] = \begin{array}{c} B \quad A \\ \diagdown \quad / \\ * \end{array}$$

FIG. 4.4 – Crochet de deux arbres à racine

La graduation de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$ est compatible avec le crochet, c'est-à-dire que l'on a

$$[\mathcal{A}_{\mathbb{Z},k}^r(Q), \mathcal{A}_{\mathbb{Z},l}^r(Q)] \subset \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k+l}^r(Q).$$

Remarque 4.3.11. On peut définir de la même manière que $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$ le \mathbb{Z} -module $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(Q)$ engendré par les arbres trivalents sans racine décorés par des éléments de Q , quotienté par les relations AS , IHX et $2A = 0$. Contrairement à $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(Q)$, on ne sait pas lui associer de structure d'algèbre de Lie. On peut cependant considérer $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}(Q)$ comme un sous-module de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r \otimes Q$. On note

$$\varrho_{Q,n} : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}^r(Q) \otimes Q \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}(Q)$$

le morphisme de \mathbb{Z} -module qui à un élément de la forme $T \otimes q$, où T est un arbre à racine décoré et q est un élément de Q , associe l'arbre sans racine décoré obtenu à partir de T en colorant le sommet racine par q .

Si maintenant T est un arbre sans racine décoré par Q , et si s est un sommet externe de T , alors on désigne par $(T, * = s)$ l'arbre de racine s , décoré par Q . On note alors ϖ_Q le morphisme défini par

$$\begin{array}{ccc} \varpi_{Q,n} : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}(Q) & \longrightarrow & \mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}^r(Q) \otimes Q \\ T & \longmapsto & \sum_{s \in Ex(T)} (T, * = s) \otimes \sigma(s) \end{array}$$

où $\sigma(s)$ désigne la décoration de s dans Q . On a alors

$$\varrho_{Q,n} \circ \varpi_{Q,n} = (n + 1) \cdot \text{Id}_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}(Q)}.$$

Dans la suite de ce paragraphe, on fixe $Q = H$, le \mathbb{Z} -module libre de rang $2g$. On peut alors définir par récurrence un isomorphisme

$$\Xi_n : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}^r \longrightarrow \mathcal{L}_n$$

à partir de l'isomorphisme $\Xi_1 : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},1}^r(H) \rightarrow \mathcal{L}_1 \simeq H$ naturel donné par la décoration en posant

$$\Xi_{k+l}([T^k, T^l]) = [\Xi_k(T^k), \Xi_l(T^l)]$$

pour tous arbres décorés T^k et T^l de degrés k et l . Ce morphisme est bien défini car tous les éléments de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},n}^r(H)$ sont des crochets d'arbres de degré plus petit que n et parce que les seules relations sur $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(H)$, nommément les relations AS , IHX et $2A = 0$, sont envoyées respectivement sur les relations d'antisymétrie, de Jacobi et sur la relation 4.3.1 dans \mathcal{L} . Le morphisme Ξ

est injectif car toutes les relations sur \mathcal{L} sont engendrées par les relations précédentes, et enfin il est surjectif car tous les éléments de \mathcal{L}_n sont des crochets d'éléments de degré plus petit que n . On a ainsi défini un isomorphisme d'algèbre de Lie entre $\mathcal{A}_{\mathbb{Z}}^r(H)$ et \mathcal{L} . Dorénavant, on pourra donc toujours considérer un élément de \mathcal{L} comme un arbre décoré. Le passage de l'un à l'autre est explicité sur la figure 4.5.

$$\Xi_n : \begin{array}{c} x_n \dots x_2 x_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \times \end{array} \longmapsto [[\dots [x_1, x_2], \dots], x_n].$$

FIG. 4.5 – L'isomorphisme Ξ

4.3.4 L'homomorphisme de Johnson en terme d'arbres

Désormais, si φ est un élément de $\mathcal{M}(k)$, on considérera $\tau_k^{(l)}(\varphi)$ comme un élément de

$$\text{Hom}((\mathcal{A}_{\mathbb{Z},l}^r(H), \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k+l}^r(H)) \simeq \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k+l}^r(H) \otimes (\mathcal{A}_{\mathbb{Z},l}^r(H))^*$$

via l'isomorphisme Ξ défini dans le paragraphe 4.3.3. En particulier, si $l = 1$, alors $\tau_k(\varphi)$ est un élément de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},k+1}^r(H) \otimes H^*$, c'est-à-dire une somme formelle d'arbres de degré k dont les sommets externes sont décorés par H et dont la racine est décorée dans H^* .

Notation 4.3.12. Si T_1 et T_2 sont deux arbres à racine décorés par H de degrés respectifs d_1 et d_2 , et si s est un sommet externe de T_2 différent de sa racine, on note $(T_1, *) - (T_2, s)$ l'arbre à racine de degré $d_1 + d_2$ décoré par H obtenu en raccordant s à la racine de T_1 .

Alors le lemme 4.3.8, traduit dans le formalisme des arbres, a pour corollaire immédiat

Corollaire 4.3.13. Soient $k \geq 1$ et $l \geq 1$ deux entiers. Avec la notation 4.3.12, on note $\kappa_{k+1}^{(l)}$ l'homomorphisme défini par

$$\begin{aligned} \kappa_{k+1}^{(l)} : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k+1}^r(H) \otimes H^* &\longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbb{Z},l}^r(H), \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k+l}^r(H)) \\ T_{(k)} \otimes \varphi &\longmapsto \left(T \mapsto \sum_{s \in \text{Ex}(T) \setminus \{*\}} \varphi(\sigma(s)) \cdot ((T_{(k)}, *) - (T, s)) \right) \end{aligned}$$

où $T_{(k)}$ et T désignent des arbres décorés de degrés respectifs k et $l - 1$, et où $\sigma(s)$ désigne la décoration dans H du sommet externe s . Alors, pour

tout $\varphi \in \mathcal{M}(k)$,

$$\tau_k^{(l)}(\varphi) = \kappa_{k+1}^{(l)}(\tau_k(\varphi)).$$

□

En utilisant le lemme 4.3.10 avec $l = 1$ et le corollaire 4.3.13, on obtient finalement le résultat suivant.

Lemme 4.3.14. *Soient $k_1 \geq 1$ et $k_2 \geq 1$ des entiers. Avec les notations du corollaire 4.3.13, on note $\{ \cdot, \cdot \}_{k_1}^{k_2}$ la forme bilinéaire antisymétrique définie par*

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_{\mathbb{Z}, k_1+1}^r(H) \otimes H^*) \times (\mathcal{A}_{\mathbb{Z}, k_2+1}^r(H) \otimes H^*) &\longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z}, k_1+k_2+1}^r(H) \otimes H^* \\ (X_{k_1} = T_{k_1} \otimes g, X'_{k_2} = T'_{k_2} \otimes g') &\longmapsto \begin{aligned} &\kappa_{k_1+1}^{(k_2+1)}(X_{k_1})(T'_{k_2}) \otimes g' \\ &- \kappa_{k_2+1}^{(k_1+1)}(X'_{k_2})(T_{k_1}) \otimes g. \end{aligned} \end{aligned}$$

Alors, $\forall \varphi \in \mathcal{M}(k_1), \forall \psi \in \mathcal{M}(k_2)$,

$$\tau_{k_1+k_2}([\varphi, \psi]) = \{ \tau_{k_1}(\varphi), \tau_{k_2}(\psi) \}_{k_1}^{k_2}.$$

□

4.4 Cas $n = 1$. L'invariant de Casson

Dans ce paragraphe, λ désignera l'invariant de Casson sur les sphères d'homologie entière

$$\lambda : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

entièrement défini par

- $\lambda|_{\mathcal{F}_3} = 0$
- $\lambda(S_\Theta^3) = 2$
- $\lambda(S^3) = 0$.

Soit $\theta \in \mathcal{A}_1$ le graphe en forme de thêta dont les sommets sont orientés par l'orientation usuelle du plan. Soit $\Theta : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ le morphisme de \mathbb{Z} -modules défini par le fait qu'il envoie θ sur 1. Le système de poids de λ est alors égal à

$$P_\lambda = 2\Theta.$$

Soit (M, Σ) un scindement d'une \mathbb{Z} -sphère par une surface de genre g . On note $\mathcal{L}_A \subset H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ et $\mathcal{L}_B \subset H_1(\Sigma; \mathbb{Z})$ les lagrangiens respectifs des deux \mathbb{Z} -corps en anses A et B séparés par Σ . On veut étudier l'homomorphisme

$$\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* : (\mathcal{T}_{g,1})_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$[\varphi, \psi] \longmapsto \lambda(M_{(\Sigma, [\varphi, \psi])}) - \lambda(M).$$

On note

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_\Sigma : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H) \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H) \rightarrow \mathcal{A}_1$$

l'application bilinéaire antisymétrique qui à deux éléments T_1 et T_2 dans $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ associe la somme des graphes obtenus en appariant de toutes les manières possibles les sommets externes de T_1 à ceux de T_2 , en multipliant le graphe obtenu à chaque connection par l'intersection algébrique $\langle a_1, a_2 \rangle_\Sigma$ des décorations concernées, où a_i désigne la décoration du sommet du graphe T_i . On désigne par

$$(p_X)_* : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H), \quad X = A \text{ ou } B$$

l'homomorphisme induit par le projecteur p_X . Avec ces notations, le théorème 4.2.7 s'écrit

Proposition 4.4.1. *Soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Alors*

$$\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*([\varphi, \psi]) = 2\Theta(\langle\langle (p_A)_*(\tau_1^Y(\varphi)), (p_B)_*(\tau_1^Y(\psi)) \rangle\rangle_\Sigma)$$

$$- 2\Theta(\langle\langle (p_A)_*(\tau_1^Y(\psi)), (p_B)_*(\tau_1^Y(\varphi)) \rangle\rangle_\Sigma).$$

□

4.4.1 Relier $\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*([\varphi, \psi])$ à $\tau_2([\varphi, \psi])$

Soit

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . Soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Dans ce paragraphe, on va décomposer $\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*([\varphi, \psi])$ en une somme composée d'un premier terme dépendant de $\tau_2([\varphi, \psi])$ et de la disposition des lagrangiens \mathcal{L}_X , et d'un deuxième terme ne dépendant que de $\tau_1(\varphi)$ et de $\tau_1(\psi)$.

Notation 4.4.2. • Si a, b, c et d sont des éléments de H , on notera $(a, b, c) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ l'arbre dont les trois sommets externes sont décorés dans le sens direct par a, b et c , et on désignera par $((a, b), (c, d)) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}(H)$ l'arbre représenté sur la figure 4.6. De la même façon, on définit $(*, a, b) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}^r(H)$ et $((a, b), (c, *)) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}^r(H)$ en remplaçant une des décorations par une racine.

• Si on désigne par

$$p_X : H \longrightarrow \mathcal{L}_X$$

la projection sur \mathcal{L}_X parallèlement au lagrangien de l'autre \mathbb{Z} -corps en anses, on note

$$\ell(.,.) : H \times H \longrightarrow \mathbb{Z}$$

la forme bilinéaire définie par $\ell(a, b) := \langle p_A(a), p_B(b) \rangle_\Sigma$. Pour des commodités ultérieures de notations, on pourra noter $\ell^+ := \ell$ et on notera $\ell^-(.,.)$ la forme bilinéaire définie par

$$\ell^-(a, b) := -\ell(b, a).$$

Avec cette notation, on a

$$\langle ., . \rangle_\Sigma = \ell^+(.,.) + \ell^-(.,.).$$

• On désigne par $[\cdot]_\ell$ l'application définie par

$$\begin{aligned} [\cdot]_\ell : \quad & \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}^r(H) \otimes H \longrightarrow \mathcal{A}_1 \\ & ((a, b), (c, *)) \otimes d \longmapsto ((\ell(b, c) + \ell(c, b)) \ell(a, d) \\ & \quad - (\ell(a, c) + \ell(c, a)) \ell(b, d)) \theta. \end{aligned}$$

• On note $\rho_k^* : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k}^r(H) \otimes H \rightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},k}^r(H) \otimes H^*$ l'application définie par

$$\rho_k^* = \text{Id}_{\mathcal{A}_{\mathbb{Z},k}^r} \otimes \rho_H$$

où $\rho_H : c \rightarrow \langle ., c \rangle_\Sigma$ est le morphisme induit par la forme d'intersection.

On désigne alors par $\{ , \}$ l'application bilinéaire définie par

$$\{ , \} : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H) \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H) \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}(H) \otimes H^*$$

$$(T_1, T_2) \longmapsto \{ \rho_2^*(\varpi_{H,2}(T_1)), \rho_2^*(\varpi_{H,2}(T_2)) \}_1^1,$$

où $\{ ., . \}_1^1$ est l'application définie dans le lemme 4.3.14. On a alors,

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{T}_{g,1}, \tau_2([\varphi, \psi]) = \{ \tau_1^Y(\varphi), \tau_1^Y(\psi) \}.$$

Remarque 4.4.3. L'élément $\{ T_1, T_2 \}_1^1$ est une somme d'arbres à racine à deux sommets trivalents obtenus de la manière suivante. Pour tout appariement d'une arête de T_1 décorée par a_1 avec une arête de T_2 décorée par a_2 , on construit un arbre à deux sommets trivalents en connectant les deux arêtes appariées et en multipliant par $\langle a_1, a_2 \rangle$. On transforme ensuite l'arbre ainsi obtenu en somme de quatre arbre à racines en remplaçant de toutes les façons possibles une de ses arêtes par une racine. On fait la somme sur tous les appariements possibles pour obtenir $\{ T_1, T_2 \}_1^1$.



FIG. 4.6 – Les arbres (a, b, c) et $((a, b), (c, d))$.

Lemme 4.4.4. *Soit*

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . Alors, en utilisant les conventions de la notation 4.4.2, les deux applications bilinéaires de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H) \times \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$ dans \mathcal{A}_1

$$- [(\rho_3^*)^{-1}(\{ T_1, T_2 \})]_\ell + 2 \langle\langle T_1, T_2 \rangle\rangle_\Sigma$$

et

$$8 \left(\langle\langle (p_A)_*(T_1), (p_B)_*(T_2) \rangle\rangle_\Sigma - \langle\langle (p_A)_*(T_2), (p_B)_*(T_1) \rangle\rangle_\Sigma \right)$$

sont égales.

PREUVE : Soient x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 et y_3 des éléments de H . On pose

$$T_1 = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$$

et

$$T_2 = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H).$$

- Alors

$$\langle\langle (p_A)_*(T_1), (p_B)_*(T_2) \rangle\rangle_\Sigma = - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}_3} \ell(x_i, y_{\sigma(i)}) \right) \theta$$

et

$$\langle\langle (p_A)_*(T_2), (p_B)_*(T_1) \rangle\rangle_\Sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}_3} \ell^-(x_i, y_{\sigma(i)}) \right) \theta,$$

où \mathcal{S}_3 désigne les permutations de \mathbb{Z}_3 , et où on note $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ la signature de la permutation σ .

- De même,

$$\begin{aligned} \langle\langle T_1, T_2 \rangle\rangle_\Sigma &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}_3} \langle x_i, y_{\sigma(i)} \rangle_\Sigma \right) \theta \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}_3} (\ell^+(x_i, y_{\sigma(i)}) + \ell^-(x_i, y_{\sigma(i)})) \right) \theta \\ &= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \left(\sum_{\mu: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \{-, +\}} \left(\prod_{i \in \mathbb{Z}_3} \ell^{\mu(i)}(x_i, y_{\sigma(i)}) \right) \right) \theta. \end{aligned}$$

- De plus, on remarque que

$$\begin{aligned} \{T_1, T_2\} &= \sum_{i \in \mathbb{Z}_3} \sum_{j \in \mathbb{Z}_3} \langle y_j, x_i \rangle_\Sigma \left(((x_{i+1}, x_{i+2}), (y_{j+1}, *)) \otimes \langle \cdot, y_{j+2} \rangle_\Sigma \right. \\ &\quad + ((x_{i+1}, x_{i+2}), (*, y_{j+2})) \otimes \langle \cdot, y_{j+1} \rangle_\Sigma \\ &\quad + ((x_{i+1}, *), (y_{j+1}, y_{j+2})) \otimes \langle \cdot, x_{i+2} \rangle_\Sigma \\ &\quad \left. + ((*, x_{i+2}), (y_{j+1}, y_{j+2})) \otimes \langle \cdot, x_{i+1} \rangle_\Sigma \right) \\ &= - \sum_{(i,j)} \langle x_i, y_j \rangle_\Sigma (\rho_3^* (\varpi_{H,3} (((x_{i+1}, x_{i+2}), (y_{j+1}, y_{j+2}))))). \end{aligned}$$

Donc

$$[(\rho_3^*)^{-1}(\{T_1, T_2\})]_\ell = - \sum_{(i,j)} \langle x_i, y_j \rangle_\Sigma [\varpi_{H,3} (((x_{i+1}, x_{i+2}), (y_{j+1}, y_{j+2})))]_\ell.$$

Or

$$\begin{aligned} [\varpi_{H,3} (((a, b), (c, d)))]_\ell &= 2((\ell(a, d) + \ell(d, a))(\ell(b, c) + \ell(c, b))) \theta \\ &\quad - 2((\ell(a, c) + \ell(c, a))(\ell(b, d) + \ell(d, b))) \theta, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
& [(\rho_3^*)^{-1}(\{T_1, T_2\})]_\ell \\
&= 2 \sum_{(i,j)} ((\ell(x_i, y_j) + \ell^-(x_i, y_j)) \cdot (\ell(x_{i+1}, y_{j+1}) - \ell^-(x_{i+1}, y_{j+1})) \\
&\quad \cdot (\ell(x_{i+2}, y_{j+2}) - \ell^-(x_{i+2}, y_{j+2}))) \theta \\
&\quad - 2 \sum_{(i,j)} ((\ell(x_i, y_j) + \ell^-(x_i, y_j)) \cdot (\ell(x_{i+1}, y_{j+2}) - \ell^-(x_{i+1}, y_{j+2})) \\
&\quad \cdot (\ell(x_{i+2}, y_{j+1}) - \ell^-(x_{i+2}, y_{j+1}))) \theta \\
&= 2 \sum_i \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) ((\ell(x_i, y_{\sigma(i)}) + \ell^-(x_i, y_{\sigma(i)})) \\
&\quad \cdot (\ell(x_{i+1}, y_{\sigma(i+1)}) - \ell^-(x_{i+1}, y_{\sigma(i+1)})) \\
&\quad \cdot (\ell(x_{i+2}, y_{\sigma(i+2)}) - \ell^-(x_{i+2}, y_{\sigma(i+2)}))) \theta.
\end{aligned}$$

En développant les produits, on en déduit

$$[(\rho_3^*)^{-1}(\{T_1, T_2\})]_\ell = 2 \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \left(\sum_{\mu: \mathbb{Z}_3 \rightarrow \{-, +\}} N(\mu) \left(\prod_i \ell^{\mu(i)}(x_i, y_{\sigma(i)}) \right) \right)$$

où $N(\mu) = 3$ si $\mu(1) = \mu(2) = \mu(3)$, et $N(\mu) = -1$ sinon. Finalement, avec les deux points précédents,

$$\begin{aligned}
[(\rho_3^*)^{-1}(\{T_1, T_2\})]_\ell - 2 \langle\langle T_1, T_2 \rangle\rangle_\Sigma &= -8 \langle\langle (p_A)_*(T_1), (p_B)_*(T_2) \rangle\rangle_\Sigma \\
&\quad + 8 \langle\langle (p_A)_*(T_2), (p_B)_*(T_1) \rangle\rangle_\Sigma
\end{aligned}$$

et le lemme en découle. \square

On déduit alors de la proposition 4.4.1 et des lemmes 4.3.14 et 4.4.4 le résultat suivant.

Proposition 4.4.5. *Soit*

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . Soient φ et ψ deux éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. En utilisant les conventions de la notation 4.4.2, si on note

$$\begin{aligned}
q_{\mathcal{L}} : \mathcal{M}(2) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\
h &\longmapsto \Theta \left([(\rho_3^*)^{-1}(\tau_2(h))]_\ell \right),
\end{aligned}$$

alors

$$4\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*([\varphi, \psi]) = -q_{\mathcal{L}}([\varphi, \psi]) + 2\Theta(\langle\langle \tau_1(\varphi), \tau_1(\psi) \rangle\rangle_\Sigma).$$

\square

4.4.2 Conclusion dans le cas $n = 1$

Des paragraphes précédents, on peut déduire des résultats sur $\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(\psi)$ lorsque $\psi \in \mathcal{K}_{g,1} := (\mathcal{T}_{g,1})_{(2)} \subset \mathcal{M}(2)$. Dans ses travaux sur le groupe de Torelli, D. Johnson a montré que $\mathcal{K}_{g,1} = \mathcal{M}(2)$ si $g \geq 3$. ([J5, Théorème 3]). Il a également montré que si $g \geq 2$, alors les twists de Dehn le long des courbes simples bordantes de $\Sigma_{g,1}$ engendrent $\mathcal{M}(2)$ ([J4, Théorème 5]).

Théorème 4.4.6. *Soit*

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . En utilisant les conventions de la notation 4.4.2, si on note

$$q_{\mathcal{L}} := \Theta \left([(\rho_3^*)^{-1}(\tau_2(\cdot))]_{\ell} \right),$$

alors l'application

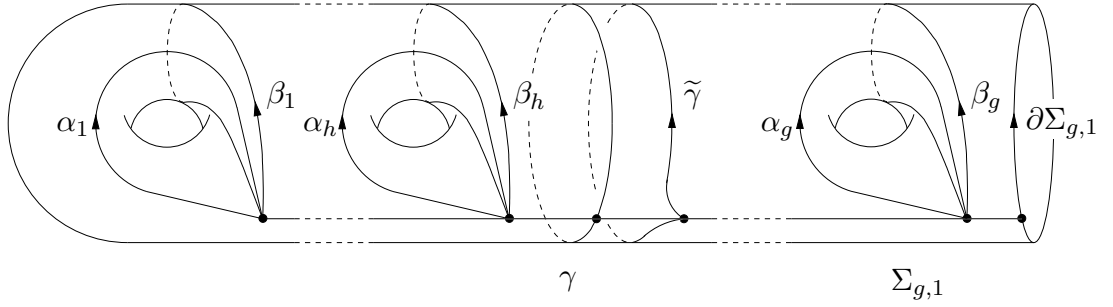
$$d := 4\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* + q_{\mathcal{L}} : \mathcal{K}_{g,1} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

est un homomorphisme indépendant de la configuration de lagrangiens sur Σ . De plus, si T_{γ} est un twist droit de Dehn le long d'une courbe simple bordant une surface de genre h dans $\Sigma_{g,1}$, alors

$$d(T_{\gamma}) = -h.$$

PREUVE : Grâce à la proposition 4.1.8, $\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*$ est un homomorphisme, et $q_{\mathcal{L}}$ est un homomorphisme par définition. La proposition 4.4.5 montre que d est indépendant de la disposition des lagrangiens pour un ensemble de générateurs de $(\mathcal{T}_{g,1})_2$, donc d restreint à $(\mathcal{T}_{g,1})_2$ est indépendant des lagrangiens. Comme d est à valeurs dans un groupe sans torsion, cela entraîne que d est indépendant des lagrangiens sur $(\mathcal{T}_{g,1})_{(2)}$.

On calcule maintenant d pour les twists de Dehn le long de courbes bordantes. Soit γ une courbe simple bordant une surface de genre h dans $\Sigma_{g,1}$. Pour calculer $d(T_{\gamma})$, on calcule $\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(T_{\gamma})$ et $q_{\mathcal{L}}(T_{\gamma})$. Pour trouver $q_{\mathcal{L}}(T_{\gamma})$, on commence par calculer $\tau_2(T_{\gamma})$. On choisit un système de $2g$ générateurs $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1, \dots, g}$ de π représentés par les courbes dessinées sur la figure 4.7. L'orientation de $\Sigma_{g,1}$ est celle induite par l'orientation de $\partial\Sigma_{g,1}$ donnée sur la figure avec la convention du premier vecteur sortant.

FIG. 4.7 – Générateurs de π associés à γ .

Alors T_γ agit librement sur π de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall i > h, \quad \varphi \cdot \alpha_i &= \alpha_i \\ \forall i > h, \quad \varphi \cdot \beta_i &= \beta_i \\ \forall i \leq h, \quad \varphi \cdot \alpha_i &= [\tilde{\gamma}, \alpha_i] \cdot \alpha_i \\ \forall i \leq h, \quad \varphi \cdot \beta_i &= [\tilde{\gamma}, \beta_i] \cdot \beta_i, \end{aligned}$$

où $\tilde{\gamma} = [\beta_h, \alpha_h] \dots [\beta_1, \alpha_1]$ est la courbe représentée sur la figure 4.7. Soit $(a_i, b_i)_{i=1, \dots, g}$ la base de H associée à $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1, \dots, g}$. On note $(a_i^*, b_i^*)_{i=1, \dots, g}$ sa base duale. Alors, dans $\mathcal{L}_3 \otimes H^*$,

$$\tau_2(T_\gamma) = \sum_{i=1}^h \left(\sum_{j=1}^h ([b_j, a_j], a_i) \otimes a_i^* + [b_j, a_j], b_i \otimes b_i^* \right),$$

donc, dans $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}^r(H) \otimes H^*$,

$$\tau_2(T_\gamma) = \sum_{i=1}^h \left(\sum_{j=1}^h -((a_j, b_j), (a_i, *)) \otimes a_i^* - ((a_j, b_j), (b_i, *)) \otimes b_i^* \right).$$

On calcule maintenant $q_{\mathcal{L}}(T_\gamma)$. Comme $\rho_H(a_i) = -b_i^*$ et $\rho_H(b_i) = a_i^*$, on a finalement

$$(\rho_3^*)^{-1}(\tau_2(T_\gamma)) = \sum_{(i,j) \in \{1, \dots, h\}^2} ((a_i, b_i), (b_j, *)) \otimes a_j - ((a_i, b_i), (a_j, *)) \otimes b_j.$$

Donc

$$\begin{aligned} [(\rho_3^*)^{-1}(\tau_2(T_\gamma))]_l &= \\ &\left(\sum_{(i,j)} ((\ell(b_i, b_j) + \ell(b_j, b_i)) \ell(a_i, a_j) - (\ell(a_i, b_j) + \ell(b_j, a_i)) \ell(b_i, a_j) \right. \\ &\quad \left. - (\ell(b_i, a_j) + \ell(a_j, b_i)) \ell(a_i, b_j) + (\ell(a_i, a_j) + \ell(a_j, a_i)) \ell(b_i, b_j) \right) \theta \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\ell(a_i, a_j) = \ell(a_j, a_i)$, $\ell(b_i, b_j) = \ell(b_j, b_i)$ et $\ell(b_j, a_i) = \ell(a_i, b_j) - \delta_{ij}$, on obtient finalement

$$q_{\mathcal{L}}(T_\gamma) = \sum_{i=1}^h (4\ell(a_i, a_i)\ell(b_i, b_i) - (2\ell(a_i, b_i) - 1)^2) + \sum_{(i,j); i \neq j} (4\ell(a_i, a_j)\ell(b_i, b_j) - 4\ell(a_i, b_j)\ell(a_j, b_i)).$$

Pour calculer la variation de l'invariant de Casson, il suffit de dire que la \mathcal{T} -chirurgie par T_γ est équivalente à une chirurgie de Dehn de coefficient -1 le long du nœud $\gamma \subset M$ ([Lic]), et que cette variation est alors égale à l'opposé de l'invariant de Casson du nœud γ , dont on connaît une formule en fonction de la matrice de Seifert de γ en le reliant à la dérivée seconde du polynôme d'Alexander (voir par exemple [Mo1, Proposition 3.2] ou [GM]). Explicitement, on a

$$\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(T_\gamma) = - \sum_{i=1}^h (\ell(a_i, a_i)\ell(b_i, b_i) - \ell(a_i, b_i)(\ell(a_i, b_i) - 1)) - \sum_{(i,j); i \neq j} (\ell(a_i, a_j)\ell(b_i, b_j) - \ell(a_i, b_j)\ell(a_j, b_i)).$$

On retrouvera cette formule de chirurgie indépendamment des résultats de cette partie dans le chapitre 6 (voir remarque 6.2.2). Alors, en reprenant l'égalité précédente, on trouve

$$q_{\mathcal{L}}(T_\gamma) = -h - 4\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(T_\gamma).$$

On en déduit alors que $d(T_\gamma) = -h$. □

Dans [Mo1], S. Morita avait déjà prouvé le résultat suivant.

Théorème 4.4.7 ([Mo1, Théorème 6.1]). *Soit $g \geq 2$. Il existe deux homomorphismes*

$$q_M : \text{Im}(\tau_2) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

et

$$d_M : \mathcal{M}(2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tels que

$$\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* = q_M \circ \tau_2 + \frac{d_M}{24}$$

sur $\mathcal{M}(2)$. De plus, d_M est indépendant des lagrangiens et

$$d_M(T_\gamma) = 4h(h - 1)$$

si T_γ est un twist de Dehn droit le long d'une courbe bordante de genre h . □

La décomposition que l'on obtient ici est différente de celle de S. Morita, qui a l'avantage de donner une interprétation géométrique de $d_M(\varphi)$ comme un défaut de signature entre deux SU -parallélisations du tore d'application \mathbb{T}_φ . Une telle interprétation pour d reste inconnue. On peut cependant déduire des théorèmes 4.4.6 et 4.4.7 le résultat suivant.

Proposition 4.4.8. *Soit $g \geq 2$ et*

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . Alors il existe

$$q(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B) : \text{Im}(\tau_2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

un homomorphisme dépendant des lagrangiens, et deux homomorphismes

$$q_{\mathcal{K}} : \text{Im}(\tau_2) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

et

$$\bar{d} : \mathcal{K}_{g,1} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

tels que

$$\lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* = \frac{1}{4} q(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B) \circ \tau_2 + \frac{1}{12} q_{\mathcal{K}} \circ \tau_2 + \frac{1}{3} \bar{d}.$$

De plus, si T_γ est un twist de Dehn droit le long d'une courbe γ bordant une surface de genre h dans $\Sigma_{g,1}$, alors

$$\begin{aligned} \bar{d}(T_\gamma) &= \frac{1}{2} h(h-1) \\ q_{\mathcal{K}} \circ \tau_2(T_\gamma) &= -h(2h+1). \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce aux théorèmes 4.4.6 et 4.4.7, on a

$$\begin{aligned} \lambda_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^* &= -\frac{1}{4} q_{\mathcal{L}} + \frac{1}{4} d \\ &= q_M \circ \tau_2 + \frac{d_M}{24}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser

$$\begin{aligned} \bar{d} &:= \frac{1}{8} d_M, \\ q(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B) \circ \tau_2 &:= -q_{\mathcal{L}} \\ \text{et } q_{\mathcal{K}} \circ \tau_2 &:= 12 \left(q_M \circ \tau_2 + \frac{1}{4} q_{\mathcal{L}} \right) = 3d - \frac{d_M}{2}. \end{aligned}$$

La valeurs de ces homomorphismes pour les twists de Dehn se déduisent des valeurs de $d(T_\gamma)$ et de $d_M(T_\gamma)$. \square

Il faut ici faire remarquer que l'homomorphisme $d' = -q_{\mathcal{K}} \circ \tau_2$ avait

également été défini par S. Morita dans [Mo2] en réduisant τ_2 par des formes d'intersection. Il en déduisait le résultat suivant :

Théorème 4.4.9 ([Mo2, Théorème 5.4]). *Soit $H^1(\mathcal{M}(2); \mathbb{Z})^{\mathcal{M}_{g,1}}$ le groupe des homomorphismes de $\mathcal{M}(2)$ à valeurs dans \mathbb{Z} invariants par conjugaison par des éléments de $\mathcal{M}_{g,1}$. Alors, si $g \geq 2$, $H^1(\mathcal{M}(2); \mathbb{Z})^{\mathcal{M}_{g,1}}$ est un groupe abélien libre de rang 2 rationnellement engendré par d_M et d' . \square*

Comme $\mathcal{M}_{g,1}$ agit de façon transitive sur les configurations de lagrangiens, d est également un homomorphisme invariant par conjugaison par $\mathcal{M}_{g,1}$. Il est alors facile de voir que (d, \bar{d}) forme une base de $H^1(\mathcal{M}(2); \mathbb{Z})^{\mathcal{M}_{g,1}}$.

Pour finir, il est intéressant de faire remarquer que la valeur des éléments de $H^1(\mathcal{M}(2); \mathbb{Z})^{\mathcal{M}_{g,1}}$ sur les twists de Dehn le long de courbes bordantes pouvait être facilement prédite par la relation lanterne de Johnson ([J1]). En effet, si $f \in H^1(\mathcal{M}(2); \mathbb{Z})^{\mathcal{M}_{g,1}}$, alors la valeur de $f(T_\gamma)$ ne dépend que du genre de la surface bordée par γ , car tous les twists de même genre sont conjugués dans $\mathcal{M}_{g,1}$. Si on note u_h la valeur de f pour un twist de genre h , la relation lanterne permet de montrer facilement que

$$u_{h+2} - 2u_{h+1} + u_h = u_2 - 2u_1.$$

L'ensemble des suites entières vérifiant cette relation est engendré par les suites $u_h = h$ et $v_h = \frac{h(h-1)}{2}$. La construction effective des homomorphismes d et \bar{d} montre que ces deux suites génératrices sont bien réalisées comme des homomorphismes de $\mathcal{M}(2)$ dans \mathbb{Z} . De cette construction, en utilisant le fait que d' s'annule sur $\mathcal{M}(3)$, on déduit aussi que les restrictions de $3d$ et de $4\bar{d}$ sur $\mathcal{M}(3)$ sont égales (et sont non triviales grâce à [Mo1, Proposition 6.4], où S. Morita montre que $\frac{\bar{d}}{3}$ restreint à $\mathcal{M}(3)$ est un homomorphisme surjectif à valeurs dans \mathbb{Z}).

Enfin, on rappelle que tout élément $\varphi \in \mathcal{M}(2)$ peut-être représenté comme une composition de twists de Dehn le long de courbes bordantes de genre 1 et 2 ([J1, Théorème 1]). Les valeurs de d et de \bar{d} sur les twists de Dehn montrent que $n_2(\varphi) := \bar{d}(\varphi)$ représente le nombre algébrique de twists de Dehn droits de genre 2 intervenant dans la décomposition de φ , et $n_1(\varphi) := -d(\varphi) - 2\bar{d}(\varphi)$ représente le nombre algébrique de twists droits de genre 1 intervenant dans la décomposition. Ces nombres algébriques ne varient donc pas suivant la présentation de φ . De plus, en utilisant que $d' = 3n_1 + 10n_2$ s'annule sur $\mathcal{M}(3)$, on obtient une relation entre n_1 et n_2 pour les éléments de $\mathcal{M}(3)$, qui seront de la forme $n_1 = 10r$ et $n_2 = -3r$, où $r \in \mathbb{Z}$.

4.5 Cas général

Dans ce dernier paragraphe, on montre que si ν est un invariant de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{Z} tel que son système de poids est nul sur les diagrammes comportant un θ , si c est un arrangement de crochets de degré n , et si $h = c(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$ est un élément de $(\mathcal{K}_{g,1})_n$, alors $\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)^*}(h)$ ne dépend que de c , des homomorphismes de Johnson $\tau_2(\psi_i)$ et de la configuration des lagrangiens.

Notation 4.5.1. • Si (p_A, p_B) représentent les projections associées à une configuration de lagrangien, on note

$$\begin{aligned} \ell : H \times H &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto \langle p_A(a), p_B(b) \rangle_\Sigma. \end{aligned}$$

On désigne par

$$[[\cdot, \dots, \cdot]]_\ell : (\mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}(H))^n \rightarrow \mathcal{A}_n \otimes \mathbb{Q}$$

l'application n -linéaire qui à un n -uplet (T_1, \dots, T_n) d'éléments de $\mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}(H)$ associe la somme des graphes obtenus en appariant de toutes les manières possibles les sommets externes des T_i et en multipliant le graphe obtenu à chaque connection d'un sommet de T_i décoré par a_i et d'un sommet de T_j décoré par a_j par

$$\begin{aligned} \ell(a_i, a_j) &\quad \text{si } i < j \\ -\frac{1}{2} (\ell(a_i, a_j) + \ell(a_j, a_i)) &\quad \text{si } i = j. \end{aligned}$$

• On note

$$\Omega : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}^r(H) \otimes H^* \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}(H)$$

la composition des applications $\varrho_{H,3} \circ (\rho_3^*)^{-1}$, où

$$\varrho_{H,3} : \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}^r(H) \otimes H \longrightarrow \mathcal{A}_{\mathbb{Z},3}(H)$$

est définie dans le paragraphe 4.3.3, et où ρ_3^* est définie dans la notation 4.4.2.

• Soit c un arrangement de crochets de degré n . On désigne par \tilde{c} l'arrangement de crochets de degré $2n$ défini par

$$\tilde{c}(a_1, a_2, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}) = c([a_1, a_2], \dots, [a_{2n-1}, a_{2n}]).$$

Les deux ensembles $\mathcal{S}_n^c \times (\mathcal{S}_2)^n$ et $\mathcal{S}_{2n}^{\tilde{c}}$ sont en bijection par l'application

qui à $(\sigma, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ associe la permutation $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{2n}^{\tilde{c}}$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(2i-1) &= 2\sigma(i) - 1 & \text{si } \sigma_i = \text{Id} \\ &= 2\sigma(i) & \text{sinon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(2i) &= 2\sigma(i) & \text{si } \sigma_i = \text{Id} \\ &= 2\sigma(i) - 1 & \text{sinon.} \end{aligned}$$

On a alors $\gamma_{\tilde{c}}(\tilde{\sigma}) = \gamma_c(\sigma)\varepsilon(\sigma_1 \dots \sigma_n)$, où ε désigne la signature dans \mathcal{S}_2 .

On montre alors le résultat suivant.

Théorème 4.5.2. *Soit*

$$H = \mathcal{L}_A \oplus \mathcal{L}_B$$

une configuration de lagrangiens sur Σ . Soit ν un invariant de degré $2n$ à valeurs dans \mathbb{Z} , et soit P_ν son système de poids. On suppose que pour tout diagramme de Jacobi $\Gamma \in \mathcal{A}_n$ comportant une composante connexe en θ , $P_\nu(\Gamma) = 0$. Soit c un arrangement de crochets de degré n . Alors, pour tout $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n) \in (\mathcal{K}_{g,1})^n$, avec les conventions de la notation 4.5.1,

$$\nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) = \frac{1}{4^n} P_\nu \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^c} \gamma_c(\sigma) \left[[\Omega(\tau_2(\psi_{\sigma(1)})) , \dots , \Omega(\tau_2(\psi_{\sigma(n)}))] \right]_\ell \right).$$

Lemme 4.5.3. *Sous les hypothèses du théorème 4.5.2, avec les conventions des notations 4.2.4, 4.4.2 et 4.5.1, les applications $2n$ -linéaires de $(\mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H))^{2n}$ à valeurs dans \mathbb{Z}*

$$F_1 : (T_1, \dots, T_{2n}) \mapsto P_\nu \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^c} \gamma_c(\sigma) \left[[\Omega(\{T_{2\sigma(1)-1}, T_{2\sigma(1)}\}) , \dots , \Omega(\{T_{2\sigma(n)-1}, T_{2\sigma(n)}\})] \right]_\ell \right)$$

et

$$F_2 : (T_1, \dots, T_{2n}) \mapsto P_\nu \left(\sum_{\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{2n}^{\tilde{c}}} \gamma_{\tilde{c}}(\tilde{\sigma}) \langle\langle T_{\tilde{\sigma}(1)} , \dots , T_{\tilde{\sigma}(2n)} \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} \right)$$

vérifient l'égalité

$$F_1 = 4^n F_2.$$

PREUVE : • Les deux applications F_1 et F_2 sont des sommes de fonctions des

décorations des arbres T_i dépendant d'un appariement des arêtes. L'application F_1 ne fait intervenir que des appariements mettant en commun au moins une arête de T_{2i-1} à une arête de T_{2i} pour tout i , alors que F_2 fait intervenir tous les appariements possibles. On peut cependant faire remarquer que la contribution d'un appariement mettant en relation les trois arêtes d'un arbre T_i aux trois arêtes d'un autre arbre T_j sera nulle pour les deux applications du fait que P_ν s'annule sur les diagrammes de Jacobi comportant une composante connexe en forme de θ .

Soit \mathcal{P} un appariement des arêtes des arbres T_i . On note alors

$$F_i^{\mathcal{P}}(T_1, \dots, T_{2n})$$

le terme de F_i correspondant à l'appariement \mathcal{P} . Pour tout $\tilde{\sigma} \in \mathcal{S}_{2n}^{\tilde{c}}$, on note

$$F_{2,\tilde{\sigma}}^{\mathcal{P}}(T_1, \dots, T_{2n})$$

le terme de $F_2^{\mathcal{P}}(T_1, \dots, T_{2n})$ correspondant à la permutation $\tilde{\sigma}$.

• On montre maintenant que les appariements sans arête en commun entre T_{2i-1} et T_{2i} pour un i donné ont une contribution nulle pour F_2 . On fixe $\tilde{\sigma}$ une permutation de $\mathcal{S}_{2n}^{\tilde{c}}$. Alors $\tilde{\sigma}$ provient d'une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n^c$ et d'un n -uplet $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathcal{S}_2)^n$ comme explicité dans la notation 4.5.1. On note

$$\tilde{\sigma}'_i = (\sigma, (\sigma_1, \dots, \tau_{12}\sigma_i, \dots, \sigma_n)) \in \mathcal{S}_{2n}^{\tilde{c}}$$

obtenue à partir de $\tilde{\sigma}$ en multipliant σ_i par la permutation τ_{12} . Si \mathcal{P} n'apparie aucune des arêtes de T_{2i-1} à celles de T_{2i} , alors

$$F_{2,\tilde{\sigma}}^{\mathcal{P}}(T_1, \dots, T_{2n}) + F_{2,\tilde{\sigma}'_i}^{\mathcal{P}}(T_1, \dots, T_{2n}) = 0.$$

Cela entraîne que $F_2^{\mathcal{P}}$ est nul. On en déduit donc que seuls les appariements mettant en commun 1 ou 2 arêtes entre T_{2i-1} et T_{2i} ont une contribution non nulle dans le calcul de F_1 et de F_2 .

• Soient x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 et y_3 des éléments de H . On pose

$$T_{2i-1} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H)$$

et

$$T_{2i} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{A}_{\mathbb{Z},2}(H).$$

Alors, comme dans la preuve du lemme 4.4.4,

$$\{T_{2i-1}, T_{2i}\} = - \sum_{(k,l)} \langle x_k, y_l \rangle_{\Sigma} (\rho_{\mathbb{Z},3} (\varpi_{H,3} (((x_{k+1}, x_{k+2}), (y_{l+1}, y_{l+2}))))),$$

donc

$$\Omega(\{T_{2i-1}, T_{2i}\}) = -4 \sum_{(k,l)} \langle x_k, y_l \rangle_{\Sigma} (((x_{k+1}, x_{k+2}), (y_{l+1}, y_{l+2}))).$$

• Soit \mathcal{P} un appariement des arêtes mettant en commun exactement une arête entre T_{2i-1} et T_{2i} . Notons x_k et y_l les décorations des arêtes concernées. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n^c$. On note $F_{1,\sigma}^{\mathcal{P}}$ le terme de $F_1^{\mathcal{P}}$ correspondant à σ . Alors la contribution de T_{2i-1} et de T_{2i} à $F_{1,\sigma}^{\mathcal{P}}$ va consister à connecter les arêtes de l'arbre

$$\Omega(\{T_{2i-1}, T_{2i}\})_{\mathcal{P}} := -4\langle x_k, y_l \rangle_{\Sigma} (((x_{k+1}, x_{k+2}), (y_{l+1}, y_{l+2})))$$

aux autres arbres T_j suivant l'appariement \mathcal{P} en multipliant le graphe obtenu à chaque connection des arêtes a_p et a_q par $\ell(a_p, a_q)$ si $p \leq q$, où la hauteur de $\Omega(\{T_{2i-1}, T_{2i}\})_{\mathcal{P}}$ par rapport aux autres arbres est fixée par σ .

