HAL
open science

Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation

Emmanuel Moulay

To cite this version:

Emmanuel Moulay. Une contribution à l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation. Automatique / Robotique. Ecole Centrale de Lille; Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2005. Français. NNT : . tel-00114333v2

HAL Id: tel-00114333

https://theses.hal.science/tel-00114333v2

Submitted on 28 Aug 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 12 Année 2005

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE CENTRALE DE LILLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'université des sciences et technologie de Lille

par

Emmanuel MOULAY

Spécialités : AUTOMATIQUE et INFORMATIQUE INDUSTRIELLE

UNE CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ EN TEMPS FINI ET DE LA STABILISATION

Soutenue le 1er décembre 2005 devant le jury suivant :

Président du jury :	Witold RESPONDEK	Professeur à l'INSA de Rouen
Rapporteurs :	Jean-Pierre BARBOT	Professeur à l'ENSEA
	Laurent PRALY	Maître de recherche au CAS
Examinateurs :	Michel DAMBRINE	Maître de conférence à l'École Centrale de Lille
	Jean-Pierre RICHARD	Professeur à l'École Centrale de Lille
Co-encadrante :	Anne DUVAL	Professeur à l'USTL
Directeur de thèse :	Wilfrid PERRUQUETTI	Professeur à l'École Centrale de Lille

Thèse préparée au *Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique & Signal*
de Lille : L.A.G.I.S., UMR CNRS 8021 - École Centrale de Lille

“La véritable science enseigne, par-dessus tout, à douter et à être ignorant.”

Miguel de UNAMUNO, *Le sens tragique de la vie*

À Sophie et Judith

Avant-propos

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du *Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique & Signal* sous la direction de Wilfrid Perruquetti professeur à l'Ecole Centrale de Lille, en collaboration avec Anne Duval, professeur au laboratoire de Mathématiques *Paul Painlevé*.

Je tiens en tout premier lieu à témoigner ma plus profonde gratitude à Wilfrid Perruquetti sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. Ce fut un grand honneur et un immense bonheur de pouvoir accomplir ce travail sous sa direction. J'ai pu bénéficier de ses précieux conseils, de sa disponibilité, de sa gentillesse et de son soutien constant pour mener à bien ce travail. Encore merci !

Je veux aussi exprimer toute ma reconnaissance à Anne Duval pour avoir co-encadré cette thèse et pour avoir été toujours disponible pour répondre à mes questions.

Qu'il me soit ensuite permis de remercier très vivement Jean-Pierre Barbot et Laurent Praly qui ont consenti à être les rapporteurs de cette thèse et Witold Respondek, Michel Dambrine et Jean-Pierre Richard qui ont fait partie de mon jury.

Je remercie Marc Baguelin, Michel Dambrine et Nima Yeganefar pour leur collaboration à ce travail et pour leur sympathie, ainsi que Lotfi Belkoura, Ludovic Rifford, Thierry Floquet, Augustin Mouze et Jacques Lefèvre pour m'avoir éclairé dans bien des domaines.

Je suis particulièrement reconnaissant à Jean-Pierre Richard pour ses qualités humaines et son dévouement comme responsable de notre équipe SyNER. Je n'oublie pas non plus tous les membres de cette équipe qui m'ont accueilli chaleureusement après mon DEA de Mathématiques pures ; en particulier notre directeur de laboratoire Philipe Vanheeghe qui fait un travail remarquable et toujours dans la bonne humeur.

J'adresse une mention spéciale à Patrick Gallais et Benoit Trouillet qui m'ont maintes et maintes fois dépanné en informatique et à Jean-Louis Sardin et Steve Roskell qui ont corrigé l'anglais de mes manuscrits.

Je n'oublie pas mes collègues et amis de bureau : Nima, Marc, François, Alexandre, Corentin, Michael, Delphine et Romain, ainsi que le personnel technique et administratif sans qui l'ambiance n'aurait pas été la même.

Ces quelques lignes sont dédiées à ma famille. J'ai eu la chance d'avoir des parents qui m'ont donné le goût de la connaissance et m'ont soutenu dans les moments difficiles. Pour cela, je leur adresse un grand merci. Je remercie aussi mon frère et sa femme, ainsi que ma belle-famille pour leur soutien et leur sympathie. Enfin, je ne remercierai jamais assez ma femme pour m'avoir accompagné, aidé et soutenu tout au long du difficile parcours de la thèse, ainsi que ma fille qui illumine désormais nos vies.

Table des matières

Introduction générale **11**
Motivation des travaux 11
Positionnement des travaux 12
Présentation du mémoire 13

Notations et abréviations **17**

1 Notions générales **19**
1.1 Introduction 19
1.2 Stabilité au sens de Lyapunov 19
1.2.1 Cas des équations différentielles ordinaires 19
1.2.2 Cas des inclusions différentielles ordinaires 22
1.2.3 Cas des équations différentielles fonctionnelles retardées . 25
1.2.4 Remarque sur les systèmes dynamiques 27
1.3 Stabilisation 30
1.3.1 Cas continu 30
1.3.2 Cas discontinu 33
1.4 Conclusion 34

I Stabilité en temps fini **35**

2 Stabilité en temps fini des équations différentielles ordinaires **37**
2.1 Introduction 37
2.2 Systèmes non autonomes continus 38
2.2.1 Systèmes autonomes scalaires 39
2.2.2 Cas général 41
2.2.3 Application 46
2.3 Systèmes avec unicité des solutions à droite 47
2.4 Systèmes homogènes 56
2.5 Conclusion 57

3 Stabilité en temps fini des inclusions différentielles ordinaires 59
3.1 Introduction 59
3.2 Stabilité asymptotique et en temps fini 59
3.3 Conditions suffisantes de stabilité en temps fini 62
3.3.1 Utilisation de fonctions de Lyapunov lisses 62
3.3.2 Utilisation de fonctions de Lyapunov non lisses 64
3.4 Conditions nécessaires de stabilité en temps fini 66
3.4.1 Utilisation de fonctions de Lyapunov lisses 66
3.4.2 Utilisation de fonctions de Lyapunov non lisses 67
3.5 Quelques remarques 68
3.6 Conclusion 69

4 Stabilité en temps fini des équations différentielles fonctionnelles retardées 71
4.1 Introduction 71
4.2 Conditions suffisantes 72
4.3 Conclusion 74

II Stabilisation des systèmes non linéaires 75

5 Stabilisation en temps fini 77
5.1 Introduction 77
5.2 Cas des systèmes homogènes 77
5.2.1 L'exemple du double intégrateur 78
5.2.2 Une méthode itérative 80
5.2.3 Une approche géométrique 82
5.2.4 Une approche par continuité 83
5.3 Cas des systèmes affines de classe $\mathcal{CL}^k$ 83
5.4 Cas des systèmes linéaires à retard 88
5.4.1 Extension de la transformation d'Artstein et application à la stabilisation en temps fini 88
5.4.2 Perspectives utilisant la transformation de Fiagbedzi et Pearson 91
5.5 Conclusion 93

6 Stabilisation d'équations différentielles non autonomes 95
6.1 Introduction 95
6.2 Formulation du problème 96
6.3 Résultats théoriques 97
6.4 Une méthode constructive 99
6.5 Conclusion 103

7 Stabilisation d'équations différentielles non affines 105
7.1 Introduction 105
7.2 Stabilisation à l'aide des fonctions de Lyapunov contrôlées 106
7.3 Systèmes polynômiaux 110
7.3.1 Systèmes polynômiaux d'ordre deux 110
7.3.2 Systèmes polynômiaux d'ordre trois 114
7.3.3 Systèmes polynômiaux d'ordre supérieur 115
7.4 Application à la stabilisation en temps fini 116
7.5 Un exemple d'extension à un système discontinu 117
7.6 Conclusion 120

A Résultats fondamentaux 121

Conclusion générale et perspectives 123
A.1 Synthèse 123
A.2 Perspectives 124

Bibliographie 130

Index 131

Introduction générale

Motivation des travaux

Les problèmes de stabilité et de stabilisation occupent une place importante en théorie du contrôle et en automatique. La théorie du contrôle, au carrefour des mathématiques et de l'automatique, s'efforce d'apporter des résultats et des méthodes permettant de comprendre, d'analyser et de résoudre les problèmes associés à des systèmes contrôlés. Ces systèmes ont des variables qui permettent d'influencer sa dynamique et qui peuvent être ajustées par un opérateur ou un processus automatisé. Les domaines d'application sont essentiellement ceux de l'automatique : c'est-à-dire la synthèse de lois de commande pour des processus provenant de différents domaines applicatifs comme la robotique, les sciences du vivant (régulation de populations), l'automobile (ABS, contrôle moteur), l'électronique etc...

L'un des objectifs de l'automatique est de construire un contrôle suffisamment régulier pour être utilisable en pratique. En ce qui concerne les systèmes linéaires, de nombreux outils performants permettent de construire un tel contrôle. En effet, la stabilité au sens de Lyapunov est bien maîtrisée pour les systèmes linéaires. Par contre, la stabilisation des systèmes non linéaires reste encore largement inconnue dans l'industrie, bien que des techniques de linéarisation permettent d'obtenir dans certains cas de bons résultats. Dans le domaine du non linéaire, les outils d'analyse de la stabilité sont relativement peu nombreux. Le plus célèbre d'entre eux est la *fonction de Lyapunov* introduite par Alexander Mikhaïlovich Lyapunov (1857-1918). Autour de cet outil, s'est développée une théorie qui porte aujourd'hui le nom de son illustre fondateur "théorie de Lyapunov". C'est grâce à ces fonctions de Lyapunov que nous allons mener l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation de systèmes non linéaires.

Parmi les problématiques émergentes de l'automatique, notons celles concernant la stabilisation en temps fini. Historiquement, les problèmes n'étaient abordés que sous un aspect asymptotique, c'est-à-dire au bout d'un temps "suffisamment important", sans autre garantie quant à l'obtention d'un comportement dynamique à l'échelle des opérations humaines. On peut également étudier le cas plus intéressant de la convergence exponentielle garantissant un "taux de convergence". Cependant, les conditions d'obtention de la convergence exponentielle sont en général difficiles à obtenir pour des systèmes non linéaires. Pour les ingénieurs, il

est important de pouvoir préciser des performances de convergence, c'est-à-dire de faire en sorte que le processus physique considéré rejoigne en un temps pré-spécifié une consigne ou une trajectoire souhaitée.
Parmi les domaines d'application des techniques de stabilisation en temps fini, nous pouvons mentionner :
– la robotique : par exemple saisir un objet en mouvement ;
– les actionneurs électriques (couramment utilisés en robotique) ;
– la stabilisation des véhicules sous-marins, satellites et automobiles qui sont soumis à de fortes contraintes de temps.
Certes, en pratique, certaines méthodes basées sur l'utilisation de linéarisations statiques ou dynamiques peuvent conduire à des résultats plus ou moins satisfaisants. Cependant, ceux-ci ne s'adressent qu'à une classe relativement restreinte de systèmes physiques : ceux régis par des équations différentielles ordinaires non linéaires possédant certaines propriétés. De nombreux systèmes n'appartiennent pas à cette classe et il faut alors essayer d'autres méthodes, comme par exemple celle utilisant les fonctions de Lyapunov. Concernant les équations différentielles ordinaires non linéaires, nous avons concentré nos efforts sur les points suivants :
– le problème de la caractérisation de la stabilité en temps fini ;
– le problème de la stabilisation en temps fini.
Comme nous le verrons par la suite, on ne peut pas toujours obtenir la stabilisation en temps fini à la place de la stabilisation asymptotique utilisée habituellement dans les problèmes de contrôle. C'est pourquoi nous avons aussi concentré nos efforts sur ce point. Nous nous sommes intéressés à l'utilisation des *fonctions de Lyapunov contrôlées* dans la résolution des problèmes de stabilisation. C'est un outil très performant qui permet d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation, mais qui ne donne pas en général un contrôle explicite. Cependant, dans certains cas, comme celui des systèmes affines, on peut construire un contrôle à partir de la connaissance d'une fonction de Lyapunov contrôlée.

Positionnement des travaux

La notion de système intervient dans presque tous les domaines scientifiques : un *système dynamique* est un ensemble d'objets en relation, évoluant dans le temps en échangeant matière, énergie et informations avec son environnement. Nous donnerons une définition pour de tels systèmes dans le chapitre 1. Afin d'étudier ces objets, on a formulé, depuis le 17ème siècle, des *propriétés qualitatives* modélisées au moyen d'outils mathématiques : c'est ainsi qu'a été menée l'étude des solutions des équations et inclusions différentielles, des équations fonctionnelles et plus récemment des équations aux dérivées partielles. A partir du 19ème siècle, on s'est intéressé à l'étude des *propriétés quantitatives* des systèmes, c'est-à-dire aux propriétés portant sur un ensemble de solutions sans pour autant connaître celles-ci. La notion fondamentale de la stabilité des systèmes non linéaires régis

par des équations différentielles, issue de la mécanique céleste, a alors été mise en avant par Henri Poincaré dans [Poincaré 81, Poincaré 82] et par Alexander Mikhaïlovich Lyapunov.
La théorie du contrôle s'est développée tout au long du 20ème siècle. C'est en 1986 que V.T. Haimo publie le premier article mettant en avant la stabilité en temps fini dans [Haimo 86]. Il faudra attendre la fin des années quatre-vingt-dix avec l'avènement de problèmes concrets soulevés par l'automatique avec des soucis de précision de plus en plus grands ainsi que l'introduction du concept de mode glissant d'ordre supérieur (voir [Perruquetti *et al.* 02, Chapitre 3]) pour que la stabilité en temps fini se développe. Un pas théorique a été franchi avec l'article de S. P. Bhat et D. Bernstein [Bhat *et al.* 00] qui proposent le premier théorème inverse pour la stabilité en temps fini. Avant cela, ils développèrent des applications à la robotique dans [Bhat *et al.* 98] et de manière générale à la stabilisation en temps fini dans [Bhat *et al.* 95, Bhat *et al.* 96, Bhat *et al.* 97] en montrant qu'avec certaines propriétés d'homogénéité du système, la stabilité asymptotique est équivalente à la stabilité en temps fini. C'est dans ce contexte que nous avons repris et développé les travaux de V.T. Haimo, S. P. Bhat et D. Bernstein.

Présentation du mémoire

Nous avons choisi de diviser ce mémoire en deux parties. La première est consacrée à la stabilité en temps fini et la deuxième à la stabilisation asymptotique et en temps fini. Ce choix est guidé par le fait que l'étude théorique de la stabilité est indispensable pour résoudre des problèmes de stabilisation. Si les problèmes théoriques liés à la stabilité asymptotique sont bien connus, il n'en va pas de même pour la stabilité en temps fini.

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à un bref rappel de la théorie de Lyapunov. Nous avons voulu faire un tour d'horizon des concepts et définitions de stabilité et de stabilisation concernant les systèmes dynamiques : en particulier les équations et inclusions différentielles ordinaires, ainsi que les équations différentielles fonctionnelles retardées. A la fin de ce chapitre introductif commence la première partie qui concerne la stabilité en temps fini.

Le deuxième chapitre traite ainsi de la stabilité en temps fini des équations différentielles ordinaires. L'étude porte sur deux classes de systèmes : la première est celle des systèmes continus et non autonomes et la deuxième celle des systèmes continus autonomes ayant l'unicité à droite des solutions. Le fait d'ajouter l'unicité à droite des solutions nous permettra de donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité en temps fini à l'aide de fonctions de Lyapunov.

Le troisième chapitre est dédié à la stabilité en temps fini des inclusions différen-

tielles ordinaires autonomes. Même si nous nous sommes largement inspirés de la méthode d'étude des systèmes régis par les équations différentielles ordinaires, les résultats sont sensiblement différents. Nous donnerons des conditions nécessaires puis des conditions suffisantes concernant ce problème.

Le quatrième chapitre concerne la stabilité en temps fini des équations différentielles fonctionnelles retardées. Ce problème est très récent et n'a pas été encore traité dans la littérature scientifique. Nous avons étendu une condition suffisante de stabilité en temps fini des équations différentielles ordinaires aux équations différentielles fonctionnelles retardées. Pour cela, nous avons fait appel aux fonctionnelles de Lyapunov, ce qui nous a permis de donner un exemple d'un système à retard stable en temps fini. A notre connaissance, aucun exemple d'un tel système n'existe dans la littérature scientifique.

Nous aborderons alors la deuxième partie de ce mémoire qui est consacrée à la stabilisation des équations différentielles ordinaires, essentiellement la stabilisation en temps fini.

Nous développerons, au chapitre cinq, la stabilisation en temps fini. Celle-ci est à l'intersection de nos différents travaux de recherche et en est l'une des principales applications. D'abord, nous développerons la stabilisation en temps fini pour les équations différentielles ordinaires possédant l'unicité à droite des solutions. S'il existe de nombreux exemples dans la littérature de systèmes stabilisés en temps fini, il existe très peu d'approches théoriques du problème. C'est ce que nous avons voulu traiter dans cette première partie. Ensuite, nous aborderons une nouvelle problèmatique : la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires à retard.

Nous présentons dans le chapitre six le problème de la stabilisation des systèmes non autonomes. Ce travail a pour but de clarifier la situation quant à la stabilisation des systèmes non autonomes par des fonctions de Lyapunov contrôlées. Il permet aussi de mettre en évidence la différence entre les systèmes autonomes et ceux non autonomes.

Le septième chapitre expose une méthode de stabilisation pour une classe de systèmes non affines en la variable de contrôle : les systèmes polynômiaux. Il existe très peu de méthodes permettant de traiter les problèmes de stabilisation des systèmes non affines. Nous en expliciterons une qui utilise les formules algébriques des solutions d'un polynôme. Puis, nous appliquerons ces résultats à la stabilisation en temps fini et étendrons cette méthode à l'utilisation de contrôles discontinus sur un exemple de système magnétique de lévitation.

Pour finir, nous donnerons quelques commentaires concernant nos travaux et nous

esquisserons quelques perspectives de recherche.

Notations et abréviations

Notations

Symbole	Description	Page[1]
$\mathbb{R}$:	Corps des réels	p. 20
$\overline{\mathbb{R}} =$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	p. 21
$\mathbb{R}_{\geq 0}$:	Ensemble des nombres réels positifs	p. 20
$\mathbb{R}^n$:	$\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension n	p. 20
$\|.\|_n$:	Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$	p. 20
$\mathbb{S}^n$:	Sphère unité de dimension n	p. 82
$\langle .,. \rangle$:	Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$	p. 24
$\mathcal{V}$:	Voisinage non vide de l'origine dans $\mathbb{R}^n$	p. 21
$\epsilon\mathcal{B}^X =$	$\{x \in E : \rho(x, X) < \epsilon\}$ où $X \subset (E, \rho)$ espace métrique	p. 22
$\epsilon\mathcal{B}^n$:	Boule de rayon $\epsilon > 0$ ouverte dans $\mathbb{R}^n$	p. 38
$\overline{\mathcal{B}^n}$:	Boule unité fermée dans $\mathbb{R}^n$	p.
$\overline{co}(E)$:	Fermeture convexe de l'ensemble E	p. 61
$C^0(E, F)$:	Ensemble des fonctions continues de E dans F	p. 49
$\mathcal{CP} =$	$\{V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définies positives, continues et à dérivées partielles continues$\}$	p. 106
$C^k(E, F)$:	Ensemble des fonctions de classe k de E dans F	p. 99
$\mathcal{CL}^0(E, F)$:	Ensemble des fonctions continues de E dans F, localement lipschitziennes sur $E \setminus \{0\}$	p. 55
$\mathcal{CL}^k(E, F) =$	$C^0(E, F) \cap C^k(E \setminus \{0\}, F)$	p. 54
C_n^h :	Espace des fonctions continues $\phi : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ où $h > 0$	p. 25
$\|\phi\|_{C_n^h}$:	Norme sur C_n^h donnée par $\|\phi\|_{C_n^h} = \sup\limits_{-\tau \leq s \leq 0} \|\phi(s)\|$	p. 26
$\mathbf{C}_{\epsilon,h} =$	$\left\{\phi \in C_n^h : \|\phi\|_{C_n^h} < \epsilon\right\}$	p. 25
$\sigma(A)$:	Spectre de la matrice A	p. 92
$\|\|\|.\|\|\|$:	Norme matricielle	p. 89
$L_{loc}^{\infty}(\Omega) =$	$\{f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ mesurables: $\forall K$ compact de Ω , $\exists C_K > 0, \|f(x)\|_n < C_K$ p.p. dans $K\}$	p. 31
$\operatorname{esssup}\{h : A\} =$	$\inf\{m : h(x) \leq m$ pour presque tout $x \in A\}$	p. 34
$\varphi_a(x)$:	$\varphi_a(x) = \|x\|^a \, sgn(x)$, $x \in \mathbb{R}$	p. 38
τ :	variable temporelle	p. 20

Symbole	Descrpition	Page[1]
$\Phi_t^\tau(x)$:	Flot d'un système dynamique	p. 27
$\phi_t^x(\tau)$:	Solution d'un système différentiel vérifiant $\phi_t^x(t) = x$ à l'instant initial t	p. 20
$\mathcal{S}(t,x)$:	Ensemble des solutions $\phi_t^x(\tau)$ d'un système dynamique	p. 38
$\phi^x(\tau)$:	Solution d'un système différentiel autonome vérifiant $\phi^x(0) = x$	p. 24
$\mathcal{L}_f V(x) =$	$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle$: Dérivée de Lie de V le long de f	p. 106
$D^+ f(x) =$	$\limsup_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, dérivée de Dini supérieure	p. 21
$\underline{D^+ f}(x;v) =$	$\liminf_{h\to 0^+, v'\to v} \frac{f(x+hv')-f(x)}{h}$, dérivée de Dini directionnelle à droite inférieure	p. 24
$\overline{D^+ f}(x;v) =$	$\limsup_{h\to 0^+, v'\to v} \frac{f(x+hv')-f(x)}{h}$, dérivée de Dini directionnelle à droite supérieure	p. 24
$\underline{D^- f}(x;v) =$	$\liminf_{h\to 0^-, v'\to v} \frac{f(x+hv')-f(x)}{h}$, dérivée de Dini directionnelle à gauche inférieure	p. 24
$\overline{D^- f}(x;v) =$	$\limsup_{h\to 0^-, v'\to v} \frac{f(x+hv')-f(x)}{h}$, dérivée de Dini directionnelle à gauche supérieure	p. 24
$C(\alpha)$:	Matrice compagnon attachée à α	p. 82

Abréviations

EDO :	Equation différentielle ordinaire
IDO :	Inclusion différentielle ordinaire
EDF :	Equation différentielle fonctionnelle
EDFR :	Equation différentielle fonctionnelle retardée
EDP :	Equation aux dérivées partielles
FLC :	Fonction de Lyapunov contrôlée
FLCD :	Fonction de Lyapunov contrôlée décrescente
lisse :	De classe C^∞

[1] page de première appartion

Chapitre 1

Notions générales

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de présenter la stabilité au sens de Lyapunov et la stabilisation pour les systèmes dynamiques. A.M. Lyapunov a montré que l'existence de certaines fonctions, aujourd'hui appelées fonctions de Lyapunov, garantissait la stabilité pour les équations différentielles ordinaires continues. Ce n'est que bien plus tard en 1963 que J. Kurzweil a démontré dans [Kurzweil 63] l'équivalence entre l'existence des fonctions de Lyapunov et la stabilité pour les équations différentielles ordinaires continues.
Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à la stabilité au sens de Lyapunov. Nous verrons d'abord le cas des équations différentielles ordinaires, puis celui des inclusions différentielles ordinaires et enfin celui des équations différentielles fonctionnelles retardées. Nous finirons cette première partie en rappelant la théorie de Zubov sur les systèmes dynamiques qui fournit un cadre d'étude commun à tous les systèmes étudiés.
Dans un deuxième temps, nous ferons un bref rappel sur la stabilisation. Nous nous pencherons d'abord sur des systèmes continus, c'est-à-dire des équations différentielles ordinaires, puis sur des systèmes discontinus, c'est-à-dire des inclusions différentielles utilisant les solutions au sens de Filippov et de Krasovskii.

1.2 Stabilité au sens de Lyapunov

Nous allons donner pour chaque classe de systèmes les définitions concernant la stabilité au sens de Lyapunov ainsi que les théorèmes généraux s'y rapportant.

1.2.1 Cas des équations différentielles ordinaires

L'objectif de cette partie est de présenter sommairement la théorie de la stabilité des équations différentielles ordinaires. En ce qui concerne les problèmes d'exis-

tence, d'unicité des solutions, ainsi que la théorie générale des EDO, nous renvoyons le lecteur à [Arnold 88] ou [Hale 80]. Le problème qui nous intéresse ici est celui des systèmes non linéaires. Les premiers résultats sont apparus avec les travaux de Lyapunov à la fin du 19ème siècle et au début du 20ème siècle. Il donne alors une condition suffisante pour la stabilité des systèmes non linéaires. Puis, J.L. Massera démontre la réciproque de ce résultat dans [Massera 56] pour les systèmes lipschitziens. J. Kurzweil achèvera cette théorie pour les EDO non autonomes en donnant dans [Kurzweil 63] une réciproque pour les systèmes continus. On peut trouver dans [Chetaev 55, Hahn 63, Hahn 67, Persidsky 76] un aperçu global de cette théorie de Lyapunov pour les EDO.
Ici, nous considérons les systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

où $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est supposée continue. Le théorème de Cauchy-Peano nous assure l'existence d'au moins une solution pour toutes conditions initiales. On note $\phi_t^x(\tau)$ une solution du système (1.1) partant de $(t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$.

Exemple 1.1 *Soit $a \in \mathbb{R}$, l'équation différentielle scalaire*

$$\dot{x} = ax$$

est continue et a pour solutions $\phi_t^x(\tau) = e^{a(\tau - t)}x$.

Mais nous allons voir que pour parler de stabilité asymptotique, il faut plus que l'existence locale des solutions, on a besoin de l'existence globale.

Définition 1.2 ([Khalil 96]) *L'origine est **attractive** pour le système (1.1) si pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, il existe $\delta(t) > 0$ tel que si $\|x\|_n < \delta(t)$ alors $\lim_{\tau \to +\infty} \|\phi_t^x(\tau)\|_n = 0$.*

Définition 1.3 ([Khalil 96]) *L'origine est **stable** pour le système (1.1) si pour tout $\epsilon > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, il existe $\delta(\epsilon, t) > 0$ tel que si $\|x\|_n < \delta(\epsilon, t)$ alors chaque solution $\phi_t^x(\tau)$ existe pour $\tau \geq t$, et satisfait $\|\phi_t^x(\tau)\|_n < \epsilon$ pour tout $\tau \geq t \geq 0$.*
*L'origine du système (1.1) est **asymptotiquement stable** si l'origine du système (1.1) est stable et attractive.*

Définition 1.4 ([Khalil 96]) *L'origine du système (1.1) est **uniformément asymptotiquement stable** si :*
- *l'origine est **uniformément stable** : i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $\|x\|_n < \delta(\epsilon)$ alors chaque solution $\phi_t^x(\tau)$ existe pour $\tau \geq t$, et satisfait $\|\phi_t^x(\tau)\|_n < \epsilon$ pour tout $\tau \geq t \geq 0$,*
- *il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\|_n < \delta$ alors $\lim_{\tau \to +\infty} \|\phi_t^x(\tau)\|_n = 0$ uniformément en $t \geq 0$.*

Exemple 1.5 *Si l'on reprend l'exemple précédent $\dot{x} = ax$, on voit facilement que celui-ci est asymptotiquement stable si $a < 0$, stable si $a = 0$ et instable si $a > 0$.*

Définition 1.6 *Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, S est un **ensemble invariant** pour le système système (1.1) si $x \in S$ implique que $\phi_t^x(\tau) \in S$ pour tout $\tau \geq t$.*

Par la suite, nous utiliserons parfois l'abus de langage "système stable" pour signifier "origine du système stable". En effet, dans ce mémoire, nous nous limiterons à l'étude de systèmes dont les points d'équilibre, après un évident changement de coordonnées, peuvent se ramener à l'origine.
Si le système est autonome, les définitions ne dépendent pas du temps et la stabilité asymptotique uniforme et la stabilité asymptotique sont bien sûr équivalentes.
La **dérivée de Dini supérieure** de la fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction $D^+ f : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}}$ definie par

$$D^+ f(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Définition 1.7 *Une fonction continue $V : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que*

1. *V est définie positive,*
2. *$\dot{V}(t, x) = D^+ \left(V \circ \tilde{\phi}_t^x \right)(0)$ est définie négative avec $\tilde{\phi}_t^x(\tau) = (\tau, \phi_t^x(\tau))$,*

*est une **fonction de Lyapunov** pour (1.1). De plus, si V est lisse, alors $\dot{V}(t, x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^i V}{\partial x_i}(t, x) f_i(t, x)$.*

Exemple 1.8 *Considérons l'exemple 1.1 avec $a = -1$, c'est à dire le système $\dot{x} = -x$ alors la fonction $V(x) = x^2$ est une fonction de Lyapunov pour le système car $\dot{V}(x) = -2x^2$.*

Définition 1.9 ([Khalil 96]) *Une fonction continue $\alpha : [0, a] \to [0, +\infty[$ appartient à la **classe** $\mathcal{K}$ (ou est une $\mathcal{K}$−fonction) si elle est strictement croissante et si $\alpha(0) = 0$. Une $\mathcal{K}$−fonction appartient à la **classe** $\mathcal{K}_\infty$ si de plus $a = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = +\infty$.*

Exemple 1.10 *$\alpha : x \mapsto \arctan(x)$ est strictement croissante. Ainsi, $\alpha \in \mathcal{K}$ mais $\alpha \notin \mathcal{K}_\infty$ puisque $\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = \frac{\pi}{2}$.*
$\alpha(x) = \min\{x, x^2\}$ est continue, strictement croissante et $\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = +\infty$, ainsi, $\alpha \in \mathcal{K}_\infty$. Le fait que α ne soit pas dérivable en $x = 1$ ne pose pas de problème, seule la continuité est requise pour les fonctions de classe $\mathcal{K}$.

Définition 1.11 ([Hahn 63]) *Une fonction $v : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est **décrescente** si $\lim_{\|y\| \to 0} v(t, y) = 0$ uniformément en t. Si v est continue, alors v est décrescente si et seulement s'il existe une $\mathcal{K}-$fonction ψ telle que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V}$,*

$$|v(t, x)| \leq \psi\left(||x||_n\right).$$

*Une fonction $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **radialement non bornée** si $\lim_{||y|| \to +\infty} v(t, y) = +\infty$ uniformément en t. Si $v : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est continue alors v est radialement non bornée s'il existe une $\mathcal{K}_\infty-$fonction φ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$v(t, y) \geq \varphi(||y||_n).$$

*Une fonction $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est **propre** si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $V^{-1}(K)$ est compact.*

On peut remarquer qu'une fonction continue $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ ne dépendant pas du temps est radialement non bornée si et seulement si elle est propre.
Rappelons le théorème de Kurzweil donné dans [Kurzweil 63] qui étend au cas des EDO continues le théorème inverse de Lyapunov-Massera donné dans [Massera 56] pour les EDO lipschitziennes. Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique uniforme uniquement à l'aide d'une fonction de Lyapunov.

Théorème 1.12 ([Kurzweil 63]) *Considérons le système (1.1) où f est supposée continue, le système (1.1) est uniformément asymptotiquement stable (respectivement globalement uniformément asymptotiquement stable) si et seulement s'il existe une fonction de Lyapunov pour le système (1.1) lisse et décrescente (respectivement une fonction de Lyapunov pour le système (1.1) lisse, décrescente et radialement non bornée).*

1.2.2 Cas des inclusions différentielles ordinaires

Pour les IDO, il est encore possible de donner un théorème de Lyapunov. On se limitera ici aux cas des IDO autonomes. Rappelons les définitions données dans [Aubin *et al.* 84] :

Définition 1.13 ([Aubin *et al.* 84]) *Une **fonction multivaluée** Φ de l'ensemble $\mathcal{X}$ dans l'ensemble $\mathcal{Y}$ est une fonction qui associe à $x \in \mathcal{X}$ un ensemble $\Phi(x) \subset \mathcal{Y}$. Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces vectoriels et $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une fonction multivaluée, Φ est **semi-continue inférieurement** si $\{x \in \mathcal{X} : \Phi(x) \cap O \neq \emptyset\}$ est ouvert dans $\mathcal{X}$ pour tout ouvert $O \subset \mathcal{Y}$. Φ est **semi-continue supérieurement** si pour tout $x \in \mathcal{X}$ et $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\|x - y\|_{\mathcal{X}} < \delta \Rightarrow \Phi(y) \subset \Phi(x) + \epsilon \mathcal{B}^{\mathcal{Y}}$$

où $\mathcal{B}^{\mathcal{Y}}$ est la boule unité de $\mathcal{Y}$ et $\|.\|_{\mathcal{X}}$ la norme sur $\mathcal{X}$. Φ est ***localement lipschitzienne*** *si pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage $\mathcal{N}(x_0) \subset \mathcal{X}$ et une constante $l \geq 0$ tels que pour tout $x, x' \in \mathcal{N}(x_0)$,*

$$\Phi(x) \subset \Phi(x') + l \|x - x'\|_{\mathcal{X}} \mathcal{B}^{\mathcal{Y}}.$$

Définition 1.14 ([Smirnov 02]) *Une fonction $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ est* ***absolument continue*** *si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute famille dénombrable de sous-intervalles disjoints $[a_k, b_k] \subset [a, b]$ tels que $\sum_k (b_k - a_k) < \delta$, on ait $\sum_k \|x(b_k) - x(a_k)\|_n < \epsilon$.*

Toute fonction absolument continue x est continue, dérivable presque partout et peut s'écrire

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\, ds.$$

Soit F une fonction multivaluée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. F définit l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{1.2}$$

où $\dot{x}(t)$ est la dérivée à droite de $x(t)$. Une **solution** $\phi(\tau)$ du système (1.2) est une fonction absolument continue définie sur un intervalle et vérifiant l'inclusion différentielle presque partout (c'est-à-dire que $\dot{\phi}(\tau) \in F(\phi(\tau))$ pour presque tout τ). On définit des conditions générales pour avoir l'existence des solutions pour le système (1.2) (voir [Aubin *et al.* 84], [Clarke *et al.* 98b] ou [Deimling 92]) :

Condition 1.15 ([Filippov 88]) *Soit F une fonction multivaluée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. F satisfait les* ***conditions générales*** *si :*

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $F(x)$ est non vide, fermé et convexe,

(ii) la fonction $x \mapsto F(x)$ est semi-continue supérieurement.

Dans un premier temps, on va donner un théorème de Lyapunov pour les IDO, i.e. une condition suffisante de stabilité asymptotique utilisant une fonction de Lyapunov. C'est ce résultat que nous utiliserons par la suite. La définition de la stabilité asymptotique pour les IDO est en tout point similaire à celle pour les EDO.
En préambule, rappelons quelques notions.

Définition 1.16 *Les* ***dérivées de Dini directionnelles supérieures*** *d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en $v \in \mathbb{R}^n$ sont définies par*

$$\overline{D^- f}(x; v) = \limsup_{h \to 0^-, v' \to v} \frac{f(x + hv') - f(x)}{h},$$

$$\overline{D^+ f}(x; v) = \limsup_{h \to 0^+, v' \to v} \frac{f(x + hv') - f(x)}{h}.$$

Il existe aussi les ***dérivées de Dini directionnelles inférieures*** *qui sont définies par*

$$\underline{D^{-}f}(x;v) = \liminf_{h\to 0^{-},v'\to v} \frac{f(x+hv')-f(x)}{h},$$
$$\underline{D^{+}f}(x;v) = \liminf_{h\to 0^{+},v'\to v} \frac{f(x+hv')-f(x)}{h},$$

mais nous ne les utiliserons pas dans ce mémoire.