Soit $(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathcal{S}_2)^n$, et soit $\tilde{\sigma} = (\sigma, (\sigma_1, \dots, \sigma_n)) \in \mathcal{S}_{2n}^c$ la permutation associée. On remarque que la contribution de T_{2i-1} et de T_{2i} à $F_{2,\tilde{\sigma}}^{\mathcal{P}} + F_{2,\tilde{\sigma}'_i}^{\mathcal{P}}$ va consister à connecter les arêtes de l'arbre

$$(\ell(x_k, y_l) - \ell(y_l, x_k)) ((x_{k+1}, x_{k+2}), (y_{l+1}, y_{l+2})) = -\frac{1}{4}\Omega(\{T_{2i-1}, T_{2i}\})_{\mathcal{P}}$$

aux autres arbres T_j en multipliant le graphe obtenu après connection de a_k et a_l par $\ell(a_k, a_l)$ si $k \leq l$, où la hauteur de $\Omega(\{T_{2i-1}, T_{2i}\})_{\mathcal{P}}$ par rapport aux autres arbres est fixée par σ .

• Si x et y sont deux éléments de H , on note $((x) * (y))$ le graphe obtenu en connectant les deux arêtes $*$ de l'arbre $((x, *), (*, y))$. Soit \mathcal{P} un appariement connectant exactement deux arêtes x_k et x_{k+1} de T_{2i-1} à deux arêtes y_l et $y_{l+\varepsilon}$ de T_{2i} , où $\varepsilon = \pm 1$. Alors la contribution de T_{2i-1} et de T_{2i} à $F_{1,\sigma}^{\mathcal{P}}$ va consister à connecter les arêtes du graphe

$$\begin{aligned} A_1(T_{2i-1}, T_{2i}) := & -2\varepsilon \left(\langle x_k, y_l \rangle_{\Sigma} \cdot (\ell(x_{k+1}, y_{l+\varepsilon}) + \ell(y_{l+\varepsilon}, x_{k+1})) \right. \\ & \left. + \langle x_{k+1}, y_{l+\varepsilon} \rangle_{\Sigma} \cdot (\ell(x_k, y_l) + \ell(y_l, x_k)) \right) \cdot ((x_{k+2}) * (y_{l-\varepsilon})) \end{aligned}$$

aux autres arbres T_j suivant l'appariement \mathcal{P} en multipliant le graphe obtenu à chaque connection de a_p et de a_q par $\ell(a_p, a_q)$ si $p \leq q$, où la hauteur de $A_1(T_{2i-1}, T_{2i})$ par rapport aux autres arbres est fixée par σ .

La contribution de T_{2i-1} et de T_{2i} à $F_{2,\tilde{\sigma}}^{\mathcal{P}} + F_{2,\tilde{\sigma}'_i}^{\mathcal{P}}$ va consister à connecter de la même façon les arêtes du graphe

$$\begin{aligned} A_2(T_{2i-1}, T_{2i}) := & -\varepsilon (\ell(x_k, y_l) \cdot \ell(x_{k+1}, y_{l+\varepsilon}) - \ell(y_l, x_k) \ell(y_{l+\varepsilon}, x_{k+1})) \\ & \cdot ((x_{k+2}) * (y_{l-\varepsilon})) \end{aligned}$$

aux autres arbres T_j suivant l'appariement \mathcal{P} , où la hauteur de $A_2(T_{2i-1}, T_{2i})$ par rapport aux autres arbres est fixée par σ . Or

$$\begin{aligned} A_1(T_{2i-1}, T_{2i}) = & -2\varepsilon \left((\ell(x_k, y_l) - \ell(y_l, x_k)) \cdot (\ell(x_{k+1}, y_{l+\varepsilon}) + \ell(y_{l+\varepsilon}, x_{k+1})) \right. \\ & \left. + (\ell(x_{k+1}, y_{l+\varepsilon}) - \ell(y_{l+\varepsilon}, x_{k+1})) \cdot (\ell(x_k, y_l) + \ell(y_l, x_k)) \right) \\ & \cdot ((x_{k+2}) * (y_{l-\varepsilon})) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} A_1(T_{2i-1}, T_{2i}) &= -2\varepsilon (2\ell(x_k, y_l)\ell(x_{k+1}, y_{l+\varepsilon}) - 2\ell(y_l, x_k)\ell(y_{l+\varepsilon}, x_{k+1})) \\ &\quad \cdot ((x_{k+2}) * (y_{l-\varepsilon})) \\ &= 4A_2(T_{2i-1}, T_{2i}). \end{aligned}$$

On déduit donc des deux derniers points que pour tout appariement \mathcal{P} ,

$$F_{1,\sigma}^{\mathcal{P}} = 4^n \sum_{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in (\mathcal{S}_2)^n} F_{2,(\sigma; (\sigma_1, \dots, \sigma_n))}^{\mathcal{P}}.$$

Le résultat en découle. \square

Preuve du théorème 4.5.2 : Soient $(\varphi, \dots, \varphi_{2n})$ $2n$ éléments de $\mathcal{T}_{g,1}$. Pour tout $i = 1, \dots, n$, on pose $\psi_i := [\varphi_{2i-1}, \varphi_{2i}]$. Alors, grâce au théorème 4.2.7,

$$\begin{aligned} \nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) &= \\ P_\nu \left(\sum_{\tilde{\sigma} \in \tilde{\mathcal{S}}_{2n}^c} \gamma_{\tilde{c}}(\tilde{\sigma}) \langle\langle \tau_1^Y(\varphi_{\tilde{\sigma}(1)}), \dots, \tau_1(\varphi_{\tilde{\sigma}(2n)}) \rangle\rangle_{(p_A, p_B)} \right). \end{aligned}$$

Le lemme 4.5.3 entraîne alors que

$$\begin{aligned} \nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)) &= \\ \frac{1}{4^n} P_\nu \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n^c} \gamma_c(\sigma) \left[[\Omega(\tau_2(\psi_{\sigma(1)})), \dots, \Omega(\tau_2(\psi_{\sigma(n)}))] \right]_\ell \right). \end{aligned}$$

Le théorème découle alors du théorème 4.1.8 qui entraîne que l'application $\psi_i \mapsto \nu_{(\mathcal{L}_A, \mathcal{L}_B)}^*(c(\psi_1, \dots, \psi_i, \dots, \psi_n))$ est un homomorphisme sur $\mathcal{K}_{g,1}$. \square

Chapitre 5

Mouvements de $(n + 3)$ -congruence sur les graphes en Y

Dans [GGP], S. Garoufalidis, M. Goussarov et M. Polyak se sont appuyés sur des relations entre crochets d'entrelacs en Y dans $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n+1}$ pour démontrer le théorème 2.2.1 qui explicite un système de générateurs de \mathcal{G}_n induits par des diagrammes de Jacobi. Ces relations permettent de calculer explicitement les coordonnées du crochet d'un entrelacs en Y à n composantes sur ce système de générateurs en fonction des enlacements et des auto-enlacements des feuilles. Dans ce chapitre, on raffine les relations données dans [GGP] pour obtenir leur équivalent à $(n + 3)$ -congruence près, c'est-à-dire dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+4}$.

Dans le paragraphe 5.1, on redonne les équivalences de chirurgie de [GGP] à la base de la relation de linéarité par rapport aux feuilles et à la base de la relation d'invariance par changement d'arête dans \mathcal{G}_n .

On utilise ces équivalences de chirurgie dans le paragraphe 5.2 pour prouver le théorème 6 -présenté dans l'introduction- qui donne un équivalent de la relation de linéarité à $(n + 3)$ -congruence près. Au passage, on prouve que la classe de $(n + 1)$ -congruence du crochet d'un entrelacs en Y à n composantes est invariante par changement de croisement d'arêtes, ce qui justifie les notations utilisées dans l'introduction.

Dans le paragraphe 5.3, on prouve le théorème 7, qui nous permet d'exprimer à $(n + 3)$ -congruence près le crochet d'un entrelacs en Y à n composantes comportant une feuille triviale ± 1 -parallélisée, dans l'optique de calculer la variation d'un invariant de type fini par chirurgie sur un nœud. Ce résultat sera primordial dans le chapitre 6.

À l'issue de ce chapitre, on aura prouvé une collection de relations de $(n + 2)$ -congruence assez importante pour permettre de calculer le crochet d'un en-

trelacs en Y à n composantes dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+3}$.

5.1 Préliminaires

5.1.1 Equivalences de chirurgie de Goussarov

On donne ici des équivalences de chirurgie borroméenne introduites par M. Goussarov dans [GGP]. Il est à noter que le lemme 5.1.1 est une version modifiée du mouvement Y_3 de Goussarov, qui s'avère être incorrect tel qu'il est représenté dans [GGP]. Ces équivalences sont à la base de la preuve du théorème 2.2.1. Elles seront primordiales dans le reste du chapitre pour obtenir des relations dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+3}$.

Lemme 5.1.1 ([GGP, Théorème 3.1]). *Soient G , G_1 et G_2 trois graphes en Y plongés dans un corps en anses H de genre 4 comme représenté sur la figure 5.1.*

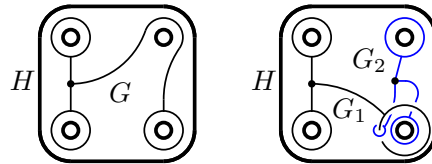
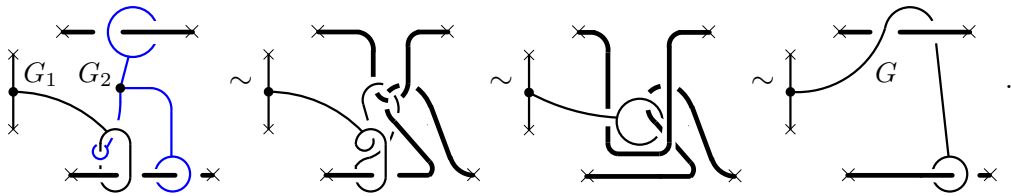


Figure 5.1

Alors les deux couples $(H_G, \partial H)$ et $(H_{G_1 \cup G_2}, \partial H)$ sont difféomorphes de telle sorte que la restriction du difféomorphisme au bord est induite par l'identification canonique avec le bord de H inchangé par la chirurgie sur les graphes en Y .

PREUVE : En représentant les deux trous de H de droite par des traits noirs épais, par utilisation du lemme 2.1.1, on obtient



□

Lemme 5.1.2 ([GGP, Théorème 3.1]). *Soient G , G_1 et G_2 trois graphes en Y plongés dans un corps en anses H de genre 4 comme représenté sur la figure 5.2.*

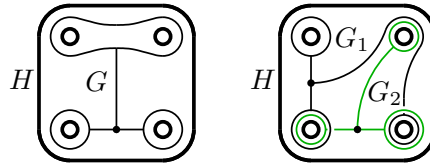
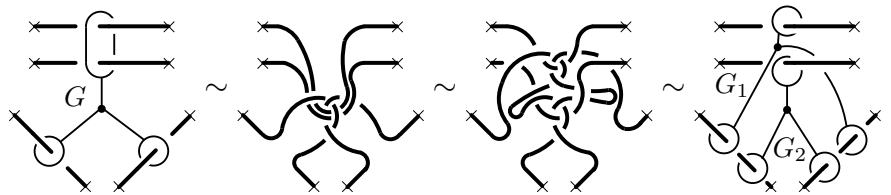


Figure 5.2

Alors les deux couples $(H_G, \partial H)$ et $(H_{G_1 \cup G_2}, \partial H)$ sont difféomorphes de telle sorte que la restriction du difféomorphisme au bord est induite par l'identification canonique avec le bord de H inchangé par la chirurgie sur les graphes en Y .

PREUVE : Si on représente les trous de H par un trait noir épais, par utilisation du lemme 2.1.1 on obtient



□

On aura besoin dans la suite des résultats suivants. Le premier est un corollaire immédiat du lemme 2.1.1.

Lemme 5.1.3 ([GGP, Lemme 2.2]). Soit $G \subset M$ un graphe en Y dans une sphère d'homologie muni d'une feuille triviale 0-parallélisée. Alors M_G est difféomorphe à M .

□

Lemme 5.1.4 ([GGP, Lemme 2.3]). Soit $G \subset M$ un graphe en Y muni de deux feuilles l and l' qui forment un entrelacs de Hopf trivial comme présenté sur la figure 5.3. Alors M_G est difféomorphe à M .

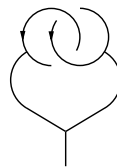


FIG. 5.3 – Deux feuilles formant un entrelacs de Hopf trivial

PREUVE : Il suffit de réaliser la chirurgie le long de G comme un mouvement d'arcs le long du bord de la surface correspondant à ces deux feuilles comme

dans le lemme 2.1.1. Les anses de cette surface bordent des disques plongés dans $M \setminus G$. \square

5.1.2 Relations dans \mathcal{F}

Les résultats du paragraphe précédent entraînent des relations dans \mathcal{F} entre crochets d'entrelacs en Y . Ainsi, les deux résultats suivants sont des corollaires des lemmes 5.1.3 et 5.1.4.

Lemme 5.1.5 ([GGP, Lemme 2.2]). *Soit $G \subset M$ un entrelacs en Y dans une sphère d'homologie muni d'une feuille triviale 0-parallélisée. Alors*

$$[M; G] = 0.$$

\square

Lemme 5.1.6 ([GGP, Lemme 2.3]). *Soit $G \subset M$ un entrelacs en Y à n composantes. Supposons que l'une des composantes de Y de g est munie de deux feuilles l and l' qui forment un entrelacs de Hopf trivial comme présenté sur la figure 5.3. Alors $[M; G] = 0$.*

\square

Dans la suite du paragraphe, on donne des relations sur \mathcal{F} correspondant aux équivalences de chirurgie des lemmes 5.1.1 et 5.1.2.

Notation 5.1.7. Soit H un corps en anses de genre 4 plongé dans une \mathbb{Z} -sphère M . On note P, P_1, P'_1, P_2 et P_3 les graphes en Y plongés dans H représentés sur la figure 5.4.

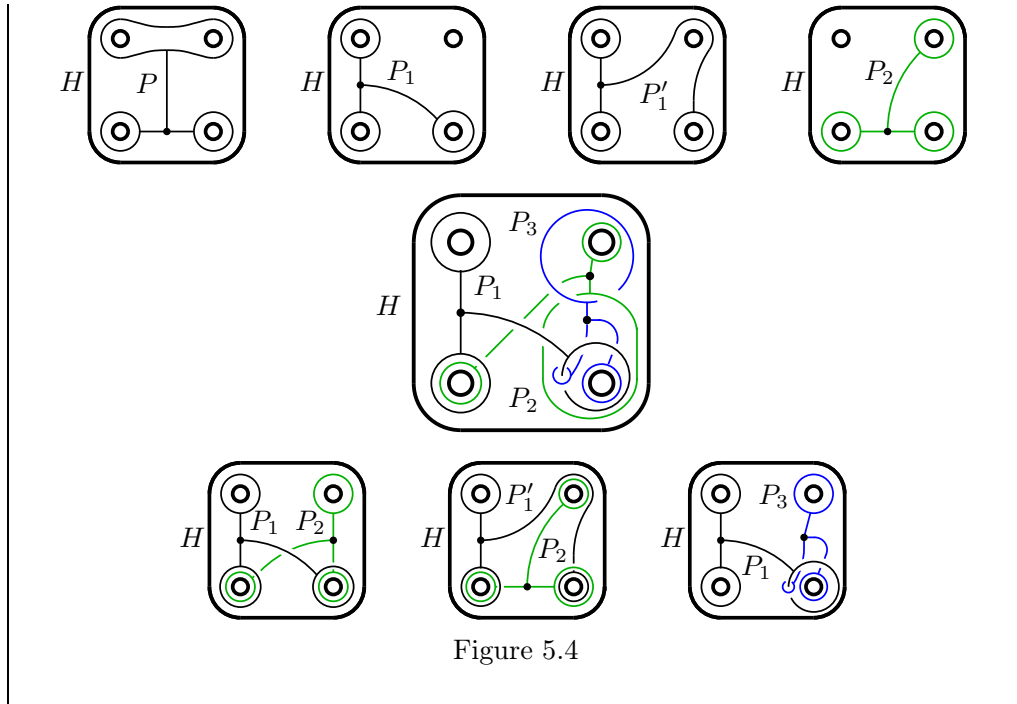


Figure 5.4

Lemme 5.1.8. *Sous les hypothèses de la notation 5.1.7, les deux couples $(H_P, \partial H)$ et $(H_{P_1 \cup P_2 \cup P_3}, \partial H)$ sont difféomorphes de telle sorte que la restriction du difféomorphisme au bord est induite par l'identification canonique avec le bord de H inchangé par la chirurgie sur les graphes en Y .*

PREUVE : D'après le lemme 5.1.2, la chirurgie dans H le long de P est équivalente à une chirurgie sur l'entrelacs en Y à deux composantes $P'_1 \cup P_2$. De plus, grâce au lemme 5.1.1, la chirurgie dans $H \setminus P_2$ le long de P'_1 est équivalente à la chirurgie le long de $P_1 \cup P_3$, ce qui nous permet de conclure. \square

Dans la suite, on aura besoin du lemme algébrique suivant.

Lemme 5.1.9. *Soit $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$ un entrelacs en Y à n composantes dans une sphère d'homologie entière M . Soit $I_0 \sqcup J_0 = \{1, \dots, n\}$ une partition en deux sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$. Alors*

$$[M_{G(I_0)}; G(J_0)] = \sum_{I \subset I_0} (-1)^{\#I} [M; G(I \cup J_0)].$$

PREUVE :

$$\begin{aligned}
\sum_{I \subset I_0} (-1)^{\#I} [M; G(I \cup J_0)] &= \sum_{I \subset I_0} (-1)^{\#I} \left(\sum_{K \subset I} \sum_{L \subset J_0} (-1)^{\#K + \#L} M_{G(K \cup L)} \right) \\
&= \sum_{L \subset J_0} (-1)^{\#L} \left(\sum_{I \subset I_0} \sum_{K \subset I} (-1)^{\#I + \#K} M_{G(K \cup L)} \right) \\
&= \sum_{L \subset J_0} (-1)^{\#L} \left(\sum_{K \subset I_0} \left(\sum_{r=0}^{\#I_0 - \#K} (-1)^r C_{\#I_0 - \#K}^r \right) M_{G(K \cup L)} \right) \\
&= \sum_{L \subset J_0} (-1)^{\#L} \left(\sum_{K \subset I_0} (1 - 1)^{\#I_0 - \#K} M_{G(K \cup L)} \right) \\
&= \sum_{L \subset J_0} (-1)^{\#L} M_{G(I_0 \cup L)} = [M_{G(I_0)}; G(J_0)].
\end{aligned}$$

□

En particulier, si $J_0 = \emptyset$, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.10. *Soit $G = G_1 \cup \dots \cup G_n$ un entrelacs en Y à n composantes dans une sphère d'homologie entière M . Alors*

$$M_G - M = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{\#I} [M; G(I)].$$

□

Remarque 5.1.11. Le lemme 5.1.9 et le corollaire 5.1.10 sont des résultats purement formels. Ils restent valables plus généralement lorsque G est une donnée de chirurgie à n composantes (entrelacs, donnée de chirurgies lagrangiennes, union de graphes en Y et de nœuds, ...).

Comme conséquence des lemmes 5.1.8 et 5.1.9, on obtient le résultat suivant qui nous permet de savoir ce qui se passe au niveau des crochets dans \mathcal{F} lorsque l'on coupe une feuille d'un entrelacs en Y .

Lemme 5.1.12. *Sous les hypothèses de la notation 5.1.7, si G est un entrelacs en Y dans $M \setminus H$, alors*

$$\begin{aligned}
[M; G \cup P] &= [M; G \cup P_1] + [M; G \cup P_2] - [M; G \cup P_1 \cup P_2] \\
&\quad - [M; G \cup P_1 \cup P_3] + [M; G \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3].
\end{aligned}$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.1.8, la chirurgie borroméenne le long de P dans $M \setminus G$ est équivalente à la chirurgie le long de $P_1 \cup P_2 \cup P_3$, donc

$$[M; G \cup P] = -[M_{P_1 \cup P_2 \cup P_3}; G] + [M; G].$$

Alors, d'après le lemme 5.1.9,

$$\begin{aligned} [M; G \cup P] &= [M; G \cup P_1] + [M; G \cup P_2] + [M; G \cup P_3] \\ &\quad - [M; G \cup P_1 \cup P_2] - [M; G \cup P_1 \cup P_3] \\ &\quad - [M; G \cup P_2 \cup P_3] + [M; G \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3]. \end{aligned}$$

Or, en l'absence de P_1 , P_3 est muni d'une feuille triviale 0-parallélisée dans H , donc d'après le lemme 5.1.5, $[M; G \cup P_3] = 0$ et $[M; G \cup P_2 \cup P_3] = 0$. On en déduit le résultat. \square

De la même façon, à partir du lemme 5.1.1, on obtient le résultat analogue lors d'un changement d'arête d'un entrelacs en Y .

Lemme 5.1.13. *Sous les hypothèses de la notation 5.1.7, si G est un entrelacs en Y dans $M \setminus H$, alors*

$$[M; G \cup P'_1] = [M; G \cup P_1] - [M; G \cup P_1 \cup P_3].$$

\square

5.1.3 Etude de \mathcal{G}_n

Les lemmes 5.1.12 et 5.1.13 ont pour corollaire immédiat les résultats suivants sur les quotients $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+1}$.

Lemme 5.1.14 ([GGP, Corollaire 4.3]). *Sous les hypothèses de la notation 5.1.7, si $G_{(n-1)}$ est un entrelacs en Y à $n - 1$ composantes dans $M \setminus H$ ($n \geq 1$), alors*

$$[M; G_{(n-1)} \cup P] \stackrel{n}{=} [M; G_{(n-1)} \cup P_1] + [M; G_{(n-1)} \cup P_2].$$

\square

Lemme 5.1.15 ([GGP, Corollaire 4.2]). *Sous les hypothèses de la notation 5.1.7, si $G_{(n-1)}$ est un entrelacs en Y à $n - 1$ composantes dans $M \setminus H$ ($n \geq 1$), alors*

$$[M; G_{(n-1)} \cup P'_1] \stackrel{n}{=} [M; G_{(n-1)} \cup P_1].$$

\square

Avec les notations du paragraphe 2.1.4, si Λ est un graphe en Y , alors Λ est *orienté* si la surface $\Sigma(\Lambda)$ est muni d'une orientation. Une telle orientation fournit une orientation pour chaque feuille et un ordre cyclique pour l'ensemble des feuilles de Λ . Les orientations induites sont présentées sur la figure 5.5 lorsque l'orientation de $\Sigma(\Lambda)$ est donnée par l'orientation standard de \mathbb{R}^2 . En renversant l'orientation de $\Sigma(\Lambda)$, on renverse ces quatre orientations.

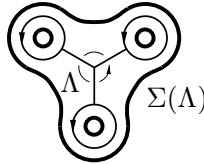


FIG. 5.5 – Graphe en Y orienté

Le lemme 5.1.14 affirme alors que le crochet d'un entrelacs en Y orienté à n composantes dépend linéairement des enlacements des feuilles dans $\mathcal{F}_n/\overline{\mathcal{F}}_{n+1}$. Le lemme 5.1.15 affirme que ce crochet ne dépend pas de la disposition des arêtes. Plus généralement, on a le résultat suivant.

Proposition 5.1.16 ([AL, Proposition 4.13]). *Soit G un entrelacs en Y orienté à n composantes dans une \mathbb{Z} -sphère M .*

- (i) *Le crochet $\overline{[M; G]}$ (dans $\mathcal{G}_n \otimes \mathbb{Q}$) est une fonction indépendante de M ne dépendant que des nombres d'enlacement $\ell k(l, l')$, où (l, l') parcourt l'ensemble des couples de feuilles orientées prises dans deux composantes en Y distinctes de G .*
- (ii) *Soit G fixé, sauf pour une feuille l qui peut varier dans le complémentaire du reste de G . Soit $[l]$ la classe de l dans $H_1(M \setminus \cup_{l' \neq l} l')$, où l' parcourt l'ensemble des feuilles distinctes de l . Alors le crochet $\overline{[(M; G)]} \in \mathcal{G}_n \otimes \mathbb{Q}$ de G est une application linéaire de $[l] \in H_1(M \setminus \cup_{l' \neq l} l')$.*
- (iii) *Si G' s'obtient à partir de G en changeant l'orientation d'une composante en Y , alors*

$$\overline{[M; G']} \stackrel{n}{=} -\overline{[M; G]}.$$

□

La proposition 5.1.16 nous permet de justifier la notation suivante.

Notation 5.1.17. Soit D_r un disque à r trous numérotés de 1 à r représenté sur la figure 5.6. Soit $H_r = D_r \times [-1, 1]$ un épaississement de D_r . Dans

la suite, on étudie le crochet de graphes en Y plongés dans le corps en anses H_r , lui-même étant plongé dans une \mathbb{Z} -sphère M .

Considérons un plongement de H_r dans une sphère d'homologie entière M . On fixe un entrelacs $G_{(n-1)}$ en Y à $(n-1)$ composantes dans $M \setminus H_r$. Alors, pour tout entrelacs G dans H_r , on désigne $[M; G \cup G_{(n-1)}]$ par le dessin de G dans H_r entre crochets. Par exemple, avec cette notation,

$$\left[\begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{4} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \right] := [M; G \cup G_{(n-1)}]$$

Par commodité de notation, si deux feuilles de G forment un entrelacs de Hopf positif pour l'orientation trigonométrique des feuilles, on simplifie le diagramme de G en remplaçant les deux feuilles concernées par une arête, comme représenté ci-dessous.



Si K est un graphe trivalent orienté à p sommets dont les arêtes adjacentes à un seul sommet sont décorées par des nombres entre 1 et r , on lui associe un entrelacs $G(K)$ en Y à p composantes plongé dans D_r de la façon suivante. On plonge K dans D_r de telle sorte que les orientations des sommets de K soient induites par l'orientation de D_r , en attachant à chaque arête e décorée la courbe dans D_r numérotée par la décoration de e représentée sur la figure 5.6. Si deux décorations sont identiques, on positionne les courbes à deux hauteurs différentes quelconques. On transforme ensuite chaque arête reliant deux sommets par un petit entrelacs de Hopf positif. L'entrelacs $G(K)$ ainsi obtenu dépend des plongements choisis, mais dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_{n+p}$, grâce aux relations trouvées dans [GGP], le crochet $[M; G_{(n-1)} \cup G(K)]$ ne dépend pas des choix qui ont été faits et est bien défini. Par exemple,

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 2 \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{4} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \right]$$

Dans la suite (lemmes 5.2.2 et 5.2.4), on va montrer que dans le cas d'entrelacs en Y à n composantes, changer le croisement de deux arêtes ou la parallélisation entière d'une arête ne change pas la classe de $(n+1)$ -congruence du crochet de l'entrelacs. On pourra alors utiliser la notation suivante. Soit K un graphe trivalent orienté à $(p-1)$ sommets dont les arêtes adjacentes à un seul sommet sont décorées par des numéros i, i^+, i^- munis d'un exposant précisant des hauteurs relatives entre les courbes

associées aux décorations (la courbe i^+ se trouvant sur la figure en avant de la courbe i). On associe à K un entrelacs $G(K)$ en Y à $(p - 1)$ composantes dans D_r en plongeant K dans le disque $D \subset D_r$ représenté sur la figure 5.6 de telle sorte que les orientations des sommets de K soient induites par l'orientation de D et de telle sorte que seules les extrémités des arêtes décorées touchent le bord de D , aux points de tangence p_i de D avec les courbes i . On attache ensuite à chaque extrémité d'arête une copie de la courbe numérotée par sa décoration, à la hauteur précisée par l'exposant de la décoration. L'élément $[M; G_{(n-1)} \cup G(K)]$ est encore bien défini dans $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_{n+p}$. Par exemple,

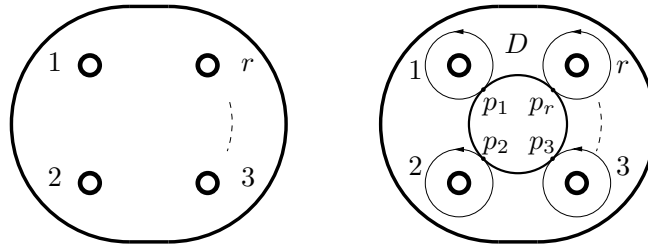
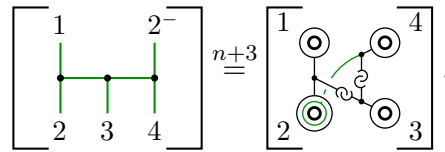


FIG. 5.6 – Le disque D_r

5.2 Couper une feuille

5.2.1 Mouvements de $(n+1)$ -congruence

Lemme 5.2.1. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n\pm 1}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : Avec les conventions de la notation 5.1.7, il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} [M; G_{(n-1)} \cup P] &\stackrel{n\pm 1}{=} [M; G_{(n-1)} \cup P_1] + [M; G_{(n-1)} \cup P_2] \\ &\quad + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Grâce au lemme 5.1.12,

$$\begin{aligned} [M; G_{(n-1)} \cup P] &= [M; G_{(n-1)} \cup P_1] + [M; G_{(n-1)} \cup P_2] \\ &\quad - [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2] - [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_3] \\ &\quad + [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3]. \end{aligned}$$

Or une des feuilles de P_3 enlace une feuille de P_1 avec un enlacement égal à -1 , et elle n'enlace aucune autre feuille de $G_{(n-1)} \cup P_1$. Donc, d'après la proposition 5.1.16,

$$-[M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_3] \stackrel{n\pm 1}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right].$$

De plus, grâce à la proposition 5.1.16,

$$[M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2] \stackrel{n\pm 1}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 3 \end{array} \right].$$

Enfin, par définition, $[M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3] \stackrel{n\pm 1}{=} 0$, ce qui nous permet de conclure. \square

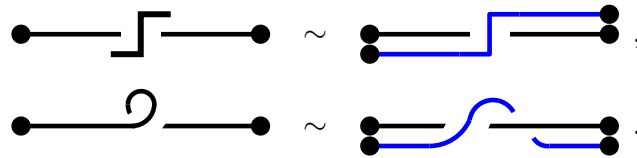
Par le même argument, le résultat suivant est une conséquence du lemme 5.1.13.

Lemme 5.2.2. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 \odot & 4 \\ | & | \\ 2 \odot & 3 \odot \end{array} \right] \stackrel{n \pm 1}{=} \left[\begin{array}{cc} \odot & \odot \\ | & | \\ \odot & \odot \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right].$$

□

Dans la suite, pour désigner des arêtes de graphes dont la parallélisation n'est pas celle induite par le plan de la figure, on utilise les conventions graphiques représentées ci-dessous. Sur ces deux exemples, on opère respectivement un demi-tour et un tour complet du parallèle autour de l'arête, tous deux représentés sur les figures de droite.



Lemme 5.2.3. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 \odot \\ | \\ 2 \odot - \odot 3 \end{array} \right] \stackrel{n \pm 1}{=} \left[\begin{array}{cc} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ / & \backslash \\ 2 & 3 \end{array} \right] \stackrel{n \pm 1}{=} \left[\begin{array}{cc} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right].$$

PREUVE : Considérer le corps en anses H_4 plongé dans H_3 avec l'anse 1 repliée sur l'anse 4 de telle sorte que - sous les hypothèses de la notation 5.1.7 - , le graphe $P \subset H_4$ soit plongé dans H_3 comme représenté sur la figure 5.7. Grâce au lemme 5.2.1, on obtient alors

$$0 = \left[\begin{array}{cc} P \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] \stackrel{n \pm 1}{=} \left[\begin{array}{cc} P_1 \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} P_2 \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ / & \backslash \\ 2 & 3 \end{array} \right]$$

Figure 5.7

ce qui entraîne la première égalité. La deuxième égalité se retrouve de la même manière en repliant l'anse 4 sur l'anse 1. □

Lemme 5.2.4. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 \odot \\ | \\ 2 \odot - \odot 3 \end{array} \right] \stackrel{n \pm 1}{=} \left[\begin{array}{cc} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] \stackrel{n \pm 1}{=} \left[\begin{array}{cc} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right].$$

PREUVE :

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} \odot \\ | \\ \odot - \odot \\ | \\ \odot \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+1}{=} - \left[\begin{array}{c} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ / & \backslash \\ 2 & 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+1}{=} \left[\begin{array}{c} \odot \\ | \\ \odot - \odot \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Il en va de même pour l'autre égalité. □

Lemme 5.2.5. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} - \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : La première égalité provient du lemme 5.2.4. Grâce au lemme 5.2.3,

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} - \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right].$$

Or, les deux derniers termes sont nuls par la proposition 5.1.16, ce qui entraîne le lemme. □

Lemme 5.2.6. Avec les conventions de la notation 5.1.17, si $\varepsilon = \pm$,

$$\left[\begin{array}{cc} 1^\varepsilon & 1 \\ / & \backslash \\ 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1^\varepsilon \\ / & \backslash \\ 4 & 5 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{cc} 1 & 1^\varepsilon \\ / & \backslash \\ 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1^\varepsilon \\ / & \backslash \\ 4 & 5 \end{array} \right] - \varepsilon \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : Il suffit de prouver le lemme dans le cas où $\varepsilon = -$. Grâce au lemme 5.2.2 et à la relation AS (antisymétrie),

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 4 \quad 5 \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 4 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 4 \quad 5 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ / \quad \backslash \\ 4 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

5.2.2 Mouvements de $(n + 2)$ -congruence

Sous-lemme 5.2.7. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : Avec les conventions de la notation 5.1.7, en utilisant le lemme 5.2.1 pour couper la feuille de P_1 qui enlace l'anse 3 de H_4 , et grâce à l'isotopie

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \sim \text{---} \text{---} \circlearrowright \text{---}$$

on obtient

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

Le lemme 5.2.5 permet alors de trouver l'égalité voulue. □

Lemme 5.2.8. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1+4 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : Avec les conventions de la notation 5.1.7, grâce au lemme 5.1.12 et au sous-lemme 5.2.7,

$$\begin{aligned} [M; G_{(n-1)} \cup P] &= [M; G_{(n-1)} \cup P_1] + [M; G_{(n-1)} \cup P_2] \\ &\quad - [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2] - [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_3] \\ &\quad + [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3] \\ &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ &\quad - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3]. \end{aligned}$$

De plus, grâce à la proposition 5.1.16,

$$\begin{aligned}
 [M; G_{(n-1)} \cup P_1 \cup P_2 \cup P_3] &\stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 &\stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

De la même manière le lemme 5.1.13 et le sous-lemme 5.2.7 entraînent le résultat suivant.

Lemme 5.2.9. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \odot \\ \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} \odot & \circ \\ \odot & \odot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

□

Lemme 5.2.10. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \odot \\ \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix} &\stackrel{n+2}{=} - \begin{bmatrix} \odot \\ \odot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1^+ & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1^+ & 1 \\ 2^+ & 3^+ & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

PREUVE : Comme dans la preuve du lemme 5.2.3, on considère un plongement de H_4 dans H_3 de telle sorte que l'anse 1 soit repliée sur l'anse 4. Grâce au lemme 5.2.8, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 0 = \begin{bmatrix} P \\ \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \odot \\ \odot \end{bmatrix} &\stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} P_1 \\ \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \odot \\ \odot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_2 \\ \odot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \odot \\ \odot \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1^+ & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1^+ & 1 \\ 2^+ & 3^+ & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &- \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne, en utilisant le lemme 5.2.3,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} - \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{---} \textcircled{1} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \\ &- \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \\ | \quad | \\ 2^+ \quad 3^+ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ 3 \quad 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

□

Lemme 5.2.11. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ | \quad | \\ 2 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ | \quad | \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce aux lemmes 5.2.10 et 5.2.1,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} \textcircled{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2^+ \text{---} \textcircled{1} \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} \textcircled{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} \textcircled{1} \end{array} \right] \\ &- \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} \textcircled{1} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} \textcircled{1} \end{array} \right] \end{aligned}$$

ce qui entraîne le lemme.

□

5.2.3 Mouvements de $(n + 3)$ -congruence

Sous-lemme 5.2.12. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowright \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} & - \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3^+ \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Avec les conventions de la notation 5.1.7, en utilisant le lemme 5.2.8 pour couper la feuille de P_1 qui enlace l'anse 3 de H_4 , on obtient

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowright \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} & \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3^+ \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Alors, grâce aux lemmes 5.2.5 et 5.2.11,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 4 \\ \circlearrowright \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} & - \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowleft \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3^+ \quad 4 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \hline 2 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne le lemme. □

Sous-lemme 5.2.13. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4^- \\ \text{---} \\ 2^- \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1+4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : En appliquant le sous-lemme 5.2.7 aux deux composantes P_1 et P_3 , on obtient

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right].$$

Or

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right], \\
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

et par deux applications successives du lemme 5.2.1,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \\ \text{---} \\ 2^- \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] \\
 & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \\ \text{---} \\ 2^- \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Finalement, le lemme 5.2.5 entraîne

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2^+ \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4 \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 4 \quad 1 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Le lemme 5.1.12 et les sous-lemmes 5.2.12 et 5.2.13 ont alors pour corollaire immédiat le résultat suivant.

Lemme 5.2.14. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} 3^+ \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2^- \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 1 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 4 \end{array} \right] \\
 & - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1+4 \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1+4 \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ \diagdown \quad | \quad \diagup \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

Sous-lemme 5.2.15. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \quad 4 \\ 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &- \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4 \quad 1 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.1,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^+ \quad 1 \quad 4 \\ 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 1 \quad 4 \\ 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

De plus, grâce au lemme 5.2.6,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 4^+ \quad 1 \quad 4 \\ 2^+ \quad 3^+ \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ 4 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ 4 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 4^- \quad 1 \quad 4 \\ 2^- \quad 3^- \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4 \quad 1 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

et le résultat en découle. □

On déduit alors du lemme 5.2.14 et du sous-lemme 5.2.15 le résultat suivant.

Théorème 5.2.16. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

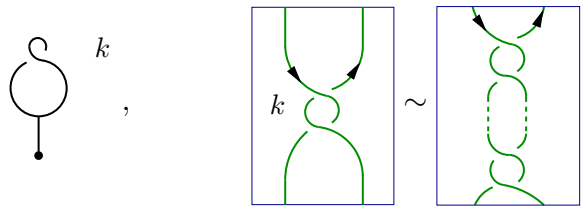
$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \\ 2 & 3 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] \\
 - \left[\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ | & | \\ \circ & \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 2^- \\ | & & | \\ 2 & 3 & 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 3^+ & & 4 \\ | & & | \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ | & | \\ 2 & 4 \end{array} \right] \\
 - \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ | & & | \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 4 & & 1 \\ | & & | \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 3 & & 3 \\ | & & | \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right] \\
 + \left[\begin{array}{ccc} 1 & & 4 \\ | & & | \\ 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 1+4 & 1 & 4 \\ / & | & | \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 1+4 & 1 & 4 \\ / & | & | \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

5.3 Cas d'une feuille triviale ± 1 -parallélisée

5.3.1 Mouvements de $(n + 1)$ -congruence

Dans la suite, si $k \in \mathbb{Z}$, on représente une feuille triviale k -parallélisée par une courbe bordant un disque munie d'une boucle décorée par k , comme ci-dessous à gauche. On désigne également par le dessin d'un enlacement décoré par le nombre k la répétition de ce motif d'enlacement k fois, comme représenté ci-dessous (si k est négatif, on inverse les croisements).



Lemme 5.3.1. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{loop } a \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+1}{=} a \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + a \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{arc} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.3,

$$\left[\begin{array}{c} \text{loop } a \\ \text{arc} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+1}{=} \left[\begin{array}{c} \text{loop } a \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + a \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right].$$

Or, par isotopie,

$$\left[\begin{array}{c} \text{loop } a \\ \text{arc} \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{loop } a \\ \diagdown \quad \diagup \\ 1 \quad 2 \end{array} \right]$$

ce qui permet de conclure. □

Sous-lemme 5.3.2. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ \text{loop } m \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} m \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ \text{arc} \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.1,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors par récurrence sur $|m|$. □

Lemme 5.3.3. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, \forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} m \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right].$$

PREUVE : En utilisant deux fois consécutives le lemme 5.2.1,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} a \quad b \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Or le deuxième terme à droite est nul grâce au lemme 5.3.1, et le résultat découle alors du sous-lemme 5.3.2. □

Dans la suite, on va avoir besoin du lemme suivant, qui est une version de la relation AS généralisée au degré supérieur.

Lemme 5.3.4. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+1}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ &\quad - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce à l'isotopie



et par applications successives du lemme 5.2.3,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \quad 3 \\ | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+1}{\equiv} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \quad 3 \\ | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ | & | \\ 1 & 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+1}{\equiv} \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \quad 3 \\ | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ | & | \\ 1 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ | & | \\ 1 & 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+1}{\equiv} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \quad 3 \\ | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ | & | \\ 1 & 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \\ | & | \\ 1 & 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

Lemme 5.3.5. Avec les conventions de la notation 5.1.17, si $\varepsilon = \pm$,

$$2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2^\varepsilon \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{\equiv} 2 \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.3.4,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2^\varepsilon \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{\equiv} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2^\varepsilon \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{\equiv} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2^\varepsilon \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{\equiv} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2 \quad 2^\varepsilon \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.2.6, on obtient alors

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2^\varepsilon \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{\equiv} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 2^\varepsilon \quad 2 \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ 2 & 2 \end{array} \right]$$

et le résultat s'ensuit.

□

5.3.2 Mouvements de $(n + 2)$ -congruence

Sous-lemme 5.3.6. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$2 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 2 \\ | \quad | \\ \underline{2^+} \quad \underline{1} \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.10, on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} - \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{1^+} \quad \underline{2^+} \quad \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] \\ &\quad - \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \quad \underline{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{2} \quad \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Par la relation AS, les deux derniers termes sont nuls. De plus, grâce à l'isotopie

$$\text{---} \circlearrowleft \text{---} \sim \text{---} \circlearrowright \text{---},$$

les lemmes 5.2.4 et 5.3.3 impliquent que

$$\left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} - \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 2 \\ | \quad | \\ \underline{2^+} \quad \underline{1} \end{array} \right].$$

Le résultat se déduit alors de l'égalité

$$\left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right].$$

□

Lemme 5.3.7. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$2 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft^a \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} a \left[\begin{array}{c} \text{arc} \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 2 \\ | \quad | \\ \underline{2^+} \quad \underline{1} \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.8,

$$\left[\begin{array}{c} \circlearrowleft^{a+1} \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft^a \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft^a \\ | \\ \ominus_1 \text{---} \ominus_2 \\ | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{arc}^a \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{arc}^a \\ | \quad | \\ \underline{1} \quad \underline{2} \quad \underline{3} \quad \underline{4} \end{array} \right]$$

et les deux derniers termes sont nuls grâce au lemme 5.3.1. Donc, par récurrence sur $|a|$,

$$\left[\begin{array}{c} \circlearrowleft^a \\ | \\ \ominus_1 - \ominus_2 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} a \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus - \ominus \end{array} \right]$$

et le sous-lemme 5.3.6 permet de conclure. \square

Sous-lemme 5.3.8. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} 4 \left[\begin{array}{c} a \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \\ m \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \\ m \end{array} \right] \\ &+ 8am \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] - 4am \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \quad \ominus_3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] \right) \\ &+ a^2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_4 \quad \ominus_4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_3 \quad \ominus_4 \quad \ominus_2 \quad \ominus_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_4 \quad \ominus_4 \end{array} \right] \right) \\ &- 2am \left(\left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_3 \quad \ominus_4 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_4 \quad \ominus_4 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] \right). \end{aligned}$$

PREUVE : En utilisant le lemme 5.2.8,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} a \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \\ m \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} a \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \quad a \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \\ m \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \bar{a} \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] \\ &- \left[\begin{array}{c} \bar{a} \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_{1^+} \quad \ominus_{2^+} \quad \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \\ m \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \ominus_2 \quad \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \\ m \end{array} \right]. \end{aligned}$$

De plus, grâce au lemme 5.3.1,

$$\left[\begin{array}{c} a \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \frac{a^2}{4} \left(\left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_4 \quad \ominus_4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_3 \quad \ominus_4 \quad \ominus_2 \quad \ominus_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_4 \quad \ominus_4 \end{array} \right] \right),$$

$$\left[\begin{array}{c} \bar{a} \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \frac{am}{2} \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right],$$

et

$$\left[\begin{array}{c} \bar{a} \quad a \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \ominus_{1^+} \quad \ominus_{2^+} \quad \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \quad \ominus_4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \frac{am}{2} \left(\left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_1 \quad \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_2 \quad \ominus_3 \end{array} \right] \right).$$

Enfin

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{---} 1 \text{---} 2 \\ | \quad | \quad | \\ 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} m \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right]$$

et, grâce au lemme 5.2.8,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} a \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} a \quad a \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \quad a \\ | \quad | \quad | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3^+ \quad 4^+ \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \\ &- am \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \text{---} 3 \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right] + \frac{am}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{---} 3 \quad 4 \end{array} \right] - \frac{am}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 3 \text{---} 4 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] \\ &- \frac{am}{2} \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 4 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - am \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \text{---} 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} a \quad a \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ m \\ | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right] + \frac{am}{2} \left(\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{---} 3 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ | \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] \right) \\ &+ \frac{a^2}{4} \left(\left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ | \quad | \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 4 \text{---} 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ 3 \text{---} 4 \text{---} 2 \text{---} 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \text{---} 2 \text{---} 4 \text{---} 4 \end{array} \right] \right) \\ &- \frac{am}{2} \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 3 \text{---} 4 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \text{---} 2 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 4 \text{---} 4 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] \right) \\ &- am \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \text{---} 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right] \right). \end{aligned}$$

Par application des relations *IHX* et *AS*, on a

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \text{---} 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \text{---} 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 4 \\ | \quad | \\ 1 \text{---} 3 \end{array} \right] \right) \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ 1 \text{---} 2 \text{---} 3 \end{array} \right]$$

et le résultat s'en déduit. □

Sous-lemme 5.3.9. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\begin{array}{c} \text{graph with } m \text{ loops} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} m \left[\begin{array}{c} \text{graph with 1 loop} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] + \frac{m(m-1)}{2} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ + \frac{m(m-1)}{2} \left(\left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \right).$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.8,

$$\left[\begin{array}{c} \text{graph with } m+1 \text{ loops} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{graph with 1 loop} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{graph with } m \text{ loops} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \quad m \quad 3 \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} 1^+ \quad 4 \\ | \quad | \\ 2^+ \quad m \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{graph with 1 loop} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{graph with } m \text{ loops} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] + m \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \\ - m \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 4 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - m \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 1 \end{array} \right] + m \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right]$$

et le résultat s'ensuit alors par récurrence sur $|m|$. □

On déduit alors des deux sous-lemmes 5.3.8 et 5.3.9 les deux résultats suivants.

Lemme 5.3.10. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{graph with } a \text{ loops} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{graph with 1 loop} \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \end{array} \right] \\ + 8a \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - 4a \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \right) \\ + a^2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{graph with 2 loops} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 3 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 4 \end{array} \right] \right) \\ - 2a \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 3 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 4 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \right).$$

□

Lemme 5.3.11. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a loop} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and an arc} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4 \end{array} \right] \\
 &\quad - 8a \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 3 nodes and a triangle} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two squares} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4 \end{array} \right] \\
 &\quad + a^2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two arcs} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 3, 4, 2, 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two squares} \\ \text{Nodes labeled } 1, 1, 3, 3 \end{array} \right] \right) \\
 &\quad + 2a \left(\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 2, 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 3, 4, 2, 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two squares} \\ \text{Nodes labeled } 1, 1, 1, 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two squares} \\ \text{Nodes labeled } 3, 3, 1, 4 \end{array} \right] \right) \\
 &\quad + 4a \left(\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4, 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 1, 2, 3 \end{array} \right] \right) + 4 \left(\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 4, 3, 1, 2, 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 3, 4, 2 \end{array} \right] \right).
 \end{aligned}$$

□

5.3.3 Mouvements de $(n + 3)$ -congruence

Théorème 5.3.12. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 8 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and a loop} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and an arc} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and an arc} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2 \end{array} \right] \\
 &\quad - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 1, 2, 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 2 nodes and a triangle} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2 \end{array} \right] \\
 &\quad - 3 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two arcs} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 1, 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and a square} \\ \text{Nodes labeled } 1, 2, 2, 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with 4 nodes and two squares} \\ \text{Nodes labeled } 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Pour démontrer le Théorème 5.3.12, on va d'abord prouver les sous-lemmes suivants.

Sous-lemme 5.3.13. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ \odot \quad \odot \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.3.11,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ \odot \quad \odot \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ + 4 \left(\left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] \right) + \left(\left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right).$$

Or, par la relation IHX ,

$$\left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right]$$

ce qui permet de conclure. □

Sous-lemme 5.3.14. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ \odot \quad \odot \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{c} \text{graph} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \text{graph} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{graph} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Par application du lemme 5.3.11,

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] \\
 &+ \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) \\
 &+ 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] \right) \\
 &+ 4 \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] \right) + 4 \left(\left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \right)
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat. □

Sous-lemme 5.3.15. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce aux lemmes 5.3.4 et 5.3.5,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ 1^- \quad 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

De même, en intervertissant les rôles des anses 1 et 2,

Sous-lemme 5.3.16. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

□

Preuve du Théorème 5.3.12 :

On considère le corps en anses H_4 plongé dans H_2 de telle sorte que -sous

les hypothèses de la notation 5.1.7-, le graphe $P \subset H_4$ soit plongé dans H_2 comme représenté sur la figure 5.8 (On replie l'anse 1 sur l'anse 4 et on fait enlacer l'anse obtenue par un nœud U trivial dans H_2 . On opère une chirurgie sur U de coefficient -1). Il est à noter que la feuille de P du haut est triviale dans H_2 .

$$\left[\begin{array}{c} P \\ \text{diagram} \end{array} \right] = 0.$$

Figure 5.8.

En utilisant le Théorème 5.2.16 pour couper la feuille triviale de P en deux feuilles 1-parallélisées, grâce à l'isotopie

$$\text{diagram} \sim \text{diagram},$$

et au lemme 5.3.3, on obtient alors

$$0 \stackrel{n \pm 3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right].$$

Alors, grâce aux sous-lemmes 5.3.13, 5.3.14, 5.3.15 et 5.3.16,

$$8 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n \pm 3}{=} \left(4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] \right. \\ \left. - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(- 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \right. \\ \left. + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(- 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] \right) \\ + \left(- 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] \right) - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] \\ \stackrel{n \pm 3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 12 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

Le résultat découle alors du fait que, par la relation IHX ,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n \pm 3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array} \right].$$

□

On prouve maintenant l'équivalent du théorème 5.3.12 en changeant le signe de la parallélisation de la feuille triviale. Ce résultat ne sera pas fondamental par la suite, mais on le retrouvera à partir du théorème 5.3.12 au début du chapitre 6, ce qui nous permettra de nous assurer d'une certaine cohérence dans nos résultats.

Théorème 5.3.17. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\begin{aligned} 8 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n \pm 3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \circlearrowright \quad \circlearrowright \end{array} \right] \\ &+ 6 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 2 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Pour démontrer le Théorème 5.3.17, on va d'abord prouver les sous-lemmes suivants.

Sous-lemme 5.3.18. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$4 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n \pm 3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.3.10,

$$\begin{aligned} 4 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n \pm 3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \end{array} \right] + \left(\left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) \\ &\stackrel{n \pm 3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

□

et au lemme 5.3.3, on obtient alors

$$0 \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \circ \\ | \quad | \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \circ \circ \\ | \quad | \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array} \right].$$

Alors, grâce aux sous-lemmes 5.3.18, 5.3.19, 5.3.15 et 5.3.16,

$$8 \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ \textcircled{1} \text{---} \textcircled{2} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left(-4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right] + 6 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] \right. \\ + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \\ \left. - 2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] \right) + \left(2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \right) + \left(2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right. \\ \left. - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \right) + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] \\ \stackrel{n+3}{=} -4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] + 6 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \\ + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \\ - 2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ | \quad | \quad | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ | \quad | \\ \text{---} \quad \text{---} \\ | \quad | \\ 2 \quad 1 \end{array} \right].$$

□

Chapitre 6

Applications aux formules de chirurgie sur les nœuds

Dans ce chapitre, on utilise les résultats obtenus dans le chapitre 5 dans $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ pour étudier les invariants réels de degré 4.

Après un paragraphe préliminaire où l'on précise un système de générateurs pour $(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5) \otimes \mathbb{Q}$, on prouve dans le paragraphe 6.2 le théorème 8, présenté en introduction. Celui-ci nous permet de ramener l'étude de la variation d'un invariant de degré 4 par chirurgie le long d'un nœud aux cas où ce nœud borde une surface de Seifert de genre 1 ou 2. Dans les paragraphes 6.3 et 6.4, on traite le cas de genre 1, ce qui nous permet d'obtenir le théorème 9. On traite en partie le cas de genre 2 dans le paragraphe 6.5.

6.1 $(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5) \otimes \mathbb{Q}$ et diagrammes de Jacobi

Dans ce chapitre, on va s'intéresser à la structure de \mathcal{F}_2 vu à 4-congruence près. Il faut tout d'abord faire remarquer que l'espace \mathcal{A}_1 défini dans la section 2.2.2 est librement engendré par la classe du graphe Θ représenté sur la figure 6.1(a), et dont les sommets sont orientés par un ordre cyclique des arêtes donné par le sens trigonométrique. On note $\tilde{\Theta} \subset S^3$ l'entrelacs en Y à deux composantes obtenu à partir du graphe Θ plongé trivialement dans S^3 en coupant les arêtes par des entrelacs de Hopf comme présenté sur la figure 6.1(b).

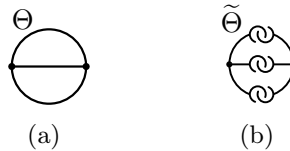


FIG. 6.1 – Le graphe Θ et l'entrelacs $\tilde{\Theta} \subset S^3$ associé.

On note ensuite T et C les diagrammes de Jacobi à quatre sommets en

forme respectivement de tétraèdre et de cylindre représentés sur les figures 6.2(a) et 6.2(b) dont les sommets sont orientés par un ordre des arêtes dans le sens trigonométrique dans le plan de projection. On note également Θ^2 le graphe composé de deux copies de Θ , représenté sur la figure 6.2(c). Alors l'espace \mathcal{A}_2 est engendré par les classes des graphes T , C et Θ^2 . Par la relation IHX , $C = 2T$, et \mathcal{A}_2 est finalement librement engendré par les classes des diagrammes T et Θ^2 .

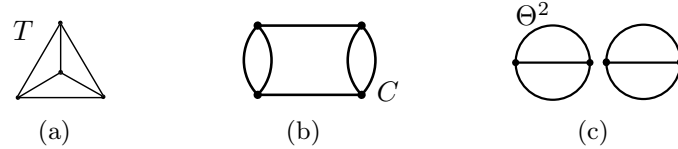


FIG. 6.2 – Les graphes T , C et Θ^2 .

On note $\tilde{T} \subset S^3$ et $\tilde{C} \subset S^3$ les entrelacs en Y de S^3 à quatre composantes obtenus à partir respectivement des graphes T et C plongés dans S^3 comme présenté sur les figures 6.3(a) et 6.3(b). On note également $(\tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2) \subset S^3$ l'entrelacs en Y à quatre composantes obtenu à partir du plongement trivial de deux copies de Θ dans deux boules disjointes de S^3 , comme présenté sur la figure 6.3(c).

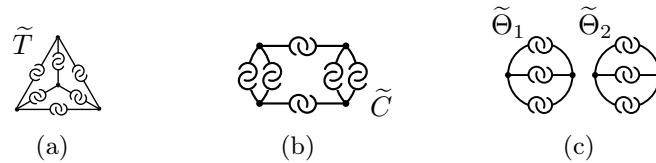


FIG. 6.3 – Les entrelacs \tilde{T} , \tilde{C} et $\tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2$ dans S^3 .

Par commodité de notation, si M est une sphère d'homologie entière, on notera dans la suite $[M; \Theta]$, $[\Theta^2]$, $[T]$ et $[C]$ les éléments de $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{F}}_5$ correspondant à

$$\begin{aligned} [M; \Theta] &= M \# S_{\Theta}^3 - M, \\ [\Theta^2] &:= [S^3; \tilde{\Theta}_1 \cup \tilde{\Theta}_2] = S_{\Theta}^3 \# S_{\Theta}^3 - 2S_{\Theta}^3 + S^3, \\ [T] &:= [S^3; \tilde{T}] = S_T^3 - S^3, \\ [C] &:= [S^3; \tilde{C}] = S_C^3 - S^3. \end{aligned}$$

D'après le théorème 2.2.1, $(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5) \otimes \mathbb{Q}$ est engendré par les trois éléments $[M; \Theta]$, $[\Theta^2]$ et $[T]$. Plus précisément, d'après le théorème 2.2.2, ces trois éléments forment une base de $(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5) \otimes \mathbb{Q}$.

Si $K \subset M$ est un nœud dans une sphère d'homologie entière, et si p est un entier non nul, alors $M_{(K;1/p)}$ est une sphère d'homologie entière et

$$[M; (K; 1/p)] := -M_{(K;1/p)} + M$$

est un élément de $\overline{\mathcal{F}}_2$. Il existe donc trois invariants de nœud parallélisé à valeur dans \mathbb{Q} , que l'on note ν_1, ν_2 et ν_3 , tels que

$$[M; (K; 1/p)] = \nu_1(K; 1/p) \cdot [M; \Theta] + \nu_2(K; 1/p) \cdot [\Theta^2] + \nu_3(K; 1/p) \cdot [T].$$

Le but de ce chapitre est de déterminer les invariants $\nu_i(K; 1/p)$ en fonction de paramètres géométriques du nœud K .

6.2 Cas des nœuds

Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M . Soit Σ une surface de Seifert de K . On note g le genre de Σ . On assigne à K une orientation arbitraire, qui induit une orientation de Σ par la convention du premier vecteur sortant. On note $N := \Sigma \times [-1, 1]$ un épaississement de Σ plongé dans M paramétré par le segment $[-1, 1]$ de telle sorte que l'orientation de N induite par l'orientation de M est donnée par l'orientation induite par l'orientation de Σ et l'orientation canonique de $[-1, 1]$.

On considère la surface Σ comme un disque auquel sont collées $2g$ anses, comme présenté sur la figure 6.4. On considère alors dans N le nœud trivial U et l'entrelacs G à g composantes en Y présenté sur la figure 6.4. Le nœud U et l'entrelacs G sont tels que $(M_G; U)$ et $(M; K)$ sont difféomorphes.

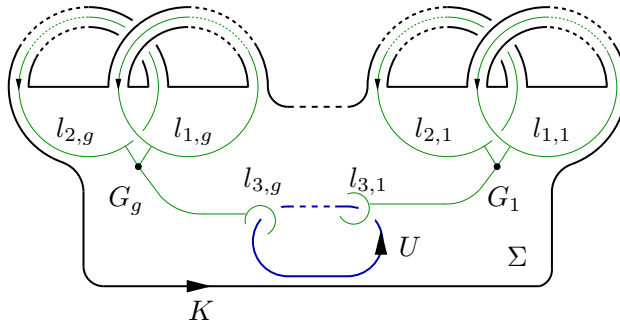


FIG. 6.4 – K, Σ, U et G .

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant.

Théorème 6.2.1. *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie entière M . Soit $G = G_1 \cup \dots \cup G_g$ un entrelacs en Y réalisant une surface de Seifert de K comme représenté sur la figure 6.4. On note $l_{1,i}, l_{2,i}$ et $l_{3,i}$ les feuilles de G_i comme représenté sur la figure 6.4. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) \stackrel{4}{=} n P_1(M; K) + n^2 P_2(M; K),$$

où $P_1(M; K)$ et $P_2(M; K)$ sont les éléments de $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ définis par

ce qui entraîne que

$$\begin{aligned}
2 \left(M_{(K; \frac{1}{n})} - M \right) &\stackrel{2}{=} n \sum_{i=1}^g \ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,i}) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad - n \sum_{\substack{(i,j) \\ (i,j)}} \left(\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,j}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{1,j}) - \ell k(\ell_{1,i}, \ell_{1,j}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{2,j}) \right) \cdot [M; \Theta] \\
&\stackrel{2}{=} n \left(\sum_{i=1}^g \left(\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{1,i}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{2,i}) - \ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,i}) (\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,i}) - 1) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left(\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{1,j}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{2,j}) - \ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,j}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{1,j}) \right) \right) \cdot [S^3; \Theta],
\end{aligned}$$

où $\ell k(l_{s,i}, l_{s,i})$ désigne l'auto-enlacement de la feuille $l_{s,i}$. Alors, si λ est l'invariant de Casson (voir paragraphe 4.4) défini par $\lambda|_{\mathcal{F}_3} = 0$, $\lambda(S^3) = 0$ et $\lambda(S^3_{\Theta}) = 2$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\lambda(M_{(K; \frac{1}{n})}) - \lambda(M) &= n \sum_{i=1}^g \left(\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{1,i}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{2,i}) \right. \\
&\quad \left. - \ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,i}) (\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,i}) - 1) \right) \\
&\quad + n \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left(\ell k(\ell_{1,i}, \ell_{1,j}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{2,j}) - \ell k(\ell_{1,i}, \ell_{2,j}) \cdot \ell k(\ell_{2,i}, \ell_{1,j}) \right).
\end{aligned}$$

On obtient ainsi la formule de chirurgie sur l'invariant de Casson utilisée dans la preuve du théorème 4.4.6 lors du calcul de d sur les twists de Dehn le long de courbes bordantes.

• Grâce au théorème 6.2.1, l'étude de $[M; (K, \frac{1}{n})]$ se ramène donc maintenant à l'étude des trois premiers termes de $P_1(M; k)$ -correspondant à des entrelacs en Y à deux composantes-, tous les autres termes étant des fonctions explicites des enlacements et des auto-enlacements des $l_{s,i}$. Dans les paragraphes suivants, on s'intéressera donc aux nœuds bordant une surface de genre 1 ou 2 avant de pouvoir conclure dans le cas général.

Notation 6.2.3. Soit K un nœud dans une sphère d'homologie entière M . Soit $G = G_1 \cup \dots \cup G_g$ un entrelacs en Y réalisant une surface de Seifert de K comme représenté sur la figure 6.4. On note $l_{1,i}$, $l_{2,i}$ et $l_{3,i}$ les feuilles de G_i comme représenté sur la figure 6.4. Pour tous entiers i, j, k et l compris entre 1 et g , on note $F_1(i), \dots, F_7(i, j, k)$

les éléments de $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ définis par

$$\begin{array}{ll}
 F_1(i) = \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \\ \hline \diagup \diagdown \\ \hline l_{2,i} \\ \hline \end{array}, & F_2(i, j) = \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \quad l_{1,j} \\ \hline \diagup \quad \diagdown \\ \hline l_{2,i} \quad l_{2,j} \\ \hline \end{array}, \\
 F_3(i, j) = \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \quad l_{2,j} \\ \hline | \quad \diagdown \\ \hline l_{2,i} \quad l_{1,j} \\ \hline \end{array}, & F_4(i, j) = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \text{---} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{1,i} \quad l_{2,i} \quad l_{1,j} \quad l_{2,j} \\ \hline \end{array}, \\
 F_5(i, j, k) = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \text{---} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{1,i} \quad l_{2,i} \quad l_{2,j} \quad l_{1,k} \\ \hline \end{array}, & F_6(i, j, k, l) = \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \quad l_{2,j} \quad l_{1,k} \quad l_{2,l} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{2,i} \quad l_{1,j} \quad l_{2,k} \quad l_{1,l} \\ \hline \end{array}, \\
 F_7(i, j, k) = \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \quad l_{2,k} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{2,i} \quad l_{1,j} \quad l_{2,j} \quad l_{1,k} \\ \hline \end{array}, & F_8(i, j, k) = \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \quad l_{2,k} \\ \hline \diagdown \quad \diagup \\ \hline l_{2,i} \quad l_{1,j} \\ \hline \end{array}.
 \end{array}$$

Avec les conventions de la notation 6.2.3, le théorème 6.2.1 se réécrit

$$\forall n \in \mathbb{Z}, 8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) \stackrel{4}{=} n P_1(M; K) + n^2 P_2(M; K),$$

où

$$\begin{aligned}
 P_1(M; K) &= 4 \sum_{i=1}^g \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \text{---} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{1,i} \quad l_{2,i} \\ \hline \end{array} - 4 \sum_{i=1}^g \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \text{---} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{1,i} \quad l_{2,i} \\ \hline \end{array} - 4 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \begin{array}{|c|} \hline l_{1,i} \quad l_{2,j} \\ \hline \text{---} \text{---} \\ \hline l_{2,i} \quad l_{1,j} \\ \hline \end{array} \\
 &- 4 \sum_{i=1}^g F_1(i) + 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} F_2(i, j) - 2 \sum_{i=1}^g F_4(i, i) + 2 \sum_{(i,j)} F_6(i, j, i, j) \\
 &- 4 \sum_{(i,j)} F_7(i, j, i) + 4 \sum_{\substack{\{i,j,k\} \\ i < j < k}} F_8(i, j, k)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 P_2(M; K) &= -2 \sum_{i=1}^g F_1(i) + 2 \sum_{(i,j)} F_2(i, j) + 8 \sum_{(i,j)} F_3(i, j) + \sum_{(i,j)} F_4(i, j) \\
 &- 2 \sum_{(i,j,k)} F_5(i, j, k) + \sum_{(i,j,k,l)} F_6(i, j, k, l) - 4 \sum_{(i,j,k)} F_7(i, j, k).
 \end{aligned}$$

On prouve d'abord le résultat suivant.

Lemme 6.2.4. *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie entière M . Soit $G = G_1 \cup \dots \cup G_g$ un entrelacs en Y réalisant une surface de Seifert de K comme représenté sur la figure 6.4. On note $l_{1,i}$, $l_{2,i}$ et $l_{3,i}$ les feuilles de G_i comme représenté sur la figure 6.4. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*

$$8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) \stackrel{4}{=} n (8[M; (K; -1)] + 4[M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)]) + 4n^2 [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)]$$

où $K^{(1)}$ et $K^{(2)}$ sont deux copies parallèles de K et où, avec les conventions de la notation 6.2.3,

$$4[M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)] \stackrel{4}{=} -2 \sum_{i=1}^g F_1(i) + 2 \sum_{(i,j)} F_2(i,j) + 8 \sum_{(i,j)} F_3(i,j) + \sum_{(i,j)} F_4(i,j) - 2 \sum_{(i,j,k)} F_5(i,j,k) + \sum_{(i,j,k,l)} F_6(i,j,k,l) - 4 \sum_{(i,j,k)} F_7(i,j,k).$$

PREUVE : Soit n un entier positif et soit $\varepsilon = \pm 1$. Réaliser la chirurgie de Dehn de coefficient ε/n le long de K revient à opérer une chirurgie sur un entrelacs obtenu en prenant n copies parallèles ε -parallélisées de K plongées dans N . On considère alors n copies parallèles $\Sigma^{(m)} \subset N$, $m = 1, \dots, n$ de la surface Σ numérotées de façon croissante vis-à-vis du segment $[-1, 1]$ (c'est-à-dire que sur la figure 6.4, la surface $\Sigma^{(m)}$ est au-dessus de $\Sigma^{(p)}$ si $m > p$). On note $K^{(m)}$, $U^{(m)}$, $G^{(m)} = \cup_i G_i^{(m)}$ les copies respectivement de K , U et G dans un voisinage de $\Sigma^{(m)}$. Les feuilles de $G_i^{(m)}$ sont également notées $l_{1,i}^{(m)}$, $l_{2,i}^{(m)}$ et $l_{3,i}^{(m)}$.

On rappelle que si $L \subset M$ est un entrelacs bord à trois composantes ou plus (c'est-à-dire que toutes les composantes de l'entrelacs bordent des surfaces plongées disjointes), alors

$$[M; L] \stackrel{4}{=} 0$$

(voir [GGP, Théorème 6.11]). On déduit alors du corollaire 5.1.10 que

$$\begin{aligned} M_{(K; \frac{\varepsilon}{n})} - M &= M_{\cup_{m=1}^n (K^{(m)}; \varepsilon)} - M \\ &\stackrel{4}{=} - \sum_{m=1}^n [M; (K^{(m)}; \varepsilon)] + \sum_{\{m,p\} \subset \{1, \dots, n\}^2} [M; (K^{(m)}; \varepsilon) \cup (K^{(p)}; \varepsilon)] \\ &\stackrel{4}{=} -n [M; (K; \varepsilon)] + \frac{n(n-1)}{2} [M; (K^{(1)}; \varepsilon) \cup (K^{(2)}; \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Comme

$$[M; (K^{(1)}; \varepsilon) \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] = [M; (K; \varepsilon)] - [M_{(K^{(1)}; \varepsilon)}; (K^{(2)}; \varepsilon)],$$

on en déduit par le lemme 5.1.9 que

$$\begin{aligned}
[M; (K^{(1)}; \varepsilon) \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] &\stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g [M_{(U^{(1)}; \varepsilon)}; G_i^{(1)} \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] \\
&\quad - \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U^{(1)}; \varepsilon)}; G_i^{(1)} \cup G_j^{(1)} \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] \\
&\stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g \sum_{k=1}^g [M_{(U^{(1)}; \varepsilon) \cup (U^{(2)}; \varepsilon)}; G_i^{(1)} \cup G_k^{(2)}] \\
&\quad - \sum_{i=1}^g \sum_{\{k,l\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U^{(1)}; \varepsilon) \cup (U^{(2)}; \varepsilon)}; G_i^{(1)} \cup G_k^{(2)} \cup G_l^{(2)}] \\
&\quad - \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, g\}} \sum_{k=1}^g [M_{(U^{(1)}; \varepsilon) \cup (U^{(2)}; \varepsilon)}; G_i^{(1)} \cup G_j^{(1)} \cup G_k^{(2)}] \\
&\quad + \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, g\}} \sum_{\{k,l\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U^{(1)}; \varepsilon) \cup (U^{(2)}; \varepsilon)}; G_i^{(1)} \cup G_j^{(1)} \cup G_k^{(2)} \cup G_l^{(2)}].
\end{aligned}$$

On utilise ensuite le fait que si γ_1 et γ_2 sont deux nœuds orientés dans $M \setminus U^{(m)}$, et si l'on note γ_1^U et γ_2^U leurs images dans $M_{(U^{(m)}; \varepsilon)}$ après chirurgie sur $U^{(m)}$, alors les enlacements de ces courbes après chirurgie vérifient

$$lk(\gamma_1^U, \gamma_2^U) = lk(\gamma_1, \gamma_2) - \varepsilon \cdot lk(\gamma_1, U^{(m)}) \cdot lk(\gamma_2, U^{(m)}).$$

On en déduit alors qu'après chirurgie le long du nœud $(U^{(m)}; \varepsilon)$, les feuilles $l_3^{(m)}(i)$ sont $-\varepsilon$ -parallélisées et vérifient

$$lk(l_{3,i}^{(m)}, l_{s,j}^{(p)}) = \begin{cases} -\varepsilon & \text{si } s = 3, m = p \text{ et } i \neq j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela entraîne, avec les conventions de la notation 5.1.17, via le lemme 5.3.3,

$$\begin{aligned}
 [M; (K^{(1)}; \varepsilon) \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] &\stackrel{4}{=} \sum_{(i,k) \in \{1, \dots, g\}^2} \left[\begin{array}{c} -\varepsilon \quad -\varepsilon \\ \text{Diagram 1} \quad \text{Diagram 2} \\ l_{1,i}^{(1)} \quad l_{2,i}^{(1)} \quad l_{1,k}^{(2)} \quad l_{2,k}^{(2)} \end{array} \right] \\
 &+ \varepsilon \sum_{i=1}^g \sum_{\{k,l\} \subset \{1, \dots, g\}} \left[\begin{array}{c} -\varepsilon \\ \text{Diagram 3} \quad \text{Diagram 4} \\ l_{1,i}^{(1)} \quad l_{2,i}^{(1)} \quad l_{2,k}^{(2)} \quad l_{1,l}^{(2)} \end{array} \right] \\
 &+ \varepsilon \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, g\}} \sum_{k=1}^g \left[\begin{array}{c} -\varepsilon \\ \text{Diagram 5} \quad \text{Diagram 6} \\ l_{1,k}^{(2)} \quad l_{2,k}^{(2)} \quad l_{1,i}^{(1)} \quad l_{2,j}^{(1)} \end{array} \right] \\
 &+ \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, g\}} \sum_{\{k,l\} \subset \{1, \dots, g\}} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \quad \text{Diagram 8} \\ l_{1,i}^{(2)} \quad l_{2,j}^{(2)} \quad l_{1,k}^{(2)} \quad l_{2,l}^{(2)} \\ l_{2,i}^{(2)} \quad l_{1,j}^{(2)} \quad l_{2,k}^{(2)} \quad l_{1,l}^{(2)} \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Alors, par application du lemme 5.3.1,

$$\begin{aligned}
 4 [M; (K^{(1)}; \varepsilon) \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] &\stackrel{4}{=} \sum_{(i,k) \in \{1, \dots, g\}^2} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \quad \text{Diagram 10} \\ l_{1,i}^{(1)} \quad l_{2,i}^{(1)} \quad l_{1,k}^{(2)} \quad l_{2,k}^{(2)} \end{array} \right] \\
 &+ \sum_{(i,k,l)} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 11} \quad \text{Diagram 12} \\ l_{1,i}^{(1)} \quad l_{2,i}^{(1)} \quad l_{1,k}^{(2)} \quad l_{2,l}^{(2)} \\ l_{2,k}^{(2)} \quad l_{2,l}^{(2)} \end{array} \right] + \sum_{(i,j,k)} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 13} \quad \text{Diagram 14} \\ l_{1,k}^{(2)} \quad l_{2,k}^{(2)} \quad l_{1,i}^{(1)} \quad l_{1,j}^{(1)} \\ l_{2,i}^{(1)} \quad l_{2,j}^{(1)} \end{array} \right] \\
 &+ \sum_{(i,j,k,l) \in \{1, \dots, g\}^4} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 15} \quad \text{Diagram 16} \\ l_{1,i}^{(1)} \quad l_{1,j}^{(1)} \quad l_{1,k}^{(2)} \quad l_{1,l}^{(2)} \\ l_{2,i}^{(1)} \quad l_{2,j}^{(1)} \quad l_{2,k}^{(2)} \quad l_{2,l}^{(2)} \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$lk(l_{s,i}^{(m)}, l_{r,j}^{(p)}) = lk(l_{s,i}, l_{r,j})$$

$$4[M; (K^{(1)}; \varepsilon) \cup (K^{(2)}; \varepsilon)] \stackrel{4}{=} -2 \sum_{i=1}^g F_1(i) + 2 \sum_{(i,j)} F_2(i, j) + 8 \sum_{(i,j)} F_3(i, j) + \sum_{(i,k)} F_4(i, k) - 2 \sum_{(i,j,k)} F_5(i, j, k) + \sum_{(i,j,k,l)} F_6(i, j, k, l) - 4 \sum_{(i,j,k)} F_7(i, j, k).$$

On a donc montré que si n est un entier positif, et si $\varepsilon = \pm 1$, alors

$$2(M_{(K; \frac{\varepsilon}{n})} - M) \stackrel{4}{=} -n (2[M; (K; \varepsilon)] + [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)]) + n^2 [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)],$$

où $[M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)]$ est la fonction des enlacements et des auto-enlacements des feuilles $l_s(i)$ donnée par la formule ci-dessus.

De plus, en remarquant que la chirurgie suivant l'entrelacs parallélisé $(K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; -1)$ est triviale, on obtient

$$0 = -[M; (K; 1)] - [M; (K; -1)] + [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; -1)]$$

et, pour tout nœud K_0

$$0 = -[M; (K_0; 1) \cup (K; 1)] - [M; (K_0; 1) \cup (K; -1)] + [M; (K_0; 1) \cup (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; -1)],$$

donc

$$[M; (K; 1)] = -[M; (K; -1)] + [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; -1)] \stackrel{4}{=} -[M; (K; -1)] - [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)].$$

On obtient alors

$$[M; (K; \varepsilon)] \stackrel{4}{=} -\varepsilon ([M; (K; -1)] + \delta_{1,\varepsilon} [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)]),$$

ce qui entraîne le résultat. □

Remarque 6.2.5. Si le genre de K est égal à 1, les théorèmes 5.3.12 et 5.3.17 entraînent que

$$\begin{aligned} 8[M; (K; -1)] + 8[M; (K; 1)] &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ l_1 \quad l_2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ | \\ l_1 \quad l_2 \end{array} \right] \\ &\stackrel{4}{=} -2 \left[\begin{array}{c} \frown \quad \smile \\ | \quad | \quad | \quad | \\ l_1 \quad l_2 \quad l_1 \quad l_2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \frown \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \\ l_1 \quad l_2 \quad l_2 \quad l_2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} | \quad | \quad | \quad | \\ | \quad | \quad | \quad | \\ l_2 \quad l_2 \quad l_2 \quad l_2 \end{array} \right] \\ &\quad + 8 \left[\begin{array}{c} \bar{l}_1 \quad \bar{l}_2 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ l_2 \quad l_1 \quad l_2 \quad l_1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \diagup \\ | \\ l_2 \end{array} \right] + 16 \left[\begin{array}{c} l_1 \quad l_1 \\ | \quad | \\ l_2 \quad l_2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} l_1 \quad l_1 \\ | \quad | \\ l_2 \quad l_2 \end{array} \right] \\ &\stackrel{4}{=} -8[M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)]. \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'égalité

$$[M; (K; 1)] \stackrel{4}{=} -[M; (K; -1)] - [M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)],$$

ce qui nous assure une certaine cohérence des théorèmes 5.3.12 et 5.3.17.

On va maintenant exprimer $[M; (K; -1)]$ en fonction de crochets d'entrelacs en Y à 4-équivalence près. En utilisant le fait que les variétés $M_{(K; -1)}$ et $M_{(U; -1) \cup G}$ sont difféomorphes, on obtient grâce au corollaire 5.1.10 que

$$\begin{aligned} -M_{(K; -1)} + M &= -M_{(U; -1) \cup G} + M \\ &\stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g [M_{(U; -1)}; G_i] - \sum_{\{i,j\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U; -1)}; G_i \cup G_j] \\ &\quad + \sum_{\{i,j,k\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U; -1)}; G_i \cup G_j \cup G_k] \\ &\quad - \sum_{\{i,j,k,l\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U; -1)}; G_i \cup G_j \cup G_k \cup G_l]. \end{aligned}$$

Après chirurgie le long du nœud $(U; -1)$, les feuilles $l_{3,i}$ des composantes G_i ne s'enlacent qu'entre elles et vérifient

$$\ell k(l_{3,i}, l_{s,j}) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cela entraîne que

$$\sum_{\{i,j,k,l\} \subset \{1, \dots, g\}} [M_{(U; -1)}; G_i \cup G_j \cup G_k \cup G_l] \stackrel{4}{=} \frac{1}{8} \sum_{\substack{(i,j,k,l) \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} \left[\begin{array}{cccc} \overline{l_{1,i}} & l_{1,j} & l_{1,k} & \overline{l_{1,l}} \\ | & | & | & | \\ \text{---} & & \text{---} & \\ | & | & | & | \\ \overline{l_{2,i}} & l_{2,j} & l_{2,k} & \overline{l_{2,l}} \end{array} \right].$$

Pour traiter le cas des crochets d'entrelacs en Y à trois composantes, on remarque qu'après chirurgie le long de $(U; -1)$, les feuilles $l_{3,i}$, $l_{3,j}$ et $l_{3,k}$ ($i < j < k$) peuvent être représentées comme sur la figure 6.5. On prouve alors le lemme suivant.

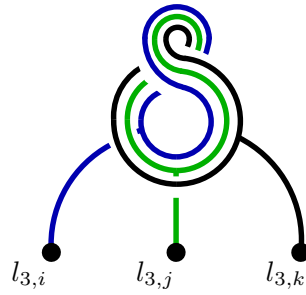
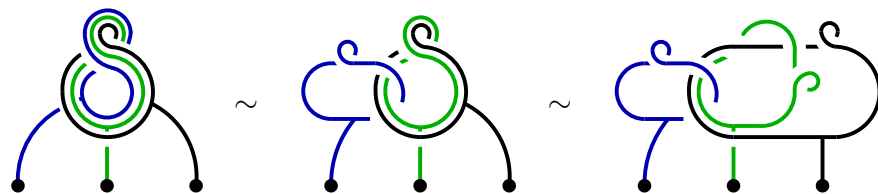


FIG. 6.5 – Les feuilles $l_{3,i}$, $l_{3,j}$ et $l_{3,k}$

Lemme 6.2.6. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram of the knot with strands labeled 1 to 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 & \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \hline 3 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \hline 5 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 & + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \hline 1 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \\ 2 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \hline 3 \quad 3 \quad 1 \quad 6 \\ 4 \quad 4 \quad 2 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \hline 5 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \\ 6 \quad 6 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 & + 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \hline 1 \quad \quad \quad 6 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \hline 3 \quad \quad \quad 2 \\ 4 \quad 5 \quad 6 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \hline 5 \quad \quad \quad 4 \\ 6 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \right) \\
 & - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ \hline 1 \quad \quad \quad 6 \\ 2 \quad \quad \quad 5 \end{array} \right] - 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \hline 1 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 12} \\ \hline 1 \quad 4 \quad 3 \quad 6 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \hline 1 \quad 6 \quad 3 \quad 6 \\ 2 \quad 5 \quad 4 \quad 5 \end{array} \right] \right).
 \end{aligned}$$

PREUVE : En utilisant l'isotopie



et en coupant les feuilles pour se débarrasser de leur auto-enlacement, on

déduit des lemmes 5.2.1 et 5.3.3 que

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a blue loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with blue and green loops} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Alors, par utilisation répétée du lemme 5.2.1 et par utilisation du lemme 5.3.1,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a blue loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with blue and green loops} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with blue and green loops} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du fait que, par les relations *IHX* et *AS*,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 1 and 2} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 3 and 4} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram with a green loop on strands 5 and 6} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \end{array} \right].$$

□

On peut maintenant prouver le théorème 6.2.1.

Preuve du théorème 6.2.1 : Avec les conventions de la notation 6.2.3, grâce au théorème 5.3.12, pour tout i ,

$$8[M_{(U,-1)}; G_i] \stackrel{4}{=} 4 \left[\text{Diagram 1} \right] - 4 \left[\text{Diagram 2} \right] - 2F_1(i) - 2F_2(i, i) \\ - 8F_3(i, i) - 3F_4(i, i) + 2F_5(i, i, i) + F_6(i, i, i, i).$$

Grâce au lemme 5.3.10, pour toute paire $\{i, j\}$,

$$-8[M_{(U,-1)}; G_i \cup G_j] \stackrel{4}{=} -8 \left[\text{Diagram 3} \right] - 16F_3(i, j) + 8F_7(i, j, j) \\ + 8F_7(i, i, j) - 2F_4(i, j) + 2F_5(i, j, j) + 2F_5(j, i, i) - 2F_6(i, i, j, j) \\ + 4F_5(i, i, j) + 4F_5(j, i, j) - 4F_6(i, i, i, j) - 4F_6(j, j, i, j).$$

Grâce au lemme 6.2.6, pour tout ensemble $\{i, j, k\}$, où $i < j < k$,

$$8[M_{(U,-1)}; G_i \cup G_j \cup G_k] \stackrel{4}{=} 4F_5(i, j, k) + 4F_5(j, k, i) + 4F_5(k, i, j) \\ - 4F_6(i, i, j, k) - 4F_6(j, j, i, k) - 4F_6(k, k, i, j) \\ + 8F_7(i, j, k) + 8F_7(j, k, i) + 8F_7(k, i, j) - 8F_8(i, j, k) \\ - 8F_6(i, j, i, k) - 8F_6(i, j, j, k) - 8F_6(i, k, j, k).$$

De plus, on a vu que

$$-8 \sum_{\{i,j,k,l\} \subset \{1,\dots,g\}} [M_{(U,-1)}; G_i \cup G_j \cup G_k \cup G_l] \stackrel{4}{=} - \sum_{\substack{(i,j,k,l) \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} F_6(i, j, k, l).$$

Donc, comme

$$[M, (K, -1)] \stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g [M_{(U,-1)}; G_i] - \sum_{\{i,j\} \subset \{1,\dots,g\}} [M_{(U,-1)}; G_i \cup G_j] \\ + \sum_{\{i,j,k\} \subset \{1,\dots,g\}} [M_{(U,-1)}; G_i \cup G_j \cup G_k] \\ - \sum_{\{i,j,k,l\} \subset \{1,\dots,g\}} [M_{(U,-1)}; G_i \cup G_j \cup G_k \cup G_l],$$

on obtient finalement, en utilisant le fait que $F_5(i, j, k) = F_5(i, k, j)$ et que $F_6(i, j, k, l) = F_6(k, l, i, j) = F_6(j, i, k, l)$,

$$\begin{aligned}
8[M; (K, -1)] \stackrel{4}{=} & 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{Diagram 1} \right] - 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{Diagram 2} \right] - 4 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left[\text{Diagram 3} \right] \\
& - 2 \sum_{i=1}^g F_1(i) - 2 \sum_{i=1}^g F_2(i, i) - 8 \sum_{(i,j)} F_3(i, j) - 2 \sum_{i=1}^g F_4(i, i) - \sum_{(i,j)} F_4(i, j) \\
& + 2 \sum_{i=1}^g F_5(i, i, i) + 2 \sum_{\substack{(i,j,k) \\ 2 \text{ égaux}}} F_5(i, j, k) + 2 \sum_{\substack{(i,j,k) \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} F_5(i, j, k) + \sum_{i=1}^g F_6(i, i, i, i) \\
& - \sum_{\{i,j\}} (F_6(i, i, j, j) + F_6(j, j, i, i)) - \sum_{\substack{(i,j,k,l) \\ 3 \text{ égaux}}} F_6(i, j, k, l) - \sum_{\substack{(i,j,k,l) \\ 2 \text{ égaux}}} F_6(i, j, k, l) \\
& - \sum_{\substack{(i,j,k,l) \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} F_6(i, j, k, l) + 8 \sum_{\{i,j\}} (F_7(i, j, j) + F_7(j, i, i)) \\
& + 8 \sum_{\substack{(i,j,k) \\ i < j < k}} (F_7(i, j, k) + F_7(j, k, i) + F_7(k, i, j)) - 8 \sum_{\substack{(i,j,k) \\ i < j < k}} F_8(i, j, k).
\end{aligned}$$

On utilise ensuite que $F_7(k, j, i) = F_7(i, j, k) - F_8(i, j, k)$ (conséquence de la relation *IHX* déjà utilisée dans la preuve du lemme 6.2.6), que $F_8(i, j, k) = F_8(j, k, i)$ et que $F_8(i, i, j) = 0$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
8[M; (K, -1)] \stackrel{4}{=} & 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{Diagram 1} \right] - 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{Diagram 2} \right] - 4 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left[\text{Diagram 3} \right] \\
& - 2 \sum_{i=1}^g F_1(i) - 2 \sum_{i=1}^g F_2(i, i) - 8 \sum_{(i,j)} F_3(i, j) - 2 \sum_{i=1}^g F_4(i, i) - \sum_{(i,j)} F_4(i, j) \\
& + 2 \sum_{(i,j,k)} F_5(i, j, k) + 2 \sum_{i=1}^g F_6(i, i, i, i) - \sum_{(i,j,k,l)} F_6(i, j, k, l) + 4 \sum_{\{i,j\}} F_6(i, j, i, j) \\
& + 4 \sum_{\{i,j\}} (F_7(i, j, j) + F_7(j, j, i) + F_7(j, i, i) + F_7(i, i, j)) + 4 \sum_{\substack{(i,j,k) \\ 2 \text{ à } 2 \neq}} F_7(i, j, k) \\
& + 4 \sum_{\substack{(i,j,k) \\ i < j < k}} F_8(i, j, k).
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
8[M; (K, -1)] \stackrel{4}{=} & 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{diagram 1} \right] - 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{diagram 2} \right] - 4 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left[\text{diagram 3} \right] \\
& - 2 \sum_{i=1}^g F_1(i) - 2 \sum_{i=1}^g F_2(i, i) - 8 \sum_{(i,j)} F_3(i, j) - 2 \sum_{i=1}^g F_4(i, i) - \sum_{(i,j)} F_4(i, j) \\
& + 2 \sum_{(i,j,k)} F_5(i, j, k) + 2 \sum_{(i,j)} F_6(i, j, i, j) - \sum_{(i,j,k,l)} F_6(i, j, k, l) + 4 \sum_{(i,j,k)} F_7(i, j, k) \\
& - 4 \sum_{(i,j)} F_7(i, j, i) + 4 \sum_{\substack{\{i,j,k\} \\ i < j < k}} F_8(i, j, k).
\end{aligned}$$

Or, par le lemme 6.2.4,

$$\begin{aligned}
4[M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)] \stackrel{4}{=} & -2 \sum_{i=1}^g F_1(i) + 2 \sum_{(i,j)} F_2(i, j) + 8 \sum_{(i,j)} F_3(i, j) \\
& + \sum_{(i,j)} F_4(i, j) - 2 \sum_{(i,j,k)} F_5(i, j, k) + \sum_{(i,j,k,l)} F_6(i, j, k, l) - 4 \sum_{(i,j,k)} F_7(i, j, k),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
8[M; (K, -1)] + 4[M; (K^{(1)}; 1) \cup (K^{(2)}; 1)] \stackrel{4}{=} & 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{diagram 1} \right] - 4 \sum_{i=1}^g \left[\text{diagram 2} \right] - 4 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} \left[\text{diagram 3} \right] - 4 \sum_{i=1}^g F_1(i) \\
& + 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} F_2(i, j) - 2 \sum_{i=1}^g F_4(i, i) + 2 \sum_{(i,j)} F_6(i, j, i, j) - 4 \sum_{(i,j)} F_7(i, j, i) \\
& + 4 \sum_{\substack{\{i,j,k\} \\ i < j < k}} F_8(i, j, k).
\end{aligned}$$

Le théorème découle alors du lemme 6.2.4. \square

6.3 Cas des nœuds de genre 1

Dans cette partie, on prouve le théorème 6.3.2 énoncé ci-dessous, qui nous permet de nous affranchir de l'enlacement et de l'auto-enlacement des feuilles d'un graphe en Y muni d'une feuille triviale 1-parallélisée.