Si f est localement lipschitzienne, on a

$$\overline{D^{+}f}(x;v) = \limsup_{h\to 0^{+}} \frac{f(x+hv)-f(x)}{h}$$

et si f est continûment différentiable, alors

$$\overline{D^{+}f}(x;v) = \langle \nabla f(x), v\rangle .$$

On peut maintenant donner le théorème de Lyapunov pour les IDO.

Théorème 1.17 ([Smirnov 02]) *Soit F une fonction multivaluée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions générales 1.15 et telle que $0 \in F(0)$. S'il existe une fonction continue définie positive $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et une fonction continue définie négative $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que :*

$$\overline{D^{+}V}(x;v) \leq W(x), \quad \forall v \in F(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$, alors l'origine du système (1.2) est asymptotiquement stable. V est appelée une ***fonction de Lyapunov pour le système*** *(1.2).*

Afin d'obtenir un théorème inverse ne faisant pas appel aux solutions, F. H. Clarke *et al.* sont partis des définitions suivantes :

Définition 1.18 ([Clarke *et al.* 98a]) *L'origine du système (1.2) est* ***globalement asymptotiquement stable*** *si toutes ses solutions sont définies pour $\tau \geq 0$ et si les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Attraction uniforme : pour tout $0 < r < R$, il existe $T = T(r,R) > 0$ tel que pour toute solution $\phi^x(\tau)$ de (1.2) vérifiant $\|x\|_n \leq R$, on ait*

$$\|\phi^x(\tau)\|_n \leq r \ \ \forall \tau \geq T.$$

2. *Stabilité uniforme : il existe une fonction croissante continue $M :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telle que pour toute solution $\phi^x(\tau)$ de (1.2) vérifiant $\|x\|_n \leq R$, on ait*

$$\|\phi^x(\tau)\|_n \leq M(R) \ \ \forall \tau \geq 0.$$

3. *Stabilité de Lyapunov :* $\lim_{R\downarrow 0} M(R) = 0$.

Définition 1.19 ([Clarke *et al.* 98a]) *Une paire de fonctions continues* (V, W) *sur* $\mathbb{R}^n$*, avec* V *lisse sur* $\mathbb{R}^n$ *et* W *lisse sur* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *constitue une* ***paire lisse de Lyapunov*** *pour* F *si :*

1. V *est définie positive et* $W(x) > 0$ *pour* $x \neq 0$ *;*
2. *le sous-ensemble* $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq a\}$ *est borné pour tout* $a \geq 0$ *;*
3. $\sup_{v \in F(x)} \langle \nabla V(x), v \rangle \leq -W(x)$ *pour tout* $x \neq 0$.

F. H. Clarke et al. ont donné avec ces deux définitions l'équivalent du théorème 1.12 (théorème de Kurzweil) pour les IDO.

Théorème 1.20 ([Clarke *et al.* 98a, Théorème 1.2]) *Soit* F *une fonction multivaluée à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *vérifiant les conditions générales 1.15 et telle que* $0 \in F(0)$*. L'origine du système (1.2) est globalement asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une paire lisse de Lyapunov pour* F *au sens de la définition 1.19.*

1.2.3 Cas des équations différentielles fonctionnelles retardées

En ce qui concerne les EDFR, nous allons commencer par rappeler les différentes notions de stabilité puis le théorème de Lyapunov-Krasovskii que l'on peut trouver dans [Krasovskii 63]. Nous nous restreindrons au cas des EDFR autonomes.
Soit $h > 0$, le modèle général des EDFR autonomes est de la forme

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x_t), \quad t \geq 0 \tag{1.3}$$

où $x_t \in C_n^h$ est la fonction définie par $x_t(s) = x(t+s)$, $\dot{x}(t)$ est la dérivée à droite de $x(t)$, et $\mathbf{f} : C_n^h \to \mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle continue telle que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$. La continuité de la fonctionnelle assure l'existence des solutions partant de C_n^h (voir [Hale *et al.* 93] ou [El'sgol'ts *et al.* 73]).
$\phi^\chi(\tau)$ est une **solution** du système (1.3) avec comme condition initiale $\chi \in C_n^h$ à l'origine si $\phi^\chi(\tau)$ est définie sur $[-h, b)$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et si

(i) $\phi^\chi(0) \equiv \chi \in C_n^h$,

(ii) $\tau \mapsto \phi^\chi(\tau)$ est continue sur $[0, b[$,

(iii) $\phi^\chi(\tau)$ vérifie l'équation (1.3) pour tout $\tau \in [0, b[$ (i.e. $\dot{\phi}^\chi(\tau) = \mathbf{f}(\phi_\tau^\chi)$ pour tout $\tau \in [0, b[$ où $\phi_\tau^\chi(s) = \phi^\chi(\tau + s)$).

Définition 1.21 ([Hale *et al.* 93]) *L'origine du système (1.3) est*

1. ***stable*** *si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta(\epsilon) > 0$*, tel que* $\chi \in \mathbf{C}_{\delta(\epsilon),h}$ *implique que*

   (a) $\phi^{\chi}(\tau)$ *est défini pour tout* $\tau \geq 0$,
   (b) $\|\phi^{\chi}(\tau)\|_n < \epsilon$ *pour tout* $\tau \geq 0$,

2. ***asymptotiquement stable*** *s'il est stable et s'il existe* δ *tel que* $\chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}$ *implique* $\lim_{\tau \to +\infty} \phi^{\chi}(\tau) = 0$.

On pose

$$\dot{\mathbf{V}}(x_t) = D^{+}\mathbf{V}(x_t) = \limsup_{h \to 0^{+}} \frac{\mathbf{V}(x_{t+h}) - \mathbf{V}(x_t)}{h}$$

Donnons une condition suffisante de stabilité asymptotique pour le système (1.3).

Théorème 1.22 ([Hale *et al.* 93]) *Supposons que les solutions* $\phi^{\chi}(\tau)$ *du système (1.3) soient continues en* (τ, χ). *S'il existe une fonctionnelle continue* $\mathbf{V} : \mathbf{C}_{\delta,h} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\epsilon > 0$, *et deux* $\mathcal{K}-$*fonctions* α_1, α_2 *telles que pour tout* $\chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}$,

1. $\mathbf{V}(\chi) \geq \alpha_1(\|\chi(0)\|_n)$,
2. $\dot{\mathbf{V}}(\chi) \leq -\alpha_2(\|\chi(0)\|_n)$,

alors l'origine du système (1.3) est asymptotiquement stable.

On sait qu'une condition suffisante pour avoir la continuité des solutions par rapport aux conditions initiales est que l'image par $\mathbf{f}$ de tout ensemble fermé borné de $\mathbf{C}_{\delta,h}$ soit un ensemble fermé borné (i.e. compact) de $\mathbb{R}^n$ (voir [Hale *et al.* 93]). Afin de donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique, nous devons supposer que la fonctionnelle est lipschitzienne. Rappelons ainsi le théorème de Lyapunov-Krasovskii.

Théorème 1.23 ([Krasovskii 63]) *Supposons que* $\mathbf{f}$ *soit localement lipschitzienne, alors le système (1.3) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonctionnelle continue* $\mathbf{V} : \mathbf{C}_{\delta,h} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *et deux* $\mathcal{K}-$*fonctions* α_1, α_2 *telles que pour tout* $\chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}$,

1. $\mathbf{V}(\chi) \geq \alpha_1(\|\chi\|_{C_n^h})$,
2. $\dot{\mathbf{V}}(\chi) \leq -\alpha_2\left(\|\chi\|_{C_n^h}\right)$.

De plus, si le système (1.3) est asymptotiquement stable, $\mathbf{V}$ *peut être choisie lipschitzienne.*

On peut noter une différence essentielle avec le théorème de Kurzweil pour les EDO. Pour obtenir une condition nécessaire et suffisante pour les EDFR, on doit supposer que le système est localement lipschitzien. Par la suite, nous aurons besoin d'une condition plus faible. C'est pourquoi nous n'utiliserons pas le théorème de Lyapunov-Krasovskii 1.23 mais le théorème 1.22.

1.2.4 Remarque sur les systèmes dynamiques

Dans cette sous-section, nous voulons faire toucher du doigt au lecteur qu'il existe un plus petit dénominateur commun entre tous les systèmes que nous avons vus. En effet, ce sont tous des systèmes dynamiques. L'une des définitions les plus générales des systèmes dynamiques est celle que R.E. Kalman a donné en 1969 dans [Kalman *et al.* 69]. Cette définition est donnée dans le cadre d'ensembles très généraux sans topologie particulière. Ici, nous nous intéresserons aux systèmes dynamiques définis sur des espaces métriques. V.I. Zubov donne une extension de la théorie de Lyapunov aux systèmes dynamiques en 1957. On retrouve ces résultats dans [Zubov 63]. Ce travail est particulièrement remarquable car il montre que la stabilité des systèmes dynamiques est équivalente à l'existence d'une famille de fonctionnelles de Lyapunov. Ce résultat que nous allons présenter reste encore aujourd'hui l'un des théorèmes les plus généraux concernant la théorie de Lyapunov. Il est notamment utilisé pour traiter les problèmes de stabilité des équations aux dérivées partielles, par exemple dans [Fard *et al.* 01]. Si nous avons choisi de faire cette remarque sur les systèmes dynamiques, c'est parce que nous allons étudier dans ce mémoire différents types de systèmes différentiels et qu'il nous semble opportun de montrer les relations qui les relient.

Définition 1.24 ([Zubov 63]) *Soit (M, ρ) un espace métrique. Un **système dynamique** sur M est une famille à deux paramètres d'opérateurs $\{\Phi_t^\tau\}_{(\tau,t)\in\mathbb{R}^2_{\geq 0}}$, $\Phi_t^\tau : M \to M$ telle que :*

1. *(existence des trajectoires) pour tout $x \in M$ et tout $t \geq 0$, il existe $\Phi_t^\tau(x)$ non vide et inclus dans M pour tout $\tau \geq t$;*
2. *(continuité des trajectoires) $\Phi_t^\tau(x) \to x$ lorsque $\tau \to t_+$: i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\tau - t < \delta$ alors $\rho(\Phi_t^\tau(x), x) < \epsilon$;*
3. *(concaténation des trajectoires) pour tout $y \in \Phi_t^{\tau_1}(x)$ il existe $\Phi_{\tau_1}^\tau(y)$ tel que*
$$\bigcup_{y\in\Phi_t^{\tau_1}(x)} \Phi_{\tau_1}^\tau(y) = \Phi_t^\tau(x) \text{ pour tout } \tau \geq \tau_1.$$

*La fonction $(\tau, t, x) \mapsto \Phi_t^\tau(x)$ est appelée le **mouvement** du système dynamique, ou encore **flot**. Pour $x \in M$, l'ensemble de tous les points $\Phi(\tau, t, x)$ pour $\tau \geq t \geq 0$ s'appelle la **trajectoire** du système dynamique. On notera (M, ρ, Φ_t^τ) un tel système.*

Les systèmes dynamiques considérés ici dépendent du temps $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, ils sont dits *non autonomes*. Dans le cas contraire, ils sont dits *autonomes*. Pour les systèmes non autonomes, nous avons utilisé une famille à deux paramètres. Pour les systèmes autonomes, il suffit de connaître la trajectoire pour un temps $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ fixé, par exemple $t = 0$ et on aura toutes les autres par translation temporelle. En effet

la propriété 3. d'un système dynamique se traduit pour un système autonome ou non autonome périodique par le fait que

$$\Phi^{\tau_1}\left(\Phi^{\tau_2}(x)\right) = \Phi^{\tau_1+\tau_2}(x).$$

Ainsi, pour les systèmes autonomes, une famille à un paramètre $\{\Phi^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ suffit. Si l'on reprend l'exemple 1.1, cela signifie que le flot s'écrit $\Phi^\tau(x) = \Phi_0^\tau(x) = xe^{a\tau}$.
De manière générale, on étudie la stabilité sur des ensembles invariants.

Définition 1.25 ([Zubov 63]) *Soit (M, ρ, Φ_t^τ) un système dynamique, $I \subset M$ est **invariant** par rapport à (M, ρ, Φ_t^τ) si pour tout $x \in I$, $\Phi(\tau, t, x) \in I$ pour tout $\tau \geq t \geq 0$. Si I est réduit à un point, on parle de **point d'équilibre** pour le système dynamique (M, ρ, Φ_t^τ).*

Dans la suite, on utilisera la notation suivante

$$\rho(\tau, t, x) = \sup_{y\in\Phi_t^\tau(x)} \rho(y, M).$$

Maintenant, on peut donner les définitions concernant la stabilité au sens de Lyapunov, la stabilité asymptotique et la stabilité asymptotique uniforme.
De manière générale, on peut définir la stabilité au sens de Lyapunov pour les systèmes dynamiques de la façon suivante :

Définition 1.26 ([Zubov 63]) *Soit (M, ρ, Φ_t^τ) un système dynamique, un ensemble invariant I est **stable** si pour tout $\epsilon > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, il existe $\delta(\epsilon, t) > 0$ tel que si $\rho(x, M) < \delta(\epsilon, t)$ alors $\rho(\tau, t, x) < \epsilon$ pour tout $\tau \geq t \geq 0$.*
*Un ensemble invariant I est **asymptotiquement stable** si :*
- *I est stable ;*
- *I est attractif : i.e. pour tout $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, il existe $\delta(t) > 0$ tel que si $\rho(x, M) < \delta(t)$ alors $\lim_{\tau\to+\infty} \rho(\tau, t, x) = 0$.*

*I est **uniformément asymptotiquement stable** si :*
- *I est **uniformément stable** , i.e. pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que si $\rho(x, M) < \delta(\epsilon)$ alors $\rho(\tau, t, x) < \epsilon$ pour tout $\tau \geq t \geq 0$;*
- *il existe $\delta > 0$ tel que si $\rho(x, M) < \delta$ alors $\lim_{\tau-t\to+\infty} \rho(\tau, t, x) = 0$ uniformément en $t \geq 0$.*

La définition 1.3 est un cas particulier de la définition 1.26 avec $(M, \rho) = (\mathbb{R}^n, \|.\|_n)$, $I = \{0\}$ et $\rho(\tau, t, x) = \|\phi_t^x(\tau)\|_n$ et la définition 1.21 est un autre cas particulier de la définition 1.26 avec $(M, \rho) = \left(C^{0,h}, \|.\|_{C^{0,h}}\right)$, $I = \{\mathbf{0}_{C^{0,h}}\}$ et $\rho(\tau, x) = \|\phi^x(\tau)\|_n$.
On en déduit l'existence d'une condition nécessaire et suffisante de stabilité faisant appel aux fonctions de Lyapunov.

Théorème 1.27 ([Zubov 63, Théorèmes 74, 75 et 76]) *Soit (M, ρ, Φ_t^τ) un système dynamique, un ensemble invariant I est stable si et seulement s'il existe une famille à un paramètre de fonctionnelles $\{V_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que :*

1. *il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in r\mathcal{B}^I$, $V_\tau(x)$ est bien défini pour tout $\tau \geq 0$;*
2. *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\rho(x, I) > \epsilon$ alors $V_\tau(x) > \delta$ pour tout $t \geq 0$;*
3. *$V_\tau(x) \to 0$ uniformément en τ lorsque $\rho(x, I) \to 0$;*
4. *$V(\tau, t, x) = \sup_{x\in\Phi_t^\tau(x)} V_\tau(x)$ est décroissante pour tout $\tau \geq t$.*

I est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une famille à un paramètre de fonctionnelles $\{V_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ vérifiant les conditions de 1. à 4. et

5. *il existe $c > 0$ tel que $\lim\limits_{\tau\to+\infty} V(\tau, t, x) = 0$ pour tout $x \in c\mathcal{B}^I$.*

I est uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une famille à un paramètre de fonctionnelles $\{V_\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$ vérifiant les conditions 1. à 5. et

6. *il existe $c > 0$ tel que $\lim\limits_{\tau-t\to+\infty} V(\tau, t, x) = 0$ uniformément par rapport à t et à $x \in c\mathcal{B}^I$.*

Remarque 1.28 *Les points 2. et 3. correspondent à ce que nous appellerons le caractère positif, décrescent et radialement non borné de chaque fonctionnelle V_τ. 4. fait référence à la décroissance de V_τ le long des trajectoires. La propriété 5. traduit le caractère défini positif.*
Pour les systèmes autonomes, il suffit de considérer une fonctionnelle $V(x)$ vérifiant les propriétés 1. à 5. pour avoir une condition nécessaire et suffisante de stabilité asymptotique. On rappelle que pour ces systèmes, la stabilité asymptotique et la stabilité asymptotique uniforme sont équivalentes.

Le théorème 1.27, dit théorème de Zubov, fait appel aux solutions du système, ce qui est un énorme handicap pour sa mise en pratique. En effet, les solutions d'un système non linéaire sont la plupart du temps inconnues. Ce qui fait de ce théorème un résultat plus théorique que pratique. On voit ici qu'en aucun cas le théorème 1.27 de Zubov ne permet de retrouver les résultats énoncés précédemment. C'est juste un plus petit dénominateur commun aux différents systèmes dynamiques. On peut par exemple penser que le théorème 1.27 ne nous donnera pas les théorèmes inverses de Lyapunov basés sur une construction de fonctions de Lyapunov qui varie selon le type de systèmes différentiels choisis. Cependant, voici ce qu'il est possible d'avoir à partir du théorème 1.27 du Zubov.

Remarque 1.29 *On peut déduire du théorème 1.27 la condition suffisante de stabilité asymptotique uniforme du théorème 1.12, qui n'est autre que le théorème de Lyapunov. En effet, soit $V(\tau, x)$ une fonction de Lyapunov pour le système (1.1)*

lisse et décrescente. On pose $V_\tau(x) = V(\tau, x)$ et $V(\tau, t, x) = V(\phi_t^x(\tau))$. Les points 2. et 3. et 5. du théorème 1.27 sont vérifiés car V est définie positive et décrescente. Le point 4. est aussi vérifié car $\dot{V}$ est définie négative. On peut donc appliquer le théorème 1.27 et obtenir la stabilité asymptotique uniforme.

Remarque 1.30 *On peut retrouver le théorème 1.17 en utilisant le théorème 1.27 (théorème de Zubov). En effet, soit $V(x)$ est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 1.17. On pose $V(\tau, x) = V(\phi^x(\tau))$. Les points 2., 3. et 5. du théorème 1.27 sont vérifiés car $V(x)$ est définie positive et décrescente. Le point 4. vient du fait que la dérivée de Dini directionnelle $\overline{D^+V}(x; v)$ est négative pour toutes les directions $v \in F(x)$. On peut donc appliquer le théorème 1.27 et obtenir la stabilité asymptotique.*

1.3 Stabilisation

Dans cette partie, nous nous intéresserons à la stabilisation des systèmes par retour d'état continu et discontinu à l'aide des fonctions de Lyapunov contrôlées. On peut trouver une présentation générale des résultats sur la stabilisation des EDO dans [Bacciotti 92] et [Nikitin 94]. Dans la suite, nous prendrons comme ensemble de commande l'espace $\mathbb{R}^m$ avec $m \geq 1$, ce qui ne pose pas de problème car nous ne cherchons pas dans ce mémoire à obtenir des contrôles bornés.

1.3.1 Cas continu

Considérons le système non autonome contrôlé

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.4}$$

où $f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $f(t, 0, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. L'objectif de la stabilisation que l'on pourrait qualifier de "stabilisation continue" est de trouver un contrôle continu tel que le système bouclé soit uniformément asymptotiquement stable.

Définition 1.31 *Le système (1.4) est **stabilisable** s'il existe un contrôle $u : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ continu sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ tel que :*

1. *$u(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
2. *l'origine est un équilibre uniformément asymptotiquement stable pour le système bouclé :*

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{V}.$$

*Si le système (1.4) est globalement défini ($\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$), il est **globalement stabilisable** s'il existe un contrôle continu $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaisant*

1. *$u(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
2. *l'origine est un équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable pour le système bouclé.*

Nous nous en tiendrons à cette définition en ce qui concerne la stabilisation des systèmes non autonomes qui sera développée dans le chapitre 6. Nous allons maintenant nous intéresser à la stabilisation pour les systèmes autonomes. Pour cela, nous aurons besoin de la définition suivante :

Définition 1.32 *$u : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ est **localement à valeurs relativement compactes** si pour tout compact $\mathcal{K}$ de $\mathcal{V}$, il existe $\delta(\mathcal{K}) > 0$ tel que pour tout $\delta < \delta(\mathcal{K})$, $\overline{u(x + \delta\mathcal{B}_n)}$ soit compact dans $\mathbb{R}^m$. Si de plus u est mesurable, alors u est localement à valeurs relativement compactes si et seulement si $u \in L^\infty_{loc}(\mathcal{V}, \mathbb{R}^m)$.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue vérifiant $f(0,0) = 0$, à laquelle on associe le système

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m. \tag{1.5}$$

Définition 1.33 *Le système (1.5) est **faiblement stabilisable** s'il existe un contrôle localement à valeurs relativement compactes $u : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ continu sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ tel que :*
- *$u(0) = 0$,*
- *l'origine soit un équilibre uniformément asymptotiquement stable du système bouclé :*

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad x \in \mathcal{V}. \tag{1.6}$$

*De plus, si le contrôle u est continu sur tout $\mathcal{V}$, on dit que le système (7.1) est **stabilisable**. Le système (7.1) est **globalement stabilisable** si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ et si l'origine du système bouclé est un équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable.*

Dans le cas de la stabilisation faible, le système bouclé est discontinu à l'origine. Ceci ne pose pas de problème et ne nécessite pas l'utilisation des IDO. En effet, la particularité d'un système autonome asymptotiquement stable est que les solutions ne peuvent pas au cours du temps traverser la variété définie par le point d'équilibre, ici l'origine du système. De plus, la solution partant de l'origine d'un tel système est nécessairement la solution nulle. Ainsi, Z. Artstein montre dans [Artstein 83] que l'on peut prolonger un système asymptotiquement stable discontinu à l'origine en un système équivalent asymptotiquement stable continu en l'origine (c'est-à-dire ayant le même portrait de phase). Ainsi, le fait que u ne soit pas continu à l'origine ne pose pas de problème concernant la définition, l'existence et la continuité des solutions du système bouclé. Cette remarque nous permet donc de relaxer les conditions de régularité du contrôle à l'origine pour les systèmes autonomes.

Avant de rappeler le résultat de Z. Arststein, nous allons introduire la notion de fonction de Lyapunov contrôlée. Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante de stabilisation pour les systèmes affines

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} g_i(x) u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \tag{1.7}$$

où $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont continues pour $1 \leq i \leq m$.

Définition 1.34 ([Artstein 83]) *Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction lisse définie positive, V est appelée **fonction de Lyapunov contrôlée** (FLC) pour le système (1.5) s'il existe une fonction continue définie positive $W : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,*

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle \leq -W(x) < 0.$$

*Une fonction de Lyapunov contrôlée $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système (1.5) vérifie la **propriété de petit contrôle** si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $x \in \delta \mathcal{B}^n \setminus \{0\}$, alors il existe au moins un $u \in \epsilon \mathcal{B}^m$ tel que $\langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle < 0$.*

Remarque 1.35 *On n'est pas obligé de supposer l'existence de la fonction W dans la définition de la FLC (voir [Sontag 99]). Cependant, nous en aurons besoin dans la suite.*
Si $m = 1$, alors la propriété de petit contrôle est équivalente à

$$\limsup_{\|x\|_n \to 0} \frac{\langle \nabla V(x), f(x) \rangle}{|\langle \nabla V(x), g_1(x) \rangle|} \leq 0.$$

La limite peut très bien être $-\infty$.

Exemple 1.36 ([Artstein 83]) *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -u x_2 + u^3 \end{cases}$$

et la fonction lisse définie positive

$$V(x) = \frac{x_1^2 + (x_1 + x_2)^2}{2}$$

alors

$$\langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle = x_1 (x_2 + a(x)) + x_2 a(x). \tag{1.8}$$

avec $a(x) = x_2 - u x_2 + u^3$. Si $x_1 x_2 \geq 0$, c'est-à-dire si x_1 et x_2 sont de même signe, alors (1.8) peut être rendu négatif en prenant u de signe opposé à x_1 tel que $|u|$ soit suffisamment grand. Si $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ les solutions de $x_2 + a(x) = 0$ rendront (1.8) négatif et si $x_1 < 0$ et $x_2 > 0$ les solutions de $a(x) = 0$ rendront (1.8) négatif. V est donc une FLC pour le système.

Rappelons le théorème fondamental d'Artstein.

Théorème 1.37 ([Artstein 83]) *Le système (1.7) est faiblement stabilisable si et seulement s'il existe une FLC pour le système (1.7). De plus, si la FLC vérifie la propriété de petit contrôle, alors le système est stabilisable, i.e. le contrôle est aussi continu à l'origine.*

Exemple 1.38 ([Bacciotti 92]) *Dans l'exemple précédent, l'existence d'une FLC ne permet pas de conclure que le système est stabilisable car celui-ci n'est pas affine. Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}$$

et la fonction de Lyapunov $V(x) = \frac{x_1^2 e^{2x_2} + x_2^2}{2}$. *On a alors*

$$\langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle = -x_2^2 + \left(x_1^2 e^{2x_2} + x_2\right) u$$

et donc V *est une FLC pour le système. Comme le système est affine, on en déduit qu'il est stabilisable.*

En réalité, ce théorème est un corollaire d'un résultat plus général donné par Z. Artstein en 1983 dans [Artstein 83, Théorème 4.1] sur la stabilisation des systèmes (1.5) à l'aide de contrôles qui sont des mesures de probabilité. Nous n'utiliserons pas ces contrôles appelés "relaxed control", c'est pourquoi nous renvoyons le lecteur à l'article d'Artstein pour plus de détails sur ce sujet.
Ce résultat théorique donne l'existence d'un contrôle qui n'est pas explicite. Il faudra attendre E. Sontag qui en 1989 décrit dans [Sontag 89] la construction explicite d'un contrôle à partir d'une FLC. Nous reviendrons en détail sur cette construction dans le chapitre 6.

1.3.2 Cas discontinu

A la suite des travaux d'Artstein, de nombreux mathématiciens de la théorie du contrôle se sont demandés si l'existence d'une FLC pour les systèmes généraux était liée à celle d'un contrôle discontinu. C'est en effet le cas. Donnons quelques définitions avant de rappeler ce résultat.
Considérons le système (1.5). Le concept d'inclusion différentielle que l'on a rencontré va nous permettre de donner un sens à "être solution de $\dot{x} = f(x, u(x))$" lorsque la fonction $x \mapsto u(x)$ ne possède aucune propriété de continuité. Pour toute fonction $u : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ et tout $x \in \mathcal{V}$, on définit les fonctions multivaluées $\mathcal{K}_u$ et $\mathcal{F}_u$ par

$$\mathcal{K}_u(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co}\left(f\left(x, u\left(x + \epsilon\, \overline{\mathcal{B}^n}\right)\right)\right), \tag{1.9}$$

$$\mathcal{F}_u(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcap_{\lambda(N)=0} \overline{co}\left(f\left(x, u\left(x + \epsilon\, \overline{\mathcal{B}^n} \setminus N\right)\right)\right), \tag{1.10}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Si u est localement à valeurs relativement compactes, ces fonctions multivaluées vérifient les conditions 1.15 et en outre, si u est mesurable, alors $\mathcal{F}_u$ l'est aussi. Sous ces conditions, nous dirons que l'arc absolument continu $x(.)$ est une solution de type Krasovskii (respectivement de type Filippov) de $\dot{x}(t) = f(x(t), u(x(t)))$ s'il est solution de l'inclusion différentielle (1.9) (respectivement de l'inclusion différentielle (1.10)). Donnons les définitions nous permettant de donner une condition nécessaire et suffisante de stabilisation.

Définition 1.39 ([Coron *et al.* 94]) *Le système (1.5) est stabilisable par un contrôle de type Krasovskii (respectivement Filippov) s'il existe une fonction u localement à valeurs relativement compactes (respectivement $u \in L^{\infty}_{loc}(\mathcal{V}, \mathbb{R}^m)$) telle que :*

1. $\sup\{|u(x)| : |x| < \epsilon\} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$ *(respectivement* $\operatorname{esssup}\{|u(x)| : |x| < \epsilon\} \underset{\epsilon \to 0}{\to} 0$*),*
2. *l'inclusion différentielle associée à (1.9) (respectivement à (1.10)) soit asymptotiquement stable.*

On peut maintenant énoncer l'équivalent du théorème d'Artstein pour les contrôles discontinus donné par J.M. Coron et L. Rosier. Ce résultat a été ensuite amélioré par L. Rifford dans [Rifford 01] qui utilise une fonction de Lyapunov contrôlée non lisse.

Théorème 1.40 ([Coron *et al.* 94, Lemme 2.1]) *Le système (1.5) est stabilisable par un contrôle de type Krasovskii (ou de type Filippov) si et seulement s'il existe une FLC pour (1.5) satisfaisant la propriété de petit contrôle.*
Si le système (1.5) est globalement défini, i.e. $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, et s'il existe une FLC pour (1.5) propre, alors le système (1.5) est globalement stabilisable, i.e. le contrôle de type Krasovskii (ou de type Filippov) est défini sur $\mathbb{R}^n$.

Dans la suite, nous n'utiliserons pas ce résultat car il n'est pas constructif. Dans le chapitre 7, nous stabiliserons un système magnétique de lévitation par un contrôle discontinu en montrant directement que l'inclusion différentielle de type Krasovskii est asymptotiquement stable.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre introductif, nous avons présenté brièvement la théorie de Lyapunov ainsi que les principaux résultats concernant la stabilité à l'aide des fonctions (ou fonctionnelles) de Lyapunov. Nous utiliserons par la suite la plupart des résultats présentés. Quant aux autres résulats, ils ont pour but d'offrir au lecteur une vision assez large sur cette théorie qui s'applique de manière générale aux systèmes dynamiques et plus particulièrement aux EDO, IDO et EDFR.

Première partie

Stabilité en temps fini

Chapitre 2

Stabilité en temps fini des équations différentielles ordinaires

2.1 Introduction

La stabilité asymptotique définie au chapitre 1 est aujourd'hui bien connue. C'est au 19ème siècle que cette notion est apparue avec le théorème de Lyapunov que l'on peut retrouver dans [Lyapunov 92]. Aujourd'hui, on s'intéresse dans ce mémoire à un cas particulier de la stabilité asymptotique que l'on appelle *stabilité en temps fini*. Cela signifie que les solutions du système atteignent le point d'équilibre en temps fini et y restent. Les ingénieurs en particulier se sont intéressés à ce problème et plus précisément au temps appelé *temps d'établissement* mis par les solutions pour atteindre l'équilibre. La fonction temps d'établissement et ses propriétés sont essentielles pour résoudre le problème de la stabilité en temps fini. Nous mettons le lecteur en garde contre une confusion possible : le terme de "stabilité en temps fini" a été utilisé dans le passé pour désigner la stabilité sur un intervalle de temps fini, comme par exemple dans [Hallam *et al.* 69] et [Lam *et al.* 74]. Quant à nous, nous l'utiliserons dans le sens donné précédemment.
Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la stabilité en temps fini des EDO avec un membre de droite continu, puis à celle des EDO avec unicité à droite des solutions. Le but est de donner une condition suffisante puis une condition nécessaire pour ces deux types de systèmes. Pour cela, nous allons utiliser des fonctions de Lyapunov. C'est un outil fondamental pour la résolution de problèmes concernant la stabilité de systèmes non linéaires. La stabilité en temps fini a été le sujet de recherches pour un certain nombre d'auteurs ; citons les principaux :

- le premier à avoir donné une condition suffisante de stabilité en temps fini des systèmes continus autonomes de dimension n est Haimo [Haimo 86] ;
- plus tard, Bhat et Bernstein ont développé la théorie de la stabilité en temps fini pour les systèmes avec unicité à droite des solutions [Bhat *et al.* 00]. Ils ont donné une condition nécessaire et suffisante en supposant la fonction temps d'établissement continue à l'origine.

Sur la base de l'article de Haimo, nous avons donné des résultats sur la stabilité en temps fini pour les systèmes continus non autonomes dans [Moulay *et al.* 03]. A partir du second article, on considère le cas des systèmes avec unicité à droite des solutions [Moulay *et al.* b]. Pour finir, nous ferons quelques rappels sur la stabilité en temps fini des systèmes homogènes.

2.2 Systèmes non autonomes continus

Commençons cette section en donnant un exemple élémentaire de système stable en temps fini dont on connaît explicitement les solutions. Soit l'équation

$$\dot{x} = -\varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R}, a \in]0,1[, \tag{2.1}$$

où $\varphi_a(x) = |x|^a \, sgn(x)$ dont les solutions partant de x en $\tau = 0$ sont données par

$$\phi^x(\tau) = \begin{cases} sgn(x)\left(|x|^{1-a} - \tau(1-a)\right)^{\frac{1}{1-a}} & \text{si} \quad 0 \leq \tau \leq \frac{|x|^{1-a}}{1-a} \\ 0 & \text{si} \quad \tau > \frac{|x|^{1-a}}{1-a} \end{cases}.$$

Les solutions décroissent et finissent par être nulles à partir d'un certain temps. Le système (2.1) est donc stable en temps fini.
En réalité, comme nous l'avons précisé dans l'introduction, il existe une fonction temps d'établissement qui donne le temps mis par les solutions pour rejoindre l'équilibre, ici l'origine.
Classiquement, dans le cas autonome, cette fonction ne dépend que de l'état initial de la solution. Mais, pour les systèmes non autonomes, elle peut aussi dépendre du temps initial associé à l'état initial de la solution. Ici, nous considérons les systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(t,x), \quad t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.2}$$

où $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On note $\phi_t^x(\tau)$ une solution du système (2.2) partant de $(t,x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{S}(t,x)$ représente l'ensemble des solutions ϕ_t^x.
Maintenant, donnons la définition de la stabilité en temps fini d'un tel système.

Définition 2.1 ([Moulay *et al.* 03]) *L'origine du système (2.2) est* ***faiblement stable en temps fini*** *si :*

1. *l'origine est stable pour le système (2.2) ;*
2. *pour tout $t \geq 0$, il existe $\delta(t) > 0$, tel que si $x \in \delta(t)\mathcal{B}^n$ alors*
   (a) *$\phi_t^x(\tau)$ est définie pour $\tau \geq t$,*
   (b) *il existe $0 \leq T(\phi_t^x) < +\infty$ tel que $\phi_t^x(\tau) = 0$ pour tout $\tau \geq t + T(\phi_t^x)$.*

$$T_0(\phi_t^x) = \inf\{T(\phi_t^x) \geq 0 : \phi_t^x(\tau) = 0 \; \forall \tau \geq t + T(\phi_t^x)\}$$

s'appelle ***le temps d'établissement de la solution*** *ϕ_t^x.*

3. *De plus, si* $T_0(t,x) = \sup_{\phi_t^x \in \mathcal{S}(t,x)} T_0(\phi_t^x) < +\infty$*, alors l'origine du système (2.2) est* ***stable en temps fini****.* $T_0(t,x)$ *s'appelle* ***le temps d'établissement du système*** *(2.2) et* T_0 ***la fonction temps d'établissement du système*** *(2.2).*

Lorsque le système est asymptotiquement stable, le temps d'établissement d'une solution est en général infini.
Si le second membre du système (2.2) est continu sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V}$ et localement lipschitzien sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$, l'unicité des solutions en dehors de l'origine assure que le temps d'établissement d'une solution et le temps d'établissement du système sont les mêmes : $T_0(t,x) = T_0(\phi_t^x)$.