Notation 6.3.1. On considère un plongement de D_2 dans M . Ce plongement induit un plongement K_1, K_2 constitué des courbes de D_2 représentées sur la figure 6.6. On oriente la surface D_2 de telle sorte que les orientations induites sur les nœuds soient représentées comme sur la figure 6.6. On munit les nœuds K_i de la parallélisation induite par la surface D_2 . On suppose que le plongement de D_2 est tel que l'entrelacs $K_1 \cup K_2$ est algébriquement scindé et tel que les nœuds soient $-$ parallélisés. La donnée du plongement de D_2 est équivalente au plongement des nœuds parallélisés K_i et de la bande b représentée sur la figure 6.6.

Pour tous entiers ℓ, p_1 et p_2 , on note $G(K_1, K_2; b; (\ell, p_1, p_2)), G_1(K_1, K_2; b; (\ell, p_1, p_2)), G_2(K_1, K_2; b; (\ell, p_1, p_2))$ et $G_3(K_i; p_i)$ les éléments de $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ définis comme les classes de 4-congruence des crochets des entrelacs en Y plongés dans un épaississement du disque D_2 et représentés sur la figure 6.7. Par commodité de notation, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les nœuds K_i mis en jeu, on se permettra de désigner $G_i(K_1, K_2; b; (\ell, p_1, p_2))$ par $G_i(\ell, p_1, p_2)$. Si $\ell = p_1 = p_2 = 0$, on désignera $G_i((K_1 K_2, b); (0, 0, 0))$ par $\overline{G}_i(K_1, K_2)$.

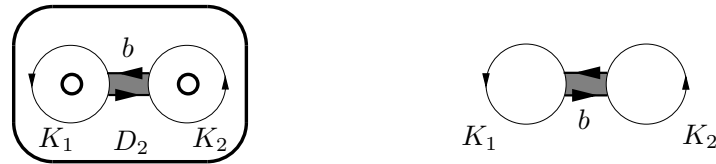


FIG. 6.6 – D_2 associé à (K_1, K_2, b)

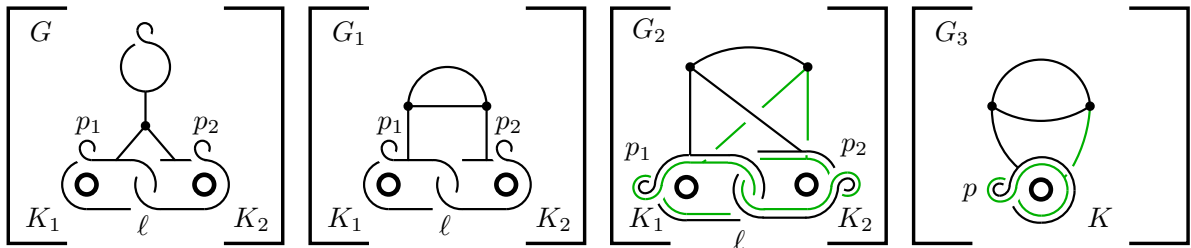


FIG. 6.7 – $G_i((K_1, K_2, b); (\ell, p_1, p_2))$.

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant.

Théorème 6.3.2. Avec les conventions de la notation 6.3.1,

$$\begin{aligned}
 8G((K_1, K_2, b); (\ell, p_1, p_2)) \stackrel{4}{=} & 4(1 - 2\ell)\overline{G}_1(K_1, K_2) - 4\overline{G}_2(K_1, K_2) \\
 & + 4p_1\overline{G}_3(K_2) + 4p_2\overline{G}_3(K_1) \\
 & + 4\lambda(K) \cdot [M; \Theta] - \lambda(K)(\lambda(K) + 2) \cdot [\Theta^2] \\
 & + (2(p_1p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) - 2\ell(\ell - 1)(2\ell - 1) \\
 & \quad - 18\lambda(K) - 14\lambda^2(K)) \cdot [T],
 \end{aligned}$$

où $\lambda(K) = p_1p_2 - \ell(\ell - 1)$ est l'invariant de Casson d'un nœud de genre 1 dont les feuilles du graphe en Y associé aurait pour enlacement ℓ et pour auto-enlacements p_1 et p_2 .

6.3.1 Couper une feuille

Dans ce paragraphe, on prouve le résultat suivant.

Théorème 6.3.3. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] & \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] \\
 & - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1^- \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3^- \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \\
 & + 12 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] \\
 & - \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] \right. \\
 & \left. + 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] \right) \right).
 \end{aligned}$$

On prouve dans un premier temps les résultats suivants.

Lemme 6.3.4. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall \tau_1 = \pm, \forall \tau_2 = \pm$,

$$2 \begin{bmatrix} 2^{\tau_1} & 3 \\ 3^{\tau_2} & 1 & 2 \end{bmatrix} \stackrel{n+3}{=} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \tau_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

PREUVE : Grâce aux lemmes 5.3.4 et 5.2.6,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2^{\tau_1} & 3 \\ 3^{\tau_2} & 1 & 2 \end{bmatrix} &\stackrel{n+3}{=} \begin{bmatrix} 2 & 3^{\tau_2} \\ 3 & 1 & 2^{\tau_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{n+3}{=} \begin{bmatrix} 2^{\tau_1} & 3^{\tau_2} \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \tau_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{n+3}{=} \begin{bmatrix} 2^{\tau_1} & 3 \\ 3^{\tau_2} & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \tau_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant est une version de la relation *IHX* généralisée au degré supérieur.

Lemme 6.3.5. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &\stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

PREUVE : En utilisant de manière répétée le lemme 5.2.9,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &\stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} \circledast & \circledast \\ \circledast & \circledast \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \circledast & \circledast \\ \circledast & \circledast \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\stackrel{n+2}{=} \begin{bmatrix} \circledast & \circledast \\ \circledast & \circledast \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right] \\
 &\quad - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right].$$

Enfin, ces trois égalités entraînent

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right],
 \end{aligned}$$

et après simplification par la relation *IHX*,

$$\begin{aligned}
 0 &\stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{array} \right] \\
 &- \left[\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le lemme découle alors du fait que, par les relations *IHX* et *AS*,

$$\left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{array} \right]$$

et

$$\left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+2}{=} \left[\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right].$$

□

Lemme 6.3.6. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 1 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 1 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 3 \ 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : En utilisant le lemme 6.3.5,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 2 \ 3 \end{array} \right].$$

Or, grâce au lemme 5.3.4,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \ 3 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 1 \ 2 \end{array} \right]$$

et

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 2 \ 3 \end{array} \right],$$

ce qui entraîne le résultat. □

Lemme 6.3.7. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{---}^a \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2a \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 3 \ 2 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \\ - a \left[\begin{array}{c} 2 \ 3 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.3.7

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{---}^a \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 3 \\ \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} a \left[\begin{array}{c} 3 \\ | \\ \text{---} \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ 2 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 1 \ 2 \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 5.2.1,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 1 \ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \ 3 \\ | \ | \\ \text{---} \\ | \ | \\ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array} \right],$$

si bien que, grâce au lemme 6.3.6,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \oplus 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} a \left(2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 1 \quad 1 \end{array} \right] \right) \\ + a \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right].$$

□

Preuve du théorème 6.3.3 : Grâce aux lemmes 5.2.14 et 5.3.3,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \oplus 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \oplus \oplus \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \oplus \oplus \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \oplus \oplus \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \oplus \oplus \oplus \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 5.3.10,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \oplus 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \oplus \oplus \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] \\ - 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \end{array} \right] \right),$$

par le lemme 5.3.4,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right]$$

et, grâce au lemme 5.3.1 et à la relation *IHX*,

$$2 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ 3 \quad 1 \end{array} \right].$$

Alors, grâce aux lemmes 6.3.4 et 6.3.7,

$$\begin{aligned}
4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left(4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \right. \\
&\quad \left. - 2 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array} \right] \right) + \left(-4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \end{array} \right] \right. \\
&\quad + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 1 \ 3 \ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 2 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array} \right] \\
&\quad + 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] \right) \\
&\quad + \left(-4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \right) - 4 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1^- \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 1 \ 2 \end{array} \right] \\
&\quad + \left(-2 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \right) - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 2 \end{array} \right] \\
&\quad + 4 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 1 \ 1 \ 2 \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1^- \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3^- \ 1 \ 2 \end{array} \right] \\
&\quad + 12 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 1 \ 3 \ 2 \end{array} \right] \\
&\quad - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 2 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \end{array} \right] \\
&\quad + 2 \left(\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \ 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \ 1 \ 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \ 3 \ 3 \ 2 \end{array} \right] \right).
\end{aligned}$$

□

Du théorème 6.3.3, on déduit directement le résultat similaire pour l'autre feuille en regardant le même mouvement de l'autre côté du disque D_3 .

Théorème 6.3.8. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right] \\
 &- 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3^+ \\ 2 \quad 3 \quad 1^+ \end{array} \right] \\
 &+ 12 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 2 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \end{array} \right] \\
 &- \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left(\left[\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\ 3 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 3 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \right).
 \end{aligned}$$

□

6.3.2 Simplification de l'enlacement

Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant.

Théorème 6.3.9. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Avant de prouver le résultat, on a besoin de lemmes qui nous serviront également pour les nœuds de genre 2.

Lemme 6.3.10. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \textcircled{\circ} 5 \textcircled{\circ} 4 \\ \textcircled{\circ} 2 \textcircled{\circ} 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \\ 5 \quad 2 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.8,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \textcircled{\circ} 5 \textcircled{\circ} 4 \\ \textcircled{\circ} 2 \textcircled{\circ} 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \\ | \\ 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ | \quad | \\ 5 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 2 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

et le résultat découle alors de la relation *IHX*. □

En retournant la surface D_5 , on obtient directement l'analogie suivant du lemme 6.3.10.

Lemme 6.3.11. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} 5 \\ \textcircled{\circ} 3 \textcircled{\circ} 4 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \\ \textcircled{\circ} \textcircled{\circ} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \\ | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 1 \quad 5 \quad 1 \quad 5 \\ | \quad | \quad | \quad | \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 5 \quad 4 \\ | \quad | \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 5 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

Sous-lemme 6.3.12. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 0.$$

PREUVE : Grâce au lemme 6.3.11,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 5.1.6, les deux termes de droite sont nuls dans \mathcal{F} , ce qui entraîne le résultat. \square

Lemme 6.3.13. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ | \quad | \\ \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce aux lemmes 6.3.10 et 5.1.6,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ | \quad | \\ \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \\ | \quad | \\ \textcircled{3} \quad \textcircled{4} \end{array} \right],$$

et le sous-lemme 6.3.12 permet de conclure. \square

Lemme 6.3.14. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall m \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] + m \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.9,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ | \\ \textcircled{2} \\ | \\ \textcircled{3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{4} \\ | \quad | \\ \textcircled{2} \quad \textcircled{3} \end{array} \right],$$

et le résultat découle alors du lemme 5.3.1 et de la relation *IHX*. \square

Sous-lemme 6.3.15. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{1} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 0.$$

PREUVE : Grâce au théorème 6.3.8,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{1} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 5.1.6,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \end{array} \right] = 0$$

et les deux autres termes de droite sont nuls à $(n+3)$ -équivalence près grâce au lemme 6.3.13, ce qui entraîne le résultat. \square

Sous-lemme 6.3.16. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \\ \text{0} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array} \right] - 5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{2} \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 6.3.13,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \\ \text{0} \end{array} \right] + \left(\left[\begin{array}{c} 2 \\ | \\ \text{1} \quad \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ | \quad | \\ \text{2} \quad \text{2} \end{array} \right] \right) - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{2} \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 6.3.10,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \\ \text{0} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{2}^+ \quad | \\ \text{1} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{2} \quad \text{2} \quad \text{1} \end{array} \right],$$

grâce au lemme 6.3.14,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{1} \\ \text{2} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{0} \\ \text{0} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{2} \end{array} \right]$$

et grâce aux lemmes 5.3.4 et 5.3.5,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ 2^+ \quad 1 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2^+ \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right].$$

□

Sous-lemme 6.3.17. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce aux lemmes 6.3.13 et 5.2.1,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 1^+ \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Or, grâce aux lemmes 5.3.4 et 5.3.5,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 1^+ \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 1^+ \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le résultat en découle.

□

Preuve du théorème 6.3.9 : Grâce au théorème 6.3.3,

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array} \right] \\
 &- 12 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 10} \\ 2 \end{array} \right] + 4 \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{Diagram 11} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{Diagram 12} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 13} \\ 2 \end{array} \right] \right) \\
 &+ 4 \left(\left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{Diagram 14} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(- \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 16} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \right) \\
 &+ \left(2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 18} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(- \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 20} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{Diagram 21} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \right) \\
 + \left(- 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{Diagram 22} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{Diagram 23} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{Diagram 24} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 26} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \right) \\
 + \left(2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 27} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 28} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 29} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \right) + \left(2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 30} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{Diagram 31} \\ 1 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right] \right) \\
 + \left(- 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 32} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 33} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 34} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 35} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 36} \\ 2 \end{array} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ \text{Diagram 9} \end{array} \right] \\
 &- 10 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 10} \\ 2 \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{Diagram 11} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Alors, grâce aux sous-lemmes 6.3.15, 6.3.16 et 6.3.17,

$$\begin{aligned}
 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{\ominus} \quad \textcircled{\ominus} \end{array} \right] + \left(-4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{\ominus} \quad \textcircled{\ominus} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] \right. \\
 &+ 10 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] \left. + \left(-2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] \right) \right. \\
 &- 10 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat. □

6.3.3 Etude de G_1

Le paragraphe précédent motive l'étude de l'application G_1 définie dans la notation 6.3.1. En effet, G_1 apparaît dans la formule donnée par le théorème 6.3.9 lorsque l'on fait diminuer l'enlacement des feuilles du graphe en Y associé à un nœud bordant une surface de genre 1. Si on détermine comment G_1 dépend de l'enlacement, on pourra alors déterminer comment G en dépend. Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant.

Théorème 6.3.18. *Avec les conventions de la notation 6.3.1, $\forall (\ell, p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^3$,*

$$G_1((K_1, K_2, b); (\ell, p_1, p_2)) \stackrel{4}{=} \overline{G}_1(K_1, K_2) + \ell \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2} \ell(\ell - 1) \cdot [\Theta^2] + (4\ell(\ell - 1) + \ell(p_1 + p_2) + 2p_1 p_2) \cdot [T].$$

On prouve d'abord les résultats suivants.

Lemme 6.3.19. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.1,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ 3 \quad 2 \end{array} \right].$$

□

Lemme 6.3.20. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{diagram} \\ 3 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.8,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 3 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

Le résultat découle alors du lemme 6.3.19. □

Lemme 6.3.21. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right].$$

PREUVE : Par le lemme 5.3.4,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right],$$

ce qui entraîne le lemme. □

Lemme 6.3.22. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2a \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.3.7,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} a \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 6.3.19,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -3 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ 1 \\ 1 \end{array} \right],$$

et le résultat découle alors du lemme 6.3.21. □

Lemme 6.3.23. Avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right] + 2a \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] + a \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Par le lemme 6.3.20,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 8} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right].$$

Or, d'après le lemme 5.3.1,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} a \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2a \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

Le résultat découle alors du lemme 6.3.22. □

Lemme 6.3.24. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 12} \\ \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \\ \text{Diagram 15} \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 16} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Par application du lemme 6.3.20,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 18} \\ \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 20} \\ \text{Diagram 21} \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 10} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right].$$

Or, par les lemmes 5.2.1 et 6.3.21,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right].$$

Donc

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ \circ \ \circ \ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 2 \end{array} \right] \ominus.$$

En utilisant cette égalité, on obtient

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ \circ \ \circ \ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right]$$

et le résultat en découle. \square

On peut maintenant prouver le théorème 6.3.18.

Preuve du théorème 6.3.18 : Le lemme 6.3.23 entraîne que, pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$,

$$G_1(\ell, p_1, p_2) \stackrel{4}{=} G_1(\ell, p_1 - a, p_2) + 2ap_2 \cdot [T] + a\ell \cdot [T].$$

Donc

$$\begin{aligned} G_1(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} G_1(\ell, 0, p_2) + 2p_1p_2 \cdot [T] + p_1\ell \cdot [T] \\ &\stackrel{4}{=} G_1(\ell, 0, 0) + (2p_1p_2 + (p_1 + p_2)\ell) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Le lemme 6.3.24 entraîne que

$$\begin{aligned} G_1(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} G_1(\ell - 1, p_1, p_2) + [M; \Theta] + p_1 \cdot [T] + p_2 \cdot [T] \\ &\quad + 8(\ell - 1) \cdot [T] + (\ell - 1) \cdot [\Theta^2]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} G_1(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} G_1(0, p_1, p_2) + \ell \cdot [M; \Theta] + \ell p_1 \cdot [T] + \ell p_2 \cdot [T] \\ &\quad + 4\ell(\ell - 1) \cdot [T] + \frac{1}{2}\ell(\ell - 1) \cdot [\Theta^2] \\ &\stackrel{4}{=} G_1(0, p_1, p_2) + \ell \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2}\ell(\ell - 1) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + (\ell(p_1 + p_2) + 4\ell(\ell - 1)) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors des deux égalités trouvées. \square

Dans la suite, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 6.3.25. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \ominus \quad \ominus \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 1 \end{array} \right] \\ + 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Dans le même esprit que dans la preuve du lemme 5.2.10, on obtient grâce au lemme 6.3.20

$$0 \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \ominus \quad \ominus \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 1^+ \ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ -1 \ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} -1 \ 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 1 \end{array} \right].$$

Or, par le lemme 5.2.3,

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 1^+ \ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 1^+ \ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \ 2 \end{array} \right],$$

et par le lemme 5.3.5,

$$2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 1^+ \ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+1}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right],$$

donc

$$2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 1^+ \ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right].$$

Le résultat en découle. □

6.3.4 Simplification de l'auto-enlacement

Dans ce paragraphe, on prouve le résultat suivant qui nous permet de déterminer comment G dépend de l'auto-enlacement des feuilles.

Théorème 6.3.26. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 8 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 8 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \odot \quad \odot \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \bullet \quad \odot \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] \\
 &- 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &- 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le résultat suivant est un corollaire du lemme 5.3.11 en prenant $a = 0$.

Lemme 6.3.27. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \odot \quad \odot \\ \text{diagram} \\ \odot \quad \odot \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \quad 1 \quad 4 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 4 \quad 4 \\ \text{diagram} \\ 3 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \quad 4 \quad 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

Remarque 6.3.28. Notons que ce résultat pouvait aussi s’obtenir directement à partir du lemme 5.2.11 en opérant un demi-twist sur le corps en anses H_4 pour intervertir les anses 3 et 4, ou également à partir des lemmes 5.2.11 et 6.3.14 en opérant un twist complet sur H_4 . Ceci nous assure donc une certaine cohérence entre les lemmes 5.2.11, 5.3.11, 6.3.14 et 6.3.27.

Sous-lemme 6.3.29. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \odot \quad 1 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \odot \quad \odot \end{array} \right] + 7 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + 3 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Par isotopie,

$$\left[\text{Diagram 1} \right] = \left[\text{Diagram 2} \right]$$

donc, par application successive des lemmes 5.2.11 et 6.3.27,

$$\begin{aligned} \left[\text{Diagram 1} \right] &\stackrel{n+3}{=} - \left[\text{Diagram 2} \right] + \left[\text{Diagram 3} \right] + \left[\text{Diagram 4} \right] + \left[\text{Diagram 5} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} \left[\text{Diagram 2} \right] + \left[\text{Diagram 4} \right] + \left[\text{Diagram 3} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} \left[\text{Diagram 2} \right] + 3 \left[\text{Diagram 3} \right]. \end{aligned}$$

Le résultat découle alors du lemme 6.3.25. □

Sous-lemme 6.3.30. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\text{Diagram 1} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\text{Diagram 2} \right] + 2 \left[\text{Diagram 3} \right] + 2 \left[\text{Diagram 4} \right] + \left[\text{Diagram 5} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.3.10,

$$\begin{aligned} 4 \left[\text{Diagram 1} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\text{Diagram 2} \right] - 8 \left[\text{Diagram 3} \right] + \left[\text{Diagram 4} \right] + 2 \left[\text{Diagram 5} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\text{Diagram 2} \right] - 6 \left[\text{Diagram 3} \right] + 2 \left[\text{Diagram 5} \right]. \end{aligned}$$

Finalement, grâce au sous-lemme 6.3.29,

$$4 \left[\text{Diagram 1} \right] \stackrel{n+3}{=} -4 \left[\text{Diagram 2} \right] + 8 \left[\text{Diagram 3} \right] + 8 \left[\text{Diagram 4} \right] + 4 \left[\text{Diagram 5} \right].$$

□

Lemme 6.3.31. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$8 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 4} \\ 1 \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 5} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au théorème 5.3.12,

$$\begin{aligned} 8 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] + 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 1 \end{array} \right] \\ &- 3 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Le lemme 6.3.22 et le sous-lemme 6.3.30 entraînent alors

$$\begin{aligned} 8 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 1 \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 1 \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] \\ &- 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 1 \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 15} \\ 1 \ 1 \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 14} \\ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

□

Sous-lemme 6.3.32. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 16} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 12} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{Diagram 15} \\ 2 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 17} \\ 2 \ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 18} \\ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 6.3.7,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 16} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{Diagram 19} \\ 1 \ 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 2 \\ \text{Diagram 15} \\ 2 \ 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{Diagram 15} \\ 2 \ 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{Diagram 18} \\ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \end{array} \right].$$

Donc, par le lemme 5.3.5,

$$2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array} \right],$$

et le résultat en découle alors par la relation *IHX*. □

Sous-lemme 6.3.33. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \text{diagram} \\ \hline 2^- \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 1 \end{array} \right].$$

PREUVE : Par les lemmes 5.3.4 et 6.3.6,

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \text{diagram} \\ \hline 2^- \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \text{diagram} \\ \hline 2^- \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \text{diagram} \\ \hline 2^- \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

Alors, par le lemme 5.3.5,

$$\left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \text{diagram} \\ \hline 2^- \quad 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \hline 2 \quad 1 \end{array} \right],$$

ce qui nous permet de conclure. □

On peut maintenant prouver le théorème 6.3.26.

Preuve du théorème 6.3.26 : Grâce au théorème 6.3.3 et par utilisation du lemme 5.3.3,

$$4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline \text{diagram} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline \text{diagram} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline \text{diagram} \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline \text{diagram} \\ \hline 2^- \quad 1 \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \hline 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \hline 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].$$

Alors, par le lemme 6.3.31 et par les sous-lemmes 6.3.32 et 6.3.33,

$$\begin{aligned}
 8 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 8 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{} \quad \textcircled{} \end{array} \right] + 4 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \quad \textcircled{} \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 6 \left[\begin{array}{c} 2 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 3 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &- 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \end{array} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] \\
 &+ 8 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 2 \end{array} \right] - 8 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{diagram} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le théorème en découle. □

6.3.5 Etude de G_3

On étudie ici l'application G_3 définie dans la notation 6.3.1, étude motivée par le théorème 6.3.9 pour pouvoir se débarrasser de l'auto-enlacement dans G . Dans ce paragraphe, on montre le résultat suivant.

Théorème 6.3.34. *Avec les conventions de la notation 6.3.1, si K est un nœud orienté dans une \mathbb{Z} -sphère M , et si p est un entier, alors*

$$\begin{aligned}
 G_3(K; p) &\stackrel{4}{=} \overline{G}_3(K) + p \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2}p(p-1) \cdot [\Theta^2] \\
 &\quad + \frac{1}{2}p(15p-7) \cdot [T].
 \end{aligned}$$

On prouve d'abord le résultat suivant.

Lemme 6.3.35. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{1} \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \quad \ominus \end{array} \right] + 9 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right].$$

PREUVE : Grâce au lemme 6.3.20,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{1} \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \textcircled{} \end{array} \right] \\
 &\quad + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 1 \quad \ominus \end{array} \right] + 6 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Or, par le lemme 6.3.24,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right]$$

et, par les lemmes 5.2.1 et 6.3.21,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right]$$

Le résultat en découle alors. □

Preuve du théorème 6.3.34 : Par isotopie,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right]$$

donc le lemme 6.3.23 entraîne que

$$\begin{aligned} G_3(K; p) &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram}(K; p-1) \end{array} \right] + 2p \cdot [T] + p \cdot [T] \\ &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram}(K; p-1) \end{array} \right] + 2(p-1) \cdot [T] + p \cdot [T] + 3p \cdot [T], \\ &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \text{diagram}(K; p-1) \end{array} \right] + (6p-2) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Le lemme 6.3.35 entraîne alors que

$$\begin{aligned} G_3(K; p) &\stackrel{4}{=} G_3(K; p-1) + [M; \Theta] + (p-1) \cdot [\Theta^2] + 9(p-1) \cdot [T] \\ &\quad + (6p-2) \cdot [T]. \\ &\stackrel{4}{=} G_3(K; p-1) + [M; \Theta] + (p-1) \cdot [\Theta^2] + (15p-11) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Le théorème en découle par récurrence sur p . □

6.3.6 Epilogue

Pour prouver le théorème 6.3.2, on va traduire les théorèmes 6.3.9 et 6.3.26 dans $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_5$ en terme d'enlacements et d'auto-enlacements des feuilles.

Pour cela, on prouve d'abord le lemme suivant.

Lemme 6.3.36. *Avec les conventions de la notation 5.1.17, on considère un plongement de D_2 dans une sphère d'homologie entière M . On note l_{ij} l'enlacement de la courbe i avec la courbe j , où i et j valent 1 ou 2. Alors*

$$\begin{array}{l}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{12} \cdot [T], \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \diagdown & / \\ 2 & 1 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{12}^2 - l_{11}l_{22} \cdot [T], \\
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} (2l_{11}l_{22} + 3l_{12}^2) \cdot [T], \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ 2 & 1 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} (l_{11}l_{22} + 4l_{12}^2) \cdot [T], \\
 \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} 5l_{12}l_{22} \cdot [T], \quad \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ 1 & 1 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} 5l_{11}^2 \cdot [T], \\
 \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 2 \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} 5l_{12} (l_{12}^2 - l_{11}l_{22}) \cdot [T], \\
 \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 1 \\ | & | & | & | \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} 5l_{22} (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) \cdot [T], \\
 \\
 \left[\begin{array}{cc} \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 1 & 2 \quad 1 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{12}^2 \cdot [\Theta^2] + 2(l_{11}l_{22} + l_{12}^2) \cdot [T], \\
 \left[\begin{array}{cc} \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 1 & 2 \quad 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{12}l_{22} ([\Theta^2] + 4[T]), \\
 \left[\begin{array}{cc} \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 1 & 1 \quad 1 & 1 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{11}^2 ([\Theta^2] + 4[T]), \\
 \\
 \left[\begin{array}{ccc} \text{---} & 1 & 1 \\ | & | & | \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{12} (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) ([\Theta^2] + 4[T]), \\
 \left[\begin{array}{ccc} \text{---} & 1 & 1 \\ | & | & | \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} l_{22} (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) ([\Theta^2] + 4[T]),
 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ | & | & | & | \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} (l_{11}l_{22} - l_{12}^2)^2 ([\Theta^2] + 14[T]).$$

PREUVE : Les égalités impliquant des graphes avec quatre décorations ou moins sont quasiment immédiates, via la relation $[C] = 2 \cdot [T]$ déjà évoquée dans le paragraphe 6.1. Les autres égalités sur les graphes à six décorations s'en déduisent ensuite facilement. A titre d'exemple, on prouve la dernière égalité. En choisissant une arête que l'on couple ensuite de toutes les manières possibles avec les autres arêtes, on obtient

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ | & | & | & | \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] &\stackrel{4}{=} l_{11} \left[\begin{array}{cccc} & & 1 & 1 \\ & \frown & | & | \\ & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] + 2l_{11} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 1 \\ | & & & | \\ \hline 2 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] - l_{12} \left[\begin{array}{cccc} & & 1 & 1 \\ & \frown & | & | \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \\ &+ 2l_{12} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & 2 \\ | & & & | \\ \hline 2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ &\stackrel{4}{=} l_{11}l_{22} (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) ([\Theta^2] + 4[T]) + 10l_{11}l_{22} (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) \cdot [T] \\ &\quad - l_{12}^2 (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) ([\Theta^2] + 4[T]) - 10l_{12}^2 (l_{11}l_{22} - l_{12}^2) \cdot [T] \end{aligned}$$

ce qui entraîne le résultat. \square

Preuve du théorème 6.3.2 : Grâce au lemme 6.3.36, avec les conventions de la notation 6.3.1, le théorème 6.3.9 se réécrit

$$\begin{aligned} 2G(\ell + 1, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 2G(\ell, p_1, p_2) - 2G_1(\ell, p_1, p_2) + \ell \cdot [T] \\ &\quad + (2p_1p_2 + 3\ell^2) \cdot [T] + (\ell^2 \cdot [\Theta^2] + 2(p_1p_2 + \ell^2) \cdot [T]) \\ &\quad + \ell(p_1p_2 - \ell^2) ([\Theta^2] + 4[T]) - 10\ell(\ell^2 - p_1p_2) \cdot [T] \\ &\stackrel{4}{=} 2G(\ell, p_1, p_2) - 2G_1(\ell, p_1, p_2) + (\ell^2 + \ell p_1p_2 - \ell^3) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + (\ell + 2p_1p_2 + 3\ell^2 + 2p_1p_2 + 2\ell^2 + 4\ell p_1p_2 \\ &\quad \quad - 4\ell^3 - 10\ell^3 + 10\ell p_1p_2) \cdot [T] \\ &\stackrel{4}{=} 2G(\ell, p_1, p_2) - 2G_1(\ell, p_1, p_2) + (\ell p_1p_2 + \ell^2 - \ell^3) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + (4p_1p_2 + \ell(1 + 14p_1p_2) + 5\ell^2 - 14\ell^3) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Alors, par le théorème 6.3.18,

$$\begin{aligned} 2G(\ell + 1, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 2G(\ell, p_1, p_2) - 2G_1(0, 0, 0) - 2\ell \cdot [M; \Theta] \\ &\quad + (\ell(p_1p_2 + 1) - \ell^3) \cdot [\Theta^2] + (-8\ell(\ell - 1) \\ &\quad \quad - 2\ell(p_1 + p_2) + \ell(1 + 14p_1p_2) + 5\ell^2 - 14\ell^3) \cdot [T] \\ &\stackrel{4}{=} 2G(\ell, p_1, p_2) - 2G_1(0, 0, 0) - 2\ell \cdot [M; \Theta] \\ &\quad + (\ell(p_1p_2 + 1) - \ell^3) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + (\ell(9 - 2(p_1 + p_2) + 14p_1p_2) - 3\ell^2 - 14\ell^3) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant que

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^2 = \frac{1}{6}m(m-1)(2m-1)$$

et que

$$\sum_{k=1}^{m-1} k^3 = \left(\frac{1}{2}m(m-1)\right)^2,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 2G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 2G(0, p_1, p_2) - 2\ell G_1(0, 0, 0) - \ell(\ell-1) \cdot [M; \Theta] \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\ell(\ell-1)(p_1p_2+1) - \frac{1}{4}\ell^2(\ell-1)^2\right) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\ell(\ell-1)(9-2(p_1+p_2)+14p_1p_2) \right. \\ &\quad \quad \left. - \frac{1}{2}\ell(\ell-1)(2\ell-1) - \frac{7}{2}\ell^2(\ell-1)^2\right) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} 2G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 2G(0, p_1, p_2) - 2\ell G_1(0, 0, 0) - \ell(\ell-1) \cdot [M; \Theta] \\ &\quad + \frac{1}{4}(-\ell(\ell-1) - p_1p_2)^2 + (p_1p_2)^2 + 2\ell(\ell-1) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}(-7\ell(\ell-1) - p_1p_2)^2 + 7(p_1p_2)^2 \\ &\quad \quad + \ell(\ell-1)(9-2(p_1+p_2)) - \ell(\ell-1)(2\ell-1) \cdot [T] \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} 2G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 2G(0, p_1, p_2) - 2\ell G_1(0, 0, 0) - \ell(\ell-1) \cdot [M; \Theta] \\ &\quad + \frac{1}{4}((p_1p_2)^2 + 2\ell(\ell-1) - (\ell(\ell-1) - p_1p_2)^2) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}(7(p_1p_2)^2 + \ell(\ell-1)(10-2(\ell+p_1+p_2)) - 7(\ell(\ell-1) - p_1p_2)^2) \cdot [T]. \end{aligned}$$

De même, le théorème 6.3.26 se réécrit

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1 + 1, p_2) &\stackrel{4}{=} 8G(\ell, p_1, p_2) + 4G_3(K_2, p_2) + 4\ell \cdot [T] - 2p_2 \cdot [T] \\
&\quad - 20\ell p_2 \cdot [T] - 30p_2^2 \cdot [T] - 4(\ell^2 - p_1 p_2) \cdot [T] \\
&\quad - 20p_2(p_1 p_2 - \ell^2) \cdot [T] - 2\ell p_2 ([\Theta^2] + 4[T]) \\
&\quad - 3p_2^2 ([\Theta^2] + 4[T]) - 2p_2(p_1 p_2 - \ell^2) ([\Theta^2] + 4[T]) \\
&\stackrel{4}{=} 8G(\ell, p_1, p_2) + 4G_3(K_2, p_2) \\
&\quad - p_2 (2\ell + 3p_2 + 2(p_1 p_2 - \ell^2)) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (4(\ell - \ell^2) - 2p_2 - 28\ell p_2 - 42p_2^2 \\
&\quad \quad + 4p_1 p_2 - 28p_2(p_1 p_2 - \ell^2)) \cdot [T] \\
&\stackrel{4}{=} 8G(\ell, p_1, p_2) + 4G_3(K_2, p_2) \\
&\quad - p_2 (3p_2 + 2(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1))) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (4(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1)) - 2p_2 - 42p_2^2 - 28p_2(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1))) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Alors, par le théorème 6.3.34,

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1 + 1, p_2) &\stackrel{4}{=} 8G(\ell, p_1, p_2) + 4G_3(K_2, 0) + 4p_2 \cdot [M; \Theta] \\
&\quad - p_2 (p_2 + 2 + 2(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1))) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (4(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1)) - 16p_2 - 12p_2^2 - 28p_2(p_1 p_2 - \ell(\ell - 1))) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 8G(\ell, 0, p_2) + 4p_1 G_3(K_2, 0) + 4p_1 p_2 \cdot [M; \Theta] \\
&\quad - p_1 p_2 (p_2 + 2 + (p_1 - 1)p_2 - 2\ell(\ell - 1)) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + p_1 (2((p_1 - 1)p_2 - 2\ell(\ell - 1)) - 16p_2 - 12p_2^2 \\
&\quad \quad - 14p_2((p_1 - 1)p_2 - 2\ell(\ell - 1))) \cdot [T] \\
&\stackrel{4}{=} 8G(\ell, 0, p_2) + 4p_1 G_3(K_2, 0) + 4p_1 p_2 \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + p_1 p_2 (2\ell(\ell - 1) - p_1 p_2 - 2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + p_1 (2(p_1 p_2 - 2\ell(\ell - 1)) - 18p_2 + 2p_2^2 - 14p_2(p_1 p_2 - 2\ell(\ell - 1))) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Alors, comme p_1 et p_2 jouent des rôles symétriques,

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 8G(\ell, 0, 0) + 4p_1 \overline{G}_3(K_2) + 4p_2 \overline{G}_3(K_1) + 4p_1 p_2 \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + p_1 p_2 (2\ell(\ell - 1) - p_1 p_2 - 2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (2(p_1^2 p_2 - 2p_1 \ell(\ell - 1)) - 18p_1 p_2 + 2p_1 p_2^2 \\
&\quad \quad - 14p_1 p_2(p_1 p_2 - 2\ell(\ell - 1)) - 4p_2 \ell(\ell - 1)) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 8G(\ell, 0, 0) + 4p_1 \overline{G}_3(K_2) + 4p_2 \overline{G}_3(K_1) + 4p_1 p_2 \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + p_1 p_2 (2\ell(\ell - 1) - p_1 p_2 - 2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (4\ell(\ell - 1)(7p_1 p_2 - p_1 - p_2) + 2p_1 p_2(p_1 + p_2 - 9 - 7p_1 p_2)) \cdot [T].
\end{aligned}$$

On déduit alors des deux égalités trouvées que

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 8G(0, p_1, p_2) - 8\ell\overline{G}_1(K_1, K_2) - 4\ell(\ell - 1) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + ((p_1p_2)^2 + 2\ell(\ell - 1) - (\ell(\ell - 1) - p_1p_2)^2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (14(p_1p_2)^2 + 2\ell(\ell - 1)(10 - 2(\ell + p_1 + p_2)) - 14(\ell(\ell - 1) - p_1p_2)^2) \cdot [T] \\
&\stackrel{4}{=} 8\overline{G}(K_1, K_2) - 8\ell\overline{G}_1(K_1, K_2) + 4p_1\overline{G}_3(K_2) + 4p_2\overline{G}_3(K_1) \\
&\quad + 4\lambda(K) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + (2\ell(\ell - 1) - 2p_1p_2 - (\ell(\ell - 1) - p_1p_2)^2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (2p_1p_2(p_1 + p_2 - 9) + 2\ell(\ell - 1)(10 - 2(\ell + p_1 + p_2)) \\
&\quad \quad - 14(\ell(\ell - 1) - p_1p_2)^2) \cdot [T] \\
&\stackrel{4}{=} 8\overline{G}(K_1, K_2) - 8\ell\overline{G}_1(K_1, K_2) + 4p_1\overline{G}_3(K_2) + 4p_2\overline{G}_3(K_1) \\
&\quad + 4\lambda(K) \cdot [M; \Theta] - \lambda(K)(\lambda(K) + 2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (-18\lambda(K) + 2(p_1p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) \\
&\quad \quad - 2\ell(\ell - 1)(2\ell - 1) - 14\lambda^2(K)) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Alors, par le théorème 5.3.12,

$$\begin{aligned}
8G(\ell, p_1, p_2) &\stackrel{4}{=} 4(1 - 2\ell)\overline{G}_1(K_1, K_2) - 4\overline{G}_2(K_1, K_2) + 4p_1\overline{G}_3(K_2) \\
&\quad + 4p_2\overline{G}_3(K_1) + 4\lambda(K) \cdot [M; \Theta] - \lambda(K)(\lambda(K) + 2) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + (2(p_1p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) - 2\ell(\ell - 1)(2\ell - 1) \\
&\quad \quad - 18\lambda(K) - 14\lambda^2(K)) \cdot [T].
\end{aligned}$$

□

6.4 Cas des feuilles algébriquement scindées

Dans ce paragraphe, on étudie les éléments $\overline{G}_1(K_1, K_2)$, $\overline{G}_2(K_1, K_2)$ et $\overline{G}_3(K)$ définis dans la notation 6.3.1 lorsque K_1, K_2 et K_3 sont des nœuds 0-parallélisés algébriquement scindés reliés par des bandes parallélisées. On en déduira une formule de chirurgie sur les nœuds bordant une surface de Seifert de genre 1 pour les invariants réels de degré 4. Dans un premier temps, on prouve un résultat géométrique sur les surfaces de Seifert bordées par ces nœuds.

6.4.1 Surfaces de Seifert d'un entrelacs algébriquement scindé

Si K est un nœud dans une sphère d'homologie entière M , on rappelle que K borde une surface orientée dans M , appelée *surface de Seifert de K* . Dans ce paragraphe, on considérera un entrelacs $K_1 \cup \dots \cup K_n$ dans une sphère d'homologie. Soit S_i une surface de Seifert du nœud K_i . Quitte à faire une isotopie, on supposera que les surfaces S_i sont en position générale, c'est-à-dire que, pour tout triplet i, j, k , $S_i \cap S_j$ est une courbe et $S_i \cap S_j \cap S_k$ est un ensemble discret de points. De même, on supposera que les nœuds K_i intersectent les surfaces S_i de façon transverse.

On rappelle qu'un entrelacs $K_1 \cup \dots \cup K_n$ dans une sphère d'homologie est dit *algébriquement scindé* si pour tout couple de composantes (K_i, K_j) , l'enlacement $lk(K_i, K_j)$ est nul. On dit qu'une courbe c (non nécessairement connexe) sur une surface connexe S est *non séparante* si $S \setminus c$ est connexe. Enfin, soit S est une surface dans une 3-variété M . Soit un plongement de $[-1, 1] \times D^2$ dans M tel que $(\partial[-1, 1] \times D^2)$ se plonge dans S en respectant l'orientation, et tel que

$$S \cap ([-1, 1] \times D^2) = (\partial[-1, 1] \times D^2).$$

On pose alors

$$S' = S \setminus (\{-1, 1\} \times D^2) \cup ([-1, 1] \times \partial D^2).$$

On dit qu'on obtient S' à partir de S en ajoutant une anse à S . Le but de ce paragraphe préliminaire est de montrer le théorème suivant.

Théorème 6.4.1. *Soit $K_1 \cup \dots \cup K_n$ un entrelacs orienté algébriquement scindé dans une sphère d'homologie entière M , et soient S_1, \dots, S_n des surfaces de Seifert des nœuds K_i (On peut supposer sans perte de généralité que les nœuds K_i sont reliés en un point à un graphe T plongé dans M qui ne touche pas les surfaces S_i). Alors il est possible d'ajouter des anses aux surfaces S_i dans $M \setminus (\cup_j K_j)$ de telle sorte que*

- $\forall \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}, S_i \cap K_j = \emptyset,$
- Si on note

$$c_{i,j} := S_i \cap S_j,$$

- alors, $\forall \{i, j\}, c_{i,j}$ est une courbe fermée simple dans $\text{Int}(S_i)$ et dans $\text{Int}(S_j),$
- $\forall i, \cup_{j \neq i} c_{i,j}$ est une union non séparante de courbes dans $S_i.$

La preuve du théorème s'appuie sur des arguments utilisés par J. Hoste pour démontrer ce résultat pour le cas $n = 2$ dans [Hst, Lemme 1.3]. On prouve dans un premier temps le lemme suivant.

Lemme 6.4.2. *Sous les hypothèses du théorème 6.4.1, il est possible d'ajouter des anses dans $M \setminus (\cup_j K_j)$ aux surfaces S_i de telle sorte que,*

$$\forall \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}, \quad S_i \cap K_j = \emptyset.$$

PREUVE : Comme $K_1 \cup \dots \cup K_n$ est algébriquement scindé, le nœud K_i n'intersecte pas algébriquement S_j si $i \neq j$. Par contre, il peut l'intersecter géométriquement un nombre pair de fois. On note N le nombre total de points d'intersection entre les nœuds K_i et les surfaces S_j . Si $N = 0$, les surfaces S_i remplissent les conditions du lemme. Sinon, on rajoute des anses aux surfaces S_i de telle sorte que N décroisse strictement, ce qui entraînera le lemme par récurrence sur N . Soit K_{i_0} un nœud qui intersecte géométriquement une surface S_{j_0} . On décore chaque point d'intersection de K_{i_0} avec S_{j_0} par le signe de cette intersection. Alors, comme la somme de tous ces signes vaut 0, il y a autant de + que de -, donc il existe un segment $I \subset K_{i_0}$ qui relie deux signes d'intersection contraires et dont l'intérieur n'intersecte pas S_{j_0} (il peut par contre intersecter d'autres surfaces S_j). On peut choisir I de telle sorte qu'il ne touche pas le graphe T . En posant $V = I \times D^2$ un voisinage tubulaire de I dans M , on rajoute une anse à S_{j_0} comme illustré sur la figure 6.8 en coupant deux petits disques dans S_{j_0} autour des deux points d'intersection et en recollant sur le bord de ces disques le tube $I \times S^1$.