Définition 2.2 ([Moulay *et al.* 03]) *L'origine du système (2.2) est* ***uniformément stable en temps fini*** *si :*

1. *elle est uniformément asymptotiquement stable ;*
2. *elle est stable en temps fini ;*
3. *il existe une fonction continue définie positive* $\alpha : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *telle que le temps d'établissement du système (2.2) vérifie :*

$$T_0(t,x) \leq \alpha\left(\|x\|\right).$$

Comme $x \mapsto T_0(t,x)$ n'est en général pas continue à l'origine, α n'est en général pas de classe $\mathcal{K}$.

2.2.1 Systèmes autonomes scalaires

Rappelons un résultat élémentaire donné dans [Haimo 86] et dont la preuve se trouve dans [Moulay *et al.* 03] sur la stabilité en temps fini des systèmes autonomes scalaires de la forme

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier, il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini.

Lemme 2.3 ([Haimo 86]) *Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système (2.3) où* f *est continue. Alors, l'origine est stable en temps fini pour le système (2.3) si et seulement s'il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *de l'origine tel que pour tout* $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$*,*
– $xf(x) < 0$ *et*
– $\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} < +\infty$.

Preuve. ($\Leftarrow$) Comme $xf(x) < 0$, $V(x) = x^2$ est une fonction de Lyapunov pour le système. Donc l'origine du système (2.3) est asymptotiquement stable.
Soit $\phi^x(\tau)$ une solution du système qui tend vers l'origine en un temps $T(\phi^x)$. Montrons que $T(\phi^x) < +\infty$. D'après la stabilité asymptotique, si x est choisi suffisamment petit, alors $\tau \mapsto \phi^x(\tau)$ est strictement monotone pour $\tau \geq 0$.
De plus, on a

$$T(\phi^x) = \int_0^{T(\phi^x)} d\tau.$$

Comme $xf(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\dfrac{1}{f}$ est défini sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$. En utilisant le changement de variables, $[0, T(\phi^x)[\to]0, x]$, $\tau \mapsto \phi^x(\tau)$ on a

$$\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} = \int_0^{T(\phi^x)} \frac{\dot{\phi}^x(\tau)}{f(\phi^x(\tau))} d\tau = T(\phi^x) < +\infty.$$

$T(x) = \sup\limits_{\phi^x \in \mathcal{S}(x)} T(\phi^x)$ est indépendant des solutions ϕ^x et on en conclut que l'origine du système (2.3) est stable en temps fini avec le temps d'établissement $T_0(x) = T(\phi^x)$ vérifiant $T_0(x) = \int_x^0 \frac{dz}{f(z)}$.
($\Rightarrow$) Supposons que l'origine du système (2.3) soit stable en temps fini. Soit $\delta > 0$ donné par la définition 2.1. Supposons qu'il existe $x \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$ tel que $xf(x) \geq 0$.

- Si $xf(x) = 0$, alors $f(x) = 0$ et $\phi^x(\tau) \equiv x$ est une solution du système (2.3) qui ne tend pas vers l'origine.
- Si $xf(x) > 0$, alors on peut supposer sans perte de généralité que $x > 0$ et $f(x) > 0$. D'après la continuité de f et comme $f(x) > 0$, on a que $f(z) > 0$ pour z dans un voisinage de x. Ainsi, la fonction $\tau \mapsto \phi^x(\tau)$ est croissante dans un voisinage de l'origine. D'après la continuité, cette solution ne peut pas tendre vers l'origine .

Soit $x \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\}$ et considérons la solution $\phi^x(\tau)$. Par hypothèse, il existe $0 \leq T_0(\phi^x) < +\infty$ tel que $\phi^x(\tau) = 0$ pour tout $\tau \geq t + T_0(\phi^x)$. D'après la stabilité asymptotique, x peut être choisi suffisamment petit pour que $\tau \mapsto \phi^x(\tau)$ soit strictement décroissante pour $\tau \geq t$. En utilisant le changement de variables $[0, T_0(\phi^x)[\to]0, x]$, $\tau \mapsto \phi^x(\tau)$ on obtient

$$\int_x^0 \frac{dz}{f(z)} = \int_0^{T_0(\phi^x)} d\tau = T_0(\phi^x) < +\infty.$$

■

Le temps d'établissement d'une solution de (2.3) et le temps d'établissement du système (2.3) sont égaux et

$$T_0(x) = \int_x^0 \frac{dz}{f(z)}.$$

Si le système (2.3) est globalement défini et si les conditions du lemme 2.3 sont vérifiées pour tout x dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, alors l'origine est globalement stable en temps fini. De plus, il est évident que pour les systèmes autonomes, la stabilité uniforme en temps fini est équivalente à la stabilité en temps fini.

Exemple 2.4 *Soit $a \in]0,1[$, considérons le système (2.1). On a $-x\varphi_a(x) < 0$ pour $x \neq 0$, et si $x \in \mathbb{R}$ alors*

$$\int_x^0 \frac{dz}{-|z|^a sgn(z)} = \frac{|x|^{1-a}}{1-a} < +\infty.$$

Les hypothèses du lemme 2.3 sont ainsi satisfaites. Donc, l'origine est stable en temps fini et les solutions $\phi^x(\tau)$ tendent vers l'origine avec le temps d'établissement $T_0(x) = \frac{|x|^{1-a}}{1-a}$. Les mêmes conclusions avaient été obtenues dans l'introduction en calculant explicitement les solutions du système (2.1).

2.2.2 Cas général

Pour les systèmes plus généraux décrits par (2.2), une extension naturelle des résultats précédents serait l'utilisation des fonctions de Lyapunov. Nous allons montrer comment l'utilisation de ces fonctions de Lyapunov permet d'obtenir des conditions suffisantes puis nécessaires de stabilité en temps fini.
Nous allons ici étendre aux systèmes non autonomes un résultat donné dans [Haimo 86].
Nous aurons besoin de l'existence d'une fonction de Lyapunov $V : I \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et d'une fonction $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue telle que $r(0) = 0$ vérifiant l'inégalité différentielle suivante

$$\dot{V}(t,x) \leq -r(V(t,x)) \tag{2.4}$$

pour tout $(t,x) \in I \times \mathcal{V}$.
La proposition suivante va nous donner une condition suffisante pour la stabilité en temps fini.

Proposition 2.5 ([Moulay *et al.* 03]) *Supposons que l'origine soit un point d'équilibre pour le système (2.2) où f est une fonction continue.*

$i)$ *S'il existe une fonction de Lyapunov continûment différentiable $V(t,x)$ vérifiant la condition (2.4) avec une fonction continue définie positive $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle qu'il existe $\epsilon > 0$ pour lequel*

$$\int_0^\epsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty, \tag{2.5}$$

alors l'origine du système (2.2) est stable en temps fini. La fonction temps d'établissement pour le système (2.2) satisfait l'inégalité suivante

$$T_0(t,x) \leq \int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}.$$

$ii)$ *De plus, si V est décrescente, alors l'origine du système (2.2) est uniformément stable en temps fini.*

$iii)$ *Si le système (2.2) est globalement défini et si V est radialement non bornée, alors l'origine du système (2.2) est globalement stable en temps fini.*

Preuve. $i)$ Puisque $V : I \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction de Lyapunov, l'origine est asymptotiquement stable (théorème 1.12 : second théorème de Lyapunov). Soit $\phi_t^x(\tau)$ une solution du système (2.2) qui tend vers l'origine avec un temps $0 \leq T(\phi_t^x(\tau)) \leq +\infty$. Cela revient à prouver que $T(\phi_t^x(\tau)) < +\infty$. En utilisant la stabilité asymptotique, on sait que x peut être choisi suffisamment petit pour que $\phi_t^x(\tau) \in \mathcal{V}$ pour $\tau \geq t$ et pour que $\tau \mapsto V(\tau, \phi_t^x(\tau))$ soit strictement décroissante pour tout $\tau \geq t$. Avec le changement de variables suivant : $[t, t + T(\phi_t^x)] \to [0, V(t,x)]$ défini par $z = V(\tau, \phi_t^x(\tau))$, on obtient

$$\int_{V(t,x)}^{0} \frac{dz}{-r(z)} = \int_{t}^{t+T(\phi_t^x)} \frac{\dot{V}(\tau, \phi_t^x(\tau))}{-r(V(\tau, \phi_t^x(\tau)))} d\tau.$$

Par hypothèse, $\dot{V}(\tau, \phi_t^x(\tau)) \leq -r(V(\tau, \phi_t^x(\tau))) \leq 0$ pour tout $\tau \geq t$. Ceci montre que

$$T(\phi_t^x) = \int_{t}^{t+T(\phi_t^x)} d\tau \leq \int_{0}^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}.$$

(2.5) implique alors que $T(\phi_t^x) < +\infty$. Par ailleurs, le fait que $\int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}$ soit indépendant de ϕ_t^x nous garantit l'existence du temps d'établissement du système continu en $x = 0$ et vérifiant $T_0(t,x) \leq \int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}$. Donc, l'origine du système (2.2) est stable en temps fini.

$ii)$ Si V est décrescente, alors le système est uniformément asymptotiquement stable. De plus, il existe une $\mathcal{K}-$fonction β telle que $V(t,x) \leq \beta(\|x\|_n)$. Ainsi, $T_0(t,x) \leq \int_0^{\beta(\|x\|_n)} \frac{dz}{r(z)} = \alpha(\|x\|_n)$ avec α continue définie positive .

$iii)$ Si V est radialement non bornée, le système est globalement asymptotiquement stable. Ainsi, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ toutes les fonctions $\tau \mapsto V(\tau, \phi_t^x(\tau))$ sont décroissantes. Donc le système est globalement stable en temps fini. ■

Remarque 2.6 *Puisque la fonction temps d'établissement pour le système (2.2) satisfait l'inégalité suivante*

$$T_0(t,x) \leq \int_{0}^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)},$$

$x \mapsto T_0(t,x)$ est continue à l'origine. Néanmoins, cette fonction ne peut pas être utilisée (comme l'ont fait Bhat et Bernstein dans le cas autonome : voir section 2.3) pour un éventuel théorème inverse parce que le système est non autonome et ne possède pas l'unicité à droite des solutions. En effet, le flot n'étant pas défini, cela implique en particulier que la fonction temps d'établissement ne peut pas être définie en utilisant le flot.

Exemple 2.7 (Système scalaire non autonome) *Considérons le système suivant :*

$$\dot{x} = -(1+t)\varphi_a(x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

La fonction $V(x) = x^2$ est une fonction de Lyapunov décrescente pour le système (2.6) et

$$\dot{V}(t,x) = -2(1+t)x\varphi_a(x) \leq -2\varphi_{\frac{a+1}{2}}(x^2) = -r(V(x)).$$

Puisque $\int_0^\epsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$, la proposition 2.5 nous assure que l'origine est uniformément stable en temps fini avec la fonction temps d'établissement du système $T_0(t,x) \leq \frac{4|x|^{1-a}}{1-a}$.

Exemple 2.8 (Système de dimension deux) *Considérons $a \in]0,1[$ et le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\varphi_a(x_1) - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\varphi_a(x_2) - x_2^3 - x_1. \end{cases}$$

En prenant $V(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2}$, on obtient $\dot{V}(x_1,x_2) = -\sum_{i=1}^{2}(x_i^4 + |x_i|^{a+1}) \leq 0$. V est ainsi une fonction de Lyapunov pour le système. De plus, si $r(z) = \varphi_{\frac{a+1}{2}}(z)$, alors $\dot{V}(x_1,x_2) \leq -r(V(x_1,x_2))$. En effet

$$\sum_{i=1}^{2}(x_i^4 + |x_i|^{a+1}) \geq \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{a+1}{2}} = \|x\|_2^{a+1}.$$

Donc l'origine est uniformément stable en temps fini avec $T_0(t,x) \leq 2^{\frac{1+a}{2}} \frac{\|x\|_2^{1-a}}{1-a}$.

Afin de tester la condition (2.5) et de conclure à la stabilité en temps fini, on doit d'abord avoir l'existence d'un couple (V,r) satisfaisant la condition (2.4). Pour cela, il suffit qu'il existe une fonction de Lyapunov décrescente pour (2.2). En effet, si V est décrescente, cela implique qu'il existe une fonction α de classe $\mathcal{K}$ telle que $V(t,x) \leq \alpha(\|x\|_n)$, pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V}$. $\dot{V}$ étant définie négative, il existe une fonction β de classe $\mathcal{K}$ telle que

$$-\dot{V}(t,x) \geq \beta(\|x\|_n)$$

pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V}$. En combinant les deux résultats, on obtient

$$\dot{V}(t,x) \leq -\beta\left(\alpha^{-1}(V(t,x))\right)$$

pout tout $(t,x) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V}$. On peut noter que cette condition n'implique pas que le couple ainsi construit vérifie la condition (2.5).
Désormais, la question est de savoir s'il est possible d'utiliser une fonction de Lyapunov seulement continue pour montrer la stabilité en temps fini. Cela est possible en ajoutant la condition que r soit localement Lipschitzienne. Pour cela, nous utiliserons le lemme A.1 de comparaison qui se trouve en Annexe. Donnons une proposition qui généralise un résultat donné dans [Bhat *et al.* 00, Théorème 4.2] aux systèmes continus non autonomes.

Proposition 2.9 ([Moulay *et al.* 03]) *Supposons que l'origine soit un point d'équilibre pour le système (2.2) où f est continue. S'il existe une fonction de Lyapunov continue pour le système (2.2) satisfaisant la condition (2.4) avec une fonction continue définie positive $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ localement lipschitzienne en dehors de l'origine telle que $\int_0^\epsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$ avec $\epsilon > 0$, alors l'origine est stable en temps fini. De plus, le temps d'établissement du système (2.2) vérifie*

$$T_0(t,x) \leq \int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Preuve. Puisque $V : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction de Lyapunov pour le système (2.2) satisfaisant la condition (2.4), alors d'après le théorème de Lyapunov, l'origine est asymptotiquement stable. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et $\phi_t^x(\tau)$ une solution de (2.2) qui tend vers l'origine avec le temps $T(\phi_t^x)$. Cela revient à prouver que $T(\phi_t^x) < +\infty$. En raison de la stabilité asymptotique, on peut supposer sans perte de généralités que $\phi_t^x(\tau) \in \mathcal{V}$ pour $t \geq 0$ et $V(t,x) \in [0,\epsilon]$. Considérons le système

$$\dot{z} = -r(z), \quad z \geq 0,$$

avec le flot $\Phi(\tau, z)$ pour $z \geq 0$. Maintenant, en appliquant le lemme de comparaison (A.1) donné en Annexe, on en déduit

$$V(\tau, \phi_t^x(\tau)) \leq \Phi(\tau, V(t,x)), \ \ \tau \geq 0, x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}.$$

D'après le lemme 2.3, on sait que

$$\Phi(\tau, z) = 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Comme V est définie positive, on conclut que

$$\phi_t^x(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Donc, l'origine du système (2.2) est stable en temps fini. De plus, $\int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}$ est indépendant de ϕ_t^x, ce qui montre l'existence d'un temps d'établissement du système vérifiant $T_0(t,x) \leq \int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{r(z)}$ et donc continue en $x = 0$. ■
Donnons maintenant un exemple utilisant une fonction de Lyapunov continue non lipschitzienne.

Exemple 2.10 *Soit $0 < a < 1$, considérons le système élémentaire suivant*

$$\dot{x} = -\varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

et la fonction de Lyapunov $V(x) = |x|$, on a $\overline{D^+V}(x, f(x)) = -|x|^a = -V(x)^a$. Donc le système est stable en temps fini d'après la proposition 2.9.

Résumons les deux résultats précédents. Pour montrer la stabilité en temps fini, on a le choix entre un couple (V_1, r_1), avec V_1 une fonction de Lyapunov continûment différentiable et r_1 une fonction continue, ou un couple (V_2, r_2), avec V_2 continue et r_2 localement lipschitzienne. Ainsi, les deux conditions ne sont pas à priori équivalentes. De plus, du fait de la régularité de r, la proposition 2.9 n'implique pas l'existence d'une fonction de Lyapunov lisse vérifiant la proposition 2.5. Ainsi la proposition 2.5 n'est pas plus faible que la proposition 2.9. Ces deux résultats sont complémentaires.
Aujourd'hui, il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini des systèmes continus (même autonomes). Le seul théorème inverse de Lyapunov apparaît dans [Bhat *et al.* 00] pour les systèmes autonomes avec unicité à droite des solutions et en supposant le temps d'établissement continu à l'origine, ce qui nécessite de connaître la fonction T_0. Nous proposons une condition nécessaire pour les systèmes continus non autonomes. Ici, nous aurons besoin de l'existence d'une fonction de Lyapunov $V : I \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et d'une fonction $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue telle que $s(0) = 0$ et vérifiant l'inégalité différentielle suivante

$$\dot{V}(t,x) \geq -s(V(t,x)) \tag{2.7}$$

pour tout $(t,x) \in I \times \mathcal{V}$. Alors, la proposition suivante nous donne des conditions nécessaires pour la stabilité en temps fini : l'existence d'un tel couple (V, s) tel que l'inégalité différentielle (2.7) soit satisfaite.

Proposition 2.11 ([Moulay *et al.* 03]) *Supposons que l'origine soit un point d'équilibre pour le système (2.2) avec f continue. Si l'origine est faiblement stable en temps fini pour le système (2.2), alors quelle que soit la fonction de Lyapunov pour ce système vérifiant la condition (2.7) avec une fonction $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue définie positive, il existe $\epsilon > 0$ tel que*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{s(z)} < +\infty. \tag{2.8}$$

Preuve. Supposons que $V : I \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ soit une fonction de Lyapunov vérifiant la condition (2.7). Soit $\phi_t^x(\tau)$ une solution de (2.2) avec le temps d'établissement $0 \leq T_0(\phi_t^x) < +\infty$. Du fait de la stabilité asymptotique, on peut choisir x suffisamment petit pour que $\phi_t^x(\tau) \in \mathcal{V}$ pour tout $\tau \geq t$ et pour que $\tau \mapsto V(\tau, \phi_t^x(\tau))$ soit strictement décroissante pour $\tau \geq t$. Avec le changement de variables $[t, t + T_0(\phi_t^x)] \to [0, V(t,x)]$ donné par $z = V(\tau, \phi_t^x(\tau))$, on obtient

$$\int_{V(t,x)}^{0} \frac{dz}{-s(z)} = \int_t^{t+T_0(\phi_t^x)} \frac{\dot{V}(\tau, \phi_t^x(\tau))}{-s(V(\tau, \phi_t^x(\tau)))} d\tau.$$

Comme $\dot{V}(\tau, \phi_t^x(\tau)) \geq -s(V(\tau, \phi_t^x(\tau)))$ et $-s(V(\tau, \phi_t^x(\tau))) < 0$ pour tout $\tau \geq t$ on obtient

$$\int_0^{V(t,x)} \frac{dz}{s(z)} \leq \int_t^{t+T_0(\phi_t^x)} d\tau = T_0(\phi_t^x) < +\infty.$$

■

Remarque 2.12 *Cette condition peut être aussi utilisée pour montrer qu'un système ne peut pas être faiblement stable en temps fini, en particulier qu'il ne peut pas être stable en temps fini, comme dans l'exemple suivant.*

Exemple 2.13 *Considérons le système suivant :*

$$\dot{x} = \frac{-|x|}{1+g(t)}$$

où $t \in \mathbb{R}$ et g est une fonction positive minorée par $c > 0$. La fonction $V(x) = \frac{x^2}{2}$ est une fonction de Lyapunov pour le système et $-\dot{V}(t,x) \leq \frac{x^2}{1+c} = s\left(\frac{x^2}{2}\right)$, où $s(z) = \frac{2z}{1+c}$. Comme $\int_0^x \frac{dz}{s(z)} = +\infty$ pour tout $x > 0$, l'origine n'est pas stable en temps fini.

Afin de tester la condition (2.8) et pour conclure à la non stabilité en temps fini, on doit d'abord s'assurer de l'existence d'une fonction de Lyapunov vérifiant la condition (2.7). Une condition suffisante pour qu'une fonction de Lyapunov pour le système (2.2) vérifie la minoration $\dot{V}(t,x) \geq -s(V(t,x))$ est que $-\dot{V}$ soit décrescente.
Il n'existe pas actuellement de condition nécessaire et suffisante. Cependant, dans le cas particulier où $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction définie positive telle que $\dot{V} = -r(V)$ pour le système (2.2) alors il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini : l'origine est stable en temps fini si et seulement si $\int_0^\epsilon \frac{dz}{r(z)} < +\infty$.

2.2.3 Application

En général, on prend pour $r(z)$ la fonction suivante $r(z) = \varphi_a(z)$ avec $0 < a < 1$. Mais dans l'exemple suivant, on utilise une autre forme pour $r(z)$ afin de montrer la stabilité en temps fini. Soit la fonction u définie sur l'intervalle $]0,1]$ par le graphe donné sur la figure 2.1 et telle que $u\left(\frac{1}{n}\right) = n^2$ pour $n \geq 1$ et $0 < a < 1$. Soit

$$r(z) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad z = 0 \\ \frac{1}{u(z)} & \text{si} \quad z \neq 0 \end{cases}$$

alors r est une fonction continue définie positive et $\int_0^1 \frac{dz}{r(z)} = \int_0^1 u(z)\,dz \leq \int_0^1 \frac{dz}{z^a} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{-r\left(x^2\right)}{2x} & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$$

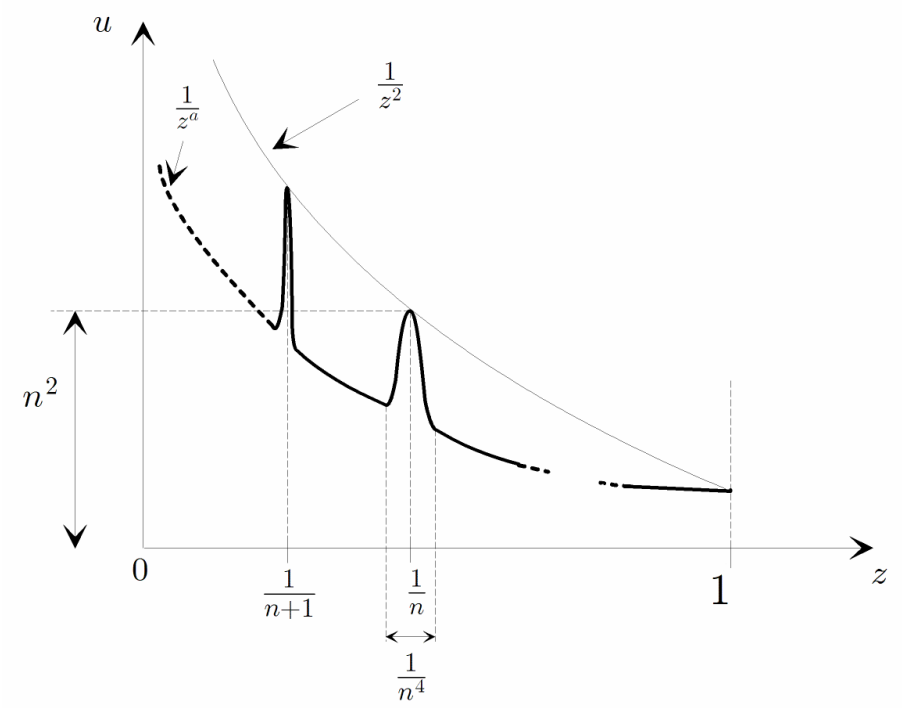

FIG. 2.1 – graphe de u

Comme $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{-1}{\frac{2}{n}u\left(\frac{1}{n^2}\right)} \leq \frac{1}{2n^3}$, f est continue en l'origine et donc sur $\mathbb{R}$. Soit le système

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$V(x) = x^2$ est une fonction de Lyapunov pour le système et $\dot{V}(x) \leq -r(V(x))$. Ainsi, le système est stable en temps fini. Néanmoins, il n'existe pas de fonction φ_b avec $0 < b < 1$ telle que r soit minorée par φ_b.

2.3 Systèmes avec unicité des solutions à droite

Dans cette partie, notre but principal est de donner une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini de systèmes autonomes de la forme

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.9}$$

avec unicité des solutions à droite sans supposer que le temps d'établissement soit continu à l'origine. Dans l'article de référence [Haimo 86, Fact 1], l'origine d'un système scalaire (2.3) (avec $x \in \mathbb{R}$) est stable en temps fini si et seulement s'il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V}$ tel que :

– pour tout $y \in \mathcal{V} \setminus \{0\}, \quad yf(y) < 0$;

– pour tout $\epsilon \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\displaystyle\int_{\epsilon}^{0} \frac{dy}{f(y)} < +\infty$.

Nous aurons ici la même approche : décomposer la stabilité en temps fini en deux propriétés : la stabilité asymptotique et la convergence en temps fini. Dans le cas général des systèmes de dimension n avec unicité à droite des solutions en dehors de l'origine, nous n'utiliserons pas la fonction f associée au système, mais une fonction de Lyapunov. L'existence d'une fonction de Lyapunov et la stabilité asymptotique sont équivalentes et nous donnerons une propriété des fonctions de Lyapunov faisant intervenir une intégrale qui sera équivalente à la convergence en temps fini. Ainsi, le premier résultat important est que, sous certaines conditions sur f (comme l'unicité à droite des solutions), il existe une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité en temps fini. L'unicité à droite des solutions pour un système est une propriété intermédiaire entre un système ayant un membre de droite continu et un système ayant un membre de droite lipschitzien. Alors, nous déduirons un corollaire qui donne une condition suffisante pour la continuité du temps d'établissement. Ces résultats généraux utilisent une fonction de Lyapunov et le flot du système. Néanmoins, si nous voulons seulement utiliser une fonction de Lyapunov, il est alors nécessaire de supposer la continuité à l'origine du temps d'établissement.

La stabilisation en temps fini a été développée dans [Hong 02, Hong *et al.* 02] et [Perruquetti *et al.* 00], pour certains systèmes particuliers. Ici, nous développerons des résultats apparaissant dans [Bhat *et al.* 00], dans le but d'étudier la régularité du temps d'établissement en dehors de l'origine. Ceci nous conduira à un résultat intermédiaire : avec un système de classe $\mathcal{CL}^k$ où $k \in \mathbb{N}$, la stabilité en temps fini avec un temps d'établissement continu à l'origine et l'existence d'une fonction de Lyapunov de classe $\mathcal{CL}^\infty$ satisfaisant l'inégalité différentielle $\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha$ où $0 < \alpha < 1$ sont équivalentes. Ce résultat nous permettra de résoudre des problèmes de stabilisation en temps fini pour les systèmes affines de classe $\mathcal{CL}^k$ en utilisant des fonctions contrôlées de Lyapunov et la continuité à l'origine du temps d'établissement du système bouclé.

Définition 2.14 *Il y a* ***unicité à droite des solutions*** *sur $U \subset \mathbb{R}^n$ pour le système (2.9) si pour tout $x_0 \in U$ et pour toutes solutions maximales $\phi^{x_0} : [0, T_\phi[\to \mathbb{R}^n$ et $\psi^{x_0} : [0, T_\psi[\to \mathbb{R}^n$ du système (2.9), il existe alors $0 < T_{x_0} \leq \min\{T_\phi, T_\psi\}$ tel que $\phi^{x_0}(\tau) = \psi^{x_0}(\tau)$ pour tout $\tau \in [0, T_{x_0}[$.*
On peut supposer sans perte de généralité que pour tout $x_0 \in U$, T_{x_0} est choisi de façon à être le plus grand possible dans $\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$.

Dans la suite, $\phi^{x_0}(\tau)$ désignera une solution du système (2.9) avec la condition initiale $\phi^{x_0}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. On peut trouver différentes conditions suffisantes d'unicité des solutions à droite sans pour autant avoir la lipschitziannité du membre de droite dans [Agarwal *et al.* 93, Filippov 88, Kawski 89].

Maintenant, rappelons quelques notions d'analyse non lisse. Si $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, $\dot{V}$ est la dérivée supérieure de Dini de V le long des solutions

du système (2.9), i.e. $\dot{V}(x) = D^+ (V \circ \phi^x)(0)$. Si V est une fonction localement lipschitzienne en $x \in \mathcal{V}$, alors

$$\dot{V}(x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{V(x + hf(x)) - V(x)}{h}$$

et si V est continûment différentiable en $x \in \mathcal{V}$, alors $\dot{V}(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle$.
Considérons le système (2.9) où $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $f(0) = 0$ et supposons qu'il possède l'unicité à droite des solutions.
Nous allons donner la définition de la stabilité en temps fini pour les systèmes autonomes. Nous choisissons d'utiliser la définition minimale donnée dans [Bhat *et al.* 00]. En effet, bien qu'il soit montré dans [Bhat *et al.* 00] que celle-ci est équivalente à la définition 2.1, le lecteur peut se rendre compte que cela ne semble pas tout à fait évident. En réalité, l'équivalence entre les deux définitions se montre en utilisant le caracère autonome du système (voir [Bhat *et al.* 00] pour plus de détails).

Définition 2.15 *L'origine du système (2.9) est* ***stable en temps fini*** *si*

1. *il existe une fonction $T : \mathcal{V} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que si $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ alors $\phi^{x_0}(\tau)$ est définie (et en particulier unique) sur $[0, T(x_0)[$, $\phi^{x_0}(\tau) \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ pour tout $\tau \in [0, T(x_0)[$ et $\lim_{\tau \to T(x_0)} \phi^{x_0}(\tau) = 0$. T est le* ***temps d'établissement du système*** *(2.9).*
2. *pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta(\epsilon) > 0$, tel que pour tout $x_0 \in (\delta(\epsilon)\mathcal{B}^n \setminus \{0\}) \cap \mathcal{V}$, $\phi^{x_0}(\tau) \in \epsilon\mathcal{B}^n$ pour tout $\tau \in [0, T(x_0)[$.*

Remarque 2.16 *Notons que si l'origine du système (2.9) est stable en temps fini, alors il ne peut y avoir unicité à gauche des solutions atteignant l'origine et en particulier f ne peut pas être localement lipschitzienne à l'origine.*
Si le système (2.9) est stable en temps fini, la stabilité asymptotique implique que $\phi^0 \equiv 0$ est l'unique solution partant de $x_0 = 0$. Ainsi, le temps d'établissement T peut être prolongé par une fonction définie positive. Nous appellerons encore temps d'établissement *le prolongement à l'origine de la fonction T.*

Lemme 2.17 ([Bhat *et al.* 00, Proposition 2.3]) *Si l'origine du système (2.9) est stable en temps fini avec comme temps d'établissement du système $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, alors pour tout $x \in \mathcal{V}$ le flot $\Phi(\tau, x) = \phi^x(\tau)$ du système (2.9) est défini et continu sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathcal{V}$ et $\Phi(\tau, x) = 0$ pour tout $\tau \geq T(x)$.*

Ce résultat montre que la stabilité en temps fini implique :
– l'unicité à droite des solutions partant de $\mathcal{V}$;
– la stabilité asymptotique ;
– l'existence d'un flot continu.

Finalement, $T(x)$ est le temps mis par la solution ϕ^x pour rejoindre l'origine et, comme le système est autonome, la stabilité nous assure que la solution reste en l'origine pour tous les temps plus grands que $T(x)$. Donc, on a l'égalité suivante :

$$T(x) = \inf \{\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \Phi(\tau, x) = 0\}. \tag{2.10}$$

Ceci montre en particulier que *les définitions 2.1 et 2.15 sont équivalentes dans le cas des systèmes autonomes.*
L'utilisation du théorème 1.12 de Kurzweil consacré aux systèmes continus et donné au chapitre 1 s'avère ici indispensable car le système (2.9) ne peut pas être lipschitzien à l'origine. Donnons donc le résultat principal de cette partie qui est une condition nécessaire et suffisante de stabilité en temps fini.

Théorème 2.18 ([Moulay *et al.* b]) *Supposons que le système (2.9) possède l'unicité à droite des solutions. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'origine du système (2.9) est stable en temps fini sur $\mathcal{V}$,*

(ii) *il existe une fonction de Lyapunov lisse $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système (2.9) vérifiant pour tout $x \in \mathcal{V}$*

$$\int_{V(x)}^{0} \frac{ds}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))} < +\infty \tag{2.11}$$

où θ_x est l'inverse de la fonction $t \mapsto V(\Phi(t, x))$,

De plus, si (i) ou (ii) est vérifié, alors toute fonction de Lyapunov lisse $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système (2.9) vérifie pour tout $x \in \mathcal{V}$

$$\int_{V(x)}^{0} \frac{ds}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))} < +\infty$$

et

$$T(x) = \int_{V(x)}^{0} \frac{ds}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))}.$$

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$ Si le système (2.9) est stable en temps fini avec comme fonction temps d'établissement $T : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, alors il existe une fonction de Lyapunov lisse $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$ pour le système (2.9) donnée par le théorème 1.12 de Kurzweil. Ainsi, l'application $[0, T(x)[\to]0, V(x)]$, $t \mapsto V(\Phi(t, x))$ est strictement décroissante et différentiable, et son inverse $]0, V(x)] \to [0, T(x)[$, $s \mapsto \theta_x(s)$ est différentiable et vérifie pour tout $s \in]0, V(x)]$,

$$\theta_x'(s) = \frac{1}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))}.$$

En utilisant le changement de variables $s = V(\Phi(t,x))$, on a les égalités suivantes

$$T(x) = \int_0^{T(x)} dt = \int_{V(x)}^0 \theta'_x(s)\, ds = \int_0^{V(x)} \frac{ds}{-\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))} < +\infty. \tag{2.12}$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système (2.9), le théorème de Lyapunov (voir [Hahn 63]) assure qu'il est asymptotiquement stable. Les égalités (2.12) impliquent la convergence en temps fini.
Si (i) ou (ii) est vérifié, l'ensemble $\mathbf{S}_L$ des fonctions de Lyapunov lisses pour le système (2.9) est non vide. Soit $V \in \mathbf{S}_L$, en utilisant le même argument que précédemment, on en déduit que V satisfait (2.11). ■

Remarque 2.19 *Si la fonction de Lyapunov V est définie sur $\mathbb{R}^n$, propre, et si la condition (ii) est vérifiée globalement, alors l'origine du système (2.9) est globalement stable en temps fini.*

Même si le théorème 2.18 est un résultat théorique, on peut en donner un exemple simple d'utilisation.

Exemple 2.20 *Considérons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et la fonction de Lyapunov lisse $V(x) = \frac{x^2}{2}$. Alors, $V(\phi(t)) = \frac{x_0^2 e^{-2t}}{2} = V(x_0)\, e^{-2t}$, $\theta(s) = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{s}{V(x_0)}\right)$ et $\phi(\theta(s)) = \sqrt{V(x_0)\, s}$, ce qui conduit à $\dot{V}(\phi(\theta(s))) = -V(x_0)\, s$ où $s > 0$. On a

$$T(x_0) = \int_0^{\frac{x_0^2}{2}} \frac{ds}{V(x_0)\, s} = +\infty.$$

Le théorème (2.18) assure alors que le système $\dot{x} = -x$ n'est pas stable en temps fini. On le savait déjà puisque le système est lipschitzien à l'origine.

En général, le temps d'établissement n'est pas continu à l'origine. Rappelons l'exemple fondamental donné dans [Bhat *et al.* 00, Exemple 2.2] et qui montre que la fonction temps d'établissement d'un système stable en temps fini n'est généralement pas continue à l'origine.