La surface ainsi obtenue est orientée et a deux points d'intersection en moins avec K_{i_0} , tandis que le nombre de points d'intersection avec les autres nœuds n'a pas changé. Le résultat en découle alors par récurrence sur N . \square

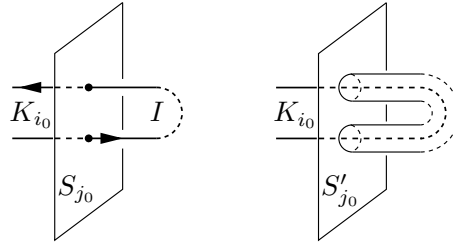


FIG. 6.8 – Ajout d'une anse

Le lemme 6.4.2 entraîne que si K_1, \dots, K_n est un entrelacs algébriquement scindé, alors on peut choisir des surfaces de Seifert S_i de telle sorte que pour tous i et j distincts, $c_{i,j} = S_i \cap S_j$ soit une union de courbes fermées simples dans $\text{Int}(S_i)$ et dans $\text{Int}(S_j)$. Dans le lemme 6.4.3, on montre que l'on peut ajouter des anses aux surfaces S_i de telle sorte que les courbes d'intersection restent inchangées et de telle sorte que $S_i \setminus (\cup_{j \neq i} c_{i,j})$ devienne connexe.

Lemme 6.4.3. *Sous les hypothèses du théorème 6.4.1, il est possible d'ajouter des anses aux surfaces S_i dans $M \setminus (\cup_j K_j)$ de telle sorte que*

- $\forall \{i, j\} \subset \{1, \dots, n\}, S_i \cap K_j = \emptyset,$
- $\forall i, \cup_{j \neq i} c_{i,j}$ est une union non séparante de courbes fermées dans $\text{Int}(S_i)$.

PREUVE : Grâce au lemme 6.4.2, on peut supposer que, pour tous i et j , les intersections $c_{i,j}$ sont des unions de courbes fermées dans $\text{Int}(S_i)$ et dans $\text{Int}(S_j)$. Pour tout i , on note N_i le nombre de composantes connexes de $S_i \setminus (\cup_{j \neq i} c_{i,j})$. On note

$$N = \sum_{i=1}^n (N_i - 1).$$

Si $N = 0$, alors les surfaces S_i vérifient les critères du lemme. Si $N > 0$, on exhibe un procédé d'ajout d'anses aux surfaces S_i fait de telle manière que les courbes d'intersection restent inchangées, mais où N décroît strictement. Le résultat en découlera par récurrence sur N . Si $N > 0$, il existe un entier i_0 tel que $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0,j})$ ne soit pas connexe. On choisit alors un point p sur une courbe $c_{i_0,j_0} = S_{i_0} \cap S_{j_0}$ adjacent à deux composantes connexes distinctes de $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0,j})$. On considère un voisinage tubulaire de S_{j_0}

$$V_{j_0} = ([-1, 1] \times S_{j_0}) \cup (K_{j_0} \times D^2)$$

comme représenté sur la figure 6.9, pris assez petit pour ne pas toucher les autres nœuds K_j , et paramétré par le segment $[-1, 1]$ de telle sorte que, pour toute autre surface S_j , $V_{j_0} \cap S_j$ s'identifie à $[-1, 1] \times (c_{j_0,j})$. Par cette

identification, on a choisi p pour que les deux points $p_+ := (\frac{1}{2}, p)$ et $p_- := (-\frac{1}{2}, p)$ de S_{i_0} ne soient pas dans la même composante connexe de $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0, j})$. On considère maintenant un chemin c dans S_{j_0} qui relie p à un point p_0 de $K_{j_0} = \partial S_{j_0}$.

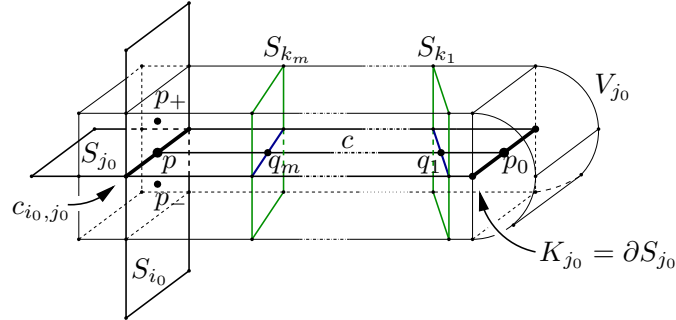


FIG. 6.9 – Relier un point au bord

Notons que c peut a priori intersecter d'autres courbes $c_{j_0, k}$, où k peut prendre n'importe quelle valeur entre 1 et n différente de j_0 (k peut valoir i_0 , par exemple). Par une isotopie de c , toutes les intersections peuvent être supposées transverses. On note q_1, \dots, q_m les points d'intersection de c avec les autres surfaces comme représenté sur la figure 6.9, et on note S_{k_r} la surface contenant q_r .

On construit alors un chemin \tilde{c} dans $V_{j_0} \setminus S_{j_0}$ entre p_+ et p_- comme représenté sur la figure 6.10. Alors \tilde{c} n'intersecte la surface S_{j_0} qu'en p_+ et en p_- . Pour tout r entre 1 et m , \tilde{c} intersecte la surface S_{k_r} en $(\pm \frac{1}{2}, q_r)$. En dehors de ces points, \tilde{c} vit dans $M \setminus (\cup_{j=1}^n S_j)$.

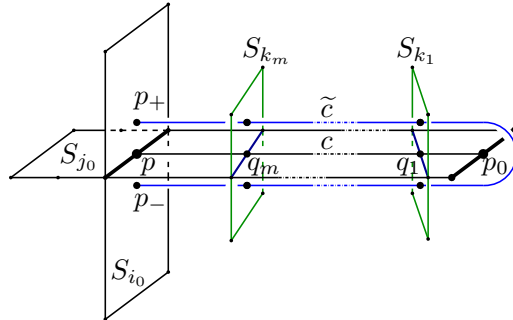


FIG. 6.10 – Relier p_+ à p_-

On rajoute ensuite une anse à S_{k_1} dans un voisinage tubulaire de \tilde{c} comme représenté sur la figure 6.8 de telle sorte qu'après ce rajout d'anse, l'intersection de S_{k_1} avec les autres surfaces reste inchangée, et S_{k_1} n'intersecte plus \tilde{c} aux points $(\pm \frac{1}{2}, q_1)$. On procède ensuite de la même manière avec S_{k_2} dans un voisinage plus petit de \tilde{c} qui évite l'anse rajoutée à S_{k_1} , et ainsi de suite avec toutes les surfaces S_{k_i} . On a ainsi ajouté m anses imbriquées les unes

dans les autres de telle sorte que \tilde{c} ne rencontre plus aucune surface S_j , et de telle sorte que les courbes d'intersection entre ces surfaces n'ont pas changé. Pour finir, on procède de la même manière avec S_{i_0} , à laquelle on rajoute une anse le long d'un voisinage tubulaire de \tilde{c} qui ne touche aucune des surfaces S_j , et qui relie les deux composantes connexes de $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0,j})$ touchées par p . On a donc fait décroître N_i d'au moins un (si S_{i_0} faisait partie des S_{k_r} qui se trouvaient sur le chemin de c , N_i a pu décroître de plus d'un dans les opérations d'ajout d'anses). Pour les surfaces S_{k_r} auxquelles on a rajouté des anses, le nombre de composantes connexes N_{k_r} a diminué ou stagné. Les autres surfaces ont gardé leur nombre de composantes connexes, puisque les courbes d'intersection sont restées inchangées. Le résultat en découle. \square

On peut maintenant prouver le théorème 6.4.1.

Preuve du théorème 6.4.1 : Grâce au lemme 6.4.3, on peut supposer que, pour tous i et j , c_{ij} est une union de courbes fermées dans $\text{Int}(S_i)$ et que $S_i \setminus (\cup_{j \neq i} c_{ij})$ est connexe. Pour tout $\{i, j\}$, on note N_{ij} le nombre de composantes connexes de c_{ij} , et on note

$$N = \sum_{i < j} (\max(N_{ij} - 1, 0)).$$

Si $N = 0$, alors les surfaces S_i répondent aux exigences du théorème. Si $N > 0$, on utilise un procédé de rajout d'anses aux S_i pour faire baisser N , et le théorème en résultera par récurrence sur N . Supposons que c_{i_0,j_0} ne soit pas connexe. Soient p_1 et p_2 deux points appartenant à deux composantes connexes différentes de c_{i_0,j_0} . Comme $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0,j})$ est connexe, il existe un chemin c dans S_{i_0} reliant p_1 à p_2 tel que l'intérieur de c soit compris dans $S_i \setminus (\cup_{j \neq i} c_{i_0,j})$ comme représenté sur la figure 6.11, en accord avec les orientations des deux composantes connexes données sur la figure par des flèches.

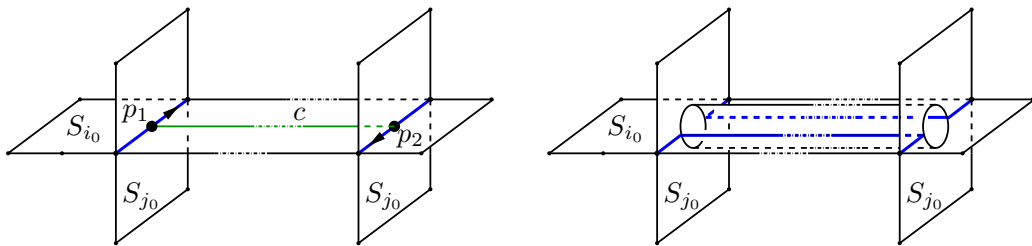


FIG. 6.11 – Connecter deux composantes connexes de c_{i_0,j_0}

On ajoute alors une anse $c \times S^1$ à S_{j_0} dans un voisinage tubulaire de c , comme représenté sur la figure 6.11. La surface obtenue est bien orientée. L'anse que l'on rajoute intersecte S_{i_0} le long de deux copies de c , si bien

que c_{ij} a perdu une composante connexe, tandis que les intersections avec les autres surfaces n'ont pas changé. Il faut ensuite s'assurer que $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0,j})$ reste connexe, ce qui n'est a priori pas le cas, car l'anse ajoutée à S_{j_0} sépare peut-être $S_{i_0} \setminus (\cup_{j \neq i_0} c_{i_0,j})$ en deux composantes connexes. Il suffit alors de rajouter une anse à S_{i_0} qui enjambe l'anse $c \times S^1$ pour connecter à nouveau ces deux composantes. Cette nouvelle anse, si elle est choisie dans un voisinage assez petit de $c \times S^1$, ne touche aucune autre surface S_j . Le théorème découle alors de cette construction par récurrence sur N . \square

Remarque 6.4.4. A priori, les courbes c_{ij} peuvent être vides. Si on le juge nécessaire, on peut les supposer non vides en rajoutant artificiellement des courbes d'intersection entre les surfaces de Seifert par isotopie avant de procéder aux ajouts d'anses.

6.4.2 Calcul de \overline{G}_3

Théorème 6.4.5. Soit K un nœud 0-parallélisé dans une sphère d'homologie entière M . Alors

$$\overline{G}_3(K) \stackrel{4}{=} -2\lambda(K) \cdot [T].$$

PREUVE : Comme dans le paragraphe 6.2, on peut obtenir K à partir d'un nœud U bordant un disque dans M par chirurgie sur un entrelacs en Y dont les composantes $G_1 \cup \dots \cup G_g$ plongées dans un épaississement d'une surface de Seifert de K sont représentées sur la figure 6.4. On note $G(K) \subset M$ l'entrelacs en Y à deux composantes représenté sur la figure 6.7 tel que $\overline{G}_3(K) \stackrel{4}{=} [M; G(K)]$. Alors

$$\overline{G}_3(K) \stackrel{4}{=} [M_{G_1 \cup \dots \cup G_g}, G(U)].$$

Donc, par le lemme 5.1.9,

$$\overline{G}_3(K) \stackrel{4}{=} - \sum_{i=1}^g [M; G(U) \cup G_i] + \sum_{\{i,j\}} [M; G(U) \cup G_i \cup G_j].$$

Par le lemme 5.2.1,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array} \right]$$

donc, avec les conventions de la figure 6.4, pour tout $i \in \{1, \dots, g\}$,

$$[M; G(U) \cup G_i] \stackrel{4}{=} 2 (\ell k(l_{1,i}, l_{2,i}) - \ell k^2(l_{1,i}, l_{2,i}) + \ell k(l_{1,i}, l_{1,i}) \ell k(l_{2,i}, l_{2,i})) \cdot [T],$$

où $lk(l_{s,i}, l_{s,i})$ désigne l'auto-enlacement de la feuille $l_{s,i}$. De plus, avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagramme} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \text{diagramme} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right]$$

donc, pour tout $\{i, j\} \subset \{1, \dots, g\}$,

$$[M; G(U) \cup G_i \cup G_j] \stackrel{4}{=} 4 (lk(l_{1,i}, l_{2,j})lk(l_{2,i}, l_{1,j}) - lk(l_{1,i}, l_{1,j})lk(l_{2,i}, l_{2,j})) \cdot [T].$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \overline{G}_3(K) &\stackrel{4}{=} -2 \left(\sum_{i=1}^g (lk(l_{1,i}, l_{1,i})lk(l_{2,i}, l_{2,i}) - lk(l_{1,i}, l_{2,i})(lk(l_{1,i}, l_{2,i}) - 1)) \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{(i,j) \\ i \neq j}} (lk(l_{1,i}, l_{1,j})lk(l_{2,i}, l_{2,j}) - lk(l_{1,i}, l_{2,j})lk(l_{2,i}, l_{1,j})) \right) \cdot [T] \\ &\stackrel{4}{=} -2\lambda(K) \cdot [T]. \quad \square \end{aligned}$$

6.4.3 Calcul de \overline{G}_2

Théorème 6.4.6. Soient K_1 et K_2 deux nœuds 0-parallélisés et algébriquement scindés dans une sphère d'homologie entière M . Soient S_1 et S_2 des surfaces de Seifert de K_1 et de K_2 telles que $c := S_1 \cap S_2$ est une courbe fermée simple dans $\text{Int}(S_1)$ et dans $\text{Int}(S_2)$. Soit b une bande parallélisée reliant K_1 à K_2 et qui n'intersecte pas les surfaces S_i . On note $c_{//}$ un parallèle de c induit par la surface S_1 . Alors

$$\overline{G}_2(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} 3lk(c, c_{//}) \cdot [T].$$

(si $c = \emptyset$, on pose $lk(c, c_{//}) = 0$.)

Remarque 6.4.7. L'enlacement $lk(c, c_{//})$ représente l'invariant de Sato-Levine que l'on trouvera défini dans [S].

PREUVE : Grâce au théorème 6.4.1, quitte à ajouter des anses à S_1 dans $M \setminus (K_1 \cup K_2 \cup b)$, on peut supposer que c est une courbe non séparante de S_1 (l'ajout d'anses ne change pas $lk(c, c_{//})$). Dans le cas où c est vide, on procède à une isotopie pour faire s'intersecter S_1 et S_2 le long d'une courbe bordant un disque dans S_1 et dans S_2 avant de rajouter des anses pour rendre la courbe d'intersection non bordante. L'auto-enlacement de c est alors nul.

Comme c est non séparante dans S_1 , il est possible de compléter $[c] \in H_1(S_1; \mathbb{Z})$ en une base de $H_1(S_1; \mathbb{Z})$. Géométriquement, cela entraîne que

par une isotopie de K_1 dans $M \setminus K_2$, on peut voir c comme la courbe $l_{1,1}$ représentée dans S_1 sur la figure 6.4. On remarque alors que parmi les courbes $l_{s,i}$ représentées sur la figure 6.4, seule $l_{2,1}$ enlace K_2 , car c'est la seule de ces courbes qui intersecte S_2 . De plus, on en déduit que

$$\ell k(l_{2,1}, K_2) = \pm 1.$$

On note $G_1 \cup \dots \cup G_g$ l'entrelacs en Y représenté plongé dans un épaississement de S_1 sur la figure 6.4. Le nœud K_1 se réalise alors dans $M \setminus K_2$ à partir du nœud trivial U par chirurgie sur $G_1 \cup \dots \cup G_g$.

On note $G(K_1, K_2) \subset M$ l'entrelacs en Y à deux composantes représenté sur la figure 6.7 tel que $\overline{G}_2(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} [M; G(K_1, K_2)]$. Alors

$$\overline{G}_2(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} [M_{G_1 \cup \dots \cup G_g}, G(U, K_2)].$$

Donc, par le lemme 5.1.9,

$$\overline{G}_2(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} - \sum_{i=1}^g [M; G(U, K_2) \cup G_i] + \sum_{\{i,j\}} [M; G(U, K_2) \cup G_i \cup G_j].$$

Par le lemme 5.2.1,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} - \left[\begin{array}{c} 3 \quad 3 \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array} \right]$$

donc, avec les conventions de la figure 6.4,

$$[M; G(U, K_2) \cup G_1] \stackrel{4}{=} -3\ell k^2(l_{2,1}, K_2)\ell k(l_{1,i}, l_{1,i}) \cdot [T] \stackrel{4}{=} -3\ell k(c, c_{//}) \cdot [T]$$

et, pour tout $i \in \{2, \dots, g\}$,

$$[M; G(U, K_2) \cup G_i] \stackrel{4}{=} 0.$$

De plus, avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ 2 \quad 5 \quad 5 \quad 3 \end{array} \right]$$

donc, pour tout $\{i, j\} \subset \{1, \dots, g\}$, comme une seule des quatre feuilles $l_{1,i}$, $l_{2,i}$, $l_{1,j}$ et $l_{2,j}$ peut enlacer K_2 ,

$$[M; G(U) \cup G_i \cup G_j] \stackrel{4}{=} 0.$$

Le résultat en découle. □

6.4.4 Calcul de \overline{G}_1

Théorème 6.4.8. Soient K_1 et K_2 deux nœuds 0-parallélisés et algébriquement scindés dans une sphère d'homologie entière M . Soit b une bande parallélisée reliant K_1 à K_2 . On note $K_1 \#_b K_2$ la somme en bande de K_1 et de K_2 le long de b . Alors

$$\overline{G}_1(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} -(\lambda(K_1 \#_b K_2) - \lambda(K_1) - \lambda(K_2)) \cdot [T].$$

PREUVE : Soient S_1 et S_2 des surfaces de Seifert de K_1 et de K_2 qui ne touchent pas b et qui s'intersectent en une courbe fermée simple c non séparante dans S_1 et dans S_2 . Par une isotopie de K_1 dans le complémentaire de K_2 , on peut faire en sorte que c corresponde à la courbe $l_{1,g}$ représentée dans S_1 sur la figure 6.4. On note $G_1 \cup \dots \cup G_g$ l'entrelacs en Y plongé dans un épaississement de S_1 représenté sur la figure 6.4. Le nœud K_1 se réalise alors dans $M \setminus K_2$ à partir du nœud trivial U par chirurgie sur $G_1 \cup \dots \cup G_g$. On note $G(K_1, K_2) \subset M$ l'entrelacs en Y à deux composantes représenté sur la figure 6.7 tel que $\overline{G}_1(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} [M; G(K_1, K_2)]$. Alors, par le lemme 5.1.9,

$$\overline{G}_1(K_1, K_2) \stackrel{4}{=} - \sum_{i=1}^g [M; G(U, K_2) \cup G_i] + \sum_{\{i,j\}} [M; G(U, K_2) \cup G_i \cup G_j].$$

On remarque alors que, pour tous entiers i et j ,

$$[M, G(U, K_2) \cup G_i \cup G_j] \stackrel{4}{=} 0.$$

De plus, comme on l'a déjà fait remarquer dans la preuve du théorème 6.4.6, pour tout couple $(s, i) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, g\}$, $\ell k(l_{s,i}, K_2) = 0$ sauf pour $(s, i) = (2, g)$, auquel cas $\ell k(l_{2,g}, K_2) = \pm 1 = \varepsilon$. On en déduit que K_2 borde une surface S'_2 dans M qui n'intersecte $\sqcup_i G_i$ qu'en un seul point, qui appartient à $l_{2,g}$. On peut représenter S'_2 comme sur la figure 6.12.

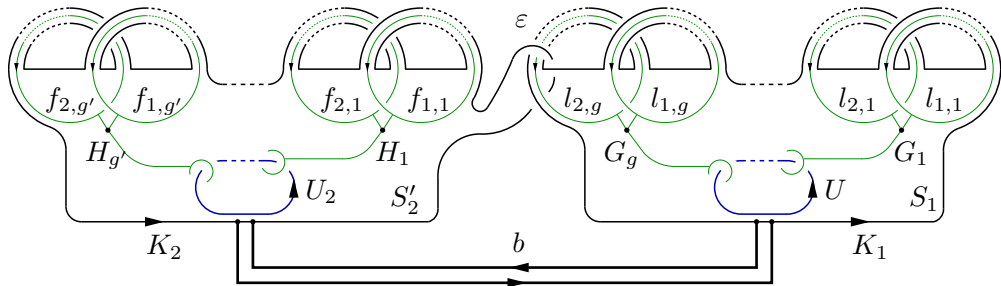


FIG. 6.12 – La surface S'_2

On note $H_1 \cup \dots \cup H_{g'}$ l'entrelacs en Y représenté plongé dans un épaississement de S'_2 sur la figure 6.12, et on note $f_{s,j}$ les feuilles de cet entrelacs

en Y . Pour tout $i < g$, le nœud K_2 se réalise dans $M \setminus G_i$ à partir du nœud trivial U_2 par chirurgie sur $H_1 \cup \dots \cup H_g$. Donc, par le lemme 5.1.9, pour tout $i < g$,

$$\begin{aligned}
 [M, G(U, K_2) \cup G_i] &\stackrel{4}{=} - \sum_{j=1}^{g'} [M, G(U, U_2) \cup G_i \cup H_j] \\
 &\stackrel{4}{=} -2 \sum_{j=1}^{g'} (\ell k(l_{1,i}, f_{2,j}) \ell k(l_{2,i} f_{1,j}) - \ell k(l_{1,i}, f_{1,j}) \ell k(l_{2,i} f_{2,j})) \cdot [T].
 \end{aligned}$$

De plus, par applications successives du lemme 5.2.1 et par les lemmes 5.3.3 et 6.3.21,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \quad 2 \quad \varepsilon \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ \varepsilon \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] + \varepsilon \left[\begin{array}{c} \text{diagram} \\ 1 \\ 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

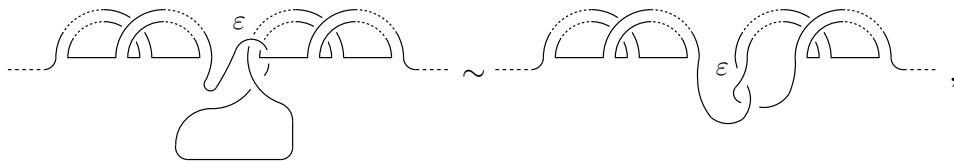
On en déduit que

$$\begin{aligned}
 [M, G(U, K_2) \cup G_g] &\stackrel{4}{=} \left(-2 \sum_{j=1}^{g'} (\ell k(l_{1,g}, f_{2,j}) \ell k(l_{2,g} f_{1,j}) \right. \\
 &\quad \left. - \ell k(l_{1,g}, f_{1,j}) \ell k(l_{2,g} f_{2,j})) + \varepsilon \ell k(c, c_{//}) \right) \cdot [T].
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \overline{G}_1(K_1, K_2) &\stackrel{4}{=} \left(2 \sum_{(i,j)} (\ell k(l_{1,i}, f_{2,j}) \ell k(l_{2,i} f_{1,j}) \right. \\
 &\quad \left. - \ell k(l_{1,i}, f_{1,j}) \ell k(l_{2,i} f_{2,j})) - \varepsilon \ell k(c, c_{//}) \right) \cdot [T].
 \end{aligned}$$

Grâce à l'isotopie de nœud (non parallélisé)



on remarque que les feuilles $l_{s,i}$ et $f_{r,j}$ forment une base symplectique d'une surface de Seifert de $K_1 \#_b K_2$ si l'on twist $l_{2,g}$ d'un ε . Il suffit alors d'utiliser la formule de l'invariant de Casson pour en déduire que $\overline{G}_1(K_1, K_2)$ vaut $(\lambda(K_1) + \lambda(K_2) - \lambda(K_1 \#_b K_2)) \cdot [T]$ à 4-congruence près. \square

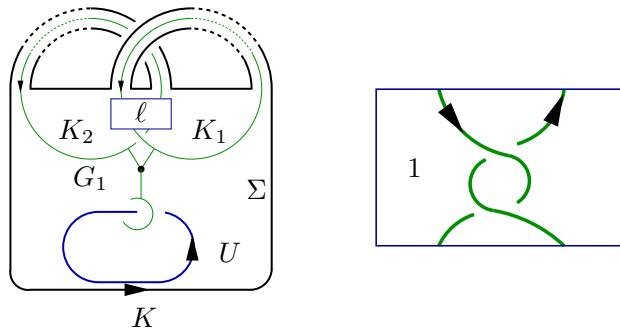
6.4.5 Conclusion pour les nœuds de genre 1

On peut maintenant démontrer le résultat suivant, qui donne une formule de chirurgie pour les invariants réels de degré 4 sur les nœuds admettant une surface de Seifert de genre 1.

Théorème 6.4.9. *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M bordant une surface de Seifert Σ de genre 1. Soit G_1 le graphe en Y représenté sur la figure 6.13 tel que K s'obtient à partir du nœud trivial U par chirurgie sur G_1 . Soit \tilde{K}_1 et \tilde{K}_2 les deux courbes dans un épaissement de Σ correspondant aux feuilles de G_1 . On note ℓ l'enlacement de \tilde{K}_1 et de \tilde{K}_2 , et on note p_i l'auto-enlacement de \tilde{K}_i . Par isotopie, on peut supposer que \tilde{K}_1 et \tilde{K}_2 passent par une boîte avec ℓ motifs algébriques comme représenté sur la figure 1.4, de sorte que les nœuds K_1 et K_2 obtenus à partir de \tilde{K}_1 et de \tilde{K}_2 en remplaçant la boîte ℓ par la boîte 0 ne soient pas enlacés. Alors*

$$\begin{aligned} 8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) \stackrel{4}{=} & 4n\lambda(K) \cdot [M; \Theta] + n\lambda(K)(n\lambda(K) - 2) \cdot [\Theta^2] \\ & + \left(4n(2\ell - 1)(\lambda(K_1 \#_b K_2) - \lambda(K_1) - \lambda(K_2)) \right. \\ & - 12nSL(K_1, K_2) - 8np_1\lambda(K_2) - 8np_2\lambda(K_1) \\ & + 2n(p_1p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) - 2n\ell(\ell - 1)(2\ell - 1) \\ & \left. - 20n\lambda(K) + 2n^2(-1 + 7\lambda(K))\lambda(K) \right) \cdot [T], \end{aligned}$$

où $\lambda(K) = p_1p_2 - \ell(\ell - 1)$ est l'invariant de Casson du nœud K , et où $SL(K_1, K_2)$ est l'invariant de Sato-Levine de (K_1, K_2) , correspondant à l'auto-enlacement de la courbe d'intersection des surfaces de Seifert de K_1 et de K_2 .

FIG. 6.13 – K_1 et K_2 .

PREUVE : Grâce aux théorèmes 6.3.2, 6.4.5, 6.4.6 et 6.4.8,

$$\begin{aligned} 8G((K_1, K_2, b); (\ell, p_1, p_2)) &\stackrel{4}{=} 4\lambda(K) \cdot [M; \Theta] - \lambda(K)(\lambda(K) + 2) \cdot [\Theta^2] \\ &+ \left(4(2\ell - 1)(\lambda(K_1 \#_b K_2) - \lambda(K_1) - \lambda(K_2)) - 12SL(K_1, K_2) \right. \\ &\quad - 8p_1\lambda(K_2) - 8p_2\lambda(K_1) + 2(p_1p_2 - 2\ell(\ell - 1))(p_1 + p_2) \\ &\quad \left. - 2\ell(\ell - 1)(2\ell - 1) - 18\lambda(K) - 14\lambda^2(K) \right) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Or, d'après le théorème 6.2.1,

$$\begin{aligned} 8(M_{(K; \frac{1}{n})} - M) &\stackrel{4}{=} n(8G((K_1, K_2, b); (\ell, p_1, p_2)) + P_2(M; K)) \\ &\quad + n^2 P_2(M; K) \end{aligned}$$

où, avec les conventions de la notation 6.2.3, et en utilisant le lemme 6.3.36,

$$\begin{aligned} P_2(M; K) &= -2F_1(1) + 2F_2(1, 1) + 8F_3(1, 1) + F_4(1, 1) \\ &\quad - 2F_5(1, 1, 1) + F_6(1, 1, 1, 1) - 4F_7(1, 1, 1, 1) \\ &= \left(\ell^2 + 2\ell(p_1p_2 - \ell^2) + (p_1p_2 - \ell^2)^2 \right) \cdot [\Theta^2] \\ &\quad + \left(-2\ell + 2(2p_1p_2 + 3\ell^2) + 8(\ell^2 - p_1p_2) + 2(p_1p_2 + \ell^2) \right. \\ &\quad \left. + 8\ell(p_1p_2 - \ell^2) + 14(p_1p_2 - \ell^2)^2 + 20\ell(p_1p_2 - \ell^2) \right) \cdot [T] \\ &= \lambda^2(K) \cdot [\Theta^2] + \left(-2\lambda(K) + 14\ell^2 + 28\ell(p_1p_2 - \ell^2) \right. \\ &\quad \left. + 14(p_1p_2 - \ell^2)^2 \right) \cdot [T] \\ &= \lambda^2(K) \cdot [\Theta^2] + \left(-2\lambda(K) + 14\lambda^2(K) \right) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Le résultat en découle. □

6.5 Cas des nœuds de genre 2

Notation 6.5.1. On considère un plongement de D_4 dans M . Ce plongement induit un plongement de l'entrelacs K_1, K_2, K_3, K_4 constitué des courbes de D_4 représentées sur la figure 6.14. On oriente la surface D_4 de telle sorte que les orientations induites sur les nœuds soient représentées comme sur la figure 6.14. On munit les nœuds K_i de la parallélisation induite par la surface D_4 . On suppose que le plongement de D_4 est tel que l'entrelacs $\cup_i K_i$ est algébriquement scindé et tel que les nœuds soient 0-parallélisés. La donnée du plongement de D_4 est équivalente au plongement des nœuds parallélisés K_i et des bandes b_1, b_2 et b_3 représentées dans D_4 sur la figure 6.14.

Pour tous entiers $L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{23}, L_{24}, L_{34}, p_1, p_2, p_3$ et p_4 , on note

$$H(K_1, K_2, K_3, K_4; b_1, b_2, b_3; (L_{12}, L_{13}, L_{14}, L_{23}, L_{24}, L_{34}), (p_1, p_2, p_3, p_4))$$

l'élément de $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ défini comme la classe de 4-congruence du crochet de l'entrelacs en Y représenté plongé dans un épaississement du disque D_4 sur la figure 6.15. Les enlacements des feuilles de H sont matérialisés par des flèches doubles. Par commodité de notation, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur une donnée mise en jeu (les nœuds K_i , les bandes b_i , les enlacements L_{ij} ou les auto-enlacements p_i), on se permettra de ne pas la faire apparaître. Ainsi, si on ne fait varier que les auto-enlacements, on désignera H par $H(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Si, pour tout $\{i, j\}$, $L_{ij} = p_i = 0$, on désignera $H(K_i; b_i; (0, \dots, 0), (0, 0, 0, 0))$ par $\overline{H}(K_1, K_2, K_3, K_4)$.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}_4$, on notera

$$J(K_i, K_{i+1}, K_{i+2}, (L_{i,i+2}, L_{i+1,i+2}, (p_i, p_{i+1}, p_{i+2})))$$

l'élément de $\mathcal{F}_2/\overline{\mathcal{F}}_5$ défini comme la classe de 4-congruence du crochet de l'entrelacs en Y représenté sur la figure 6.16, et dont les arêtes sont plongées dans les bandes $b_1 \cup b_2 \cup b_3$. On désignera aussi J par \overline{J} si les enlacements et les auto-enlacements sont nuls.

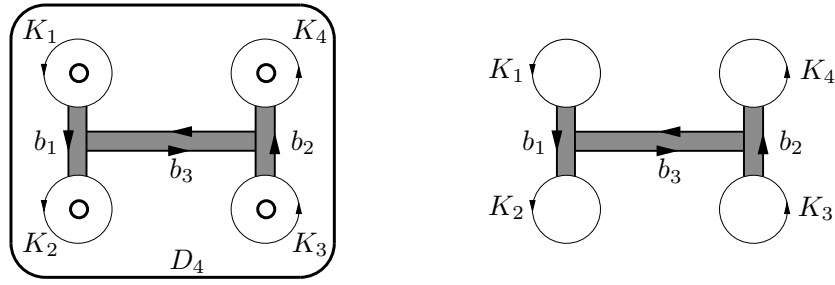


FIG. 6.14 – $(K_1, K_2, K_3, K_4; b_1, b_2, b_3)$ associé à D_4

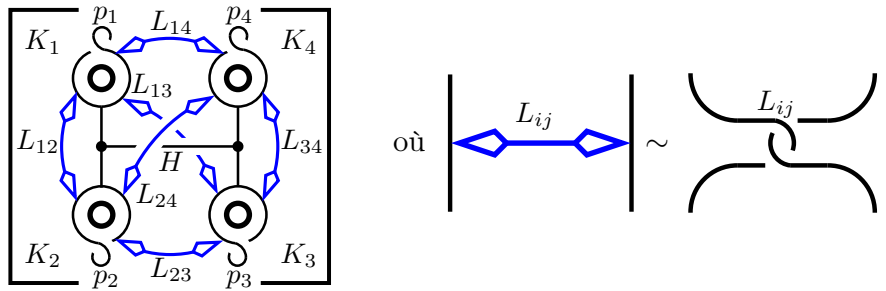


FIG. 6.15 – $H(K_i; b_i; (L_{ij}), (p_i))$.

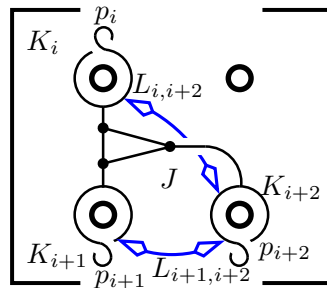


FIG. 6.16 – $J(K_i; b_i; (L_{ij}), (p_i))$.

Dans cette partie, on s'intéresse au cas des nœuds bordant une surface de seifert de genre 2. On prouve d'abord dans les paragraphes 6.5.1 et 6.5.2 le théorème suivant, qui nous permet de nous affranchir de l'enlacement et de l'auto-enlacement des feuilles de l'entrelacs en Y associé à un nœud de genre 2.

Théorème 6.5.2. *Avec les conventions de la notation 6.5.1,*

$$\begin{aligned}
2H(K_i; b_i; (L_{ij}), (p_i)) &\stackrel{4}{=} 2\overline{H}(K_1, K_2, K_3, K_4) \\
&\quad -2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + ((L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 + L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + 2 \left(L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + L_{23}\overline{G}_1(K_1, K_4) \right. \\
&\quad \quad \left. - L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - L_{13}\overline{G}_1(K_2, K_4) \right) \\
&\quad + 4 \left((L_{14} - L_{24})\overline{J}(K_1, K_2, K_3) + (L_{23} - L_{24})\overline{J}(K_3, K_4, K_1) \right. \\
&\quad \quad \left. + (L_{23} - L_{13})\overline{J}(K_4, K_1, K_2) + (L_{14} - L_{13})\overline{J}(K_2, K_3, K_4) \right) \\
&\quad + 2 \left(p_1\overline{J}(K_2, K_3, K_4) + p_2\overline{J}(K_3, K_4, K_1) \right. \\
&\quad \quad \left. + p_3\overline{J}(K_4, K_1, K_2) + p_4\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \right) \\
&\quad + \left(2(L_{12}(L_{12} - 1) - p_1p_2)(L_{34}(L_{34} - 1) - p_3p_4) \right. \\
&\quad \quad - 2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
&\quad \quad + 2(p_1L_{23}L_{24} + p_2L_{13}L_{14} + p_3L_{14}L_{24} + p_4L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad - 6(p_1L_{23}L_{24}L_{34} + p_2L_{13}L_{14}L_{34} + p_3L_{12}L_{14}L_{24} + p_4L_{12}L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad + (p_1p_3L_{24} + p_1p_4L_{23} + p_2p_3L_{14} + p_2p_4L_{13}) \\
&\quad \quad + 3(p_1p_3L_{24}^2 + p_1p_4L_{23}^2 + p_2p_3L_{14}^2 + p_2p_4L_{13}^2) \\
&\quad \quad + 6L_{12}L_{34}(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) + 6(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 \\
&\quad \quad - 2(L_{12} + L_{34})(2L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) + 2(L_{13}L_{24} - 2L_{14}L_{23})(L_{13} + L_{24}) \\
&\quad \quad \left. + 2(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23})(L_{23} + L_{14}) + 8L_{13}L_{24} - 10L_{14}L_{23} \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Dans le paragraphe 6.5.3, on étudie l'application \overline{J} . A ce jour, on n'a pas calculé \overline{H} en toute généralité, ce qui constitue la dernière étape avant de donner une formule de chirurgie en tout genre. Celle-ci se déduirait des formules de chirurgie en genre 1 et en genre 2 grâce au théorème 6.2.1.

6.5.1 Simplification des enlacements

Dans ce paragraphe, on veut démontrer le théorème suivant.

Théorème 6.5.3. *Avec les conventions de la notation 6.5.1,*

$$\begin{aligned}
2H((L_{ij})_{i,j}) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{ij} = 0) - 2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + ((L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 + L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + 2 \left(L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + L_{23}\overline{G}_1(K_1, K_4) \right. \\
&\quad \quad \left. - L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - L_{13}\overline{G}_1(K_2, K_4) \right) \\
&\quad + 4 \left((L_{14} - L_{24})\overline{J}(K_1, K_2, K_3) + (L_{23} - L_{24})\overline{J}(K_3, K_4, K_1) \right. \\
&\quad \quad \left. + (L_{23} - L_{13})\overline{J}(K_4, K_1, K_2) + (L_{14} - L_{13})\overline{J}(K_2, K_3, K_4) \right) \\
&\quad + \left(2(L_{12}(L_{12} - 1) - p_1p_2)(L_{34}(L_{34} - 1) - p_3p_4) - 2p_1p_2p_3p_4 \right. \\
&\quad \quad - 2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
&\quad \quad + 2(p_1L_{23}L_{24} + p_2L_{13}L_{14} + p_3L_{14}L_{24} + p_4L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad - 6(p_1L_{23}L_{24}L_{34} + p_2L_{13}L_{14}L_{34} + p_3L_{12}L_{14}L_{24} + p_4L_{12}L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad + (p_1p_3L_{24} + p_1p_4L_{23} + p_2p_3L_{14} + p_2p_4L_{13}) \\
&\quad \quad + 3(p_1p_3L_{24}^2 + p_1p_4L_{23}^2 + p_2p_3L_{14}^2 + p_2p_4L_{13}^2) \\
&\quad \quad + 6L_{12}L_{34}(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) + 6(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 \\
&\quad \quad \left. - 2(L_{12} + L_{34})(2L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) + 2(L_{13}L_{24} - 2L_{14}L_{23})(L_{13} + L_{24}) \right. \\
&\quad \quad \left. + 2(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23})(L_{23} + L_{14}) + 8L_{13}L_{24} - 10L_{14}L_{23} \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

• Etude de $H(L_{12}, L_{34})$

Lemme 6.5.4. *Avec les conventions de la notation 6.5.1,*

$$\begin{aligned}
H(L_{12}, L_{34}) &\stackrel{4}{=} H(0, 0) \\
&\quad + \left((L_{12}(L_{12} - 1) - p_1p_2)(L_{34}(L_{34} - 1) - p_3p_4) \right. \\
&\quad \quad - p_1p_2p_3p_4 + 3L_{12}L_{34}(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) \\
&\quad \quad \left. - (L_{12} + L_{34})(2L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) \right. \\
&\quad \quad \left. - 3(p_1L_{23}L_{24}L_{34} + p_2L_{13}L_{14}L_{34} + p_3L_{12}L_{14}L_{24} + p_4L_{12}L_{13}L_{23}) \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Sous-lemme 6.5.5. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] &\stackrel{4}{=} \left(2(L_{12}^2 - p_1 p_2) L_{34} + 3L_{12} (L_{14} L_{23} + L_{13} L_{24}) \right. \\ &\quad \left. - 3(p_1 L_{23} L_{24} + p_2 L_{13} L_{14}) \right) \cdot [T] \\ \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 3 & 4 \end{array} \right] &\stackrel{4}{=} \left(2L_{12} L_{34} + 2L_{13} L_{24} + L_{14} L_{23} \right) \cdot [T]. \end{aligned}$$

PREUVE : La première égalité découle du fait que

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} L_{12} \left[\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] - p_1 \left[\begin{array}{cc} 2 & 4 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 2 & 3 \end{array} \right] - L_{14} \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 3 & 1 \end{array} \right] - 2L_{13} \left[\begin{array}{cc} 2 & 2 \\ | & | \\ \text{---} & \text{---} \\ | & | \\ 1 & 4 \end{array} \right].$$

La deuxième égalité est presque immédiate. \square

Preuve du lemme 6.5.4 : Grâce au lemme 6.3.13 et au sous-lemme 6.5.5,

$$\begin{aligned} H(L_{12}, L_{34} + 1) &\stackrel{4}{=} H(L_{12}, L_{34}) \\ &\quad + \left(2(L_{12}(L_{12} - 1) - p_1 p_2) L_{34} + 3L_{12} (L_{13} L_{24} + L_{14} L_{23}) \right. \\ &\quad \left. - 3(p_1 L_{23} L_{24} + p_2 L_{13} L_{14}) - 2L_{13} L_{24} - L_{14} L_{23} \right) \cdot [T] \end{aligned}$$

donc, par récurrence sur L_{34} ,

$$\begin{aligned} H(L_{12}, L_{34}) &\stackrel{4}{=} H(L_{12}, 0) \\ &\quad + \left((L_{12}(L_{12} - 1) - p_1 p_2) L_{34} (L_{34} - 1) + 3L_{12} L_{34} (L_{13} L_{24} + L_{14} L_{23}) \right. \\ &\quad \left. - 3(p_1 L_{23} L_{24} L_{34} + p_2 L_{13} L_{14} L_{34}) - 2L_{13} L_{24} L_{34} - L_{14} L_{23} L_{34} \right) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Par symétrie entre (1, 2) et (3, 4),

$$\begin{aligned} H(L_{12}, L_{34}) &\stackrel{4}{=} H(0, L_{34}) \\ &\quad + \left((L_{34}(L_{34} - 1) - p_3 p_4) L_{12} (L_{12} - 1) + 3L_{12} L_{34} (L_{13} L_{24} + L_{14} L_{23}) \right. \\ &\quad \left. - 3(p_3 L_{14} L_{24} L_{12} + p_4 L_{13} L_{23} L_{12}) - 2L_{13} L_{24} L_{12} - L_{14} L_{23} L_{12} \right) \cdot [T]. \end{aligned}$$

On en déduit le résultat. \square

• Etude de $H(L_{13}, L_{24}, L_{12} = L_{34} = 0)$

On veut démontrer dans ce paragraphe le lemme suivant.

Lemme 6.5.6. Avec les conventions de la notation 6.5.1,

$$\begin{aligned}
 2H(L_{13}, L_{24}, L_{12} = L_{34} = 0) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13} = L_{24} = L_{12} = L_{34} = 0) \\
 &- 2L_{13}L_{24} \cdot [M; \Theta] + (L_{13}L_{24}(L_{13}L_{24} + 1) - 2L_{13}L_{14}L_{23}L_{24}) \cdot [\Theta^2] \\
 &- 2L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - 2L_{13}\overline{G}_1(K_2, K_4) - 4L_{24}\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \\
 &- 4L_{24}\overline{J}(K_3, K_4, K_1) - 4L_{13}\overline{J}(K_4, K_1, K_2) - 4L_{13}\overline{J}(K_2, K_3, K_4) \\
 &+ (-2L_{13}L_{24}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + 8L_{13}L_{24} + 2L_{13}L_{24}(L_{13} + L_{24}) \\
 &\quad + p_1p_3L_{24}(1 + 3L_{24}) + p_2p_4L_{13}(1 + 3L_{13}) + 2L_{13}L_{24}(L_{23} + L_{14}) \\
 &\quad + 2(p_1L_{23}L_{24} + p_2L_{13}L_{14} + p_3L_{14}L_{24} + p_4L_{13}L_{23}) \\
 &\quad + 6L_{13}^2L_{24}^2 - 12L_{24}L_{14}L_{23}L_{13} - 4(L_{13} + L_{24})L_{14}L_{23}) \cdot [T].
 \end{aligned}$$

Dans un premier temps, on prouve les résultats suivants.