Exemple 2.21 ([Bhat *et al.* 00, Exemple 2.2]) *Considérons la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *définie par*

$$\begin{cases} \dot{r} = -\sqrt{r}\cos\theta \\ \dot{\theta} = -\sqrt{\theta} \end{cases} \quad \textit{sur } \mathcal{Q}_{\mathrm{I}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = r\cos\theta - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sin\theta \end{cases} \quad \textit{sur } \mathcal{Q}_{\mathrm{II}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x_1 < 0, x_2 \geq 0\},$$

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\theta} = -r \end{cases} \quad \textit{sur } \mathcal{Q}_{\mathrm{III}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x_1 \leq 0, x_2 < 0\},$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\sqrt{x_1} - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \textit{sur } \mathcal{Q}_{\mathrm{IV}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x_1 > 0, x_2 < 0\}.$$

Cela conduit au portait de phase de la figure 2.2 avec $f(0) = 0$, $r > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$ *et* $x = (x_1, x_2) = (r\ \cos(\theta), r\ \sin(\theta))$.

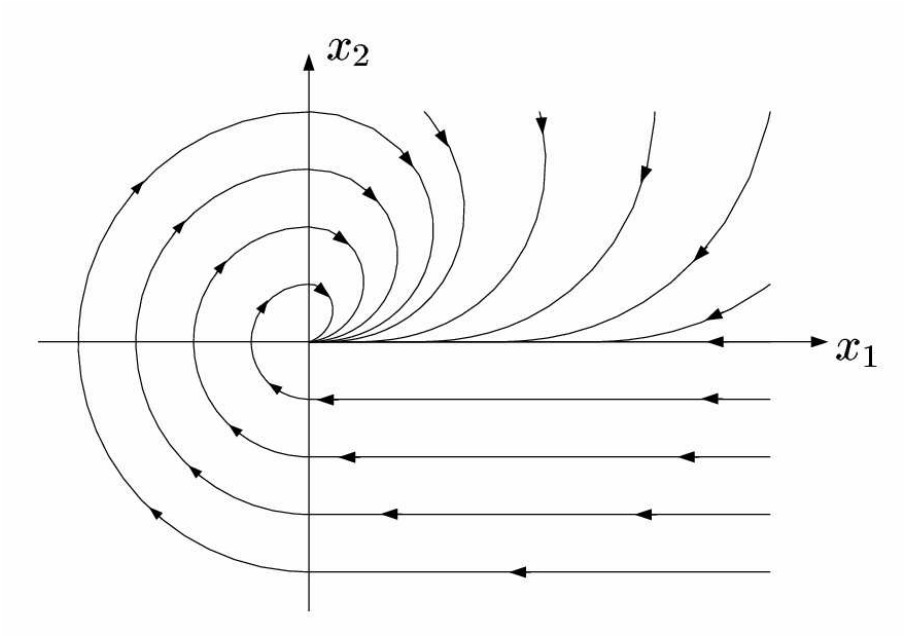

FIG. 2.2 – Portrait de phase du système

- *(Unicité à droite des solutions) Le système est localement lipschitzien sur* $\mathbb{R}^2$ *sauf sur l'axe des* x_1 *positifs* $\mathcal{X}_1^+$ *et des* x_2 *négatifs* $\mathcal{X}_2^-$. *D'après [Kawski 89, Proposition 2.2] et [Filippov 88, Chapitre 10, lemme 2] on sait que le système défini sur la figure (2.2) possède l'unicité à droite des solutions sur* $\mathcal{X}_2^-$. *Sur* $\mathcal{X}_1^+$, f *est simplement donnée par* $\dot{x}_1 = -\sqrt{x_1}$, $\dot{x}_2 = 0$ *ce qui assure l'unicité des solutions ayant une condition initiale dans* $\mathcal{X}_1^+$. *Ainsi, le système possède l'unicité à droite des solutions pour toutes conditions initiales dans* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- *(Stabilité)* $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ *est une fonction définie positive telle que* $\dot{V}$ *est semi-définie négative.*

– *(Convergence en temps fini) Pour montrer la convergence en temps fini, Bhat et Bernstein montrent dans [Bhat* et al. *00, Exemple 2.2], que les solutions partant de $\mathcal{Q}_{\mathrm{IV}}$ et $\mathcal{Q}_{\mathrm{III}} \cup \mathcal{Q}_{\mathrm{II}}$ entrent dans $\mathcal{Q}_{\mathrm{III}}$ et $\mathcal{Q}_{\mathrm{I}}$ respectivement, en un temps fini, alors que les solutions partant dans $\mathcal{Q}_{\mathrm{I}}$ convergent vers l'origine en temps fini.*
– *(Discontinuité à l'origine du temps d'établissement) Bhat et Bernstein considèrent, dans [Bhat* et al. *00, Exemple 2.2], la suite $\{x_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ où $x_m = (x_{m1}, x_{m2}) = \left(0, -\frac{1}{m}\right)$ et ils montrent que*

$$T(x_m) \geq \frac{m\pi}{2} \underset{m\to+\infty}{\to} +\infty,$$

ce qui implique la discontinuité de T à l'origine.

A présent, donnons un corollaire qui fournit une condition suffisante pour avoir une fonction temps d'établissement continue à l'origine.

Corollaire 2.22 ([Moulay *et al.* b]) *Supposons que le système (2.9) possède l'unicité à droite des solutions en dehors de l'origine et qu'il existe une fonction de Lyapunov lisse $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour ce système et $g \in L^1([0, \sup_{x\in\mathcal{V}} V(x)])$ telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, et tout $s \in [0, V(x)]$*

$$\frac{-1}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))} \leq g(s).$$

Alors le système (2.9) est stable en temps fini avec une fonction temps d'établissement continue.

Preuve. S'il existe une fonction de Lyapunov lisse $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système (2.9) et une fonction $g \in L^1([0, \sup_{x\in\mathcal{V}} V(x)])$ telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, et tout $t \in [0, V(x)]$

$$\frac{-1}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s), x))} \leq g(s)$$

alors $\int_0^{V(x)} \frac{-dt}{\dot{V}(\Phi(\theta_x(s),x))} \leq \int_0^{V(x)} g(s)\, ds < +\infty$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Comme $T(0) = 0$, on en déduit que le système (2.9) est stable en temps fini. De plus, comme $\lim\limits_{\|x\|_n \to 0} T(x) \leq \lim\limits_{\|x\|_n \to 0} \int_0^{V(x)} g(t)\, dt = 0$, le temps d'établissement est continu à l'origine. Pour conclure que T est continue sur son ensemble de définition, on peut invoquer le résultat suivant [Bhat *et al.* 00, Proposition 2.4.] qui montre que T est continue à l'origine si et seulement si T est continue sur son ensemble de définition, ici $\mathcal{V}$. ■

Le théorème 2.18 est général. Néanmoins, il n'est pas facile à mettre en oeuvre parce qu'il fait appel au flot du système qui est généralement inconnu. Nous allons donc nous référer à un résultat donné dans [Bhat *et al.* 00] afin d'utiliser une condition nécessaire et suffisante ne faisant appel qu'à une seule condition sur

la fonction de Lyapunov. Cependant, on utilisera une fonction temps d'établissement plus régulière afin d'obtenir une fonction de Lyapunov plus régulière. Ceci sera important lorsque l'on abordera le problème de stabilisation en temps fini dans le chapitre 5 avec l'utilisation des fonctions de Lyapunov contrôlées. Donnons d'abord un lemme qui est un corollaire évident d'un résultat donné dans [Wilson 69], [Clarke *et al.* 98a, Lemme 5.1] et [Teel *et al.* 00, Lemme 16].

Lemme 2.23 *Soit $\mathcal{O}$ un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et $\beta : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, $\mu, \nu : \mathcal{O} \to \mathbb{R}_{>0}$ trois fonctions continues et supposons que $V : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ soit localement lipschitzienne sur $\mathcal{O}$. Si pour presque tout $x \in \mathcal{O}$,*

$$\langle \nabla V(x), f(x) \rangle \leq \beta(x)$$

alors il existe une fonction lisse $\hat{V} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathcal{O}$,

$$\left| V(x) - \hat{V}(x) \right| \leq \mu(x)$$
$$\left\langle \nabla \hat{V}(x), f(x) \right\rangle \leq \beta(x) + \nu(x).$$

Maintenant, rappelons le résultat qui se trouve dans [Bhat *et al.* 00].

Proposition 2.24 ([Bhat *et al.* 00]) *Supposons que le système (2.9) possède l'unicité à droite des solutions en dehors de l'origine. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'origine du système (2.9) est stable en temps fini avec un temps d'établissement continu à l'origine ;*
2. *il existe une constante $c > 0$, $\alpha \in]0, 1[$ et une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ vérifiant*
$$\dot{V}(x) \leq -cV(x)^{\alpha}. \tag{2.13}$$
pour tout $x \in \mathcal{V}$.

La construction de la fonction de Lyapunov utilise le temps d'établissement de la façon suivante

$$V(x) = T(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

avec $0 < \alpha < 1$ et ainsi $\frac{1}{1-\alpha} > 1$.
Soit E et F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{CL}^0(E, F)$ est l'ensemble des fonctions continues de E dans F, localement lipschitziennes sur $E \setminus \{0\}$ et

$$\mathcal{CL}^k(E, F) = C^0(E, F) \cap C^k(E \setminus \{0\}, F).$$

On peut donner une variante de ce résultat concernant les systèmes de classe $\mathcal{CL}^k$. On utilisera alors le fait que la classe des systèmes possédant l'unicité à droite des solutions en dehors de l'origine est contenue dans la classe des systèmes de classe $\mathcal{CL}^k$ pour tout $k \geq 0$.

Proposition 2.25 ([Moulay *et al.* b]) *Soit $k \geq 0$, si f appartient à la classe $\mathcal{CL}^k$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *l'origine du système (2.9) est stable en temps fini avec une fonction temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^0$,*
2. *il existe une constante $c > 0$, $\alpha \in]0,1[$ et une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ de classe $\mathcal{CL}^\infty$ satisfaisant à la condition (2.13).*

De plus, si V est une telle fonction de Lyapunov alors

$$T(x) \leq \frac{V(x)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}.$$

Preuve. Supposons que le point 2) soit vérifié. L'existence d'une fonction de Lyapunov V de classe $\mathcal{CL}^\infty$ vérifiant la condition (2.13) implique la stabilité en temps fini. Ce résultat a été montré dans [Bhat *et al.* 00, Théorème 4.2]. De plus, comme $x \mapsto \frac{V(x)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}$ est de classe $\mathcal{CL}^\infty$, on en déduit que T appartient à la classe $\mathcal{CL}^0$.
Inversement, supposons que l'origine du système (2.9) soit stable en temps fini avec un temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^0$. En utilisant la preuve de la proposition 2.24 qui se trouve dans [Bhat *et al.* 00, Théorème 4.3], on sait que $V(x) = T(x)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ avec $0 < \alpha < 1$ appartient à la classe $\mathcal{CL}^0(\mathcal{V})$ et est une fonction de Lyapunov pour le système (2.9) vérifiant la condition (2.13). Soit $0 < k < c$, on applique le lemme 2.23 avec l'ouvert $\mathcal{V}\backslash\{0\}$, et $\beta(x) = -cV(x)^\alpha$, $\mu(x) = \frac{1}{2}V(x)$, $\nu(x) = kV(x)^\alpha$. On obtient une fonction de Lyapunov $\hat{V}$ de classe $\mathcal{CL}^\infty$ telle que,

$$\frac{1}{2}V(x) \leq \hat{V}(x) \leq \frac{3}{2}V(x), \quad x \in \mathcal{V},$$
$$\left\langle \nabla\hat{V}(x), f(x) \right\rangle \leq -c'\hat{V}(x)^\alpha, \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\},$$

avec $c' = c - k > 0$. ■
Comme on le voit dans les deux exemples suivants, la fonction de Lyapunov vérifiant la condition (2.13) peut être lisse partout.

Exemple 2.26 (système scalaire) *Soit $k > 0$. Il est facile de voir que le système*

$$\dot{x} = -k\,\varphi_a(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

est stable en temps fini en utilisant la fonction de Lyapunov lisse $V(x) = \frac{x^2}{2}$, avec le temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^\infty$

$$T(x) = \frac{|x|^{1-\alpha}}{k(1-\alpha)}.$$

Pour cet exemple, les solutions sont explicites, donc nous n'avons par réellement besoin d'utiliser une fonction de Lyapunov. Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, le temps d'établissement est donné par $T(x) = \int_x^0 \frac{dy}{f(y)}$ pour un système scalaire stable en temps fini (voir [Haimo 86] et [Moulay et al. *03] pour une preuve de ce résultat élémentaire).*

Exemple 2.27 (Système de dimension deux) *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\varphi_\alpha(x_1) - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\varphi_\alpha(x_2) - x_2^3 - x_1 \end{cases}.$$

En prenant $V(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2}$, *on obtient* $\dot{V}(x_1, x_2) = -\sum_{i=1}^{2}(x_i^4 + |x_i|^{\alpha+1}) \leq 0$. V *est une fonction de Lyapunov pour le système vérifiant*

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -2^{\frac{\alpha+1}{2}} V(x_1, x_2)^{\frac{\alpha+1}{2}}.$$

En effet, $\sum_{i=1}^{2}(x_i^4 + |x_i|^{\alpha+1}) \geq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} = \|x\|_2^{\alpha+1}$. *Donc l'origine est stable en temps fini avec un temps d'établissement continu vérifiant* $T(x) \leq \frac{2\|x\|_2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.

On se doit de signaler qu'il n'y a aucun moyen de voir la différence entre la stabilité asymptotique et la stabilité en temps fini à l'aide d'une simulation. Celle-ci est un outil qui permet d'apprécier la convergence, mais elle ne dispense pas d'une étude théorique.
Pour finir, citons un résultat de robustesse donné dans [Bhat *et al.* 00, Théorème 5.4] pour les systèmes de la forme

$$\dot{x} = f(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2.14}$$

et possédant l'unicité à droite des solutions en dehors de l'origine et tels que g soit lipschitzienne et $g(0) = 0$.

Proposition 2.28 ([Bhat *et al.* 00, Théorème 5.4]) *Supposons qu'il existe une fonction de Lyapunov lipschitzienne* $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *vérifiant l'inégalité (2.13) pour tout* $x \in \mathcal{V}$ *et pour* $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. *Alors l'origine du système (2.14) est stable en temps fini.*

2.4 Systèmes homogènes

Considérons le système

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.15}$$

où f est continue.

Définition 2.29 *Le système (2.15) est* ***homogène de degré*** d *s'il existe* $(r_1, \ldots, r_n) \in ((0, +\infty))^n$ *tels que*

$$f_i(\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^{r_i + d} f_i(x_1, \ldots, x_n)$$

pour tout $\lambda > 0$. $(r_1, \ldots, r_n)$ *sont les poids du système (2.15).*

Théorème 2.30 ([Bhat *et al.* 97, Théorème 2]) *Supposons que le système (2.15) soit homogène de degré $d < 0$, alors l'origine du système (2.15) est stable en temps fini si et seulement s'il est asymptotiquement stable.*

La preuve de ce résultat se trouve dans [Bhat *et al.* 96, Proposition 1] et [Kawski 95]. Une extension de ce résultat aux systèmes discontinus a été récemment donnée dans [Orlov 05].

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a tout d'abord donné une condition nécessaire puis une condition suffisante pour la stabilité en temps fini des systèmes décrits par des EDO continues non autonomes. Comme nous l'avons signalé, il n'existe pour le moment aucune condition nécessaire et suffisante pour de tels systèmes. En revanche, si le système vérifie l'unicité à droite des solutions, on peut donner une condition nécessaire et suffisante de stabilité en temps fini. Cette condition théorique semble difficilement utilisable pour l'étude à suivre de la stabilisation en temps fini. En effet, elle fait intervenir le flot du système très rarement connu dans le cas des systèmes non linéaires. C'est pour cela que l'on a développé en deuxième partie de la section 2.3 la théorie de Bhat et Bernstein qui suppose la continuité du temps d'établissement. Ceci nous permet de n'utiliser qu'une condition sur une fonction de Lyapunov pour montrer la stabilité en temps fini. Enfin, nous avons fait un bref rappel sur les systèmes homogènes. Ces résultats nous permettront par la suite d'étudier la stabilisation en temps fini.

Chapitre 3

Stabilité en temps fini des inclusions différentielles ordinaires

3.1 Introduction

Lorsqu'on étudie la stabilisation en temps fini par retour d'état discontinu, on rencontre le problème de la stabilité en temps fini pour les inclusions différentielles. En effet, de nombreux systèmes ne sont pas continûment stabilisables et on doit alors avoir recours à des contrôles discontinus. Il est parfois préférable d'avoir la stabilisation en temps fini plutôt que la stabilisation asymptotique car les solutions rejoignent l'origine, ce qui assure une précision optimale du système en un temps fini et connu.
Dans ce chapitre, nous allons étudier la stabilité en temps fini pour les inclusions différentielles à l'aide des fonctions de Lyapunov. Il existe peu de résultats sur ce sujet, mais on peut citer les articles suivants : [Orlov 03, Orlov 05, Perruquetti *et al.* 00]. Comme nous l'avons vu pour les EDO dans le chapitre 2, nous allons exploiter une inégalité différentielle portant sur une fonction de Lyapunov pour obtenir la convergence en temps fini des inclusions différentielles. Puis nous appliquerons le concept des solutions de Krasovskii à l'étude de quelques exemples de systèmes discontinus stables en temps fini. En effet, l'étude de tels systèmes est l'une des principales applications des inclusions différentielles. Les résultats suivants vont paraître dans [Moulay *et al.* 05b].

3.2 Stabilité asymptotique et en temps fini

Soit F une fonction multivaluée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. F définit l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{3.1}$$

où $\dot{x}$ est la dérivée à droite de x. Une **solution** $\phi(\tau)$ du système (3.1) est une fonction absolument continue définie sur un intervalle et vérifiant l'inclusion dif-

férentielle presque partout (c'est-à-dire que $\dot{\phi}(\tau) \in F(\phi(\tau))$ pour presque tout τ). En effet, le théorème de Lebesgue nous assure que $\phi(\tau)$ est dérivable presque partout. On rappelle les conditions générales pour avoir l'existence des solutions pour le système (3.1) :

Condition 3.1 ([Filippov 88]) *Soit F une fonction multivaluée à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. F satisfait les* ***conditions générales*** *si :*

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $F(x)$ est non vide, fermé et convexe,

(ii) la fonction $x \mapsto F(x)$ est semi-continue supérieurement.

D'après le théorème d'existence des solutions des IDO, que l'on peut trouver dans [Filippov 88] ou [Aubin *et al.* 84], les conditions précédentes sont suffisantes pour assurer l'existence pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ d'au moins une solution $\phi(\tau)$ du système (3.1), définie sur un intervalle $[0, d]$ avec $d > 0$, telle que $\phi(0) = x_0$. Dans la suite, $\phi^{x_0}(\tau)$ représentera une solution du système (3.1) partant de x_0 et $\mathcal{S}(x_0)$ l'ensemble de toutes les solutions ϕ^{x_0}. On munit l'espace $\mathcal{S} = \bigcup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{S}(x_0)$ inclus dans $C([0, +\infty[, \mathbb{R}^n)$ de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.
Maintenant, introduisons la notion de stabilité en temps fini pour les IDO.

Définition 3.2 ([Moulay *et al.* 05b]) *L'origine du système (3.1) est* ***stable en temps fini*** *si :*

1. *l'origine est stable pour le système (3.1),*
2. *il existe $T_0 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tel que pour toute solution $\phi^{x_0} \in \mathcal{S}(x_0)$ avec $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi^{x_0}(\tau) = 0$ pour tout $\tau \geq T_0(\phi^{x_0}) \geq 0$. T_0 est le* ***temps d'établissement de la solution*** *ϕ^{x_0}.*

La notion de stabilité en temps fini est illustrée par la figure 3.1.
Donnons un premier résultat portant sur le temps d'établissement.

Proposition 3.3 ([Moulay *et al.* 05b]) *Soit $0 \leq a < b < +\infty$, considérons le système*

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad t \in [a, b]$$

où F satisfait les conditions 3.1 et est lipschitzienne à valeurs compactes en dehors de l'origine. Si le système (3.3) est stable en temps fini sur $\delta(\epsilon)\mathcal{B}^n$ avec un temps d'établissement T_0 continu pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, alors pour tout $x \in \delta(\epsilon)\mathcal{B}^n$,

$$T(x) = \sup_{\phi^x \in \mathcal{S}(x)} T_0(\phi^x) < +\infty.$$

$T(x)$ s'appelle le ***temps d'établissement du système*** *(3.1).*

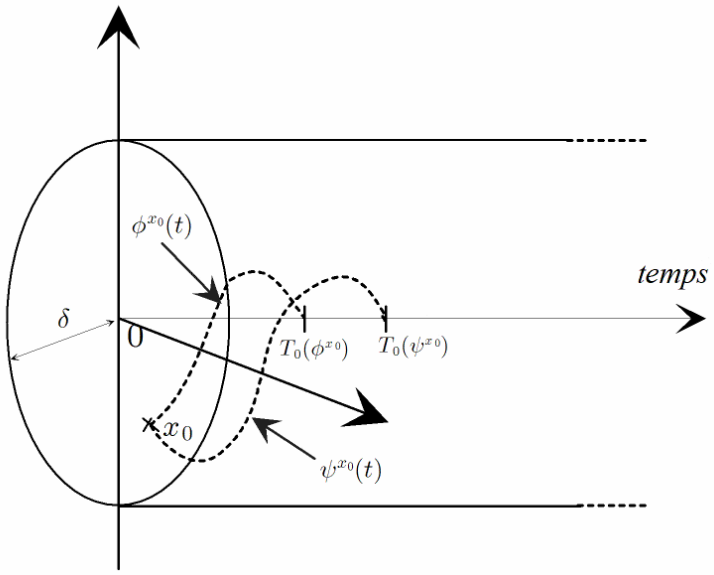

FIG. 3.1 – Stabilité en temps fini

Preuve. Supposons que le système (3.3) soit stable en temps fini avec un temps d'établissement continu T_0. Comme le système est lipschitzien à valeurs compactes, le résultat suivant [Aubin *et al.* 90, Corollaire 10.4.5] assure que $\mathcal{S}(x)$ est dense dans $\tilde{\mathcal{S}}(x)$ pour la topologie de la convergence uniforme où $\tilde{\mathcal{S}}(x)$ est l'ensemble des solutions du système

$$\dot{x} \in \overline{co}F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Comme F vérifie les conditions 3.1, on sait d'après [Filippov 88] que F est égale à sa fermeture convexe : i.e. $F(x) = \overline{co}F(x)$. Ainsi $\mathcal{S}(x)$ est fermé pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Supposons qu'il existe $x_0 \in \delta(\epsilon)\mathcal{B} \setminus \{0\}$ tel que $\sup\limits_{\phi^{x_0} \in \mathcal{S}(x_0)} T_0(\phi^{x_0}) = +\infty$. Alors il existe une suite $\{\phi_n^{x_0}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions dans $\mathcal{S}(x_0)$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty} T_0(\phi_n^{x_0}) = +\infty.$$

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_n^{x_0}$ appartient à $\mathcal{S}(x_0)$. Par hypothèse, $T_0\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_n^{x_0}\right) < +\infty$. Comme T_0 est continue, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_0(\phi_n^{x_0}) = T_0\left(\lim\limits_{n\to+\infty} \phi_n^{x_0}\right)$, ce qui aboutit à une contradiction, d'où le résultat. Par ailleurs, la stabilité du système (3.3) implique que $T_0(0) = 0$. ■

3.3 Conditions suffisantes de stabilité en temps fini

Dans cette partie, nous allons étendre aux IDO un résultat donné dans [Haimo 86]. Nous aurons besoin de l'existence d'une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ et d'une fonction $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continue telle que $r(0) = 0$ vérifiant l'inégalité différentielle suivante

$$\overline{D^+V}(x; v) \leq -r(V(x)) \tag{3.2}$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $v \in F(x)$.
La proposition suivante nous donne une condition suffisante de stabilité en temps fini : l'existence d'une fonction de Lyapunov vérifiant la condition (3.2).

3.3.1 Utilisation de fonctions de Lyapunov lisses

Proposition 3.4 ([Moulay *et al.* 05b]) *Considérons le système (3.1) où F satisfait les conditions 3.1 et $0 \in F(0)$. S'il existe une fonction de Lyapunov différentiable $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ satisfaisant la condition (3.2) avec une fonction continue définie positive $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ telle que pour un $\epsilon > 0$*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{r(z)} < +\infty$$

alors l'origine du système (3.1) est stable en temps fini.

Preuve. Puisque $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction de Lyapunov, le théorème 1.17 en Annexe nous assure que l'origine est asymptotiquement stable. Soit $\phi^{x_0}(\tau)$ une solution de (3.1) qui tend vers l'origine avec le temps d'établissement $0 \leq T_0(\phi^{x_0}) \leq +\infty$. Cela revient à prouver que $T_0(\phi^{x_0}) < +\infty$. D'après la définition de la stabilité asymptotique, x_0 peut être choisi suffisamment petit pour que $\phi^{x_0}(\tau) \in \mathcal{V}$ pour $\tau \geq 0$ et pour que $\tau \mapsto V(\phi^{x_0}(\tau))$ soit strictement décroissante pour $\tau \geq 0$. En utilisant le changement de variables : $[0, T_0(\phi^{x_0})] \to [0, V(x_0)]$ donné par $z = V(\phi^{x_0}(\tau))$, on obtient

$$\int_{V(x_0)}^{0} \frac{dz}{-r(z)} = \int_{[0,T_0(\phi^{x_0})]} \frac{\left\langle \nabla V(\phi^{x_0}(\tau)), \dot{\phi}^{x_0}(\tau) \right\rangle}{-r(V(\phi^{x_0}(\tau)))} d\tau$$

où $\dot{\phi}^{x_0}$ est la dérivée de ϕ^{x_0} définie presque partout. Comme V est différentiable, la condition (3.2) s'écrit

$$\langle \nabla V(x), v \rangle \leq -r(V(x))$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $v \in F(x)$.
Ceci montre que

$$T_0(\phi^{x_0}) = \int_0^{T_0(\phi^{x_0})} d\tau \leq \int_0^{V(x_0)} \frac{dz}{r(z)},$$

ce qui implique que $T_0(\phi^{x_0}) < +\infty$. Par ailleurs, $\int_0^{V(x_0)} \frac{dz}{r(z)}$ étant indépendante de ϕ^{x_0}, pour chaque solution $\phi^{x_0}(\tau)$ partant de $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on a $T(x_0) \leq \int_0^{V(x_0)} \frac{dz}{r(z)} < +\infty$. Donc, l'origine du système (3.1) est stable en temps fini.
■

Remarque 3.5 *Le temps d'établissement du système (3.1) vérifie l'inégalité suivante*

$$T(x) \leq \int_0^{V(x)} \frac{dz}{r(z)},$$

donc il est continu à l'origine.

Exemple 3.6 *Considérons la fonction multivaluée*

$$F(x) = \begin{cases} 1 + |x|^{\frac{1}{2}} & si \quad x < 0 \\ [-1, 1] & si \quad x = 0 \\ -1 - |x|^{\frac{1}{2}} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

et le système $\dot{x} \in F(x)$. Soit $V(x) = x^2$, alors pour tout $v \in F(x)$

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x), v \rangle &\leq -|x|^{\frac{3}{2}} = -V(x)^{\frac{3}{4}} \\ &\leq -r(V(x)) \ \textit{avec}\ r(z) = |z|^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 3.4, l'origine du système est stable en temps fini.

Les inclusions différentielles sont un des principaux outils pour l'étude des équations différentielles discontinues telles que $\dot{x} = f(x)$ presque partout. Ainsi, on considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifiant les conditions :
– f est mesurable sur $\mathbb{R}^n$,
– f est localement à valeurs compactes relatives (voir la définition 1.32),
– $f(0) = 0$.
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction multivaluée $\mathcal{K}$ par

$$\mathcal{K}(x) = \bigcap_{\epsilon > 0} \overline{co}\left(f\left(x + \epsilon\, \overline{\mathcal{B}^n}\right)\right). \tag{3.3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\mathcal{K}(x)$ est non vide, borné, fermé et convexe. De plus, on peut montrer que la fonction multivaluée $\mathcal{K}$ est semi-continue supérieurement, ainsi $\mathcal{K}$ satisfait les conditions 3.1. Donc tout ce que l'on a énoncé précédement s'applique à l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in \mathcal{K}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4}$$

On rappelle qu'une solution du système (3.4) s'appelle une **solution de Krasovskii**. Cette notion a déjà été utilisée pour les systèmes contrôlés dans le chapitre 1.
Donnons maintenant un exemple de système discontinu stable en temps fini.

Exemple 3.7 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 \in -\mathcal{SGN}(x_1) - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 \in -\mathcal{SGN}(x_2) - x_2^3 - x_1 \end{cases}$$

où $\mathcal{SGN}(x)$ est la fonction multivaluée suivante

$$\mathcal{SGN}(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ [-1,1] & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}.$$

En prenant $V(x) = \frac{\|x\|_2^2}{2}$, on obtient pour tout $v \in (-\mathcal{SGN}(x_1) - x_1^3 + x_2, -\mathcal{SGN}(x_2) - x_2^3 - x_1)$,

$$\langle \nabla V(x), v \rangle = -\sum_{i=1}^{2} (x_i^4 + |x_i|) \leq 0.$$

Donc, V est une fonction de Lyapunov pour le système. Comme $\sum_{i=1}^{2}(x_i^4 + |x_i|) \geq (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$, on en déduit que $\langle \nabla V(x), v \rangle \leq -\sqrt{2} V(x)^{\frac{1}{2}}$. En utilisant la proposition 3.4, on en déduit que l'origine du système est stable en temps fini avec un temps d'établissement $T(x) \leq \|x\|_2$.

Finalement, on peut remarquer que le système de l'exemple 3.6 peut être défini en utilisant les équations différentielles discontinues comme $\dot{x} = -sgn(x) - |x|^{\frac{1}{2}} sgn(x)$.

3.3.2 Utilisation de fonctions de Lyapunov non lisses

Maintenant donnons une condition suffisante de stabilité en temps fini qui utilise les fonctions de Lyapunov non lisses. Pour la démonstration, on se servira du lemme de comparaison A.2.

Proposition 3.8 ([Moulay *et al.* 05b]) *Considérons le système (3.1) où F satisfait les conditions 3.1 et $0 \in F(0)$. S'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système (3.1) satisfaisant la condition (3.2) avec une fonction continue définie positive $r : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ localement lipschitzienne en dehors de l'origine telle que*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{r(z)} < +\infty$$

pour un $\epsilon > 0$, alors l'origine est stable en temps fini. De plus, le temps d'établissement du système (3.1) vérifie

$$T(x) \leq \int_0^{V(x)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Preuve. Comme $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonction de Lyapunov pour le système (3.1) satisfaisant la condition (3.2), alors d'après le théorème 1.17, l'origine est asymptotiquement stable. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et $\phi^{x_0}(\tau)$ une solution de (3.1) qui tend vers l'origine avec un temps d'établissement $T_0(\phi^{x_0})$. Cela revient à prouver que $T_0(\phi^{x_0}) < +\infty$. En raison de la stabilité asymptotique, on peut supposer sans perte de généralité que $\phi^{x_0}(\tau) \in \mathcal{V}$ pour $\tau \geq 0$. Considérons le système

$$\dot{y} = -r(y), \quad y \geq 0,$$

avec le flot $\Phi(\tau, y)$ pour $y \geq 0$. En utilisant la preuve de [Smirnov 02, Théorème 8.1], on en déduit l'existence $v \in F(\phi^{x_0}(\tau))$ tel que

$$\overline{D^+ (V \circ \phi^{x_0})}(\tau; 1) = \overline{D^+ V}(\phi^{x_0}(\tau); v) \leq -r(V(\phi^{x_0}(\tau)))$$

pour tout $\tau \geq 0$ et tout $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. En appliquant le lemme A.2 de comparaison pour les IDO donné en Annexe, on a

$$V(\phi^{x_0}(\tau)) \leq \Phi(\tau, V(x_0)), \quad \tau \geq 0, x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}.$$

D'après [Haimo 86], [Moulay *et al.* 03] et ce qui a été vu au chapitre 2, on sait que

$$\Phi(\tau, V(x_0)) = 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{V(x_0)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Comme V est définie positive, on en conclut que

$$\phi^{x_0}(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{V(x_0)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Donc, l'origine du système (3.1) est stable en temps fini. De plus, $\int_0^{V(x)} \frac{dz}{r(z)}$ est indépendant de ϕ^{x_0}, ce qui montre que $T(x_0) < +\infty$. ■

Remarque 3.9 *On peut remarquer que si la condition (3.2) devient une égalité pour tout $x \in \mathcal{V}$ et pour tout $v \in F(x)$, alors toutes les solutions de $\mathcal{S}(x)$ atteignent l'origine avec le même temps d'établissement du système (3.1) $T(x) = \int_0^{V(x)} \frac{dz}{r(z)}$. On remarque que ce problème ne concerne pas les systèmes avec unicité des solutions en dehors de l'origine.*

Maintenant, donnons un exemple faisant intervenir une fonction de Lyapunov non lipschitzienne.

Exemple 3.10 *Soit $0 < a < 1$, et considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -|x_1|^{\frac{1}{2}} sgn(x_1) + |x_2| \\ \dot{x}_2 = -sgn(x_2) \end{cases}$$

L'inclusion différentielle associée au système est

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\left|x_1\right|^{\frac{1}{2}} sgn(x_1) + \left|x_2\right| \\ \dot{x}_2 \in -\mathcal{SGN}(x_2) \end{cases}.$$

Considérons la fonction continue $V(x) = |x_1| + x_2^2$. *Pour tout* $v \in (-\left|x_1\right|^{\frac{1}{2}} sgn(x_1) + \left|x_2\right|, -\mathcal{SGN}(x_2))$, *on a*

$$\begin{aligned} \overline{D^+V}(x;v) &= -\left|x_1\right|^{\frac{1}{2}} + \left|x_2\right| sgn(x_1) - 2\left|x_2\right| \\ &\leq -\left(\left|x_1\right|^{\frac{1}{2}} + \left|x_2\right|\right) \leq -V(x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition (3.8) le système est stable en temps fini.

Pour montrer la stabilité en temps fini des IDO, on a le choix entre un couple (V_1, r_1) avec V_1 une fonction de Lyapunov différentiable et r_1 une fonction continue et un couple (V_2, r_2) avec V_2 une fonction de Lyapunov continue et r_2 une fonction localement lipschitzienne. On retrouve un résultat similaire à celui que l'on a trouvé pour les EDO, et les deux propositions 3.4 et 3.8 sont là aussi complémentaires.

3.4 Conditions nécessaires de stabilité en temps fini

Pour donner une condition nécessaire de stabilité en temps fini, nous aurons besoin pour une fonction de Lyapunov V qu'elle satisfasse l'inégalité suivante

$$\overline{D^-V}\,(x;v) \geq -s(V(x)) \tag{3.5}$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $v \in F\,(x)$ où $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est continue et vérifie $s\,(0) = 0$.

3.4.1 Utilisation de fonctions de Lyapunov lisses

Proposition 3.11 ([Moulay *et al.* 05b]) *Considérons le système (3.1) avec* $0 \in F\,(0)$. *Si l'origine du système (3.1) est stable en temps fini, alors pour toute fonction de Lyapunov lisse vérifiant la condition (3.5) avec une fonction continue définie positive* $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *on a*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{s\,(z)} < +\infty$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Preuve. Supposons que $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ soit une fonction de Lyapunov lisse satisfaisant la condition (3.5). Soit $\phi^{x_0}(\tau)$ une solution de (3.1) avec le temps d'établissement $0 \leq T_0(\phi^{x_0}) < +\infty$. Du fait de la stabilité asymptotique, on peut choisir x_0 suffisamment petit pour que $\phi^{x_0}(\tau) \in \mathcal{V}$ pour tout $\tau \geq 0$ et pour que $\tau \mapsto V(\phi^{x_0}(\tau))$ soit strictement décroissante pour $\tau \geq 0$. En utilisant le changement de variables $[0, T_0(\phi^{x_0})] \to [0, V(x_0)]$ donné par $z = V(\phi^{x_0}(\tau))$, on obtient

$$\int_{V(x_0)}^{0} \frac{dz}{-s(z)} = \int_{[0,T_0(\phi^{x_0})]} \frac{\left\langle \nabla V(\phi^{x_0}(\tau)), \dot{\phi}^{x_0}(\tau) \right\rangle}{-s(V(\phi^{x_0}(\tau)))} dt.$$

Comme $\langle \nabla V(x), v \rangle \geq -s(V(x))$ pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $v \in F(x)$ et $-s(V(\phi^{x_0}(\tau))) < 0$ pour tout $\tau \geq 0$ on obtient

$$\int_{0}^{V(x_0)} \frac{dz}{s(z)} \leq \int_{0}^{T_0(\phi^{x_0})} dt = T_0(\phi^{x_0}) < +\infty.$$

■

La proposition 3.11 peut être utilisée pour montrer la non stabilité en temps fini comme dans l'exemple suivant :

Exemple 3.12 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = |x_2| - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 sgn(x_2) - x_2^3 \end{cases}$$

Soit $V(x) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$, *pour tout* $v \in (|x_2| - x_1^3, -x_1 \mathcal{SGN}(x_2) - x_2^3)$ *on obtient*

$$\langle \nabla V(x), v \rangle = -\left(x_1^4 + x_2^4\right).$$

Ainsi, V *est une fonction de Lyapunov pour le système telle que*

$$\langle \nabla V(x), v \rangle = -\left(x_1^4 + x_2^4\right) \geq -4V(x)^2.$$

Puisque

$$\int_{0}^{\epsilon} \frac{dz}{z^2} = +\infty$$

pour tout $\epsilon > 0$, *la proposition 3.11 nous assure que l'origine n'est pas stable en temps fini.*

3.4.2 Utilisation de fonctions de Lyapunov non lisses

Proposition 3.13 ([Moulay *et al.* 05b]) *Soit le système (3.1) avec* $0 \in F(0)$. *Si l'origine du système (3.1) est stable en temps fini, alors, pour toute fonction de Lyapunov de ce système vérifiant la condition (3.5) avec une fonction continue*

définie positive $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *localement lipschitzienne en dehors de l'origine, on a*

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{s(z)} < +\infty$$

pour tout $\epsilon > 0$.

Preuve. Supposons que V soit une fonction de Lyapunov du système (3.1) satisfaisant la condition (3.5) avec une fonction continue définie positive $s : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ localement lipschitzienne en dehors de l'origine. Soit $x_0 \in \mathcal{V}$ et $\phi^{x_0}(\tau)$ une solution de (3.1) ayant pour temps d'établissement $0 \leq T_0(\phi^{x_0}) < +\infty$. D'après la stabilité asymptotique, on peut supposer sans perte de généralité que $\phi^{x_0}(\tau) \in \mathcal{V}$ pour tout $\tau \geq 0$. Considérons le système

$$\dot{y} = -s(y), \quad y \geq 0,$$

avec le flot $\Phi(\tau, y)$ pour $y \geq 0$. En utilisant la preuve de [Smirnov 02, Théorème 8.1], on en déduit qu'il existe $v \in F(\phi^{x_0}(\tau))$ tel que

$$\overline{D^+(V \circ \phi^{x_0})}(\tau; 1) \geq \overline{D^-(V \circ \phi^{x_0})}(\tau; 1) = \overline{D^- V}(\phi^{x_0}(\tau); v) \geq -s(V(\phi^{x_0}(\tau)))$$

pour tout $\tau \geq 0$ et tout $x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Maintenant, en appliquant le lemme A.2 pour les IDO de comparaison donné en Annexe, on en déduit que

$$V(\phi^{x_0}(\tau)) \geq \Phi(\tau, V(x_0)) \geq 0, \;\; \tau \geq 0, x_0 \in \mathcal{V} \setminus \{0\}.$$

Comme l'origine du système (3.1) est stable en temps fini, on a

$$\Phi(\tau, y) = 0 \text{ pour } y \geq 0 \text{ et } \tau \geq T_0(\phi^y).$$

Comme $-ys(y) < 0$ pour $y \geq 0$, d'après le chapitre 2 le système $\dot{y} = -s(y)$ est asymptotiquement stable. Ainsi, le système $\dot{y} = -s(y)$ est stable en temps fini. D'après [Haimo 86] et [Moulay *et al.* 03], on conclut que pour tout $\epsilon > 0$,

$$\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{s(z)} < +\infty.$$

■

3.5 Quelques remarques

Remarquons d'abord que tout ce qui vient d'être fait dans ce chapitre s'applique en particulier pour $r(z) = c\varphi_\alpha(z) = c|z|^\alpha sgn(z)$ où $0 < \alpha < 1$ et $c > 0$. La condition 3.2 s'écrit alors $\overline{D^+ V}(x; v) \leq -cV(x)^\alpha$. Celle-ci généralise aux IDO la condition $\dot{V}(x) \leq -cV(x)^a$ donnée au chapitre 2 pour les EDO. C'est le cas le plus simple pour une mise en application des résultats qui sont alors une extension aux IDO des résultats donnés par Bhat et Bernstein dans [Bhat *et al.* 00].

La seconde remarque est que dans le cas des IDO homogènes de degré négatif par rapport à une dilatation, la stabilité asymptotique et la stabilité en temps fini sont équivalentes (ce résultat a été montré par Yuri Orlov dans [Orlov 05]). Dans ce mémoire, nous avons rappelé ce résultat dans le cas plus simple des EDO au chapitre 2 avec le théorème 2.30. En ce qui concerne le résultat de Yuri Orlov, nous renvoyons le lecteur à son article qui vient de paraître. En effet, nous ne le rappellerons pas ici car cela nécessite l'introduction de nombreuses notations.

3.6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la stabilité en temps fini pour les IDO à l'aide des fonctions de Lyapunov. Celles-ci sont un outil très puissant pour résoudre les problèmes de stabilité des systèmes non linéaires, en particulier la stabilité en temps fini. Il semble difficile d'obtenir une condition nécessaire et suffisante de stabilité en temps fini uniquement à l'aide des fonctions de Lyapunov. Celles-ci nous permettent de donner des conditions nécessaires puis des conditions suffisantes afin de traiter des problèmes de stabilisation. Dans la suite, nous n'envisagerons pas la stabilisation en temps fini des IDO, seulement celle des EDO. Cependant, cela reste une de mes perspectives d'avenir.

Chapitre 4

Stabilité en temps fini des équations différentielles fonctionnelles retardées

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons examiner la possibilité pour une équation différentielle fonctionnelle retardée (EDFR) d'être stable en temps fini. Les résultats présentés peuvent s'étendre assez facilement aux équations différentielles fonctionnelles neutres.
D'abord, nous allons montrer comment obtenir une condition suffisante de stabilité en temps fini en utilisant les fonctionnelles de Lyapunov, l'équivalent pour les EDF des fonctions de Lyapunov pour les EDO. Ce résultat est directement inspiré des théorèmes que l'on a obtenus pour les EDO (voir [Bhat *et al.* 00, Haimo 86, Moulay *et al.* 03]). On en tirera le premier exemple connu d'un système à retard stable en temps fini. Nous verrons par la suite que ces résultats sont difficilement utilisables pour l'étude de la stabilisation en temps fini des EDF, en particulier pour les systèmes linéaires à retard. Nous proposerons alors dans le chapitre 5 une autre méthode pour résoudre ce problème. Ce travail a été soumis dans [Moulay *et al.* a].
Soit $h \geq 0$, on s'intéresse aux EDFR qui sont de la forme

$$\dot{x}(t) = \mathbf{f}(x_t), \quad t \geq 0 \tag{4.1}$$

où $x_t : [-h, 0] \to \mathbb{R}^n$ est défini par $x_t(s) = x(t+s)$ pour tout $s \in [-h, 0]$. $\dot{x}(t)$ est la dérivée à droite de $x(t)$, et $\mathbf{f} : C_n^h \to \mathbb{R}^n$ est une fonctionnelle continue telle que $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = 0$.
On rappelle que $\phi^\chi(\tau)$ est appelée une *solution* du système (4.1) avec comme condition initiale χ à l'origine si $\phi^\chi(\tau)$ est définie sur $[-h, b)$ avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et si

(i) $\phi^\chi(0) \equiv \chi \in C_n^h$,

(ii) $\phi^{\chi}(\tau)$ est continue sur $[0, b[$,

(iii) $\phi^{\chi}(\tau)$ vérifie l'équation (4.1) pour tout $\tau \in [0, b[$.

Définition 4.1 ([Moulay *et al.* a]) *L'origine du système (4.1) est* stable en temps fini *si :*

1. *l'origine est stable pour le système (4.1),*
2. *il existe $\delta > 0$ tel que si $\chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}$ alors il existe $0 \leq T(\chi) < +\infty$ tel que $\phi^{\chi}(\tau) = 0$ pour tout $\tau \geq T(\chi)$.*

$$T_0(\chi) = \inf \{T(\chi) \geq 0 : \phi^{\chi}(\tau) = 0 \ \ \forall \tau \geq T(\chi)\}$$

est une fonctionnelle appelée temps d'établissement du système *(4.1).*

4.2 Conditions suffisantes

On a le résultat suivant :

Théorème 4.2 ([Moulay *et al.* a]) *Considérons le système (4.1) où* $\mathbf{f}$ *est continue et tel que les solutions $\phi^{\chi}(\tau)$ dépendent continûment de la condition initiale χ. S'il existe une fonctionnelle continue $\mathbf{V} : \mathbf{C}_{\delta,h} \to \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, et deux $\mathcal{K}-$fonctions α_1, r telles que $\dot{z} = r(z)$ possède un flot et pour tout $\chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}$,*

1. $\mathbf{V}(\chi) \geq \alpha_1 (\|\chi(0)\|_n)$,
2. $\dot{\mathbf{V}}(\chi) \leq -r(\mathbf{V}(\chi))$ *avec* $\int_0^{\epsilon} \frac{dz}{r(z)} < +\infty$,

alors le système (4.1) est stable en temps fini avec un temps d'établissement vérifiant l'inégalité $T_0(\chi) \leq \int_0^{\mathbf{V}(\chi)} \frac{dz}{r(z)}$.

Preuve. $\mathbf{V} : \mathbf{C}_{\delta,h} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est une fonctionnelle de Lyapunov pour le système (4.1). Le théorème (1.22) assure que l'origine du système (4.1) est asymptotiquement stable. Soit $\phi^{\chi}(\tau)$ une solution de (4.1) qui tend vers l'origine avec le temps d'établissement $0 \leq T_0(\chi) \leq +\infty$, on doit montrer que $T_0(\chi) < +\infty$. Considérons le système

$$\dot{z} = -r(z), \quad z \geq 0,$$

avec le flot $\Phi(\tau, z)$ pour $z \geq 0$. Pour tout $\tau \geq 0$ et tout $\chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}$,

$$\dot{\mathbf{V}}(\phi^{\chi}(\tau)) \leq -r(\mathbf{V}(\phi^{\chi}(\tau))).$$

En appliquant le lemme A.1 de comparaison donné en annexe, on en déduit que

$$\mathbf{V}(\phi^{\chi}(\tau)) \leq \Phi(\mathbf{V}(\chi)), \ \ \tau \geq 0, \chi \in \mathbf{C}_{\delta,h}.$$

D'après [Haimo 86] et [Moulay *et al.* 03] on sait que

$$\mathbf{V}(\phi^{\chi}(\tau)) \leq \Phi(\mathbf{V}(\chi)) = 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{\mathbf{V}(\chi)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Comme $\mathbf{V}$ est définie positive, on a

$$\phi^{\chi}(\tau) \equiv 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{\mathbf{V}(\chi)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Ainsi, on conclut que pour tout $\tau \geq 0$ et tout $x \in \mathbf{C}_{\delta,h}$,

$$\phi^{\chi}(\tau) = 0 \text{ pour } \tau \geq \int_0^{\mathbf{V}(\chi)} \frac{dz}{r(z)}.$$

Donc, l'origine du système (4.1) est stable en temps fini avec le temps d'établissement

$$T_0(\chi) \leq \int_0^{\mathbf{V}(\chi)} \frac{dz}{r(z)} < +\infty.$$

On peut aussi remarquer que T_0 est en fait continue à l'origine. ■
Voici, à notre connaissance, le premier exemple d'un système à retard stable en temps fini.

Exemple 4.3 ([Moulay *et al.* a]) *Considérons le système à retard suivant*

$$\dot{x}(t) = -\varphi_\alpha(x(t))\left(1 + x(t-h)^2\right)$$

où $\varphi_\alpha(x) = |x|^\alpha sgn(x)$ *avec* $0 < \alpha < 1$. *Le système étant lipschitzien par rapport à la deuxième variable* $x(t-h)$, *on a bien continuité des solutions par rapport à cette variable. En ce qui concerne la première variable* $x(t)$, *le système est lipschitzien en dehors de l'origine. Donc on a bien continuité des solutions par rapport à la première variable en dehors de l'origine. Or la seule solution qui parte de l'origine est la solution nulle. Donc un tel système possède des solutions continues par rapport aux conditions initiales. Soit la fonctionnelle* $\mathbf{V}(x_t) = \frac{x(t)^2}{2}$, *alors on a*

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{V}}(x_t) &= -|x(t)|^{1+\alpha}\left(1 + x(t-h)^2\right)\\ &\leq -|x(t)|^{1+\alpha} = -2^{\frac{1+\alpha}{2}}\mathbf{V}(x_t)^{\frac{1+\alpha}{2}}\end{aligned}$$

Ainsi le système est stable en temps fini avec le temps d'établissement $T_0(x_t) \leq \frac{|x(t)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
La figure 4.1 montre l'évolution de $x(t)$ *pour* $\alpha = h = 0.5$ *et* $x_0 \equiv 0$.

Remarque 4.4 *Considérons le système*

$$\dot{x}(t) = f(x(t), x(t-h_1), \ldots, x(t-h_k)) \tag{4.2}$$

où $h_1, \ldots, h_k$ *sont des nombres positifs et* $f : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue non nulle telle que l'origine soit le seul point de son ensemble de définition vérifiant* $f(0, \ldots, 0) = 0$. *Alors l'origine ne peut pas être stable en temps fini.*

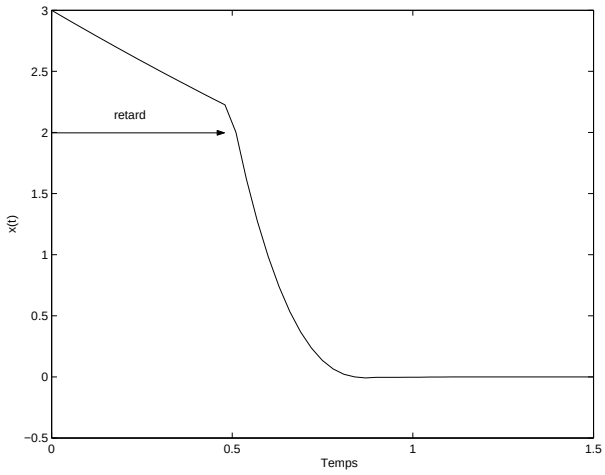

FIG. 4.1 – Simulation du système à retard stable en temps fini

En effet, supposons que l'origine soit stable en temps fini. Soit $\phi(\tau)$ *une solution vérifiant* $\phi(\tau) = 0$ *pour tout* $\tau \geq T$*. Cela implique que* $\dot{\phi}(\tau) = 0$ *pour tout* $\tau \geq T$*. D'après l'unicité à gauche des solutions, on a* $\phi(\tau) = 0$ *pour tout* $\tau \geq T - \max(h_1, \ldots, h_k)$*. De proche en proche, on obtient* $\phi(\tau) = 0$ *pour tout* $\tau \geq 0$*, alors* $\phi(\tau) \equiv 0$ *et donc* $f \equiv 0$*. Ce qui conduit à une contradiction.*

Cette remarque implique qu'il n'est pas possible de stabiliser en temps fini la classe des systèmes dont le système bouclé est de la forme (4.2). En particulier, l'utilisation d'un contrôle à retards discrets est inadéquat. Nous verrons dans le chapitre 5 comment contourner ce problème dans le cas linéaire en utilisant des contrôles à retards distribués.

4.3 Conclusion

Ce chapitre dédié aux EDFR est dans la lignée des chapitres 2 et 3. En effet, il donne une condition suffisante de stabilité en temps fini et le premier exemple connu d'un système à retard stable en temps fini. Cela permet de répondre affirmativement quant à l'existence d'un tel système. Cependant, contrairement aux EDO, ce résultat n'est pas réellement exploitable pour la stabilisation en temps fini de systèmes contrôlés à retard, en particulier dans le cas des systèmes linéaires.

Deuxième partie

Stabilisation des systèmes non linéaires

Chapitre 5

Stabilisation en temps fini

5.1 Introduction

On peut trouver un certain nombre d'exemples de systèmes stabilisés en temps fini comme par exemple le $n-$intégrateur dans les références suivantes [Bhat *et al.* 96, Bhat *et al.* 95] et [Bhat *et al.* 97, Bhat *et al.* 98, Hong *et al.* 02]. Il existe aussi différentes approches pour parvenir à la stabilisation en temps fini. On peut par exemple s'intéresser aux systèmes homogènes par rapport à une dilatation qui possèdent une propriété très intéressante : si le degré d'homogénéité est négatif, alors la stabilisation asymptotique est équivalente à la stabilisation en temps fini. Il faut alors trouver un contrôle qui permette au degré d'homogénéité d'être négatif, lorsque cela est possible. C'est cette approche qui est utilisée dans les références citées précédemment et qui a été utilisée jusqu'à présent pour la stabilisation en temps fini. Nous y consacrerons la première partie de ce chapitre. Si le système n'est pas homogène, il est parfois possible d'obtenir des approximations homogènes et de se ramener au cas précédent (voir [Rosier 93]). Sinon, il faut se passer des propriétés de ces systèmes. C'est pourquoi, nous proposons une approche plus générale en étudiant les systèmes affines de classe $\mathcal{CL}^k$. Ce travail qui constitue la deuxième partie du chapitre a été présenté dans [Moulay *et al.* 05c] et paraîtra dans [Moulay *et al.* b]. Enfin, nous présenterons une extension de la stabilisation en temps fini pour les systèmes à retard.

5.2 Cas des systèmes homogènes

Cette section est consacrée à la stabilisation en temps fini de systèmes contrôlés de la forme

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{5.1}$$

où f est continue. On va choisir le contrôle de telle sorte que le système bouclé soit homogène de degré négatif.

Définition 5.1 *Le système (5.1) est* ***stabilisable en temps fini*** *s'il existe un contrôle* $u \in C^0(\mathcal{V}, \mathbb{R}^m)$ *tel que*

1. $u(0) = 0$,
2. *l'origine du système bouclé* $\dot{x} = f(x, u(x))$ *soit stable en temps fini.*

5.2.1 L'exemple du double intégrateur

Rappelons ce qu'est une surface de glissement idéale.

Définition 5.2 *Soit* $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *une fonction différentiable telle que* $s(0) = 0$, *la surface*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = 0\}$$

est une ***surface de glissement idéale*** *pour le système (2.15) si*

1. S *est invariante (voir la définition (1.6)),*
2. S *est attractive en temps fini : toutes les solutions du système (2.15) convergent vers l'ensemble* S *en temps fini.*

Une condition suffisante pour que S soit une surface de glissement idéale est que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$s(x)\dot{s}(x) \leq -\mu \left|s(x)\right|^{\alpha}$$

avec $0 < \alpha \leq 1$ (voir [Perruquetti *et al.* 02]).
Pour une surface de glissement idéale, S est invariante partout. En théorie des modes glissants, une surface de glissement est en général invariante presque partout.
Un contrôle explicite pour le double intégrateur est donné dans [Bhat *et al.* 98]. En utilisant directement une fonction de Lyapunov, les auteurs montrent que le système bouclé est stable en temps fini. Nous développons cet exemple car une surface de glissement idéale apparaît dans le cas particulier du double intégrateur. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \tag{5.2}$$

et la fonction

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{2-\alpha}{3-\alpha} \left|s_\alpha(x_1, x_2)\right|^{\frac{3-\alpha}{2-\alpha}} + x_2 s_\alpha(x_1, x_2) + \tfrac{1}{3-\alpha} \left|x_2\right|^{3-\alpha}, \tag{5.3}$$

où $s_\alpha(x_1, x_2) = x_1 + \frac{1}{2-\alpha}\varphi_{2-\alpha}(x_2)$ avec $\varphi_\alpha(x) = |x|^\alpha \, sgn(x)$ et $0 < \alpha < 1$. On a alors le théorème suivant.

Théorème 5.3 ([Bhat *et al.* 98]) *Le système (5.2) est globalement stabilisable en temps fini par la famille de contrôles continus* $\{u_\alpha\}_{0<\alpha<1}$ *définis par*

$$u_\alpha(x_1, x_2) = -\varphi_\alpha(x_2) - \varphi_{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(s_\alpha(x_1, x_2))$$

et la fonction temps d'établissement partant de $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *vérifie*

$$T_\alpha(x_1, x_2) \leq \frac{2-\alpha}{c(1-\alpha)} V(x_1, x_2)^{\frac{1-\alpha}{3-\alpha}}.$$

De plus, la surface

$$S_\alpha = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : s_\alpha(x_1, x_2) = 0\right\}$$

est une surface de glissement idéale pour le système (5.2).

Preuve. La première partie du théorème 5.3 est prouvée dans [Bhat *et al.* 98, proposition 1] et [Bhat *et al.* 96, Proposition 1] en utilisant la fonction de Lyapunov $V(x_1, x_2)$. Les auteurs montrent que sur une courbe fermée encerclant l'origine, V est définie positive et $\dot{V}$ vérifie

$$\dot{V}(x_1, x_2) \leq -cV(x_1, x_2)^{\frac{2}{3-\alpha}}.$$

Puis, en utilisant les propriétés d'homogénéité, ils en déduisent que ces propriétés sont vraies partout.
Ainsi, nous devons montrer que S_α est une surface de glissement idéale pour le système (5.2). Comme

$$s_\alpha(x_1, x_2)\, \dot{s}_\alpha(x_1, x_2) = -|x_2|^{1-\alpha} |s_\alpha(x_1, x_2)|^{\frac{2}{2-\alpha}} \leq 0$$

on en déduit que la surface S_α est invariante.
Définissons les ensembles suivants (voir sur la figure 5.1)

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : s_\alpha(x_1, x_2) < 0, x_1 > 0\right\}, \\ B &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0, x_2 < 0\right\}, \\ C &= \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0, s_\alpha(x_1, x_2) < 0\right\}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que toutes les solutions partant des ensembles $A \cup B \cup C$ entrent dans S_α en un temps fini. Par commodité d'écriture, nous allons noter $(x_1(t), x_2(t))$ les solutions du système bouclé partant de (x_1, x_2).

- Sur A, $\dot{x}_1|_A < 0$, $\dot{x}_2|_A = -\varphi_\alpha(x_2) - \varphi_{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(s_\alpha(x_1, x_2)) > 0$ et $s_\alpha(x_1, x_2) < 0$. Ainsi, après un temps fini, toutes les solutions partant de A entrent dans B. En effet, notons $g(x_1, x_2)$ une trajectoire dans le plan de phase. Si $(x_1, x_2) \in A$,

$$\frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_1} < 0, \quad \frac{\partial g(x_1,x_2)}{\partial x_2} > 0, \; s_\alpha(x_1(t), x_2(t)) < 0$$

  ce qui implique que $x_1(t) \leq 0$ et $x_2(t) < 0$ après un temps fini.
- Sur B, $\dot{x}_1|_B < 0$ et $\dot{x}_2|_B > 0$. En utilisant le même argument, on a que toutes les solutions partant de B entrent dans C en un temps fini.

– Sur C, $\dot{x}_1|_C > 0$, et $\dot{x}_2|_C$ est dans un premier temps strictement négatif et devient positif quand $\varphi_\alpha(x_2) = -\varphi_{\frac{\alpha}{2-\alpha}}(s_\alpha(x_1, x_2))$, puis strictement positif. Le fait que $\dot{x}_1|_C > 0$ assure qu'après un temps fini, $x_1(t)$ rejoint $\frac{-1}{2-\alpha}\varphi_{2-\alpha}(x_2(t))$ (et ceci avant que $x_1(t)$ rejoigne l'origine). Donc, toutes les solutions partant de C entrent dans S_α après un temps fini.

Par symétrie, il est facile de voir que toutes les solutions entrent dans S_α après un certain temps fini. Ceci implique que la surface S_α est attractive en temps fini. Donc S_α est une surface de glissement idéale pour le système (5.2). ■

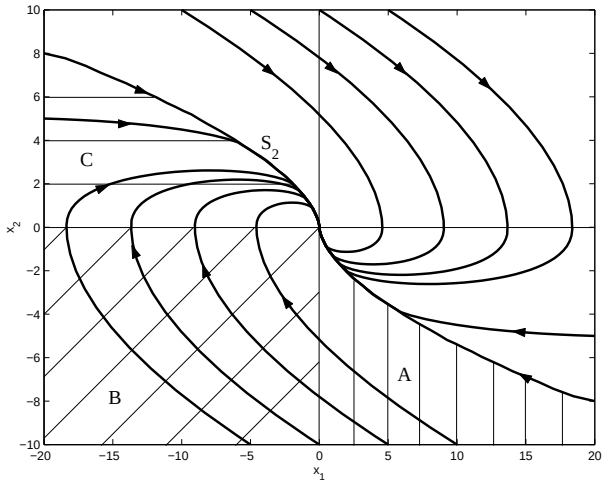

FIG. 5.1 – Portrait de phase du système 5.2

Remarque 5.4 *Le portrait de phase de la figure 5.1 illustre que S_α est une surface de glissement idéale. De plus, on peut noter que le contrôle est hölderien.*

Le problème principal de cette méthode est qu'elle est très difficilement adaptable aux chaînes d'intégrateurs de plus haut degré. Cela est dû au fait qu'il n'y a pas de méthode pour construire la fonction de Lyapunov. Aussi, nous allons voir une autre approche.

5.2.2 Une méthode itérative

Dans [Hong 02, Théorème 3.1], une classe de systèmes contrôlables, englobant les systèmes linéarisables, est stabilisée en temps fini par un contrôle construit par "backstepping" d'après la méthode décrite dans [Coron *et al.* 91]. Nous allons rappeler cette construction.

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^{m_1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n^{m_{n-1}} \\ \dot{x}_n = u \end{cases} \tag{5.4}$$

où $m_i > 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sont des entiers impairs.

Théorème 5.5 ([Hong 02, Théorème 3.1]) *Soit r_i, β_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$, et k des constantes vérifiant les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} &r_1 = 1, \ldots, r_i = \frac{r_{i-1}+k}{m_{i-1}},\ r_i > -k > 0, i = 1, \ldots, n, \\ &\beta_0 = r_2, (\beta_i m_i + 1)\, r_{i+1} \geq (\beta_{i-1} m_{i-1} + 1)\, r_i > 0, i = 1, \ldots, n-2, \\ &\beta_{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Posons $m_0 = 1$. Alors il existe des constantes $l_i > 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ telles que le contrôle $u(x) = u_n(x)$ rend le système (5.4) stable en temps fini, où u_i, $i = 1, \ldots, n$ sont définis comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{i+1}(x_1, \ldots, x_{i+1}) = -l_{i+1}\, \varphi_{\frac{r_{i+1}+k}{r_{i+1} m_i \beta_i}} \left(\varphi_{m_i \beta_i}(x_{i+1}) - \varphi_{\beta_i}(u_i(x_1, \ldots, x_i))\right), \\ i = 1, \ldots, n-1. \end{cases}$$

La preuve de ce théorème est donnée dans [Hong 02] et est basée sur un résultat paru dans [Coron *et al.* 91]. Les auteurs donnent une fonction de Lyapunov pour le système (5.4) $V_n(x)$, de classe C^1, homogène de degré $(m_{j-1}\beta_{j-1} + 1)\, r_j$ et définie de la manière récursive par

$$V_j(x) = W_j(x) + V_{j-1,j}(x_1, \ldots, x_{j-1}),\ \ 1 \leq j \leq n$$

où

$$\begin{aligned} V_1(x) &= x_1^{1+r_2} \\ W_j(x) &= \int_{\varphi_{\frac{1}{m_{j-1}}}(u_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}))}^{x_j} \left[\varphi_{m_{j-1}\beta_{j-1}}(s) - \varphi_{\beta_{j-1}}(u_{j-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}))\right] ds \\ V_{j-1,j} &= V_{j-1}^{\frac{\left(m_{j-1}\beta_{j-1}+1\right) r_j}{\left(m_{j-2}\beta_{j-2}+1\right) r_{j-1}}}. \end{aligned}$$

Exemple 5.6 *Considérons un triple intégrateur*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = u \end{cases}.$$

D'après le théorème 5.5, ce système est stabilisable en temps fini par le contrôle

$$u(x) = u_3(x) = -l_3 \left(l_2 \left(x_1^5 + x_2^{\frac{45}{7}}\right)^{\frac{1}{9}} + x_3\right)^{\frac{3}{5}}.$$

La principale difficulté du théorème 5.5 réside dans le fait que les constantes l_i ne sont connues qu'implicitement. Cependant, pour $l_i' > l_i$ le contrôle stabilise encore le système (5.4) en temps fini. Donc, en choisissant les l_i suffisamment grands, on peut trouver des coefficients pour le contrôle.
En pratique, on utilise cette méthode pour des petites valeurs de n. Si n devient grand, il est préférable d'utiliser les méthodes qui suivent.

5.2.3 Une approche géométrique

Nous utiliserons la notation suivante :

$$C(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

désigne la matrice compagnon attachée à $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
L'intégrateur d'ordre n

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = u \end{cases} \tag{5.5}$$

est stabilisable en utilisant l'approche géométrique de Laurent Praly dans [Praly 97]. Rappelons d'abord quelques résultats.

Lemme 5.7 ([Praly 97]) *Le système (5.5) est homogène de degré d si et seulement s'il existe $(r_1, \ldots, r_n) \in ((0, +\infty))^n$ tels que $r_{i+1} = r_i + d$ avec $d \in \left[-\frac{r_n}{n-1}, r_n\right]$ et pour tout $\lambda > 0$,*

$$u(\lambda^{r_1} x_1, \ldots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^{r_n + d} u(x_1, \ldots, x_n).$$

Lemme 5.8 ([Praly 97]) *Soit P une matrice symétrique définie positive et R une matrice asymptotiquement stable telle que*

$$-a_2 P \leq PR + R^T P \leq -a_1 P$$

où $a_1 > 0$ et $a_2 > 0$. Les égalités suivantes

$$x = \rho^{-R}\theta, \;\; \theta^T P \theta = 1 \tag{5.6}$$

*définissent un $C^\infty-$difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}$. De plus, la fonction $\rho(x)$ peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}^n$ en posant $\rho(0) = 0$. (ρ, θ) sont appelés les **coordonnées polaires généralisées**.*

Les égalités (5.6) conduisent au fait que $\rho(x)$ est solution de l'équation

$$\left(\rho^R x\right)^T P \left(\rho^R x\right) = 1.$$

Lemme 5.9 ([Praly 97]) *Il existe $\alpha \in \mathbb{R}^n$ et P une matrice symétrique définie positive telle que l'on ait l'équation de Lyapunov suivante*

$$C(\alpha)^T P + PC(\alpha) = -Q \tag{5.7}$$

où Q est une matrice symétrique définie positive telle que $PR + RP < 0$.

En prenant $R = -I + dD$ où $D = diag\left((n-i)_{1\leq i\leq n}\right)$, on a le résultat suivant :

Théorème 5.10 ([Praly 97]) *Soit $d \in (-1, 0)$ et $\alpha \in \mathbb{R}^n$ tel que $C(\alpha)$ est Hurwitz et vérifie la condition (5.7), le $n-$intégrateur (5.5) est stabilisable en temps fini par la famille de contrôles continus*

$$u_{\alpha,d}(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \rho(x)^{(n+1-i)d} x_i & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}.$$

Le prinicipal problème de cette méthode est la connaissance de $\rho(x)$. Il est possible de s'en sortir en mettant un estimateur de ρ. Par ailleurs, on peut faire dépendre d de ρ ce qui permet d'obtenir un système à degré d'homogénéité variable et ainsi de rejeter les perturbations du système. Ceci constitue une perspective d'avenir que l'on souhaite développer avec le Professeur Laurent Praly.

5.2.4 Une approche par continuité

Dans [Bhat *et al.* 05], un nouveau contrôle, plus simple que celui donné dans le théorème 5.5, est construit pour le $n-$intégrateur (5.5).

Théorème 5.11 ([Bhat *et al.* 05]) *Soit $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $C(k)$ soit Hurwitz, il existe $\epsilon \in (0, 1)$ tel que pour tout $\alpha \in (1-\epsilon, 1)$ le $n-$intégrateur (5.5) est stabilisable en temps fini par le contrôle continu*

$$u_\alpha(x) = -k_1\varphi_{\alpha_1}(x_1) - \ldots - k_n\varphi_{\alpha_n}(x_n)$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vérifient $\alpha_{i-1} = \frac{\alpha_i\alpha_{i+1}}{2\alpha_{i+1}-\alpha_i}$ où $2 \leq i \leq n$ et $\alpha_{n+1} = 1$ et $\alpha_n = \alpha$.

On obtient la démonstration de ce résultat en utilisant une fonction dépendant continûment de α. Nous renvoyons le lecteur à l'article [Bhat *et al.* 05, Proposition 8.1] pour plus de détails.
Enfin, on peut conjecturer que la plus petite valeur pour α est $\frac{1}{n}$, ce qui permettrait de complètement définir le contrôle u_α.

5.3 Cas des systèmes affines de classe $\mathcal{CL}^k$

Soit $k \geq 0$, considérons le système affine suivant

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \tag{5.8}$$

où $f_i \in \mathcal{CL}^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et $f_0(0) = 0$ et le système bouclé

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.9}$$

Dans cette partie, nous allons devoir adapter la définition de la stabilisation en temps fini afin de pouvoir utiliser un théorème de Lyapunov inverse. Nous restreignons notre étude au cas des fonctions temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^0$.

Définition 5.12 *Le système contrôlé (5.8) est $\mathcal{CL}^0-$**stabilisable en temps fini** s'il est stabilisable en temps fini et si la fonction temps d'établissement est $\mathcal{CL}^0$.*

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation en temps fini du système (5.8). Nous supposerons la continuité du temps d'établissement à l'origine pour le système bouclé (5.9). Nous ajouterons une condition au concept de fonction de Lyapunov contrôlée défini dans [Artstein 83], qui nous mènera à la stabilisation en temps fini.
Rappelons quelques définitions.

Définition 5.13 *Une fonction définie positive $V \in \mathcal{CL}^\infty(\mathcal{V}, \mathbb{R}_{\geq 0})$ est une **fonction de Lyapunov contrôlée non lisse** pour le système (5.8) si pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,*

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} (a(x) + \langle B(x), u \rangle) < 0.$$

où $a(x) = \mathcal{L}_{f_0}V(x)$, $B(x) = (b_1(x), ..., b_m(x))$ avec $b_i(x) = \mathcal{L}_{f_i}V(x)$ pour $1 \leq i \leq m$.