Lemme 6.5.7. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + 5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 4} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ \text{Diagram 5} \\ 2 \ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{Diagram 6} \\ 2 \ 1 \end{array} \right] \\
 &+ 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Par isotopie,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right],$$

donc par applications successives du lemme 5.2.11,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 4} \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \text{Diagram 5} \\ 2 \ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{Diagram 4} \\ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le résultat se déduit alors du lemme 6.3.25. □

Sous-lemme 6.5.8. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

PREUVE : Par les lemmes 5.3.4 et 6.3.6,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} - \left[\begin{array}{c} 3 \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \\ &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

□

Sous-lemme 6.5.9. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 4 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} \right] \\ &\quad -2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.1 et aux relations AS et IHX,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

Le résultat se déduit alors du sous-lemme 6.5.8.

□

Sous-lemme 6.5.10. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] -4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 3 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &+2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &+4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Par le lemme 6.3.10,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 3 \quad 2 \\ \text{---} \\ 1 \quad 1 \end{array} \right].$$

Alors, par le lemme 6.5.7 et par le sous-lemme 6.5.8,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} -2 \left[\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] +5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 3 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &-4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

□

Lemme 6.5.11. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ 2 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] -2 \left[\begin{array}{c} \circ \\ \text{---} \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] -4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] -4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} \right] \\
 &+5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 3 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 1 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 4 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \quad 1 \end{array} \right] \\
 &+2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 3 \quad 4 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 3 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 1 \quad 3 \end{array} \right] +4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] +4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 3 \quad 3 \end{array} \right] \\
 &-4 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] -2 \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \text{---} \\ 2 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] +2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 3 \quad 1 \quad 3 \end{array} \right] -2 \left[\begin{array}{c} \text{---} \quad \text{---} \\ 1 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Par le lemme 6.3.10,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{} \\ \textcircled{} \end{array} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \right] + \left[\begin{array}{c} \textcircled{} \\ \textcircled{} \end{array} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 1 \text{---} 3 \text{---} 4 \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 2 \text{---} 3 \text{---} 4 \right] \\ &+ 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right]. \end{aligned}$$

Alors, par les sous-lemmes 6.5.9 et 6.5.10,

$$\begin{aligned} 2 \left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] &\stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} \textcircled{} \\ \textcircled{} \end{array} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} \textcircled{} \\ \textcircled{} \end{array} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] + 5 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} 1 \text{---} 1 \text{---} 3 \right] \\ &+ 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} 1 \text{---} 3 \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} 3 \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} 1 \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} 3 \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] \\ &+ 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 1 \text{---} 3 \right] - 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 4 \end{array} \text{---} 3 \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} 4 \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} 4 \right] \\ &- 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 1 \text{---} 3 \right] - 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \text{---} 3 \text{---} 2 \text{---} 3 \right] + 4 \left[\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right]. \end{aligned}$$

□

Sous-lemme 6.5.12. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right].$$

PREUVE : Grâce aux lemmes 5.2.1, 5.2.4 et 6.3.21,

$$\left[\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \textcircled{} \\ \textcircled{} \end{array} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \text{---} \textcircled{4} \text{---} \textcircled{3} \right].$$

□

Lemme 6.5.13. Avec les conventions de la notation 6.5.1,

$$\begin{aligned} J((L_{13}, L_{23}), (p_1, p_2, p_3)) &\stackrel{4}{=} \overline{J}(K_1, K_2, K_3) \\ &+ (p_1 L_{23} + p_2 L_{13} + L_{13} L_{23}) \cdot [T]. \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce au lemme 5.2.1,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

Donc, grâce au sous-lemme 6.5.12,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 2 \\ 3 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right].$$

On en déduit que

$$J((L_{13}, L_{23}), (p_1, p_2, p_3)) \stackrel{4}{=} J((0, L_{23}), (p_1, p_2, p_3)) + (p_2 L_{13} + L_{13} L_{23}) \cdot [T].$$

De la même manière, par applications répétées du lemme 5.2.1, et par le lemme 6.3.21, on obtient

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ 2 \quad 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 1 \\ 3 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right],$$

ce qui entraîne le résultat. □

Lemme 6.5.14. *Avec les conventions de la notation 5.1.17,*

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{4}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + [M; \Theta] + [T] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 2 \\ 2 \end{array} \right] \\ + 7 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \Theta$$

PREUVE : Par application du lemme 6.3.20,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] + 6 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \Theta.$$

Donc, grâce au sous-lemme 6.5.12,

$$\left[\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \circ \quad \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ 1 \\ 1 \end{array} \right] + 7 \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ 1 \\ 2 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \text{Diagram 6} \\ 1 \quad 2 \end{array} \right] \Theta.$$

En utilisant cette égalité, on obtient

$$\left[\begin{array}{c} \overline{1} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] \stackrel{n \pm 3}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 2 \\ \diagup \diagdown \\ 2 \end{array} \right]$$

et le résultat en découle par le lemme 6.3.14. \square

Preuve du lemme 6.5.6 : Grâce au lemme 6.5.11, si on suppose que $L_{12} = L_{34} = 0$,

$$\begin{aligned} 2H(L_{13}, L_{24} + 1) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13}, L_{24}) - 2 \left[\begin{array}{c} L_{13} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] \\ &- 4J(K_1, K_2, K_3, L_{13}, L_{23}, (p_i)) - 4J(K_3, K_4, K_1, L_{13}, L_{14}, (p_i)) \\ &+ (5L_{13} + (2p_1p_3 + 3L_{13}^2) + (2p_1p_3 + 8L_{13}^2) + 2(p_2 + p_4)L_{13} + 2p_1L_{23} \\ &+ 2p_3L_{14} + 6L_{13}L_{23} + 6L_{13}L_{14} + 4p_1L_{23} + 4p_3L_{14} - 4L_{14}L_{23} \\ &+ 4L_{13}L_{24} - 2(4L_{14}L_{13}L_{23} - L_{13}(2L_{13}L_{24} + 2L_{14}L_{23}) - p_1p_3L_{24} \\ &- 2L_{13}(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})) + 4(p_1p_3 + L_{13}^2) - 2(-2p_1p_3L_{24} \\ &+ 2L_{13}(L_{14}L_{23} - L_{13}L_{24})). [T] \\ &+ (2L_{13}^2 - 2L_{13}(L_{14}L_{23} - L_{13}L_{24})). [\Theta^2], \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} 2H(L_{13}, L_{24} + 1) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13}, L_{24}) - 2 \left[\begin{array}{c} L_{13} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] \\ &- 4J(K_1, K_2, K_3, L_{13}, L_{23}, (p_i)) - 4J(K_3, K_4, K_1, L_{13}, L_{14}, (p_i)) \\ &+ (5L_{13} + 8p_1p_3 + 15L_{13}^2 + 2(p_2 + p_4)L_{13} + 6(p_1L_{23} + p_3L_{14}) \\ &+ 6L_{13}(L_{23} + L_{14}) + 4(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})(3L_{13} + 1) + 6p_1p_3L_{24}). [T] \\ &+ (2L_{13}(L_{13} + (L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}))). [\Theta^2]. \end{aligned}$$

Or, grâce au lemme 6.5.14 et au théorème 6.3.18 (avec $\ell = 0$),

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c} L_{13} \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] &\stackrel{4}{=} \overline{G}_1(K_1, K_3) + L_{13} \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2}L_{13}(L_{13} - 1) \cdot [\Theta^2] \\ &+ \left(L_{13}(1 + p_1 + p_3) + \frac{7}{2}L_{13}(L_{13} - 1) + 2p_1p_3 \right) \cdot [T], \end{aligned}$$

donc en utilisant le lemme 6.5.13, on obtient

$$\begin{aligned} 2H(L_{13}, L_{24} + 1) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13}, L_{24}) - 2\overline{G}_1(K_1, K_3) - 2L_{13} \cdot [M; \Theta] \\ &+ \left(-L_{13}(L_{13} - 1) + 2L_{13}(L_{13} + (L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})) \right) \cdot [\Theta^2] \\ &- 4\overline{J}(K_1, K_2, K_3) - 4\overline{J}(K_3, K_4, K_1) + \left(-2L_{13}(1 + p_1 + p_3) \right. \\ &- 7L_{13}(L_{13} - 1) - 4p_1p_3 - 4p_1L_{23} - 4p_2L_{13} - 4L_{13}L_{23} - 4p_3L_{14} - 4p_4L_{13} \\ &- 4L_{13}L_{14} + 5L_{13} + 8p_1p_3 + 15L_{13}^2 + 2(p_2 + p_4)L_{13} + 6(p_1L_{23} + p_3L_{14}) \\ &+ 6L_{13}(L_{23} + L_{14}) + 4(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})(3L_{13} + 1) + 6p_1p_3L_{24} \left. \right) \cdot [T], \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
2H(L_{13}, L_{24} + 1) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13}, L_{24}) - 2\overline{G}_1(K_1, K_3) - 2L_{13} \cdot [M; \Theta] \\
&+ (L_{13}(L_{13} + 1) + 2L_{13}(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})) \cdot [\Theta^2] \\
&- 4\overline{J}(K_1, K_2, K_3) - 4\overline{J}(K_3, K_4, K_1) + (-2L_{13}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
&+ 2(p_1L_{23} + p_3L_{14}) + 10L_{13} + 4p_1p_3 + 8L_{13}^2 + 2L_{13}(L_{23} + L_{14}) \\
&+ 4(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})(3L_{13} + 1) + 6p_1p_3L_{24}) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Alors, par récurrence sur L_{24} ,

$$\begin{aligned}
2H(L_{13}, L_{24}) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13}, 0) - 2L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - 2L_{13}L_{24} \cdot [M; \Theta] \\
&+ (L_{13}L_{24}(L_{13} + 1) + L_{13}L_{24}(L_{13}(L_{24} - 1) - 2L_{14}L_{23})) \cdot [\Theta^2] \\
&- 4L_{24}\overline{J}(K_1, K_2, K_3) - 4L_{24}\overline{J}(K_3, K_4, K_1) + (-2L_{13}L_{24}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
&+ 2L_{24}(p_1L_{23} + p_3L_{14}) + 10L_{13}L_{24} + 4p_1p_3L_{24} + 8L_{13}^2L_{24} + 2L_{13}L_{24}(L_{23} + L_{14}) \\
&+ 2L_{24}(L_{13}(L_{24} - 1) - 2L_{14}L_{23})(3L_{13} + 1) + 3p_1p_3L_{24}(L_{24} - 1)) \cdot [T],
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
2H(L_{13}, L_{24}) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{13}, 0) - 2L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - 2L_{13}L_{24} \cdot [M; \Theta] \\
&+ (L_{13}L_{24}(L_{13}L_{24} + 1) - 2L_{13}L_{14}L_{23}L_{24}) \cdot [\Theta^2] \\
&- 4L_{24}\overline{J}(K_1, K_2, K_3) - 4L_{24}\overline{J}(K_3, K_4, K_1) + (-2L_{13}L_{24}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
&+ 2L_{24}(p_1L_{23} + p_3L_{14}) + 8L_{13}L_{24} + p_1p_3L_{24}(1 + 3L_{24}) + 2L_{13}L_{24}(L_{13} + L_{24}) \\
&+ 2L_{13}L_{24}(L_{23} + L_{14}) + 6L_{13}^2L_{24}^2 - 4L_{24}L_{14}L_{23}(3L_{13} + 1)) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Le résultat s'obtient alors en utilisant la symétrie entre L_{13} et L_{24} . \square

• **Etude de $H(L_{23}, L_{14}, L_{12} = L_{13} = L_{24} = L_{34} = 0)$**

Dans ce paragraphe, on prouve le résultat suivant.

Lemme 6.5.15. *Avec les conventions de la notation 6.5.1,*

$$\begin{aligned}
H(L_{23}, L_{14}, L_{12} = L_{13} = L_{24} = L_{34} = 0) &\stackrel{4}{=} \\
&H((L_{ij} = 0)) + L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + L_{23}\overline{G}_1(K_1, K_4) \\
&+ 2L_{14}(\overline{J}(K_1, K_2, K_3) + \overline{J}(K_2, K_3, K_4)) \\
&+ 2L_{23}(\overline{J}(K_4, K_1, K_2) + \overline{J}(K_3, K_4, K_1)) \\
&+ L_{14}L_{23} \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2}(L_{14}^2L_{23}^2 - (L_{14}L_{23})) \cdot [\Theta^2] \\
&+ \left(L_{14}L_{23}(3L_{14}L_{23} + L_{14} + L_{23} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 5) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(p_2p_3L_{14}(3L_{14} + 1) + p_1p_4L_{23}(3L_{23} + 1)) \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Lemme 6.5.16. Avec les conventions de la notation 5.1.17,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 2 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 4 \end{array} \right] \\
 &- \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 4 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 2 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Par le lemme 6.3.10,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \ 2 \ 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \ 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Or, par les lemmes 5.2.1 et 6.3.6,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} 2 \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 3 \ 4 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 4 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 3 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 2 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

et, par les lemmes 6.3.11 et 6.3.6,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 2 \end{array} \right] \\
 &\stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{array} \right] + 2 \left[\begin{array}{c} 1 \ 4 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 2 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 3 \end{array} \right] \\
 &+ \left[\begin{array}{c} 1 \ 3 \\ \circ \\ \circ \\ 2 \ 2 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

Le résultat s'ensuit. □

Preuve du lemme 6.5.15 : Si on suppose que $L_{12} = L_{13} = L_{24} = L_{34} = 0$, alors le lemme 6.5.16 entraîne que

$$\begin{aligned}
H(L_{14} + 1, L_{23}) &\stackrel{4}{=} H(L_{14}, L_{23}) + G_1(K_2, K_3; L_{23}, p_2, p_3) \\
&\quad + 2J(K_1, K_2, K_3; (0, L_{23}), (p_i)) + 2J(K_4, K_2, K_3; (0, L_{23}), (p_i)) \\
&\quad + \left(- (p_1 + p_4)L_{23} + 2L_{14}L_{23} + 4L_{14}L_{23}^2 + p_2p_3L_{14} \right. \\
&\quad \quad \left. + L_{14}(2p_2p_3 + 2L_{23}^2) \right) \cdot [T] + L_{14}L_{23}^2 \cdot [\Theta^2] \\
&\stackrel{4}{=} H(L_{14}, L_{23}) + G_1(K_2, K_3; L_{23}, p_2, p_3) \\
&\quad + 2J(K_1, K_2, K_3; (0, L_{23}), (p_i)) + 2J(K_4, K_2, K_3; (0, L_{23}), (p_i)) \\
&\quad + \left(- (p_1 + p_4)L_{23} + 2L_{14}L_{23} + 6L_{14}L_{23}^2 + 3p_2p_3L_{14} \right) \cdot [T] \\
&\quad + L_{14}L_{23}^2 \cdot [\Theta^2].
\end{aligned}$$

Grâce au théorème 6.3.18 et au lemme 6.5.13, on en déduit alors

$$\begin{aligned}
H(L_{14} + 1, L_{23}) &\stackrel{4}{=} H(L_{14}, L_{23}) + \overline{G}_1(K_2, K_3) + L_{23} \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + \frac{1}{2}L_{23}(L_{23} - 1) \cdot [\Theta^2] + (4L_{23}(L_{23} - 1) + L_{23}(p_2 + p_3) + 2p_2p_3) \cdot [T] \\
&\quad + 2\overline{J}(K_1, K_2, K_3) + 2p_1L_{23} \cdot [T] + 2\overline{J}(K_4, K_2, K_3) + 2p_4L_{23} \cdot [T] \\
&\quad + \left(- (p_1 + p_4)L_{23} + 2L_{14}L_{23} + 6L_{14}L_{23}^2 + 3p_2p_3L_{14} \right) \cdot [T] \\
&\quad + L_{14}L_{23}^2 \cdot [\Theta^2].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
H(L_{14} + 1, L_{23}) &\stackrel{4}{=} H(L_{14}, L_{23}) + \overline{G}_1(K_2, K_3) + 2\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \\
&\quad + 2\overline{J}(K_2, K_3, K_4) + L_{23} \cdot [M; \Theta] + (L_{14}L_{23}^2 + \frac{1}{2}L_{23}(L_{23} - 1)) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + \left(4L_{23}(L_{23} - 1) + 2p_2p_3 + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)L_{23} + 2L_{14}L_{23} \right. \\
&\quad \quad \left. + 6L_{14}L_{23}^2 + 3p_2p_3L_{14} \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

On en déduit alors par récurrence sur L_{14} que

$$\begin{aligned}
H(L_{14}, L_{23}) &\stackrel{4}{=} H(0, L_{23}) + L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + 2L_{14}\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \\
&\quad + 2L_{14}\overline{J}(K_2, K_3, K_4) + L_{14}L_{23} \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2}(L_{14}^2L_{23}^2 - L_{14}L_{23}) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + \left(4L_{14}L_{23}(L_{23} - 1) + 2p_2p_3L_{14} + (p_1 + p_2 + p_3 + p_4)L_{14}L_{23} \right. \\
&\quad \quad \left. + L_{14}(L_{14} - 1)L_{23} + 3L_{14}(L_{14} - 1)L_{23}^2 + \frac{3}{2}p_2p_3L_{14}(L_{14} - 1) \right) \cdot [T] \\
&\stackrel{4}{=} H(0, L_{23}) + L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + 2L_{14}\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \\
&\quad + 2L_{14}\overline{J}(K_2, K_3, K_4) + L_{14}L_{23} \cdot [M; \Theta] + \frac{1}{2}(L_{14}^2L_{23}^2 - L_{14}L_{23}) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + \left(L_{14}L_{23}(3L_{14}L_{23} + L_{14} + L_{23} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 5) \right. \\
&\quad \quad \left. + \frac{1}{2}p_2p_3L_{14}(3L_{14} + 1) \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

En utilisant la symétrie entre L_{14} et L_{23} , on en déduit le résultat. \square

• Conclusion

Preuve du théorème 6.5.3 : Grâce aux lemmes 6.5.4, 6.5.6 et 6.5.15, on obtient

$$\begin{aligned}
2H((L_{ij})_{i,j}) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{ij} = 0) - 2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + ((L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 + L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + 2 \left(L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + L_{23}\overline{G}_1(K_1, K_4) \right. \\
&\quad \quad \left. - L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - L_{13}\overline{G}_1(K_2, K_4) \right) \\
&\quad + 4 \left((L_{14} - L_{24})\overline{J}(K_1, K_2, K_3) + (L_{23} - L_{24})\overline{J}(K_3, K_4, K_1) \right. \\
&\quad \quad \left. + (L_{23} - L_{13})\overline{J}(K_4, K_1, K_2) + (L_{14} - L_{13})\overline{J}(K_2, K_3, K_4) \right) \\
&\quad + \left(2(L_{12}(L_{12} - 1) - p_1p_2)(L_{34}(L_{34} - 1) - p_3p_4) - 2p_1p_2p_3p_4 \right. \\
&\quad \quad + 6L_{12}L_{34}(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) - 2(L_{12} + L_{34})(2L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) \\
&\quad \quad - 6(p_1L_{23}L_{24}L_{34} + p_2L_{13}L_{14}L_{34} + p_3L_{12}L_{14}L_{24} + p_4L_{12}L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad - 2L_{13}L_{24}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) + 8L_{13}L_{24} + 2L_{13}L_{24}(L_{13} + L_{24}) \\
&\quad \quad + p_1p_3L_{24}(1 + 3L_{24}) + p_2p_4L_{13}(1 + 3L_{13}) + 2L_{13}L_{24}(L_{23} + L_{14}) \\
&\quad \quad + 2(p_1L_{23}L_{24} + p_2L_{13}L_{14} + p_3L_{14}L_{24} + p_4L_{13}L_{23}) + 6L_{13}^2L_{24}^2 \\
&\quad \quad - 12L_{24}L_{14}L_{23}L_{13} - 4(L_{13} + L_{24})L_{14}L_{23} + 6L_{14}^2L_{23}^2 \\
&\quad \quad \left. + 2L_{14}L_{23}(L_{14} + L_{23} + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - 5) \right. \\
&\quad \quad \left. + p_2p_3L_{14}(3L_{14} + 1) + p_1p_4L_{23}(3L_{23} + 1) \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
2H((L_{ij})_{i,j}) &\stackrel{4}{=} 2H(L_{ij} = 0) - 2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [M; \Theta] \\
&\quad + ((L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 + L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23}) \cdot [\Theta^2] \\
&\quad + 2 \left(L_{14}\overline{G}_1(K_2, K_3) + L_{23}\overline{G}_1(K_1, K_4) \right. \\
&\quad \quad \left. - L_{24}\overline{G}_1(K_1, K_3) - L_{13}\overline{G}_1(K_2, K_4) \right) \\
&\quad + 4 \left((L_{14} - L_{24})\overline{J}(K_1, K_2, K_3) + (L_{23} - L_{24})\overline{J}(K_3, K_4, K_1) \right. \\
&\quad \quad \left. + (L_{23} - L_{13})\overline{J}(K_4, K_1, K_2) + (L_{14} - L_{13})\overline{J}(K_2, K_3, K_4) \right) \\
&\quad + \left(2(L_{12}(L_{12} - 1) - p_1p_2)(L_{34}(L_{34} - 1) - p_3p_4) - 2p_1p_2p_3p_4 \right. \\
&\quad \quad - 2(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
&\quad \quad + 2(p_1L_{23}L_{24} + p_2L_{13}L_{14} + p_3L_{14}L_{24} + p_4L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad - 6(p_1L_{23}L_{24}L_{34} + p_2L_{13}L_{14}L_{34} + p_3L_{12}L_{14}L_{24} + p_4L_{12}L_{13}L_{23}) \\
&\quad \quad + (p_1p_3L_{24} + p_1p_4L_{23} + p_2p_3L_{14} + p_2p_4L_{13}) \\
&\quad \quad + 3(p_1p_3L_{24}^2 + p_1p_4L_{23}^2 + p_2p_3L_{14}^2 + p_2p_4L_{13}^2) \\
&\quad \quad + 6L_{12}L_{34}(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) + 6(L_{13}L_{24} - L_{14}L_{23})^2 \\
&\quad \quad - 2(L_{12} + L_{34})(2L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23}) + 2(L_{13}L_{24} - 2L_{14}L_{23})(L_{13} + L_{24}) \\
&\quad \quad \left. + 2(L_{13}L_{24} + L_{14}L_{23})(L_{23} + L_{14}) + 8L_{13}L_{24} - 10L_{14}L_{23} \right) \cdot [T].
\end{aligned}$$

□

6.5.2 Simplification de l'auto-enlacement

Dans ce paragraphe, on démontre le théorème suivant, qui nous permet de nous affranchir de l'auto-enlacement des feuilles dans le calcul de H .

Théorème 6.5.17. *Avec les conventions de la notation 6.5.1,*

$$\begin{aligned}
 H((L_{ij} = 0), (p_1, p_2, p_3, p_4)) \stackrel{4}{=} & \overline{H}(K_1, K_2, K_3, K_4) \\
 & + p_1 \overline{J}(K_2, K_3, K_4) + p_2 \overline{J}(K_3, K_4, K_1) \\
 & + p_3 \overline{J}(K_4, K_1, K_2) + p_4 \overline{J}(K_1, K_2, K_3) \\
 & + p_1 p_2 p_3 p_4 \cdot [T].
 \end{aligned}$$

PREUVE : Grâce au théorème 6.3.11, avec les conventions de la notation 5.1.17, $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$\left[\begin{array}{c} 1 \circlearrowleft^a \quad 4 \\ \hline 2 \circlearrowleft \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ \hline \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft^a \quad \circlearrowleft \\ \hline \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} 1 \circlearrowleft^a \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \right].$$

Alors, grâce aux lemmes 5.3.1 et 6.3.7,

$$\begin{aligned}
 2 \left[\begin{array}{c} 1 \circlearrowleft^a \quad 4 \\ \hline 2 \circlearrowleft \quad 3 \end{array} \right] \stackrel{n+3}{=} & 2 \left[\begin{array}{c} \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \\ \hline \circlearrowleft \quad \circlearrowleft \end{array} \right] + 2a \left[\begin{array}{c} 2 \\ \hline 3 \quad 4 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 2 \quad 4 \\ \hline 4 \quad 3 \end{array} \right] - a \left[\begin{array}{c} 2 \quad 3 \\ \hline 3 \quad 4 \end{array} \right] \\
 & - a \left[\begin{array}{c} 3 \quad 4 \\ \hline 4 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \end{array} \right] + 2a \left[\begin{array}{c} 1 \quad 4 \\ \hline 2 \quad 3 \end{array} \right].
 \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
 2H((L_{ij} = 0), (p_1, p_2, p_3, p_4)) \stackrel{4}{=} & 2H((L_{ij} = 0), (0, p_2, p_3, p_4)) \\
 & + 2p_1 J(K_2, K_3, K_4, p_i) + 2p_1 p_2 p_3 p_4 \cdot [T].
 \end{aligned}$$

Grâce au lemme 6.5.13, si les L_{ij} sont nuls, alors

$$J(K_2, K_3, K_4, p_i) \stackrel{4}{=} \overline{J}(K_2, K_3, K_4)$$

si bien que l'on obtient finalement le résultat voulu. □

Le théorème 6.5.2 se déduit alors des théorèmes 6.5.3 et 6.5.17.

6.5.3 Calcul de \overline{J}

Dans ce paragraphe, on étudie $\overline{J}(K_1, K_2, K_3)$ défini dans la notation 6.5.1 lorsque K_1, K_2 et K_3 sont des nœuds 0-parallélisés algébriquement scindés reliés par des bandes parallélisées. On relie \overline{J} à l'intersection algébrique des

surfaces bordées par les nœuds K_i , c'est-à-dire à un invariant de Milnor ([Mil]).

Théorème 6.5.18. *Soient K_1, K_2 et K_3 trois nœuds 0-parallélisés et algébriquement scindés dans une sphère d'homologie entière M , reliés par des bandes parallélisées b_i comme dans la notation 6.5.1. Soient S_1, S_2 et S_3 des surfaces de Seifert des nœuds K_i qui n'intersectent pas les bandes b_i . Alors*

$$\overline{J}_1(K_1, K_2, K_3) \stackrel{\Delta}{=} (S_1 \cap S_2 \cap S_3) \cdot [T],$$

où $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \in \mathbb{Z}$ désigne l'intersection triple (algébrique) des surfaces S_i dans M .

PREUVE : Grâce au théorème 6.4.1, quitte à ajouter des anses, on peut supposer que les surfaces S_i sont telles que pour tout $\{i, j\}$, $c_{i,j} := S_i \cap S_j$ est une courbe simple fermée dans S_i et dans S_j . Soit $G_1 \cup \dots \cup G_g$ l'entrelacs en Y représenté dans un épaississement de S_1 sur la figure 6.4. Pour tout $(s, i) \in \{1, 2\} \times \{1, \dots, g\}$ on note $a_{s,i} = [l_{s,i}] \in H_1(S_1; \mathbb{Z})$ la classe d'homologie de la feuille $l_{s,i}$ dans S_1 . La famille $(a_{s,i})_{s,i}$ forme alors une base symplectique de $H_1(S_1; \mathbb{Z})$. Il existe donc des coefficients entiers $\alpha_{s,i}$ et $\beta_{s,i}$ tels que

$$c_{1,2} = \sum_{s,i} \alpha_{s,i} \cdot a_{s,i}$$

et

$$c_{1,3} = \sum_{s,i} \beta_{s,i} \cdot a_{s,i}.$$

• Dans un premier temps, on exprime $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ en fonction des coefficients $\alpha_{s,i}$ et $\beta_{s,i}$. Comme $a_{s,i}$ est une base symplectique pour l'intersection sur $H_1(S_1; \mathbb{Z})$,

$$\langle c_{1,2}, c_{1,3} \rangle_{S_1} = \sum_{i=1}^g (\alpha_{1,i} \beta_{2,i} - \alpha_{2,i} \beta_{1,i}).$$

Il suffit alors de montrer que $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \langle c_{1,2}, c_{1,3} \rangle_{S_1}$. En chaque point d'intersection de $S_1 \cap S_2 \cap S_3$, on peut paramétrer les surfaces S_i par leur vecteur normal unitaire n_i . En isotopant les surfaces, on peut supposer que ces vecteurs normaux sont orthogonaux deux à deux, et que $n_3 = \varepsilon n_1 \wedge n_2$, où ε est le signe du point d'intersection. Alors le vecteur tangent à $c_{1,2}$ est égal à $n_1 \wedge n_2 = \varepsilon n_3$ et le vecteur tangent à $c_{1,3}$ est égal à $n_1 \wedge n_3 = -\varepsilon n_2$. Donc la contribution du point d'intersection à $\langle c_{1,2}, c_{1,3} \rangle_{S_1}$ est égale à $((\varepsilon n_3) \wedge (-\varepsilon n_2)) \cdot n_1 = \varepsilon$, ce qui permet de conclure que

$$S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \sum_{i=1}^g (\alpha_{1,i} \beta_{2,i} - \alpha_{2,i} \beta_{1,i}).$$

• Soit $G(K_1, K_2, K_3)$ l'entrelacs en Y à 3 composantes représenté sur la figure 6.16 tel que $\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \stackrel{4}{=} [M; G(K_1, K_2, K_3)]$. Comme le nœud K_1 se réalise à partir de U par chirurgie sur l'entrelacs $G_1 \cup \dots \cup G_g$ dans le complémentaire des nœuds K_2 et K_3 et des bandes b_i , on déduit du lemme 5.1.9 que

$$\begin{aligned} \overline{J}(K_1, K_2, K_3) &\stackrel{4}{=} - \sum_{i=1}^g [M; G(U, K_2, K_3) \cup G_i] \\ &\stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g (\ell k(l_{1,i}, K_2) \ell k(l_{2,i}, K_3) - \ell k(l_{2,i}, K_2) \ell k(l_{1,i}, K_3)) \cdot [T]. \end{aligned}$$

Or on peut montrer que pour toute courbe $c \in S_1$, $\ell k(c, K_j) = \langle c, c_{1,j} \rangle_{S_1}$ pour j valant 2 ou 3. En effet, en tout point d'intersection de c avec $c_{1,j}$ on note n le vecteur unitaire tangent à c et n_1 et n_j les vecteurs unitaires normaux à S_1 et à S_j . On suppose les vecteurs deux à deux orthogonaux. Alors la contribution du point d'intersection à $\ell k(c, K_j)$ est égale à $n \cdot n_j = \varepsilon$, et sa contribution à $\langle c, c_j \rangle_{S_1}$ est égale à $(n \wedge (n_1 \wedge n_j)) \cdot n_1 = \varepsilon n_1 \cdot n_1 = \varepsilon$, ce qui permet de trouver le résultat voulu.

On en déduit que $\ell k(l_{1,i}, K_2) = \alpha_{2,i}$, $\ell k(l_{2,i}, K_2) = -\alpha_{1,i}$, $\ell k(l_{1,i}, K_3) = \beta_{2,i}$ et $\ell k(l_{2,i}, K_3) = -\beta_{1,i}$, ce qui entraîne que

$$\overline{J}(K_1, K_2, K_3) \stackrel{4}{=} \sum_{i=1}^g (-\alpha_{2,i} \beta_{1,i} + \alpha_{1,i} \beta_{2,i}) \cdot [T].$$

Les deux points permettent de conclure. □

Annexe A

Clover calculus for homology 3–spheres via basic algebraic topology

(Article en collaboration avec C. Lescop, [AL])

Algebraic & Geometric Topology

Volume 5 (2005) 71–106

Published: 3 February 2005



Clover calculus for homology 3–spheres via basic algebraic topology

EMMANUEL AUCLAIR

CHRISTINE LESCOP

Abstract We present an alternative definition for the Goussarov–Habiro filtration of the \mathbb{Z} –module freely generated by oriented integral homology 3–spheres, by means of Lagrangian-preserving homology handlebody replacements (LP–surgeries). Garoufalidis, Goussarov and Polyak proved that the graded space $(\mathcal{G}_n)_n$ associated to this filtration is generated by Jacobi diagrams. Here, we express elements associated to LP–surgeries as explicit combinations of these Jacobi diagrams in $(\mathcal{G}_n)_n$. The obtained coefficient in front of a Jacobi diagram is computed like its weight system with respect to a Lie algebra equipped with a non-degenerate invariant bilinear form, where cup products in 3–manifolds play the role of the Lie bracket and the linking number replaces the invariant form. In particular, this article provides an algebraic version of the graphical clover calculus developed by Garoufalidis, Goussarov, Habiro and Polyak. This version induces splitting formulae for all finite type invariants of homology 3–spheres.

AMS Classification 57M27; 57N10

Keywords 3–manifolds, homology spheres, finite type invariants, Jacobi diagrams, Borromeo surgery, clover calculus, clasper calculus, Goussarov–Habiro filtration

1 Introduction

In 1995, in [Oht], Tomotada Ohtsuki introduced a notion of finite type invariants for homology 3–spheres (that are compact oriented 3–manifolds with the same homology with integral coefficients as the standard 3–sphere S^3), following the model of the theory of Vassiliev invariants for knots in the ambient space \mathbb{R}^3 . He defined a filtration of the real vector space freely generated by homology 3–spheres and began the study of the associated graded space. In [Le], Thang Le finished identifying this graded space to a space of Jacobi diagrams called $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}(\emptyset)$. The Jacobi diagrams, precisely defined in Subsection 2.1, are represented by trivalent finite graphs with additional orientation information.

Similar filtrations of the \mathbb{Z} -module freely generated by homology 3-spheres and their relationships have been studied by Garoufalidis, Goussarov, Polyak and others. See [GGP] and references therein. Over $\mathbb{Z}[1/2]$, all of them are equivalent to the Ohtsuki filtration [GGP].

Among these filtrations, the most convenient one is the Goussarov–Habiro one where the Matveev Borromeo surgeries [Mat] (defined in Subsection 2.2) play the role of the crossing changes in the knot case. It allowed Garoufalidis, Goussarov and Polyak to define a set of generators $\Psi_n(\Gamma)$ for the degree n part \mathcal{G}_n of the associated Goussarov–Habiro graded \mathbb{Z} -module, for Jacobi diagrams Γ with at most n vertices [GGP]. See Subsection 2.3. Garoufalidis, Goussarov and Polyak also gave some graphical rules that allow one to reduce an element to a combination of their generators. This set of rules is the so-called *clover calculus*. Here, these rules are enclosed in two propositions 4.13 and A.1.

Our main theorem 3.5 expresses elements of \mathcal{G}_n associated to the *LP-surgeries* defined in Subsection 3.1, as explicit combinations of the $\Psi_n(\Gamma)$, in terms of intersection forms (or cup products) and linking numbers. Therefore, this article presents a completely algebraic version of the Garoufalidis–Goussarov–Habiro–Polyak clover calculus. Furthermore, it tightens the links between Jacobi diagrams and topology by relating the vertices of the Jacobi diagrams to cup products in 3-manifolds and the diagram edges with linking numbers.

We also give an alternative definition of the Goussarov–Habiro filtration of the \mathbb{Z} -module of integral homology 3-spheres, by means of LP-surgeries. See Corollary 3.2.

Let us now give a slightly more specific description of our main theorem 3.5.

A *homology genus g handlebody* is an oriented compact 3-manifold with the same integral homology as the standard genus g handlebody H_g . The boundary ∂A of such a manifold A is then homeomorphic to the genus g surface ∂H_g . The *Lagrangian* \mathcal{L}_A of A is the kernel of the map induced by the inclusion from $H_1(\partial A; \mathbb{Z})$ to $H_1(A; \mathbb{Z})$. A *Lagrangian-preserving surgery* or *LP-surgery* on a homology sphere M consists in removing the interior of such a homology handlebody ($A \subset M$) and replacing it by another such B whose boundary ∂B is identified to ∂A so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$.

In our definition of the Goussarov–Habiro filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ of the \mathbb{Z} -module $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$ freely generated by the oriented homology spheres up to orientation-preserving homeomorphisms, the n^{th} module \mathcal{F}_n is generated by *brackets* $[D]$ of so-called *n -component LP-surgeries* D that are made of n disjoint LP-

surgeries (A_i, B_i) in M . (The A_i are disjoint in M .)

$$[D] = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\sharp J} ((M \setminus \sqcup_{j \in J} \text{Int}(A_j)) \cup_{\partial} (\sqcup_{j \in J} B_j)).$$

Our main result expresses the bracket $[D]$ of an n -component LP-surgery D as

$$[D] = \sum_{\Gamma} \ell(D; \Gamma) \Psi_n(\Gamma)$$

in $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1}$, where the coefficient $\ell(D; \Gamma)$ of $\Psi_n(\Gamma)$ is an explicit function of the cup products in the manifolds $(A_i \cup -B_i)$, of the linking pairings on $H_1(A_i) \otimes H_1(A_j)$, $i \neq j$, and of variations of the Rohlin invariant when replacing A_i by B_i .

Let us roughly define $\ell(D; \Gamma)$ when n is the number of vertices of Γ and when Γ admits no non-trivial automorphism. The general definition of $\ell(D; \Gamma)$ is given in Subsection 3.2. When a bijection σ from the set of vertices of Γ to $\{1, \dots, n\}$ is given, the algebraic intersection of surfaces (or the cup product) of each $(A_i \cup -B_i)$ is placed at the vertex $\sigma^{-1}(i)$. The cup products are next contracted along the edges with respect to the linking pairing to produce a number $\ell(D; \Gamma; \sigma)$, and $\ell(D; \Gamma) = \sum_{\sigma} \ell(D; \Gamma; \sigma)$. This construction is similar to the construction of weight systems associated to Lie algebras.

The proof of Theorem 3.5 goes as follows. We first prove that the standard Goussarov, Garoufalidis and Polyak generators have appropriate coefficients in Subsection 4.1. Then we use the similarities between the behaviour of the bracket in \mathcal{G}_n and the behaviour of our coefficients to reduce the proof to this former case.

Though this article is largely inspired by [GGP], it is written in a self-contained way in an attempt to replace all the graphical arguments in [GGP] by more intrinsic arguments of geometric or algebraic topology.

Theorem 3.5 can be used to derive formulae on the behaviour under LP-surgeries of all finite-type invariants of homology spheres in the Goussarov–Habiro sense. For example, it immediately leads to splitting formulae for the restriction to homology spheres of the Kontsevich–Kuperberg–Thurston universal finite-type invariant Z_{KKT} of rational homology spheres. In [L2], the second author proved that these formulae generalise to rational homology spheres and to rational homology handlebody replacements that preserve the rational Lagrangians. These generalized splitting formulae are fairly easy to guess from the Kontsevich–Kuperberg–Thurston construction (but much harder to prove in general), they actually led the second author to the formulae of Theorem 3.5.

These formulae had been previously noticed by G. Kuperberg and D. Thurston in the special case where rational homology handlebodies are reglued by a homeomorphism that induces the identity in homology [KT]. This special case is sufficient to prove that Z_{KKT} is universal among finite-type invariants of homology spheres.

The second author thanks Thang Le, Gregor Masbaum and Dylan Thurston for useful and pleasant conversations.

2 Background

2.1 Jacobi diagrams

In what follows, a *Jacobi diagram* Γ is a trivalent graph without simple loop like $\blacktriangleleft\bigcirc$. Let $V(\Gamma)$ and $E(\Gamma)$ denote the set of vertices of Γ and the set of edges of Γ , respectively. A *half-edge* c of Γ is a pair $c = (v(c); e(c))$ where $v(c) \in V(\Gamma)$, $e(c) \in E(\Gamma)$ and $v(c)$ belongs to $e(c)$. The set of half-edges of Γ will be denoted by $H(\Gamma)$ and its two natural projections above onto $V(\Gamma)$ and $E(\Gamma)$ will be denoted by v and e , respectively. An *automorphism* of a Jacobi diagram Γ is a permutation ϕ of $H(\Gamma)$ verifying the two following conditions

$$\begin{aligned} (e(c) = e(c')) &\Rightarrow (e(\phi(c)) = e(\phi(c'))) \\ (v(c) = v(c')) &\Rightarrow (v(\phi(c)) = v(\phi(c'))) \end{aligned}$$

for any $c, c' \in H(\Gamma)$. An automorphism ϕ of a Jacobi diagram Γ *preserves the vertices of Γ* if

$$\forall c \in H(\Gamma), v(\phi(c)) = v(c).$$

Let $\text{Aut}(\Gamma)$ be the set of automorphisms of Γ . Let $\text{Aut}_V(\Gamma)$ denote the set of automorphisms of Γ that preserve the vertices of Γ . Let $\sharp\text{Aut}_V(\Gamma)$ denote the number of automorphisms of Γ that preserve the vertices. A *vertex-orientation* of a Jacobi diagram Γ is an *orientation* of each vertex of Γ , that is a cyclic order of the three half-edges that meet at that vertex. Two vertex-orientations of Γ are equivalent if and only if the cardinality of the set of vertices where they differ is even. An *orientation* of Γ is an equivalence class of vertex-orientations. An *oriented* Jacobi diagram is a Jacobi diagram carrying an orientation. A Jacobi diagram Γ is *reversible* if there exists an automorphism ϕ of Γ that reverses an orientation of Γ . For any automorphism ϕ of Γ , set

$$\text{sign}(\phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi \text{ preserves the orientation} \\ -1 & \text{if } \phi \text{ reverses the orientation.} \end{cases}$$

Note that, for all $\phi \in \text{Aut}_V(\Gamma)$, $\text{sign}(\phi) = 1$.

The *degree* of a Jacobi diagram is half the number of all its vertices. Let \mathcal{A}_k denote the free abelian group generated by the degree k oriented Jacobi diagrams, quotiented out by the following relations AS and IHX.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} = 0 & & \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} = 0 \\
 \text{AS-relation} & & \text{IHX-relation}
 \end{array}$$

Each of these relations relate diagrams which can be represented by immersions that are identical outside the part of them represented in the pictures. In the pictures, the cyclic order of the half-edges is represented by the counterclockwise order. For example, AS identifies the sum of two diagrams which only differ by the orientation at one vertex to zero. The space \mathcal{A}_0 is equal to \mathbb{Z} generated by the empty diagram. In what follows, if Γ is an oriented Jacobi diagram, then $-\Gamma$ denotes the same Jacobi diagram with the opposite orientation. If Γ is reversible, then $\Gamma = -\Gamma$.

2.2 Y-graphs and the Goussarov–Habiro filtration

Here, we briefly review the *Y-surgery*, or the *surgery along Y-links*, which is presented in [GGP]. The *Y-surgery* is equivalent to the *Borromeo transformation* in Matveev’s work [Mat].

Let Λ be the graph embedded in the surface $\Sigma(\Lambda)$ shown in Figure 1(a). In the 3–handlebody $(N = \Sigma(\Lambda) \times [-1, 1])$, the edges of Λ are framed by a vector field normal to $\Sigma(\Lambda) = \Sigma(\Lambda) \times \{0\}$. $\Sigma(\Lambda)$ is called a *framing surface* for Λ . Let $L(\Lambda) \subset N$ be the link presented in Figure 1(b) with six framed components that inherit their framings from $\Sigma(\Lambda)$.

Let M be a 3–manifold. A *Y-graph* in M is an embedding ϕ of N (or $\Sigma(\Lambda)$) into M up to isotopy. Such an isotopy class is determined by the framed image of the framed unoriented graph Λ under ϕ . A *leaf* of a *Y-graph* ϕ is the image under ϕ of a simple loop of our graph Λ . An *edge* of ϕ is an edge of $\phi(\Lambda)$ that is not a leaf. The *vertex* of ϕ is the unique vertex of $\phi(\Lambda)$ adjacent to the three edges. With this terminology, a *Y-graph* has one vertex, three edges and three leaves:

Let $G \subset M$ be a *Y-graph*. A leaf l of a *Y-component* of G is *trivial* if l bounds an embedded disc that induces the framing of l , in $M \setminus G$.