Pour obtenir la stabilisation en temps fini, on devra ajouter la condition suivante pour la fonction de Lyapunov contrôlée V :

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} (a(x) + \langle B(x), u \rangle) \leq -c(V(x))^\alpha \tag{5.10}$$

pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et pour un $\alpha \in]0, 1[$.
On rappelle qu'une fonction de Lyapunov contrôlée vérifie la *propriété de petit contrôle* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $x \in \delta\mathcal{B}^n$, alors il existe $u \in \epsilon\mathcal{B}^m$ tel que

$$a(x) + \langle B(x), u \rangle < 0.$$

De plus, on pose

$$b(x) = \|B(x)\|_m^2.$$

Le théorème A.3 de Mickael donné en annexe nous permettra de démontrer notre résultat principal sur la stabilisation en temps fini.

Théorème 5.14 ([Moulay *et al.* b]) *Le système (5.8) est $\mathcal{CL}^0-$stabilisable en temps fini avec un contrôle de classe $\mathcal{CL}^0$ si et seulement s'il existe une FLC pour le système (5.8) vérifiant la condition (5.10) avec $\alpha \in \,]0,1[$ et la propriété de petit contrôle.*

Preuve. Si le système contrôlé (5.8) est $\mathcal{CL}^0-$stabilisable en temps fini, alors le système bouclé (5.9) est stable en temps fini avec une fonction temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^0$. En utilisant la proposition 2.25, on sait qu'il existe une fonction de Lyapunov V de classe $\mathcal{CL}^\infty$ pour le système bouclé (5.9), vérifiant la condition (2.13) :

$$\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha .$$

Ceci implique que l'inégalité (5.10) est vérifiée. De plus, en utilisant le contrôle $u(x)$ et sa continuité, il est facile de voir que la FLC vérifie la propriété de petit contrôle.
Réciproquement, s'il existe une FLC $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système (5.8) vérifiant la condition (5.10), alors on définit la fonction multivaluée Φ pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$ par

$$\Phi(x) = \{v \in \mathbb{R}^m : a(x) + \langle B(x), v\rangle \leq -c(V(x))^\alpha\}.$$

Comme la fonction $v \mapsto a(x) + \langle B(x), v\rangle$ est affine, $\Phi(x)$ est un ensemble non vide, fermé et convexe de $\mathbb{R}^m$ pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$. Comme f_i appartient à la classe $\mathcal{CL}^k$ pour tout $0 \leq i \leq m$ et $V \in \mathcal{CL}^\infty(\mathcal{V}, \mathbb{R}_{\geq 0})$, $a(x) + \langle B(x), v\rangle + c(V(x))^\alpha$ est localement lipschitzienne pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$. Ainsi, on en déduit que la fonction multivaluée Φ est localement lipschitzienne sur $\mathcal{V}\setminus\{0\}$. Comme V vérifie la propriété de petit contrôle, il est montré dans [Artstein 83, Théorème 4.3] que l'on peut prolonger Φ sur $\mathcal{V}$ par $\Phi(0) = \{0\}$ et cette extension de Φ est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{V}$. On peut donc appliquer le théorème A.3 de Mickael donné en annexe pour trouver une sélection $u \in \mathcal{CL}^0(\mathcal{V}, \mathbb{R}^m)$. Ainsi V est une fonction de Lyapunov de classe $\mathcal{CL}^\infty$ pour le système bouclé (5.9) vérifiant la condition (2.13). Donc, en utilisant la proposition 2.25, on en déduit que le système (5.8) est $\mathcal{CL}^0-$stabilisable en temps fini. ■
Le théorème 5.14 nous donne un outil pour étudier la stabilisation en temps fini avec une fonction temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^0$.
Mais dans la pratique, la résolution de la stabilisation en temps fini est délicate et est généralement étudiée pour les systèmes homogènes avec un degré négatif par rapport à une dilatation. En effet, pour de tels systèmes, la stabilité en temps fini est équivalente à la stabilité asymptotique (voir [Bhat *et al.* 96, Hong 02] pour de plus amples détails). Néanmoins, si on veut utiliser une fonction de Lyapunov contrôlée pour obtenir un contrôle explicite stabilisant en temps fini, on va devoir se servir d'une version modifiée du contrôle de Sontag donné dans [Sontag 89].

Lemme 5.15 ([Moulay *et al.* b]) *S'il existe une FLC différentiable $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système contrôlé (5.8), alors il est stabilisable avec le contrôle*

$$u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$$

défini par

$$u_i(x) = \begin{cases} -b_i(x)\,\frac{a(x)+\sqrt[p]{a(x)^p+b(x)^q}}{b(x)} & \textit{si} \quad x \in \mathcal{V}\setminus\{0\} \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

où $p, q \geq 2$ sont des entiers pairs. De plus, si V vérifie la propriété de petit contrôle, alors le contrôle (5.11) est continu à l'origine.

Preuve. Supposons qu'il existe une FLC lisse $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$. Soit

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0 \text{ où } y > 0\right\}$$

et φ une fonction définie sur E par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + \sqrt[p]{x^p + y^q}}{y} & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0} \frac{x + \sqrt[p]{x^p + y^q}}{y} &= \lim_{y\to 0} \frac{x + |x| \sqrt[p]{1 + \frac{y^q}{x^p}}}{y} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{-y^{q-1}}{px^{p-1}} = 0, \end{aligned}$$

φ est continue sur E. Comme V est une FLC, on sait que $(a(x), b(x)) \in E$ pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$. Donc, on définit le contrôle par $u_i(x) = -b_i(x)\,\varphi(a(x), b(x))$. $u(x)$ est continue sur $\mathcal{V}\setminus\{0\}$ et on obtient pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$

$$\left\langle \nabla V(x), f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i(x) \right\rangle = -\sqrt[p]{a(x)^p + b(x)^q} < 0.$$

Donc, V est une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (5.9), et en utilisant le théorème de Lyapunov, on sait que l'origine du système bouclé (5.9) est asymptotiquement stable.
La preuve concernant la stabilisation utilisant la propriété de petit contrôle est similaire à celle donnée dans [Sontag 89, Théorème 1]. ■

Proposition 5.16 ([Moulay *et al.* b]) *S'il existe une FLC différentiable $V : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour le système contrôlé (5.8) vérifiant la propriété de petit contrôle et pour tout $x \in \mathcal{V}$,*

$$\sqrt[p]{a(x)^p + b(x)^q} \geq cV(x)^\alpha$$

où $p, q \geq 2$ sont des entiers pairs, et où $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$, alors le système (5.8) est $\mathcal{CL}^0-$stabilisable en temps fini avec le contrôle continu (5.11).

Preuve. La stabilité asymptotique vient du lemme 5.15. E. Sontag montre dans [Sontag 89, Théorème 1] que si V vérifie la propriété de petit contrôle alors le contrôle (5.11) est continu à l'origine. L'inégalité

$$\begin{aligned}\left\langle \nabla V(x), f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x)u_i(x) \right\rangle &= -\sqrt[p]{a(x)^p + b\,(x)^q} \\ &\leq -cV(x)^\alpha\end{aligned}$$

assure la convergence en temps fini d'après la proposition 2.24. ■

Remarque 5.17 *La proposition 5.16 est encore vraie pour un système contrôlé (5.8) simplement continu. La preuve de la convergence en temps fini est alors donnée par un résultat de Haimo dans [Haimo 86, Proposition 1].*

Exemple 5.18 ([Moulay *et al.* b]) *Soit* $0 < \beta, \gamma < 1$ *tels que* $4\,(\beta+\gamma) < \beta + 1$ *(par exemple* $\beta = \gamma = \frac{1}{8}$*) et considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\left|x_1\right|^\gamma sgn(x_1) - x_2 \\ \dot{x}_2 = \left|x_1\right|^\beta sgn(x_1)\left|x_2\right|^{1-\beta} + \left|x_2\right|^\gamma u \end{cases}.$$

En prenant la fonction $V(x) = \left|x_1\right|^{\beta+1} + \left|x_2\right|^{\beta+1}$ *de classe* C^1*, on obtient*

$$\begin{aligned} a\,(x) &= -\,(\beta+1)\left|x_1\right|^{\beta+\gamma} \\ B\,(x) &= (\beta+1)\left|x_2\right|^{\beta+\gamma} sgn(x_2) \\ b\,(x) &= (\beta+1)^2\left|x_2\right|^{2(\beta+\gamma)}. \end{aligned}$$

Comme $\inf\limits_{u\in\mathbb{R}}\left[a\,(x) + B\,(x)\,u\right] < 0$ *pour* $x \neq 0$*,* V *est une FLC pour le système. De plus, le fait que*

$$\frac{a\,(x)}{\left|B\,(x)\right|} = \frac{-\left|x_1\right|^{\beta+\gamma}}{\left|x_2\right|^{\beta+\gamma}}$$

et la remarque 1.35 impliquent que V *vérifie la propriété de petit contrôle. On veut utiliser le contrôle (5.11) avec* $(p,q) = (4,2)$*. On obtient*

$$\begin{aligned} a\,(x)^4 + b\,(x)^2 &= (\beta+1)^4\left(\left|x_1\right|^{4(\beta+\gamma)} + \left|x_2\right|^{4(\beta+\gamma)}\right) \\ &\geq (\beta+1)^4\left(\left|x_1\right|^{\beta+1} + \left|x_2\right|^{\beta+1}\right)^{\frac{4(\beta+\gamma)}{\beta+1}},\ 0 < \tfrac{4(\beta+\gamma)}{\beta+1} < 1 \\ &\geq (\beta+1)^4\,V\,(x)^{\frac{4(\beta+\gamma)}{\beta+1}}. \end{aligned}$$

Donc $\sqrt[4]{a(x)^4 + b\,(x)^2} \geq (\beta+1)\,V\,(x)^\alpha$ *avec* $\alpha = \frac{\beta+\gamma}{\beta+1} < 1$*, en utilisant la proposition 5.16 on sait que le système est stabilisable en temps fini avec le contrôle continu*

$$u\,(x) = \frac{\left|x_1\right|^{\beta+\gamma} - \sqrt[4]{\left|x_1\right|^{4(\beta+\gamma)} + \left|x_2\right|^{4(\beta+\gamma)}}}{\left|x_2\right|^{\beta+\gamma} sgn(x_2)}.$$

5.4 Cas des systèmes linéaires à retard

5.4.1 Extension de la transformation d'Artstein et application à la stabilisation en temps fini

Rappelons la définition de la stabilisation en temps fini pour les systèmes linéaires à retard.

Définition 5.19 *Le système contrôlé*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t - h_i), \quad t \geq 0 \tag{5.12}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, A est une matrice $n \times n$, les matrices B_i sont de dimensions $n \times m$ et les h_i sont des constantes positives, est ***stabilisable en temps fini*** *s'il existe un contrôle u dépendant du temps et de l'état tel que :*

1. $u(0) = 0$,
2. *l'origine du système bouclé*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{i=0}^{k} B_i u(t - h_i)$$

est stable en temps fini.

Si $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$, le système est dit globalement stabilisable en temps fini.

Pour des raisons de lisibilité, on note $u(t)$ le contrôle même si celui-ci dépend de l'état du système, ceci afin de pouvoir facilement calculer $u(t - h_i)$. De tels systèmes sont généralement utilisés pour représenter des retards introduits par les lignes de transmission comme par exemple en téléopération ou pour des systèmes contrôlés par réseau (voir [Bushnell 01]). Si

$$y(t) = x(t) + \sum_{i=0}^{k} \mathbf{L}_{(A,C_i)}^{h_i} u_t$$

où $u_t : [-h, 0] \to \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{L}_{(A,C)}^{h} f = \int_{-h}^{0} e^{A(-h-s)} C f(s)\, ds$$

et $C_i = e^{-Ah_i} B_i$, alors

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \tag{5.13}$$

avec $B = \sum_{i=0}^{k} C_i$.
Maintenant, on peut donner une extension à des contrôles non linéaires du modèle de réduction de Artstein donné dans [Artstein 82, Théorème 6.1].

Lemme 5.20 ([Moulay *et al.* a]) *Si le système (5.13) est stabilisable (respectivement stabilisable en temps fini) par un contrôle* $u(t) = k(t) f(y(t))$ *avec* $k(t)$ *borné et* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continue telle que* $f(0) = 0$ *et*

$$\|f(x)\|_m \leq \alpha(\|x\|_n),$$

où α *est une fonction de classe* $\mathcal{K}$ *alors le système (5.12) est stabilisable (respectivement stabilisable en temps fini) par le contrôle*

$$u(t) = k(t) f\left(x(t) + \sum_{i=0}^{k} \mathbf{L}^{h_i}_{(A,C_i)} u_t\right).$$

Preuve. Supposons que le système (5.13) soit stabilisable par un contrôle $u(t) = k(t) f(y(t))$ avec $k(t)$ bornée et f continue telle que $f(0) = 0$. D'abord, on peut noter que

$$\begin{aligned}
\|f \circ y_t\|_{C_m^{h_i}} &= \max_{-h_i \leq s \leq 0} \|f(y(t+s))\|_m, \\
&\leq \max_{-h_i \leq s \leq 0} \alpha(\|y(t+s)\|_n) \text{ par hypothèse,} \\
&\leq \alpha\left(\max_{-h_i \leq s \leq 0} \|y(t+s)\|_n\right) \text{ parce que } \alpha \in \mathcal{K}, \\
&\leq \alpha\left(\|y_t\|_{C_n^{h_i}}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
\|x(t)\|_n &\leq \|y(t)\|_n + \sum_{i=0}^{k} \left\| \int_{-h_i}^{0} e^{A(-h_i-s)} C_i u(t+s)\, ds \right\|_n, \\
&\leq \|y(t)\|_n + \sum_{i=0}^{k} h_i \left(\max_{-h_i \leq s \leq 0} |||e^{As}|||\right) \; |||C_i||| \left(\max_{-h_i \leq s \leq 0} |u_t(s)|\right), \\
&\leq \|y(t)\|_n + \sum_{i=0}^{k} h_i \; |||e^{A\cdot}|||_{C_n^{h_i}} \; |||C_i||| \; \|u_t\|_{C_m^{h_i}}, \\
&\leq \|y(t)\|_n + \sum_{i=0}^{k} h_i \; |||e^{A\cdot}|||_{C_n^{h_i}} \; |||C_i||| \; \|k\|_\infty \; \|f \circ y_t\|_{C_m^{h_i}}, \\
&\leq \|y(t)\|_n + \sum_{i=0}^{k} h_i \; |||e^{A\cdot}|||_{C_n^{h_i}} \; |||C_i||| \; \|k\|_\infty \; \alpha\left(\|y_t\|_{C_n^{h_i}}\right).
\end{aligned}$$

La caractérisation de la stabilité asymptotique donnée par exemple dans [Khalil 96, Lemme 4.5] conduit au fait que $y(t)$ tend asymptotiquement vers l'origine implique que $x(t)$ tend asymptotiquement vers l'origine. Cette preuve est aussi vraie pour la stabilité en temps fini. ■

Maintenant, nous allons développer la stabilisation en temps fini des systèmes scalaires à retard. Considérons le système

$$\dot{y} = ay + bu, \quad y, u \in \mathbb{R}$$

avec $b \neq 0$. Ce système est stabilisable en temps fini par le contrôle $u = \frac{-ay-\varphi_\alpha(y)}{b}$ avec $0 < \alpha < 1$ et

$$T_0\left(y\left(t\right)\right) = \frac{\left|y\left(0\right)\right|^{1-\alpha}}{1-\alpha} \tag{5.14}$$

(voir [Haimo 86]). En utilisant le lemme 5.20 avec $b = b_0 + b_1 e^{-ah}$, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 5.21 ([Moulay *et al.* a]) *Soit $a, b_i \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq i \leq k$, le système*

$$\dot{x}\left(t\right) = ax\left(t\right) + \sum_{i=0}^{k} b_i u\left(t - h_i\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

est stabilisable en temps fini avec le contrôle

$$u\left(t\right) = \tfrac{-1}{b}\left(y\left(t\right) + \varphi_\alpha\left(y\left(t\right)\right)\right)$$

où $y\left(t\right) = x\left(t\right) + \sum_{i=0}^{k} \mathbf{L}_{(a,c_i)}^{h_i} u_t$ avec $c_i = b_i e^{-ah_i}$ et $b = \sum_{i=0}^{k} c_i$. De plus, la fonction temps d'établissement vérifie

$$T_0\left(x_t\right) \leq \frac{\left|y\left(0\right)\right|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \max_{0\leq i\leq k} h_i.$$

Preuve. La seule chose que nous ayons à prouver est que $T_0\left(x_t\right) \leq \frac{|y(0)|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \max\limits_{0\leq i\leq k} h_i$. On sait d'après l'équation 5.14 que

$$y\left(t\right) = x\left(t\right) + \sum_{i=0}^{k} \mathbf{L}_{(a,c_i)}^{h_i} u_t$$

atteint l'origine en temps fini $T_0\left(y\left(t\right)\right) = \frac{|y(0)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, ainsi

$$x\left(t\right) = -\sum_{i=0}^{k} \mathbf{L}_{(a,c_i)}^{h_i} u_t$$

pour tout $t \geq \frac{|y(0)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Dans le même temps, $u\left(t\right) = \frac{-1}{b}\left(y\left(t\right) + \varphi_\alpha\left(y\left(t\right)\right)\right) = 0$ pour tout $t \geq \frac{|y(0)|^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. Ainsi,

$$\mathbf{L}_{(a,c_i)}^{h_i} u_t = \int_{-h_i}^{0} e^{a(-h_i-s)} c_i u\left(t+s\right) ds$$

s'annule pour tout $t \geq \frac{|y(0)|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + h_i$. Comme ceci est vrai pour tout $0 \leq i \leq k$, on en déduit que

$$T_0(x_t) \leq \frac{|y(0)|^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \max_{0 \leq i \leq k} h_i.$$

■

Donnons un exemple de la proposition (5.21).

Exemple 5.22 *En utilisant la proposition (5.21), on sait que le système*

$$\dot{x}(t) = x(t) + e^h u(t-h)$$

est stabilisable en temps fini par le contrôle

$$u(t) = -y(t) - \varphi_a(y(t))$$

avec $y(t) = x(t) + \mathbf{L}^h_{(1,1)} u_t$. *La figure 5.2 nous donne une simulation de ce système.*

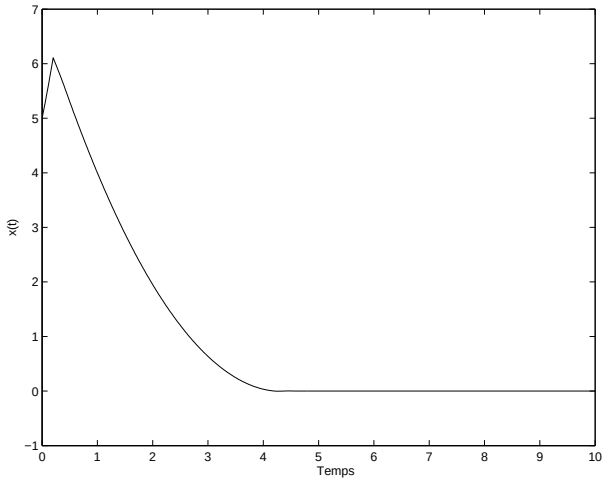

FIG. 5.2 – Simulation avec $h = 0.2$ et $u(t) = 0$ pour $t < 0$

5.4.2 Perspectives utilisant la transformation de Fiagbedzi et Pearson

Dans cette partie, nous allons utiliser le modèle de réduction de Fiagbedzi et Pearson (voir [Fiagbedzi *et al.* 86]) dans le cadre de l'étude de la stabilité en temps fini. Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-r) + B_0 u(t) + B_1 u(t-h) \qquad (\mathcal{S})$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, (A_0, A_1) sont deux matrices $n \times n$, (B_0, B_1) sont des matrices $n \times m$, $t \geq 0$, h et r sont des constantes. On utilise la notation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}(\nu_0) &= \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) \geq -\nu_0\} \\ \sigma(\mathcal{S}) &= \left\{s \in \mathbb{C} : \det\left[sI - A_0 - e^{-rs}A_1\right] = 0\right\} \\ \sigma_{\nu_0}(\mathcal{S}) &= \{s \in \mathbb{C} : s \in \sigma(\mathcal{S}) \text{ et } \mathrm{Re}(s) \geq -\nu_0\} \end{aligned}$$

où $\sigma_{\nu_0}(\mathcal{S})$ est l'ensemble des valeurs propres instables du système $(\mathcal{S})$. Le système $(\mathcal{S})$ est **spectralement stabilisable avec une marge** ν_0 si

$$rang\left[sI - A_0 - e^{-rs}A_1 | B_0 + e^{-hs}B_1\right] = n$$

pour tout $s \in \mathbb{C}(\nu_0)$.
Supposons que l'équation

$$\begin{cases} A = A_0 + e^{-Ar}A_1 \\ B = B_0 + e^{-Ah}B_1 \end{cases}$$

admette une solution $\left(\tilde{A}, \tilde{B}\right)$ telle que

$$\sigma_{\nu_0}(\mathcal{S}) \subseteq \sigma\left(\tilde{A}\right),$$

alors on peut considérer le changement de coordonnées

$$z(t) = x(t) + \mathbf{L}^r_{(\tilde{A},A_1)}x_t + \mathbf{L}^h_{(\tilde{A},B_1)}u_t$$

et le système

$$\dot{z}(t) = \tilde{A}z(t) + \tilde{B}u(t). \tag{5.15}$$

Le lemme suivant est une extension du modèle de réduction de Fiagbedzi et Pearson donné dans [Fiagbedzi *et al.* 86] qui montre que tout contrôle non linéaire $u(t) = k(t)f(z(t))$ stabilisant le système (5.15), stabilise le système $(\mathcal{S})$ avec une marge de ν_0. Cela signifie que le spectre du système bouclé n'a pas d'élément dans $\mathbb{C}(\nu_0)$.

Lemme 5.23 ([Moulay *et al.* a]) *Soit $\nu_0 \geq 0$, sous les hypothèses suivantes*

1. *le système $(\mathcal{S})$ est spectralement stabilisable avec une marge ν_0,*
2. $\sigma_{\nu_0}(\mathcal{S}) \subseteq \sigma\left(\tilde{A}\right)$,
3. *le système (5.15) est stabilisable par un contrôle $u(t) = k(t)f(z(t))$ avec $k(t)$ bornée et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continue telle que $f(0) = 0$ et*

$$\|f(x)\|_m \leq \alpha(\|x\|_n),$$

où α est une fonction de classe $\mathcal{K}$

alors le système ($\mathcal{S}$) est stabilisable avec une marge ν_0 par le contrôle

$$u(t) = k(t) f\left(x(t) + \mathbf{L}^r_{(A,A_1)} x_t + \mathbf{L}^h_{(A,B_1)} u_t\right).$$

De plus, si le système (5.15) est stabilisable en temps fini, alors il existe $T_x > 0$ telle que $x(t)$ vérifie l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$x(t) = -\mathbf{L}^r_{(\tilde{A},A_1)} x_t = -\int_0^r e^{\tilde{A}(-r-s)} A_1 x(t+s)\, ds$$

pour tout $t \geq T_x$.

Preuve. Supposons que les hypothèses 1, 2 et 3 soient satisfaites. En utilisant les mêmes inégalités que celles données dans la preuve du lemme 5.20, on en déduit que

$$\left\| x(t) + \mathbf{L}^r_{(\tilde{A},A_1)} x_t \right\|_n \leq \|z(t)\|_n + h \left|\left| e^{\tilde{A}\cdot} \right|\right|_{C_n^h} \; |||B_1||| \; \|k\|_\infty \; \alpha\left(\|z_t\|_{C_n^h}\right).$$

Le fait que $z(t)$ tende asymptotiquement vers l'origine implique que $x(t) + \mathbf{L}^r_{(\tilde{A},A_1)} x_t$ tend asymptotiquement vers l'origine (voir [Khalil 96, Lemme 4.5]). Ainsi, la stabilité asymptotique de $x(t)$ se déduit du résultat suivant [Fiagbedzi *et al.* 86, Théorème 3.3]. De plus, la stabilité en temps fini du système (5.15) implique que pour toutes les solutions $x(t)$ du système ($\mathcal{S}$), il existe $T_x > 0$ tel que $x(t) + \mathbf{L}^r_{(\tilde{A},A_1)} x_t = 0$ pour tout $t \geq T_x$. ■

Ce résultat est différent de celui de la proposition 5.21. En général, il semble difficile d'obtenir la stabilisation en temps fini du système à retard ($\mathcal{S}$) en utilisant la stabilisation en temps fini du système (5.15). Néanmoins, après un temps fini, toutes les solutions du système ($\mathcal{S}$) avec le contrôle $u(t)$ vérifient une équation intégrale de Fredholm de première espèce. Une des perspectives sera d'étudier les propriétés de ces solutions dont un bilan se trouve dans [Pipkin 91]. On pourra ainsi déterminer si la stabilité en temps fini peut être obtenue sous certaines hypothèses.

5.5 Conclusion

Dans un premier temps, en utilisant les résultats donnés dans [Bhat *et al.* 00] sur la stabilité en temps fini des systèmes avec unicité à droite des solutions, nous avons réussi à résoudre le problème de la stabilisation en temps fini des systèmes affines de classe $\mathcal{CL}^k$ en utilisant une fonction temps d'établissement de classe $\mathcal{CL}^0$. Nous avons ensuite développé le contrôle de Sontag afin de construire un contrôle adapté à la stabilisation en temps fini.

Puis, nous nous sommes intéressés à la stabilité en temps fini des EDFR et la stabilisation en temps fini des systèmes linéaires à retard : nous avons donné une

condition suffisante de stabilité en temps fini pour les EDFR en utilisant les fonctionnelles de Lyapunov. En étendant le modèle de réduction de Artstein à des contrôles non linéaires, nous avons stabilisé en temps fini les systèmes linéaires scalaires retardés sur l'entrée. L'extension du modèle de réduction de Fiagbedzi et Pearson à des contrôles non linéaires nous a conduits à l'obtention d'une équation intégrale de Fredholm de première espèce pour les systèmes linéaires scalaires retardés sur l'entrée et l'état.

Chapitre 6

Equations différentielles ordinaires non autonomes : une approche par les fonctions de Lyapunov contrôlées

6.1 Introduction

Dans le chapitre 5, nous avons étudié le problème de la stabilisation en temps fini des systèmes décrits par des équations différentielles non autonomes. Dans ce nouveau chapitre, nous voulons élargir notre étude des équations différentielles non autonomes en nous penchant sur le problème plus général de la stabilisation asymptotique à l'aide des fonctions de Lyapunov contrôlées. Il existe deux motivations principales à cette étude. D'abord, à notre connaissance, aucune étude complète de ce problème n'apparaît clairement dans la littérature. Ensuite, les conditions d'obtention de la stabilisation en temps fini à l'aide des fonctions de Lyapunov vues au chapitre 5 sont plus contraignantes que celles que nous allons rencontrer pour la stabilisation asymptotique.
Le problème de la contrôlabilité asymptotique utilisant des contrôles dépendant du temps est entièrement résolu pour les systèmes non autonomes dans [Albertini *et al.* 97] et [Albertini *et al.* 99]. Il y est montré que la contrôlabilité asymptotique est équivalente à l'existence d'une fonction de Lypaunov contrôlée (FLC) non lisse. Nous allons traiter dans ce chapitre le problème de la stabilisation des systèmes non autonomes utilisant des contrôles continus dépendant du temps. Un des principaux objectifs de ce chapitre est de montrer la différence qu'il peut y avoir entre les systèmes autonomes et non autonomes.
Le théorème 1.37 d'Artstein prouve, pour les systèmes affines autonomes que l'existence d'une FLC lisse est équivalente à l'existence d'un retour d'état continu. Pour les systèmes affines, Sontag donne dans [Sontag 89] une formule générale pour la construction d'une loi de contrôle utilisant une FLC. Contrairement à ce que l'on pourrait supposer, ces résultats sur la stabilisation des systèmes non autonomes ne sont pas complètement valides pour les systèmes non autonomes. Ainsi,

nous allons étendre les conditions nécessaires et suffisantes de stabilisation des systèmes affines d'Artstein en utilisant un contrôle continu dans un voisinage de l'origine. Mais, si l'on peut se passer de la continuité à l'origine du contrôle pour les systèmes autonomes, ce n'est plus le cas pour les systèmes non autonomes. Ainsi, il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes pour la "stabilisation faible" des systèmes non autonomes. Quant à la loi de contrôle de Sontag, elle n'est plus universelle pour ces systèmes. On doit lui adjoindre une condition d'uniformité. Nous avons présenté ces résultats dans [Moulay *et al.* 05d] et soumis dans [Moulay *et al.* c].

6.2 Formulation du problème

Le but de cette section est de trouver un résultat équivalent au résultat d'Artstein pour les systèmes contrôlés de la forme

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m, \tag{6.1}$$

$f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.
Supposons que l'origine soit un point d'équilibre du système contrôlé (6.1), i.e. $f(t, 0, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Sous quelles conditions le problème de stabilisation du système (6.1) peut-il être résolu ?
On associe au système (6.1) le système bouclé

$$\dot{x} = f(t, x, u(t, x)), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathcal{V}. \tag{6.2}$$

La FLCU est un outil très important pour l'étude de la stabilisation introduit par Artstein dans [Artstein 83]. On adapte ici la notion de FLC pour les systèmes non autonomes et on introduit pour cela une extension faisant appel à la notion de décrescence vue au chapitre 1.

Définition 6.1 ([Moulay *et al.* 05d]) *Une fonction continue $V : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$, ayant des dérivées partielles continues est une **fonction de Lyapunov contrôlée décrescente (FLCD)** pour le système (6.1) si :*

1. $\forall t \in \mathbb{R}, V(t, 0) = 0$,
2. *V est définie positive et décrescente,*
3. $\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{\partial V}{\partial t}(t, 0) = 0$,
4. *il existe une fonction continue définie positive W, telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$:*

$$\inf_{u \in \mathbb{R}^m} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t, x, u) \right\rangle \right] \leq -W(x) < 0.$$

Définition 6.2 *Une FLCD pour le système (6.1)* $V : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ *vérifie la* ***propriété de petit contrôle*** *si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *et tout* $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \cap \delta\mathcal{B}^n$*, il existe* $u \in \mathbb{R}^m$ *tel que :*

1. $u \in \epsilon\mathcal{B}^m$,
2. $\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x,u) \right\rangle \leq -W(x) < 0.$

6.3 Résultats théoriques

Donnons une condition nécessaire de stabilisation du système (6.1) :

Lemme 6.3 ([Moulay *et al.* 05d]) *Si le système (6.1) est stabilisable, alors il existe une FLCD lisse pour le système (6.1) qui vérifie la propriété de petit contrôle.*

Preuve. Supposons que le système (6.1) soit stabilisable par un retour d'état $u(t,x)$ qui soit défini et continu sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$. En utilisant le théorème de Kurzweil 1.12, on sait qu'il existe une fonction de Lyapunov $V : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_+$ pour le système bouclé (6.2), lisse et décrescente. Ainsi, il existe une fonction continue définie positive W telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, et tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f(t,x,u(t,x)) \right\rangle \leq -W(x) < 0.$$

De plus, comme $f(t,0,0) = 0$ et

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,0) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t,0), f(t,0,0) \right\rangle = 0,$$

on en déduit que $\frac{\partial V}{\partial t}(t,0) = 0$. Donc, V est une FLCD lisse pour le système (6.1). Comme $u(t,0) = 0$ pour tout $t \geq 0$, la continuité de $u(t,x)$ sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ donne la propriété de petit contrôle avec $u = u(t,x)$. ■

Remarque 6.4 *Contrairement au résultat d'Artstein, si le système (6.1) est faiblement stabilisable, il n'est pas possible d'étendre le système bouclé à un système continu afin de construire une FLCD avec le théorème 1.12 de Kurzweil. En effet, Artstein a utilisé dans [Artstein 83] le caractère autonome du système pour son extension. L'hypothèse de stabilisation avec un contrôle continu à l'origine est nécessaire dans le cadre des systèmes non autonomes.*

Ici, nous allons nous intéresser à la classe particulière des systèmes affines de la forme

$$\dot{x} = f_0(t,x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(t,x)u_i, \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{6.3}$$

où les $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont continues. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f_0(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si le système (6.3) est stabilisable par le contrôle $u(t, x)$ alors le système bouclé est donné par

$$\dot{x} = f_0(t, x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(t, x) u_i(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n. \tag{6.4}$$

Soit V une FLCD pour le système (6.3). Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, on définit les termes suivants :

$$\begin{aligned}
a(t, x) &= \frac{\partial V}{\partial t}(t, x) + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x), f_0(t, x) \right\rangle \\
b_i(t, x) &= \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(t, x), f_i(t, x) \right\rangle \text{ pour } 1 \leq i \leq m \\
B(t, x) &= (b_1(t, x), ..., b_m(t, x)) \\
b(t, x) &= \sum_{i=1}^{m} b_i(t, x)^2 = \|B(t, x)\|^2
\end{aligned}$$

Le théorème 6.5 est une généralisation du résultat d'Artstein [Artstein 83, Théorème 5.1] aux systèmes non autonomes. Notre preuve est radicalement différente de celle d'Artstein. Nous allons utiliser le théorème de Mickael sur les sélections continues, ce qui nous permet de donner une preuve assez simple.

Théorème 6.5 ([Moulay *et al.* 05d]) *Le système (6.3) est stabilisable si et seulement s'il existe une FLCD V pour le système (6.3) satisfaisant la propriété de petit contrôle. De plus, si les hypothèses sont valables globalement et si V est radialement non bornée alors le système (6.3) est globalement stabilisable.*

Preuve. La condition nécessaire est donnée par le lemme 6.3.
Supposons qu'il existe une FLCD V pour le système (6.3) satisfaisant la propriété de petit contrôle. Alors, il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{V}$ dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction continue définie positive W tels que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on puisse définir la fonction multivaluée $\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\} \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $(t, x) \mapsto \Phi(t, x)$ où $2^{\mathbb{R}^m}$ est la famille des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^m$ et

$$\Phi(t, x) = \{v \in \mathbb{R}^m : a(t, x) + \langle B(t, x), v \rangle \leq -W(x)\}.$$

Pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\Phi(t, x)$ est un demi-plan fermé de $\mathbb{R}^m$ défini par la fonction affine $v \mapsto a(t, x) + B(t, x) v$. Ceci implique que pour tout $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\Phi(t, x)$ est un sous-ensemble non vide fermé et convexe de $\mathbb{R}^m$. Par ailleurs, comme a, B et W sont continues, Φ est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Comme V vérifie la propriété de petit contrôle, Φ peut être prolongée sur $\mathbb{R} \times \{0\}$ par $\Phi(t, 0) = \{0\}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Φ est maintenant semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$. On peut appliquer le théorème A.3 de Mickael donné en

Annexe avec $\mathcal{X} = \mathbb{R} \times \mathcal{V}$ et $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$ pour trouver une sélection $u : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ (i.e. une fonction continue u sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ tel que $u(t,x) \in \Phi(t,x)$), prolongée par $u(t,0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. V est donc une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (6.4). Comme V est décrescente, le théorème de Lyapunov implique que le système (6.3) est stabilisable.
Finalement, le domaine de stabilité asymptotique contient l'ensemble

$$\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : V(t,x) < \min_{x \in \partial\mathcal{V}} V(t,x)\}$$

où $\partial\mathcal{V}$ est la frontière de $\mathcal{V}$. Donc, si V est radialement non bornée, la région d'attraction contient l'espace tout entier. ■
On peut noter que contrairement aux systèmes autonomes, il n'existe pas de condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation faible.

6.4 Une méthode constructive

Comme la preuve de la proposition 6.5 n'est pas constructive, on peut utiliser la construction de Sontag pour obtenir un contrôle explicite. Pour cela, on a besoin d'une FLCD pour le système (6.3) telle qu'il existe une fonction définie positive $\tilde{W} : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ ayant la propriété que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathcal{V}$,

$$a(t,x)^2 + b(t,x)^2 \geq \tilde{W}(x). \tag{6.5}$$

Sous ces conditions, on obtient un contrôle explicite donné par la formule de Sontag dans [Sontag 89].

Proposition 6.6 ([Moulay *et al.* 05d]) *Supposons que pour $1 \leq i \leq m$ les fonctions f_i soient C^k (avec $k \geq 1$). S'il existe une FLCD pour le système (6.3) qui soit C^k et qui vérifie la propriété de petit contrôle et la propriété (6.5), alors le système (6.3) est $C^{k-1}-$stabilisable. De plus, si les hypothèses sont globales et si la FLCD est radialement non bornée, alors le système (6.3) est globalement $C^{k-1}-$stabilisable.*

Preuve. Supposons qu'il existe une C^k-FLCD $V : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Soit

$$E = \left\{(p,q) \in \mathbb{R}^2 : p < 0 \text{ ou } q > 0\right\}$$

et φ définie par

$$\varphi(p,q) = \begin{cases} \dfrac{p + \sqrt{p^2+q^2}}{q} & \text{si} \quad q \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad q = 0 \end{cases}.$$

L'équation $H(p,q,z) = qz^2 - 2pz - q = 0$ est vérifiée pour $z = \varphi(p,q)$ avec $(p,q) \in E$. De plus, $\frac{\partial H}{\partial z}(p,q,z) = 2(qz - p)$ et ainsi,

$$\frac{\partial H}{\partial z}(p,q,\varphi(p,q)) = \begin{cases} 2\sqrt{p^2+q^2} & \text{si} \quad q \neq 0 \\ -2p & \text{si} \quad q = 0 \end{cases}$$

est non nul pour tout $(p,q) \in E$. Donc, le théorème des fonctions implicites assure que φ est lisse sur E. Comme V est une fonction de Lyapunov contrôlée, on sait que $(a(t,x), b(t,x)) \in E$ pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Donc, on définit le contrôle par :

$$u_i(t,x) = \begin{cases} w_i(t,x) & \text{si} \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \{0\} \end{cases} . \tag{6.6}$$

où $w_i(t,x) = -b_i(t,x)\,\varphi(a(t,x), b(t,x))$. u_i est C^{k-1} sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Avec ce contrôle, on obtient que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}, f_{u(t,x)}(t,x) \right\rangle &= a(t,x) + \sum_{i=1}^{m} b_i(t,x)\,u_i(t,x) \\ &= -\sqrt{a(t,x)^2 + b(t,x)^2} < 0. \end{aligned}$$

V vérifie la propriété de petit contrôle. On veut montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\|x\| \to 0} u(t,x) = 0.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on sait que $\frac{\partial V}{\partial x}(t,0) = 0$ et que $x \mapsto \|B(t,x)\|$ tend vers zéro. En ajoutant la propriété de petit contrôle à la remarque précédente, on a que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \cap \delta\mathcal{B}^n$, il existe $u \in \mathbb{R}^m$ tel que :

i) $\|u\|_m < \epsilon$

ii) $a(t,x) + \langle B(t,x), u \rangle < 0$

iii) $\|B(t,x)\|_m < \epsilon$.

Le second point implique que

$$|a(t,x)| < \|B(t,x)\|_m \|u\|_m < \|B(t,x)\|_m \epsilon.$$

• <u>Premier cas</u> : $a(t,x) > 0$ pour $0 < \|x\|_n < \delta$. Pour $(p,q) \in E$ tel que $q > 0$, on a :

$$\varphi(p,q) = \frac{p + \sqrt{p^2+q^2}}{q} \leq \frac{2|p| + |q|}{q} = 2\frac{|p|}{q} + 1.$$

Donc, dans ce cas :

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_m &= \|B(t,x)\|_m \varphi(a(t,x), b(t,x)) \\ &\leq \|B(t,x)\|_m \left(2\frac{\epsilon}{\|B(t,x)\|_m} + 1\right) \leq 3\epsilon.\end{aligned}$$

• <u>Second cas</u> : $a(t,x) \leq 0$ pour $0 < \|x\|_n < \delta$. On a

$$\begin{aligned}a(t,x) + \sqrt{a(t,x)^2 + b(t,x)^2} &\leq a(t,x) + |a(t,x)| + |b(t,x)| \\ &= b(t,x),\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\varphi(a(t,x), b(t,x)) = \frac{a(t,x) + \sqrt{a(t,x)^2 + b(t,x)^2}}{b(t,x)} \leq 1,$$

et donc que

$$\begin{aligned}\|u(t,x)\|_m &= \|B(t,x)\|_m \varphi(a(t,x), b(t,x)) \\ &\leq \|B(t,x)\|_m \leq \epsilon.\end{aligned}$$

Finalement, en remarquant que pour tout $(t', x') \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\|u(t', x') - u(t, 0)\|_m = \|u(t', x')\|_m,$$

on conclut que $u(t,x)$ est continu sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$.
On sait que $\frac{\partial V}{\partial t}(t, 0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, ainsi V est une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (6.4)−(6.6). En utilisant le théorème de Lyapunov, on sait que l'origine du système bouclé (6.4)−(6.6) est stable. De plus, comme V satisfait la propriété (6.5), V est une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (6.4)−(6.6) avec une dérivée définie négative. D'après le théorème de Lyapunov, l'origine du système bouclé (6.4)−(6.6) est asymptotiquement stable. De plus, V est décrescente, donc l'origine du système bouclé (6.4)−(6.6) est uniformément asymptotiquement stable.
Concernant la preuve de la stabilisation globale, il suffit de suivre celle donnée dans le théorème 6.5. ■

Remarque 6.7 *Pour la stabilisation des systèmes autonomes*

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_i(x) u_i,$$

la formule (6.6) est universelle avec $a(x) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(x), f_0(x) \right\rangle$ *et* $b_i(x) = \left\langle \frac{\partial V}{\partial x}(x), f_i(x) \right\rangle$ *pour* $1 \leq i \leq m$. *Ce n'est plus le cas pour la stabilisation des systèmes non autonomes comme on l'a vu dans la proposition 6.6. En effet, on a besoin de la propriété d'uniformité (6.5).*

Si $m = 1$*, alors la propriété de petit contrôle est équivalente à*

$$\limsup_{\|x\|_n \to 0} \frac{a(t,x)}{|B(t,x)|} \leq 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Considérons le cas des systèmes affines scalaires

$$\dot{x} = f_0(t,x) + f_1(t,x)\,u, \quad t, x, u \in \mathbb{R}.$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

1. *si* $f_1(t,x) = 0$ *et* $x \neq 0$*, alors* $x f_0(t,x) \leq -w(x)$*,*
2. $\limsup\limits_{|x|\to 0} \frac{x f_0(t,x)}{|x f_1(t,x)|} = \limsup\limits_{|x|\to 0} \frac{sgn(x)\, f_0(t,x)}{|f_1(t,x)|} \leq -w(x)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}$*,*

le système scalaire est stabilisable par le contrôle

$$u(t,x) = -\frac{x f_0(t,x) + |x| \sqrt{f_0(t,x)^2 + x^2 f_1(t,x)^4}}{x f_1(t,x)}.$$

Exemple 6.8 *Afin d'illustrer la proposition 6.6, considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \frac{2+t}{1+t} \\ \dot{x}_2 = -x_2 \frac{2+t}{1+t} + u \end{cases}$$

avec $t \geq 0$*, et la fonction* $V(x) = \frac{x_1^2 + \left(x_1^2 + x_2\right)^2}{2}$*. On obtient*

$$\begin{aligned} a(t,x) &= x_1^2 x_2 \frac{2+t}{1+t} + \left(x_1^2 + x_2\right)\left(2x_1^2 x_2 \frac{2+t}{1+t} - x_2 \frac{2+t}{1+t}\right), \\ B(x) &= x_1^2 + x_2, \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$*. Pour* $x \neq 0$*,*

$$\inf_{u \in \mathbb{R}} \left[a(t,x) + B(x)\,u\right] \leq -w(x)$$

avec

$$w(x) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 & \textit{si} \quad x_1^2 + x_2 \neq 0 \\ x_2^2 & \textit{si} \quad x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases}$$

On sait qu'il existe $W(x)$ *continue définie positive telle que* $0 < W(x) \leq w(x)$*. Ainsi* V *est une FLCD lisse pour le système. Comme*

$$a(t,x) = \frac{2+t}{1+t}\left[-x_2^2 - 2x_1^4 B(x) + 2x_1^2 B(x)^2\right],$$

la remarque 6.7 implique que V *vérifie la propriété de petit contrôle. Finalement, en utilisant l'inégalité*

$$a(t,x)^2 + b(t,x)^2 \geq \tilde{W}(x) = \begin{cases} \left(x_1^2 + x_2\right)^4 & \textit{si} \quad x_1^2 + x_2 \neq 0 \\ x_2^4 & \textit{si} \quad x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases}$$

et la proposition 6.6, on en déduit que le système est stabilisable par le contrôle continu

$$u(t,x) = \begin{cases} -\frac{\frac{2+t}{1+t}\left(x_1^2x_2+\left(x_1^2+x_2\right)\left(2x_1^2x_2-x_2\right)\right)+\sqrt{\Delta(x)}}{x_1^2+x_2} & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

où $\Delta(x) = \left[\frac{2+t}{1+t}\left(x_1^2x_2 + (x_1^2+x_2)\left(2x_1^2x_2 - x_2\frac{2+t}{1+t}\right)\right)\right]^2 + (x_1^2+x_2)^4$.

6.5 Conclusion

Nous avons donné une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation des systèmes dépendant du temps : c'est une extension du résultat d'Artstein [Artstein 83]. Puis, nous avons utilisé la formule de Sontag afin de fournir un contrôle explicite, même si celui-ci n'est plus universel. Ces résultats permettent de mettre en lumière la différence qu'il peut y avoir entre les systèmes affines autonomes et non autonomes en ce qui concerne la stabilisation par retour d'état continu. Les conditions de stabilisation asymptotique sont moins restrictives que celles que l'on a obtenues au chapitre 5 pour la stabilisation en temps fini.

Chapitre 7

Stabilisation d'équations différentielles ordinaires non affines : une méthode constructive pour les systèmes polynômiaux

7.1 Introduction

Le théorème 1.37 d'Artstein prouve, pour les systèmes affines, l'équivalence entre l'existence d'une fonction de Lyapunov contrôlée et l'existence d'un contrôle continu. De plus, Sontag donne une formule générale pour la construction d'un contrôle pour les systèmes affines en utilisant une fonction de Lyapunov contrôlée (voir [Sontag 89]).
Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la stabilisation des systèmes non affines. Nous donnerons deux conditions suffisantes de stabilisation utilisant une fonction de Lyapunov contrôlée. La première ressemble à celle qu'Artstein a obtenue dans [Artstein 83, Théorème 4.1] en exploitant une propriété de convexité. Ceci conduit à une condition suffisante pour l'existence d'un contrôle continu en dehors de l'origine. Mais la preuve ne fournit pas une construction explicite du contrôle. La deuxième condition qui utilise une propriété de robustesse est, elle, assez restrictive. C'est pourquoi on ne peut pas en général se servir de ces méthodes pour les systèmes polynomiaux en la variable de contrôle. Nous nous concentrerons donc sur cette classe de systèmes polynomiaux en la variable de contrôle (d'ordre deux et trois) afin d'obtenir un contrôle explicite. Nous avons utilisé pour notre résultat principal une fonction de Lyapunov contrôlée et les formules algébriques donnant les racines d'un polynôme afin de construire un contrôle explicite. Ensuite, nous appliquerons nos résultats à la stabilisation en temps fini. A la fin de ce chapitre, nous étudierons un exemple d'un système polynômial : c'est un système de lévitation pour lequel nous avons construit un contrôle discontinu par une méthode similaire. Les résultats suivants sont parus

dans [Moulay *et al.* 05e].
Notons $u^{[j]} = (u_1^{\alpha_1}, \ldots, u_m^{\alpha_m})$ où j et $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ sont des entiers tels que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m = j$.

Définition 7.1 *La **dérivée de Lie** de $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ le long de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est définie par*

$$\mathcal{L}_f V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \;\; \mathcal{L}_f V(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle .$$

Notons $\mathcal{CP}$ l'ensemble des fonctions $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ définies positives, continues et à dérivées partielles continues.
Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue vérifiant $f(0,0) = 0$ à laquelle on associe le système

$$\dot{x} = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } u \in \mathbb{R}^m \tag{7.1}$$

et le système bouclé

$$\dot{x} = f(x, u(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{7.2}$$

En supposant que f soit suffisamment régulière, un développement limité de cette fonction en u serait

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^{k} f_j(x) u^{[j]} + R(x,u),$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$. Si résoudre le problème de stabilisation d'un tel système est faisable dans le cas $k \leq 3$ et $R(x,u) = 0$ (voir section 7.3), cela devient compliqué au-delà.

7.2 Stabilisation à l'aide des fonctions de Lyapunov contrôlées

Artstein a décrit dans [Artstein 83, Théorème 5.1] le problème de la stabilisation des systèmes affines à l'aide des fonctions de Lyapunov contrôlées. Il y donne également une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation des systèmes non affines à l'aide de contrôles définis en théorie des mesures de probabilité (voir le théorème 1.37). Dans ce chapitre, on obtient une condition suffisante qui garantit l'existence d'un contrôle continu (sauf peut-être à l'origine) pour les systèmes non affines. Pour cela, on utilise un argument de convexité : celle de $u \mapsto \langle \nabla V(x), f(x,u) \rangle$ pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, où V est une fonction de Lyapunov contrôlée.

Proposition 7.2 ([Moulay *et al.* 05e]) *S'il existe une fonction de Lyapunov contrôlée V pour le système (7.1) vérifiant la propriété de petit contrôle telle que $u \mapsto$*

$\langle \nabla V(x), f(x,u)\rangle$ soit convexe[1] *pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$, alors le système (7.1) est stabilisable.*

Preuve. En utilisant la fonction continue définie positive $W : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par la définition 1.34 d'une fonction de Lyapunov contrôlée, on définit la fonction multivaluée $\Phi : \mathcal{V}\setminus\{0\} \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $x \mapsto \Phi(x)$ où $2^{\mathbb{R}^m}$ désignera la famille des sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^m$ par

$$\Phi(x) = \{v \in \mathbb{R}^m : \langle \nabla V(x), f(x,v)\rangle \leq -W(x)\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$, $\Phi(x)$ est un ensemble non vide, fermé et convexe. Comme V vérifie la propriété de petit contrôle, Φ peut être prolongée en 0 par $\Phi(0) = \{0\}$. Φ est alors semi-continue inférieurement sur $\mathcal{V}$. On peut appliquer le théorème A.3 de Mickael donné en annexe pour trouver une fonction continue $u : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ qui vérifie $u(x) \in \Phi(x)$. Donc, V est une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (7.2).

■

Si le système est affine en la variable de contrôle u, une fonction de Lyapunov contrôlée est toujours une fonction convexe. De plus, on peut remarquer que si $\langle \nabla V(x), f(x,u)\rangle$ est une forme quadratique s'écrivant

$$\langle \nabla V(x), f(x,u)\rangle = u^T Q(x)\, u$$

où $Q(x)$ est une fonction définie positive, alors $u \mapsto \langle \nabla V(x), f(x,u)\rangle$ est convexe. Donnons un exemple d'un système non affine faiblement stabilisable.

Exemple 7.3 *Soit le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2(u^2 - 2u) \end{cases}$$

où $u \in \mathbb{R}$. Considérons la fonction $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$. Après calculs, on a que

$$\langle \nabla V(x), f(x,u)\rangle = -x_1^2 + x_2^2(u^2 - 2u).$$

Pour $x \neq 0$, $\inf_{u\in\mathbb{R}} \langle \nabla V(x), f(x,u)\rangle < 0$, ainsi V est une fonction de Lyapunov contrôlée pour ce système. Elle vérifie la propriété de petit contrôle. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, $u \mapsto -x_1^2 + x_2^2(u^2 - 2u)$ est convexe. Donc, en utilisant la proposition 7.2, le système est stabilisable et on peut prendre pour contrôle $u(x) = \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}$.

[1] Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **convexe** sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout $(x,y) \in \Omega^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$.

Intéressons-nous maintenant aux systèmes non affines et à l'utilisation des fonctions de Lyapunov contrôlées possédant une propriété de robustesse pour les stabiliser. Considérons le système

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u + R\left(x, u\right), \tag{7.3}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et les fonctions $f_1 = (f_{1,j})_{1 \leq j \leq m}$ et R sont continues. Supposons qu'il existe $u_0 = (u_{0,1}, \ldots, u_{0,m}) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$f_0(0) + \sum_{j=1}^{m} f_{1,j}(0)u_{0,j} + R\left(0, u_0\right) = 0.$$

Associons au système initial (7.3) le système affine suivant

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} f_{1,i}(x)u_i. \tag{7.4}$$

et définissons

$$\begin{aligned} a(x) &= \mathcal{L}_{f_0} V(x) \\ b_i\left(x\right) &= \mathcal{L}_{f_i} V(x),\ 1 \leq i \leq m. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer la condition suffisante suivante pour la stabilisation du système (7.3).

Lemme 7.4 ([Moulay *et al.* 05e]) *S'il existe une fonction de Lyapunov contrôlée V pour le système affine (7.4) telle que pour tout $x \in \mathcal{V}$, et pour tout $u \in \mathbb{R}^m$,*

$$\langle \nabla V(x), R\left(x, u\right) \rangle \leq 0$$

alors les deux systèmes (7.4) et (7.3) sont faiblement stabilisables avec le même contrôle. De plus, si la fonction de Lyapunov contrôlée possède la propriété de petit contrôle, alors le système (7.3) est stabilisable.

Preuve. En utilisant la fonction continue définie positive $W : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par la définition 1.34 d'une fonction de Lyapunov contrôlée, on définit la fonction multivaluée $\Psi : \mathcal{V} \backslash \{0\} \to 2^{\mathbb{R}^m}$, $x \mapsto \Psi(x)$ par

$$\Psi(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^m : a(x) + \sum_{i=1}^{m} b_i\left(x\right) v_i \leq -W(x) \right\}.$$

Pour tout $x \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$, $\Psi(x)$ est un ensemble non vide, fermé et convexe, et Ψ est semi-continue inférieurement. On peut donc appliquer le théorème A.3 de Mickael donné en annexe pour extraire une fonction continue $u : \mathcal{V} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^m$ telle que $u(x) \in \Psi(x)$, prolongée en 0 par $u\left(0\right) = 0$. De plus, u peut être choisi

localement à valeurs relativement compactes (voir [Rifford 01]). Donc, V est une fonction de Lyapunov pour le système bouclé associée au système (7.4). Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,

$$a(x) + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\, u_i(x) + \langle \nabla V(x), R(x, u(x)) \rangle < 0.$$

Donc, V est une fonction de Lyapunov pour le système bouclé (7.3). D'après le théorème de Lyapunov, on sait que l'origine du système bouclé associé au système (7.3) est asymptotiquement stable. ■

Exemple 7.5 *Considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 - x_1 h_1(u) \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u - x_2 h_2(u) \end{cases} \tag{7.5}$$

où $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *sont définies positives. On voit que la fonction lisse*

$$V(x) = \frac{x_1^2 e^{2x_2} + x_2^2}{2}.$$

est une fonction de Lyapunov contrôlée pour le système affine

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u \end{cases}. \tag{7.6}$$

Soit $R(x, u) = (-x_1 h_1(u), -x_2 h_2(u))$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}^2$ *et tout* $u \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\langle \nabla V(x), R(x, u) \rangle = -x_1^2 e^{2x_2} h_1(u) - \left(x_2^2 x_1^2 + x_2^2\right) h_2(u) \leq 0.$$

Ainsi, on déduit du lemme 7.4 que le système (7.5) est faiblement stabilisable par le contrôle de Sontag donné dans [Sontag 89]

$$u(x) = \frac{-x_2^2 + \sqrt{x_2^4 + \left(x_1^2 e^{2x_2} + x_2\right)^4}}{x_1^2 e^{2x_2} + x_2}$$

qui stabilise aussi le système affine (7.6).

L'exemple suivant illustre le fait que le lemme 7.4 n'est généralement pas adapté aux systèmes polynômiaux en la variable de contrôle.

Exemple 7.6 *Considérons le système suivant :*

$$\dot{x} = x e^{2x} + \left(2x^2 + e^{2x}\right) u + x u^2.$$

On sait que $V(x) = \frac{x^2}{2}$ *est toujours une fonction candidate de Lyapunov pour un système autonome scalaire asymptotiquement stable. Comme* $\langle \nabla V(x), R(x, u) \rangle = x^2 u^2 \geq 0$, *le lemme 7.4 ne permet pas de stabiliser le système. Néanmoins, un tel système est stabilisé dans l'exemple 7.8 développé dans la section suivante 7.3 en utilisant une nouvelle approche.*

7.3 Systèmes polynômiaux

Aujourd'hui, la classe des systèmes polynômiaux a de nombreux usages, comme par exemple dans le domaine du contrôle de systèmes magnétiques. On rencontre deux principales difficultés dans l'utilisation des deux propositions 7.2 et 7.4. La première de ces difficultés est que le contrôle donné par la proposition 7.2 n'est pas explicite. La seconde est que la classe des systèmes stabilisables par les propositions 7.2 et 7.4 ne contient pas la classe des systèmes polynomiaux. En effet, les propriétés de convexité et de robustesse excluent une large partie de la classe des systèmes polynomiaux, comme on peut le voir dans les exemples 7.3, 7.5 et 7.6. Aussi, nous voulons donner des résultats permettant de construire des contrôles pour les systèmes polynomiaux, principalement pour les systèmes polynomiaux d'ordre deux et trois. Nous utiliserons les formules algébriques des racines d'un pôlynome afin de trouver un contrôle explicite lorsque cela est possible.

7.3.1 Systèmes polynômiaux d'ordre deux

Considérons le système plynômial

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u + f_2(x)u^2, \tag{7.7}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $f_0(0) = 0$. Pour une fonction définie positive V, introduisons :

$$\begin{aligned} a(x) &= \mathcal{L}_{f_2} V(x), \\ b(x) &= \mathcal{L}_{f_1} V(x), \\ c(x) &= \mathcal{L}_{f_0} V(x). \end{aligned}$$

D'abord, remarquons que s'il existe une fonction définie positive V telle que pour tout $x \in \mathcal{V}$,

$$b(x)^2 - 4a(x)c(x) < 0 \text{ et } a\,(x) < 0$$

alors le système (7.7) est stabilisable par n'importe quel contrôle. En effet, on sait que pour tout $x \in \mathcal{V}$ et tout $u \in \mathbb{R}$,

$$a(x)u^2 + b(x)u + c(x) < 0.$$

En particulier, le système est stable en boucle ouverte, c'est à dire avec

$$u\,(x) = 0, \;\; x \in \mathcal{V}.$$

Proposition 7.7 ([Moulay *et al.* 05e]) *S'il existe $V \in \mathcal{CP}$ tel que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $b(x)^2 - 4a(x)c(x) > 0$, $a(x) \neq 0$, alors le système (7.7) est faiblement stabilisable par le contrôle*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - 4a(x)\left(c(x) + \varphi(x)\right)}}{2a(x)} & \textit{si} \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{7.8}$$

où φ est une fonction continue définie positive telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 4a(x)\varphi(x)$. On peut par exemple choisir φ comme suit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{b(x)^2 - 4a(x)c(x)}{4\,|a(x)|} & \textit{si} \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases} . \tag{7.9}$$

Preuve. Soit φ une fonction continue sur $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, définie positive telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,

$$b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 4a(x)\varphi(x).$$

Comme $b(x)^2 - 4a(x)c(x) > 0$, on peut choisir φ comme 7.9. φ est positive si a est non nulle, ce qui est le cas par hypothèse pour x non nul. Ainsi, le contrôle défini par (7.8) vérifie la condition

$$\dot{V}(x)\Big|_{(7.7),(7.8)} = a(x)u(x)^2 + b(x)u(x) + c(x) = -\varphi(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Donc, $u\,(x)$ est un contrôle continu en dehors de l'origine qui stabilise faiblement le système. ■

Exemple 7.8 *Considérons le système*

$$\dot{x} = xe^{2x} + \left(2x^2 + e^{2x}\right) u + xu^2, \quad x \geq 0$$

et la fonction $V\,(x) = \frac{x^2}{2}$. Nous avons pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} a(x) &= x^2 \neq 0, \\ b(x)^2 - 4a(x)c(x) &= 4x^6 + x^2 e^{4x} > 0. \end{aligned}$$

Si l'on définit la fonction définie positive suivante

$$\psi\,(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\left(e^{4x} - 1\right) & \textit{si} \quad x \geq 0 \\ -\frac{1}{4e^4}x & \textit{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{4}e^{4x} & \textit{si} \quad x \leq -1 \end{cases}$$

alors $\psi\,(x) \leq \frac{e^{4x}}{4}$. $\varphi\,(x) = x^4 + \psi\,(x)$ est une fonction définie positive telle que $b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 4a(x)\varphi(x)$, i.e. telle que $\varphi(x) \leq x^4 + \frac{e^{4x}}{4}$. Ainsi, on peut appliquer la proposition 7.7 et donc

$$u(x) = \frac{-2x^3 - xe^{2x} + \sqrt{4x^6 + x^2\left(e^{4x} - 4\varphi(x)\right)}}{2x^2}$$

est un contrôle pour le système, ce qui conduit à la simulation de la figure 7.1.

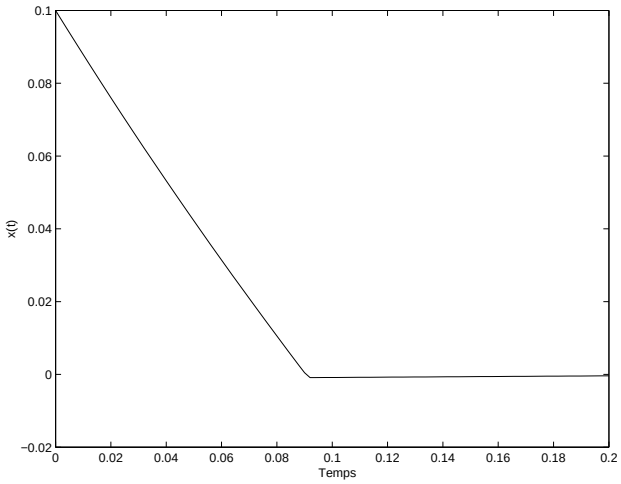

FIG. 7.1 – Simulation de $x(t)$ avec le contrôle $u(t)$

Il existe un autre cas où il est possible de construire un contrôle continu. Dans la proposition 7.7, $a(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ est une hypothèse forte. Voici un autre résultat qui permet, sous de nouvelles conditions, de s'affranchir de cette hypothèse.

Proposition 7.9 ([Moulay *et al.* 05e]) *S'il existe V une FLC pour le système (7.7) telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$,*

$$b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 4a(x)\sqrt{a(x)^2 + b(x)^4 + c(x)^2}$$

alors le système (7.7) est faiblement stabilisable en utilisant le contrôle

$$u(x) = \begin{cases} -\varphi_1(a(x), b(x)^2, c(x)) & \textit{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{7.10}$$

$$\varphi_1(a,b,c) = \begin{cases} \dfrac{b - \sqrt{b^2 - 4a\left(c + \sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)}}{2a} & \textit{si} \quad a \neq 0 \\ \dfrac{c + \sqrt{b^2+c^2}}{b} & \textit{si} \quad a = 0 \textit{ et } b \neq 0 \\ 0 & \textit{si} \quad a = b = 0 \end{cases}.$$

Preuve. Soit $(a,b,c) \in S$ avec $S = S_1 \cup S_2$ où $S_1 = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a \neq 0\}$ et $S_2 = \{(0,b,c) \in \mathbb{R}^3 : b > 0 \text{ où } c < 0\}$. Ainsi φ_1 est continue sur S. Par hypothèse, on sait que $(a(x), b(x), c(x)) \in S$. Donc, le contrôle (7.10) est un contrôle continu pour le système (7.7). En effet,

$$a(x)u(x)^2 + b(x)u(x) + c(x) = -\sqrt{a(x)^2 + b(x)^4 + c(x)^2}$$

qui est une expression définie négative. En effet, si $a(x)^2 + b(x)^4 + c(x)^2 = 0$, cela implique, en particulier, que $a(x) = 0$. Dans ce cas, on sait que si $x \neq 0$, $b(x) > 0$

ou $c(x) < 0$. On en déduit que la seule valeur qui annule $a(x)^2 + b(x)^4 + c(x)^2$ est $x = 0$. ■

Le cas des entrées multiples est beaucoup plus compliqué. Cependant dans le cas particulier suivant, on est très proche du cas précédent à une entrée. Considérons le système

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{j=1}^{m} f_{1,j}(x)u_j + \sum_{j=1}^{m} f_{2,j}(x)u_j^2, \tag{7.11}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f_{i,j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $f_0(0) = 0$. Pour une fonction définie positive V, on pose

$$\begin{aligned} a_j(x) &= \mathcal{L}_{f_{2,j}} V(x), \\ b_j(x) &= \mathcal{L}_{f_{1,j}} V(x), \\ c(x) &= \mathcal{L}_{f_0} V(x). \end{aligned}$$

Proposition 7.10 ([Moulay *et al.* 05e]) *S'il existe $V \in \mathcal{CP}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, m\}$,*

$$\begin{aligned} b_j(x)^2 - 4a_j(x)c(x) &> 0, \\ a_j(x) = \mathcal{L}_{f_{2,j}} V(x) &\neq 0, \end{aligned}$$

alors le système (7.11) est faiblement stabilisable (voir la preuve pour la construction du contrôle).

Preuve. On peut construire une fonction continue φ sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$, définie positive telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, m\}$,

$$b_j(x)^2 - 4a_j(x)c(x) \geq 4a_j(x)\varphi(x)$$

Par exemple, on peut prendre

$$\varphi(x) = \min_{1 \leq j \leq m} \frac{b_j(x)^2 - 4a_j(x)c(x)}{4\,|a_j(x)|}.$$

Le contrôle

$$u_j(x) = \begin{cases} \dfrac{-b_j(x) + \sqrt{b_j(x)^2 - 4a_j(x)\left(c(x) + \varphi(x)\right)}}{2a_j(x)} & \text{si} \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

vérifie pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$:

$$c(x) + \sum_{j=1}^{m} b_j(x)u_j(x) + \sum_{j=1}^{m} a_j(x)u_j^2(x) = -m\varphi(x).$$

Donc, $u\,(x)$ est un contrôle pour le système (7.11). ■

7.3.2 Systèmes polynômiaux d'ordre trois

Dans cette partie, nous considérons les systèmes polynomiaux

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u + f_2(x)u^2 + f_3(x)u^3, \tag{7.12}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont continues et $f_0(0) = 0$. Pour une fonction définie positive V, on définit

$$\begin{aligned}
a(x) &= \mathcal{L}_{f_3}V(x)\\
b(x) &= \mathcal{L}_{f_2}V(x)\\
c(x) &= \mathcal{L}_{f_1}V(x)\\
d(x) &= \mathcal{L}_{f_0}V(x)\\
p(x) &= \frac{3a(x)c(x) - b(x)^2}{3a(x)^2}\\
q(x) &= \frac{d(x)}{a(x)} - \frac{b(x)c(x)}{3a(x)^2} + \frac{2}{27}\frac{b(x)^3}{a(x)^3}\\
\Delta(x) &= 4p(x)^3 + 27q(x)^2.
\end{aligned}$$

Proposition 7.11 ([Moulay *et al.* 05e]) *S'il existe $V \in \mathcal{CP}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $\Delta(x) > 0$ et $a(x) \neq 0$, alors le système (7.12) est faiblement stabilisable.*

Preuve. Soit φ une fonction définite positive continue sur $\mathcal{V} \setminus \{0\}$ et

$$\tilde{q}(x) = \frac{d(x) + \varphi(x)}{a(x)} - \frac{b(x)c(x)}{3a(x)^2} + \frac{2}{27}\frac{b(x)^3}{a(x)^3}.$$

On a pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$:

$$\tilde{\Delta}(x) = 4p(x)^3 + 27\tilde{q}(x)^2 \geq \Delta(x) \geq 0.$$

En utilisant les formules de Cardan, on sait que

$$u(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si} \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \tag{7.13}$$

avec $v(x) = \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}(x)}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{q}(x)^2}{4} + \frac{p(x)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{\tilde{q}(x)}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{q}(x)^2}{4} + \frac{p(x)^3}{27}}}$ est un contrôle continu en dehors de l'origine qui stabilise faiblement le système. En effet, $u(x)$ vérifie la condition

$$\dot{V}(x)\Big|_{(7.12),(7.13)} = a(x)u(x)^3 + b(x)u(x)^2 + c(x)u(x) + d(x) = -\varphi(x)$$

pour tout $x \in \mathcal{V}$. ■
Si $c(x)^2 - 4b(x)d(x)$ est définie positive, on peut choisir φ comme suit :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{c(x)^2 - 4b(x)d(x)}{4\,|b(x)|} & \text{si} \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} .$$

Donnons un exemple élémentaire utilisant la proposition 7.11.

Exemple 7.12 *Considérons le système*

$$\dot{x} = x - 2u^3, \quad x, u \in \mathbb{R}.$$

En utilisant $V(x) = \dfrac{x^2}{2}$ *et* $\varphi(x) = x^2$*, on a pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*,* $a(x) = -2x \neq 0$*. On sait avec la proposition 7.11 que* $u(x) = \sqrt[3]{x}$ *est un contrôle pour le système. De plus, ici* u *est continu à l'origine. Cependant, la continuité à l'origine n'est pas garantie en général à cause de la forme de* $u(x)$ *donné par la formule (7.13).*

7.3.3 Systèmes polynômiaux d'ordre supérieur

Considérons le système

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u + \ldots + f_p(x)u^p, \tag{7.14}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues et $f_0(0) = 0$. Pour une fonction définie positive V, on note $a_i(x) = \mathcal{L}_{f_i} V(x)$. Le problème est de trouver V une fonction continue définie positive et φ une fonction continue définie positive en dehors de l'origine telles que pour tout $x \neq 0$,

$$\varphi(x) + a_0(x) + a_1(x)\,u + \ldots + a_p(x)\,u^p = 0.$$

Pour un système de la forme (7.14) avec $p \geq 4$, on n'a aucun espoir de trouver systématiquement une formule par radicaux pour un contrôle, car cela contredit la théorie de Galois. En revanche, comme le polynôme $P(x)[u] = \varphi(x) + a_0(x) + a_1(x)\,u + \ldots + a_p(x)\,u^p$ appartient à l'anneau $C^0(\mathbb{R})[u]$, il est parfois possible de scinder $P(x)[u]$ en deux polynômes de $C^0(\mathbb{R})[u]$ de degré inférieur. Le but principal est donc de scinder $P(x)[u]$ de la manière suivante

$$P(x)[u] = P_1(x)[u]\;\; P_2(x)[u]$$

où $1 \leq \deg_u P_1(x)[u] \leq 3$ et d'appliquer, si cela est possible, les résultats précédents pour trouver $u(x)$ tel que $P_1(x)[u(x)] = 0$. Ainsi, $u(x)$ sera un contrôle pour le système général (7.14).

Exemple 7.13 *Considérons le système*

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u + f_2(x)u^2 + f_3(x)u^3 + f_4(x)u^4 + f_5(x)u^5,$$

avec $f_0(x) = x^2e^{2x}$, $f_1(x) = 4x^3 + 2xe^{2x}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = xe^{2x}$, $f_4(x) = 4x^2 + 2e^{2x}$ *et* $f_5(x) = x$. *Si l'on utilise* $V(x) = \frac{x^2}{2}$, *on a*

$$P(x)[u] = \left(x^2u^2 + \left(4x^3 + 2xe^{2x}\right)u + x^2e^{2x}\right)(x+u).$$

On en déduit que le contrôle donné dans l'exemple 7.8 convient.