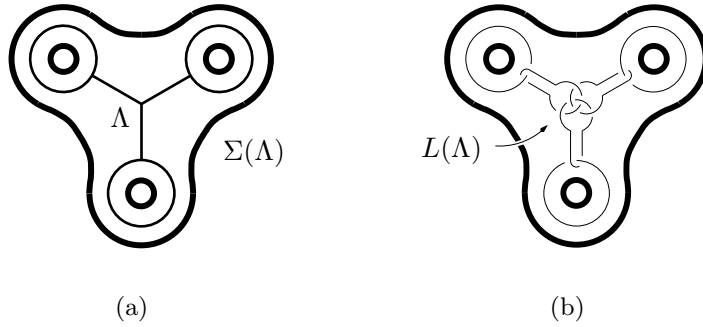
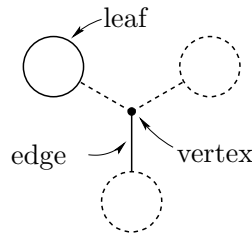
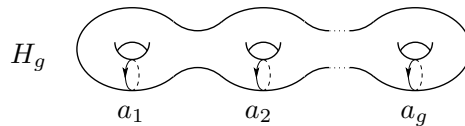


Figure 1: Y -graph and associated link



The Y -surgery along the Y -graph $\phi(\Lambda)$ is the surgery along the framed link $\phi(L(\Lambda))$ (see [Rol, Chapter 9], or [Lic, Chapter 11] for details about surgery on framed knots). The resulting manifold is denoted by $M_{\phi(\Lambda)}$. An n -component Y -link $G \subset M$ is an embedding of the disjoint union of n copies of N into M up to isotopy. The Y -surgery along a Y -link G is defined as the surgery along each Y -component of G . The resulting manifold is denoted by M_G .

In this article, the homology coefficients will always be integers. A \mathbb{Z} -sphere is a compact oriented 3-manifold M such that $H_*(M) = H_*(S^3)$. It is also called a *homology sphere*. A *homology handlebody* or \mathbb{Z} -handlebody is an oriented, compact 3-manifold A with the same homology (with integral coefficients) as the standard (solid) handlebody H_g below.



Note that the boundary ∂A of such a \mathbb{Z} -handlebody A is homeomorphic to the boundary Σ_g of H_g . For any surface Σ , let \langle, \rangle_Σ be the intersection form on $H_1(\Sigma)$. For a \mathbb{Z} -handlebody A , \mathcal{L}_A denotes the kernel of the map from $H_1(\partial A)$ to $H_1(A)$ induced by the inclusion. It is a Lagrangian of $(H_1(\partial A); \langle, \rangle_{\partial A})$. It

is called the *Lagrangian* of A .

If A is a \mathbb{Z} -handlebody and if G is a Y -link in the interior $\text{Int}(A)$ of A , then A_G is still a \mathbb{Z} -handlebody whose boundary ∂A is canonically identified with ∂A_G , so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A_G}$. Similarly, if G is a Y -link in a homology sphere M , then M_G is still a homology sphere.

Let \mathcal{F} be the abelian group freely generated by the oriented \mathbb{Z} -spheres up to orientation-preserving diffeomorphisms. Let M be a \mathbb{Z} -sphere and let $G \subset M$ be a Y -link with n components indexed by $\{1, \dots, n\}$. For any subset $J \subset \{1, \dots, n\}$, let $G(J)$ be the Y -sublink of G made of the components of G whose indices are in J . Set

$$[M, G] = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\#J} M_{G(J)} \in \mathcal{F}.$$

Let \mathcal{F}_n denote the subgroup of \mathcal{F} generated by all the elements $[M, G]$, where G is an n -component Y -link in a \mathbb{Z} -sphere M . This defines a filtration

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \dots \mathcal{F}_n \supset \dots$$

of \mathcal{F} . It is called the Goussarov–Habiro filtration (see [GGP] and [Hbo]). Set

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n / \mathcal{F}_{n+1}.$$

2.3 Linking Jacobi diagrams to the Goussarov–Habiro filtration

Below, following [GGP], we describe a surjective map from $\bigoplus_{2k \leq n} \mathcal{A}_k$ to \mathcal{G}_n , whose tensor product by $\mathbb{Z}[1/2]$ is an isomorphism. Let k and n be integers such that $2k \leq n$. Let Γ be a degree k oriented Jacobi diagram. Let $\tilde{\Gamma}$ be an arbitrary framed embedding of Γ in S^3 , where the framing is induced by a regular projection of $\tilde{\Gamma}$ in \mathbb{R}^2 that induces the counterclockwise orientation of the trivalent vertices of Γ . Insert a Hopk link on each edge of $\tilde{\Gamma}$ as illustrated in Figure 2(a). Let $G(\tilde{\Gamma})$ denote the resulting Y -link in S^3 .

Let Y_{III} be the framed Y -graph embedded in S^3 shown in Figure 2(b). Let $\phi_n(\Gamma)$ be the disjoint union of $G(\tilde{\Gamma})$ and of $n - 2k$ copies of Y_{III} .

Theorem 2.1 [GGP, Theorem 4.13] *The linear map*

$$\Psi_n: \begin{array}{ccc} \bigoplus_{2k \leq n} \mathcal{A}_k & \longrightarrow & \mathcal{G}_n \\ \Gamma & \longmapsto & [S^3, \phi_n(\Gamma)] \end{array}$$

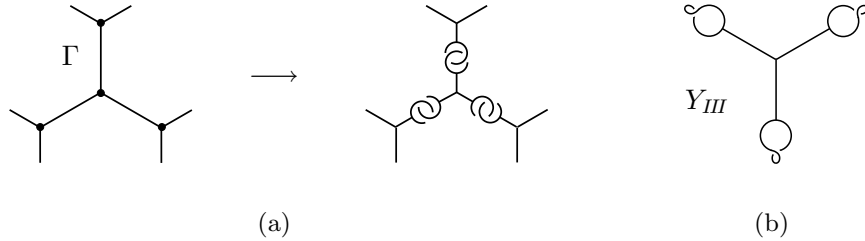


Figure 2: Turning a Jacobi diagram into a Y -link

does not depend on the choice of ϕ_n , is well-defined and is surjective. Moreover, in \mathcal{G}_n ,

$$2\Psi_n\left(\bigoplus_{2k < n} \mathcal{A}_k\right) = 0.$$

That Ψ_n is independent of the choice of ϕ_n , factors through AS and satisfies $2\Psi_n(\bigoplus_{2k < n} \mathcal{A}_k) = 0$ is a consequence of Proposition 4.13 proved below. In this article, the class $\overline{[M, G]} \in \mathcal{G}_n$ of the bracket $[M, G]$ of any n -component Y -link, will be expressed as an explicit combination of the $\Psi_n(\Gamma)$ for oriented Jacobi diagrams Γ with at most n vertices. Therefore, the surjectivity of Ψ_n will be reproved. For the sake of completeness, a proof that Ψ_n factors through IHX is given in the appendix.

3 Statement of the main result

3.1 LP-surgeries

An n -component LP-surgery is a 3-tuple

$$D = (M; n; (A_i, B_i)_{i=1, \dots, n})$$

where

- M is a homology sphere, $n \in \mathbb{N}$,
- for any $i = 1, 2, \dots, n$, A_i and B_i are \mathbb{Z} -handlebodies whose boundaries are identified by implicit diffeomorphisms (we shall write $\partial B_i = \partial A_i$), so that $\mathcal{L}_{B_i} = \mathcal{L}_{A_i}$,
- the disjoint union of the A_i is embedded in M . We shall write

$$\sqcup_{i=1}^n A_i \subset M.$$

For such an LP–surgery D , and for any subset $J \subset \{1, \dots, n\}$, set

$$D(J) = (M; \sharp J; (A_i, B_i)_{i \in J}).$$

Let $M_{D(J)}$ denote the homology sphere obtained by replacing A_i by B_i for any element i of J .

$$M_{D(J)} = (M \setminus \sqcup_{i \in J} \text{Int}(A_i)) \cup_{\sqcup_{i \in J} \partial A_i} (\sqcup_{i \in J} B_i).$$

Define

$$[D] = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{\sharp J} M_{D(J)} \in \mathcal{F}.$$

The following proposition will be proved in Subsection 4.2.

Proposition 3.1 *For any n –component LP–surgery D ,*

$$[D] \in \mathcal{F}_n.$$

Conversely, any n –component Y –link $G = (G_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ in a homology sphere M , induces the n –component LP–surgery

$$(M; G) = (M; n; (A_i, B_i)_{i=1, \dots, n})$$

such that, for any i in $\{1, \dots, n\}$, A_i is a regular neighbourhood of the Y –component G_i of G , and $B_i = (A_i)_{G_i}$. Then $[(M; G)] = [M, G]$ and $(M; G)$ is called the *LP–surgery induced by G* .

This allows us to give the following alternative definition for the Goussarov–Habiro filtration.

Corollary 3.2 *\mathcal{F}_n is the subspace of \mathcal{F} generated by the elements $[D]$, where D runs among the n –component LP–surgeries.*

In what follows, for any n –component LP–surgery D , $\overline{[D]}$ denotes the class of $[D]$ in \mathcal{G}_n . It is called the *bracket* of D .

3.2 The linking number of an LP–surgery with respect to a Jacobi diagram

This subsection is devoted to the definition of the linking number $\ell(D; \Gamma)$ of an n –component LP–surgery D with respect to a degree k Jacobi diagram Γ , with $2k \leq n$.

Let Γ be an oriented degree k Jacobi diagram. Define a map

$$h: H(\Gamma) \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

such that, for any vertex w of Γ , the map

$$h_w: v^{-1}(w) \longrightarrow \{1, 2, 3\}$$

is a bijection. Set

$$\text{sign}(h) = \prod_{w \in V(\Gamma)} \text{sgn}(h_w)$$

where, for any vertex w of Γ , $\text{sgn}(h_w) = 1$ if the orientation of w is induced by the order of the half-edges given by h_w , and $\text{sgn}(h_w) = -1$ otherwise. A *coloration* of Γ is a bijection $\sigma: V(\Gamma) \longrightarrow \{1, \dots, 2k\}$. Below, σ also denotes the induced map $\sigma \circ v: H(\Gamma) \longrightarrow \{1, \dots, 2k\}$. Let $D = (M; 2k; (A_i, B_i))$ be a $2k$ -component LP-surgery. Let us define the *linking number* $\ell(D; \Gamma; \sigma)$ of D with respect to Γ and σ .

The boundary of an oriented manifold is always oriented with the outward normal first convention. The Mayer–Vietoris boundary map

$$\partial_{i, MV}: H_2(A_i \cup_{\partial A_i} -B_i) \longrightarrow \mathcal{L}_{A_i},$$

that maps the homology class of an oriented surface to the oriented boundary of its intersection with A_i , is an isomorphism. This isomorphism carries the triple intersection of surfaces in the closed 3-manifold $(A_i \cup_{\partial A_i} -B_i)$ on $\otimes^3 H_2(A_i \cup_{\partial A_i} -B_i)$ to a linear form $\mathcal{I}(A_i, B_i)$ on $\otimes_{j=1}^3 \mathcal{L}_{A_i}^{(j)}$ which is antisymmetric with respect to the permutation of two factors, where $\mathcal{L}_{A_i}^{(j)}$ denotes the j^{th} copy of \mathcal{L}_{A_i} . Then the linear form $\mathcal{I}(A_i, B_i)$ is an element of $\otimes_{j=1}^3 (\mathcal{L}_{A_i}^{(j)})^*$ where $(\mathcal{L}_{A_i}^{(j)})^*$ denotes the dual $\text{Hom}(\mathcal{L}_{A_i}^{(j)}; \mathbb{Z})$ of $\mathcal{L}_{A_i}^{(j)}$. Let $c \in H(\Gamma)$. Define

$$X(c) = \left(\mathcal{L}_{A_{\sigma(c)}}^{(h(c))} \right)^*.$$

The linear form $\mathcal{I}(A_i, B_i)$ belongs to

$$\bigotimes_{\{c \in H(\Gamma); \sigma(c)=i\}} X(c).$$

Then define

$$T(D; \Gamma; \sigma) = \text{sign}(h) \bigotimes_{w \in V(\Gamma)} \mathcal{I}(A_{\sigma(w)}, B_{\sigma(w)}) \in \bigotimes_{c \in H(\Gamma)} X(c).$$

Note that $T(D; \Gamma; \sigma)$ is independent of h .

Notation 3.3 Let A be a \mathbb{Z} -handlebody. Then $H_1(A)$ is canonically isomorphic to $\frac{H_1(\partial A)}{\mathcal{L}_A}$. Furthermore, the intersection form $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial A}$ induces the map

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle: \quad H_1(\partial A) &\longrightarrow \mathcal{L}_A^* \\ x &\longmapsto \langle \cdot, x \rangle \end{aligned}$$

that in turn induces an isomorphism from $\frac{H_1(\partial A)}{\mathcal{L}_A}$ to \mathcal{L}_A^* . Then

$$\varphi_A: H_1(A) \longrightarrow \mathcal{L}_A^*$$

will denote the composition of these two isomorphisms.

For $\{i, j\} \subset \{1, 2, \dots, 2k\}$, the linking number in M induces a bilinear form on $H_1(A_i) \times H_1(A_j)$ that is viewed as a linear form on $\mathcal{L}_{A_i}^* \otimes \mathcal{L}_{A_j}^*$ via $\varphi_{A_i}^{-1} \otimes \varphi_{A_j}^{-1}$. Therefore, for each edge $f \in E(\Gamma)$ made of two half-edges c and d (such that $e^{-1}(f) = \{c, d\}$), the linking number yields a contraction

$$\ell_f: X(c) \otimes X(d) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Applying all these contractions to the tensor $T(D; \Gamma; \sigma)$ maps $T(D; \Gamma; \sigma)$ to the integral *linking number* $\ell(D; \Gamma; \sigma)$ of D with respect to Γ and σ .

For any automorphism ϕ in $\text{Aut}(\Gamma)$, let

$$\phi_v: V(\Gamma) \longrightarrow V(\Gamma)$$

denote the bijection such that $v \circ \phi = \phi_v \circ v$. Let $\text{Bij}(\Gamma)$ denote the set of colorations of Γ . Then $\text{Aut}(\Gamma)$ acts on $\text{Bij}(\Gamma)$ by the action

$$\phi \cdot \sigma = \sigma \circ (\phi_v)^{-1}.$$

Let $\text{Bij}(\Gamma)/\text{Aut}(\Gamma)$ denote the quotient of $\text{Bij}(\Gamma)$ under this action. Note that, for any automorphism ϕ of Γ ,

$$\ell(D; \Gamma; \sigma) = \text{sign}(\phi) \cdot \ell(D; \Gamma; \phi \cdot \sigma).$$

The following lemma is proved at the end of the next subsection.

Lemma 3.4 *There exists an integer $\ell_0(D; \Gamma; \sigma)$ such that*

$$\ell(D; \Gamma; \sigma) = \#\text{Aut}_V(\Gamma) \cdot \ell_0(D; \Gamma; \sigma).$$

In what follows, for any \mathbb{Z} -sphere M , $\mu(M) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ will denote the *Rohlin invariant* of M that is the reduction mod 2 of the Casson invariant (see [GM, Proposition 1.3, Definition 1.6]).

For any n -component LP-surgery $D = (M; n; (A_i, B_i))$ and for any subset $J \subset \{1, \dots, n\}$, set

$$\mathcal{L}(D(\bar{J})) = \prod_{i \in (\{1, \dots, n\} \setminus J)} (\mu((M \setminus \text{Int}(A_i)) \cup B_i) - \mu(M)).$$

Let Γ be an oriented degree k Jacobi diagram. Let $D = (M; n; (A_i, B_i))$ be an n -component LP-surgery with $2k \leq n$. Here, we define the *linking number* $\ell(D; \Gamma)$ of D with respect to Γ .

- If $2k = n$ and if Γ is not reversible, then set

$$\ell(D; \Gamma) = \sum_{\sigma \in \text{Bij}(\Gamma)} \frac{\ell(D; \Gamma; \sigma)}{\#\text{Aut}(\Gamma)} \in \mathbb{Z}.$$

Note that

$$\ell(D; \Gamma) = \sum_{\bar{\sigma} \in \text{Bij}(\Gamma)/\text{Aut}(\Gamma)} \ell_0(D; \Gamma; \sigma).$$

- If $2k = n$ and if Γ is reversible, then set

$$\ell(D; \Gamma) = \sum_{\bar{\sigma} \in \text{Bij}(\Gamma)/\text{Aut}(\Gamma)} \overline{\ell_0(D; \Gamma; \sigma)} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

where $\overline{\ell_0(D; \Gamma; \sigma)} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ denotes the mod 2 reduction of $\ell_0(D; \Gamma; \sigma)$.

- If $2k < n$, then set

$$\ell(D; \Gamma) = \sum_{\{J \subset \{1, \dots, n\} ; \#J=2k\}} \ell(D(J); \Gamma) \cdot \mathcal{L}(D(\bar{J})) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

3.3 Expression of brackets of LP-surgeries in terms of Jacobi diagrams

Let $n \in \mathbb{N}$. Let \mathcal{J}_n be a set of oriented Jacobi diagrams of degree at most $n/2$ that contains one Jacobi diagram in each isomorphism class of non-oriented Jacobi diagrams of degree at most $n/2$. The main goal of this paper is to show the following result.

Theorem 3.5 *Let D be an n -component LP-surgery. Then*

$$\overline{[D]} = \sum_{\Gamma \in \mathcal{J}_n} \ell(D; \Gamma) \cdot \Psi_n(\Gamma) \in \mathcal{G}_n.$$

Proof of Lemma 3.4 For any $i \in \{1, \dots, 2k\}$, let $(a_j^i)_{j \in J_i}$ be a basis of \mathcal{L}_{A_i} , where $J_i = \{1, \dots, g_i\}$ and g_i is the genus of ∂A_i . Let $(z_j^i)_{j \in J_i}$ be the basis of $H_1(A_i)$ such that, for any k and l in J_i , $(\varphi_{A_i}(z_k^i))(a_l^i) = \delta_{kl}$. Let c_1, c_2 and c_3 be the three half-edges of Γ such that $\sigma(c_k) = i$ and $h(c_k) = k$. Then

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(A_i, B_i) &= \sum_{(j_1, j_2, j_3) \in J_i^3} \mathcal{I}(A_i, B_i)(a_{j_1}^i, a_{j_2}^i, a_{j_3}^i) \varphi_{A_i}(z_{j_1}^i) \otimes \varphi_{A_i}(z_{j_2}^i) \otimes \varphi_{A_i}(z_{j_3}^i) \\ &= \sum_{\substack{(j_1, j_2, j_3) \in J_i^3 \\ j_1 < j_2 < j_3}} \left(\mathcal{I}(A_i, B_i)(a_{j_1}^i, a_{j_2}^i, a_{j_3}^i) \sum_{\tau \in \mathcal{S}_3} \left(\text{sgn}(\tau) \bigotimes_{k=1,2,3} \varphi_{A_i}(z_{j_{\tau(k)}}^i) \right) \right) \end{aligned}$$

where $\varphi_{A_i}(z_{j_{\tau(k)}}^i) \in X(c_k)$, \mathcal{S}_3 denotes the set of the permutations of $\{1, 2, 3\}$ and $\text{sgn}(\tau)$ denotes the signature of the permutation τ .

Let $\mathcal{H}(\Gamma)$ denote the set of maps $h': H(\Gamma) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ such that $h'(v^{-1}(w)) = \{1, 2, 3\}$ for any $w \in V(\Gamma)$. Set

$$J = \left\{ (j_1^1, j_2^1, j_3^1, \dots, j_1^{2k}, j_2^{2k}, j_3^{2k}) \in \prod_{i=1}^{2k} (J_i)^3 ; \forall i \in \{1, \dots, 2k\}, j_1^i < j_2^i < j_3^i \right\}.$$

For any $j \in J$, set $\mathcal{J}(j) = \prod_{i=1}^{2k} \mathcal{I}(A_i, B_i)(a_{j_1}^i, a_{j_2}^i, a_{j_3}^i)$. Then

$$T(D; \Gamma; \sigma) = \sum_{j \in J} \mathcal{J}(j) \left(\sum_{h' \in \mathcal{H}(\Gamma)} \text{sign}(h') \bigotimes_{c \in H(\Gamma)} \varphi_{A_{\sigma(c)}} \left(z_{j_{h'(c)}}^{\sigma(c)} \right) \right).$$

Then $\ell(D; \Gamma; \sigma) = \sum_{h' \in \mathcal{H}(\Gamma)} \ell(D; \Gamma; \sigma; h')$ where

$$\ell(D; \Gamma; \sigma; h') = \text{sign}(h') \sum_{j \in J} \mathcal{J}(j) \left(\prod_{e=(c_1, c_2) \in E(\Gamma)} \ell k \left(z_{j_{h'(c_1)}}^{\sigma(c_1)}, z_{j_{h'(c_2)}}^{\sigma(c_2)} \right) \right).$$

For any automorphism $\zeta \in \text{Aut}_V(\Gamma)$, $\ell(D; \Gamma; \sigma; h' \circ \zeta) = \ell(D; \Gamma; \sigma; h')$. Then $\ell_0(D; \Gamma; \sigma)$ is the sum of the integers $\ell(D; \Gamma; \sigma; h')$ running over all classes \bar{h}' of $\mathcal{H}(\Gamma)/\text{Aut}_V(\Gamma)$. \square

4 Proof of the theorem

4.1 Proof of Theorem 3.5 for LP–surgeries induced by Jacobi diagrams

Here we prove Theorem 3.5 when $D = (S^3; \phi_n(\Gamma_Y))$, where the Y –link $\phi_n(\Gamma_Y)$ is the image of a Jacobi diagram Γ_Y under the map ϕ_n of Subsection 2.3. It is a direct corollary of the proposition below (and of Theorem 2.1).

Proposition 4.1 *Let Γ be an oriented degree k Jacobi diagram. Let Γ_Y be an oriented degree k' Jacobi diagram. Let n be an integer such that $n \geq \max(2k, 2k')$. Then*

$$\ell(\phi_n(\Gamma_Y); \Gamma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Gamma_Y \cong \Gamma \\ -1 & \text{if } \Gamma_Y \cong -\Gamma \\ 0 & \text{if } \Gamma_Y \not\cong \pm\Gamma \end{cases}$$

where $\Gamma \cong \Gamma'$ iff Γ and Γ' are isomorphic as oriented Jacobi diagrams.

Lemma 4.2 *Let G be a framed Y -graph embedded in the interior of a 3-handlebody A as in Figure 3. Let B be the \mathbb{Z} -handlebody obtained by Y -surgery on A along G . Let $(a_1, a_2, a_3) \subset \partial A$ be the oriented curves represented in Figure 3. Then (a_1, a_2, a_3) is a basis of $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$ and*

$$|(\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)| = 1.$$

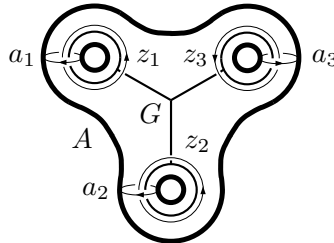


Figure 3

Proof This can be computed directly, or we can use that

$$A \cup_{\partial A} (-B) = S^1 \times S^1 \times S^1$$

$(A \cup (-B))$ is the manifold obtained by surgery on the 0-framed Borromean link in S^3 that is $(S^1)^3$, see [Thu, 13.1.5]). Let S_1, S_2 and S_3 be the three following surfaces in $(S^1)^3$.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\star\} \times S^1 \times S^1 \\ S_2 &= S^1 \times \{\star\} \times S^1 \\ S_3 &= S^1 \times S^1 \times \{\star\}. \end{aligned}$$

Let $\mathcal{I} \in \left(\bigotimes^3 H_2((S^1)^3)\right)^*$ be the intersection form of $A \cup_{\partial A} (-B) = (S^1)^3$. Since $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \{\star\} \times \{\star\} \times \{\star\}$ is a single transverse intersection point, then

$$|\mathcal{I}(S_1 \otimes S_2 \otimes S_3)| = 1.$$

By the isomorphism from $H_2((S^1)^3)$ to \mathcal{L}_A induced by the Mayer–Vietoris boundary map, (a_1, a_2, a_3) can be seen as a basis of $H_2((S^1)^3)$. Therefore, $\mathcal{I}(S_1 \otimes S_2 \otimes S_3)$ is a multiple of $(\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)$. Then

$$|(\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)| = 1. \quad \square$$

Lemma 4.3 $\mu(S_{Y_{III}}^3) = 1$

This lemma is a direct consequence of Corollary 4.21 that is proved in Subsection 4.4. It relies on the results of Subsections 4.2 and 4.3 that are logically independent of the proof below that illustrates our formulae.

Proof of Proposition 4.1

- First assume that $2k = 2k' = n$.

Let σ be a coloration of Γ . Let $D = (S^3; \phi_n(\Gamma_Y)) = (M; n; (A_i, B_i))$ be the LP–surgery induced by the Y –link $\phi_n(\Gamma_Y)$. Each pair (A_i, B_i) is a copy of the pair (A, B) presented in Lemma 4.2. Let $i \in \{1, \dots, n\}$. Let (a_1^i, a_2^i, a_3^i) be the basis of \mathcal{L}_{A_i} that corresponds to the curves (a_1, a_2, a_3) in Figure 3. Let (z_1^i, z_2^i, z_3^i) be the basis of $H_1(A_i)$ that corresponds to the curves (z_1, z_2, z_3) in Figure 3. Under the (implicit from now on) isomorphism

$$\varphi_{A_i}: H_1(A_i) \longrightarrow \mathcal{L}_{A_i}^*$$

presented in Notation 3.3, (z_1^i, z_2^i, z_3^i) is the dual basis to (a_1^i, a_2^i, a_3^i) , i.e.

$$(\varphi_{A_i}(z_k^i))(a_l^i) = \delta_{kl}.$$

Then

$$\mathcal{I}(A_i, B_i) = \sum_{\tau} \text{sgn}(\tau) \mathcal{I}(A, B)(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) z_{\tau(1)}^i \otimes z_{\tau(2)}^i \otimes z_{\tau(3)}^i.$$

Since $|(\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3)| = 1$ by Lemma 4.2,

$$T(D; \Gamma; \sigma) = \text{sign}(h) \sum_{(\tau_i) \in (\mathcal{S}_3)^n} \left(\left(\prod_{i=1}^n \text{sgn}(\tau_i) \right) \bigotimes_{c \in H(\Gamma)} z_{\tau_{\sigma(c)}(h(c))}^{\sigma(c)} \right)$$

where h is as in Subsection 3.2. For any $\tau = (\tau_i)_{i=1, \dots, n} \in (\mathcal{S}_3)^n$, let $\zeta(\sigma; \tau)$ denote the map

$$\zeta(\sigma; \tau): \begin{array}{ccc} H(\Gamma) & \longrightarrow & \{1, \dots, n\} \times \{1, 2, 3\} \\ c & \longmapsto & (\sigma(c), \tau_{\sigma(c)}(h(c))). \end{array}$$

Let

$$\xi: \begin{array}{ccc} H(\Gamma_Y) & \longrightarrow & \{1, \dots, n\} \times \{1, 2, 3\} \\ c & \longmapsto & (\xi_1(c), \xi_2(c)) \end{array}$$

be the bijection such that, for any half-edge c of Γ_Y , $z_{\xi_2(c)}^{\xi_1(c)}$ is the core of the leaf corresponding to c . Set $\phi(\sigma; \tau) = \xi^{-1} \circ \zeta(\sigma; \tau)$. Then $\phi(\sigma; \tau)$ is a bijection from $H(\Gamma)$ to $H(\Gamma_Y)$ such that

- for any c, c' in $H(\Gamma)$, $v(\phi(\sigma; \tau)(c)) = v(\phi(\sigma; \tau)(c'))$ if and only if $v(c) = v(c')$
- for any edge $e = (c, c')$ of $H(\Gamma)$,

$$lk(z_{\tau_{\sigma(c)}^{\sigma(c)}}^{\sigma(c)}, z_{\tau_{\sigma(c')}^{\sigma(c')}}^{\sigma(c')}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(\sigma; \tau)(c) \text{ and } \phi(\sigma; \tau)(c') \\ & \text{belong to the same edge of } \Gamma_Y \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Therefore

$$\ell(D; \Gamma; \sigma) = \sum_{\{\tau \in (\mathcal{S}^3)^n; \phi(\sigma; \tau) \text{ is an isomorphism}\}} \text{sign}(\phi(\sigma; \tau))$$

where

$$\text{sign}(\phi(\sigma; \tau)) = \text{sign}(h) \left(\prod_{i=1}^n \text{sgn}(\tau_i) \right).$$

Hence, if $\Gamma \not\cong \pm \Gamma_Y$, then for any coloration σ of Γ , $\ell(D; \Gamma; \sigma) = 0$, and $\ell(D; \Gamma) = 0$.

Otherwise, there exists a coloration σ of Γ and a map $\tau \in (\mathcal{S}^3)^n$ such that $\phi(\sigma; \tau)$ is an orientation-preserving isomorphism from Γ to $\text{sign}(\phi(\sigma; \tau)) \Gamma_Y$. For any map $\tau' \in (\mathcal{S}^3)^n$ such that $\phi(\sigma; \tau')$ is an isomorphism, $(\phi(\sigma; \tau'))^{-1} \circ \phi(\sigma; \tau)$ is an automorphism of Γ that preserves the vertices.

Then $\text{sign}(\phi(\sigma; \tau)) = \text{sign}(\phi(\sigma; \tau'))$.

Conversely, any automorphism of $\text{Aut}_V(\Gamma)$ provides such a map τ' . Then

$$\ell(D; \Gamma; \sigma) = \text{sign}(\phi(\sigma; \tau)) \sharp \text{Aut}_V(\Gamma).$$

For any other pair $(\sigma'; \tau')$ such that $\phi(\sigma'; \tau')$ is an isomorphism from Γ to Γ_Y , σ' is obtained from σ by composition by an automorphism of Γ . Then $\ell(D; \Gamma) = \ell_0(D; \Gamma; \sigma) = \text{sign}(\phi(\sigma; \tau))$ and Proposition 4.1 is proved in this case.

- If $2k' < 2k = n$, then $\ell(\phi_{2k}(\Gamma_Y); \Gamma) = 0$ because when A is the regular neighbourhood of Y_{III} , the elements of $H_1(A)$ do not link any element of the other $H_1(A_i)$'s.

- When $2k < n$, let $J \subset \{1, \dots, n\}$ and let $\bar{J} = \{1, \dots, n\} \setminus J$. Let J_Y be the set of indices of the $2k'$ -component Y -link $G(\Gamma_Y)$. See Subsection 2.3. $\sharp J_Y = 2k'$. Set $\bar{J}_Y = \{1, \dots, n\} \setminus J_Y$.

If $J_Y \cap \bar{J} \neq \emptyset$, then $\mathcal{L}(D(\bar{J})) = 0$ since $S_{Y_0}^3 = S^3$ when Y_0 is a Y -graph in S^3 with a trivial leaf.

If $\bar{J}_Y \cap J \neq \emptyset$, then $\ell(D(J); \Gamma) = 0$ like in the previous case. Then

$$\ell(D; \Gamma) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq k' \\ \ell(D(J_Y); \Gamma) \cdot \mathcal{L}(D(\bar{J}_Y)) & \text{if } k = k'. \end{cases}$$

Then $\mathcal{L}(D(\bar{J}_Y)) = 1$ by Lemma 4.3 and $\ell(D(J_Y); \Gamma) = \ell(\phi_{2k}(\Gamma_Y); \Gamma)$. Thus the result follows from the first case. \square

4.2 Decomposition of LP-surgeries into surgeries on Y -links

In this subsection, we recall known facts and state useful lemmas about the theory of Borromeo surgeries [Mat, GGP]. We shall see all these facts as consequences of the following single lemma 4.4. As an application of the theory of Borromeo surgeries, we shall prove Proposition 3.1.

Lemma 4.4 [GGP, Lemma 2.1] *Let M be an oriented 3-manifold (with possible boundary). Let G be a Y -graph in M with a trivial leaf that bounds a disc D in $M \setminus G$. Then*

- for any framed graph T_0 in $M \setminus G$ that does not meet D , the pair (M_G, T_0) is diffeomorphic to the pair (M, T_0) .
- If T is a framed graph in $M \setminus G$ that meets $\text{Int}(D)$ at exactly one point, then the pair (M_G, T) is diffeomorphic to the pair (M, T_G) , where T_G is the framed graph in M presented in Figure 4.

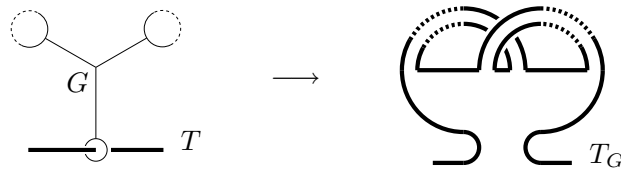


Figure 4

Corollary 4.5 *Let M be an oriented 3-manifold. Let Σ denote a genus 1 surface in M . Let I_1 and I_2 be two intervals such that*

- $\partial\Sigma = I_1 \cup I_2$
- $I_1 \cap I_2 = \partial I_1 = \partial I_2$
- I_1 and I_2 are framed by a vector field normal to the surface Σ .

Let T be a framed graph such that $I_1 = T \cap \Sigma$. Then there exists a Y -graph G in $M \setminus T$ with a trivial leaf that is a meridian curve of I_1 such that the pair (M_G, T) is diffeomorphic to the pair $(M, (T \setminus \text{Int}(I_1)) \cup I_2)$

Lemma 4.6 [GGP, Theorem 3.2] *Let Λ be the Y -graph in the 3-handlebody $(N = \Sigma(\Lambda) \times [-1, 1])$ presented in Figure 1(a). Then there exists a Y -graph Λ^{-1} in $N \setminus \Lambda$ such that the Y -surgery along $\Lambda \cup \Lambda^{-1}$ does not change N . In particular, if M is a 3-manifold then, for any Y -graph G in M , there exists a Y -graph G^{-1} in a regular neighbourhood of G such that $M_{G \cup G^{-1}} = M$.*

Proof Let L be the framed link in $N \setminus \Lambda$ made of the two framed knots presented in Figure 5, such that $N_L = N$ and such that Λ is isotopic to a Y -graph Λ_0 with a trivial leaf in N_L . Let L^{-1} denote a framed link in $N \setminus (\Lambda \cup L)$

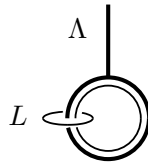


Figure 5: Trivializing a leaf

such that the surgery along $L \cup L^{-1}$ is trivial in $N \setminus \Lambda$. Then L^{-1} corresponds to a framed link L' in N_L . Then

$$N_\Lambda = N_{\Lambda \cup L \cup L^{-1}} = (N_L)_{\Lambda_0 \cup L'}$$

The Y -surgery along Λ_0 is fully determined by Lemma 4.4. It takes the tube piercing the trivial leaf and makes it describe its complement in the boundary of a genus one surface.

By Corollary 4.5, there exists a Y -graph Λ_0^{-1} in $N_L \setminus (\Lambda_0 \cup L')$ that undoes it.

$$N = ((N_L)_{\Lambda_0 \cup \Lambda_0^{-1}})_{L'}$$

After surgery on L' , that does not change N since the surgery on L did not change N , Λ_0^{-1} corresponds to a Y -graph Λ^{-1} in $N \setminus \Lambda$ such that the Y -surgery along $\Lambda \cup \Lambda^{-1}$ is trivial. □

Remark 4.7 What is used in the above proof and will be used again is the following principle. Up to surgery along links, one leaf of a Y -graph can be assumed to bound a disk D (pierced by surgery arcs). Then surgery along that Y -graph amounts to move the pack T of framed surgery arcs piercing D as indicated in Lemma 4.4, that therefore fully determines the effect of the surgery along the Y -graph.

Lemma 4.8 *Let ϕ be an embedding of the genus g handlebody H_g into S^3 . Let z_1, \dots, z_g denote the curves in ∂H_g presented in Figure 6. If each curve $\phi(z_i)$ bounds an embedded surface in $S^3 \setminus \text{Int}(\phi(H_g))$, then there exists a Y -link G in $S^3 \setminus \phi(H_g)$ such that $S_G^3 = S^3$ and the curves $\phi(z_i)$ bound embedded discs in $S_G^3 \setminus \text{Int}(\phi(H_g))$.*

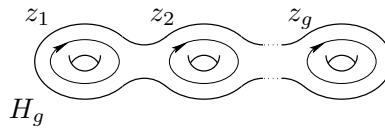


Figure 6

Proof Thanks to Corollary 4.5 and to the fact that any orientable surface is a connected sum of genus one surfaces, there exists a Y -link G_1 in $S^3 \setminus \phi(H_g)$ such that $S_{G_1}^3 = S^3$ and $\phi(z_1)$ bounds an embedded disc D_1 in $S^3 \setminus \phi(H_g)$ after Y -surgery on G_1 . In particular the lemma is true for $g = 1$. Assume that the lemma is true for handlebodies of genus $g - 1$. We shall use this induction hypothesis for a regular neighbourhood N of $\phi(H_g) \cup D_1$ equipped with the curves $\phi(z_2), \dots, \phi(z_g)$ that are still homologically trivial in $S^3 \setminus N$. Let $\hat{G}_1 \subset S_{G_1}^3$ be the union of the 3-handlebodies reglued during the Y -surgery on G_1 . By induction hypothesis, there exists a Y -link G_2 in $S_{G_1}^3 \setminus N$ such that $(S_{G_1}^3)_{G_2} = S^3$ and the curves $\phi(z_2), \dots, \phi(z_g)$ bound embedded discs in $S^3 \setminus N$ after Y -surgery on G_2 . After a possible isotopy in $S_{G_1}^3$, G_2 avoids \hat{G}_1 . Then G_2 corresponds to a Y -link G'_2 in $S^3 \setminus (\phi(H_g) \cup G_1)$ such that $G_1 \cup G'_2$ satisfies the conclusion of the lemma. \square

Let M be a \mathbb{Z} -sphere. Let lk denote the linking number in M . Let $L \subset M$ be a link, and let L_1, \dots, L_n be the components of L . Then L is *algebraically split* if and only if

$$(i \neq j) \Rightarrow (lk(L_i, L_j) = 0).$$

Then Lemma 4.8 induces the following corollary.

Corollary 4.9 ([Mat, Lemma 2] or [MN, Lemma 1.2]) *Let L be an algebraically split link in S^3 . Then there exists a Y -link G in $S^3 \setminus L$ such that $S_G^3 = S^3$ and L is trivially embedded in S_G^3 .*

Proof Embed H_g in S^3 so that the curves z_i are the components of L . \square

Theorem 4.10 [Mat, Theorem 2] *If M and M' are homology spheres, then there exists a Y -link G in M such that $M_G = M'$.*

Proof Since any \mathbb{Z} -sphere can be obtained by surgery on S^3 along an algebraically split link framed by ± 1 (see [GM, Lemma 2.1]), and since the surgery on the trivial knot in S^3 framed by ± 1 gives S^3 , Theorem 4.10 is an easy corollary of Lemma 4.6 and Corollary 4.9. \square

Then we can prove the following useful lemma (see [Hbg, Theorem 2.5], too).

Lemma 4.11 *Let A and B be two \mathbb{Z} -handlebodies with the same genus, whose boundaries are identified so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$. Then there exists a Y -link G embedded in the interior of A such that $A_G = B$, where the identification of ∂A with ∂B is induced by the natural identification of ∂A with ∂A_G .*

Proof Let us first prove the lemma when $B = H_g$ is the standard handlebody of genus g with the boundary of A identified with the boundary Σ_g of H_g so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{H_g}$. Embed H_g trivially in S^3 so that

$$\tilde{H}_g = S^3 \setminus \text{Int}(H_g)$$

is a standard g -handlebody. Let z_1, \dots, z_g be the meridian curves of H_g on Σ_g presented in Figure 7.

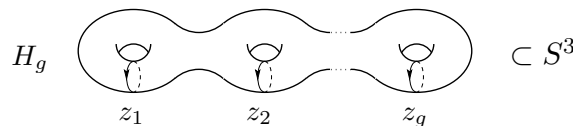


Figure 7

Let
$$M = (S^3 \setminus \text{Int}(H_g)) \cup_{\Sigma_g} A = \tilde{H}_g \cup_{\Sigma_g} A.$$

Then M is a \mathbb{Z} -sphere. Thus, by Theorem 4.10, there exists a Y -link $G \subset M$ such that $M_G = S^3$. By isotopy, G can avoid \tilde{H}_g . Then

$$S^3 = A_G \cup_{\Sigma_g} \tilde{H}_g$$

Now A_G is the complement in S^3 of a possibly knotted g -handlebody \tilde{H}_g . Thanks to Lemma 4.8, there exists a Y -link $G' \subset \text{Int}(A_G)$ such that $S_{G'}^3 = S^3$ and \tilde{H}_g is embedded in $S_{G'}^3$, so that the curves z_i bound embedded discs in $A_{GUG'}$. Thus $A_{GUG'} = H_g$ with the expected boundary identification. The general case follows easily with the help of Lemma 4.6. \square

We have the following obvious lemma.

Lemma 4.12 *Let $D = (M; n; (A_i, B_i))$ be an n -component LP-surgery. Let A'_1 be a \mathbb{Z} -handlebody such that $\partial A'_1$ and ∂A_1 are identified so that $\mathcal{L}_{A'_1} = \mathcal{L}_{A_1}$. Let*

$$M_{A'_1/A_1} = (M \setminus \text{Int}(A_1)) \cup_{\partial A_1} A'_1$$

denote the manifold obtained by surgery on M along the pair (A_1, A'_1) . Set

$$\begin{aligned} D' &= (M; n; (A_1, A'_1), (A_2, B_2), \dots, (A_n, B_n)) \\ D'' &= (M_{A'_1/A_1}; n; (A'_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_n, B_n)). \end{aligned}$$

Then

$$[D] = [D'] + [D''].$$

Proof of Proposition 3.1 Let $D = (M; n; (A_i, B_i))$ be an n -component LP-surgery. Thanks to Lemma 4.11, for any $i \in \{1, \dots, n\}$, there exists a Y -link $G^i \subset \text{Int}(A_i)$ such that $(A_i)_{G^i} = B_i$. Let k_i denote the minimal number of components for such a G^i . Consider the sum $k = \sum_i k_i$.

If there exists $i \in \{1, \dots, n\}$ such that $k_i = 0$, then $[D] = 0 \in \mathcal{F}_n$. If, for all i , $k_i = 1$, then $[D] \in \mathcal{F}_n$ by definition. Therefore $[D] \in \mathcal{F}_n$ if $k \leq n$.

If $k > n$, assume that $k_1 > 1$, without loss of generality. Then there exists a \mathbb{Z} -handlebody A'_1 verifying the hypotheses of Lemma 4.12 such that A'_1 can be obtained from A_1 by Y -surgery along a Y -graph in $\text{Int}(A_1)$, and B_1 can be obtained from A'_1 by Y -surgery along a Y -link in $\text{Int}(A'_1)$ with $k_1 - 1$ components. Thus, with the notation of Lemma 4.12, $[D'] \in \mathcal{F}_n$ and $[D''] \in \mathcal{F}_n$ by induction on k . Then $[D] \in \mathcal{F}_n$ thanks to Lemma 4.12. The proposition follows. \square

4.3 Review of the clover calculus

In this section, we review the clover calculus following [GGP]. However we produce alternative proofs in the spirit of the present paper only based on Lemma 4.4. Furthermore, we summarize what we shall use about the clover calculus in Proposition 4.13.

A Y -graph Λ is *oriented* if its framing surface $\Sigma(\Lambda)$ is equipped with an orientation. Such an orientation provides an orientation for every leaf and (a cyclic order) for the set of leaves of Λ . Figure 8 shows the induced orientations when $\Sigma(\Lambda)$ is given the standard orientation of \mathbb{R}^2 . Reversing the orientation of $\Sigma(\Lambda)$ reverses these four orientations.

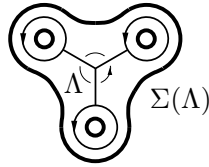


Figure 8: oriented Y -graph

Recall that a *framing* of a knot is a nonzero vector field normal to the knot, up to homotopy, or a parallel to the knot up to isotopy. In a homology sphere these two canonically equivalent notions are represented by the linking number of the knot and its parallel induced by the framing. This linking number is therefore also called the *framing* of the knot.

The goal of this subsection is to prove the following proposition.