Si les a_i sont plus régulières et si φ peut être choisie plus régulière (en particulier analytique), on peut appliquer des théorèmes plus généraux sur la décomposition polynômiale (un bilan sur le sujet est présenté dans [Schinzel 82]).

7.4 Application à la stabilisation en temps fini

Le lemme 7.4 peut être adapté à la stabilisation en temps fini pour les systèmes de classe $\mathcal{CL}^k$ en utilisant le théorème 5.14. En effet, il suffit d'ajouter à la FLC la propriété suivante

$$\inf_{u\in\mathbb{R}^m}\left(a(x) + \langle B(x), u\rangle\right) \leq -c\left(V(x)\right)^{\alpha}, \tag{7.15}$$

et l'on obtient un résultat similaire au lemme 7.4 pour la stabilisation en temps fini. Plutôt que de donner une proposition technique qui ne serait qu'un condensé du lemme 7.4 et du théorème 5.14, nous préférons donner un exemple illustratif.

Exemple 7.14 *Soit* $0 < \beta, \gamma < 1$ *tels que* $4(\beta+\gamma) < \beta + 1$ *(par exemple* $\beta = \gamma = \frac{1}{8}$*) et considérons le système*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -|x_1|^{\gamma} sgn(x_1) - x_2 - x_1h_1(u) \\ \dot{x}_2 = |x_1|^{\beta} sgn(x_1)|x_2|^{1-\beta} + |x_2|^{\gamma}u - x_2h_2(u) \end{cases}.$$

où $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *sont définies positives et de classe* $\mathcal{CL}^{\infty}$. *D'après l'exemple 5.18,*

$$V(x) = |x_1|^{\beta+1} + |x_2|^{\beta+1}$$

est une fonction de Lyapunov pour le système affine associé à ce système et qui vérifie la condition 7.15. On a vu dans l'exemple 7.5 que $\langle \nabla V(x), R(x,u)\rangle \leq 0$. *On en déduit donc que le système est stabilisable en temps fini par le contrôle continu*

$$u(x) = \frac{|x_1|^{\beta+\gamma} - \sqrt[4]{|x_1|^{4(\beta+\gamma)} + |x_2|^{4(\beta+\gamma)}}}{|x_2|^{\beta+\gamma} sgn(x_2)}.$$

Les résultats que nous avons obtenus pour les systèmes pôlynomiaux peuvent aussi s'appliquer à la stabilisation en temps fini. En effet, dans la proposition 7.7, si l'on peut choisir φ de la forme $\varphi(x) = -cV(x)^{\alpha}$ avec $\alpha \in]0,1[$ et $c > 0$, alors on peut obtenir la stabilisation en temps fini.
Les contrôles que l'on a construit dans ce chapitre, ne sont pas forcément continus à l'origine, ce qui ne pose pas de problème pour la stabilisation asymptotique. En revanche, pour la stabilisation en temps fini, on aura besoin d'un contrôle continu partout. En effet, on ne peut pas prolonger un système stable en temps fini discontinu en l'origine en un système stable en temps fini continu en l'origine équivalent. Ce résultat, qui était fort pratique pour la stabilisation asymptotique, perd pratiquement tout son intérêt du fait que le contrôle doit être continu à l'origine. On peut tout de même énoncer le résultat suivant.

Proposition 7.15 *S'il existe $V \in \mathcal{CP}$, $\alpha \in]0,1[$ et $c > 0$ tels que :*

1. *pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq -4cV(x)^{\alpha} a(x)$, $a(x) \neq 0$,*
2. $u(x) = \begin{cases} \dfrac{-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - 4a(x)\left(c(x) - cV(x)^{\alpha}\right)}}{2a(x)} & \textit{si} \quad x \in \mathcal{V} \setminus \{0\} \\ 0 & \textit{si} \quad x = 0 \end{cases}$
   soit continu en l'origine

alors le système (7.7) est stabilisable en temps fini par le contrôle $u(x)$.

Preuve. Soit $V \in \mathcal{CP}$, $\alpha \in]0,1[$ et $c > 0$ tels que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $a(x) \neq 0$ et

$$b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq -4cV(x)^{\alpha} a(x).$$

Le système 7.7 avec le contrôle (7.8) vérifie la condition

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= a(x)u(x)^2 + b(x)u(x) + c(x) = -\varphi(x) \\ &= -cV(x)^{\alpha} \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. On peut alors appliquer la proposition 2.24 pour en déduire que le système bouclé est stable en temps fini. ■

7.5 Un exemple d'extension à un système discontinu

Dans cette partie, nous allons donner une méthode afin d'étendre la proposition 7.7 à des contrôles discontinus. La même méthode pourra s'appliquer à la proposition 7.11.
Considérons le système (7.7) et les ensembles

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \{x \in \mathcal{V} : a(x) \neq 0\}, \\ \mathcal{F} &= \{x \in \mathcal{V} : a(x) = 0 \text{ et } b(x) \neq 0\}, \\ \mathcal{G} &= \{x \in \mathcal{V} : a(x) = 0 \text{ et } b(x) = 0\}. \end{aligned}$$

S'il existe $V \in \mathcal{CP}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$, $b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 0$, alors on pose

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{-b(x) + \sqrt{b(x)^2 - 4a(x)\left(c(x) + \varphi(x)\right)}}{2a(x)} & \text{si} \quad x \in \mathcal{E} \setminus \{0\} \\ \frac{-c(x)-\psi(x)}{b(x)} & \text{si} \quad x \in \mathcal{F} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{si} \quad x \in \mathcal{G} \cup \{0\} \end{cases}$$

avec φ une fonction continue positive sur $\mathcal{E} \setminus \{0\}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{E} \setminus \{0\}$,

$$b(x)^2 - 4a(x)c(x) \geq 4a(x)\varphi(x),$$

et ψ une fonction continue positive sur $\mathcal{F} \setminus \{0\}$.
Si u est continue, on essaie de conclure avec le théorème de LaSalle pour les équations différentielles (voir par exemple [Khalil 96, Théorème 4.4]). Si u est discontinue, on considère l'inclusion différentielle

$$\dot{x} \in \overline{co}\left(\bigcap_{\epsilon>0} f\left(x, u\left(x + \epsilon\,\overline{\mathcal{B}}\right)\right)\right)$$

dont les solutions sont celles de Krasovskii. Puis on utilise, lorsque cela est possible, le théorème de LaSalle pour les inclusions différentielles qui se trouve dans [Shevitz *et al.* 94, Théorème 3.2] pour conclure que u stabilise le système (7.7). Donnons un exemple d'application de cette méthode à un système de lévitation magnétique.

Exemple 7.16 ([Moulay *et al.* 05e]) *Considérons une bille métallique soumise à un champ magnétique produit par une bobine. On peut contrôler l'alimentation de la bobine, ce qui en fait notre contrôle. Le but est de maintenir la bille en lévitation dans une position de référence par rapport au sol. L'application la plus connue d'un tel système est le train à sustentation magnétique. Le système de lévitation est décrit par l'équation suivante (voir [Bethoux* et al. *03] pour plus de détails sur le système)*

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 = g - \frac{k_0}{\left(l_0+e_1+x_{1ref}\right)^2} u^2 \end{cases} \tag{7.16}$$

où e_1 est l'erreur entre x_1 la position verticale de la bille par rapport au sol et x_{1ref} (une constante donnant la position verticale souhaitée), $e_2 = \dot{e}_1 = \dot{x}_1$ est la vitesse, g est la constante gravitationnelle et k_0 et l_0 sont des paramètres physiques positifs. Considérons la $\mathcal{CP}-$fonction $V(x) = \alpha x_1^2 + x_2^2$ où $0 < \alpha < 20$. On peut se restreindre à l'ensemble suivant $\mathcal{U} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) \leq \frac{g^2}{4\alpha^2}\right\}$, car en pratique $|e_1| < \frac{g}{20}$. On voit que

$$b(e)^2 - 4a(e)c(e) = \frac{16 e_2^2 k_0}{\left(l_0 + e_1 + x_{1ref}\right)^2}\left(\alpha e_1 + g\right).$$

Comme on s'est restreint à $\mathcal{U}$, on a $|e_1| \leq \frac{g}{2\alpha}$. On en déduit qu'à l'intérieur de $\mathcal{U}$ on a $b(e)^2 - 4a(e)c(e) > 0$ pour $e_2 \neq 0$. D'après la proposition 7.7, on sait que

$$v_\varphi(e) = -\frac{|l_0 + e_1 + x_{1ref}|}{e_2}\sqrt{\frac{e_2\left(e_2\left(e_1+g\right)+\varphi(e)\right)}{k_0}}$$

est un contrôle continu pour le système en dehors de la variété

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$$

où φ est une fonction continue positive en dehors de $\mathcal{M}$ telle que

$$e_2\varphi(e) \geq -4e_2^2\left(e_1+g\right).$$

Si l'on choisit

$$\varphi(e) = \beta\left|e_2\right|\left(\alpha e_1 + g\right),$$

avec β tel que $(\alpha e_1 + g)\left(1 + \beta sgn(e_2)\right) > 0$ (en pratique $0 < \beta < 1$) , alors

$$u(e) = v_{\beta|e_2|(\alpha e_1+g)}(e) = -\left|l_0 + e_1 + x_{1ref}\right| sgn(e_2)\sqrt{\frac{(\alpha e_1+g)\left(1+\beta sgn(e_2)\right)}{k_0}} \tag{7.17}$$

stabilise le système de lévitation (7.16) en dehors de $\mathcal{M}$. Le problème est que u n'est pas continu partout. Soit

$$\mathcal{SGN}(x) = \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ [-1,1] & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

on a pour tout $v \in (e_2, g - (\alpha e_1 + g)\left(1 + \beta\mathcal{SGN}(e_2)\right))$,

$$\langle \nabla V(e), v\rangle = -\beta\left|e_2\right|\left(\alpha e_1 + g\right).$$

En appliquant le théorème 1.17 de Lyapunov pour les IDO, on en déduit que le système bouclé associé au système de lévitation

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_2 \\ \dot{e}_2 \in g - (\alpha e_1 + g)\left(1 + \beta\mathcal{SGN}(e_2)\right) \end{cases}$$

est stable partout et asymptotiquement stable en dehors de la variété $\mathcal{M}$. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{S} = cl\{e \in \mathbb{R}^2 : \langle \nabla V(e), v\rangle = 0 \quad \forall v \in (e_2, g - (\alpha e_1 + g)\left(1 + \beta\mathcal{SGN}(e_2)\right))\}$$

alors $\mathcal{S} = \mathbb{R}\times\{0\}$. Le plus grand sous-ensemble invariant de $\mathcal{S}$ est $(0,0)$. En utilisant le théorème de LaSalle pour les IDO dans [Shevitz et al. *94], on en déduit que le système bouclé associé au système de lévitation est asymptotiquement stable. Donc $u(e)$ stabilise le système de lévitation et on obtient la simulation suivante pour $(\alpha, \beta) = (15, 0.01)$ sur la figure 7.2.*

Remarque 7.17 *e_1 atteint l'origine en $7s$ avec un degré de précision de l'ordre de $\pm 3.10^{-3}m$. Le temps de convergence peut être ajusté par les constantes positives (α, β).*

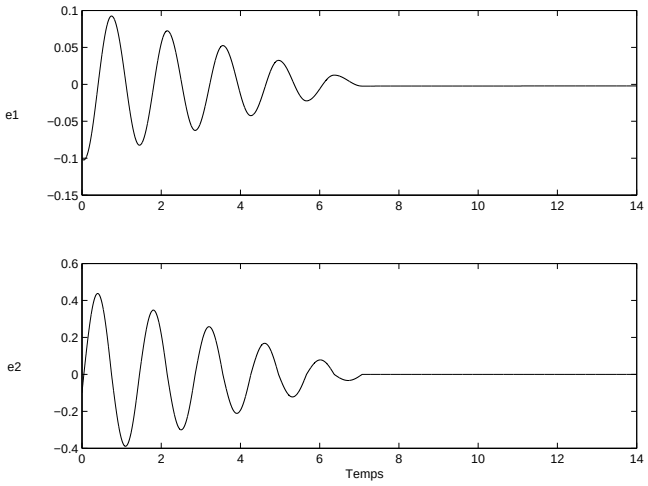

FIG. 7.2 – Simulation de (7.16) avec le contrôle (7.17)

7.6 Conclusion

Ce chapitre présente différents moyens d'étudier le problème de la stabilisation des systèmes continus non affines. Le problème de la stabilisation des systèmes affines est aujourd'hui bien connu, notamment avec la formule universelle de Sontag. En revanche, la stabilisation des systèmes non affines est largement inconnue et est un domaine de recherche très actif. Pour les systèmes polynômiaux d'ordre deux et trois en la variable de contrôle, nous avons fourni un contrôle continu. A partir de ces résultats, nous avons aussi pu donner un contrôle discontinu pour un exemple de système de lévitation magnétique.

Annexe A

Résultats fondamentaux

On donne ici le lemme de comparaison pour les EDO dont la preuve peut se trouver dans [Yoshizawa 66, Section 4] ou encore dans [Khalil 96].

Lemme A.1 (Lemme de comparaison pour les EDO) *Si l'équation différentielle scalaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

possède un flot $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, où* f *est continue, et si* $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *(*b *pouvant être infini) est une fonction continue telle que pour tout* $t \in [a, b)$*,*

$$D^+ g(t) \leq f(g(t)),$$

alors $g(t) \leq \Phi(t, g(a))$ *pour tout* $t \in [a, b)$*.*

Dans le lemme de comparaison A.1, on peut remplacer la dérivée de Dini supérieure par la dérivée de Dini directionnelle à droite supérieure appliquée en 1. Ce résultat s'obtient à partir de [Smirnov 02, lemme 8.1] et [Khalil 96, lemme 3.4] et s'utilise dans le cadre des inclusions différentielles.

Lemme A.2 (Lemme de comparaison pour les IDO) *Si l'équation différentielle scalaire*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

possède un flot $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, où* f *est continue, et si* $g : [a, b) \to \mathbb{R}$ *(*b *pouvant être infini) est une fonction continue telle que pour tout* $t \in [a, b)$*,*

$$\overline{D^+ g}(t; 1) \leq f(g(t)), \quad t \in [a, b)\,,$$

alors $g(t) \leq \Phi(t, g(a))$ *pour tout* $t \in [a, b)$*.*

Rappelons le théorème de Mickael donné dans [Mickael 56] et utilisé à maintes reprises en théorie du contrôle.

Théorème A.3 (Théorème de Mickael) *Soit $\mathcal{X}$ un espace métrique ou un espace topologique séparé et compact, $\mathcal{Y}$ un espace de Banach et Φ une fonction multivaluée de $\mathcal{X}$ à valeurs dans l'ensemble des sous-espaces non vides fermés et convexes de $\mathcal{Y}$. Si Φ est semi-continue inférieurement (respectivement localement lipschitzienne), alors Φ admet une sélection, c'est-à-dire qu'il existe une fonction continue (respectivement localement lipschitzienne) $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ telle que $f(x) \in \Phi(x)$ pour tout $x \in \mathcal{X}$.*

L'énoncé et la démonstration du théorème pour les sélections lipschitziennes se trouve dans [Aubin *et al.* 90, théorème 9.4.3].

Conclusion générale

Nous effectuons dans ce chapitre une synthèse des principales notions et résultats exposés dans ce mémoire. Nous développons ensuite les perspectives de ce travail, dont un grand nombre correspond à des voies que nous avons déjà commencées à explorer.

A.1 Synthèse

Ce mémoire est un résumé des trois années de thèse que j'ai effectuées au sein du laboratoire LAGIS sous la direction du professeur Wilfrid Perruquetti.
La première partie est consacrée à l'étude de la stabilité en temps fini qui est un cas particulier de la stabilité asymptotique où les solutions atteignent le point d'équilibre en un temps fini. Nous l'avons développé pour les trois types de systèmes non linéaires suivants : les équations différentielles ordinaires, les inclusions différentielles ordinaires et les équations différentielles fonctionnelles retardées. Cette étude théorique, qui s'appuie essentiellement sur les travaux de Haimo dans [Haimo 86] et ceux de Bhat et Bernstein dans [Bhat *et al.* 00], utilise les fonctions de Lyapunov. En effet, les fonctions de Lyapunov restent encore aujourd'hui l'un des outils les plus puissants pour réaliser une étude théorique de la stabilité des systèmes non linéaires. Pour obtenir une condition suffisante de stabilité en temps fini, on utilise en général une inégalité différentielle portant sur la dérivée de la fonction de Lyapunov le long des trajectoires. Dans un cas particulier d'EDO, nous avons pu donner une condition nécessaire et suffisante (voir le chapitre 2).
La seconde partie traite de l'étude de la stabilisation, notamment la stabilisation en temps fini. Entre les résultats théoriques que l'on obtient sur la stabilité et la mise en oeuvre de la stabilisation, il existe un pas important à franchir. L'utilisation des fonctions de Lyapunov contrôlées donnent des conditions théoriques de stabilisation en temps fini. Nous avons donc développé des méthodes pratiques qui permettent, dans certains cas, de s'affranchir de certaines contraintes liées à la théorie de Lyapunov, comme trouver une fonction de Lyapunov contrôlée "au hasard". Après l'étude de la stabilisation en temps fini, nous avons étudié la stabilisation asymptotique de systèmes non affines pôlynomiaux en la variable de contrôle, avec une application au système de lévitation magnétique. Enfin, nous

avons voulu élargir notre étude des équations différentielles non autonomes en nous penchant sur le problème plus général de la stabilisation asymptotique à l'aide des fonctions de Lyapunov contrôlées.

A.2 Perspectives

Tout le travail accompli sur la stabilité et la stabilisation en temps fini va se poursuivre avec le professeur Laurent Praly par l'étude des systèmes homogènes. En effet, la stabilisation en temps fini d'une chaîne d'intégrateurs permet d'utiliser les modes glissants d'ordre supérieur. Nous allons nous concentrer sur ce problème qui peut être résolu en rendant le système bouclé homogène.
En termes d'applications, la mise en pratique des résultats obtenus concernera principalement la robotique. Dans cette perspective, nous avons lancé avec Romain Bourdais un travail sur les systèmes hybrides et les fonctions de Lyapunov contrôlées. Enfin, un projet collaboratif est en train de se mettre en place avec le laboratoire IRCCyN de Nantes.
Durant ces trois années de thèse, j'ai aussi réalisé un travail conséquent avec Marc Baguelin de l'université de Cambridge sur les systèmes métadynamiques adaptatifs qui a abouti à l'article [Moulay *et al.* 05a]. Nous comptons poursuivre cette recherche en nous intéressant à des systèmes adaptatifs stochastiques. Pour des raisons de cohérence, je n'ai pas du tout abordé ce travail dans mon mémoire.

Bibliographie

[Agarwal *et al.* 93] R. P. Agarwal & V. Lakshmikantham. Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations. Ser. Real Anal. 6, World Scientic, Singapore, 1993.

[Albertini *et al.* 97] F. Albertini & E. D. Sontag. *Control-Lyapunov Functions for Time-Varying Set Stabilization*. In European Control Conference, 1997.

[Albertini *et al.* 99] F. Albertini & E. D. Sontag. *Continuous Control-Lyapunov Functions for Asymptotically Controllable Time-Varying Systems*. Internat. J. Control, vol. 72, no. 18, pages 1630–1641, 1999.

[Arnold 88] V. I. Arnold. Equations différentielles ordinaires. Mir, 4ème édition, Moscou, 1988.

[Artstein 82] Z. Artstein. *Linear Systems with Delayed Controls : A Reduction*. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 27, no. 4, pages 869–879, 1982.

[Artstein 83] Z. Artstein. *Stabilization with Relaxed Controls*. Nonlinear Anal., vol. 7, no. 11, pages 1163–1173, 1983.

[Aubin *et al.* 84] J. P. Aubin & A. Cellina. Differential inclusion, volume 264. Springer-Verlag, Grundlehren der mathematischen Wiissenschaften, 1984.

[Aubin *et al.* 90] J. P. Aubin & H. Frankowska. Set-valued analysis. Springer-Verlag, New-York, 1990.

[Bacciotti 92] A. Bacciotti. Local stabilizability of nonlinear control systems, volume 8. Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 1992.

[Bethoux *et al.* 03] O. Bethoux, T. Floquet & J. P. Barbot. *Advanced Sliding Mode Stabilization of a Levitation System*. In European Control Conference, Cambridge, UK, 2003.

[Bhat *et al.* 95] S. P. Bhat & D. S. Bernstein. *Lyapunov Analysis of Finite-Time Differential Equations*. In Proc. Amer. Control Conf., pages 1831–1832, Seattle, USA, June 1995. WA.

[Bhat *et al.* 96] S. P. Bhat & D. Bernstein. *Continuous, Bounded, Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrator*. In IEEE Conference on Control Applications, pages 185–190, Dearborn, MI, 1996.

[Bhat *et al.* 97] S. P. Bhat & D. S. Bernstein. *Finite-Time Stability of Homogeneous Systems*. In Proceedinds of the American Control Conference, pages 2513–2514, Albuquerque, USA, 1997.

[Bhat *et al.* 98] S. P. Bhat & D. S. Bernstein. *Continuous Finite-Time Stabilization of the Translational and Rotational Double Integrator*. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 43, no. 5, pages 678–682, may 1998.

[Bhat *et al.* 00] S. P. Bhat & D. S. Bernstein. *Finite Time Stability of Continuous Autonomous Systems*. SIAM J. Control Optim., vol. 38, no. 3, pages 751–766, 2000.

[Bhat *et al.* 05] S. P. Bhat & D. S. Bernstein. *Geometric homogeneity with applications to finite-time stability*. Math. Control Signals Systems, vol. 17, pages 101–127, 2005.

[Bushnell 01] L. G. Bushnell. *Networks and Control*. IEEE Control Systems Magazine, vol. 22, no. 1, pages 22–99, 2001.

[Chetaev 55] N. G. Chetaev. Stability of motion. Moscow GITTL, 1955. in Russian.

[Clarke *et al.* 98a] F. H. Clarke, Yu S. Ledyaev & R. J. Stern. *Asymptotic Stability and Smooth Lyapunov Function*. J. Differential Equations, vol. 149, pages 69–114, 1998.

[Clarke *et al.* 98b] F. H. Clarke, Yu S. Ledyaev, R. J. Stern & P. R. Wolenski. Nonsmooth analysis and control theory, volume 178. Graduate Texts in Mathematics, New York, springer-verlag edition, 1998.

[Coron *et al.* 91] J. M. Coron & L. Praly. *Adding an Integrator for the Stabilization Problem*. Systems Control Lett., vol. 17, pages 89–104, 1991.

[Coron *et al.* 94] J. M. Coron & L. Rosier. *A Relation Between Continuous Time-Varying and Discontinuous Feedback Stabilization*. J. Math. Systems Estim. Control, vol. 4, no. 1, pages 67–84, 1994.

[Deimling 92] K. Deimling. Multivalued differential equations. de Gruyter, Berlin, 1992.

[El'sgol'ts *et al.* 73] L. E. El'sgol'ts & S. B. Norkin. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. Academic Press, 1973.

[Fard *et al.* 01] M. P. Fard & S. I. Sagatun. *Exponential Stabilization of a Transversely Vibrating Beam Via Boundary Control*. J. Sound Vibration, vol. 240, no. 4, pages 613–622, 2001.

[Fiagbedzi *et al.* 86] Y. A. Fiagbedzi & A. E. Pearson. *Feedback Stabilization of Linear Autonomous Time Lag Systems*. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 31, no. 9, pages 847–855, 1986.

[Filippov 88] A. F. Filippov. Differential equations with discontinuous righthand sides. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1988.

[Hahn 63] W. Hahn. Theory and application of liapunov's direct method. Prentice-Hall inc., 1963. N.J.

[Hahn 67] W. Hahn. Stability of motion. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1967.

[Haimo 86] V. T. Haimo. *Finite Time Controllers*. SIAM J. Control Optim., vol. 24, no. 4, pages 760–770, 1986.

[Hale *et al.* 93] J. K. Hale & S. M. Verduyn Lunel. Introduction to functional differential equations, volume 99. Springer-Verlag, 1993.

[Hale 80] J. K. Hale. Ordinary differential equations, 2nd edition. Pure and applied mathematics XXI, Krieger, 1980.

[Hallam *et al.* 69] T. G. Hallam & V. Komkov. *Application of Liapunov's Functions to Finite Time Stability*. Rev. Roumaine Math. Pures Appl., vol. 14, no. 4, pages 495–501, 1969.

[Hong *et al.* 02] Y. Hong, Y. Xu & J. Huang. *Finite-Time Control for Robot Manipulators*. Systems Control Lett., vol. 46, pages 243–253, 2002.

[Hong 02] Y. Hong. *Finite-Time Stabilization and Stabilizability of a Class of Controllable Systems*. Systems Control Lett., vol. 46, pages 231–236, 2002.

[Kalman *et al.* 69] R. E. Kalman, P. L. Falb & M. A. Arbib. Topics in mathematical system theory. McGraw-Hill, International Series in Pure and Applied Mathematics, 1969.

[Kawski 89] M. Kawski. *Stabilization of Nonlinear Systems in the Plane*. Systems Control Lett., vol. 12, pages 169–175, 1989.

[Kawski 95] M. Kawski. *Geometric Homogeneity And Stabilization*. In Proc. IFAC Nonlinear Control Symposium, pages 164–169, Lake Tahoe, CA, 1995.

[Khalil 96] H. K. Khalil. Nonlinear systems. NJ 07458. Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996.

[Krasovskii 63] N. N. Krasovskii. Stabiliy of motion : Applications of Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay. Standford University Press, Stanford, 1963.

[Kurzweil 63] J. Kurzweil. *On the Inversion of Liapunov's Second Theorem on Stability of Motion*. Amer. Math. Soc. Transl., vol. 24, pages 19–77, 1963.

[Lam *et al.* 74] L. Lam & L. Weiss. *Finite Time Stability with Respect to Time-Varying Sets*. J. Franklin Inst., vol. 298, no. 5 and 6, pages 415–421, 1974.

[Lyapunov 92] A. M. Lyapunov. *Stability of Motion : General Problem*. Internat. J. Control, vol. 55, no. 3, pages 520–790, march 1992. Lyapunov Centenary issue.

[Massera 56] J. L. Massera. *Contributions to Stability Theory*. Anal. Math., vol. 64, pages 182–206, 1956.

[Mickael 56] E. Mickael. *Continuous Selections.* Anal. Math., vol. 63, no. 2, pages 361–382, march 1956.

[Moulay *et al.* a] E. Moulay, M. Dambrine, W. Perruquetti & N. Yeganefar. *Finite-Time Stability and Stabilization of Time-Delay Systems*. Soumis dans : IEEE Trans. Automat. Control.

[Moulay *et al.* b] E. Moulay & W. Perruquetti. *Finite Time Stability and Stabilization of a Class of Continuous Systems*. A paraître dans : J. Math. Anal. Appl.

[Moulay *et al.* c] E. Moulay & W. Perruquetti. *Stabilization of Non Autonomous Affine Systems*. Soumis dans : Nonlinear Anal.

[Moulay *et al.* 03] E. Moulay & W. Perruquetti. *Finite Time Stability of Non Linear Systems*. In IEEE Conference on Decision and Control, pages 3641–3646, Hawaii, USA, 2003.

[Moulay *et al.* 05a] E. Moulay & M. Baguelin. *Meta-Dynamical Adaptive Systems and their Applications to a Fractal Algorithm and a Biological Model*. Phys. D, vol. 207, no. 1, 2005.

[Moulay *et al.* 05b] E. Moulay & W. Perruquetti. *Finite Time Stability of Differential Inclusions*. IMA J. Math. Control Inform., vol. 22, no. 4, pages 465–475, 2005.

[Moulay *et al.* 05c] E. Moulay & W. Perruquetti. *Lyapunov-Based Approach for Finite Time Stability and Stabilization*. In IEEE Conference on Decision and Control, Seville, Spain, 2005.

[Moulay *et al.* 05d] E. Moulay & W. Perruquetti. *Non Autonomous Affine Systems : Control Lyapunov Function and the Stabilization Problem*. In 16th IFAC World Congress, Prague, Czech Republic, 2005.

[Moulay *et al.* 05e] E. Moulay & W. Perruquetti. *Stabilization of Non Affine Systems : A Constructive Method for Polynomial Systems*. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 50, no. 6, pages 520–526, 2005.

[Nikitin 94] S. Nikitin. Global controllability and stabilization of nonlinear systems, volume 8. World scientific, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, 1994.

[Orlov 03] Y. Orlov. *Finite Time Stability of Homogeneous Switched Systems*. In IEEE Conference on Decision and Control, pages 4271–4276, Hawaii, USA, 2003.

[Orlov 05] Y. Orlov. *Finite Time Stability and Robust Control Synthesis of Uncertain Switched Systems*. SIAM J. Control Optim., vol. 43, no. 4, pages 1253–1271, 2005.

[Perruquetti *et al.* 00] W. Perruquetti & S. Drakunov. *Finite Time Stability and Stabilisation*. In IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, 2000.

[Perruquetti *et al.* 02] W. Perruquetti & J. P. Barbot. Sliding mode control in engineering. Marcel Dekker Hardcover, 2002.

[Persidsky 76] K. P. Persidsky. Theory of stability of solutions of differential equations. theory of probability. Selected Works in Two Volumes : Alma-Ata, 'Nauka', 1976.

[Pipkin 91] A. C. Pipkin. A course on integral equations. Springer-Verlag, New York, 1991.

[Poincaré 81] H. Poincaré. *Mémoire sur Les Courbes Définies Par Une Équation Différentielle (1ère Partie)*. J. Math. Pures Appl., vol. 7, pages 375–342, 1881.

[Poincaré 82] H. Poincaré. *Mémoire sur Les Courbes Définies Par Une Équation Différentielle (2ème Partie)*. J. Math. Pures Appl., vol. 8, pages 251–296, 1882.

[Praly 97] L. Praly. *Generalized Weighted Homogeneity and State Dependent Time Scale for Linear Controllable Systems*. In IEEE Conference on Decision and Control, pages 4342–4347, San Diego, California USA, 1997.

[Rifford 01] L. Rifford. *On the Existence of Nonsmooth Control-Lyapunov Functions in the Sense of Generalized Gradients*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., vol. 6, pages 593–611, 2001.

[Rosier 93] L. Rosier. *Etude de Quelques Problèmes de Stabilisation*. PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1993.

[Schinzel 82] A. Schinzel. Selected topics on polynomials. University of Michigan Press, 1982.

[Shevitz *et al.* 94] D. Shevitz & B. Paden. *Lyapunov Stability of Nonsmooth System*. IEEE Trans. Automat. Control, vol. 39, no. 9, pages 1910–1914, 1994.

[Smirnov 02] G. V. Smirnov. Introduction to the theory of differential inclusions, volume 41. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 2002.

[Sontag 89] E. Sontag. *A Universal Construction of Arststein's Theorem on Nonlinear Stabilization*. Systems Control Lett., vol. 13, pages 117–123, 1989.

[Sontag 99] E. D. Sontag. *Stability and stabilization : Discontinuities and the effect of disturbances*. Proc. NATO Advanced Study Institute "Nonlinear Analysis, Differential Equations, and Control", Kluwer, pages 551–598, 1999.

[Teel *et al.* 00] A. R. Teel & L. Praly. *A Smooth Lyapunov Function from a Class-KL Estimate Involving Two Positive Semidefinite Functions*. ESAIM Control Optim. Calc. Var., vol. 5, pages 313–367, 2000.

[Wilson 69] F.W. Wilson. *Smoothing derivatives of functions and applications*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 139, pages 413–428, 1969.

[Yoshizawa 66] T. Yoshizawa. Stability theory by liapunov's second method. The Mathematical Society of Japon, 1966.

[Zubov 63] V. I. Zubov. Methods of a. m. Lyapunov and their application. Translation series (Physics), 1963. Translated from a publication of the Publishing House of Leningrad University. 1957.

Index

absolument continue, 23
attractivité, 20

classe $\mathcal{K}$, 21
classe $\mathcal{K}_\infty$, 21
convexe, 107

décrescente, 22
dérivée de Dini directionnelle
    supérieure, 23
dérivée de Dini supérieure, 21
dérivée de Lie, 106

ensemble invariant, 21

fonction de Lyapunov
    pour les EDO non autonomes, 21
fonction de Lyapunov contrôlée (FLC), 32
fonction de Lyapunov contrôlée décrescente, 96
fonction de Lyapunov contrôlée non lisse, 84
fonction multivaluée, 22
    localement lipschitzienne, 23
    semi-continue inférieurement, 22
    semi-continue supérieurement, 22

globalement asymptotiquement stable, 24

localement à valeurs relativement compactes, 31

paire lisse de Lyapunov, 25
point d'équilibre, 28
propre, 22
propriété de petit contrôle, 32

radialement non bornée, 22

stabilisation
    systèmes autonomes, 31
    systèmes non autonomes, 30
stabilisation en temps fini
    cas des EDFR, 88
    cas des EDO, 84
stabilisation faible, 31
stabilité, 20
stabilité asymptotique, 20
stabilité en temps fini
    cas des EDO autonomes, 49
    cas des EDO non autonomes, 39
    cas des IDO, 60
stabilité uniforme, 20
surface de glissement idéale, 78
système dynamique, 27
    ensemble invariant, 28
    mouvement, 27
    stabilité, 28
    stabilité asymptotique, 28
    stabilité uniforme, 28
    stabilité uniforme asymptotique, 28
    trajectoire, 27

unicité à droite des solutions, 48

Titre : UNE CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE LA STABILITÉ EN TEMPS FINI ET DE LA STABILISATION

Ce mémoire concerne l'étude de la stabilité en temps fini et de la stabilisation de systèmes dynamiques non linéaires, décrits par des équations différentielles ordinaires, des inclusions différentielles ordinaires ou des équations fonctionnelles retardées. Après un chapitre d'introduction avec quelques rappels sur la stabilité et la stabilisation des systèmes dynamiques, la première partie est consacrée à l'étude de la stabilité en temps fini qui est un cas particulier de la stabilité asymptotique où les solutions d'un système atteignent en temps fini l'équilibre de ce système. Le travail présenté utilise les fonctions de Lyapunov pour obtenir des conditions de stabilité en temps fini. La deuxième partie de ce mémoire est consacrée à la stabilisation en utilisant les fonctions de Lyapunov contrôlées. Une large part est dédiée à la stabilisation en temps fini.

Mots clés : Systèmes non linéaires, stabilité en temps fini, fonctions de Lyapunov, stabilisation en temps fini, stabilisation asymptotique, fonctions de Lyapunov contrôlées.

Title : A CONTRIBUTION TO THE STUDY OF FINITE TIME STABILITY AND STABILIZATION

This PhD thesis concerns the finite-time stability and stabilization of nonlinear dynamical systems, described by ordinary differential equations, ordinary differential inclusions or retarded functional differential equations. After a chapter of introduction with some basic notions on the stability and stabilization of dynamical systems, the first part is dedicated to the study of finite-time stability which is a particular case of asymptotic stability where the solutions of a system reach in a finite amount of time the equilibrium of this system. Our work uses the Lyapunov functions to obtain some conditions for the finite-time stability. In the second part of this PhD thesis, we study the stabilization by using control Lyapunov functions. A significant part is devoted to the finite-time stabilization.

Keywords : Non linear systems, finite time stability, Lyapunov functions, finite time stabilization, asymptotic stabilization, control Lyapunov functions.