Proposition 4.13 *Let G be an oriented n -component Y -link in a \mathbb{Z} -sphere M .*

- (i) *The bracket $\overline{[(M; G)]}$ (in \mathcal{G}_n) is a function independent of M of*
 - *the linking numbers $\ell k(l, l')$ where l and l' are leaves in two distinct Y -components of G*
 - *the products $\bar{f}(l_1)\bar{f}(l_2)\bar{f}(l_3)$ where l_1, l_2 and l_3 are leaves of a same Y -component, and where $\bar{f}(l)$ is the framing of l in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
- (ii) *Fix G except for a leaf l in the complement of the other parts of G . Let $[l]$ denote the class of l in $H_1(M \setminus \cup_{l' \neq l} l')$, where the union runs over all leaves l' distinct of l . Then the bracket $\overline{[(M; G)]} \in \mathcal{G}_n$ of G is a linear map of $([l], \bar{f}(l)) \in H_1(M \setminus \cup_{l' \neq l} l') \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Lemma 4.14 *Let G be an oriented n -component Y -link in a \mathbb{Z} -sphere M . The bracket $\overline{[(M; G)]}$ is a function independent of M of*

- *the linking numbers $\ell k(l, l')$ where l and l' are leaves of G*
- *the framings $f(l)$ where l runs over the leaves of G .*

Proof Let Υ be the diagram made of n copies of the diagram Λ connected by an additional edge from the internal vertex of Λ to a common n -valent vertex p . Embed Υ in \mathbb{R}^3 . Let A be a regular neighbourhood of Υ in \mathbb{R}^3 . Then A is a union of a ball B with n copies of the genus 3 handlebody N that are glued on ∂B along n disjoint discs. Let $\phi_G: A \rightarrow M$ be an embedding of A in M that extends the embedding G . Set $Z = M \setminus \text{Int}(\phi_G(A))$. Then Z

is a genus $3n$ homology handlebody whose Lagrangian $\mathcal{L}_Z \subset H_1(\partial A)$ is fully determined by the framings and by the linking numbers of the leaves of G . Therefore if $G' \subset M'$ is another oriented n -component Y -link with the same linking numbers and framing data, then $Z' = M' \setminus \text{Int}(\phi_{G'}(A))$ is a homology handlebody with the same lagrangian as Z in $H_1(\partial A)$.

By Lemma 4.11, there exists a Y -link $G'' \subset \text{Int}(Z)$ such that $Z_{G''} = Z'$. Then $[(M'; G')] = [(M_{G''}; G)]$. If G'' is a one-component Y -link, then $[(M; G \cup G'')] = [(M; G)] - [(M_{G''}; G)]$, and $\overline{[(M; G)]} = \overline{[(M_{G''}; G)]}$. By induction on the number of components of G'' , $\overline{[(M; G)]} = \overline{[(M_{G''}; G)]}$. Then $\overline{[(M; G)]} = \overline{[(M'; G')]} \quad \square$

A framed knot $K_1 \#_b K_2$ is a *band sum* of two framed oriented knots K_1 and K_2 if there exists an embedding of a 2-hole disk

- that factors the three knot embeddings by the embeddings of the three curves pictured in Figure 9 representing the disk, and
- that induces the three framings.

Note that

$$f(K_1 \#_b K_2) = f(K_1) + f(K_2) + 2lk(K_1, K_2).$$

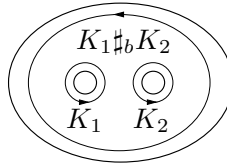


Figure 9: Band sum of two knots

Lemma 4.15 [GGP, Theorem 3.1] *Let G be an oriented framed Y -graph with leaves K_1, K_2, K_3 in a \mathbb{Z} -sphere M . Assume that K_3 is a band sum of two framed knots K_3^2 and K_3^3 . For $k = 1$ and 2 , let K_k^2 and K_k^3 be two parallels of K_k equipped with the framing $f(K_k)$ of K_k , and such that $lk(K_k^2, K_k^3) = f(K_k)$. Then*

- (i) *There exist two oriented disjoint framed Y -graphs G^2 and G^3 in M whose framed leaves are K_1^2, K_2^2, K_3^2 and K_1^3, K_2^3, K_3^3 , respectively, such that the surgery along G is equivalent to the surgery along $G^2 \cup G^3$.*
- (ii) *For any $(n - 1)$ -component Y -link L in the complement in M of the embedded neighbourhood H of G represented in Figure 10,*

$$\overline{[(M; L \cup G)]} = \overline{[(M; L \cup G^2)]} + \overline{[(M; L \cup G^3)]}.$$

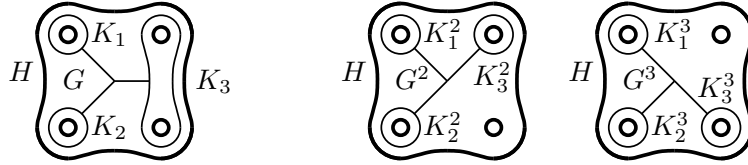


Figure 10: Splitting a leaf

Proof The surgery operation on G is thought of as the move of two packs P_2 and P_3 of arcs of surgery components that go through the two holes on the right hand-side of H in Figure 10 as in Remark 4.7. Then Lemma 4.4 says that the surgery along G moves these two framed packs of arcs by adding the boundary of a genus 1 surface Σ . This operation can be made in two steps. Move P_3 first, which means do the surgery along a Y -graph G^3 whose leaves are K_1^3 , K_2^3 and K_3^3 . Then move P_2 so that it is parallel to $\partial\Sigma$ inside Σ . It can be done by a surgery along a Y -graph $G^2 \subset H \setminus G^3$ whose leaves are K_1^2 , K_2^2 and K_3^2 . Then $M_{G^2 \cup G^3} = M_G$. Therefore

$$[(M; L \cup G^2 \cup G^3)] = -[(M; L \cup G)] + [(M; L \cup G^2)] + [(M; L \cup G^3)]$$

and

$$\overline{[(M; L \cup G)]} = \overline{[(M; L \cup G^2)]} + \overline{[(M; L \cup G^3)]}. \quad \square$$

Lemma 4.16 [GGP, Lemma 4.8] *Let $G \subset M$ be an n -component Y -link. Suppose that a Y -component of G contains a 2-framed leaf l that bounds an embedded disc in $M \setminus G$. Then $\overline{[M, G]} = 0$.*

Proof If l is a 2-framed leaf that bounds an embedded disc in $M \setminus G$, then l is a band sum of two knots K^2 and K^3 that form a trivial Hopf link (see Figure 11) in $M \setminus G$. Thanks to Lemma 4.15, there exist two n -components Y -links G^2 and G^3 with a trivial leaf such that

$$\overline{[(M; G)]} = \overline{[(M; G^2)]} + \overline{[(M; G^3)]} = 0. \quad \square$$

Proof of part (ii) of Proposition 4.13 Consider the bracket of G as a function of a leaf l of G by fixing $G \setminus l$. According to Lemma 4.14, the bracket of G only depends on $[l] \in H_1(M \setminus \cup_{l' \neq l} l')$ and on $f(l)$. Applying Lemmas 4.15 and 4.16 when adding a disjoint 2-framed trivial knot to l shows that this function of l only depends on $[l]$ and on $f(l) \pmod 2$. Then Lemma 4.15 implies (ii). \square

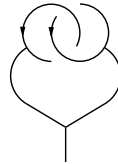


Figure 11: Two leaves that form the trivial Hopf link

Lemma 4.17 [GGP, Lemma 2.3] *Let $G \subset M$ be an n -component Y -link. Suppose that G contains a Y -component with two leaves l and l' that form the trivial Hopf link of Figure 11. Then $\overline{[(M; G)]} = 0$.*

Proof The surgery along a Y -graph with this trivial Hopf link is trivial: Think of this surgery as the move of surgery arcs along the boundary of the surface corresponding to these two leaves as in Lemma 4.4. It implies that the bracket of G vanishes. \square

Definition 4.18 Let c be a curve in a surface Σ that is the image of $S^1 \times \{\pi\}$ under an orientation-preserving embedding $\phi: S^1 \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma$. A *left-handed Dehn twist* of Σ along c is the homeomorphism of Σ that is the identity outside $\phi(S^1 \times]0, 2\pi[)$ and that maps $\phi(z, t)$ to $\phi(ze^{-it}, t)$.

Lemma 4.19 [GGP, Theorem 3.1] *Let H be an oriented Y -graph in a \mathbb{Z} -sphere M . Let l^- and l' be two oriented leaves of H , and let Σ be the genus one surface presented in Figure 12. Let l be an oriented parallel of l^- in Σ equipped with the framing induced by Σ . Let l'' be obtained from l' by a left-handed Dehn twist along l , and equipped with the framing induced by the surface Σ , that is $f(l'') = f(l) + f(l') + 2\ell k(l^-, l') - 1$. Let H' be the Y -graph obtained from H by changing l' into l'' . Then $M_H = M_{H'}$ and, for any Y -link*

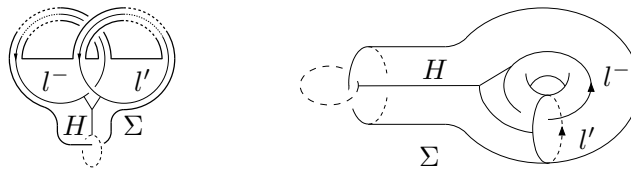


Figure 12

L in the complement in M of a neighbourhood of H ,

$$[(M; L \cup H')] = [(M; L \cup H)].$$

Proof Thanks to Lemma 4.4, the surgery on H is uniquely determined by Σ that is unchanged by a Dehn twist of Σ . It implies that $M_H = M_{H'}$ and that, for any sublink $L(J)$ of L , $M_{L(J)\cup H} = M_{L(J)\cup H'}$. The equality of the brackets follows. \square

End of proof of Proposition 4.13

- Let l be a leaf of an oriented Y -component H of G . Let l' be the next leaf of H (with respect to the cyclic order). We prove that increasing $\ell k(l, l')$ does not change $\overline{[(M; G)]}$. By Lemma 4.15, adding a 0-framed meridian $m_0(l')$ of l' to l adds $\overline{[(M; G(m_0(l')/l))]}$ to $\overline{[(M; G)]}$, where $G(m_0(l')/l)$ is obtained from G by changing l into $m_0(l')$. Now, $l' = m' + l'_0$, where l'_0 does not intersect a disk bounded by $m_0(l')$, and m' is a meridian of $m_0(l')$. Then

$$\begin{aligned} \overline{[(M; G(m_0(l')/l))]} &= \overline{[(M; G(m_0(l'), m'/l, l'))]} \\ &\quad + \overline{[(M; G(m_0(l'), l'_0/l, l'))]} \\ &= 0 \end{aligned}$$

since $G(m_0(l'), m'/l, l')$ is a Y -link with a trivial Hopf link and since $G(m_0(l'), l'_0/l, l')$ has a trivial leaf.

- To conclude, it is enough to show that if l^- is a 0-framed leaf of G , if l' is the previous leaf in the component of l^- in G (w.r.t. the cyclic order), and if l' is 1-framed, then changing the framing of l' into 0 does not change $\overline{[(M; G)]}$. By linearity, we may assume that l' is a trivial knot, and then it is enough to show that $\overline{[(M; G)]} = 0$. By linearity on l^- , we can assume that l^- is a 0-framed meridian of some leaf l_0 in another Y -component of G . Let G' be the Y -link obtained from G by changing l' into the twisted curve $l'' = l + l'$ as in Lemma 4.19 so that $\bar{f}(l'') = \bar{f}(l') + 1 = 0$. Then l^- and l'' are 0-framed meridians of l_0 . By linearity with respect to l_0 , $\overline{[(M; G')]} is the sum of brackets of two Y -links with a trivial leaf. Then $\overline{[(M; G')]} = \overline{[(M; G)]} = 0$. $\square$$

4.4 Proof of Theorem 3.5 for LP-surgeries induced by Y -links

Here we prove Theorem 3.5 when $D = (M; G)$ is an LP-surgery induced by a Y -link G .

Lemma 4.20 *Let A and A' be two \mathbb{Z} -handlebodies whose boundaries are identified so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_{A'}$. Let Z and Z' be two other \mathbb{Z} -handlebodies whose*

boundaries are identified so that $\mathcal{L}_Z = \mathcal{L}_{Z'}$. Assume that ∂A and $(-\partial Z)$ are identified so that $A \cup_{\partial A} Z$ is a \mathbb{Z} -sphere. Then

$$\mu(A \cup_{\partial A} Z) - \mu(A' \cup_{\partial A} Z) = \mu(A \cup_{\partial A} Z') - \mu(A' \cup_{\partial A} Z').$$

Proof For any \mathbb{Z} -sphere M , let $\lambda(M)$ be the Casson invariant of M . Then $\mu(M) \equiv \lambda(M) \pmod{2}$. Thanks to [Les, Theorem 1.3],

$$\lambda(A \cup_{\partial A} Z) - \lambda(A' \cup_{\partial A} Z) - (\lambda(A \cup_{\partial A} Z') - \lambda(A' \cup_{\partial A} Z'))$$

is an even number. It implies the result. \square

Together with Proposition 4.13, it implies

Corollary 4.21 *Let H be a Y -graph in a \mathbb{Z} -sphere M . Let*

$$p = \bar{f}(l_1)\bar{f}(l_2)\bar{f}(l_3)$$

denote the product of the framings of the three leaves of H in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Then

$$\mu(M_H) - \mu(M) = p.$$

Proof First, we prove that μ vanishes on \mathcal{F}_2 . Let $G = G_1 \cup G_2$ be a 2-component Y -link in a \mathbb{Z} -sphere M . Let A be a regular neighbourhood of G_1 . Let Z be the complement of $\text{Int}(A)$ in M . Set $A' = A_{G_1}$ and set $Z' = Z_{G_2}$. Then A, A', Z and Z' satisfy the assumptions of Lemma 4.20 and

$$\begin{aligned} & \mu(M_G) - \mu(M_{G_1}) - \mu(M_{G_2}) + \mu(M) \\ &= \mu(A' \cup Z') - \mu(A' \cup Z) - \mu(A \cup Z') + \mu(A \cup Z) = 0. \end{aligned}$$

Then $\mu(M_H) - \mu(M)$ only depends on $\overline{[(M; H)]} \in \mathcal{G}_1$, thus it only depends on the product p thanks to Proposition 4.13, and it vanishes when $p = 0$.

Then $\mu(M_H) - \mu(M) = p$ since μ is a non-trivial invariant on \mathcal{F} . \square

Lemma 4.22 *Let $\tilde{D} = (M; 2k - 1; (A_i, B_i)_{i=2, \dots, 2k})$ be a $(2k - 1)$ -component LP-surgery. Let N be a \mathbb{Z} -handlebody in $M \setminus (\cup_{i=2}^{2k} A_i)$. Let (A_1, B_1) be a pair of \mathbb{Z} -handlebodies such that $A_1 \subset \text{Int}(N)$ and ∂A_1 and ∂B_1 are identified so that $\mathcal{L}_{A_1} = \mathcal{L}_{B_1}$. Set $D(A_1, B_1) = (M; 2k; (A_i, B_i))$. Let*

$$i_*: H_1(A_1) \longrightarrow H_1(N)$$

denote the homomorphism induced by the inclusion map of A_1 into N . Set

$$\mathcal{I}_1(A_1, B_1) = \left(\otimes^3 (i_* \circ \varphi_{A_1}^{-1}) \right) (\mathcal{I}(A_1, B_1)) \in \bigotimes_{i=1}^3 H_1(N)^{(i)}$$

where φ_{A_1} has been defined in Notation 3.3. Then, for any oriented degree k Jacobi diagram Γ , there exists a linear form $\ell_N(\tilde{D}; \Gamma)$ in $(\otimes^3 H_1(N))^*$ such that, for any pair (A_1, B_1) as above,

$$\ell(D(A_1, B_1); \Gamma) = \langle \mathcal{J}_1(A_1, B_1), \ell_N(\tilde{D}; \Gamma) \rangle.$$

Proof Let σ be a coloration of Γ . Set

$$T'(\tilde{D}; \Gamma; \sigma) = \text{sign}(h) \bigotimes_{i=2}^{2k} \mathcal{I}(A_i, B_i) \in \otimes_{\{c \in H(\Gamma); \sigma \circ v(c) > 1\}} X(c).$$

Apply all the contractions corresponding to the edges that do not contain any half-edge c in $(\sigma \circ v)^{-1}(1)$. These are all the edges except the three edges $\{c, j(c)\}$ where $c \in (\sigma \circ v)^{-1}(1)$ and $j(c)$ is the other half-edge of $e(c)$, and the obtained tensor is in $\otimes_{\{c \in H(\Gamma); \sigma \circ v(c) = 1\}} X(j(c))$. Now apply $\bigotimes_{\{c \in H(\Gamma); \sigma \circ v(c) = 1\}} \varphi_{A_{\sigma \circ v(j(c))}}^{-1}$ in order to obtain the tensor

$$\ell'(\tilde{D}; \Gamma; \sigma) \in \bigotimes_{\{c \in H(\Gamma); \sigma \circ v(c) = 1\}} H_1(A_{\sigma \circ v(j(c))}).$$

The linking number maps $H_1(A_{\sigma \circ v(j(c))})$ to $(H_1(N))^*$ and therefore maps $\ell'(\tilde{D}; \Gamma; \sigma)$ to an element

$$\ell_N(\tilde{D}; \Gamma; \sigma) \in \bigotimes_{i=1}^3 (H_1(N)^*)^{(i)}.$$

By definition, $\ell(\tilde{D}; \Gamma; \sigma)$ is the contraction of $\ell_N(\tilde{D}; \Gamma; \sigma) \otimes \mathcal{J}_1(A_1, B_1)$. Then

$$\ell(D; \Gamma) = \langle \mathcal{J}_1(A_1, B_1), \sum_{\sigma \in \text{Bij}(\Gamma)/\text{Aut}(\Gamma)} \frac{\ell_N(\tilde{D}; \Gamma; \sigma)}{\#\text{Aut}_V(\Gamma)} \rangle. \quad \square$$

Proposition 4.23 *Let $n \in \mathbb{N}$. Let M be a \mathbb{Z} -sphere. Let Γ be an oriented degree k Jacobi diagram with $2k \leq n$. Consider $\ell((M; G); \Gamma)$ as a function of oriented n -component Y -links G in M . Then*

- *The linking number $\ell((M; G); \Gamma)$ only depends on*
 - *the linking numbers $\ell k(l, l')$, where l and l' are leaves in two distinct Y -components of G*
 - *the products $\bar{f}(l_1)\bar{f}(l_2)\bar{f}(l_3)$, where l_1, l_2 and l_3 are leaves in a same Y -component.*
- *Considered as a map of a leaf l of G , $\ell((M; G); \Gamma)$ is a linear map in $([l], \bar{f}(l)) \in H_1(M \setminus \cup_{l' \neq l} l') \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Proof Assume $n = 2k$. Lemma 4.22 and the expression of $\mathcal{I}(A_1, B_1)$ given in Subsection 3.3 show that $\ell((M; G); \Gamma)$ does not depend on the framing of the leaves of G and that $\ell((M; G); \Gamma)$, seen as a map of a leaf l of a component H of G , linearly depends on the homology class of l in $M \setminus (G \setminus H)$. It implies the result. If $2k < n$, the result follows from Corollary 4.21 and from the previous case. \square

Proposition 4.24 *Let G be an n -component Y -link in a \mathbb{Z} -sphere M . Then Theorem 3.5 is true when $D = (M; G)$.*

Proof The simultaneous multilinearities of the bracket in Proposition 4.13 and of the linking number of LP-surgeries induced by Y -links in Proposition 4.23 allow us to cut the leaves of G and to reduce the proof in the case where

- The non-zero-framed leaves are ± 1 -framed and bound discs disjoint from G .
- Any 0-framed leaf is a meridian of another leaf.

If a ± 1 -framed leaf is in a component with a 0-framed leaf, its framing can be changed without changing either side of the equality. Then we can assume that the only ± 1 -framed leaves are parts of components like Y_{III} . Similarly, we can assume that any 0-framed leaf is a meridian of one leaf in another component of G . Then, up to orientation changes of leaves, we can assume that G is a Y -link induced by a Jacobi diagram. Since Theorem 3.5 is true for LP-surgeries induced by Jacobi diagrams, the result follows. \square

4.5 Proof of Theorem 3.5 in the general case

Let (A, B) be a pair of \mathbb{Z} -handlebodies whose boundaries ∂A and ∂B are identified so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B$. In what follows, $\mathcal{I}(A, B)$ denotes the linear form on $\otimes^3 \mathcal{L}_A$ induced by the intersection form on $\otimes^3 H_2(A \cup (-B))$, and

$$\varphi_A: H_1(A) \longrightarrow \mathcal{L}_A^*$$

denotes the isomorphism presented in Notation 3.3.

Lemma 4.25 *Let A , B and C be three \mathbb{Z} -handlebodies with the same genus. Assume that ∂A , ∂B and ∂C are identified so that $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_B = \mathcal{L}_C$. Then*

$$\mathcal{I}(A, B) = \mathcal{I}(A, C) + \mathcal{I}(C, B).$$

Proof Let a_1 , a_2 and a_3 be three oriented curves in ∂A that represent elements of \mathcal{L}_A still denoted by a_1 , a_2 and a_3 such that the curves a_i do not intersect each other. Let $M = A \cup (-B)$. For any $i \in \{1, 2, 3\}$, let S_A^i and S_B^i be oriented surfaces in A and in B , respectively, such that a_i bounds S_A^i in A and a_i bounds S_B^i in B . Assume that all the surfaces are transverse to each other and to ∂A . Set

$$\Sigma_M^i = S_A^i \cup_{a_i} (-S_B^i) \subset M.$$

The orientation of Σ_M^i and the orientation of M induce a positive normal vector field n_i on Σ_M^i . The algebraic intersection $\langle \Sigma_M^1, \Sigma_M^2, \Sigma_M^3 \rangle_M$ is the sum of the signs of the intersection points, where the sign is defined as follows. For any intersection point x , the sign is $+1$ if $(n_1(x), n_2(x), n_3(x))$ is a direct basis of $T_x M$ according to the orientation of M , and -1 otherwise. By definition,

$$(\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = \langle \Sigma_M^1, \Sigma_M^2, \Sigma_M^3 \rangle_M.$$

Then

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) &= \langle \Sigma_M^1, \Sigma_M^2, \Sigma_M^3 \rangle_M \\ &= \langle S_A^1, S_A^2, S_A^3 \rangle_M + \langle (-S_B^1), (-S_B^2), (-S_B^3) \rangle_M \\ &= \langle S_A^1, S_A^2, S_A^3 \rangle_A + \langle (-S_B^1), (-S_B^2), (-S_B^3) \rangle_{(-B)}. \end{aligned}$$

Note that the normal vector field n_B^i to S_B^i induced by the orientation of S_B^i and by the orientation of B is equal to the normal vector field to $(-S_B^i)$ induced by the orientation of $(-S_B^i)$ and by the orientation of $(-B)$. Now, for each point of $S_B^1 \cap S_B^2 \cap S_B^3$, (n_B^1, n_B^2, n_B^3) is direct according to the orientation of B if and only if it is not direct according to the orientation of $(-B)$. It implies that

$$(\mathcal{I}(A, B))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3) = \langle S_A^1, S_A^2, S_A^3 \rangle_A - \langle S_B^1, S_B^2, S_B^3 \rangle_B$$

and the lemma follows. \square

Lemma 4.26 *Under the hypotheses of Lemma 4.12, for any Jacobi diagram Γ ,*

$$\ell(D; \Gamma) = \ell(D'; \Gamma) + \ell(D''; \Gamma).$$

Proof The result follows from the equality $\mathcal{I}(A_1, B_1) = \mathcal{I}(A_1, A'_1) + \mathcal{I}(A'_1, B_1)$ given by Lemma 4.25 and from the equality

$$\mathcal{L}(D(\{1\})) = \mathcal{L}(D'(\{1\})) + \mathcal{L}(D''(\{1\})). \quad \square$$

Lemma 4.27 *Consider an n -component LP-surgery*

$$D = (M; n; (A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_n, B_n)).$$

Let A'_1 and B'_1 be two \mathbb{Z} -handlebodies such that

- $A'_1 \subset \text{Int}(A_1)$
- $\partial A'_1$ and $\partial B'_1$ are identified so that $\mathcal{L}_{A'_1} = \mathcal{L}_{B'_1}$
- $B_1 = (A_1)_{B'_1/A'_1}$ is the \mathbb{Z} -handlebody obtained from A_1 by replacing A'_1 by B'_1 .

Set $D' = (M; n; (A'_1, B'_1), (A_2, B_2), \dots, (A_n, B_n))$. Then $[D'] = [D]$ while, for any Jacobi diagram Γ ,

$$\ell(D'; \Gamma) = \ell(D; \Gamma).$$

Sublemma 4.28 Under the hypotheses of Lemma 4.27, let

$$\begin{aligned} \partial_{A_1}: H_2(A_1, \partial A_1) &\rightarrow \mathcal{L}_{A_1} \\ \partial_{A'_1}: H_2(A'_1, \partial A'_1) &\rightarrow \mathcal{L}_{A'_1} \end{aligned}$$

denote the isomorphisms induced by the long exact homology sequences. Let

$$\begin{aligned} i_{A_1}: H_2(A_1, \partial A_1) &\rightarrow H_2(A_1, A_1 \setminus \text{Int}(A'_1)) \\ i_{A'_1}: H_2(A'_1, \partial A'_1) &\rightarrow H_2(A_1, A_1 \setminus \text{Int}(A'_1)) \end{aligned}$$

be the homomorphisms induced by the inclusion maps. Then $i_{A'_1}$ is an isomorphism by the excision axiom. Set

$$\Phi = \partial_{A'_1} \circ i_{A'_1}^{-1} \circ i_{A_1} \circ \partial_{A_1}^{-1}: \mathcal{L}_{A_1} \rightarrow \mathcal{L}_{A'_1}.$$

Then

$$(\mathcal{I}(A'_1, B'_1)) \circ (\otimes^3 \Phi) = \mathcal{I}(A_1, B_1).$$

Proof of Lemma 4.27 assuming Sublemma 4.28 The assertion $[D'] = [D]$ is obvious. Since $\mu(M_{B_1/A_1}) = \mu(M_{B'_1/A'_1})$, it suffices to prove that

$$\ell(D; \Gamma) = \ell(D'; \Gamma)$$

when $n = 2k$ is even and when Γ is a degree k Jacobi diagram. Set $\tilde{D} = (M; 2k - 1; (A_i, B_i)_{i=2, \dots, 2k})$. Let

$$i_*: H_1(A'_1) \longrightarrow H_1(A_1)$$

be the map induced by the inclusion map of A'_1 into A_1 . By Lemma 4.22, there exists a linear form

$$\ell_{A_1}(\tilde{D}; \Gamma) \in \left(\bigotimes^3 H_1(A_1) \right)^*$$

such that

$$\begin{aligned} \ell(D; \Gamma) &= \langle (\otimes^3 \varphi_{A_1}^{-1})(\mathcal{I}(A_1, B_1)), \ell_{A_1}(\tilde{D}; \Gamma) \rangle \\ \ell(D'; \Gamma) &= \langle (\otimes^3 (i_* \circ \varphi_{A'_1}^{-1}))(\mathcal{I}(A'_1, B'_1)), \ell_{A_1}(\tilde{D}; \Gamma) \rangle. \end{aligned}$$

The following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} H_1(A'_1) & \xrightarrow{\varphi_{A'_1}} & \mathcal{L}_{A'_1}^* \\ i_* \downarrow & & \downarrow \Phi^* \\ H_1(A_1) & \xrightarrow{\varphi_{A_1}} & \mathcal{L}_{A_1}^*. \end{array}$$

Indeed both compositions, seen as elements of $(H_1(A'_1) \otimes \mathcal{L}_{A_1})^*$, map $([b], [a]) \in H_1(A'_1) \times \mathcal{L}_{A_1}$ to the algebraic intersection in A_1 of a surface bounded by a and of the curve b . Thus,

$$(\otimes^3 (i_* \circ \varphi_{A'_1}^{-1}))(\mathcal{I}(A'_1, B'_1)) = (\otimes^3 \varphi_{A_1}^{-1})(\mathcal{I}(A'_1, B'_1) \circ (\otimes^3 \Phi)).$$

By Sublemma 4.28, the lemma follows. \square

Proof of Sublemma 4.28 Let a_1, a_2 and a_3 be three oriented curves in ∂A_1 that represent elements of \mathcal{L}_{A_1} still denoted by a_1, a_2 and a_3 such that the curves a_i do not intersect each other. Let a'_1, a'_2, a'_3 be oriented curves in $\partial A'_1$ that represent the elements $\Phi(a_i)$ of $\mathcal{L}_{A'_1}$ such that the curves a'_i do not intersect each other. For any $i \in \{1, 2, 3\}$, the curves a_i and a'_i cobound an oriented surface Σ^i in $A_1 \setminus \text{Int}(A'_1)$. The curve a'_i bounds an oriented surface $\sigma_{A'_1}^i$ in A'_1 and bounds an oriented surface $\sigma_{B'_1}^i$ in B'_1 . Set

$$\begin{aligned} S_i &= (\sigma_{A'_1}^i \cup \Sigma^i) \cup (-\Sigma^i \cup \sigma_{B'_1}^i) \subset A_1 \cup (-B_1) \\ S'_i &= \sigma_{A'_1}^i \cup (-\sigma_{B'_1}^i) \subset A'_1 \cup (-B'_1). \end{aligned}$$

Set

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{A'_1 B'_1} &= (\mathcal{I}(A'_1, B'_1))(\Phi(a_1) \otimes \Phi(a_2) \otimes \Phi(a_3)) \\ \mathcal{J}_{A_1 B_1} &= (\mathcal{I}(A_1, B_1))(a_1 \otimes a_2 \otimes a_3). \end{aligned}$$

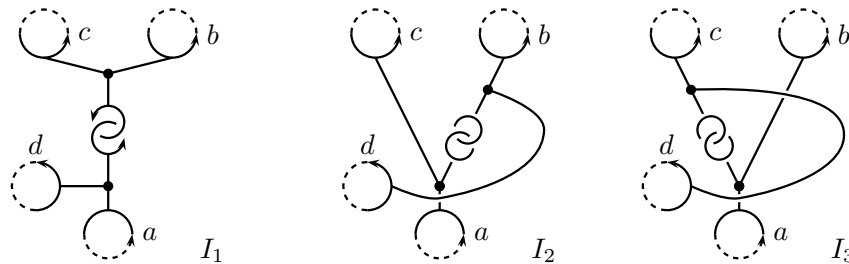
By definition, $\mathcal{J}_{A_1 B_1}$ is the intersection in $A_1 \cup (-B_1)$ of the oriented surfaces S_i and $\mathcal{J}_{A'_1 B'_1}$ is the intersection in $A'_1 \cup (-B'_1)$ of the oriented surfaces S'_i . Then $(\mathcal{J}_{A_1 B_1} - \mathcal{J}_{A'_1 B'_1})$ is the contribution of the intersection of the surfaces $\Sigma^i \cup (-\Sigma^i)$. This contribution vanishes when $A'_1 = B'_1$ because $\mathcal{I}(A_1, A_1) = \mathcal{I}(A'_1, A'_1) = 0$ by Lemma 4.25. Hence it always vanishes. \square

Proof of Theorem 3.5 Lemmas 4.11, 4.12 and 4.26 allow us to reduce the proof to the case of an LP-surgery $D = (M; n; (A_i, B_i))$ where B_i is obtained from A_i by a surgery on a Y -graph embedded in A_i . By Lemma 4.27, D can next be considered as an LP-surgery induced by an n -component Y -link in M . Then Theorem 3.5 follows from Proposition 4.24. \square

A The IHX relation

For self-containedness, we finish the proof of Theorem 2.1 by proving that Ψ_n factors through the IHX relation. This is a consequence of the following proposition.

Proposition A.1 *Let G_1 be an oriented Y -link in a \mathbb{Z} -sphere M that admits the following two-component sublink I_1 . For $i = 2, 3$, let G_i be obtained from G_1 by changing I_1 into I_i . The four leaves a, b, c and d are identical.*

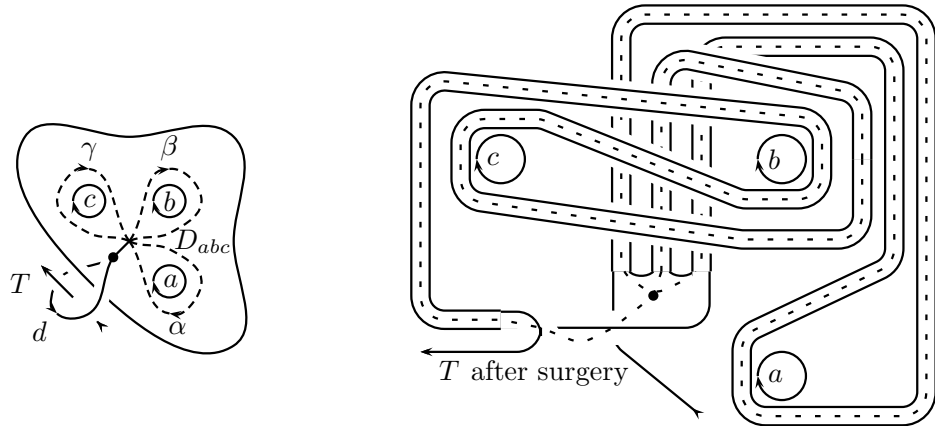


Then

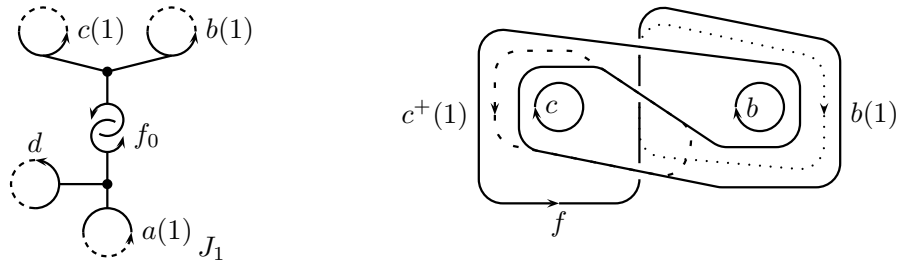
$$\overline{[(M; G_1)]} + \overline{[(M; G_2)]} + \overline{[(M; G_3)]} = 0.$$

Proof First recall that Proposition 4.13 implies that the actual embeddings of the Y -graph edges do not affect the Y -link brackets. Therefore these embeddings will not be specified in the proof below. Consider an embedded product $D_{abc} \times [0, 1]$ of the three-hole disk D_{abc} whose three inner boundary components are a, b and c , and the three generators of $\pi_1(D_{abc})$, α, β and γ . We first prove that there exists some two-component Y -link J_1 in $(M \setminus (G_1 \setminus I_1))$ that is obtained from I_1 by changing (the edge adjacent to d and) the leaves a, b and c into leaves $a(1), b(1)$ and $c(1)$ that are homologous to a, b and $(-c)$ in $(M \setminus (G_1 \setminus I_1))$, respectively, such that surgery on J_1 makes a pack T of surgery arcs in a surgered disk bounded by d describe the element $[\beta\alpha\beta^{-1}, [\gamma, \beta]]$ of $\pi_1(D_{abc})$ in $D_{abc} \times [0, 1]$ in an ascending way with respect to the height of $[0, 1]$.

Indeed the second part of the following picture shows such a path that is ascending (after sliding two tongues), and that cobounds a genus one surface with the initial shown portion of T .



Therefore by Lemma 4.4, this path is obtained from T by surgery on a Y -graph with leaves d , $a(1)$ and f , where $a(1)$ and f are the two dashed handle cores of the genus one surface, $a(1)$ is homotopic to $\beta\alpha\beta^{-1}$, and f is homotopic to $[\beta, \gamma]$. Thus, f is obtained from a trivial leaf f_0 by surgery on a Y -graph, with one trivial leaf that makes a Hopf link together with f_0 , and two other leaves $b(1)$ and $c(1)$ that do not link $a(1)$ and that are homotopic to β and γ^{-1} , respectively, as Lemma 4.4 and the next picture show.



Similarly, for $i = 2$ or 3 , there exists a two-component Y -link J_i , that is obtained from I_i by changing (the edge adjacent to d and) the leaves a , b and c into leaves $a(i)$, $b(i)$ and $c(i)$ that are homologous to $\alpha(i)a$, $\beta(i)b$ and c in $(M \setminus (G_1 \setminus I_1))$, respectively, where $\alpha(i), \beta(i) \in \{-1, 1\}$, and $\alpha(i)\beta(i) = -1$, such that surgery on J_i makes a pack T of surgery arcs in a surgered disk bounded by d describe the element of $\pi_1(D_{abc})$, $[\gamma\beta\gamma^{-1}, [\alpha, \gamma]]$ for $i = 2$, or $[\alpha\gamma\alpha^{-1}, [\beta, \alpha]]$ for $i = 3$, in $D_{abc} \times [0, 1]$ in an ascending way with respect to the height of $[0, 1]$.

In particular, the following identity in the free group generated by α , β and γ -whose verification is straightforward-

$$[\beta\alpha\beta^{-1}, [\gamma, \beta]][\gamma\beta\gamma^{-1}, [\alpha, \gamma]][\alpha\gamma\alpha^{-1}, [\beta, \alpha]] = 1$$

ensures that the surgery on $J_1 \cup J_2 \cup J_3$ is trivial.

Therefore, if H_i is obtained from G_i by changing I_i into J_i ,

$$\begin{aligned} & [M_{J_1 \cup J_2}, H_3] + [M_{J_1}, H_2] + [M, H_1] \\ &= \sum_{J \subset (G_1 \setminus I_1)} (-1)^{\#J} \begin{pmatrix} M_{J \cup J_1 \cup J_2 \cup J_3} - M_{J \cup J_1 \cup J_2} \\ + M_{J \cup J_1 \cup J_2} - M_{J \cup J_1} \\ + M_{J \cup J_1} - M_J \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Furthermore, Proposition 4.13 ensures that

$$\overline{[(M; G_i)]} = -\overline{[(M; H_i)]} = -\overline{[(M_{\cup_{j < i} J_j}; H_i)]},$$

and allows us to conclude the proof. \square

This proof shows how the Jacobi IHX relation comes from the Lie algebra structure on the graded space associated to the lower central series of a free group. See [MKS].

References

- [GGP] **S Garoufalidis, M Goussarov, M Polyak**, *Calculus of clovers and finite type invariants of 3-manifolds*, *Geom. Topol.* 5 (2001) 75–108 MR1812435
- [GM] **L Guillou, A Marin**, *Notes sur l’invariant de Casson des sphères d’homologie de dimension trois*, *Enseign. Math.* 38 (1992) 233–290 MR1189008
- [Hbg] **N Habegger**, *Milnor, Johnson, and Tree Level Perturbative Invariants*, preprint (2000) <http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~habegger>
- [Hbo] **K Habiro**, *Claspers and finite type invariants of links*, *Geom. Topol.* 4 (2000) 1–83 MR1735632
- [KT] **G Kuperberg, D P Thurston**, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology*, [arXiv:math.GT/9912167](https://arxiv.org/abs/math/9912167)
- [Le] **T T Q Le**, *An invariant of integral homology 3-spheres which is universal for all finite type invariants*, from: “Solitons, geometry, and topology: on the cross-road”, *Amer. Math. Soc. Transl.* 179 (1997) 75–100 MR1437158
- [Les] **C Lescop**, *A sum formula for the Casson–Walker invariant*, *Invent. Math.* 133 (1998) 613–681 MR1645066
- [L2] **C Lescop**, *Splitting formulae for the Kontsevich–Kuperberg–Thurston invariant of rational homology 3-spheres*, [arXiv:math.GT/0411431](https://arxiv.org/abs/math/0411431)
- [Lic] **W B R Lickorish**, *An Introduction to Knot Theory*, *Graduate Texts in Mathematics* 175, Springer–Verlag, New York (1997) MR1472978

- [MKS] **W Magnus, A Karrass, D Solitar**, *Combinatorial group theory. Presentations of groups in terms of generators and relations*, Second revised edition, Dover Publications, Inc. New York (1976) MR0422434
- [Mat] **S V Matveev**, *Generalized surgery of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres*, *Mat. Zametki* 42 (1987) 268–278, 345 (Russian); English translation: *Math. Notes* 42 (1987) 651–656 MR0915115
- [MN] **H Murakami, Y Nakanishi**, *On a certain move generating link-homology*, *Math. Ann.* 284 (1989) 75–89 MR0995383
- [Oht] **T Ohtsuki**, *Finite type invariants of integral homology 3–spheres*, *J. Knot Theory Ramifications* 5 (1996) 101–115 MR1373813
- [Rol] **D Rolfsen**, *Knots and Links*, Mathematics Lecture Series, No.7. Publish or Perish, Inc. Berkeley, Calif. (1976) MR0515288
- [Thu] **W P Thurston**, *The Geometry and Topology of 3–manifolds, Chapter 13*, Princeton University (1978)
<http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>

*Institut Fourier (UMR 5582 du CNRS), B.P. 74
38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France*

Email: auclaire@ujf-grenoble.fr and lescop@ujf-grenoble.fr

URL: <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~lescop>

Received: 9 February 2004

Bibliographie

- [AL] **E. Auclair, C. Lescop**, *Clover Calculus for Homology 3-spheres via basic Algebraic Topology*, Alg. & Geom. Top. **5** (2005), 71–106.
- [B] **D. Bar-Natan**, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995), no. 2, 423–472.
- [G] **S. Garoufalidis**, *On finite type 3-manifold invariants. I*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 4, 441–461.
- [GGP] **S. Garoufalidis, M. Goussarov, M. Polyak**, *Calculus of Clovers and finite type Invariants of 3-manifolds*, Geom. & Top. **5** (2001), 75–108.
- [GL] **S. Garoufalidis, J. Levine**, *Finite Type 3-Manifold Invariants, the Mapping Class Group and Blinks*, Journal of differential Geometry **47** (1997), 257–320.
- [GL2] **S. Garoufalidis, J. Levine**, *Tree-level invariants of three-manifolds, Massey products and the Johnson homomorphism*, Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics, Proc. Sympos. Pure Math. **73** (2005), 173–203, Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [GM] **L. Guillou, A. Marin**, *Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension trois*, Enseign. Math. (2) **38** (1992), no. 3–4, 233–290.
- [H] **K. Habiro**, *Claspers and finite type invariants of links*, Geom. & Top. **4** (2000), 1–83.
- [Hbg] **N. Habegger**, *Milnor, Johnson, and Tree Level Perturbative Invariants*, Preprint 2000,
<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/~habegger>
- [HP] **N. Habegger, W. Pitsch**, *Tree level Lie algebra structures of perturbative invariants*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), no. 3, 333–345.
- [Hst] **J. Hoste**, *A formula for Casson's invariant*, Trans. Amer. Math. Soc **297** (1986), no. 2, 547–562.
- [J1] **D. L. Johnson**, *Homeomorphisms of a Surface which act trivially on Homology*, Proc. Am. math. soc. **75** (1979), 119–125.

- [J2] **D. L. Johnson**, *An Abelian Quotient of the Mapping Class Group \mathcal{S}_g* , Math. Ann. **249** (1980), 225–242.
- [J3] **D. L. Johnson**, *A survey of the Torelli group*, Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981), Contemp. Math. **20** (1983), 165–179. Amer. Math. Soc., Providence, RI,
- [J4] **D. L. Johnson**, *The structure of the Torelli group II : a characterization of the group generated by twists on bounding curves*, Topology **24** (1985), no. 2, 113–126.
- [J5] **D. L. Johnson**, *The structure of the Torelli group III : the abelianization of \mathcal{S}* , Topology **24** (1985), no. 2, 127–144.
- [K] **T. Kitano**, *Johnson's homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori*, Topology Appl. **69** (1996), no. 2, 165–172.
- [L] **T. T. Q. Le**, *An invariant of integral homology 3–spheres which is universal for all finite type invariants*, Solitons, geometry, and topology : on the crossroad,, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997), 75–100.
- [Lic] **W. B. R. Lickorish**, *An introduction to knot theory*, GTM, Springer-Verlag (1997).
- [M] **S. V. Matveev**, *Generalized surgery of three-dimensional manifolds and representations of homology spheres*, Mat. Zametki **42** (1987), 268–278, 345 (Russe) ; traduction anglaise : Math Notes **42** (1987), 651–656.
- [Mil] **J. Milnor**, *Link groups*, Ann. of Math. (2) **59** (1954), 177–195.
- [MKS] **W. Magnus, A. Karass, D. Solitar**, *Combinatorial Group Theory : Presentations of Groups in terms of Generators and Relations*, Interscience Publ. Wiley & Sons (1966).
- [MN] **H. Murakami, Y. Nakanishi**, *On a certain move generating link-homology*, Math. Ann. **284** (1989), no. 1, 75–89.
- [Mo1] **S. Morita**, *Casson's Invariant for Homology 3–spheres and characteristic Classes of Surface Bundles I*, Topology **28** (1989), no. 4, 305–323.
- [Mo2] **S. Morita**, *On the Structure of the Torelli Group and the Casson Invariant*, Topology **30** (1991), no. 3, 603–621.
- [S] **N. Sato**, *Cobordisms of semiboundary links*, Topology Appl. **18** (1984), no. 2-3, 225–234.
- [V] **P. Vogel**, *Algebraic structures on modules of diagrams*, Preprint 1997, <http://www.math.jussieu.fr/~vogel>

